ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цикл учебников и учебных пособий
основан в 1997 г.

Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РФ,
доктора технических наук, профессора
К.А. Пупкова

МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебник в пяти томах

ТОМ 4

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Под редакцией заслуженного деятеля науки РФ,
доктора технических наук, профессора К.А. Пупкова
и заслуженного деятеля науки РФ,
доктора технических наук, профессора Н.Д. Егупова

Издание второе, переработанное и дополненное

Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по машиностроительным
и приборостроительным специальностям

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2004

УДК 681.5:681.3 (075.8)
ББК 14.2.6
М54

Рецензенты:

1. Академик РАН *Е.П. Попов*;
2. Кафедра автоматических систем Московского института радиотехники, электроники и автоматики (заведующий кафедрой, член-корреспондент РАН *Е.Д. Теряев*)

Авторы:

д-р техн. наук, проф. *К.А. Пупков*, д-р техн. наук, проф. *Н.Д. Егупов*, д-р техн. наук, проф. *А.И. Баркин*, д-р техн. наук, проф. *Е.М. Воронов*, д-р техн. наук, проф. *А.П. Курдюков*, канд. техн. наук, доц. *В.Н. Пилишкин*, д-р техн. наук, проф. *В.М. Рыбин*, канд. техн. наук *В.Н. Тимин*, д-р техн. наук, проф. *Н.В. Фалдин*, канд. техн. наук, доц. *Н.Б. Филимонов*, инженер *М.М. Чайковский*

М54 **Методы** классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.4: Теория оптимизации систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 744 с.; ил.

ISBN 5-7038-2192-4 (Т.4)
ISBN 5-7038-2194-0

В учебнике изложены основные методы теории оптимального управления. Рассмотрены положения вариационного исчисления и его применение для решения задач оптимального управления. Изложение принципа максимума сопровождается рассмотрением задач синтеза оптимальных систем автоматического управления по различным критериям. Уделено внимание синтезу оптимальных систем при ограничениях на фазовые координаты. Рассматривается метод динамического программирования, на основе которого дается решение дискретных и непрерывных задач оптимального управления. Значительная часть учебника посвящена систематическому изложению методов математического программирования применительно к задачам оптимального управления. В нем рассмотрены способы параметризации задач управления и синтеза оптимальных линейных и нелинейных систем по различным критериям (быстродействию, расходу топлива, квадратичному критерию и др.). Подробно изложены методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых компромиссов. Большое внимание уделено численным приемам построения решений, иллюстрируемым большим количеством примеров.

Учебник является частью общего курса теории автоматического управления, читаемого отдельными разделами студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана, ТулГУ, ОУАТЭ и других вузов.

Учебник предназначен для студентов вузов. Может быть полезен аспирантам и инженерам, а также научным работникам, занимающимся автоматическими системами.

УДК 681.5:681.3 (075.8)
ББК 14.2.6

ISBN 5-7038-2192-4 (Т.4)
ISBN 5-7038-2194-0

© Пупков К.А., Егупов Н.Д. и др., 2004
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004
© Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004

175-летию МГТУ им. Н.Э. Баумана
посвящается

ОБЩЕЕ ПРЕДИСЛОВИЕ К УЧЕБНИКУ

I. Особенности учебника

Учебник издается в пяти томах и включает также задания для самостоятельной работы. Для него характерно следующее:

1. *Учебник охватывает основные фундаментальные положения, составляющие содержание методов теории автоматического управления.* *Главное достоинство университетского образования в России — упор на фундаментальные знания. Фундаментальность, интеграция образования и науки являются важнейшими факторами подготовки кадров с уровнем, обеспечивающим адаптацию к творчеству по приоритетным направлениям развития науки, включая теорию автоматического управления, с целью разработки*:

- *теоретических основ конструирования современных сложных систем автоматического управления технологическими процессами и подвижными объектами*;
- *алгоритмического обеспечения на основе последних достижений вычислительной математики*;
- *информационных технологий, позволяющих наиболее эффективно проводить автоматизацию процессов, реализуя предварительные научно-технические исследования и расчеты на ЭВМ.*

Такой подход обеспечивает освоение и широкое применение информационных технологий, проявление инициативы и самостоятельности при решении сложных технических проблем. Сказанное выше также способствует профессиональной уверенности выпускника в результатах его деятельности.

В связи с этим в учебнике рассмотрены *фундаментальные положения, являющиеся базой основных направлений теории автоматического управления* (ТАУ). *Изложение материала начинается с основных понятий и определений* (сущность проблемы автоматического управления, определение системы автоматического управления (САУ), фундаментальные принципы управления, основные виды и законы автоматического управления и др.) *и заканчивается рассмотрением содержания некоторых современных направлений теории автоматического управления.*

Поскольку курс теории автоматического управления включен в учебные планы различных инженерных специальностей и является одним из важнейших элементов общетехнического образования, *учебник может быть рекомендован студентам, заново приобретающим знания в области теории автоматического управления, и специалистам, которым приходится эти знания восстанавливать. Учебником могут пользоваться также студенты тех специальностей, для которых курс является профилирующим, определяющим квалификацию инженера.*

При изучении курса студент или специалист должен сделать выборку материала, определяемого конкретной задачей и возможностями общего плана обучения.

2. *Инженерная направленность учебника.* Поскольку учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по машиностроительным и приборостроительным специальностям, чрезвычайно важным является этап подготовки, связанный прежде всего с освоением инженерных расчетов. *Органическое сочетание фундаментальных знаний* (о чем говорилось выше) *и инженерных методов расчета и проектирования сложных*

автоматических систем обеспечивает подготовку специалистов, способных решать сложнейшие проблемы в области аэрокосмической, ракетной и атомной техники, робототехники, автомобилестроения, медицины, автоматизации производственных процессов и других современных систем и комплексов, а также наукоемких технологий.

Как указано в [91], классическую теорию автоматического управления в основном создавали инженеры для инженеров и лишь частично — математики для инженеров. Эти результаты отражены в первых трех томах и многие методы, например относящиеся к проблеме синтеза регуляторов, можно рассматривать как инженерные приемы, показавшие высокую эффективность при решении сложных проблем проектирования САУ (этот факт отражен в главе 6 третьего тома). Современная ТАУ разрабатывается в основном математиками и инженерами, имеющими высокую математическую культуру, поэтому освоение соответствующих разделов учебника требует определенной математической подготовки. В условиях непрерывного повышения уровня математической подготовки выпускников многих вузов данная проблема преодолевается достаточно просто (эти разделы изложены в 4 и 5 томах).

В основном же изложение ведется с инженерной точки зрения: подчеркиваются главные идеи, лежащие в основе методов, но не всегда приводятся строгие математические доказательства. Учитывая, что без освоения технического аспекта и глубокого знания физических процессов, протекающих в элементах САУ (особенно при решении задач синтеза регуляторов сложных систем, и это является одним из факторов, определивших популярность частотного метода), изучение методов теории автоматического управления не приводит к нужному результату, физическая и содержательная сторона дела подчеркивается в течение всего курса. Более того, значительное внимание уделено рассмотрению конкретных промышленных систем управления. Например, в главе 6 третьего тома рассмотрены системы управления теплоэнергетическими параметрами атомных электростанций, системы управления баллистическими ракетами, высокоточным оружием, системы, используемые в противосамолетной и противоракетной обороне (ПСО и ПРО).

3. *Методы теории автоматического управления, рассмотренные в учебнике, в большинстве своем ориентированы на применение ЭВМ.* Интенсивное развитие процессов автоматизации проектирования систем автоматического управления, обусловленное развертыванием высокопроизводительных вычислительных комплексов в проектно-конструкторских организациях, перемещение центра тяжести процесса проектирования от аппаратного обеспечения к алгоритмическому и программному обеспечению приводят к необходимости разработки нового методологического обеспечения, включая соответствующие вычислительные технологии [91].

Для содержания книги характерна, в известной мере, «вычислительная окраска» изложенного материала, поскольку возможности современных ЭВМ позволяют значительно ускорить сроки проектирования САУ и, таким образом, налагают свой отпечаток на вычислительную часть ТАУ. Успех в решении поставленных задач расчета и проектирования с использованием ЭВМ зависит от многих факторов, основными из которых являются: степень адекватности математической модели системы; степень эффективности численных методов ТАУ, используемых в алгоритмическом обеспечении; наличие высококачественного программного обеспечения; от того, насколько успешно используется творческий потенциал исследователя-проектировщика. При этом решающий фактор остается за человеком, который может решать многие неформализованные задачи.

Поскольку системы автоматизированного проектирования (САПР) являются в настоящее время одним из наиболее эффективных средств повышения производительности инженерного труда и научной деятельности, сокращения сроков и улучшения качества разработок, то в соответствующих главах и приложениях отражено

содержание используемых численных методов и вычислительных схем с необходимым обоснованием.

Рассмотренное в пятитомнике методологическое обеспечение, ориентированное на применение ЭВМ, может служить базой для решения весьма сложных задач инженерного проектирования САУ.

4. В учебнике с единых позиций изложены как основные методы классической ТАУ, так и положения, определяющие содержание некоторых современных направлений теории управления. В настоящее время имеют место различные трактовки, связанные с выделением в ТАУ «классической» и «современной» теории. Некоторые из них отражены, например, в [5, 43, 68, 77, 91, 92, 106, 107].

В учебнике под современными методами понимаются методы, интенсивно развиваемые в последние два десятилетия и **в настоящее время внедряемые в практику инженерных расчетов и создания новых систем**, *включающие аппарат синтеза грубых систем автоматического управления в пространстве состояний, H_∞-теория оптимального управления, задачи оптимизации многообъектных многокритериальных систем с использованием стабильно-эффективных компромиссов, синтез систем автоматического управления методами дифференциальной геометрии (геометрический подход), использование нейрокомпьютерных управляющих вычислительных систем, основные положения теории катастроф, фракталов, хаоса, а также задачи исследования и проектирования адаптивных и интеллектуальных систем (они отражены в третьем, четвертом и пятом томах учебника).*

Таким образом, учебник охватывает наиболее важные разделы теории автоматического управления; вместе с тем он не претендует на всесторонний охват проблематики теории автоматического управления. Не затронуты такие важные направления, как инвариантность, теория чувствительности, методы и алгоритмы оценивания динамических процессов, идентифицируемость и методы и алгоритмы идентификации (отражены лишь содержание проблемы и подходы к ее решению), системы со случайной структурой, стохастические системы, теория нелинейной фильтрации и др.

5. Основное содержание и структуру учебника определил коллектив авторов, включающий представителей разных российский школ науки об управлении: К.А. Пупков (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Н.Д. Егупов (МГТУ им. Н.Э. Баумана), А.И. Баркин (Институт системного анализа РАН), И.Г. Владимиров (Университет Квинслэнда, г. Брисбэйн, Австралия), Е.М. Воронов (МГТУ им. Н.Э. Баумана), А.В. Зайцев (Военная академия РВСН им. Петра Великого), С.В. Канушкин (Серпуховский военный институт РВСН), В.Г. Коньков (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Ю.П. Корнюшин (МГТУ им. Н.Э. Баумана), В.И. Краснощеченко (МГТУ им. Н.Э. Баумана), А.П. Курдюков (Институт проблем управления РАН), А.М. Макаренков (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Л.Т. Милов (Московский государственный автомобильно-дорожный институт (МАДИ)), В.Н. Пилишкин (МГТУ им. Н.Э. Баумана), В.И. Рыбин (Московский государственный инженерно-физический институт (МИФИ)), В.И. Сивцов (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Я.В. Слекеничс (Обнинский университет атомной энергетики (ОУАТЭ)), В.Н. Тимин (совместное конструкторское бюро «Русская Авионика»), А.И. Трофимов (Обнинский университет атомной энергетики (ОУАТЭ)), Г.Ф. Утробин (Военная академия РВСН им. Петра Великого), Н.В. Фалдин (Тульский государственный университет), О.В. Шевяков (Министерство образования Российской Федерации).

II. Методические вопросы

Необходимо указать, что никакой учебник не может дать окончательных рецептов для решения широчайшего спектра задач, порожденных практикой проектирования сложных систем автоматического управления.

Изложенный в книгах материал призван служить базой, фундаментом, позволяющим с большей скоростью и эффективностью находить пути для решения задач практики.

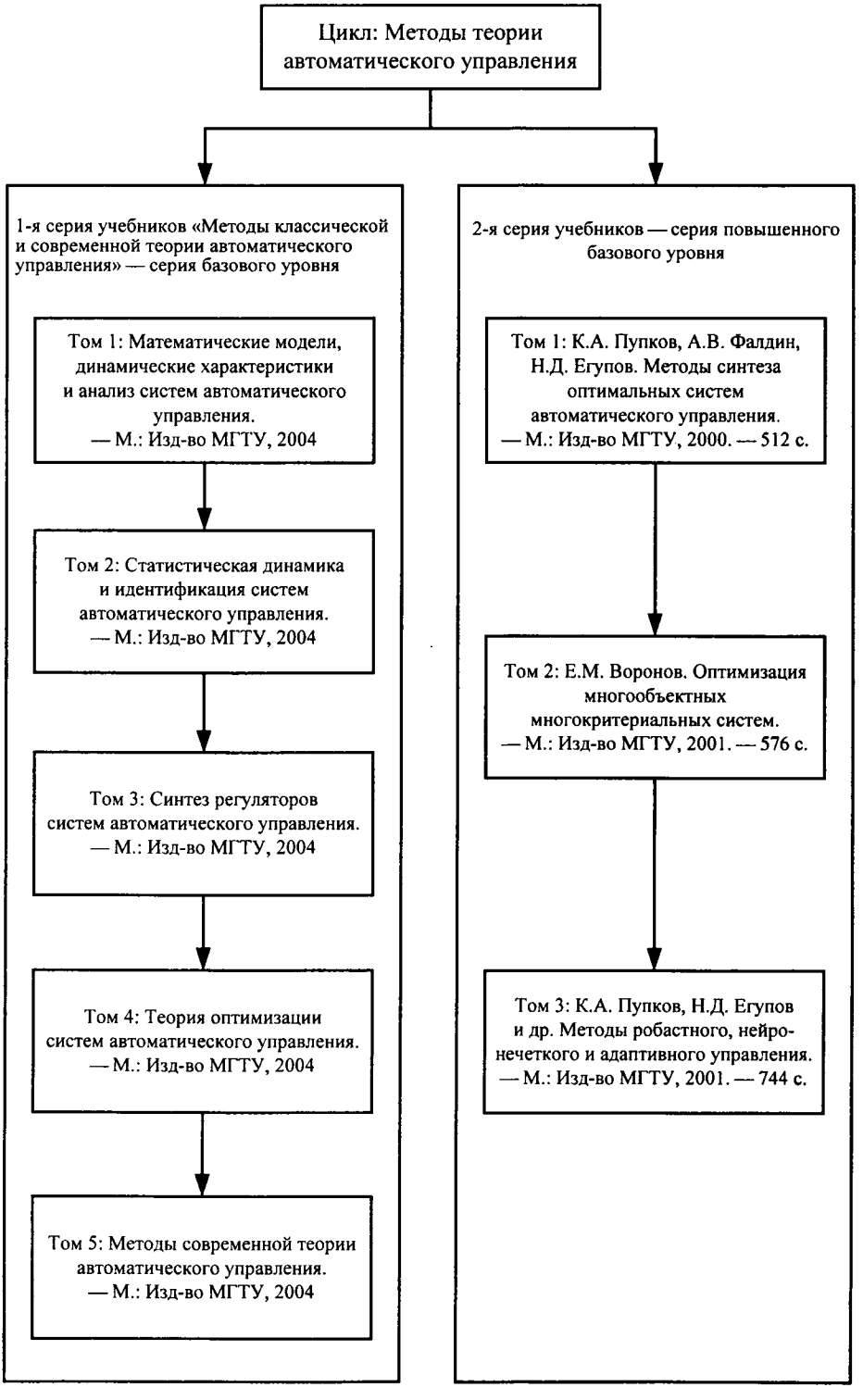


Рис. 1. Структура цикла учебников и учебных пособий «Методы теории автоматического управления»

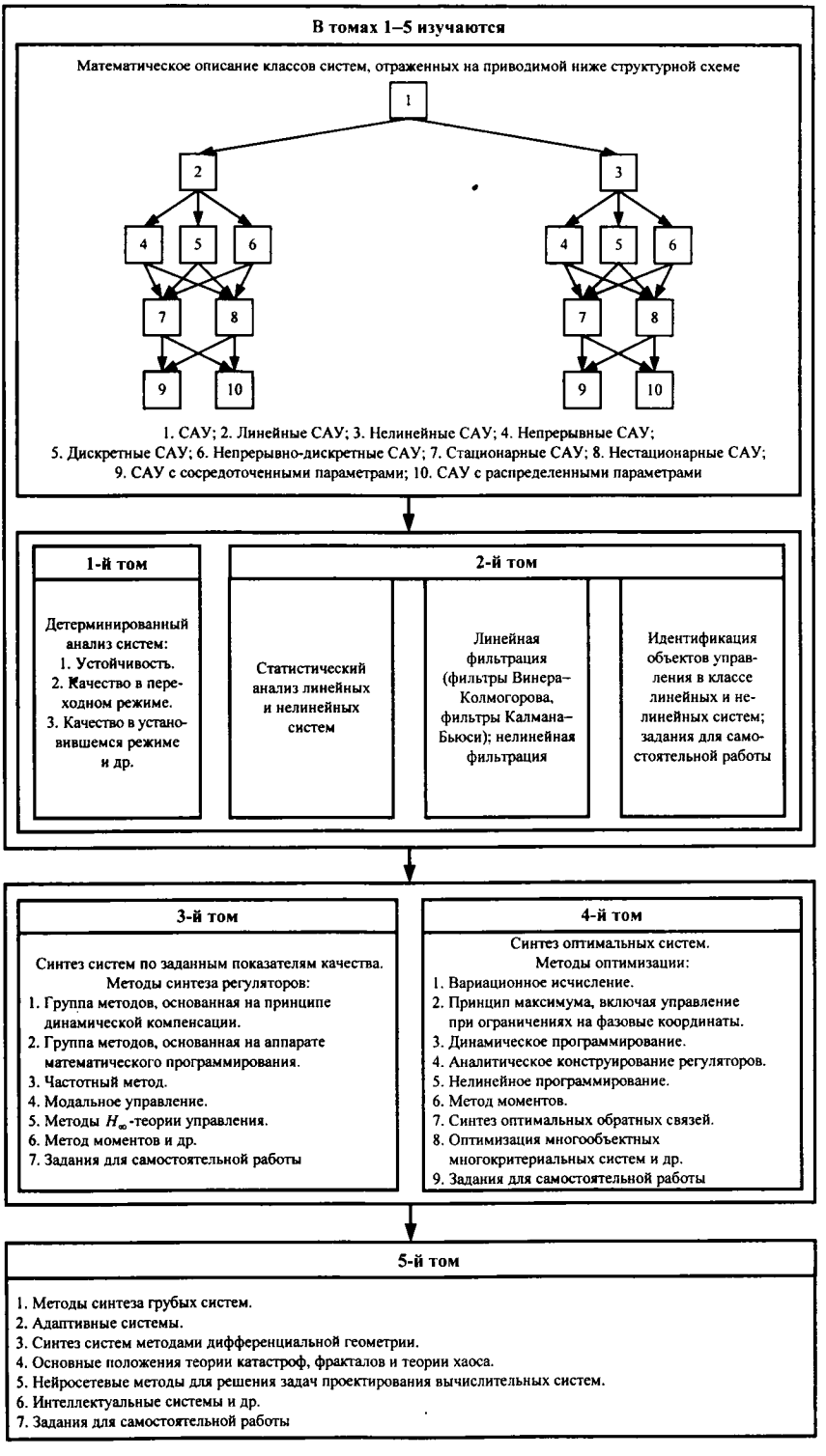


Рис. 2. Структурная схема, иллюстрирующая содержание пятитомника «Методы классической и современной теории автоматического управления» (базовый уровень)

Вместе с тем материал излагается таким образом, чтобы читателю были видны пути практического применения рассматриваемых методов. *В большинстве своем методы доведены до расчетных алгоритмов, приводятся таблицы и другой вспомогательный материал, облегчающий их применение. Положения, изложенные во всех разделах, иллюстрируются подробно рассмотренными примерами расчета и проектирования конкретных систем, которые нашли широкое применение*:

- *при решении задач управления баллистическими ракетами, зенитными управляемыми ракетами (ЗУР), в системах противосамолетной и противоракетной обороны*;
- *в атомной энергетике*;
- *в турбиностроении*;
- *при создании систем вибрационных испытаний и др.*

Весьма важным является вопрос методики изучения курса «Теории автоматического управления» с целью стать специалистом в этой области, пользуясь циклом учебных пособий и учебников, издаваемых указанным выше коллективом авторов.

Весь цикл учебников и учебных пособий можно условно разбить на две серии:

1-я серия — базовая; эта серия включает пять томов настоящего учебника.

2-я серия — базовая повышенного уровня, в которой основное внимание уделено глубокому и достаточно полному изложению методов, определяющих содержание некоторых современных направлений теории автоматического управления.

Сказанное выше иллюстрируется рис. 1.

Базовый уровень приобретается изучением предлагаемого учебника, в котором систематически изложены методы классической и современной теории управления и дано достаточно полное представление о проблематике и путях развития науки об управлении техническими объектами.

Содержание каждого из томов учебника серии базового уровня иллюстрируется рис. 2.

После освоения базового уровня можно приступить к специализации в той или другой области теории автоматического управления, изучая соответствующие тома 2-й серии, а также статьи и монографии по специальным проблемам теории управления и др.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам — академику РАН Е.П. Попову и коллективу кафедры «Автоматические системы» Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), руководимой членом-корреспондентом РАН Е.Д. Теряевым, за ценные замечания, способствовавшие улучшению содержания книги. Авторы благодарят заслуженного деятеля науки и техники РФ, д-ра техн. наук, проф. А.С. Шаталова, заслуженного деятеля науки и техники РФ, д-ра техн. наук, проф. Б.И. Шахтарина (МГТУ им. Н.Э. Баумана), которые своими советами позволили значительно улучшить структуру учебника, углубить изложение отдельных теоретических положений, улучшить окончательный вариант рукописи.

Авторы благодарят концерн «Росэнергоатом», департамент образования и науки Правительства Калужской области, а также Издательский Дом «Манускрипт» за помощь в издании учебника.

Большой объем книги и широта охваченного материала вызвали большие трудности при ее написании. Конечно, эти трудности не всегда удавалось преодолеть наилучшим образом. Читатели, вероятно, смогут высказать много замечаний и дать свои предложения по улучшению книги.

Авторы заранее признательны всем читателям, которые не сочтут за труд указать на замеченные неточности, ошибки, на пути совершенствования структуры учебника и его содержания.

К.А. Пупков
Н.Д. Егупов

ВВЕДЕНИЕ К 4-МУ ТОМУ

Настоящая книга представляет собой 4-й том учебника «Методы классической и современной теории автоматического управления», посвященный изложению содержания и методов решения проблемы оптимизации управления, состоящей в выборе такого закона управления, который, удовлетворяя четко заданной системе ограничений, обеспечивает при своей реализации оптимальное значение того или иного показателя качества работы системы.

Проблема оптимизации является одной из важнейших проблем как науки, так и повседневной человеческой деятельности, ибо человеку органически присуще стремление к достижению наилучшего (оптимального) результата. *Проблема оптимальности актуальна при решении широкого спектра задач теории управления.* Можно указать широкий спектр областей науки и техники, в которых теория оптимального управления нашла широкое применение. Примером может служить задача управления космическими летательными аппаратами (КЛА), например, управление при реализации фазы перехода КЛА с одной земной орбиты на другую, вывод КЛА на орбиту (эта задача сыграла важную роль в формировании идей и методов современной теории управления [62]), стыковка КЛА, посадка космической станции на планету.

Решение отдельных задач на отыскание минимума или максимума функционалов привело к созданию математической дисциплины — *вариационного исчисления*, предметом которого является исследование общих методов определения экстремумов функционалов. Задачи с указанным содержанием получили название *вариационных задач*. В учебнике значительное внимание уделено изложению основных положений вариационного исчисления, поскольку этот метод может быть применен для решения задач оптимального управления, когда ограничения на переменные состояния и управление отсутствуют. Годом рождения классического вариационного исчисления является 1696 г.; в этом году Иоганн Бернулли опубликовал статью «Новая задача, к разрешению которой приглашаются математики». Решение задачи было было дано И. Бернулли, У. Лейбницем, Я. Бернулли, Г. Лопиталем и И. Ньютоном (см. И. Бернулли. Избранные сочинения по математике. — М.: ГИТТЛ, 1973).

Во многих прикладных задачах на управление накладываются ограничения типа неравенств. Часто управление в таких задачах является кусочно-непрерывным (имеет разрывы 1-го рода). Метод классического вариационного исчисления — метод множителей Лагранжа — не позволяет определить число и местоположение точек разрыва, и потому в подобных случаях он не позволяет находить оптимальное управление. Для исследования таких задач академиком Л.С. Понтрягиным и его сотрудниками В.Г. Болтянским, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко в 1953 г. был сформулирован и доказан принцип максимума. Принцип максимума определяет необходимые условия минимума функционала качества в задачах оптимального управления. В случае линейной задачи оптимального быстродействия при выполнении условий нормальности принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

Примерно в это же время американский математик Р. Беллман сформулировал основные положения динамического программирования. Перед институтом, в котором работал Р. Беллман, правительством США была поставлена задача рационального размещения военных баз. Обдумывая эту задачу, Р. Беллман в начале 50-х годов сформулировал основные идеи метода оптимизации многошаговых процессов раз-

личной природы, получившего название *метода динамического программирования*. Основу этого метода составляют:

- принцип оптимальности;
- инвариантное погружение, т.е. включение исходной задачи в семейство аналогичных ей задач;
- функциональное уравнение, получаемое на основе принципа оптимальности и инвариантного погружения.

Принцип оптимальности формулируется так [68, 94]: *оптимальная стратегия обладает тем свойством, что, каковы бы ни были начальное состояние и решение на начальном этапе, решения на последующем этапе должны составлять оптимальную стратегию относительно состояния, которое получается в результате принятия решения на начальном этапе.*

Достоинством метода динамического программирования является то, что он позволяет находить оптимальное управление как функцию фазовых координат, т.е. позволяет решать задачу синтеза оптимального регулятора.

В связи с указанным выше обстоятельством необходимо привести следующее принципиально важное положение.

Оптимальное управление может быть получено в двух видах: в виде оптимальной программы и оптимальной стратегии. В первом случае управление является функцией времени. Поскольку при программном управлении система оказывается разомкнутой, то неточности в математической модели объекта управления, неконтролируемые возмущения и т.п. приводят к тому, что реальная траектория движения может отличаться от оптимальной. *Во втором варианте, как это имеет место при применении метода динамического программирования, оптимальное управление задается как функция фазовых координат, система управления является замкнутой. Таким образом, сохраняются все достоинства системы, построенной по принципу обратной связи.*

Определение оптимальной программы является более простой задачей. В этом направлении достигнут значительный прогресс. Что же касается определения оптимальной стратегии, то круг решенных задач здесь оказался существенно более узким. Однако для специалистов в области автоматического управления основной интерес представляет именно определение оптимального управления в виде функции стратегии [46, 62, 68].

Если определена оптимальная стратегия, то можно говорить о полном решении задачи оптимизации, поскольку в этом случае решается задача синтеза оптимального регулятора.

Российский ученый А.А. Фельдбаум получил первые результаты по синтезу оптимальных по быстродействию систем. Большой заслугой А.А. Фельдбаума является также то, что он одним из первых обратил внимание на специфику задачи оптимального управления, на невозможность решения этой задачи методами классического вариационного исчисления. Ему удалось привлечь внимание к задаче оптимального управления крупнейших российских математиков.

В случае линейных объектов общая теория задач оптимального управления, основанная на использовании результатов решения проблемы моментов, предложена и обоснована Н.Н. Красовским.

С формально математических позиций задачи оптимизации можно разбить на две группы: оптимизация в конечномерном пространстве, или параметрическая оптимизация, и бесконечномерная оптимизация. К последней группе относятся, прежде всего, вариационное исчисление, принцип максимума, динамическое программирование, метод моментов и др. методы.

В задаче конечномерной оптимизации речь фактически идет об исследовании на максимум и минимум функции многих переменных.

В конце пятидесятых годов и в шестидесятые годы теория оптимального управления развивалась очень бурно. В сферу ее интересов были вовлечены многие математики мира. Это позволило в кратчайшие сроки обогатить теорию рядом методов. Например, очень быстро удалось развить классическое вариационное исчисление и сделать его пригодным для решения задач оптимального управления. *И до настоящего времени основными* ***математическими методами*** *бесконечномерной оптимизации являются вариационное исчисление, принцип максимума Л.С. Понтрягина, динамическое программирование.*

Построение точных решений в задачах оптимального управления с помощью математических методов возможно лишь в немногих ситуациях. Основным же подходом к решению реальных задач является приближенная численная оптимизация [62, 68].

Проблеме, рассматривающей вычислительные методы синтеза систем оптимального управления, посвящено огромное количество работ; здесь ограничимся лишь общими понятиями, лежащими в русле методов математического программирования и параметризации задач оптимизации с применением сеточных и проекционных методов.

Метод математического программирования (МП) *решения задач оптимального управления — это направление, в котором исходную бесконечномерную задачу заменяют новой, параметризованной, относящейся к классу конечномерных задач оптимизации.* Далее переписывают все ограничения задачи в виде ограничений на значения параметризованных функций; интегралы заменяют функцией, зависящей от параметров вектора управления $\mathbf{U}(t)$ и фазового вектора $\mathbf{X}(t)$. Таким образом, метод МП включает редукцию вариационной задачи к конечномерной и ее решение разработанными методами линейного или нелинейного программирования, т.е. нахождение экстремума функции многих переменных при ограничениях типа равенств и неравенств.

Применение аппарата математического программирования и разработка численных методов для решения конкретных задач оптимального управления относится к 60-м годам. Более того, к середине 60-х годов сложилось самостоятельное направление — *численные методы оптимизации*, являющееся составной частью вычислительной математики. В рамках указанного направления разработаны численные методы для важных классов задач оптимизации, в том числе методы условной минимизации в выпуклом или невыпуклом случаях. Установлена область применимости, выяснена скорость сходимости. Одной из первых монографий, посвященных применению математического программирования для решения задач оптимального управления, является работа Д. Табака и В.С. Куо «Оптимальное управление и математическое программирование» (в русском переводе книга была опубликована издательством «Наука» в 1975 г.), публикации этих авторов увидели свет в конце 1960-х годов. Американский ученый Л.А. Заде ввел математическое понятие — *нечеткое множество*, обобщающее понятие обычного множества. При таком подходе классическое математическое программирование рассматривается, в значительной степени, как нормативная методология эффективного выбора. Использование аппарата нечетких множеств привело к разработке *метода нечеткого программирования, которое выделяет естественную множественность целей и значений, неточно определенных подцелей и ограничений.* Введено в рассмотрение *робастное программирование.* Оно означает гибкость, устойчивость алгоритма по отношению к разбросу базовых параметров. Робастная программа сравнительно малочувствительна к исходным предпо-

сылкам, но не столь эффективна, как «точная» программа, если эти предпосылки выполняются. Трудности решения задач оптимального управления определяются рядом факторов, главным из которых является размерность задачи, количество переменных и количество ограничений [62, 103].

В [103] детально рассмотрен этап разработки конструкций вычислительных алгоритмов, позволяющих довести расчеты до фактического решения задачи; рассмотрены совокупности приемов, образующих вычислительную технологию. Как указано в [103], это очень важная часть практической вычислительной работы, без грамотного оформления которой никакую идею не удастся довести до успешного расчета. ***Задачу оптимизации необходимо рассматривать не как проблему принципиальной возможности приближенного решения, а как проблему фактической эффективности алгоритма.*** В [103] рассмотрено много конкретных примеров, уделено внимание важности этапа разработки вычислительной технологии.

Приведем оценку Я.З. Цыпкина, относящуюся к методам оптимизации систем автоматического управления: «Большую популярность завоевали принцип максимума, метод динамического программирования, метод математического программирования и ряд других методов, которые вошли в *золотой фонд теории оптимального управления*».

Основные положения методов, вошедших в золотой фонд, и их применение для решения инженерных задач рассматриваются в настоящем учебнике.

Вопросам оптимального управления посвящено большое число работ. Библиография работ содержит свыше десяти тысяч наименований. Многие из указанных работ ориентированы на математиков и они очень сложны для восприятия специалистами, занимающимися разработкой систем автоматического управления, а некоторые из них вообще не рассчитаны на практическое использование.

Работ, которые ориентированы на разработчиков систем управления и студентов, обучающихся по соответствующим специальностям, сравнительно немного, и они не охватывают всех разделов теории оптимального управления. Для этой категории читателей можно порекомендовать работы [7, 42, 46, 49, 53, 62, 63, 80, 81, 93, 103, 108]. К этой группе работ относится и настоящий учебник.

Для лучшего уяснения излагаемого материала приведены примеры синтеза оптимальных систем, работающих по принципу обратной связи, с использованием принципа максимума, динамического программирования, а также двухэтапной оптимизации; рассмотрено значительное число задач по построению оптимальных программных управлений и оптимальных программ методами математического программирования с использованием описания систем автоматического управления сеточно-матричными операторами и проекционно-матричными операторами в ортонормированных базисах (глава 5); многие примеры снабжены исходными текстами программ системы *Matlab*.

В главе 6 достаточно подробно рассмотрены *методы оптимизации многокритериальных систем, составляющие содержание игровых подходов в управлении*. Как известно, простейшая декомпозиция системы приводит к набору равнозначных сильносвязанных управляемых подсистем (каналов) с собственными функциональными требованиями, что порождает многообъектную структуру с целевой многокритериальностью. Данный вариант дополняется многообъектными структурами, которые формируются в условиях конфликта и неопределенности. В целом многообъектная многокритериальная система (ММС) формирует новый класс задач оптимального управления, в котором, кроме традиционной эффективности ММС, требуется обеспечить многообъектную стабильность (уравновешивание эффективности подсистем-объектов). Требования стабильности и эффективности ММС приводят к необходимости формировать методы оптимизации управления ММС на основе теории оптималь-

ного управления и теории дифференциальных игр. Комбинация методов данных теорий приводит к задачам получения стабильно-эффективных компромиссов (СТЭК) и оптимизации управления ММС на основе СТЭК.

Студентами, аспирантами и инженерами, которые занимаются проектированием оптимальных систем, *настоящая книга может рассматриваться как учебник, по которому можно систематически изучать теорию оптимального управления, получить достаточно полное представление о предмете, проблематике и методах оптимального управления, о математических вычислительных и прикладных его аспектах.*

Соавторами отдельных разделов 4 тома являются канд. техн. наук, доц. *Ю.Е. Гагарин*, д-р техн. наук, проф. *А.А. Грешилов* (Приложение 2), инженер *А.Л. Репкин* (глава 6), инженер *Е.А. Реш* (пп. 5.1–5.3, 5.6), канд. техн. наук, доц. *В.И. Сивцов* (п. 5.3), инженер *М.Р. Фишер* (пп. 5.1–5.3, 5.6, Приложение 2), инженер *А.А. Карышев* (глава 1). Приложение 3 и раздел «Задания для самостоятельной работы студентов» написаны канд. техн. наук, доц. *В.И. Краснощеченко*.

Авторы выражают признательность сотрудникам редакционно-издательского отдела Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана *К.И. Желнову*, *С.Н. Капранову*, *К.Ю. Савинченко*, *М.Р. Фишеру*, *А.Л. Репкину*, *Н.Г. Варварской*, *Т.В. Тимофеевой* за подготовку рукописи к изданию и создание оригинал-макета учебника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ АББРЕВИАТУР

АО (АС)	— активные объекты (активные средства)
АСУ	— автоматизированная система управления
АУР	— авиационная управляемая ракета
ВНР	— векторное Нэш-равновесие
ДИИ	— дополнительный источник излучения
ДУ	— дифференциальное уравнение
ДЭС	— динамическая экспертная система
ЗРК	— зенитно-ракетный комплекс
ЗУР	— зенитная управляемая ракета
ИПФ	— импульсная переходная функция
ИС	— иерархическая система
ИТК	— имитация такта конфликта
ИУ	— интегральное уравнение
КДИ	— коалиционная дифференциальная игра
КОДИ	— кооперативная дифференциальная игра
КП	— командный пункт
КС	— конфигурация систем
ЛА	— летательный аппарат
ЛП	— линейное программирование
ЛПР	— лицо, принимающее решение
ЛС	— локальная система
ЛУКУ	— локальная угроза-контругроза
МДУ	— модифицированное достаточное условие
МИПФ	— матрица импульсных переходных функций
ММ	— математическая модель
ММС	— многообъектная многокритериальная система
МНК	— метод наименьших квадратов
МОМДИС	— многокритериальная оптимизация многообъектных динамических систем
МП	— математическое программирование
МЦР	— модифицированное целераспределение
ОД	— область достижимости
ОНБ	— ортонормированный базис
ОНС	— ортонормированная система
ОС	— обратная связь
ОУ	— объект управления
ПВО	— противовоздушная оборона
ПДК	— прогноз динамики конфликта
ПКЗР	— программно-корректируемый закон распределения

ПКЗУ — программно-корректируемый закон управления
ПНОК — Парето–Нэш-область компромиссов
ПО (ПС) — пассивные объекты (пассивные средства)
ППЦК — подсистема предельного целевого качества
ПРР — противорадиолокационная ракета
ПС — программная система
ПСТЭК — предельный стабильно-эффективный компромисс
РЛС — радиолокационная станция
САУ — система автоматического управления
СВН — система воздушного нападения
СЕТО — система естественной технологии организма
СТЭК — стабильно-эффективный компромисс
СУ — система управления
ТАУ — теория автоматического управления
ТКП — точка коалиционного прицеливания
ТЭП — точка экстремального прицеливания
УКУ — угроза–контругроза
ФС — фундаментальная система
ФСР — фундаментальная система решений
ЦР — целераспределение

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ — матрицы коэффициентов векторно-матричного дифференциального уравнения

$\mathbf{A} \setminus (|\mathbf{B})$ — спектральные матрицы

$\|\mathbf{A}\|$ — евклидова норма матрицы $\mathbf{A}$

c_k — коэффициенты Фурье

$\mathbf{C}^f$ — одностолбцовая матрица коэффициентов Фурье функции $f(t)$

$C^i[a,b]$ — пространство непрерывных и i раз дифференцируемых функций на отрезке $[a,b]$

E^m — евклидово пространство размерности m

$\mathbf{F} = \{f_k(t)\}$ — линейно независимая система

F — рефлексивное банахово (полное, линейное, нормированное) пространство действительных функций

g_a — активные ограничения ММС

$G(t',T)$ — область достижимости в момент времени T, полученная для момента времени t'

$H(\psi, \mathbf{X}, \mathbf{Y})$ — функция Гамильтона

$\mathbf{I}$ — единичная матрица

$I(p)$ — функционал качества

$\mathbf{J}$ — вектор показателей ММС

$\mathbf{J}^i$ — подвектор показателей i-го объекта ММС

$\mathbf{J}^i_{k_i}$ — подвектор показателей коалиции K_i

J_k — показатель коалиции K

$k(t,\tau)$ — импульсная переходная функция скалярной нестационарной системы

$k(\tau)$ — импульсная переходная функция скалярной стационарной системы

K_h — конечный промах (минимальное расстояние между двумя ЛА при фиксированных управляющих функциях)

$\mathbf{K}(t,\tau)$ — матрица ИПФ нестационарной системы в пространстве состояний

$\mathbf{K}(t)$ — матрица коэффициентов обратной связи

$\mathbf{K}(\tau)$ — матричная импульсная переходная функция

K — коалиция

$\bar{K}$ — транзитивное отношение предпочтения коалиции K

lx — линейный функционал

$\mathbf{L}_{\text{о}}$ — матрица наблюдаемости

$L^2(\Omega)$, $C(\Omega)$ — функциональные пространства

M — множество индексов вектора показателей ММС

$M\left[z(t)\right]$ — математическое ожидание случайного процесса $z(t)$

M_K — множество индексов коалиционной структуры P

$n_i(t)$ — перегрузка i-го ЛА

N — множество объектов ММС

$\mathbf{P}$ — множество коалиционных структур: $\mathbf{P} \subset P$

P — коалиционная структура ММС

$P_{ij}^{\Theta\Psi}$ — вероятность поражения объекта j-го типа в точке конфигурации с меткой Ψ объектом i-го типа в точке конфигурации с меткой Θ

$\mathbf{q}$ — вектор параметров ММС

$\mathbf{q}^i$ — подвектор параметров: $\mathbf{q}^i \in Q_i$

$\mathbf{q}^{(M_K|i)}$ — подвектор параметров ММС за исключением параметров i-й коалиции i-го объекта

Q — множество значений параметров ММС: $\mathbf{q} \in Q$

R — множество индексов управляющих сил ММС

$R_{zz}(t,z)$ — корреляционная функция случайного процесса $z(t)$

$\mathbf{S}_{\text{в}}$ — матрица управляемости по выходу

$\mathbf{S}_{\text{с}}$ — матрица управляемости по состоянию

S — множество исходов игры

$\mathbf{u}(t)$ — вектор управления ММС

$\mathbf{u}_i(t)$ — подвектор управления i-го объекта ММС

$\mathbf{u}_k(t)$ — подвектор управления коалиции K

$u(t)$ — скалярный сигнал управления

u^r — управление ММС, равновесное по Нэшу

$u^*(t)$ — оптимальное программное скалярное управление

$u^*(t, \mathbf{X}(t))$ — оптимальное скалярное управление, реализующее принцип обратной связи

$u^{\text{П}}$ — управление ММС, оптимальное по Парето

$u^{\text{Ш}}$ — управление, оптимальное по Шепли

$u^{\text{УКУ}}$ — управление, реализующее принцип угроз и контругроз

$u_p^0\left(u_E^0\right)$ — управление преследователя P (преследуемого E), оптимальное при антагонизме

$\mathbf{U}(t)$ — векторный сигнал управления

$\mathbf{U}^*(t)$ — оптимальное векторное программное управление

$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}(t))$ — оптимальное векторное управление по принципу обратной связи

U — множество управлений ММС: $\mathbf{u} \in U$

U_i — подмножество управлений i-го объекта: $u_i \in U_i$

U_k — подмножество управлений коалиции K: $u_k \in U_k$

V_i — величина скорости i-го ЛА

$\mathbf{y}(t)$ — вектор выхода ММС

$\mathbf{Y}_{gi}$ — вектор координат центра ММС i-го ЛА в неподвижной системе координат

$\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния ММС

$\mathbf{x}_{gi}$ — вектор позиции i-го ЛА

$x_{\text{в}}(t)$ — выходной скалярный сигнал

$\|x\|$ — норма элемента x

$\mathbf{X}(t)$ — вектор-функция состояния

$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0$ — начальное состояние системы

$\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}^T$ — конечное состояние системы

$\mathbf{X}(t, \tau)$ — матрица перехода

$\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$ — вектор-функция выхода

$\mathbf{X}_{\phi}(t)$ — фундаментальная матрица

$X(t)$ — множество состояний ММС: $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$

$\gamma(t)$ — угол крена i-го ЛА

$\left\{\gamma_{ij}^{\Theta\Psi}\right\}$ — бивалентная матрица назначений

λ_i — моменты функции относительно системы функций

$\mu_i(\mathbf{A})$ — i-е собственное значение $(n \times n)$-матрицы $\mathbf{A}$, $i = \overline{1,n}$

$\eta_{ij}^{\Theta\Psi}$ — угол ракурса между объектами i и j

$\nu(K)$ — характеристическая функция коалиции K

ν_{ij} — доля объектов i-го типа, выделенных для поражения объектов j-го типа

Θ_i — угол наклона траектории i-го ЛА

Ψ_i — угол поворота траектории i-го ЛА

$\mathbf{\Phi} = \{\varphi_k(t)\}$ — ортонормированный базис; ортонормированная система

Ω — многогранный конус, определенный матрицей $\mathbf{B}$ в евклидовом пространстве E^m

$< .,. >$ — предгильбертово скалярное произведение

ГЛАВА 1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Задача оптимального управления относится к задачам вариационного исчисления. В начале пятидесятых годов, когда А.А. Фельдбаумом была сформулирована задача оптимального управления, оказалось, что *классическое вариационное исчисление, из-за наличия в задаче оптимального управления ограничений в форме неравенств, не позволяет определить оптимальное управление и оптимальную траекторию.* Это привело к появлению принципа максимума Понтрягина.

После опубликования принципа максимума усилиями ученых разных стран удалось быстро распространить вариационное исчисление на задачи оптимального управления. Такое распространение выполнено в п. 1.5 настоящей главы. Однако получаемые таким образом условия оптимальности оказываются аналогичными принципу максимума и являются по сравнению с последним более слабыми. Именно, *в вариационном исчислении область допустимых значений вектора управления обязательно должна быть областью в классическом смысле этого слова, т.е. должна удовлетворять свойству связности. В принципе максимума данная область может быть любым множеством векторного пространства, например состоять из совокупности изолированных точек.* Это расширяет возможности принципа максимума. Можно, например, искать оптимальное управление в классе релейных сигналов и т.п.

На практике при определении оптимального управления предпочтение, как правило, отдается принципу максимума. Однако изучение вариационного исчисления позволяет более глубоко понять содержание математических методов теории оптимального управления и их возможности. На это в основном и нацелена настоящая глава. Далее в учебнике принцип максимума выводится из вариационного исчисления.

1.1. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ЭКСТРЕМУМА ФУНКЦИОНАЛА

Понятие функционала является естественным развитием понятия функции. *Говорят, что в классе функций задан функционал, если указано правило, по которому каждой функции из этого класса ставится в соответствие некоторое число.* Например, интеграл

$$I = \int_a^b F(x, y(x))dx$$

каждой непрерывной функции $y(x)$ ставит в соответствие число, т.е. является функционалом.

Вариационным исчислением называется раздел математики, в котором рассматриваются задачи определения максимума и минимума функционалов, а также определения функций (кривых), *на которых эти максимумы и минимумы достигаются.* Приведем простой пример вариационной задачи. На плоскости заданы две точки с координатами (a, B) и (b, B). Требуется среди линий $y = y(x)$ $(a \le x \le b)$, соединяющих эти точки, найти такую, которая имеет наименьшую длину, т.е. найти функцию $y(x)$, на которой функционал

$$I = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}\, dx$$

достигает минимума.

1.1.1. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА*

При изучении функционалов, как и при изучении функций, удобно использовать геометрический язык. Каждую функцию $y(x)$, принадлежащую определенному классу, будем рассматривать как точку некоторого пространства. *Пространство, элементами которого являются функции, называется функциональным пространством.*

Функциональное пространство R называется нормированным, если каждому элементу $y(x) \in R$ ставится в соответствие некоторое неотрицательное число $\|y\|$ — норма этого элемента. При этом должны выполняться следующие три аксиомы:

1) $\|y\| = 0$ только при условии, что $y(x) \equiv 0$;

2) для любого числа λ: $\|\lambda y\| = |\lambda| \|y\|$;

3) для любых $y_1 \in R$ и $y_2 \in R$: $\|y_1 + y_2\| \le \|y_1\| + \|y_2\|$.

Последнюю аксиому принято называть *неравенством треугольника.*

В вариационном исчислении используются три функциональных пространства.

Определение 1.1. *Пространством C называют совокупность непрерывных функций $y(x)$, заданных на отрезке $[a, b]$.* Норма в пространстве C задается равенством

$$\|y\| = \max_{a \le x \le b} |y(x)|. \tag{1.1}$$

Определение 1.2. *Пространством C_1 называют совокупность непрерывных функций, заданных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на этом отрезке непрерывную первую производную.* Норма в пространстве C_1 задается выражением

$$\|y\|_1 = \max_{a \le x \le b} |y(x)| + \max_{a \le x \le b} |y'(x)|. \tag{1.2}$$

Определение 1.3. *Пространством C_n называют совокупность функций, заданных на отрезке $[a, b]$ и имеющих непрерывные производные до n-го порядка включительно.* Норма в пространстве C_n определяется равенством

$$\|y\|_n = \sum_{i=0}^{n} \max_{a \le x \le b} \left| y^{(i)}(x) \right|.$$

В нормированном функциональном пространстве R можно определять расстояние между любыми функциями. Именно, расстояние $\rho(y_1, y_2)$ между функциями y_1 и y_2 задается равенством $\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|$. Отметим, что в соответствии с выписанными выше аксиомами нормы $\rho(y_1, y_2) = \rho(y_2, y_1)$, так как $\|y_1 - y_2\| = \|y_2 - y_1\|$.

Из соотношений (1.1) и (1.2) следует, что расстояние между функциями y_1 и y_2 в пространствах C и C_1 задается соответственно равенствами

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\| = \max_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)|;$$

$$\rho(y_1, y_2) = \|y_1 - y_2\|_1 = \max_{a \le x \le b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \le x \le b} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Очевидно, что две функции близки в пространстве C_1, если близки как сами функции, так и их производные.

---

*См. Приложение 2 во втором томе учебника.

1.1.2. Дифференциал функционала

Пусть R — некоторое функциональное пространство. *Функционал* $I(y)$ *называется непрерывным в точке* $y_0 \in R$, *если для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta(\varepsilon)$, *что при любых* y, *удовлетворяющих условию* $\|y - y_0\| < \delta$, *справедливо неравенство* $|I(y) - I(y_0)| \le \varepsilon$. *Функционал* $I(y)$ *называется непрерывным в некоторой области пространства* R, *если он непрерывен в каждой точке этой области.*

Функционал $I(y)$ *называется линейным*, если он удовлетворяет следующим свойствам:

1) для любых y_1 и y_2: $I(y_1 + y_2) = I(y_1) + I(y_2)$;

2) для любого числа λ: $I(\lambda y) = \lambda I(y)$.

Пример 1.1. Функционал

$$I(y) = \int_a^b \eta(x) y(x) dx,$$

где $\eta(x)$ — заданная непрерывная функция, является линейным. Он непрерывен в пространстве C.

По аналогии с дифференциалом функции можно ввести понятие дифференциала функционала.

Пусть $I(y)$ — некоторый функционал. Дадим функции $y_0(x)$ приращение $h(x)$ и запишем приращение функционала:

$$\Delta I(y_0, h) = I(y_0 + h) - I(y_0).$$

При фиксированном y_0 $\Delta I(y_0, h)$ является функционалом относительно h. Дифференциалом функционала $I(y)$ в точке y_0 называется главная линейная часть приращения функционала $\Delta I(y_0, h)$. Именно, если приращение $\Delta I(y_0, h)$ можно представить в виде

$$\Delta I(y_0, h) = \varphi(h) + \alpha \cdot \|h\|,$$

где $\varphi(h)$ — линейный функционал, а $\alpha \to 0$ при $\|h\| \to 0$, то $\varphi(h)$ называется дифференциалом функционала $I(y)$ в точке y_0.

Можно показать, что дифференциал функционала, если он существует, определяется однозначным образом. Дифференциал функционала называют также вариацией функционала и обозначают $\delta I(h)$.

Как и дифференциал функций, дифференциал функционала оказывается весьма полезным при исследовании на максимум и минимум функционалов. В дальнейшем в качестве основного варианта рассматривается минимизация функционалов. Вообще необходимо иметь в виду, что между минимумом и максимумом функционала существует простая связь:

$$\max I(y) = -\min(-I(y)).$$

Рассмотрим функционал $I(y)$, определенный на элементах нормированного функционального пространства R. *Говорят, что функционал* $I(y)$ *достигает в точке* y_0 *минимума, если найдется такое* $\varepsilon > 0$, *что для всех* y, *принадлежащих* ε *-окрестности точки* y_0, *т.е. удовлетворяющих неравенству*

$$\|y - y_0\| < \varepsilon, \tag{1.3}$$

справедливо соотношение

$$I(y) - I(y_0) \geq 0. \tag{1.4}$$

Если в качестве функционального пространства R рассматривается пространство C, то такой минимум называется сильным, а если в качестве R рассматривается пространство C_1 с соответствующей нормой, то минимум называется слабым.

В разграничении слабого и сильного минимумов функционала определяющая роль отводится окрестности (1.3), которая однозначно зависит от нормы соответствующего функционального пространства. В вариационном исчислении, например, широко используется функционал вида

$$I = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

который определен на дифференцируемых функциях $y(x)$. Если имеет место сильный минимум функционала, то условие (1.4) должно быть справедливо для дифференцируемых функций $y(x)$, удовлетворяющих неравенству

$$\max_{a \leq x \leq b} |y(x) - y_0(x)| < \varepsilon, \tag{1.5}$$

а при слабом минимуме функционала — для функций $y(x)$, удовлетворяющих соотношению

$$\max_{a \leq x \leq b} |y(x) - y_0(x)| + \max_{a \leq x \leq b} |y'(x) - y_0'(x)| < \varepsilon. \tag{1.6}$$

Пространство C является существенно более богатым по числу входящих в него функций $y(x)$, нежели пространство C_1, так как любая функция $y(x) \in C_1$ принадлежит также пространству C, в то время как обратное утверждение неверно. Сильный минимум функционала может достигаться на непрерывно дифференцируемой функции. В этом случае, очевидно, всякий сильный минимум является в то же время слабым. Действительно, из того факта, что имеет место неравенство (1.4) по отношению к непрерывным функциям, удовлетворяющим условию (1.5), тем более следует, что имеет место неравенство (1.4) по отношению к непрерывно дифференцируемым функциям, удовлетворяющим соотношению (1.6).

Это обстоятельство имеет важное значение, так как позволяет заключить, что необходимое условие слабого минимума функционала является в то же время необходимым условием сильного минимума функционала. Слабый минимум функционала определяется обычно значительно проще, так как в вариационном исчислении, как правило, рассматриваются функционалы, которые являются непрерывными в пространстве C_1 и не являются непрерывными в пространстве C. Создавая теорию слабого минимума, можно пользоваться непрерывностью функционала.

Рассмотрим два примера.

Пример 1.2. Найти минимум функционала

$$I = \int_0^1 (y')^2 dx$$

при условии, что $y(0) = 0$, $y(1) = 1$. Обозначим $y'(x) = u(x)$. Тогда, очевидно, требуется найти минимум функционала

$$\int_0^1 u^2(x)dx$$

при условии, что

$$\int_0^1 u(x)dx = y(1) = 1. \tag{1.7}$$

Покажем, что $u_0(x) \equiv 1$ есть минимум функционала. Проверим это. Пусть $u(x) = u_0(x) + \upsilon(x) = 1 + \upsilon(x)$. Тогда

$$\int_0^1 [u_0(x) + \upsilon(x)]^2 dx = \int_0^1 [1 + \upsilon(x)]^2 dx = 1 + 2\cdot\int_0^1 \upsilon(x)dx + \int_0^1 \upsilon^2(x)dx = 1 + \int_0^1 \upsilon^2(x)dx \geq 1,$$

так как в силу условия (1.7) $\int_0^1 \upsilon(x)dx = 0$. Таким образом, функция $y_0(x) = x$ реализует сильный минимум исходного функционала, причем этот минимум является абсолютным, поскольку он имеет место по отношению ко всем дифференцируемым функциям из C.

Пример 1.3. Найдем минимум функционала

$$I = \int_0^1 (y')^3 dx, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1. \tag{1.8}$$

Обозначим, как и выше, $y'(x) = u(x)$. Исходная задача (1.8) эквивалентна задаче о минимуме функционала

$$\int_0^1 u^3(x)dx$$

при условии, что

$$\int_0^1 u(x)dx = 1.$$

Покажем, что функция $u(x) \equiv 1$ задает слабый минимум функционала. Рассмотрим

$$\int_0^1 (1 + \upsilon(x))^3 dx = 1 + 3\int_0^1 \upsilon(x)dx + 3\int_0^1 \upsilon^2(x)dx + \int_0^1 \upsilon^3(x)dx.$$

Функция $u(x) = u_0(x) + \upsilon(x) = 1 + \upsilon(x)$ должна удовлетворять граничному условию $\int_0^1 u(x)dx = 1$. Отсюда следует, что

$$\int_0^1 \upsilon(x)dx = 0.$$

В результате получаем

$$\int_0^1 [1 + \upsilon(x)]^3 dx = 1 + 3\int_0^1 \upsilon^2(x)dx + \int_0^1 \upsilon^3 dx.$$

Если $|\upsilon| < \varepsilon$ $(\varepsilon < 1)$, то $\upsilon^2 > |\upsilon^3|$, $3\upsilon^2 > |\upsilon^3|$ и, следовательно,

$$\int_0^1 (3\upsilon^2 + \upsilon^3)dx \geq 0.$$

Таким образом, доказано, что функция $y_0(x) \equiv x$ $(u(x) = 1)$ доставляет слабый минимум функционалу.

Посмотрим, является ли этот слабый минимум сильным? Будем выбирать $\upsilon(x)$ в соответствии с рис. 1.1.

Как и выше, $\int_0^1 \upsilon(x) = 0$. При $n \to \infty$ $\dfrac{n}{n-1} \to 1$. Поэтому

$$\int_0^1 \upsilon^2(x)dx = \left(\frac{n}{n-1}\right)^2 \cdot \frac{n-1}{n} + n^2 \cdot \frac{1}{n} \sim n,$$

$$\int_0^1 \upsilon^3(x)dx = \left(\frac{n}{n-1}\right)^3 \cdot \frac{n-1}{n} - n^3 \cdot \frac{1}{n} \sim -n^2.$$

При достаточно больших n $\left(3n - n^2\right) < 0$ и, следовательно,

$$3\int_0^1 \upsilon^2(x)dx + \int_0^1 \upsilon^3 dx < 0.$$

Таким образом, если наложено ограничение на значение производной функции $y(x)$, то функция $y_0(x) = x$ доставляет минимум функционалу (1.8). Если на значение производной $y'(x)$ не накладывать ограничение, то на линии $y_0(x) = x$ минимум функционала не имеет место. Это позволяет заключить, что функция $y_0(x) = x$ доставляет слабый минимум функционалу и не доставляет сильного минимума.

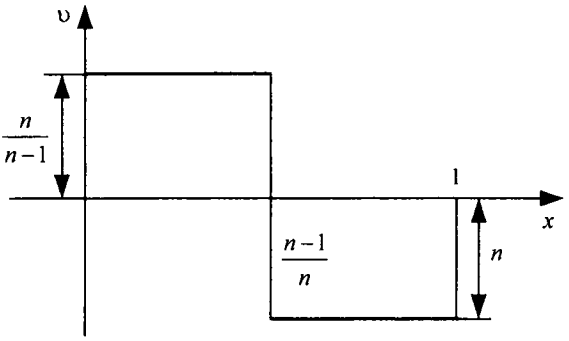


Рис. 1.1. График функции $\upsilon(x)$

Приведем необходимое условие экстремума функционала.

Теорема 1.1. *Если функционал* $I(y)$ *достигает в точке* y_0 *минимума* (максимума), *то дифференциал функционала, если он существует, в этой точке обращается в нуль.*

Доказательство. Пусть функционал $I(y)$ достигает в точке y_0 минимума. По определению минимума

$$I(y_0 + h) - I(y_0) = \delta I(h) + \alpha \cdot \|h\| \geq 0 \tag{1.9}$$

для всех h, для которых норма h достаточно мала. Если дифференциал функционала $\delta I(h) \neq 0$, то при достаточно малых h знак суммы

$$\delta I(h) + \alpha \cdot \|h\| \tag{1.10}$$

будет полностью определяться знаком первого слагаемого. Но $\delta I(h)$ — линейный функционал, и потому $\delta I(-h) = -\delta I(h)$, т.е. знак суммы (1.10) может быть любым, что противоречит условию (1.9). Поэтому $\delta I(h) = 0$, и теорема доказана.

1.1.3. Простейшая задача вариационного исчисления

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления. Пусть задан функционал

$$I = \int_a^b F(x, y, y')dx. \tag{1.11}$$

Относительно функции $F(x, y, y')$ будем предполагать, что она имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до второго порядка включительно. Требуется среди гладких функций $y(x)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B, \tag{1.12}$$

найти функцию, доставляющую слабый минимум функционалу (1.11).

Для решения поставленной задачи воспользуемся теоремой 1.1. Найдем дифференциал функционала (1.11). Дадим функции $y(x)$ приращение $h(x)$ и найдем приращение функционала

$$\Delta I = \int_a^b F(x, y+h, y'+h')dx - \int_a^b F(x, y, y')dx. \tag{1.13}$$

Так как функции $y(x)$ и $y(x)+h(x)$ должны удовлетворять условиям (1.12), то

$$h(a) = h(b) = 0. \tag{1.14}$$

Принимая во внимание, что функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные производные по всем своим аргументам, приращение (1.13) можно записать в виде

$$\Delta I = \int_a^b \left[F_y(x, y, y') \cdot h + F_{y'}(x, y, y') \cdot h' \right] dx + \ldots, \tag{1.15}$$

здесь многоточием обозначены члены, имеющие порядок выше первого относительно h и h'. Интеграл, стоящий в правой части равенства (1.15), является линейным функционалом относительно переменной $h(x)$ и отличается от приращения ΔI лишь на слагаемое, имеющее порядок малости выше первого относительно $\|h\|_1$, т.е. является дифференциалом функционала (1.11). Таким образом,

$$\delta I = \int_a^b \left[F_y(x, y, y') \cdot h + F_{y'}(x, y, y') \cdot h' \right] dx. \tag{1.16}$$

Выполним интегрирование по частям:

$$\int_a^b F_{y'} \cdot h' \, dx = F_{y'} \cdot h \Big|_a^b - \int_a^b h \cdot \frac{d}{dx} F_{y'} \, dx.$$

Принимая во внимание граничные условия (1.14), дифференциал функционала (1.16) перепишем в виде

$$\delta I = \int_a^b \left[F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') \right] \cdot h(x) dx. \tag{1.17}$$

Если функция $y(x)$ доставляет минимум функционалу (1.11), то в соответствии с теоремой 1.1 дифференциал функционала равен нулю. Таким образом, можно записать:

$$\int_a^b \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} \right] \cdot h(x) \, dx = 0. \tag{1.18}$$

Равенство (1.18) должно иметь место для произвольных функций $h(x)$, удовлетворяющих граничным условиям (1.14). Это возможно, если функция $h(x)$ умножается на нуль, т.е. если выполняется равенство

$$F_y(x, y, y') - \frac{d}{dx} F_{y'}(x, y, y') = 0. \tag{1.19}$$

Математически строгий ответ на этот вопрос дает следующая лемма.

Лемма (лемма Лагранжа). *Пусть* $\eta(x)$ *— непрерывная функция. Если функционал*

$$I(h)=\int_a^b \eta(x)\cdot h(x)\,dx=0$$

для любых функций $h(x)\in C_1$, *удовлетворяющих граничным условиям* (1.14), *то* $\eta(x)\equiv 0$.

Доказательство. Пусть в некоторой точке x_0 $(a<x_0<b)$ функция $\eta(x)\neq 0$. Положим для определенности, что $\eta(x_0)>0$. Поскольку функция $\eta(x)$ непрерывна, то найдется интервал $(\xi_1,\xi_2)\subset[a,b]$, содержащий точку x_0, в котором функция $\eta(x)>0$. В качестве $h(x)$ выберем следующую функцию:

$$h(x)=\begin{cases}(\xi_1-x)^2\cdot(\xi_2-x)^2, & \text{если } x\in(\xi_1,\xi_2),\\ 0, & \text{если } x\notin(\xi_1,\xi_2).\end{cases}$$

Легко видеть, что выбранная таким образом функция $h(x)$ является непрерывно дифференцируемой и удовлетворяет условиям (1.14). Однако на этой функции

$$\int_a^b \eta(x)\cdot h(x)dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2}\eta(x)\cdot(\xi_1-x)^2\cdot(\xi_2-x)^2\,dx>0,$$

так как под знаком интеграла стоит положительная функция. Полученное противоречие доказывает лемму.

Если теперь к равенству (1.18) применить доказанную выше лемму, то получим уравнение (1.19). Уравнение (1.19) называется *уравнением Эйлера*.

Отметим, что приведенный выше вывод уравнения Эйлера справедлив, строго говоря, если предположить наличие у функции $y(x)$ второй производной. Однако, если усложнить рассуждения, можно получить уравнение Эйлера, не делая предположения о существовании второй производной функции $y(x)$.

Таким образом, функция $y(x)$, являющаяся решением поставленной выше простейшей задачи вариационного исчисления, должна удовлетворять уравнению Эйлера. Уравнение Эйлера является необходимым условием слабого минимума функционала (1.11) при граничных условиях (1.12).

Выпишем уравнение Эйлера в развернутой форме:

$$F_y(x,y,y')-F_{y'x}(x,y,y')-F_{y'y}(x,y,y')\cdot y'-F_{y'y'}(x,y,y')\cdot y''=0.$$

Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка относительно неизвестной функции $y(x)$. Общее решение этого уравнения содержит две произвольные постоянные, которые можно определить с помощью двух краевых условий (1.12).

Функцию $y(x)$, удовлетворяющую уравнению Эйлера, называют *экстремалью*.

Рассмотрим частный вид уравнения Эйлера, который соответствует случаю, когда подынтегральная функция функционала не зависит явно от x, т.е. когда функционал имеет вид

$$I=\int_a^b F(y,y')dx. \qquad (1.20)$$

Выпишем для функционала (1.20) уравнение Эйлера:

$$F_y(y,y') - F_{y'y}(y,y')\cdot y' - F_{y'y'}(y,y')\cdot y'' = 0.$$

Умножим это уравнение на y':

$$y'\cdot F_y - (y')^2\cdot F_{y'y} - y'\cdot y''\cdot F_{y'y'} = 0. \tag{1.21}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнение (1.21) эквивалентно уравнению

$$\frac{d}{dx}\left[F - y'\cdot F_{y'}\right] = 0. \tag{1.22}$$

Из (1.22) следует

$$F - y'\cdot F_{y'} = c, \tag{1.23}$$

где c — произвольная константа.

Пример 1.4. На плоскости заданы две точки с координатами (a, A) и (b, B) (рис. 1.2).

Требуется среди гладких линий $y = y(x)$, соединяющих концы этих точек, найти линию, которая при вращении ее вокруг оси x образует поверхность наименьшей площади.

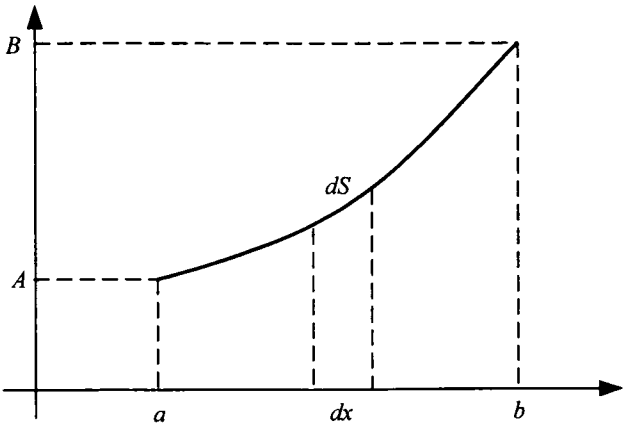


Рис. 1.2. К решению задачи оптимизации

При вращении элемента дуги dS (см. рис. 1.2) образуется поверхность, имеющая площадь

$$d\Pi = 2\Pi y dS = 2\Pi y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx,$$

а при вращении линии $y = y(x)$ — поверхность, площадь которой

$$\Pi = 2\Pi\cdot\int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx. \tag{1.24}$$

Таким образом, требуется найти минимум функционала (1.24) при выполнении граничных условий

$$y(a) = A,\quad y(b) = B. \tag{1.25}$$

Так как подынтегральная функция функционала (1.24) не зависит от x, то можно записать первый интеграл уравнения Эйлера в форме (1.23):

$$y\cdot\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} - y\cdot\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = C. \tag{1.26}$$

Из (1.26) следует

$$y = C \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y^2 - C^2}{C^2}}.$$

Разделяя переменные и выполняя интегрирование, найдем

$$C \cdot \operatorname{arcch}\frac{y}{C} = x + C_1,$$

здесь C_1 — произвольная константа. Окончательный результат имеет вид

$$y = C \cdot \operatorname{ch}\frac{x + C_1}{C}.$$

Произвольные постоянные C и C_1 определяются из условий (1.24), которые приводят к уравнениям

$$A = C \cdot \operatorname{ch}\frac{a + C_1}{C}, \quad B = C \cdot \operatorname{ch}\frac{b + C_1}{C}. \tag{1.27}$$

В зависимости от конкретных значений чисел a, A, b, B возможны следующие три случая:

1. Уравнения (1.27) имеют единственное решение, т.е. существует единственная кривая вида

$$y = C \cdot \operatorname{ch}\frac{x + C_1}{C}, \tag{1.28}$$

проходящая через заданные точки (a, A) и (b, B). Эта кривая и является решением задачи.

2. Уравнения (1.27) имеют два решения, т.е. существуют две кривые вида (1.28), проходящие через заданные точки (a, A) и (b, B). В этом случае одна из этих кривых доставляет минимум функционалу, а другая — нет. Определить реализующую минимум функционала функцию $y(x)$ можно путем непосредственного вычисления интеграла (1.24) вдоль каждой из этих линий.

3. Уравнения (1.27) не имеют решения. Это означает, что в классе гладких линий, проходящих через заданные точки (a, A) и (b, B), нет линии, реализующей минимум функционала (1.24).

1.1.4. Вариационная задача с n неизвестными функциями

Рассмотрим функционал

$$I = \int_a^b F\left(x, y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'\right) dx, \tag{1.29}$$

зависящий от n неизвестных функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Пусть, далее, заданы граничные условия

$$y_i(a) = A_i, \; y_i(b) = B_i, \; i = \overline{1,n}. \tag{1.30}$$

Найдем дифференциал функционала (1.29). Дадим функциям $y_i(x)$ приращения $h_i(x)$. В силу (1.30) приращения $h_i(x)$ должны удовлетворять условиям

$$h_i(a) = h_i(b) = 0, \; i = \overline{1,n}. \tag{1.31}$$

Приращение функционала имеет вид

$$\Delta I = \int_a^b F\left(x, y_1 + h_1, \ldots, y_n + h_n, y_1' + h_1', \ldots, y_n' + h_n'\right) dx -$$

$$- \int_a^b F\left(x, y_1, \ldots, y_n, y_1', \ldots, y_n'\right) dx.$$

Выделим, как и выше, главную линейную часть приращения функционала:

$$\Delta I = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} \cdot h_i + F_{y_i'} \cdot h_i'\right) dx + \ldots,$$

где многоточием обозначены члены, имеющие порядок малости выше первого относительно h_i и h_i'. Дифференциал функционала, таким образом, имеет вид

$$\delta I = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} \cdot h_i + F_{y_i'} \cdot h_i' \right) dx.$$

Выполняя интегрирование по частям и учитывая соотношения (1.31), окончательно получим

$$\delta I = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) h_i(x)\, dx. \tag{1.32}$$

Если функции $y_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ доставляют слабый минимум функционалу (1.29), то в соответствии с теоремой 1.1 дифференциал функционала равен нулю, т.е.

$$\int_a^b \sum_{i=1}^n \left(F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} \right) h_i(x)\, dx = 0. \tag{1.33}$$

Приращения $h_i(x)$ независимы между собой (они должны удовлетворять только граничному условию (1.31)). Поэтому, зафиксировав индекс i (например $i = j$), функцию $h_j(x)$ будем считать произвольной, а остальные $h_i(x)$ (при $i \neq j$) положим равными нулю. Тогда равенство (1.33) примет вид

$$\int_a^b \left(F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} \right) h_j(x)\, dx = 0. \tag{1.34}$$

Воспользовавшись приведенной выше леммой Лагранжа, из (1.34) получим уравнение Эйлера

$$F_{y_j} - \frac{d}{dx} F_{y_j'} = 0. \tag{1.35}$$

Уравнение (1.35) можно получить указанным выше способом для любого индекса i. Таким образом, функции $y_i(x)$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$, решающие поставленную выше задачу, т.е. доставляющие минимум функционалу (1.29) при граничных условиях (1.30), должны удовлетворять системе дифференциальных уравнений Эйлера

$$F_{y_i} - \frac{d}{dx} F_{y_i'} = 0 \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{1.36}$$

Отметим, что как уравнение Эйлера (1.19), так и система уравнений (1.36) являются необходимыми условиями экстремума функционала, т.е. как минимума, так и максимума функционала.

1.2. ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ. УСЛОВИЯ ВЕЙЕРШТРАССА–ЭРДМАНА

1.2.1. Общая формула вариации функционала

Рассмотрим функционал

$$I = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')\, dx. \tag{1.37}$$

Будем предполагать, что концы тех кривых $y = y(x)$, на которых определен функционал, можно сдвигать произвольным образом. Пусть $y = y(x)$ и $\bar{y} = \bar{y}(x)$ — две близкие кривые (рис. 1.3).

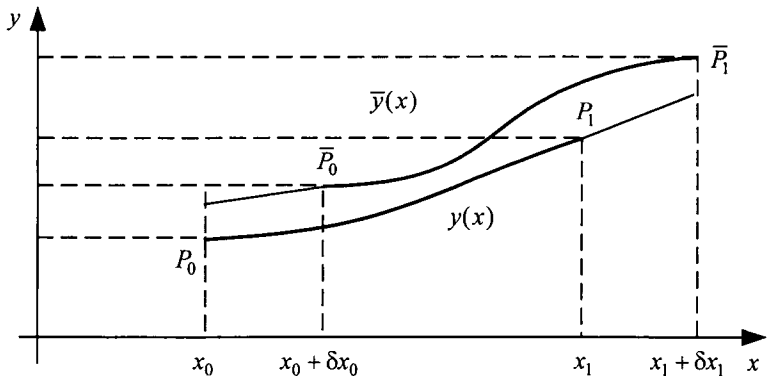


Рис. 1.3. К выбору общей формулы вариации функционала

Функция $y(x)$ определена в интервале $x_0 \le x \le x_1$, а функция $\bar{y}(x)$ — в интервале $x_0 + \delta x_0 \le x \le x_1 + \delta x_1$. Функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ определены на разных интервалах. Чтобы дальнейшие рассуждения имели смысл, продолжим эти функции гладким образом на интервал, включающий в себя интервалы определения функций $y(x)$ и $\bar{y}(x)$. Для этого можно, например, провести касательные в конечных точках кривых.

Расстояние между функциями $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ зададим соотношением

$$\rho(y,\bar{y}) = \max_{x\in L}|y-\bar{y}| + \max_{x\in L}|y'-\bar{y}'| + \rho\left(P_0,\bar{P}_0\right) + \rho\left(P_1,\bar{P}_1\right), \tag{1.38}$$

здесь $\rho\left(P_0,\bar{P}_0\right)$ и $\rho\left(P_1,\bar{P}_1\right)$ — расстояние соответственно между левыми и правыми концами кривых $y = y(x)$ и $\bar{y} = \bar{y}(x)$, L — указанный выше интервал определения функций $y(x)$ и $\bar{y}(x)$. Обозначим координаты кривой $y = y(x)$ соответственно (x_0, y_0) и (x_1, y_1), а координаты концов проварьированной кривой $\bar{y} = \bar{y}(x)$ — $(x_0 + \delta x_0, y_0 + \delta y_0)$ и $(x_1 + \delta x_1, y_1 + \delta y_1)$. Положим $\bar{y}(x) = y(x) + h(x)$. Функции $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ полагаются близкими в смысле расстояния (1.38).

Рассмотрим приращение функционала (1.37):

$$\Delta I = \int_{x_0+\delta x_0}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+h, y'+h'\right)dx - \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y, y'\right)dx =$$

$$= \int_{x_0}^{x_1}\left[F\left(x, y+h, y'+h'\right) - F\left(x, y, y'\right)\right]dx + \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F\left(x, y+h, y'+h'\right)dx -$$

$$- \int_{x_0}^{x_0+\delta x_0} F\left(x, y+h, y'+h'\right)dx.$$

Воспользовавшись формулой Тейлора и применив теорему о среднем, получим

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x,y,y')\cdot h(x)+F_{y'}(x,y,y')\cdot h'(x)\right]dx + \\ +F(x,y,y')\Big|_{x=x_1}\cdot\delta x_1 - F(x,y,y')\Big|_{x=x_0}\cdot\delta x_0 + o\big(\rho(y+h,y)\big), \tag{1.39}$$

здесь

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{o\big(\rho(y+h,y)\big)}{\rho(y+h,y)} = 0.$$

Выполним интегрирование по частям

$$\int_{x_1}^{x_0} F_{y'}\cdot h'dx = F_{y'}\Big|_{x_1}\cdot h(x_1) - F_{y'}\Big|_{x_0}\cdot h(x_0) - \int_{x_1}^{x_0} h\cdot\frac{d}{dx}F_{y'}dx.$$

Тогда равенство (1.39) можно записать в виде

$$\Delta I = \int_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right]h(x)dx + \\ +F_{y'}\Big|_{x_1}\cdot h(x_1) - F_{y'}\Big|_{x_0}\cdot h(x_0) + F\Big|_{x_1}\cdot\delta x_1 - F\Big|_{x_0}\cdot\delta x_0 + o\big(\rho(y+h,y)\big). \tag{1.40}$$

Из рис. 1.3 видно, что

$$\delta y_0 \approx h(x_0) + y'(x_0)\cdot\delta x_0,\quad \delta y_1 \approx h(x_1) + y'(x_1)\cdot\delta x_1. \tag{1.41}$$

В равенстве (1.41) отброшены члены, имеющие порядок малости выше первого.

Из (1.40), отбрасывая слагаемые, имеющие порядок малости выше первого, и принимая во внимание (1.41), окончательно получим

$$\delta I = \int_{x_0}^{x_1}\left[F_y(x,y,y') - \frac{d}{dx}F_{y'}(x,y,y')\right]\cdot h(x)\,dx + \\ +F_{y'}\Big|_{x=x_1}\cdot\delta y_1 + \left[F - y'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1}\cdot\delta x_1 - F_{y'}\Big|_{x=x_0}\cdot\delta y_0 - \left[F - y'F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0}\cdot\delta x_0. \tag{1.42}$$

Равенство (1.42) задает общую формулу вариации функционала (1.37). Вариация функционала в задаче с закрепленными концами следует из (1.42), если положить $\delta y_1 = \delta y_0 = \delta x_1 = \delta x_0 = 0$.

1.2.2. Задача с подвижными концами

Рассмотрим функционал

$$I(y) = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx, \tag{1.43}$$

определенный на гладких кривых $y = y(x)$. Требуется среди линий $y = y(x)$, концы которых лежат на двух заданных кривых $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, найти линию $y = y(x)$, доставляющую слабый минимум функционалу (1.43). В отличие от рассмотренной выше задачи вариационного исчисления, в которой концы линий $y = y(x)$ строго фиксированы, в данном случае появляется некоторая свобода в выборе концов линий $y = y(x)$: левым концом может быть любая точка линии $y = \varphi(x)$, а правым концом — любая точка линии $y = \psi(x)$.

Воспользуемся общей формулой вариации функционала (1.42). Если некоторая кривая $y = y(x)$ доставляет минимум функционалу (1.43) в рассматриваемой задаче

с подвижными концами, то она тем более доставляет минимум функционалу (1.43) по отношению к более узкому классу кривых, имеющих те же концы, что и линия $y = y(x)$. Отсюда следует, что функция $y(x)$, решающая поставленную задачу, должна удовлетворять уравнению Эйлера.

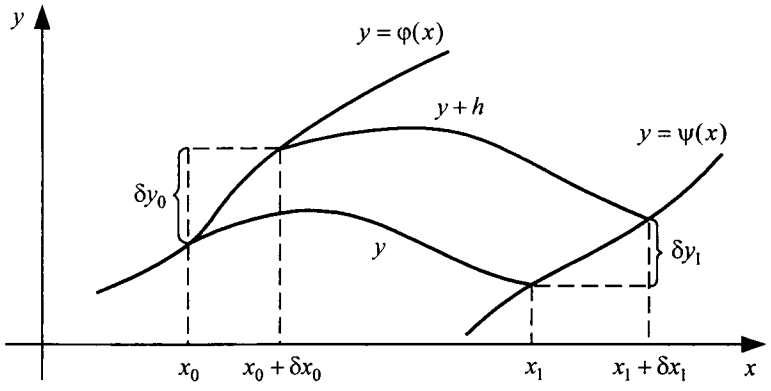


Рис. 1.4. К рассмотрению задачи с подвижными концами

Из (1.42) с учетом уравнения Эйлера следует, что

$$\delta I = F_{y'}\Big|_{x=x_1} \cdot \delta y_1 + \left[F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 - \\ -F_{y'}\Big|_{x=x_0} \cdot \delta y_0 - \left[F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x=x_0} \cdot \delta x_0. \tag{1.44}$$

Далее, из рис. 1.4 находим

$$\delta y_1 \approx \psi'(x_1) \cdot \delta x_1, \quad \delta y_0 \approx \varphi'(x_0) \cdot \delta x_0.$$

Вариация функционала принимает вид

$$\delta I = \left[F_{y'} \cdot \psi' + F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x_1} \cdot \delta x_1 - \left[F_{y'} \cdot \varphi' + F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x_0} \cdot \delta x_0.$$

В соответствии с теоремой 1.1 запишем условие минимума функционала:

$$\delta I = \left[F_{y'} \cdot \psi' + F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x_1} \cdot \delta x_1 - \\ -\left[F_{y'} \cdot \varphi' + F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x_0} \cdot \delta x_0 = 0. \tag{1.45}$$

Поскольку δx_0 и δx_1 — независимые приращения, то из (1.45) находим

$$\begin{cases} \left[F_{y'} \cdot \psi' + F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x_1} = 0, \\ \left[F_{y'} \cdot \varphi' + F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x_0} = 0. \end{cases} \tag{1.46}$$

Равенства (1.46) носят название *условий трансверсальности*.

При решении вариационной задачи с подвижными концами необходимо сначала решить уравнение Эйлера, общее решение которого будет содержать две произвольные константы, а для определения указанных констант следует воспользоваться условиями трансверсальности (1.46).

Иногда встречается смешанный случай, когда один конец кривой $y = y(x)$ закреплен, а второй — подвижен. В этом случае условие трансверсальности записывается только для подвижного конца траектории.

1.2.3. Условия Вейерштрасса–Эрдмана

Выше, выполняя вывод уравнения Эйлера, мы предполагали, что реализующая минимум функционала функция $y(x)$ имеет непрерывную вторую производную. Вообще, в вариационном исчислении доказывается, что экстремаль функционала (1.11) является дважды непрерывно дифференцируемой функцией во всех точках (x, y), в которых

$$F_{y'y'}(x, y, y') \neq 0.$$

Однако встречаются вариационные задачи, в которых минимум функционала достигается на кусочно-гладких линиях.

Рассмотрим простейшую задачу вариационного исчисления о минимуме функционала (1.11) при граничных условиях (1.12), полагая, что допустимые кривые $y = y(x)$ могут иметь излом в некоторой точке x^* $(a < x^* < b)$. На каждом из интервалов (a, x^*) и (x^*, b) функции $y(x)$ являются гладкими и потому кривая, доставляющая минимум функционалу (1.11), удовлетворяет уравнению Эйлера.

Представим функционал (1.11) в виде суммы двух функционалов

$$I = \int_a^b F(x, y, y')dx = I_1 + I_2 = \int_a^{x^*} F(x, y, y')dx + \int_{x^*}^b F(x, y, y')dx.$$

Будем предполагать, что точка излома x^* варьируется (см. рис. 1.5).

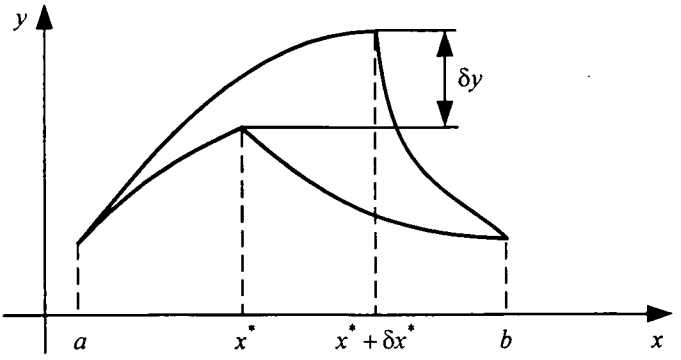


Рис. 1.5. График кривой, имеющей излом в точке x^*

Вычислим вариацию отдельно для функционалов I_1 и I_2. Воспользуемся общей формулой вариации функционала (1.42). Для функционала I_1 граничные условия состоят в следующем: левый конец кривой закреплен, а правый свободен. Поэтому, принимая во внимание уравнение Эйлера:

$$\delta I_1 = F_{y'}\Big|_{x=x^*-0} \cdot \delta y + \left[F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x=x^*-0} \cdot \delta x^*.$$

Для функционала I_2 закреплен правый конец кривой $y = y(x)$, а левый свободен, и, следовательно,

$$\delta I_2 = -F_{y'}\Big|_{x=x^*+0} \cdot \delta y - \left[F - y' \cdot F_{y'}\right]\Big|_{x=x^*+0} \cdot \delta x^*.$$

Если на линии $y = y(x)$ имеет место минимум функционала (1.11), то

$$\delta I = \delta I_1 + \delta I_2 = \left[F_{y'}\Big|_{x^*-0} - F_{y'}\Big|_{x^*+0} \right] \cdot \delta y + \\ + \left[\left(F - y' \cdot F_{y'} \right)\Big|_{x^*-0} - \left(F - y' \cdot F_{y'} \right)\Big|_{x^*+0} \right] \cdot \delta x^* = 0. \tag{1.47}$$

Приращения δy и δx^* являются независимыми, и поэтому из (1.47) следует

$$\begin{cases} F_{y'}\Big|_{x^*-0} - F_{y'}\Big|_{x^*+0} = 0, \\ \left(F - y' \cdot F_{y'} \right)\Big|_{x^*-0} - \left(F - y' \cdot F_{y'} \right)\Big|_{x^*+0} = 0. \end{cases} \tag{1.48}$$

Соотношения (1.48) представляют собой условия, которые должны выполняться в точках излома экстремалей. Они называются *условиями Вейерштрасса–Эрдмана.*

Проанализируем полученный результат. На каждом из отрезков $[a, x^*]$ и $[x^*, b]$ доставляющая минимум функционалу функция $y(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера. Общее решение двух уравнений Эйлера содержит четыре неизвестных постоянных интегрирования. Неизвестной также является точка излома экстремали x^*. Для определения указанных неизвестных имеются: два граничных условия (1.12), два условия Вейерштрасса (1.48) и условие непрерывности

$$y(x^* + 0) = y(x^* - 0).$$

1.3. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ ВЕЙЕРШТРАССА СИЛЬНОГО МИНИМУМА ФУНКЦИОНАЛА

Выше, при получении уравнения Эйлера, реализующая минимум функционала кривая $y = y(x)$ сравнивалась с кривыми, близкими в смысле нормы из C_1, т.е. близкими были не только сравниваемые кривые, но и их производные. Вейерштрасс получил необходимое условие минимума, сравнивая реализующую минимум кривую $y = y(x)$ с кривыми, производные которых не всюду близки к производной $y'(x)$.

Как уже отмечалось, сильный минимум функционала является в то же время слабым. Поэтому реализующая сильный минимум функционала функция $y(x)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера.

Пусть на кривой $y = y(x)$ реализуется сильный минимум функционала

$$I = \int_a^b F(x, y, y')\,dx. \tag{1.49}$$

Выберем произвольно на кривой $y = y(x)$ точку 1 и правее ее точку 3 так, чтобы между точками 1 и 3 кривая $y = y(x)$ не имела угловых точек. Проведем через точку 1 произвольную гладкую линию $y = Y(x)$ (см. рис. 1.6). Переменную точку 2 линии $y = Y(x)$ соединим с фиксированной точкой 3 линией E_{23}, определяемой уравнением $y = \bar{y}(x)$. Линию E_{23} будем выбирать близкой к линии $y = y(x)$ в смысле нормы из C_1.

По условию кривая доставляет сильный минимум функционалу (1.49). Положим, что точка 2 стремится к точке 1, пробегая значения линии $y = Y(x)$. В соответствии с определением сильного минимума значение функционала (1.49), вычисленного вдоль

линии A123B (рис. 1.6), должно быть больше (в крайнем случае равно) значения функционала, вычисленного вдоль линии $y = y(x)$, т.е. должно иметь место условие

$$\Delta I_{13} = \int_{x_1}^{x_2} F(x,Y,Y')dx + \int_{x_2}^{x_3} F(x,\overline{y},\overline{y}')dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx \geq 0. \qquad (1.50)$$

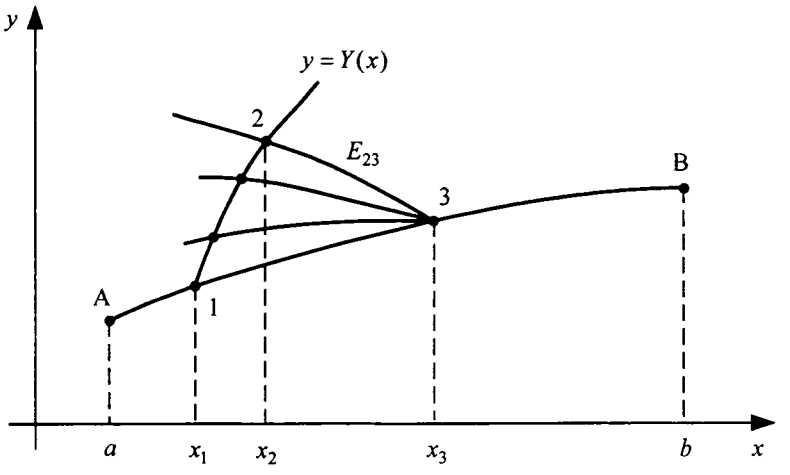


Рис. 1.6. К решению задачи нахождения необходимых условий сильного минимума функционала

Найдем главную часть приращения ΔI_{13}. Отметим, что

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x,Y,Y')dx \approx F(x,Y,Y')\Big|_{x_1} \delta x_1, \qquad (1.51)$$

где $\delta x_1 = x_2 - x_1$. Далее, главную часть приращения

$$\int_{x_2}^{x_3} F(x,\overline{y},\overline{y}')dx - \int_{x_2}^{x_3} F(x,y,y')\,dx$$

можно найти по формуле вариации функционала в задаче с подвижным левым и закрепленным правым концами. Так как функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера, то

$$\int_{x_2}^{x_3} F(x,\overline{y},\overline{y}')dx - \int_{x_1}^{x_2} F(x,y,y')dx \approx -\left[F_{y'}\cdot Y' + F - y'\cdot F_{y'}\right]\Big|_{x_1} \delta x_1. \qquad (1.52)$$

В равенствах (1.51) и (1.52) опущены слагаемые, имеющие порядок малости выше первого.

Введем обозначение

$$E(x,y,y',Y') = F(x,y,Y') - F(x,y,y') - (Y'-y')\cdot F_{y'}(x,y,y').$$

Принимая во внимание (1.50)–(1.52), запишем

$$\Delta I_{13} \approx E(x,y,y',Y')\delta x_1 \geq 0.$$

Из данного неравенства вытекает, что

$$E(x,y,y',Y')\Big|_{x_1} \geq 0. \qquad (1.53)$$

Так как точка 1 выбиралась произвольным образом, то условие (1.53) можно переписать в виде

$$E(x, y, y', Y') \geq 0.$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2 (необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала). *Говорят, что допустимая кривая* $y = y(x)$ *удовлетворяет условию Вейерштрасса, если в каждой точке* x *этой кривой выполняется неравенство*

$$E(x, y, y', Y') \geq 0 \tag{1.54}$$

для любого числа Y'. *Если кривая* $y = y(x)$ *доставляет сильный минимум функционалу* (1.49), *то она удовлетворяет условию Вейерштрасса* (1.54).

Как уже отмечалось, реализующая сильный минимум функционала кривая $y = y(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера. Поэтому сначала решается уравнение Эйлера и находится экстремаль $y = y(x)$. Затем на полученной экстремали $y = y(x)$ проверяется условие Вейерштрасса (1.54).

Пример 1.5. В п. 1.1 были рассмотрены два примера и показано, что функция $y = x$ доставляет сильный минимум функционалу

$$I = \int_0^1 (y')^2 \, dx$$

и только слабый минимум функционалу

$$I = \int_0^1 (y')^3 \, dx.$$

Проверим для каждого из этих примеров выполнение условия Вейерштрасса сильного минимума функционала.

Для первого примера

$$E(x, y, y', Y') = (Y')^2 - 1^2 - (Y' - 1) \cdot 2.$$

Функция E представляет собой параболу. Исследовав эту функцию на максимум и минимум, легко установить, что $\min E = 0$ и достигается в точке $Y' = 1$. Таким образом, линия $y = x$ удовлетворяет необходимому условию Вейерштрасса сильного минимума функционала.

Для второго примера

$$E(x, y, y', Y') = (Y')^3 - 1^3 - (Y' - 1) \cdot 3,$$

т.е. функция E представляет собой кубическую параболу. Кубическая парабола может принимать отрицательные значения, и, следовательно, линия $y = x$ не удовлетворяет необходимому условию Вейерштрасса сильного минимума функционала.

1.4. ЗАДАЧИ НА УСЛОВНЫЙ МИНИМУМ

В вариационном исчислении задачами на условный экстремум называют такие задачи, в которых минимум функционала ищется не на произвольных функциях, а на функциях, которые удовлетворяют некоторым дополнительным (кроме граничных) условиям. Рассмотрим сначала наиболее простой вариант вариационной задачи на условный минимум.

Задача Лагранжа. Пусть требуется найти минимум функционала

$$I = \int_a^b F(x, y_1, y_2, \ldots y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n') \, dx, \tag{1.55}$$

при условии, что допустимые функции $y_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ удовлетворяют граничным условиям

$$y_i(a) = A_i, \; y_i(b) = B_i \quad (i = \overline{1,n}) \tag{1.56}$$

и k уравнениям связи

$$g_i(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \quad (i = \overline{1,k}), \quad k < n. \tag{1.57}$$

Предполагается, что граничные условия (1.56) не противоречат уравнениям (1.57), т.е.

$$g_i(a, A_1, ..., A_n) = 0,$$

$$g_i(b, B_1, ..., B_n) = 0, \quad i = \overline{1,k}.$$

Пусть, далее, условия связи (1.57) являются независимыми, т.е. для всех значений $x, y_1, y_2, ..., y_n$, удовлетворяющих условиям (1.57):

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial g_k}{\partial y_1} & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_2} & \cdots & \dfrac{\partial g_k}{\partial y_n} \end{bmatrix} = k.$$

В рассматриваемой задаче минимум функционала (1.55) ищется не на произвольных функциях $y_i(x)$ $(i = \overline{1,k})$, а только на тех из них, которые удовлетворяют k уравнениям связи (1.57). Сформулированная задача на условный экстремум называется задачей Лагранжа с голономными связями.

Ниже для решения задач на условный экстремум используется некоторый стандартный прием. Этот прием не будет строго обосновываться. Однако он является очевидным на эвристическом уровне и позволяет очень просто получить необходимые условия экстремума в форме уравнений Эйлера.

Рассмотрим вместо функционала (1.55) функционал

$$I = \int_a^b \left[F(x, \mathbf{y}, \mathbf{y}') + \sum_{j=1}^{k} \lambda_j(x) g_j(x, \mathbf{y}) \right] dx, \tag{1.58}$$

здесь $\lambda_i(x)$ — некоторые неизвестные функции (неопределенные множители Лагранжа), $\mathbf{y} = (y_1, ..., y_n)$ и $\mathbf{y}' = (y_1', ..., y_n')$ — n-мерные векторы. Будем искать безусловный минимум функционала (1.58), полагая, что он задан на функциях $y_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ и $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1,n}$ (на функции $\lambda_j(x)$ граничные условия не накладываются). Очевидно, множество значений функционала (1.58) включает в себя множество значений функционала (1.55) при ограничениях (1.57). Далее, если выполнены уравнения связи (1.57), то функционал (1.58) совпадает с функционалом (1.55) при любых множителях Лагранжа $\lambda_j(x)$ $(j = \overline{1,k})$.

Функции $y_i(x)$ $(i = \overline{1,n})$ и $\lambda_j(x)$, $j = \overline{1,n}$, доставляющие безусловный минимум функционалу (1.58), должны удовлетворять следующим уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} F_{y_i} + \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \dfrac{\partial g_j}{\partial y_i} - \dfrac{d}{dx} F_{y_i'} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ g_j(x, \mathbf{y}) = 0, \quad j = \overline{1,k}. \end{cases} \tag{1.59}$$

Из (1.59) следует, что безусловный минимум функционала (1.58) достигается на функциях, которые удовлетворяют уравнениям связи (1.57), т.е. безусловный минимум функционала (1.58) достигается в точке, в которой он совпадает с функционалом (1.55). Поскольку при этом выполняются также уравнения связи (1.57), то, очевидно, соотношения (1.59) следует рассматривать как необходимые условия экстремума

сформулированной выше вариационной задачи (1.55)–(1.57). Уравнения (1.59) называются *уравнениями Эйлера–Лагранжа.*

Сформулируем окончательный результат. Итак, если функции $y_i^0(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ доставляют экстремум функционалу (1.55) при граничных условиях (1.56) и ограничениях (1.57), то найдутся такие множители Лагранжа $\lambda_j(x)\ \left(j=\overline{1,k}\right)$, что функции $y_i^0(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, $\lambda_j(x)\ \left(j=\overline{1,k}\right)$ удовлетворяют уравнениям Эйлера–Лагранжа (1.59).

Соотношения (1.59) представляют собой систему из $(n+k)$ уравнений относительно $(n+k)$ неизвестных функций $y_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ и $\lambda_j(x)\ \left(j=\overline{1,k}\right)$. Далее, n из этих уравнений являются дифференциальными уравнениями второго порядка. Поэтому общее решение системы (1.59) будет содержать $2n$ произвольных констант, для определения которых следует использовать $2n$ граничных условий (1.56).

Рассмотрим задачу на условный экстремум, когда уравнения связи содержат производные.

Пусть требуется найти минимум функционала (1.55) при условии, что допустимые функции $y_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$ удовлетворяют граничным условиям (1.56) и уравнениям связи

$$\Phi_j\left(x,\mathbf{y},\mathbf{y}'\right)=0\ \left(j=\overline{1,k}\right),\ k<n. \tag{1.60}$$

Как и выше, уравнения связи будем считать независимыми, т.е. будем полагать, что матрица

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_1'} & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_2'} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_1}{\partial y_n'} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial y_1'} & \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial y_2'} & \cdots & \dfrac{\partial\Phi_k}{\partial y_n'} \end{bmatrix}$$

имеет ранг k вдоль кривой, доставляющей минимум, для всех $x\in[a,b]$.

Как и в предыдущем случае, сформулированная задача на условный минимум сводится с помощью неопределенных множителей Лагранжа к задаче на безусловный минимум для функционала

$$I=\int_a^b\left[F\left(x,\mathbf{y},\mathbf{y}'\right)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(x)\Phi_j\left(x,\mathbf{y},\mathbf{y}'\right)\right]dx. \tag{1.61}$$

Для функционала (1.61) уравнения Эйлера–Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} F_{y_i}+\displaystyle\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_i}-\frac{d}{dx}\left[F_{y_i'}+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j\frac{\partial\Phi_j}{\partial y_i'}\right]=0,\ i=\overline{1,n}, \\ \Phi_j\left(x,\mathbf{y},\mathbf{y}'\right)=0,\ j=\overline{1,k}. \end{cases} \tag{1.62}$$

Уравнения (1.62) являются необходимыми условиями экстремума функционала (1.55) при наличии дифференциальных связей (1.60) и граничных условий (1.56). Соотношения (1.62) представляют собой систему из $(n+k)$ уравнений относительно $(n+k)$ неизвестных $y_i(x)\ \left(i=\overline{1,n}\right)$, $\lambda_j(x)\ \left(j=\overline{1,k}\right)$.

Задача Больца. В классической постановке задача Больца формулируется следующим образом: в классе функций

$$y_i(x),\ i=\overline{1,n},\ x_1\le x\le x_2,$$

удовлетворяющих дифференциальным уравнениям

$$\Phi_j(x,\mathbf{y},\mathbf{y}')=0,\ j=\overline{1,m},\ m<n$$

и условиям для концов

$$\psi_\mu\left(x_1,\mathbf{y}(x_1),x_2,\mathbf{y}(x_2)\right)=0,\ \mu=\overline{1,p},\ p<2n+2,$$

найти функцию $\mathbf{y}(x)$, на которой функционал

$$I=g\left(x_1,\mathbf{y}(x_1),x_2,\mathbf{y}(x_2)\right)+\int_{x_1}^{x_2} f(x,\mathbf{y},\mathbf{y}')dx$$

достигает минимума. Здесь, как и выше, $\mathbf{y}$ и $\mathbf{y}'$ — векторы.

Задача Майера с подвижными концами является задачей Больца, в которой функция f тождественно равна нулю, а задача Лагранжа — частный случай задачи Больца, когда в выражение для функционала I не входит функция g.

С помощью простых преобразований легко убедиться, что задача Больца приводится как к задаче Майера, так и к задаче Лагранжа. Действительно, задача Больца эквивалентна задаче Майера относительно неизвестных функций

$$y_i(x),\ y_{n+1}(x),\ i=\overline{1,n},\ x_1\le x\le x_2,$$

удовлетворяющих $(m+1)$ уравнениям связи

$$\Phi_j(x,\mathbf{y},\mathbf{y}')=0,\ j=\overline{1,m},\ y'_{n+1}-f(x,\mathbf{y},\mathbf{y}')=0,$$

$(p+1)$ граничным условиям

$$\psi_\mu\left(x_1,\mathbf{y}(x_1),x_2,\mathbf{y}(x_2)\right)=0,\ \mu=\overline{1,p},\ y_{n+1}(x_1)=0,$$

и с функционалом вида

$$I=g\left(x_1,\mathbf{y}(x_1),x_2,\mathbf{y}(x_2)\right)+y_{n+1}(x_1).$$

Далее, задача Больца эквивалентна задаче Лагранжа с неизвестными функциями

$$y_i(x),\ y_{n+1}(x),\ i=\overline{1,n},\ x_1\le x\le x_2,$$

удовлетворяющими уравнениям связи и граничным условиям

$$\Phi_j(x,\mathbf{y},\mathbf{y}')=0,\ y'_{n+1}=0,\ j=\overline{1,m},$$

$$\psi_\mu\left(x_1,\mathbf{y}(x_1),x_2,\mathbf{y}(x_2)\right)=0,\ \mu=\overline{1,p},\ y_{n+1}(x_1)-\frac{g}{x_2-x_1}=0,$$

и с функционалом вида

$$I=\int_{x_1}^{x_2}\left[f(x,\mathbf{y},\mathbf{y}')+y_{n+1}\right]dx.$$

Из изложенного материала, таким образом, следует, что эти три задачи имеют равную степень общности.

1.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

1.5.1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим технический объект, движением которого можно управлять. Пусть движение объекта задается системой дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m),\ i=\overline{1,n}. \tag{1.63}$$

Обозначим $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ — n-мерный вектор состояния, $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_m)$ — m-мерный вектор управления. Относительно управления $\mathbf{u}$ будем предполагать, что вектор $\mathbf{u}$ является кусочно-гладкой функцией, имеющей конечное число разрывов первого рода. Управление $\mathbf{u}$ может принимать свои значения из некоторой ограниченной области U. Область U можно задавать, например, неравенствами

$$A_j^1 \le u_j \le A_j^2, \quad j=\overline{1,m}. \tag{1.64}$$

Векторное пространство с декартовыми координатами $x_1,x_2,\ldots,x_n$ обозначим X и будем называть фазовым пространством системы (1.63). Каждому вектору $\mathbf{x}$ в фазовом пространстве соответствует некоторая точка. Если задано управление $\mathbf{u}(t)=(u_1(t),\ldots,u_m(t))$, $t_0 \le t \le t_1$, и начальное условие $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0=(x_1^0,\ldots,x_n^0)$, то решение системы (1.63) будет определять движение объекта. В фазовом пространстве X этому движению соответствует фазовая траектория $\mathbf{x}(t)=(x_1(t),\ldots,x_n(t))$. В этом случае говорят, что управление $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, переводит фазовую точку из начального положения $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$ в конечное положение $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}^1$ $\left(\mathbf{x}^1=(x_1^1,\ldots,x_n^1)\right)$.

Рассмотрим следующую задачу. *Требуется среди управлений* $\mathbf{u}(t)\in U$, $t_0 \le t \le t_1$ (моменты времени t_0 и t_1 нефиксированы), *переводящих фазовую точку из заданного начального положения* $\mathbf{x}^0$ *в заданное конечное положение* $\mathbf{x}^1$, *найти такое, которое доставляет минимум функционалу*

$$I=\int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1,\ldots,x_n,u_1,\ldots,u_m)\,dt. \tag{1.65}$$

Управление $\mathbf{u}(t)$, решающее поставленную задачу, называется *оптимальным управлением*, а соответствующая ему фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$ — *оптимальной фазовой траекторией*.

Иногда вместо начальной и конечной точек фазового пространства задаются начальные и конечные многообразия. Например, *в фазовом пространстве* X *системы* (1.63) *заданы многообразия* s_0 *и* s_1, *определяемые системами уравнений*

$$s_0:\ \varphi_l(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ l=\overline{1,p},\ p\le n,$$

$$s_1:\ \beta_\nu(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ \nu=\overline{1,k},\ k\le n.$$

Требуется среди управлений $\mathbf{u}(t)\in U$, $t_0 \le t \le t_1$, *переводящих фазовую точку с многообразия* s_0 *на многообразие* s_1, *найти такое, которое доставляет минимум функционалу* (1.65). *Такую задачу оптимального управления называют задачей с подвижными концами.*

Сформулированная задача оптимального управления является вариационной задачей на условный минимум. По сравнению с классическим вариантом, данная задача усложнена наличием ограничений типа неравенств (см. (1.64)). Ограничения типа неравенств практически всегда имеют место в задачах оптимального управления техническими объектами. Однако путем несложной подстановки ограничения типа неравенств могут быть легко сведены к ограничениям типа равенств, и тем самым задача оптимального управления сводится к вариационной задаче на условный минимум.

Будем полагать, что функции

$$f_i(\mathbf{x},\mathbf{u})\ \left(i=\overline{0,n}\right),\ \varphi_l(\mathbf{x})\ \left(l=\overline{1,p}\right),\ \beta_\nu(\mathbf{x})\ \left(\nu=\overline{1,k}\right)$$

имеют непрерывные производные по всем своим аргументам. Пусть область U задается неравенствами (1.64).

Введем m дополнительных переменных $v_1, v_2, \ldots, v_m$ и непрерывно дифференцируемые функции

$$\alpha_j(u_j, v_j) = u_j - \chi_j(v_j) = 0, \quad j = \overline{1,m}.$$

Функции $\chi_j(v_j)$ должны удовлетворять следующим условиям:

$$\max \chi_j(v_j) = A_j^2;$$

$$\min \chi_j(v_j) = A_j^1.$$

На рис. 1.7 изображен график такой функции.

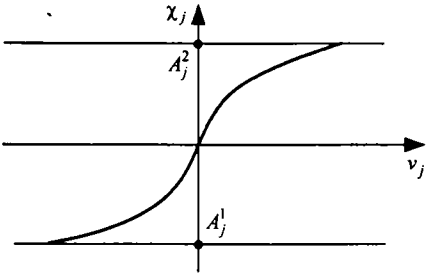


Рис. 1.7. График функции $\chi_j(v_j)$

Рассмотрим следующую задачу Майера вариационного исчисления. Требуется среди функций $x_i(t)$, $u_j(t)$, $v_j(t)$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1,m}$, $t_0 \le t \le t_1$, удовлетворяющих системе дифференциальных уравнений

$$g_i(\dot{x}_i, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = \dot{x}_i - f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1.66}$$

уравнениям в конечных соотношениях

$$\alpha_j(u_j, v_j) = u_j - \chi_j(v_j) = 0, \quad j = \overline{1,m}, \tag{1.67}$$

а также условиям на концах

$$\begin{cases} \varphi_0(x_0(t_0), x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)) = x_0(t_0) = 0, \\ \varphi_l(x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = 0, \quad l = \overline{1,p}, \quad p \le n; \end{cases} \tag{1.68}$$

$$\beta_\nu(x_1(t_1), x_2(t_1), \ldots, x_n(t_1)) = 0, \quad \nu = \overline{1,k}, \quad k \le n, \tag{1.69}$$

найти такие, которые доставляют минимум функционалу

$$I = x_0(t_1). \tag{1.70}$$

Сформулированная задача Майера эквивалентна поставленной выше задаче оптимального управления с подвижными концами. Действительно, дифференциальные уравнения в этих задачах совпадают. Условие (1.67) позволяет свести ограничения типа неравенств к ограничениям типа равенств. При этом дополнительные переменные $v_j(t)$ $\left(j = \overline{1,m}\right)$ не входят в управления (1.66). Из первого уравнения (1.66) и первого условия (1.68) следует, что

$$I = x_0(t_1) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m)\, dt.$$

В двухточечном случае, т.е. когда заданы начальные и конечные значения вектора **x**, условия (1.68) и (1.69) принимают вид

$$\begin{cases} x_0(t_0)=0, \;\; x_i(t_0)-x_i^0=0, \\ x_i(t_1)-x_i^1=0, \;\; i=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{1.71}$$

Будем предполагать, что уравнения $u_j(t)$ и $v_j(t)$ могут иметь разрывы первого рода.

1.5.2. Необходимое условие экстремума

Сформулированная задача Майера вариационного исчисления как аналог задачи оптимального управления является задачей на условный минимум. Хотя условия, наложенные на функции $x_i(t)$, $u_j(t)$, $v_j(t)$, являются более сложными, чем это рассматривалось в п. 1.4, общая идея решения задачи остается прежней: необходимо воспользоваться неопределенными множителями Лагранжа. Обращение именно к задаче Майера обусловлено желанием получить результаты, аналогичные принципу максимума Понтрягина. Далее, в целях упрощения весьма громоздкого вывода необходимых условий оптимальности, мы будем использовать обоснование, которое попрежнему выполняется на эвристическом уровне, несколько отличающееся от обоснования, изложенного в п. 1.4.

Рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} I = x_0(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} \Bigg\{ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i(t) \cdot g_i\left(\frac{dx_i}{dt}, x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m\right) - \\ - \sum_{j=1}^{m} \mu_j(t) \cdot \alpha_j(u_j, v_j) \Bigg\} dt + \sum_{l=0}^{p} \rho_l^- \cdot \varphi_l\left(x_0(t_0), \ldots, x_n(t_0)\right) + \\ + \sum_{\nu=1}^{k} \rho_\nu^+ \cdot \beta_\nu\left(x_1(t_1), \ldots, x_n(t_1)\right), \end{aligned} \tag{1.72}$$

здесь ρ_l^-, ρ_ν^+, $\lambda_i(t)$, $\mu_j(t)$ — неопределенные множители Лагранжа. Если функции $x_i(t), u_j(t), v_j(t)$ удовлетворяют уравнениям (1.66)–(1.69), то значение функционала (1.72) совпадает со значением функционала (1.70) при любых ρ_l^-, ρ_ν^+, $\lambda_i(t)$, $\mu_j(t)$.

Найдем вариацию функционала (1.72). При определении указанной вариации будем считать, что в интервале (t_0, t_1) имеется лишь одна точка разрыва управлений $u_i(t)$, $v_j(t)$. Наличие нескольких точек разрыва управлений приведет лишь к громоздкости дальнейших выкладок, но не повлечет за собой изменения окончательного результата.

Пусть t^* — точка разрыва управлений. Точка t^* разбивает интервал (t_0, t_1) на два подынтервала (t_0, t^*) и (t^*, t_1), в каждом из которых управления $u_j(t), v_j(t)$ непрерывны. Обозначим через $x_i^-(t)$, $u_j^-(t)$, $v_j^-(t)$, $\lambda_i^-(t)$, $\mu_j^-(t)$ соответствующие значения в интервале (t_0, t^*), а через $x_i^+(t)$, $u_j^+(t)$, $v_j^+(t)$, $\lambda_i^+(t)$, $\mu_j^+(t)$ — значения переменных в интервале (t^*, t_1).

При получении вариации функционала сравниваются значения функционала на функциях $x_i(t)$, $u_j(t)$, $v_j(t)$ со значениями функционала на близких функциях

$x_i(t)+\delta x_i(t)$, $u_j(t)+\delta u_j(t)$, $v_j(t)+\delta v_j(t)$. Будем также варьировать моменты времени t^* и t_1. При этом необходимо различать «вариацию точки», например, $\Delta x_i^+(t^*)$ от «вариации в точке» $\delta x_i^+(t^*)$:

$$\Delta x_i^+(t^*)=x_i^+(t^*+\delta t^*)+\delta x_i^+(t^*+\delta t^*)-x_i^+(t^*)\approx\delta x_i^+(t^*)+\dot{x}_i^+(t^*)\cdot\delta t^*.$$

Вообще, имеют место следующие равенства:

$$\Delta x_i^{\pm}(t^*)\approx\delta x_i^{\pm}(t^*)+\frac{d}{dt}\left[x_i^{\pm}(t^*)\right]\cdot\delta t^*,$$

$$\Delta x_i^+(t_1)\approx\delta x_i^+(t_1)+\frac{d}{dt}\left[x_i^+(t_1)\right]\cdot\delta t_1,\ i=\overline{0,n}.$$

Выпишем разность

$$\begin{aligned}
\Delta I = {} & x_0^+(t_1+\delta t_1)+\delta x_0^+(t_1+\delta t_1)-x_0^+(t_1)+\\
& +\int_{t_0}^{t^*}\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^-\cdot\left[g_i\left(\frac{dx_i^-}{dt}+\frac{d\delta x_i^-}{dt},\mathbf{x}^-+\delta\mathbf{x}^-,\mathbf{u}^-+\delta\mathbf{u}^-\right)-\right.\right.\\
& \left.\left.-g_i\left(\frac{dx_i^-}{dt},\mathbf{x}^-,\mathbf{u}^-\right)\right]-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^-\cdot\left[\alpha_j\left(u_j^-+\delta u_j^-,v_j^-+\delta v_j^-\right)-\alpha_j\left(u_j^-,v_j^-\right)\right]\right\}dt+\\
& +\int_{t^*}^{t_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^+\cdot\left[g_i\left(\frac{dx_i^+}{dt}+\frac{d\delta x_i^+}{dt},\mathbf{x}^++\delta\mathbf{x}^+,\mathbf{u}^++\delta\mathbf{u}^+\right)-\right.\right.\\
& \left.\left.-g_i\left(\frac{dx_i^+}{dt},\mathbf{x}^+,\mathbf{u}^+\right)\right]-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^+\cdot\left[\alpha_j\left(u_j^++\delta u_j^+,v_j^++\delta v_j^+\right)-\alpha_j\left(u_j^+,v_j^+\right)\right]\right\}dt+\\
& +\int_{t^*}^{t^*+\delta t^*}\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^-\cdot\left[g_i\left(\frac{dx_i^-}{dt}+\frac{d\delta x_i^-}{dt},\mathbf{x}^-+\delta\mathbf{x}^-,\mathbf{u}^-+\delta\mathbf{u}^-\right)\right]-\right.\\
& \left.-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^-\cdot\alpha_j\left(u_j^-+\delta u_j^-,v_j^-+\delta v_j^-\right)\right\}dt+\\
& +\int_{t_1}^{t_1+\delta t_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^+\cdot\left[g_i\left(\frac{dx_i^+}{dt}+\frac{d\delta x_i^+}{dt},\mathbf{x}^++\delta\mathbf{x}^+,\mathbf{u}^++\delta\mathbf{u}^+\right)\right]-\right.\\
& \left.-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^+\cdot\alpha_j\left(u_j^++\delta u_j^+,v_j^++\delta v_j^+\right)\right\}dt-\\
& -\int_{t^*}^{t^*+\delta t^*}\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^+\cdot\left[g_i\left(\frac{dx_i^+}{dt}+\frac{d\delta x_i^+}{dt},\mathbf{x}^++\delta\mathbf{x}^+,\mathbf{u}^++\delta\mathbf{u}^+\right)\right]-\right.\\
& \left.-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^+\cdot\alpha_j\left(u_j^++\delta u_j^+,v_j^++\delta v_j^+\right)\right\}dt+
\end{aligned}$$

$$+\sum_{l=0}^{p}\rho_l^-\cdot\varphi_l\left(x_0^-(t_0)+\delta x_0^-(t_0),\mathbf{x}^-(t_0)+\delta\mathbf{x}^-(t_0)\right)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\cdot\beta_\nu\left(\mathbf{x}^+(t_1+\delta t_1)+\delta\mathbf{x}^+(t_1+\delta t_1)\right)-$$

$$-\sum_{l=0}^{p}\rho_l^-\cdot\varphi_l\left(x_0^-(t_0),\mathbf{x}^-(t_0)\right)-\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\cdot\beta_\nu\left(\mathbf{x}^+(t_1)\right),$$

где $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, $\mathbf{u}=(u_1,\ldots,u_m)$, $\delta\mathbf{x}=(\delta x_1,\ldots,\delta x_n)$, $\delta\mathbf{u}=(\delta u_1,\ldots,\delta u_m)$ — векторы. Выделим главную линейную часть приращения функционала

$$\Delta I\approx\delta\mathbf{x}^+(t_1)+\frac{d}{dt}\left[x_0^+(t_1)\right]\cdot\delta t_1+$$

$$+\int_{t_0}^{t^*}\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left[\frac{\partial g_i}{\partial\dot{x}_i^-}\cdot\delta\frac{dx_i^-}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_s^-}\cdot\delta x_s^-+\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial u_\nu^-}\cdot\delta u_\nu^-\right]-\right.$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^-\cdot\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial u_j^-}\cdot\delta u_j^-+\frac{\partial\alpha_j}{\partial v_j^-}\cdot\delta v_j^-\right)\right\}dt+$$

$$+\int_{t^*}^{t_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}\lambda_i\left[\frac{\partial g_i}{\partial\dot{x}_i^+}\delta\frac{dx_i^+}{dt}+\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial g_i}{\partial x_s^+}\cdot\delta x_s^++\sum_{\nu=1}^{m}\frac{\partial g_i}{\partial u_\nu^+}\cdot\delta u_\nu^+\right]-\right. \qquad (1.73)$$

$$\left.-\sum_{j=1}^{m}\mu_j^+\cdot\left(\frac{\partial\alpha_j}{\partial u_j^+}\cdot\delta u_j^++\frac{\partial\alpha_j}{\partial v_j^+}\cdot\delta v_j^+\right)\right\}dt+$$

$$+\sum_{l=0}^{p}\rho_l^-\cdot\sum_{i=0}^{n}\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_i^-(t_0)}\cdot\delta x_i^-(t_0)+\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\cdot\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\beta_\nu}{\partial x_i^+(t_1)}\cdot\delta x_i^+(t_1)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\cdot\sum_{i=1}^{k}\frac{\partial\beta_\nu}{\partial x_i^+(t_1)}\cdot\dot{x}_i^+(t_1)\cdot\delta t_1.$$

Воспользуемся формулами

$$\int_{t_0}^{t^*}\lambda_i^-(t)\cdot\frac{d\delta x_i^-(t)}{dt}dt=\lambda_i^-(t)\cdot\delta x_i^-(t)\Big|_{t_0}^{t^*}-\int_{t_0}^{t^*}\frac{d\lambda_i^-(t)}{dt}\cdot\delta x_i^-(t)dt=$$

$$=\lambda_i^-(t^*)\cdot\delta x_i^-(t^*)-\lambda_i^-(t_0)\cdot\delta x_i^-(t_0)-\int_{t_0}^{t^*}\frac{d\lambda_i^-(t)}{dt}\cdot\delta x_i^-(t)dt,$$

$$\int_{t^*}^{t_1}\lambda_i^+(t)\cdot\frac{d\delta x_i^+(t)}{dt}dt=\lambda_i^+(t_1)\cdot\delta x_i^+(t_1)-\lambda_i^+(t^*)\cdot\delta x_i^+(t^*)-\int_{t^*}^{t_1}\frac{d\lambda_i^+(t)}{dt}\cdot\delta x_i^+(t)dt.$$

Из условия непрерывности функций $x_i(t)$ и $x_i(t)+\delta x_i(t)$ следует, что $\Delta x_i^+(t^*)=\Delta x_i^-(t^*)=\Delta x_i(t^*)$. Далее, выразим в равенстве (1.73) $\delta x_i^-(t^*)$ и $\delta x_i^+(t^*)$ через $\dot{\Delta}x_i(t^*)$. Тогда вариация функционала примет вид

$$\delta I = -\int_{t_0}^{t^*}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{d\lambda_i^-}{dt}+\sum_{\alpha=0}^{n}\lambda_\alpha^-\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i^-}\right)\cdot\delta x_i^-\right]+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\delta u_j^-\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^-\cdot\frac{\partial f_i}{\partial u_j^-}+\mu_j^-\cdot\frac{\partial\alpha_j}{\partial u_j^-}\right)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j^-\cdot\frac{\partial\alpha_j}{\partial v_j^-}\cdot\delta v_j^-\Bigg\}dt-$$

$$-\int_{t^*}^{t_1}\left\{\sum_{i=0}^{n}\left[\left(\frac{d\lambda_i^+}{dt}+\sum_{\alpha=0}^{n}\lambda_\alpha^+\cdot\frac{\partial f_\alpha}{\partial x_i^+}\right)\cdot\delta x_i^+\right]+\right.$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\delta u_j^+\cdot\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^+\cdot\frac{\partial f_i}{\partial u_j^+}+\mu_j^+\cdot\frac{\partial\alpha_j}{\partial u_j^+}\right)+\sum_{j=1}^{m}\mu_j^+\cdot\frac{\partial\alpha_j}{\partial v_j^+}\cdot\delta v_j^+\Bigg\}dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\left(\lambda_i^-\left(t^*\right)-\lambda_i^+\left(t^*\right)\right)\cdot\Delta x_i\left(t^*\right)+\left(1+\lambda_0^+\left(t_1\right)\right)\cdot\delta x_0^+\left(t_1\right)-$$

$$-\left[\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^-\left(t^*\right)\cdot f_i^-\left(t^*\right)-\sum_{i=0}^{n}\lambda_i^+\left(t^*\right)\cdot f_i^+\left(t^*\right)\right]\delta t^*+ \qquad (1.74)$$

$$+\sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{l=0}^{p}\rho_l^-\cdot\frac{\partial\varphi_l}{\partial x_i^-\left(t_0\right)}-\lambda_i^-\left(t_0\right)\right]\cdot\delta x_i^-\left(t_0\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\cdot\frac{\partial\beta_\nu}{\partial x_i^+\left(t_1\right)}+\lambda_i^+\left(t_1\right)\right]\cdot\delta x_i^+\left(t_1\right)+$$

$$+\left[\frac{dx_0\left(t_1\right)}{dt}+\frac{d}{dt}\cdot\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\cdot\beta_\nu\left(x\left(t_1\right)\right)\right]\cdot\delta t_1.$$

При выводе вариации функционала (1.74) предполагалось, что время движения не задано. Поскольку система является автономной, то движение системы не зависит от того, в какой конкретный момент времени оно началось, а полностью определяется временем движения. Поэтому при выводе вариации функционала (1.74) начальный момент времени t_0 предполагался фиксированным, а варьировался только конечный момент времени t_1. Далее, если считать, что время движения задано, т.е. фиксированы начальный и конечный момент времени, то соответствующая формула вариации функционала по-прежнему задается равенством (1.74), в котором следует положить $\delta t_1 = 0$.

Если функции $x_i(t)$, $u_j(t)$, $v_j(t)$ реализуют минимум функционала (1.72), то по теореме 1.1 вариация такого функционала равна нулю, т.е. $\delta I = 0$.

В силу уравнений связи (1.66), (1.67) и условий для концов (1.68) и (1.69) не все приведенные в равенстве (1.74) вариации переменных являются независимыми. Именно, зависимыми являются: $2(n+1)+2m$ вариаций δx_i^-, δx_i^+, δu_j^-, δu_j^+, δv_j^-, δv_j^+, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,m}$, из общего их числа $2(n+1)+4m$; $(p+1)+k$ вариаций $\delta x_i(t_0)$, $\delta x_i(t_1)$, $i=\overline{0,n}$.

Выберем множители Лагранжа $\lambda_i^-(t)$, $\lambda_i^+(t)$, $\mu_j^-(t)$, $\mu_j^+(t)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,m}$, так, чтобы в равенстве (1.74) коэффициенты при зависимых вариациях $\delta x_i^-(t)$, $\delta x_i^+(t)$, $\delta u_j^-(t)$, $\delta u_j^+(t)$ обращались в нуль. Тогда

$$\begin{cases} \dfrac{d\lambda_i^-}{dt} + \sum\limits_{\alpha=0}^{n} \lambda_\alpha^- - \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_i^-} = 0, \\ \dfrac{d\lambda_i^+}{dt} + \sum\limits_{\alpha=0}^{n} \lambda_\alpha^+ \dfrac{\partial f_\alpha}{\partial x_i^+} = 0, \quad i = \overline{0,n}, \end{cases} \tag{1.75}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i^- \cdot \dfrac{\partial f_i}{\partial u_j^-} + \mu_j^- \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial u_j^-} = 0, \\ \sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i^+ \cdot \dfrac{\partial f_i}{\partial u_j^+} + \mu_j^+ \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial u_j^+} = 0, \quad j = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{1.76}$$

Выберем множители Лагранжа ρ_l^-, ρ_v^+ при $(p+1+k)$ зависимых вариациях $\delta x_i^-(t_0)$, $\delta x_i^+(t_1)$, чтобы обратить в нуль коэффициенты при этих вариациях, и, учитывая независимость (произвольность) остальных вариаций, найдем

$$\begin{cases} \mu_j^-(t) \cdot \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial v_j^-} = 0, \\ \mu_j^+(t) \cdot \dfrac{\partial \alpha_j}{\partial v_j^+} = 0; \end{cases} \tag{1.77}$$

условия Вейерштрасса–Эрдмана

$$\begin{aligned} &\lambda_i^-(t^*) = \lambda_i^+(t^*), \quad i = \overline{0,n}, \\ &\sum_{i=0}^{n} \lambda_i^-(t^*) \cdot \frac{dx_i^-(t^*)}{dt} - \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^+(t^*) \cdot \frac{dx_i^+(t^*)}{dt} = 0; \end{aligned} \tag{1.78}$$

и условия для концов

$$\begin{aligned} &\sum_{l=0}^{p} \rho_l^- \cdot \frac{\partial \varphi_l}{\partial x_i^-(t_0)} - \lambda_i^-(t_0) = 0, \quad i = \overline{0,n}, \\ &\sum_{v=1}^{k} \rho_v^+ \cdot \frac{\partial \beta_v}{\partial x_i^+(t_1)} + \lambda_i^+(t_1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \end{aligned} \tag{1.79}$$

$$1 + \lambda_0(t_1) = 0, \tag{1.80}$$

$$\frac{dx_0^+(t_1)}{dt} + \frac{d}{dt} \sum_{v=1}^{k} \rho_v^+ \cdot \beta_v(x(t_1)) = 0.$$

Преобразуем полученные соотношения в более удобную форму.

Введем функцию

$$H(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\mu}) = H_\lambda(\boldsymbol{\lambda}, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + H_\mu(\boldsymbol{\mu}, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \sum_{j=1}^{m} \mu_j \alpha_j(\mathbf{u}, \mathbf{v}).$$

Здесь $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \ldots, \lambda_n)$, $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_m)$, $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \ldots, \mu_m)$ — векторы. Тогда уравнения (1.76) и (1.77) можно записать в виде

$$\begin{cases} \dfrac{\partial H^-}{\partial u_j^-} = 0, \ \dfrac{\partial H^-}{\partial v_j^-} = 0, \\ \dfrac{\partial H^+}{\partial u_j^+} = 0, \ \dfrac{\partial H^+}{\partial v_j^+} = 0, \quad j = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{1.81}$$

То есть условия (1.76) и (1.77) совпадают с условиями экстремума функции H.

Второе условие (1.78) выливается в условие непрерывности H_λ и, следовательно, функции H (функция H_μ в соответствии с уравнениями связи (1.67) равна нулю):

$$\begin{aligned} H_\lambda^-\left(t^*\right) &= H_\lambda^+\left(t^*\right), \\ H^-\left(t^*\right) &= H^+\left(t^*\right). \end{aligned} \tag{1.82}$$

Уравнения (1.66) и (1.67) могут быть записаны в виде

$$\frac{dx_i^\mp}{dt} = \frac{\partial H^\mp}{\partial \lambda_i^\mp}, \quad i = \overline{0,n}, \tag{1.83}$$

$$\frac{\partial H^\mp}{\partial \mu_j^\mp} = 0, \quad j = \overline{1,m}. \tag{1.84}$$

Отметим далее, что вместо соотношений (1.75) можно записать уравнения

$$\frac{d\lambda_i^\mp}{dt} = -\frac{\partial H^\mp}{\partial x_i^\pm}, \quad i = \overline{0,n}. \tag{1.85}$$

Покажем, что на оптимальной траектории функция $H = \text{const}$. Запишем производную

$$\frac{dH}{dt} = \sum_{i=0}^{n} \frac{\partial H}{\partial \lambda_i} \cdot \frac{d\lambda_i}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial \mu_j} \cdot \frac{d\mu_j}{dt} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial u_j} \cdot \frac{du_j}{dt} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial H}{\partial v_j} \cdot \frac{dv_j}{dt}. \tag{1.86}$$

Из (1.86), принимая во внимание (1.81), (1.83)–(1.85), найдем, что

$$\frac{dH}{dt} = 0$$

и, следовательно, функция H, рассматриваемая как функция времени, постоянна.

Рассмотрим частный случай, когда левые и правые концы линий $x_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, закреплены. В этом случае условия для концов принимают вид (1.71), и из соотношений (1.79), (1.80) следуют равенства:

$$\begin{aligned} &\rho_i^- - \lambda_i^-\left(t_0\right) = 0, \quad i = \overline{0,n}, \\ &\rho_i^+ - \lambda_i^+\left(t_1\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \\ &1 + \lambda_0^+\left(t_1\right) = 0, \\ &\frac{dx_0^+\left(t_1\right)}{dt} + \sum_{i=1}^{n} \rho_i^+ \cdot \frac{dx_i^+\left(t_1\right)}{dt} = 0. \end{aligned} \tag{1.87}$$

Из (1.87) находим, что

$$H_\lambda\left(\boldsymbol{\lambda}^+\left(t_1\right), \mathbf{x}^+\left(t_1\right), \mathbf{u}^+\left(t_1\right)\right) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i^+\left(t_1\right) \cdot f_i\left(\mathbf{x}^+\left(t_1\right), \mathbf{u}^+\left(t_1\right)\right) = 0. \tag{1.88}$$

Из (1.88), принимая во внимание, что $H_\mu = 0$, вытекает

$$H(t) \equiv 0\,, \quad t_0 \le t \le t_1. \tag{1.89}$$

Если кривые $x_i(t)$, $u_j(t)$, $v_j(t)$, $i = \overline{0,n}$, $j = \overline{1,m}$, реализуют минимум функционала по отношению ко всему классу допустимых линий, то они тем более реализуют минимум функционала по отношению к линиям с закрепленными концами, т.е. по отношению к более узкому классу линий. Отсюда следует, что условие (1.89) справедливо и при граничных условиях (1.68), (1.69).

1.5.3. Необходимые условия Вейерштрасса

Для сформулированной в настоящем параграфе задачи Майера В.А. Троицким [96] было получено необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума, которое заключается в следующем: если на функциях $x_i(t)$, $u_j(t)$, $v_j(t)$, $i=\overline{0,n}$, $j=\overline{1,m}$, реализуется сильный минимум функционала (1.70), то в каждой точке отрезка $t_0 \le t \le t_1$ должно выполняться неравенство

$$H(\mathbf{x},\mathbf{U},\mathbf{V},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}) \le H(\mathbf{x},\mathbf{u},\mathbf{v},\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}),$$

здесь векторы **x**, **u**, **v** соответствуют кривой, на которой реализуется минимум функционала, а **U** и **V** — любые управления, удовлетворяющие условиям

$$\alpha_j\left(U_j,V_j\right)=0,\quad j=\overline{1,m}.$$

Если вспомнить, что дополнительное управление **v** в функцию H_λ не входит и что $H_\mu=0$, то условие Вейерштрасса сильного минимума можно записать в виде

$$H_\lambda(\mathbf{x},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) \le H_\lambda(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}). \qquad (1.90)$$

В неравенстве (1.90) **u** — оптимальное управление, а **U** — любое допустимое управление, т.е. управление, удовлетворяющее условиям

$$A_j^1 \le U_j \le A_j^2,\quad j=\overline{1,m}.$$

Таким образом, на кривой, дающей сильный минимум функционалу (1.70), функция H_λ, рассматриваемая как функция вектора **u**, должна принимать максимально допустимое значение.

Сформулированные в данном параграфе необходимые условия оптимальности, как нетрудно видеть, практически полностью совпадают с принципом максимума Понтрягина. Поэтому их можно успешно использовать для определения оптимального управления и оптимальной траектории. Однако на практике целесообразно пользоваться непосредственно принципом максимума, который обладает большей общностью и который формулируется в удобной для практического использования компактной форме.

ГЛАВА 2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА

Принципом максимума называют математический метод, который был разработан академиком Л.С. Понтрягиным и его учениками для решения задач оптимального управления. Предложенная авторами метода математическая модель процесса и четкое компактное формулирование основного результата — сильных необходимых условий оптимальности — оказались очень удачными. Метод пользуется большой популярностью. Этому в немалой степени способствовала изданная в 1961 г. монография «Математическая теория оптимальных процессов», которая хорошо отвечала духу того времени и была написана с большим педагогическим мастерством. Несмотря на то, что первые публикации по принципу максимума появились уже более сорока лет назад, принцип максимума и в настоящее время остается основным инструментом для определения оптимального управления и оптимальных траекторий.

В данной главе рассматриваются задачи оптимального управления, когда заданы ограничения только на вектор управления. Этому соответствует классический вариант принципа максимума, который наиболее часто используется на практике. Наряду с изложением условий оптимальности в форме принципа максимума, большое внимание уделяется рассмотрению их применения для определения оптимального управления и оптимальной траектории.

Строго говоря, *принцип максимума ориентирован на определение программного оптимального управления.* Однако он часто позволяет легко выявить структуру оптимального управления и вид оптимальных траекторий, что дает возможность выделить всю совокупность оптимальных траекторий. Таким образом, *принцип максимума можно успешно использовать для синтеза оптимального управления.* Большинство рассмотренных ниже примеров посвящены именно определению всей совокупности оптимальных траекторий и, следовательно, синтезу оптимального управления.

Изложение материала начинается с формулировки задачи оптимального управления, хотя она приводится и в первой главе работы. Однако такой способ изложения позволяет читателю (особенно читателю, которого интересует прежде всего прагматическая сторона — решение практических задач по определению оптимального управления) изучить один из наиболее эффективных методов теории оптимального управления, не изучая первой главы учебника.

2.1. НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ФОРМЕ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

В п. 1.5 были получены необходимые условия, которым должны удовлетворять траектория и управление, реализующие сильный минимум функционала. В настоящем параграфе они обобщаются и приводятся в компактной форме принципа максимума.

2.1.1. Задача оптимального управления

Рассмотрим сначала конкретный пример. Пусть имеется двигатель постоянного тока, который работает на механизм M (рис. 2.1). Движением двигателя можно управлять, изменяя напряжение $u_я$, подводимое к цепи якоря (напряжение $u_в$ будем считать постоянным). Из условия электрической прочности напряжение, подводимое к цепи якоря, должно быть ограничено:

$$|u_я| \le A.$$

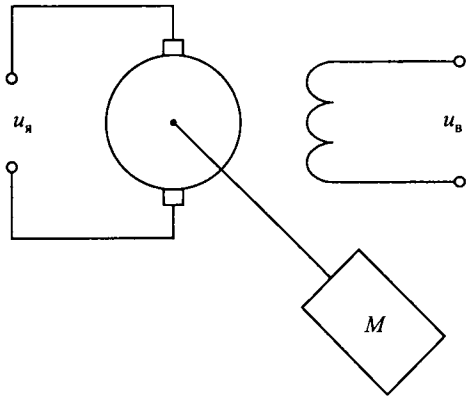


Рис. 2.1. К постановке задачи оптимального управления

Пусть требуется осуществить поворот вала двигателя на некоторый заданный угол. Интуитивно ясно, что существует бесконечное множество функций $u_я(t)$, которые решают поставленную задачу, т.е. обеспечивают поворот вала двигателя на заданный угол. Но тогда естественно поставить еще одну задачу: среди функций $u_я(t)$, решающих первую задачу, найти наилучшую в каком-либо смысле, например, осуществляющую поворот на заданный угол за минимально возможное время или с минимальной затратой энергии.

Сформулируем задачу оптимального управления.

Рассмотрим объект или процесс, который описывается системой дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right), \; i = \overline{1,n}, \tag{2.1}$$

или векторным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — n-мерные векторы, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — m-мерный вектор управления. Вектор $\mathbf{x}$ называют *фазовым вектором системы*, или *вектором состояния*.

Будем полагать, что вектор управления $\mathbf{u}$ может принимать свои значения из некоторого множества U. В отличие от множества, рассмотренного в п. 1.5, U может быть любым множеством m-мерного евклидова пространства, например оно может состоять из совокупности изолированных точек. На рис. 2.2 при $m = 2$ изображен пример множества U, состоящего из четырех изолированных точек.

В этом, кстати, заключается существенное отличие принципа максимума от вариационного исчисления (см. п. 1.5). Из-за принятого способа построения вариаций в вариационном исчислении U может быть только областью в классическом смысле этого слова, т.е. когда оно удовлетворяет свойству связности.

Будем предполагать, что в уравнениях (2.1) функции $f_i \; \left(i = \overline{1,n}\right)$ непрерывны по всем своим переменным и непрерывно дифференцируемы по переменным x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$. В качестве допустимых управлений рассматриваются кусочно-непрерывные функции $u_\nu(t) \; \left(\nu = \overline{1,m}\right)$, удовлетворяющие условию $\mathbf{u}(t) \in U$.

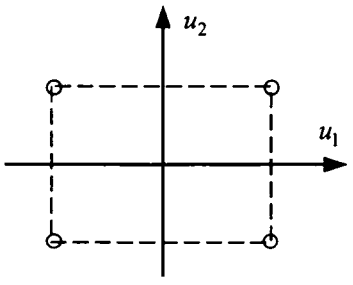


Рис. 2.2. Пример множества U

Векторное пространство с декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть *фазовым пространством системы* (2.1) и обозначать X. Каждому вектору $\mathbf{x}$ в фазовом пространстве соответствует некоторая точка (фазовая точка). Если задан вектор $\mathbf{u}(t)$ и начальное условие $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$, то систему уравнений (2.1) можно решить. Разным вектор-функциям $\mathbf{u}(t)$ будут соответствовать различные решения $\mathbf{x}(t)$ уравнений (2.1), т.е. выбором вектора $\mathbf{u}(t)$ можно управлять движением системы. Решению $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, в фазовом пространстве X соответствует некоторая линия, которая называется *фазовой траекторией системы*.

Пусть в фазовом пространстве X заданы две точки $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ и $\mathbf{x}^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$. Рассмотрим следующую задачу. *Требуется среди допустимых управлений* $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, *т.е. кусочно-непрерывных вектор-функций* $\mathbf{u}(t) \in U$ (моменты t_0 и t_1 не фиксированы), *переводящих фазовую точку системы* (2.1) *из заданного начального положения* $\mathbf{x}^0$ $\left(\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0\right)$ *в заданное конечное положение* $\mathbf{x}^1$ $\left(\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1\right)$, *найти управление и траекторию, доставляющие минимум функционалу*

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right) dt. \tag{2.2}$$

Управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$, решающие поставленную задачу, называются *оптимальными*.

Выбором функции $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ функционалу (2.2) можно придавать различный физический смысл. Если, например, функция $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ задает секундный расход топлива, то функционал (2.2) выражает общий расход топлива, затрачиваемый на движение от точки $\mathbf{x}^0$ до точки $\mathbf{x}^1$. Ниже особое внимание уделяется частному случаю, когда $f_0 = 1$. В этом случае функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt = t_1 - t_0 \tag{2.3}$$

задает время движения. Управление и траектория, минимизирующие функционал (2.3), называются *оптимальными по быстродействию*.

Будем предполагать, что функции $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ и $\partial f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})/\partial x_i$ $\left(i = \overline{1, n}\right)$ являются непрерывными по всем своим переменным.

2.1.2. Необходимое условие оптимальности

Введем $(n+1)$-мерный вспомогательный вектор $\psi(t)=(\psi_0(t),\ \psi_1(t),\ldots,\ \psi_n(t))$, определяемый уравнениями:

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_0}{dt}=0,\\ \dfrac{d\psi_i}{dt}=-\sum\limits_{s=0}^{n}\psi_s\dfrac{\partial f_s(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i},\ i=\overline{1,n}.\end{cases}\tag{2.4}$$

Если задано управление $\mathbf{u}(t)$, начальная точка и, в соответствии с уравнениями (2.1), определена траектория $\mathbf{x}(t)$, то система уравнений (2.4) принимает вид

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_0}{dt}=0,\\ \dfrac{d\psi_i(t)}{dt}=-\sum\limits_{s=0}^{n}\psi_s\dfrac{\partial f_s(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t))}{\partial x_i},\ i=\overline{1,n},\end{cases}\tag{2.5}$$

т.е. является системой линейных однородных уравнений. Из теории дифференциальных уравнений известно, что такая система при любых начальных условиях имеет единственное решение, причем функция $\psi(t)$, являющаяся решением уравнений (2.5), непрерывна по t.

Введем функцию

$$H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})=\sum_{i=0}^{n}\psi_i f_i(\mathbf{x},\mathbf{u}).\tag{2.6}$$

Функцию $H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})$ называют *функцией Гамильтона*. Непосредственной проверкой убеждаемся, что уравнения (2.4) могут быть записаны в виде

$$\begin{cases}\dfrac{d\psi_0}{dt}=0,\\ \dfrac{d\psi_i}{dt}=-\dfrac{\partial H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i},\ i=\overline{1,n}.\end{cases}\tag{2.7}$$

Аналогичным образом можно показать, что уравнения (2.1) могут быть записаны следующим образом:

$$\frac{dx_i}{dt}=-\frac{\partial H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial\psi_i},\ i=\overline{1,n}.$$

При фиксированных ψ и $\mathbf{x}$ функция $H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})$ становится функцией вектора управления $\mathbf{u}$. Обозначим

$$M(\psi,\mathbf{x})=\sup_{\mathbf{u}\in U}H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u}).$$

Если точная верхняя грань значений функции $H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})$ как функции вектора $\mathbf{u}$ достигается в некоторой точке, принадлежащей множеству U, то

$$\sup_{\mathbf{u}\in U}H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})=\max_{\mathbf{u}\in U}H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u}).$$

Теорема 2.1 (принцип максимума Понтрягина). *Пусть* $\mathbf{u}(t)$, $t_0\le t\le t_1$ — *допустимое управление, а* $\mathbf{x}(t)$ — *соответствующая ему траектория, переводящая фазовую точку* $\mathbf{x}$ *системы* (2.1) *из заданного начального положения* $\mathbf{x}^0$ *в заданное конечное положение* $\mathbf{x}^1$, *где* $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}^0$, $\mathbf{x}(t_1)=\mathbf{x}^1$. *Если* $\mathbf{u}(t)$ *и* $\mathbf{x}(t)$ — *оптимальное*

управление и оптимальная траектория, то найдется такая непрерывная вектор-функция $\psi(t)$, *удовлетворяющая уравнениям* (2.7), *что*:

1) *в каждый момент времени* t, $t_0 \le t \le t_1$, *функция* $H(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u})$, *рассматриваемая как функция переменного* $\mathbf{u}$, *достигает в точке* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ *максимума*

$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = M(\psi(t), \mathbf{x}(t)); \tag{2.8}$$

2) *выполнено условие нетривиальности решения системы уравнений* (2.7)

$$\psi(t) \neq 0; \tag{2.9}$$

3) *в конечный момент времени* t_1

$$\psi_0(t_1) \le 0, \quad M(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1)) = 0. \tag{2.10}$$

Можно показать (см. п. 1.5), что если выполняются соотношения (2.7) и (2.8), то функции $\psi_0(t)$ и $M(\psi(t), \mathbf{x}(t))$, рассматриваемые как функции времени t, постоянны. Поэтому соотношения (2.10) можно проверять не обязательно в конечный момент времени t_1, а в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$.

Отметим, что теорема 2.1 задает необходимые условия сильного минимума функционала (2.2) в рассматриваемой задаче на условный минимум.

Доказательство принципа максимума в том общем виде, как он сформулирован выше, в работе не приводится. Однако, если множество U задается неравенствами

$$|u_j| \le A_j, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.11}$$

то практически все условия теоремы 2.1 следуют из рассмотренной в п. 1.5 задачи Майера вариационного исчисления. При этом вектору $\psi = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_n)$ в задаче Майера соответствуют множители Лагранжа $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (уравнения (2.4) совпадают с уравнениями (1.75)), функции $H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ — функция $H_\lambda(\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n, u_1, u_2, \ldots, u_m)$. Некоторые дополнительные условия, которые имеются на первый взгляд в задаче Майера, представляют собой подробно записанное (с применением множителей Лагранжа) условие максимума функции H_λ. Отметим далее: как показывает анализ приведенного в п. 1.5 вывода необходимых условий минимума функционала, его можно повторить практически при любом способе задания области U. Необходимо только, чтобы U была областью в классическом смысле этого слова, т.е. удовлетворяла свойству связности.

Единственное отличие теоремы 2.1 от условий оптимальности, приведенных в п. 1.5, заключается в следующем: в соответствии с теоремой 2.1 $\psi_0(t) = \text{const} \le 0$, а в задаче Майера $\lambda_0(t) = -1$. Однако это отличие не столь существенно. Теоремой 2.1 вектор $\psi(t)$ задается с точностью до произвольного постоянного положительного множителя. Действительно, легко установить, что если следующие функции $\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяют условиям теоремы 2.1, то и функции $k\psi(t)$, $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{u}(t)$, где $k = \text{const} > 0$, также удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Поэтому при $\psi_0(t) \neq 0$ всегда выбором k можно добиться выполнения соотношения $\psi_0(t) = -1$. Отметим, что ситуация, когда $\psi_0(t) = 0$, встречается редко и связана с понятием анормальности вариационной задачи [13].

Получим из теоремы 2.1 необходимые условия оптимальности в задаче на быстродействие. Положим $f_0 = 1$. Тогда функция (2.6) принимает вид

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \psi_0 + \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{2.12}$$

Введем n-мерный вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ и функцию

$$\bar{H}(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{2.13}$$

В соответствии с уравнениями (2.7) вектор $\psi(t)$ задается уравнениями

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial \bar{H}(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{2.14}$$

Обозначим

$$\bar{M}(\psi, \mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{u} \in U} \bar{H}(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}).$$

Из (2.12) и (2.13) следует, что если

$$M(\psi, \mathbf{x}) = H\left(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*\right),$$

то

$$\bar{M}(\psi, \mathbf{x}) = \bar{H}\left(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}^*\right).$$

Пусть $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ — оптимальные по быстродействию управление и траектория. Как следует из (2.8), (2.10), (2.12) и (2.13), в этом случае

$$\bar{H}\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) = \bar{M}\left(\psi(t), \mathbf{x}(t)\right) = M\left(\psi(t), \mathbf{x}(t)\right) - \psi_0 = -\psi_0 \geq 0.$$

Полученный результат сформулируем в виде еще одной теоремы.

Теорема 2.2 (принцип максимума в задачах на быстродействие). *Пусть* $\mathbf{u}(t)$ *и* $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — *допустимое управление и соответствующая ему траектория, переводящие фазовую точку из заданного начального положения* $\mathbf{x}^0$ *в заданное конечное положение* $\mathbf{x}^1$. *Если управление* $\mathbf{u}(t)$ *и траектория* $\mathbf{x}(t)$ *являются оптимальными по быстродействию, то найдется непрерывная вектор-функция* $\psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t))$, *удовлетворяющая уравнениям* (2.14), *что*:

1) *в каждый момент времени* t, $t_0 \leq t \leq t_1$, *функция* $\bar{H}\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}\right)$, *рассматриваемая как функция переменного* $\mathbf{u}$, *достигает в точке* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ *максимума*

$$\bar{H}\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) = \bar{M}\left(\psi(t), \mathbf{x}(t)\right); \tag{2.15}$$

2) *выполнено условие нетривиальности решения системы уравнений* (2.14)

$$\psi(t) \neq 0;$$

3) *в конечный момент времени* t_1

$$\bar{M}\left(\psi(t_1), \mathbf{x}(t_1)\right) \geq 0. \tag{2.16}$$

Как и в случае теоремы 2.1, отметим, что если выполнены соотношения (2.14) и (2.15), то функция $\bar{M}\left(\psi(t), \mathbf{x}(t)\right)$ постоянна. Поэтому соотношения (2.16) можно проверять в любой момент времени $t \in [t_0, t_1]$.

Проанализируем теорему 2.1. Покажем, что она содержит «полную систему условий», т.е. число условий совпадает с общим числом неизвестных.

При решении задачи необходимо найти n функций $x_i(t)$, $(n+1)$ функций $\psi_i(t)$ и m функций $u_j(t)$, т.е. всего $2n+1+m$ неизвестных функций. Для определения указанных функций можно воспользоваться n уравнениями движения (2.1), $(n+1)$ уравнениями (2.7) и m условиями максимума (2.8). Условия максимума (2.8) позволяют в каждый момент времени t определить управления $u_j(t)$. Если, например, максимум

функции $H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)$ достигается во внутренней точке области U, то должны выполняться соотношения

$$\frac{\partial H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}\right)}{\partial u_j}=0,\ j=\overline{1,m}.$$

Далее, $2n+1$ из указанных уравнений являются дифференциальными. Общее решение этих уравнений будет содержать $2n+1$ произвольных констант. Неизвестно также время движения t_1-t_0, т.е. общее число неизвестных чисел равно $2n+2$. Для нахождения указанных чисел можно использовать $2n$ условий прохождения оптимальной траектории через заданные точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$, условие

$$M\left(\psi(t_1),\mathbf{x}(t_1)\right)=0.$$

Выше уже отмечалось, что теоремой 2.1 вектор $\psi(t)$ определяется с точностью до постоянного положительного множителя. Поэтому всегда, например, можно положить

$$\left|\psi(t_0)\right|=1.$$

Таким образом, общее число условий совпадает с общим числом неизвестных. Поэтому можно ожидать, что условия теоремы 2.1 позволят выделить одну или несколько траекторий, проходящих через заданные точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$. Так как теорема 2.1 задает необходимые условия оптимальности, то оптимальная траектория будет находиться среди выделенных траекторий.

К настоящему времени накоплен достаточно богатый опыт по применению принципа максимума для определения оптимального управления и оптимальной траектории. Этот опыт показывает, что задаваемые теоремой 2.1 (теорема 2.2 является частным случаем теоремы 2.1) необходимые условия оптимальности являются сильными в том смысле, что выделяемые ими управление и траектория, как правило, являются оптимальными. Далее, известно, что принцип максимума, как необходимое условие сильного минимума, не может быть усилен.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 2.1. Рассмотрим объект, движение которого задается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2}=u, \tag{2.17}$$

здесь u — управляющий параметр, который должен удовлетворять условию

$$|u|\le A; \tag{2.18}$$

где A — заданное положительное число. В соответствии с формализмом принципа максимума представим уравнение (2.17) в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2,\ \frac{dx_2}{dt}=u. \tag{2.19}$$

Будем решать задачу о наибыстрейшем переводе фазовой точки системы (2.19) из заданного начального положения в начало координат (точку $\mathbf{x}^1=0$). В качестве начальной точки будем рассматривать любую точку фазового пространства. Это позволит выделить всю совокупность оптимальных траекторий.

Воспользуемся теоремой 2.2. Составим функцию Гамильтона

$$\bar{H}(\psi,\mathbf{x},u)=\psi_1x_2+\psi_2u.$$

Принимая во внимание неравенство (2.18), из условия максимума функции Гамильтона найдем

$$u=A\operatorname{sign}\psi_2(t). \tag{2.20}$$

Вспомогательные переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ находятся из системы уравнений

$$\frac{d\psi_1}{dt}=0,\ \frac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1. \tag{2.21}$$

Выпишем решение системы уравнений (2.21):

$$\psi_1(t)=C_1,\ \psi_2(t)=-C_1t+C_2,$$

где C_1 и C_2 — произвольные константы. Тогда условие (2.20) принимает вид

$$u = A\,\mathrm{sign}\left(-C_1 t + C_2\right). \tag{2.22}$$

Графиком функции $\psi_2(t)$ является прямая линия, и поэтому функция $\psi_2(t)$ может изменять знак не более одного раза. Из (2.22), таким образом, следует, что оптимальное управление $u(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения A и $-A$ и имеющей не более двух интервалов постоянства управления. Обратно, любая такая функция $u(t)$ может быть получена из (2.22) при соответствующем выборе постоянных C_1 и C_2.

Найдем фазовую траекторию системы (2.19) при $u = A$. Имеем:

$$x_2 = At + s_1,\ x_1 = \frac{1}{2}At^2 + s_1 t + s_2. \tag{2.23}$$

Выразив из первого уравнения (2.23) время t и подставив его во второе уравнение, получим

$$x_1 = \frac{1}{2A}x_2^2 + s^*, \tag{2.24}$$

где $s^* = s_2 - \frac{1}{2A}s_1^2$ — произвольная постоянная. Аналогичным образом легко показать, что при $u = -A$ фазовые траектории системы (2.19) являются параболами вида

$$x_1 = -\frac{1}{2A}x_2^2 + s^{**}, \tag{2.25}$$

здесь s^{**} — произвольная постоянная.

На рис. 2.3 и 2.4 представлены параболы семейств (2.24) и (2.25) соответственно.

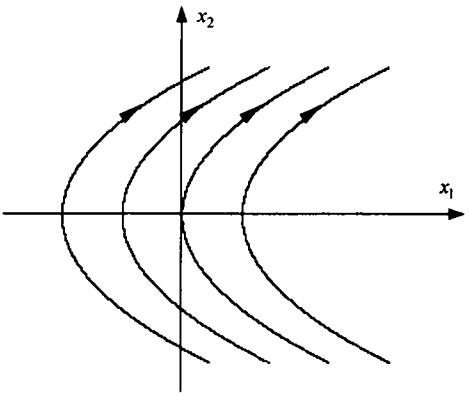


Рис. 2.3. Параболы семейства (2.24)

По параболам семейства (2.24) фазовая точка движется снизу вверх, а по параболам семейства (2.25) — сверху вниз, так как в соответствии со вторым уравнением (2.19) при $u = A$ координата x_2 возрастает, а при $u = -A$ — убывает.

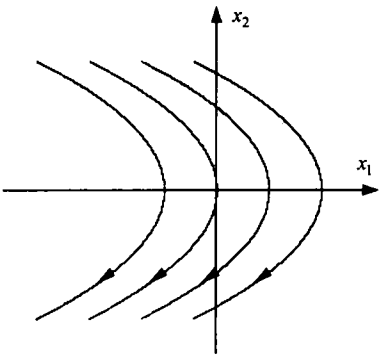


Рис. 2.4. Параболы семейства (2.25)

Рассмотрим фазовую траекторию, на начальном участке которой фазовая точка движется под воздействием управления $u = A$ по параболе семейства (2.24), а заканчивается движение под воздействием управления $u = -A$ по параболе семейства (2.25). При этом заканчивается движение по той из парабол семейства (2.25), которая проходит через начало координат, так как конечной целью управления является перевод фазовой точки в начало координат. Указанная траектория изображена на рис. 2.5 (линия MRO).

Если на начальном участке фазовая точка движется под воздействием управления $u = -A$, а заканчивается движение под воздействием управления $u = A$, то движение происходит по траектории $M'R'O$, которая симметрична относительно начала координат траектории MRO.

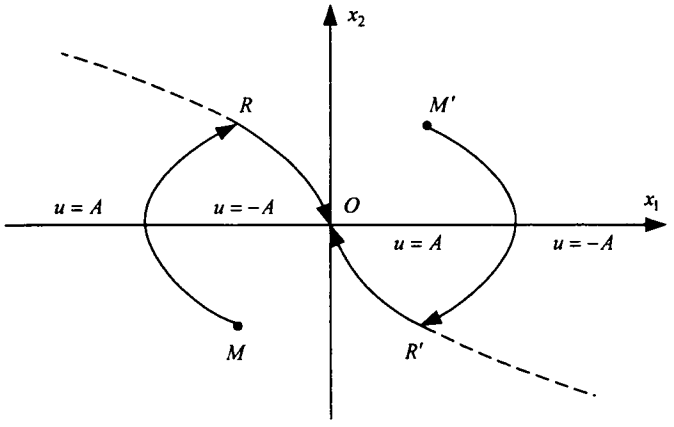


Рис. 2.5. График фазовой траектории

На рис. 2.6 изображена совокупность всевозможных оптимальных траекторий. Эти траектории действительно являются оптимальными, так как для каждой начальной точки $\mathbf{x}^0$ существует единственная траектория, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности (теореме 2.2), а по условию задачи ясно, что оптимальное управление существует.

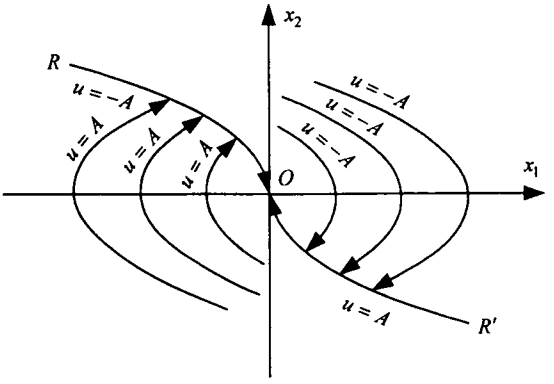


Рис. 2.6. Графики оптимальных траекторий

Из рис. 2.6 видно, что переключение управления происходит на линии ROR'. Выше линии ROR' оптимальное управление $u = -A$, а ниже линии ROR' оптимальное управление $u = A$. Линия RO является частью параболы семейства (2.25) и задается уравнением

$$x_1 = -\frac{1}{2A}x_2^2, \quad x_2 \geq 0,$$

а линия $R'O$ — частью параболы семейства (2.24) и задается уравнением

$$x_1 = \frac{1}{2A}x_2^2, \quad x_2 \leq 0.$$

Введем функцию

$$\upsilon(\mathbf{x}) = \begin{cases} -A \text{ выше линии } ROR' \text{ и на линии } RO, \\ A \text{ ниже линии } ROR' \text{ и на линии } R'O. \end{cases}$$

Тогда в каждый момент времени t оптимальное управление

$$u = \upsilon(\mathbf{x}(t)).$$

Если в уравнениях (2.19) положить $u = \upsilon(\mathbf{x})$, то при каждом начальном условии решением системы уравнений (2.19) будет идущая в начало координат оптимальная по быстродействию траектория.

Пример 2.2. По-прежнему рассматривается объект, движение которого задается уравнениями (2.19). Будем предполагать, что на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \le 1. \tag{2.26}$$

В качестве критерия оптимизации рассмотрим функционал

$$I = \int_0^T (k + |u|)dt, \tag{2.27}$$

здесь k — некоторое положительное число.

Функционал (2.27) является линейной комбинацией двух функционалов

$$I_1 = \int_0^T dt \text{ и } I_2 = \int_0^T |u|dt,$$

один из которых задает время движения, а второй — расходуемые на управление ресурсы. Число k является весовым коэффициентом, с помощью которого устанавливается компромисс между двумя этими критериями.

Требуется найти управление и траекторию, переводящие фазовую точку из заданного начального состояния в начало координат и минимизирующие функционал (2.27). В качестве начальных предполагается рассмотреть все точки фазовой плоскости.

В соответствии с теоремой 2.1 функция Гамильтона

$$H(\psi, \mathbf{x}, u) = \psi_0(k + |u|) + \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \tag{2.28}$$

Вектор $\psi(t)$ определяется уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1. \tag{2.29}$$

Выше уже отмечалось, что теоремой 2.1 вектор $\psi(t)$ определяется с точностью до постоянного положительного множителя. Далее, поскольку $\psi_0(t) = \text{const} \le 0$, положим $\psi_0(t) = -1$. Тогда функция (2.28) примет вид

$$H(\psi, \mathbf{x}, u) = -k - |u| + \psi_1 x_2 + \psi_2 u. \tag{2.30}$$

Для определения оптимального управления необходимо максимизировать функцию Гамильтона как функцию управления, и, в соответствии с (2.30), максимизация функции Гамильтона выливается в максимизацию функции

$$\Delta H = -|u| + \psi_2 u.$$

Представим ΔH в виде

$$\Delta H = \begin{cases} (\psi_2 - 1)u \text{ при } u \ge 0, \\ (\psi_2 + 1)u \text{ при } u \le 0. \end{cases} \tag{2.31}$$

Из условия максимума функции (2.31), принимая во внимание ограничение (2.26), найдем

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } \psi_2(t) > 1, \\ -1, \text{ если } \psi_2(t) < -1, \\ 0, \text{ если } |\psi_2(t)| < 1, \\ \in [0,1], \text{ если } \psi_2(t) = 1, \\ \in [-1,0], \text{ если } \psi_2(t) = -1, \end{cases} \tag{2.32}$$

здесь символом $u^*(t)$ обозначено управление, максимизирующее функцию Гамильтона.

Введем в рассмотрение функцию «зоны нечувствительности» $y = \text{dez}(x)$, которая определяется соотношениями

$$y = \begin{cases} 0, \text{ если } |x| < 1, \\ \text{sign } x, \text{ если } |x| > 1, \\ \in [0,1], \text{ если } x = 1, \\ \in [-1,0], \text{ если } x = -1. \end{cases}$$

На рис. 2.7 приведен график функции $y = \mathrm{dez}(x)$.

Равенство (2.32) можно записать в виде

$$u^*(t) = \mathrm{dez}\left(\psi_2(t)\right). \tag{2.33}$$

В конечный момент времени T $\mathbf{x}(T) = 0$, так как конечной целью управления является перевод фазовой точки в начало координат. Покажем, что

$$\left|\psi_2(T)\right| > 1. \tag{2.34}$$

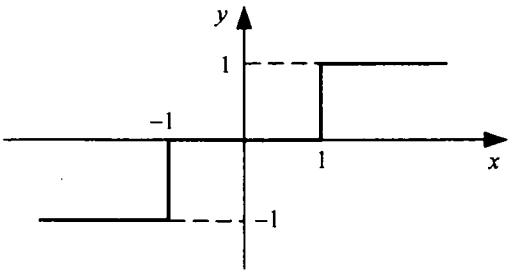


Рис. 2.7. График функции $\mathrm{dez}(x)$

Запишем равенство

$$H\left(\psi(T), \mathbf{x}(T), u^*(T)\right) = -k - \left|u^*(T)\right| + \psi_1(T)\cdot x_2(T) + \psi_2(T)\cdot u^*(T). \tag{2.35}$$

Если $\left|\psi_2(T)\right| < 1$, то, в соответствии с (2.33), $u(T) = 0$ и из (2.35) следует

$$H\left(\psi(T), \mathbf{x}(T), u^*(T)\right) = -k \neq 0. \tag{2.36}$$

Соотношение (2.36) противоречит второму условию (2.10). При $\psi_2(T) = 1$ $u(T) \in [0,1]$, а при $\psi_2(T) = -1$ $u(T) \in [-1,0]$. Равенство (2.34) в этом случае также приводит к соотношению (2.36).

Из неравенства (2.34) следует, что в начало координат фазовая точка может попасть либо с управлением $u(t) = 1$, либо с управлением $u(t) = -1$.

Проинтегрируем уравнения (2.29):

$$\psi_1(t) = \psi_1(0), \quad \psi_2(t) = -\psi_1(0)t + \psi_2(0). \tag{2.37}$$

Строго говоря, уравнения (2.29) допускают решение

$$\psi_1(t) = 0, \quad \psi_2(t) = \pm 1. \tag{2.38}$$

В этом случае соотношение (2.33) не определяет управление $u^*(t)$ однозначным образом. Однако решение (2.36), как легко убедиться, противоречит условию

$$M\left(\psi(t), \mathbf{x}(t)\right) = 0$$

и поэтому его следует исключить из дальнейшего рассмотрения.

В соответствии с (2.37) график функции $\psi_2(t)$ является прямой линией. Вид этой прямой определяется начальными условиями $\psi_1(0)$ и $\psi_2(0)$. Далее, если

$$\psi_2(t) = \psi_2(0),$$

то в соответствии с неравенствами (2.34) $\left|\psi_2(0)\right| > 1$.

Рассмотрим оптимальное управление и оптимальную траекторию, соответствующие функции $\psi_2(t)$, представленной на рис. 2.8.

Управление $u^*(t)$ в этом случае имеет вид, изображенный на рис. 2.9.

Как следует из (2.24) и (2.25), при $u = 1$ фазовая точка движется по параболе семейства

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + s^*, \tag{2.39}$$

а при $u = -1$ — по параболе семейства

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2 + s^{**}, \tag{2.40}$$

здесь s^* и s^{**} — произвольные константы. При $u(t) \equiv 0$

$$x_2(t) = x_2(0),$$

$$x_1(t) = x_2(0)t + x_1(0),$$

т.е. при $u \equiv 0$ фазовая точка движется по прямой линии

$$x_2(t) = x_2(0). \tag{2.41}$$

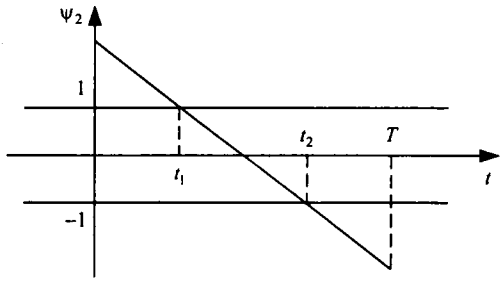


Рис. 2.8. График функции $\psi_2(t)$

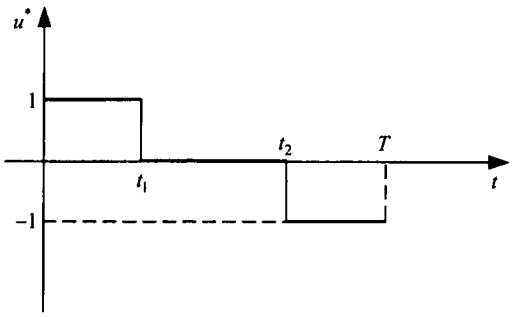


Рис. 2.9. График оптимального управления

На рис. 2.10 изображено семейство прямых (2.41).

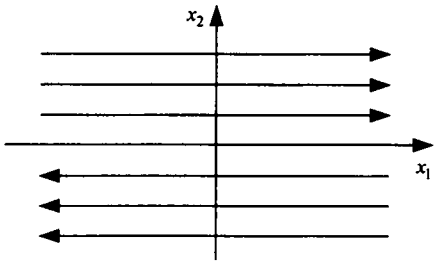


Рис. 2.10. Графики прямых, определяемых уравнением (2.41)

Таким образом, траектория, соответствующая изображенному на рис. 2.9 управлению $u^*(t)$, состоит из парабол соответственно семейств (2.39) и (2.40), соединенных между собой отрезком прямой (2.41) (рис. 2.11).

На заключительном участке фазовая точка движется по параболе семейства (2.40), причем по той из парабол семейства (2.40), которая проходит через начало координат. Эта парабола задается уравнением

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2,$$

а участок параболы, по которому фазовая точка переводится в начало координат, — уравнением

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2^2, \quad x_2 \geq 0. \tag{2.42}$$

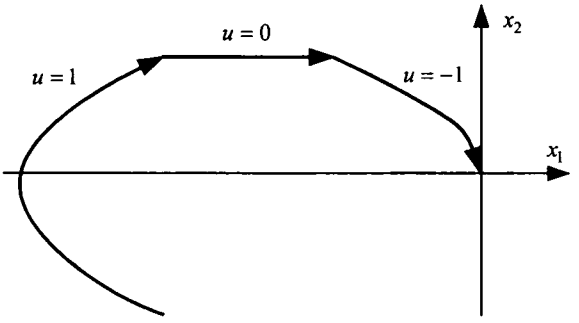


Рис. 2.11. График оптимальной траектории

Переключение управления с $u^*(t)=0$ на $u^*(t)=-1$ происходит именно в точках участка параболы (2.42). Таким образом, можно записать

$$x_1(t_2)=-\frac{1}{2}x_2^2(t_2).$$

Линию, которая задается уравнением (2.42), обозначим γ_1^-.

Найдем линию, в точках которой происходит переключение управления с $u^*(t)=1$ на $u^*(t)=0$.

Воспользуемся равенством $M\left(\psi(t),\mathbf{x}(t)\right)=0$. Для момента времени t_2 имеем

$$-k-\left|u(t_2+0)\right|+\psi_1(t_2)x_2(t_2)+\psi_2(t_2)u(t_2+0)=0. \tag{2.43}$$

В соответствии с рис. 2.8, 2.9

$$u(t_2+0)=-1,\ \ \psi_2(t_2)=-1.$$

Из (2.43) следует

$$\psi_1(t_2)=\psi_1=-\frac{k}{x_2(t_2)}. \tag{2.44}$$

Найдем время движения с управлением $u^*(t)=0$. Так как $\psi_2(t_1)=1$, $\psi_2(t_2)=-1$, то из равенства

$$\psi_2(t_2)=\psi_1(t_2-t_1)+\psi_2(t_1)$$

следует

$$t_2-t_1=\frac{2}{\psi_1},$$

или, принимая во внимание (2.44),

$$t_2-t_1=-\frac{2x_2(t_2)}{k}. \tag{2.45}$$

В интервале $t_1<t<t_2$ фазовая точка движется под воздействием управления $u^*(t)=0$. Поэтому

$$x_1(t_2)=x_2(t_1)(t_2-t_1)+x_1(t_1),$$

или

$$x_1(t_2)=x_2(t_1)\frac{2x_2(t_2)}{k}+x_1(t_1).$$

Поскольку $x_2(t_1)=x_2(t_2)$, то можно записать

$$x_1(t_2)=\frac{2}{k}x_2^2(t_2)+x_1(t_1). \tag{2.46}$$

Точка $x(t_2)$ лежит на линии γ_1^- и, следовательно,

$$x_1(t_2)=-\frac{1}{2}x_2^2(t_2). \tag{2.47}$$

Подставив (2.47) в (2.46), получим

$$x_1(t_1)=-\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{k}\right)x_2^2(t_2).$$

Далее, учитывая, что $x_2(t_2) = x_2(t_1)$, можно записать

$$x_1(t_1) = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{k}\right) x_2^2(t_1).$$

Итак, переключение управления с $u^*(t) = 1$ на $u^*(t) = 0$ происходит в точках кривой

$$x_1 = -\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{k}\right) x_2^2, \quad x_2 \geq 0. \tag{2.48}$$

Линию, задаваемую уравнением (2.48), обозначим γ_2^+.

Рассмотрев управление $u^*(t)$, представленное на рис. 2.12, аналогичным образом можно показать, что переключение управления с $u^*(t) = -1$ на $u^*(t) = 0$ происходит на линии

$$x_1 = \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{k}\right) x_2^2, \quad x_2 \leq 0, \tag{2.49}$$

а переключение управления с $u^*(t) = 0$ на $u^*(t) = 1$ происходит на линии

$$x_1 = \frac{1}{2} x_2^2, \quad x_2 \leq 0. \tag{2.50}$$

Линии, задаваемые уравнениями (2.49) и (2.50), обозначим соответственно γ_2^- и γ_2^+. Пусть, далее, $\gamma_1 = \gamma_1^- \cup \gamma_1^+$, а $\gamma_2 = \gamma_2^- \cup \gamma_2^+$.

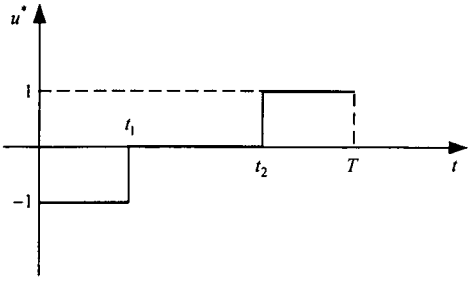


Рис. 2.12. График управления $u^*(t)$

Таким образом, на фазовой плоскости существуют две линии переключения γ_1 и γ_2 (см. рис. 2.13). Выше линии γ_1 и γ_2 управление $u^*(t) = -1$, ниже линии γ_1 и γ_2 управление $u^*(t) = +1$. В промежутке между линиями γ_1 и γ_2 $u^* = 0$. На рис. 2.13 жирными линиями выделены две фазовые траектории, которые удовлетворяют теореме 2.1. Только управления и траектории, задаваемые рис. 2.13, могут быть оптимальными.

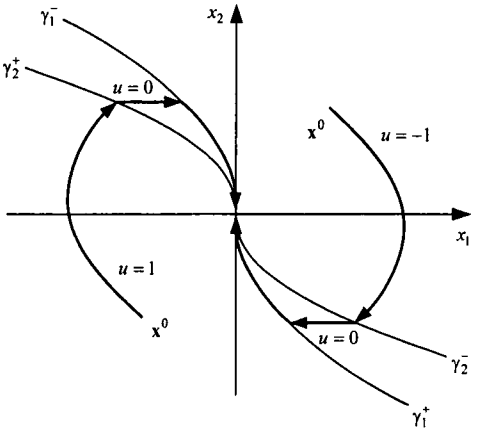


Рис. 2.13. Графики фазовых траекторий

Далее, поскольку для каждой начальной точки существует только одна траектория, удовлетворяющая необходимым условиям оптимальности (условиям теоремы 2.1), а по физическим соображениям существование оптимальных траекторий представляется вполне очевидным фактом, то это позволяет заключить, что полученные выше управления и траектории являются оптимальными.

Пусть

$$x_1 = f_1(x_2)$$

— уравнение линии γ_1, а

$$x_1 = f_2(x_2)$$

— уравнение линии γ_2. Тогда оптимальное управление можно задать равенством

$$u = \begin{cases} -1, \text{ если } x_1 - f_1(x_2) > 0 \text{ и } x_1 - f_2(x_2) > 0, \\ 1, \text{ если } x_1 - f_1(x_2) < 0 \text{ и } x_1 - f_2(x_2) < 0, \\ 0, \text{ если } \operatorname{sign}\left[x_1 - f_1(x_2)\right] = -\operatorname{sign}\left[x_1 - f_2(x_2)\right]. \end{cases} \tag{2.51}$$

Строго говоря, равенство (2.51) не задает значение оптимального управления на линии γ_1, хотя линия γ_1 образована двумя оптимальными фазовыми траекториями системы (2.19). Как будет показано ниже, задание управления на линии переключения не требуется.

На рис. 2.14 изображена структурная схема оптимальной системы.

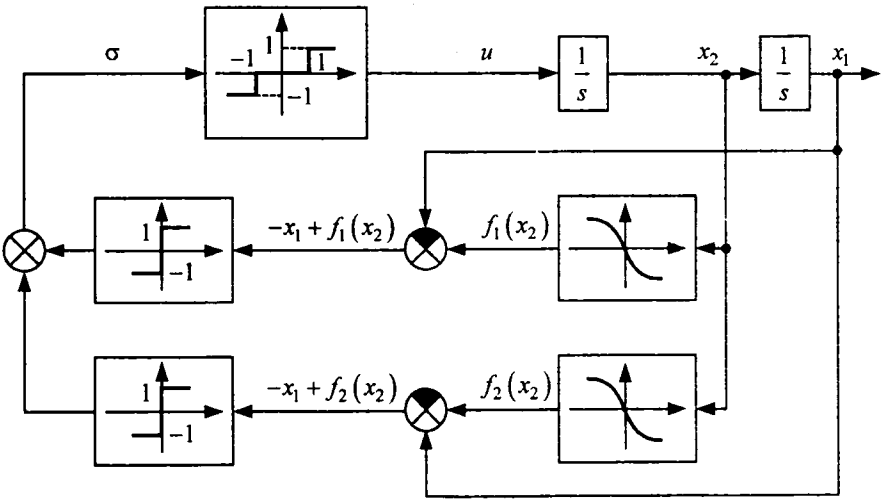


Рис. 2.14. Структурная схема оптимальной системы

Если функции $x_1 - f_1(x_2)$ и $x_1 - f_2(x_2)$ имеют разные знаки, то $\sigma(t) = 0$ и управление $u(t) = 0$. Если указанные функции имеют одинаковые знаки, то $\sigma(t) = -2\operatorname{sign}\left[x_1 - f_1(x_2)\right]$ и сигнал управления $u(t) = -\operatorname{sign}\left[x_1 - f_1(x_2)\right]$.

2.2. ЗАДАЧА С ПОДВИЖНЫМИ КОНЦАМИ. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

2.2.1. Задача с закрепленным временем

В п. 2.1 была сформулирована задача оптимального управления. При этом предполагалось, что время движения не задано. Поскольку уравнения (2.1) являются автономными, то можно положить начальный момент времени t_0 фиксированным, а конечный момент времени t_1 свободным.

Будем теперь считать, что моменты времени t_0 и t_1 фиксированы. Обратимся к рассмотренной в п. 1.5 задаче оптимального управления методом классического вариационного исчисления. При фиксированных моментах времени t_0 и t_1 вариация функционала будет по-прежнему задаваться равенством (1.74), в котором следует положить $\delta t_1 = 0$. Это, в свою очередь, приведет к тому, что из необходимых условий минимума выпадут условия (1.87) и, следовательно, равенство (1.88), доказательство которого основывается на соотношениях (1.87). Если теперь совершить обратный переход от приведенных в п. 1.5 необходимых условий оптимальности к принципу максимума (теореме 2.1), то получим все условия теоремы 2.1, кроме соотношения

$$M\left(t_1, \mathbf{x}(t_1)\right) = 0. \tag{2.52}$$

Таким образом, необходимые условия оптимальности для задачи с фиксированным временем движения задаются теоремой 2.1, из формулировки которой следует исключить условие (2.52). Отметим, что соотношение

$$M\left(\psi(t), \mathbf{x}(t)\right) = \text{const}$$

по-прежнему сохраняет свою силу. Однако функция $M\left(\psi(t), \mathbf{x}(t)\right)$ теперь не обязательно должна равняться нулю.

2.2.2. Задача с подвижными концами

В п. 2.1 предполагалось, что начальное и конечное состояния системы строго определены, т.е. в фазовом пространстве заданы начальная $\mathbf{x}^0$ и конечная $\mathbf{x}^1$ точки, которые следует соединить оптимальной траекторией. Рассмотрим более общий случай. Предположим, что вместо начальной и конечной точек заданы начальное s_0 и конечное s_1 многообразия. Пусть многообразие s_0 задается уравнениями

$$\varphi_l\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0, \quad l = \overline{1, p}, \quad p \le n, \tag{2.53}$$

а многообразие s_1 — уравнениями

$$\beta_\nu\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right) = 0, \quad \nu = \overline{1, k}, \quad k \le n. \tag{2.54}$$

Если $n = 3$, а $p = k = 1$, то многообразия s_0 и s_1 представляют собой поверхности в трехмерном фазовом пространстве. При $n = 3$, $p = 2$, $k = 1$ многообразие s_0 задается как множество, образованное пересечением двух поверхностей (рис. 2.15), т.е. является линией в трехмерном фазовом пространстве, а многообразие s_1 по-прежнему представляет собой поверхность.

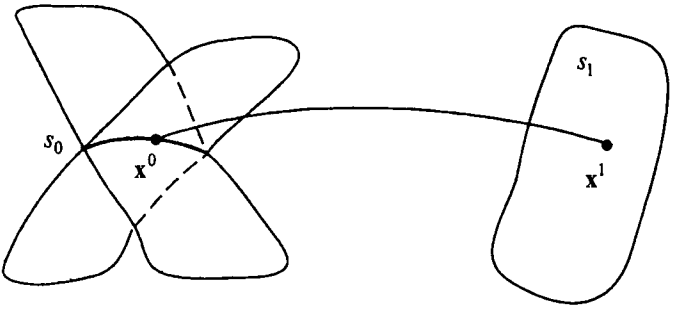


Рис. 2.15. Начальное s_0 и конечное s_1 многообразия

Функции $\varphi_l(x_1, x_2,\ldots,x_n)=0$ и $\beta_\nu(x_1, x_2,\ldots,x_n)$, $l=\overline{1,p}$, $\nu=\overline{1,k}$, будем полагать непрерывно дифференцируемыми по всем своим аргументам. Введем вектор

$$\nabla\varphi(x_1,\ldots,x_2)=\left(\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial\varphi(\mathbf{x})}{\partial x_n}\right),$$

называемый *градиентом* функции $\varphi(\mathbf{x})$.

Многообразие s_0 называется *гладким*, если в каждой точке $\mathbf{x}\in s_0$ векторы

$$\nabla\varphi_1(\mathbf{x}),\ \nabla\varphi_2(\mathbf{x}),\ldots,\ \nabla\varphi_p(\mathbf{x}) \tag{2.55}$$

линейно независимы. Условие линейной независимости векторов (2.55) эквивалентно требованию, чтобы ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_1} & \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_p}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

был равен p. Аналогичным образом определяется гладкость многообразия s_1. В дальнейшем многообразия s_0 и s_1 полагаются гладкими.

Рассмотрим следующую задачу: требуется среди допустимых управлений $\mathbf{u}(t)$, переводящих фазовую точку $\mathbf{x}$ с многообразия s_0 на многообразие s_1, найти такое, которое доставляет минимум функционалу (2.2). Так как в поставленной задаче концы траектории $\mathbf{x}(t)$ могут скользить по многообразиям s_0 и s_1, соответствующую задачу оптимального управления будем называть *задачей с подвижными концами*.

Пусть $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{x}(t)$, $t_0\le t\le t_1$, — управление и траектория, решающие поставленную выше задачу оптимального управления с подвижными концами. Но тогда найдутся точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$, лежащие соответственно на многообразиях s_0 и s_1 (рис. 2.15). Ясно, что управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ являются оптимальными и в смысле рассмотренной в п. 2.1 двухточечной задачи оптимального управления, т.е. управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$ должны удовлетворять принципу максимума (теореме 2.1).

Таким образом, принцип максимума (теоремы 2.1 и 2.2) остается в силе и для задачи с подвижными концами. Однако в этом случае необходимо иметь некоторые дополнительные условия, которые позволили бы определить положение точек $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$ на многообразиях s_0 и s_1.

Для получения указанных дополнительных условий обратимся к п. 1.5, в котором приводятся необходимые условия оптимальности, полученные методами классического вариационного исчисления. Дополнительные условия задаются соотношениями (1.79). Выпишем эти условия, используя обозначения, принятые в принципе максимума:

$$\psi_i(t_0)=\sum_{l=1}^{p}\rho_l^-\cdot\left.\frac{\partial\varphi_l(\mathbf{x})}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_0)},\quad i=\overline{1,n}; \tag{2.56}$$

$$\psi_i(t_1)=\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\cdot\frac{\partial\beta_\nu(\mathbf{x})}{\partial x_i}\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_1)},\quad i=\overline{1,n};\tag{2.57}$$

здесь ρ_l^- и ρ_l^+, $l=\overline{1,p}$, $\nu=\overline{1,k}$, — некоторые числа. Во избежание недоразумений отметим, что имеющееся в (1.79) дополнительное условие вида

$$\psi_0(t_0)=\rho_0^-\tag{2.58}$$

в равенстве (2.56) опущено, так как ρ_0^- — произвольное число, и, следовательно, соотношение (2.58) не несет какой-либо новой информации.

Будем говорить, что на левом конце траектории $\mathbf{x}(t)$ (в момент t_0) выполнено условие трансверсальности, если найдутся такие числа ρ_l^- $\left(l=\overline{1,p}\right)$, что имеют место соотношения (2.56). Аналогично, говорят, что на правом конце траектории $\mathbf{x}(t)$ выполнены условия трансверсальности, если найдутся такие числа ρ_ν^+ $\left(\nu=\overline{1,n}\right)$, при которых выполняются равенства (2.57). В смешанном случае, т.е. когда один конец траектории закреплен, а второй подвижен, условия трансверсальности следует относить к подвижному концу траектории.

Сформулируем окончательный результат. Необходимые условия оптимальности в задаче с подвижными концами заключаются в следующем:

1) *оптимальное управление* $\mathbf{u}(t)$ *и траектория* $\mathbf{x}(t)$ *должны удовлетворять принципу максимума* (теореме 2.1 или 2.2);
2) *на подвижных концах траектории должны выполняться условия трансверсальности.*

Условия трансверсальности являются теми дополнительными условиями, которые позволяют, в конечном счете, определить начальную и конечную точки, лежащие на многообразиях s_0 и s_1. Действительно, координаты неизвестных точек $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$ вместе с $p+k$ неопределенными множителями Лагранжа ρ_l^-, ρ_ν^+, $l=\overline{1,p}$, $\nu=\overline{1,n}$, приводят к $2n+p+k$ неизвестным числам. Для определения указанных чисел необходимо воспользоваться $2n$ условиями трансверсальности (2.56), (2.57) и $p+k$ уравнениями (2.53), (2.54), т.е. число неизвестных совпадает с числом уравнений.

Формально условиями трансверсальности можно пользоваться и в том случае, когда в уравнениях (2.53) и (2.54) $p=k=n$. Уравнения (2.53) и (2.54) в этом случае задают соответственно начальную $\mathbf{x}^0$ и конечную $\mathbf{x}^1$ точки, т.е. имеет место двухточечная задача оптимального управления. Использовать условия трансверсальности в двухточечной задаче оптимального управления вряд ли целесообразно, так как это может только усложнить решение задачи.

Выясним геометрический смысл соотношений (2.56) и (2.57). Для этого запишем их в векторной форме:

$$\psi(t_0)=\sum_{l=1}^{p}\overline{\rho}_l\nabla\varphi_l(\mathbf{x})\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_0)};\tag{2.59}$$

$$\psi(t_1)=\sum_{\nu=1}^{k}\rho_\nu^+\nabla\beta_\nu(\mathbf{x})\bigg|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_1)}.\tag{2.60}$$

Известно, что вектор

$$\nabla\varphi_l(\mathbf{x})\big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t_0)}\tag{2.61}$$

ортогонален к поверхности*

$$\varphi_l(\mathbf{x}) = 0 \tag{2.62}$$

в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0)$. Многообразие s_0 образовано пересечением p поверхностей (2.53). Поэтому вектор (2.61), являясь ортогональным к поверхности (2.62), ортогонален и к многообразию s_0, которое принадлежит поверхности (2.62). Таким образом, правая часть равенства (2.59) является линейной комбинацией векторов, каждый из которых ортогонален многообразию s_0. Поскольку векторы (2.55) линейно независимы, то вектор (2.59) является ортогональным к многообразию s_0 в точке $\mathbf{x}(t_0)$ вектором общего положения. Аналогичным образом можно показать, что вектор, стоящий в правой части равенства (2.60), является ортогональным к многообразию s_1 в точке $\mathbf{x}(t_1)$ вектором общего положения.

Вектор $\mathbf{Y}$ называется ортогональным к многообразию s_0 в точке $\mathbf{x}(t_0)$, если он ортогонален к плоскости, которая касается многообразия s_0 в точке $\mathbf{x}(t_0)$. Касательная к многообразию s_0 плоскость образуется пересечением p плоскостей, каждая из которых касается в точке $\mathbf{x}(t_0)$ одной из поверхностей

$$\varphi_l(\mathbf{x}) = 0, \quad l = \overline{1, p}.$$

Обозначим T_0 плоскость, касательную к многообразию s_0, а T_1 — плоскость, касательную к многообразию s_1.

Условия трансверсальности можно сформулировать в следующем виде. Говорят, что на правом конце траектории $\mathbf{x}(t)$ выполнено условие трансверсальности, если вектор $\psi(t_1) = (\psi_1(t_1), \psi_2(t_1), \ldots, \psi_n(t_1))$ ортогонален плоскости T_1. Аналогичным образом формулируется условие трансверсальности и для левого конца траектории $\mathbf{x}(t)$.

Пример 2.3. Внесем некоторые изменения в пример 2.2 (п. 2.1). По-прежнему полагается, что движение объекта управления задается уравнениями (2.19) при ограничении на параметр управления (2.26), и в качестве критерия оптимизации рассматривается функционал (2.27). Однако вместо заданной конечной точки (в примере 2 — это начало координат) будем рассматривать перевод фазовой точки на многообразие, которое задается уравнением

$$x_1 = 0.$$

К условиям оптимальности, задаваемым теоремой 2.1, необходимо добавить условия трансверсальности на правом конце траектории, которые имеют вид

$$\psi_1(T) = \rho, \quad \psi_2(T) = 0. \tag{2.63}$$

Так как ρ является произвольным вещественным числом, то первое равенство (2.63) не накладывает никаких условий на функцию $\psi_1(t)$. Далее, в соответствии с (2.37) $\psi_2(t)$ — линейная функция, которая может обращаться в нуль только один раз. Поэтому в интервале $0 \le t \le T$ функция $\psi_2(t)$ не может изменять свой знак.

Как следует из (2.63) и (2.32), на заключительном участке фазовая точка движется под воздействием управления $u^*(t) = 0$ по траектории семейства (2.41). На начальном участке в зависимости от знака $\psi_2(0)$ движение происходит либо под воздействием управления $u^* = 1$, либо — $u^* = -1$. Возможен также вариант $(\psi_2(0) = 0)$, когда на всей траектории движения $u^*(t) \equiv 0$.

На рис. 2.16 изображены управление $u^*(t)$ и соответствующая ему траектория $\mathbf{x}(t)$ при $\psi_2(0) > 1$.

Найдем на фазовой плоскости совокупность точек, в которых происходит переключение управления с $u^*(t) = 1$ на $u^*(t) = 0$.

---

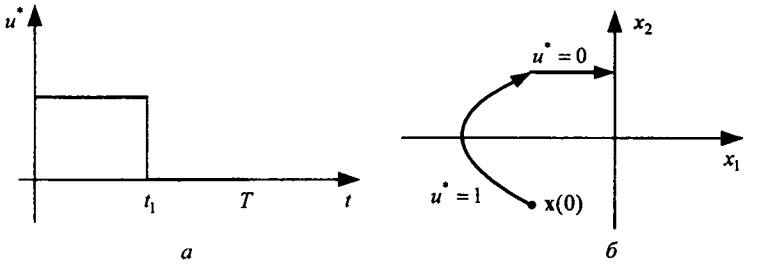
* Вектор (2.61) называется ортогональным к поверхности (2.62) в точке $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_0)$, если он ортогонален плоскости, которая касается поверхности (2.62) в точке $\mathbf{x}(t_0)$.

Запишем равенство

$$H\left(\psi(T),\mathbf{x}(T),u^*(T)\right)=-k-\left|u^*(T)\right|+\psi_1(T)\cdot x_2(T)+\psi_2(T)\cdot u^*(T)=$$
$$=-k+\psi_1(T)\cdot x_2(T)=0,$$

из которого следует, что

$$x_1(t_1)=\psi_1(T)=\frac{k}{x_2(T)}. \tag{2.64}$$



а *б*

Рис. 2.16. Графики управления (*а*) и фазовой траектории (*б*)

В интервале $t_1 \le t \le T$

$$\psi_2(T)=-\psi_1(t_1)\cdot(T-t_1)+\psi_2(t_1).$$

В соответствии с (2.32) $\psi_2(t_1)=1$ и, очевидно,

$$T-t_1=\frac{1}{\psi_1(t_1)}.$$

Так как $\psi_1(t_1)=\psi_1(T)$, то из (2.64) следует

$$T-t_1=\frac{x_2(T)}{k}. \tag{2.65}$$

В интервале $t_1 < t \le T$ $u^*(t)=0$, и потому

$$x_1(T)=x_2(t_1)\cdot(T-t_1)+x_1(t_1).$$

Принимая во внимание (2.65) и равенство $x_1(T)=0$, найдем

$$x_1(t_1)=-\frac{1}{k}\cdot x_2(t_1)\cdot x_2(T).$$

Но так как $x_2(T)=x_2(t_1)$, то окончательно получим

$$x_1(t_1)=-\frac{1}{k}\cdot x_2^2(t_1). \tag{2.66}$$

Равенство (2.66) задает на фазовой плоскости параболу. Однако, как следует из рис. 2.16, переключение управления с $u^*(t)=1$ на $u^*(t)=0$ возможно только при $x_2(t_1)>0$ (в противном случае прямая $x_1=0$ не может быть достигнута), т.е. уравнение (2.66) необходимо дополнить неравенством $x_2(t_1)>0$.

Обозначим γ^+ линию на фазовой плоскости, определяемую соотношениями

$$x_1=-\frac{1}{k}\cdot x_2^2,\ x_2\ge 0.$$

Именно в точках линии γ^+ происходит переключение управления с +1 на 0.

Если рассмотреть управление $u^*(t)$, вид которого представлен на рис. 2.17, и соответствующую ему фазовую траекторию, то указанным выше способом легко установить, что переключение управления $u^*(t)$ с –1 на 0 происходит на линии γ^-, которая задается соотношениями

$$x_1=\frac{1}{k}\cdot x_2^2,\ x_2\le 0.$$

Обозначим γ объединение линий γ^+ и γ^-: $\gamma=\gamma^+\cup\gamma^-$. Для каждой фазовой траектории $\mathbf{x}(t)$ переключение управления $u^*(t)$ происходит на линии γ. На рис. 2.18 изображены линия переключения и вид выде-

ленных необходимыми условиями оптимальности фазовых траекторий. Только изображенные на рис. 2.18 траектории могут быть оптимальными траекториями.

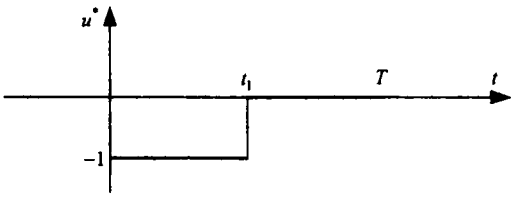


Рис. 2.17. График управления $u^*(t)$

Необходимые условия оптимальности непосредственно не могут гарантировать оптимальность выделенных с их помощью управлений и траекторий. С другой стороны, оптимальная траектория и оптимальное управление должны удовлетворять необходимым условиям. Изображенные на рис. 2.18 траектории, несомненно, являются оптимальными, так как каждой начальной точке соответствует единственная траектория, а по условиям задачи существование оптимальных траекторий и управлений представляется вполне очевидным.

На рис. 2.18 видно, что каждая оптимальная траектория целиком лежит либо в левой, либо в правой полуплоскости.

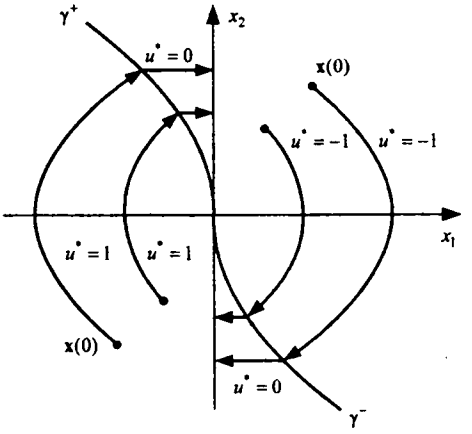


Рис. 2.18. Графики оптимальных фазовых траекторий

Обозначим

$$x_1 = \varphi(x_2)$$

уравнение линии γ. Оптимальное управление задается равенством

$$u = \begin{cases} 1, \text{ если } x_1 - \varphi(x_2) < 0 \text{ и } x_1 < 0, \\ -1, \text{ если } x_1 - \varphi(x_2) > 0 \text{ и } x_1 > 0, \\ 0, \text{ если } x_1 - \varphi(x_2) > 0 \text{ и } x_1 < 0 \\ \quad \text{или } x_1 - \varphi(x_2) < 0 \text{ и } x_1 > 0. \end{cases}$$

2.2.3. Неавтономный случай

В отличие от п. 2.1 будем теперь считать, что движение объекта управления описывается неавтономными уравнениями вида

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t), \quad i = \overline{1,n}, \tag{2.67}$$

а вместо функционала (2.2) будем рассматривать функционал

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, t)\,dt. \tag{2.68}$$

Будем полагать, что момент времени t_0 задан, а момент времени t_1 не задан и вместе с управлением $\mathbf{u}(t)$ выбирается из условия минимизации функционала (2.68). Ограничимся рассмотрением двухточечной задачи о переводе фазовой точки $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ из заданного начального положения $\mathbf{x}^0$ в заданное конечное положение $\mathbf{x}^1$.

Введем еще одну переменную x_{n+1}, которая определяется уравнением

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1, \quad x_{n+1}(t_0) = t_0.$$

Очевидно, в этом случае $x_{n+1} = t$, и уравнения (2.67), функционал (2.68) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} &\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_i, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, x_{n+1}), \quad i = \overline{1,n}, \\ &\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1; \end{aligned} \tag{2.69}$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x_1, \ldots, x_n, u_1, \ldots, u_m, x_{n+1})\,dt. \tag{2.70}$$

В результате получили автономную задачу оптимального управления.

Введем $(n+1)$-мерный вектор $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ и $(n+1)$-мерное фазовое пространство X^*. Автономный вариант исходной неавтономной задачи оптимального управления выглядит следующим образом. В фазовом пространстве X^* задана начальная точка $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0, t_0)$ и конечное многообразие s_1, задаваемое соотношениями

$$x_\nu - x_\nu^1 = 0, \quad \nu = \overline{1,n}. \tag{2.71}$$

Требуется среди допустимых управлений $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, переводящих фазовую точку $\mathbf{x}$ системы (2.69) из заданного начального положения $\mathbf{x}^0$ на многообразие (2.71), найти такое, которое доставляет минимум функционалу (2.70).

Для сформулированной автономной задачи оптимального управления с закрепленным левым и подвижным правым концами условия оптимальности задаются теоремой 2.1 и условиями трансверсальности. Условия трансверсальности имеют вид

$$\psi_i(t_1) = \rho_i^+ \quad (i = \overline{1,n}), \quad \psi_{n+1}(t_1) = 0. \tag{2.72}$$

Первые n соотношений (2.72) не накладывают никаких условий на вспомогательные функции $\psi_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, так как ρ_i^+, $i = \overline{1,n}$, — любые вещественные числа. Содержательным является последнее условие (2.72).

2.3. ОПТИМИЗАЦИЯ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ ЛИНЕЙНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

2.3.1. Максимизация функции Гамильтона

Рассмотрим оптимизацию по быстродействию линейного объекта управления, движение которого задается системой уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k, \quad i = \overline{1,n}. \tag{2.73}$$

Запишем систему уравнений (2.73) в матричной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{2.74}$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор состояния системы, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — m-мерный вектор управления, **A** и **B** — матрицы, имеющие размерности соответственно $n \times n$ и $n \times m$. Векторы **x** и **u** являются векторами-столбцами.

Будем предполагать, что система уравнений (2.74) является *нормальной*, т.е. матрицы

$$\mathbf{G}_j = \left[\mathbf{b}_j \middle| \mathbf{A}\mathbf{b}_j \middle| \ldots \middle| \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_j\right], \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.75}$$

для всех j являются невырожденными, здесь $\mathbf{b}_j$ — j-й столбец матрицы **B**. Пусть, далее, область управления U представляет собой m-мерный параллелепипед, задаваемый неравенствами

$$A_j^1 \le u_j \le A_j^2, \quad j = \overline{1,m}, \tag{2.76}$$

где $A_j^1 < 0$, $A_j^2 > 0$, $j = \overline{1,m}$.

В соответствии с теоремой 2.2 запишем функцию Гамильтона

$$\bar{H}(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i + \sum_{i=1}^{n} \psi_i \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k.$$

В матричной форме функция Гамильтона имеет вид

$$\bar{H}(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \psi^{\mathrm{T}} \mathbf{A}\mathbf{x} + \psi^{\mathrm{T}} \mathbf{B}\mathbf{u}. \tag{2.77}$$

Вспомогательный вектор $\psi(t)$ определяется уравнениями

$$\frac{d\psi}{dt} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}} \psi. \tag{2.78}$$

Оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ доставляет функции Гамильтона в каждый момент времени t максимум. Так как первое слагаемое функции (2.77) не зависит от управления, то максимизировать необходимо функцию $\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u}$, которую представим в виде

$$\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{u} = \sum_{k=1}^{m} \left[\sum_{i=1}^{n} \psi_i b_{ik} \right] u_k. \tag{2.79}$$

Так как компоненты вектора **u** в соответствии с (2.76) могут изменяться независимо друг от друга, то из условия максимума функции (2.79) найдем

$$u_k = \begin{cases} A_k^2, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} \psi_i b_{ik} > 0, \\ A_k^1, \text{ если } \sum_{i=1}^{n} \psi_i b_{ik} < 0, \quad k = \overline{1,m}. \end{cases} \tag{2.80}$$

В соответствии с (2.80) *оптимальные управления* $u_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, *являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения* A_k^1, A_k^2. Покажем, что для нормальной системы (2.74) соотношения (2.80) определяют оптимальное управление, за исключением конечного числа точек, однозначным образом.

Как следует из (2.80), компонента u_k вектора управления **u** определяется неоднозначным образом, если

$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t) b_{ik} = 0.$$

Вектор-функция $\psi(t)$ — аналитическая функция, так как является решением системы линейных однородных уравнений с постоянными коэффициентами. Но тогда ана-

литической является и функция $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ik}$. Если функция $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ik}$ обращается в нуль на бесконечном множестве точек t, то

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ik} \equiv 0.$$

Запишем это равенство в векторной форме

$$\psi^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{b}_k \equiv 0, \tag{2.81}$$

где $\mathbf{b}_k$ — k-й столбец матрицы $\mathbf{B}$.

Продифференцируем тождество (2.81) $(n-1)$ раз. Принимая во внимание уравнение (2.78), получим систему уравнений

$$\begin{cases} \psi^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{b}_k \equiv 0, \\ \psi^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}\mathbf{b}_k \equiv 0, \\ \cdots\cdots \\ \psi^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}_k \equiv 0. \end{cases} \tag{2.82}$$

Относительно вектора $\psi(t)$ уравнения (2.82) являются системой линейных однородных алгебраических уравнений. Определитель этой системы

$$\det\left[\mathbf{G}_k^{\mathrm{T}}\right] \neq 0,$$

так как по предположению система уравнений (2.74) является *нормальной*. Из (2.82) следует тогда, что вектор

$$\psi(t) \equiv 0,$$

что противоречит пункту 2 теоремы 2.2.

Таким образом, из условия максимума функции (2.79) оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ определяется однозначным образом (за исключением конечного числа точек).

2.3.2. Теорема о числе переключений

В соответствии с равенством (2.80) оптимальные по быстродействию управления $u_k(t)$, $k=\overline{1,m}$, являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения A_k^1 или A_k^2, причем переключение управления $u_k(t)$ происходит в момент обращения в нуль функции $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ik}$. Выше было установлено, что указанная функция обращается в нуль конечное число раз, т.е. число таких переключений в интервале $t_0 \le t \le t_1$ конечно. Для определения оптимального управления очень важно заранее располагать информацией о возможном числе таких переключений. Оказывается, что для определенного класса линейных объектов управления удается получить такую информацию.

Прежде чем формулировать основной результат в виде теоремы, сформулируем и докажем следующую лемму [72].

Лемма. *Пусть* $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$ *— различные вещественные числа, а* $f_1(t),f_2(t),\ldots,f_r(t)$ *— многочлены, имеющие степени соответственно* $k_1,k_2,\ldots,k_r$. *Тогда следующая функция* (квазимногочлен)

$$f_1(t)e^{\lambda_1 t} + f_2(t)e^{\lambda_2 t} + \ldots + f_r(t)e^{\lambda_r t} \tag{2.83}$$

может обращаться в нуль не более чем $k_1+k_2+\ldots+k_r+r-1$ *раз.*

Доказательство. При $r=1$ лемма справедлива, так как функция $f_1(t)e^{\lambda_1 t}$ обращается в нуль в точках, в которых обращается в нуль многочлен $f_1(t)$, и, следовательно, имеет не более k_1 нулей.

Предположим, что лемма справедлива, когда число слагаемых меньше r. Покажем, что в этом случае она справедлива и при r слагаемых. Это утверждение докажем методом от противного. Предположим, что при r слагаемых лемма неверна и функция (2.83) имеет, по крайней мере, $k_1+k_2+\ldots+k_r+r$ нулей. Умножим (2.83) на $e^{-\lambda_r t}$, что не изменит ее нулей. В результате получим функцию

$$f_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_r)t}+f_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_r)t}+\ldots+f_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1}-\lambda_r)t}+f_r(t). \qquad (2.84)$$

Продифференцировав функцию (2.84) $r+1$ раз, получим

$$g_1(t)e^{(\lambda_1-\lambda_r)t}+g_2(t)e^{(\lambda_2-\lambda_r)t}+\ldots+g_{r-1}(t)e^{(\lambda_{r-1}-\lambda_r)t}, \qquad (2.85)$$

здесь $g_\nu(t)$ — многочлены, имеющие ту же степень, что и многочлены $f_\nu(t)$. Поскольку между двумя нулями функции лежит, по крайней мере, один нуль ее производной, то при каждом дифференцировании может «теряться» не более одного нуля, т.е. функция (2.85) имеет не менее

$$k_1+k_2+\ldots+k_r+r-(k_r+1)=k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}+(r-1)$$

нулей. Но квазимногочлен (2.85) имеет $r-1$ слагаемых, числа $(\lambda_i-\lambda_r)$ — различны. По предположению для него справедлива лемма, и он может иметь не более чем $k_1+k_2+\ldots+k_{r-1}+(r-2)$ нулей. Получили противоречие, которое доказывает утверждение о том, что если лемма справедлива для $r-1$ слагаемых, то она справедлива и для r слагаемых.

Дальнейшее доказательство леммы следует из метода математической индукции.

Перейдем теперь к формулировке теоремы. Во избежание недоразумений отметим, что рассматривается двухточечная задача оптимального управления, т.е. задача о наибыстрейшем переводе фазовой точки системы (2.74) из заданного начального положения $\mathbf{x}^0$ в заданное конечное положение $\mathbf{x}^1$.

Теорема 2.3. *Если входящая в уравнение* (2.74) *матрица* $\mathbf{A}$ *имеет только вещественные собственные числа, а управления* $u_j(t)$, $j=\overline{1,m}$, *удовлетворяют теореме* 2.2, *то каждое из управлений* $u_j(t)$, $j=\overline{1,m}$, *является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения* A_j^1, A_j^2, *и имеет не более* $n-1$ *переключений, где* n — *порядок системы* (2.74).

Доказательство. Из равенства (2.80) следует, что управление $u_j(t)$, $j=\overline{1,m}$, является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения A_j^1, A_j^2, а число переключений управления совпадает с числом нулей функции $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ij}$. Таким образом, для того чтобы определить максимально возможное число переключений управления $u_j(t)$, необходимо установить, сколько раз может обращаться в нуль функция $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ij}$.

Пусть $p_1,p_2,\ldots,p_n$ — различные собственные числа матрицы $\mathbf{A}$. Тогда матрица $-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ имеет собственные числа $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_r$, где $\lambda_\nu=-p_\nu$ $(\nu=\overline{1,r})$. По условию

теоремы матрица $\mathbf{A}$ имеет вещественные собственные числа. Но тогда и собственные числа λ_ν матрицы $-\mathbf{A}^T$ также являются вещественными. Обозначим через ρ_ν, $\nu=\overline{1,r}$, кратность собственного числа λ_ν. Очевидно, $\rho_1+\rho_2+\ldots+\rho_r=n$.

Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, каждая функция $\psi_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, являющаяся решением уравнения (2.78), имеет вид

$$\psi_i(t)=f_1(t)e^{\lambda_1 t}+f_2(t)e^{\lambda_2 t}+\ldots+f_r(t)e^{\lambda_r t}, \tag{2.86}$$

здесь $f_\nu(t)$, $\nu=\overline{1,r}$, — многочлены, причем степень многочлена $f_\nu(t)$ не превосходит $\rho_\nu-1$. Но тогда линейная комбинация $\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ij}$ будет иметь вид, аналогичный (2.86). Запишем

$$\sum_{i=1}^{n}\psi_i(t)b_{ij}=\sigma_1(t)e^{\lambda_1 t}+\sigma_2(t)e^{\lambda_2 t}+\ldots+\sigma_r(t)e^{\lambda_r t}, \tag{2.87}$$

здесь $\sigma_\nu(t)$, $\nu=\overline{1,r}$, — многочлен, имеющий ту же степень, что и многочлен $f_\nu(t)$. Применив к функции (2.87) доказанную выше лемму, найдем, что она может обращаться в нуль не более чем

$$(\rho_1-1)+(\rho_2-1)+\ldots+\rho_{r-1}+(r-1)=n-1$$

раз. Теорема доказана.

Данную теорему называют теоремой о числе переключений. Она находит широкое применение при синтезе оптимального по быстродействию управления в задачах с одним управляющим параметром. Далее, нетрудно убедиться, применив принцип максимума для неавтономных систем, что теорема сохраняет свою силу, если вместо уравнений (2.74) рассматривать уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u}+\gamma(t),$$

где $\gamma(t)$ — некоторая известная вектор-функция.

2.3.3. Достаточные условия оптимальности

Рассмотрим двухточечную задачу об оптимальности по быстродействию управления объектом (2.74) при наличии ограничений (2.76). При этом предполагается, что начальной точкой $\mathbf{x}^0$ может быть любая точка фазового пространства, а конечная точка $\mathbf{x}^1$ совпадает с началом координат, т.е. $\mathbf{x}^1=0$. Как и всюду в данном параграфе, будем считать, что система уравнений (2.74) является *нормальной*.

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{u}^*(t)$ *и* $\mathbf{x}^*(t)$, $t_0\le t\le t_1$, *— управление и траектория, переводящие фазовую точку* $\mathbf{x}$ *системы* (2.74) *из заданного начального положения* $\mathbf{x}^0$ *в начало координат. Если управление* $\mathbf{u}^*(t)$ *и траектория* $\mathbf{x}^*(t)$ *удовлетворяют теореме* 2.2, *то они доставляют функционалу*

$$I=\int_{t_0}^{t_1}dt=t_1-t_0$$

абсолютный минимум.

Доказательство. Запишем равенство

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{n}\psi_i\left(x_i^*-x_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i\left(\frac{dx_i^*}{dt}-\frac{dx_i}{dt}\right)+\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^*-x_i\right)\frac{d\psi_i}{dt}, \tag{2.88}$$

здесь $\mathbf{x}(t)$ — любая траектория системы (2.74), соответствующая допустимому управлению $\mathbf{u}(t)$ и переводящая фазовую точку системы из заданного начального положения $\mathbf{x}^0$ в начало координат. Будем, далее, полагать, что траектории $\mathbf{x}(t)$ и $\mathbf{x}^*(t)$ исходят из начальной точки $\mathbf{x}^0$ в один и тот же момент времени t_0.

Перепишем равенство (2.88) в векторной форме

$$\frac{d}{dt}\left[\psi^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\right)\right]=\frac{d\psi^{\mathrm{T}}}{dt}\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\right)+\psi^{\mathrm{T}}\frac{d}{dt}\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\right). \tag{2.89}$$

Из (2.89), принимая во внимание (2.78) и (2.74), найдем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\left[\psi^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\right)\right]&=-\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\right)+\psi^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\right)+\mathbf{B}\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}\right)\right]=\\&=\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}\right).\end{aligned} \tag{2.90}$$

Управление $\mathbf{u}^*(t)$ и траектория $\mathbf{x}^*(t)$ удовлетворяют теореме 2.2 и поэтому управление $\mathbf{u}^*(t)$ в каждый момент времени t максимизирует функцию $\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{Bu}$, т.е. в каждый момент времени t имеет место неравенство

$$\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\left(\mathbf{u}^*(t)-\mathbf{u}(t)\right)\geq 0.$$

Выше было показано, что для нормальной системы (2.74) управление $\mathbf{u}^*(t)$ из условия максимума функции $\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{Bu}$ определяется однозначным образом. Далее, если $\mathbf{x}(t)\neq\mathbf{x}^*(t)$, то $\mathbf{u}(t)\neq\mathbf{u}^*(t)$, причем в каждой точке t (за исключением конечного числа точек, а их можно не принимать во внимание), в которой $\mathbf{u}(t)\neq\mathbf{u}^*(t)$, выполняется условие

$$\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\left(\mathbf{u}^*(t)-\mathbf{u}(t)\right)>0. \tag{2.91}$$

Обозначим через τ момент времени прихода в начало координат траектории $\mathbf{x}(t)$. Покажем, что

$$\tau>t_1,$$

если $\mathbf{x}(t)\neq\mathbf{x}^*(t)$, здесь t_1 — момент прохождения траектории $\mathbf{x}^*(t)$ через начало координат. Предположим противное и положим $\mathbf{u}(t)=0$ при $\tau<t\leq t_1$. Тогда $\mathbf{x}(t)=0$ при $\tau<t\leq t_1$. Проинтегрируем равенство (2.90):

$$\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\left[\psi^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{x}\right)\right]dt=\int_{t_0}^{t_1}\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}\right)dt. \tag{2.92}$$

Из (2.92), принимая во внимание неравенство (2.91) и соотношение $\mathbf{x}^*(t_1)=\mathbf{x}(t_1)=0$, найдем, что

$$0=C, \tag{2.93}$$

где $C>0$. Полученное противоречие доказывает недопустимость предположения о том, что $\tau\leq t_1$. Далее, поскольку на функцию $\mathbf{x}(t)$, которая сравнивается с функцией $\mathbf{x}^*(t)$, не накладывались никакие ограничения, то доказан абсолютный минимум функционала I.

Теорема 2.5 (теорема единственности). *Пусть* $\mathbf{x}^*(t)$ *и* $\mathbf{x}^{**}(t)$ *— две оптимальные траектории, соединяющие начальную точку* $\mathbf{x}^0$ *с конечной точкой* $\mathbf{x}^1$ *и доставляющие абсолютный минимум функционалу*

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt.$$

Тогда $\mathbf{x}^*(t) \equiv \mathbf{x}^{**}(t)$.

Доказательство. Будем предполагать, что в равенстве (2.90) вспомогательный вектор $\psi = (\psi_1(t),\ldots,\psi_n(t))^{\mathrm{T}}$, существование которого гарантируется теоремой 2.2, соответствует оптимальной траектории $\mathbf{x}^*(t)$. Если $\mathbf{x}^{**}(t) \neq \mathbf{x}^*(t)$, то имеет место неравенство (2.91) и из (2.92) тогда следует противоречие (2.93), которое доказывает теорему.

В теореме 2.5, в отличие от теоремы 2.4, конечной точкой $\mathbf{x}^1$ может быть любая точка фазового пространства.

Точку $\mathbf{x}^1$ будем называть *точкой равновесия*, если найдется вектор $\mathbf{u}^0$, удовлетворяющий ограничениям (2.76), такой, что $\mathbf{A}\mathbf{x}^1 + \mathbf{B}\mathbf{u}^0 = 0$.

При $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^0$ уравнение (2.74) имеет решение $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}^1$. Анализ доказательства теоремы 2.4 показывает, что она сохраняет свою силу, если конечной точкой $\mathbf{x}^1$ является точка равновесия (точка $\mathbf{x}^1 = 0$ является частным случаем точки равновесия).

При управлении техническими объектами, как правило, рассматривается перевод фазовой точки системы в точку равновесия (обычно в начало координат). Именно такая ситуация и рассмотрена в теореме 2.4. На самом деле теорема 2.4 сохраняет свою силу и в том случае, когда $\mathbf{x}^1$ может быть произвольной точкой фазового пространства. Однако в этом случае доказательство теоремы заметно усложняется.

Пример 2.4. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u - x_1. \end{cases} \tag{2.94}$$

Будем решать задачу о наибыстрейшем переводе фазовой точки системы (2.94) из начальной точки $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, x_2^0)$ в начало координат за минимально возможное время, полагая, что на управляющий параметр u наложено ограничение $|u| \le 1$. В процессе решения задачи в качестве начальной точки будет взята произвольная точка фазового пространства.

Легко видеть, что система уравнений (2.94) является *нормальной*. Поэтому управление $u(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$, удовлетворяющие теореме 2.2, в соответствии с теоремой 2.4, являются оптимальными.

Запишем функцию Гамильтона

$$\overline{H}(\psi, \mathbf{x}, u) = \psi_1 \cdot x_2 + \psi_2 (u - x_1).$$

Из условия максимума функции Гамильтона находим, что оптимальное управление

$$u(t) = \operatorname{sign} \psi_2(t). \tag{2.95}$$

Вспомогательный вектор $\psi_2(t)$ определяется уравнениями

$$\frac{d\psi_1}{dt} = \psi_2, \quad \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1. \tag{2.96}$$

Из (2.96) следует уравнение

$$\frac{d^2\psi_2}{dt^2} + \psi_2 = 0,$$

решение которого имеет вид

$$\psi_2(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t = R \sin(t - \alpha),$$

здесь R ($R > 0$) и α — некоторые постоянные, причем $0 \le \alpha \le 2\pi$.

В соответствии с (2.95)

$$u(t) = \operatorname{sign} \sin(t - \alpha).$$

Таким образом, оптимальное управление представляет собой кусочно-постоянную функцию, принимающую значения +1 и –1 на интервалах времени длиною π. Исключение составляют первый и последний интервалы, длина которых зависит от α и t_1 (t_0 полагается равным нулю) и может быть любой величиной, не превышающей числа π.

Найдем фазовые траектории системы (2.94) при $u=1$ и $u=-1$.

При $u=0$ из сравнения уравнений (2.94) и (2.96) следует, что

$$x_2(t)=R\sin(t+\gamma),\ x_1(t)=-R\cos(t+\gamma).$$

Фазовые траектории представляют собой окружности вида

$$x_1^2+x_2^2=R^2. \tag{2.97}$$

Радиус R зависит от начальных условий и может быть любой величиной.

При $u=1$ уравнения (2.94) можно переписать в виде

$$\frac{d(x_1-1)}{dt}=x_2,\ \frac{dx_2}{dt}=-(x_1-1).$$

В соответствии с (2.97) фазовые траектории системы (2.94) при $u=1$ представляют собой окружности

$$(x_1-1)^2+x_2^2=R^2 \tag{2.98}$$

радиуса R с центром в точке O_1 с координатами (1,0). Семейство окружностей (2.98) изображено на рис. 2.19.

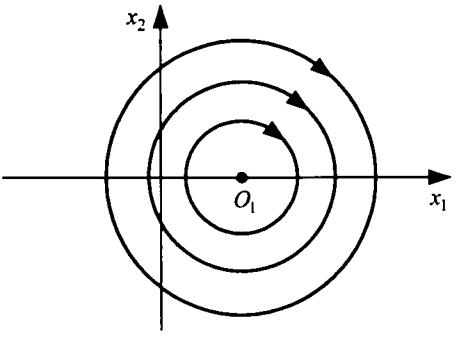


Рис. 2.19. Графики окружностей, определяемых (2.98)

Аналогичным образом легко показать, что при $u=-1$ фазовые траектории являются окружностями вида

$$(x_1+1)^2+x_2^2=R^2 \tag{2.99}$$

с центром в точке O_{-1}, имеющей координаты $(-1,0)$. Окружности семейства (2.99) представлены на рис. 2.20.

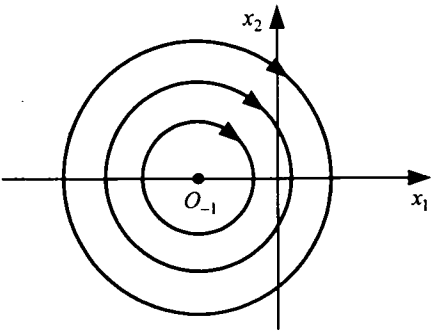


Рис. 2.20. Графики окружностей, определяемых (2.99)

По окружностям семейств (2.98) и (2.99) фазовая точка движется по часовой стрелке с равномерной скоростью, проходя за время π ровно половину окружности.

Рассмотрим оптимальную фазовую траекторию, которая соответствует управлению, представленному на рис. 2.21.

На заключительном участке фазовая точка движется под воздействием управления $u=1$ по дуге окружности семейства (2.98), причем по той из окружностей семейства (2.98), которая проходит через начало координат, так как конечной целью управления является перевод фазовой точки в начало координат. Обозначим через η длину заключительного участка. Очевидно $\eta\le\pi$. За время η фазовая точка проходит дугу AO окружности

$$(x_1 - 1)^2 + x_2 = 1,$$

т.е. меньше половины окружности (рис. 2.22).

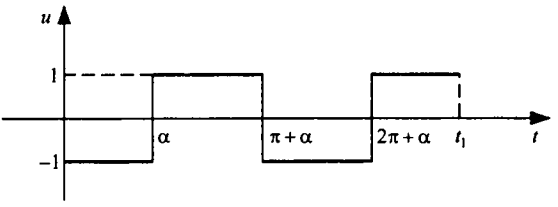


Рис. 2.21. График управления $u(t)$

В положение A фазовая точка попала, двигаясь в течение времени π под воздействием управления $u = -1$ по дуге BA окружности семейства (2.99). За время π фазовая точка проходит ровно половину окружности. Таким образом, точка B симметрична точки A относительно центра O_{-1}.

Следующим участком оптимальной траектории (считая от конца) является полуокружность CB с центром в точке O_1, и, следовательно, точка C симметрична точке B относительно центра O_1 и т.д. Изображенному на рис. 2.21 оптимальному управлению соответствует оптимальная траектория $DCBAO$.

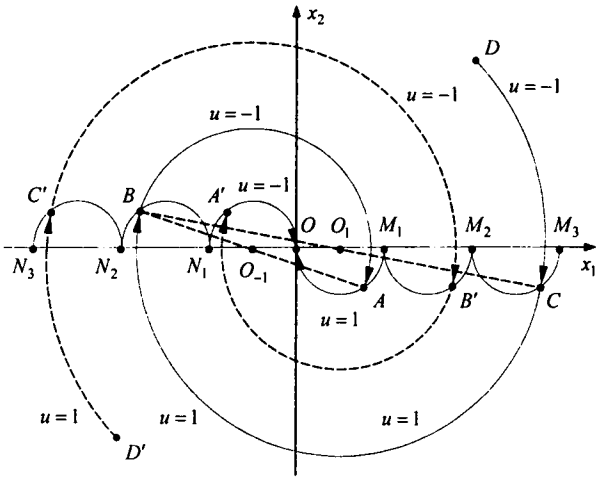


Рис. 2.22. График оптимальной фазовой траектории

Если рассмотреть оптимальное управление (рис. 2.23), у которого на заключительном участке длиною η $u(t) = -1$, то получим оптимальную траекторию, симметричную траектории $DCBAO$ относительно начала координат (на рис. 2.22 траектория $D'C'B'A'O$).

Рассмотрим теперь, что представляет собой совокупность всех возможных оптимальных траекторий.

Длительность заключительного участка η может быть любым числом, лежащим в диапазоне $0 \le \eta \le \pi$. Поэтому точка A может быть любой точкой полуокружности OM_1. Точка B симметрична точке A относительно центра O_{-1}, и поэтому она может быть любой точкой полуокружности N_1N_2. Аналогичным образом можно показать, что точка C может быть любой точкой полуокружности M_2M_3 и т.д.

Если рассмотреть оптимальную траекторию типа $D'C'B'A'O$, то указанным выше способом легко установить, что возможные положения точки A' образуют полуокружность N_1O, возможные положения точки B' — полуокружность M_1M_2, а возможные положения точки C' — полуокружность N_3N_2 и т.д. Но точки A, B, C, A', C', B' являются точками фазового пространства, в которых происходит переключение оптимального управления. Таким образом, переключения оптимального управления происходят на линии $\ldots N_3N_2N_1OM_1M_2M_3\ldots$, составленной из полуокружностей единичного радиуса.

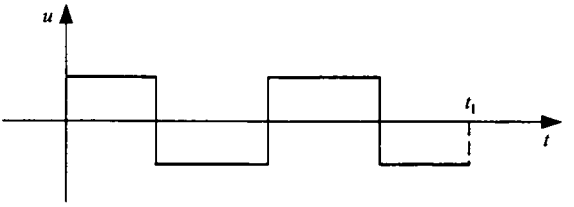


Рис. 2.23. Оптимальное управление

Введем функцию

$$v(x_1,x_2)=\begin{cases} 1 \text{ ниже линии } \ldots N_3N_2N_1OM_1M_2M_3\ldots \text{ и на линии } M_1O, \\ -1 \text{ выше линии } \ldots N_3N_2N_1OM_1M_2M_3\ldots \text{ и на линии } N_1O. \end{cases}$$

Из рис. 2.22 следует, что оптимальное управление $u=v(x_1,x_2)$. Если в уравнениях (2.94) положить $u=v(x_1,x_2)$, то решениями системы (2.94) будут идущие в начало координат оптимальные по быстродействию траектории.

Пример 2.5. Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 + x_2, \\ \dot{x}_2 = u_2, \end{cases} \tag{2.100}$$

полагая, что на управления u_1 и u_2 наложены ограничения

$$|u_1|\le 1,\ |u_2|\le 1.$$

По-прежнему решается задача о наибыстрейшем переводе фазовой точки системы из заданного начального положения в начало координат.

С помощью матриц (2.75) легко убедиться, что система уравнений (2.100) не является нормальной. Это означает, что из условия максимума функции Гамильтона управление определяется неоднозначным образом. Рассмотрим, как это сказывается на определении оптимального управления и оптимальных траекторий.

Запишем функцию Гамильтона

$$\bar{H}(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})=\psi_1(u_1+x_2)+\psi_2u_2.$$

Вспомогательные переменные $\psi_1(t)$ и $\psi_2(t)$ определяются уравнениями

$$\frac{d\psi_1}{dt}=0,\ \frac{d\psi_2}{dt}=-\psi_1. \tag{2.101}$$

Из условия максимума функции Гамильтона находим, что оптимальное управление

$$\begin{aligned} u_1(t)&=\operatorname{sign}\psi_1(t), \\ u_2(t)&=\operatorname{sign}\psi_2(t), \end{aligned} \tag{2.102}$$

здесь предполагается, что функция sign y не определена в точке $y=0$.

Функция $\psi_2(t)$ не может тождественно равняться нулю, так как тогда, как следует из второго уравнения (2.101), $\psi_1(t)\equiv 0$, что противоречит пункту 2 теоремы 2.2. Однако уравнения (2.101) допускают нетривиальное решение

$$\psi_1(t)\equiv 0,\ \psi_2(t)=\psi_2(0),$$

которое приводит к тому, что управление u_1 не определяется однозначно из условия максимума функции Гамильтона, т.е. условию максимума удовлетворяет любое значение параметра u_1, лежащего в диапазоне

$$-1\le u_1\le 1.$$

Уравнения (2.101) имеют решение

$$\psi_1(t)=\psi_1(0),\ \psi_2(t)=-\psi_1(0)\,t+\psi_2(0). \tag{2.103}$$

Если начальное условие $\psi_1(0)\neq 0$, то в соответствии с (2.101) управление u_1 на всем интервале движения остается неизменной величиной, равной 1 либо -1. Функция $\psi_2(t)$ может изменять свой знак только один раз. Поэтому управление $u_2(t)$ является кусочно-постоянной функцией, принимающей значения $+1$ или -1, и допускается только одно изменение знака управления. Далее отметим, что если в оптимальном движении управление $u_2(t)$ изменяет свой знак, то, как следует из (2.103), на начальном участке движения управления $u_2(t)$ и $u_1(t)$ имеют одинаковые знаки.

Необходимо рассмотреть два варианта: $\psi_1(t) \neq 0$, $\psi_1(t) = 0$.

Рассмотрим сначала первый вариант, когда $\psi_1(t) \neq 0$. В этом случае справедлива теорема 2.4, и, следовательно, управление и траектория, удовлетворяющие теореме 2.2, являются оптимальными, а теорема 2.5 исключает возможность существования других оптимальных траекторий.

Найдем фазовые траектории системы (2.100), соответствующие различным сочетаниям управлений u_1 и u_2. Для этого решим уравнения (2.100), полагая u_1 и u_2 постоянными величинами.

Имеем

$$x_2 = u_2 t + c_1,$$

$$x_1 = \frac{1}{2} u_2 t^2 + u_1 t + c_1 t + c_2,$$

здесь c_1 и c_2 — произвольные числа. Определим из первого уравнения время t и подставим его во второе уравнение. В результате получим равенство

$$x_1 = \frac{1}{2} \frac{x_2^2}{u_2} + \frac{u_1}{u_2} x_2 + s, \tag{2.104}$$

где $s = c_2 - \frac{c_1^2}{2u_2} - \frac{u_1}{u_2} c_1$ — произвольная константа. Равенство (2.104) задает параболу, вершина которой лежит в точке с координатами $\left(s - \frac{1}{2} \frac{u_1^2}{u_2}, -u_1 \right)$. Задаваясь различными значениями s, параболы (2.104) можно произвольным образом сдвигать вдоль прямой

$$x_2 = -u_1.$$

Рассмотрим оптимальные траектории, на которых управление $u_2(t)$ имеет переключение. В этом случае возможны следующие сочетания начальных условий для вспомогательного вектора $\psi(t)$: $\psi_2(0) > 0$, $\psi_1(0) > 0$; $\psi_2(0) < 0$, $\psi_1(0) < 0$.

Для первого сочетания управление $u_1 = 1$, управление u_2 на начальном участке равно 1, а на заключительном участке равно -1. На начальном участке фазовая точка системы движется по параболе семейства

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot x_2^2 + x_2 + s,$$

вершина которой лежит на прямой

$$x_2 = -1,$$

а заканчивается движение по параболе семейства

$$x_1 = -\frac{1}{2} \cdot x_2^2 - x_2 + s,$$

причем по той из парабол, которая проходит через начало координат.

Для второго сочетания начальных условий управление $u_1 = -1$, управление u_2 до переключения равно -1, а после переключения равно 1. Оптимальная фазовая траектория состоит из примыкающих друг к другу кусков парабол соответственно семейства

$$x_1 = -\frac{1}{2} \cdot x_2^2 + x_2 + s$$

и семейства

$$x_1 = \frac{1}{2} \cdot x_2^2 - x_2 + s.$$

Вершины этих парабол лежат на прямой $x_2 = 1$.

На рис. 2.24 изображены две рассмотренные выше оптимальные траектории. Остальные оптимальные траектории, соответствующие варианту $\psi_1(t) \neq 0$, аналогичны изображенным на рис. 2.24.

Оказывается, что не все точки фазового пространства, рассматриваемые как начальные для оптимальных траекторий, могут быть переведены в начало координат с помощью оптимальных траекторий, соответствующих первому варианту $(\psi_1(t) \neq 0)$. Предельной оптимальной траекторией типа $A'B'O$ $(\psi_2(0) < 0,\ \psi_1(0) < 0)$ является траектория, у которой участок $B'O$ равен нулю. Очевидно, на этой траектории управление $u_2(t)$ не имеет переключения (траектория LO на рис. 2.25). Предельной траекторией типа ABO является траектория $L'O$, на которой $u_1 = 1$, $u_2 = 1$. Фазовые точки, расположенные между

линиями $MBOB'M'$ и LOL', как следует из рис. 2.25, не могут быть переведены в начало координат с помощью оптимальных фазовых траекторий, соответствующих первому варианту.

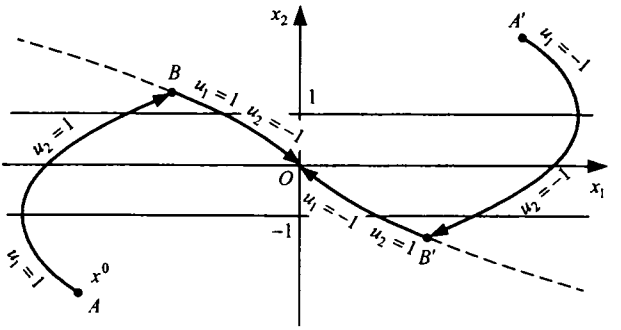


Рис. 2.24. Графики оптимальных траекторий

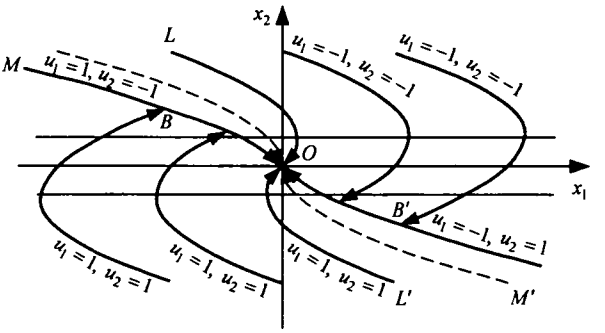


Рис. 2.25. Графики оптимальных траекторий

Рассмотрим второй вариант, когда $\psi_1(t)=0$. В этом случае, как следует из (2.101) и (2.102), управление $u_2(t)$ не имеет переключений. Соответствующие оптимальные траектории лежат в области, ограниченной линиями LOL' и MOM'.

Положим для определенности, что начальная точка $\mathbf{x}^0$ лежит в области, ограниченной линиями LO и MO. Как следует из уравнений (2.100) и рис. 2.25, фазовая переменная x_2 может быть переведена в нуль только с управлением $u_2(t)=-1$, т.е. необходимо выбрать $\psi_2(0)<0$. Переменная x_2 обращается в нуль за время

$$t_1 = x_2(0), \ (t_0 = 0).$$

Анализ уравнений (2.100) показывает, что фазовая переменная x_2 выбором управления u_1 $\left(|u_1| \le 1\right)$ также может быть переведена в нуль за время t_1, при этом управление $u_1(t)$ определяется неоднозначным образом. Очевидно, каждая из этих траекторий является оптимальной, так как обращение в нуль фазовой переменной x_2 выполняется за минимально возможное время.

Для того чтобы упростить окончательный результат, будем выбирать управление $u_1(t)$ постоянной величиной, но так, чтобы фазовая переменная x_1 обращалась в нуль за время $t_1 = x_2(0)$. Тогда фазовые траектории являются параболами вида

$$x_1 = -\frac{1}{2}\cdot x_2^2 - u_1^* \cdot x_2, \qquad (2.105)$$

здесь символом u_1^* обозначено соответствующее постоянное значение управления u_1. Разным точкам $\mathbf{x}$ соответствуют различные значения управления u_1^*. Так как фазовая точка движется по параболам (2.105), то, очевидно, управление u_1^* можно задать равенством

$$u_1^* = -\frac{1}{2}\cdot x_2 - \frac{x_1}{x_2}.$$

Это управление можно рассматривать как оптимальное.

Таким образом, в области фазового пространства, ограниченной линиями LO и MO, оптимальное по быстродействию управление задается равенствами

$$u_1 = -\frac{1}{2}\cdot x_2 - \frac{x_1}{x_2},$$

$$u_2 = -1.$$

Линии LO и MO представляют собой куски параболы (2.104) соответственно при $u_1 = -1$, $u_2 = -1$ и $u_1 = 1$, $u_2 = -1$ и определяются уравнениями

$$x_1 = -\frac{1}{2}\cdot x_2^2 + x_2, \quad x_2 \geq 0;$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}\cdot x_2^2 - x_2, \quad x_2 \geq 0.$$

Соответствующая оптимальная траектория на рис. 2.25 изображена пунктиром.

Аналогичным образом можно установить оптимальные траектории, лежащие в области, ограниченной линиями $L'O$ и $M'O$. Линия $L'O$ определяется уравнением

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 + x_2, \quad x_2 \leq 0,$$

а линия $M'O$ — уравнением

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2^2 - x_2, \quad x_2 \leq 0.$$

Оптимальное управление в этой области задается равенствами

$$u_2 = -\frac{1}{2}\cdot x_2 + \frac{x_1}{x_2};$$

$$u_2 = 1.$$

Пунктиром на рис. 2.25 обозначена соответствующая оптимальная траектория.

Обозначим $x_1 = f_1(x_2)$ — уравнение линии LOL', а $x_1 = f_2(x_2)$ — уравнение линии MOM'. Пусть, далее, $x_1 = f_3(x_2)$ — уравнение линии LOM', $x_1 = f_4(x_2)$ — уравнение линии MOL'. Из рис. 2.25 следует, что оптимальное управление задается равенствами

$$u_1 = \begin{cases} -1, \text{ если } x_1 - f_3(x_2) \geq 0, \\ 1, \text{ если } x_1 - f_4(x_2) \leq 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 - \frac{x_1}{x_2}, \text{ если } x_1 - f_1(x_2) < 0,\ x_1 - f_2(x_2) > 0,\ x_2 > 0, \\ -\frac{1}{2}x_2 + \frac{x_1}{x_2}, \text{ если } x_1 - f_1(x_2) > 0,\ x_1 - f_2(x_2) < 0,\ x_2 < 0, \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} -1, \text{ если } x_1 - f_2(x_2) > 0, \\ 1, \text{ если } x_1 - f_2(x_2) < 0. \end{cases}$$

2.4. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Принцип максимума ориентирован на определение оптимального управления в виде функции времени, т.е. *на определение управления в виде оптимальной программы*. Если управление ищется в виде оптимальной программы, то решение задачи с помощью принципа максимума может быть сведено к определению начального значения для вектора ψ. Начальный вектор ψ должен быть выбран таким образом, чтобы исходящая из начальной точки $\mathbf{x}^0$ оптимальная фазовая траектория проходила через заданную конечную точку $\mathbf{x}^1$. Так как часть условий задается в начальный момент времени t_0, а часть условий — в конечный момент t_1, то получаем типичную двухточечную краевую задачу для системы дифференциальных уравнений. Определение оптимального управления в виде оптимальной программы рассматривается в [103].

Однако возможен другой способ задания оптимального управления. Во всех рассмотренных выше примерах оптимальное управление задавалось в виде функции вектора состояния. Такой способ задания оптимального управления не ограничивается рассмотренными выше примерами, а справедлив для любого объекта управления, движение которого задается уравнениями (2.1). Это и понятно, если в данный момент времени t состояние системы характеризуется вектором $\mathbf{x}$, то этот вектор полностью определяет дальнейшее оптимальное управление, так как из оптимальности траектории $\mathbf{x}(t)$ следует оптимальность и ее конечного участка. Для оптимизации системы, начиная с состояния $\mathbf{x}$, не важна предыстория, т.е. как система попала в состояние $\mathbf{x}$. Значение имеет лишь само состояние $\mathbf{x}$.

Таким образом, оптимальное управление может быть задано в виде функции

$$\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{x}). \tag{2.106}$$

Равенство (2.106) является векторным. В скалярной форме оно имеет вид:

$$\begin{cases} u_1 = v_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ u_2 = v_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = v_n(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Функция $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *задает оптимальное управление в виде функции вектора состояния и называется синтезирующей функцией, или функцией стратегии, а задача построения функции* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *— синтезом оптимального управления.*

Для специалистов по автоматическому управлению наибольший интерес представляет определение оптимального управления в виде синтезирующей функции. Синтезирующая функция $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ полностью определяет оптимальную систему: она показывает, какие следует взять обратные связи и как их следует преобразовать, чтобы получить наилучшую (оптимальную) систему. Очень важно, что *функция* $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ *позволяет построить управление системой по принципу обратной связи.*[*]

Строго говоря, принцип максимума, как уже отмечалось, ориентирован на определение оптимального управления в виде оптимальной программы. Однако он позволяет сравнительно просто выделить всю совокупность оптимальных траекторий, и тем самым найти оптимальное управление в виде синтезирующей функции.

Пример 2.6. Рассмотрим в качестве примера управление параметрами газа в проточной полости. Оптимальное управление будем искать в виде синтезирующей функции.

На рис. 2.26 представлена принципиальная схема объекта регулирования. Он состоит из ресивера *1*, проточной полости *3*, впускного *2* и выпускного *4* регулируемых отверстий, нерегулируемого отверстия *5*, работающего на потребителя. При построении математической модели, описывающей изменения параметров газа в проточной полости, были приняты следующие допущения:

- термодинамическое тело — идеальный газ;
- теплообмен между газом и корпусом проточной полости отсутствует;
- регулирующие органы, осуществляющие изменение площадей впускного и выпускного отверстий, являются безынерционными.

Изменение параметров газа в проточной полости задается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = \dfrac{kR}{W}\left(T_p G_1 - TG_2 - TG_3\right), \\ \dfrac{dT}{dt} = \dfrac{RT}{WP}\left[\left(kT_p - T\right)G_1 - (k-1)TG_2 - (k-1)TG_3\right], \end{cases} \tag{2.107}$$

где G_1, G_2, G_3 — массовые секундные расходы газа через отверстия, имеющие площади S_1, S_2, S_3 соответственно; R — газовая постоянная; W — объем проточной полости; k — показатель адиабаты; P_p, T_p — дав-

[*] Синтезу оптимального управления, или оператора оптимальной обратной связи, посвящен п. 3.1.

ление и температура газа в ресивере; P, T — давление и температура газа в проточной полости. Секундный расход газа через отверстия определяется соотношениями:

$$G_1 = \mu_1 S_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}} Y(P,P_p),\quad G_2 = \mu_2 S_2 k_0 \frac{P}{\sqrt{RT}} Y(P_a,P),\quad G_3 = \mu_3 S_3 k_0 \frac{P}{\sqrt{RT}} Y(P_a,P),$$

$$Y(P_1,P_2) = \begin{cases} \dfrac{1}{k_0}\sqrt{\dfrac{2k}{k-1}}\sqrt{\left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^2 - \left(\dfrac{P_1}{P_2}\right)^{\frac{k+1}{k}}}, & \text{если } \dfrac{P_1}{P_2} > \beta_k, \\ 1, \text{ если } \dfrac{P_1}{P_2} \le \beta_k, \end{cases}$$

$$\beta_k = \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k+1}},$$

здесь μ_1, μ_2, μ_3 — коэффициенты расхода газа через отверстия S_1, S_2, S_3 соответственно, P_a — атмосферное давление. Коэффициент k_0 вычисляется по формуле

$$k_0 = \sqrt{k\left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k+1}{k-1}}}.$$

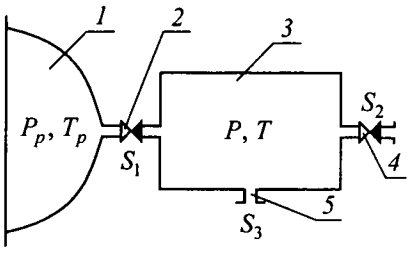


Рис. 2.26. Принципиальная схема объекта управления

Таким образом, процессы, происходящие в полости, описываются системой нелинейных уравнений (2.107).

Параметрами газа в проточной полости можно управлять, изменяя во времени площади S_1 и S_2 впускного и выпускного отверстий. Площади S_1 и S_2 представим в виде

$$S_1 = k_1 u_1,\ k_1 = S_{1\max},$$

$$S_2 = k_2 u_2,\ k_2 = S_{2\max},$$

полагая, что на управляющие параметры u_1 и u_2 наложены ограничения

$$0 \le u_1 \le 1,\ 0 \le u_2 \le 1.$$

Рассмотрим оптимальный по расходу вывод параметров газа на заданный режим. Для уменьшения объема вычислений функцию $Y(P_1,P_2)$ аппроксимируем выражением

$$Y(P_1,P_2) = \begin{cases} 1, \text{ если } \dfrac{P_1}{P_2} \le \beta_k, \\ \sqrt{1 - \dfrac{\left(\dfrac{P_1}{P_2} - \beta_k\right)^2}{(1-\beta_k)^2}}, \text{ если } \dfrac{P_1}{P_2} > \beta_k. \end{cases}$$

Конечное состояние газа (режим, на который необходимо вывести систему) определяется точкой (P^0, T^0). Качество процесса управления будем оценивать функционалом

$$I = \int_0^{t_1} \mu_1 k_1 u_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}} Y(P,P_p)\,dt, \qquad (2.108)$$

где t_1 — время управления. Функционал (2.108) задает массовый расход газа из ресивера.

Оптимальное управление будем искать в форме оптимальной стратегии, т.е. требуется найти такие функции $v_1(P,T)$, $v_2(P,T)$, что управления

$$u_1 = v_1(P,T),\ u_2 = v_2(P,T)$$

переводят фазовую точку (P,T) системы (2.107) из произвольного начального состояния в заданное конечное состояние (P^0,T^0), и притом так, чтобы функционал (2.108) принимал свое наименьшее значение.

Воспользуемся теоремой 2.1. Запишем функцию

$$\begin{aligned} H(\psi,P,T,u_1,u_2) &= \psi_0\mu_1 k_1 u_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}} Y(P,P_p) + \\ &+\psi_1\left[\frac{kR}{W}\left(T_p\mu_1 k_1 u_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}} Y(P,P_p) - T\mu_2 k_2 u_2 k_0 \frac{P}{\sqrt{RT}} Y(P_a,P) - TG_3\right)\right] + \\ &+\psi_2\left[\frac{RT}{WP}\left((kT_p - T)\mu_1 k_1 u_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}} Y(P,P_p) - (k-1)T\mu_2 k_2 u_2 k_0 \frac{P}{\sqrt{RT_p}} Y(P_a,P) - (k-1)TG_3\right)\right]. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Вспомогательный вектор $\psi(t) = (\psi_0(t),\psi_1(t),\psi_2(t))$ задается системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_0}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\psi_1}{dt} = -\left[\psi_0 G_1 M + \psi_1\left(\dfrac{kR}{W}(G_1 M - G_2 N - G_3 N)\right) + \psi_2\left(-\dfrac{RT}{PW}(kT_p - T)G_1 L + (k-1)TC(G_2+G_3)\right)\right], \\ \dfrac{d\psi_2}{dt} = -\left[\psi_1\left(-\dfrac{kR}{2W}(G_2+G_3) + \psi_2\left(G_1\dfrac{RkT_p - 2RT}{WP}\right) - \dfrac{3}{2}\dfrac{\sqrt{RT}}{W}(k-1)(G_2+G_3)\right)\right]. \end{cases} \tag{2.110}$$

Здесь

$$M = \begin{cases} 0 \text{ при } \dfrac{P}{P_p} \le \beta_k, \\ \dfrac{\beta_k - \dfrac{P}{P_p^2}}{Y^2(P,P_p)(1-\beta_k)^2} \text{ при } \dfrac{P}{P_p} > \beta_k; \end{cases}$$

$$N = \begin{cases} 1 \text{ при } \dfrac{P_a}{P} \le \beta_k, \\ \dfrac{P - \dfrac{P\beta_k^2 - P_a\beta_k}{(1-\beta_k)^2}}{PY^2(P_a,P)} \text{ при } \dfrac{P_a}{P} > \beta_k; \end{cases}$$

$$L = \begin{cases} 1 \text{ при } \dfrac{P}{P_p} \le \beta_k, \\ P^2\dfrac{P^3 + \left(\dfrac{\beta_k}{P_p P^2} - \dfrac{\beta_k}{P^3}\right)\Big/(1-\beta_k)^2}{Y^2(P,P_p)} \text{ при } \dfrac{P}{P_p} > \beta_k; \end{cases}$$

$$C = \begin{cases} 0 \text{ при } \dfrac{P_a}{P} \le \beta_k, \\ \dfrac{\left(\dfrac{P_a^2}{P^3} - \dfrac{P_a}{P^2}\beta_k\right)\Big/(1-\beta_k)^2}{Y^2(P_a,P)} \text{ при } \dfrac{P_a}{P} > \beta_k. \end{cases}$$

Из условия максимума функции Гамильтона находим

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sign} Y(P,P_p)\left(\psi_0\mu_1 k_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}} + \psi_1\frac{kR}{W}T_p\mu_1 k_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}} + \psi_2\frac{RT}{WP}(kT_p - T)\mu_1 k_1 k_0 \frac{P_p}{\sqrt{RT_p}}\right) + 1\right], \\ u_2 &= \frac{1}{2}\left[\operatorname{sign} Y(P_a,P)\left(-\psi_1\frac{kR}{W}T\mu_2 k_2 k_0 \frac{P}{\sqrt{RT}} - \psi_2\frac{RT}{WP}(k-1)T\mu_2 k_2 k_0 \frac{P}{\sqrt{RT}}\right) + 1\right]. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Поскольку оптимальные управления $u_1(t)$ и $u_2(t)$ являются кусочно-постоянными функциями, принимающими значения 0 и 1, то синтез оптимального управления сводится к построению в фазовом пространстве системы (2.107) геометрического места точек, в которых происходит переключение управления, т.е. к построению линий переключения.

Воспользуемся принципом попятного движения Фельдбаума. Введем обратное время $\tau = t_1 - t$, где t_1 — момент окончания процесса управления. Если $(P(t),T(t))$, $0 \le t \le t_1$, — некоторая траектория системы (2.107), исходящая в момент $t = 0$ из точки (P^*,T^*), проходит в момент t_1 через точку (P^0,T^0), то в обратном времени τ эта траектория проходит в обратном направлении, т.е. $P(\tau = 0) = P^0$, $T(\tau = 0) = T^0$, $P(\tau = t_1) = P^*$, $T(\tau = t_1) = T^*$. Таким образом, в обратном времени τ любая оптимальная траектория должна исходить из точки (P^0, T^0).

Для решения уравнений (2.107) и (2.110) в обратном времени в них необходимо перейти к производным по обратному времени τ. Между производными по прямому и обратному времени существует простая связь:

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{dy}{d\tau}.$$

Обозначим $\psi^0 = \psi(\tau = 0)$ вектор начальных значений. Если вектор ψ^0 удовлетворяет соотношению

$$H\left(\psi^0, P^0, T^0, u_1(\tau = 0), u_2(\tau = 0)\right) = 0, \tag{2.112}$$

то совместное решение системы уравнений (2.107), (2.110), (2.111) (для уравнения (2.107) начальное значение определяется точкой (P^0, T^0)) задает некоторую оптимальную траекторию. Полученная траектория выделена с помощью необходимых условий оптимальности, которые, строго говоря, не гарантируют ее оптимальности. Однако на практике такие траектории, как правило, являются оптимальными. Определенные соображения на эту тему приводятся ниже. Если перебрать все возможные значения вектора ψ^0, то получим совокупность оптимальных траекторий. Очевидно, эта совокупность должна охватывать всю фазовую плоскость системы (2.107) (или, по крайней мере, ее область управляемости). Таким образом, построив оптимальные траектории, можно найти синтезирующую функцию $v(P,T)$.

При реализации указанного способа целесообразно поступить следующим образом. Так как согласно принципу максимума (теоремы 2.1) вектор-функция $\psi(t)$ определяется с точностью до постоянного положительного множителя, будем полагать, что начальные значения ψ_0^0 и ψ_1^0 удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} \left(\psi_0^0\right)^2 + \left(\psi_1^0\right)^2 = 1, \\ \psi_0^0 \le 0, \end{cases} \tag{2.113}$$

а величина ψ_2^0 определяется из уравнения (2.112). Задавая значения из диапазона $-1 \le \psi_1^0 \le 1$ и вычисляя ψ_0^0 и ψ_2^0 из соотношений (2.112), (2.113), строим однопараметрическое семейство оптимальных траекторий. Этим семейством исчерпываются все возможные оптимальные траектории системы (2.107). От однопараметрического семейства легко перейти к конечному множеству оптимальных траекторий, например, равномерно распределив в интервале (–1,1) ряд значений величины ψ_1^0. Это множество позволяет по точкам построить линии переключения.

Поскольку в уравнение (2.112) входит управление, то соотношения (2.112) и (2.113) должны решаться совместно с равенствами (2.111). Далее, так как в соответствии с равенствами (2.111) возможны четыре комбинации значений вектора $\mathbf{u}(\tau) = 0$, то, задавшись одной из этих комбинаций и величиной ψ_1^0, из соотношений (2.113) и (2.112) находим ψ_0^0 и ψ_2^0. Справедливость данной комбинации проверяется с помощью равенств (2.111). Если равенства (2.111) не выполняются, то следует перейти ко второй комбинации и т.д. Одна из четырех комбинаций должна обязательно удовлетворять соотношениям (2.111).

По указанному выше алгоритму можно составить для ЭВМ программу синтеза оптимального управления параметрами газа в проточной полости.

Рассмотрим два варианта численного решения задачи:

- выход на установившийся режим $P_0 = 8$ МПа, $T_0 = 300$ К;
- выход на неустановившийся режим $P_0 = 14$ МПа, $T_0 = 320$ К.

Исходные данные:

$$P_p = 40 \text{ МПа};\ T_p = 300 \text{ К};\ R = 287{,}1 \text{ Дж/кг}\cdot\text{К};\ \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1;$$

$$k = 1{,}4;\ W = 50\cdot10^{-4} \text{ м}^3;\ S_3 = 10\cdot10^{-4} \text{ м}^2;\ K_1 = K_2 = 12\cdot10^{-4} \text{ м}^2.$$

Оптимальные траектории, полученные численно на ЭВМ, изображены на рис. 2.27 и рис. 2.28.

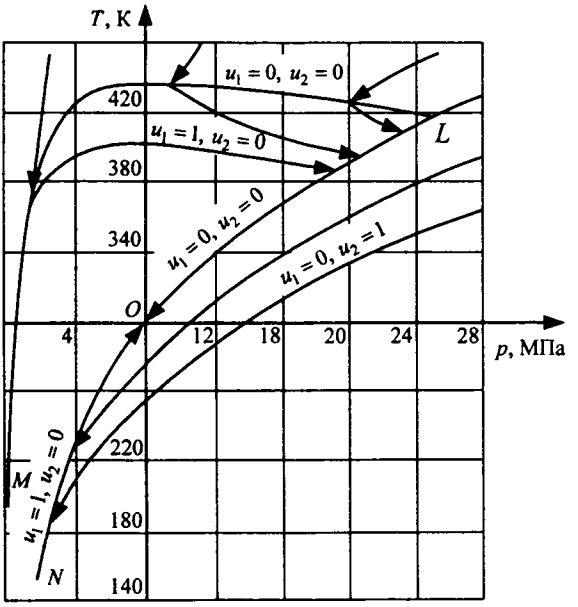


Рис. 2.27. Графики оптимальных траекторий

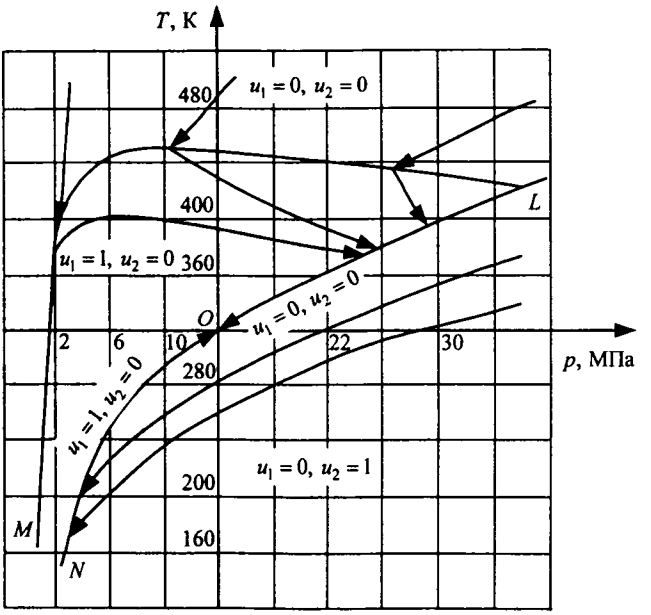


Рис. 2.28. Графики оптимальных траекторий

Как следует из этих рисунков, фазовая плоскость системы (2.107) разбивается на три области, в каждой из которых управления u_1 и u_2 постоянны. Переход через линию ML сопровождается переключением управления u_1, а переход через линию MOL — переключением двух управлений u_1 и u_2. Линии переключения LO и NO представляют собой оптимальные траектории системы, линия переключения LM траекторией системы не является.

Изображенные на рис. 2.27 и на рис. 2.28 траектории получены с помощью необходимых условий оптимальности, следовательно, только эти траектории могут быть оптимальными, если они вообще существуют. Существование оптимальных траекторий представляется достаточно очевидным по физическим соображениям.

ГЛАВА 3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Одной из наиболее важных проблем теории оптимального управления является проблема синтеза систем, оптимальных по быстродействию. Время регулирования входит в число основных характеристик системы автоматического управления. Для многих технических систем уменьшение времени регулирования, т.е. повышение быстродействия системы, имеет большое практическое значение.

Синтезу оптимальных по быстродействию систем автоматического управления посвящено большое число работ. Основоположником этого направления является А.А. Фельдбаум [105]. Особенно много публикаций на эту тему выполнено в шестидесятые годы.

В настоящей главе работы рассматриваются основные этапы синтеза оптимальной по быстродействию системы: синтез оптимального управления, аппроксимация поверхности переключения, учет входных сигналов, исследование ошибок слежения, приближенный метод синтеза систем высокого порядка.

3.1. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ФАЗОВОГО ПРОСТРАНСТВА

3.1.1. Постановка задачи синтеза

Пусть задан некоторый объект регулирования, который будем называть также неизменяемой частью системы (рис. 3.1).

Требуется выбрать структуру и параметры управляющей части, которые обеспечивают в системе при любых входных воздействиях $y_0(t)$ и любых начальных условиях оптимальные по быстродействию процессы.

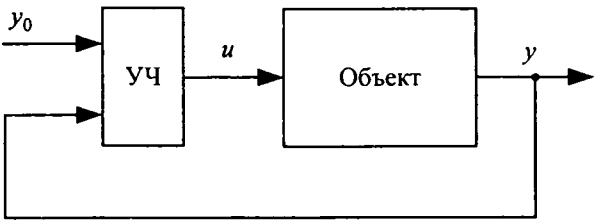


Рис. 3.1. К постановке задачи синтеза

На практике задачу синтеза ставят обычно более узко. Рассматривают не произвольные входные воздействия, а лишь некоторый подкласс, в который включают наиболее существенные. Часто нет необходимости отождествлять множество начальных условий со всем фазовым пространством, так как иногда заранее известна область возможных начальных условий и эта область может быть весьма ограниченной.

Формулируя задачу синтеза, будем стремиться к некоторой идеальной системе. Эта система не должна иметь ошибок при воспроизведении входных сигналов, т.е. должна быть идеальной как следящая. Она также должна обеспечивать минимальную

длительность переходных процессов. Такую идеальную систему часто очень трудно реализовать на практике. Однако весьма важно иметь представление о принципиальной возможности построения такой системы.

Рассмотрим линейный объект управления, движение которого задается уравнением

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = ku, \tag{3.1}$$

где a_i и k $(k > 0)$ — некоторые константы, y — регулируемая величина, u — управление. На управление u наложено ограничение

$$|u| \le A. \tag{3.2}$$

В любой САР существует ошибка

$$x = y_0 - y,$$

где y_0 — входное воздействие. Если имеет место идеальное слежение, то

$$y(t) \equiv y_0(t). \tag{3.3}$$

Из (3.3) следует, что

$$y^{(i)}(t) \equiv y_0^{(i)}(t) \tag{3.4}$$

при любом i.

Если в начальный момент $t = 0$ не выполняется хотя бы одно из условий (3.4) при $i < n$, то соблюдение равенства (3.3) при $t > 0$ невозможно даже теоретически. Действительно, скачкообразное изменение координаты $y(t)$ или ее производной $d^i y/dt^i$ при $i < n$ недопустимо, так как тогда старшая производная $d^n y/dt^n$ будет содержать дельта-функцию, т.е. левая часть уравнения (3.1) окажется неограниченно большой, а это невозможно, так как в силу (3.2) правая часть уравнения (3.1) ограничена. Поэтому в данном случае в системе должен быть переходный процесс. Таким образом, для того чтобы в системе, начиная с некоторого момента времени t_1, имело место идеальное слежение, необходимо выполнение соотношений

$$y(t_1) = y_0(t_1),\ y^{(i)}(t_1) = y_0^{(i)}(t_1),\ i = \overline{1, n-1}.$$

Рассмотрим фазовое пространство с декартовыми координатами $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$. Изобразим в этом пространстве траекторию $\mathbf{y}_0(t) = \left(y_0(t), y_0'(t), \ldots, y_0^{(n-1)}(t)\right)$, соответствующую входному сигналу $y_0(t)$. Пусть в начальный момент $t = 0$ фазовая точка $\mathbf{y}(0) = \left(y(0), y'(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)\right)$ не совпадает с фазовой точкой $\mathbf{y}_0(0) = \left(y_0(0), y_0'(0), \ldots y_0^{(n-1)}(0)\right)$. Оптимальным называется такое движение (рис. 3.2), при котором фазовая точка $\mathbf{y}$ совмещается с фазовой точкой $\mathbf{y}_0$ за минимально возможное время.

Вместо введенного пространства на практике целесообразно рассматривать фазовое пространство ошибок с декартовыми координатами $x = y_0 - y$, $x' = y_0' - y'$, ..., $x^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} - y^{(n-1)}$. В пространстве ошибок идеальному слежению соответствует начало координат. Оптимальным является такое движение, при котором фазовая точка $\mathbf{x} = \left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$ переводится из начального состояния в начало координат за минимально возможное время (рис. 3.3).

В силу неравенства (3.2), идеальное слежение возможно лишь за такими входными сигналами $y_0(t)$, которые удовлетворяют неравенству

$$\left|y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_0' + a_0 y_0\right| < kA \tag{3.5}$$

и называются *допустимыми*.

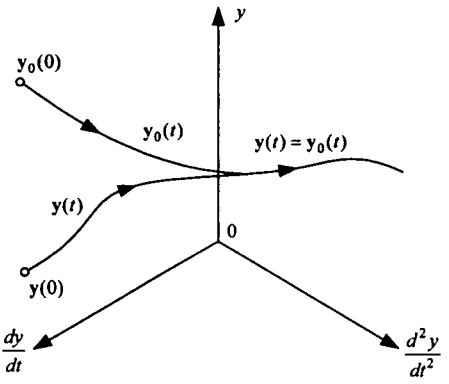


Рис. 3.2. К определению оптимального движения

Из соотношения $x = y_0 - y$ выразим y и подставим в (3.1):

$$-x^{(n)} - a_{n-1}x^{(n-1)} - \ldots - a_1 x' - a_0 x = ku - y_0^{(n)} - a_{n-1}y_0^{(n-1)} - \ldots - a_1 y_0' - a_0 y_0,$$

или

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = -ku + f(t), \tag{3.6}$$

где

$$f(t) = y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_0' + a_0 y_0.$$

Если входное воздействие задано, то $f(t)$ — известная функция времени.

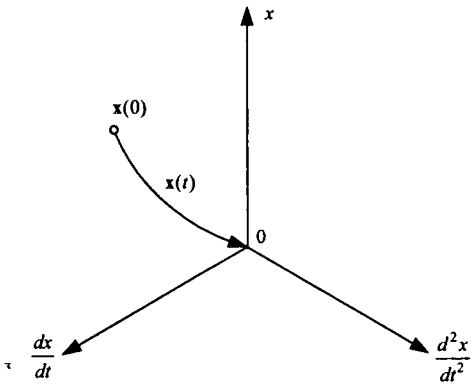


Рис. 3.3. К определению оптимального движения в пространстве ошибок

В соответствии со сказанным выше, для построения оптимальной системы необходимо найти закон управления, который обеспечивает перевод фазовой точки $\mathbf{x} = \left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$ системы (3.6) из произвольного начального состояния в начало координат за минимально возможное время. В решении указанной задачи большую помощь может оказать теорема о числе переключений (см. п. 2.3).

3.1.2. Синтез оптимального управления

Будем сначала предполагать, что в качестве задающих воздействий выбирается такой подкласс функций, для которого $f(t) \equiv 0$. Для объекта

$$y'' = ku$$

таким подклассом будут, например, функции

$$y_0(t) = g_1 t + g_0,$$

где g_1 и g_0 — произвольные числа. Вообще, если входной сигнал представляет собой многочлен с произвольными коэффициентами, то он принадлежит к указанному подклассу в том случае, когда степень многочлена меньше порядка астатизма объекта управления. Для рассматриваемого подкласса входных воздействий уравнение (3.6) имеет вид

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x' + a_0 x = -ku. \tag{3.7}$$

Предположим, что уравнение (3.7) удовлетворяет теореме о числе переключений. Тогда любую идущую в начало координат траекторию $x(t)$ можно разбить на участки, каждый из которых характеризуется управлением A либо $-A$. Совокупность всевозможных идущих в начало координат оптимальных траекторий заполняет все фазовое пространство. Таким образом, каждой точке фазового пространства X ставится в соответствие некоторый знак управления, а все фазовое пространство разбивается на две области, одна из которых характеризуется управлением $u = A$, а другая — управлением $u = -A$. Границу, разделяющую эти области, обозначим S и будем называть *поверхностью переключения*. Синтез оптимального управления сводится к построению в фазовом пространстве поверхности переключения.

Будем сначала предполагать, что $n = 3$. Выпишем уравнение

$$x''' + a_2 x'' + a_1 x' + a_0 x = -ku. \tag{3.8}$$

В соответствии с теоремой о числе переключений оптимальная траектория $x(t)$ в этом случае разбивается на три участка, на которых знаки управления чередуются.

Так как управления принимают значения A, $-A$, то в начало координат фазовая точка может попасть либо с управлением $u = A$, либо с управлением $u = -A$. Предположим, что на заключительном участке $u = A$. Существует единственная траектория, которая является решением уравнения (3.8) при $u = A$ и проходит через начало координат. Обозначим эту траекторию L_1' (рис. 3.4).

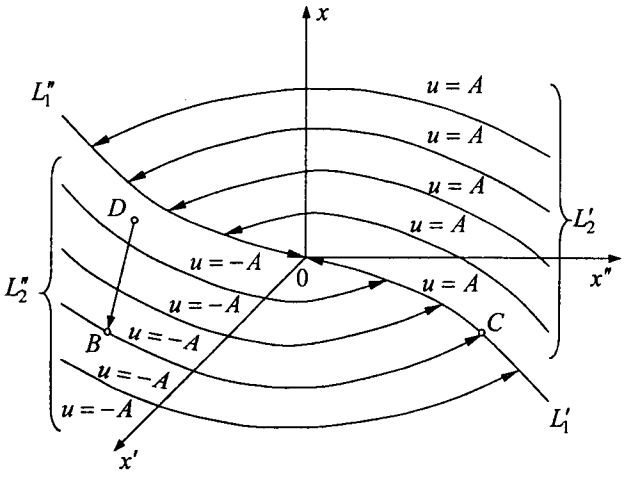


Рис. 3.4. Графики фазовых траекторий

Если на заключительном участке $u = -A$, то соответствующую траекторию обозначим L_1''. Объединение линий L_1' и L_1'' обозначим L_1:

$$L_1 = L_1' \cup L_1''.$$

Таким образом, заключительный участок любой оптимальной траектории обязательно лежит на линии L_1.

Если на заключительном участке $u = A$, то на участке, предшествующем заключительному, $u = -A$. Конец предпоследнего участка оптимальной траектории в этом случае лежит на линии L_1'. Конечной точкой предпоследнего участка может быть любая точка линии L_1'. Совокупность траекторий, примыкающих с управлением $u = -A$ к линии L_1', обозначим L_2'' (один штрих означает управление $u = A$, два штриха — управление $u = -A$).

Если на заключительном участке оптимальной траектории $u = -A$, то предпоследний участок характеризуется управлением $u = A$, причем конец предпоследнего участка лежит на линии L_1''. Совокупность траекторий, примыкающих с управлением $u = A$ к линии L_1'', обозначим L_2'. Пусть $L_2 = L_2' \cup L_2''$.

Ясно, что совокупность L_2 представляет собой поверхность в трехмерном фазовом пространстве.

Покажем, что L_2 является поверхностью переключения, т.е. $L_2 = S$. Для этого рассмотрим множество возможных первых участков оптимальной траектории. Совокупность траекторий, примыкающих с управлением $u = A$ к полуповерхности (поверхность с краем) L_2'', обозначим L_3'; совокупность траекторий, примыкающих с управлением $u = -A$ к полуповерхности L_2', обозначим L_3''. Отметим, что $L_3 \supset L_2 \supset L_1$. Очевидно, что совокупность L_3 совпадает со всем фазовым пространством системы.

Выше (см. п. 2.3) доказана теорема о том, что для линейного объекта оптимальная по быстродействию траектория единственна. Это означает, что оптимальные фазовые траектории, имеющие одну и ту же конечную точку, не пересекаются. Но тогда траектории, входящие в совокупность L_3', не могут пересекаться с траекториями, входящими в совокупность L_3''. Так как совокупность $L_3 = L_3' \cup L_3''$ совпадает со всем фазовым пространством, то сказанное возможно лишь в том случае, если совокупность L_3' лежит по одну сторону от поверхности L_2, а совокупность L_3'' — по другую сторону от L_2. Совокупность L_3' характеризуется управлением $u = A$, а совокупность L_3'' — управлением $u = -A$, т.е. по разные стороны от поверхности L_2 оптимальное управление имеет разные знаки. Таким образом, для системы третьего порядка $L_2 = S$.

На рис. 3.4 $DBC0$ — пример оптимальной траектории. Рассмотрим теперь исходное уравнение (3.7). Для данного объекта указанным выше способом строятся совокупности L_1, L_2, L_3. Рассматривая четвертый участок движения (считая от конца), в полном соответствии с тем, как это делалось выше, строится совокупность L_4. Продолжая этот процесс, путем последовательного перехода от рассматриваемого участка к предыдущему получим совокупности L_5, L_6,..., L_{n-1}. Совокупность L_{n-1} представляет собой поверхность в n-мерном фазовом пространстве. Аналогичным образом можно доказать, что $L_{n-1} = S$.

Отметим, что из приведенных выше рассмотрений следует, что поверхность переключения состоит из «особых» точек фазового пространства, т.е. из таких точек, которые переводятся в начало координат с числом переключений управления, меньшим чем $n-1$.

На первый взгляд кажется, что для реализации оптимального регулятора требуются не только основная перегородка — поверхность переключения, но и перегородки внутри самой поверхности переключения, чтобы реализовать переключение управления при переходе фазовой точки из многообразия L_ρ в многообразие $L_{\rho-1}$. В действительности это не так. В реальной оптимальной системе фазовая точка движется либо чуть выше, либо чуть ниже поверхности переключения, либо движение по поверхности переключения осуществляется в скользящем режиме. Поэтому для реализации оптимальной системы требуется «построить» только одну перегородку — поверхность переключения.

Пример 3.1. Рассмотрим объект, имеющий передаточную функцию

$$W(s)=\frac{k}{(Ts+1)s}.$$

Такую передаточную функцию имеет, например, летательный аппарат по каналу крена на некоторых из режимов полета. Движение объекта описывается уравнением

$$T\frac{d^2y}{dt}+\frac{dy}{dt}=ku. \tag{3.9}$$

Будем предполагать, что на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u|\le A,$$

а задающее воздействие $y_0=g_0$, здесь g_0 — произвольная константа.

Ошибка

$$x=y_0-y=g_0-y,$$

и уравнение (3.9) принимает вид

$$T\frac{d^2x}{dt}+\frac{dx}{dt}=-ku. \tag{3.10}$$

Так как уравнение (3.9) имеет второй порядок, то $S=L_1$, т.е. поверхность переключения имеет размерность 1 и, следовательно, представляет собой линию на фазовой плоскости.

Для определения линии переключения L_1 воспользуемся принципом «попятного движения» Фельдбаума. Введем обратное время $\tau=t_1-t$, здесь t_1 — конечное время, t — текущее время. Если в прямом времени траектория $x(t)$ проходится от начала к концу, то в обратном времени τ $(0\le\tau\le t_1)$ — от конца к началу. Справедливы следующие соотношения:

$$\frac{dx}{dt}=\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d\tau}{d\tau}=\frac{dx}{d\tau}\cdot\frac{d\tau}{dt}=-\frac{dx}{d\tau},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2}=\frac{d}{dt}\cdot\left[\frac{dx}{dt}\right]=-\frac{d}{d\tau}\cdot\left[-\frac{dx}{d\tau}\right]=\frac{d^2x}{d\tau^2},$$

$$\frac{d^nx}{d\tau^n}=(-1)^n\frac{d^nx}{dt^n}.$$

Уравнение (3.10) можно записать в виде

$$T\frac{d^2x}{d\tau^2}-\frac{dx}{d\tau}=-ku. \tag{3.11}$$

Полагая $u=\text{const}$, найдем решение уравнения (3.11):

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau}&=C_1e^{\tau/T}+ku,\\ x&=C_1Te^{\tau/T}+ku\tau+C_2.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Перейдем в уравнениях (3.12) к производной по прямому времени:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{d\tau}&=C_1e^{\tau/T}+ku,\\ x&=C_1Te^{\tau/T}+ku\tau+C_2.\end{aligned} \tag{3.13}$$

Так как в обратном времени траектории L_1' и L_1'' исходят из начала координат, то постоянные интегрирования C_1 и C_2 найдем из условий:

$$x\big|_{\tau=0} = 0, \quad \frac{dx}{d\tau}\bigg|_{\tau=0} = 0.$$

Окончательно получим

$$\frac{dx}{d\tau} = kue^{\tau/T} - ku,$$
$$x = -Tkue^{\tau/T} + ku\tau + kuT. \tag{3.14}$$

Уравнения (3.14) определяют (в функции параметра τ) в фазовом пространстве с декартовыми координатами dx/dt и x при $u = A$ линию L_1', а при $u = -A$ линию L_1''.

На рис. 3.5 изображены линии L_1' и L_1''. Рассмотрев первые участки оптимальной траектории, легко установить, что выше линии L_1 оптимальное управление $u = A$, а ниже линии L_1 оптимальное управление $u = -A$.

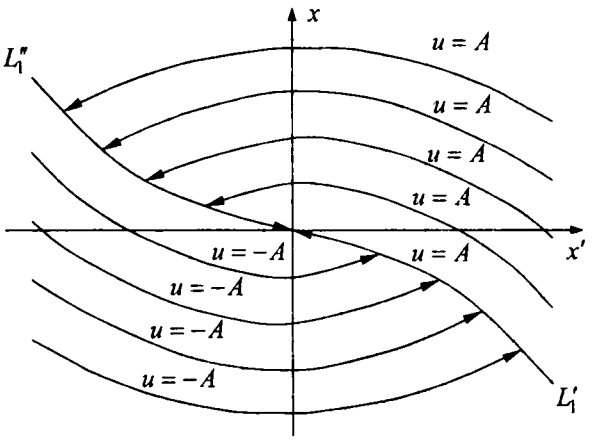


Рис. 3.5. Графики фазовых траекторий

Обозначим $x = \varphi(x)$ — уравнение линии L_1. Тогда оптимальное управление будет задаваться равенством $u = A\text{sign}[x - \varphi(x')]$.

На рис. 3.6 представлена структурная схема оптимальной системы.

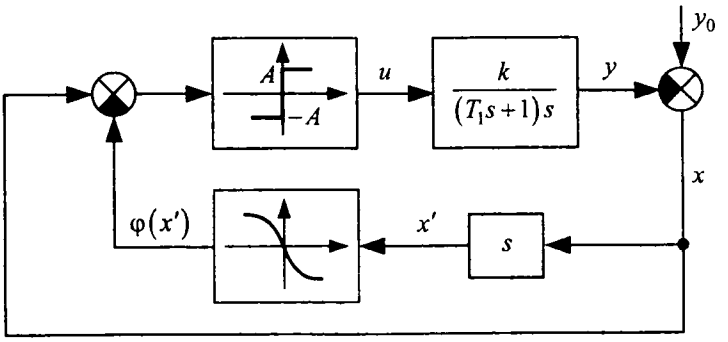


Рис. 3.6. Структурная схема оптимальной системы

Пример 3.2. Рассмотрим применение изложенной выше теории для синтеза оптимальной системы третьего порядка.

Пусть движение объекта задается уравнением

$$\frac{d^3y}{dt^3} = u. \tag{3.15}$$

На управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \le A.$$

Задающее воздействие имеет вид

$$y_0 = g_2 t^2 + g_1 t + g_0,$$

где g_2, g_1, g_0 — произвольные числа.

Введем ошибку

$$x = y_0 - y = g_2 t^2 + g_1 t + g_0 - y. \tag{3.16}$$

Из равенства (3.16) следует, что

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -\frac{d^3y}{dt^3}.$$

Тогда уравнение (3.15) можно записать в виде

$$\frac{d^3x}{dt^3} = -u. \tag{3.17}$$

В соответствии с теоремой о числе переключений, оптимальное по быстродействию управление релейно и в переходном процессе допускается не более двух переключений реле. Так как уравнение (3.17) имеет третий порядок, то в фазовом пространстве системы с декартовыми координатами x, dx/dt, d^2x/dt^2 существует поверхность переключения $S = L_2$, по одну сторону от которой — оптимальное управление $u = A$, а по другую — $u = -A$.

В обратном времени уравнение (3.17) принимает вид

$$\frac{d^3x}{d\tau^3} = u. \tag{3.18}$$

Найдем решение уравнения (3.18), предполагая, что $u = \text{const}$:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{d\tau^2} = u\tau + C_1, \\ \dfrac{dx}{d\tau} = u\dfrac{\tau^2}{2} + C_1\tau + C_2, \\ x = u\dfrac{\tau^3}{6} + C_1\dfrac{\tau^2}{2} + C_2\tau + C_3, \end{cases} \tag{3.19}$$

где C_1, C_2 и C_3 — константы интегрирования.

Перейдем в уравнениях (3.19) к производным по прямому времени:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u\tau + C_1, \quad \frac{dx}{dt} = -u\frac{\tau^2}{2} - C_1\tau - C_2, \quad x = u\frac{\tau^3}{6} + C_1\frac{\tau^2}{2} + C_2\tau + C_3.$$

Константы C_1, C_2, C_3 определяются из условий

$$\left.\frac{d^2x}{dt^2}\right|_{\tau=0} = x_{30}, \quad \left.\frac{dx}{dt}\right|_{\tau=0} = x_{20}, \quad x\big|_{\tau=0} = x_{10}.$$

Окончательно получим

$$\begin{cases} \dfrac{d^2x}{dt^2} = u\tau + x_{30}, \\ \dfrac{dx}{dt} = -u\dfrac{\tau^2}{2} - x_{30}\tau + x_{20}, \\ x = u\dfrac{\tau^3}{6} + x_{30}\dfrac{\tau^2}{2} - x_{20}\tau + x_{10}. \end{cases} \tag{3.20}$$

Уравнения (3.20) позволяют рассчитать любую траекторию, входящую в совокупность L_2 (см. рис. 3.4).

Назовем полутраекторией траекторию движения системы (3.17) (или (3.18)), соответствующую постоянному знаку управления u. Будем предполагать, что обратное время τ вводится отдельно для каждой полутраектории. Структура оптимальной поверхности переключения представлена на рис. 3.4.

Положим в уравнениях (3.20) $x_{10} = x_{20} = x_{30} = 0$. Уравнения

$$\frac{d^2x}{dt^2} = u\tau, \quad \frac{dx}{dt} = -u\frac{\tau^2}{2}, \quad x = u\frac{\tau^3}{6} \tag{3.21}$$

при $u = A$ задают (в функции параметра τ) линию L_1', а при $u = -A$ — линию L_1''. Отметим, что параметр τ необходимо изменять от нуля в положительную сторону.

В результате численных расчетов, выполненных с помощью уравнений (3.21), линия $L_1 = L_1' \cup L_1''$ задается совокупностью дискретных точек. На рис. 3.7 представлена проекция линии L_1 на плоскость $x = 0$. Если над каждой расчетной точкой записать соответствующее ей значение координаты x, то с помощью рис. 3.7 можно задать линию L_1.

Поверхность переключения образуют полутраектории, примыкающие к линии L_1. Для определения, например, полутраектории CD (рис. 3.8), примыкающей с управлением $u = -A$ к линии L_1', необходимо в уравнениях (3.20) положить $u = -A$, а в качестве начальных значений x_{10}, x_{20}, x_{30} взять координаты точки D. Параметр τ при этом по-прежнему отсчитывается от нуля в положительную сторону. Аналогичным образом строятся другие полутраектории, образующие совокупность L_2''.

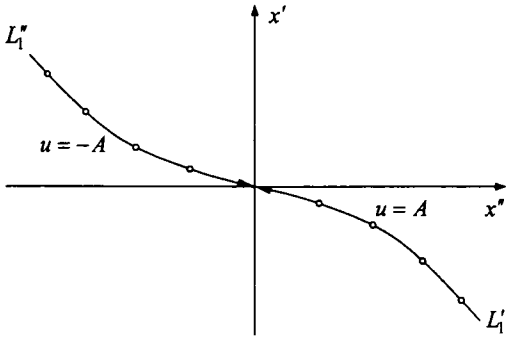


Рис. 3.7. Результаты расчетов (задача 3.2)

Полутраектории, входящие в совокупность L_2', характеризуются управлением $u = A$ и примыкают к линии L_1''. Каждая из этих полутраекторий может быть рассчитана по уравнениям (3.20). Для этого в уравнениях (3.20) следует положить $u = A$, а начальные значения должны совпадать с координатами соответствующей точки линии L_1''. Легко видеть, что полутраектории, входящие в совокупность L_2', симметричны относительно начала координат полутраекториям, входящим в совокупность L_2''.

На рис. 3.8 изображены проекции образующих поверхность переключения траекторий на плоскость $x = 0$. Рисунок 3.8 позволяет задать поверхность переключения. Для этого над каждой расчетной точкой необходимо записать соответствующее ей значение координаты x. Отметим, что, с практической точки зрения, результаты расчетов целесообразно оформлять в виде рис. 3.8.

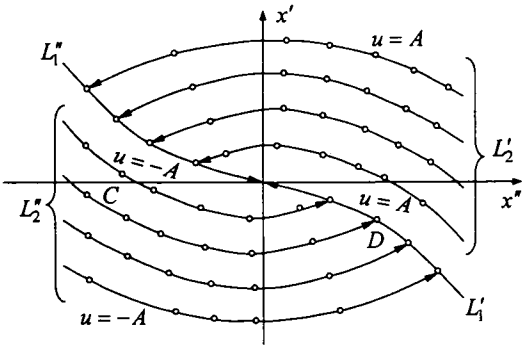


Рис. 3.8. К построению поверхности переключения

Поверхность переключения часто задают в виде таблицы с двумя входами. Для получения такой таблицы необходимо на рис. 3.8 наложить координатную сетку и с помощью интерполяции определить зна-

чения координаты x в узлах этой сетки. В верхней строке таблицы записываются значения координаты d^2x/dt^2, в левом столбце — значения координаты dx/dt, а на пересечении строки и столбца — соответствующее им значение координаты x.

Положим, что $x = f(x', x'')$ — уравнение поверхности переключения. Нетрудно установить, что выше поверхности переключения $u = A$, а ниже поверхности переключения $u = -A$. Оптимальный закон управления, таким образом, можно записать в виде

$$u = A\,\mathrm{sign}\left[x - f(x', x'')\right].$$

На рис. 3.9 представлена структурная схема оптимальной по быстродействию системы управления.

Таблица 3.1

Координаты поверхности переключения

x' \ x''	x''_1	x''_2	x''_3	...	x''_i	...	x''_s
x'_1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	...	x_{1i}	...	x_{1s}
x'_2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	...	x_{2i}	...	x_{2s}
x'_3	x_{31}	x_{32}	x_{33}	...	x_{3i}	...	x_{3s}
...	...	...	...	...	...	...	...
x'_j	x_{j1}	x_{j2}	x_{j3}	...	x_{ji}	...	x_{js}
...	...	...	...	...	...	...	...
x'_m	x_{m1}	x_{m2}	x_{m3}	...	x_{mi}	...	x_{ms}

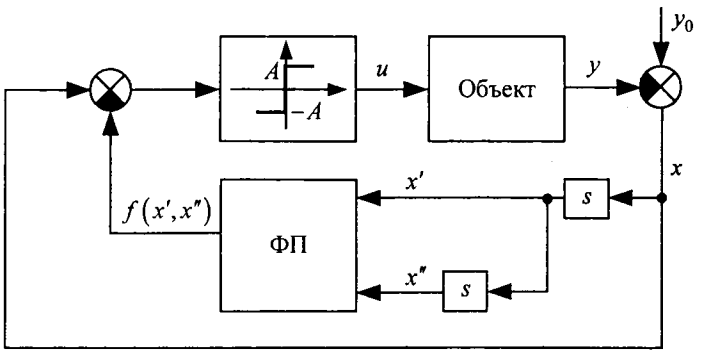


Рис. 3.9. Структурная схема оптимальной по быстродействию системы управления: ФП — функциональный преобразователь

3.1.3. Обобщение задачи синтеза

Выше рассмотрен синтез оптимального управления и показано, что если $f(t) = 0$, то в фазовом пространстве системы существует поверхность переключения $S = L_{n-1}$.

Если $f(t) \neq 0$, то поверхность переключения оказывается нестационарной. В этом случае синтез оптимального управления целесообразно проводить в расширенном пространстве, размерность которого зависит от заданного класса входных сигналов. Именно в расширенном фазовом пространстве можно обеспечить стационарность поверхности переключения.

Поясним это на конкретном примере. Рассмотрим объект, движение которого задается уравнением (3.9). Пусть входной сигнал имеет вид

$$y_0 = g_1 t + g_0,$$

где g_1 и g_0 — произвольные константы.

В соответствии с п. 3.1.2 перейдем в уравнении (3.9) к ошибке

$$x = y_0 - y = g_1 t + g_0 - y,$$

$$T\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = -ku + g_1.$$

В это уравнение входит параметр g_1, характеризующий входной сигнал. Поскольку уравнение удовлетворяет теореме о числе переключений, то при любом фиксированном g_1 в фазовом пространстве с декартовыми координатами x, dx/dt можно (указанным в п. 3.1.2 способом) построить линию переключения. Разным значениям параметра g_1 будут соответствовать различные линии переключения.

Увеличим на единицу размерность пространства: рассмотрим пространство с декартовыми координатами x, dx/dt, dy_0/dt. Каждому фиксированному dy_0/dt в этом пространстве соответствует линия переключения, а множество всевозможных линий переключения образуют в расширенном фазовом пространстве поверхность переключения (рис. 3.10). Эта поверхность задает оптимальное управление при любом входном сигнале рассматриваемого класса.

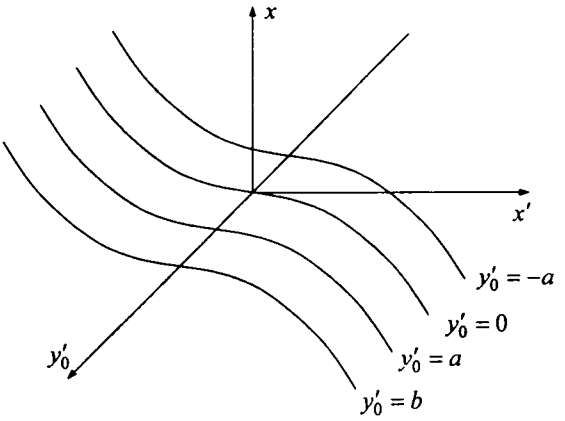


Рис. 3.10. К определению поверхности переключения

Таким образом, если $f(t) \neq 0$, то синтез оптимального управления выполняется в расширенном фазовом пространстве системы. В зависимости от заданного класса входных сигналов в число дополнительных фазовых координат может входить ряд производных входного сигнала, а также время t. Для данного случая сохраняет свою силу разработанная в п. 3.1.2 процедура синтеза. Однако, поскольку поверхность переключения в исходном фазовом пространстве является нестационарной, необходимо многократное повторение указанной выше процедуры синтеза.

На практике входной сигнал обычно задают в виде многочлена. Будем считать, что входной сигнал имеет вид

$$y_0 = \sum_{i=0}^{r} g_i t^i, \tag{3.22}$$

где g_i — произвольные константы.

Обозначим k порядок астатизма объекта управления (3.1). Нетрудно видеть, что для объекта (3.1) при входном сигнале (3.22) синтез оптимального управления должен осуществляться в расширенном фазовом пространстве порядка $n+(r-k+1)\times$ $\times 1(r-k)+1(r-k-1)$, где

$$1(z)=\begin{cases}0 & \text{при } z<0,\\ 1 & \text{при } z\geq 0.\end{cases}$$

Например, для объекта (3.9) при $r=2$ синтез оптимального управления осуществляется в пятимерном пространстве с декартовыми координатами x, dx/dt, dy_0/dt, d^2y_0/dt^2, t.

Изложенный способ синтеза позволяет построить закон управления, который гарантирует строго оптимальное управление при любом входном сигнале из заданного класса. Однако он приводит к увеличению размерности пространства, в котором осуществляется синтез. Так как с увеличением размерности пространства объем необходимых вычислений нарастает лавинообразно, то в некоторых случаях это может служить серьезным препятствием для практического использования данного подхода.

Рассмотрим еще один способ синтеза, который не требует увеличения размерности пространства, и его можно применять при любых входных сигналах.

В следящей системе входной сигнал заранее неизвестен, но он должен быть допустимым, т.е. должен удовлетворять неравенству (3.5). Неравенство (3.5) гарантирует принципиальную воспроизводимость объектом (3.1) входного сигнала $y_0(t)$. Однако реальная система должна не только обеспечить воспроизведение входного сигнала, но и «догнать» его. Поэтому реальная техническая система проектируется таким образом, чтобы ее динамические возможности существенно превосходили те, которые требуются для воспроизведения входных сигналов. Таким образом, для любого технического объекта управления выполняется неравенство

$$\left|y_0^{(n)}+a_{n-1}y_0^{(n-1)}+\ldots+a_1y_0'+a_0y_0\right|\leq kA_1,$$

где A_1 обычно существенно меньше A.

Задачу синтеза оптимального по быстродействию управления для уравнения (3.6) будем рассматривать как дифференциальную игру, в которой один из игроков распоряжается выбором управления u, а второй игрок — выбором управления $\vartheta=f(t)$. На управления u и ϑ наложены ограничения:

$$|u|\leq A,\quad |\vartheta|\leq kA_1.$$

Первый игрок выбором управления u стремится обеспечить наибыстрейший перевод фазовой точки $\mathbf{x}=\left(x,x',\ldots,x^{(n-1)}\right)$ в начало координат, а второй игрок с помощью управления ϑ препятствует этому. Если второй игрок не в силах помешать переводу фазовой точки $\mathbf{x}$ в начало координат, то он стремится увеличить время перевода.

Решение указанной дифференциальной игры задается с помощью поверхности переключения, которая строится изложенным в п. 3.1.2 способом. Однако в данном случае при построении поверхности переключения ограничения (3.2) следует заменить неравенством

$$|u|\leq A^0,$$

где $A^0=A-A_1$. Отметим, что поверхность переключения по-прежнему строится в соответствии с уравнением (3.7).

Пусть $x=\varphi\left(x',x'',\ldots,x^{(n-1)}\right)$ — уравнение поверхности переключения. Решение (для первого игрока) дифференциальной игры задается равенством

$$u=A\operatorname{sign}\left[x-\varphi\left(x',x'',\ldots,x^{(n-1)}\right)\right]. \tag{3.23}$$

Закон управления (3.23) не является строго оптимальным, а построен по принципу гарантированного результата: он обеспечивает минимальную длительность пере-

ходного процесса при наихудшей функции $f(t)$, т.е. при наихудшем (для данного начального вектора) варианте входного сигнала $y_0(t)$. В остальных случаях данный закон управления гарантирует длительность переходного процесса, которая обязательно должна быть меньше, чем оптимальная при наихудшей функции $f(t)$.

Практическое использование данного подхода показывает, что закон управления (3.23) обладает высокой эффективностью. Так как фактически в данном случае имеет место игра против природы, которая не отличается злонамеренностью, то реальный результат оказывается существенно лучше гарантированного. С прикладной точки зрения закон управления (3.23) часто вполне можно рекомендовать в качестве оптимального.

Разработанный в п. 3.1.2 метод синтеза базируется на теореме о числе переключений и, строго говоря, справедлив лишь в том случае, когда характеристический многочлен

$$p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0, \qquad (3.24)$$

соответствующий уравнению (3.6), имеет только вещественные корни. На самом деле данный подход можно использовать и при наличии комплексных корней. Однако если характеристический многочлен (3.24) имеет хотя бы одну пару комплексных корней, то установленная в п. 3.1.2 структура поверхности переключения (рис. 3.8) справедлива не для всего фазового пространства, а лишь для некоторой, включающей начало координат, области фазового пространства. На практике эта область оказывается обычно достаточно большой и включает в себя начальные условия, которые могут встретиться в реальной технической системе, т.е. при синтезе оптимальной системы управления техническим объектом, как правило, можно использовать метод синтеза, разработанный в п. 3.1.2.

Точное выделение указанной выше области является весьма трудной задачей. В качестве определенного ориентира в этом направлении можно привести следующий результат.

Если характеристический многочлен (3.24) имеет комплексные корни, то оптимальное управление также является релейным и задается с помощью поверхности переключения, которую будем обозначать S^*. Если рассматривать поверхность S^* в целом, то она отличается от поверхности S, структура которой изображена на рис. 3.4. Однако в некоторой области, включающей начало координат, поверхность S^* имеет ту же структуру, что и поверхность S.

Обозначим $p = \alpha + i\omega$ комплексный корень характеристического многочлена (3.24), имеющий максимальную по модулю мнимую часть. В соответствии с рис. 3.4, поверхность переключения S состоит из траекторий движения, по которым фазовая точка системы переводится в начало координат. Любая точка поверхности S, которая переводится в начало координат за время τ, удовлетворяющая неравенству $\tau \le \pi/|\omega|$, принадлежит также поверхности S^*. Отметим, что данный результат легко следует из принципа максимума Понтрягина.

Иногда при синтезе оптимальной системы нельзя ограничиться отмеченной выше частью поверхности S^*. В этом случае синтез оптимального управления осуществляется с помощью принципа максимума Понтрягина.

3.2. АППРОКСИМАЦИЯ ПОВЕРХНОСТИ ПЕРЕКЛЮЧЕНИЯ

На рис. 3.9 изображена структурная схема оптимальной по быстродействию системы, из которой следует, что для реализации оптимального регулятора требуется функциональный преобразователь на два входа. Число входов функционального пре-

образователя определяется размерностью пространства, в котором осуществляется синтез оптимального управления. Например, если поверхность переключения строилась в n-мерном фазовом пространстве, то для реализации оптимальной системы необходим функциональный преобразователь на $n-1$ входов.

Поверхность переключения после соответствующих расчетов, как правило, задается дискретно в виде некоторого массива чисел. Поэтому для реализации оптимального регулятора необходимо выполнить аппроксимацию поверхности переключения, т.е. получить для задания поверхности переключения аналитическую зависимость. Вид аппроксимирующей функции существенно зависит от того, какие вычислительные элементы будут использоваться при построении функционального преобразователя.

Цифровые вычислители обладают большой универсальностью и в этом смысле не накладывают практически никаких ограничений на формулу аппроксимирующего выражения. Но в оптимальной системе вычислитель работает в реальном масштабе времени, и поэтому при выборе аппроксимирующей функции следует стремиться к тому, чтобы уменьшить объем вычислений, необходимый для формирования сигнала управления. Аналоговый вычислитель мгновенно отрабатывает сигналы, поступающие на его вход. Однако он накладывает весьма жесткие ограничения на вид аппроксимирующей функции.

Аппроксимация поверхности переключения для систем произвольного порядка рассмотрена в [46]. Однако строгий синтез оптимальной системы для объектов высокого порядка очень сложно осуществить на практике. Поэтому для систем высокого порядка, как правило, используют приближенные методы синтеза, о которых речь пойдет ниже. На этом основании в данном параграфе мы остановимся на аппроксимации поверхности переключения только для систем третьего порядка.

Для систем третьего порядка поверхность переключения задается равенством

$$x_1 = f(x_2, x_3).$$

В процессе расчета точек поверхности переключения легко построить сечения поверхности переключения какими-либо плоскостями, например,

$$x_2 = \text{const}.$$

На рис. 3.11 представлен вид таких сечений для одного конкретного объекта управления.

Каждое такое сечение можно аппроксимировать выражением вида

$$\sum_{j=0}^{r} \alpha_j^i \varphi_j^i(x_3), \tag{3.25}$$

здесь $\varphi_j^i(x_3)$ (i — номер сечения) — некоторые известные функции, а значения $(n+1)$ коэффициентов α_j^i, например, определяются по методу наименьших квадратов, т.е. выбираются так, чтобы минимизировать среднюю квадратическую ошибку

$$F_i\left(\alpha_0^i, \alpha_1^i, \ldots, \alpha_n^i\right) = \sum_{k=0}^{m} \left[f\left(x_2^i, x_3(k)\right) - \sum_{j=0}^{n} \alpha_j^i \varphi_j^i\left(x_3(k)\right) \right]^2. \tag{3.26}$$

В равенстве (3.26) $x_3(k)$ — расчетные точки. Коэффициенты α_j^i определяются из уравнений

$$\frac{\partial F_i}{\partial \alpha_j} = 0 \quad \left(j = \overline{0,n}\right). \tag{3.27}$$

Уравнение (3.27) приводит к системе линейных алгебраических уравнений $(n+1)$ порядка.

На практике в качестве аппроксимирующего выражения (3.25) часто используется многочлен, т.е.

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_j^i \varphi_j^i(x_3) = \sum_{j=0}^{n} C_j^i x_3^j, \tag{3.28}$$

здесь неизвестными являются $(n+1)$ коэффициентов C_j^i. Коэффициенты C_j^i многочлена (3.28) зависят от сечения, т.е. являются функциями x_2. Рассчитав для каждого сечения аппроксимацию (3.28), найдем, как зависят коэффициенты C_j^i от переменной x_2. Для коэффициентов C_j^i, в свою очередь, можно построить аппроксимирующую зависимость, используя для этого, например, многочлены степени l с неизвестными коэффициентами b_ν^j. Коэффициенты b_ν^j можно также определить по методу наименьших квадратов. В результате получим аппроксимацию вида

$$f(x_2, x_3) = \sum_{j=0}^{n} \sum_{\nu=0}^{l} b_\nu^j x_2^\nu x_3^j.$$

Применение для аппроксимации сечений многочленов не всегда оправдано. Вообще при выборе аппроксимирующих зависимостей необходимо учитывать частные особенности сечений. В частности, весьма полезными могут оказаться ортогональные разложения.

Остановимся подробно на еще одном способе аппроксимации, который, на наш взгляд, хорошо учитывает частные особенности поверхности переключения и который позволяет получить достаточно точную и сравнительно простую аппроксимирующую зависимость.

В дальнейшем будем считать, что $f(x_2, x_3)$ — непрерывная функция, заданная в некоторой области D. В силу симметрии поверхности переключения

$$f(-x_2, -x_3) = -f(x_2, x_3).$$

Будем функцию $f(x_2, x_3)$ аппроксимировать выражением

$$h(x_3 + k_1 x_2) + g(x_2 + k_2 x_3),$$

полагая, что h и g — непрерывные функции. Функции h и g и неизвестные числа k_1 и k_2 найдем из условия минимума функционала

$$I = \iint_{D^*} \left[f(x_2, x_3) - h(x_3 + k_1 x_2) - g(x_2 + k_2 x_3) \right]^2 dx_2 dx_3. \tag{3.29}$$

Область D^* $(D^* \subset D)$ представляет собой параллелограмм, ограниченный прямыми

$$\begin{cases} x_3 = -k_1 x_2 + b_1, \; x_3 = -k_1 x_2 - b_1, \\ x_2 = -k_2 x_3 + b_2, \; x_2 = -k_2 x_3 - b_2. \end{cases} \tag{3.30}$$

Найдем минимум функционала (3.29). Выберем произвольные непрерывные функции $h(x_3 + k_1 x_2)$ и $g(x_2 + k_2 x_3)$ и дадим h и g приращения $\varepsilon_1 h(x_3 + k_1 x_2)$ и $\varepsilon_2 g(x_2 + k_2 x_3)$, а коэффициентам k_1 и k_2 — приращения ε_3 и ε_4. В результате получим

$$\begin{aligned} I(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) = \iint_{D^*} \big[& f(x_2, x_3) - h(x_3 + k_1 x_2 + \varepsilon_3 x_2) - \\ & - \varepsilon_1 h(x_3 + k_1 x_2 + \varepsilon_3 x_2) - g(x_2 + k_2 x_3 + \varepsilon_4 x_3) - \\ & - \varepsilon_2 g(x_2 + k_2 x_3 + \varepsilon_4 x_3) \big]^2 dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Отметим, что, хотя область D^* определяется через неизвестные коэффициенты k_1 и k_2, она предполагается заданной. Поэтому коэффициенты k_1 и k_2 в равенствах (3.30) не варьируются. Задание области D^* соотношениями (3.30) позволяет существенно упростить окончательный результат.

Если функции $h(x_3+k_1x_2)$ и $g(x_2+k_2x_3)$ доставляют минимум функционалу (3.29), то должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned}
&\left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_1}\right|_{\varepsilon_{1-4}=0} = 2\iint_{D^*}\left[f(x_2,x_3)-h(x_3+k_1x_2)-g(x_2+k_2x_3)\right]\times\\
&\qquad\times h_1(x_3+k_1x_2)\,dx_2dx_3=0;\\
&\left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_2}\right|_{\varepsilon_{1-4}=0} = 2\iint_{D^*}\left[f(x_2,x_3)-h(x_3+k_1x_2)-g(x_2+k_2x_3)\right]\times\\
&\qquad\times h_2(x_2+k_2x_3)\,dx_2dx_3=0;\\
&\left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_3}\right|_{\varepsilon_{1-4}=0} = 2\iint_{D^*}\left[f(x_2,x_3)-h(x_3+k_1x_2)-g(x_2+k_2x_3)\right]\times\\
&\qquad\times\left[\frac{dh(x_3+k_1x_2)}{d(x_3+k_1x_2)}x_2\right]dx_2dx_3=0;\\
&\left.\frac{\partial I}{\partial \varepsilon_4}\right|_{\varepsilon_{1-4}=0} = 2\iint_{D^*}\left[f(x_2,x_3)-h(x_3+k_1x_2)-g(x_2+k_2x_3)\right]\times\\
&\qquad\times\left[\frac{dg(x_2+k_2x_3)}{d(x_2+k_2x_3)}x_3\right]dx_2dx_3=0.
\end{aligned}\tag{3.31}$$

Введем новые переменные:

$$z_1=k_1x_2+x_3;\quad z_2=k_2x_3+x_2.$$

Предположим, что $k_1k_2\neq 1$ (в противном случае функции h и g можно привести к одному аргументу). Заменив в интегралах (3.31) переменные, получим

$$\begin{aligned}
&\int_{-b_1}^{b_1}\left[\int_{-b_2}^{b_2}\left(f(z_1,z_2,k_1,k_2)-h(z_1)-g(z_2)\right)dz_2\right]h_1(z_1)\,dz_1=0,\\
&\int_{-b_1}^{b_1}\left[\int_{-b_2}^{b_2}\left(f(z_1,z_2,k_1,k_2)-h(z_1)-g(z_2)\right)dz_1\right]h_2(z_2)\,dz_2=0,\\
&\int_{-b_1}^{b_1}\int_{-b_2}^{b_2}\left[f(z_1,z_2,k_1,k_2)-h(z_1)-g(z_2)\right]\left(-\frac{dh}{dz_1}z_2\right)dz_1dz_2+\\
&+k_2\int_{-b_1}^{b_1}\int_{-b_2}^{b_2}\left[f(z_1,z_2,k_1,k_2)-h(z_1)-g(z_2)\right]\frac{dh}{dz_1}z_1dz_1dz_2=0,\\
&\int_{-b_1}^{b_1}\int_{-b_2}^{b_2}\left[f(z_1,z_2,k_1,k_2)-h(z_1)-g(z_2)\right]\left(-\frac{dg}{dz_2}z_1\right)dz_1dz_2+\\
&+k_1\int_{-b_1}^{b_1}\int_{-b_2}^{b_2}\left[f(z_1,z_2,k_1,k_2)-h(z_1)-g(z_2)\right]\frac{dg}{dz_2}z_2dz_1dz_2=0.
\end{aligned}\tag{3.32}$$

Учитывая, что уравнения (3.32) справедливы для произвольных функций $h_1(z_1)$ и $h_2(z_2)$, найдем

$$h(z_1)=\frac{1}{2b_2}\int_{-b_2}^{b_2} f(z_1,z_2,k_1,k_2)dz_2,$$

$$g(z_2)=\frac{1}{2b_1}\int_{-b_1}^{b_1} f(z_1,z_2,k_1,k_2)dz_1,$$

$$\int_{-b_1}^{b_1}\int_{-b_2}^{b_2} f(z_1,z_2,k_1,k_2)z_2\left[\frac{dh}{dz_1}-\frac{h(b_1)}{b_1}\right]dz_1dz_2=0, \tag{3.33}$$

$$\int_{-b_1}^{b_1}\int_{-b_2}^{b_2} f(z_1,z_2,k_1,k_2)z_1\left[\frac{dg}{dz_2}-\frac{g(b_2)}{b_2}\right]dz_1dz_2=0.$$

Соотношения (3.33) являются уравнениями Эйлера для функционала (3.29) и позволяют определить аппроксимирующие функции $h(x_3+k_1x_2)$, $g(x_2+k_2x_3)$ и коэффициенты k_1 и k_2.

Аппроксимация

$$f(x_2,x_3)\approx h(x_3+k_1x_2)+g(x_2+k_2x_3) \tag{3.34}$$

позволяет легко построить функциональный преобразователь на два входа. Для этого требуются лишь два нелинейных преобразователя с одним входом и суммирующие звенья. Следует отметить, что, несмотря на простой вид, выражение (3.34) часто аппроксимирует поверхность переключения с довольно высокой точностью. Объясняется это частными особенностями поверхности переключения.

На рис. 3.11 изображены сечения поверхности переключения некоторого объекта управления плоскостями $x_2=\text{const}$. Назовем сечение поверхности переключения плоскостью $x_2=0$ нулевым сечением.

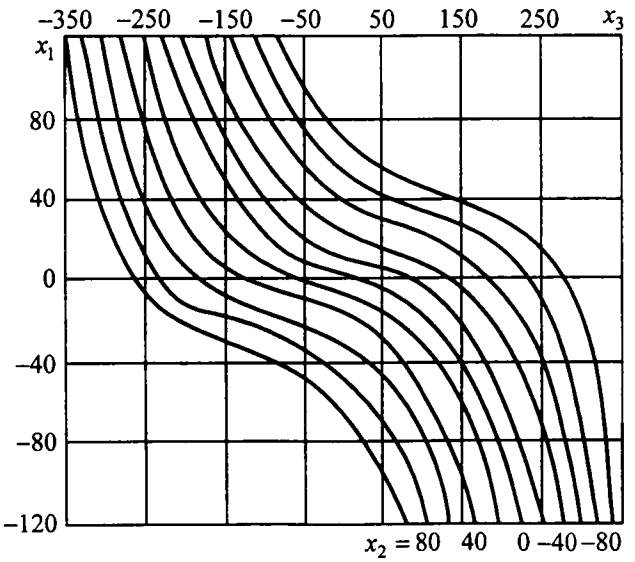


Рис. 3.11. Сечения поверхности переключения плоскостями

Из рис. 3.11 видно, что любое сечение может быть получено приближенно путем сдвига (без вращения) нулевого сечения вдоль осей x_3 и x_1. Это дает возможность представить (приближенно) уравнение поверхности переключения в виде

$$x_1 = \varphi\left(x_3 + \gamma\left(x_2\right)\right) + \beta\left(x_2\right). \tag{3.35}$$

В равенстве (3.35) функция φ задается графиком нулевого сечения, функция $\gamma\left(x_2\right)$ учитывает смещение нулевого сечения вдоль оси x_3, а функция $\beta\left(x_2\right)$ — вдоль оси x_1. Если считать функцию $\gamma\left(x_2\right)$ линейной (а это обычно имеет место), то равенство (3.35) является частным случаем аппроксимации (3.34). Этим и объясняется достаточно высокая точность аппроксимации (3.34).

Для численного решения системы уравнений (3.33) можно рекомендовать метод Ньютона, причем в качестве начальной точки поиска целесообразно использовать соответствующие значения, полученные по «методу сечений». Хороший выбор начальной точки обеспечивает быструю сходимость метода Ньютона.

3.3. ОШИБКИ СЛЕЖЕНИЯ В ОПТИМАЛЬНЫХ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ САУ

Начиная с первых работ по оптимальному управлению [104, 105], в литературе большое внимание уделялось синтезу оптимальных по быстродействию систем автоматического управления. Однако, как следует из определения оптимального по быстродействию управления, оно обеспечивает наибыстрейший перевод системы в заданное состояние, т.е. оптимизирует в системе переходный процесс. При этом такая важная характеристика, как точность регулирования (точность слежения), выпадает из рассмотрения. Если при синтезе оптимального управления удается в полной мере учесть возможные входные воздействия, то оптимальная система воспроизводит их идеальным образом. Однако на практике такое встречается крайне редко. Необходимо также иметь в виду, что в технических системах оптимальный закон управления реализуется приближенно.

Рассмотрим объект, движение которого описывается уравнением

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = \\ &= ku + b_m M^{(m)} + b_{m-1}M^{(m-1)} + \ldots + b_1 M' + b_0 M. \end{aligned} \tag{3.36}$$

Здесь y — регулируемая величина; M — возмущающее воздействие; u — управление; a_i, b_j, k $(k > 0)$ — некоторые числа. Предполагается, что на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \le A. \tag{3.37}$$

Введем ошибку $x = y_0 - y$, где $y_0(t)$ — входное воздействие. В случае идеального слежения ошибка $x(t) \equiv 0$. Очевидно, идеальное слежение принципиально возможно лишь за таким входным воздействием, которое удовлетворяет неравенству

$$\left|y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_0 - b_m M^{(m)} - b_{m-1}M^{(m-1)} - \ldots - b_0 M\right| \le kA.$$

Будем предполагать, что имеет место строгое неравенство

$$\left|y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \ldots + a_0 y_0 - b_m M^{(m)} - b_{m-1}M^{(m-1)} - \ldots - b_0 M\right| < kA. \tag{3.38}$$

Подставим в уравнение (3.36) $y = y_0 - x$

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \ldots + a_0 x = -ku + f(t), \tag{3.39}$$

где

$$f(t) = f^0(t) - f^*(t),$$

$$f^0(t) = y_0^{(n)} + a_{n-1}y_0^{(n-1)} + \ldots + a_1 y_0' + a_0 y_0,$$

$$f^*(t) = b_m M^{(m)} + b_{m-1}M^{(m-1)} + \ldots + b_1 M' + b_0 M.$$

Введем вектор $\mathbf{x} = \left(x, x', \ldots, x^{(n-1)}\right)$. В векторном пространстве с декартовыми координатами x, x',..., $x^{(n-1)}$ идеальному слежению соответствует начало координат. Синтезом оптимального управления будем называть построение такой функции $\vartheta(\mathbf{x},t)$, при которой управление $u = \vartheta(\mathbf{x},t)$ переводит фазовую точку системы (3.39) из произвольного начального состояния в начало координат за минимально возможное время.

В данном разделе всюду предполагается, что при синтезе оптимального управления функция $f(t)$ принимается равной нулю. Кроме того, в правильно спроектированной системе в режиме слежения ограничители не достигаются, поэтому для удобства будем считать, что они вообще отсутствуют.

Оптимальное по быстродействию управление задается равенством

$$u = A\,\mathrm{sign}\left(x - \varphi\left(x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right)\right). \tag{3.40}$$

Здесь

$$x = \varphi\left(x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right) \tag{3.41}$$

— уравнение поверхности переключения. Если входное и возмущающее воздействия таковы, что $f(t) \equiv 0$, то система (3.36), (3.40) идеальным образом воспроизводит входное воздействие, причем слежение за входным сигналом происходит в скользящем режиме. Решение $y(t) \equiv y_0(t)$ устойчиво в целом, или, по крайней мере, область притяжения этого решения совпадает с областью управляемости системы (3.36), (3.40).

Если $f(t) \neq 0$, но слежение за входным сигналом по-прежнему происходит в скользящем режиме, то справедливо уравнение (3.41). Так как

$$\varphi(0,0,\ldots,0) = 0,$$

то уравнение (3.41) допускает решение

$$x(t) = 0.$$

Таким образом, и в этом случае имеет место идеальное воспроизведение входного сигнала. Следует иметь в виду, что в силу структуры поверхности (3.41) в скользящем режиме движения траектории $\mathbf{x}(t)$ стягиваются к началу координат.

Остановимся на условиях существования скользящего режима. При получении условий существования будем предполагать, что оптимальный закон управления определяется равенством

$$u = A\,\mathrm{sign}\left(x - \varphi\left(x', x'', \ldots, x^{(k)}, -y^{(k+1)}, -y^{(k+2)}, \ldots, -y^{(n-1)}\right)\right). \tag{3.42}$$

Введенные здесь изменения по отношению к закону (3.40) объясняются тем, что при синтезе оптимального управления входное воздействие обычно задается в форме многочлена. Если указанный многочлен имеет степени k и $k < n-1$, то $x^{(k+1)} = -y^{(k+1)}$, $x^{(k+2)} = -y^{(k+2)}$,..., $x^{(n-1)} = -y^{(n-1)}$. Это дает возможность представить оптимальный закон в форме (3.42). В законе управления (3.40) используются производные входного сигнала до $(n-1)$-го порядка включительно, получение которого удается далеко не всегда. Поэтому оптимальный закон управления часто реализуют в форме (3.42).

В соответствии с работой [97] условия существования скользящего режима задаются неравенствами

$$\frac{d}{dt}\left[x-\varphi\left(x',x'',\ldots,x^{(k)},-y^{(k+1)}\right),\ldots,-y^{(n-1)}\right]\Big|_{u=A}=x'-\frac{\partial\varphi}{\partial x'}x''-\frac{\partial\varphi}{\partial x''}x'''-$$

$$-\ldots-\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(k)}}x^{(k+1)}+\frac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(k+1)}\right)}y^{(k+2)}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n-2)}\right)}y^{(n-1)}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n-1)}\right)}\left[ku+f^*(t)-a_0y-a_1y'-\ldots-a_{n-1}y^{(n-1)}\right]\Big|_{u=A}<0, \qquad (3.43)$$

$$\frac{d}{dt}\left[x-\varphi\left(x',x'',\ldots,x^{(k)},-y^{(k+1)}\right),\ldots,-y^{(n-1)}\right]\Big|_{u=-A}=x'-\frac{\partial\varphi}{\partial x'}x''-\frac{\partial\varphi}{\partial x''}x'''-$$

$$-\ldots-\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(k)}}x^{(k+1)}+\frac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(k+1)}\right)}y^{(k+2)}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n-2)}\right)}y^{(n-1)}+$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n-1)}\right)}\left[ku+f^*(t)-a_0y-a_1y'-\ldots-a_{n-1}y^{(n-1)}\right]\Big|_{u=-A}>0.$$

Движение в скользящем режиме определяется уравнением

$$x=\varphi\left(x',x'',\ldots,x^{(k)},-y^{(k+1)},-y^{(k+2)},\ldots,-y^{(n-1)}\right), \qquad (3.44)$$

где $x=y_0-y$.

Найдем из (3.44) $x'(t)$ и подставим в (3.43). В результате получим неравенства

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n-1)}\right)}\left[kA+f^*(t)-a_0y-a_1y'-\ldots-a_{n-1}y^{(n-1)}-y^{(n)}\right]<0,\\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n-1)}\right)}\left[-kA+f^*(t)-a_0y-a_1y'-\ldots-a_{n-1}y^{(n-1)}-y^{(n)}\right]>0.\end{cases} \qquad (3.45)$$

Условия (3.45), как легко видеть, эквивалентны следующим соотношениям:

$$\begin{cases}\left|y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\ldots+a_0y-f^*(t)\right|<kA,\\ \left.\dfrac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n+1)}\right)}\right|_{\hat{\mathbf{x}}=\hat{\mathbf{x}}(t)}<0.\end{cases} \qquad (3.46)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}(t)=\left(x(t),x'(t),\ldots,x^{(k)}(t),-y^{(k+1)}(t),-y^{(k+2)}(t),\ldots,-y^{(n-1)}(t)\right)$ — n-мерная вектор-функция, представляющая собой решение уравнения (3.44).

Отметим, что неравенства (3.46) проверяются на решениях вырожденного уравнения. Первое из условий (3.46) представляет собой ограничение на выходной сигнал $y(t)$. Интересно отметить, что это ограничение совпадает с динамическими возможностями объекта (3.36). Второе условие (3.46) задает ограничение на вид функции φ. Если в равенстве (3.42) $k=n-1$, т.е. рассматривается закон управления в форме (3.40), то второе неравенство (3.46) принимает вид

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}<0.$$

Как следует из структуры поверхности переключения, при любом порядке системы (3.36)

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\left(-y^{(n-1)}\right)}\right|_{\hat{\mathbf{x}}=0}=0. \qquad (3.47)$$

Так как условия (3.46) являются достаточными, то равенство (3.47) необязательно приводит к срыву в точке $\hat{\mathbf{x}} = 0$ скользящего режима движения. Очевидно, соотношения (3.47) не приводят к срыву скользящего режима движения, если управление $u = A$ переводит фазовую точку $\hat{\mathbf{x}}$ из начала координат (точки $\hat{\mathbf{x}} = 0$) в область, где $x - \varphi(\hat{\mathbf{x}}) < 0$, а управление $u = -A$ — в область, где $x - \varphi(\hat{\mathbf{x}}) > 0$. Данное условие может быть проверено с помощью уравнений

$$x = y_0 - y, \quad x' = y_0' - y', \ldots, \quad x^{(k)} = y_0^{(k)} - y^{(k)},$$
$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 y' + a_0 y = ku + f^*(t).$$

При реализации оптимального регулятора функция $\varphi(\hat{\mathbf{x}})$, как правило, аппроксимируется некоторым выражением. Если используются аналоговые вычислительные элементы, то полученные аппроксимирующие зависимости, в свою очередь, аппроксимируются кусочно-линейными функциями. В конечном счете получается оптимальный (квазиоптимальный) регулятор, для которого условие (3.47) не имеет место. Вместе с этим оказывается возможным, оценивая существование скользящего режима, ограничиться проверкой неравенств (3.46).

Остановимся более подробно на законе управления в форме (3.40). В этом случае, как уже отмечалось, скользящий режим обеспечивает идеальное воспроизведение любого входного сигнала, удовлетворяющего неравенству (3.38). Так как в режиме слежения $\mathbf{x}(t) \equiv 0$, то в каждый момент времени t

$$\left.\frac{\partial \varphi}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{\mathbf{x}(t)=0} = 0.$$

Из первого условия (3.46) вытекает, что

$$|f(t)| < kA, \tag{3.48}$$

т.е. первое условие (3.46) совпадает с неравенством (3.38).

В окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ уравнение (3.39) можно приближенно представить в виде

$$x^{(n)} = -ku + f(t), \tag{3.49}$$

т.е. можно считать, что в окрестности начала координат поверхность переключения строилась в соответствии с уравнением

$$x^{(n)} = -ku. \tag{3.50}$$

Исходя из неравенства (3.48) и уравнения (3.50), нетрудно установить, что управление $u = A$ переводит фазовую точку $\mathbf{x}$ системы (3.49) из начала координат в область $x - \varphi < 0$, а управление $u = -A$ — в область $x - \varphi > 0$. Таким образом, для системы (3.36), (3.40) при любом входном воздействии, удовлетворяющем неравенству (3.38), в точке $\mathbf{x} = 0$ всегда выполняются условия существования скользящего режима.

Как уже отмечалось, при реализации оптимальной системы вместо функции φ используется аппроксимирующая функция φ^*. Аппроксимирующие функции могут быть весьма разнообразными. Однако, если при реализации оптимальной системы применяются аналоговые вычислительные элементы, то функция φ^*, как правило, является кусочно-линейной, причем в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ функция φ^* линейна и

$$\left.\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{\mathbf{x}=0} \neq 0. \tag{3.51}$$

Пусть в окрестности точки $\mathbf{x} = 0$ функция φ^* задается уравнением

$$x = \sum_{i=1}^{n-1} C_i x^{(i)}. \tag{3.52}$$

Непосредственно из соотношений (3.52) и (3.38) следует, что неравенство

$$\left.\frac{\partial \varphi^*}{\partial x^{(n-1)}}\right|_{\mathbf{x}=0} = C_{n-1} < 0 \tag{3.53}$$

гарантирует существование скользящего режима в точках поверхности переключения, принадлежащих некоторой окрестности начала координат. Поскольку при любых малых отклонениях от начала координат гарантируются выход фазовой точки на поверхность переключения и последующее движение (в скользящем режиме) по указанной поверхности, то решение $x(t) = 0$ является устойчивым, если устойчиво вырожденное уравнение (3.52).

Таким образом, если для объекта (3.36) оптимальный закон управления реализуется в форме

$$u = A\,\mathrm{sign}\left(x - \varphi^*\left(x', x'', \ldots, x^{(n-1)}\right)\right) \tag{3.54}$$

и φ^* — кусочно-линейная функция, для которой справедливо неравенство (3.53), и, кроме того, вырожденное уравнение (3.52) устойчиво, то в системе (3.36), (3.54) любое допустимое входное воздействие воспроизводится идеальным образом. При этом решение $x(t) \equiv y(t)$ устойчиво в малом.

Законы управления в форме (3.54) и (3.40) обеспечивают идеальное воспроизведение входного сигнала, причем не требуется измерение возмущающего воздействия $M(t)$. Однако это возможно лишь при использовании чистых производных. Если вместо производных выходной величины в законе управления применяются «естественные» координаты объекта (ток, давление и т.п.), то возмущающее воздействие через «естественные» координаты войдет в вырожденное уравнение движения. В этом случае идеальное слежение возможно только при измерении возмущающего воздействия.

В отличие от соотношений (3.40) и (3.54), закон управления в форме (3.42) не обеспечивает идеального слежения за произвольным допустимым входным сигналом. Действительно, движение в скользящем режиме в этом случае описывается уравнением

$$y_0 - y = \varphi\left(y_0' - y', y_0'' - y'', \ldots, y_0^{(k)} - y^{(k)}, -y^{(k+1)}, -y^{(k+2)}, \ldots, -y^{(n-1)}\right). \tag{3.55}$$

Функция $y(t) \equiv y_0(t)$ является решением уравнения (3.55) только при условии, что $y_0^{(k+1)} \equiv y_0^{(k+2)} \equiv \ldots \equiv y_0^{(n-1)} \equiv 0$.

Применение уравнений (3.55) для оценки точности режима слежения в общем случае затруднительно. Однако если в (3.42) $k = 0$, т.е. уравнение (3.55) имеет вид

$$y + \varphi\left(-y', -y'', \ldots, -y^{(n-1)}\right) = y_0, \tag{3.56}$$

то можно рекомендовать следующий подход. Вместо входного воздействия $y_0(t)$ зададим выход системы $y(t)$, который должен удовлетворять первому неравенству (3.46). Используя уравнение (3.56), по заданному выходу легко найти соответствующее ему входное воздействие $y_0(t)$. Сравнивая $y(t)$ и $y_0(t)$, можно сделать заключение о точности слежения. Отметим, что указанный подход может быть использован и в том случае, когда поверхность переключения задана численно в виде таблицы, как это часто бывает после выполнения соответствующих расчетов по синтезу оптимального управления.

Если в равенстве (3.55) φ — аппроксимирующая кусочно-линейная функция, то анализ системы существенно упрощается, так как уравнение (3.55) может быть легко проинтегрировано при произвольном входном воздействии. Однако и в этом случае удобно задаваться не входом системы, а ее выходом. Действительно, относительно функции $y_0(t)$ уравнение (3.55) имеет более низкий k-й порядок. Функцию $y(t)$ всегда можно выбрать так, чтобы выполнялось первое условие (3.46). Так как второе условие в оптимальных и квазиоптимальных системах, как правило, выполняется, то, следовательно, удается исключить из рассмотрения участок выхода системы на скользящий режим движения. Это, вообще говоря, сделать невозможно, если задавать входное воздействие $y_0(t)$. Отметим, что, как следует из приведенных выше рассуждений, неравенства (3.46) сохраняют свою силу и для кусочно-гладкой функции φ.

Если в оптимальном законе управления используются «естественные» координаты объекта, то описанные выше приемы оценки точности режима слежения можно сохранить, воспользовавшись методом эквивалентного управления [97]. Очень часто «естественные» координаты объекта можно легко выразить через выходную координату и ее производные. Это позволяет для оценки точности режима слежения непосредственно использовать уравнение (3.44).

Сделаем одно уточняющее замечание. Следящую систему, которая без ошибки воспроизводит любое допустимое входное воздействие, т.е. воздействие, удовлетворяющее неравенству (3.38), назовем *идеальной*. Выше было установлено, что система (3.36), (3.40) является идеальной следящей системой. При этом поверхность (3.41) необязательно должна соответствовать оптимальному закону управления. Нетрудно показать, что справедливо и обратное утверждение: если детерминированная следящая система является идеальной, то ее закон управления задается в форме (3.40).

Сформулируем последний результат более строго. Будем предполагать, что в законе управления следящей системы может использоваться информация о входном и выходном сигналах, а также об их производных и первообразных, т.е.

$$u = F\left(y, y', \ldots, y^{(i)}, y_0, y_0', \ldots, y^{(j)}, y^{(-1)}, y^{(-2)}, \ldots, y^{(-k)}, y_0^{(-1)}, \ldots y_0^{(-\nu)}\right). \qquad (3.57)$$

Соотношение (3.57) охватывает все возможные случаи применения линейных и нелинейных корректирующих устройств. В равенстве (3.57) следует положить $i < n$, так как в соответствии с (3.36) переменные $y(t)$, $y'(t)$,..., $y^{(n)}(t)$ однозначно задают управление u. Справедливо следующее утверждение: если следящая система (3.36), (3.57) является идеальной, то закон управления (3.57) имеет вид (3.40). Отсюда, в частности, следует, что только релейный закон управления может обеспечить идеальное воспроизведение любого допустимого входного воздействия.

3.4. ПРИБЛИЖЕННЫЙ СПОСОБ УЧЕТА МАЛЫХ ПОСТОЯННЫХ ВРЕМЕНИ

Известно, что при синтезе оптимального по быстродействию управления объем вычислений с увеличением порядка системы катастрофически возрастает. И дело здесь, собственно, не столько в численном определении самой поверхности переключения (хотя и это сопряжено с некоторыми трудностями), сколько в обработке огромного массива чисел, дискретно задающих поверхность переключения, а также в получении подходящей аппроксимации. Для систем низкого (второго и третьего) порядков вычисление поверхности переключения и ее аппроксимация обычно не составляют большого труда. В соответствии со сказанным выше, для систем высокого порядка большое значение приобретают приближенные способы, приемы и методы синтеза оптимального управления.

В настоящем разделе предлагается приближенный способ синтеза оптимального по быстродействию управления. Этот способ позволяет при синтезе оптимального управления приближенно учесть влияние малых постоянных времени. От других известных в литературе методов данный выгодно отличается тем, что благодаря аппроксимации системы высокого порядка системой низкого порядка с запаздыванием он достаточно точно учитывает «вклад» малых постоянных времени в оптимальный закон управления.

В передаточных функциях технических систем можно выделить большие и малые постоянные времени. Звенья, содержащие большие постоянные времени, обычно описывают силовую часть системы, а звенья, содержащие малые постоянные времени, — управляющую часть. В дальнейшем будем исходить из следующего: малые постоянные времени приводят к малым изменениям в поверхности переключения.

Передаточную функцию системы, полученную из исходной путем исключения звеньев, содержащих малые постоянные времени, назовем *базовой*, а соответствующий ей оптимальный по быстродействию закон управления — *базовым законом*. Совокупность звеньев, не входящих в базовую передаточную функцию, образует систему, которую будем называть *дополнительной*. Способы получения базового закона управления рассмотрены выше. Остановимся на тех изменениях, которые следует внести в базовый закон управления, чтобы учесть влияние малых постоянных времени.

Изложение указанного подхода целесообразно начать с рассмотрения конкретного примера. При этом в целях упрощения будем предполагать, что ограничение накладывается только на управление.

На рис. 3.12 изображена структурная схема объекта, причем пунктиром выделена базовая передаточная функция. Пусть на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \le A.$$

Исключив звено с малой постоянной времени, легко определить оптимальный по быстродействию закон управления. Он задается равенством

$$u = -A\,\mathrm{sign}\big(y_3 - \varphi(y_2)\big), \tag{3.58}$$

где $y_3 = \varphi(y_2)$ — уравнение линии переключения.

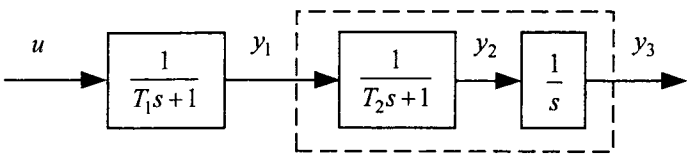


Рис. 3.12. Структурная схема объекта

Оптимальное по быстродействию управление релейное как в базовой, так и в исходной системах. Однако в исходной системе на вход базовой передаточной функции поступает координата $y_1(t)$, которая «сглаживает» релейный сигнал $u(t)$ (рис. 3.13).

Так как $T_1 << T_2$, то базовая система обладает существенно большей «инерционностью», чем дополнительное звено, т.е. базовая система практически не реагирует на форму быстрых изменений координаты $y_1(t)$, а «отслеживает» их среднее

значение. Это позволяет приближенно учесть влияние дополнительного звена, заменив его звеном запаздывания. На рис. 3.13 пунктиром изображены запаздывающие моменты переключения, компенсирующие влияние малой постоянной времени. Следует отметить, что введение запаздывания является распространенным приемом, который используется при аппроксимации систем высокого порядка моделями низкого порядка.

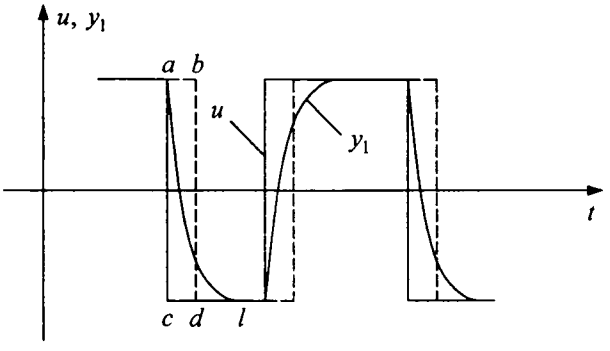


Рис. 3.13. Графики оптимальных управлений

Воспользуемся известным способом синтеза систем с запаздыванием, который заключается в том, что в законе управления (3.58) текущие координаты y_3 и y_2 заменяются упрежденными на запаздывание τ. Однако вместо традиционной для таких задач схемы упреждения, основанной на использовании формулы Коши решения системы линейных дифференциальных уравнений, будем использовать ряд Тейлора (траектория релейной системы не является аналитической функцией, и, строго говоря, она не может быть представлена рядом Тейлора; однако ниже будут использоваться только такие производные, которые для данной системы существуют и непрерывны). Ограничиваясь первым членом ряда Тейлора, можно записать

$$y_3(t+\tau) \approx y_3(t) + \frac{dy_3(t)}{dt}\tau,$$

$$y_2(t+\tau) \approx y_2(t) + \frac{dy_2(t)}{dt}\tau.$$

Из передаточной функции системы следует, что

$$\frac{dy_3}{dt} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dt} = \frac{1}{T_2}(y_1 - y_2).$$

Заменяя в законе (3.58) текущие координаты на упрежденные, получим

$$u = -A\,\mathrm{sign}\left[y_3 + y_2\tau - \varphi\left(y_2 + \frac{1}{T_2}(y_1 - y_2)\tau \right) \right]. \qquad (3.59)$$

Отметим, что в закон управления (3.59) входят все фазовые координаты объекта. Из приведенных выше рассуждений следует, что при правильно подобранном значении запаздывания τ закон управления (3.59) достаточно точно учитывает влияние малой постоянной времени T_1, т.е. его можно рассматривать в качестве приближенного оптимального закона управления объектом, изображенным на рис. 3.12.

Остановимся на способе определения запаздывания τ. Известно, что для рассматриваемого объекта поверхность переключения представляет собой совокуп-

ность идущих в начало координат оптимальных траекторий, на которых допускается одно переключение управления. С другой стороны, в релейной системе (необязательно оптимальной) движение по поверхности переключения возможно в скользящем режиме. Так как оптимальная поверхность переключения состоит из траекторий движения, то ее можно рассматривать как предельную поверхность скольжения. Значение запаздывания τ будем выбирать так, чтобы поверхность переключения, реализующая закон управления (3.59), также была предельной (в рамках заданной структуры) поверхностью скольжения. Это является косвенным критерием близости поверхности переключения, входящей в закон (3.59), к строго оптимальной поверхности. При таком выборе τ траектории, порождаемые законом (3.59), имеют характер строго оптимальных: фазовая точка объекта сначала выводится на поверхность переключения, а затем по поверхности переключения переводится в начало координат.

В соответствии с работой [15] на поверхности переключения

$$y_3 + y_2\tau - \varphi\left(y_2 + \frac{1}{T_2}(y_1 - y_2)\tau\right) = 0, \tag{3.60}$$

условия существования скользящего режима задаются неравенствами

$$\frac{d}{dt}\left[y_3 + y_2\tau - \varphi\left(y_2 + \frac{1}{T_2}(y_1 - y_2)\tau\right)\right]\Bigg|_{u=A} \geq 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left[y_3 + y_2\tau - \varphi\left(y_2 + \frac{1}{T_2}(y_1 - y_2)\tau\right)\right]\Bigg|_{u=-A} \leq 0.$$

Выполнив дифференцирование, получим соотношения

$$\begin{aligned}
&\left(1 - \frac{\tau}{T_2}\right)y_2 + \frac{\tau}{T_2}y_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1 - \frac{\tau}{T_2}\right)\frac{1}{T_2}(y_1 - y_2) - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\tau}{T_2}\frac{1}{T_1}(A - y_1) \geq 0,\\
&\left(1 - \frac{\tau}{T_2}\right)y_2 + \frac{\tau}{T_2}y_1 - \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(1 - \frac{\tau}{T_2}\right)\frac{1}{T_2}(y_1 - y_2) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\tau}{T_2}\frac{1}{T_1}(A + y_1) \leq 0,
\end{aligned} \tag{3.61}$$

где

$$z = y_2 + \frac{1}{T_2}(y_1 - y_2). \tag{3.62}$$

Отметим, что неравенства (3.61) должны выполняться в каждой точке поверхности (3.60).

Так как запаздывание τ входит в условия существования скользящего режима (3.61), то для определения предельной поверхности скольжения необходимо найти такое запаздывание τ^0, любое малое изменение которого приводит к срыву скользящего режима движения.

Обозначим левую часть соотношений (3.61) $W(y_1, y_2, u, \tau)$ (для статического объекта координата y_3 также входит в условия существования скользящего режима; при определении функции $W(y_1, y_2, u, \tau)$ ее необходимо выразить из уравнения (3.60) через y_1 и y_2). Из передаточной функции объекта следует, что фазовые переменные y_1 и y_2 изменяются в пределах

$$-A \leq y_1 \leq A, \quad -A \leq y_2 \leq A. \tag{3.63}$$

Область, выделяемую неравенствами (3.63), обозначим D. Пусть

$$R(\tau) = \min_{(y_1, y_2) \in D} W(y_1, y_2, \tau, A),$$

$$R^*(\tau) = \max_{(y_1, y_2) \in D} W(y_1, y_2, \tau, -A).$$

Нетрудно видеть, что

$$R^*(\tau) = -R(\tau).$$

Величина запаздывания τ^0, при которой поверхность (3.60) является предельной поверхностью скольжения, удовлетворяет уравнению

$$R(\tau^0) = 0.$$

На рис. 3.14 изображен график функции $R(\tau)$ при $T_1 = 0{,}02$, $T_2 = 1$, $A = 1$. Так как $\partial\varphi/\partial z = 0$ в точке $z = 0$, то при $z = 0$ неравенства (3.61) не зависят от знака управления. Для соответствующих y_1, y_2, как непосредственно следует из (3.61) и (3.62), левые части соотношений (3.61) при любом τ равны нулю. Этим и объясняется наличие на графике функции $R(\tau)$ участка, лежащего на оси τ.

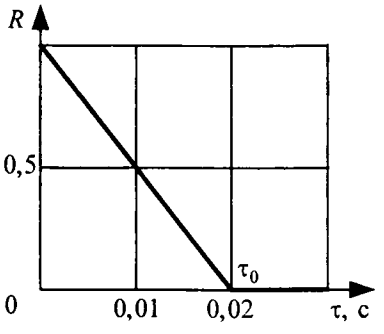


Рис. 3.14. График функции $R(\tau)$

Другой способ определения запаздывания τ основывается на приравнивании площадей криволинейного треугольника acl и прямоугольника $acdb$ (см. рис. 3.13). Легко убедиться, что запаздывание τ, если его определять указанным способом, равно T_1. Более того, если дополнительная система состоит из k апериодических звеньев, включенных последовательно и имеющих постоянные времени T_1, T_2,..., T_k, то запаздывание $\tau = T_1 + T_2 + \ldots + T_k$. Отметим, что для рассматриваемого объекта оба способа дают примерно одинаковый результат.

На рис. 3.15 изображена осциллограмма отработки системой (с законом управления (3.59)) начального рассогласования по координате y_3. Из рисунка видно, что координата $y_1(t)$ имеет два излома, что соответствует двум переключениям управления. Длительность переходного процесса при этом практически не отличается от строго оптимальной. Исследование на ЭВМ закона управления (3.59) при различных значениях постоянных времени T_1 и T_2 показывает, что указанный подход можно успешно использовать при разносе постоянных времени в пять и более раз.

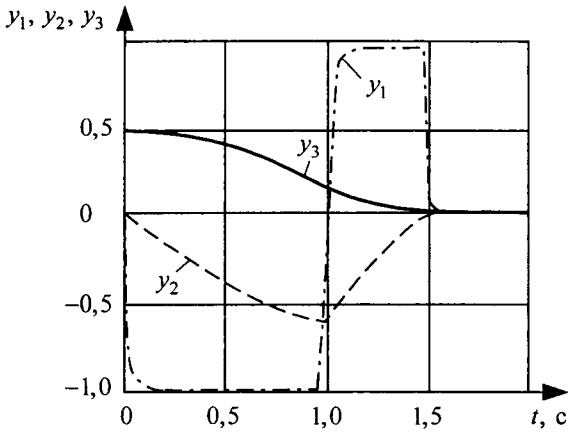


Рис. 3.15. Графики сигналов

Изложенный на конкретном примере способ учета при синтезе оптимального управления малых постоянных времени практически без изменений переносится на случай любой базовой передаточной функции, а также на случай любого порядка вспомогательной системы. При этом, упреждая координаты объекта, можно использовать такое число членов ряда Тейлора, которое соответствует порядку вспомогательной системы. Это позволяет включить в закон управления все фазовые координаты объекта. Если при формировании упреждения используются k членов ряда Тейлора, то такое упреждение будем называть упреждением k-го порядка.

На рис. 3.16 изображена структурная схема объекта, у которого базовая передаточная функция остается прежней, т.е. $T_1 << T_2$, $T_0 << T_2$. Воспользовавшись для упреждения координат двумя членами ряда Тейлора, по аналогии с действиями, проведенными выше, получим закон управления

$$u = -A\,\mathrm{sign}\left\{ y_3 + y_2\tau + \frac{1}{2}\frac{1}{T_2}(y_1 - y_2)\frac{\tau^2}{2} - \varphi\left[y_2 + \frac{1}{T_2}(y_1 - y_2)\tau + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{T_1 T_2} y_0 + \frac{1}{T_2^2} y_2 - \left(\frac{1}{T_2^2} + \frac{1}{T_1 T_2} \right) y_1 \right) \frac{\tau^2}{2} \right] \right\}. \qquad (3.64)$$

Запаздывание τ определим рассмотренными выше способами. Необходимо только иметь в виду, что не всегда выбором τ можно обеспечить существование скользящего режима на всей поверхности переключения. На практике существование скользящего режима на всей поверхности переключения, вообще говоря, не требуется.

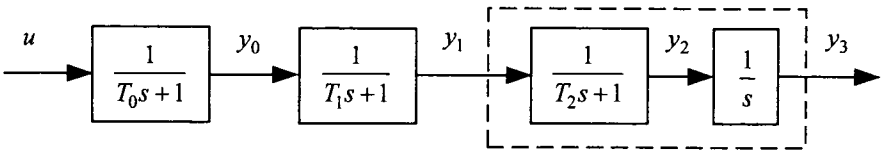


Рис. 3.16. Структурная схема объекта

Если дополнительная система состоит из апериодических звеньев, как на рис. 3.16, то вместо упреждения k-го порядка можно использовать k упреждений первого порядка. Сначала учитывается только одно апериодическое звено. С помощью

упреждения первого порядка для такой системы строится оптимальный закон управления. Этот закон затем рассматривается как базовый для новой системы, в которую включается другое апериодическое звено, и т.д.

На рис. 3.17 изображена осциллограмма отработки системой четвертого порядка $(T_0 = 0{,}01,\ T_1 = 0{,}02)$ начального рассогласования.

Оптимальный закон управления строился путем двукратного применения упреждения первого порядка. Следует отметить, что получаемый таким образом закон управления оказывается более близким к оптимальному, чем закон управления (3.64).

На рис. 3.18 изображена осциллограмма отработки начального рассогласования оптимальной системой, базовая передаточная функция которой совпадает с рассмотренной выше, а вспомогательная представляет собой колебательное звено с параметрами $T = 0{,}02,\ \xi = 0{,}5$. При построении оптимального закона управления было использовано упреждение второго порядка.

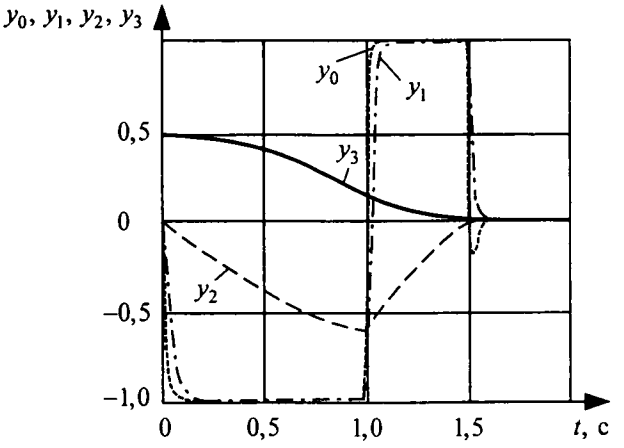


Рис. 3.17. Графики сигналов

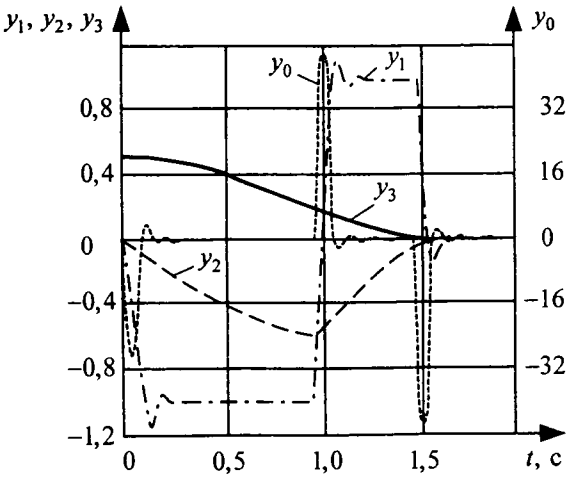


Рис. 3.18. Графики сигналов

Если передаточная функция объекта содержит колебательное или консервативное звено, то, как известно, оптимальные траектории образуют только часть поверхности переключения. В этом случае при выборе времени запаздывания τ по первому способу необходимо ориентироваться именно на эту часть поверхности.

Описанный выше прием приближенного учета малых постоянных времени может эффективно использоваться и в более сложных задачах оптимального управления, например, если требуется построить оптимальный закон управления при наличии ограничений на фазовый вектор системы или при синтезе оптимального управления для объекта с ограничителями и т.п. Необходимо, однако, иметь в виду, что в задачах с ограничениями на фазовый вектор системы указанный прием приводит к небольшому смещению граничного участка оптимальной траектории. Это может вызвать, в конечном счете, нарушение (правда, незначительное) заданных ограничений. С практической точки зрения такие нарушения вполне допустимы.

ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА

Динамическое программирование, наряду с принципом максимума, является основным математическим методом, с помощью которого определяется оптимальное управление. В отличие от принципа максимума, который формулируется таким образом, что оказывается ориентированным, прежде всего, на определение оптимального управления в виде оптимальной программы, динамическое программирование позволяет определять оптимальное управление только в форме синтезирующей функции.

Динамическое программирование хорошо обосновано для дискретных процессов. Обоснованное применение динамического программирования для непрерывных процессов не всегда возможно. Это связано с тем, что при выводе функционального уравнения Беллмана приходится делать предположение, непосредственная проверка которого по уравнениям движения и функционалу невозможна. И только после решения уравнения Беллмана можно проверить, выполняется ли сделанное предположение или нет. Далее, функциональное уравнение Беллмана для непрерывных процессов представляет собой дифференциальное уравнение в частных производных. Это уравнение обычно имеет весьма сложный вид, и численное его решение часто весьма затруднительно.

Если иметь в виду не только задачи оптимального управления, то необходимо отметить, что динамическое программирование обладает большой универсальностью. Его можно использовать для решения широкого класса задач оптимизации.

В настоящей главе излагается основное содержание динамического программирования как метода оптимизации. Рассматриваются как дискретные многошаговые процессы принятия решений, так и непрерывные процессы. Приводится ряд примеров по решению задач оптимизации методом динамического программирования, в том числе его применение к задаче об аналитическом конструировании регуляторов.

4.1. ДИСКРЕТНЫЙ МНОГОШАГОВЫЙ ПРОЦЕСС ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ

Пусть состояние системы задается вектором $\mathbf{p}=(p_1,p_2,\ldots,p_n)$. Обозначим $\mathbf{p}^0=\left(p_1^0,p_2^0,\ldots,p_n^0\right)$ начальное состояние системы, $\mathbf{p}^1$ — состояние системы на единицу времени позже и т.д. Последовательность $\mathbf{p}^0$, $\mathbf{p}^1$, $\mathbf{p}^2$,..., $\mathbf{p}^N$, где

$$\mathbf{p}^{k+1}=\mathbf{T}\left(\mathbf{p}^k,\mathbf{u}^k\right),\ k=\overline{0,N}, \tag{4.1}$$

задает изменение состояния системы в дискретные моменты времени.

В равенстве (4.1) $\mathbf{T}=(T_1,T_2,\ldots,T_n)$ — n-мерный вектор, $\mathbf{u}=(u_1,u_2,\ldots,u_m)$ — m-мерный вектор. На изменения состояния системы можно влиять, выбирая на каждом шаге вектор $\mathbf{u}$ из некоторого заданного множества U. Вектор $\mathbf{u}$ называется *вектором решения, вектором управления или просто решением*. В силу особенностей динамического программирования начальное состояние системы удобно обозначать вектором $\mathbf{p}$.

Последовательность

$$\mathbf{p},\ \mathbf{p}^1,\ \mathbf{p}^2,\ldots,\ \mathbf{p}^N,\ \mathbf{u}^0,\ \mathbf{u}^1,\ldots,\ \mathbf{u}^N, \tag{4.2}$$

где

$$\mathbf{p}^{k+1} = \mathbf{T}\left(\mathbf{p}^k, \mathbf{u}^k\right), \quad k = \overline{0,N},$$

называют *многошаговым процессом принятия решений*. Если N — конечное число, то такой процесс называют конечношаговым, если число элементов в последовательности (4.2) не ограничено, то — бесконечношаговым.

Будем качество многошагового процесса оценивать функцией

$$R\left(\mathbf{p},\mathbf{p}^1,\mathbf{p}^2,\ldots,\mathbf{p}^N,\mathbf{u}^0,\mathbf{u}^1,\ldots,\mathbf{u}^N\right). \tag{4.3}$$

Для дискретного многошагового процесса функция (4.3) является функционалом, поэтому именно так она и называется в дальнейшем. За оптимальное будем принимать максимальное значение функционала (4.3).

Равенство (4.1) представляет собой систему разностных уравнений. Строго говоря, введенное здесь понятие многошагового процесса сводится именно к системе разностных уравнений. Однако в динамическом программировании рассматриваются многошаговые процессы, которые невозможно задавать системой разностных уравнений. Пример такого многошагового процесса будет рассмотрен ниже.

Отметим одно свойство многошагового процесса, которое в дальнейшем играет важную роль. Это свойство можно сформулировать так: для многошагового процесса будущее в полной мере определяется настоящим. Если настоящее состояние системы характеризуется вектором $\mathbf{p}^k$, то для будущего состояния $\mathbf{p}^N$ неважно, каким образом система попала в состояние $\mathbf{p}^k$. Оно полностью определяется многошаговым процессом, который начинается из состояния $\mathbf{p}^k$.

Введем важное понятие стратегии. Будем на каждом шаге вектор управления $\mathbf{u}^k$ задавать в виде функции вектора состояния $\mathbf{p}^k$:

$$\mathbf{u}^k = \mathbf{u}^k\left(\mathbf{p}^k\right). \tag{4.4}$$

Функция (4.4) *задает правило, по которому на каждом шаге выбирается вектор решения и называется функцией стратегии, или просто стратегией. Стратегия, которая максимизирует функционал* (4.3), *называется оптимальной.* Возможность задания оптимального управления в виде оптимальной стратегии непосредственно следует из отмеченного выше свойства многошаговых процессов.

Сформулированный многошаговый процесс принятия решений не задает никаких условий на конечное значение вектора состояния, т.е. речь идет о многошаговых процессах со свободным правым концом. Именно такие процессы рассматриваются ниже. Однако можно рассматривать многошаговые процессы, у которых конечное значение вектора состояния фиксировано либо на его значение заданы какие-либо условия.

4.2. ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ. ОСНОВНОЕ ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БЕЛЛМАНА

В основу динамического программирования положен достаточно очевидный принцип оптимальности Беллмана. Его можно сформулировать следующим образом. *Оптимальная стратегия обладает тем свойством, что независимо от того, каким было первоначальное состояние и первоначальное решение, последующие решения должны быть оптимальными относительно состояния, которое возникло после принятия первого решения.*

Поясним принцип оптимальности. Пусть $\mathbf{u}^0$, $\mathbf{u}^1$,..., $\mathbf{u}^N$ — оптимальная последовательность решений для N-шагового процесса, который начинается из состояния $\mathbf{p}$.

Тогда, очевидно, $\mathbf{u}^1$, $\mathbf{u}^2$,..., $\mathbf{u}^N$ является оптимальной последовательностью решений для $(N-1)$-шагового процесса, который начинается из состояния $\mathbf{p}^1$.

Рассмотрим многошаговый процесс принятия решений (4.2). Будем качество этого процесса оценивать функционалом

$$I = \sum_{k=0}^{N} h\left(\mathbf{p}^k, \mathbf{u}^k\right), \tag{4.5}$$

здесь h — скалярная функция векторного аргумента. Функционал (4.5) для дискретных многошаговых процессов играет ту же роль, что и функционал вида

$$I = \int_0^T h(\mathbf{p}, \mathbf{u})\, dt$$

для непрерывных процессов.

Максимальное значение функционала (4.5) однозначно определяется начальным значением вектора состояния $\mathbf{p}$ и числом шагов N. Обозначим максимальное значение функционала $f_N(\mathbf{p})$. Функцию $f_N(\mathbf{p})$ будем считать определенной для любого значения вектора состояния $\mathbf{p}$ и любого числа шагов N.

Воспользуемся принципом оптимальности Беллмана. Пусть на первом шаге выбрано некоторое решение $\mathbf{u}^0$, а в последующем в соответствии с принципом оптимальности принимаются оптимальные решения. Тогда функционал

$$\begin{aligned} I &= h\left(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0\right) + h\left(\mathbf{p}^1, \mathbf{u}^1\right) + \ldots + h\left(\mathbf{p}^N, \mathbf{u}^N\right) = \\ &= h\left(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0\right) + f_{N-1}\left(\mathbf{p}^1\right) = h\left(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0\right) + f_{N-1}\left(\mathbf{T}\left(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0\right)\right). \end{aligned} \tag{4.6}$$

Для того чтобы оптимизировать N-шаговый процесс, необходимо, очевидно, вектор $\mathbf{u}^0$ выбрать таким образом, чтобы он максимизировал правую часть равенства (4.6).

В результате получим соотношение

$$f_N(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{u}^0 \in U}\left[h\left(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0\right) + f_{N-1}\left(\mathbf{T}\left(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0\right)\right)\right], \quad N \geq 1. \tag{4.7}$$

К равенству (4.7) следует добавить уравнение

$$f_0(\mathbf{p}) = \max_{\mathbf{u}^0 \in U}\left[h\left(\mathbf{p}, \mathbf{u}^0\right)\right]. \tag{4.8}$$

Функция $f_0(\mathbf{p})$ задает максимальное значение функционала (4.5), когда он содержит только одно слагаемое.

Равенство (4.7) *связывает между собой максимальное значение функционала для* N*-шагового процесса с максимальным значением функционала для* $(N-1)$*-шагового процесса и называется основным функциональным уравнением Беллмана.*

Равенство (4.7) задает рекуррентное соотношение, которое решается последовательно. Из уравнения (4.8) определяется функция $f_0(\mathbf{p})$ и подставляется в правую часть равенства (4.7), положив $N = 1$. Максимизировав правую часть равенства (4.7), получим функцию $f_1(\mathbf{p})$. Затем по функции $f_1(\mathbf{p})$ определяется функция $f_2(\mathbf{p})$ и т.д. При этом наряду с последовательностью функций $f_0(\mathbf{p})$, $f_1(\mathbf{p})$, $f_2(\mathbf{p})$,..., которые задают максимальное значение функционала, получим последовательность функций $\mathbf{u}^0(\mathbf{p})$, $\mathbf{u}^1(\mathbf{p})$, $\mathbf{u}^2(\mathbf{p})$,..., задающих оптимальную стратегию. Последовательность $\mathbf{u}^0(\mathbf{p})$, $\mathbf{u}^1(\mathbf{p})$,... состоит из функций, которые максимизируют правую часть уравнения (4.7) (при $N = 0$ — правую часть уравнения (4.8)).

Запишем уравнения (4.7) и (4.8), используя скалярные функции и скалярные переменные:

$$f_N(p_1,p_2,\ldots,p_N)=\max_{\mathbf{u}^0\in U}\Big[h\big(p_1,p_2,\ldots,p_n,u_1^0,u_2^0,\ldots,u_m^0\big)+$$

$$+f_{N-1}\Big(T_1\big(p_1,\ldots,p_n,u_1^0,\ldots,u_m^0\big),T_2\big(p_1,\ldots,p_n,u_1^0,\ldots,u_m^0\big),\ldots$$

$$\ldots,T_n\big(p_1,\ldots,p_n,u_1^0,\ldots,u_m^0\big)\Big)\Big],\quad N\ge 1;$$

$$f_0(p_1,p_2,\ldots,p_N)=\max_{\mathbf{u}^0\in U}h\big(p_1,p_2,\ldots,p_n,u_1^0,u_2^0,\ldots,u_m^0\big).$$

Отметим одну важную особенность метода динамического программирования. *Данным методом оптимальные решения определяются в виде функции стратегии.* Если использовать терминологию главы 2, то можно сказать, что *метод позволяет определять оптимальное управление только в виде синтезирующей функции.*

Рассмотрим еще несколько функционалов.

Пусть качество многошагового процесса принятия решений (4.2) оценивается функционалом

$$I=g\big(\mathbf{p}^N\big).$$

Принцип оптимальности Беллмана в этом случае приводит к функциональному уравнению

$$f_N(\mathbf{p})=\max_{\mathbf{u}^0\in U}f_{N-1}\Big(\mathbf{T}\big(\mathbf{p},\mathbf{u}^0\big)\Big),\quad N\ge 1;$$

$$f_0(\mathbf{p})=g(\mathbf{p}).$$

Для вариационного исчисления весьма сложными являются функционалы вида

$$I=\max_{0\le k\le N}g\big(\mathbf{p}^k,\mathbf{u}^k\big). \tag{4.9}$$

Обозначим $f_N(\mathbf{p})$ максимальное значение функционала (4.9). Применяя принцип оптимальности Беллмана, получим функциональное уравнение

$$f_N(\mathbf{p})=\max\Big[\max_{\mathbf{u}^0\in U}g\big(\mathbf{p},\mathbf{u}^0\big);\ \max_{\mathbf{u}^0\in U}f_{N-1}\Big(\mathbf{T}\big(\mathbf{p},\mathbf{u}^0\big)\Big)\Big].$$

Если рассматривается бесконечношаговый процесс, то функционал (4.5) принимает вид

$$I=\sum_{k=0}^{\infty}h\big(\mathbf{p}^k,\mathbf{u}^k\big). \tag{4.10}$$

Будем предполагать, что ряд (4.10) сходится при любых значениях векторов $\mathbf{u}^k\in U$. Максимальное значение функционала (4.10) в этом случае однозначно определяется начальным значением вектора $\mathbf{p}$. Принцип оптимальности Беллмана приводит к функциональному уравнению

$$f_N(\mathbf{p})=\max_{\mathbf{u}^0\in U}\Big[h\big(\mathbf{p},\mathbf{u}^0\big)+f\Big(\mathbf{T}\big(\mathbf{p},\mathbf{u}^0\big)\Big)\Big].$$

Пример 4.1. *Задача о замене оборудования.* Пусть имеется некоторый комплект оборудования, который характеризуется покупной ценой p и функцией ежегодного дохода $r(t)$. Функция $r(t)$ задает доход от работы оборудования в течение одного года от момента t до момента $t+1$, здесь t — возраст оборудования в годах: $t=0,1,2,\ldots$. Будем, далее, предполагать, что оборудование является специальным и не имеет продажной цены. Требуется определить оптимальную политику замены оборудования, которая дает максимальный доход для k-летнего производственного процесса.

Обозначим $f_k(t)$ максимальный доход, который можно получить от k-летнего производственного процесса, если к началу этого процесса имеется оборудование, возраст которого t лет ($t=0,1,2,\ldots$). В начале

каждого года можно принять одно из следующих двух решений: заменить оборудование или оставить старое оборудование. Принцип оптимальности Беллмана приводит к функциональному уравнению

$$f_k(t) = \max\left[n(t) + f_{k-1}(t+1);\ -p + n(0) + f_{k-1}(1)\right],\quad N > 1. \tag{4.11}$$

К равенству (4.11) следует присоединить уравнение для однолетнего производственного процесса

$$f_1(t) = \max\left[n(t);\ -p + n(0)\right]. \tag{4.12}$$

В равенстве (4.11) выражение, стоящее в квадратной скобке до точки с запятой, задает доход, который можно получить от k-летнего производственного процесса, если на первом году этого процесса принять решение оставить старое оборудование при применении в дальнейшем оптимальной политики замены оборудования. Выражение, стоящее после точки с запятой, задает доход от k-летнего производственного процесса, если на первом году принять решение заменить оборудование при применении в дальнейшем оптимальной политики замены оборудования.

Положим $p = 4$, $n(t) = 4 - t$. Тогда уравнения (4.12) и (4.11) примут вид

$$\begin{cases} f_1(t) = \max\left[4 - t;\ 0\right], \\ f_k(t) = \max\left[4 - t + f_{k-1}(t+1);\ f_{k-1}(1)\right]. \end{cases} \tag{4.13}$$

Из первого уравнения (4.13) находим

$$f_1(t) = \begin{cases} 4 - t & \text{при } t \le 4, \\ 0 & \text{при } t > 4; \end{cases} \quad u_1(t) = \begin{cases} C & \text{при } t \le 4, \\ H & \text{при } t \ge 4. \end{cases}$$

Функция $u_1(t)$ задает оптимальное решение, здесь C — оставить старое оборудование, H — заменить оборудование.

Подставим функцию $f_1(t)$ во второе уравнение (4.13). Получим

$$f_2(t) = \max\left[4 - t + \begin{cases} 4 - (t+1) & \text{при } t+1 \le 4, \\ 0 & \text{при } t+1 > 4; \end{cases} \quad 3\right].$$

Перепишем это уравнение в виде

$$f_2(t) = \max\left[\begin{cases} 7 - 2t & \text{при } t \le 3, \\ 4 - t & \text{при } t > 3; \end{cases} \quad 3\right]. \tag{4.14}$$

Из (4.14) находим, что

$$f_2(t) = \begin{cases} 7 - 2t & \text{при } t \le 2, \\ 3 & \text{при } t > 2; \end{cases} \quad u_2(t) = \begin{cases} C & \text{при } t \le 2, \\ H & \text{при } t \ge 2. \end{cases}$$

Продолжим этот процесс. Запишем второе уравнение (4.13) для трехлетнего производственного процесса:

$$f_3(t) = \max\left[4 - t + \begin{cases} 7 - 2(t+1) & \text{при } t+1 \le 2, \\ 3 & \text{при } t+1 > 2; \end{cases} \quad 5\right]. \tag{4.15}$$

Из уравнения (4.15) следует, что

$$f_3(t) = \begin{cases} 9 - 3t & \text{при } t \le 1, \\ 5 & \text{при } t > 1; \end{cases} \quad u_3(t) = \begin{cases} C & \text{при } t \le 2, \\ H & \text{при } t \ge 2. \end{cases}$$

Для четырехлетнего производственного процесса второе уравнение (4.13) принимает вид

$$f_4(t) = \max\left[4 - t + \begin{cases} 9 - 3(t+1) & \text{при } t+1 \le 1, \\ 5 & \text{при } t+1 > 1; \end{cases} \quad 6\right],$$

или

$$f_4(t) = \max\left[\begin{cases} 10 - 4t & \text{при } t = 0, \\ 9 - t & \text{при } t > 0; \end{cases} \quad 6\right]. \tag{4.16}$$

Из (4.16) следует

$$f_4(t) = \begin{cases} 10 & \text{при } t = 0, \\ 9 - t & \text{при } t \le 3, \\ 6 & \text{при } t > 3; \end{cases} \quad u_4(t) = \begin{cases} C & \text{при } t \le 3, \\ H & \text{при } t \ge 3. \end{cases}$$

Этот процесс можно продолжать на пять лет и т.д. Ограничимся четырехлетним производственным процессом. Получили последовательность функций $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$, которые задают максимальный доход в зависимости от длительности производственного процесса и возраста оборудования, которое имеется на начало производственного процесса. Функции $u_1(t)$, $u_2(t)$, $u_3(t)$, $u_4(t)$ задают оптимальную стратегию, причем функция $u_k(t)$ задает оптимальное решение на первом году k-летнего производственного процесса в зависимости от возраста оборудования.

Пусть, например, к началу четырехлетнего производственного процесса имеется оборудование, возраст которого три года. Максимальный доход, который можно получить от производственного процесса, равен 6 $\left(f_4(3)=6\right)$. Оптимальная стратегия, которая обеспечивает этот доход, не является однозначной, а имеет следующие варианты:

а) первый вариант

Год от начала процесса	1	2	3	4
Оптимальное решение	C	H	C	C
Доход за год	1	0	3	2

б) второй вариант

Год от начала процесса	1	2	3	4
Оптимальное решение	H	C	C	C
Доход за год	0	3	2	1

в) третий вариант

Год от начала процесса	1	2	3	4
Оптимальное решение	H	C	H	C
Доход за год	0	3	0	3

Все три варианта оптимальной стратегии эквивалентны между собой, если интересоваться только четырехлетним производственным процессом, так как они обеспечивают один и тот же доход, равный 6. Однако они не эквивалентны, если принимать во внимание состояние оборудования в конце производственного процесса. В первом варианте по окончанию производственного процесса оборудование имеет возраст 3 года, во втором — 4 года, в третьем — 2 года.

Пример 4.2. *Кратчайшие пути через сети* [9]. Рассмотрим сеть, состоящую из N узлов, занумерованных $1,2,\ldots,N$, и взаимосвязанных звеньев. Обозначим t_{ij} $\left(t_{ij}>0\right)$ время прохождения звена (i,j). Будем решать задачу о нахождении пути через сеть, который соединяет два заданных узла и время движения вдоль которого минимально.

Данная задача имеет важное значение при выборе маршрутов движения автомобилей, самолетов по транспортным сетям, передачи сообщений по сетям связи и т.п. Числа t_{ij} могут необязательно означать время прохождения звена (i,j), а, например, задавать расход топлива.

Пусть конечным узлом, с которым следует соединить начальный узел, является узел N. В соответствии с формализмом динамического программирования в качестве начальных узлов необходимо рассматривать все узлы сети.

Обозначим u_i время перевода системы из узла i в узел N по кратчайшему пути $\left(i=\overline{1,N-1}\right)$. Принцип оптимальности Беллмана приводит к функциональному уравнению

$$\begin{cases} u_i = \min\limits_{j\neq i}\left[t_{ij}+u_j\right], \quad i=\overline{1,N-1}, \\ u_N = 0. \end{cases} \tag{4.17}$$

Покажем, что уравнение (4.17) имеет единственное решение.

Пусть $u_1,u_2,\ldots,u_N$ и $U_1,U_2,\ldots,U_N$ — два различных решения уравнения (4.17). Пусть, далее, m является индексом, для которого разность U_m-u_m достигает максимального значения. Покажем, что эта разность равна нулю.

В соответствии с (4.17) запишем

$$U_m = t_{mn}+U_n, \quad u_m = t_{mr}+u_r.$$

Очевидно,

$$t_{mr}+U_r \geq t_{mn}+U_n.$$

Тогда из соотношений

$$U_m \leq t_{mr}+U_r,$$
$$u_m = t_{mr}+u_r$$

следует неравенство

$$U_m-u_m \leq U_r-u_r.$$

Поскольку для индекса m разность U_m-u_m достигает максимального значения, поэтому

$$U_m-u_m = U_r-u_r,$$

причем $r\neq m$.

Далее, рассмотрев разность U_r-u_r, подобным образом найдем узел s $\left(s\neq m, s\neq r\right)$, для которого

$$U_m-u_m = U_r-u_r = U_s-u_s.$$

Поскольку число узлов конечно, то, перебрав все узлы, окончательно получим

$$U_m - u_m = U_N - u_N = 0.$$

Полученное равенство доказывает единственность решения уравнения (4.17).

Остановимся теперь на численном решении уравнения (4.17). Воспользуемся методом последовательных приближений.

В качестве начального приближения u_i^0, $i = \overline{1,N}$, положим

$$u_i^0 = t_{iN}, \quad i = \overline{1,N-1}, \quad t_{NN} = 0,$$

что соответствует времени прохождения звена (i,N), т.е. непосредственному переводу из узла i в узел N (минуя другие узлы). Если звено (i,N) отсутствует или вообще отсутствует какое-либо звено (i,j), то можно в качестве $t_{iN}\left(t_{ij}\right)$ взять подходящее большое число. Таким образом удается очень просто решить трудные вопросы связей между узлами.

Следующее приближение получим по формуле

$$u_i^1 = \min_{j \neq i}\left[t_{ij} + u_j^0\right], \quad i = \overline{1,N-1}, \quad u_N^1 = 0. \tag{4.18}$$

Предусмотренную равенством (4.18) минимизацию следует выполнять путем непосредственного сравнения встречающихся сумм, что быстро выполняется на ЭВМ. Переход от k-го приближения к $k+1$ осуществляется с помощью соотношений

$$u_i^{k+1} = \min_{j \neq i}\left[t_{ij} + u_j^k\right], \quad i = \overline{1,N-1}, \quad u_N^{k+1} = 0.$$

Рассмотренный алгоритм имеет простую физическую интерпретацию. Величина u_i^0 соответствует времени перехода непосредственно из узла i в узел N, минуя другие узлы. Величина u_i^1 задает минимальное время перехода из узла i в узел N при наличии не более одного промежуточного узла, величина u_i^2 — при наличии не более двух промежуточных узлов и т.д. Из этой интерпретации следует, что последовательные приближения приводят к монотонному убыванию величины u_i^k $\left(k = \overline{1,N}\right)$, т.е.

$$0 \le u_i^{k+1} \le u_i^k,$$

что гарантирует сходимость последовательных приближений.

4.3. МЕТОД ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ДЛЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим применение динамического программирования для решения задачи оптимального управления.

4.3.1. Автономная система

Пусть движение объекта задается системой уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m\right), \quad i = \overline{1,n},$$

или в векторной форме уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \tag{4.19}$$

здесь $\mathbf{x} = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ — n-мерный вектор состояния, $\mathbf{u} = \left(u_1, \ldots, u_m\right)$ — m-мерный вектор управления, $\mathbf{f} = \left(f_1, \ldots, f_n\right)$ — n-мерный вектор. Предполагается, что вектор $\mathbf{u}$ может принимать свои значения из некоторого множества U, т.е. $\mathbf{u}(t) \in U$. В качестве минимизируемого будем рассматривать функционал

$$I = \int_0^T G(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt. \tag{4.20}$$

В рассматриваемой задаче полагаем фиксированным начальное состояние, которое будем обозначать через $\mathbf{x}$, и конечное состояние $\mathbf{x}^*$. Время перехода из начального состояния в конечное не фиксируется. Так как целью оптимизации является

получение оптимальной синтезирующей функции (оптимальной стратегии), то начальной точкой $\mathbf{x}$ может быть любая точка фазового пространства.

Минимальное значение функционала (4.20) однозначно определяется начальным значением вектора $\mathbf{x}$. Обозначим минимальное значение функционала $S(\mathbf{x}) = S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Пусть $\mathbf{x}(t)$, $0 \le t \le T$, — оптимальная траектория, переводящая фазовую точку из начального положения $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}$ в конечную точку $\mathbf{x}^*$. Тогда

$$S(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u}(t) \in U} \int_0^T G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt.$$

Представим функционал в виде

$$\int_0^T G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt = \int_0^\Delta G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt + \int_\Delta^T G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt.$$

Будем предполагать, что оптимальное управление $\mathbf{u}(t)$ кусочно-непрерывно. Условимся за значения управления в точках разрыва принимать пределы справа.

Пусть в интервале $(0, \Delta)$ выбрано некоторое управление $\mathbf{u}(t)$, а в дальнейшем в соответствии с принципом оптимальности выбирается оптимальное управление. Тогда

$$\int_\Delta^T G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt = S(\mathbf{x}(\Delta)).$$

В силу непрерывности траектории $\mathbf{x}(t)$

$$\mathbf{x}(\Delta) = \mathbf{x}(0) + \dot{\mathbf{x}}(0) \cdot \Delta + o(\Delta),$$

где

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{o(\Delta)}{\Delta} = 0.$$

Принимая во внимание уравнение (4.19), можно записать

$$\mathbf{x}(\Delta) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\big|_{t=0} \cdot \Delta + o(\Delta),$$

или

$$\mathbf{x}(\Delta) = \mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \Delta + o(\Delta),$$

здесь $\mathbf{u}$ — значение управления в момент $t = 0$. Таким образом,

$$\int_\Delta^T G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt = S(\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \Delta + o(\Delta)).$$

Далее,

$$\int_0^\Delta G(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))\, dt = G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \Delta + o(\Delta).$$

Если в начальный момент $t = 0$ выбрано управление $\mathbf{u} \in U$, а в дальнейшем в соответствии с принципом оптимальности выбиралось оптимальное управление, то функционал принимает значение

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \Delta + o(\Delta) + S(\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \Delta + o(\Delta)). \tag{4.21}$$

Для оптимизации функционала надо минимизировать выражение (4.21). Таким образом,

$$S(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u} \in U} \left[G(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \Delta + o(\Delta) + S(\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \cdot \Delta + o(\Delta)) \right]. \tag{4.22}$$

Будем предполагать, что функция $S(\mathbf{x})$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам. Отметим, что справедливость всего последующего вывода зависит от того, выполняется это предположение или нет. Заранее функция $S(\mathbf{x})$ неизвестна, и проверить справедливость этого предположения по уравнениям движения нельзя. Можно решить задачу и определить функцию $S(\mathbf{x})$. Если она окажется непрерывно дифференцируемой, то приводимые ниже результаты являются справедливыми. Однако имеют место случаи, когда функция $S(\mathbf{x})$ не является непрерывно дифференцируемой.

Поскольку функция $S(\mathbf{x})$ предполагается непрерывно дифференцируемой, то

$$S\left(\mathbf{x}+\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\cdot\Delta+o(\Delta)\right)=S(\mathbf{x})+\frac{dS}{d\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\cdot\Delta+\frac{dS}{d\mathbf{x}}\cdot o(\Delta),$$

здесь в соответствии с правилами дифференцирования скалярной функции по векторному аргументу

$$\frac{dS}{d\mathbf{x}}=\left(\frac{\partial S}{\partial x_1}\frac{\partial S}{\partial x_2}\cdots\frac{\partial S}{\partial x_n}\right)$$

— матрица-строка. Из (4.22) находим

$$S(\mathbf{x})=\min_{\mathbf{u}\in U}\left[G(\mathbf{x},\mathbf{u})\cdot\Delta+S(\mathbf{x})+\frac{dS}{d\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\cdot\Delta+o(\Delta)\right],$$

или

$$0=\min_{\mathbf{u}\in U}\left[G(\mathbf{x},\mathbf{u})+\frac{dS}{d\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\right]\Delta+o(\Delta). \tag{4.23}$$

Поделим неравенство (4.23) на Δ и перейдем к пределу при $\Delta\to 0$. В результате получим

$$0=\min_{\mathbf{u}\in U}\left[G(\mathbf{x},\mathbf{u})+\frac{dS}{d\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u})\right]. \tag{4.24}$$

Равенство (4.24) является *функциональным уравнением Беллмана*. К уравнению (4.24) необходимо присоединить граничное условие

$$S\left(\mathbf{x}^*\right)=0. \tag{4.25}$$

В частном случае, когда оптимизируется время движения, т.е.

$$I=\int_0^T dt,$$

уравнение Беллмана принимает вид

$$-1=\min_{\mathbf{u}\in U}\frac{dS}{d\mathbf{x}}\cdot\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}), \tag{4.26}$$

здесь функция $S(\mathbf{x})$ задает минимально возможное время движения от точки $\mathbf{x}$ до точки $\mathbf{x}^*$. Для уравнения в частных производных (4.26) граничное условие по-прежнему задается равенством (4.25).

Решая уравнение в частных производных (4.24), наряду с функцией $S(\mathbf{x})$, задающей в зависимости от начальной точки $\mathbf{x}$ минимальное значение функционала, *определяется также функция* $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, *которая задает оптимальную стратегию, или оптимальную синтезирующую функцию.*

Уравнение Беллмана (4.24) *задает необходимое условие минимума.* Именно, если функция $S(\mathbf{x})$ является непрерывно дифференцируемой по всем своим переменным, то она удовлетворяет уравнению Беллмана (4.24).

Пример 4.3. Рассмотрим объект, движение которого задается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u.$$

В качестве конечной точки $\mathbf{x}^*$ выберем начало координат, т.е. положим $\mathbf{x}^* = 0$. Качество процесса управления будем оценивать функционалом

$$I = \int_0^T \left(x_1^2 + x_2^2 + u^2\right) dt. \tag{4.27}$$

Таким образом, речь идет об определении оптимальной стратегии $u = \vartheta(x_1, x_2)$, которая обеспечивает перевод фазовой точки из произвольного начального состояния в начало координат, и притом так, чтобы на траекториях движения функционал (4.27) принимал наименьшее значение.

Выпишем функциональное уравнение Беллмана

$$0 = \min_u \left[x_1^2 + x_2^2 + u^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 + \frac{\partial S}{\partial x_2} u \right]. \tag{4.28}$$

Так как на управляющий параметр u не наложено никаких ограничений, то для определения минимума необходимо продифференцировать правую часть уравнения (4.28) по u:

$$2u + \frac{\partial S}{\partial x_2} = 0. \tag{4.29}$$

Из (4.29) находим

$$u = -\frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial x_2}, \tag{4.30}$$

и уравнение Беллмана принимает вид

$$x_1^2 + x_2^2 + \frac{\partial S}{\partial x_1} x_2 - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial x_2}\right)^2 = 0. \tag{4.31}$$

Будем искать решение уравнения (4.31) в виде квадратичной формы

$$S(\mathbf{x}) = C_1 x_1^2 + C_2 x_1 x_2 + C_3 x_2^2.$$

Тогда

$$\frac{\partial S}{\partial x_1} = 2C_1 x_1 + C_2 x_2, \quad \frac{\partial S}{\partial x_2} = C_2 x_1 + 2C_3 x_2.$$

Уравнение (4.31) принимает вид

$$x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{4}\left(4C_3^2 x_2^2 + 4C_2 C_3 x_1 x_2 + C_2^2 x_1^2\right) + 2C_1 x_1 x_2 + C_2 x_2^2 = 0.$$

Коэффициенты C_1, C_2, C_3 определяются из системы уравнений:

$$\begin{cases} 1 - \frac{1}{4}C_2^2 = 0, \\ 1 - C_3^2 + C_2 = 0, \\ 2C_1 - C_2 C_3 = 0. \end{cases} \tag{4.32}$$

Система нелинейных алгебраических уравнений (4.32) имеет два вещественных решения

$$C_2 = 2, \ C_3 = \sqrt{3}, \ C_1 = \sqrt{3};$$

$$C_2 = 2, \ C_3 = -\sqrt{3}, \ C_1 = -\sqrt{3}.$$

Эти решения в соответствии с (4.30) приводят к двум синтезирующим функциям

$$u = -x_1 - \sqrt{3}x_2, \tag{4.33}$$

$$u = -x_1 + \sqrt{3}x_2. \tag{4.34}$$

В результате получаем две линейные системы, причем линейная система, порождаемая функцией (4.34), оказывается неустойчивой и, следовательно, не может обеспечить перевод фазовой точки в начало координат.

Таким образом, оптимальная синтезирующая функция (оптимальная стратегия) задается равенством (4.33). На рис. 4.1 изображена структурная схема оптимальной системы.

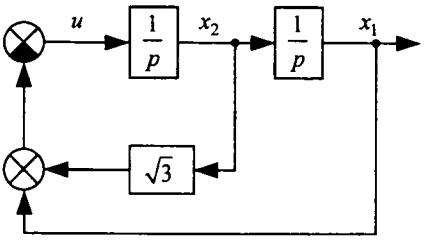


Рис. 4.1. Структурная схема оптимальной системы

Пример 4.4. Рассмотрим простейшее уравнение

$$\dot{x} = u - x, \tag{4.35}$$

полагая, что на управляющий параметр u наложено ограничение

$$|u| \le 1.$$

Будем решать задачу перевода переменной x из произвольного начального значения в нуль.

Как следует из (4.26), уравнение Беллмана имеет вид

$$-1 = \min_{|u|\le 1} \frac{dS}{dx}(u - x). \tag{4.36}$$

Оптимальное по быстродействию управление

$$u = -\operatorname{sign}\frac{dS}{dx}. \tag{4.37}$$

Подставляя (4.37) в (4.36), получим уравнение

$$-1 = -\frac{dS}{dx}x - \frac{dS}{dx}\cdot\operatorname{sign}\frac{dS}{dx}. \tag{4.38}$$

Найдем решение уравнения (4.38), полагая $dS/dx > 0$. Из соотношения

$$\frac{dS}{dx}(1 + x) = 1$$

следует, что

$$S(x) = \ln(x + 1) + C^{*}, \tag{4.39}$$

здесь C^{*} — произвольная константа. При $dS/dx < 0$ аналогичным образом найдем

$$S(x) = \ln(1 - x) + C^{**}. \tag{4.40}$$

Полагая, что равенства (4.39) и (4.40) справедливы при $x = 0$, то в соответствии с граничным условием (4.25) $C^{*} = C^{**} = 0$.

Функция $S(x)$ задает минимальное время движения и может быть только положительной величиной. Из (4.39) и (4.40) следует тогда, что

$$S(x) = \begin{cases} \ln(x+1) & \text{при } x \ge 0, \\ \ln(1-x) & \text{при } x \le 0. \end{cases} \tag{4.41}$$

Оптимальное по быстродействию управление, таким образом, определяется равенством

$$u = \begin{cases} 1 & \text{при } x < 0, \\ -1 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Как следует из (4.41), производная $dS(x)/dx$ имеет разрыв в точке $x = 0$. Это ставит под сомнение справедливость функционального уравнения Беллмана (4.38). Однако, поскольку в оптимальном движении переменная $x(t)$ не изменяет знак, функцию $S(x)$ можно отдельно рассматривать при $x > 0$ и при $x < 0$, а в каждой из этих областей функция $S(x)$ является непрерывно дифференцируемой. Это позволяет заключить о справедливости равенства (4.41).

Во избежание недоразумений отметим, что целью настоящего примера является не демонстрация того, как с помощью динамического программирования можно осуществлять синтез оптимального по быстродействию управления, а желание показать, что предположение о непрерывной дифференцируемости функции $S(x)$ является весьма существенным ограничением метода динамического программирования, когда он применяется для непрерывных процессов. Этот пример также показывает, что для синтеза оптимального по быстродействию управления целесообразно использовать принцип максимума Понтрягина.

4.3.2. Неавтономная система

Рассмотрим неавтономную систему уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m, t), \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.42}$$

Будем, далее, предполагать, что подынтегральная функция функционала также зависит от времени t, т.е.

$$I = \int_{\pm 0}^{T} G(x_1, x_2, \ldots, x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m, t)\,dt. \tag{4.43}$$

По-прежнему рассматривается задача о нахождении управления, задаваемого в виде оптимальной стратегии, которое осуществляет перевод фазовой точки $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ системы (4.42) из заданного, но любого начального состояния, в некоторую заданную точку $\mathbf{x}^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ так, чтобы функционал (4.43) принимал наименьшее значение. При этом начальный момент времени t_0 предполагается фиксированным. Однако, в соответствии с формализмом динамического программирования, начальный момент времени t_0 хотя и считается заданным, но может быть любой величиной. Относительно конечного момента времени T будем предполагать, что он не задан, а определяется из условия прохождения траектории $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le T$, через точку $\mathbf{x}^*$, т.е. $\mathbf{x}(T) = \mathbf{x}^*$.

Воспользуемся рассмотренным в п. 2.2 способом сведения неавтономной задачи оптимального управления к автономной. Запишем уравнения (4.42) в векторной форме

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \tag{4.44}$$

здесь $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ — n-мерные векторы, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ — m-мерный вектор. Присоединим к уравнениям (4.43) уравнение

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = 1, \; x_{n+1}(t_0) = t_0. \tag{4.45}$$

Из (4.45) следует, что $x_{n+1}(t) \equiv t$.

Неавтономная задача оптимального управления (4.42), (4.43), таким образом, сводится к автономной задаче для системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_{n+1}), \\ \dfrac{dx_{n+1}}{dt} = 1 \end{cases} \tag{4.46}$$

и функционала вида

$$I = \int_{t_0}^{T} G(\mathbf{x}, \mathbf{u}, x_{n+1})\,dt. \tag{4.47}$$

Так как конечный момент времени T не фиксирован, то на конечное значение координаты x_{n+1} не наложены никакие условия.

Задача оптимального управления (4.46), (4.47) по терминологии главы 2 является задачей с закрепленным левым и подвижным правым концами траектории. Это обстоятельство, как легко видеть, не оказывает никакого влияния на вывод функционального уравнения Беллмана, а находит свое отражение лишь в изменении граничного условия. В соответствии с (4.24) для задачи (4.46), (4.47) функциональное уравнение Беллмана имеет вид

$$0 = \min_{\mathbf{u}\in U}\left[G(\mathbf{x},\mathbf{u},x_{n+1}) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\cdot \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},x_{n+1}) + \frac{\partial S}{\partial x_{n+1}}\cdot 1 \right], \tag{4.48}$$

здесь

$$\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}} = \left[\frac{\partial S}{\partial x_1}\ \frac{\partial S}{\partial x_2} \cdots \frac{\partial S}{\partial x_n} \right]$$

— матрица-строка. Поскольку $x_{n+1} = t$, то уравнение (4.48) можно переписать в виде

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}\in U}\left[G(\mathbf{x},\mathbf{u},t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\cdot \mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u},t) \right]. \tag{4.49}$$

К уравнению (4.49) следует добавить граничное условие

$$S(\mathbf{x}^*,T) = 0. \tag{4.50}$$

Так как $x_{n+1}(T) = T$ может быть любой величиной, то условие (4.50) должно иметь место для любого T.

Последний результат нуждается в пояснении. Введем $(n+1)$-мерное фазовое пространство X с декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n, t$. Обозначим Π прямую линию, проходящую в пространстве X через точку $(\mathbf{x}^*, 0)$ параллельно оси t. Граничное условие (4.50) заключается в следующем: функция $S(\mathbf{x},t)$ должна обращаться в нуль в каждой точке прямой Π. Это возможно только в том случае, когда функция $S(\mathbf{x},t)$ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*$ не зависит от t.

Если конечный момент времени T фиксирован, то граничное условие попрежнему задается равенством (4.50), в котором T — заданная величина.

4.4. ЗАДАЧА ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ КОНСТРУИРОВАНИИ РЕГУЛЯТОРА

Задача синтеза для линейных объектов управления, минимизирующего квадратичный критерий, называется задачей об аналитическом конструировании регуляторов. В этом случае оптимальный закон управления является линейным. Таким образом, *задачу об аналитическом конструировании регуляторов можно рассматривать как метод синтеза линейных систем.*

4.4.1. Автономная система

Рассмотрим автономный линейный объект управления

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \tag{4.51}$$

здесь $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — постоянные матрицы, имеющие размерность соответственно $n\times n$, $n\times m$, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_m)$ — m-мерный вектор управления, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — n-мерный вектор состояния. Векторы $\mathbf{u}$ и $\mathbf{x}$ рассматриваются как векторы-столбцы. Будем искать управление, минимизирующее функционал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}\right) dt, \tag{4.52}$$

где $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ — постоянные матрицы, имеющие соответственно размерности $n\times n$ и $n\times m$. Матрица $\mathbf{Q}$ предполагается *неотрицательно определенной*, а матрица $\mathbf{R}$ — *положительно определенной*. Пусть, далее, на вектор $\mathbf{u}$ не наложено ограничений, т.е. он может быть любым.

Матрица $\mathbf{Q}$ *называется неотрицательно определенной, если для любого вектора* $\mathbf{x} \neq 0$ $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} \geq 0$. *Матрица* $\mathbf{R}$ *называется положительно определенной, если для любого вектора* $\mathbf{u} \neq 0$ $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u} > 0$. *Матрица* $\mathbf{C}$ *называется симметричной, если* $\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = \mathbf{C}$. *В соответствии с критерием Сильвестра* [57], *для того чтобы симметричная матрица* $\mathbf{R}$ *была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все ее ведущие главные миноры были положительны. Ведущим главным минором порядка* k *называют определитель, составленный из элементов матрицы* $\mathbf{R}$, *стоящих на пересечении первых* k *строк и первых* k *столбцов.*

С помощью матриц $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ в равенстве (4.52) заданы квадратичные формы $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}$. Поскольку любую квадратичную форму можно задать с помощью симметричной матрицы, будем полагать, что матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ симметричные.

В сформулированной задаче условия на правый конец траектории не налагаются. Однако функционал (4.52) может быть конечным лишь в том случае, если $\mathbf{x}(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Минимальное значение функционала (4.52) однозначно определяется начальным значением вектора $\mathbf{x}$. Обозначим минимальное значение функционала $S(\mathbf{x})$. Хотя в рассматриваемой задаче оптимального управления правый конец траектории свободен, приведенный в п. 4.3 вывод уравнения (4.24) сохраняет свою силу, т.е. для рассматриваемой задачи функциональное уравнение Беллмана задается равенством (4.24). Таким образом, уравнение Беллмана имеет вид

$$0 = \min_{\mathbf{u}}\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u} + \frac{dS}{d\mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})\right]. \tag{4.53}$$

Найдем уравнение, минимизирующее правую часть уравнения (4.53). Для этого продифференцируем правую часть по $\mathbf{u}$ и приравняем полученную производную к нулю. Справедливы следующие формальные правила дифференцирования по вектору $\mathbf{u}$:

$$\frac{d}{d\mathbf{u}}\left[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}\right] = 2\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R},$$

$$\frac{d}{d\mathbf{u}}\left[\frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{u}\right] = \frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{B}.$$

В результате получим уравнение

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} + \frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{B} = 0. \tag{4.54}$$

Из уравнения (4.54) находим, что

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = -\frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{B}\cdot\mathbf{R}^{-1},$$

или

$$\mathbf{u} = -\left(\frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{B}\cdot\mathbf{R}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.55}$$

Используя известное матричное тождество $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{M})^{\mathrm{T}} = \mathbf{M}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, равенство (4.55) перепишем в виде

$$\mathbf{u} = -\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\frac{dS}{d\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Так как $\mathbf{R}$ — симметричная матрица, то $\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}^{-1}$. Поэтому можно записать

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\frac{dS}{d\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.56}$$

Управление (4.56) минимизирует правую часть уравнения (4.53). Действительно,

$$\frac{d^2}{d\mathbf{u}^2}\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}+\frac{dS}{d\mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{B}\mathbf{u})\right]=\frac{d}{d\mathbf{u}}\left[\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\right]=\mathbf{R},$$

так как $\mathbf{R}$ — положительно определенная матрица. Таким образом, равенство (4.56) задает оптимальное управление.

Подставим оптимальное управление в уравнение (4.53). Получим уравнение

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{R}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\frac{dS}{d\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{dS}{d\mathbf{x}}\left(\mathbf{A}\mathbf{x}-\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\frac{dS}{d\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right)=0,$$

или

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{x}-\frac{1}{2}\frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\left(\frac{dS}{d\mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}+\frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}=0. \tag{4.57}$$

Уравнение (4.57) представляет собой уравнение в частных производных относительно неизвестной функции $S(\mathbf{x})$.

Решение уравнения (4.55) будем искать в виде положительно определенной квадратичной формы, т.е. положим

$$S(\mathbf{x})=\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{x},$$

где $\mathbf{K}$ — симметричная матрица. По правилу дифференцирования квадратичной формы

$$dS/d\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}. \tag{4.58}$$

Подставим (4.58) в (4.57):

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x}=0. \tag{4.59}$$

Равенство (4.59) можно переписать в виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{Q}-\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}+2\mathbf{K}\mathbf{A}\right]\mathbf{x}=0. \tag{4.60}$$

В левой части равенства (4.60) стоит квадратичная форма. Квадратичная форма обычно задается с помощью симметричной матрицы.

Матрица $\mathbf{Q}$ является симметричной. Покажем, что матрица $\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ также является симметричной. Действительно, в соответствии с известным матричным равенством $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{M})^{\mathrm{T}}=\mathbf{M}^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$, можно записать

$$\left(\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}=\left(\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}}\cdot\left(\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}=$$

$$=\mathbf{K}\mathbf{B}\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}(\mathbf{K}\mathbf{B})^{\mathrm{T}}=\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}.$$

Запишем в равенстве (4.60) квадратичную форму $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x}$ с помощью симметричной матрицы. Для этого представим указанную квадратичную форму в виде

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left(\frac{1}{2}\mathbf{K}\mathbf{A}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right)\mathbf{x},$$

где $\frac{1}{2}\mathbf{K}\mathbf{A}+\frac{1}{2}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}$ — симметричная матрица. Тогда равенство (4.60) принимает вид

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{Q}-\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}+\mathbf{K}\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\right]=0. \tag{4.61}$$

В левой части равенства (4.61) стоит квадратичная форма. Эта квадратичная форма может равняться нулю только в том случае, если ее матрица равняется нулю. Таким образом, получим равенство

$$\mathbf{Q}-\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}+\mathbf{K}\mathbf{A}+\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}=0. \tag{4.62}$$

Уравнение (4.62) *называется матричным уравнением Риккати*. Матричное уравнение (4.62) позволяет определить искомую матрицу **K**. Оно эквивалентно системе из n^2 уравнений.

Матричное уравнение (4.62) имеет не единственное решение. Из решений уравнения (4.62) необходимо выбрать такое, которое задает положительно определенную матрицу **K**. Такая матрица определяется однозначным образом.

Пусть **K** — положительно определенная матрица, являющаяся решением уравнения (4.62). В соответствии с (4.56), оптимальное управление задается равенством

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}. \tag{4.63}$$

Равенство (4.63) *задает линейный закон управления, и, следовательно, оптимальная система* (4.51), (4.63) *является линейной.*

Покажем, что для системы (4.51), (4.63) функция

$$S(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{x}$$

является функцией Ляпунова.

В самом деле, $S(\mathbf{x})$ — положительно определенная функция. Ее полная производная по времени, вычисленная в силу уравнений (4.51), имеет вид

$$\frac{d}{dt}S(\mathbf{x}) = \frac{dS}{d\mathbf{x}}\left[\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}\right] = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}. \tag{4.64}$$

Из уравнения (4.60) следует, что

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{A}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}} - \mathbf{Q}\right]\mathbf{x}. \tag{4.65}$$

Подставив (4.65) в (4.64), получим

$$\frac{d}{dt}S(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}. \tag{4.66}$$

Принимая во внимание (4.63), равенство (4.66) можно переписать в виде

$$\frac{d}{dt}S(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}.$$

Поскольку $\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{u}$ являются положительно определенными квадратичными формами, то, следовательно,

$$\frac{d}{dt}S(\mathbf{x}) < 0$$

для всех $\mathbf{x} \neq 0$. В силу теоремы Ляпунова решение $\mathbf{x}(t) = 0$ системы (4.51), (4.63) является асимптотически устойчивым.

Таким образом, синтез управления, минимизирующего функционал (4.52), приводит к устойчивой линейной системе. Такую оптимизацию можно рассматривать как один из методов синтеза линейных систем управления. Этот метод является несомненно полезным для синтеза многомерных систем управления.

Основную сложность при применении данного метода составляет решение матричного уравнения Риккати (4.62). В настоящее время разработаны стандартные программы (см., например, математический пакет *Matlab*), которые позволяют легко численно решить матричное уравнение Риккати, выделить положительно определенную матрицу **K** и, таким образом, найти оптимальную синтезирующую функцию $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Пример 4.5. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u,$$

полагая, что матрицы **A**, **B** и вектор **x** имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix},$$

u — скалярное управление. Требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{x} + ru^2\right)dt,$$

где матрица

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix},$$

r, q_1, q_2 — положительные числа.

Матрицу $\mathbf{K}$, с помощью которой задается функция $S(\mathbf{x})$, представим в виде

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}.$$

В соответствии с (4.62), запишем уравнение Риккати:

$$\begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} - \frac{1}{r}\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix} = 0. \tag{4.67}$$

Из (4.67) следует система уравнений

$$\begin{cases} q_1 - \dfrac{1}{r}k_{12}^2 = 0, \\ k_{11} - \dfrac{1}{r}k_{12}k_{22} = 0, \\ q_2 - \dfrac{1}{r}k_{22}^2 + 2k_{12} = 0. \end{cases} \tag{4.68}$$

Система уравнений (4.68) имеет следующие решения:

$$k_{12} = \pm\sqrt{rq_1},\quad k_{22} = \pm\sqrt{r\left(q_2 \pm 2\sqrt{rq_1}\right)}, \\ k_{11} = \pm\sqrt{q_1\left(q_2 \pm 2\sqrt{rq_1}\right)}. \tag{4.69}$$

Выделим из (4.69) решение, соответствующее положительно определенной матрице $\mathbf{K}$. Применяя *критерий Сильвестра*, найдем, что таким решением являются

$$k_{11} = \sqrt{q_1\left(q_2 + 2\sqrt{rq_1}\right)},\quad k_{12} = \sqrt{rq_1}, \\ k_{22} = \sqrt{r\left(q_2 + 2\sqrt{rq_1}\right)}.$$

В соответствии с (4.63), оптимальное управление

$$u = -\frac{1}{r}\left(k_{12}x_1 - k_{22}x_2\right).$$

4.4.2. Неавтономная система

Пусть движение системы описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}, \tag{4.70}$$

здесь $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$ — матрицы порядка $n\times n$ и $n\times m$, $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор состояния, $\mathbf{u}$ — m-мерный вектор управления. Как и выше, будем полагать, что на вектор $\mathbf{u}$ не наложены никакие ограничения. Качество процесса управления будем оценивать функционалом

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{T}\left(\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t)\mathbf{u}\right)dt, \tag{4.71}$$

где $\mathbf{Q}(t)$ — неотрицательно определенная матрица, а $\mathbf{R}(t)$ — положительно определенная матрица. Требуется определить оптимальную стратегию $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$, минимизирующую функционал (4.71).

При решении задачи оптимизации будем полагать, что конечный момент времени T фиксирован. Заданными считаются также начальное условие $\mathbf{x}(t_0)$ и начальный момент времени t_0. Однако, в соответствии со спецификой динамического программирования, начальные значения t_0 и $\mathbf{x}(0)$ хотя и полагаются заданными, но могут быть любыми $\left(\mathbf{x}(0) \in X,\ t_0 > T\right)$. Будем, далее, полагать, что правый конец оптимальной траектории свободен, т.е. на значение вектора $\mathbf{x}$ в момент времени T не накладываются никакие условия.

Для рассматриваемой задачи оптимального управления функциональное уравнение Беллмана задается равенством (4.49), которое принимает вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \min_{\mathbf{u}}\left[\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t)\mathbf{u} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u}\right)\right]. \tag{4.72}$$

Для определения минимума продифференцируем правую часть уравнения (4.72) по вектору $\mathbf{u}$. В результате получим уравнение

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}(t) + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(t) = 0,$$

из которого следует

$$\mathbf{u}^{\mathrm{T}} = -\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t),$$

или

$$\mathbf{u} = -\left(\mathbf{R}^{-1}(t)\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.73}$$

Как и выше, здесь матрицы $\mathbf{Q}(t)$ и $\mathbf{R}(t)$ полагаются симметричными. Но тогда $\mathbf{R}^{-1}(t)$ также является симметричной матрицей. Поэтому уравнение (4.73) можно переписать в виде

$$\mathbf{u} = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}. \tag{4.74}$$

Так как вторая производная от правой части равенства (4.72) равна $\mathbf{R}(t)$, а $\mathbf{R}(t)$ — положительно определенная матрица, то управление (4.74) доставляет минимум правой части уравнения (4.72).

Подставив управление (4.74) в уравнение Беллмана, получим

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} + \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} +$$
$$+\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{A}(t)\mathbf{x} - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}}\right).$$

После преобразования подобных членов это уравнение принимает вид

$$-\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} - \frac{1}{2}\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\left(\frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\mathrm{T}} + \frac{\partial S}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \tag{4.75}$$

Решение уравнения (4.75), очевидно, должно удовлетворять граничному условию

$$S\left(\mathbf{x}(T), T\right) = 0. \tag{4.76}$$

Решение уравнения (4.75) будем искать в виде положительно определенной квадратичной формы

$$S(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}(t)\mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \tag{4.77}$$

где $\mathbf{K}(t)$ — симметричная матрица размерности $n \times n$. Из (4.77) следует, что

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \frac{d\mathbf{K}}{dt}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}, \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}(t).$$

Отметим, что матрица $d\mathbf{K}/dt$ состоит из производных элементов матрицы $\mathbf{K}(t)$ и также является симметричной. Уравнение (4.75) тогда принимает вид

$$-\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \frac{d\mathbf{K}}{dt}\mathbf{x} = \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{x} + \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{x}. \quad (4.78)$$

Перепишем уравнение (4.78) в виде

$$\frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{Q}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(t) + 2\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) + \frac{d\mathbf{K}}{dt}\right]\mathbf{x} = 0.$$

Квадратичная форма равняется нулю для любого вектора $\mathbf{x}$ лишь в том случае, если равна нулю образующая ее матрица. Таким образом, получили матричное уравнение

$$\frac{d\mathbf{K}}{dt} = \mathbf{K}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(t) - \mathbf{Q}(t) - \mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(t). \quad (4.79)$$

В уравнении (4.79), как и выше, для получения решения в виде симметричной матрицы $\mathbf{K}(t)$ выполнено преобразование

$$2\mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) = \mathbf{K}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(t).$$

Уравнение (4.79) *представляет собой матричное уравнение типа Риккати.* Его необходимо дополнить граничным условием

$$\mathbf{K}(T) = 0,$$

которое следует из условия (4.76). В соответствии с (4.74), оптимальное управление

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}(t)\mathbf{x}.$$

Оптимальное управление является линейной функцией $\mathbf{x}$, *т.е. оптимизация управления линейным неавтономным объектом* (4.70) *по критерию* (4.71) *приводит к неавтономной линейной системе уравнений*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left[\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{K}(t)\right]\mathbf{x}.$$

4.5. СВЯЗЬ МЕЖДУ ПРИНЦИПОМ МАКСИМУМА И ДИНАМИЧЕСКИМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ

Установим связь между принципом максимума и динамическим программированием.

Пусть движение объекта задается векторным уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \quad (4.80)$$

здесь $\mathbf{x}$ и $\mathbf{f}$ — n-мерные векторы, $\mathbf{u}$ — m-мерный вектор управления. Вектор $\mathbf{u}$ может принимать свои значения из некоторого заданного множества U. Рассмотрим двухточечную задачу оптимального управления. Будем полагать, что в фазовом пространстве X системы заданы начальная $\mathbf{x}^0$ и конечная $\mathbf{x}^1$ точки. Требуется среди допустимых управлений $\mathbf{u}(t) \in U$ (время движения не фиксировано), переводящих фазовую точку $\mathbf{x}$ из заданного начального положения $\mathbf{x}^0$ в заданное конечное положение $\mathbf{x}^1$, найти такое, которое доставляет минимум функционалу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt. \quad (4.81)$$

Соответствующая задача оптимального управления была рассмотрена в п. 4.3. Основное функциональное уравнение Беллмана имеет вид

$$0 = \min_{\mathbf{u}\in U}\left[f_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) + \frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \right]. \tag{4.82}$$

Будем предполагать, что функция $S(\mathbf{x})$ дважды непрерывно дифференцируема. Так как минимум любой функции $g(\mathbf{u})$ переходит в максимум функции $-g(\mathbf{u})$, то управление (4.82) можно записать в виде

$$0 = \max_{\mathbf{u}\in U}\left[-f_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \frac{dS}{d\mathbf{x}}\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}) \right],$$

или

$$0 = \max_{\mathbf{u}\in U}\left[-f_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x},\mathbf{u}) \right]. \tag{4.83}$$

Пусть $\mathbf{u}(t)$ — оптимальное управление. Тогда из (4.83) следует уравнение

$$-f_0(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_j} f_j(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0. \tag{4.84}$$

Продифференцируем уравнение (4.84) по x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Получим равенства

$$-\frac{\partial f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_i} f_j(\mathbf{x},\mathbf{u}) - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f_j(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.85}$$

В силу уравнения (4.80)

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 S}{\partial x_j \partial x_i} f_j(\mathbf{x},\mathbf{u}) = \frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial x_i},$$

и поэтому равенство (4.83) можно переписать в виде

$$-\frac{d}{dt}\frac{\partial S}{\partial x_i} - \frac{\partial f_0(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i} - \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial S}{\partial x_j}\cdot\frac{\partial f_j(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{4.86}$$

Обозначим $\psi_i = -\partial S/\partial x_i$ и положим $\psi_0 = -1$. Тогда из (4.86) следуют равенства

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=0}^{n}\psi_j\cdot\frac{\partial f_j(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}.$$

Именно такими уравнениями определяются вспомогательные переменные в принципе максимума (см. уравнение (2.4)).

Далее, соотношение (4.83) можно переписать в виде

$$\max_{\mathbf{u}\in U} H(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0. \tag{4.87}$$

Из равенства (4.87) следует, что оптимальное управление доставляет в каждый момент времени t функции Гамильтона максимум и что функция $M(\psi(t),\mathbf{x}(t)) = 0$. Таким образом, получены (с учетом сделанных выше предположений) все условия теоремы 2.1.

ГЛАВА 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Построение аналитических решений разнообразных задач оптимального управления возможно лишь в крайне простых случаях. Часто такие задачи могут быть сформулированы лишь благодаря далеко идущей идеализации, когда фактически вместо поставленной задачи решается совсем иная.

Основным же подходом к решению реальных задач является приближенная численная оптимизация, методы которой подробно рассмотрены в [68, 74].

Здесь мы ограничимся лишь методами нелинейного программирования для случая, когда используется конечномерная аппроксимация объекта управления. Редукция задач оптимального управления к задачам конечномерной оптимизации может быть выполнена различными способами. Основными из них являются:

1) *сеточная аппроксимация*;
2) *проекционная аппроксимация*.

С этими видами аппроксимации органически связаны основные этапы развития численных методов решения задач оптимального управления. Степень эффективности указанных подходов, с учетом уровня развития вычислительной техники и программирования, Р.П. Федоренко выразил так [103]:

«Представим в общих чертах основные этапы развития численных методов решения задач оптимального управления, обратив особое внимание на то, как трудности реализации уже известных алгоритмов и растущие требования приложений определяют структуру новых методов. Начать историю численных методов в вариационном исчислении нужно, видимо, с Эйлера. Именно он предложил заменить искомую функцию сеточной, а функционал — соответствующей разностной аппроксимацией. Правда, при этом преследовались теоретические цели, проведение необходимых для решения задач вычислений в то время было нереально. В дальнейшем этот метод был забыт, и в расчетах использовались методы Ритца, Галеркина и другие, аналогичные им. Они основаны на представлении искомого решения в виде сумм (с неопределенными коэффициентами) некоторого числа базисных функций. Умелый подбор базиса позволял обойтись двумя-тремя функциями и приводил к результату (в достаточно простых задачах) ценой не очень большого объема вычислений. Появление ЭВМ сняло, до известной степени, остроту вопроса о числе операций, и на первое место снова вышел метод конечных разностей Эйлера, благодаря его универсальности и слабой зависимости от аналитической формы задачи».

Эти слова относятся к 70-м годам XX века. Учитывая факт бурного развития средств вычислительной техники и микро-ЭВМ, а также достижения вычислительной математики, в настоящее время развиваются методы оптимизации систем, использующие как сеточные, так и проекционные методы. Каждая из этих групп имеет свои достоинства и недостатки. Вместе с тем, как указано в [103], задача только и начинается после введения разностной или проекционной аппроксимации. Основной вопрос приближенного решения заключается в том, как найти минимум в полученной конечномерной задаче.

5.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Сформулируем задачу оптимизации САУ по пунктам.

1. Задано векторно-матричное дифференциальное уравнение, описывающее поведение объекта управления:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{p},t),\ \ 0 \le t \le T, \tag{5.1}$$

где $\mathbf{X}(t) \in R^n$ — вектор переменных состояния, $\mathbf{U}(t) \in R^m$ — вектор управляющих воздействий, $\mathbf{p} = [p_1 \quad p_2 \quad \dots \quad p_s]$ — вектор проектных параметров, $\mathbf{F} \in R^n$ — вектор-функция, предполагаемая непрерывной и непрерывно дифференцируемой по всем переменным.

Если объект линейный стационарный, то система (5.1) имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{p})\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{p})\mathbf{U},\ \ \mathbf{A}(\mathbf{p}) = \text{const},\ \ \mathbf{B}(\mathbf{p}) = \text{const},\ \ 0 \le t \le T;$$

если же объект линейный нестационарный, то векторно-матричное уравнение объекта запишется так:

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(\mathbf{p},t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(\mathbf{p},t)\mathbf{U},\ \ 0 \le t \le T,$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{p},t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{p},t)$ — переменные матрицы, зависящие от вектора проектных параметров $\mathbf{p}$.

2. Задан показатель качества управления, или критериальный функционал:

$$I = g_0\left(\mathbf{X}^0,\mathbf{X}^T,T,\mathbf{p}\right) + \int_0^T f_0\left(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\mathbf{p},t\right)dt. \tag{5.2}$$

3. Заданы ограничения на управление, связанные с ограниченностью ресурсов управления.

Например, ограничение вида $|\mathbf{U}(t)| \le u_m$ встречается при управлении поворотами космического аппарата, если вращающий момент создается парой поворотных реактивных двигателей [80].

Вектор $\mathbf{U}(t)$ принимает значения из некоторого множества $U^m \subset R^m$ с координатами $u_1, u_2, \dots, u_m$. Это множество может быть всем пространством R^m (задача без ограничений) или его частью — $U^m \subset R^m$.

Например, в механике полета чаще всего U^m — замкнутая область пространства R^m.

Множество U^m называют *множеством допустимых значений управления* [80]. Некоторые виды множеств U^m приведены на рис. 5.1.

В механике полета управляющими переменными $u_i(t)$ обычно являются координаты отклонения рулевых поверхностей, вектора тяги. В некоторых «усеченных» задачах, т.е. задачах, не имеющих достаточно полного описания реального объекта, в качестве управляющих переменных могут выступать координаты углового положения летательного аппарата, компоненты скорости и ее направления и т.д.

4. Заданы ограничения на траекторию.

В ряде реальных ситуаций система не может заходить в те или иные области фазового пространства. Это находит отражение в соответствующих ограничениях на траекторию $\mathbf{X}(t)$ движения системы, состоящих в том, что в каждый момент времени t задается область $X^n \subset R^n$, в которой может находиться вектор состояния $\mathbf{X}(t)$.

Указанные условия определяются запасами механической прочности объекта, его термической прочностью, нежеланием попасть в «опасную зону» и т.д. Например, угол атаки летательного аппарата не должен превышать определенного значения. Большим углам атаки соответствуют значительные нормальные ускорения, которые могут вызвать поломку приборов, корпуса.

Ограничения накладываются и на скорость космического корабля при его входе в атмосферу, поскольку чрезмерная скорость приводит к значительному повышению температуры. При этом может расплавиться защитная оболочка и т.д. [80].

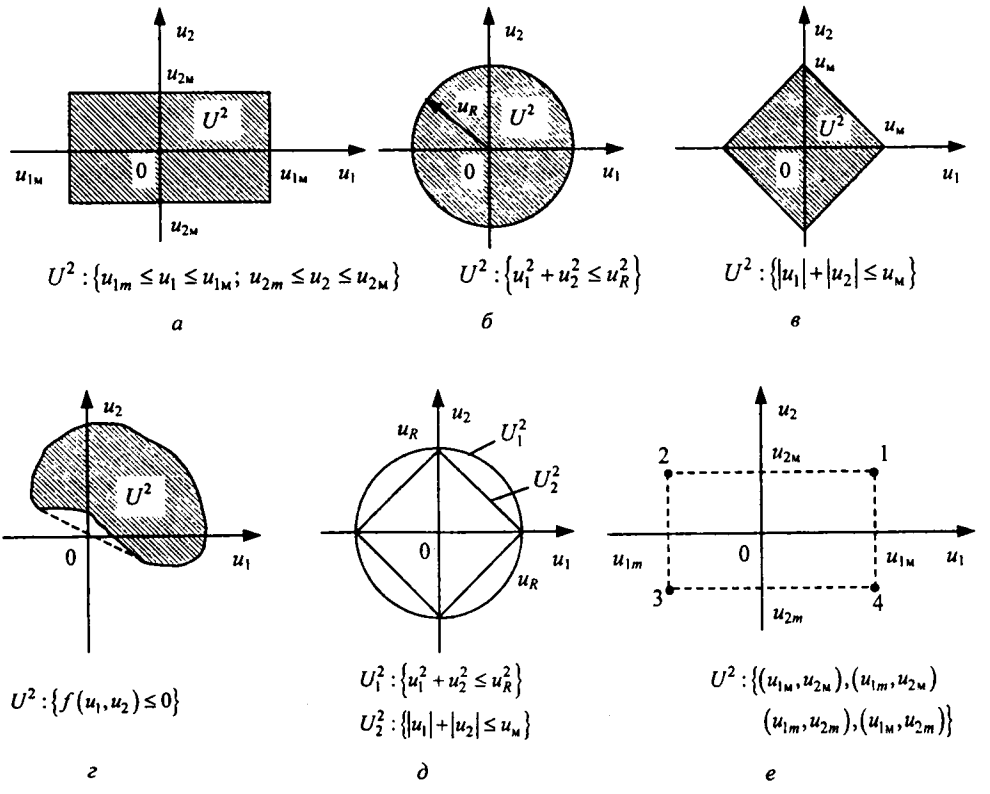


Рис. 5.1. Виды множеств U^2 допустимых значений:
а–в — замкнутые ограниченные выпуклые области, содержащие начало координат;
г — невыпуклая область, не содержащая начало координат; *д* — невыпуклые одномерные области U_1^2 и U_2^2; *е* — дискретное множество допустимых значений (1–4 — изолированные точки)

5. Заданы граничные условия.

Цель управления состоит в том, чтобы перевести объект из некоторого начального состояния в заданное конечное состояние. Начальное и конечное состояния простейшим способом можно задать двумя точками в фазовом пространстве:

$$\mathbf{X}(t)\big|_{t=0} = \mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad x_2(0) \quad \ldots \quad x_n(0)\right]^{\mathrm{T}}$$

— начальное состояние, $t = t_0 = 0$ — начальный момент времени (начало управления),

$$\mathbf{X}(t)\big|_{t=T} = \mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \quad x_2(T) \quad \ldots \quad x_n(T)\right]^{\mathrm{T}}$$

— конечное состояние, T — конечный момент времени (конец управления).

В зависимости от вида этих ограничений выделяют различные классы задач управления. В задачах с фиксированными концами начальное $\mathbf{X}^0$ *и конечное* $\mathbf{X}^T$ *состояния заданы. Если же* $\mathbf{X}^0$ *или* $\mathbf{X}^T$ *не задано, то соответствующая задача называется задачей со свободным левым или правым концом траектории. Задачей с подвижными концами называется такая задача, в которой моменты* $t=0$ *и* $t=T$ *заданы, а* $\mathbf{X}^0$ *и* $\mathbf{X}^T$ *могут изменяться в пределах областей* G^0 *и* G^T.

В фазовом пространстве множества G^0 и G^T часто записывают в виде

$$G^0\left[\mathbf{X}(0)\right]=0,\ G^T\left[\mathbf{X}(T)\right]=0.$$

Множества G^0 *и* G^T *называют целевыми множествами. Из всего множества фазовых траекторий, начинающихся на* G^0 *и заканчивающихся на* G^T, *в процессе оптимизации выбирается та, которая доставляет экстремальное значение критерию качества.*

В задачах с *изопериметрическими ограничениями* считаются заданными величины интервалов

$$I_j=\int_0^T f_{0j}\left(\mathbf{X}(t),t\right)dt=0,\ j=\overline{1,k_0}, \tag{5.3}$$

где f_{0j} — заданные скалярные функции.

Возможны также изопериметрические ограничения типа неравенств

$$I_i=\int_0^T f_{0i}\left(\mathbf{X}(t),t\right)dt\le 0,\ i=\overline{k_0,k_1}. \tag{5.3a}$$

Возможные виды граничных условий в задачах оптимального управления представлены на рис. 5.2.

Определение управлений $\mathbf{U}(t)$, *при которых решение системы дифференциальных уравнений* (5.1) *удовлетворяет краевым условиям, называется двухточечной краевой задачей.*

Перевод объекта из состояния $\mathbf{X}^0$ *в состояние* $\mathbf{X}^T$ *на* $[0,T]$ *не всегда возможен.* Если же найдется хотя бы одна пара векторов $\{\mathbf{U}(t),\mathbf{p}\}$, осуществляющая указанный переход, то обычно существуют и другие пары векторов, реализующие перевод объекта из $\mathbf{X}^0$ в $\mathbf{X}^T$. *При оптимизации ставится задача об отыскании таких* $\{\mathbf{U}(t),\mathbf{p}\}$, *которые доставляют экстремум функционалу качества.* Для построений оптимальных управлений в большинстве случаев используются приближенные методы, поэтому часто *ставится задача достичь желаемого состояния* $\mathbf{X}^T$ *с некоторой точностью, задаваемой условием* [80]

$$\left[\mathbf{X}(T)-\mathbf{X}^T\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\left[\mathbf{X}(T)-\mathbf{X}^T\right]\le\delta,$$

где $\mathbf{Q}$ — неотрицательно определенная матрица, δ — заданное число, $\mathbf{X}^T$ — эталонный вектор, $\mathbf{X}(T)$ — реальный вектор.

Можно использовать в качестве критерия приближения независимые условия по каким-либо (не обязательно всем) координатам типа

$$\left(x_j^{\mathrm{э}}(T)-x_j^{\mathrm{р}}(T)\right)^2\le\delta_j,$$

где $x_j^{\mathrm{э}}(T)$ и $x_j^{\mathrm{р}}(T)$ — соответственно эталонное и реальное значения координаты $x_j(t)$ при $t=T$.

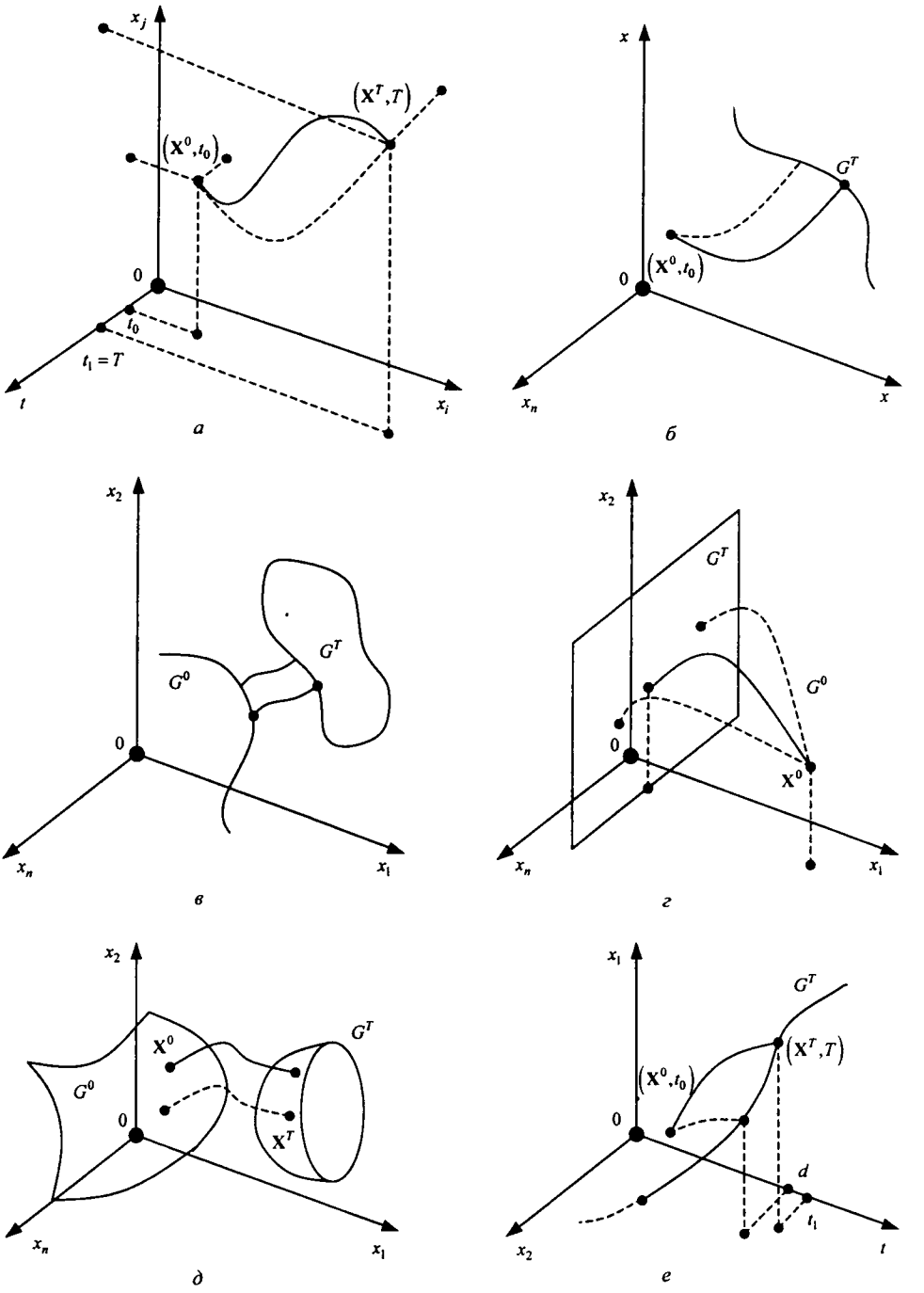


Рис. 5.2. Примеры граничных условий:

а — левый и правый концы фазовой траектории закреплены; *б* — левый конец закреплен, правый — свободен; *в* — левый и правый концы подвижные; *г* — левый конец закреплен, правый — свободен, за исключением координаты x_1; *д* — общий случай подвижных граничных условий; *е* — граничные условия в задаче встречи движений (перехвата);
———— — оптимальная траектория, – – – – – — произвольная траектория

Приведенный факт будет использоваться при расчете оптимальных программных управлений приближенными методами.

6. Задано допустимое программное управление.

Вектор-функция $\mathbf{U}(t)$ *называется допустимым программным управлением, если:*

а) $\mathbf{U}(t)$ принадлежит к классу кусочно-непрерывных по t на промежутке $[0,T]$ функций, т.е. может иметь лишь конечное число точек разрыва 1-го рода;

б) $\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m \ \forall t \in [0,T]$.

На рис. 5.3 приведены примеры допустимых управлений [80].

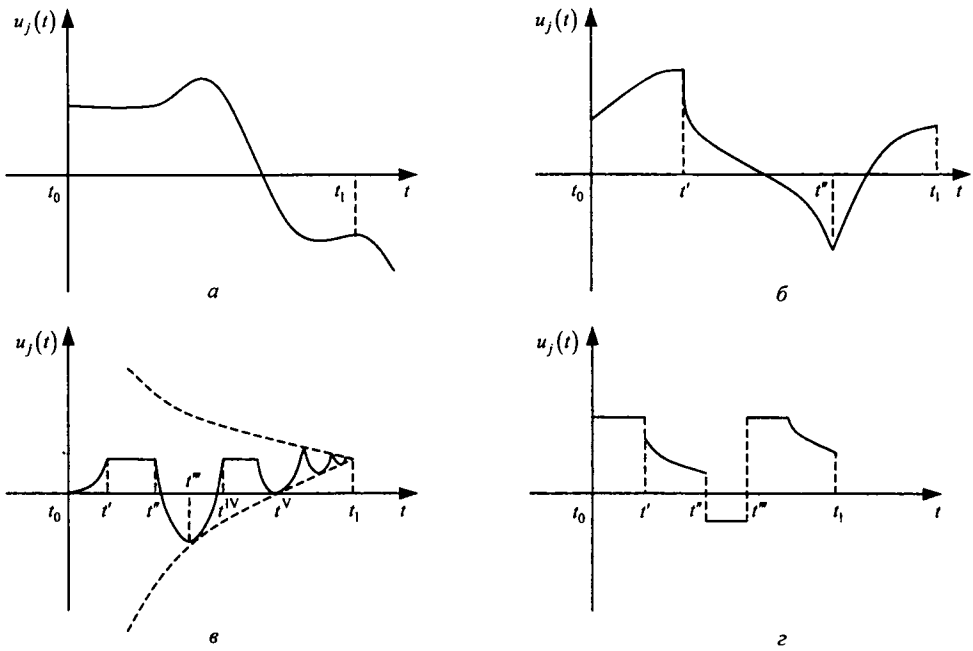


Рис. 5.3. Примеры управлений $u_j(t)$, принадлежащих различным классам функций:
а — гладкое управление; *б* — кусочно-гладкое непрерывное управление;
в — непрерывное управление (в окрестности точки t_1 функция $u_j(t)$ недифференцируема);
г — кусочно-непрерывное управление

Далее приведем постановку задачи оптимизации (для упрощения постановки задачи полагается, что функции от вектора **p** не зависят).

При заданных управлениях объекта (5.1), *ограничениях* (5.3) *и* (5.3*а*) *и краевых условиях* $\mathbf{X}^0 \in G^0$, $\mathbf{X}^T \in G^T$ *требуется найти такие программное управление* $\mathbf{U}^*(t)$ *или управление в виде обратной связи* $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}(t),t)$ *из класса всех допустимых и фазовую траекторию* $\mathbf{X}^*(t)$, *при которых критерий* (5.2) *на решениях системы* (5.1) *принимает экстремальное значение.*

Управления $\mathbf{U}^*(t)$, $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}(t),t)$ *и траектория* $\mathbf{X}^*(t)$ *называются оптимальными.*

Предыдущую постановку задачи можно сделать более полной, если учесть вектор параметров **p** [80].

В таком случае задача ставится так: *среди всех допустимых на интервале* $[0,T]$ *программных управлений* $\mathbf{U}(t)$ *или управлений в виде обратной связи* $\mathbf{U}(\mathbf{X}(t),t)$ *и управляющих параметров* $\mathbf{p} \in P^s$, *переводящих объект из состояния* G^0 *в состояние* G^T, *найти такие, для которых функционал* (5.2) *на решениях системы* (5.1) *принимает экстремальное значение.*

В механике полета в качестве управляющих параметров $\mathbf{p} \in P^s$ выступают конструктивные, весовые и геометрические характеристики летательного аппарата. Замкнутость и ограниченность множества P^s означает, что в реальных конструкциях указанные параметры не могут быть произвольно большими.

Формальная постановка задачи:

$$I = \int_0^T f_0\left(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\mathbf{p},t\right)dt + g_0\left(\mathbf{X}^0,\mathbf{X}^T,T,\mathbf{p}\right) \to \min_{\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),\mathbf{p}}$$

при следующих ограничениях:

а) $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{U},\mathbf{p},t)$, $0 \le t \le T$;

б) $\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m \ \ \forall t \in [0,T]$, $\mathbf{X}(t) \in X^n \subset R^n \ \ \forall t \in [0,T]$;

в) $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(t)\big|_{t=0} = \mathbf{X}^0 \in G^0$, $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}(t)\big|_{t=T} = \mathbf{X}^T \in G^T$;

г) $\mathbf{U}(t)$ принадлежит к классу допустимых управлений.

5.2. СИСТЕМЫ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ И ОПТИМАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, РАБОТАЮЩИЕ ПО ПРИНЦИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

Напомним некоторые определения, связанные с вопросами синтеза оптимальных программных управлений и оптимальных систем, работающих по принципу обратной связи.

Вектор-функцию $\mathbf{U}^*(t)$, зависящую от t, называют *оптимальным программным управлением.*

Системы, в которых оптимальное управление $\mathbf{U}^*(t)$ является функцией времени, называют *системами программного управления*, или *разомкнутыми системами*, или *системами без обратной связи.*

Траектория $\mathbf{X}^*(t)$, являющаяся решением уравнения объекта при $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^*(t)$, называется *программной траекторией* или *оптимальной программой.*

Вектор-функцию $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}(t),t)$, зависящую от вектора $\mathbf{X}(t)$, называют *координатным управлением*, или *законом управления*, или *управлением в виде обратной связи.*

Закон управления $\mathbf{U}^*(\mathbf{X}(t),t)$ физически выражает известный принцип обратной связи, согласно которому величина управляющего воздействия определяется на основании измерения текущего состояния системы $\mathbf{X}(t)$.

Сравним две линейные системы, представленные на рис. 5.4. На рис. 5.4, *а* представлена разомкнутая система. Такой класс систем может быть реализован, если:

- известна с достаточной степенью точности математическая модель объекта управления;
- объект не подвергается воздействию случайных возмущений;

- все каналы связи управляющей системы и объекта защищены от каких-либо случайных влияний;
- известны и точно реализуются начальное $\mathbf{X}^0$ и конечное $\mathbf{X}^T$ состояния;
- точно реализуется программное управление $\mathbf{U}^*(t)$.

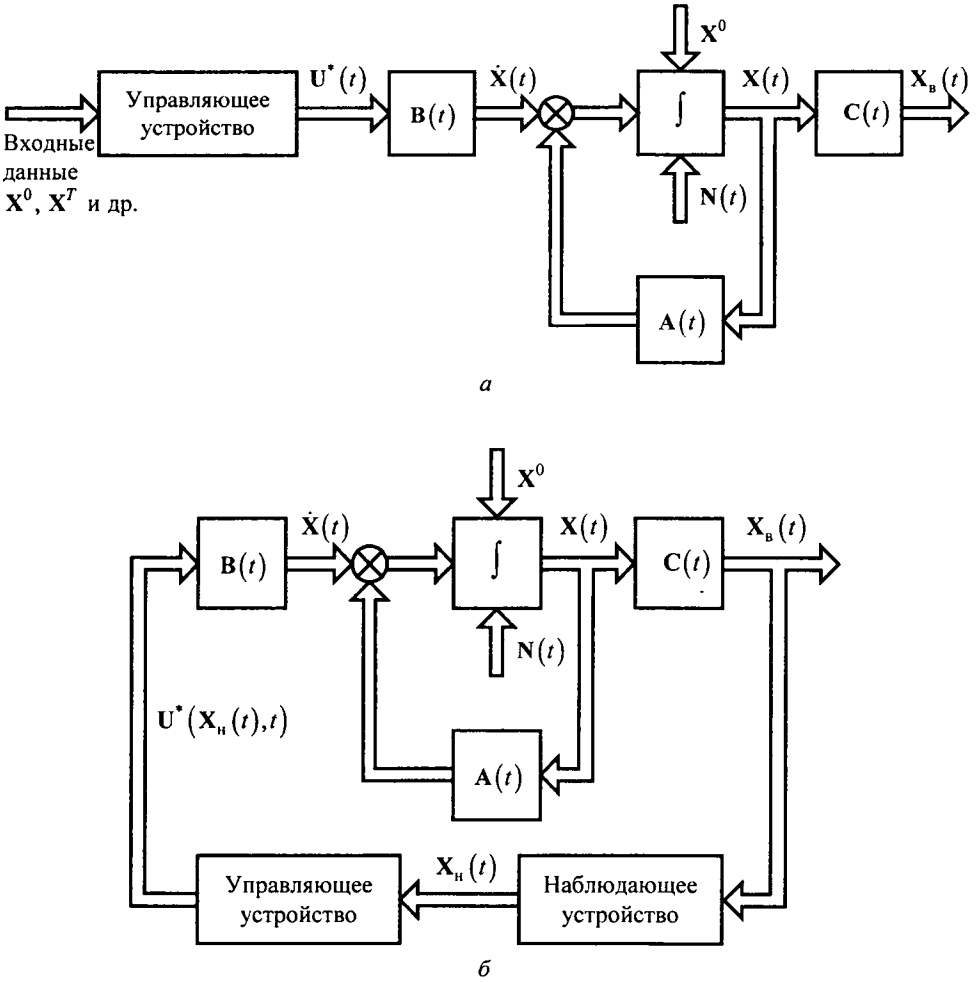


Рис. 5.4. Структурные схемы:
а — разомкнутой системы; *б* — оптимальной системы, работающей по принципу обратной связи

Системы этого класса в большинстве случаев неработоспособны. В самом деле, при создании систем приходится допускать некоторую погрешность, обусловленную, например, ограниченной точностью изготовления их компонент. Динамические характеристики могут меняться со временем из-за старения, изменения температурных условий, атмосферных явлений и т.п. Это приводит к неточности задания динамических характеристик, а последние определяют вектор-функцию $\mathbf{U}^*(t)$.

Кроме того, имеют место внешние возмущения, которые часто не подлежат контролю и не могут быть скомпенсированы.

Для некоторых систем, когда, например, неизвестно конечное состояние (задача о перехвате цели), вообще невозможно построить системы программного управления. Поэтому трудно представить процесс управления без обратной связи, который бы имел сколько-нибудь существенное значение.

Процесс управления с обратной связью (см. рис. 5.4, *б*) наблюдается везде: в живых организмах, в социальных, экономических, хорошо работающих технических системах. Однако синтез систем, работающих по принципу обратной связи, представляет собой чрезвычайно сложную задачу.

Изложим некоторые подходы к ее решению, т.е. рассмотрим задачу *синтеза оптимальных обратных связей*.

Первый подход состоит в том, что для решения поставленной задачи используются методы, позволяющие сразу же рассчитать координатное управление и, таким образом, реализовать управление объектом по принципу обратной связи. К таким методам можно отнести:

- метод динамического программирования;
- методы решения линейно-квадратичных задач;
- метод моментов.

Второй подход основан на использовании понятия *двухэтапной оптимизации* [62].

Ниже будут подробно рассмотрены методы расчета оптимальных программных управлений $\mathbf{U}^*(t)$ и оптимальных программ $\mathbf{X}^*(t)$.

Расчет $\mathbf{U}^*(t)$ и $\mathbf{X}^*(t)$ представляет собой *первый этап* решения задачи синтеза оптимальных систем.

Пусть $\mathbf{X}^*(t)$ — оптимальная программа, $\mathbf{U}^*(t)$ — оптимальное программное управление. Полагая, что эквивалентные случайные возмущения малы, можно предполагать, что $\mathbf{X}^*(t)$ получит некоторое приращение $\delta\mathbf{X}(t)$, тогда реальная фазовая траектория имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*(t) + \delta\mathbf{X}(t). \tag{5.4}$$

Для компенсации $\delta\mathbf{X}(t)$ реальная управляющая вектор-функция $\mathbf{U}(t)$ должна иметь вид [62]

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^*(t) + \delta\mathbf{U}(t). \tag{5.5}$$

Задача расчета $\delta\mathbf{U}(t,\mathbf{X})$ носит название *задачи проектирования оператора обратной связи* и составляет содержание второго этапа.

Таким образом, на втором этапе определяются параметры системы, обеспечивающие максимально возможную точность достижения цели. Эта схема решения проблемы управления носит название *двухэтапной оптимизации*.

Как указано в работе академика Н.Н. Моисеева [62], «схема двухэтапной оптимизации, разделяющая процесс управления на два последовательных этапа — выбор программы и построение механизма реализации этой программы, — является одним из важных эвристических приемов современной теории управления. Он в равной степени необходим и для управления техническими и технологическими, где он возник, и для управления социальными и экономическими системами, где он сделался основой программного метода управления». В [62] приведено обоснование возможности использования идей двухэтапной оптимизации для решения конкретных задач.

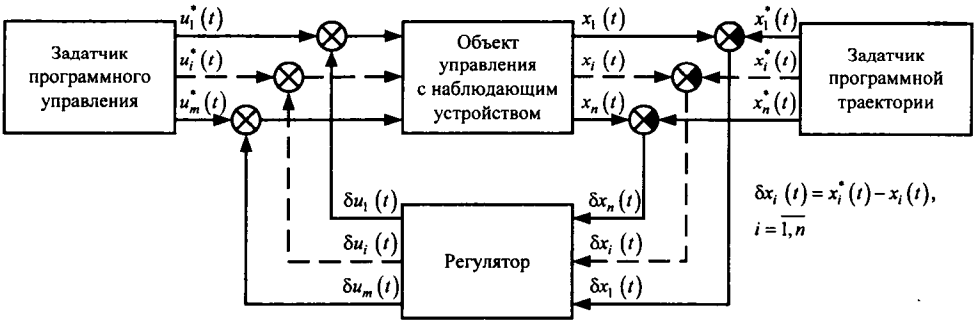


Рис. 5.5. Структурная схема оптимальной системы, работающей по принципу обратной связи

Структурная схема системы, построенной с использованием двухэтапной оптимизации, представлена на рис. 5.5.

5.3. УПРАВЛЯЕМОСТЬ И НАБЛЮДАЕМОСТЬ СИСТЕМ

5.3.1. Управляемость систем

Приводимые ниже положения в основном относятся к классу линейных нестационарных систем (ЛНС), а что касается других классов, то в тексте приводятся соответствующие замечания. Прежде чем строить $\mathbf{U}^*(t)$, *необходимо убедиться, имеет ли решение поставленная задача, т.е. возможен ли в принципе перевод данного объекта, имеющего конкретную математическую модель, из точки* $\mathbf{X}^0$ *в точку* $\mathbf{X}^T$. Другими словами, перед построением оптимального управления $\mathbf{U}^*(t)$ необходимо убедиться, *обладает ли объект свойством управляемости в указанном выше смысле.*

Возможность приведения ЛНС в любое требуемое состояние $\mathbf{X}(t)$ *и к любому требуемому значению выхода* $\mathbf{X}_в(t)$ *с помощью сигнала управления отражается понятиями управляемости по состоянию и по выходу.* В зависимости от степени и характера этой возможности вводят в рассмотрение несколько разновидностей понятия управляемости. В теории стационарных систем наиболее широко используется понятие полной управляемости, которое справедливо и для ЛНС.

Система называется полностью управляемой по состоянию (по выходу), если из начального состояния $\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}^0$, соответствующего любому t_0, она может быть переведена в любое окончательное состояние $\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}^T$ за конечное время $T = t_k - t_0$ *ограниченным* входным сигналом $\mathbf{U}(t)$ $\left(\|\mathbf{U}(t)\| < \infty\right)$. Иначе говоря, существуют такие t_k, $t_0 < t_k < \infty$, что $\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}_k = \mathbf{X}^T$.

У нестационарных систем имеются такие свойства, которые заставляют чаще (чем в стационарном случае) использовать и другие, более тонкие, понятия управляемости, например понятия *полной управляемости на интервале* $[t_0, t_k]$; *абсолютной управляемости на интервале* $[t_0, t_k]$ и т.п., предполагающие у системы наличие свойств, указанных в определении соответственно на заранее заданном интервале

$[t_0, t_k]$ (в определении правый конец этого интервала заранее численно не задан); на любом конечном подынтервале, принадлежащем заданному интервалу $[t_0, t_k]$.

Критерии управляемости для ЛНС существенно отличаются от аналогичных критериев для систем стационарных. Рассмотрим методику их вывода на примере критерия полной управляемости на интервале $[t_0, t_k]$. Выводить этот критерий гораздо удобнее для системы

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{U}(t); & (5.6) \\ \mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{F}(t)\mathbf{Z}(t) & (5.7) \end{cases}$$

— многомерного интегратора, к которому исходная система (5.1) приводится с помощью линейного неособого преобразования, характеризуемого $(n \times n)$-матрицей $\mathbf{T}(t)$:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{X}(t). \qquad (5.8)$$

Действительно, продифференцировав соотношение (5.8), имеем

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{T}(t)\dot{\mathbf{X}}(t),$$

откуда

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{T}^{-1}(t)\dot{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{T}^{-1}(t)\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{X}(t).$$

Подставим полученное выражение $\dot{\mathbf{X}}(t)$ в уравнение объекта управления:

$$\mathbf{T}^{-1}(t)\dot{\mathbf{Z}}(t) - \mathbf{T}^{-1}(t)\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t),$$

тогда, учитывая, что $\mathbf{X}(t) = \mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{Z}(t)$ (см. формулу (5.8)), уравнения объекта приведем к виду

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}(t) = \dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{Z}(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{Z}(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) = \\ \quad = \left[\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^{-1}(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{T}^{-1}(t)\right]\mathbf{Z}(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t); \\ \mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{T}^{-1}(t)\mathbf{Z}(t). \end{cases} \qquad (5.9)$$

Если матрицу $\mathbf{T}(t)$ выбрать так, чтобы выполнялось

$$\dot{\mathbf{T}}(t)\mathbf{T}^{-1}(t) + \mathbf{T}(t)\mathbf{A}(t)\mathbf{T}^{-1}(t) = \mathbf{0}, \qquad (5.10)$$

то из формулы (5.9) получим (5.6), (5.7), где матрицы

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \mathbf{T}(t)\mathbf{B}(t); \\ \mathbf{F}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{T}^{-1}(t). \end{cases} \qquad (5.11)$$

Нетрудно убедиться, что матрица

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{\Phi}(t_0, t), \qquad (5.12)$$

равная переходной матрице состояний системы, удовлетворяет условию (5.10); выполнив в левой части уравнения (5.10) подстановку (5.12), получим

$$\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0,t) + \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0,t) =$$

$$= -\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0,t) + \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0,t) = \mathbf{0},$$

т.е. уравнение (5.10) превратилось в тождество, и выражение (5.12) действительно является решением уравнения (5.10) относительно $\mathbf{T}(t)$. Поэтому согласно (5.11)

$$\begin{cases} \mathbf{D}(t) = \mathbf{\Phi}(t_0, t)\mathbf{B}(t); & (5.13) \\ \mathbf{F}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0, t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t, t_0). & (5.14) \end{cases}$$

Первая форма критерия управляемости ЛНС

Критерий 5.1. *Система* (5.6), *в которой* $\mathbf{D}(t) \in L^2[t_0, t_k]^*$, *полностью управляема по состоянию на интервале* $[t_0, t_k]$ *тогда и только тогда, когда* $(n \times n)$*-матрица* $\mathbf{У}_{X1}(t_0, t_k)$ *— неособая, где*

$$\mathbf{У}_{X1}(t_0, t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{D}(t)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)dt. \tag{5.15}$$

Достаточность этого критерия нетрудно доказать, если положить

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_X, \tag{5.16}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_X$ — неизвестный постоянный n-вектор. Тогда уравнение (5.6) примет вид

$$\frac{d\mathbf{Z}(t)}{dt} = \mathbf{D}(t)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_X,$$

$$d\mathbf{Z}(t) = \mathbf{D}(t)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\varepsilon}_X dt;$$

интегрируя левую и правую части от t_0 до t_k, получим

$$\mathbf{Z}(t_k) - \mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{У}_{X1}(t_0, t_k)\boldsymbol{\varepsilon}_X.$$

Это соотношение превратится в тождество (т.е. система переведется из состояния $\mathbf{Z}(t_0)$ в $\mathbf{Z}(t_k)$ за время $t_k - t_0$ управлением (5.16)), если вектор $\boldsymbol{\varepsilon}_X$ в управлении (5.16) выбрать в виде

$$\boldsymbol{\varepsilon}_X = \mathbf{У}_{X1}^{-1}(t_0, t_k)\left[\mathbf{Z}(t_k) - \mathbf{Z}(t_0)\right]. \tag{5.17}$$

Но из (5.17) следует, *что такой вектор, а следовательно, и такое управление типа* (5.16) *существуют лишь в том случае, если матрица* $\mathbf{У}_{X1}(t_0, t_k)$ *неособая, что и требовалось доказать.*

Несложно показать необходимость сформулированного критерия.

Следствие 5.1. *Система* (5.6) *полностью управляема по состоянию на* $[t_0, t_k]$ *тогда и только тогда, когда строки матрицы* $\mathbf{D}(t)$ *есть линейно независимые функции аргумента t.*

Следствие доказывается на основе рассмотренного критерия методом от противного.

Пусть матрица $\mathbf{У}_{X1}(t_0, t_k)$ — особая, тогда существует такой постоянный ненулевой n-вектор $\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n]^{\mathrm{T}}$, что

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{У}_{X1}(t_0, t_k) = \underbrace{[0 \quad 0 \quad \dots \quad 0]}_{n} = \underset{(1\times n)}{\mathbf{0}}, \tag{5.18}$$

где $\underset{(1\times n)}{\mathbf{0}}$ — нулевая n-строка.

Действительно, в силу линейной зависимости строк $\mathbf{У}_{X1_i} = \left[y_{X1_{i1}} \quad y_{X1_{i2}} \quad \dots \quad y_{X1_{in}}\right]$ матрицы $\mathbf{У}_{X1}$ (так как она особая), согласно определению линейной независимости существует n таких чисел c_i, $i = \overline{1,n}$, что

---

* Запись $\mathbf{D}(t) \in L^2[t_0, t_k]$ означает, что каждый элемент матрицы $\mathbf{D}(t)$ принадлежит к классу функций, интегрируемых с квадратом на интервале $[t_0, t_k]$.

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{У}_{X1_i} = \underset{(1\times n)}{\mathbf{0}}. \tag{5.19}$$

Произведение в левой части формулы (5.18), представляющее собой n-строку

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{У}_{X1} = \left[\sum_{i=1}^{n} c_i y_{X1_{i1}} \quad \sum_{i=1}^{n} c_i y_{X1_{i2}} \quad \cdots \quad \sum_{i=1}^{n} c_i y_{X1_{in}}\right],$$

можно раскрыть в виде

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{У}_{X1} = \begin{bmatrix} c_1 y_{X1_{11}} & c_1 y_{X1_{12}} & \cdots & c_1 y_{X1_{1n}} \\ c_2 y_{X1_{21}} & c_2 y_{X1_{22}} & \cdots & c_2 y_{X1_{2n}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_n y_{X1_{n1}} & c_n y_{X1_{n2}} & \cdots & c_n y_{X1_{nn}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \mathbf{У}_{X1_1} \\ c_2 \mathbf{У}_{X1_2} \\ \vdots \\ c_n \mathbf{У}_{X1_n} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} c_i \mathbf{У}_{X1_i},$$

откуда с учетом формулы (5.19) следует равенство (5.18).

Умножим слева и справа соответственно на $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}$ и $\mathbf{C}$ обе части выражения (5.15); получим

$$\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{У}_{X1}(t_0,t_k)\mathbf{C} = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(t)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}dt.$$

Учитывая формулу (5.18), имеем

$$\mathbf{0} = \int_{t_0}^{t_k} \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\lambda}(t)dt = \int_{t_0}^{t_k} \left[\lambda_1^2(t) + \lambda_2^2(t) + \ldots + \lambda_n^2(t)\right]dt \geq 0, \tag{5.20}$$

где $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t) = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}$ — n-вектор, но тогда равенство в выражении (5.20) может иметь место только в том случае, если

$$\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(t) = \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(t) = \underset{(1\times n)}{\mathbf{0}}. \tag{5.21}$$

Отсюда следует, что строки матрицы $\mathbf{D}(t)$ линейно зависимы (см. формулу (5.19)). Однако формула (5.21) получена из предположения о том, что матрица $\mathbf{У}_{X1}(t_0,t_k)$ особая. Если же она неособая (т.е. если система (5.6), согласно рассмотренному критерию, полностью управляема по состоянию на $[t_0,t_k]$), то такого вектора $\mathbf{C}$, что справедливо соотношение (5.18), а следовательно, и (5.21), не существует. Тогда по определению линейной независимости строки матрицы $\mathbf{D}(t)$ линейно независимы, что и требовалось доказать.

Критерий 5.2. *Система* (5.6), (5.7), *в которой* $\mathbf{F}(t_k)\mathbf{D}(t) \in L^2[t_0,t_k]$, *полностью управляема по выходу на* $[t_0,t_k]$ *тогда и только тогда, когда* $(r\times r)$*-матрица*

$$\mathbf{У}_{Y1}(t_0,t_k) = \int_{t_0}^{t_k} \mathbf{F}(t_k)\mathbf{D}(t)\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(t_k)dt \tag{5.22}$$

неособая.

Достаточность доказывается аналогично тому, как это сделано при доказательстве достаточности критерия (5.6), если положить

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{F}^{\mathrm{T}}(t_k)\boldsymbol{\varepsilon}_Y,$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}_Y$ — постоянный r-вектор.

Поскольку состояния $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{Z}(t)$ (системы (5.6)) связаны неособым преобразованием

$$\mathbf{Z}(t)=\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{X}(t),$$

критерий 5.1 является необходимым и достаточным критерием полной управляемости на интервале $[t_0,t_k]$ по состоянию и для исходной системы, а критерий 5.2 — необходимым и достаточным критерием полной управляемости на интервале $[t_0,t_k]$ по выходу и для исходной системы; нужно только матрицы управляемости $\mathbf{У}_{X1}(t_0,t_k)$ и $\mathbf{У}_{Y1}(t_0,t_k)$ выразить через параметры исходных уравнений. Сделать это нетрудно, используя соотношения (5.16), (5.17).

Критерий 5.3. *Система, в которой* $\mathbf{\Phi}(t_0,t_k)\mathbf{B}(t)\in L^2[t_0,t_k]$, *полностью управляема по состоянию на* $[t_0,t_k]$ *тогда и только тогда, когда* $(r\times r)$*-матрица*

$$\mathbf{У}_{X1}(t_0,t_k)=\int_{t_0}^{t_k}\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)dt \tag{5.23}$$

неособая.

Критерий 5.4. *Система, в которой* $\mathbf{K}(t_k,t)\in L^2[t_0,t_k]$, *полностью управляема по состоянию на* $[t_0,t_k]$ *тогда и только тогда, когда* $(n\times n)$*-матрица*

$$\mathbf{У}_{Y1}(t_0,t_k)=\int_{t_0}^{t_k}\mathbf{K}(t_k,t)\mathbf{K}^{\mathrm{T}}(t_k,t)dt \tag{5.24}$$

неособая.

Согласно соотношениям (5.16), (5.17) из формулы (5.22) получим

$$\begin{aligned}\mathbf{У}_{Y1}(t_0,t_k)=\int_{t_0}^{t_k}&\mathbf{C}(t_k)\mathbf{\Phi}(t_k,t_0)\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\times\\ &\times\left[\mathbf{\Phi}(t_k,t_0)\mathbf{\Phi}(t_0,t)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t_k)dt.\end{aligned} \tag{5.25}$$

Учитывая, что $\mathbf{\Phi}(t_k,t_0)\mathbf{\Phi}(t_0,t)=\mathbf{\Phi}(t_k,t)$, вместо матрицы (5.25) получим матрицу (5.24).

Вторая форма критерия управляемости ЛНС

В необходимых и достаточных критериях полной управляемости ЛНС на интервале $[t_0,t_k]$ по состоянию и по выходу (см. критерии 5.3, 5.4) используется матрица перехода системы, которая, как правило, неизвестна. Для многих ЛНС на основе этих критериев могут быть выведены алгебраические (использующие непосредственно матрицы уравнений состояния и выхода системы) критерии управляемости [63]; правда, получаются они чаще уже в виде лишь достаточных критериев.

Сформулируем в качестве примера достаточные алгебраические критерии полной управляемости на $[t_0,t_k]$ [63].

Критерий 5.5. *Пусть в системе* $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ — *матрицы, дифференцируемые соответственно* $(n-1)$, $(n-2)$ *раз почти всюду на интервале* $[t_0,t_k]$. *Для полной управляемости по состоянию на интервале* $[t_0,t_k]$ *такой системы достаточно, чтобы* $(n\times nm)$*-блочная матрица управляемости*

$$\mathbf{У}_{X\,\mathrm{II}}(t)=\left[\mathbf{B}(t)\vdots\Delta\{\mathbf{B}(t)\}\vdots\ldots\vdots\Delta^{n-1}\{\mathbf{B}(t)\}\right] \tag{5.26}$$

имела ранг n почти всюду на некотором конечном подынтервале $[t_1,t_2]$ *интервала* $[t_0,t_k]$. *Здесь* Δ *— оператор*:

$$\Delta=-\mathbf{A}(t)+\frac{d}{dt}. \tag{5.27}$$

Критерий 5.6. *Пусть в системе* $\mathbf{A}(t),\mathbf{B}(t)$ *— матрицы, дифференцируемые соответственно* $(n-2),(n-1)$ *раз почти всюду на интервале* $[t_0,t_k]$. *Для полной управляемости по выходу на интервале* $[t_0,t_k]$ *такой системы достаточно, чтобы* $(r\times nm)$*-блочная матрица управляемости*

$$\begin{aligned}&\mathbf{У}_{Y\,\mathrm{II}}=\mathbf{C}(t_k)\left[\mathbf{B}(t)\vdots\Delta\{\mathbf{B}(t)\}\vdots\ldots\vdots\Delta^{n-1}\{\mathbf{B}(t)\}\right]=\mathbf{C}(t_k)\,\mathbf{У}_{X\,\mathrm{II}}(t),\\&\Delta=-\mathbf{A}(t)+\frac{d}{dt},\end{aligned} \tag{5.28}$$

имела ранг r почти всюду на некотором конечном подынтервале $[t_1,t_2]$ *интервала* $[t_0,t_k]$.

Критерии 5.5, 5.6 *становятся необходимыми и достаточными критериями абсолютной управляемости соответственно по состоянию и по выходу на интервале* $[t_0,t_k]$ *системы, если требования, предъявляемые этими критериями, выполняются почти всюду на интервале* $[t_0,t_k]$ [63].

Пример 5.1. Пусть система имеет конкретный вид

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^{-at}\\ e^{-bt}\end{bmatrix}y(t),\ a\neq b. \tag{5.29}$$

Поскольку скалярный вход воздействует на каждую координату вектора состояния независимо (так как матрица системы A диагональная), то интуитивно можно предположить абсолютную управляемость системы по состоянию (этот факт и имеет место в случае стационарных систем с диагональной матрицей A), однако в данном случае интуиция приводит к неверным результатам. Действительно, матрица управляемости (см. формулу (5.26))

$$\mathbf{У}_{X\,\mathrm{II}}(t)=\left[\begin{matrix}e^{-at}\vdots\\ e^{-bt}\vdots\end{matrix}\ \begin{bmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-at}\\ e^{-bt}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-ae^{-at}\\ -be^{-bt}\end{bmatrix}\right]=\begin{bmatrix}e^{-at} & 0\\ e^{-bt} & 0\end{bmatrix}$$

имеет ранг $1\neq(n=2)$, т.е. данная ЛНС с диагональной матрицей не оказалась абсолютно управляемой.

Этот противоречащий интуиции результат можно разъяснить следующим образом. Уравнению (5.29) соответствуют два апериодических звена с переменным коэффициентом передачи, работающие от общего входа (рис. 5.6). ИПФ апериодического стационарного звена

$$k(t,\tau)=e^{-a(t-\tau)}1[t-\tau]$$

можно представить в виде

$$k(t,\tau)=e^{-at}1[t-\tau]e^{a\tau},$$

что соответствует структурной схеме (рис. 5.7), в связи с чем исходная система эквивалентна системе (рис. 5.8).

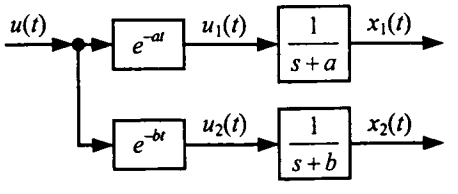


Рис. 5.6. Структурная схема системы (5.29)

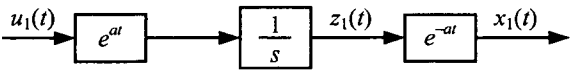


Рис. 5.7. Структурный элемент схемы

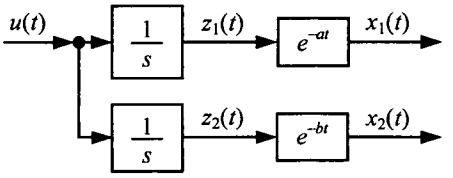


Рис. 5.8. Структурная схема системы

Отсюда следует, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ при любом $u(t)$ независимо изменяться не могут, так как

$$x_1(t) = z_1(t)e^{-at};\ x_2(t) = z_2(t)e^{-bt}$$

и, поскольку $z_1(t) = z_2(t)$,

$$x_2(t) = x_1(t)e^{(a-b)t}.$$

Это соотношение на плоскости $x_1 0 x_2$ определяет линию, которую точка, отображающая состояние системы, не может покинуть при любом $u(t)$, следовательно, система (5.29) не может быть переведена управляющим сигналом из заданного состояния в любое требуемое, если оно не принадлежит указанной линии.

Для класса стационарных систем имеются более простые критерии, использующие лишь исходную информацию о матрицах **A** и **B**. Критерий формулируется так [63]: *для управляемости стационарной системы n-го порядка*

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{AX} + \mathbf{BU} \tag{5.30}$$

необходимо и достаточно, чтобы ранг $(n \times nm)$*-матрицы управляемости*

$$\mathbf{S}_c = \left[\mathbf{B}|\mathbf{AB}|\ldots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \tag{5.31}$$

был равен n, т.е. $\operatorname{rank}\mathbf{S}_c = n$.

В самом деле, для стационарной системы справедлива формула

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{BU}(\tau)d\tau. \tag{5.32}$$

Пользуясь теоремой Кэли–Гамильтона, $e^{\mathbf{A}t}$ можно выразить в виде конечного ряда

$$e^{\mathbf{A}t} = C_0\mathbf{I} + C_1\mathbf{A}t + C_2(\mathbf{A}t)^2 + \ldots + C_{n-1}(\mathbf{A}t)^{n-1}. \tag{5.33}$$

Подставив (5.33) в (5.32), запишем

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0 + \int_0^t \Big[C_0\mathbf{B} + C_1(t-\tau)\mathbf{AB} + C_2(t-\tau)^2\mathbf{A}^2\mathbf{B} + \ldots + C_{n-1}(t-\tau)^{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\Big]\mathbf{U}(\tau)d\tau. \tag{5.34}$$

Последнюю зависимость можно представить так:

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0 + \int_0^t \left[\mathbf{B}|\mathbf{AB}|\ldots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]\begin{bmatrix} C_0\mathbf{U}(\tau) \\ C_1(t-\tau)\mathbf{U}(\tau) \\ \vdots \\ C_{n-1}(t-\tau)^{n-1}\mathbf{U}(\tau) \end{bmatrix} d\tau.$$

Как указывалось выше, содержание понятия управляемости означает, что *вектор управления* $\mathbf{U}(\tau)$ *соответствующим образом воздействует на все компоненты вектора состояния* $\mathbf{X}(t)$. *А это будет иметь место тогда и только тогда, когда подынтегральное выражение в* (5.33) *обеспечивает такое влияние, т.е. когда ранг матрицы* $\left[\mathbf{B}|\mathbf{AB}|\ldots|\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]$ *равен n.* Условие управляемости не по состоянию, а по выходу можно получить, если обе части уравнения (5.33) умножить на матрицу $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{X}_{\text{в}}(t)=\mathbf{C}\mathbf{X}(t)=\mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0+\int_0^t\left[C_0\mathbf{C}\mathbf{B}+C_1(t-\tau)\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}+\ldots+\right.$$
$$\left.+C_{n-1}(t-\tau)^{n-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right]\mathbf{U}(\tau)d\tau. \qquad (5.35)$$

С учетом таких же соображений, которые были приведены выше, можно показать следующее: *выход* $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$ *будет полностью управляемым тогда и только тогда, когда ранг матрицы управляемости по выходу*

$$\mathbf{S}_{\text{b}}=\left[\mathbf{C}\mathbf{B}|\mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{B}|\ldots|\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\mathbf{B}\right] \text{ равен } p.$$

Пример 5.2. Имеем объект

$$\frac{dx_1}{dt}=x_2;\ \frac{dx_2}{dt}=-x_1+u;\ \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u.$$

Тогда

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{bmatrix};\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix};\ \mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}.$$

Найдем ранг матрицы

$$\mathbf{S}_{\text{c}}=\left[\mathbf{B}|\mathbf{AB}\right]=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

Отсюда делаем вывод: $\operatorname{rank}\mathbf{S}_{\text{c}}=2$. Объект полностью управляем.

Пример 5.3. Уравнения объекта имеют вид

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\ u_2\end{bmatrix}.$$

Найдем произведение $\mathbf{AB}$:

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 2\\ -1 & 5\end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\mathbf{S}_{\text{c}}=\left[\mathbf{B}|\mathbf{AB}\right]=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & -1 & 5\end{bmatrix},$$

т.е. $\operatorname{rank}\mathbf{S}_{\text{c}}=2$. Объект полностью управляем.

Кратко остановимся на свойствах *управляемости, стабилизируемости и нормализуемости нелинейных объектов.* Напомним, что *свойство стабилизируемости линейных объектов заключается в том, что с помощью регулятора в цепи обратной связи все неустойчивые моды могут быть сделаны устойчивыми.* Очевидно, *устойчивый объект стабилизируется тривиальным образом, а всякий управляемый объект стабилизируем. Нормализуемость же представляет собой наиболее сильную форму управляемости* (каждая компонента вектор-функции $\mathbf{U}=\left[u_1(t)\ \ u_2(t)\ \ \ldots\ \ u_m(t)\right]^{\mathrm{T}}$ в отдельности обеспечивает управляемость объекта). *Для линейных объектов получены критерии управляемости, стабилизируемости и нормализуемости.*

Строгие же условия управляемости, стабилизируемости и т.д. найдены лишь для некоторых классов нелинейных объектов. Линеаризация нелинейных уравнений

объекта во многих случаях позволяет установить наличие или отсутствие указанных выше свойств [81].

Пример 5.4 [81]. Рассмотрим нелинейный объект, поведение которого описывается дифференциальными уравнениями вида

$$dx_1/dt = -x_1 - Da_1 x_1^2 + u_1, \tag{5.36}$$

$$dx_2/dt = Da_1 x_1^2 - x_2 - Da_3 (x_2)^{1/2} + u_2. \tag{5.37}$$

Проведем линеаризацию этих уравнений в окрестности установившегося состояния x_{1s}, x_{2s}, задаваемого уравнениями $u_{1s} = 1$, $u_{2s} = 0$. Обозначим $\hat{x}_i = x_i - x_{is}$, $\hat{u}_i = u_i - u_{is}$ $(i = 1,2)$. Разложим уравнения (5.36), (5.37) в ряд Тейлора, пренебрегая членами выше первого порядка. Результат с учетом введенных обозначений запишется в форме:

$$d\hat{x}_1/dt = -(1 + 2Da_1 x_{1s})\hat{x}_1 + \hat{u}_1, \tag{5.38}$$

$$d\hat{x}_2/dt = (2Da_1 x_{1s})\hat{x}_1 - \left[1 + 1/2(Da_3/x_{2s})^{1/2}\right]\hat{x}_2 + \hat{u}_2, \tag{5.39}$$

где x_{1s}, x_{2s} — решения уравнений, определяющих установившееся состояние:

$$\begin{aligned} 0 &= -x_{1s} - Da_1 x_{1s}^2 + 1, \\ 0 &= Da_1 x_{1s}^2 - x_{2s} - Da_3 (x_{2s})^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

Или, в векторно-матричной форме, $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(1 + 2Da_1 x_{1s}) & 0 \\ 2Da_1 x_{1s} & -\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{Da_3}{(x_{2s})^{1/2}}\right) \end{bmatrix}, \tag{5.41}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.42}$$

Критерий управляемости состоит в том, что ранг матрицы управляемости должен быть равен 2. Имеем

$$\mathbf{L}_c = [\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \vdots -(1 + 2Da_1 x_{1s}) & 0 \\ 0 & 1 \vdots 2Da_1 x_{1s} & -\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{Da_3}{(x_{2s})^{1/2}}\right) \end{bmatrix}.$$

Очевидно, rank $\mathbf{L}_c = 2$, из чего следует, что нелинейный объект будет управляемым в любом установившемся состоянии.

Нелинейный же объект, описываемый системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - Da_1 x_1^2 + d_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = Da_1 x_1^2 - x_2 - Da_3 (x_2)^{1/2} + u_1, \end{cases}$$

не является управляемым, поскольку ранг матрицы управляемости

$$\mathbf{L}_c = [\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \vdots & 0 \\ 1 & 1 \vdots & -\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{Da}{(x_{2s})^{1/2}}\right) \end{bmatrix}$$

равен единице.

5.3.2. Наблюдаемость систем

При синтезе систем, работающих по принципу обратной связи, в каждый момент времени t необходимо знать вектор состояния $\mathbf{X}(t)$. Некоторые из компонент вектора $\mathbf{X}(t)$ могут быть получены с помощью различного рода датчиков, измерительных устройств. В общем же случае можно наблюдать лишь вектор-функцию $\mathbf{X}_в(t)$ — выход системы. Две вектор-функции $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{X}_в(t)$ связаны между собой с помощью матрицы $\mathbf{C}$:

$$\mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t). \tag{5.43}$$

Размерность $\mathbf{X}(t)$, как правило, выше размерности $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$.

В связи со сказанным выше в теории управления ставится задача: *построить алгоритм расчета вектора* $\mathbf{X}(t)$, *если на некотором промежутке известен вектор* $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$ *и математическая модель системы.*

Задача нахождения вектора $\mathbf{X}(t)$ *состояния системы или отдельных компонент указанного вектора по известным на некотором промежутке* $[t_0, t_1]$ *вектор-функциям* $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$ *и* $\mathbf{U}(t)$, *а также математической модели системы носит название задачи наблюдаемости линейной системы.*

Если задача наблюдаемости для линейной системы имеет решение, то система называется полностью или частично наблюдаемой в зависимости от того, все или часть компонент вектора $\mathbf{X}(t)$ *удается определить.*

Для линейной системы

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t); \tag{5.44}$$

$$\mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) \tag{5.45}$$

пара матриц $\mathbf{A}(t)$ *и* $\mathbf{C}(t)$ *называется наблюдаемой, если можно решить задачу о наблюдаемости для системы* (5.44) *по известному на некотором промежутке вектору выхода* $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$, *определяемого по формуле* (5.45).

Для класса стационарных линейных систем построены конструктивные критерии, позволяющие установить факт наблюдаемости системы. Если нет специальных оговорок, то речь идет о так называемых свободных системах, т.е. о наблюдаемости свободных колебаний, предполагая, что входное воздействие $\mathbf{U}(t) \equiv \mathbf{0}$.

Справедлив следующий критерий: *для линейных систем вида*

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t);$$

$$\mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t);$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0$$

с постоянными матрицами $\mathbf{A}$ *и* $\mathbf{C}$ *для полной наблюдаемости необходимо и достаточно, чтобы ранг* $(n \times np)$*-матрицы наблюдаемости* $\mathbf{L}_{\text{о}}$ *был равен* n:

$$\mathbf{L}_{\text{о}} = \left[\mathbf{C}^{\text{T}} \middle| \mathbf{A}^{\text{T}}\mathbf{C}^{\text{T}} \middle| \left(\mathbf{A}^{\text{T}}\right)^2 \mathbf{C}^{\text{T}} \middle| \ldots \middle| \left(\mathbf{A}^{\text{T}}\right)^{n-1} \mathbf{C}^{\text{T}}\right].$$

Покажем справедливость приведенного критерия. Имеем для свободных колебаний вектора состояния

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0 = \left(C_0\mathbf{I} + C_1 t\mathbf{A} + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{A}^{n-1}\right)\mathbf{X}^0.$$

Выходной сигнал определяется формулой

$$\mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t) = \left(C_0\mathbf{C} + C_1 t\mathbf{C}\mathbf{A} + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{n-1}\right)\mathbf{X}^0. \tag{5.46}$$

Система наблюдаема, если все координаты вектора состояния в момент $t = 0$, *т.е.* $\mathbf{X}^0$, *можно определить по информации о выходе* $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$ *на конечном интервале времени.* Если найден вектор $\mathbf{X}^0$, то известна и вся исходящая из него траектория.

Другими словами, если получена зависимость, определяющая $\mathbf{X}^0$ (начальное состояние), то по этой информации можно построить вектор состояния

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0.$$

Для решения задачи необходимо разрешить уравнение (5.46) относительно $\mathbf{X}^0$ (эта процедура носит название *псевдоинверсии*).

Умножая обе части (5.46) на $\exp\left(\mathbf{A}^t\right)^{\mathrm{T}}$ и интегрируя от 0 до T, находим

$$\mathbf{X}^0 = \left[\int_0^T \left(C_0\mathbf{C} + C_1 t\mathbf{CA} + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{CA}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} \times \right.$$

$$\left. \times\left(C_0\mathbf{C} + C_1 t\mathbf{CA} + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{CA}^{n-1}\right)dt\right]^{-1} \times$$

$$\times \int_0^T \left(C_0\mathbf{C} + C_1 t\mathbf{CA} + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{CA}^{n-1}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{X}_{\text{в}}(t)\,dt.$$

Введем в рассмотрение матрицу $\mathbf{M}$:

$$\mathbf{M} = \int_0^T \left(C_0\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + C_1 t\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}\left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\right) \times$$

$$\times\left(C_0\mathbf{C} + C_1 t\mathbf{CA} + \ldots + C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{CA}^{n-1}\right)dt.$$

Представим матрицу $\mathbf{M}$ в виде

$$\mathbf{M} = \int_0^T \left[\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \left| \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \right| \ldots \left| \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \right] \times \right.$$

$$\left. \times \begin{bmatrix} C_0\mathbf{I} \\ C_1 t\,\mathbf{I} \\ \vdots \\ C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{I} \end{bmatrix} \left[C_0\mathbf{I} \left| C_1 t\,\mathbf{I} \right| \ldots \left| C_{n-1}t^{n-1}\mathbf{I} \right.\right] \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix} dt. \right. \tag{5.47}$$

В (5.47) $\mathbf{I}$ — единичная $(p \times p)$-матрица.

Перепишем (5.47) в форме

$$\mathbf{M} = \left[\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \left| \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \right| \ldots \left| \left(\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \right.\right] \int_0^T \tilde{\mathbf{T}}\,dt \begin{bmatrix} \mathbf{C} \\ \mathbf{CA} \\ \vdots \\ \mathbf{CA}^{n-1} \end{bmatrix}.$$

Блочная матрица $\tilde{\mathbf{T}}$ $(np \times np)$ состоит из диагональных $(p \times p)$-блоков с элементами $\left(C_k C_j t^k t^j\right)$; $k, j = \overline{0, n-1}$.

Потребуем, чтобы матрица $\mathbf{M}$ была невырожденной. Воспользовавшись известными фактами из теории матриц, можно показать справедливость следующего утверждения: *для того, чтобы выполнялось равенство* $\operatorname{rank}\mathbf{M} = n$, *необходимо и достаточно, чтобы* $\operatorname{rank}\mathbf{L}_{\text{o}} = n$.

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\mathbf{Z} = \mathbf{D}(t)\mathbf{Z}; & (5.48) \\ \mathbf{U}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{Z}(t);\ \mathbf{Z}(0) = \mathbf{Z}^0. & (5.49) \end{cases}$$

Можно показать [81], что *для любой задачи управления можно построить такую задачу наблюдения, что решение последней будет являться и решением задачи управления, и, наоборот, для любой задачи наблюдения можно построить соответствующую задачу управления, причем решение последней будет решать первую задачу.*

Приведенное положение составляет содержание *принципа двойственности.* В соответствии с принципом двойственности *вопросы наблюдаемости для наблюдаемой системы превращаются в вопросы управляемости для двойственной ей управляемой системы.* Приведем уравнение управляемой системы

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}. \qquad (5.50)$$

Пусть

$$\mathbf{D}(t) = -\mathbf{A}(t);\ \mathbf{C}(t) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t). \qquad (5.51)$$

Системы (5.48), (5.49) и (5.50) называются *сопряженными*, если выполнены условия (5.51).

Для разрешимости задачи наблюдения системы (5.48) *необходимо и достаточно, чтобы была разрешима двойственная ей задача управления, т.е. чтобы система*

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = -\mathbf{D}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t) \qquad (5.52)$$

была вполне управляемой. Воспользовавшись критерием (5.31), получим для случая стационарной системы: *система* (5.48) и (5.49) *является полностью наблюдаемой в том и только том случае, если выполнено условие*

$$\operatorname{rank}\left[\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \middle| \mathbf{D}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}^{\mathrm{T}} \middle| \ldots \middle| \left(\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\right)^{n-1}\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\right] = n,$$

где n — порядок наблюдаемой системы.

Понятие наблюдаемости для нестационарных систем характеризует возможность по выходу системы судить о ее состоянии. Как и в управляемости, *существует несколько разновидностей понятия наблюдаемости.*

Система называется полностью наблюдаемой на интервале $[t_0, t_k]$, *если при заданных* t_0 *и* t_k *начальное состояние* $\mathbf{X}(t_0)$ *свободной системы можно определить по известному на* $[t_0, t_k]$ *выходу* $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$, *когда наступит момент* t_k.

Критерий 5.7 (первая форма критерия наблюдаемости ЛНС). *Система полностью наблюдаема на интервале* $[t_0, t_k]$ *тогда и только тогда, когда столбцы матрицы*

$$\mathbf{H}(t, t_0) = \mathbf{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)$$

линейно независимы на интервале $[t_0, t_k]$.

Доказательство достаточности. Из уравнения выхода системы с учетом приведенных выше формул при $\mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{0}$ имеем

$$\underset{(r\times 1)}{\mathbf{U}(t)} = \underset{(r\times n)}{\mathbf{C}(t)}\underset{(n\times n)}{\boldsymbol{\Phi}(t, t_0)}\underset{(n\times 1)}{\mathbf{X}(t_0)} = \underset{(r\times n)}{\mathbf{H}(t, t_0)}\underset{(n\times 1)}{\mathbf{X}(t_0)} \qquad (5.53)$$

(снизу в скобках указаны размерности соответствующих матриц), откуда вектор $\mathbf{X}(t_0)$ не может быть определен в силу того, что выражение (5.53) представляет собой систему из r уравнений с n неизвестными, где $r < n$.

Умножив левую и правую части (5.53) слева на $\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)}_{(n\times r)}$:

$$\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)}_{(n\times r)}\underbrace{\mathbf{X}(t)}_{(r\times 1)}=\underbrace{\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)}_{(n\times r)}\underbrace{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)}_{(r\times n)}\underbrace{\mathbf{X}(t_0)}_{(n\times 1)}, \tag{5.54}$$

получим систему из n уравнений, но вектор $\mathbf{X}(t)$ из нее все-таки не может быть найден, так как линейно независимых уравнений в ней лишь r (линейная безынерционная операция, описываемая матрицей $\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)$, может дать лишь линейную комбинацию исходных соотношений).

Недостающая информация может быть найдена, если использовать значения выхода, полученные и в другие моменты времени, например с помощью суммирования членов типа (5.54) при различных t_i, включающих значения выхода в эти моменты времени:

$$\mathbf{X}_{\text{в}}(t_i)=\mathbf{X}_{\text{в}}(t_0+i\Delta t),\ i=\overline{0,N-1};$$

$$N\Delta t=t_k-t_0$$

(Δt — интервал, на котором производится наблюдение за выходом).

В случае непрерывного наблюдения сумма примет вид интегралов:

$$\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{X}(t)dt=\left[\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)dt\right]\mathbf{X}(t_0). \tag{5.55}$$

Свидетельством того, что в сформированном таким образом выражении содержится достаточное для определения $\mathbf{X}(t_0)$ количество информации, явится тот факт, что квадратная $(n\times n)$-матрица

$$\mathbf{A}_{\text{I}}(t_0,t_k)=\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)dt$$

неособая, так как тогда из выражения (5.55)

$$\mathbf{X}_0(t)=\mathbf{A}_{\text{I}}^{-1}(t_0,t_k)\int_{t_0}^{t_k}\boldsymbol{\Phi}^{\mathrm{T}}(t,t_0)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{X}_{\text{в}}(t)dt.$$

Но если матрица $\mathbf{A}_{\text{I}}(t_0,t_k)$ неособая, то матрица имеет линейно независимые строки, а матрица $\mathbf{C}(t)\boldsymbol{\Phi}(t,t_0)$ — линейно независимые столбцы, что и требовалось доказать.

Доказательство необходимости критерия 5.7 приведено в [63].

Сравнивая содержание следствия и только что доказанного критерия, можно заметить очень важное свойство ЛНС.

Свойство ЛНС. *Система полностью наблюдаема на интервале* $[t_0,t_k]$ *тогда и только тогда, когда сопряженная система полностью управляема по состоянию на* $[t_0,t_k]$.

Действительно, согласно следствию 5.1 и формуле (5.13), для полной управляемости по состоянию сопряженной системы необходимо и достаточно линейной независимости строк матрицы

$$\boldsymbol{\Phi}_c(t_{c_0},t_c)\mathbf{B}_c(t_c).$$

Но в соответствии с полученными выше результатами,

$$\mathbf{B}_c(t_c)=\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t_c);\ \mathbf{\Phi}_c(t_{c_0},t_c)=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_c,t_{c_0}),$$

поэтому линейная независимость строк матрицы

$$\mathbf{\Phi}_c(t_{c_0},t_c)\mathbf{B}_c(t_c)=\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_c,t_{c_0})\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t_c)=\left[\mathbf{C}(t_c)\mathbf{\Phi}(t_c,t_{c_0})\right]^{\mathrm{T}}$$

означает линейную независимость столбцов матрицы $\mathbf{C}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)$, что совпадает с требованиями критерия 5.7 полной наблюдаемости исходной системы на $[t_0,t_k]$.

Это свойство ЛНС отражает, как и для стационарных систем, так называемую *дуальную связь* (дуальность) *между наблюдаемостью и управляемостью по состоянию, согласно которой, применяя известные уже алгебраические критерии управляемости к сопряженной системе, нетрудно получить вторую форму критерия наблюдаемости.*

Критерий 5.8 (вторая форма критерия наблюдаемости ЛНС). *Система, где* $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ *— матрицы, дифференцируемые соответственно* $(n-2),(n-1)$ *раз на интервале* $[t_0,t_k]$, *абсолютно наблюдаема на интервале* $[t_0,t_k]$ *тогда и только тогда, когда* $(n\times nr)$ *составная матрица наблюдаемости*

$$\mathbf{A}_{\mathrm{II}}(t)=\left[\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\vdots\Delta\left\{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\right\}\vdots\ldots\vdots\Delta^{n-1}\left\{\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\right\}\right],$$

где $\Delta=\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)+d/dt$, *имеет ранг n почти всюду на интервале* $[t_0,t_k]$.

В определении предполагается, что систему начинают исследовать в момент $\xi=t_0$, т.е. понятие наблюдаемости связывается с возможностью определения состояния по будущим значениям сигнала. Калман поставил задачу по-другому, более естественно — *определять состояние по прошлым значениям выхода, связав возможность ее решения с понятием идентифицируемости, или восстанавливаемости.* Определение восстанавливаемости имеет вид определения полностью наблюдаемой системы, в котором последняя фраза «...когда момент t_k наступит» заменена на фразу «...если момент t_k уже наступил» (т.е. исследование восстанавливаемости системы начато при $\xi=t_k$).

Пусть исследование системы начато при $\xi=t_0$, и оказалось, что она наблюдаема; ясно, что отсюда не следует ее восстанавливаемость, так как для оценки восстанавливаемости требуется располагать выходом системы при $\xi<t_0$, а факт наблюдаемости информации о ее выходе для этих моментов не содержит. *Так как матрицы стационарной системы неизменны во времени, ее наблюдаемость означает и ее восстанавливаемость, и наоборот.*

Развивая понятие инверсной системы

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathbf{X}_{\mathrm{и}}(t_{\mathrm{и}})}{dt_{\mathrm{и}}}=\mathbf{A}_{\mathrm{и}}(t_{\mathrm{и}})\mathbf{X}_{\mathrm{и}}(t_{\mathrm{и}})+\mathbf{B}_{\mathrm{и}}(t_{\mathrm{и}})\mathbf{U}(t_{\mathrm{и}}),\\ \mathbf{X}_{\mathrm{и}}(t_{\mathrm{и}})=\mathbf{C}_{\mathrm{и}}(t_{\mathrm{и}})\mathbf{X}_{\mathrm{и}}(t_{\mathrm{и}}),\\ t_{\mathrm{и}}=-t,\end{cases}\qquad(5.56)$$

можно заметить, что инверсная система (5.56) в будущем (начиная с момента $t_{\mathrm{и}}=t_{\mathrm{и}k}=-t_k$) принимает значения, равные прошлым значениям исходной системы,

а в прошлом — будущие (рис. 5.9), поэтому: *если исходная система полностью наблюдаема на* $[t_0, t_k]$, *то инверсная система* (5.56) *полностью восстанавливаема на* $[t_0, t_k]$; *верно и обратное утверждение.*

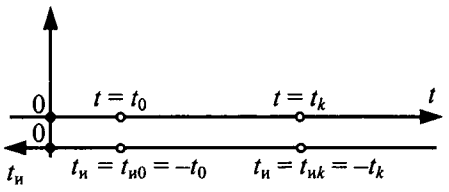


Рис. 5.9. К пояснению работы инверсной системы

Экспериментальный способ анализа наблюдаемости ЛНС

Поскольку исследование наблюдаемости по приведенным критериям связано с необходимостью определять ранг матрицы наблюдаемости (а эта операция в реальных условиях неконструктивна), то в практических работах все чаще применяется довольно оригинальное конструктивное решение этого вопроса. Правда, весьма громоздкое: необходимо работать со сложной моделью, для реализации которой дополнительно требуются два источника нормальных векторных гауссовых белых шумов $\mathbf{q}(t)$ и $\mathbf{r}(t)$ размерностью соответственно $(n\times 1)$ и $(r\times 1)$ с нулевыми средними значениями и известными матрицами их интенсивностей $\underset{(n\times n)}{\mathbf{Q}(t)}$ и $\underset{(r\times r)}{\mathbf{R}(t)}$.

Экспериментальный способ состоит в следующем. Поставим в соответствие исходной системе новую стохастическую модель

$$\begin{cases} \dfrac{d\mathbf{X}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{q}(t), \\ \mathbf{Z}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{r}(t), \end{cases} \tag{5.57}$$

для которой рассчитаем сходящийся фильтр Калмана:

$$\begin{cases} \dfrac{d\hat{\mathbf{X}}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\hat{\mathbf{X}}(t) + \mathbf{K}(t)\left[\mathbf{Z}(t) - \mathbf{C}(t)\hat{\mathbf{X}}(t)\right]; & (5.58) \\ \mathbf{K}(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{R}^{-1}(t); & (5.59) \\ \dfrac{d\mathbf{P}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{C}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{C}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t); & (5.60) \\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0, & (5.61) \end{cases}$$

где $\hat{\mathbf{X}}(t)$ — оптимальная по Калману оценка вектора состояния системы (5.57); $\mathbf{K}(t)$ — матрица коэффициентов оптимального фильтра Калмана, вычисляемая по формулам (5.59), (5.60), (5.61); $\mathbf{P}_0 = \{P_{ij0}\}$, $i, j = \overline{1,n}$, — заданное исходное значение дисперсионной матрицы (матрицы ковариаций); $\mathbf{P}(t)$ — ошибки оценивания $\tilde{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)$:

$$\mathbf{P}(t) = \{P_{ij}(t)\}_{i,j=\overline{1,n}} = M\left[\tilde{\mathbf{X}}(t)\tilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}(t)\right], \tag{5.62}$$

здесь M — символ операции математического ожидания.

Как видно из выражения (5.62), *диагональные элементы матрицы* $\mathbf{P}(t)$ *представляют собой дисперсии ошибок оценивания фильтром соответствующих координат вектора состояния. Если в процессе работы фильтра окажется, что в установившемся режиме i-й диагональный элемент* $P_{ii}(\infty)$ *уменьшился в сравнении с его исходным значением* $P_{ii}(0)$ *на 50% и более, то система* (5.57) *и исходная система хорошо наблюдаемы по i-й координате, так как из теории оптимальной фильтрации известно, что фильтр Калмана работоспособен только при наличии свойства наблюдаемости системы, для которой он строится.* Обеспечить сходимость процедуры (5.58)–(5.61) в данном случае достаточно просто ввиду того, что все ее параметры известны точно.

Выше были введены понятия управляемости и наблюдаемости. В [46] рассмотрены вопросы декомпозиции систем; показано, *что многомерная система может быть декомпозирована на четыре подсистемы: управляемую и ненаблюдаемую* S_1, *управляемую и наблюдаемую* S_2, *неуправляемую и ненаблюдаемую* S_3, *неуправляемую и наблюдаемую* S_4.

Уравнение системы можно записать следующим образом (рис. 5.10):

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}_a \\ \dot{\mathbf{X}}_b \\ \dot{\mathbf{X}}_c \\ \dot{\mathbf{X}}_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{14} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{24} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} & \mathbf{A}_{34} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_a \\ \mathbf{X}_b \\ \mathbf{X}_c \\ \mathbf{X}_d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \mathbf{U};$$

$$\mathbf{X}_в = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{C}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{C}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_a & \mathbf{X}_b & \mathbf{X}_c & \mathbf{X}_d \end{bmatrix}.$$

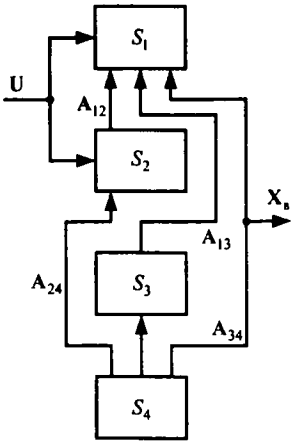


Рис. 5.10. Структурная схема системы, декомпозированной на четыре подсистемы

5.4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ

В постановке задачи оптимального управления функции $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ принадлежат *бесконечномерным пространствам.*

Из формулировки задачи математического программирования следует, что *функции* $\mathbf{X}(t)$ *и* $\mathbf{U}(t)$ *следует характеризовать конечным числом параметров.* Только

в этом случае удается свести задачу оптимального управления к задаче математического программирования.

Таким образом, *первым этапом в задаче применения математического программирования для нахождения оптимальных* $\mathbf{U}^*(t)$ и $\mathbf{X}^*(t)$ *является этап редукции задачи оптимального управления к задаче математического программирования.* Из сказанного можно заключить, что структурная схема, характеризующая процесс решения задачи построения $\mathbf{U}^*(t)$ и $\mathbf{X}^*(t)$ (оптимальные вектор управления и фазовый вектор), может быть представлена в виде, показанном на рис. 5.11.

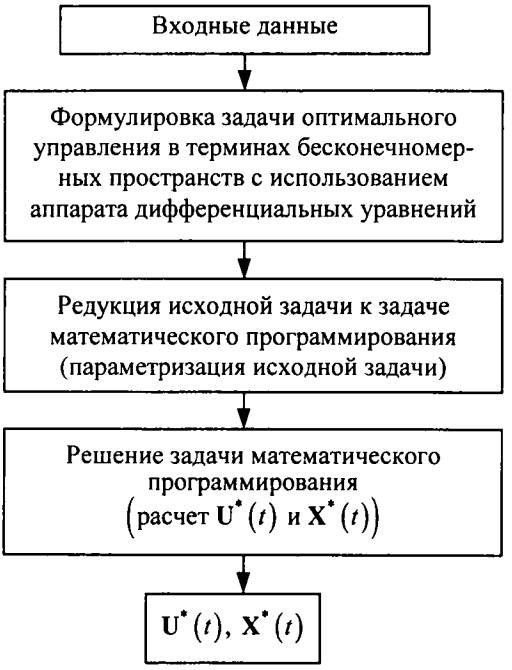


Рис. 5.11. К постановке задачи оптимального управления

Далее рассмотрим методы параметризации функций, входящих в постановку задачи оптимального управления. Обозначим параметризуемую функцию через $f(t)$.

Проведем изложение применительно к решению классической задачи — вариационной задачи с закрепленными граничными точками, которая тесно связана с задачей оптимального управления.

Задача формулируется так:

$$\min_{f(t)} I(f) = \min_{f(t)} \int_0^T F(f(t), f'(t), t)\,dt \tag{5.63}$$

при условиях $f(0) = f^0$, $f(T) = f^T$, F и f — скалярные функции.

Сформулированная задача относится к классу краевых задач [3, 45].

Функция $f^*(t)$, доставляющая минимум функционалу в формуле (5.63), определяется известным уравнением Эйлера

$$F'_f(f, f', t) - F''_{tf'}(f, f', t) - F''_{ff'}(f, f', t) f' - F''_{f'f'}(f, f', t) f'' = 0. \tag{5.64}$$

Здесь частные производные от $F(f, f', t)$ берутся без учета зависимости f и f' от t. Уравнение (5.64) — уравнение второго порядка, и поэтому его общее решение содержит две произвольные постоянные, которые определяются с помощью краевых условий.

Дифференциальные уравнения вариационных задач интегрируются в конечном виде лишь в исключительных случаях. В связи с этим широко используется *редукция бесконечномерной задачи к конечномерной задаче оптимизации.*

Изложим содержание метода конечных разностей. Его популярность во многом объясняется относительной простотой перехода к конечномерным задачам [45]. Идея метода сводится к следующему: *область непрерывного изменения аргумента заменяют конечным* (дискретным) *множеством точек* (узлов), *называемым сеткой.*

Вместо функций непрерывного аргумента рассматривают функции, определенные только в узлах сетки — *сеточные функции* (рис. 5.12).

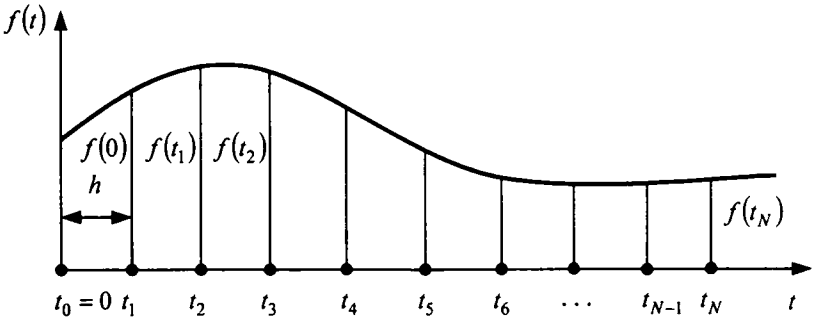


Рис. 5.12. Сеточная функция $f(t_k)$, $k = \overline{0, N}$

При таком подходе функция $f(t)$ характеризуется ее дискретными значениями — числами $f(t_0), f(t_1), \ldots, f(t_{N-1}), f(t_N)$.

Производные заменяют их разностными аналогами — линейными комбинациями значений сеточных функций в узлах сетки. В результате, например, краевую задачу (5.63) заменяют *дискретным эквивалентом — дискретной краевой задачей* (разностной схемой).

Краевая задача (5.63) заменяется дискретным эквивалентом вида

$$\min_{f(t_i)} I\left(f(0), f(t_1), \ldots, f(t_N)\right) = \min_{f(t_i)} h \sum_{i=0}^{N-1} F\left(f(t_i), \frac{f(t_{i+1}) - f(t_i)}{h}, t_i\right) \qquad (5.65)$$

при условиях $f(0) = f^0$, $f(t_N) = f^T$.

Так как значения $f(t_0)$ и $f(t_N)$ заданы, то задача сводится к отысканию экстремума функции $N-1$ переменных $f(t_1), f(t_2), \ldots, f(t_{N-1})$, стоящей в правой части (5.65).

Таким образом, *бесконечномерная задача сведена к конечномерной задаче оптимизации.* Несмотря на кажущуюся простоту метода, при его использовании приходится решать ряд проблем. Например, следует иметь в виду, что для одной и той же задачи можно построить большое число различных разностных схем, среди которых далеко не все пригодны для использования на практике [60]. Самостоятельной трудной задачей является выбор размерности задачи (выбор шага h), так как размерность задачи при практическом использовании этого подхода может оказаться очень высокой.

Перейдем к формулировке задачи оптимального управления в терминах аппарата математического программирования.

Разделим промежуток $[0, T]$ на N равных подынтервалов $[0,t_1]$, $[t_1,t_2]$,..., $[t_{N-1},t_N]$, где $t_N = T$, $h = t_{i+1} - t_i$.

К нелинейному уравнению, описывающему поведение объекта

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X},\mathbf{U},t), \tag{5.66}$$

с целью решения задачи параметризации можно применить замену производной конечной разностью

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} \approx \frac{\mathbf{X}(t_{i+1}) - \mathbf{X}(t_i)}{h}$$

и, таким образом, сформулировать задачу в параметрической форме.

С учетом сказанного уравнение (5.66) заменяется простейшей разностной схемой

$$\mathbf{X}(t_{i+1}) = \mathbf{X}(t_i) + h\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_i),\mathbf{U}(t_i),t_i). \tag{5.67}$$

Для функционала $I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)dt$ можно записать зависимость

$$I = h\sum_{i=0}^{N-1} f_0(\mathbf{X}(t_i),\mathbf{U}(t_i)). \tag{5.68}$$

К уравнениям (5.67) должно быть добавлено начальное условие

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0 \tag{5.69}$$

и условие на правом конце

$$\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}^T = \mathbf{X}(t_N), \tag{5.70}$$

где $\mathbf{X}(t_N)$ — фиксированный вектор. Кроме того, на изменение управления $\mathbf{U}(t)$ и фазового вектора наложены ограничения:

$$\mathbf{U}(t_i) \in U^m \subset R^m \quad \forall i = \overline{0,N}; \quad \mathbf{X}(t_i) \in X^n \subset R^n \quad \forall i = \overline{1,N-1}. \tag{5.71}$$

Справедливы зависимости [62]:

$$\mathbf{X}(t_1) = \mathbf{X}(t_0) + h\mathbf{F}(\mathbf{X}(t_0),\mathbf{U}(t_0)) = \mathbf{\Phi}_1(\mathbf{U}(t_0)),$$

$$\mathbf{X}(t_2) = \mathbf{\Phi}_1(\mathbf{U}(t_0)) + h\mathbf{F}(\mathbf{\Phi}_1(\mathbf{U}(t_0)),\mathbf{U}(t_1)) = \mathbf{\Phi}_2(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1)),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{\Phi}_{k-1}(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),...,\mathbf{U}(t_{k-2})) +$$

$$+h\mathbf{F}(\mathbf{\Phi}_{k-1}(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),...,\mathbf{U}(t_{k-2})),\mathbf{U}(t_{k-1})) =$$

$$= \mathbf{\Phi}_k(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),\mathbf{U}(t_2),...,\mathbf{U}(t_{k-1})).$$

С учетом последних формул функционал (5.68) можно записать в виде

$$I = \sum_{i=0}^{N-1} I_i(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),...,\mathbf{U}(t_i)), \tag{5.72}$$

где $I_i(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),...,\mathbf{U}(t_i)) = h\mathbf{F}(\mathbf{\Phi}_i(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),...,\mathbf{U}(t_{i-1}),\mathbf{U}(t_i)))$.

В последней зависимости функционал I_i зависит только от первых $(i+1)$ неизвестных переменных.

Функции вида (5.72) в [62] названы *функциями с последовательным включением неизвестных*.

Если от векторно-матричного дифференциального уравнения перейти к эквивалентному уравнению с интегральным оператором

$$\mathbf{X}(t)=\int_0^t \mathbf{F}\big(\mathbf{X}(\tau),\mathbf{U}(\tau),\tau\big)\,d\tau+\mathbf{X}^0, \tag{5.73}$$

то конечной разностью (5.67) можно не пользоваться, а применять эквивалентное соотношение, например, вида

$$\mathbf{X}(t_n)=h\sum_{i=0}^{n} A_i\mathbf{F}\big(\mathbf{X}(\tau_i),\mathbf{U}(\tau_i),\tau_i\big)+\mathbf{X}^0;$$

множитель h перед суммой выделен для того, чтобы коэффициенты A_i были безразмерными величинами.

Формулировка задачи построения оптимального программного управления $\mathbf{U}^*(t_i)$ и оптимальной программы $\mathbf{X}^*(t_i)$ с помощью аппарата математического программирования имеет вид

$$I=\sum_{i=0}^{N-1} I_i\big(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),\ldots,\mathbf{U}(t_i)\big)=$$

$$=\sum_{i=0}^{N-1} h\mathbf{F}\Big(\mathbf{\Phi}_i\big(\mathbf{U}(t_0),\mathbf{U}(t_1),\ldots,\mathbf{U}(t_{i-1}),\mathbf{U}(t_i)\big)\Big)\to\min_{\mathbf{U}(t_i)}$$

при следующих ограничениях:

$$\mathbf{X}(t_{i+1})=\mathbf{X}(t_i)+h\mathbf{F}\big(\mathbf{X}(t_i),\,\mathbf{U}(t_i),\,t_i\big); \tag{5.74}$$

$$\mathbf{U}(t_i)\in U^m\subset R^m;\ \mathbf{X}(t_i)\in X^n\subset R^n;$$

$$\mathbf{X}^0=\mathbf{X}(0)\in G^0,\ \mathbf{X}^T=\mathbf{X}(T)\in G^T;$$

$\mathbf{U}(t_i)$ принадлежит классу допустимых.

В обсуждаемом подходе задача построения оптимальных программных управлений $\mathbf{U}^*(t)$ и оптимальных программ $\mathbf{X}^*(t)$ свелась к стандартной задаче нелинейного программирования. Трудности решения этой задачи определяются многими факторами, а главные из них — *это ее размерность, количество переменных и количество ограничений*. Размерность возникающей задачи математического программирования определяется в основном двумя обстоятельствами: размерностью вектора $\mathbf{X}(t)$ и количеством дискрет N, т.е. произведением $n\times N$.

Если N достаточно велико, то даже в тех случаях, когда размерность вектора $\mathbf{X}(t)$ невелика, задача математического программирования оказывается чрезвычайно трудоемкой. Число N определяется прежде всего требованиями точности [62].

Далее рассмотрим частный случай.

Пусть линейный объект описывается векторно-матричным уравнением вида

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t). \tag{5.75}$$

Рассмотрим простейший случай, когда $\mathbf{A}=\text{const}$, $\mathbf{B}=\text{const}$.

Изложим несколько подходов к решению задачи параметризации с использованием метода сеток.

Первый подход связан с использованием конечной разности первого порядка; в этом случае имеет место конечномерный эквивалент уравнения (5.75)

$$\frac{\mathbf{X}\big[(k+1)h\big]-\mathbf{X}[kh]}{h}=\mathbf{A}\mathbf{X}(kh)+\mathbf{B}\mathbf{U}(kh). \tag{5.76}$$

Для того чтобы замена операции дифференцирования взятием конечной разности была правомерна, необходимо, чтобы h было мало по сравнению с наименьшей из постоянных времени процесса.

Эта схема хорошо изучена и отражена, например, в [62, 93].

Один из подходов состоит в том, что для построения дискретного аналога используется формула вида [81, 93]

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}^0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)d\tau.$$

Определяя последовательно с помощью последнего соотношения $\mathbf{X}(kh)$, при условии кусочно-постоянных управлений будем иметь:

$$\mathbf{X}(h) = e^{\mathbf{A}h}\mathbf{X}^0 + \int_0^h e^{\mathbf{A}(h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}\mathbf{U}(0),$$

$$\mathbf{X}(2h) = e^{\mathbf{A}2h}\mathbf{X}(h) + \int_h^{2h} e^{\mathbf{A}(2h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}\mathbf{U}(h),$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{X}\big((k+1)h\big) = e^{\mathbf{A}(k+1)h}\mathbf{X}(kh) + \int_{kh}^{(k+1)h} e^{\mathbf{A}((k+1)h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}\mathbf{U}(kh).$$

В общем виде дискретная модель может быть представлена так:

$$\mathbf{X}\big((k+1)h\big) = \mathbf{\Phi}(kh)\mathbf{X}(kh) + \beta\mathbf{U}(kh),$$

где $\mathbf{\Phi} = e^{\mathbf{A}h}$, $\beta = \int_0^h e^{\mathbf{A}(h-\tau)}d\tau\,\mathbf{B}$.

Отсюда находим формулу, удобную для практического использования:

$$\mathbf{X}(kh) = \mathbf{\Phi}^k\mathbf{X}^0 + \beta\sum_{i=0}^{k-1}\mathbf{\Phi}^{k-1-i}\,\mathbf{U}(ih). \tag{5.77}$$

В последних зависимостях выбор шага h значительно упрощается по сравнению с предыдущем случаем. Редукция задачи оптимального управления к задаче математического программирования может быть осуществлена с помощью формулы

$$\mathbf{X}(t) = \int_0^t \big(\mathbf{A}\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{B}\mathbf{U}(\tau)\big)d\tau + \mathbf{X}^0.$$

Задача построения оптимального программного управления в терминах математического программирования может быть сформулирована так:

$$I\big(\mathbf{U}(t_k), \mathbf{X}(t_k)\big) = h\sum_{k=0}^{N-1} f_0\big(\mathbf{X}(t_k), \mathbf{U}(t_k)\big) \to \min_{\mathbf{X}(t_k),\mathbf{U}(t_k)}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t_k) \in X^n \subset R^n, \quad k = \overline{0, N-1}, \\ \mathbf{U}(t_k) \in U^m \subset R^m, \quad k = \overline{0, N-1}, \end{cases} \tag{5.78а}$$

— ограничения типа неравенств;

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t_N) = \mathbf{X}^T, \\ \mathbf{X}(t_{k+1}) - e^{\mathbf{A}h}\left[\mathbf{X}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\mathbf{A}(t_k-\tau)}d\tau\mathbf{B}\mathbf{U}(t_k)\right] = \mathbf{0} \end{cases} \tag{5.78б}$$

— ограничения типа равенств.

Рассмотрим конкретный случай ограничений. Например, очень часто ограничены абсолютные значения переменных состояния и управления, т.е. наложены действующие в течение всего времени управления следующие условия в форме неравенств [93]:

$$\begin{cases} u_{iM} - |u_i| \geq 0, \quad i = \overline{1,m}; \\ x_{jM} - |x_j| \geq 0, \quad j = \overline{1,n}, \end{cases} \tag{5.79}$$

где u_{iM} и x_{jM} — заданные скалярные величины. Неравенства (5.79) представляют собой одну из простейших форм ограничений, которые могут быть наложены на переменные состояния и управления.

Задача построения оптимальных программных управлений в терминах математического программирования формируется так же, как и в предыдущем случае, но ограничения имеют вид (5.79).

Если же объект имеет переменные параметры, то для параметризации можно использовать конечные разности, тогда

$$\mathbf{X}\left[(k+1)h\right] = \mathbf{X}(kh) + h\left[\mathbf{A}(kh)\mathbf{X}(kh) + \mathbf{B}(kh)\mathbf{U}(kh)\right].$$

Для решения рассматриваемой задачи может быть использовано интегральное соотношение

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{X}^0 + \int_0^t \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau, \tag{5.80}$$

где $\mathbf{\Phi}(t,t_0) = \mathbf{X}_\phi(t)\cdot\mathbf{X}_\phi^{-1}(t_0)$ — переходная матрица состояния, $t_0 = 0$, $\mathbf{X}_\phi(t)$ — нормальная фундаментальная матрица

$$\mathbf{X}_\phi(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{bmatrix}, \tag{5.81}$$

причем столбцы матрицы $\mathbf{X}_\phi(t)$: $\mathbf{X}_1(t), \mathbf{X}_2(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)$ — являются решениями уравнения

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} \tag{5.82}$$

при следующих начальных условиях:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1(t) = \left[x_{11}(t) \quad x_{21}(t) \quad \dots \quad x_{n1}(t)\right]^{\mathrm{T}} \leftrightarrow [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0]^{\mathrm{T}}, \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n(t) = \left[x_{1n}(t) \quad x_{2n}(t) \quad \dots \quad x_{nn}(t)\right]^{\mathrm{T}} \leftrightarrow [0 \quad 0 \quad \dots \quad 1]^{\mathrm{T}}. \end{cases} \tag{5.83}$$

Дискретный аналог (5.80) имеет вид

$$\mathbf{X}(t_j) = \mathbf{\Phi}(t_j, t_{j-1})\mathbf{X}(t_{j-1}) + \int_{t_{j-1}}^{t_j} \mathbf{\Phi}(t_{j-1},\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(t_{j-1})d\tau. \tag{5.84}$$

При решении задачи оптимального управления одну из точек $\mathbf{X}^0$ или $\mathbf{X}^T$ всегда можно положить равной нулю.

В самом деле, выражение, определяющее выходной сигнал $\mathbf{X}(t)$ при $\mathbf{X}^0 \neq \mathbf{0}$, записывается в виде (5.80).

Положим $\mathbf{X}^0 = \mathbf{0}$, тогда

$$\mathbf{X}(t) = \int_0^t \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)d\tau = \int_0^t \mathbf{K}(t,\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau.$$

Запишем формулу, определяющую $\mathbf{X}^T$:

$$\mathbf{X}^T = \mathbf{\Phi}(T,0)\mathbf{X}^0 + \int_0^T \mathbf{X}_\phi(T)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau. \tag{5.85}$$

Отсюда находим

$$\mathbf{X}_э^T = \mathbf{X}^T - \mathbf{\Phi}(T,0)\mathbf{X}^0 = \int_0^T \mathbf{X}_\phi(T)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau. \tag{5.86}$$

Поскольку при $\mathbf{X}^0 = \mathbf{0}$ имеют место равенства

$$\mathbf{X}(t) = \int_0^t \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau$$

и

$$\mathbf{X}(T) = \int_0^T \mathbf{X}_\phi(T)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau, \tag{5.87}$$

то из (5.85) и (5.87) следует, что задача перевода объекта управления из произвольной начальной точки $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0$ в точку $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}^T$ равносильна задаче его перевода из начальной точки $\mathbf{X}(0) = \mathbf{0}$ в точку $\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}^T - \mathbf{\Phi}(T,0)\mathbf{X}^0$.

Аналогично получаем

$$\mathbf{0} = \mathbf{\Phi}(T,0)\mathbf{X}^0 - \mathbf{X}^T + \int_0^T \mathbf{X}_\phi(T)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau,$$

из чего можно заключить, что задача перевода объекта управления из начальной точки $\mathbf{X}^0$ в произвольное конечное состояние $\mathbf{X}^T$ равносильна задаче его перевода из эквивалентной начальной точки $\mathbf{X}_э^0$, определяемой соотношением

$$\mathbf{X}_э^0 = \mathbf{X}^0 - \mathbf{\Phi}^{-1}(T,0)\mathbf{X}^T = \mathbf{X}^0 - \mathbf{X}_\phi^{-1}(T)\mathbf{X}^T,$$

в точку $\mathbf{X}^T = \mathbf{0}$.

Заметим, что для нахождения эквивалентных начального и конечного состояний необходимо предварительно рассчитать фундаментальную матрицу, что для нестационарных объектов представляет собой весьма сложную задачу. В связи с этим этот подход используется лишь при решении простейших задач.

К более конструктивным результатам приводит применение дискретного аналога формулы

$$\mathbf{X}(t) = \int_0^t \left[\mathbf{A}(\tau)\mathbf{X}(\tau) + \mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)\right]d\tau + \mathbf{X}^0, \tag{5.88}$$

требующей знания лишь матриц $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$.

Задача построения оптимальной программы и оптимального программного управления формируется так:

$$\left\{h\sum_{k=0}^{N-1} f_0\left(\mathbf{X}(t_k),\mathbf{U}(t_k)\right)\right\} \to \min_{\mathbf{X}(t_k),\mathbf{U}(t_k)}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \mathbf{U}(t_k) \in U^m \subset R^m; \ k = \overline{0, N-1}, \\ \mathbf{X}(t_k) \in X^n \subset R^n; \ k = \overline{0, N-1}, \end{cases}$$

— ограничения типа неравенств;

$$\begin{cases} \mathbf{X}(t_N) = \mathbf{X}^T, \\ \text{дискретный эквивалент любой из формул,} \\ \text{связывающей вектор-функции } \mathbf{U}(t) \text{ и } \mathbf{X}(t) \\ \text{(зависимости (5.77), (5.78), (5.84))} \end{cases}$$

— ограничения типа равенств.

Пример 5.5. Задача управления полетом ракеты [93].

Формулировка задачи: полагая, что гравитационное ускорение g_0 постоянно и полет происходит в вакууме, а тяговое ускорение A ракеты постоянно, *найти такую зависимость направления тяги от времени, чтобы ракета достигла заданной высоты Y_T в заданное время T при нулевой вертикальной скорости V_y и максимальной горизонтальной скорости V_x. Дальность до конечной точки не задается.*

Критерий качества имеет вид

$$I = \max V_x(T).$$

Запишем вектор состояния:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X \\ Y \\ V_x \\ V_y \end{bmatrix},$$

где X — горизонтальная дальность, Y — высота, V_x — горизонтальная составляющая скорости, V_y — вертикальная составляющая скорости.

При принятых допущениях система описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_3,$$
$$\dot{x}_2 = x_4,$$
$$\dot{x}_3 = A \cos u,$$
$$\dot{x}_4 = A \sin u - g_0.$$

Управляющей переменной $u(t)$ является угол наклона вектора силы тяги по отношению к горизонтальной плоскости.

Полагаем:

- начальные условия:

$$\mathbf{X}^0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T;$$

- конечные условия:

$$x_2(T) = Y_T = 30000 \text{ м};$$
$$x_4(T) = 0;$$
$$T = 100 \text{ с};$$
$$g_0 = 9{,}8 \text{ м/с}^2;$$
$$A = 2g_0 = 19{,}6 \text{ м/с}^2.$$

Ограничения на управление и фазовую траекторию не накладываются. Редукцию к задаче математического программирования осуществим методом сеток, полагая

$$x_2(t_N) = 30000,$$
$$x_4(t_N) = 0.$$

Функционал качества принимает вид

$$I = \max_{u(t_k)} x_3(t_N).$$

Примем $N = 30$, тогда $h = T/(N-1) \approx 3,449$.

Поставленная задача была решена методом сеток, а также методом дискретизации Пирсона [93]. Графики решений задачи двумя методами приведены на рис. 5.13.

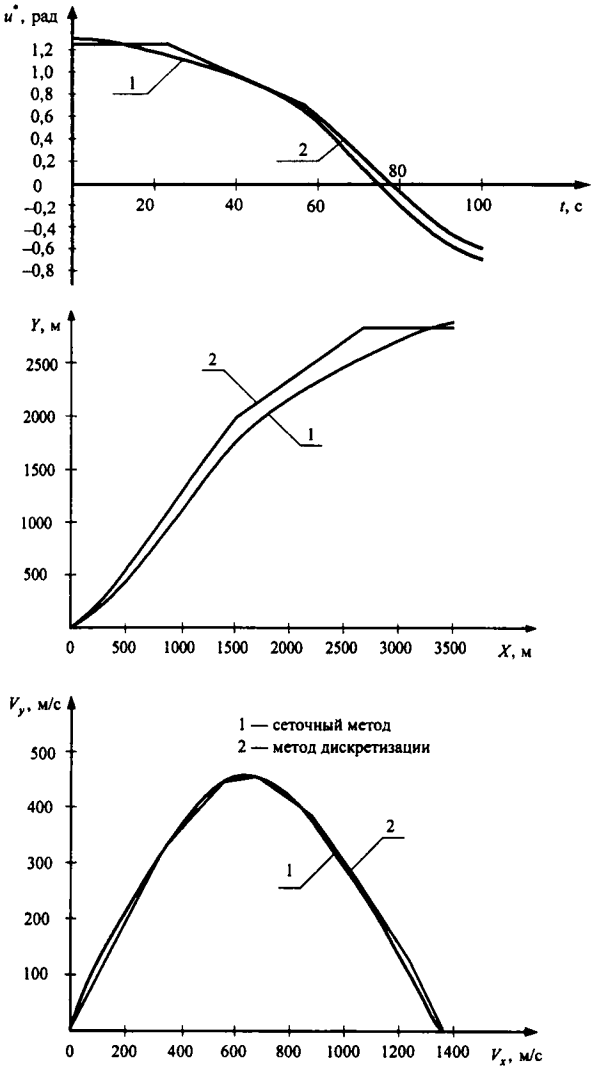


Рис. 5.13. Графики функций $u^*(t)$, $Y(X)$, $V_y(V_x)$

5.4.1. Метод и общий алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ при описании объектов интегральными уравнениями и сеточно-матричными операторами

Рассмотрим алгоритм построения оптимальных программных управлений в классе линейных нестационарных систем методами математического программирования с использованием сеточного метода решения интегральных уравнений (п. 2.10, том 1). Все соотношения данного параграфа распространяются на класс линейных стационарных объектов.

Напомним постановку задачи. Поведение линейных нестационарных объектов управления описывается системой дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \tag{5.89}$$
$$\mathbf{X}(t) \in R^n, \ \mathbf{U}(t) \in R^m.$$

Требуется определить закон управления $\mathbf{U}^*(t)$, который переводил бы систему (5.89) из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \ \ \ldots \ \ x_n(0)\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.90}$$

в конечное состояние

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \ \ \ldots \ \ x_n(T)\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.91}$$

и при этом доставлял бы экстремум функционалу качества

$$I\left(\mathbf{U}(t)\right) = \int_0^T f_0\left(\mathbf{X}(t), \mathbf{U}(t), t\right)dt \to \underset{\mathbf{U}(t)}{\operatorname{extr}}. \tag{5.92}$$

Кроме перечисленных выше ограничений, на фазовые траектории объекта (5.89) и элементы вектора управления $\mathbf{U}(t)$ могут накладываться ограничения типа неравенств

$$\mathbf{X}(t) \in X^n \subset R^n, \ \mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m. \tag{5.93}$$

Будем предполагать, что линейный объект (5.89) является *вполне управляемым*, т.е. для любых $\mathbf{X}^0$ и $\mathbf{X}^T$ существует ограниченное управление $\mathbf{U}\left(t, \mathbf{X}^0, \mathbf{X}^T\right) \in U^m \subset R^m$, $t \in [0, T]$, переводящее систему (5.89) из начального состояния (5.90) в конечное (5.91).

Для параметризации вектора фазовых координат и вектора управления выберем шаг дискретизации h и определим число дискрет $N = T/h + 1$. Интервал времени $[0, T]$ представим дискретным набором точек t_k, $k = \overline{1,N}$. Для каждой дискретной точки временного интервала $\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}_k$, $\mathbf{U}(t_k) = \mathbf{U}_k$, $k = \overline{1,N}$.

Для параметризации дифференциальных связей оптимизационной задачи перейдем от уравнения (5.89) при начальных условиях (5.90) к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода

$$\mathbf{X}(t) - \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau)\mathbf{X}(\tau)d\tau = \mathbf{F}(t), \tag{5.94}$$

где

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau + \mathbf{X}^0, \tag{5.95}$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau) = \mathbf{A}(\tau)1(t), \\ \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau) = \mathbf{B}(\tau)1(t). \end{cases} \tag{5.96}$$

Редукцию интегрального уравнения (5.94) к конечномерному эквиваленту осуществим с использованием *сеточного метода* решения векторно-матричных интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. Интеграл (5.95) с переменным верхним пределом вычисляется по формуле трапеций. *Конечномерный эквивалент линейного нестационарного объекта управления* (5.89) *имеет вид*

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.97}$$

где

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -0{,}5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}21} & \mathbf{I} - 0{,}5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ -0{,}5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}31} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}32} & \mathbf{I} - 0{,}5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}33} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0{,}5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N1} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N2} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N3} & \dots & \mathbf{I} - 0{,}5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}NN} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} = h\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ 0{,}5\mathbf{k}_{\mathbf{U}21} & 0{,}5\mathbf{k}_{\mathbf{U}22} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ 0{,}5\mathbf{k}_{\mathbf{U}31} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}32} & 0{,}5\mathbf{k}_{\mathbf{U}33} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0{,}5\mathbf{k}_{\mathbf{U}N1} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}N2} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}N3} & \dots & 0{,}5\mathbf{k}_{\mathbf{U}NN} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{\mathbf{X}ij} = \mathbf{A}(t_j), \quad \mathbf{k}_{\mathbf{U}ij} = \mathbf{B}(t_j), \quad i, j = \overline{1, N},$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(t_N) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(t_N) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{X}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^0 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{I}$ — единичная $(n \times n)$-матрица.

Параметризованный с помощью формулы трапеций функционал качества задачи оптимального управления имеет вид

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = h\sum_{k=1}^{N}\beta_k f_0(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, t_k),$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0{,}5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0{,}5; & k = N. \end{cases} \tag{5.98}$$

Конечномерный эквивалент для конечных условий (5.91) имеет вид

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{X}^T; \tag{5.99}$$

начальные условия (5.90) выполняются автоматически, поскольку они учитываются уравнением (5.97).

Параметризованная форма ограничений типа неравенств, накладываемых на фазовые траектории объекта (5.89) и элементы вектора управляющих воздействий, определяется соотношениями вида

$$\begin{cases} x_i(t_k) \le x_i^+, \\ x_i(t_k) \ge x_i^-, \end{cases} \quad \begin{cases} u_j(t_k) \le u_j^+, \\ u_j(t_k) \ge u_j^-, \end{cases} \quad k = \overline{1, N} \tag{5.100}$$

(в зависимости от вида ограничений (5.93) i, j могут принимать различные значения в диапазонах от 1 до n и от 1 до m соответственно).

Таким образом, решение исходной задачи синтеза оптимального программного управления (5.89)–(5.93) сводится к решению задачи математического программирования

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = h\sum_{k=1}^{N}\beta_k f_0(\mathbf{X}_k, \mathbf{U}_k, t_k) \to \operatorname*{extr}_{\hat{\mathbf{U}}} \tag{5.101}$$

при линейных ограничениях типа равенств (5.97), (5.99) и типа неравенств (5.100).

Рассмотрим подробнее алгоритмы решения задачи построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ для различных критериев качества.

5.4.2. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию минимальной энергии

В предыдущем параграфе был рассмотрен общий алгоритм построения оптимальных программ и программных управлений с использованием сеточного метода решения интегральных уравнений с операторными ядрами. При решении конкретных задач используются различные критерии качества. Например, часто стоит задача расчета управлений, имеющих минимальную энергию; в этом случае имеет место задача оптимального перевода объекта из состояния $\mathbf{X}^0$ в состояние $\mathbf{X}^T$ таким образом, чтобы функционал

$$I(\mathbf{U}) = \left\{ \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)dt \right\}^{1/2} \tag{5.102}$$

принимал минимальное значение. Сформулируем задачу построения оптимального программного управления. При заданных уравнении объекта управления

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t),$$

ограничениях на управление и фазовые траектории

$$\begin{cases} x_i(t) \le x_i^+, \\ x_i(t) \ge x_i^-, \end{cases} \quad \begin{cases} u_j(t) \le u_j^+, \\ u_j(t) \ge u_j^-, \end{cases} \tag{5.103}$$

времени управления T и краевых условиях

$$\mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad \dots \quad x_n(0) \right]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \quad \dots \quad x_n(T) \right]^{\mathrm{T}}$$

требуется найти такие программное управление $\mathbf{U}^*(t)$ и фазовую траекторию (оптимальную программу) $\mathbf{X}^*(t)$, при которых критерий (5.102) принимает минимальное значение.

Формальная постановка задачи:

$$I(\mathbf{U}) = \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)dt \to \min_{\mathbf{U}}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \\ \mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad \dots \quad x_n(0) \right]^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \quad \dots \quad x_n(T) \right]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5.104}$$

— ограничения типа равенств;

$$\begin{cases} \begin{cases} u_j(t) \le u_j^+, \\ u_j(t) \ge u_j^-, \end{cases} & \forall t \in [0,T], \ j = \overline{1,m}, \\ \begin{cases} x_i(t) \le x_i^+, \\ x_i(t) \ge x_i^-, \end{cases} & \forall t \in [0,T], \ i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

— ограничения типа неравенств.

Постановка задачи в терминах математического программирования при использовании сеточного метода решения интегральных уравнений и формулы трапеций для параметризации соотношений, входящих в (5.104), имеет вид:

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = h\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u_j(t_k)\right]^2\right\} \to \min_{\hat{\mathbf{U}}},$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0{,}5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0{,}5; & k = N, \end{cases}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \\ \mathbf{X}_N = \mathbf{X}^T \end{cases} \tag{5.105}$$

— ограничения типа равенств;

$$\begin{cases} \begin{cases} u_j(t_k) \le u_j^+, \\ u_j(t_k) \ge u_j^-, \end{cases} & k = \overline{1, N},\ j = \overline{1, m}, \\ \begin{cases} x_i(t_k) \le x_i^+, \\ x_i(t_k) \ge x_i^-, \end{cases} & k = \overline{1, N},\ i = \overline{1, n}, \end{cases}$$

— ограничения типа неравенств.

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 5.6. Управление положением ротора двигателя постоянного тока [94].

В данном примере рассмотрим стационарный объект, поскольку в этом случае имеется возможность найти точные и приближенные оптимальное программное управление и оптимальную программу и сравнить полученные результаты. Такое сравнение позволяет сделать выводы, касающиеся точности приближенного метода (метода математического программирования с использованием сеточного метода решения интегральных уравнений) и надежности получаемых с его помощью результатов в сложных случаях (нестационарные объекты высокого порядка, задачи управления с ограничениями и др.). Рассмотрим задачу управления положением двигателя постоянного тока (управление током возбуждения, рис. 5.14). Напряжение $u(t)$, являющееся скалярным управлением, приложено к обмотке возбуждения.

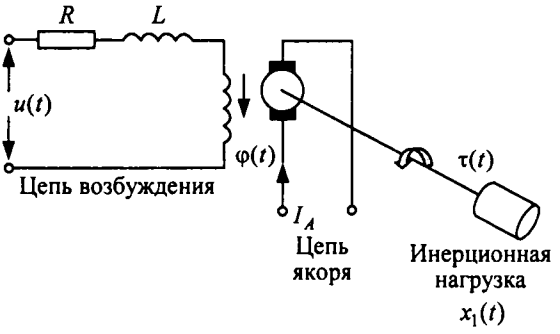


Рис. 5.14. Принципиальная схема системы

Дифференциальное уравнение, связывающее электромагнитный поток $\varphi(t)$ с напряжением $u(t)$, запишется в виде [94]:

$$L\dot{\varphi}(t) + R\varphi(t) = k_1 u(t), \tag{5.106}$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности.

Предположим, что $I_я$ — постоянный ток якоря. Тогда момент $M(t)$ связан с потоком $\varphi(t)$ уравнением

$$M(t) = k_2 I_я j(t). \tag{5.107}$$

Положим, что трение пренебрежимо мало. В этом случае угловое смещение $x_1(t)$ и момент $M(t)$ связаны дифференциальным уравнением

$$J\ddot{x}_1(t) = M(t), \tag{5.108}$$

где J — момент инерции нагрузки и ротора.

Предположим также, что индуктивностью возбуждения можно пренебречь, т.е. полагаем, что $L = 0$.

При указанных выше допущениях система дифференциальных уравнений, описывающая поведение объекта, может быть представлена в виде [94]

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = ku(t), \end{cases} \tag{5.109}$$

где k — коэффициент пропорциональности (в расчетах будем полагать, что $k = 1$). Допущение о малости L позволяет считать, что величина

$$I = \int_0^T u^2(t)dt \tag{5.110}$$

пропорциональна энергии управления.

Сформулируем задачу оптимизации для рассматриваемой системы:

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)dt \to \min_u \tag{5.111}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases} \tag{5.112}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^0 &= \left[x_1(0) \quad x_2(0)\right]^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{X}^T &= \left[x_1(T) \quad x_2(T)\right]^{\mathrm{T}}. \end{aligned} \tag{5.113}$$

Ограничения типа неравенств отсутствуют.

Постановка задачи: при заданном уравнении объекта управления (5.112), отсутствии ограничений на управление $u(t)$ и фазовый вектор $\mathbf{X}(t)$, заданных краевых условиях

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^0 &= [-2 \quad -10]^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{X}^T &= [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{5.114}$$

времени управления $T = 14$ с требуется найти такое управление $u(t)$ и фазовые траектории $x_1(t)$, $x_2(t)$, при которых заданный функционал качества

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)dt \to \min_u.$$

Проверим управляемость системы, используя критерий Калмана. Матрица управляемости имеет вид

$$\mathbf{M}_y = [\mathbf{B} \quad \mathbf{AB}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}\mathbf{M}_y = 2.$$

Объект (5.112) является полностью управляемым.

Осуществим редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования сеточным методом с использованием квадратурной формулы трапеций с шагом $h = 0{,}1$ с.

Для сформулированной задачи аналитические зависимости для оптимального управления и фазовых траекторий объекта (5.112) имеют вид

$$\begin{aligned} u^*(t) &= 2{,}9183673 - 0{,}3148688t, \\ x_1^*(t) &= -2 - 10t + 1{,}4591836t^2 - 0{,}0524781t^3, \\ x_2^*(t) &= -10 + 2{,}9183673t - 0{,}1574344t^2. \end{aligned} \tag{5.115}$$

Для нахождения $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ перейдем от системы дифференциальных уравнений в форме Коши (5.112) к векторно-матричному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Для данной системы имеем

$$\mathbf{X}(t)-\int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau)\mathbf{X}(\tau)d\tau=\mathbf{F}(t),$$

$$\mathbf{F}(t)=\int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{X}^0,$$

$$\begin{cases}\mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau)=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I}\\ 0 & 0\end{bmatrix}1(t),\\ \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau)=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{I}\end{bmatrix}1(t).\end{cases}$$

Конечномерный эквивалент для объекта управления (5.112) с использованием сеточно-матричного оператора системы можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}}+\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.116}$$

где

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}21} & \mathbf{I}-0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}31} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}32} & \mathbf{I}-0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}33} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N1} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N2} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N3} & \cdots & \mathbf{I}-0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}NN}\end{bmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}=h\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}21} & 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}31} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}32} & 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}33} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}N1} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}N2} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}N3} & \cdots & 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}NN}\end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_N\end{bmatrix},\ \mathbf{X}_k=\mathbf{X}(t_k),\ \hat{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1\\ \vdots\\ \mathbf{U}_N\end{bmatrix},\ \mathbf{U}_k=\mathbf{U}(t_k),\ \mathbf{k}_{\mathbf{X}ij}=\mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t_i,\tau_j),\ \mathbf{k}_{\mathbf{U}ij}=\mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t_i,\tau_j).$$

Для данной задачи матрицы $\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}$ и $\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}$ имеют вид (приводятся вырезы матриц размером 8×8):

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}=\begin{bmatrix}1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0,0500 & 1,0000 & -0,0500 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -0,0500 & 0 & -0,1000 & 1,0000 & -0,0500 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0\\ 0 & -0,0500 & 0 & -0,1000 & 0 & -0,1000 & 1,0000 & -0,0500\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0000\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,0500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,0500 & 0,0500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,0500 & 0,1000 & 0,0500 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0,0500 & 0,1000 & 0,1000 & 0,0500 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Теперь постановка задачи в терминах математического программирования формулируется следующим образом:

$$I(\hat{\mathbf{U}})=h\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u(t_k)\right]^2\to\min_{\mathbf{U}},$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0{,}5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0{,}5; & k = N, \end{cases}$$

при ограничениях типа равенств (5.116). Ограничения на начальное состояние объекта управления учитываются ограничениями (5.116). Параметризованный эквивалент конечных условий можем записать следующим образом:

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(t_N) = 0 \quad x_2(t_N) = 0 \right]^{\mathrm{T}}. \tag{5.117}$$

Ограничения на управление и фазовые координаты не накладываются.

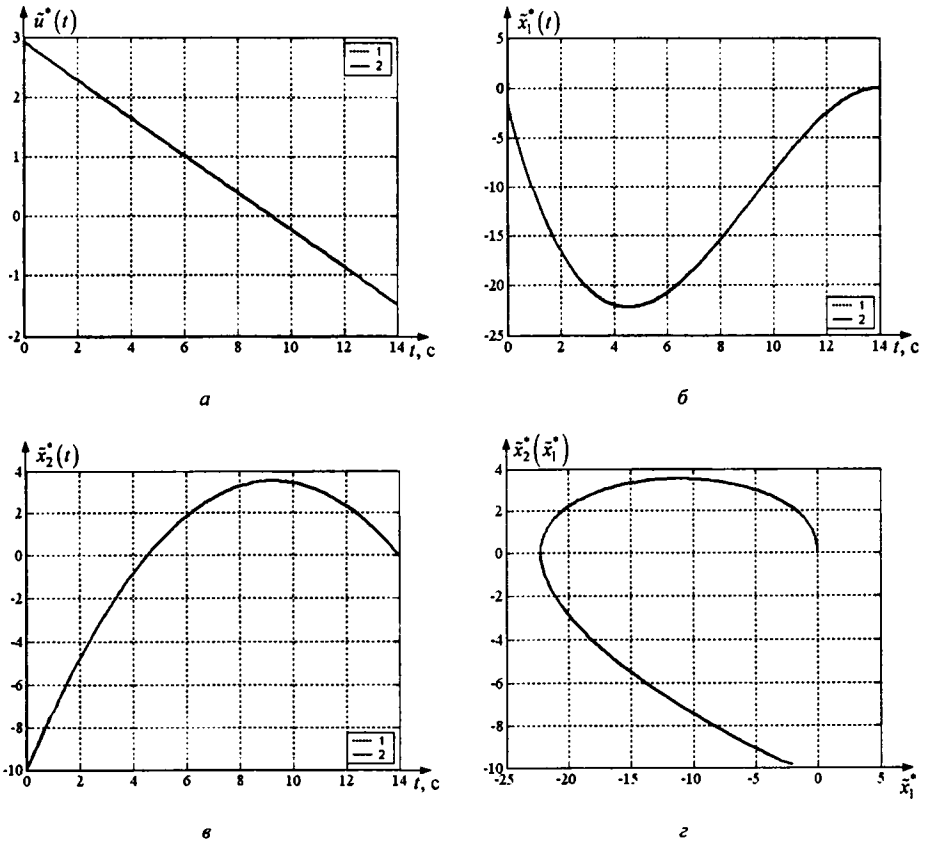


Рис. 5.15. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (2, сплошная линия) и точного решения задачи (1, пунктир), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$

При решении конечномерной оптимизационной задачи воспользуемся пакетом *Optimization Toolbox* многофункциональной интегрированной системы автоматизации математических и научно-технических расчетов *Matlab 6.1*. Поиск экстремума нелинейной функции многих переменных при наличии ограничений в данной системе реализован функцией *fmincon*. Синтаксис обращения к указанной функции подробно рассмотрен в интерактивной помощи по системе *Matlab*, отметим лишь, что линейные ограничения типа равенств и типа неравенств при вызове функции *fmincon* должны быть представлены в виде

$$\mathbf{A}_{\mathrm{eq}}\mathbf{x} = \mathbf{B}_{\mathrm{eq}}, \quad \mathbf{A}_{\mathrm{ue}}\mathbf{x} \le \mathbf{B}_{\mathrm{ue}}, \tag{5.118}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор оптимизируемых параметров; $\mathbf{A}_{\mathrm{eq}}$, $\mathbf{A}_{\mathrm{ue}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{eq}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{ue}}$ — матрицы и векторы линейных ограничений типа равенств и типа неравенств соответственно. В связи с этим целесообразно ограничения (5.116) и (5.117) привести к форме

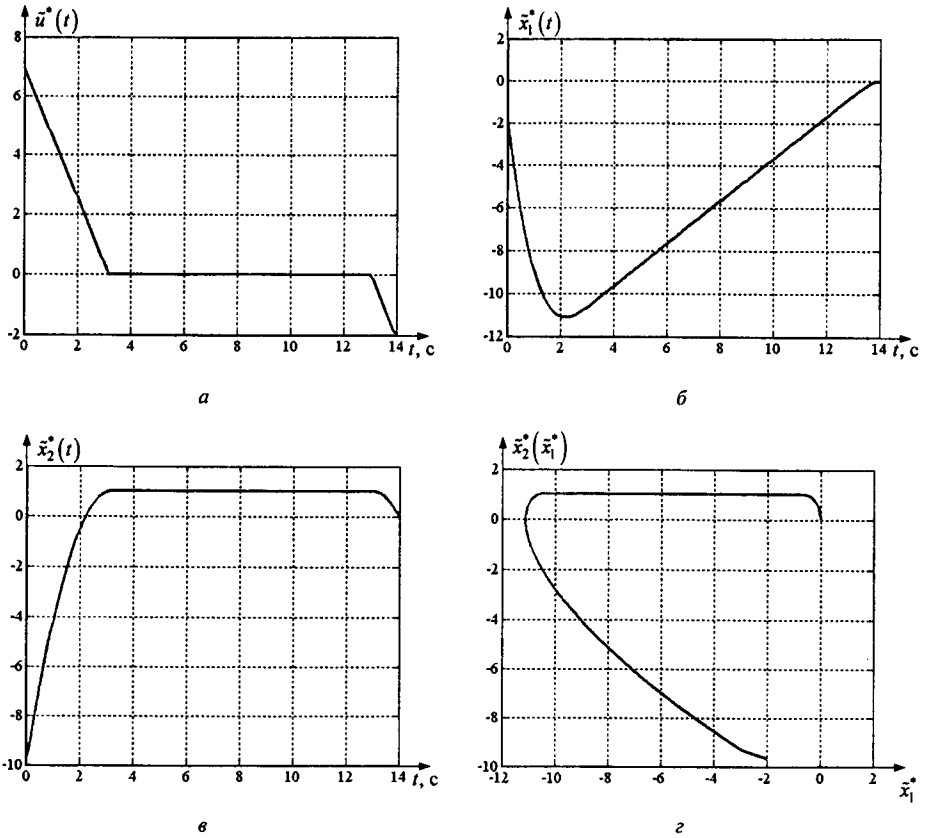
$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} \\ \mathbf{I}_{x_{1N}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{x_{2N}} & \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{eq}} \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{eq}}, \tag{5.119}$$

где $\mathbf{I}_{x_{1N}} = [0 \ \ldots \ 1 \ 0]_{1\times N}$, $\mathbf{I}_{x_{2N}} = [0 \ \ldots \ 0 \ 1]_{1\times N}$.

При решении задачи в системе *Matlab* в функционал качества следует включать лишь те элементы вектора $\mathbf{x}$, которые являются элементами вектора $\hat{\mathbf{U}}$.

Приведем результаты решения поставленной задачи. На рис. 5.15, *а–г* представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ и точного решения задачи, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

Как видно из рис. 5.15, точное и приближенное решения задачи совпали с большой точностью.



а *б* *в* *г*

Рис. 5.16. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$,
г — фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$

Введем теперь в рассматриваемую задачу оптимального управления ограничения типа неравенств, пусть

$$x_2(t) \le 1 \ \ \forall t \in [0, 14]. \tag{5.120}$$

Данные ограничения сформулируем в виде

$$x_2(t_k) \le 1, \ \ k = \overline{1, N}.$$

При этом к ограничениям типа равенств (5.119) следует добавить ограничения типа неравенств

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{x1} & \mathbf{0}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{uc}}\underbrace{\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{X}}\\ \hat{\mathbf{U}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \le \underbrace{\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}_{N\times 1}}_{\mathbf{B}_{uc}},$$

где

$$\mathbf{I}_{x1} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Приведем результаты решения задачи с ограничением (5.120). На рис. 5.16, *а–г* представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ и фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

Пример 5.7. Рассмотрим линейный нестационарный объект управления, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \tag{5.121}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix}t^2 & 1-t\\ 1+t & t-t^2\end{bmatrix},\ \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix}t^2 & 0\\ 1 & t\end{bmatrix},\ \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}.$$

Сформулируем задачу следующим образом: перевести объект (5.121) из начального состояния $\mathbf{X}^0 = [9 \quad -9]^{\mathrm{T}}$ в конечное состояние $\mathbf{X}^T = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ за время $T = 4$ с, при этом функционал качества

$$I(\mathbf{U}) = \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)\,dt \to \min_{\mathbf{U}}. \tag{5.122}$$

Решим задачу методом математического программирования с использованием сеточного метода решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода.

Проверим свойство управляемости объекта (5.121). Грамиан управляемости системы (5.121) имеет вид

$$\mathbf{W}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\,dt,$$

где $\mathbf{\Phi}(t_0,t) = \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(t_0)$ — переходная матрица состояний, $\mathbf{X}_\phi(t)$ — фундаментальная система решений. Если $\mathbf{X}_\phi(t)$ — нормальная фундаментальная система решений и $t_0 = 0$, а $t_1 = T$, то $\mathbf{\Phi}(0,t) = \mathbf{X}_\phi(t)$, а

$$\mathbf{W}(0,T) = \int_0^T \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{X}_\phi^{\mathrm{T}}(t)\,dt.$$

Для рассматриваемого случая

$$\mathbf{W}(0,T) = \begin{bmatrix}1{,}1616326\cdot 10^{18} & 0{,}2169290\cdot 10^{18}\\ 0{,}2169290\cdot 10^{18} & 0{,}0405166\cdot 10^{18}\end{bmatrix},\quad \operatorname{rank}\mathbf{W}(0,T) = 2,$$

система (5.121) *полностью управляема* на интервале $[0, T]$.

Осуществим редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования сеточным методом с использованием квадратурной формулы трапеций с шагом $h = 0{,}05$ с.

Перейдем от системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (5.121) к векторно-матричному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Для данной системы имеем

$$\mathbf{X}(t) - \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau)\mathbf{X}(\tau)\,d\tau = \mathbf{F}(t),$$

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau)\mathbf{U}(\tau)\,d\tau + \mathbf{X}^0,$$

$$\begin{cases}\mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau) = \begin{bmatrix}\tau^2 & 1-\tau\\ 1+\tau & \tau-\tau^2\end{bmatrix}1(t),\\ \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau) = \begin{bmatrix}\tau^2 & 0\\ 1 & \tau\end{bmatrix}1(t).\end{cases}$$

Обозначим

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k),$$

$$\hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_k = \mathbf{U}(t_k).$$

Тогда конечномерный эквивалент для объекта управления (5.121) с использованием сеточно-матричного оператора системы можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.123}$$

где матрицы $\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}$ и $\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}$ имеют вид (приводятся вырезы матриц размером 8×8):

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0250 & 0{,}9999 & -0{,}0238 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0{,}0250 & 0 & -0{,}0263 & 0{,}9988 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0250 & -0{,}0001 & -0{,}0475 & 0{,}9998 & -0{,}0225 & 0 & 0 \\ -0{,}0250 & 0 & -0{,}0525 & -0{,}0024 & -0{,}0275 & 0{,}9978 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0250 & -0{,}0001 & -0{,}0475 & -0{,}0005 & -0{,}0450 & 0{,}9994 & -0{,}0213 \\ -0{,}0250 & 0 & -0{,}0525 & -0{,}0024 & -0{,}0550 & -0{,}0045 & -0{,}0287 & 0{,}9968 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0250 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0001 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0250 & 0 & 0{,}0250 & 0{,}0013 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0001 & 0 & 0{,}0003 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0250 & 0 & 0{,}0500 & 0{,}0025 & 0{,}0250 & 0{,}0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0001 & 0 & 0{,}0005 & 0 & 0{,}0006 & 0 \\ 0{,}0250 & 0 & 0{,}0500 & 0{,}0025 & 0{,}0500 & 0{,}0050 & 0{,}0250 & 0{,}0038 \end{bmatrix}.$$

Параметризованный функционал качества (5.122) определяется выражением

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k \left\{ \left[u_1(t_k)\right]^2 + \left[u_2(t_k)\right]^2 \right\} \to \min_{\hat{\mathbf{U}}}, \tag{5.124}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0{,}5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0{,}5; & k = N. \end{cases}$$

Теперь формулировка задачи в терминах математического программирования запишется так: *отыскать закон управления* $\tilde{\mathbf{U}}^*(t)$, *доставляющий минимум функционалу* (5.124) *при ограничениях* (5.123) *и*

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(t_N) = 0 \quad x_2(t_N) = 0\right]^{\mathrm{T}}. \tag{5.125}$$

Ограничения на управление и фазовые координаты не накладываются.

Решение оптимизационной задачи в пакете *Matlab* предполагает следующую модификацию ограничений типа равенств:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} \\ \mathbf{I}_{x_{1N}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_{x_{2N}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{U}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0 \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{5.126}$$

где $\mathbf{I}_{x_{1N}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}_{1\times N}$, $\mathbf{I}_{x_{2N}} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{1\times N}$.

Приведем результаты решения задачи оптимального перевода объекта (5.121) из состояния $\mathbf{X}^0$ в состояние $\mathbf{X}^T$. Соответствующие графики приводятся на рис. 5.17, *а–г*.

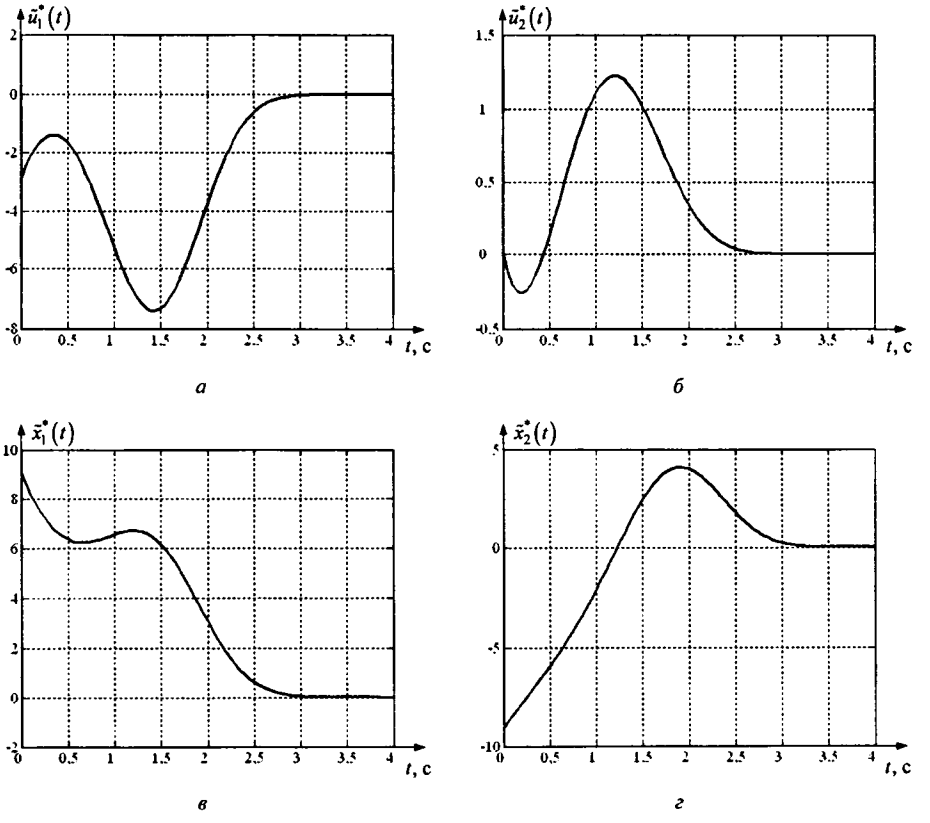


Рис. 5.17. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$

Текст программы *Matlab*, реализующей алгоритм решения задачи, представлен ниже.

```
clear all
close all
pack
clc

format short

% Data. %%%%
```

```
for k = 1:size_A(1)-1
    for j = 1:size_A(2)-1
        str = char(A(k,j));
        funstr = strcat(funstr,str,',');
    end
    str = char(A(k,size_A(2)));
    funstr = strcat(funstr,str,';');
end
for j = 1:size_A(2)-1
    str = char(A(size_A(1),j));
    funstr = strcat(funstr,str,',');
end
str = char(A(size_A(1),size_A(2)));
funstr = strcat(funstr,str,'];');

KX = inline(funstr,'t','tau')

B = subs(B,'t','tau');
size_B = size(B);
funstr = '[';
for k = 1:size_B(1)-1
    for j = 1:size_B(2)-1
        str = char(B(k,j));
        funstr = strcat(funstr,str,',');
    end
    str = char(B(k,size_B(2)));
    funstr = strcat(funstr,str,';');
end
for j = 1:size_B(2)-1
    str = char(B(size_B(1),j));
    funstr = strcat(funstr,str,',');
end
str = char(B(size_B(1),size_B(2)));
funstr = strcat(funstr,str,'];');

KU = inline(funstr,'t','tau')

% Constraints matrices forming. %%%%
```

```
for i = 1:N
    if i == 1
        X_ZER = X0;
    else
        X_ZER = [X_ZER; X0];
    end
end

AT = zeros(n,N*n);
AT(1,N*n-1) = 1;
AT(2,N*n) = 1;

AE = [AX -BU;
      AT  zeros(n,size(BU,2))];
BE = [X_ZER;
      XT    ];

% The functional forming. %%%%
```

```
xlabel('t, c')
ylabel('x1(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x2,'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x2(t)')
grid
zoom

figure
plot(x1,x2,'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('x1')
ylabel('x2(x1)')
grid
zoom

% Service function BETHA. %%%%
```

Ограничения (5.127) сформулируем в виде

$$-u_1(t_k) \le 6,\ u_2(t_k) \le 0{,}2,\ k = \overline{1,N}.$$

При этом к ограничениям типа равенств (5.126) следует добавить соответствующие ограничения типа неравенств.

Приведем результаты решения задачи синтеза оптимального управления по критерию минимальной энергии, обеспечивающего перевод объекта (5.121) из начального состояния в конечное при ограничениях (5.126), (5.127).

Соответствующие графики изображены на рис. 5.18, *а–г*.

Пример 5.8. Оптимальное управление транспортным самолетом при заходе на посадку [7].

Рассмотрим решение задачи с квадратичным функционалом качества более сложного вида.

Линеаризованное уравнение продольного движения самолета при заходе на посадку (рис. 5.19) представляет собой следующее дифференциальное уравнение:

$$\dddot{\theta} + 2\xi\omega_0\ddot{\theta} + (\omega_0)^2\dot{\theta} = KT_0(\omega_0)^2\dot{\eta} + K(\omega_0)^2\eta, \tag{5.128}$$

где θ — угол тангажа, η — угол отклонения руля высоты, ξ — коэффициент демпфирования угла тангажа, ω_0 — собственная частота, T_0 — постоянная времени, K — коэффициент передачи системы «отклонение руля высоты–угол тангажа». При выводе уравнения предполагалось, что путевая скорость v остается постоянной, а для путевого угла γ выполняется условие $|\gamma| << 1$. Если через h обозначить высоту полета, то зависимость между углом тангажа θ и скоростью снижения h самолета имеет вид

$$T_0\ddot{h} + \dot{h} = v\theta. \tag{5.129}$$

После некоторых преобразований получаем

$$\ddot{\theta} - \frac{1 - 2\xi T_0\omega_0}{T_0}\ddot{\theta} + \frac{1 - 2\xi T_0\omega_0 + (T_0\omega_0)^2}{(T_0)^2}\dot{\theta} - \frac{1 - 2\xi T_0\omega_0 + (T_0\omega_0)^2}{v(T_0)^2}\dot{h} = KT_0(\omega_0)^2\dot{\eta}.$$

С введением переменных состояния $x_1 = h$, $x_2 = \dot{h}$, $x_3 = \theta$, $x_4 = \dot{\theta}$, переменной управления $u = \eta$, а также новых постоянных

$$a_{22} = -1/T_0;\ a_{23} = v/T_0;\ a_{42} = \frac{1}{v(T_0)^2} - \frac{2\xi\omega_0}{vT_0} + \frac{\omega_0^2}{v};$$

$$a_{43} = -\frac{1}{(T_0)^2} + \frac{2\xi\omega_0}{T_0} - (\omega_0)^2;\ a_{44} = \frac{1}{T_0} - 2\xi\omega_0;\ k_0 = KT_0(\omega_0)^2,$$

полученное выше уравнение можно переписать в векторно-матричной нормальной форме [7]

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} + k_0\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}u. \tag{5.130}$$

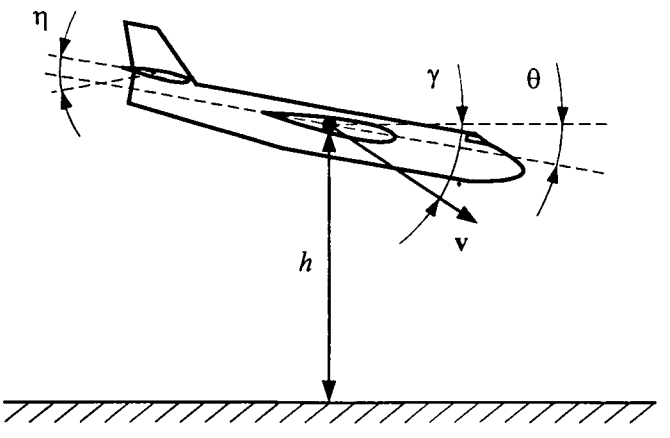


Рис. 5.19. Условные обозначения при рассмотрении задачи захода самолета на посадку

Граничные условия можно сформулировать следующим образом:

$$x_i(0) = x_{i0}, \quad i = 1, 2, 3, 4,$$

время T является заданным. Заход на посадку транспортного самолета осуществляется в последней фазе приземления до момента касания им посадочной полосы, в общем случае, по лучу; это означает, что самолет должен выдерживать как можно более точно требуемую траекторию. Поэтому в критерий оптимизации необходимо ввести отклонение действительной траектории от заданной. Кроме того, отклонение руля должно находиться в заданных пределах, чтобы обеспечить комфортные условия для пассажиров. Таким образом, имеем следующий функционал качества [7]:

$$I = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\rho_i\left[x_i(T)\right]^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\left\{\alpha\left[x_{1э}(t) - x_1(t)\right]^2 + \beta\left[u(t)\right]^2\right\}dt, \tag{5.131}$$

$$x_{1э} = x_{10}\exp(-t/3).$$

Коэффициенты $\rho_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ так же, как α и β, представляют собой весовые константы. Изменяя их, можно придать больший вес выполнению конечных условий, отклонению от заданной траектории или отклонению руля.

Зададимся следующими исходными данными [7]:

$$x_{10} = 30{,}5 \text{ м}; \; x_{20} = -6{,}1 \text{ м/с}; \; x_{30} = -0{,}078 \text{ рад}; \; x_{40} = 0 \text{ рад/с};$$

$$a_{22} = 0{,}4 \text{ с}; \; a_{23} = 31{,}2 \text{ м/с}^2; \; a_{42} = 0{,}0097\frac{1}{\text{м}\cdot\text{с}};$$

$$a_{43} = -0{,}76\ \frac{1}{\text{с}^2}; \; a_{44} = -0{,}6\ \frac{1}{\text{с}}; \; k_0 = -2{,}37\ \frac{1}{\text{с}^2};$$

$$T = 20 \text{ с}; \; \alpha = 10; \; \beta = 200000; \; \rho_i = 1000 \; (i = 1,2,3,4).$$

Решим задачу методом математического программирования с использованием матричных операторов.

Проверим управляемость системы по критерию Калмана. Матрица управляемости имеет вид

$$\mathbf{M}_y = \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B}\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -73{,}944 \\ 0 & 0 & -73{,}944 & 14{,}7888 \\ 0 & -2{,}37 & 1{,}422 & 0{,}348 \\ -2{,}37 & 1{,}422 & 0{,}948 & -2{,}3667768 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank}\mathbf{M}_y = 4.$$

Система является полностью управляемой.

Осуществим редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования сеточным методом с использованием квадратурной формулы трапеций с шагом $h = 0{,}25$ с.

Перейдем от системы дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (5.130) к векторно-матричному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Для данной системы имеем

$$\mathbf{X}(t) - \int_0^t \mathbf{k}_X(t,\tau)\mathbf{X}(\tau)d\tau = \mathbf{F}(t),$$

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{k}_U(t,\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau + \mathbf{X}^0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_X(t,\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 31{,}2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0{,}0097 & -0{,}76 & -0{,}6 \end{bmatrix} 1(t), \\ \mathbf{k}_U(t,\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2{,}37 \end{bmatrix} 1(t). \end{cases}$$

Обозначим

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix}, \; \mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k), \; \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix}, \; \mathbf{U}_k = \mathbf{U}(t_k).$$

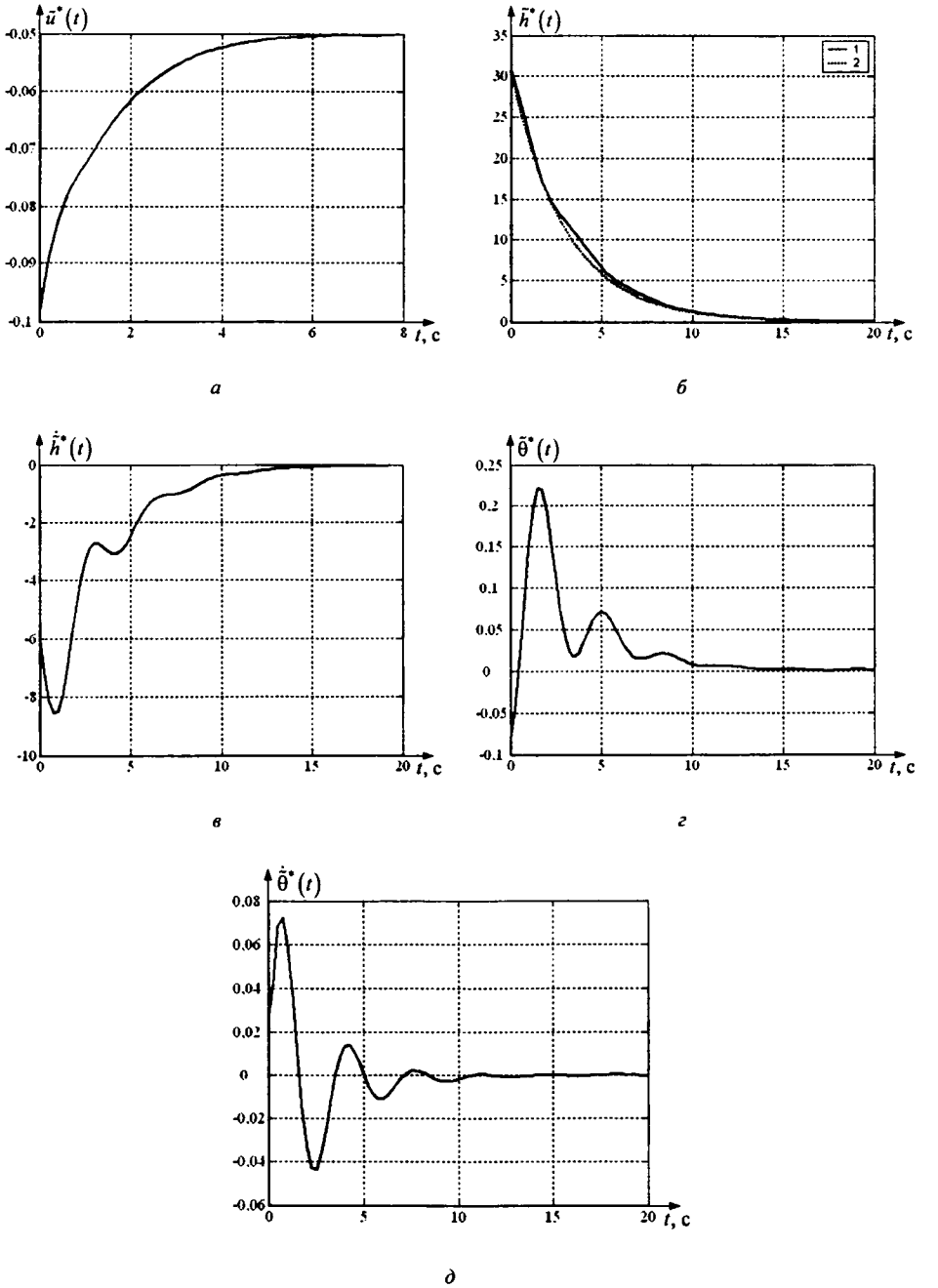


Рис. 5.20. Графики оптимального управления $\tilde{u}^*(t)$ и фазовых траекторий системы

Тогда конечномерный эквивалент для объекта управления (5.130) с использованием сеточно-матричного оператора системы можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.132}$$

где матрицы $\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}$ и $\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}$ имеют вид (приводятся вырезы матриц размером 8×8):

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1250 & 0 & 0 & 1,0000 & -0,1250 & 0 & 0 \\ 0 & -0,0500 & -3,9000 & 0 & 0 & 0,9500 & -3,9000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,5000 & 0 & 0 & 1,0000 & -0,5000 \\ 0 & -0,0012 & 0,0950 & 0,0750 & 0 & -0,0012 & 0,0950 & 1,0750 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2963 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,2963 & -0,2963 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теперь формулировка задачи в терминах математического программирования запишется так:

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\rho_k\left[x_k(t_N)\right]^2 + \frac{1}{2}\alpha\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[x_1(t_k) - x_{1_3}(t_k)\right]^2 + \frac{1}{2}\beta\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u(t_k)\right]^2 \to \min_{\hat{\mathbf{U}}}, \tag{5.133}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0,5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0,5; & k = N, \end{cases}$$

при ограничениях типа равенств (5.132). Ограничения на начальное состояние объекта управления учитываются ограничениями (5.132). Ограничения на управление и фазовые координаты отсутствуют.

Решение конечномерной оптимизационной задачи проведем в системе *Matlab 6.1*. При этом ограничения (5.132) следует привести к форме

$$\underbrace{\left[\mathbf{I} \quad -\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\right]}_{\mathbf{A}_{eq}}\underbrace{\begin{bmatrix}\hat{\mathbf{X}} \\ \hat{\mathbf{U}}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\left[\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0\right]}_{\mathbf{B}_{eq}}.$$

Приведем результаты решения задачи построения оптимального программного управления и оптимальной программы при $\delta^{\hat{x}_i} = 10^{-3}$, $\rho_i = 10^3$, $i = \overline{1,4}$, $\alpha = 10$, $\beta = 2 \cdot 10^5$. Графики функций $u^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t) = \tilde{h}^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t) = \dot{\tilde{h}}^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t) = \tilde{\theta}^*(t)$ и $\tilde{x}_4^*(t) = \dot{\tilde{\theta}}^*(t)$ представлены на рис. 5.20.

На рис. 5.20, *б* пунктирной линией обозначена эталонная траектория самолета при заходе на посадку, сплошной линией — реальная.

Приведем исходный текст программы, реализующей алгоритм решения оптимизационной задачи.

```
warning off
clear all
close all
pack
clc

format short

% Data. %%%%
```

```
         0  0         0      4;
         0  0.0097  -0.76   -0.6]);
B = sym([ 0;
          0;
          0;
         -2.37]);

X0 = [ 30.5;  -6.1; -0.078; 0];

xlet = X0(1,1)*exp(-t/3);
xlet_c = double(subs(xlet,'t',tc));

rho = 1000*ones(1,n);
alpha = 10;
beta = 2e5;

% Cores and functions forming. %%%%
```

```
        AX_row = [AX_row EYE];
        BU_row = [BU_row 0.5*KU(tc(i),tc(i))];
    else
        AX_row = [AX_row EYE+0.5*dt*KX(tc(i),tc(i))];
        BU_row = [BU_row 0.5*KU(tc(i),tc(i))];
    end
    for j = i+1:N
        AX_row = [AX_row ZER];
        BU_row = [BU_row ZERC];
    end
    if i > 1
        AX = [AX; AX_row];
        BU = [BU; BU_row];
    else
        AX = AX_row;
        BU = BU_row;
    end
end
BU = BU.*dt;

for i = 1:N
    if i == 1
        X_ZER = X0;
    else
        X_ZER = [X_ZER; X0];
    end
end

AE = [AX -BU];
BE = [X_ZER];

% The functional forming. %%%%
```

```
plot(tc,u,'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('u(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x1,'-k',tc,subs(x1et,'t',tc),':k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x1(t)')
legend('1','2')
grid
zoom

figure
plot(tc,x2,'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x2(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x3,'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t,c')
ylabel('x3(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x4,'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t,c')
ylabel('x4(t)')
grid
zoom

% Service function BETHA. %%%%
```

Если в задаче быстродействия не налагать ограничений на управление, то для любого наперед заданного $\varepsilon > 0$ *можно подобрать такое управление* $\mathbf{U}(t)$, *что длительность соответствующего процесса будет меньше* ε. Следовательно, **постановка задачи без ограничений на управление является некорректной**. Ограничения на управляющее воздействие имеют вид

$$\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m. \tag{5.138}$$

Кроме перечисленных выше ограничений, на фазовые траектории объекта (5.134) могут накладываться ограничения

$$\mathbf{X}(t) \in X^n \subset R^n. \tag{5.139}$$

Будем предполагать, что линейный объект (5.134) является *вполне управляемым*.

Осуществим редукцию математической модели объекта управления (5.134), основываясь на сеточном методе решения интегральных уравнений с операторными ядрами с использованием квадратурной формулы трапеций. Для параметризации вектора фазовых координат и вектора управления выберем шаг дискретизации h и определим число дискрет $N = T/h + 1$. Интервал времени $[0, T]$ представим дискретным набором точек t_k, $k = \overline{1,N}$. Для каждой дискретной точки временного интервала $\mathbf{X}(t_k) = \mathbf{X}_k$, $\mathbf{U}(t_k) = \mathbf{U}_k$, $k = \overline{1,N}$.

Для описания линейного динамического объекта (5.134) воспользуемся конечномерным эквивалентом

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.140}$$

где

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}21} & \mathbf{I} - 0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}31} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}32} & \mathbf{I} - 0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N1} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N2} & -h\mathbf{k}_{\mathbf{X}N3} & \cdots & \mathbf{I} - 0,5h\mathbf{k}_{\mathbf{X}NN} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} = h\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}21} & 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}31} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}32} & 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}N1} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}N2} & \mathbf{k}_{\mathbf{U}N3} & \cdots & 0,5\mathbf{k}_{\mathbf{U}NN} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{k}_{\mathbf{X}ij} = \mathbf{A}(t_j), \quad \mathbf{k}_{\mathbf{U}ij} = \mathbf{B}(t_j), \quad i, j = \overline{1,N},$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{X}(t_N) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(t_1) \\ \vdots \\ \mathbf{U}(t_N) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{X}}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{X}^0 \\ \vdots \\ \mathbf{X}^0 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{I}$ — единичная $(n \times n)$-матрица.

Рассмотрим два подхода к решению задачи максимального быстродействия в зависимости от вида ограничений, накладываемых на управляющее воздействие.

В первом случае ограничения на управляющее воздействие имеют вид

$$\left\{\int_0^T |u_k(t)|^{p_k}\,dt\right\}^{\frac{1}{p_k}} \le \mu_k,\quad k=\overline{1,m},\quad p_k \ge 1. \tag{5.141}$$

Для каждого входа, т.е. для каждого k, значения p_k и μ_k могут быть различными. Каждая компонента вектора управления может быть ограничена в зависимости от характера входа, например, по амплитуде $(p_k = 1)$ или по энергии $(p_k = 2)$. Система, обеспечивающая перевод объекта из состояния $\mathbf{X}^0$ в заданное состояние $\mathbf{X}^T$ за минимальное время T при ограничениях вида (5.141), называется *системой максимального быстродействия при ограничениях типа норм на компоненты вектора управления*. Можно сформулировать задачу следующим образом.

При заданных уравнении объекта (5.134), *ограничениях на управление* (5.141) *и соответствующих начальных условиях* (5.135) *необходимо найти управление* $\mathbf{U}^*(t)$, *которое за ранее фиксированное время* T *обеспечивает перевод системы в конечное состояние* (5.136) *и у которого норма* $\left\|\mathbf{U}^*(t)\right\|_{L^p[0,T]}$ *минимальна. Тогда решение, обеспечивающее максимальное быстродействие, определяется по решению задачи в данной постановке, и минимальное время* $T_{\min}$ *соответствует случаю, когда минимальная норма* $\left\|\mathbf{U}^*(t)\right\|_{L^p[0,T]} = \overline{\mu}$.

Задачи такого типа наиболее просто решаются для случая энергетических ограничений на компоненты вектора управления, т.е. для случая $p_k = 2$, $k = \overline{1,m}$. Пусть T_i — некоторый фиксированный момент времени. Тогда может быть поставлена и решена задача об оптимальном управлении $\mathbf{U}^*(t,T_i)$, переводящем объект (5.134) из начального состояния (5.135) в конечное (5.136) за время T_i, при этом

$$I\left(\mathbf{U}^*,T_i\right) = \int_0^{T_i}\left[\mathbf{U}^*(t,T_i)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{U}^*(t,T_i)\,dt = \min. \tag{5.142}$$

Если изменять временной интервал $[0, T_i]$ при предположении разрешимости задачи при каждом T_i, получим, что каждому T_i будет соответствовать оптимальное управление $\mathbf{U}^*(t,T_i)$ и некоторое значение энергии управления $I\left(\mathbf{U}^*,T_i\right)$. Рассмотрим неравенство

$$\left[I\left(\mathbf{U}^*,T_i\right)\right]^{\frac{1}{2}} \le \mu. \tag{5.143}$$

Очевидно, что минимальным временем $T_{\min}$ при ограничении (5.141) будет наименьшее из положительных чисел T_i, удовлетворяющее условию (5.143).

Параметризованный функционал качества (5.142) для каждого фиксированного T_i имеет вид

$$I\left(\hat{\mathbf{U}}\right) = h\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u_j(t_k)\right]^2\right\}, \tag{5.144}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0,5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0,5; & k = N. \end{cases}$$

Выполнение начальных условий (5.135) заложено в ограничении (5.140), конечномерный эквивалент для конечных условий (5.136) можно записать в виде

$$\mathbf{X}_N = \mathbf{X}^T. \tag{5.145}$$

Параметризованная форма ограничений типа неравенств, накладываемых на фазовые траектории объекта (5.134), определяется соотношениями вида

$$\begin{cases} x_i(t_k) \le x_i^+, \\ x_i(t_k) \ge x_i^-, \end{cases} \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, n}. \tag{5.146}$$

Таким образом, решение исходной задачи синтеза оптимального программного управления по критерию максимального быстродействия (5.134)–(5.139) сведем к решению *конечномерной оптимизационной задачи*

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = h\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u_j(t_k)\right]^2\right\} \to \min_{\mathbf{C}^{\hat{\mathbf{U}}}} \tag{5.147}$$

при ограничениях типа равенств (5.140), (5.145) и ограничениях типа неравенств (5.146).

Рассмотрим теперь случай, когда ограничения на управление имеют вид

$$|u_k(t)| \le u_k^{\max}, \quad k = \overline{1, m}. \tag{5.148}$$

Введем нормированное управляющее воздействие

$$\bar{\mathbf{U}}(t): \ \bar{u}_k(t) = \frac{1}{u_k^{\max}} u_k(t), \quad k = \overline{1, m}. \tag{5.149}$$

Нормированному управлению (5.149) в системе (5.134) соответствует модифицированная матрица $\bar{\mathbf{B}}(t)$.

Согласно принципу максимума Понтрягина, в задаче предельного быстродействия с ограничениями (5.148) *управляющее воздействие является кусочно-постоянной функцией, принимающей свои предельные значения*. Данный факт позволяет записать функционал (5.137), характеризующий быстродействие системы, в виде

$$I = \frac{1}{m}\int_0^T\left[\sum_{k=1}^{m}\bar{u}_k(t)\bar{u}_k^{-1}(t)\right]dt = \frac{1}{m}\int_0^T\sum_{k=1}^{m}\bar{u}_k^2(t)dt = \frac{1}{m}\int_0^T\left[\bar{\mathbf{U}}(t)\right]^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{U}}(t)dt. \tag{5.150}$$

Рассуждая аналогично рассмотренному выше случаю ограничений типа норм на компоненты вектора управления, можем записать выражение для параметризованного функционала (5.150)

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = h\left\{\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u_j(t_k)\right]^2\right\} \to \min_{\mathbf{C}^{\hat{\mathbf{U}}}}. \tag{5.151}$$

Параметризованное ограничение на управление (5.148) для редуцированной задачи имеет вид

$$|\bar{u}_i(t_k)| \le 1, \quad k = \overline{1, N}, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.152}$$

Таким образом, решение исходной задачи синтеза оптимального программного управления (5.134)–(5.139) сведено к решению конечномерной оптимизационной задачи. Проведем ее решение по следующему алгоритму. Зададимся некоторым значением $\varepsilon > 0$.

1. Зафиксируем некоторое конечное время T_i.
2. Решим при $T = T_i$ задачу синтеза оптимального программного управления с функционалом (5.151) при ограничениях (5.140), (5.145), (5.146), (5.152).
3. Вычислим $x_j(T_i)$, $j = \overline{1,n}$. Если фазовые координаты приходят в допустимую окрестность конечных значений, то выбирается новое значение $T_{i+1} < T_i$, если нет, то фиксируется $T_{i+1} > T_i$. Если $|T_i - T_{i-1}| \le \varepsilon$, то T_i принимается за минимальное и вычисления останавливаются. Если нет, то осуществляется переход к пункту 1.

Пример 5.9. Оптимальное по быстродействию управление положением ротора двигателя постоянного тока.

Рассмотрим объект управления — двигатель постоянного тока с управлением по току возбуждения (см. пример 5.6 из п. 5.4.2).

Постановка задачи: требуется отыскать управление $u^*(t)$, минимизирующее функционал качества

$$I = \int_0^T dt \to \min_{u \in U \subset R^1} \tag{5.153}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases} \tag{5.154}$$

$$\mathbf{X}^0 = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{X}^T = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \tag{5.155}$$

$$|u(t)| \le 1 \ \ \forall t \in [0, T]. \tag{5.156}$$

Ограничения на управление для данной задачи симметричны относительно нуля. Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $u^*(t)$ для данной задачи является релейной функцией, принимающей лишь свои предельные значения $|u_{\min}| = |u_{\max}| = 1$. Запишем функционал качества (5.153), характеризующий быстродействие системы (5.154) в виде

$$I = \int_0^T u(t) u^{-1}(t) dt = \int_0^T u^2(t) dt \to \min_{u \in \{-1, 1\}}. \tag{5.157}$$

Точное аналитическое решение задачи максимального быстродействия имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ -1, & 1 < t \le 2; \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} 0{,}5t^2, & 0 \le t \le 1; \\ -0{,}5t^2 + 2t - 1, & 1 < t \le 2; \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1; \\ 2 - t, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Для реализации алгоритма построения $\tilde{u}^*(t)$ воспользуемся методом математического программирования, а редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования осуществим сеточным методом с использованием квадратурной формулы трапеций с шагом $h = 0{,}01$ с.

Перейдем от системы дифференциальных уравнений в форме Коши (5.154) к векторно-матричному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Для данной системы имеем

$$\mathbf{X}(t) - \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t, \tau) \mathbf{X}(\tau) d\tau = \mathbf{F}(t),$$

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t, \tau) \mathbf{U}(\tau) d\tau + \mathbf{X}^0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t, \tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 1(t), \\ \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t, \tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1(t). \end{cases}$$

Конечномерный эквивалент для объекта управления (5.154) с использованием сеточно-матричного оператора системы можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.158}$$

где

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -0{,}5h\mathbf{k}_{X21} & \mathbf{I}-0{,}5h\mathbf{k}_{X22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ -0{,}5h\mathbf{k}_{X31} & -h\mathbf{k}_{X32} & \mathbf{I}-0{,}5h\mathbf{k}_{X33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -0{,}5h\mathbf{k}_{XN1} & -h\mathbf{k}_{XN2} & -h\mathbf{k}_{XN3} & \cdots & \mathbf{I}-0{,}5h\mathbf{k}_{XNN} \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} = h\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 0{,}5\mathbf{k}_{U21} & 0{,}5\mathbf{k}_{U22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} \\ 0{,}5\mathbf{k}_{U31} & \mathbf{k}_{U32} & 0{,}5\mathbf{k}_{U33} & \cdots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0{,}5\mathbf{k}_{UN1} & \mathbf{k}_{UN2} & \mathbf{k}_{UN3} & \cdots & 0{,}5\mathbf{k}_{UNN} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix},\ \mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k),\ \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix},\ \mathbf{U}_k = \mathbf{U}(t_k),\ \mathbf{k}_{\mathbf{X}ij} = \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t_i, \tau_j),\ \mathbf{k}_{\mathbf{U}ij} = \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t_i, \tau_j).$$

Постановка задачи в терминах математического программирования формулируется следующим образом:

$$I(\hat{\mathbf{U}}) = h\left\{\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u(t_k)\right]^2\right\} \to \min_{\mathbf{C}^{\hat{\mathbf{U}}}}, \tag{5.159}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0{,}5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0{,}5; & k = N, \end{cases}$$

при ограничениях типа равенств (5.158) и

$$\mathbf{X}_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

а также при ограничениях типа неравенств

$$|u(t_k)| \le 1,\ k = \overline{1, N}. \tag{5.160}$$

Ограничения, учитывающие начальное состояние объекта управления, заложены в (5.158).

Дискретные значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,2}$, приводятся в табл. 5.1.

Таблица 5.1

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

i	T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$	$\max\limits_k \lvert\tilde{u}(t_k)\rvert$
1	1,5	1,0000	$-2{,}2204\cdot10^{-16}$	1,7778
2	1,75	1,0000	$1{,}9984\cdot10^{-15}$	1,3061
3	1,85	1,0000	$-1{,}3323\cdot10^{-15}$	1,1688
4	1,9	1,0000	$-6{,}6613\cdot10^{-16}$	1,1081
5	1,95	1,0000	$7{,}7716\cdot10^{-16}$	1,0519
6	2	1,0000	$-6{,}6613\cdot10^{-16}$	1,0000
7	2,05	1,0000	$2{,}2914\cdot10^{-16}$	1,0000

На основании расчетных данных табл. 5.1 можем сделать вывод, что $T_{\min} = 2$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ ограничения на управление и конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$\tilde{u}^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2. \end{cases} \tag{5.161}$$

Приведем результаты решения задачи.

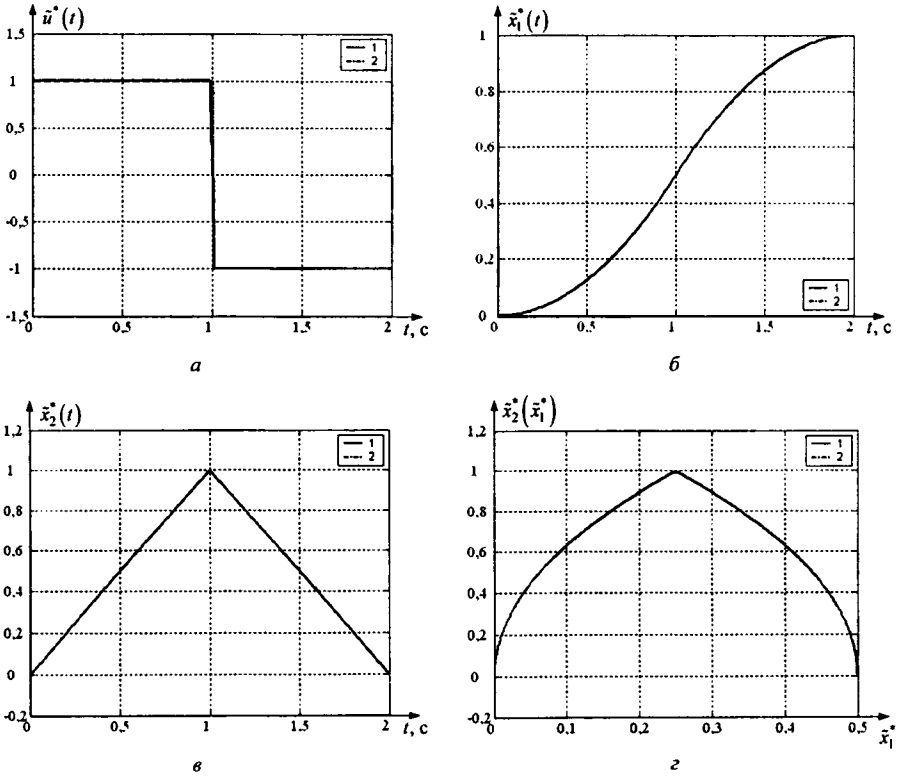


Рис. 5.21. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, сплошная линия) и точного решения задачи (2, пунктир), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

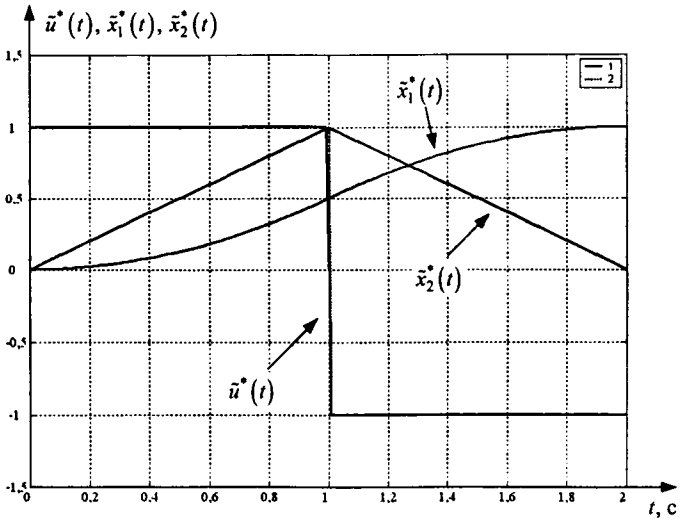


Рис. 5.22. Совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы

На рис. 5.21, *а–г* представлены графики функций $\bar{u}^*(t)$, $\bar{x}_1^*(t)$, $\bar{x}_2^*(t)$ и точного решения задачи, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\bar{u}^*(t)$. На рис. 5.22 представлены совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы максимального быстродействия.

Пример 5.10. Задача о наискорейшем приведении в меридиан гироскопического компаса с гидравлическим успокоителем собственных колебаний.

Прецессионное движение гироскопического компаса описывается следующей системой уравнений в пространстве состояний [53]:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(t), \tag{5.162}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1{,}53921}{41{,}1368} & -\dfrac{1{,}53921}{41{,}1368}\cdot 0{,}62 \\ 41{,}1368\cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & -1{,}5\cdot 10^{-3} & -1{,}5\cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Приведение гироскопического компаса в меридиан, т.е. приведение его в состояние $x_i = 0$, $i = \overline{1,3}$, выполняется путем приложения к гироскопическому компасу добавочной внешней силы $u(t)$. Приходим к следующей задаче [53].

Пусть задано начальное состояние гироскопического компаса $\mathbf{X}^0 = [0{,}3 \quad 0{,}01 \quad 0{,}01]^{\mathrm{T}}$. Требуется перевести гирокомпас в положение $\mathbf{X}^T = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ за наименьшее возможное время T при ограничении на управление

$$|u(t)| \le 0{,}6401\cdot 10^{-3}. \tag{5.163}$$

Таким образом, искомое управление $u(t)$ должно минимизировать функционал

$$I = \int_0^T dt \to \min_{u\in U\subset R^1}. \tag{5.164}$$

Ограничения на управление для данной задачи симметричны относительно нуля. Введем нормированное управляющее воздействие

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{0{,}6401\cdot 10^{-3}} u(t), \tag{5.165}$$

при этом математическая модель системы (5.162) примет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \bar{\mathbf{B}}\bar{u}(t), \quad \bar{\mathbf{B}} = [0{,}6401\cdot 10^{-3} \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \tag{5.166}$$

а ограничение на управление (5.163) будет

$$|\bar{u}(t)| \le 1. \tag{5.167}$$

Проверим управляемость системы (5.166). Матрица управляемости системы имеет вид

$$\mathbf{M}_y = [\bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{A}\bar{\mathbf{B}} \quad \mathbf{A}^2\bar{\mathbf{B}}] = \begin{bmatrix} 6{,}4010\cdot 10^{-4} & 0 & -9{,}8525\cdot 10^{-10} \\ 0 & 2{,}6332\cdot 10^{-8} & 0 \\ 0 & 0 & -3{,}9497\cdot 10^{-11} \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank}\mathbf{M}_y = 3,$$

система (5.166) является управляемой.

Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $\bar{u}^*(t)$ для данной задачи является кусочно-постоянной (релейной) функцией, т.е. принимает лишь свои предельные значения $|u_{\min}| = |u_{\max}| = 1$. Запишем функционал качества (5.164), характеризующий быстродействие системы (5.166), в виде

$$I = \int_0^T \bar{u}(t)\bar{u}^{-1}(t)dt = \int_0^T \bar{u}^2(t)dt \to \min_{u\in\{-1,\,1\}}. \tag{5.168}$$

Проведем редукцию бесконечномерной оптимизационной задачи (5.166)–(5.168) к конечномерному эквиваленту, используя сеточный метод решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода. Для данной системы имеем

$$\mathbf{X}(t) - \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau)\mathbf{X}(\tau)d\tau = \mathbf{F}(t),$$

$$\mathbf{F}(t)=\int_0^t \mathbf{k}_{\mathrm{U}}(t,\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{X}^0,$$

$$\begin{cases}\mathbf{k}_{\mathrm{X}}(t,\tau)=\begin{bmatrix}0 & -\dfrac{1,53921}{41,1368} & -\dfrac{1,53921}{41,1368}\cdot 0,62\\ 41,1368\cdot 10^{-6} & 0 & 0\\ 0 & -1,5\cdot 10^{-3} & -1,5\cdot 10^{-3}\end{bmatrix}1(t),\\ \mathbf{k}_{\mathrm{U}}(t,\tau)=\begin{bmatrix}0,6401\cdot 10^{-3}\\ 0\\ 0\end{bmatrix}1(t).\end{cases}$$

Конечномерный эквивалент для объекта управления (5.166) с использованием сеточно-матричного оператора системы можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}}=\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}}+\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.169}$$

где

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}=\begin{bmatrix}\mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathrm{X}21} & \mathbf{I}-0,5h\mathbf{k}_{\mathrm{X}22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathrm{X}31} & -h\mathbf{k}_{\mathrm{X}32} & \mathbf{I}-0,5h\mathbf{k}_{\mathrm{X}33} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ -0,5h\mathbf{k}_{\mathrm{X}N1} & -h\mathbf{k}_{\mathrm{X}N2} & -h\mathbf{k}_{\mathrm{X}N3} & \cdots & \mathbf{I}-0,5h\mathbf{k}_{\mathrm{X}NN}\end{bmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}=h\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ 0,5\mathbf{k}_{\mathrm{U}21} & 0,5\mathbf{k}_{\mathrm{U}22} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0}\\ 0,5\mathbf{k}_{\mathrm{U}31} & \mathbf{k}_{\mathrm{U}32} & 0,5\mathbf{k}_{\mathrm{U}33} & \cdots & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0,5\mathbf{k}_{\mathrm{U}N1} & \mathbf{k}_{\mathrm{U}N2} & \mathbf{k}_{\mathrm{U}N3} & \cdots & 0,5\mathbf{k}_{\mathrm{U}NN}\end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_N\end{bmatrix},\ \mathbf{X}_k=\mathbf{X}(t_k),\ \hat{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}\mathbf{U}_1\\ \vdots\\ \mathbf{U}_N\end{bmatrix},\ \mathbf{U}_k=\mathbf{U}(t_k),\ \mathbf{k}_{\mathrm{X}ij}=\mathbf{k}_{\mathrm{X}}(t_i,\tau_j),\ \mathbf{k}_{\mathrm{U}ij}=\mathbf{k}_{\mathrm{U}}(t_i,\tau_j).$$

Параметризованный функционал качества (5.168) запишется так:

$$I(\hat{\mathbf{U}})=h\left\{\sum_{k=1}^{N}\beta_k\left[u(t_k)\right]^2\right\}, \tag{5.170}$$

$$\beta_k=\begin{cases}0,5; & k=1,\\ 1; & k=\overline{2,N-1},\\ 0,5; & k=N.\end{cases}$$

Выполнение начальных условий оптимизационной задачи заложено в ограничениях (5.169), параметризованный же эквивалент конечных условий можем записать так:

$$\mathbf{X}_N=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.171}$$

Ограничение на управление (5.167) для редуцированной задачи определяется выражением

$$\left|\overline{u}(t_k)\right|\le 1,\ k=\overline{1,N}. \tag{5.172}$$

Решение задачи проведем в системе *Matlab 6.1*. Значения $\tilde{x}_k(T_j)$, $k=\overline{1,3}$, приводятся в табл. 5.2.

Из анализа результатов расчета, приведенных в табл. 5.2, можем заключить, что $T_{\min}=2040$ с, поскольку при $T=T_{\min}$ ограничения на управление и конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T>T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$\tilde{u}^*(t)=\begin{cases}-0{,}6401\cdot10^{-3}, & 0\le t<756{,}7336,\\ 0{,}6401\cdot10^{-3}, & 756{,}7336\le t<1747{,}1345,\\ -0{,}6401\cdot10^{-3}, & 1747{,}1345\le t<2040.\end{cases} \tag{5.173}$$

Таблица 5.2

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

i	T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$	$\tilde{x}_3(T_i)$	$\max\limits_k\lvert\tilde{u}(t_k)\rvert$
1	500,00000	$2{,}7596\cdot10^{-17}$	$9{,}1352\cdot10^{-19}$	$9{,}7685\cdot10^{-19}$	$4{,}7155\cdot10^{-4}$
2	900,00000	$9{,}7102\cdot10^{-17}$	$-1{,}4128\cdot10^{-17}$	$-4{,}9416\cdot10^{-18}$	$5{,}2587\cdot10^{-4}$
3	1300,00000	$4{,}7491\cdot10^{-17}$	$2{,}7769\cdot10^{-17}$	$-3{,}0419\cdot10^{-17}$	$7{,}3884\cdot10^{-4}$
4	1500,00000	$-3{,}7415\cdot10^{-17}$	$-1{,}9625\cdot10^{-17}$	$-3{,}3032\cdot10^{-17}$	$5{,}9089\cdot10^{-4}$
5	1700,00000	$3{,}6034\cdot10^{-17}$	$5{,}3504\cdot10^{-18}$	$-3{,}4089\cdot10^{-17}$	$4{,}7052\cdot10^{-4}$
6	1800,00000	$6{,}6051\cdot10^{-17}$	$6{,}0840\cdot10^{-18}$	$-2{,}2885\cdot10^{-17}$	$4{,}2002\cdot10^{-4}$
7	1900,00000	$-4{,}2069\cdot10^{-18}$	$-4{,}3677\cdot10^{-17}$	$8{,}6691\cdot10^{-17}$	$4{,}2002\cdot10^{-4}$
8	2000,00000	$-1{,}1272\cdot10^{-16}$	$-9{,}3615\cdot10^{-17}$	$3{,}6794\cdot10^{-17}$	$6{,}7056\cdot10^{-4}$
9	2040,00000	$-1{,}2570\cdot10^{-16}$	$5{,}0882\cdot10^{-17}$	$4{,}8052\cdot10^{-17}$	$6{,}4001\cdot10^{-4}$
10	2050,00000	$-1{,}3519\cdot10^{-16}$	$1{,}2778\cdot10^{-16}$	$3{,}5570\cdot10^{-17}$	$6{,}4001\cdot10^{-4}$

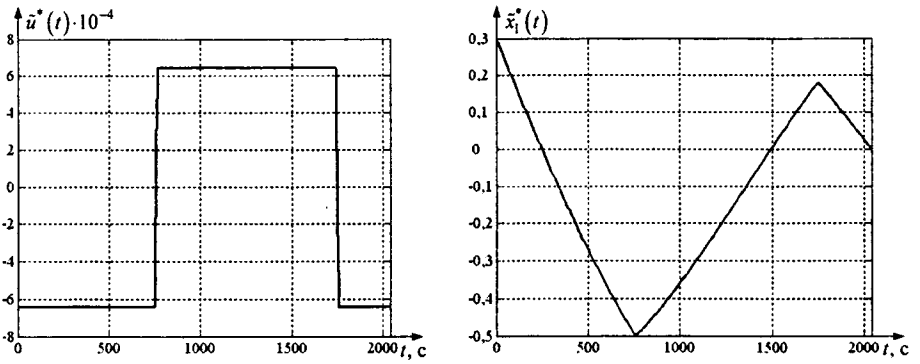


Рис. 5.23. Оптимальное управление $\tilde{u}^*(t)$ и фазовая траектория $\tilde{x}_1^*(t)$

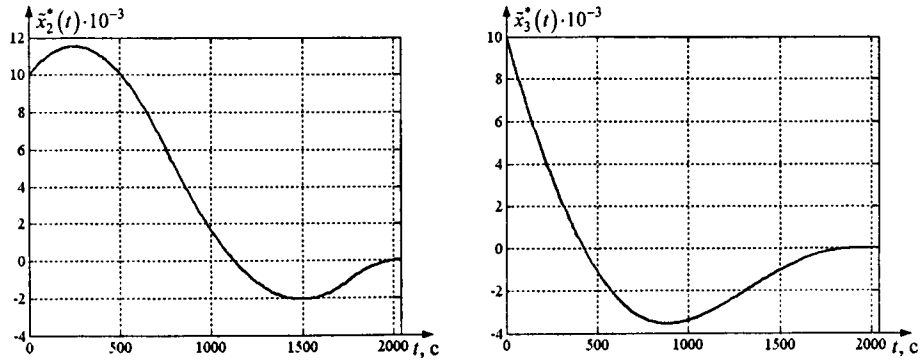


Рис. 5.24. Оптимальные фазовые траектории $\tilde{x}_2^*(t)$ и $\tilde{x}_3^*(t)$

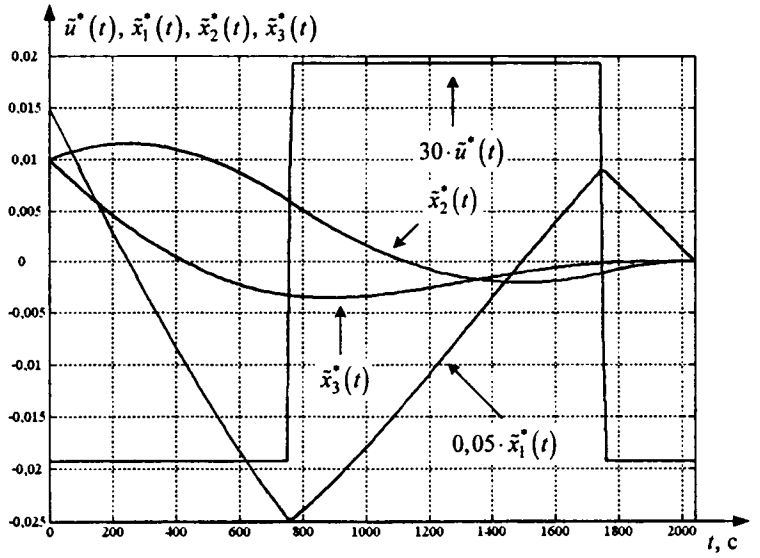


Рис. 5.25. Совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий

На рис. 5.23 изображены графики оптимального управления $\tilde{u}^*(t)$ и фазовой траектории $\tilde{x}_1^*(t)$, на рис. 5.24 — графики фазовых траекторий $\tilde{x}_2^*(t)$ и $\tilde{x}_3^*(t)$. На рис. 5.25 представлены совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы максимального быстродействия.

Приведем исходный текст программы *Matlab*, реализующей алгоритм решения задачи.

```
warning off
clear all
close all
pack
clc

format short

% Data. %%%%
```

```
    for j = 1:size_A(2)-1
        str = char(A(k,j));
        funstr = strcat(funstr,str,',');
    end
    str = char(A(k,size_A(2)));
    funstr = strcat(funstr,str,';');
end
for j = 1:size_A(2)-1
    str = char(A(size_A(1),j));
    funstr = strcat(funstr,str,',');
end
str = char(A(size_A(1),size_A(2)));
funstr = strcat(funstr,str,'];');

KX = inline(funstr,'t','tau')

size_B = size(B);
funstr = '[';
for k = 1:size_B(1)-1
    for j = 1:size_B(2)-1
        str = char(B(k,j));
        funstr = strcat(funstr,str,',');
    end
    str = char(B(k,size_B(2)));
    funstr = strcat(funstr,str,';');
end
for j = 1:size_B(2)-1
    str = char(B(size_B(1),j));
    funstr = strcat(funstr,str,',');
end
str = char(B(size_B(1),size_B(2)));
funstr = strcat(funstr,str,'];');

KU = inline(funstr,'t','tau')

% Constraints matrices forming. %%%%
```

```
    else
        X_ZER = [X_ZER; X0];
    end
end

AT = zeros(n,N*n);
AT(1,N*n-2) = 1;
AT(2,N*n-1) = 1;
AT(3,N*n) = 1;

AE = [AX -BU;
      AT  zeros(n,size(BU,2))];
BE = [X_ZER;
      XT    ];

AUN1 = zeros(N,N*n+N);
for i = 1:N
    AUN1(i,i+N*n) = 1;
end
AUN = [AUN1; -AUN1];
BUN = umax*ones(2*N,1);

% The functional forming. %%%%
```

```
plot(tc,x1,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x1(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x2,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x2(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x3,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t,c')
ylabel('x3(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,u*30,'-k',tc,x1*0.05,'-k',tc,x2,'-k',tc,x3,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t,c')
ylabel(' ')
grid
zoom

% Service function BETHA. %%%%
```

Пример 5.11. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: построить программное управление $u(t)$, переводящее объект

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \tag{5.176}$$

из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{5.177}$$

в конечное

$$\mathbf{X}^T = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{5.178}$$

при заданном значении $T = 3$ с, при этом функционал качества

$$I(u) = \int_0^T |u(t)|\,dt \tag{5.179}$$

принимал бы минимальное значение. На управление накладывается ограничение

$$|u(t)| \le 1. \tag{5.180}$$

Ограничения на фазовые координаты отсутствуют.

Точное решение задачи имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 0{,}4, \\ 0, & 0{,}4 < t \le 2{,}6, \\ 1, & 2{,}6 < t \le 3. \end{cases}$$

Осуществим редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования сеточным методом с использованием квадратурной формулы трапеций с шагом $h = 0{,}03$ с.

Для нахождения $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ методом математического программирования перейдем от системы дифференциальных уравнений в форме Коши (5.176) к векторно-матричному интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода. Для данной системы имеем

$$\mathbf{X}(t) - \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau)\mathbf{X}(\tau)\,d\tau = \mathbf{F}(t),$$

$$\mathbf{F}(t) = \int_0^t \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau)\mathbf{U}(\tau)\,d\tau + \mathbf{X}^0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{k}_{\mathbf{X}}(t,\tau) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} 1(t), \\ \mathbf{k}_{\mathbf{U}}(t,\tau) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 1(t). \end{cases}$$

Конечномерный эквивалент для объекта управления (5.176) с использованием сеточно-матричного оператора системы можно записать следующим образом:

$$\hat{\mathbf{X}} = \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}\hat{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}\hat{\mathbf{X}}^0, \tag{5.181}$$

где

$$\hat{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_k = \mathbf{X}(t_k), \quad \hat{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{U}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}_k = \mathbf{U}(t_k).$$

Для данной задачи матрицы $\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}}$ и $\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}}$ имеют вид (приводятся вырезы матриц размером 8×8):

$$\mathbf{A}^{\hat{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0150 & 1{,}0000 & -0{,}0150 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0150 & 0 & -0{,}0300 & 1{,}0000 & -0{,}0150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0150 & 0 & -0{,}0300 & 0 & -0{,}0300 & 1{,}0000 & -0{,}0150 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1{,}0000 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}^{\hat{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0150 & 0{,}0150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0150 & 0{,}0150 & 0{,}0150 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0150 & 0{,}0150 & 0{,}0150 & 0{,}0150 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

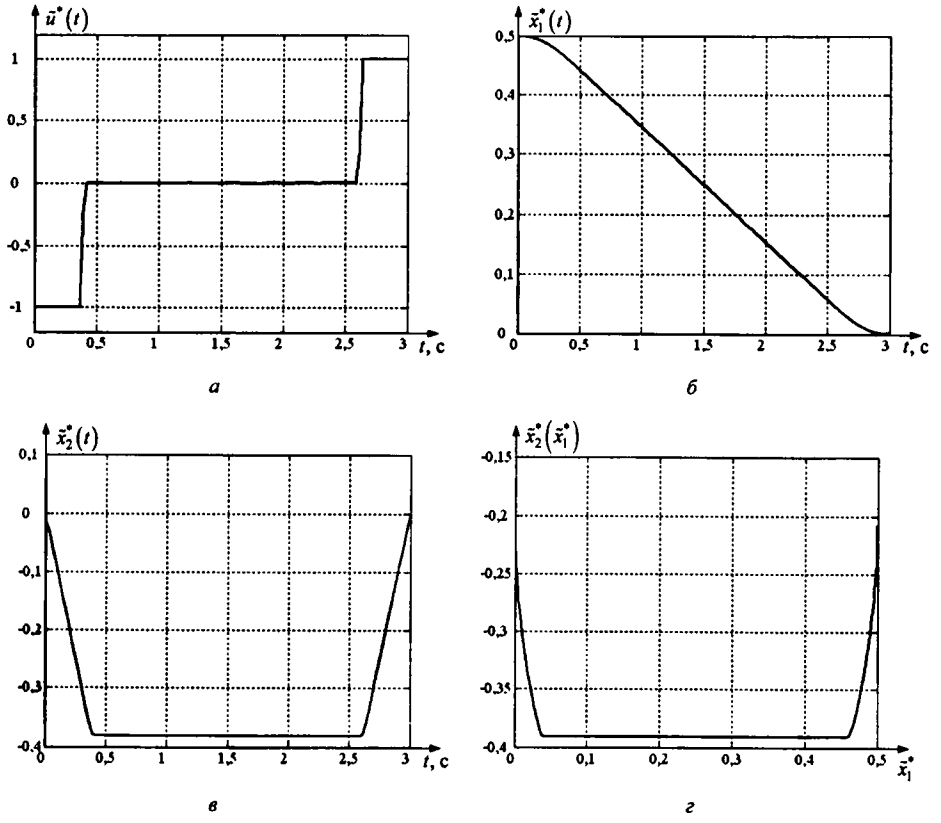


Рис. 5.26. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$,
г — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

Теперь формулировка задачи в терминах математического программирования выглядит так:

$$I\left(\hat{\mathbf{U}}\right) = h\sum_{k=1}^{N}\left|\beta_k u(t_k)\right| \to \min_{\hat{\mathbf{U}}}, \tag{5.182}$$

$$\beta_k = \begin{cases} 0{,}5; & k = 1, \\ 1; & k = \overline{2, N-1}, \\ 0{,}5; & k = N, \end{cases}$$

при ограничениях типа равенств (5.181) и

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(t_N) = 0 \quad x_2(t_N) = 0\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.183}$$

и ограничениях типа неравенств

$$\left|u(t_k)\right| \le 1, \quad k = \overline{1, N}. \tag{5.184}$$

Ограничения, учитывающие начальное состояние объекта управления (5.177), заложены в ограничения (5.181).

Решение задачи реализуем в системе *Matlab 6.1*. Приведем результаты решения. На рис. 5.26, *а–г* изображены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

5.5. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ: РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ И ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОГРАММ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДОВ

В предыдущем параграфе были подробно рассмотрены методы и алгоритмы решения задач оптимального управления с использованием сеточного представления функций для редукции этих задач к конечномерной форме.

При замене дифференциальных уравнений объектов управления их конечномерными эквивалентами (параметризация) с использованием конечных разностей требуется учитывать некоторые факторы. Их содержание покажем на примере.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+x=u(t),\qquad x(0)=x(1)=0. \tag{5.185}$$

Заменим функции $x(t)$ и $u(t)$ их сеточными эквивалентами; тогда (положим $t_i=ih,\ i=\overline{0,N};\ h=1/N$)

$$\frac{-x(t_{i-1})+2x(t_i)-x(t_{i+1})}{h^2}+x(t_i)=u(t_i)+\varepsilon_i(h),\qquad x(t_0)=x(t_N)=0,\ \ i=\overline{1,N-1}. \tag{5.186}$$

Считая, что $\varepsilon_i(h)$ малы, соотношения (5.186) запишем в виде

$$\frac{-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1}}{h^2}+x_i=u(t_i),\ \ i=\overline{1,N-1},\qquad x_0=x_N=0. \tag{5.187}$$

Решение системы (5.187) представляет собой приближенные значения точного решения $x(t)$ в узлах t_i.

Перепишем (5.187) в векторно-матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{h^2}+1 & -\frac{1}{h^2} & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{1}{h^2} & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{h^2} \\ \dots & \dots & \dots & -\frac{1}{h^2} & \frac{2}{h^2}+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{N-2} \\ x_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u(t_1) \\ u(t_2) \\ \vdots \\ u(t_{N-2}) \\ u(t_{N-1}) \end{bmatrix}. \tag{5.188}$$

Для последней системы характерно следующее:

- она имеет порядок $N-1$;
- матрица системы имеет отличными от нулевых лишь диагональ, поддиагональ и наддиагональ;
- для решения системы существуют простые экономичные алгоритмы.

Эти обстоятельства явились одной из причин того, что разностные методы с развитием ЭВМ имеют широкую область применения.

Однако имеют место и некоторые трудности, связанные с использованием разностных схем. Приведем некоторые из них и сделаем соответствующие выводы [3, 60]:

- *стремление уменьшить величины* $\varepsilon_i(h)$ *за счет других, более точных по сравнению с* (5.187), *соотношений может привести к системе уравнений с несимметричной матрицей. Отсутствие симметрии может повлечь ряд трудностей при численной реализации алгоритма решения;*
- *свойства оператора при переходе к разностному эквиваленту часто теряются.*

Рассмотрим задачу

$$-\frac{d^2x}{dt^2}+a_1\frac{dx}{dt}=u(t),\quad 0\le t\le 1,$$
$$x(0)=x(1)=0, \tag{5.189}$$

где $u(t)$ — достаточно гладкая функция, a — неотрицательное число.

Воспользуемся разностной аппроксимацией $\left(t_i=ih,\ i=\overline{0,N};\ h=1/N\right)$:

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t_i)=\frac{x(t_{i-1})-2x(t_i)+x(t_{i+1})}{h^2}+\varepsilon_{1,i}(h),$$
$$\frac{dx}{dt}(t_i)=\frac{x(t_{i+1})-x(t_i)}{h}+\varepsilon_{2,i}(h),$$

где $\varepsilon_{1,i}(h)\to 0$, $\varepsilon_{2,i}(h)\to 0$ при $h\to 0$.

Уравнению (5.189) соответствует дискретный эквивалент

$$\frac{-x_{i-1}+2x_i-x_{i+1}}{h^2}+a\frac{x_{i+1}-x_i}{h}=u(t_i),\quad i=\overline{1,N-1},$$
$$x_0=x_N=0. \tag{5.190}$$

Из рассмотрения последнего уравнения можно сделать вывод: *если постоянная* a *и шаг сетки* h *таковы, что* $ha>2$, *то матрица системы* (5.190) *заведомо не является положительно определенной, хотя оператор исходной задачи обладает этим свойством.*

В проекционных методах подобных ситуаций, как правило, не возникает. Поэтому к конструктивным алгоритмам параметризации часто приводят проекционные методы.

Рассмотрим содержание этого подхода. Предварительно отметим, что спектральные методы и аппарат матричного представления операторов лежат в русле проекционных методов (в спектральных методах, как правило, используются ортогональные базисы [90]).

Для численного решения экстремальных задач проекционный подход начал развиваться с работы В. Ритца (1908 г.), а для решения интегральных и дифференциальных уравнений первые проекционные схемы появились в работах И.Г. Бубнова, Б.Г. Галеркина (1915 г.) и Г.И. Петрова. Первые теоремы, обосновывающие проекционные методы, были опубликованы в статьях Н.Н. Боголюбова и Н.М. Крылова,

М.В. Келдыша. Дальнейшее развитие проекционные методы получили в работах Л.В. Канторовича, М.А. Красносельского, Г.И. Марчука, В.И. Агошкова, Г.М. Вайникко, М.К. Гавурина, И.К. Даугавета, П.П. Забрейко, С.Г. Михлина, Н.И. Польского, В.А. Треногина и других.

Проекционные методы здесь трактуются не как методы приближенного решения операторных уравнений, а как методы аппроксимации бесконечномерных задач конечномерными.

Осуществив проекционную аппроксимацию системы, исследователь сводит непрерывную систему к дискретной. Аппроксимировав различные условия задачи (функционалы, ограничения и т.п.), *можно перейти от исходной бесконечномерной ее формулировки к приближенной конечномерной задаче, которую можно решить численно с использованием вычислительной техники.*

Проекционные методы наиболее удобно и эффективно применяются при исследовании и проектировании линейных систем, однако их с успехом можно применять и для некоторых классов нелинейных систем.

Зададим функции

$$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_l(t), \quad l = 1, 2, \ldots .$$

Обозначим через $L_l\langle\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_l(t)\rangle$ линейную оболочку функций $\varphi_i(t)$, $i = \overline{1,l}$.

Систему $\boldsymbol{\Phi}(t) = \{\varphi_i(t)\}$ *называют базисом в* $L^2[0, T]$, *а функции* $\varphi_i(t)$ *называют базисными.* Проблема выбора базисных функций — одна из основных проблем, определяющая степень эффективности вычислительной схемы.

В соответствии с проекционным методом решение находится в виде

$$f_l(t) = \sum_{j=1}^{l} c_j^f \varphi_j(t), \tag{5.191}$$

где $\mathbf{C}^f = \begin{bmatrix} c_0^f & c_1^f & \ldots & c_l^f \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ — одностолбцовая матрица неизвестных коэффициентов.

Следующие факторы определяют достаточно высокую степень эффективности алгоритмов построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ с использованием проекционных методов:

- *имеется возможность выбора подходящих для каждой задачи базисов, обеспечивающих высокую точность приближения при небольшом числе членов разложения* (этот факт определяет размерность задачи). *В качестве базиса могут использоваться классические системы, сплайны, вейвлеты, может применяться сеточно-проекционная аппроксимация и др. Имеется возможность использовать последние результаты в области приближения функций;*
- *размерность задачи, как правило, меньше, чем в методе сеток;*
- *при реализации метода используется в большинстве случаев только матричный эквивалент оператора интегрирования, что, с одной стороны, значительно упрощает вычислительный процесс, а с другой — имеется возможность контролировать степень точности операции интегрирования;*
- *в свете сказанного выше возможен постоянный контроль точности решения всей задачи* (например, можно контролировать значения критерия качества при увеличении числа членов разложения и прекратить расчеты, если последующий результат мало отличается от предыдущего);

- *результаты расчетов, в отличие от метода сеток, сразу же представляются в аналитическом виде;*
- *степень сложности алгоритма мало зависит от порядка системы ДУ, описывающих поведение объекта управления.*

Пример 5.12. Пусть находится минимум функционала

$$I = \int_0^1 \left\{ \left[f'(t) \right]^2 + f^2(t) \right\} dt$$

при следующих краевых условиях:

$$f(0) = f^0 = 0, \quad f(1) = f^T = 1.$$

Выберем элементы базиса $\varphi_0(t) = t$, $\varphi_1(t) = t(1-t)$, $\varphi_2(t) = t^2(1-t)$.

Приближенное решение находится в виде

$$f_l(t) = t + c_1^f t(1-t) + c_2^f t^2(1-t). \tag{5.192}$$

Имеем

$$I = \int_0^1 \left[\left(1 + c_1^f - 2c_1^f t + 2c_2^f t - 3c_2^f t^2\right)^2 + \left(t + c_1^f t - c_1^f t^2 + c_2^f t^2 - c_2^f t^3\right)^2 \right] dt =$$

$$= \frac{4}{3} + \frac{1}{6} c_1^f + \frac{1}{10} c_2^f + \frac{11}{30} \left(c_1^f\right)^2 + \frac{11}{30} c_1^f c_2^f + \frac{1}{7} \left(c_2^f\right)^2.$$

Отсюда следует

$$\begin{cases} \frac{1}{6} + \frac{11}{15} c_1^f + \frac{11}{30} c_2^f = 0, \\ \frac{1}{10} + \frac{11}{30} c_1^f + \frac{2}{7} c_2^f = 0. \end{cases}$$

Из последней системы находим

$$c_1^f = -\frac{69}{473} = -0{,}146; \quad c_2^f = -\frac{7}{43} = -0{,}163.$$

Приближенное решение имеет вид

$$f_2(t) = t - 0{,}146 \cdot t(1-t) - 0{,}163 \cdot t^2(1-t).$$

Точное решение определяется зависимостью

$$f(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{e - e^{-1}}.$$

Легко видеть, что в простейшем случае проекционный метод дает очень хорошую точность. Метод применим для решения экстремальных задач для функций двух переменных.

Пример 5.13. Пусть ищется экстремум функционала

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left[\left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z} \right)^2 + 2f \right] \partial t \partial z \tag{5.193}$$

среди функций, обращающихся в нуль на границе квадрата, ограниченного прямыми $t = \pm 1$, $z = \pm 1$. Точное решение этой задачи найти не представляется возможным. Приближенное же решение будем находить в виде

$$f(t,z) = c^f \left(1 - t^2\right)\left(1 - z^2\right). \tag{5.194}$$

Имеем

$$I\left(c^f\right) = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \left\{ \left[-2c^f t \left(1 - z^2\right) \right]^2 + \left[-2c^f z \left(1 - t^2\right) \right]^2 + 2c^f \left(1 - t^2\right)\left(1 - z^2\right) \right\} dt dz =$$

$$= \frac{256}{45} \left(c^f\right)^2 + \frac{32}{9} c^f.$$

Отсюда находим $c^f = -\frac{5}{16}$; приближенное решение запишется так

$$f(t,z) = -\frac{5}{16}\left(1 - t^2\right)\left(1 - z^2\right).$$

Сравнение с точной формулой, имеющей вид бесконечного ряда, показывает, что погрешность этого приближенного решения в среднем равна 1,5%. Проекционный метод широко применяется при решении краевых задач дифференциальных уравнений, связанных с проблемой оптимального управления.

Пример 5.14. Управление положением ротора двигателя постоянного тока.

Выше были рассмотрены примеры применения проекционных методов для решения экстремальных задач. В настоящем примере рассмотрим применение проекционного подхода для решения задачи построения программного управления.

Постановка задачи: найти оптимальные процессы $u(t)$ и $\dot{x}(t)$, определяющие управление током якоря двигателя постоянного тока с независимым возбуждением и скоростью угла поворота вала двигателя, удовлетворяющие уравнению

$$\ddot{x}(t) = u(t)$$

и минимизирующие энергию управления

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt,$$

при условии, что задано

$$\int_0^T \dot{x}(t)dt = \alpha_0$$

и граничные условия по скорости нулевые.

Отметим, что *задача оптимального управления не может быть сведена к конечномерной задаче на безусловный экстремум из-за наличия соответствующих ограничений.*

Если управление находится в виде

$$u(t) = \sum_{i=1}^{l} c_i^u \varphi_i(t),$$

а $I = I\left(c_1^u, c_2^u, \ldots, c_l^u\right)$ — функционал (критерий оптимальности), то *для решения задачи из-за наличия дополнительных условий используется метод неопределенных множителей Лагранжа, т.е. формируется функция Лагранжа*

$$F = I\left(c_1^u, c_2^u, \ldots, c_l^u\right) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j Д_j\left(c_1^u, c_2^u, \ldots, c_l^u\right),$$

где $Д_j\left(c_1^u, c_2^u, \ldots, c_l^u\right) = 0$, $j = \overline{1,m}$, — уравнения, определяющие дополнительные условия на коэффициенты c_i^u, λ_j — неопределенные множители Лагранжа.

Зададим $u(t)$ в виде

$$u(t) = c_1^u \varphi_1(t) + c_2^u \varphi_2(t) + c_3^u \varphi_3(t),$$

где $\varphi_1(t) = 1$, $\varphi_2(t) = t$, $\varphi_3(t) = t^2$.

Найдем формулу, определяющую критерий оптимальности (энергия управления):

$$I = \int_0^T u^2(t)\,dt = \left(c_1^u\right)^2 T + \frac{\left(c_2^u\right)^2}{3} T^3 + \frac{\left(c_3^u\right)^2}{5} T^5 + c_1^u c_2^u T^2 + \frac{2c_1^u c_3^u}{3} T^3 + \frac{c_2^u c_3^u}{2} T^4.$$

Поскольку $\dot{x}_1 = x_2$, а $\dot{x}_2 = u$, то имеют место ограничения $x_2(0) = x_2(T) = 0$ — равенство нулю начальной и конечной скоростей.

Так как $\dot{x}_2 = u$ и, следовательно, $x_2(t) = c_1^u t + \frac{c_2^u}{2} t^2 + \frac{c_3^u}{3} t^3 + c$, где c — постоянная интегрирования, то $x_2(0) = 0$ $(c = 0)$ и $x_2(T) = Д_1\left(c_1^u, c_2^u, c_3^u\right) = c_1^u T + \frac{c_2^u}{2} T^2 + \frac{c_3^u}{3} T^3 = 0$ — первое дополнительное условие, накладываемое на неизвестные коэффициенты c_1^u, c_2^u, c_3^u.

Учитывая, что

$$\int_0^T x_2(t)\,dt = c_1^u \frac{T^2}{2} + c_2^u \frac{T^3}{6} + c_3^u \frac{T^4}{12} = \alpha_0,$$

получаем $Д_2\left(c_1^u, c_2^u, c_3^u\right) = c_1^u \frac{T^2}{2} + c_2^u \frac{T^3}{6} + c_3^u \frac{T^4}{12} - \alpha_0 = 0$ — второе дополнительное условие.

Теперь легко записать функцию Лагранжа

$$F = I\left(c_1^u, c_2^u, c_3^u\right) + \lambda_1 Д_1\left(c_1^u, c_2^u, c_3^u\right) + \lambda_2 Д_2\left(c_1^u, c_2^u, c_3^u\right),$$

где λ_1, λ_2 — неопределенные множители Лагранжа. Используя формулу $\frac{dF}{dc_i^u}=0$, $i=1,2,3$, и два уравнения дополнительных условий, получим систему алгебраических уравнений для расчета c_1^u, c_2^u, c_3^u, λ_1, λ_2:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2T & T^2 & \frac{2T^3}{3} & T & \frac{T^2}{2} \\ T^2 & \frac{2T^3}{3} & \frac{T^4}{2} & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} \\ \frac{2T^3}{3} & \frac{T^4}{2} & \frac{2T^5}{5} & \frac{T^3}{3} & \frac{T^4}{12} \\ T & \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{3} & 0 & 0 \\ \frac{T^2}{2} & \frac{T^3}{6} & \frac{T^4}{12} & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} c_1^u \\ c_2^u \\ c_3^u \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}}_{\mathbf{C}^u} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \alpha_0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}}, \tag{5.195}$$

или, что то же самое:

$$\mathbf{AC}^u = \mathbf{B}.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{C}^u = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} = \left[\frac{6\alpha_0}{T^2} \quad -\frac{12\alpha_0}{T^3} \quad -\frac{12\alpha_0}{T^2} \quad \frac{24\alpha_0}{T^3}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Оптимальное программное управление определяется формулой

$$u^*(t) = \frac{6\alpha_0}{T^2} - \frac{12\alpha_0}{T^3}t.$$

С учетом последней формулы легко построить оптимальную программу $\mathbf{X}^*(t)$.

Обратим внимание на тот факт, что *имевшие место ограничения относятся к ограничениям типа равенств*; ограничения типа неравенств отсутствуют.

Как указано в [95], *наиболее перспективным путем для реализации проекционных методов является применение ЭВМ на основе методов математического моделирования и нелинейного программирования.* Методы математического моделирования используются для вычисления процессов и критерия в синтезируемой системе, а методы нелинейного программирования — для поиска оптимальных параметров.

Далее изложим общий алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ методами математического программирования с использованием матричного представления операторов в ортогональных базисах[*].

5.5.1. Общий алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ методами математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов

При построении оптимальных программных управлений и оптимальных программ важно знать: существуют ли искомые функции? Этот вопрос составляет содержание проблемы существования оптимального управления. Оптимальное управление в ряде случаев может и не существовать, и обычно очень трудно утверждать заранее, существует ли оптимальное решение для данной конкретной задачи. Для этих целей *разработаны необходимые условия оптимальности* (если оптимальное решение существует, то оно должно удовлетворять необходимым условиям; этим же условиям могут удовлетворять и другие решения, не являющиеся оптимальными), *а также достаточные условия оптимальности* (выполнимость этих условий на решениях, удовлетворяющих необходимым условиям, гарантирует его оптимальность).

[*] Предварительно необходимо изучить положения, изложенные в п. 2.9 первого тома.

Необходимые условия оптимальности целесообразно использовать в том случае, если представляется возможность установить факт существования или существования и единственности оптимального управления. Иногда граничные условия заданы такими, что в силу ограниченности энергетических ресурсов системы допустимого управления не существует.

При решении задач оптимизации необходимо учитывать следующее: *из существования оптимального управления вытекает существование, по крайней мере, одного управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности, но и существования управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности, не вытекает существование оптимального управления.*

Из существования оптимального управления и единственности управления, удовлетворяющего необходимым условиям, вытекает единственность оптимального управления. Из существования и единственности оптимального управления не следует единственность управления, удовлетворяющего необходимым условиям оптимальности.

В качестве примера можно указать, что *принцип максимума Понтрягина в общем случае* (для нелинейных систем) *определяет необходимые условия оптимальности, а для задачи оптимального быстродействия в линейных системах при выполнении условий нормальности принцип максимума есть не только необходимое, но и достаточное условие оптимального управления. Оптимальное управление в этом случае единственно.* В связи со сказанным выше важной является задача построения какого-либо решения, удовлетворяющего необходимым условиям, после чего целесообразно проверить, является ли оно действительно оптимальным в смысле постановки конкретной задачи.

Далее рассмотрим общий подход к построению алгоритма расчета оптимальных программных управлений и оптимальных программ на примере линейных нестационарных объектов, поведение которых описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0. \tag{5.196}$$

Приведем этапы общего алгоритма [80].

1-й этап: *техническая формулировка задачи.* Техническую формулировку задачи обычно делают в содержательных терминах, присущих рассматриваемой инженерной задаче.

Например, при проектировании системы оптимального управления самолетом вертикального взлета и посадки определяют физические переменные, характеризующие состояние управляемого объекта, находят управляющие функции, также представляющие собой физические параметры, изменяемые во времени (например, тяга двигателя, угол атаки, угол крена и др.) [80].

На этом этапе важным является вопрос выбора критерия оптимизации; последний целиком определяется содержанием инженерной задачи. Например, достижение назначенной точки происходит с минимальным расходом горючего или за минимальное время и т.д.

2-й этап: постановка математической задачи оптимизации.

На этом этапе строится математическое описание физического объекта (например, самолета) и процесса управления в рамках принятой степени полноты.

Техническая постановка задачи и ее математическая модель в процессе исследования не остаются неизменными, а находятся во взаимодействии друг с другом. Построение адекватной математической модели представляет собой *итерационный процесс*, в ходе которого уточняются как постановка самой технической задачи, так и формулировка математической модели.

Например, в задаче управления самолетом вертикального взлета и посадки строится математическая модель в форме системы дифференциальных уравнений. Переменные, входящие в эту систему уравнений (например, модуль воздушной скорости, угол наклона траектории, угол поворота вектора скорости, координаты центра масс в земной системе), могут служить фазовыми координатами, а тяга двигателя, угол атаки, угол крена — управляющими функциями, которые подлежат определению из условия достижения цели управления.

3-й этап: *исследование управляемости и наблюдаемости объекта*; *выбор общего подхода к решению математической задачи оптимизации.*

В рассматриваемом случае аппаратом оптимизации является математическое программирование.

Третий этап включает в себя следующие подэтапы:

1. Редукция математической модели объекта управления к конечномерному эквиваленту. Параметризация вектор-функций $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ осуществляется с помощью разложения по выбранному базису (удерживается конечное число членов разложения).

Выше указывалось, что выбор базиса — важнейший этап в построении алгоритма, поскольку от него зависит размерность задачи конечномерной оптимизации.

Базисом могут служить классические ортогональные системы, сплайны, вейвлеты, блочно-импульсные функции и др. Важными при выборе базиса являются следующие факторы:

- *обеспечение быстрой сходимости при аппроксимации компонент* $\mathbf{X}(t)$ *и* $\mathbf{U}(t)$ *на заданном промежутке* $[0,T]$, *т.е. метод не должен носить локальный характер*;
- *возможность постоянного контроля значения функционала при изменении размерности задачи с целью, в конечном счете, оценки точности аппроксимации бесконечномерной задачи конечномерным эквивалентом*;
- *возможность построения алгоритма, позволяющего выбирать размерность конечномерного эквивалента из условий инженерной постановки задачи*;
- *возможность получать результаты в аналитической форме с целью их использования на последующих этапах синтеза оптимальной системы.*

Далее в расчетах используются ортонормированные базисы, или так называемое спектральное представление функций. Пусть

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_{1l}(t) = \sum\limits_{k=1}^{l} c_k^{x_1} \varphi_k(t) \\ \vdots \\ \tilde{x}_{nl}(t) = \sum\limits_{k=1}^{l} c_k^{x_n} \varphi_k(t) \end{bmatrix}, \tag{5.197}$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_l(t) = \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1l}(t) = \sum\limits_{k=1}^{l} c_k^{u_1} \varphi_k(t) \\ \vdots \\ \tilde{u}_{ml}(t) = \sum\limits_{k=1}^{l} c_k^{u_m} \varphi_k(t) \end{bmatrix}, \tag{5.198}$$

где индекс l, как правило, будем опускать, или, что то же самое:

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}^{x_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}^{x_n}\end{bmatrix}=\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{X}},\quad \tilde{\mathbf{U}}_l(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}^{u_1}\\ \vdots\\ \boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}^{u_m}\end{bmatrix}=\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{U}},$$

где

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t) & & 0\\ & \boldsymbol{\Phi}(t) & \\ & \ddots & \\ 0 & & \boldsymbol{\Phi}(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{\mathbf{X}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{x_1}\\ \mathbf{C}^{x_2}\\ \vdots\\ \mathbf{C}^{x_n}\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{\mathbf{U}}=\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{u_1}\\ \mathbf{C}^{u_2}\\ \vdots\\ \mathbf{C}^{u_m}\end{bmatrix}$$

— клеточные матрицы.

Учитывая конечномерные представления вектор-функций $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ для линейного нестационарного объекта (5.196), можно воспользоваться конечномерным эквивалентом, представляющим собой уравнение с проекционно-матричным оператором (см. формулу (2.346) в п. 2.9.1 первого тома)

$$\mathbf{C}^{\mathbf{X}}=\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}}+\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Phi}_N^0. \tag{5.199}$$

2. Редукция функционала качества к конечномерному эквиваленту.

С учетом рассуждений, которые были приведены выше, функционал качества можно переписать в виде

$$I=\int_0^T f_0\left(\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{X}},\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{U}},t\right)dt=I\left(\mathbf{C}^{\mathbf{X}},\mathbf{C}^{\mathbf{U}}\right). \tag{5.200}$$

Поскольку

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t)=\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{X}},\quad \tilde{\mathbf{U}}_l(t)=\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{U}},$$

а $\mathbf{C}^{\mathbf{X}}=\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\left(\mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}}+\boldsymbol{\Phi}_N^0\right)=\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}}+\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Phi}_N^0$, то *получим функционал, зависящий только от спектральных характеристик компонент вектора управления*:

$$I\left(\mathbf{C}^{\mathbf{U}}\right)=\int_0^T f_0\left(\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\left(\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}}+\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\boldsymbol{\Phi}_N^0\right),\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{U}}\right)dt.$$

3. Редукция краевых условий к конечномерному эквиваленту.

При $t=T$ фазовая траектория $\mathbf{X}(t)$ должна «попадать» в область, близкую, в известном смысле, к точке $\mathbf{X}^T$, т.е.

$$\rho\left(\mathbf{X}^T,\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\mathbf{X}}\right)\le\varepsilon. \tag{5.201}$$

Таким образом, достаточно достичь желаемого состояния с некоторой наперед заданной точностью, что хорошо согласуется с запросами практики.

В *идеальном случае* имеет место ограничение типа равенства

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\mathbf{X}}=\mathbf{X}^T.$$

Начальные условия $\mathbf{X}^0$ автоматически выполняются, так как они учитываются ограничением (5.199).

Очевидно, ограничения, порожденные краевыми условиями, при использовании рассматриваемого подхода приводят к необходимости исследования сходимости рядов

$$\tilde{x}_{il}(t)\approx\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}^{x_i},\quad i=\overline{1,n}, \tag{5.202}$$

на промежутке $[0,T]$, включая точки $t=0$ и $t=T$.

4. Редукция ограничений типа неравенств к конечномерному эквиваленту. Параметрическая форма этих ограничений имеет вид

$$\begin{aligned}&\bar{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathrm{X}} \in X^n \subset R^n \quad \forall t \in [0,T],\\ &\bar{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\mathrm{U}} \in U^m \subset R^m \quad \forall t \in [0,T].\end{aligned} \tag{5.203}$$

В частном случае ограничения, накладываемые на все или отдельные фазовые координаты, могут иметь вид

$$\left|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{x_k}\right| \le x_k^{\text{доп}};\ \ t \in [0,T],\ \ k = \overline{1,n}, \tag{5.204}$$

где $x_k^{\text{доп}}$ — константы.

Совокупность ограничений вида (5.203) или (5.204) формирует в фазовом пространстве область «разрешенных» значений фазового вектора.

В систему неравенств (5.203) и (5.204) входит непрерывное время t. Заменим эти ограничения системой дискретных ограничений. Для этого на отрезке $[0,T]$ введем конечное множество

$$T_g = \left\{t_j:\ j = 1,2,\ldots,g_1;\ \ t_1 = 0,\ \ t_{g_1} = T,\ \ t_i < t_{i+1}\right\},$$

которое назовем *сеткой ограничений. Точки* t_j *будем называть узлами сетки* T_g. Если расстояние $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ между соседними узлами постоянно (не зависит от j), т.е. $\Delta t_j = \Delta t$ для всех $j = \overline{2,g_1}$, то *сетку* T_g *называют равномерной, в противном случае — неравномерной.* Вместо вектор-функции $\mathbf{X}(t) = \left[x_1(t)\ \ \ldots\ \ x_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$, определенной для всех $t \in [0,T]$, будем рассматривать *сеточную функцию* $\mathbf{X}_j = \mathbf{X}(t_j)$ целочисленного аргумента $j = \overline{1,g_1}$ для узла t_j сетки T_g.

В задачах оптимизации сетка T_g в общем случае является неравномерной, ее можно выбирать экспериментально, причем обычно реализуется следующая последовательность действий:

- на основе изучения динамических свойств объекта и опыта эксплуатации систем, близких по свойствам к проектируемой, строят сетку ограничений;
- решают задачу оптимизации с построенной сеткой ограничений;
- строят оптимальную фазовую траекторию;
- проводят анализ полученных результатов; цель анализа заключается в том, чтобы выяснить наличие таких моментов времени $t \in [0,T]$, в которых траектория системы находится вне допустимой области. Если это имеет место, то строят новую сетку, причем в окрестности выхода траектории из допустимой области интервал дискретизации уменьшается.

4-й этап: *выбор численного метода решения задачи математического программирования.*

Если в результате решения задачи нелинейного программирования получены одностолбцовые матрицы коэффициентов Фурье компонент вектора управления $\mathbf{C}^{u_1^*}, \mathbf{C}^{u_2^*}, \ldots, \mathbf{C}^{u_m^*}$, то оптимальное программное управление определяют с помощью зависимости $\tilde{u}_k^*(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{u_k^*}$, $k = \overline{1,m}$, а оптимальные фазовые траектории находят по формулам $\tilde{x}_k^*(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{x_k^*}$, $k = \overline{1,n}$.

Общие черты и различия в форме записи функционала качества и ограничений для бесконечномерной и конечномерной постановок задачи иллюстрирует табл. 5.3.

Таблица 5.3

К постановке задачи оптимального управления

Бесконечномерная постановка задачи	Конечномерная постановка задачи, ориентированная на применение методов математического программирования
$I = \int_0^T f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t),t)dt \to \min;$	$I(\mathbf{C}^{\mathbf{U}}) \to \min_{\mathbf{C}^{\mathbf{U}}};$
$\begin{cases}\mathbf{U}(t)\in U^m \subset R^m \quad \forall t\in[0,T],\\ \mathbf{X}(t)\in X^n \subset R^n \quad \forall t\in[0,T]\end{cases}$ — ограничения типа неравенств;	$\begin{cases}\bar{\Phi}(t_i)\left(\mathbf{A}^{\mathbf{X}}\mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}} + \mathbf{A}^{\mathbf{X}}\Phi_N^0\right)\in X^n \subset R^n,\\ \bar{\Phi}(t_i)\mathbf{C}^{\mathbf{U}}\in U^m \subset R^m\end{cases}$ — ограничения типа неравенств;
$\begin{cases}\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0,\ \mathbf{X}(T)=\mathbf{X}^T,\\ \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{X} + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}\end{cases}$ — ограничения типа равенств	$\begin{cases}\bar{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\mathbf{X}} = \mathbf{X}^T,\\ \tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{X}}\mathbf{C}^{\mathbf{X}} = \mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}} + \Phi_N^0\end{cases}$ — ограничения типа равенств

Проиллюстрируем применение изложенных выше положений для решения задачи оптимизации, когда

$$I = \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)dt, \quad \mathbf{U}(t)\in C[0,T]. \tag{5.205}$$

Управление $\mathbf{U}(t)$ должно обеспечить перевод объекта из начального состояния $\mathbf{X}^0$ в конечное состояние $\mathbf{X}^T$ за промежуток времени $[0,T]$, причем критерий (5.205) должен иметь минимальное значение. Потребуем, чтобы фазовые координаты $x_k(t)$ находились в области допустимых значений, которая может быть задана соответствующими неравенствами. Для примера потребуем, чтобы

$$u_{i\max} - |u_i(t)| \ge 0 \quad \forall t\in[0,T],\ i=\overline{1,m}; \tag{5.206}$$

$$x_{j\max} - |x_j(t)| \ge 0 \quad \forall t\in[0,T],\ j=\overline{1,n}, \tag{5.207}$$

где $u_{i\max}$ и $x_{j\max}$ — заранее заданные скалярные величины.

Положим, что при заданных условиях существует единственная вектор-функция $\mathbf{U}^*(t)$. Для решения задачи выберем ОНБ, удовлетворяющий соответствующим условиям, связанным со сходимостью приближенных решений к точным на $[0,T]$ и в точках $t=0$ и $t=T$. Обозначим $\Phi(t)=[\varphi_1(t)\ \ \varphi_2(t)\ \ \dots\ \ \varphi_l(t)]$. Подставим компоненты вектора управления в форме $\tilde{u}_k(t)=\sum_{v=1}^{l} c_v^{u_k}\varphi_v(t)=\Phi(t)\mathbf{C}^{u_k}$, $k=\overline{1,m}$; компоненты вектора состояния имеют вид $\tilde{x}_k(t)=\Phi(t)\mathbf{C}^{x_k}$, $k=\overline{1,n}$.

Выразим критерий качества и ограничения через коэффициенты $c_1^{u_1}, c_2^{u_1}, \dots, c_l^{u_1}$, $c_1^{u_2}, \dots, c_l^{u_m}, \dots, c_l^{x_n}$, при этом

$$I = \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)dt = \int_0^T\left[\sum_{v=1}^{m} u_v^2(t)\right]dt = \sum_{v=1}^{m}\sum_{r=1}^{l}\left[c_r^{u_v}\right]^2 = I(\mathbf{C}^{\mathbf{U}}). \tag{5.208}$$

В рассматриваемой задаче имеют место ограничения типа равенств и неравенств. Неравенства (5.206), (5.207) в соответствии с постановкой задачи должны быть выполнены для всех $t \in [0, T]$.

Построим сетку ограничений $T_g = \{t_j : j = \overline{1,g}\}$. Тогда неравенства (5.206) и (5.207) можно переписать в виде

$$u_{i\max} - \left|\Phi(t_k)\mathbf{C}^{u_i}\right| \geq 0 \quad \forall t_k,\ k = \overline{1,g},\ i = \overline{1,m},$$

$$x_{j\max} - \left|\Phi(t_k)\mathbf{C}^{x_j}\right| \geq 0 \quad \forall t_k,\ k = \overline{1,g},\ j = \overline{1,n}.$$

Сформулированная задача построения оптимального программного управления и оптимальной программы свелась к задаче квадратичного программирования:

$$I(\mathbf{C}^{\mathbf{U}}) = \sum_{v=1}^{m}\sum_{r=1}^{l}\left[c_r^{u_v}\right]^2 \to \min_{\mathbf{C}^{\mathbf{U}}}$$

при ограничениях вида

$$\begin{cases} u_{i\max} - \left|\Phi(t_k)\mathbf{C}^{u_i}\right| \geq 0, & k = \overline{1,g},\ i = \overline{1,m}, \\ x_{j\max} - \left|\Phi(t_k)\mathbf{C}^{x_j}\right| \geq 0, & k = \overline{1,g},\ j = \overline{1,n}, \end{cases}$$

— ограничения типа неравенств;

$$\begin{cases} \Phi(T)\mathbf{C}^{\mathbf{X}} \approx \mathbf{X}^T, \\ \tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{X}}\mathbf{C}^{\mathbf{X}} = \mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}} + \Phi_N^0 \end{cases}$$

— ограничения типа равенств.

Рассмотренный выше метод можно применять для класса нелинейных систем с аналитическими нелинейностями. После разложения аналитических нелинейностей в ряды будут иметь место операции умножения, которые имеют эквивалентное спектральное представление, использующее матричный оператор умножения. Кроме того, *метод легко обобщается на случай, если объекты описываются дифференциальными уравнениями с запаздыванием и в частных производных.* Структурная схема алгоритма представлена на рис. 5.27.

Преимущество введения параметрических представлений по сравнению с другими приемами состоит в том, что отпадает необходимость решать уравнение для сопряженных переменных, а для оптимизации могут использоваться стандартные методы поиска в конечномерном пространстве. Кроме того, *параметрические представления можно использовать для оптимизации моделей сложных технологических процессов по результатам экспериментов, планируемых и проводимых непосредственно самой системой управления.* Это позволяет избежать усложнения используемых моделей, что особенно существенно для практики. Как указано, анализ конкретных задач оптимального управления показывает, что при решении практических проблем не следует ограничиваться заданием единственного параметрического представления.

Необходимо опробовать несколько моделей, чтобы убедиться в том, что выбранная модель действительно является достаточно общей.

Процедура параметризации управлений часто представляется достаточно эффективной, поскольку она очень проста и позволяет применять стандартные приемы поиска экстремума. Основной ее недостаток — трудности исследования вопросов сходимости на промежутке $[0, T]$. Небольшая скорость сходимости приводит к отсутствию гарантии того, что параметризированное управление достаточно близко, в известном смысле, к оптимальному, если, конечно, базис разложения не выбирается каким-либо специальным образом.

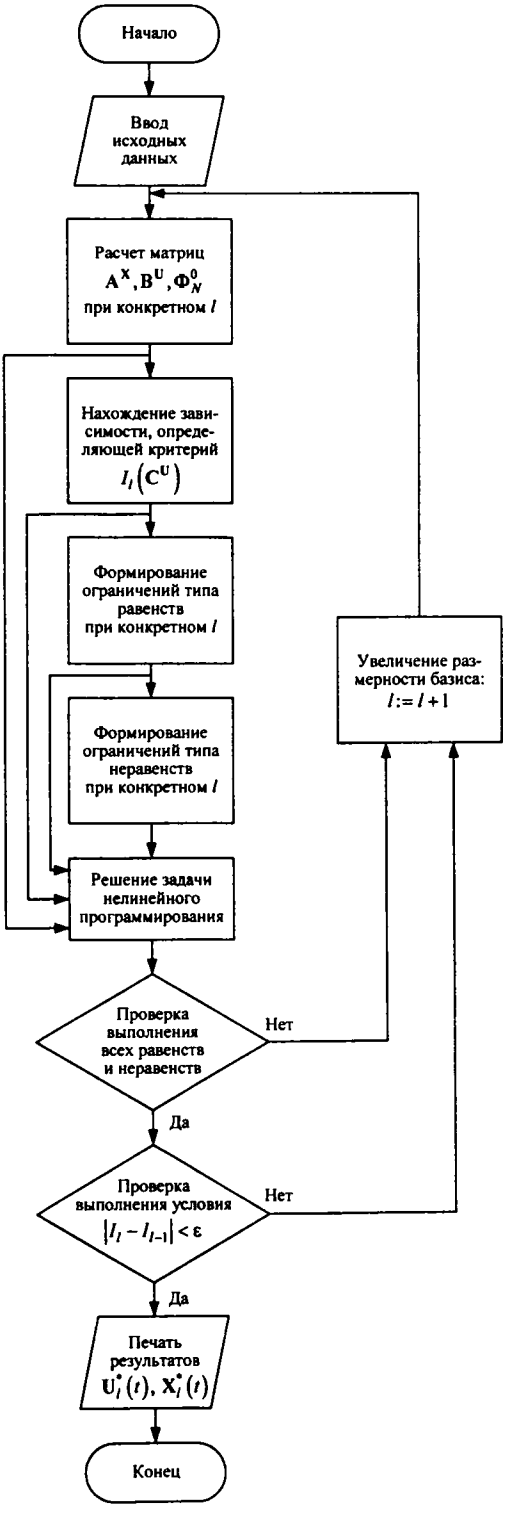


Рис. 5.27. Структурная схема расчета оптимальных программных управлений и оптимальных программ

Число членов разложения должно быть, с одной стороны, не слишком большим (чтобы поиск был эффективным), а с другой — не слишком малым (чтобы получить хорошее приближение к точному решению), и это противоречие разрешается только практикой.

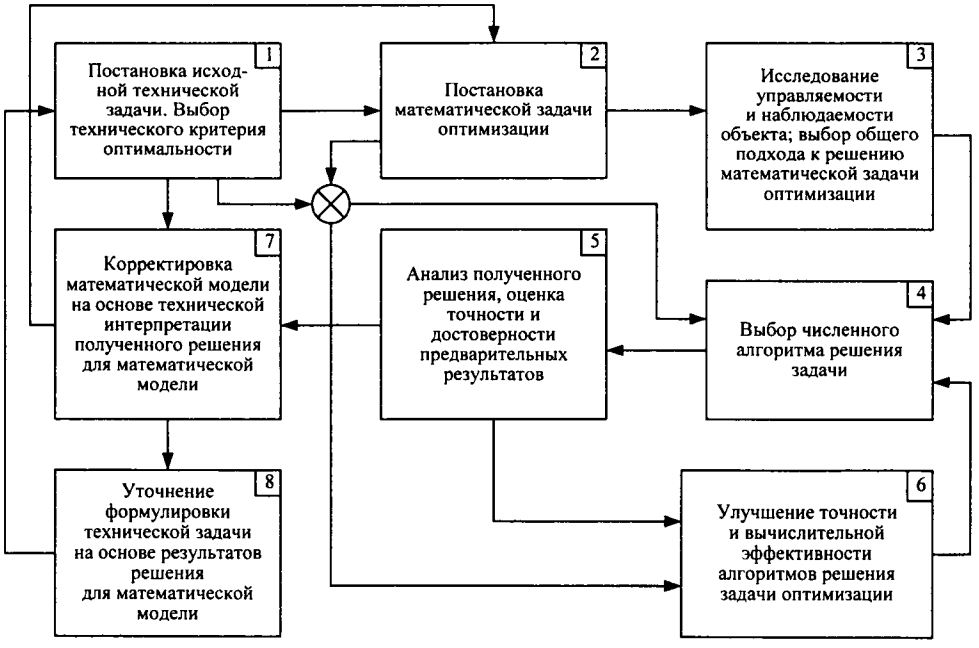


Рис. 5.28. Схема взаимосвязи постановки технической задачи оптимизации с соответствующей математической моделью и результатами решения задачи оптимизации для математической модели

Схема взаимосвязи этапов решения задачи оптимизации представлена на рис. 5.28. В следующих параграфах приводятся примеры решения конкретных задач.

5.5.2. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ стационарных линейных объектов по критерию минимальной энергии

В предыдущем параграфе был рассмотрен общий алгоритм построения оптимальных программ и программных управлений. При решении конкретных задач могут быть использованы различные критерии качества. Например, часто стоит задача расчета управлений, имеющих минимальную энергию; в этом случае имеет место задача оптимального перевода объекта из состояния $\mathbf{X}^0$ в состояние $\mathbf{X}^T$ таким образом, чтобы функционал

$$I(\mathbf{U}) = \left\{ \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)dt \right\}^{1/2} \tag{5.209}$$

принимал минимальное значение. Постановка задачи: при заданных уравнении объекта управления

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U};$$

ограничениях

$$\begin{cases} x_i(t) \le x_i^+, \\ x_i(t) \ge x_i^-, \end{cases} \quad \begin{cases} u_j(t) \le u_j^+, \\ u_j(t) \ge u_j^-, \end{cases} \tag{5.210}$$

времени управления T и краевых условиях

$$\mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad \ldots \quad x_n(0)\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \quad \ldots \quad x_n(T)\right]^{\mathrm{T}}$$

требуется найти такие программное управление $\mathbf{U}^*(t)$ и фазовую траекторию (оптимальную программу) $\mathbf{X}^*(t)$, при которых критерий (5.209) принимает минимальное значение.

Формальная постановка задачи:

$$I(\mathbf{U}) = \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)dt \to \min_{\mathbf{U}}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \\ \mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad \ldots \quad x_n(0)\right]^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \quad \ldots \quad x_n(T)\right]^{\mathrm{T}} \end{cases} \tag{5.211}$$

— ограничения типа равенств;

$$\begin{cases} \begin{cases} u_j(t) \le u_j^+, \\ u_j(t) \ge u_j^-, \end{cases} \forall t \in [0,T],\ j = \overline{1,m}, \\ \begin{cases} x_i(t) \le x_i^+, \\ x_i(t) \ge x_i^-, \end{cases} \forall t \in [0,T],\ i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

— ограничения типа неравенств.

Постановка задачи в терминах математического программирования при использовании спектрального метода для параметризации соотношений, входящих в (5.211), имеет вид:

$$I\left(\mathbf{C}^{\mathbf{U}}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{l}\left\{c_k^{u_i}\right\}^2 \to \min_{\mathbf{C}^{\mathbf{U}}}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{A}}^{\mathbf{X}}\mathbf{C}^{\mathbf{X}} = \mathbf{B}^{\mathbf{U}}\mathbf{C}^{\mathbf{U}} + \mathbf{\Phi}_N^0, \\ \bar{\mathbf{\Phi}}(T)\mathbf{C}^{\mathbf{X}} \approx \mathbf{X}^T \end{cases} \tag{5.212}$$

— ограничения типа равенств;

$$\begin{cases} \begin{cases} \mathbf{\Phi}(t_k)\mathbf{C}^{u_j} \le u_j^+, \\ \mathbf{\Phi}(t_k)\mathbf{C}^{u_j} \ge u_j^-, \end{cases} k = \overline{1,g},\ j = \overline{1,m}, \\ \begin{cases} \mathbf{\Phi}(t_k)\mathbf{C}^{x_i} \le x_i^+, \\ \mathbf{\Phi}(t_k)\mathbf{C}^{x_i} \ge x_i^-, \end{cases} k = \overline{1,g},\ i = \overline{1,n}, \end{cases}$$

— ограничения типа неравенств.

Структурная схема алгоритма представлена на рис. 5.29.

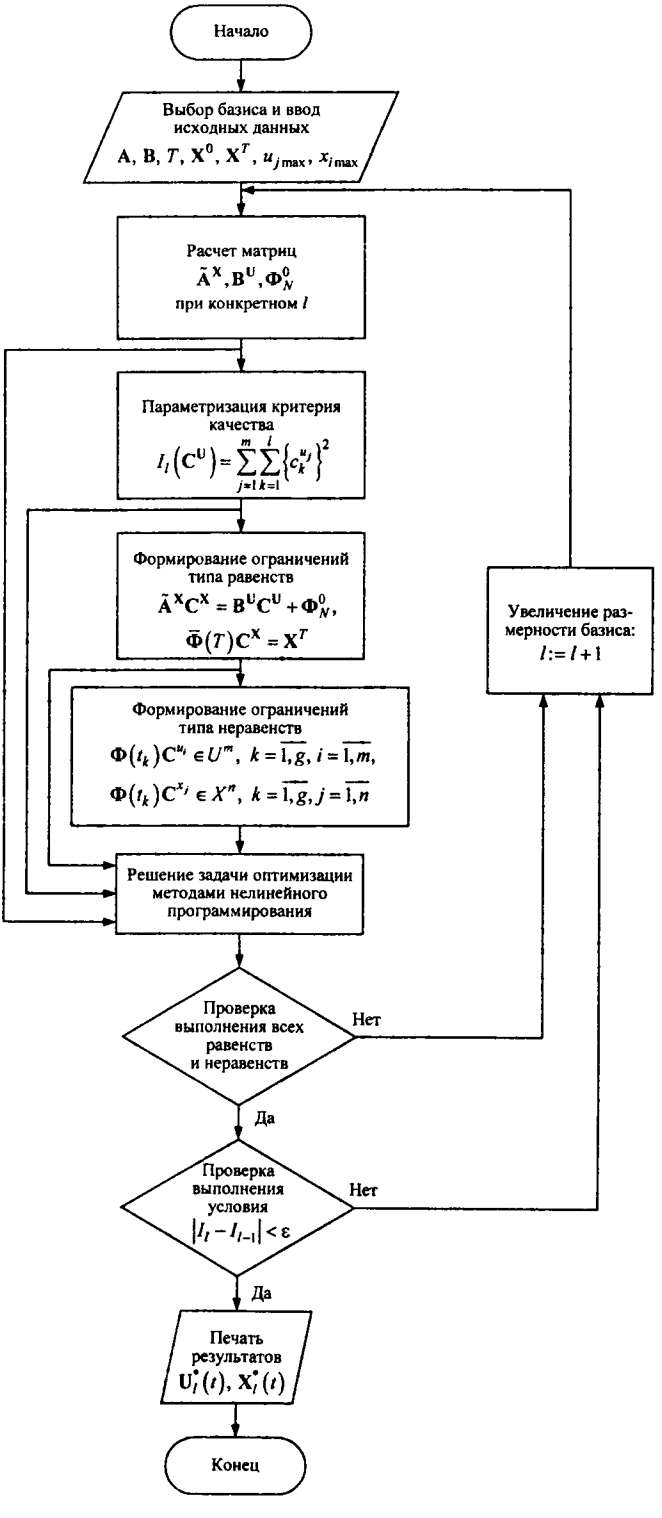


Рис. 5.29. Структурная схема алгоритма расчета оптимальных программных управлений и оптимальных программ (критерий качества — минимальная энергия управления)

Пример 5.15. Управление положением ротора двигателя постоянного тока (см. пример 5.6 из п. 5.4.2).

Сформулируем задачу оптимизации для рассматриваемой системы:

$$I = \frac{1}{2}\int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u \tag{5.213}$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$
$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{5.214}$$
$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} x_1(T) & x_2(T) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Ограничения типа неравенств отсутствуют.

Постановка задачи: при заданном уравнении объекта управления, отсутствии ограничений на управление $u(t)$ и фазовый вектор $\mathbf{X}(t)$, заданных краевых условиях

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} -2 & -10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
$$\mathbf{X}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

времени управления $T = 14$ с требуется найти такое управление $u(t)$ и фазовые траектории $x_1(t)$, $x_2(t)$, при которых заданный функционал качества

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u.$$

Осуществим редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования методом матричных операторов с использованием в качестве базиса ортонормированных на интервале [0,14] полиномов Лежандра.

Для сформулированной задачи аналитические зависимости для оптимального управления и фазовых траекторий объекта управления имеют вид

$$\begin{aligned} u^*(t) &= 2{,}9183673 - 0{,}3148688 \cdot t, \\ x_1^*(t) &= -2 - 10 \cdot t + 1{,}4591836 \cdot t^2 - 0{,}0524781 \cdot t^3, \\ x_2^* &= -10 + 2{,}9183673 \cdot t - 0{,}1574344 \cdot t^2. \end{aligned} \tag{5.215}$$

Для нахождения $u^*(t)$, $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ проинтегрируем уравнения объекта управления, получим

$$x_1(t) = \int_0^t x_2(\tau)\,d\tau + x_1(0),$$
$$x_2(t) = \int_0^t u(\tau)\,d\tau + x_2(0).$$

Для $T = 14$ проекционно-матричный оператор интегрирования в базисе ортонормированных полиномов Лежандра имеет вид (вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_{\text{и}} = \begin{bmatrix} 7 & -4{,}0415 & 0 & 0 & 0 \\ 4{,}0415 & 0 & -1{,}8074 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}8074 & 0 & -1{,}1832 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}1832 & 0 & -0{,}8819 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}8819 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.216}$$

Уравнения объекта управления с использованием проекционно-матричного оператора интегрирования можно записать следующим образом:

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} + \mathbf{\Phi}_N^{01},$$
$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{u}} + \mathbf{\Phi}_N^{02}.$$

Параметризованные вектор фазовых координат и управление имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & 0 \\ 0 & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \tilde{u}_l(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{u}},$$

$$\Phi(t)=\left[\varphi_1(t)\ \ \dots\ \ \varphi_l(t)\right],\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_i}=\left[c_1^{\tilde{x}_i}\ \ \dots\ \ c_l^{\tilde{x}_i}\right]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\tilde{u}}=\left[c_1^{\tilde{u}}\ \ \dots\ \ c_l^{\tilde{u}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Проекционно-матричный эквивалент математической модели объекта можно переписать так:

$$\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}+\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{C}^{\tilde{u}}+\begin{bmatrix}x_1(0)\Phi_N^0\\ x_2(0)\Phi_N^0\end{bmatrix},\tag{5.217}$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}0 & \mathbf{A}_{\text{и}}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ \tilde{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}0\\ \mathbf{A}_{\text{и}}\end{bmatrix}.$$

Теперь постановка задачи в терминах математического программирования формулируется следующим образом:

$$I\left(\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right)=\sum_{k=1}^{l}\left(c_k^{\tilde{u}}\right)^2\to\min_{\mathbf{C}^{\tilde{u}}}$$

при ограничениях типа равенств (5.217). Ограничения на начальное состояние объекта управления учитываются ограничениями (5.217). Параметризованный эквивалент конечных условий можем записать следующим образом:

$$\mathbf{X}^T=\left[\Phi(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\approx 0\quad\Phi(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\approx 0\right]^{\mathrm{T}},$$

или

$$\begin{bmatrix}\left|\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\right|\\ \left|\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\right|\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}.\tag{5.218}$$

Последнее соотношение представляет собой ограничения типа неравенств, в которых константы $\delta^{\tilde{x}_i}$, $i=1,2$, *выбираются из соображений точности решения задачи перевода системы из начального состояния в конечное для каждой из фазовых координат.* Ограничения на управление и фазовые координаты не накладываются.

При решении конечномерной оптимизационной задачи воспользуемся пакетом *Optimization Toolbox* многофункциональной интегрированной системы автоматизации математических и научно-технических расчетов *Matlab 6*. Поиск экстремума нелинейной функции многих переменных при наличии ограничений в данной системе реализован функцией *fmincon*. Синтаксис обращения к указанной функции подробно рассмотрен в интерактивной помощи по системе *Matlab*, отметим лишь, что линейные ограничения типа равенств и типа неравенств при вызове функции *fmincon* должны быть представлены в виде

$$\mathbf{A}_{\text{eq}}\mathbf{x}=\mathbf{B}_{\text{eq}},\tag{5.219}$$

$$\mathbf{A}_{\text{ue}}\mathbf{x}\le\mathbf{B}_{\text{ue}},\tag{5.220}$$

где $\mathbf{x}$ — вектор оптимизируемых параметров, $\mathbf{A}_{\text{eq}}$, $\mathbf{A}_{\text{ue}}$, $\mathbf{B}_{\text{eq}}$, $\mathbf{B}_{\text{ue}}$ — матрицы и векторы линейных ограничений типа равенств и типа неравенств соответственно. В связи с этим целесообразно ограничения (5.217) и (5.218) привести к форме

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{\text{и}}\\ -\mathbf{A}_{\text{и}} & 0 & \mathbf{I}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{eq}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_N^{01}\\ \Phi_N^{02}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\text{eq}}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0 & \Phi(T) & 0\\ 0 & -\Phi(T) & 0\\ 0 & 0 & \Phi(T)\\ 0 & 0 & -\Phi(T)\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{ue}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}\le\underbrace{\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\text{ue}}}.$$

При решении задачи в системе *Matlab* в функционал качества следует включать лишь те элементы вектора $\mathbf{x}$, которые являются элементами вектора $\mathbf{C}^{\tilde{u}}$.

При решении задачи размерность базиса полиномов Лежандра принималась равной 10, $\delta^{\tilde{x}_1}=\delta^{\tilde{x}_2}=10^{-3}$. Приведем результаты решения поставленной задачи. Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\tilde{u}^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$ представлены следующими вектор-столбцами:

$$C^{\tilde{u}^*} = \begin{bmatrix} 2,6726 \\ -4,7614 \\ 6,0775\cdot10^{-9} \\ 6,0774\cdot10^{-9} \\ 6,0778\cdot10^{-9} \\ 6,0765\cdot10^{-9} \\ 6,0791\cdot10^{-9} \\ 6,0796\cdot10^{-9} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} -47,3943 \\ 17,7140 \\ 19,5221 \\ -10,1823 \\ 1,1100\cdot10^{-9} \\ 4,6501\cdot10^{-10} \\ 1,1076\cdot10^{-9} \\ 9,1290\cdot10^{-10} \\ 1,3358\cdot10^{-9} \\ 1,0380\cdot10^{-9} \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 0,5345 \\ 10,8012 \\ -8,6056 \\ 1,8309\cdot10^{-9} \\ 1,0848\cdot10^{-9} \\ 7,1737\cdot10^{-10} \\ 5,0938\cdot10^{-10} \\ 3,0473\cdot10^{-9} \\ 2,6651\cdot10^{-9} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

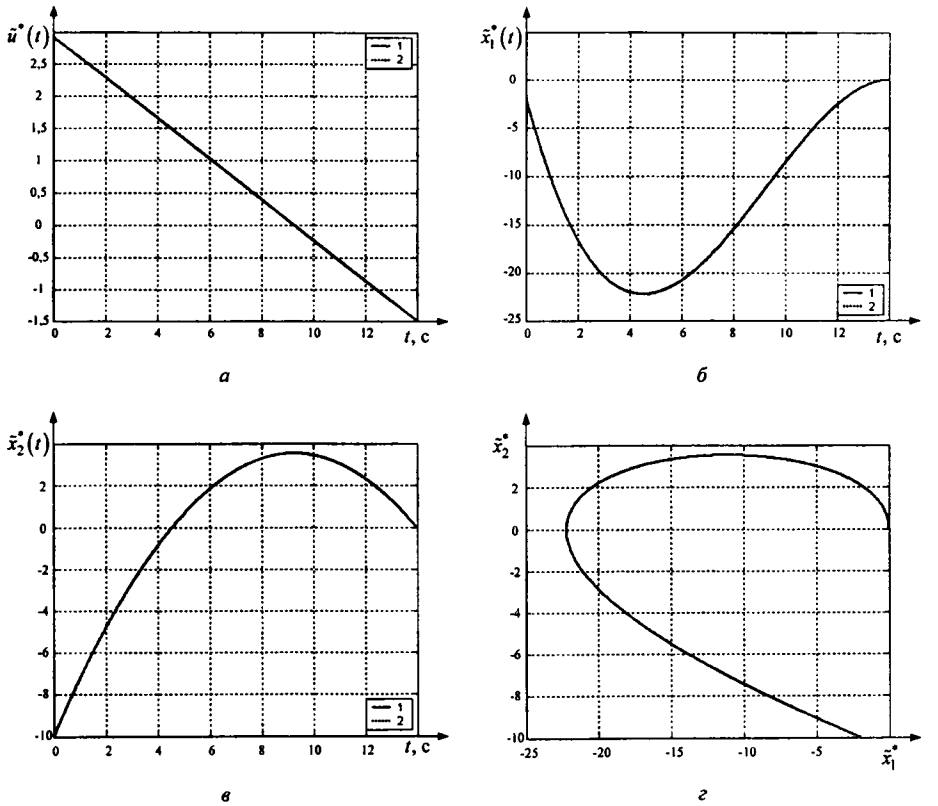


Рис. 5.30. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, сплошная линия) и точного решения задачи (2, пунктир), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

На рис. 5.30, *а–г* представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ и точного решения задачи, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

Введем теперь в рассматриваемую задачу оптимального управления ограничения типа неравенств, пусть

$$\begin{aligned} x_1(t) &\geq -10 \ \ \forall t \in [0, 14], \\ x_2(t) &\leq 1 \ \ \forall t \in [0, 14]. \end{aligned} \tag{5.221}$$

Сформулируем данные ограничения в узлах сетки ограничений

$$T_g = \left\{ t_j : \ j = \overline{1, g}, \ t_1 = 0, \ t_g = 14, \ t_i < t_{i+1} \right\}$$

в виде

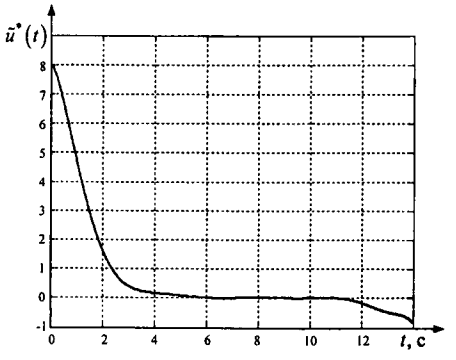
$$\begin{bmatrix} -\Phi(t_j)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \Phi(t_j)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} 10 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \forall t_j \in T_g.$$

При этом ограничения типа неравенств (5.220) будут расширены следующим образом:

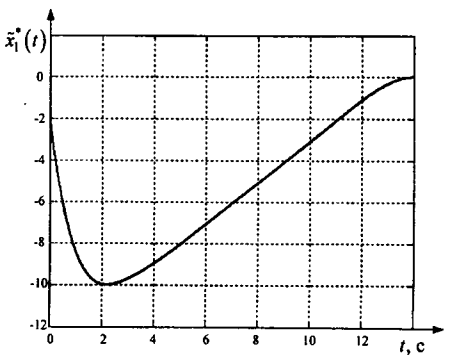
$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \Phi(T) & 0 \\ 0 & -\Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 & -\Phi(T) \\ 0 & -\Phi(t_1) & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & -\Phi(t_g) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \Phi(t_g) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{ue}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \le \underbrace{\begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 10 \\ \vdots \\ 10 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{ue}}.$$

Приведем результаты решения задачи с использованием базиса ортонормированных смещенных полиномов Лежандра размерностью 14. Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\tilde{u}^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$ определяются следующими вектор-столбцами:

$$\mathbf{C}^{\tilde{u}^*} = \begin{bmatrix} 2,6726 \\ -4,7614 \\ 3,7058 \\ -3,2338 \\ 1,4504 \\ -0,5540 \\ -0,0762 \\ 0,4095 \\ -0,3127 \\ -0,1744 \\ -0,0687 \\ -0,0682 \\ -1,8273\cdot10^{-12} \\ 1,8238\cdot10^{-12} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} -20,326 \\ 10,798 \\ 3,7419 \\ -3,4836 \\ 1,9896 \\ -1,4222 \\ -0,5719 \\ -0,3144 \\ -0,0814 \\ 0,0144 \\ -0,0273 \\ -0,0922 \\ -6,3850\cdot10^{-3} \\ -5,3638\cdot10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 0,5345 \\ 4,1035 \\ -4,7794 \\ 3,1056 \\ -2,4622 \\ 1,0650 \\ -0,5295 \\ 0,0989 \\ 0,1116 \\ -0,0977 \\ 0,0828 \\ -0,0219 \\ -0,0199 \\ -4,9234\cdot10^{-12} \end{bmatrix}.$$

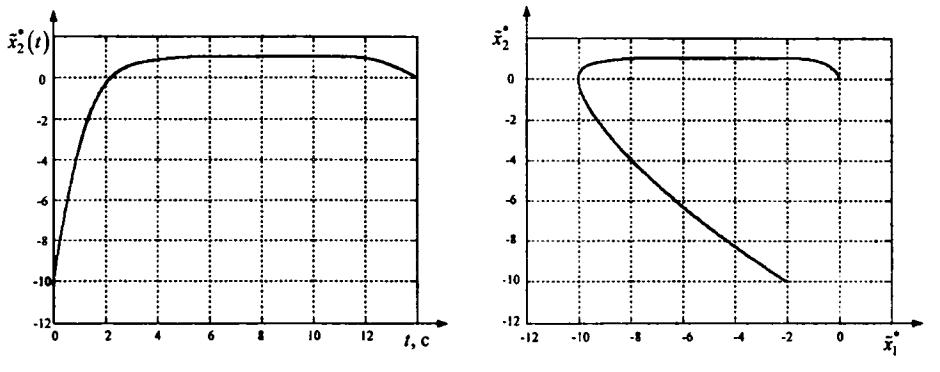


а



б

Рис. 5.31. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$,
г — фазовый портрет системы при оптимальном управлении



в *г*

Продолжение рис. 5.31

На рис. 5.31, *а–г* представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ и фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

Расширим ограничения рассматриваемой задачи оптимального управления двигателем постоянного тока по критерию минимальной энергии, изменив ограничения на фазовые координаты и управление:

$$x_2(t) \le 2{,}5 \;\; \forall t \in [0, 14], \;\; u(t) \le 2{,}6 \;\; \forall t \in [0, 14], \;\; u(t) \ge -10 \;\; \forall t \in [0, 14]. \qquad (5.222)$$

Ограничения типа неравенств (5.220) примут вид

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \Phi(T) & 0 \\ 0 & -\Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 & -\Phi(T) \\ \Phi(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \Phi(t_g) & 0 & 0 \\ -\Phi(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Phi(t_g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \Phi(t_g) \end{bmatrix}}_{A_{ue}} \underbrace{\begin{bmatrix} C^{\tilde{u}} \\ C^{\tilde{x}_1} \\ C^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix}}_{x} \le \underbrace{\begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 2{,}6 \\ \vdots \\ 2{,}6 \\ -10 \\ \vdots \\ -10 \\ 2{,}5 \\ \vdots \\ 2{,}5 \end{bmatrix}}_{B_{ue}}.$$

Приведем результаты решения задачи с использованием базиса смещенных ортонормированных полиномов Лежандра размерностью 12. Спектральные характеристики сигналов $C^{\tilde{u}^*}$, $C^{\tilde{x}_1^*}$ и $C^{\tilde{x}_2^*}$ представлены вектор-столбцами

$$C^{\tilde{u}^*} = \begin{bmatrix} 2{,}6726 \\ -4{,}7614 \\ 0{,}1890 \\ -0{,}4676 \\ -1{,}8549 \\ -0{,}5836 \\ 0{,}0032 \\ -0{,}4316 \\ -0{,}1955 \\ 0{,}1523 \\ -1{,}2913 \cdot 10^{-15} \\ 4{,}1293 \cdot 10^{-15} \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} -46{,}014 \\ 16{,}714 \\ 16{,}704 \\ -9{,}5261 \\ 2{,}5593 \\ 0{,}0720 \\ -0{,}8088 \\ -0{,}0462 \\ -0{,}0680 \\ -0{,}1155 \\ -0{,}0267 \\ 0{,}0170 \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 0{,}5345 \\ 10{,}460 \\ -8{,}0524 \\ 1{,}8595 \\ -0{,}0019 \\ -1{,}3068 \\ -0{,}1252 \\ 0{,}0087 \\ -0{,}0248 \\ -0{,}0761 \\ 0{,}0053 \\ -4{,}1129 \cdot 10^{-16} \end{bmatrix}.$$

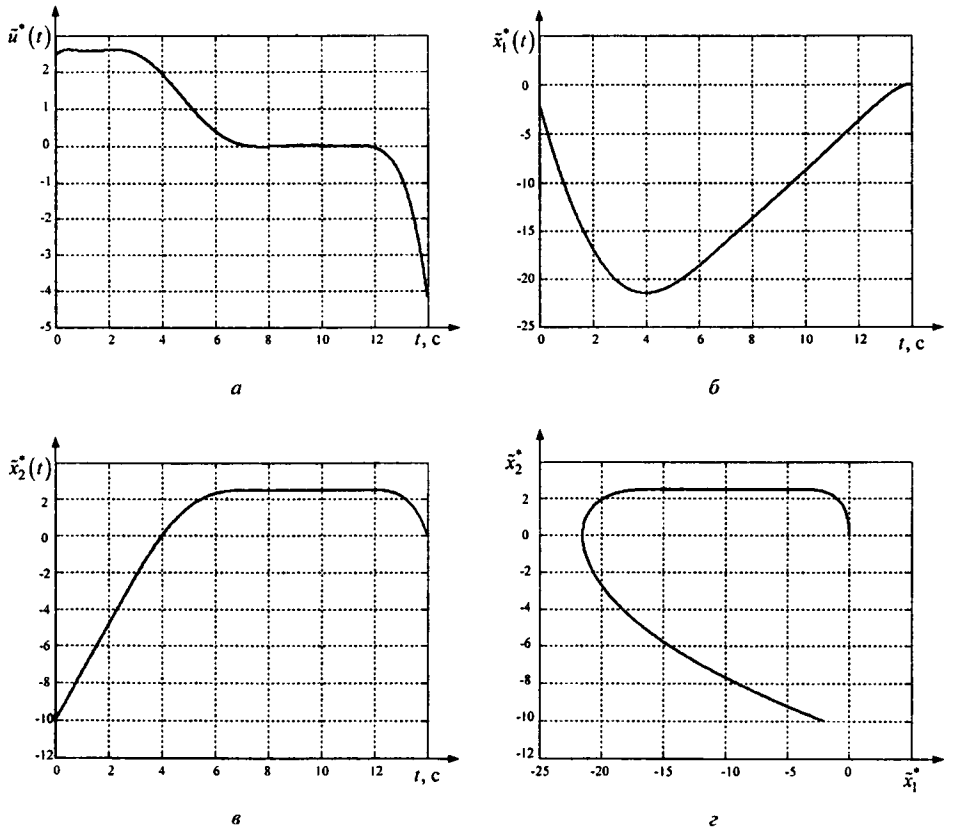


Рис. 5.32. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$,
г — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

На рис. 5.32, *а–г* представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

Пример 5.16. Оптимальное управление материальной точкой при заданных условиях.

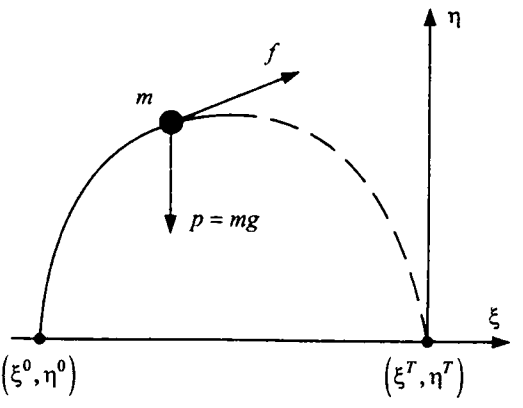


Рис. 5.33. Движение материальной точки массой m
в вертикальной плоскости $\{\xi, \eta\}$ в поле силы тяжести

Рассмотрим материальную точку массой m, движущуюся в вертикальной плоскости $\{\xi, \eta\}$ в поле силы тяжести. Предположим, что в качестве управляющего воздействия к точке m приложена реактивная сила f, возникающая в результате отделения от нее частиц с элементарной массой $|dm_1|$. Тогда масса точки является величиной переменной и ее движение можно описать векторным уравнением Мещерского (рис. 5.33) [53]:

$$m\frac{dv}{dt} = p + f.$$

Здесь $m(t) = m_0 + m_1(t)$, $m_0 = \text{const}$, $m_1(t) \geq 0$ — реактивная масса точки; $f = (s - v)\dot{m}_1(t)$; v — вектор абсолютной скорости точки; s — вектор скорости частицы dm_1 в момент времени $t + dt$ после ее отделения, так что $a = (s - v)$ есть вектор относительной скорости отделяющейся частицы; p — вес материальной точки.

Проектируя уравнение Мещерского на горизонтальную и вертикальную оси координат, получим следующие уравнения движения [53]:

$$\begin{cases} m(t)\ddot{\xi}(t) = \dot{m}(t)a_\xi(t), \\ m(t)\ddot{\eta}(t) = \dot{m}(t)a_\eta(t) - m(t)g, \end{cases}$$

где a_ξ и a_η — проекции вектора a на оси ξ и η. Допуская, что абсолютная величина вектора a задана и равна σ, запишем систему уравнений в нормальной форме:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_2 - g, \end{cases}$$

где $x_1 = \xi$, $x_2 = \dot{\xi}$, $x_3 = \eta$, $x_4 = \dot{\eta}$, $u_1 = \sigma \cdot \cos\alpha_\xi \cdot \dot{m}/m$, $u_2 = \sigma \cdot \cos\alpha_\eta \cdot \dot{m}/m$, α_ξ и α_η — углы, составляемые вектором a с осями ξ и η, причем

$$u_1^2 + u_2^2 = \sigma^2 (\dot{m}/m)^2.$$

Будем считать реактивную силу управляющим воздействием. Для рассматриваемой системы сформулируем задачу оптимизации:

$$I(\mathbf{U}) = \left\{ \int_0^T \left[u_1^2(\tau) + u_2^2(\tau) \right] d\tau \right\}^{1/2} \to \min_{\mathbf{U}}$$

при следующих ограничениях типа равенств (положим $g = 0$):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = u_2 - g, \end{cases}$$

$$\mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad x_2(0) \quad x_3(0) \quad x_4(0) \right]^{\mathrm{T}}, \qquad (5.223)$$

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \quad x_2(T) \quad x_3(T) \quad x_4(T) \right]^{\mathrm{T}}.$$

Ограничения типа неравенств отсутствуют.

Проверим управляемость системы, используя критерий Калмана. Матрица управляемости имеет вид

$$\mathbf{M}_y = \left[\mathbf{B} \quad \mathbf{AB} \quad \mathbf{A}^2\mathbf{B} \quad \mathbf{A}^3\mathbf{B} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank} \mathbf{M}_y = 4.$$

Система является полностью управляемой.

Положим $\mathbf{X}^0 = [-40 \quad 16 \quad 10 \quad -12]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{X}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, $T = 10$ с. После интегрирования уравнений объекта будем иметь

$$x_1(t)=\int_0^t x_2(\tau)d\tau+x_1(0),$$

$$x_2(t)=\int_0^t u_1(\tau)d\tau+x_2(0),$$

$$x_3(t)=\int_0^t x_4(\tau)d\tau+x_3(0),$$

$$x_4(t)=\int_0^t u_2(\tau)d\tau+x_4(0).$$

Осуществим редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования с помощью проекционно-матричных операторов с использованием в качестве базиса ортонормированных смещенных полиномов Лежандра.

Для $T=10$ проекционно-матричный оператор интегрирования в базисе ортогональных многочленов Лежандра имеет вид (приводится вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_{\text{и}}=\begin{bmatrix} 5{,}0000 & -2{,}8868 & 0 & 0 & 0 \\ 2{,}8868 & 0 & -1{,}2910 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}2910 & 0 & -0{,}8452 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8452 & 0 & -0{,}6299 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6299 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметризованные векторы фазовых координат и управления имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t)=\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix}=\bar{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{X}}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}},$$

$$\tilde{\mathbf{U}}_l(t)=\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_2} \end{bmatrix}=\bar{\mathbf{\Phi}}_{\mathbf{U}}(t)\mathbf{C}^{\mathbf{U}},$$

$$\mathbf{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t) & \dots & \varphi_l(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_l}=\begin{bmatrix} c_1^{\tilde{x}_l} & \dots & c_l^{\tilde{x}_l}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_l}=\begin{bmatrix} c_1^{\tilde{u}_l} & \dots & c_l^{\tilde{u}_l}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Уравнения объекта с использованием проекционно-матричного оператора интегрирования можно записать следующим образом:

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}+x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{u}_1}+x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}+x_3(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{u}_2}+x_4(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

или

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{A}}\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix}+\tilde{\mathbf{B}}\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_2} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_3(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_4(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \end{bmatrix}, \tag{5.224}$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\text{и}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\text{и}} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix},\quad \tilde{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{\text{и}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{\text{и}} \end{bmatrix}.$$

Теперь постановка задачи в терминах математического программирования формулируется следующим образом:

$$I\left(\mathbf{C}^{\mathbf{U}}\right)=\left\{\sum_{k=1}^{l}\left(c_k^{\tilde{u}_1}\right)^2+\sum_{k=1}^{l}\left(c_k^{\tilde{u}_2}\right)^2\right\}^{1/2}\to\min_{\mathbf{C}^{\mathbf{U}}}$$

при ограничениях типа равенств (5.224). Ограничения на начальное состояние объекта управления автоматически выполняются при выполнении ограничений (5.224). Параметризованный эквивалент конечных условий можем записать следующим образом:

$$\mathbf{X}^T=\begin{bmatrix}\Phi(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\approx 0\\ \Phi(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\approx 0\\ \Phi(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\approx 0\\ \Phi(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\approx 0\end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix}\left|\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\right|\\ \left|\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\right|\\ \left|\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\right|\\ \left|\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\right|\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_3}\\ \delta^{\tilde{x}_4}\end{bmatrix}. \tag{5.225}$$

Соотношение (5.225) является ограничением типа неравенств, в которых константы $\delta^{\tilde{x}_i}$, $i=\overline{1,4}$, выбираются из соображений точности решения задачи перевода объекта из начального состояния в конечное для каждой из фазовых координат. Ограничения на управление и фазовые координаты отсутствуют.

Решение конечномерной оптимизационной задачи проведем в пакете *Matlab 6.1*. Приведем ограничения (5.224) и (5.225) к форме

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\mathbf{I}&-\mathbf{A}_{\text{и}}&0&0\\ -\mathbf{A}_{\text{и}}&0&0&\mathbf{I}&0&0\\ 0&0&0&0&\mathbf{I}&-\mathbf{A}_{\text{и}}\\ 0&-\mathbf{A}_{\text{и}}&0&0&0&\mathbf{I}\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{eq}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}=\underbrace{\begin{bmatrix}\Phi_N^{01}\\ \Phi_N^{02}\\ \Phi_N^{03}\\ \Phi_N^{04}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\text{eq}}},$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix}0&0&\Phi(T)&0&0&0\\ 0&0&-\Phi(T)&0&0&0\\ 0&0&0&\Phi(T)&0&0\\ 0&0&0&-\Phi(T)&0&0\\ 0&0&0&0&\Phi(T)&0\\ 0&0&0&0&-\Phi(T)&0\\ 0&0&0&0&0&\Phi(T)\\ 0&0&0&0&0&-\Phi(T)\end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{\text{ue}}}\underbrace{\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\end{bmatrix}}_{\mathbf{x}}\le\underbrace{\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_3}\\ \delta^{\tilde{x}_3}\\ \delta^{\tilde{x}_4}\\ \delta^{\tilde{x}_4}\end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{\text{ue}}}.$$

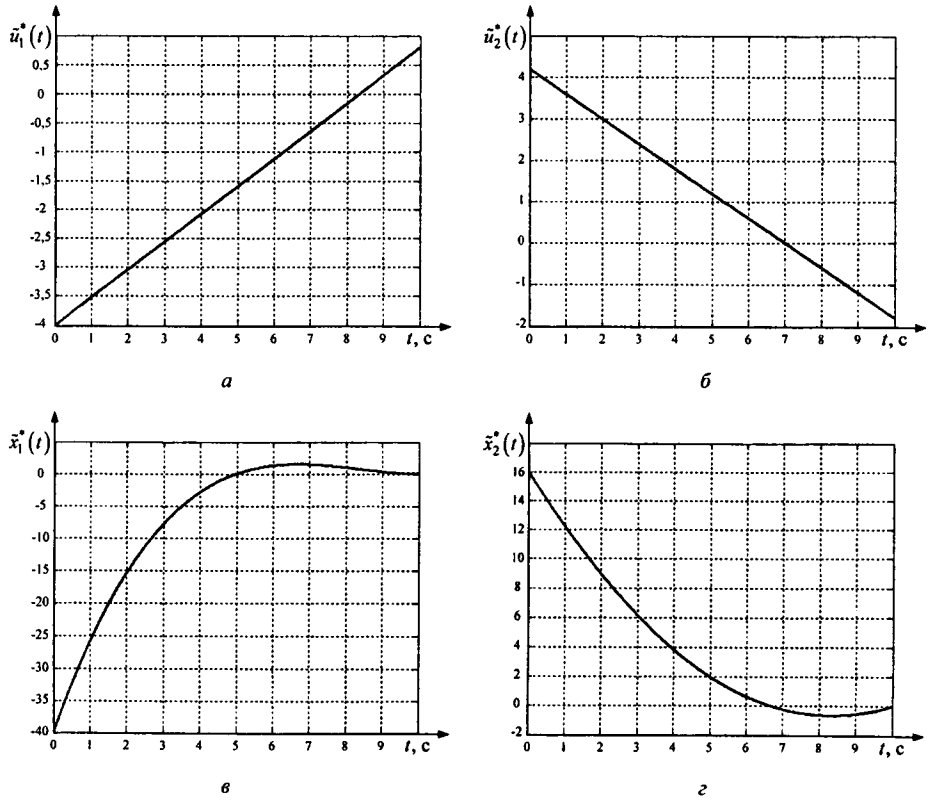
При решении задачи в системе *Matlab* в функционал качества включим лишь те элементы вектора оптимизируемых параметров, которые являются элементами вектора $\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{U}}}$.

При решении задачи размерность базиса полиномов Лежандра принималась равной 10, $\delta^{\tilde{x}_i}=10^{-5}$, $i=\overline{1,4}$. Приведем результаты решения задачи синтеза оптимального программного управления. Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\tilde{u}_1^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{u}_2^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_3^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_4^*}$ имеют вид

$$C^{\tilde{u}_1^*} = \begin{bmatrix} -5{,}0596 \\ 4{,}3818 \\ -3{,}4935\cdot10^{-7} \\ -3{,}4935\cdot10^{-7} \\ -3{,}4935\cdot10^{-7} \\ -3{,}4935\cdot10^{-7} \\ -3{,}4935\cdot10^{-7} \\ -3{,}4935\cdot10^{-7} \\ -5\cdot10^{-14} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{u}_2^*} = \begin{bmatrix} 3{,}7947 \\ -5{,}4772 \\ 3{,}6119\cdot10^{-7} \\ 3{,}6119\cdot10^{-7} \\ 3{,}6119\cdot10^{-7} \\ 3{,}6119\cdot10^{-7} \\ 3{,}6119\cdot10^{-7} \\ 3{,}6120\cdot10^{-7} \\ -8\cdot10^{-14} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} -21{,}0819 \\ 29{,}2119 \\ -18{,}8562 \\ 4{,}7809 \\ -3{,}2545\cdot10^{-8} \\ -1{,}3596\cdot10^{-8} \\ 3{,}2460\cdot10^{-8} \\ 2{,}6737\cdot10^{-8} \\ 3{,}9166\cdot10^{-8} \\ -3{,}0432\cdot10^{-8} \end{bmatrix},$$

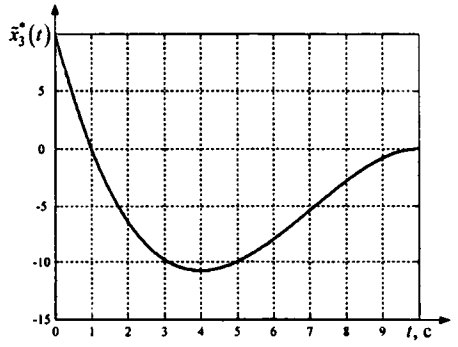
$$C^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 12{,}6491 \\ -14{,}6059 \\ 5{,}6569 \\ -7{,}5185\cdot10^{-8} \\ -4{,}4515\cdot10^{-8} \\ -2{,}9484\cdot10^{-8} \\ -2{,}0982\cdot10^{-8} \\ -1{,}2509\cdot10^{-7} \\ -1{,}0939\cdot10^{-7} \\ 1{,}0000\cdot10^{-14} \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{x}_3^*} = \begin{bmatrix} -15{,}8114 \\ 3{,}9409\cdot10^{-7} \\ 14{,}1421 \\ -5{,}9761 \\ 3{,}3649\cdot10^{-8} \\ 1{,}4058\cdot10^{-8} \\ -3{,}3561\cdot10^{-8} \\ -2{,}7645\cdot10^{-8} \\ 4{,}0494\cdot10^{-8} \\ 3{,}1464\cdot10^{-8} \end{bmatrix}, \quad C^{\tilde{x}_4^*} = \begin{bmatrix} -3{,}1623 \\ 10{,}9545 \\ -7{,}0711 \\ 7{,}7734\cdot10^{-8} \\ 4{,}6024\cdot10^{-8} \\ 3{,}0484\cdot10^{-8} \\ 2{,}1692\cdot10^{-8} \\ 1{,}2933\cdot10^{-7} \\ -2\cdot10^{-14} \\ 1{,}0123\cdot10^{-8} \end{bmatrix}.$$

На рис. 5.34, *а–е* представлены графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t)$, $\tilde{x}_4^*(t)$.

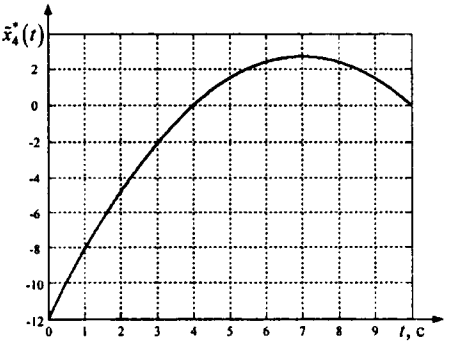


а *б* *в* *г*

Рис. 5.34. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t)$, $\tilde{x}_4^*(t)$



д



е

Продолжение рис. 5.34

Следующие соотношения определяют оптимальное программное управление и оптимальные фазовые траектории системы, полученные с помощью конечномерной оптимизации:

$$\tilde{u}_1^*(t) = -3{,}9999 + 0{,}4799 \cdot t + 0{,}6270 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 0{,}3831 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}1149 \cdot 10^{-6} \cdot t^4 -$$
$$-0{,}1792 \cdot 10^{-7} \cdot t^5 + 0{,}1394 \cdot 10^{-8} \cdot t^6 - 0{,}4267 \cdot 10^{-10} \cdot t^7 + 0{,}5222 \cdot 10^{-17} \cdot t^8 - 0{,}4102 \cdot 10^{-19} \cdot t^9;$$

$$\tilde{u}_2^*(t) = 4{,}2000 + 0{,}6000 \cdot t + 0{,}6252 \cdot 10^{-6} \cdot t^2 - 0{,}3821 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}1146 \cdot 10^{-6} \cdot t^4 -$$
$$-0{,}1788 \cdot 10^{-7} \cdot t^5 + 0{,}1391 \cdot 10^{-8} \cdot t^6 - 0{,}4258 \cdot 10^{-10} \cdot t^7 + 0{,}3449 \cdot 10^{-17} \cdot t^8 - 0{,}2051 \cdot 10^{-19} \cdot t^9;$$

$$\tilde{x}_1^*(t) = -40{,}000 + 16{,}000 \cdot t - 1{,}9999 \cdot t^2 + 0{,}0799 \cdot t^3 + 0{,}5225 \cdot 10^{-7} \cdot t^4 -$$
$$-0{,}1916 \cdot 10^{-7} \cdot t^5 + 0{,}3831 \cdot 10^{-8} \cdot t^6 - 0{,}4268 \cdot 10^{-9} \cdot t^7 + 0{,}2489 \cdot 10^{-10} \cdot t^8 - 0{,}5926 \cdot 10^{-12} \cdot t^9;$$

$$\tilde{x}_2^*(t) = 16{,}000 - 3{,}9999 \cdot t + 0{,}2399 \cdot t^2 + 0{,}2090 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 - 0{,}9578 \cdot 10^{-7} \cdot t^4 +$$
$$+0{,}2298 \cdot 10^{-7} \cdot t^5 - 0{,}2987 \cdot 10^{-8} \cdot t^6 + 0{,}1991 \cdot 10^{-9} \cdot t^7 - 0{,}5333 \cdot 10^{-11} \cdot t^8 + 0{,}3751 \cdot 10^{-18} \cdot t^9;$$

$$\tilde{x}_3^*(t) = 10{,}000 - 12{,}000 \cdot t + 2{,}1000 \cdot t^2 - 0{,}1000 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 + 0{,}5210 \cdot 10^{-7} \cdot t^4 -$$
$$-0{,}1910 \cdot 10^{-7} \cdot t^5 + 0{,}3821 \cdot 10^{-8} \cdot t^6 - 0{,}4258 \cdot 10^{-9} \cdot t^7 + 0{,}2484 \cdot 10^{-10} \cdot t^8 - 0{,}5913 \cdot 10^{-12} \cdot t^9;$$

$$\tilde{x}_4^*(t) = -12{,}000 + 4{,}2000 \cdot t - 0{,}3000 \cdot t^2 + 0{,}2084 \cdot 10^{-6} \cdot t^3 - 0{,}9552 \cdot 10^{-7} \cdot t^4 +$$
$$+0{,}2292 \cdot 10^{-7} \cdot t^5 - 0{,}2980 \cdot 10^{-8} \cdot t^6 + 0{,}1987 \cdot 10^{-9} \cdot t^7 - 0{,}5322 \cdot 10^{-11} \cdot t^8 - 0{,}2806 \cdot 10^{-18} \cdot t^9.$$

Введем теперь в рассматриваемую задачу оптимального управления ограничения типа неравенств, пусть

$$x_4(t) \le 1 \quad \forall t \in [0, 10]. \tag{5.226}$$

Сформулируем ограничения (5.226) в узлах сетки ограничений

$$T_g = \left\{ t_j : \; j = \overline{1, g}, \; t_1 = 0, \; t_g = 14, \; t_i < t_{i+1} \right\}$$

в виде

$$\Phi(t_j) \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \le 1 \quad \forall t_j \in T_g.$$

При этом ограничения типа неравенств следует модифицировать следующим образом:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi(T) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi(T) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi(T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi(T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi(T) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi(t_g) \end{bmatrix}}_{A_{uc}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} \le \underbrace{\begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_3} \\ \delta^{\tilde{x}_3} \\ \delta^{\tilde{x}_4} \\ \delta^{\tilde{x}_4} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}}_{B_{uc}}.$$

Приведем результаты решения задачи при ограничениях (5.226) с использованием базиса ортонормированных смещенных полиномов Лежандра размерностью 10. Векторы коэффициентов Фурье $\mathbf{C}^{\vec{u}_1^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{u}_2^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_1^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_2^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_3^*}$ и $\mathbf{C}^{\vec{x}_4^*}$ имеют вид

$$\mathbf{C}^{\vec{u}_1^*} = \begin{bmatrix} -5,0596 \\ 4,3818 \\ -1,1610\cdot10^{-7} \\ -1,1610\cdot10^{-7} \\ -1,1610\cdot10^{-7} \\ -1,1610\cdot10^{-7} \\ -1,1610\cdot10^{-7} \\ -1,1610\cdot10^{-7} \\ -5,3735\cdot10^{-14} \\ 4,2188\cdot10^{-15} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{u}_2^*} = \begin{bmatrix} 3,7947 \\ -5,4772 \\ 2,2357 \\ -0,8771 \\ -0,9566 \\ -2,7234\cdot10^{-2} \\ 4,4378\cdot10^{-4} \\ -0,2763 \\ -7,3497\cdot10^{-14} \\ 2,2204\cdot10^{-16} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_1^*} = \begin{bmatrix} -21,082 \\ 29,212 \\ -18,856 \\ 4,7809 \\ -1,0116\cdot10^{-8} \\ -4,5187\cdot10^{-9} \\ 1,0788\cdot10^{-8} \\ 8,8859\cdot10^{-9} \\ -1,3016\cdot10^{-8} \\ -1,0114\cdot10^{-8} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^{\vec{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 12,649 \\ -14,606 \\ 5,6569 \\ -2,4986\cdot10^{-8} \\ -1,4794\cdot10^{-8} \\ -9,7987\cdot10^{-9} \\ -6,9726\cdot10^{-9} \\ -4,1571\cdot10^{-8} \\ -3,6353\cdot10^{-8} \\ -1,4949\cdot10^{-14} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_3^*} = \begin{bmatrix} -7,4795 \\ -0,9505 \\ 8,3098 \\ -5,0169 \\ 1,8115 \\ -0,3054 \\ -0,2011 \\ 5,8403\cdot10^{-2} \\ 4,9753\cdot10^{-5} \\ -2,4068\cdot10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_4^*} = \begin{bmatrix} -3,1623 \\ 8,0682 \\ -6,3348 \\ 2,4921 \\ -0,5350 \\ -0,4809 \\ 8,7459\cdot10^{-2} \\ 1,5890\cdot10^{-4} \\ -8,6511\cdot10^{-2} \\ -2,0447\cdot10^{-14} \end{bmatrix}.$$

На рис. 5.35, *а–е* изображены графики функций $\vec{u}_1^*(t)$, $\vec{u}_2^*(t)$, $\vec{x}_1^*(t)$, $\vec{x}_2^*(t)$, $\vec{x}_3^*(t)$, $\vec{x}_4^*(t)$.

Следующие соотношения определяют оптимальное программное управление и оптимальные фазовые траектории системы, полученные с помощью конечномерной оптимизации:

$$\vec{u}_1^*(t) = -3,9999 + 0,4799\cdot t + 0,6270\cdot10^{-6}\cdot t^2 - 0,3831\cdot10^{-6}\cdot t^3 + 0,1149\cdot10^{-6}\cdot t^4 - $$
$$-0,1792\cdot10^{-7}\cdot t^5 + 0,1394\cdot10^{-8}\cdot t^6 - 0,4267\cdot10^{-10}\cdot t^7 + 0,5222\cdot10^{-17}\cdot t^8 - $$
$$-0,4102\cdot10^{-19}\cdot t^9;$$

$$\vec{u}_2^*(t) = 5,7490 - 3,0040\cdot t + 3,3286\cdot t^2 - 2,1250\cdot t^3 + 0,6203\cdot t^4 - $$
$$-0,0911\cdot t^5 + 0,6622\cdot10^{-2}\cdot t^6 - 0,1906\cdot10^{-3}\cdot t^7 - 0,2332\cdot10^{-17}\cdot t^8 + 0,2051\cdot10^{-19}\cdot t^9;$$

$$\vec{x}_1^*(t) = -40,000 + 16,000\cdot t - 1,9999\cdot t^2 + 0,0799\cdot t^3 + 0,5225\cdot10^{-7}\cdot t^4 - $$
$$-0,1916\cdot10^{-7}\cdot t^5 + 0,3831\cdot10^{-8}\cdot t^6 - 0,4268\cdot10^{-9}\cdot t^7 + 0,2489\cdot10^{-10}\cdot t^8 - $$
$$-0,5926\cdot10^{-12}\cdot t^9;$$

$$\vec{x}_2^*(t) = 16,000 - 3,9999\cdot t + 0,2399\cdot t^2 + 0,2090\cdot10^{-6}\cdot t^3 - 0,9578\cdot10^{-7}\cdot t^4 + $$
$$+0,2298\cdot10^{-7}\cdot t^5 - 0,2987\cdot10^{-8}\cdot t^6 + 0,1991\cdot10^{-9}\cdot t^7 - 0,5333\cdot10^{-11}\cdot t^8 + $$
$$+0,3751\cdot10^{-18}\cdot t^9;$$

$$\vec{x}_3^*(t) = 10,000 - 12,000\cdot t + 2,8745\cdot t^2 - 0,5007\cdot t^3 + 0,2774\cdot t^4 - $$
$$-0,1063\cdot t^5 + 0,0207\cdot t^6 - 0,2168\cdot10^{-2}\cdot t^7 + 0,1182\cdot10^{-3}\cdot t^8 - 0,2647\cdot10^{-5}\cdot t^9;$$

$$\vec{x}_4^*(t) = -12,000 + 5,7490\cdot t - 1,5020\cdot t^2 + 1,1095\cdot t^3 - 0,5313\cdot t^4 + $$
$$+0,1241\cdot t^5 - 0,1517\cdot10^{-1}\cdot t^6 + 0,9460\cdot10^{-3}\cdot t^7 - 0,2382\cdot10^{-4}\cdot t^8 - 0,1565\cdot10^{-18}\cdot t^9.$$

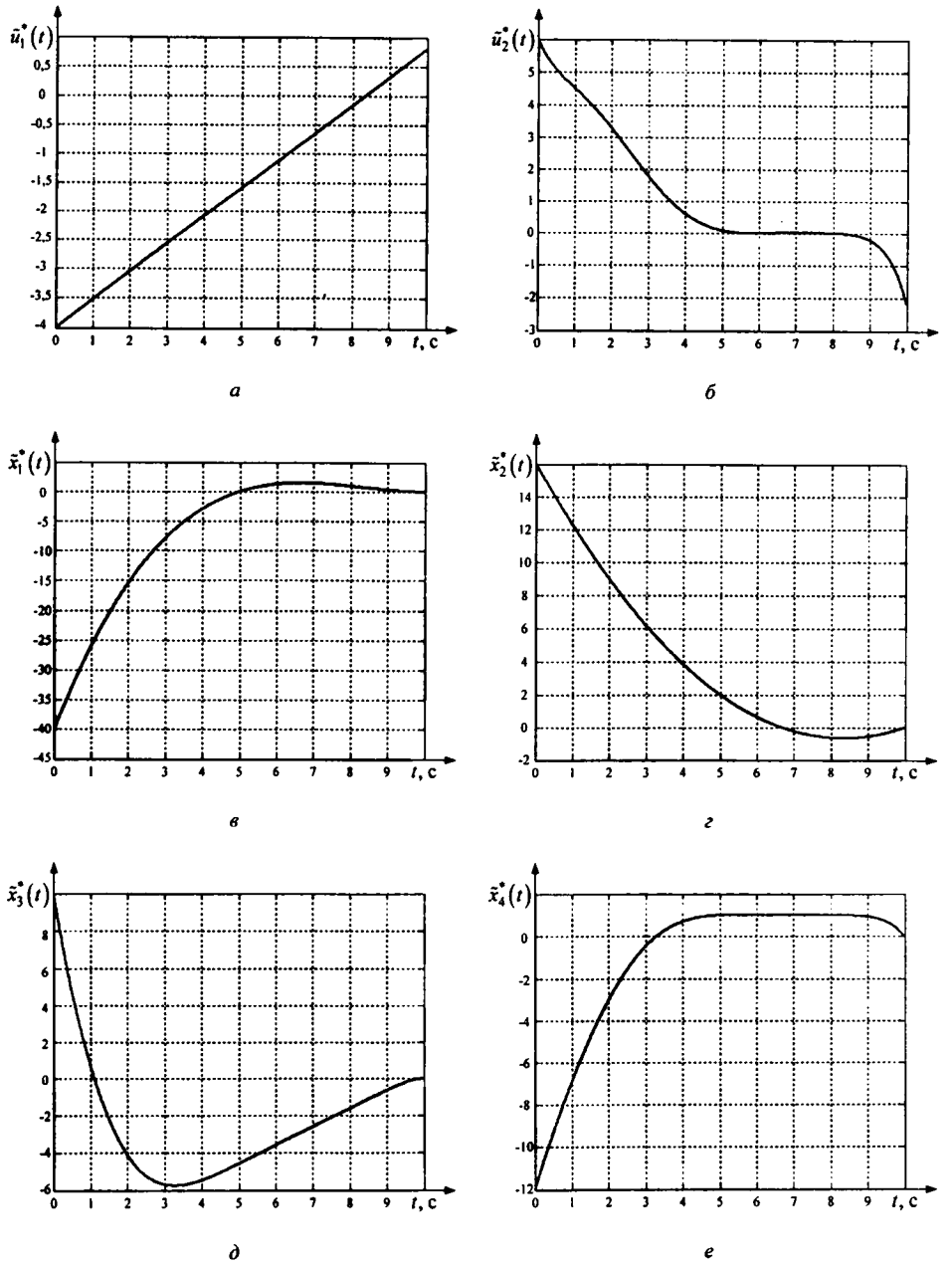


Рис. 5.35. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t)$, $\tilde{x}_4^*(t)$

Пример 5.17. Стыковка космических объектов.

Отличием космических объектов, движущихся по орбите, от обычных, движущихся в атмосфере или гидросфере, является то, что они не взаимодействуют с внешней средой. Плотность внешней среды такова, что ее влиянием на небольшом отрезке времени можно пренебречь и считать, что на объект действуют лишь гравитационная сила и сила тяги реактивного двигателя, управляемого с помощью САУ. Кроме того, можно приближенно считать, что тот небольшой участок круговой орбиты, который пролетают объекты за время выполнения стыковки, прямолинеен. Действительно, его длина примерно равна 200–400 км, что составляет 1% от длины круговой орбиты, равной 41 000 км.

Вектор силы тяжести при этом перпендикулярен траектории и не проектируется на ее направление. Учитывая сказанное, запишем уравнения движения двух объектов вдоль горизонтальной оси L [7]:

$$\dot{v}_1 = \alpha_1,$$
$$\dot{L}_1 = v_1,$$
$$\dot{v}_2 = F/m,$$
$$\dot{L}_2 = v_2,$$

где L_1 и v_1 — координата и скорость перемещения цели (первого объекта) вдоль оси L; L_2 и v_2 — координата и скорость перемещения перехватчика (второго объекта) вдоль оси L; F — сила тяги двигателя перехватчика; $m = 2943$ кг — масса перехватчика.

Будем предполагать, что управляющая сила F перехватчика, создаваемая его реактивной двигательной установкой, может менять направление и линейно зависит от перемещения управляющего органа:

$$F = 9810 \cdot \delta.$$

Возьмем астатический регулятор ускорения с законом управления

$$\dot{\delta} = K_F(u - \dot{v}_2),$$

где $K_F = 10$ — передаточное число рулевого привода; $\dot{v}_2$ — текущее ускорение перехватчика, измеренное вдоль оси L; $u = u(t)$ — текущее управление ускорением, подлежащее определению.

Постановка задачи оптимального управления: определить закон управления ускорением $u(t)$, обеспечивающий плавную безударную стыковку двух космических объектов, при этом энергия управления

$$I = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u, \tag{5.227}$$

где $[0, T]$ — интервал управления.

Сформулируем математическую постановку задачи.

Введем вектор состояния

$$\mathbf{X} = [x_1 \ \ldots \ x_5]^{\mathrm{T}},$$
$$x_1 = L_1,\ x_2 = v_1,\ x_3 = L_2,\ x_4 = v_2,\ x_5 = \delta.$$

Задача заключается в переводе объекта, описываемого системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = \alpha_1, \\ \dot{x}_3 = x_4, \\ \dot{x}_4 = 9810/2943\,x_5, \\ \dot{x}_5 = 10(u - 9810/2943\,x_5) \end{cases}$$

из начального состояния $\mathbf{X}^0 = [x_{10} \ \ldots \ x_{50}]^{\mathrm{T}}$ в конечное состояние $\mathbf{X}^T$ за промежуток времени $[0, T]$, при этом функционал качества (5.227) должен принять минимальное значение.

Выберем следующие значения констант [7]:

- $\alpha_1 = 0$ (цель движется без ускорения),
- $T = 30$ с (время процесса стыковки),
- $x_{10} = L_{10} = 1200$ м (начальная координата цели),
- $x_{20} = v_{10} = 8000$ м/с (начальная скорость цели),
- $x_{30} = L_{20} = 1000$ м (начальная координата перехватчика),
- $x_{40} = v_{20} = 8000$ м/с (начальная скорость перехватчика),
- $x_{50} = \delta = 0$.

Конечные условия:

- $x_{1T} = x_{3T}$ (координаты перехватчика и цели совпадают),
- $x_{2T} = x_{4T}$ (скорости перехватчика и цели совпадают).

Ограничения типа неравенств отсутствуют.

Матрица управляемости системы имеет вид

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 33,3333 & -1111,111 & 37037,037 \\ 0 & 33,3333 & -1111,111 & 37037,037 & -1234567,901 \\ 10 & -333,333 & 11111,111 & -370370,370 & 12345679,012 \end{bmatrix},$$

$$\operatorname{rank} \mathbf{M}_y = 3.$$

Система является управляемой по части переменных, относящихся к перехватчику.

Перепишем уравнения объекта в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{12}x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = \alpha_1, \\ \dot{x}_3(t) = a_{34}x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = a_{45}x_5(t), \\ \dot{x}_5(t) = a_{55}x_5(t) + b_5u(t). \end{cases}$$

После интегрирования имеем:

$$x_1(t) = \int_0^t a_{12}x_2(\tau)d\tau + x_1(0),$$

$$x_2(t) = \int_0^t \alpha_1 d\tau + x_2(0) = \alpha_1 t + x_2(0),$$

$$x_3(t) = \int_0^t a_{34}x_4(\tau)d\tau + x_3(0),$$

$$x_4(t) = \int_0^t a_{45}x_5(\tau)d\tau + x_4(0),$$

$$x_5(t) = \int_0^t a_{55}x_5(\tau)d\tau + \int_0^t b_5u(\tau)d\tau + x_3(0).$$

Осуществим редукцию поставленной задачи к задаче математического программирования с использованием в качестве базиса ортонормированных на интервале [0,30] полиномов Лежандра.

Для $T = 30$ проекционно-матричный оператор интегрирования в базисе ортонормированных полиномов Лежандра имеет вид (вырез матрицы размером 6×6):

$$\mathbf{A}_и = \begin{bmatrix} 15,000 & -8,6603 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 8,6603 & 0 & -3,8730 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3,8730 & 0 & -2,5355 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2,5355 & 0 & -1,8898 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,8898 & 0 & -1,5076 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,5076 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнения объекта с использованием проекционно-матричного оператора интегрирования можно записать следующим образом:

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} = a_{12}\mathbf{A}_и\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} + x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} = \mathbf{A}_и\mathbf{C}^{\alpha_1} + x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} = a_{34}\mathbf{A}_и\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} + x_3(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} = a_{45}\mathbf{A}_и\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + x_4(0)\mathbf{\Phi}_N^0,$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} = a_{55}\mathbf{A}_и\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + b_5\mathbf{A}_и\mathbf{C}^{\tilde{u}} + x_5(0)\mathbf{\Phi}_N^0.$$

В уравнениях, описывающих динамику объекта управления, матрицы **A** и **B** имеют вид

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0&1&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&3{,}333\\0&0&0&0&-33{,}33\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\10\end{bmatrix}.$$

Матричный эквивалент математической модели объекта можно переписать в виде

$$\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\\\mathbf{C}^{x_5}\end{bmatrix}=\tilde{\mathbf{A}}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\\\mathbf{C}^{x_5}\end{bmatrix}+\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{C}^{\tilde{u}}+\begin{bmatrix}x_1(0)\boldsymbol{\Phi}_N^0\\x_2(0)\boldsymbol{\Phi}_N^0\\x_3(0)\boldsymbol{\Phi}_N^0\\x_4(0)\boldsymbol{\Phi}_N^0\\x_5(0)\boldsymbol{\Phi}_N^0\end{bmatrix},\qquad(5.228)$$

$$\tilde{\mathbf{A}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{A}_и&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{A}_и&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&3{,}333\cdot\mathbf{A}_и\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&-33{,}33\cdot\mathbf{A}_и\end{bmatrix},\quad \tilde{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix}\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\\mathbf{0}\\10\cdot\mathbf{A}_и\end{bmatrix}.$$

Теперь можно поставить задачу в терминах математического программирования:

$$I\left(\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right)=\sum_{k=1}^{l}\left(c_k^{\tilde{u}}\right)^2\to\min_{\mathbf{C}^{\tilde{u}}}$$

при ограничениях типа равенств (5.228). Ограничения на начальное состояние объекта управления учитываются ограничениями (5.228). Параметризованный эквивалент конечных условий можем записать следующим образом:

$$\mathbf{X}^T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}-\boldsymbol{\Phi}(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\approx 0\\\boldsymbol{\Phi}(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}-\boldsymbol{\Phi}(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\approx 0\end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix}\left|\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}-\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\right|\\\left|\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}-\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\right|\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{L}}\\\delta^{\tilde{v}}\end{bmatrix}.\qquad(5.229)$$

Соотношение (5.229) представляет собой ограничения типа неравенств. Ограничения на управление и фазовые координаты не накладываются.

Для решения конечномерной оптимизационной задачи воспользуемся средствами пакета *Matlab 6.1*. Приведем ограничения (5.228) и (5.229) к форме

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0}&\mathbf{I}&-\mathbf{A}_и&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}&-\mathbf{A}_и&\mathbf{0}\\\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}&-3{,}333\cdot\mathbf{A}_и\\-\mathbf{A}_и&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{0}&\mathbf{I}-33{,}33\cdot\mathbf{A}_и\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_5}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}_N^{01}\\\boldsymbol{\Phi}_N^{02}\\\boldsymbol{\Phi}_N^{03}\\\boldsymbol{\Phi}_N^{04}\\\boldsymbol{\Phi}_N^{05}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}0&\boldsymbol{\Phi}(T)&0&-\boldsymbol{\Phi}(T)&0&0\\0&-\boldsymbol{\Phi}(T)&0&\boldsymbol{\Phi}(T)&0&0\\0&0&\boldsymbol{\Phi}(T)&0&-\boldsymbol{\Phi}(T)&0\\0&0&-\boldsymbol{\Phi}(T)&0&\boldsymbol{\Phi}(T)&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_5}\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{L}}\\\delta^{\tilde{L}}\\\delta^{\tilde{v}}\\\delta^{\tilde{v}}\end{bmatrix}.$$

При решении задачи размерность базиса полиномов Лежандра принималась равной 16, $\delta^{\tilde{L}}=\delta^{\tilde{v}}=10^{-5}$. Приведем результаты решения задачи построения оптимального управления перехватчиком. Спектраль-

ные характеристики сигналов $C^{\vec{u}^*}$, $C^{\vec{x}_1^*}$, $C^{\vec{x}_2^*}$, $C^{\vec{x}_3^*}$, $C^{\vec{x}_4^*}$ и $C^{\vec{x}_5^*}$ определяются следующими вектор-столбцами (приводятся вырезы вектор-столбцов размерностью 5×1):

$$C^{\vec{u}^*}=\begin{bmatrix}6{,}4254\cdot10^{-10}\\-4{,}2164\\3{,}2660\cdot10^{-2}\\0{,}19183\\4{,}0773\cdot10^{-2}\end{bmatrix},\quad C^{\vec{x}_1^*}=\begin{bmatrix}6{,}6384\cdot10^{5}\\3{,}7947\cdot10^{5}\\0\\0\\0\end{bmatrix},\quad C^{\vec{x}_2^*}=\begin{bmatrix}4{,}3818\cdot10^{4}\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},$$

$$C^{\vec{x}_3^*}=\begin{bmatrix}6{,}6329\cdot10^{5}\\3{,}7985\cdot10^{5}\\5{,}7456\cdot10^{-7}\\-4{,}2639\cdot10^{1}\\-2{,}7463\cdot10^{-7}\end{bmatrix},\quad C^{\vec{x}_4^*}=\begin{bmatrix}4{,}3854\cdot10^{4}\\7{,}4383\cdot10^{-8}\\-1{,}6816\cdot10^{1}\\-1{,}1299\cdot10^{-7}\\1{,}2231\cdot10^{-3}\end{bmatrix},\quad C^{\vec{x}_5^*}=\begin{bmatrix}1{,}8454\cdot10^{-10}\\-1{,}2649\\-5{,}3490\cdot10^{-9}\\5{,}7550\cdot10^{-2}\\1{,}0760\cdot10^{-8}\end{bmatrix}.$$

На рис. 5.36, *а–г* представлены графики функций $\vec{u}^*(t)$, $\vec{L}_2^*(t)-\vec{L}_1^*(t)$, $\vec{v}_1^*(t)-\vec{v}_2^*(t)$, $\vec{\delta}^*$. На рис. 5.36, *а* также приводится график закона управления

$$u(t)=\frac{6(L_1-L_2)}{(T-t)^2}+\frac{4(v_1-v_2)}{T-t},$$

используемого на практике (пунктирная линия). Недостатком этого закона является то, что он трудно реализуем при значениях t, близких к T. Поэтому, реализуя этот закон управления, необходимо прерывать автоматический режим вблизи конечного момента времени и дальнейшую стыковку осуществлять вручную. При использовании построенного в данном примере закона управления $\vec{u}^*(t)$ эта проблема не возникает. Точность стыковки при управлении $\vec{u}^*(t)$ значительно выше, чем при используемом на практике.

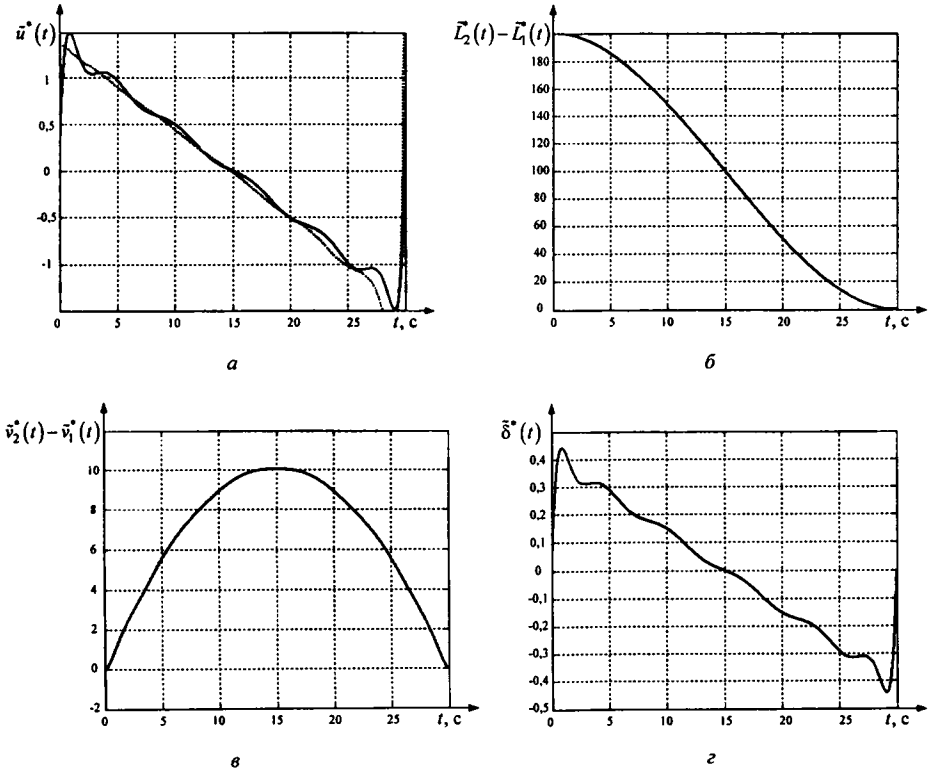


Рис. 5.36. Графики функций, характеризующих процесс оптимального управления

Можно сделать вывод, что *разности координат и скоростей перехватчика и цели составляют малые величины, т.е. имела место плавная безударная стыковка.*

Решим задачу оптимального управления стыковкой космических объектов, введя ограничения на фазовые координаты и управление при $T = 3$ с и $\alpha_1 = 10$ м/с^2 (что соответствует движению цели с постоянным ускорением). Пусть

$$|x_5(t)| \le 3 \cdot 9{,}81 \text{ м/с}^2 \quad \forall t \in [0, 3], \tag{5.230}$$

$$|u(t)| \le 9 \cdot 9{,}81 \text{ м/с}^2 \quad \forall t \in [0, 3]. \tag{5.231}$$

Сформулируем ограничения (5.230), (5.231) в узлах сетки ограничений

$$T_g = \left\{ t_j : \; j = \overline{1, g}, \; t_1 = 0, \; t_g = 3, \; t_i < t_{i+1} \right\}$$

в виде

$$\left| \boldsymbol{\Phi}(t_j) \mathbf{C}^{\vec{x}_5} \right| \le 3 \cdot 9{,}81, \quad \left| \boldsymbol{\Phi}(t_j) \mathbf{C}^{\vec{u}} \right| \le 9 \cdot 9{,}81 \quad \forall t_j \in T_g.$$

При этом ограничения типа неравенств будут иметь вид

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi(T) & 0 & -\Phi(T) & 0 & 0 \\ 0 & -\Phi(T) & 0 & \Phi(T) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(T) & 0 & -\Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi(T) & 0 & \Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\Phi(t_g) \\ \Phi(t_1) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Phi(t_g) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\vec{u}} \\ \mathbf{C}^{\vec{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\vec{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\vec{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\vec{x}_4} \\ \mathbf{C}^{\vec{x}_5} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\vec{L}} \\ \delta^{\vec{L}} \\ \delta^{\vec{v}} \\ \delta^{\vec{v}} \\ 3 \cdot 9{,}81 \\ \vdots \\ 3 \cdot 9{,}81 \\ 9 \cdot 9{,}81 \\ \vdots \\ 9 \cdot 9{,}81 \end{bmatrix}.$$

Будем использовать в качестве базиса ортонормированные на $[0, T]$ полиномы Лежандра (при размерности базиса $l = 15$).

Для $T = 3$ проекционно-матричный оператор интегрирования в базисе ортонормированных полиномов Лежандра имеет вид (вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_и = \begin{bmatrix} 1{,}5000 & -0{,}8660 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}8660 & 0 & -0{,}3873 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}3873 & 0 & -0{,}2536 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}2536 & 0 & -0{,}1890 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1890 & 0 \end{bmatrix}.$$

Приведем результаты решения задачи при ограничениях (5.230), (5.231). Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\vec{u}^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_1^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_2^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_3^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_4^*}$ и $\mathbf{C}^{\vec{x}_5^*}$ определяются вектор-столбцами (приводятся вырезы вектор-столбцов размером 5×1):

$$\mathbf{C}^{\vec{u}^*} = \begin{bmatrix} 17{,}321 \\ -133{,}93 \\ -10{,}434 \\ 57{,}956 \\ 20{,}385 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_1^*} = \begin{bmatrix} 22889 \\ 12022 \\ 5{,}8095 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 13882 \\ 15{,}0000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^{\vec{x}_3^*} = \begin{bmatrix} 22709 \\ 12148 \\ 11{,}0000 \\ -19{,}009 \\ -2{,}1571 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_4^*} = \begin{bmatrix} 13998 \\ 23{,}041 \\ -65{,}944 \\ -8{,}1904 \\ 12{,}111 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_5^*} = \begin{bmatrix} 5{,}1962 \\ -40{,}000 \\ -6{,}2287 \\ 16{,}925 \\ 4{,}6452 \end{bmatrix}.$$

На рис. 5.37, *а–г* представлены графики функций $\vec{u}^*(t)$, $\vec{L}_2(t) - \vec{L}_1^*(t)$, $\vec{v}_1^*(t) - \vec{v}_2^*(t)$ и $\vec{\delta}^*(t)$. На рис. 5.37, *а* также приводится график используемого на практике закона управления $u(t)$ (пунктирная линия).

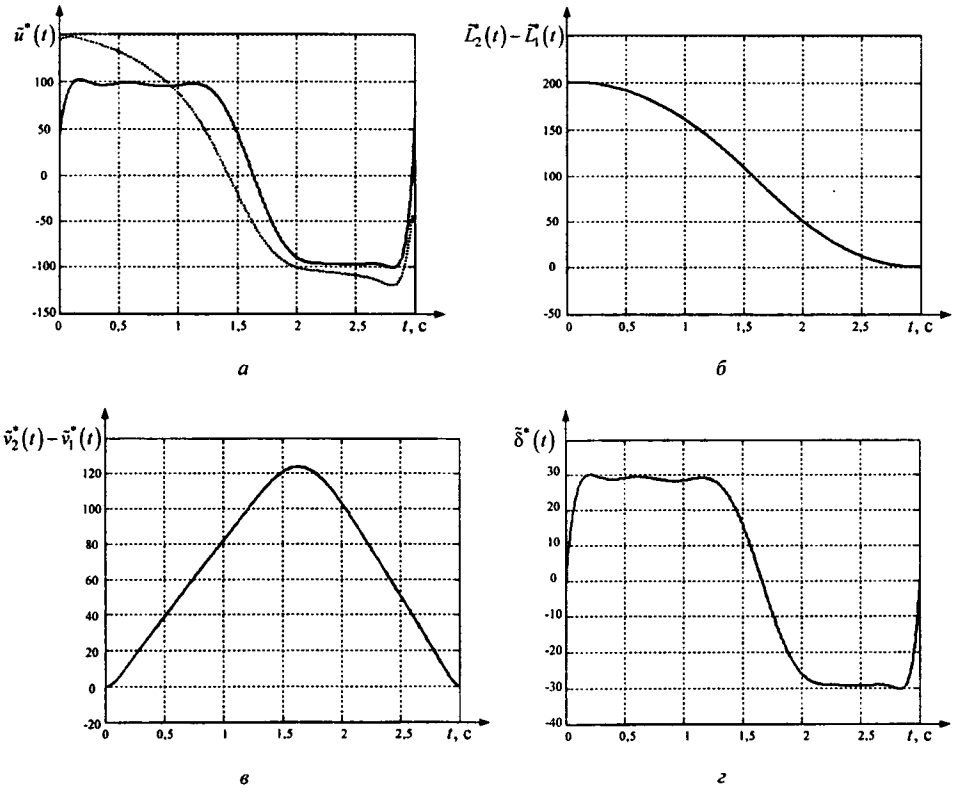


Рис. 5.37. Графики функций, характеризующих процесс оптимального управления

Пример 5.18. Оптимальное управление транспортным самолетом при заходе на посадку (см. пример 5.8 из п. 5.4.2).

Напомним постановку задачи. Уравнения объекта управления имеют вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{22}x_2(t) + a_{23}x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = a_{42}x_2(t) + a_{43}x_3(t) + a_{44}x_4(t) + k_0u(t). \end{cases} \tag{5.232}$$

Функционал качества определяется выражением

$$I = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\rho_i\left[x_i(T)\right]^2 + \frac{1}{2}\int_0^T\left\{\alpha\left[x_{1э}(t) - x_1(t)\right]^2 + \beta(u)^2\right\}dt, \tag{5.233}$$

$$x_{1э} = x_{10}\exp(-t/3).$$

Граничные условия заданы следующим образом:

$$x_i(0) = x_{i0},\ x_i(T) = x_{iT} = 0,\ i = 1,2,3,4,$$

причем время T является заданным.

Зададимся следующими исходными данными [7]:

$$x_{10} = 30{,}5 \text{ м};\ x_{20} = -6{,}1 \text{ м/с};\ x_{30} = -0{,}078 \text{ рад};\ x_{40} = 0 \text{ рад/с};$$

$$a_{22} = 0{,}4 \text{ с};\ a_{23} = 31{,}2 \text{ м/с}^2;\ a_{42} = 0{,}0097\ \frac{1}{\text{м}\cdot\text{с}};$$

$$a_{43} = -0{,}76\ \frac{1}{\text{с}^2};\ a_{44} = -0{,}6\ \frac{1}{\text{с}};\ k_0 = -2{,}37\ \frac{1}{\text{с}^2};$$

$$T = 20 \text{ с};\ \alpha = 10;\ \beta = 200000;\ \rho_i = 1000\ (i = 1,2,3,4).$$

Решим задачу методом математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов.

После интегрирования уравнений (5.232) имеем

$$x_1(t) = x_1(0) + \int_0^t x_2(\tau)d\tau,$$

$$x_2(t) = x_2(0) + \int_0^t a_{22}x_2(\tau)d\tau + \int_0^t a_{23}x_3(\tau)d\tau,$$

$$x_3(t) = x_3(0) + \int_0^t x_4(\tau)d\tau,$$

$$x_4(t) = x_4(0) + \int_0^t a_{42}x_2(\tau)d\tau + \int_0^t a_{43}x_3(\tau)d\tau + \int_0^t a_{44}x_4(\tau)d\tau + \int_0^t k_0u(\tau)d\tau.$$

В качестве базиса будем использовать ортонормированные на интервале $[0,T]$ полиномы Лежандра. Зададимся размерностью базиса $l = 15$.

Для $T = 20$ матрица интегрирования имеет вид (приведен вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_и = \begin{bmatrix} 10,0000 & -5,7735 & 0 & 0 & 0 \\ 5,7735 & 0 & -2,5820 & 0 & 0 \\ 0 & 2,5820 & 0 & -1,6903 & 0 \\ 0 & 0 & 1,6903 & 0 & -1,2599 \\ 0 & 0 & 0 & 1,2599 & 0 \end{bmatrix}.$$

Параметризованные векторы фазовых координат и управления имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_l(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{u}},$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_l(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_i} = \begin{bmatrix} c_1^{\tilde{x}_i} & \dots & c_l^{\tilde{x}_i} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} c_1^{\tilde{u}} & \dots & c_l^{\tilde{u}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Уравнения объекта с использованием проекционно-матричного оператора интегрирования можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_и & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & a_{22}\mathbf{A}_и & a_{23}\mathbf{A}_и & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_и \\ \mathbf{0} & a_{42}\mathbf{A}_и & a_{43}\mathbf{A}_и & a_{44}\mathbf{A}_и \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ k_0\mathbf{A}_и \end{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} + \begin{bmatrix} x_1(0)\cdot\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_2(0)\cdot\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_3(0)\cdot\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_4(0)\cdot\mathbf{\Phi}_N^0 \end{bmatrix}. \tag{5.234}$$

Теперь формулировка задачи в терминах математического программирования выглядит так:

$$I\left(\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{4}\rho_k\left[\mathbf{\Phi}(t)\big|_{t=T}\mathbf{C}^{\tilde{x}_k}\right]^2 + \\ + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{l}\left[\alpha\left(\mathbf{C}_k^{\tilde{x}_1}\right)^2 + \alpha\left(\mathbf{C}_k^{\tilde{x}_1}\right)^2 - 2\alpha\mathbf{C}_k^{\tilde{x}_1}\cdot\mathbf{C}_k^{\tilde{x}_1} + \beta\left(\mathbf{C}_k^{\tilde{u}}\right)^2\right] \to \min_{\mathbf{C}_k^{\tilde{u}}} \tag{5.235}$$

при ограничениях типа равенств (5.234). Ограничения на начальное состояние объекта управления учитываются ограничениями (5.234). Ограничения на управление и фазовые координаты отсутствуют.

Решение конечномерной оптимизационной задачи проведем в системе *Matlab 6.1*. При этом ограничения (5.234) следует привести к форме

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{A}_и & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}-a_{22}\mathbf{A}_и & -a_{23}\mathbf{A}_и & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{A}_и \\ -\mathbf{A}_и & \mathbf{0} & -a_{42}\mathbf{A}_и & -a_{43}\mathbf{A}_и & \mathbf{I}-a_{44}\mathbf{A}_и \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_{eq}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_N^{01} \\ \mathbf{\Phi}_N^{02} \\ \mathbf{\Phi}_N^{03} \\ \mathbf{\Phi}_N^{04} \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}_{eq}}.$$

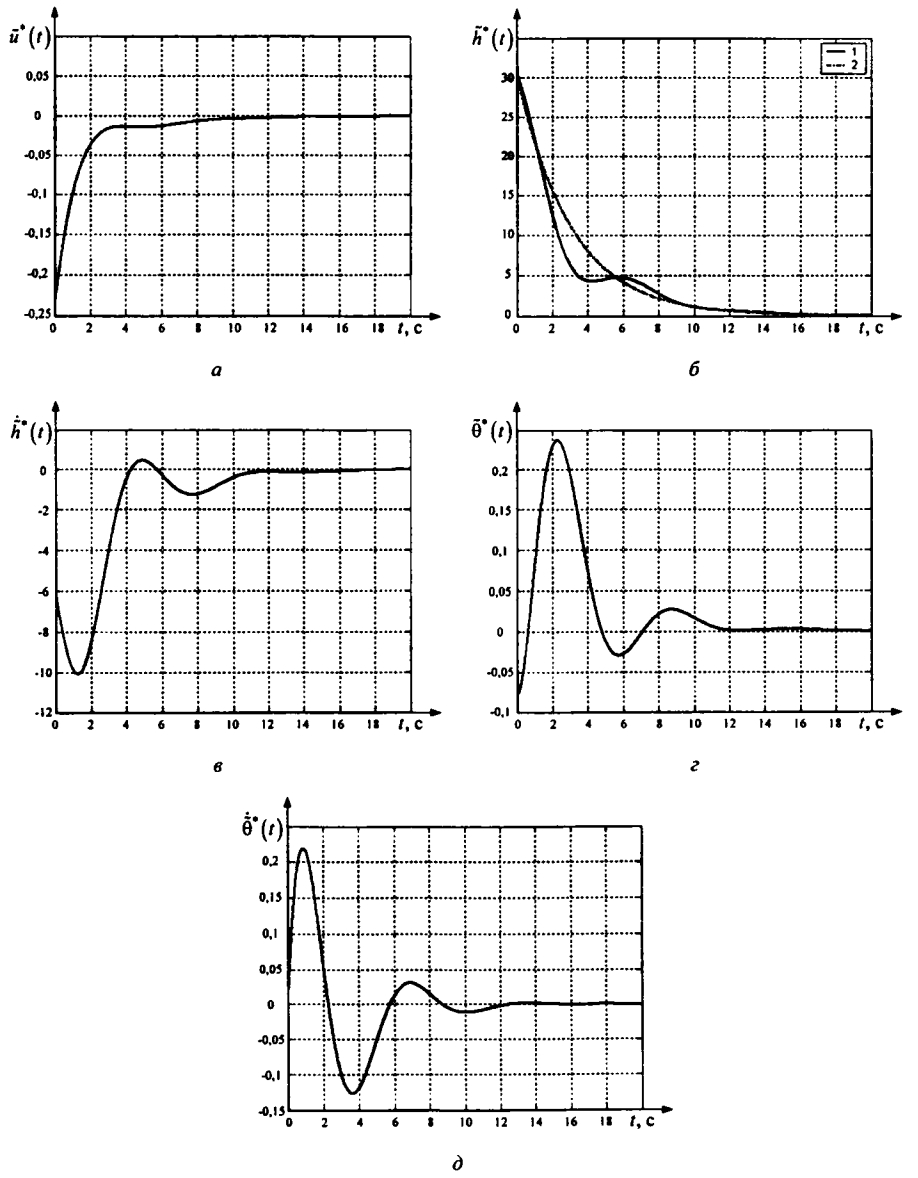


Рис. 5.38. Графики оптимального управления $u^*(t)$ и фазовых траекторий системы

Приведем результаты решения задачи оптимального перевода объекта из состояния $\mathbf{X}^0$ в состояние $\mathbf{X}^T$ при $\rho_i = 10^3$, $i = \overline{1,4}$, $\alpha = 10$, $\beta = 2 \cdot 10^5$. Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{u^*}$, $\mathbf{C}^{x_1^*}$, $\mathbf{C}^{x_2^*}$, $\mathbf{C}^{x_3^*}$ и $\mathbf{C}^{x_4^*}$ определяются следующими вектор-столбцами (приводятся вырезы вектор-столбцов размером 5×1):

$$\mathbf{C}^{u^*} = \begin{bmatrix} -7{,}4344 \cdot 10^{-2} \\ 9{,}7953 \cdot 10^{-2} \\ -8{,}5265 \cdot 10^{-2} \\ 7{,}0022 \cdot 10^{-2} \\ -5{,}6655 \cdot 10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{x_1^*} = \begin{bmatrix} 18{,}195 \\ -21{,}940 \\ 1{,}5296 \\ -9{,}5989 \\ 6{,}6063 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{x_2^*} = \begin{bmatrix} -6{,}8165 \\ 8{,}6670 \\ -6{,}7451 \\ 4{,}1901 \\ -1{,}4306 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}^{\tilde{x}_3^*} = \begin{bmatrix} 1{,}3117\cdot10^{-1} \\ -1{,}4890\cdot10^{-1} \\ 7{,}6771\cdot10^{-2} \\ 1{,}6467\cdot10^{-2} \\ -1{,}0127\cdot10^{-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_4^*} = \begin{bmatrix} 1{,}7476\cdot10^{-2} \\ -5{,}2868\cdot10^{-2} \\ 9{,}6746\cdot10^{-2} \\ -1{,}2618\cdot10^{-1} \\ 1{,}1673\cdot10^{-1} \end{bmatrix}.$$

Графики функций $u^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t) = \tilde{h}^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t) = \dot{\tilde{h}}^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t) = \tilde{\theta}^*(t)$ и $\tilde{x}_4^*(t) = \dot{\tilde{\theta}}^*(t)$ представлены на рис. 5.38.

На рис. 5.38, *б* пунктирной линией обозначена эталонная траектория самолета при заходе на посадку, сплошной линией — реальная.

Приведем исходный текст программы, реализующей алгоритм решения оптимизационной задачи.

```
close all
clear all
pack
clc
warning off

% independent variables
syms t nu
A = zeros(4);
B = zeros(4,1);

A(1,2) = 1;
A(2,2) = 0.4;
A(2,3) = 32;
A(3,4) = 1;
A(4,2) = 0.0097;
A(4,3) = -0.76;
A(4,4) = -0.6;

B(4,1) = -2.37;

My = [B A*B A^2*B A^3*B]
rank(My)

rho = 1000*ones(1,4);
alpha = 10;
beta = 2e5;

epsl = 0.001;

T = 20;
dt = 0.01;
tc = 0:dt:T;

x0 = zeros(5,1);

x0(1,1) = 30.5;
x0(2,1) = -6.1;
x0(3,1) = -0.078;
x0(4,1) = 0;

xlet = x0(1,1)*exp(-t/3);

l = 15;

% Displacement Legendre's polinoms. %%%%
```

```
% PhiN evaluation.%%%
```

```
2str(UT(k-3*l+1,1)),'*x(',num2str(k+1),')');
2+',num2str(rho(1,4)/2),'*(');


2str(UT(k-4*l,1)),'*x(',num2str(k),')+');

2str(UT(k-4*l+1,1)),'*x(',num2str(k+1),')');
2+');


2str(alpha/2),'*x(',num2str(k),')^2+');



2str(alpha/2*Cxlet(k)^2),'+');

2str(alpha/2*Cxlet(k+1)^2),'-');


,num2str(2*alpha/2*Cxlet(k-l)),')','*x(',num2str(k),')-');

,num2str(2*alpha/2*Cxlet(k-l+1)),')','*x(',num2str(k+1),')');



%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

fmincon');
Diagnostics','on','Display','iter','MaxIter',…
                              2000,'MaxFunEvals',20000000);
ldopts, newopts)
 output] = fmincon(J,c0,AM,BM,Ae,Be,[],[],[],options)
```

```
'*Cx1,'t'));
'*Cx2,'t'));
'*Cx3,'t'));
'*Cx4,'t'));
*Cu,'t'));


,'-k','LineWidth',2)
```

```
grid
zoom

figure
plot(tc,subs(x1,t,tc),'-k',tc,subs(xlet_a,'t',tc),'-.k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x1(t)')
legend('1','2')
grid
zoom

figure
plot(tc,subs(x2,t,tc),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x2(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,subs(x3,t,tc),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x3(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,subs(x4,t,tc),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x4(t)')
grid
zoom
```

5.5.3. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ нестационарных линейных объектов по критерию минимальной энергии

Постановка задачи в рассматриваемом случае целиком совпадает с постановкой задачи построения оптимальных программных управлений для класса стационарных линейных объектов; отличие состоит в том, что математическая модель объекта имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t).$$

Далее не будем повторять положения, приведенные в п. 5.5.2, а сразу обратимся к подробному рассмотрению примеров.

Пример 5.19 (см. пример 5.7 из п. 5.4.2). Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \tag{5.236}$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 1-t \\ 1+t & t-t^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix}.$$

Сформулируем задачу следующим образом: перевести объект (5.236) из начального состояния $\mathbf{X}^0 = [9 \quad -9]^{\mathrm{T}}$ в конечное состояние $\mathbf{X}^T = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ за время $T = 4$ с, при этом функционал качества

$$I(\mathbf{U}) = \int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)\,dt \to \min_{\mathbf{U}}. \tag{5.237}$$

Решим задачу методом математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов интегрирования и умножения на функции.

Как было показано ранее, система (5.236) *полностью управляема* на интервале $[0,T]$.

Перепишем уравнения объекта в виде

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = a_{11}(t)x_1(t) + a_{12}(t)x_2(t) + b_{11}(t)u_1(t) + b_{12}(t)u_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = a_{21}(t)x_1(t) + a_{22}(t)x_2(t) + b_{21}(t)u_1(t) + b_{22}(t)u_2(t). \end{cases} \tag{5.238}$$

В матричной форме уравнения (5.238) запишутся так:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} &= \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{11}]\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} + \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{12}]\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} + \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{11}]\mathbf{C}^{\tilde{u}_1} + \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{12}]\mathbf{C}^{\tilde{u}_2} + x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0,\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} &= \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{21}]\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} + \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{22}]\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} + \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{21}]\mathbf{C}^{\tilde{u}_1} + \mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{22}]\mathbf{C}^{\tilde{u}_2} + x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0,\end{aligned} \tag{5.239}$$

где $\mathbf{A}_и$ — проекционно-матричный оператор интегрирования, $\mathbf{A}_y[a_{ij}]$, $\mathbf{A}_y[b_{ij}]$, $i, j = \overline{1,2}$, — проекционно-матричные операторы умножения на функции $a_{ij}(t)$, $b_{ij}(t)$, $i, j = \overline{1,2}$, соответственно.

Параметризованный функционал качества (5.237) определяется выражением

$$I\left(\mathbf{C}^{\tilde{U}}\right) = \sum_{k=1}^{l}\left[c_k^{\tilde{u}_1}\right]^2 + \sum_{k=1}^{l}\left[c_k^{\tilde{u}_2}\right]^2 \to \min_{\mathbf{C}^{\tilde{U}}}. \tag{5.240}$$

Теперь формулировка задачи в терминах математического программирования запишется так: *отыскать закон управления* $\tilde{\mathbf{U}}^*(t)$, *доставляющий минимум функционалу* (5.240) *при ограничениях* (5.239) *и*

$$\begin{bmatrix}\left|\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\right|\\ \left|\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\right|\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}. \tag{5.241}$$

Ограничения на управление и фазовые координаты не накладываются.

Решение оптимизационной задачи в пакете *Matlab* предполагает следующую модификацию ограничений типа равенств (5.239) и ограничений типа неравенств (5.241):

$$\begin{bmatrix}-\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{11}] & -\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{12}] & \mathbf{I}-\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{11}] & -\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{12}]\\ -\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{21}] & -\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[b_{22}] & -\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{21}] & \mathbf{I}-\mathbf{A}_и\mathbf{A}_y[a_{22}]\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{\Phi}_N^{01}\\ \mathbf{\Phi}_N^{02}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(T) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{\Phi}(T) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(T)\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{\Phi}(T)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}.$$

В качестве базиса будем использовать ортонормированные на интервале [0,4] полиномы Лежандра. Зададимся размерностью базиса $l = 14$. Положим $\delta^{\tilde{x}_i} = 0{,}05$, $i = 1,2$.

Для $T = 4$ матрица интегрирования имеет вид (приведен вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_и = \begin{bmatrix}2{,}0000 & -1{,}1547 & 0 & 0 & 0\\ 1{,}1547 & 0 & -0{,}5164 & 0 & 0\\ 0 & 0{,}5164 & 0 & -0{,}3381 & 0\\ 0 & 0 & 0{,}3381 & 0 & -0{,}2520\\ 0 & 0 & 0 & 0{,}2520 & 0\end{bmatrix}.$$

Проекционно-матричные операторы умножения определяются выражениями (приводятся вырезы матриц размером 5×5):

$$\mathbf{A}_y[a_{11}] = \begin{bmatrix}5{,}3333 & 4{,}6188 & 1{,}1926 & 0 & 0\\ 4{,}6188 & 6.4000 & 4{,}1312 & 1{,}0474 & 0\\ 1{,}1926 & 4{,}1312 & 6{,}0952 & 4{,}0567 & 1{,}0222\\ 0 & 1{,}0474 & 4{,}0567 & 6{,}0444 & 4{,}0316\\ 0 & 0 & 1{,}0222 & 4{,}0316 & 6{,}0260\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_{12}] = \begin{bmatrix}-1 & -1{,}1547 & 0 & 0 & 0\\ -1{,}1547 & -1 & -1{,}0328 & 0 & 0\\ 0 & -1{,}0328 & -1 & -1{,}0142 & 0\\ 0 & 0 & -1{,}0142 & -1 & -1{,}0079\\ 0 & 0 & 0 & -1{,}0079 & -1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_{21}]=\begin{bmatrix}3,0000 & 1,1547 & 0 & 0 & 0\\ 1,1547 & 3,0000 & 1,0328 & 0 & 0\\ 0 & 1,0328 & 3,0000 & 1,0142 & 0\\ 0 & 0 & 1,0142 & 3,0000 & 1,0079\\ 0 & 0 & 0 & 1,0079 & 3,0000\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_{22}]=\begin{bmatrix}-3,3333 & -3,4641 & -1,1926 & 0 & 0\\ -3,4641 & -4,4000 & -3,0984 & -1,0474 & 0\\ -1,1926 & -3,0984 & -4,0952 & -3,0426 & -1,0222\\ 0 & -1,0474 & -3,0426 & -4,0444 & -3,0237\\ 0 & 0 & -1,0222 & -3,0237 & -4,0237\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[b_{11}]=\begin{bmatrix}5,3333 & 4,6188 & 1,1926 & 0 & 0\\ 4,6188 & 6,4000 & 4,1312 & 1,0475 & 0\\ 1,1926 & 4,1312 & 6,0952 & 4,0567 & 1,0222\\ 0 & 1,0475 & 4,0567 & 6,0444 & 4,0316\\ 0 & 0 & 1,0222 & 4,0316 & 6,0260\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[b_{12}]=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_y[b_{21}]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[b_{22}]=\begin{bmatrix}2,0000 & 1,1547 & 0 & 0 & 0\\ 1,1547 & 2,0000 & 1,0328 & 0 & 0\\ 0 & 1,0328 & 2,0000 & 1,0142 & 0\\ 0 & 0 & 1,0142 & 2,0000 & 1,0079\\ 0 & 0 & 0 & 1,0079 & 2,0000\end{bmatrix}.$$

Приведем результаты решения задачи оптимального перевода объекта (5.236) из состояния $\mathbf{X}^0$ в состояние $\mathbf{X}^T$. Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\vec{u}_1^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{u}_2^*}$, $\mathbf{C}^{\vec{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\vec{x}_2^*}$ представлены вектор-столбцами

В результате решения оптимизационной задачи вектор-столбцы спектральных коэффициентов оптимального управления и оптимальной программы примут вид

$$\mathbf{C}^{\vec{u}_1^*}=\begin{bmatrix}-4,9290\\ 2,8340\\ 2,4027\\ -2,5777\\ -0,8634\\ 2,0471\\ -0,4292\\ -0,6921\\ 0,3189\\ 0,1877\\ -0,1335\\ -0,0369\\ 0,0493\\ 0,0129\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{\vec{u}_2^*}=\begin{bmatrix}0,6350\\ -0,3428\\ -0,4464\\ 0,6016\\ -0,0957\\ -0,2962\\ 0,2305\\ -0,0165\\ -0,0542\\ 0,0148\\ 0,0115\\ -0,0050\\ -0,0026\\ 0,0012\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{\vec{x}_1^*}=\begin{bmatrix}6,7281\\ -5,7728\\ 0,3713\\ 1,3945\\ 0,3359\\ -1,1413\\ 0,2542\\ 0,3816\\ -0,1613\\ -0,0994\\ 0,0655\\ 0,0204\\ -0,0245\\ 0,0012\end{bmatrix},\quad \mathbf{C}^{\vec{x}_2^*}=\begin{bmatrix}-0,9511\\ 4,1171\\ -5,1422\\ 1,2693\\ 1,7681\\ -0,7368\\ -0,7311\\ 0,3619\\ 0,2608\\ -0,1346\\ -0,0820\\ 0,0412\\ 0,0246\\ -0,0095\end{bmatrix}.$$

Следующие соотношения определяют оптимальные программные управления и оптимальные фазовые траектории системы, полученные с помощью конечномерной оптимизации:

$$\tilde{u}_1^*(t) = -33,8312 \cdot t^7 + 7,8253 \cdot t - 142,3602 \cdot t^5 - 9,9991 \cdot t^8 + 109,1337 \cdot t^6 +$$
$$+ 0,5186 \cdot 10^{-2} \cdot t^{13} - 5,1499 \cdot t^{10} + 103,2184 \cdot t^4 - 0,1150 \cdot t^{12} + 1,0615 \cdot t^{11} +$$
$$+ 13,0203 \cdot t^9 - 4,1337 \cdot t^2 - 41,1046 \cdot t^3 - 2,8237;$$

$$\tilde{u}_2^*(t) = 29,6088 \cdot t^7 - 2,7895 \cdot t + 33,6943 \cdot t^5 - 15,1160 \cdot t^8 - 38,6432 \cdot t^6 +$$
$$+ 0,4639 \cdot 10^{-3} \cdot t^{13} - 1,1465 \cdot t^{10} - 18,2983 \cdot t^4 - 0,0131 \cdot t^{12} + 0,1618 \cdot t^{11} +$$
$$+ 5,1345 \cdot t^9 - 0,4283 \cdot 10^{-3} + 7,7858 \cdot t^2 + 0,7357 \cdot t^3;$$

$$\tilde{x}_1^*(t) = 178,9159 \cdot t^7 - 7,6516 \cdot t + 290,5453 \cdot t^5 - 74,2607 \cdot t^8 - 283,2997 \cdot t^6 +$$
$$+ 0,4631 \cdot 10^{-3} \cdot t^{13} - 3,5760 \cdot t^{10} - 189,4439 \cdot t^4 - 0,0219 \cdot t^{12} + 0,3835 \cdot t^{11} +$$
$$+ 20,2931 \cdot t^9 + 8,9707 - 7,6108 \cdot t^2 + 73,3025 \cdot t^3;$$

$$\tilde{x}_2^*(t) = -268,7514 \cdot t^7 + 5,2918 \cdot t - 321,8612 \cdot t^5 + 133,6327 \cdot t^8 + 361,5492 \cdot t^6 -$$
$$- 0,3817 \cdot 10^{-2} \cdot t^{13} + 9,7920 \cdot t^{10} + 184,2697 \cdot t^4 + 0,1092 \cdot t^{12} - 1,3648 \cdot t^{11} -$$
$$- 44,5097 \cdot t^9 + 10,9663 \cdot t^2 - 62,2514 \cdot t^3 - 8,9835.$$

Соответствующие графики приводятся на рис. 5.39.

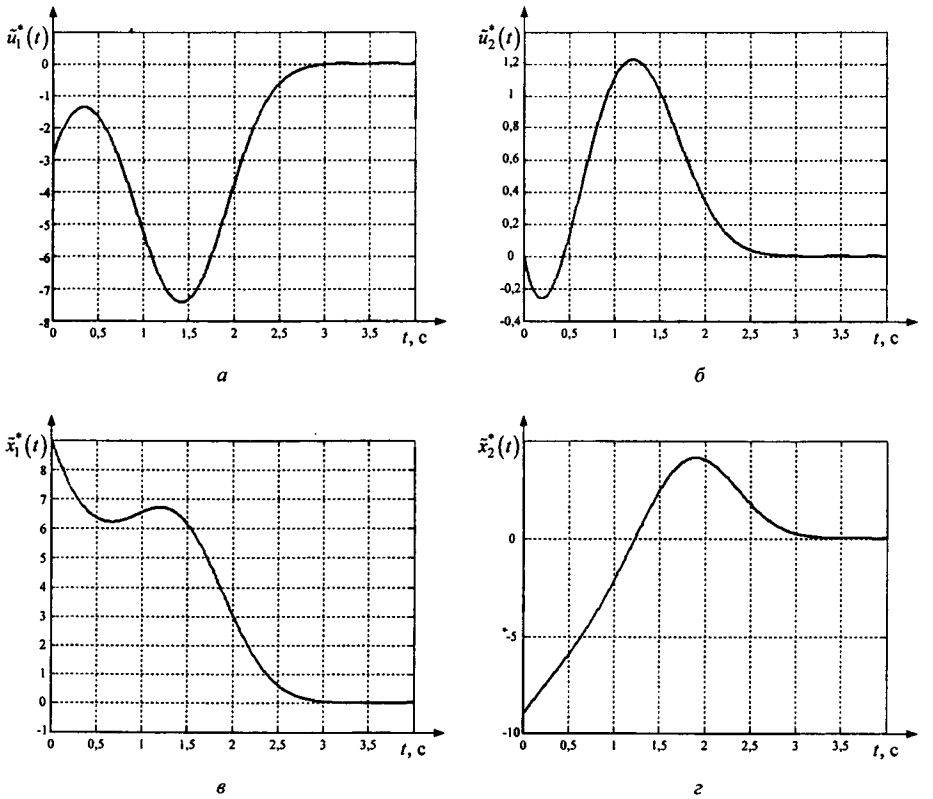


Рис. 5.39. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$

Текст программы *Matlab*, реализующей алгоритм решения задачи, представлен ниже.

```
warning off
clear all
close all
pack
clc

% Data. %%%%
```

```
syms t nu

L = 13;
n = 2;
m = 2;
EPSL = 0.05;

T = 4;
dt = 0.01;
tc = 0:dt:T;

A = [t^2 1-t;
     1+t t-t^2];
B = [t^2 0;
     1   t];

x0 = [9; -9];
xT = [0;  0];

% Controlability checking. %%%%
```

```
Au = double(Au')

% The operators of multiplication. %%%%
```

```
ZER = zeros(L+1);
PHIT = double(([zeros(L+1,1);
                zeros(L+1,1);
                UT;
                UT           ])');

Ae = double([ Au*B11 Au*B12  -eye(L+1)+Au*A11   Au*A12;
              Au*B21  Au*B22   Au*A21           -eye(L+1)+Au*A22])

Be = double([-FN01;
             -FN02])

Aun = [ PHIT;
       -PHIT]
Bun = [ EPSL;
        EPSL]

%%%
```

```
figure
plot(subs(x1,'t',tc),subs(x2,'t',tc),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('x1')
ylabel('x2(x1)')
grid
zoom

%%%
```

$$\mathbf{A}_y[b_{12}]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_y[b_{21}]=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[b_{22}]=\begin{bmatrix}0&0&0&0&0\\0&0{,}0313&0&0&0\\0&0&0{,}0625&0&0\\0&0&0&0{,}0938&0\\0&0&0&0&0{,}1250\end{bmatrix}.$$

Матричные операторы интегрирования и умножения системы блочно-импульсных функций вычисляются значительно проще, чем при использовании классических ортогональных базисов. Приведем соответствующий фрагмент программы *Matlab*.

```
% The operator of integration. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i = 1:L+1
    for j = 1:L+1
        if (i-j) == 0
            Au(i,j) = 0.5*dt;
        elseif (i-j) > 0
            Au(i,j) = dt;
        else
            Au(i,j) = 0;
        end
    end
end
Au_cut = Au(1:5,1:5)

% The operators of multiplication. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Ca11 = double(subs(A(1,1),'t',tc(1:L+1)));
Ca12 = double(subs(A(1,2),'t',tc(1:L+1)));
Ca21 = double(subs(A(2,1),'t',tc(1:L+1)));
Ca22 = double(subs(A(2,2),'t',tc(1:L+1)));
Cb11 = double(subs(B(1,1),'t',tc(1:L+1)));
Cb22 = double(subs(B(2,2),'t',tc(1:L+1)));

A11 = diag(Ca11);
A12 = diag(Ca12);
A21 = diag(Ca21);
A22 = diag(Ca22);
B11 = diag(Cb11);
B12 = zeros(L+1);
B21 = eye(L+1);
B22 = diag(Cb22);
```

Приведем результаты решения задачи при $\delta^{\tilde{x}_1}=\delta^{\tilde{x}_2}=5\cdot10^{-4}$. Графики оптимальных управляющих воздействий и фазовых траекторий представлены на рис. 5.40.

Введем теперь ограничения на фазовые координаты. Пусть

$$x_2(t)\le 1\ \ \forall t\in[0,T]. \tag{5.242}$$

Сформулируем ограничения (5.242) в узлах сетки ограничений

$$T_g=\left\{t_j:\ j=\overline{1,g},\ t_1=0,\ t_g=4,\ t_i<t_{i+1}\right\}$$

в виде

$$\mathbf{\Phi}(t_j)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\le 1\ \ \forall t_j\in T_g.$$

При этом ограничения типа неравенств следует модифицировать следующим образом:

$$\begin{bmatrix}0&0&\mathbf{\Phi}(T)&0\\0&0&-\mathbf{\Phi}(T)&0\\0&0&0&\mathbf{\Phi}(T)\\0&0&0&-\mathbf{\Phi}(T)\\0&0&0&\mathbf{\Phi}(t_1)\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots\\0&0&0&-\mathbf{\Phi}(t_g)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{u}_1}\\\mathbf{C}^{\tilde{u}_2}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\\delta^{\tilde{x}_1}\\\delta^{\tilde{x}_2}\\\delta^{\tilde{x}_2}\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}.$$

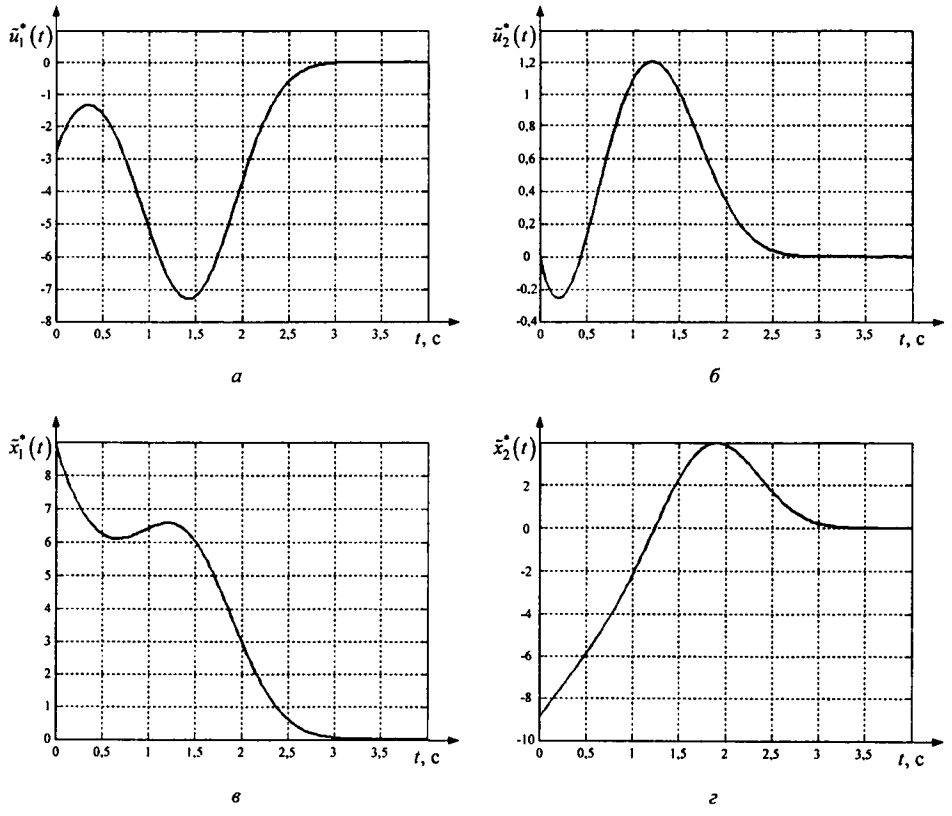


Рис. 5.40. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$

Приведем соответствующий фрагмент исходного текста программы *Matlab*.

```
% Optimization initial point. %%%%
```

```
for k = 1:length(Unn)
    Unnc2(k,:) = double(subs(Unn(k,1),'t',tg));
end
for k = 1:(length(tg))
    A0(k,:) = (Unnc2(:,k))';
    B0(k,1) = x2max;
end

Ag = [zeros(length(tg),L+1) zeros(length(tg),L+1) zeros(length(tg),L+1) A0];

Aun = [ PHIT;
       -PHIT;
        Ag  ]
Bun = [ EPSL;
        EPSL;
        B0  ]

%%%
```

$$\tilde{x}_2^*(t) = 88,7893 \cdot t^7 - 239,1131 \cdot t^6 + 7,8891 \cdot t + 331,9768 \cdot t^5 - 4,8045 \cdot t^8 +$$
$$+ 4,9333 \cdot t^{10} - 0,5359 \cdot 10^{-2} \cdot t^{13} + 0,1174 \cdot t^{12} - 1,0637 \cdot t^{11} - 263,3323 \cdot t^4 -$$
$$- 10,5362 \cdot t^9 + 118,4054 \cdot t^3 - 27,6235 \cdot t^2 - 9,0634.$$

Соответствующие графики изображены на рис. 5.41.

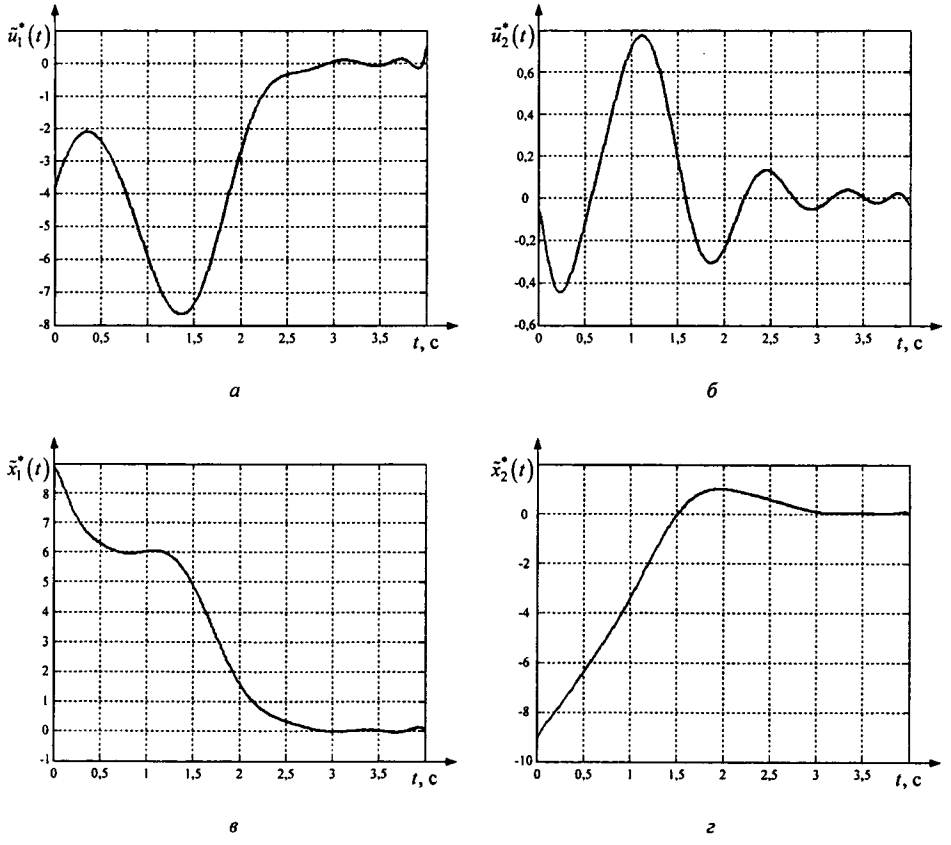


Рис. 5.41. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$

Приведем результаты решения задачи при ограничениях (5.242) с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 128 при $\delta^{\tilde{x}_1} = \delta^{\tilde{x}_2} = 5 \cdot 10^{-4}$. На рис. 5.42 изображены графики оптимальных управляющих воздействий и фазовых траекторий системы.

Введем теперь ограничения на управляющее воздействие. Пусть

$$u_2(t) \le 0,25 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.243}$$

Ограничения типа неравенств примут вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & -\Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 & 0 & -\Phi(T) \\ 0 & \Phi(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \Phi(t_g) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C^{\tilde{u}_1} \\ C^{\tilde{u}_2} \\ C^{\tilde{x}_1} \\ C^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 0,25 \\ \vdots \\ 0,25 \end{bmatrix}.$$

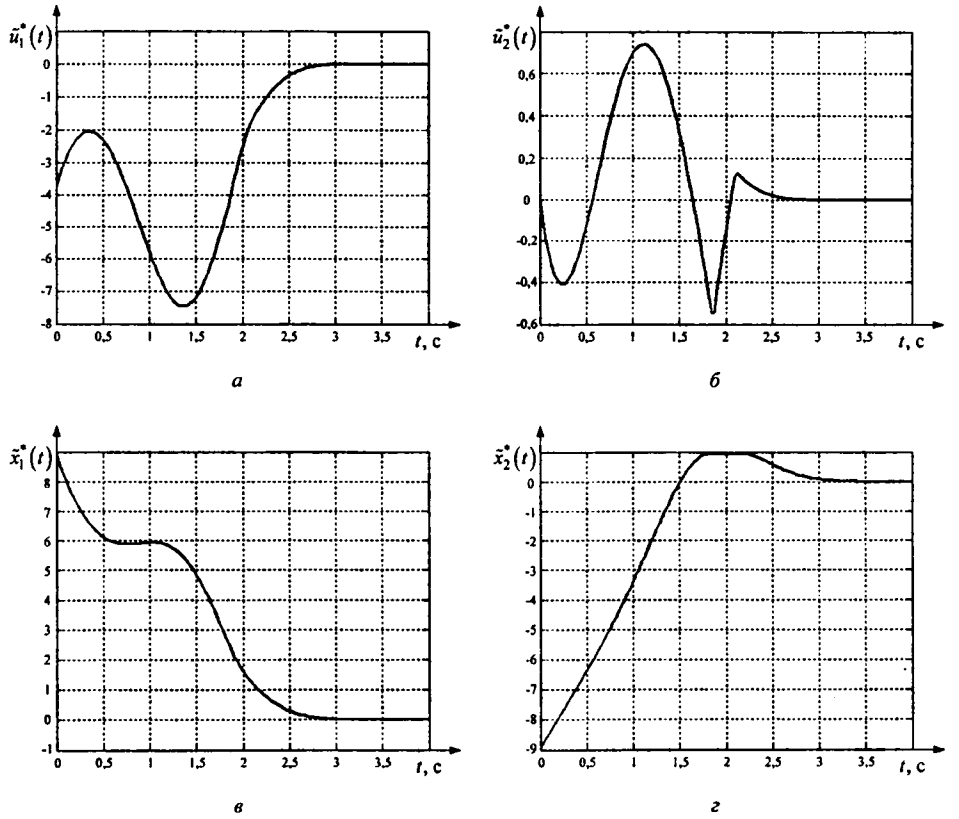


Рис. 5.42. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$

Приведем результаты решения задачи синтеза оптимального управления по критерию минимальной энергии, обеспечивающего перевод объекта (5.236) из начального состояния в конечное при ограничении на управление (5.243) в базисе ортонормированных полиномов Лежандра размерностью $l = 14$. Вектор-столбцы спектральных характеристик сигналов $\mathbf{C}^{\tilde{u}_1^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{u}_2^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$ имеют вид

$$\mathbf{C}^{\tilde{u}_1^*} = \begin{bmatrix} -5,0163 \\ 2,8841 \\ 2,4455 \\ -2,6235 \\ -0,8787 \\ 2,0831 \\ -0,4367 \\ -0,7049 \\ 0,3243 \\ 0,1909 \\ -0,1359 \\ -0,0377 \\ 0,0500 \\ 0,0133 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{u}_2^*} = \begin{bmatrix} -0,1905 \\ -0,0571 \\ -0,1913 \\ 0,1761 \\ -0,0170 \\ -0,0294 \\ 0,0093 \\ -0,0457 \\ 0,0769 \\ -0,0397 \\ 0,0018 \\ -0,0082 \\ 0,0102 \\ 0,0195 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} 6,6584 \\ -5,7535 \\ 0,4376 \\ 1,3720 \\ 0,3032 \\ -1,1145 \\ 0,2729 \\ 0,3691 \\ -0,1633 \\ -0,0903 \\ 0,0667 \\ 0,0183 \\ -0,0237 \\ 0,0029 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} -1,5004 \\ 4,2343 \\ -4,6504 \\ 1,0750 \\ 1,4717 \\ -0,5534 \\ -0,6019 \\ 0,2415 \\ 0,2269 \\ -0,0784 \\ -0,0782 \\ 0,0195 \\ 0,0213 \\ -0,0021 \end{bmatrix}.$$

Оптимальные программные управления и оптимальные фазовые траектории системы, полученные с помощью конечномерной оптимизации, определяются следующими выражениями:

$$\tilde{u}_1^*(t) = -138,5523 \cdot t^5 + 104,5097 \cdot t^6 + 7,9903 \cdot t - 29,8645 \cdot t^7 - 12,3559 \cdot t^8 -$$
$$-0,1189 \cdot t^{12} - 5,3997 \cdot t^{10} + 101,0952 \cdot t^4 + 13,9660 \cdot t^9 + 0,5348 \cdot 10^{-2} \cdot t^{13} +$$
$$+1,1030 \cdot t^{11} - 40,3361 \cdot t^3 - 4,5148 \cdot t^2 - 2,8738;$$
$$\tilde{u}_2^*(t) = 346,2117 \cdot t^5 - 425,9932 \cdot t^6 - 4,9171 \cdot t + 332,2848 \cdot t^7 -$$
$$-173,5073 \cdot t^8 - 0,1996 \cdot t^{12} - 14,6611 \cdot t^{10} - 151,8272 \cdot t^4 + 61,5573 \cdot t^9 +$$
$$+0,7835 \cdot 10^{-2} \cdot t^{13} + 2,2445 \cdot t^{11} + 0,0701 + 11,4276 \cdot t^3 + 17,5503 \cdot t^2;$$
$$\tilde{x}_1^*(t) = 322,7258 \cdot t^5 - 320,3917 \cdot t^6 - 7,5451 \cdot t + 207,6954 \cdot t^7 -$$
$$-89,4465 \cdot t^8 - 0,0397 \cdot t^{12} - 4,8823 \cdot t^{10} - 207,7990 \cdot t^4 + 25,7398 \cdot t^9 +$$
$$+0,1160 \cdot 10^{-2} \cdot t^{13} + 0,5840 \cdot t^{11} + 79,7919 \cdot t^3 - 8,8894 \cdot t^2 + 8,9685;$$
$$\tilde{x}_2^*(t) = -153,3579 \cdot t^5 + 171,2892 \cdot t^6 + 5,8017 \cdot t - 123,8884 \cdot t^7 + 58,7172 \cdot t^8 +$$
$$+0,0305 \cdot t^{12} + 3,6568 \cdot t^{10} + 85,8790 \cdot t^4 - 18,2492 \cdot t^9 - 0,8429 \cdot 10^{-3} \cdot t^{13} -$$
$$-0,4503 \cdot t^{11} - 27,0078 \cdot t^3 + 4,2161 \cdot t^2 - 8,9947.$$

Графики оптимальных управлений и фазовых траекторий системы приводятся на рис. 5.43.

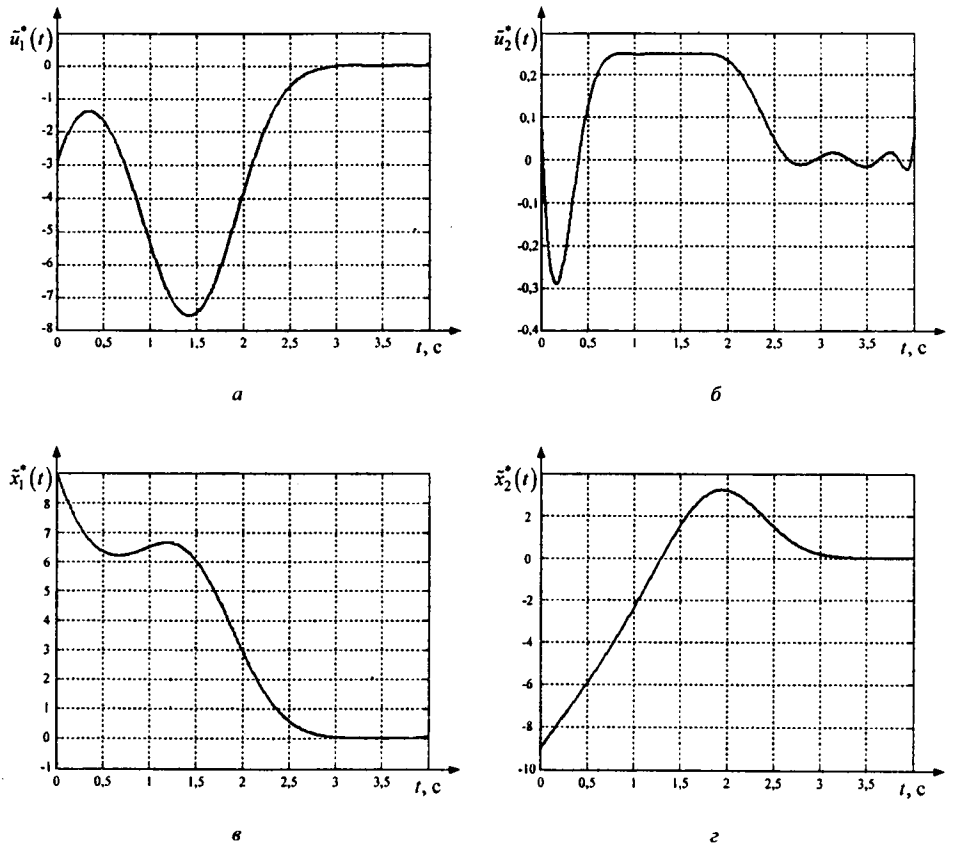


Рис. 5.43. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$

Решим задачу синтеза оптимального управления нестационарным линейным объектом (5.236) при ограничениях (5.243) с использованием системы блочно-импульсных функций размерностью 128. Графики оптимальных управлений и фазовых траекторий приводятся на рис. 5.44.

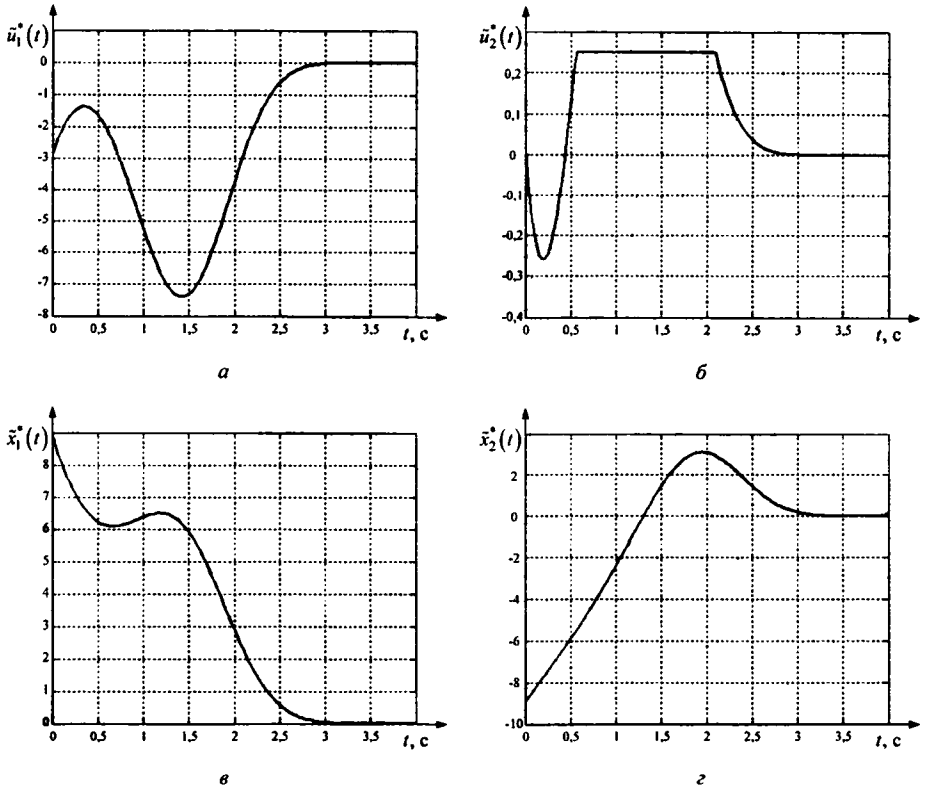


Рис. 5.44. Графики функций $\tilde{u}_1^*(t)$, $\tilde{u}_2^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$

Пример 5.20. Система 5-го порядка с полиномиальными коэффициентами и скалярным управлением. Рассмотрим объект управления, описываемый уравнением в пространстве «вход–выход»

$$\sum_{k=0}^{5} a_k(t)x^{(k)}(t) = b_0(t)y(t), \tag{5.244}$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5596 & 1{,}8918 & 2{,}5825 & 1{,}7855 & 0{,}6277 & 0{,}0909 \\ 0{,}7113 & 2{,}3843 & 3{,}2220 & 2{,}1975 & 0{,}7588 & 0{,}1065 \\ 0{,}3717 & 1{,}2333 & 1{,}6449 & 1{,}1038 & 0{,}3728 & 0{,}0507 \\ 0{,}1002 & 0{,}3278 & 0{,}4300 & 0{,}2827 & 0{,}0930 & 0{,}0122 \\ 0{,}0140 & 0{,}0449 & 0{,}0576 & 0{,}0369 & 0{,}0118 & 0{,}0015 \\ 1{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix},$$

$$b_0(t) = 1.$$

Перейдем от математической модели (5.244) к модели в пространстве состояний. Введем следующие переменные состояния:

$$x_1(t) = x(t),\ x_2(t) = x'(t),\ x_3(t) = x''(t),\ x_4(t) = x'''(t),\ x_5(t) = x^{(4)}(t).$$

Запишем систему дифференциальных уравнений в форме Фробениуса для данного объекта управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = x_3(t), \\ \dot{x}_3(t) = x_4(t), \\ \dot{x}_4(t) = x_5(t), \\ \dot{x}_5(t) = \dfrac{1}{a_5(t)}\left[-a_4(t)x_5(t) - a_3(t)x_4(t) - a_2(t)x_3(t) - a_1(t)x_2(t) - a_0(t)x_1(t) + b_0(t)u(t)\right]. \end{cases}$$

В матричной форме последняя система имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \tag{5.245}$$

где

$$\mathbf{X}(t) = \left[x_1(t) \quad \dots \quad x_5(t)\right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{B} = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & -a_4(t) \end{bmatrix}.$$

Сформулируем задачу следующим образом: построить программное управление, переводящее объект (5.245) из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = \left[1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1\right]^{\mathrm{T}}$$

в конечное

$$\mathbf{X}^T = \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\right]^{\mathrm{T}}$$

за время $T = 5$ с и доставляющее минимум функционалу качества

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u. \tag{5.246}$$

Решим задачу методом математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов интегрирования и умножения на функции.

Проверим управляемость объекта (5.245). Грамиан управляемости системы имеет вид

$$\mathbf{W}(t_0, t_1) = \int_{t_0}^{t_1} \mathbf{\Phi}(t_0, t)\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0, t)\,dt,$$

где $\mathbf{\Phi}(t_0, t) = \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(t_0)$ — переходная матрица состояний, $\mathbf{X}_\phi(t)$ — фундаментальная система решений. Если $\mathbf{X}_\phi(t)$ — нормальная фундаментальная система решений и $t_0 = 0$, а $t_1 = T$, то $\mathbf{\Phi}(0, t) = \mathbf{X}_\phi(t)$ и

$$\mathbf{W}(0, T) = \int_0^T \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_\phi^{\mathrm{T}}(t)\,dt.$$

Для рассматриваемого случая

$$\mathbf{W}(0, T) = \begin{bmatrix} 0{,}0000 & 0{,}0000 & -0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0046 \\ 0{,}0000 & 0{,}0003 & 0{,}0000 & -0{,}0045 & -0{,}0001 \\ -0{,}0003 & 0{,}0000 & 0{,}0045 & 0{,}0000 & -0{,}0930 \\ 0{,}0000 & -0{,}0045 & 0{,}0000 & 0{,}0930 & 0{,}0005 \\ 0{,}0046 & -0{,}0001 & -0{,}0930 & 0{,}0005 & 2{,}3998 \end{bmatrix} \cdot 10^4,$$

$$\operatorname{rank}\mathbf{W}(0, T) = 5,$$

система (5.245) *полностью управляема* на интервале $[0, T]$.

Параметризованные уравнения (5.245) имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} + x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} + x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} + x_3(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + x_4(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_5} = -\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{у}}[a_0]\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{у}}[a_1]\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{у}}[a_2]\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} - \\ \qquad - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{у}}[a_3]\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{у}}[a_4]\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{u}} + x_5(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \end{cases} \tag{5.247}$$

где $\mathbf{A}_{\text{и}}$ — проекционно-матричный оператор интегрирования, т.е. $\mathbf{A}_{\text{у}}[a_i]$ — проекционно-матричные операторы умножения на коэффициенты $a_i(t)$, $i = \overline{0,4}$.

Параметризованный функционал качества (5.246) определяется выражением

$$I\left(\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right) = \sum_{k=1}^{l}\left[c_k^{\tilde{u}}\right]^2 \to \min_{\mathbf{C}^{\tilde{u}}}. \tag{5.248}$$

В терминах математического программирования формулировка задачи запишется следующим образом: отыскать закон управления $\tilde{u}^*(t)$, доставляющий минимум функционалу (5.248) при ограничениях (5.247) и ограничениях

$$\begin{bmatrix} |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_5}| \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_3} \\ \delta^{\tilde{x}_4} \\ \delta^{\tilde{x}_5} \end{bmatrix}. \tag{5.249}$$

Ограничения на управление и фазовые координаты не накладываем.

Решим задачу с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 60. Матрица интегрирования в ортогональной на интервале [0,5] системе блочно-импульсных функций данной размерности имеет вид (вырез матрицы размерностью 5×5):

$$\mathbf{A}_и = \begin{bmatrix} 0{,}0424 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0847 & 0{,}0424 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0847 & 0{,}0847 & 0{,}0424 & 0 & 0 \\ 0{,}0847 & 0{,}0847 & 0{,}0847 & 0{,}0424 & 0 \\ 0{,}0847 & 0{,}0847 & 0{,}0847 & 0{,}0847 & 0{,}0424 \end{bmatrix}.$$

Проекционно-матричные операторы умножения по системе блочно-импульсных функций, представляющие собой диагональные матрицы от дискретных значений коэффициентов уравнения (5.244), определяются выражениями (приводятся вырезы матриц размером 5×5):

$$\mathbf{A}_y[a_0] = \begin{bmatrix} -0{,}5596 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}7396 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}9637 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}2396 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}5759 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_1] = \begin{bmatrix} -0{,}7113 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}9379 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1{,}2193 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1{,}5651 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}9859 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_2] = \begin{bmatrix} -0{,}3717 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}4887 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}6337 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}8113 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1{,}0269 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_3] = \begin{bmatrix} -0{,}1002 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}1312 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}1696 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}2164 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}2730 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_4] = \begin{bmatrix} -0{,}0140 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0{,}0182 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0{,}0235 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0{,}0298 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0{,}0374 \end{bmatrix}.$$

Приведем результаты решения задачи при $\delta^{\tilde{x}_i} = 1 \cdot 10^{-2}$, $i = \overline{1,5}$. Некоторые дискретные значения оптимальных управлений и фазовых координат приводятся в табл. 5.4.

Графики оптимального управления и фазовых траекторий системы представлены на рис. 5.45.

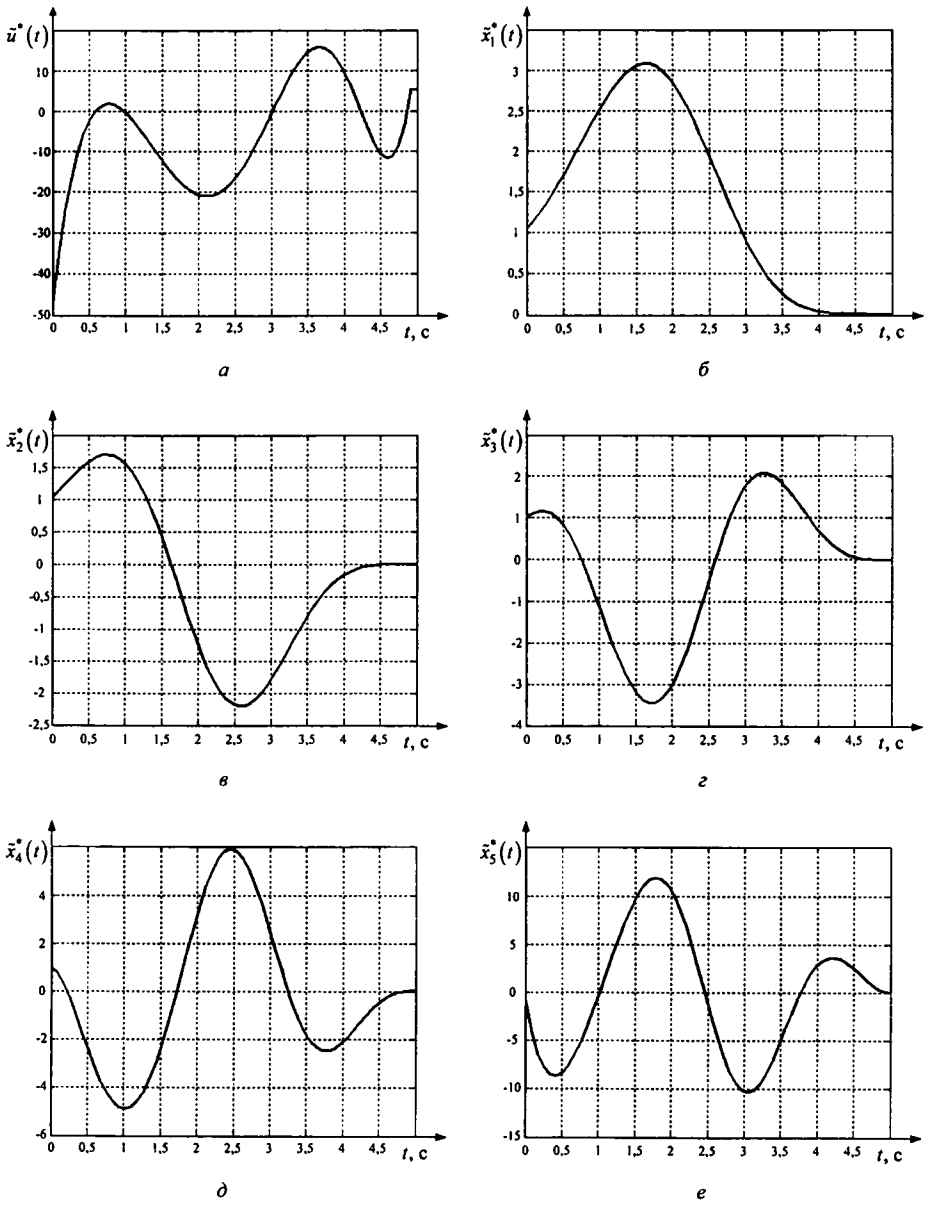


Рис. 5.45. Графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t)$, $\tilde{x}_4^*(t)$, $\tilde{x}_5^*(t)$

Рассмотрим решение задачи синтеза оптимального программного управления при ограничениях на фазовые координаты. Пусть

$$x_3(t) \geq -1{,}5 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.250}$$

Ограничения (5.250) формулируются в узлах сетки ограничений

$$T_g = \left\{ t_j : \; j = \overline{1, g}, \; t_1 = 0, \; t_g = 5, \; t_i < t_{i+1} \right\}$$

в виде

$$\Phi(t_j)\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \geq -1{,}5 \quad \forall t_j \in T_g.$$

Таблица 5.4

Дискретные значения $\tilde{u}^*(t_k)$, $\tilde{x}_1^*(t_k)$, $\tilde{x}_2^*(t_k)$, $\tilde{x}_3^*(t_k)$, $\tilde{x}_4^*(t_k)$, $\tilde{x}_5^*(t_k)$

t_k	$\tilde{u}^*(t_k)$	$\tilde{x}_1^*(t_k)$	$\tilde{x}_2^*(t_k)$	$\tilde{x}_3^*(t_k)$	$\tilde{x}_4^*(t_k)$	$\tilde{x}_5^*(t_k)$
0	–46,5310	1,0442	1,0441	1,0408	0,9621	–0,8955
0,5085	–2,0820	1,7182	1,5900	0,8091	–2,4542	–8,3428
1,0169	–0,4716	2,5559	1,5335	–1,2368	–4,8919	–0,0181
1,5254	–12,8793	3,0741	0,3359	–3,2470	–2,1707	10,0411
2,0339	–20,9719	2,8094	–1,3484	–2,8969	3,5579	10,0905
2,5424	–15,6752	1,8516	–2,1967	–0,2508	5,7990	–2,3554
3,0508	1,4834	0,8163	–1,6961	1,8945	1,9597	–10,4042
3,5593	15,4668	0,2137	–0,6911	1,7183	–2,0890	–3,8481
4,0678	7,0628	0,0326	–0,1195	0,5508	–1,9011	3,3068
4,5763	–11,6913	0,0111	–0,0084	0,0219	–0,3012	1,9799
5,0000	5,4560	0,0076	–0,0100	–0,0100	0,0100	–0,0100

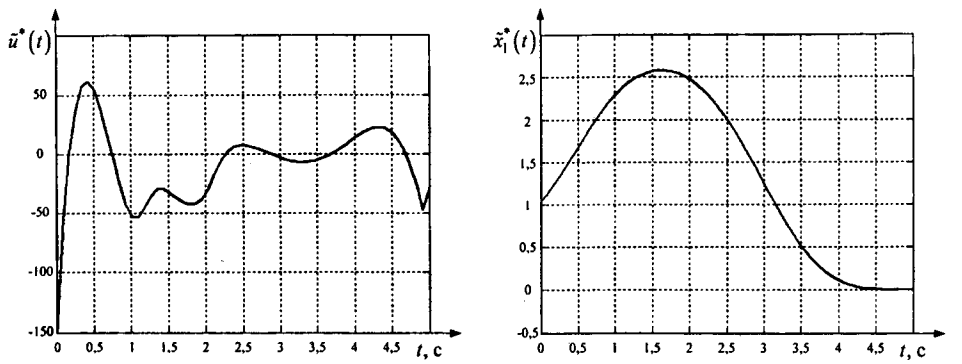
Приведем результаты решения задачи при ограничениях (5.250) с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 60 при $\delta^{\tilde{x}_i} = 1 \cdot 10^{-2}$, $i = \overline{1,5}$. Некоторые дискретные значения оптимальных управлений и фазовых координат приводятся в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Дискретные значения $\tilde{u}^*(t_k)$, $\tilde{x}_1^*(t_k)$, $\tilde{x}_2^*(t_k)$, $\tilde{x}_3^*(t_k)$, $\tilde{x}_4^*(t_k)$, $\tilde{x}_5^*(t_k)$

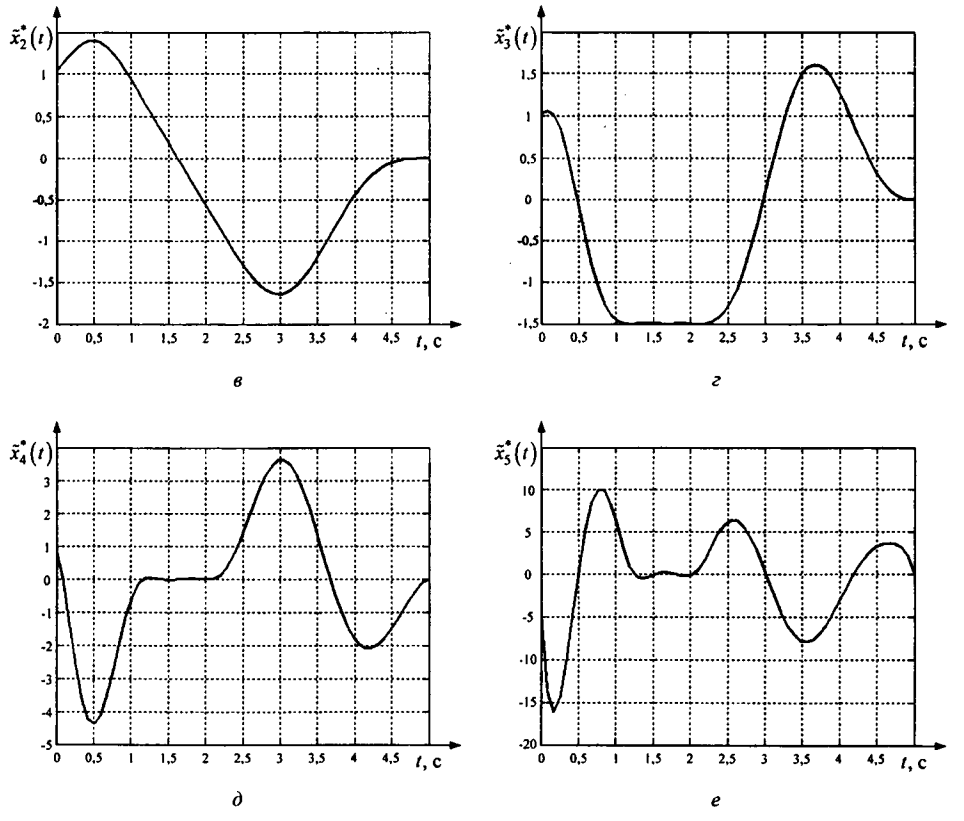
t_k	$\tilde{u}^*(t_k)$	$\tilde{x}_1^*(t_k)$	$\tilde{x}_2^*(t_k)$	$\tilde{x}_3^*(t_k)$	$\tilde{x}_4^*(t_k)$	$\tilde{x}_5^*(t_k)$
0	–147,3212	1,0442	1,0438	1,0331	0,7809	–5,1697
0,5085	54,0511	1,6908	1,4005	–0,1162	–4,3902	0,8427
1,0169	–53,0225	2,3066	0,9092	–1,4650	–0,5341	5,8391
1,5254	–33,1522	2,5760	0,1497	–1,4966	–0,0299	–0,0038
2,0339	–29,7377	2,4584	–0,6126	–1,5000	–0,0137	–0,0173
2,5424	7,6677	1,9562	–1,3432	–1,2351	1,6548	6,3658
3,0508	–4,1192	1,1675	–1,6328	0,2675	3,6291	–0,8590
3,5593	–3,6652	0,4431	–1,1073	1,5637	0,8684	–7,9199
4,0678	16,7099	0,0802	–0,3566	1,1487	–1,9821	–1,9096
4,5763	12,9511	0,0027	–0,0270	0,2153	–1,2243	3,6237
5,0000	–29,3853	–0,0001	–0,0001	–0,0001	–0,0001	0,0001

На рис. 5.46 представлены графики оптимального управления и фазовых траекторий системы.



а *б*

Рис. 5.46. Графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t)$, $\tilde{x}_4^*(t)$, $\tilde{x}_5^*(t)$



Продолжение рис. 5.46

Приведем также некоторые данные о технической реализации решения данной задачи на персональном компьютере под управлением операционной системы *Windows 2000 SP 3* на базе процессора *Intel Pentium IV* с тактовой частотой 2400 МГц, объем оперативной памяти — 1 Гб, память типа *DDR SDRAM* с частотой 266 МГц. Время вычислений при отсутствии ограничений на фазовые координаты для базиса блочно-импульсных функций размерностью 60 составляло 55,7 с, оптимизация проводится по 60 переменным при наличии 300 ограничений типа равенств и 10 ограничений типа неравенств. В случае ограничений на фазовые координаты для базиса блочно-импульсных функций размерностью 60 время вычислений составляло 364,3 с, оптимизация проводится по 60 переменным при наличии 300 ограничений типа равенств и 70 ограничений типа неравенств.

Пример 5.21. Система 5-го порядка с экспоненциальными коэффициентами и скалярным управлением.

Пусть линейный нестационарный объект управления описывается уравнением в пространстве «вход–выход»

$$\sum_{k=0}^{5} a_k(t)\, x^{(k)}(t) = b_0(t)\, y(t), \tag{5.251}$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 3{,}5489 & 5{,}1523 & 3{,}8608 & 1{,}5192 & 0{,}2620 \\ 1{,}1716 & 4{,}1050 & 5{,}8550 & 4{,}2732 & 1{,}6091 & 0{,}2511 \\ 0{,}5579 & 1{,}9211 & 2{,}6761 & 1{,}8881 & 0{,}6743 & 0{,}0973 \\ 0{,}1349 & 0{,}4537 & 0{,}6125 & 0{,}4146 & 0{,}1405 & 0{,}0190 \\ 0{,}0165 & 0{,}0539 & 0{,}0699 & 0{,}0452 & 0{,}0146 & 0{,}0018 \\ 1{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-t) \\ \exp(-2t) \\ \exp(-3t) \\ \exp(-4t) \\ \exp(-5t) \end{bmatrix},$$

$$b_0(t) = 1.$$

Перейдем к описанию системы (5.251) в пространстве состояний:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \tag{5.252}$$

где

$$\mathbf{X}(t)=\left[x_1(t)\ \ \ldots\ \ x_5(t)\right]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{B}=\left[0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A}(t)=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & -a_4(t) \end{bmatrix}.$$

Сформулируем задачу следующим образом: перевести объект (5.251) из начального состояния

$$\mathbf{X}^0=\left[2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\ \ 2\right]^{\mathrm{T}}$$

в конечное

$$\mathbf{X}^T=\left[1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\ \ 1\right]^{\mathrm{T}}$$

за время $T=10$ с, при этом функционал качества

$$I(u)=\int_0^T u^2(t)\,dt\to\min_u. \tag{5.253}$$

Решим задачу методом математического программирования.

Проверим управляемость объекта (5.252). Грамиан управляемости системы определяется выражением

$$\mathbf{W}(t_0,t_1)=\int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\,dt,$$

где $\mathbf{\Phi}(t_0,t)=\mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(t_0)$ — переходная матрица состояний, $\mathbf{X}_\phi(t)$ — фундаментальная система решений. Если $\mathbf{X}_\phi(t)$ — нормальная фундаментальная система решений и $t_0=0$, а $t_1=T$, то $\mathbf{\Phi}(0,t)=\mathbf{X}_\phi(t)$ и

$$\mathbf{W}(0,T)=\int_0^T\mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{B}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_\phi^{\mathrm{T}}(t)\,dt.$$

Для рассматриваемого случая грамиан управляемости имеет вид

$$\mathbf{W}(0,T)=\begin{bmatrix} 0{,}3779 & 0{,}3570 & 0{,}0464 & -0{,}4504 & -0{,}8335 \\ 0{,}3570 & 0{,}3907 & 0{,}1349 & -0{,}3501 & -0{,}7944 \\ 0{,}0464 & 0{,}1349 & 0{,}1607 & 0{,}0729 & -0{,}1145 \\ -0{,}4504 & -0{,}3501 & 0{,}0729 & 0{,}6428 & 0{,}9833 \\ -0{,}8335 & -0{,}7944 & -0{,}1145 & 0{,}9833 & 1{,}8392 \end{bmatrix}\cdot 10^6,$$

$$\operatorname{rank}\mathbf{W}(0,T)=5,$$

система (5.252) является *полностью управляемой* на интервале $[0,T]$.

Конечномерный эквивалент уравнения (5.252) имеет вид

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}+x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}+x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}+x_3(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4}=\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_5}+x_4(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_5}=-\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_0]\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}-\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_1]\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}-\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_2]\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}- \\ \qquad -\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_3]\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}-\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_4]\mathbf{C}^{\tilde{x}_5}+\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{u}}+x_5(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \end{cases} \tag{5.254}$$

где $\mathbf{A}_{\text{и}}$ — проекционно-матричный оператор интегрирования, $\mathbf{A}_{\text{y}}[a_i]$ — проекционно-матричные операторы умножения на коэффициенты $a_i(t)$, $i=\overline{0,4}$.

Параметризованный функционал качества (5.253) определяется выражением

$$I\left(\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right)=\sum_{k=1}^{l}\left[c_k^{\tilde{u}}\right]^2\to\min_{\mathbf{C}^{\tilde{u}}}. \tag{5.255}$$

Сформулируем задачу в терминах математического программирования: *отыскать закон управления* $\tilde{u}^*(t)$, *доставляющий минимум функционалу* (5.255) *при ограничениях* (5.254) *и*

$$\begin{bmatrix} |\Phi(T)C^{\bar{x}_1}| \\ |\Phi(T)C^{\bar{x}_2}| \\ |\Phi(T)C^{\bar{x}_3}| \\ |\Phi(T)C^{\bar{x}_4}| \\ |\Phi(T)C^{\bar{x}_5}| \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\bar{x}_1} \\ \delta^{\bar{x}_2} \\ \delta^{\bar{x}_3} \\ \delta^{\bar{x}_4} \\ \delta^{\bar{x}_5} \end{bmatrix}. \qquad (5.256)$$

Ограничения на управление и фазовые координаты не накладываются.

Решим задачу с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 60. Матрица интегрирования для ортогональной на интервале [0,5] системы блочно-импульсных функций имеет вид (приводится вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_{\text{и}} = \begin{bmatrix} 0,0424 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0847 & 0,0424 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0847 & 0,0847 & 0,0424 & 0 & 0 \\ 0,0847 & 0,0847 & 0,0847 & 0,0424 & 0 \\ 0,0847 & 0,0847 & 0,0847 & 0,0847 & 0,0424 \end{bmatrix}.$$

Проекционно-матричные операторы умножения по системе блочно-импульсных функций, представляющие собой диагональные матрицы от дискретных значений переменных коэффициентов уравнения (5.251), определяются выражениями (представлены вырезы матриц размером 5×5):

$$\mathbf{A}_y[a_0] = \begin{bmatrix} -15,3432 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10,8720 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7,9802 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6,0571 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4,7442 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_1] = \begin{bmatrix} -17,2650 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12,3027 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -9,0751 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6,9179 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5,4387 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_2] = \begin{bmatrix} -7,8148 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5,6057 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -4,1597 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3,1878 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2,5179 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_3] = \begin{bmatrix} -1,7752 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1,2831 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,9587 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,7394 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,5873 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{A}_y[a_4] = \begin{bmatrix} -0,2019 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,1472 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,1108 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,0861 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0,0688 \end{bmatrix}.$$

Приведем результаты решения задачи при $\delta^{\bar{x}_i} = 1 \cdot 10^{-2}$, $i = \overline{1,5}$. Дискретные значения оптимальных управлений и фазовых координат приведены в табл. 5.6.

Графики оптимального управления и оптимальных фазовых траекторий изображены на рис. 5.47.

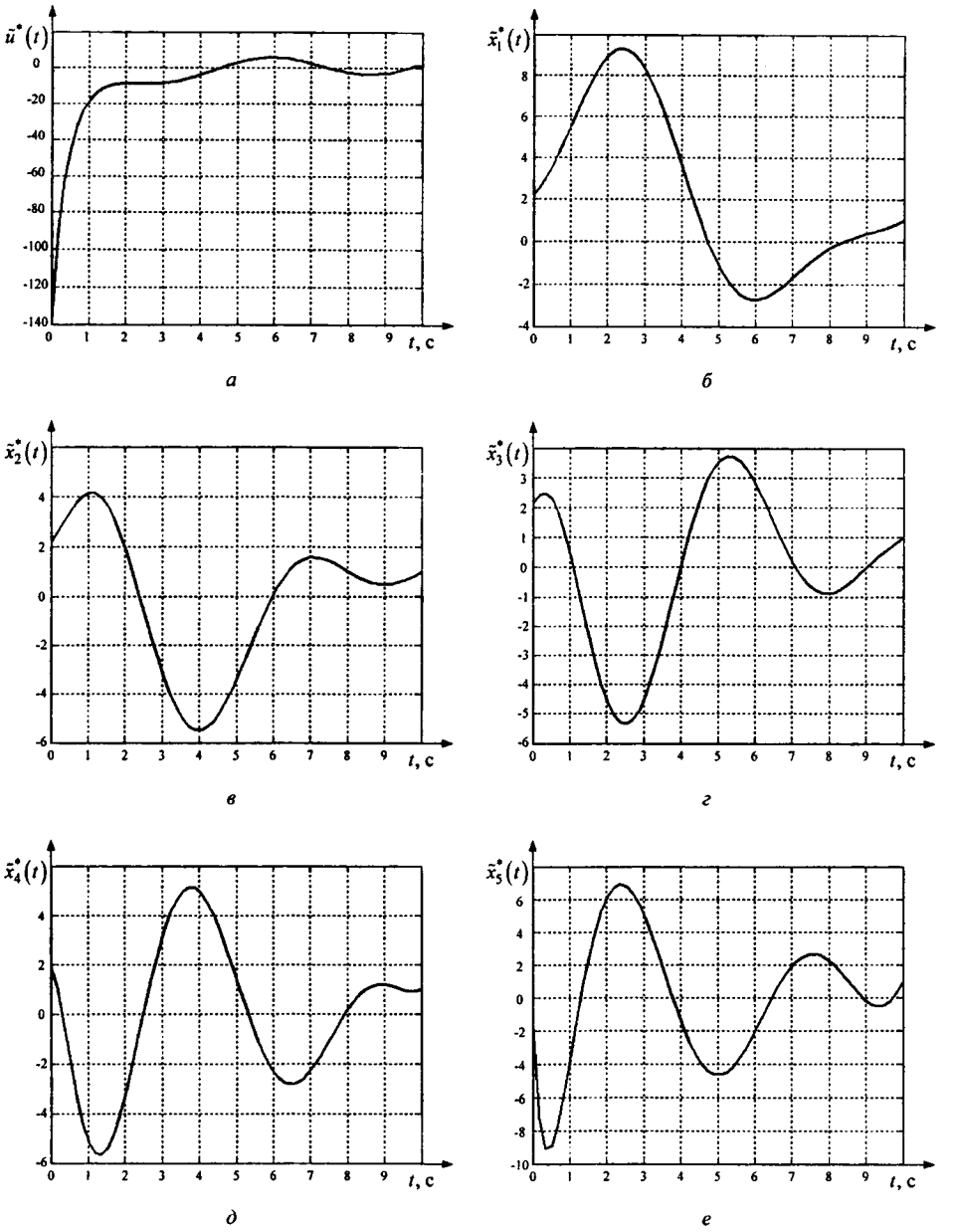


Рис. 5.47. Графики функций $\bar{u}^*(t)$, $\bar{x}_1^*(t)$, $\bar{x}_2^*(t)$, $\bar{x}_3^*(t)$, $\bar{x}_4^*(t)$, $\bar{x}_5^*(t)$

Введем теперь ограничения на фазовые координаты. Пусть

$$x_3(t) \geq -1{,}5 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.257}$$

Сформулируем ограничения (5.257) в узлах сетки ограничений

$$T_g = \left\{ t_j : j = \overline{1, g},\ t_1 = 0,\ t_g = 10,\ t_i < t_{i+1} \right\}$$

в виде

$$\Phi(t_j)\mathbf{C}^{\bar{x}_3} \geq -1{,}5 \quad \forall t_j \in T_g.$$

Таблица 5.6

Дискретные значения $\tilde{u}^*(t_k)$, $\tilde{x}_1^*(t_k)$, $\tilde{x}_2^*(t_k)$, $\tilde{x}_3^*(t_k)$, $\tilde{x}_4^*(t_k)$, $\tilde{x}_5^*(t_k)$

t_k	$\tilde{u}^*(t_k)$	$\tilde{x}_1^*(t_k)$	$\tilde{x}_2^*(t_k)$	$\tilde{x}_3^*(t_k)$	$\tilde{x}_4^*(t_k)$	$\tilde{x}_5^*(t_k)$
0	–136,5299	2,1850	2,1827	2,1561	1,8422	–1,8624
1,0169	–18,1033	5,5443	4,1298	0,3978	–5,1667	–3,6010
2,0339	–8,6521	8,9890	1,7911	–4,6292	–3,0784	6,1731
3,0508	–8,4498	8,1798	–3,3361	–4,3706	3,3443	4,8147
4,0678	–3,3267	3,2827	–5,4952	0,3764	4,8729	–1,8221
5,0847	3,5439	–1,3800	–3,1332	3,6190	1,0284	–4,6772
6,1017	5,7571	–2,7156	0,3300	2,5962	–2,5249	–1,6423
7,1186	2,0661	–1,5179	1,5785	–0,0558	–2,0474	2,1780
8,1356	–2,6890	–0,1902	0,9015	–0,8548	0,4377	1,9752
9,1525	–2,5146	0,4293	0,4909	0,1611	1,1420	–0,4433
10,0000	1,1904	1,0100	0,9900	0,9900	1,0100	0,9900

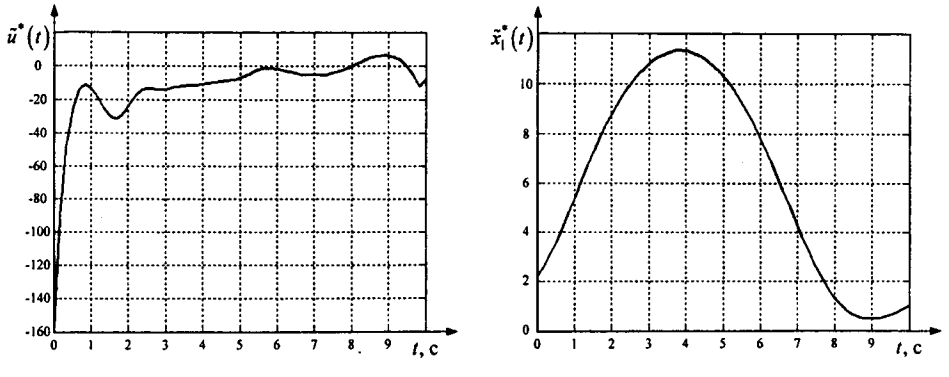
Приведем результаты решения задачи при ограничениях (5.257) с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 60 при $\delta^{\tilde{x}_i} = 1 \cdot 10^{-2}$, $i = \overline{1,5}$. Дискретные значения оптимальных управлений и фазовых координат приводятся в табл. 5.7.

Таблица 5.7

Дискретные значения $\tilde{u}^*(t_k)$, $\tilde{x}_1^*(t_k)$, $\tilde{x}_2^*(t_k)$, $\tilde{x}_3^*(t_k)$, $\tilde{x}_4^*(t_k)$, $\tilde{x}_5^*(t_k)$

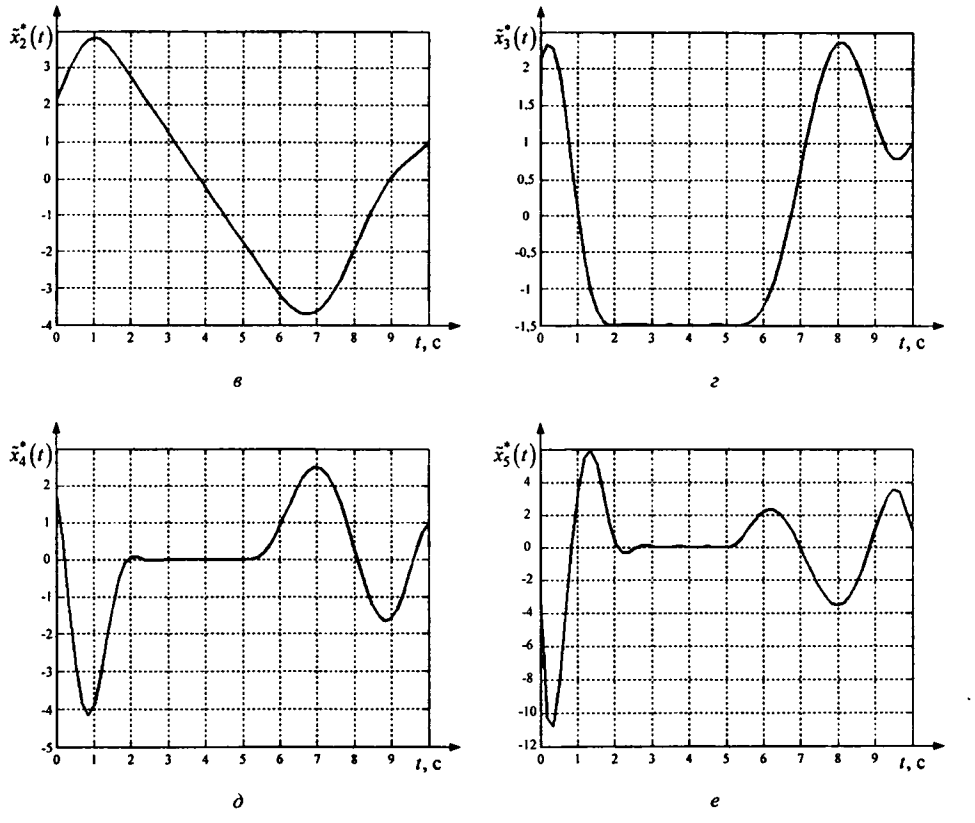
t_k	$\tilde{u}^*(t_k)$	$\tilde{x}_1^*(t_k)$	$\tilde{x}_2^*(t_k)$	$\tilde{x}_3^*(t_k)$	$\tilde{x}_4^*(t_k)$	$\tilde{x}_5^*(t_k)$
0	–154,5209	2,1849	2,1818	2,1448	1,7082	–3,4433
1,0169	–13,8104	5,4350	3,8211	0,0058	–3,8569	3,4861
2,0339	–23,0002	8,8691	2,6989	–1,5000	0,0711	0,1688
3,0508	–13,9460	10,8427	1,1809	–1,5000	–0,0014	0,0430
4,0678	–10,6764	11,2680	–0,3445	–1,5000	0,0000	–0,0015
5,0847	–6,7928	10,1421	–1,8697	–1,5000	–0,0066	–0,0176
6,1017	–2,4283	7,4813	–3,3129	–1,1515	1,1314	2,3069
7,1186	–5,6683	3,8178	–3,5380	0,9474	2,4830	–0,6696
8,1356	1,0918	1,0715	–1,6224	2,3628	–0,1849	–3,4449
9,1525	5,2513	0,4833	0,2425	1,0982	–1,3491	2,0741
10,0000	–8,1676	1,0100	0,9900	1,0100	0,9900	1,0100

На рис. 5.48 представлены графики оптимального управления и оптимальных фазовых траекторий системы.



а *б*

Рис. 5.48. Графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, $\tilde{x}_3^*(t)$, $\tilde{x}_4^*(t)$, $\tilde{x}_5^*(t)$



Продолжение рис. 5.48

Приведем также некоторые данные о технической реализации решения данной задачи на персональном компьютере с использованием пакета *Matlab 6.1*. Время расчетов при отсутствии ограничений на фазовые координаты для базиса блочно-импульсных функций размерностью 60 составило 137,5 с, оптимизация проводится по 60 переменным при наличии 300 ограничений типа равенств и 10 ограничений типа неравенств. В случае ограничений на фазовые координаты для базиса блочно-импульсных функций размерностью 60 время вычислений составляло 156,5 с, оптимизация проводится по 60 переменным при наличии 300 ограничений типа равенств и 70 ограничений типа неравенств.

5.5.4. Алгоритм расчета программного управления, обеспечивающего экстремальное значение заданных фазовых координат

Алгоритм расчета проиллюстрируем на примере решения конкретной задачи.

Пример 5.22. Рассмотрим объект управления — двигатель постоянного тока с управлением по току возбуждения (см. пример 5.6 из п. 5.4.2).

Пусть при наличии ограничения на управление требуется повернуть вал двигателя за заданное время $T = 2$ с на максимальный угол. Эта задача формализуется следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases} \tag{5.258}$$

$$\mathbf{X}^0 = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \ x_2(T) = 0, \tag{5.259}$$

$$|u(t)| \le 1 \ \ \forall t \in [0, T]. \tag{5.260}$$

Функционал качества имеет вид

$$I(u) = x_1(T) \to \max_{u \in U}. \tag{5.261}$$

Отметим, что условие (5.261) можно записать следующим образом:

$$\overline{I}(u) = -x_1(T) \to \min_{u \in U}. \tag{5.262}$$

Приведем зависимости, определяющие точное аналитическое решение задачи [94]:

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ -1, & 1 < t \le 2; \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} 0{,}5t^2, & 0 \le t \le 1; \\ -0{,}5t^2 + 2t - 1, & 1 < t \le 2; \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1; \\ 2 - t, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Построим решение задачи оптимального управления методом математического программирования. Используем в качестве базиса ортонормированные на интервале [0,2] полиномы Лежандра.

Интегрируя зависимости (5.258), получим

$$x_1(t) = \int_0^t x_2(\tau)d\tau + x_1(0),$$

$$x_2(t) = \int_0^t u(\tau)d\tau + x_2(0).$$

Для $T = 2$ проекционно-матричный оператор интегрирования в базисе ортонормированных полиномов Лежандра имеет вид (вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_и = \begin{bmatrix} 1 & -0{,}0577 & 0 & 0 & 0 \\ 0{,}0577 & 0 & -0{,}0258 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}0258 & 0 & -0{,}1690 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}1690 & 0 & -0{,}1260 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}1260 & 0 \end{bmatrix}. \tag{5.263}$$

Параметризованные вектор фазовых координат и управление определяются матричными соотношениями

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \tilde{u}_l(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{u}},$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \dots & \varphi_l(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_i} = \begin{bmatrix} c_1^{\tilde{x}_i} & \dots & c_l^{\tilde{x}_i} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{u}} = \begin{bmatrix} c_1^{\tilde{u}} & \dots & c_l^{\tilde{u}} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Уравнения объекта управления (5.258) с использованием проекционно-матричного оператора интегрирования можно записать следующим образом:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{C}^{\tilde{u}} + \begin{bmatrix} x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \end{bmatrix}, \tag{5.264}$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_и \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_и \end{bmatrix}.$$

Теперь постановка задачи в терминах математического программирования формулируется так:

$$\overline{I}\left(\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right) = -\sum_{k=1}^{l} c_k^{\tilde{x}_1} \varphi_k(T) \to \min_{\mathbf{C}^{\tilde{u}}}$$

при ограничениях типа равенств (5.264), а также — типа неравенств

$$\left| \mathbf{\Phi}(t) \Big|_{t=T} \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \right| \le \delta^{\tilde{x}_2}, \tag{5.265}$$

$$\left| \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{u}} \right| \le 1 \quad \forall t \in [0, 2]. \tag{5.266}$$

Ограничения, учитывающие начальное состояние объекта управления (5.258), заложены в ограничения (5.264).

Решение задачи реализуем в системе *Matlab 6.1*. Ограничения (5.264)–(5.266) приводятся к форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{A}_и \\ -\mathbf{A}_и & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_N^{01} \\ \mathbf{\Phi}_N^{02} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 & -\Phi(T) \\ \Phi(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Phi(t_g) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При решении задачи размерность базиса полиномов Лежандра принималась равной 18, $\delta^{\tilde{x}_2} = 10^{-3}$.

Приведем результаты решения задачи. Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\tilde{u}^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$ определяются вектор-столбцами

$$\mathbf{C}^{\tilde{u}^*} = \begin{bmatrix} 6{,}5842\cdot10^{-3} \\ -1{,}2063 \\ -7{,}3266\cdot10^{-3} \\ 0{,}4311 \\ 6{,}9837\cdot10^{-3} \\ -0{,}0240 \\ -6{,}2158\cdot10^{-3} \\ 0{,}1496 \\ 4{,}9887\cdot10^{-3} \\ -9{,}4076\cdot10^{-2} \\ -3{,}5667\cdot10^{-3} \\ 5{,}8233\cdot10^{-2} \\ 2{,}1467\cdot10^{-3} \\ -3{,}3304\cdot10^{-2} \\ -1{,}0033\cdot10^{-3} \\ 1{,}6206\cdot10^{-2} \\ 2{,}9638\cdot10^{-4} \\ -5{,}7606\cdot10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} 0{,}6998 \\ 0{,}5052 \\ 1{,}8280\cdot10^{-3} \\ -7{,}4850\cdot10^{-2} \\ -3{,}8966\cdot10^{-4} \\ 1{,}0461\cdot10^{-2} \\ 1{,}5641\cdot10^{-4} \\ -3{,}1201\cdot10^{-3} \\ -7{,}2818\cdot10^{-5} \\ 1{,}1808\cdot10^{-3} \\ 3{,}4293\cdot10^{-5} \\ -4{,}8960\cdot10^{-4} \\ -1{,}5062\cdot10^{-5} \\ 2{,}0466\cdot10^{-4} \\ 5{,}6593\cdot10^{-6} \\ -7{,}8862\cdot10^{-5} \\ -1{,}5925\cdot10^{-6} \\ 1{,}9896\cdot10^{-5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 0{,}0703 \\ 5{,}6931\cdot10^{-3} \\ -0{,}3834 \\ -2{,}1183\cdot10^{-3} \\ 7{,}8458\cdot10^{-2} \\ 1{,}2217\cdot10^{-3} \\ -3{,}0802\cdot10^{-2} \\ -7{,}5752\cdot10^{-4} \\ 1{,}4600\cdot10^{-2} \\ 4{,}5613\cdot10^{-4} \\ -7{,}3594\cdot10^{-3} \\ -2{,}5182\cdot10^{-4} \\ 3{,}7104\cdot10^{-3} \\ 1{,}1848\cdot10^{-4} \\ -1{,}7307\cdot10^{-3} \\ -4{,}2729\cdot10^{-5} \\ 6{,}7618\cdot10^{-4} \\ 8{,}7208\cdot10^{-6} \end{bmatrix}.$$

На рис. 5.49 представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ и точного решения задачи, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

Решим теперь задачу поворота двигателя постоянного тока на максимальный угол с использованием базиса блочно-импульсных функций. Размерность базиса примем равной 128, $\delta^{\tilde{x}_2} = 10^{-3}$. Матрица интегрирования в ортогональном на интервале [0,2] базисе блочно-импульсных функций данной размерности имеет вид (приводится вырез матрицы размером 4×4):

$$\mathbf{A}_{\text{и}} = \begin{bmatrix} 7{,}8125\cdot10^{-3} & 0 & 0 & 0 \\ 1{,}5625\cdot10^{-2} & 7{,}8125\cdot10^{-3} & 0 & 0 \\ 1{,}5625\cdot10^{-2} & 1{,}5625\cdot10^{-2} & 7{,}8125\cdot10^{-3} & 0 \\ 1{,}5625\cdot10^{-2} & 1{,}5625\cdot10^{-2} & 1{,}5625\cdot10^{-2} & 7{,}8125\cdot10^{-3} \end{bmatrix}. \tag{5.267}$$

На рис. 5.50 изображены графики указанных функций и точного решения задачи.

Введем в данную задачу ограничение на фазовую координату

$$\left|x_2(t)\right| \le 0{,}4 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.268}$$

Ограничения (5.265), (5.266), (5.268) приведем к виду

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 & -\Phi(T) \\ \Phi(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Phi(t_g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \Phi(t_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0{,}4 \\ \vdots \\ 0{,}4 \end{bmatrix}.$$

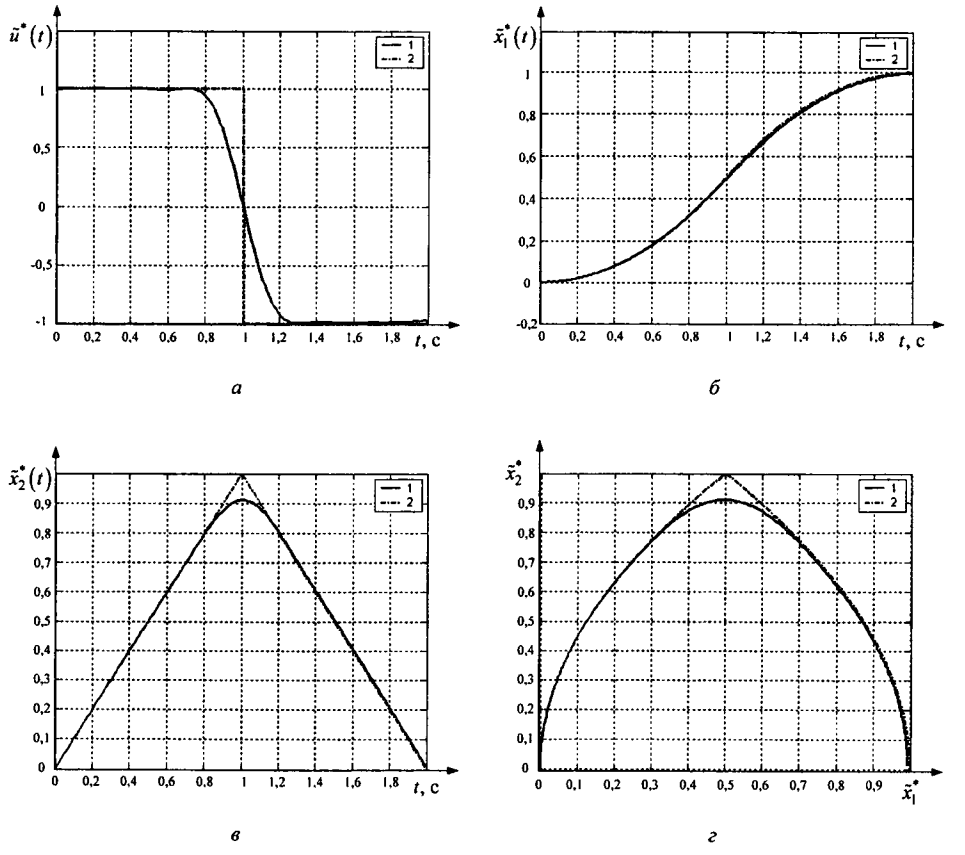


Рис. 5.49. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, сплошная линия) и точного решения задачи (2, пунктир), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

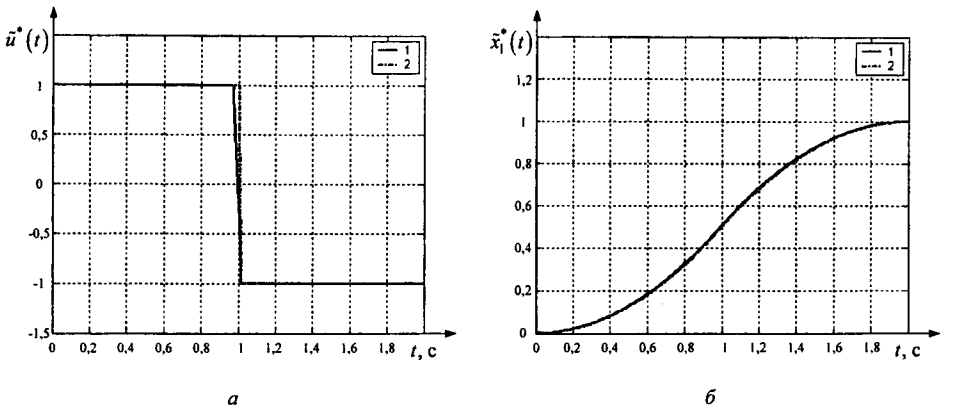
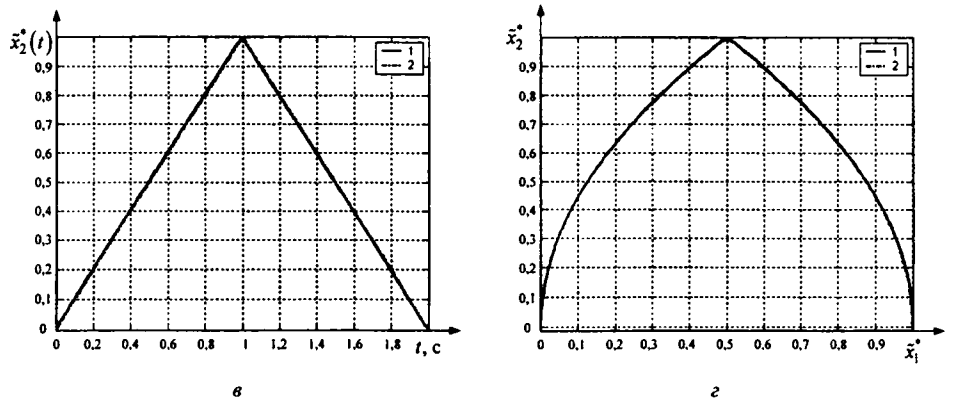
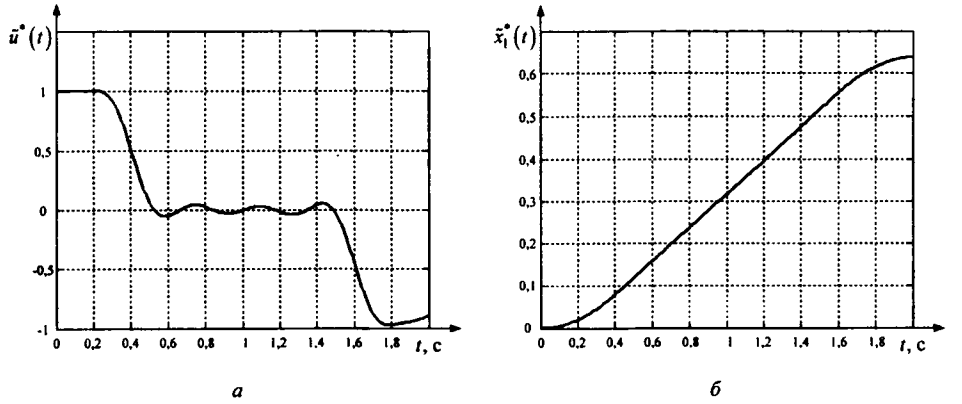


Рис. 5.50. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, сплошная линия) и точного решения задачи (2, пунктир), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

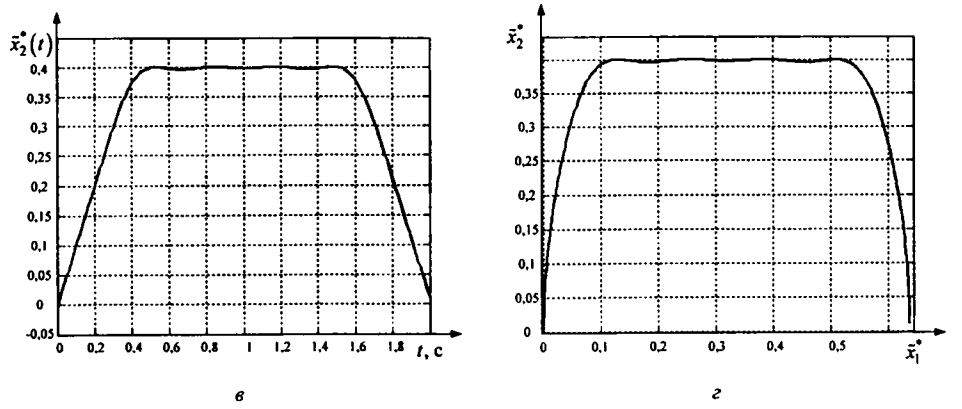


в *г*

Продолжение рис. 5.50



а *б*



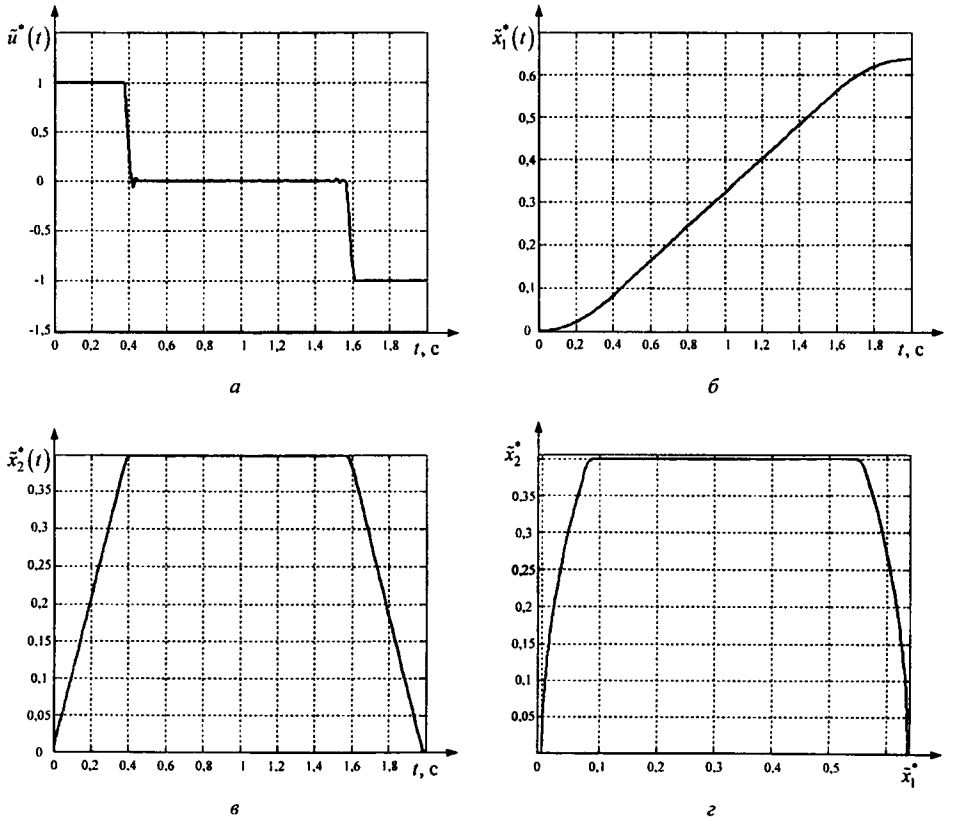
в *г*

Рис. 5.51. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$,
г — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

Решим задачу синтеза оптимального управления при ограничении (5.268) в базисе ортонормированных полиномов Лежандра размерности $l = 18$ при $\delta^{\tilde{x}_2} = 0{,}01$. Полученные спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\tilde{u}^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$ имеют вид

$$\mathbf{C}^{\vec{u}^*} = \begin{bmatrix} 8{,}3298\cdot10^{-3} \\ -0{,}7674 \\ 1{,}0433\cdot10^{-3} \\ -0{,}2384 \\ -9{,}6750\cdot10^{-3} \\ 0{,}2189 \\ 3{,}2660\cdot10^{-3} \\ 2{,}1593\cdot10^{-2} \\ 6{,}6775\cdot10^{-3} \\ -0{,}1132 \\ -5{,}8364\cdot10^{-3} \\ 3{,}8763\cdot10^{-2} \\ -2{,}2495\cdot10^{-3} \\ 4{,}0494\cdot10^{-2} \\ 5{,}5447\cdot10^{-3} \\ -4{,}3962\cdot10^{-2} \\ -2{,}7047\cdot10^{-3} \\ 1{,}4894\cdot10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_1^*} = \begin{bmatrix} 0{,}4488 \\ 0{,}3014 \\ 9{,}3633\cdot10^{-4} \\ -2{,}0126\cdot10^{-2} \\ 3{,}0097\cdot10^{-4} \\ -6{,}6308\cdot10^{-3} \\ -9{,}0957\cdot10^{-5} \\ 7{,}2090\cdot10^{-4} \\ -4{,}8471\cdot10^{-5} \\ 7{,}9749\cdot10^{-4} \\ 4{,}1043\cdot10^{-5} \\ -3{,}4044\cdot10^{-4} \\ 3{,}7967\cdot10^{-6} \\ -1{,}0189\cdot10^{-4} \\ -1{,}9163\cdot10^{-5} \\ 1{,}5384\cdot10^{-4} \\ 1{,}0767\cdot10^{-5} \\ -5{,}3338\cdot10^{-5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\vec{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 0{,}4514 \\ 4{,}5398\cdot10^{-3} \\ -0{,}1579 \\ 1{,}3953\cdot10^{-3} \\ -5{,}2034\cdot10^{-2} \\ -1{,}2455\cdot10^{-3} \\ 1{,}6755\cdot10^{-2} \\ -1{,}8428\cdot10^{-4} \\ 7{,}6487\cdot10^{-4} \\ 6{,}6373\cdot10^{-4} \\ -7{,}4289\cdot10^{-3} \\ -1{,}7175\cdot10^{-4} \\ 5{,}7909\cdot10^{-5} \\ -2{,}8473\cdot10^{-4} \\ 2{,}9133\cdot10^{-3} \\ 2{,}6949\cdot10^{-4} \\ -1{,}8127\cdot10^{-3} \\ -7{,}9584\cdot10^{-5} \end{bmatrix}.$$

Графики функций $\vec{u}^*(t)$, $\vec{x}_1^*(t)$, $\vec{x}_2^*(t)$ и точного решения задачи, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\vec{u}^*(t)$ представлены на рис. 5.51.



а *б* *в* *г*

Рис. 5.52. *а–в* — графики функций $\vec{u}^*(t)$, $\vec{x}_1^*(t)$, $\vec{x}_2^*(t)$, *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

Решим теперь задачу поворота двигателя постоянного тока на максимальный угол при ограничении (5.268) с использованием базиса блочно-импульсных функций при $\delta^{\tilde{x}_2} = 5 \cdot 10^{-4}$. На рис. 5.52 представлены графики указанных функций и точного решения.

Приведем исходный текст программы *Matlab*, реализующей алгоритм решения задачи поворота двигателя постоянного тока на максимальный угол при ограничениях (5.266) и (5.268).

```
warning off
clear all
close all
pack
clc

% Data. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
syms t

L = 127;
EPSL = 5e-4;

T = 2;
dt = T/(L+1);
dtg = dt;
tc = 0:dt:T;

x0 = [0;  0];
xT = [0;  0];

umax = 1;
x2max = 0.4;

% BIF-base. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
Unn = eye(L+1);

U0 = Unn(:,1);
UT = Unn(:,L+1);

% PhiN evaluation.%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
FN =  dt*ones(L+1,1);
FN01 = double(x0(1,1)*FN);
FN02 = double(x0(2,1)*FN);

% The operator of integration. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for i = 1:L+1
    for j = 1:L+1
        if (i-j) == 0
            Au(i,j) = 0.5*dt;
        elseif (i-j) > 0
            Au(i,j) = dt;
        else
            Au(i,j) = 0;
        end
    end
end
Au_cut = Au(1:5,1:5)

% The functional conditional minimum search.%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
c0 = ones(1,3*(L+1));

str = '-';
str = strcat(str,num2str(UT(L+1,1)),'*','x(',num2str(L+1),')');
J = inline(str)

ZER = zeros(L+1);
E = eye(L+1);
PHIT = double(([zeros(L+1,1);
                UT;
                zeros(L+1,1) ])');

Ae = double([ -E    Au  ZER;
             ZER -E   Au  ]);

Be = double([-FN01;
             -FN02]);

for k = 1:L+1
    A0(k,:) = (Unn(:,k))';
    Bg2(k,1) = umax;
```

```
    Bx2(k,1) = x2max;
end

Ag2 = [zeros(L+1) zeros(L+1) A0];
Ax2 = [zeros(L+1) A0 zeros(L+1)];

Aun = [ PHIT;
       -PHIT;
        Ag2;
       -Ag2;
        Ax2];
Bun = [ EPSL;
        EPSL;
        Bg2;
        Bg2;
        Bx2];

%%%
```

5.5.5. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию максимального быстродействия

Рассмотрим линейный (в общем случае нестационарный) объект управления, поведение которого описывается системой дифференциальных уравнений в форме Коши

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t). \tag{5.269}$$

Требуется построить закон управления $\mathbf{U}^*(t)$, переводящий систему (5.269) из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad \ldots \quad x_n(0)\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.270}$$

в конечное состояние

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(T) \quad \ldots \quad x_n(T)\right]^{\mathrm{T}} \tag{5.271}$$

и при этом доставляющий минимум функционалу качества

$$I = \int_0^T dt = T \to \min_{\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m}. \tag{5.272}$$

Ограничения на управляющее воздействие имеют вид

$$\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m. \tag{5.273}$$

Кроме перечисленных выше ограничений, на фазовые траектории объекта (5.269) могут накладываться ограничения

$$\mathbf{X}(t) \in X^n \subset R^n. \tag{5.274}$$

Будем предполагать, что линейный объект (5.269) полностью управляем.

Осуществим редукцию математической модели объекта управления (5.269), основываясь на положениях теории проекционно-матричных операторов. Пусть $\{\varphi_i(t)\}$ — ортогональный с весом $\rho(t) \equiv 1$ на интервале $\Omega = [0, T]$ базис. Обозначим через $\mathbf{\Phi}(t)$ вектор-строку элементов базиса $\{\varphi_i(t)\}$, $\dim \mathbf{\Phi}(t) = 1 \times l$.

Произведем параметризацию вектор-функций $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ с помощью спектрального представления их компонент по ортогональному базису $\{\varphi_i(t)\}$:

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \bar{\mathbf{\Phi}}_n(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \tilde{\mathbf{U}}_l(t) = \bar{\mathbf{\Phi}}_m(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{U}}},$$

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_q(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix}_{q \times q}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_n} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}_1} \\ \vdots \\ \mathbf{C}^{\tilde{u}_m} \end{bmatrix},$$

$\mathbf{C}^{\tilde{x}_i}$, $\mathbf{C}^{\tilde{u}_j}$ — векторы коэффициентов Фурье представления соответствующих компонент $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{U}(t)$ по базису $\{\varphi_i(t)\}$.

Для описания линейного динамического объекта (5.269) воспользуемся конечномерным эквивалентом

$$\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}} = \mathbf{A}^{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{U}}}\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{U}}} + \mathbf{A}^{\tilde{\mathbf{X}}}\mathbf{\Phi}_N^0. \tag{5.275}$$

Здесь

$$\mathbf{A}^{\tilde{\mathbf{X}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[a_{11}(t)\right] & \dots & -\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[a_{1n}(t)\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ -\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[a_{n1}(t)\right] & \dots & \mathbf{I} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[a_{nn}(t)\right] \end{bmatrix}^{-1},$$

$$\mathbf{B}^{\tilde{\mathbf{U}}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[b_{11}(t)\right] & \dots & \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[b_{1m}(t)\right] \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[b_{n1}(t)\right] & \dots & \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}\left[b_{nm}(t)\right] \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{\Phi}_N^0 = \begin{bmatrix} x_1(0)\mathbf{\Phi}_N \\ \vdots \\ x_n(0)\mathbf{\Phi}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Phi}_N = \begin{bmatrix} \int_0^T \varphi_1(t)dt & \dots & \int_0^T \varphi_l(t)dt \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$\mathbf{A}_{\text{и}}$ — проекционно-матричный оператор интегрирования в базисе $\{\varphi_i(t)\}$, $\mathbf{A}_{\text{y}}\left[a_{ij}(t)\right]$, $\mathbf{A}_{\text{y}}\left[b_{ij}(t)\right]$ — проекционно-матричные операторы умножения на соответствующие элементы матриц $\mathbf{A}(t)$ и $\mathbf{B}(t)$.

Рассмотрим случай, когда ограничения на управление имеют вид

$$\left|u_k(t)\right| \le \mu_k, \quad k = \overline{1,m}. \tag{5.276}$$

Введем нормированное управляющее воздействие

$$\bar{\mathbf{U}}(t):\ \bar{u}_k(t) = \frac{1}{\mu_k}u_k(t), \quad k = \overline{1,m}. \tag{5.277}$$

Нормированному управлению (5.277) в системе (5.269) соответствует модифицированная матрица $\bar{\mathbf{B}}(t)$.

Согласно принципу максимума Понтрягина, в задаче предельного быстродействия с ограничениями (5.276) *управляющее воздействие является кусочно-постоянной функцией, принимающей свои предельные значения.* Данный факт позволяет записать функционал (5.272), характеризующий быстродействие системы, в виде

$$I = \frac{1}{m}\int_0^T\left[\sum_{k=1}^m \bar{u}_k(t)\bar{u}_k^{-1}(t)\right]dt = \frac{1}{m}\int_0^T\sum_{k=1}^m \bar{u}_k^2(t)dt = \frac{1}{m}\int_0^T\left[\bar{\mathbf{U}}(t)\right]^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{U}}(t)dt. \tag{5.278}$$

Выражение для параметризованного функционала (5.278) можно записать так:

$$I\left(\mathbf{C}^{\bar{\mathbf{U}}}\right) = \sum_{i=1}^m\sum_{k=1}^l\left[c_k^{\bar{u}_i}\right]^2 \to \min_{\mathbf{C}^{\bar{\mathbf{U}}}}. \tag{5.279}$$

Параметризованное ограничение на управление (5.276) для редуцированной задачи имеет вид

$$\left|\sum_{k=1}^l c_k^{\bar{u}_i}\varphi_k(t)\right| \le 1 \ \ \forall t \in [0, T], \quad i = \overline{1,m}. \tag{5.280}$$

Выполнение начальных условий (5.270) заложено в ограничении (5.275), конечномерный эквивалент для конечных условий (5.271) можно записать в виде

$$\bar{\mathbf{\Phi}}_n(T)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}} \approx \mathbf{X}^T. \tag{5.281}$$

Параметризованная форма ограничений типа неравенств, накладываемых на фазовые траектории объекта (5.269), определяется соотношениями вида

$$\left|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{x}_k}\right| \le x_k^{\text{доп}} \ \ \forall t \in [0, T], \quad k = \overline{1,n}. \tag{5.282}$$

Ограничения (5.282) и (5.280) формулируются в узлах сетки ограничений

$$T_g = \left\{t_j:\ j=\overline{1,g},\ t_1 = 0,\ t_g = T,\ t_i < t_{i+1}\right\}.$$

Таким образом, решение исходной задачи синтеза оптимального программного управления (5.269)–(5.274) сводится к решению конечномерной оптимизационной задачи. Проведем ее решение по следующему алгоритму. Зададимся некоторым значением $\varepsilon > 0$.

1. Зафиксируем некоторое конечное время T_i.
2. Решим при $T = T_i$ задачу синтеза оптимального программного управления с функционалом (5.279) при ограничениях (5.275), (5.280)–(5.282).
3. Вычислим $x_j(T_i)$, $j=\overline{1,n}$. Если фазовые координаты приходят в допустимую окрестность конечных значений, то выбирается новое значение $T_{i+1} < T_i$, если нет, то фиксируется $T_{i+1} > T_i$. Если $|T_i - T_{i-1}| \le \varepsilon$, то T_i принимается за минимальное и вычисления останавливаются. Если нет, то осуществляется переход к пункту 1.

Пример 5.23. Задача о наискорейшем приведении в меридиан гироскопического компаса с гидравлическим успокоителем собственных колебаний (см. пример 5.10 из п. 5.4.3).

Прецессионное движение гироскопического компаса описывается следующей системой уравнений в пространстве состояний [53]:

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}u(t), \tag{5.283}$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{1,53921}{41,1368} & -\dfrac{1,53921}{41,1368}\cdot 0,62 \\ 41,1368\cdot 10^{-6} & 0 & 0 \\ 0 & -1,5\cdot 10^{-3} & -1,5\cdot 10^{-3} \end{bmatrix},\quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Приведение гироскопического компаса в меридиан, т.е. приведение его в состояние $x_i = 0$, $i=\overline{1,3}$, выполняется путем приложения к гироскопическому компасу добавочной внешней силы $u(t)$. Приходим к следующей задаче [53].

Пусть задано начальное состояние гироскопического компаса $\mathbf{X}^0 = [0,3 \quad 0,01 \quad 0,01]^{\mathrm{T}}$. Требуется перевести гирокомпас в положение $\mathbf{X}^T = [0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ за наименьшее возможное время T при ограничении на управление

$$|u(t)| \le 0,6401\cdot 10^{-3}. \tag{5.284}$$

Таким образом, искомое управление $u(t)$ должно минимизировать функционал

$$I = \int_0^T dt \to \min_{u\in U\subset R^1}. \tag{5.285}$$

Ограничения на управления для данной задачи симметричны относительно нуля. Введем нормированное управляющее воздействие

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{0,6401\cdot 10^{-3}}u(t), \tag{5.286}$$

при этом математическая модель системы (5.283) примет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \bar{\mathbf{B}}\bar{u}(t),\quad \bar{\mathbf{B}} = \left[0,6401\cdot 10^{-3} \quad 0 \quad 0\right]^{\mathrm{T}}, \tag{5.287}$$

а ограничение на управление (5.284) будет

$$|\bar{u}(t)| \le 1. \tag{5.288}$$

Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $\bar{u}^*(t)$ для данной задачи является кусочно-постоянной (релейной) функцией, т.е. принимает лишь свои предельные значения $|u_{\min}| = |u_{\max}| = 1$. Запишем функционал качества (5.285), характеризующий быстродействие системы (5.287), в виде

$$I = \int_0^T \bar{u}(t)\bar{u}^{-1}(t)dt = \int_0^T \bar{u}^2(t)dt \to \min_{u\in\{-1,\,1\}}. \tag{5.289}$$

Проведем редукцию бесконечномерной оптимизационной задачи (5.287)–(5.289) к конечномерному эквиваленту, используя аппарат проекционно-матричных операторов. Решение задачи осуществим в базисе блочно-импульсных функций. Параметризованные вектор фазовых координат и управление имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t)=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}(t) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}(t)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\end{bmatrix}=\bar{\boldsymbol{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}},\ \bar{u}_l(t)=\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\bar{u}},$$

$$\boldsymbol{\Phi}(t)=\begin{bmatrix}\varphi_1(t) & \dots & \varphi_l(t)\end{bmatrix},\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_i}=\begin{bmatrix}c_1^{\tilde{x}_i} & \dots & c_l^{\tilde{x}_i}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},\ \mathbf{C}^{\bar{u}}=\begin{bmatrix}c_1^{\bar{u}} & \dots & c_l^{\bar{u}}\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Конечномерный эквивалент математической модели гирокомпаса (5.287) запишется так:

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}&=a_{12}\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}+a_{13}\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}+b_1\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\bar{u}}+\boldsymbol{\Phi}_N^{01},\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}&=a_{21}\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}+\boldsymbol{\Phi}_N^{02},\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3}&=a_{32}\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}+a_{33}\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}+\boldsymbol{\Phi}_N^{03},\end{aligned}\qquad(5.290)$$

где

$$\boldsymbol{\Phi}_N^{0i}=x_i(0)\boldsymbol{\Phi}_N,\ \boldsymbol{\Phi}_N=\begin{bmatrix}1 & \dots & 1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$\mathbf{A}_{\text{и}}$ — матрица интегрирования в базисе блочно-импульсных функций, a_{ij} — элементы матрицы системы $\mathbf{A}$, b_1 — элемент матрицы $\mathbf{B}$.

Параметризованный функционал качества (5.289) запишется так:

$$I\left(\mathbf{C}^{\bar{u}}\right)=\left[\mathbf{C}^{\bar{u}}\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{I}\mathbf{C}^{\bar{u}}=\sum_{k=1}^{l}\left[c_k^{\bar{u}}\right]^2.\qquad(5.291)$$

Выполнение начальных условий оптимизационной задачи заложено в ограничениях (5.290), параметризованный же эквивалент конечных условий можем записать так:

$$\bar{\boldsymbol{\Phi}}(T)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}\approx\mathbf{X}(T)\ \Leftrightarrow\ \begin{bmatrix}\left|\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\right|\\ \left|\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\right|\\ \left|\boldsymbol{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\right|\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_3}\end{bmatrix}.\qquad(5.292)$$

Соотношение (5.292) представляет собой ограничения типа неравенств, в которых константы $\delta^{\tilde{x}_i}$, $i=\overline{1,3}$, выбираются из соображений точности решения задачи перевода системы (5.283) из начального состояния в конечное для каждой из фазовых координат.

Ограничение на управление (5.288) для редуцированной задачи с учетом особенностей использования базиса блочно-импульсных функций определяется выражением

$$\left|\boldsymbol{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\bar{u}}\right|=\left|\sum_{k=1}^{l}c_k^{\bar{u}}\right|\le 1.\qquad(5.293)$$

Решение задачи проведем в системе *Matlab 6.1*. Ограничения (5.290), (5.292), (5.293) приведем к форме

$$\begin{bmatrix}b_1\mathbf{A}_{\text{и}} & -\mathbf{I} & a_{12}\mathbf{A}_{\text{и}} & a_{13}\mathbf{A}_{\text{и}}\\ \mathbf{0} & a_{21}\mathbf{A}_{\text{и}} & -\mathbf{I} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & a_{32}\mathbf{A}_{\text{и}} & -\mathbf{I}+a_{33}\mathbf{A}_{\text{и}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\bar{u}}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{\Phi}_N^{01}\\ -\boldsymbol{\Phi}_N^{02}\\ -\boldsymbol{\Phi}_N^{03}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}(T) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}(T) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\Phi}(T)\\ \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Phi}(T) & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Phi}(T) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\boldsymbol{\Phi}(T)\\ \boldsymbol{\Phi}(t_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{\Phi}(t_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \boldsymbol{\Phi}(t_l) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ -\boldsymbol{\Phi}(t_l) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{C}^{\bar{u}}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3}\end{bmatrix}\le\begin{bmatrix}\delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_1}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_2}\\ \delta^{\tilde{x}_3}\\ \delta^{\tilde{x}_3}\\ 1\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ 1\end{bmatrix}.$$

При решении задачи оптимизации зададимся размерностью базиса блочно-импульсных функций $l = 250$ и значениями параметров $\delta^{\tilde{x}_k} = 2 \cdot 10^{-4}$, $k = \overline{1,3}$. Значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,3}$, приводятся в табл. 5.8.

Таблица 5.8

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

i	T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$	$\tilde{x}_3(T_i)$
1	500,00000	$-1{,}1165 \cdot 10^{-2}$	$1{,}1165 \cdot 10^{-2}$	$-1{,}1735 \cdot 10^{-3}$
2	900,00000	$-8{,}8547 \cdot 10^{-3}$	$8{,}8547 \cdot 10^{-3}$	$-4{,}7818 \cdot 10^{-3}$
3	1300,00000	$-3{,}6280 \cdot 10^{-3}$	$2{,}8204 \cdot 10^{-3}$	$-3{,}6280 \cdot 10^{-3}$
4	1500,00000	$1{,}3600 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}3600 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}3600 \cdot 10^{-3}$
5	1700,00000	$8{,}2081 \cdot 10^{-4}$	$-8{,}2081 \cdot 10^{-4}$	$-8{,}2081 \cdot 10^{-4}$
6	1800,00000	$5{,}7511 \cdot 10^{-4}$	$-5{,}7511 \cdot 10^{-4}$	$-5{,}7511 \cdot 10^{-4}$
7	1900,00000	$3{,}3775 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}3775 \cdot 10^{-4}$	$-3{,}3775 \cdot 10^{-4}$
8	1950,00000	$2{,}2114 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}2114 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}2114 \cdot 10^{-4}$
9	1955,00000	$2{,}0954 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0954 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0954 \cdot 10^{-4}$
10	1958,00000	$2{,}0257 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0257 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0257 \cdot 10^{-4}$
11	1959,00000	$2{,}0024 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0024 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0024 \cdot 10^{-4}$
12	1959,05000	$2{,}0012 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0012 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0012 \cdot 10^{-4}$
13	1959,07000	$2{,}0007 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0007 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0007 \cdot 10^{-4}$
14	1959,09500	$2{,}0002 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0002 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0002 \cdot 10^{-4}$
15	1959,09750	$2{,}0001 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0001 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0001 \cdot 10^{-4}$
16	1959,09975	$2{,}0000 \cdot 10^{-4}$	$2{,}0000 \cdot 10^{-4}$	$2{,}0000 \cdot 10^{-4}$
17	1959,10000	$2{,}0000 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0000 \cdot 10^{-4}$	$-2{,}0000 \cdot 10^{-4}$

Из анализа результатов расчета, приведенных в табл. 5.8, можем заключить, что $T_{\min} = 1959{,}09975$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Задача решалась на персональном компьютере под управлением операционной системы *Windows 2000 SP 3* на базе процессора *Intel Pentium IV* с тактовой частотой 2400 МГц, объем оперативной памяти — 1 Гб, память типа *DDR SDRAM* с частотой 266 МГц. Время вычислений для каждого фиксированного значения T_i составляло в среднем 116,5 с, при этом машинное время решения собственно оптимизационной задачи с вызовом функции *fmincon* пакета *Optimization Toolbox* составляло в среднем 114 с. Оптимизация проводилась по 250 переменным при наличии 750 ограничений типа равенств и 506 ограничений типа неравенств.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$\tilde{u}^*(t) = \begin{cases} -0{,}6401 \cdot 10^{-3}, & 0 \le t < 743{,}7686, \\ 0{,}6401 \cdot 10^{-3}, & 743{,}7686 \le t < 1697{,}1963, \\ -0{,}6401 \cdot 10^{-3}, & 1697{,}1963 \le t < 1959{,}09975. \end{cases} \qquad (5.294)$$

На рис. 5.53 изображены графики оптимального управления $\tilde{u}^*(t)$ и фазовой траектории $\tilde{x}_1^*(t)$, на рис. 5.54 — графики фазовых траекторий $\tilde{x}_2^*(t)$ и $\tilde{x}_3^*(t)$. На рис. 5.55 представлены совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы максимального быстродействия.

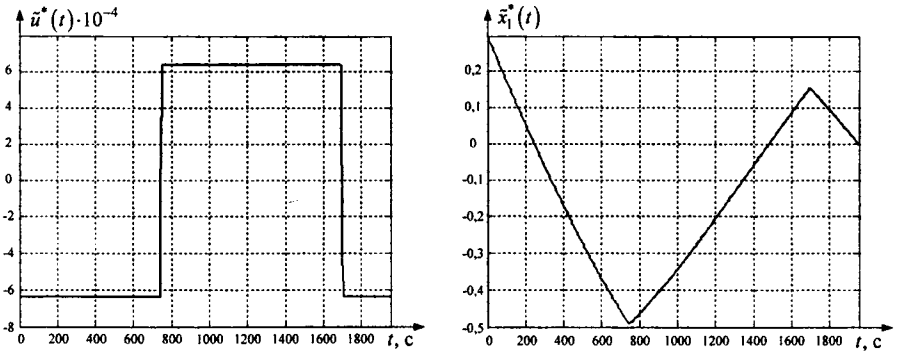


Рис. 5.53. Оптимальное управление $\tilde{u}^*(t)$ и фазовая траектория $\tilde{x}_1^*(t)$

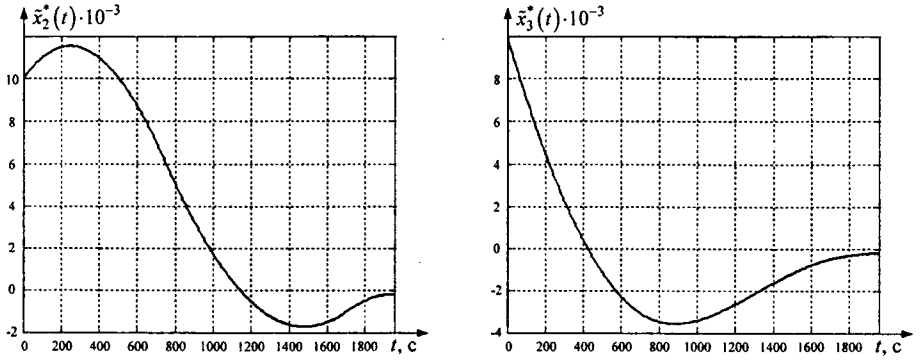


Рис. 5.54. Оптимальные фазовые траектории $\tilde{x}_2^*(t)$ и $\tilde{x}_3^*(t)$

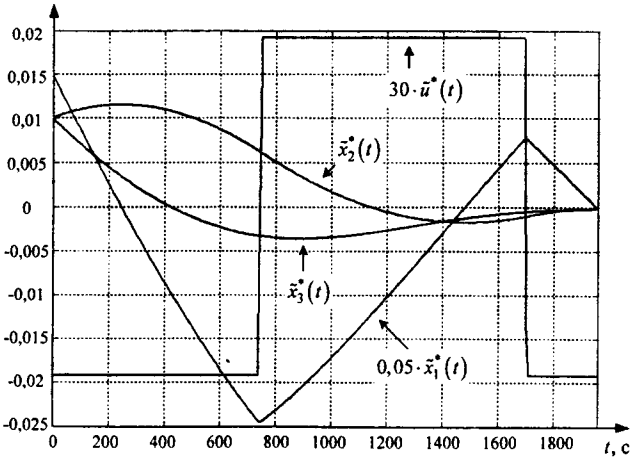


Рис. 5.55. Совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий

Приведем исходный текст программы *Matlab*, реализующей алгоритм решения задачи.

```
warning off
clear all
close all
pack
clc

% Data. %%%%
```

```
);

:,k))';
;

) zeros(L+1) zeros(L+1)];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
'fmincon');
'Diagnostics','on','Display','iter','MaxIter',...
                        300,'MaxFunEvals',20000000);
oldopts, newopts)
, output] = fmincon(J,c0,Aun,Bun,Ae,Be,[],[],[],options)


L+1);
2*(L+1));
3*(L+1));
```

```
x3(L+2) = x3(L+1);
u(L+2) = u(L+1);

figure
plot(tc,u,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('u(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x1,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x1(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x2,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x2(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,x3,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t,c')
ylabel('x3(t)')
grid
zoom

figure
plot(tc,u*30,'-k',tc,x1*0.05,'-k',tc,x2,'-k',tc,x3,'-k','LineWidth',2)
v = axis;
v(2) = T;
axis(v);
title(' ')
xlabel('t,c')
ylabel('x3(t)')
grid
zoom
```

Пример 5.24. Оптимальное по быстродействию управление положением ротора двигателя постоянного тока.

Рассмотрим объект управления — двигатель постоянного тока с управлением по току возбуждения (см. пример 5.6 из п. 5.4.2).

Постановка задачи: требуется отыскать управление $u^*(t)$, минимизирующее функционал качества

$$I = \int_0^T dt \to \min_{u \in U \subset R^1} \tag{5.295}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases} \tag{5.296}$$

$$\mathbf{X}^0 = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{X}^T = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \tag{5.297}$$

$$|u(t)| \le 1 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.298}$$

Ограничения на управления для данной задачи симметричны относительно нуля. Согласно принципу максимума Понтрягина, оптимальное управление $u^*(t)$ для данной задачи является релейной функцией, принимающей лишь свои предельные значения $|u_{\min}| = |u_{\max}| = 1$. Запишем функционал качества (5.295), характеризующий быстродействие системы (5.296) в виде

$$I = \int_0^T u(t)u^{-1}(t)\,dt = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_{u \in \{-1,\,1\}}. \tag{5.299}$$

Точное аналитическое решение задачи максимального быстродействия имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le 1; \\ -1, & 1 < t \le 2; \end{cases}$$

$$x_1^*(t) = \begin{cases} 0{,}5t^2, & 0 \le t \le 1; \\ -0{,}5t^2 + 2t - 1, & 1 < t \le 2; \end{cases}$$

$$x_2^*(t) = \begin{cases} t, & 0 \le t \le 1; \\ 2 - t, & 1 < t \le 2. \end{cases}$$

Для реализации алгоритма построения $\tilde{u}^*(t)$ воспользуемся методом математического программирования, а для параметризации применим ортонормированные смещенные полиномы Лежандра.

Параметризованные вектор фазовых координат и управление имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \tilde{u}_l(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{u}},$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = [\varphi_1(t) \quad \dots \quad \varphi_l(t)], \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_i} = \left[c_1^{\tilde{x}_i} \quad \dots \quad c_l^{\tilde{x}_i}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{u}} = \left[c_1^{\tilde{u}} \quad \dots \quad c_l^{\tilde{u}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Уравнения объекта управления (5.296) с использованием проекционно-матричного оператора интегрирования примут вид

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{B}}\mathbf{C}^{\tilde{u}} + \begin{bmatrix} x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0 \end{bmatrix}, \tag{5.300}$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{\text{и}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{A}_{\text{и}} \end{bmatrix}.$$

Теперь постановка задачи в терминах математического программирования формулируется следующим образом:

$$I\left(\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right) = \sum_{k=1}^{l} \left[c_k^{\tilde{u}}\right]^2 \to \min_{\mathbf{C}^{\tilde{u}}} \tag{5.301}$$

при ограничениях типа равенств (5.300), а также — типа неравенств

$$\left|\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right| \le 1 \quad \forall t \in [0, T_j]. \tag{5.302}$$

Ограничения, учитывающие начальное состояние объекта управления (5.296), заложены в ограничения (5.300).

Решение задачи реализуем в системе *Matlab 6.1*. Ограничения (5.300)–(5.302) следует привести к форме

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{A}_{\text{и}} \\ -\mathbf{A}_{\text{и}} & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_N^{01} \\ \mathbf{\Phi}_N^{02} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \mathbf{\Phi}(T) & 0 \\ 0 & -\mathbf{\Phi}(T) & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{\Phi}(T) \\ 0 & 0 & -\mathbf{\Phi}(T) \\ \mathbf{\Phi}(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{\Phi}(t_g) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1(T) + \delta^{\tilde{x}_1} \\ -x_1(T) + \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

При решении задачи размерность базиса полиномов Лежандра принималась равной 18, $\delta^{\tilde{x}_1} = \delta^{\tilde{x}_2} = 10^{-2}$. Дискретные значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,2}$, приводятся в табл. 5.9.

Таблица 5.9

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

i	T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$
1	0,5	$1{,}4808 \cdot 10^{-1}$	$5{,}9193 \cdot 10^{-1}$
2	1	$4{,}7727 \cdot 10^{-1}$	$5{,}2258 \cdot 10^{-1}$
3	1,25	$6{,}2270 \cdot 10^{-1}$	$3{,}7507 \cdot 10^{-1}$
4	1,5	$7{,}5559 \cdot 10^{-1}$	$2{,}4392 \cdot 10^{-1}$
5	1,75	$8{,}7788 \cdot 10^{-1}$	$1{,}2299 \cdot 10^{-1}$
6	1,85	$9{,}2457 \cdot 10^{-1}$	$7{,}6071 \cdot 10^{-2}$
7	1,9	$9{,}4757 \cdot 10^{-1}$	$5{,}2840 \cdot 10^{-2}$
8	1,95	$9{,}6976 \cdot 10^{-1}$	$2{,}9652 \cdot 10^{-2}$
9	2	$9{,}8999 \cdot 10^{-1}$	$1{,}0054 \cdot 10^{-2}$
10	2,05	$9{,}8996 \cdot 10^{-1}$	$9{,}7987 \cdot 10^{-3}$

На основании расчетных данных табл. 5.9 можем сделать вывод, что $T_{\min} = 2$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 1, \\ -1, & 1 \le t < 2. \end{cases} \tag{5.303}$$

Приведем результаты решения задачи. Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{u^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$ для $T_{\min} = 2$ с определяются вектор-столбцами

$$\mathbf{C}^{u^*} = \begin{bmatrix} 7{,}4446 \cdot 10^{-3} \\ -1{,}2046 \\ -8{,}2833 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}4300 \\ 7{,}8955 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}2393 \\ -7{,}0271 \cdot 10^{-3} \\ 0{,}1483 \\ 5{,}6407 \cdot 10^{-3} \\ -9{,}2830 \cdot 10^{-2} \\ -4{,}0325 \cdot 10^{-3} \\ 5{,}6978 \cdot 10^{-2} \\ 2{,}4270 \cdot 10^{-3} \\ -3{,}2371 \cdot 10^{-2} \\ -1{,}1351 \cdot 10^{-3} \\ 1{,}5598 \cdot 10^{-2} \\ 3{,}3551 \cdot 10^{-4} \\ -5{,}5215 \cdot 10^{-3} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} 0{,}6943 \\ 0{,}5014 \\ 2{,}0524 \cdot 10^{-3} \\ -7{,}4192 \cdot 10^{-2} \\ -4{,}3746 \cdot 10^{-4} \\ 1{,}0351 \cdot 10^{-2} \\ 1{,}7560 \cdot 10^{-4} \\ -3{,}0771 \cdot 10^{-3} \\ -8{,}1755 \cdot 10^{-5} \\ 1{,}1585 \cdot 10^{-3} \\ 3{,}8502 \cdot 10^{-5} \\ -4{,}7712 \cdot 10^{-4} \\ -1{,}6911 \cdot 10^{-5} \\ 1{,}9796 \cdot 10^{-4} \\ 6{,}3559 \cdot 10^{-6} \\ -7{,}5728 \cdot 10^{-5} \\ -1{,}7895 \cdot 10^{-6} \\ 1{,}8997 \cdot 10^{-5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 0{,}7004 \\ 6{,}4143 \cdot 10^{-3} \\ -0{,}3824 \\ -2{,}3865 \cdot 10^{-3} \\ 7{,}9757 \cdot 10^{-2} \\ 1{,}3763 \cdot 10^{-3} \\ -3{,}0526 \cdot 10^{-2} \\ -8{,}5346 \cdot 10^{-4} \\ 1{,}4402 \cdot 10^{-2} \\ 5{,}1393 \cdot 10^{-4} \\ -7{,}2145 \cdot 10^{-3} \\ -2{,}8370 \cdot 10^{-4} \\ 3{,}6094 \cdot 10^{-3} \\ 1{,}3351 \cdot 10^{-4} \\ -1{,}6712 \cdot 10^{-3} \\ -4{,}8180 \cdot 10^{-5} \\ 6{,}4788 \cdot 10^{-4} \\ 9{,}8378 \cdot 10^{-6} \end{bmatrix}.$$

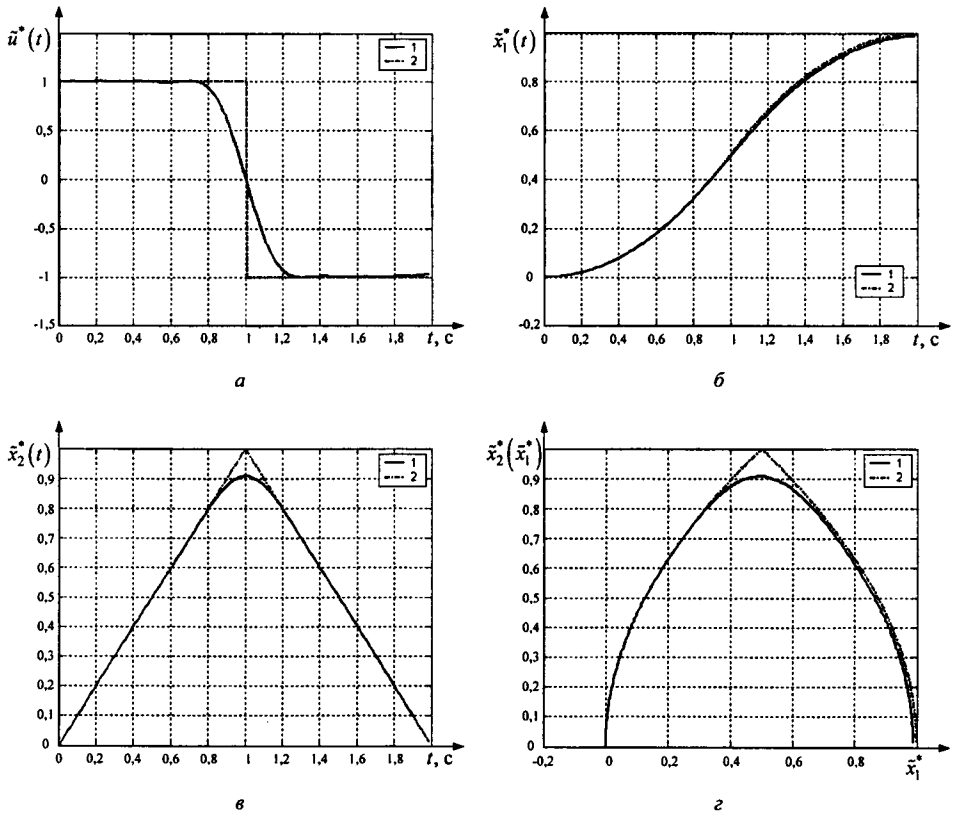


Рис. 5.56. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, сплошная линия) и точного решения задачи (2, пунктир), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

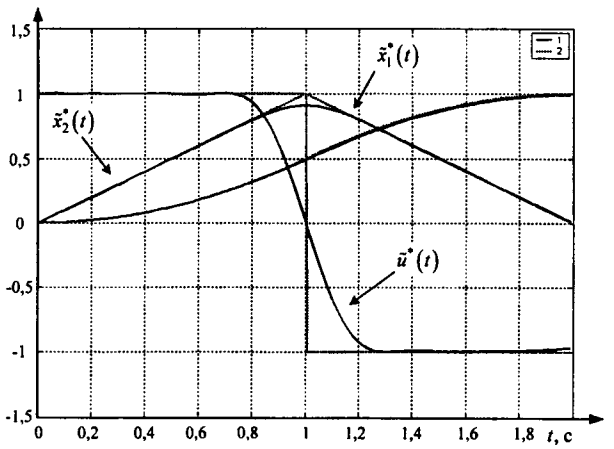


Рис. 5.57. Совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы

На рис. 5.56 представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ и точного решения задачи, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$. На рис. 5.57 представлены совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы максимального быстродействия.

Приведем результаты решения той же задачи при ограничении на фазовые координаты. Положим

$$x_2(t) \le 0{,}55. \tag{5.304}$$

Сформулируем данные ограничения в узлах сетки ограничений

$$T_i^g = \left\{t_i:\ i = \overline{1,g},\ t_1 = 0,\ t_g = 14,\ t_i < t_{i+1}\right\}$$

в виде

$$\Phi(t_i)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \le 0{,}55 \ \ \forall t_i \in T_i^g.$$

При этом ограничения типа неравенств будут расширены следующим образом:

$$\begin{bmatrix} 0 & \Phi(T) & 0 \\ 0 & -\Phi(T) & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(T) \\ 0 & 0 & -\Phi(T) \\ \Phi(t_1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\Phi(t_g) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(t_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \Phi(t_g) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} x_1(T) + \delta^{\tilde{x}_1} \\ -x_1(T) + \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0{,}55 \\ \vdots \\ 0{,}55 \end{bmatrix}.$$

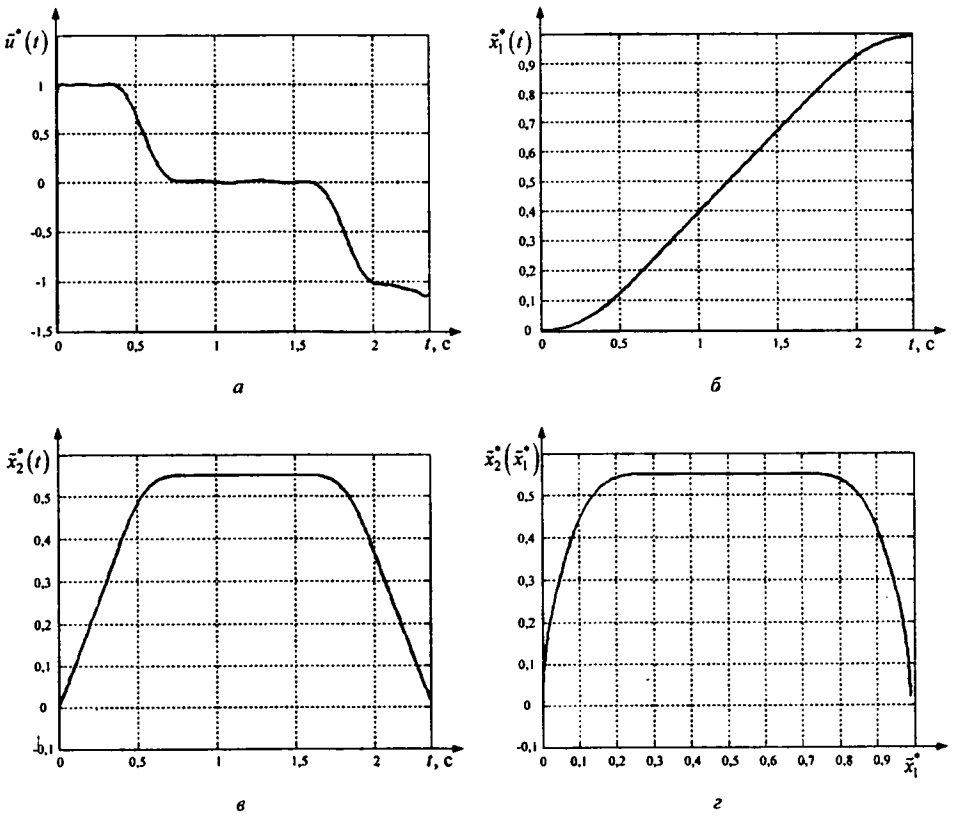


Рис. 5.58. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ при ограничении (5.304), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

Дискретные значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,2}$, приводятся в табл. 5.10.

Таблица 5.10

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

i	T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$
1	0,5	$1,4808\cdot10^{-1}$	$5,9193\cdot10^{-1}$
2	1	$4,5759\cdot10^{-1}$	$5,4220\cdot10^{-1}$
3	1,5	$6,9395\cdot10^{-1}$	$3,0369\cdot10^{-1}$
4	1,75	$7,9111\cdot10^{-1}$	$2,0802\cdot10^{-1}$
5	2	$8,7822\cdot10^{-1}$	$1,2114\cdot10^{-1}$
6	2,25	$9,5789\cdot10^{-1}$	$4,2522\cdot10^{-2}$
7	2,35	$9,8908\cdot10^{-1}$	$1,1247\cdot10^{-2}$
8	2,355	$9,8946\cdot10^{-1}$	$1,0606\cdot10^{-2}$
9	2,36	$9,9015\cdot10^{-1}$	$1,1466\cdot10^{-2}$
10	2,4	$9,9001\cdot10^{-1}$	$1,0720\cdot10^{-2}$

На основании расчетных данных табл. 5.10 можем сделать вывод, что $T_{\min} = 2,355$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Спектральные характеристики сигналов $\mathbf{C}^{\tilde{u}^*}$, $\mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*}$ и $\mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*}$ для $T_{\min} = 2,355$ с определяются следующими вектор-столбцами:

$$\mathbf{C}^{\tilde{u}^*} = \begin{bmatrix} 8,5745\cdot10^{-3} \\ -9,3408\cdot10^{-1} \\ -1,7919\cdot10^{-3} \\ -1,4872\cdot10^{-1} \\ -8,7419\cdot10^{-3} \\ 2,5843\cdot10^{-1} \\ 7,8953\cdot10^{-3} \\ -7,8191\cdot10^{-2} \\ 1,2634\cdot10^{-3} \\ -6,6465\cdot10^{-2} \\ -7,1818\cdot10^{-3} \\ 7,8762\cdot10^{-2} \\ 2,8814\cdot10^{-3} \\ -8,1861\cdot10^{-3} \\ 2,1187\cdot10^{-3} \\ -2,7884\cdot10^{-2} \\ -2,7228\cdot10^{-3} \\ 2,4352\cdot10^{-2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_1^*} = \begin{bmatrix} 7,5528\cdot10^{-1} \\ 5,1591\cdot10^{-1} \\ 1,7507\cdot10^{-3} \\ -4,2821\cdot10^{-2} \\ 3,5392\cdot10^{-4} \\ -9,3853\cdot10^{-3} \\ -2,2670\cdot10^{-4} \\ 2,8058\cdot10^{-3} \\ 9,0613\cdot10^{-6} \\ 3,8728\cdot10^{-4} \\ 5,8032\cdot10^{-5} \\ -6,4415\cdot10^{-4} \\ -2,7721\cdot10^{-5} \\ 1,6052\cdot10^{-4} \\ -5,4606\cdot10^{-6} \\ 9,8331\cdot10^{-5} \\ 1,0022\cdot10^{-5} \\ -6,4800\cdot10^{-5} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_2^*} = \begin{bmatrix} 6,4511\cdot10^{-1} \\ 6,3740\cdot10^{-3} \\ -2,5439\cdot10^{-1} \\ 9,4022\cdot10^{-4} \\ -5,2647\cdot10^{-2} \\ -1,8120\cdot10^{-3} \\ 3,2040\cdot10^{-2} \\ 5,7259\cdot10^{-4} \\ -1,4110\cdot10^{-3} \\ 5,0613\cdot10^{-4} \\ -8,1380\cdot10^{-3} \\ -5,2627\cdot10^{-4} \\ 4,2386\cdot10^{-3} \\ 4,1433\cdot10^{-5} \\ 7,5059\cdot10^{-4} \\ 1,8344\cdot10^{-4} \\ -1,8703\cdot10^{-3} \\ -9,4336\cdot10^{-5} \end{bmatrix}.$$

На рис. 5.58 представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$.

При использовании метода математического программирования процедура параметризации является достаточно простой и позволяет применять стандартные приемы поиска экстремума в конечномерном пространстве. Основной ее недостаток заключается в отсутствии гарантии того, что параметризованное управление достаточно близко к оптимальному, в связи с чем при решении конкретных задач не следует ограничиваться заданием единственного параметрического представления; необходимо опробовать несколько моделей.

Для решения данной задачи воспользуемся другим базисом — ортогональной системой блочно-импульсных функций размерностью 128.

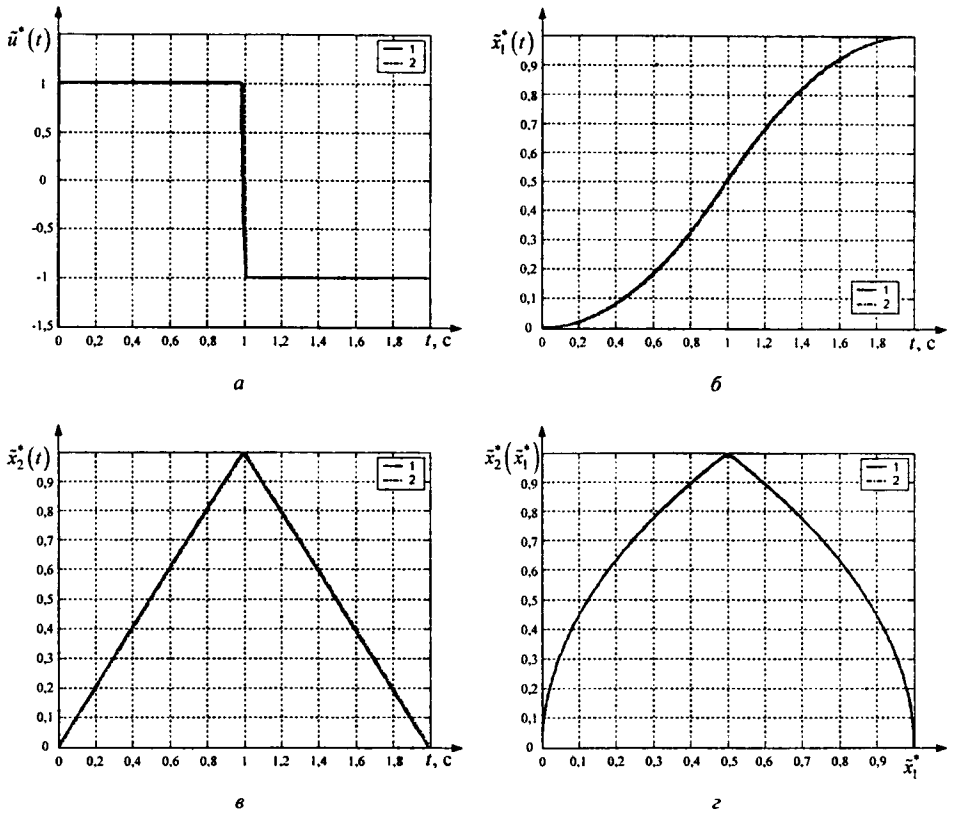


Рис. 5.59. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, сплошная линия) и точного решения задачи (2, пунктир), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

Рассмотрим сперва решение задачи без ограничений на фазовые координаты, задавшись значениями $\delta^{\tilde{x}_1} = \delta^{\tilde{x}_2} = 10^{-5}$. Дискретные значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,2}$, сведены в табл. 5.11.

Таблица 5.11

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

i	T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$
1	0,5	0,2221	0,7779
2	1	$2{,}2387 \cdot 10^{-1}$	$4{,}4613 \cdot 10^{-1}$
3	1,25	$6{,}9096 \cdot 10^{-1}$	$3{,}0904 \cdot 10^{-1}$
4	1,5	$8{,}1002 \cdot 10^{-1}$	$1{,}8998 \cdot 10^{-1}$
5	1,75	$9{,}1314 \cdot 10^{-1}$	$8{,}6859 \cdot 10^{-2}$
6	1,85	$9{,}5044 \cdot 10^{-1}$	$4{,}9561 \cdot 10^{-2}$
7	1,9	$9{,}6830 \cdot 10^{-1}$	$3{,}1699 \cdot 10^{-2}$
8	1,95	$9{,}8567 \cdot 10^{-1}$	$1{,}4325 \cdot 10^{-2}$
9	2	$9{,}9999 \cdot 10^{-1}$	$1{,}0000 \cdot 10^{-5}$
10	2,05	$9{,}9999 \cdot 10^{-1}$	$1{,}0000 \cdot 10^{-5}$

Из анализа расчетных данных табл. 5.11 можем заключить, что $T_{\min} = 2$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$\tilde{u}^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 0{,}99, \\ -1, & 0{,}99 \le t < 2. \end{cases} \tag{5.305}$$

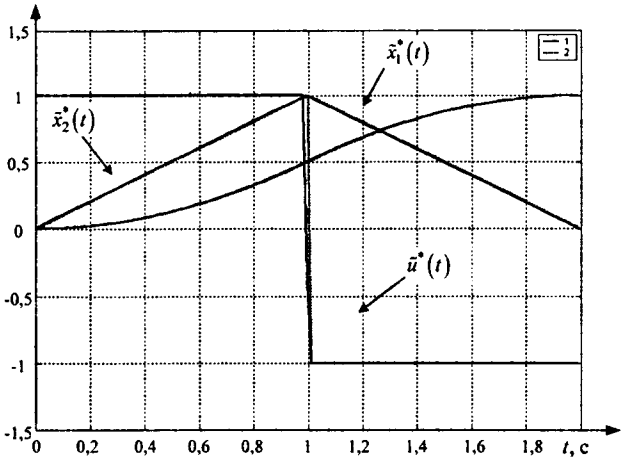


Рис. 5.60. Совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы

На рис. 5.59 представлены графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ и точного решения задачи, а также фазовый портрет системы при оптимальном управлении $\tilde{u}^*(t)$. На рис. 5.60 представлены совмещенные графики оптимального управления и фазовых траекторий системы максимального быстродействия.

Приведем результаты решения той же задачи при ограничении на фазовые координаты (5.304). Дискретные значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,2}$, приводятся в табл. 5.12.

Таблица 5.12

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

i	T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$
1	0,5	$2{,}2212 \cdot 10^{-1}$	$7{,}7788 \cdot 10^{-1}$
2	1	$5{,}5387 \cdot 10^{-1}$	$4{,}4613 \cdot 10^{-1}$
3	1,5	$7{,}8574 \cdot 10^{-1}$	$2{,}1426 \cdot 10^{-1}$
4	1,75	$8{,}6436 \cdot 10^{-1}$	$1{,}3564 \cdot 10^{-1}$
5	2	$9{,}2772 \cdot 10^{-1}$	$7{,}2283 \cdot 10^{-2}$
6	2,25	$9{,}7995 \cdot 10^{-1}$	$2{,}0047 \cdot 10^{-2}$
7	2,35	$9{,}9838 \cdot 10^{-1}$	$1{,}6229 \cdot 10^{-2}$
8	2,359125	$9{,}9999 \cdot 10^{-1}$	$1{,}0000 \cdot 10^{-5}$
9	2,36	$9{,}9999 \cdot 10^{-1}$	$1{,}0000 \cdot 10^{-5}$
10	2,4	$9{,}9999 \cdot 10^{-1}$	$1{,}0000 \cdot 10^{-5}$

На основании расчетных данных табл. 5.12 можем сделать вывод, что $T_{\min} = 2{,}359125$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$\tilde{u}^*(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t < 0{,}516, \\ 0, & 0{,}516 \le t < 1{,}788, \\ -1, & 1{,}788 \le t < 2{,}359125. \end{cases} \tag{5.306}$$

На рис. 5.61 изображены графики, иллюстрирующие результаты решения задачи максимального быстродействия с ограничениями на фазовые координаты с использованием системы блочно-импульсных функций.

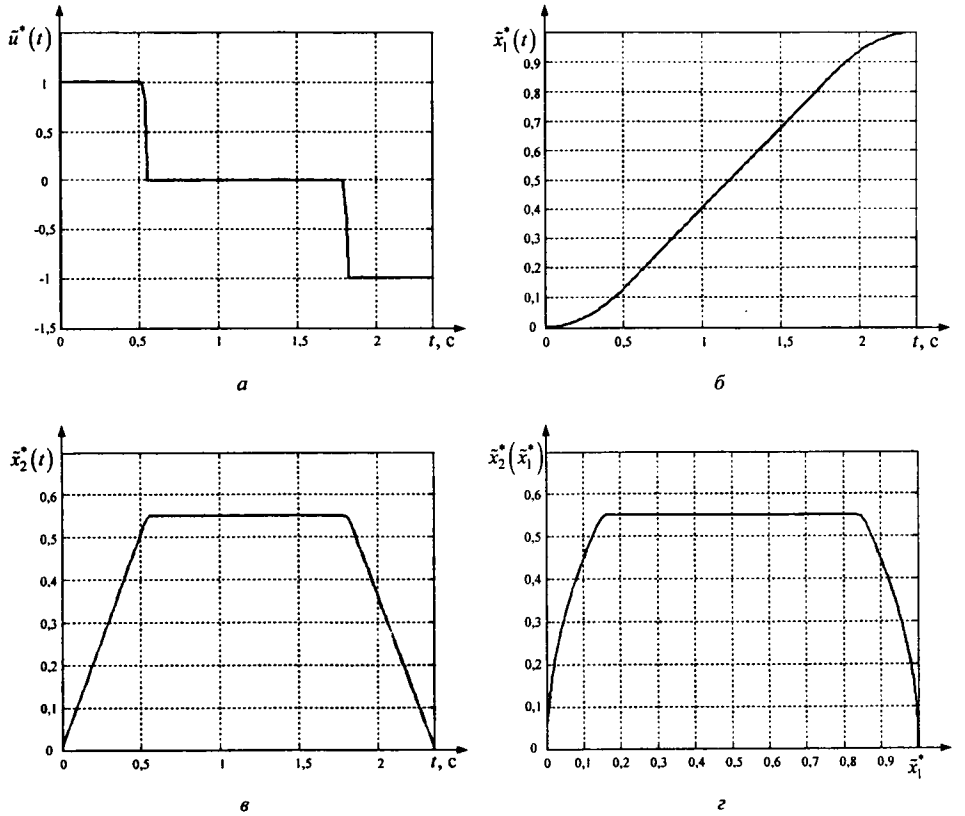


Рис. 5.61. *а–в* — графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ при ограничении (5.304), *г* — фазовый портрет системы при оптимальном управлении

Пример 5.25. Нестационарная система 5-го порядка с полиномиальными коэффициентами и скалярным управлением.

Рассмотрим линейный нестационарный объект управления (см. пример 5.20 из п. 5.5.3), описываемый в пространстве состояний уравнениями

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \tag{5.307}$$

где

$$\mathbf{X}(t) = \left[x_1(t) \ \ldots \ x_5(t)\right]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & -a_4(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5596 & 1,8918 & 2,5825 & 1,7855 & 0,6277 & 0,0909 \\ 0,7113 & 2,3843 & 3,2220 & 2,1975 & 0,7588 & 0,1065 \\ 0,3717 & 1,2333 & 1,6449 & 1,1038 & 0,3728 & 0,0507 \\ 0,1002 & 0,3278 & 0,4300 & 0,2827 & 0,0930 & 0,0122 \\ 0,0140 & 0,0449 & 0,0576 & 0,0369 & 0,0118 & 0,0015 \\ 1,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix}.$$

Сформулируем задачу следующим образом: рассчитать программное управление, переводящее объект (5.307) из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$$

в конечное

$$\mathbf{X}^T = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$$

и доставляющее минимум функционалу качества

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u \tag{5.308}$$

при ограничении

$$|u(t)| \le 40. \tag{5.309}$$

Ограничение на управление для данной задачи симметрично относительно нуля. Введем нормированное управляющее воздействие

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{40} u(t), \tag{5.310}$$

при этом математическая модель системы (5.307) примет вид

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \bar{\mathbf{B}}\bar{u}(t), \quad \bar{\mathbf{B}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 40]^{\mathrm{T}}, \tag{5.311}$$

а ограничение на управление (5.309) будет

$$|\bar{u}(t)| \le 1. \tag{5.312}$$

Запишем функционал качества (5.308), характеризующий быстродействие системы (5.311), в виде

$$I = \int_0^T \bar{u}(t)\bar{u}^{-1}(t)\,dt = \int_0^T \bar{u}^2(t)\,dt \to \min_{\bar{u} \in \{-1,\,1\}}. \tag{5.313}$$

Проведем редукцию бесконечномерной оптимизационной задачи (5.311)–(5.313) к конечномерному эквиваленту, используя аппарат проекционно-матричных операторов. Решение задачи осуществим в базисе блочно-импульсных функций. Параметризованные вектор фазовых координат и управление имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_5} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{\Phi}}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \bar{u}_l(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\bar{u}},$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = [\varphi_1(t) \quad \ldots \quad \varphi_l(t)], \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_i} = \left[c_1^{\tilde{x}_i} \quad \ldots \quad c_l^{\tilde{x}_i}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C}^{\bar{u}} = \left[c_1^{\bar{u}} \quad \ldots \quad c_l^{\bar{u}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Параметризованные уравнения (5.311) имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} + x_1(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} + x_2(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} + x_3(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + x_4(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_5} = -\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_0]\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_1]\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_2]\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} - \\ \qquad - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_3]\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_{\text{y}}[a_4]\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\bar{u}} + x_5(0)\mathbf{\Phi}_N^0, \end{cases} \tag{5.314}$$

где $\mathbf{A}_{\text{и}}$ — проекционно-матричный оператор интегрирования, $\mathbf{A}_{\text{y}}[a_i]$ — проекционно-матричные операторы умножения на коэффициенты $a_i(t)$, $i = \overline{0,4}$.

Параметризованный функционал качества (5.313) определяется выражением

$$I\left(\mathbf{C}^{\bar{u}}\right)=\sum_{k=1}^{l}\left[c_k^{\bar{u}}\right]^2\to\min_{\mathbf{C}^{\bar{u}}}. \qquad (5.315)$$

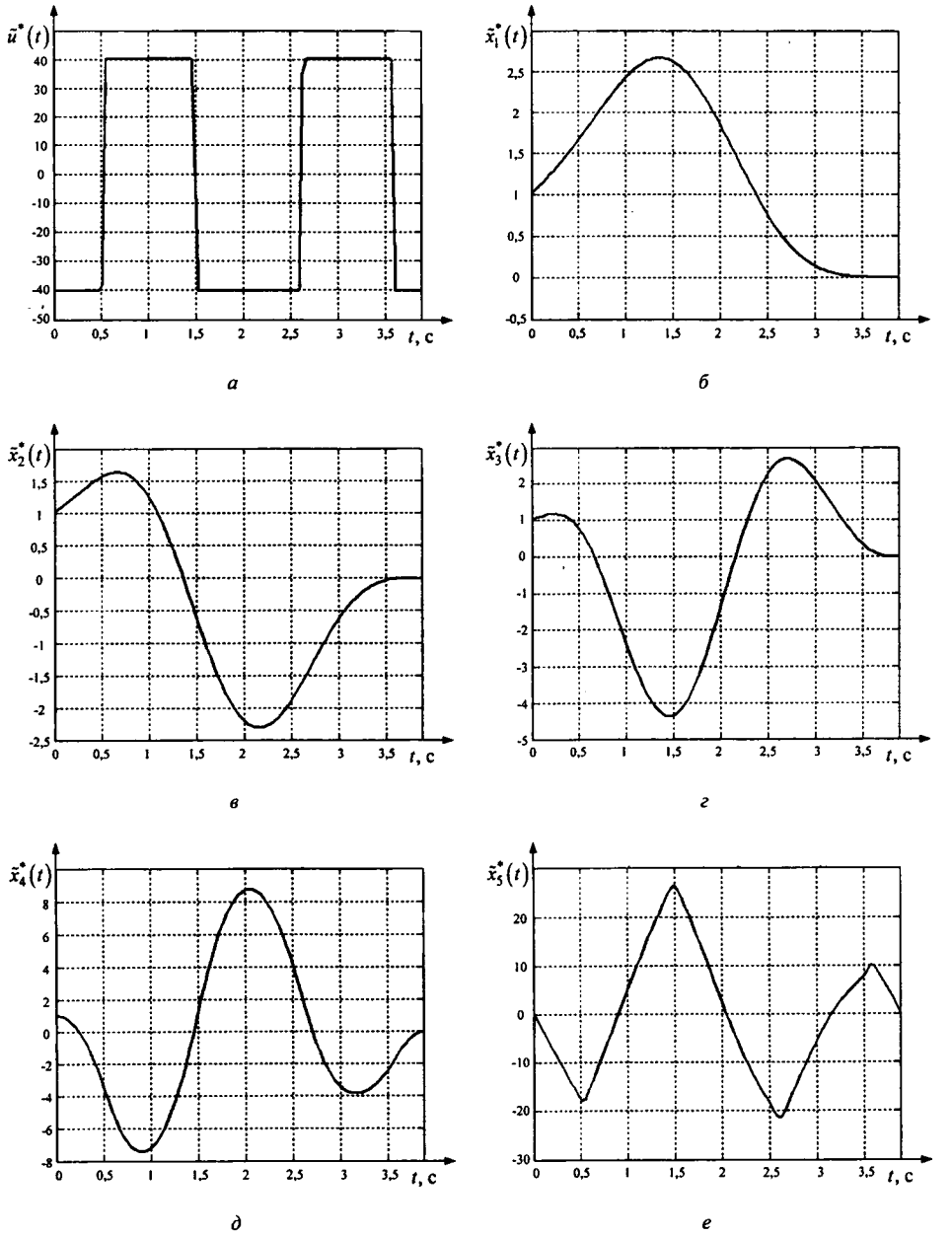


Рис. 5.62. Графики функций $\bar{u}^*(t)$, $\bar{x}_1^*(t)$, $\bar{x}_2^*(t)$, $\bar{x}_3^*(t)$, $\bar{x}_4^*(t)$, $\bar{x}_5^*(t)$

В терминах математического программирования формулировка задачи запишется так: *отыскать закон управления* $\bar{u}^*(t)$, *доставляющий минимум функционалу* (5.315) *при ограничениях типа равенств* (5.314) *и ограничениях типа неравенств*

$$\begin{bmatrix} |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_3}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_4}| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_5}| \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_3} \\ \delta^{\tilde{x}_4} \\ \delta^{\tilde{x}_5} \end{bmatrix}. \qquad (5.316)$$

Ограничения на фазовые координаты не накладываются.

Решим задачу с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 100.

Приведем результаты решения задачи при $\delta^{\tilde{x}_i} = 1 \cdot 10^{-2}$, $i = \overline{1,5}$. Дискретные значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,5}$, приводятся в табл. 5.13.

Таблица 5.13

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$	$\tilde{x}_3(T_i)$	$\tilde{x}_4(T_i)$	$\tilde{x}_5(T_i)$
1	2,1265	0,5113	–5,1265	0,6470	2,1265
2	1,2714	–1,2714	0,5364	1,2714	–1,2714
2,5	0,8532	–0,8532	0,8532	–0,8532	0,8532
3	0,5390	–0,5390	0,5390	–0,5390	0,5390
3,5	0,1488	–0,2364	0,2364	–0,2364	0,2364
3,7	0,0562	–0,1171	0,1171	–0,1171	0,1171
3,8	0,0507	–0,0583	–0,0583	–0,0583	0,0583
3,85	0,0139	–0,0307	–0,0307	–0,0307	0,0307
3,8775	–0,0100	–0,0100	–0,0100	–0,0100	0,0100
3,9	–0,0100	–0,0100	–0,0100	–0,0100	0,0100

На основании расчетных данных табл. 5.13 можем сделать вывод, что $T_{\min} = 3,8775$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление перестает носить релейный характер.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$\tilde{u}^*(t) = \begin{cases} -40, & 0 \le t < 0,528, \\ 40, & 0,528 \le t < 1,49, \\ -40, & 1,49 \le t < 2,607, \\ 40, & 2,607 \le t \le 3,5837, \\ -40, & 3,5837 \le t \le 3,8775. \end{cases} \qquad (5.317)$$

Графики оптимального управления и фазовых траекторий системы представлены на рис. 5.62.

Пример 5.26. Нестационарная система 5-го порядка с экспоненциальными коэффициентами и скалярным управлением.

Математическая модель линейного нестационарного объекта управления в пространстве состояний имеет вид (см. пример 5.21 из п. 5.5.3)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)u(t), \qquad (5.318)$$

$$\mathbf{X}(t) = [x_1(t) \ \dots \ x_5(t)]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{B} = [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & -a_2(t) & -a_3(t) & -a_4(t) \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}0000 & 3{,}5489 & 5{,}1523 & 3{,}8608 & 1{,}5192 & 0{,}2620 \\ 1{,}1716 & 4{,}1050 & 5{,}8550 & 4{,}2732 & 1{,}6091 & 0{,}2511 \\ 0{,}5579 & 1{,}9211 & 2{,}6761 & 1{,}8881 & 0{,}6743 & 0{,}0973 \\ 0{,}1349 & 0{,}4537 & 0{,}6125 & 0{,}4146 & 0{,}1405 & 0{,}0190 \\ 0{,}0165 & 0{,}0539 & 0{,}0699 & 0{,}0452 & 0{,}0146 & 0{,}0018 \\ 1{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 & 0{,}0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \exp(-t) \\ \exp(-2t) \\ \exp(-3t) \\ \exp(-4t) \\ \exp(-5t) \end{bmatrix}.$$

Постановка задачи: построить программное управление, переводящее объект (5.318) из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = [2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2]^{\mathrm{T}}$$

в конечное

$$\mathbf{X}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^{\mathrm{T}},$$

минимизирующее функционал качества

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u \tag{5.319}$$

при ограничении

$$|u(t)| \le 75. \tag{5.320}$$

После нормирования управляющего воздействия

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{75} u(t), \tag{5.321}$$

перейдем к модифицированной математической модели системы (5.318)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \bar{\mathbf{B}}\bar{u}(t), \quad \bar{\mathbf{B}} = [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 75]^{\mathrm{T}}, \tag{5.322}$$

а ограничение на управление (5.320) примет вид

$$|\bar{u}(t)| \le 1. \tag{5.323}$$

Теперь можем записать функционал качества (5.319) в виде

$$I = \int_0^T \bar{u}(t)\bar{u}^{-1}(t)\,dt = \int_0^T \bar{u}^2(t)\,dt \to \min_{\bar{u} \in \{-1,\,1\}}. \tag{5.324}$$

Решение задачи методом математического программирования осуществим в базисе блочно-импульсных функций. Параметризованные вектор фазовых координат и управление имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \Phi(t) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Phi(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Phi(t) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Phi(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \Phi(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_5} \end{bmatrix} = \bar{\Phi}(t)\mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \bar{u}_l(t) = \Phi(t)\mathbf{C}^{\bar{u}},$$

$$\Phi(t) = [\varphi_1(t) \quad \ldots \quad \varphi_l(t)], \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_i} = \left[c_1^{\tilde{x}_i} \quad \ldots \quad c_l^{\tilde{x}_i}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C}^{\bar{u}} = \left[c_1^{\bar{u}} \quad \ldots \quad c_l^{\bar{u}}\right]^{\mathrm{T}}.$$

Параметризованные уравнения (5.322) можем записать следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} + x_1(0)\Phi_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} + x_2(0)\Phi_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_3} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} + x_3(0)\Phi_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_4} = \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + x_4(0)\Phi_N^0, \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_5} = -\mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_y[a_0]\mathbf{C}^{\tilde{x}_1} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_y[a_1]\mathbf{C}^{\tilde{x}_2} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_y[a_2]\mathbf{C}^{\tilde{x}_3} - \\ \qquad - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_y[a_3]\mathbf{C}^{\tilde{x}_4} - \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{A}_y[a_4]\mathbf{C}^{\tilde{x}_5} + \mathbf{A}_{\text{и}}\mathbf{C}^{\bar{u}} + x_5(0)\Phi_N^0. \end{cases} \tag{5.325}$$

Здесь $\mathbf{A}_{\text{и}}$ — проекционно-матричный оператор интегрирования, $\mathbf{A}_y[a_i]$ — проекционно-матричные операторы умножения на коэффициенты $a_i(t)$, $i = \overline{0,4}$.

Параметризованный функционал качества (5.324) определяется выражением

$$I\left(\mathbf{C}^{\bar{u}}\right) = \sum_{k=1}^{l}\left[c_k^{\bar{u}}\right]^2 \to \min_{\mathbf{C}^{\bar{u}}}. \tag{5.326}$$

Постановка задачи синтеза оптимального по быстродействию программного управления формулируется так: *построить закон управления* $\vec{u}^*(t)$, *доставляющий минимум функционалу качества* (5.326) *при ограничениях* (5.325) *и ограничениях*

$$\begin{bmatrix} |\Phi(T)\mathbf{C}^{\vec{x}_1} - x_1(T)| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\vec{x}_2} - x_2(T)| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\vec{x}_3} - x_3(T)| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\vec{x}_4} - x_4(T)| \\ |\Phi(T)\mathbf{C}^{\vec{x}_5} - x_5(T)| \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\vec{x}_1} \\ \delta^{\vec{x}_2} \\ \delta^{\vec{x}_3} \\ \delta^{\vec{x}_4} \\ \delta^{\vec{x}_5} \end{bmatrix}. \qquad (5.327)$$

Ограничения на фазовые координаты не накладываются.

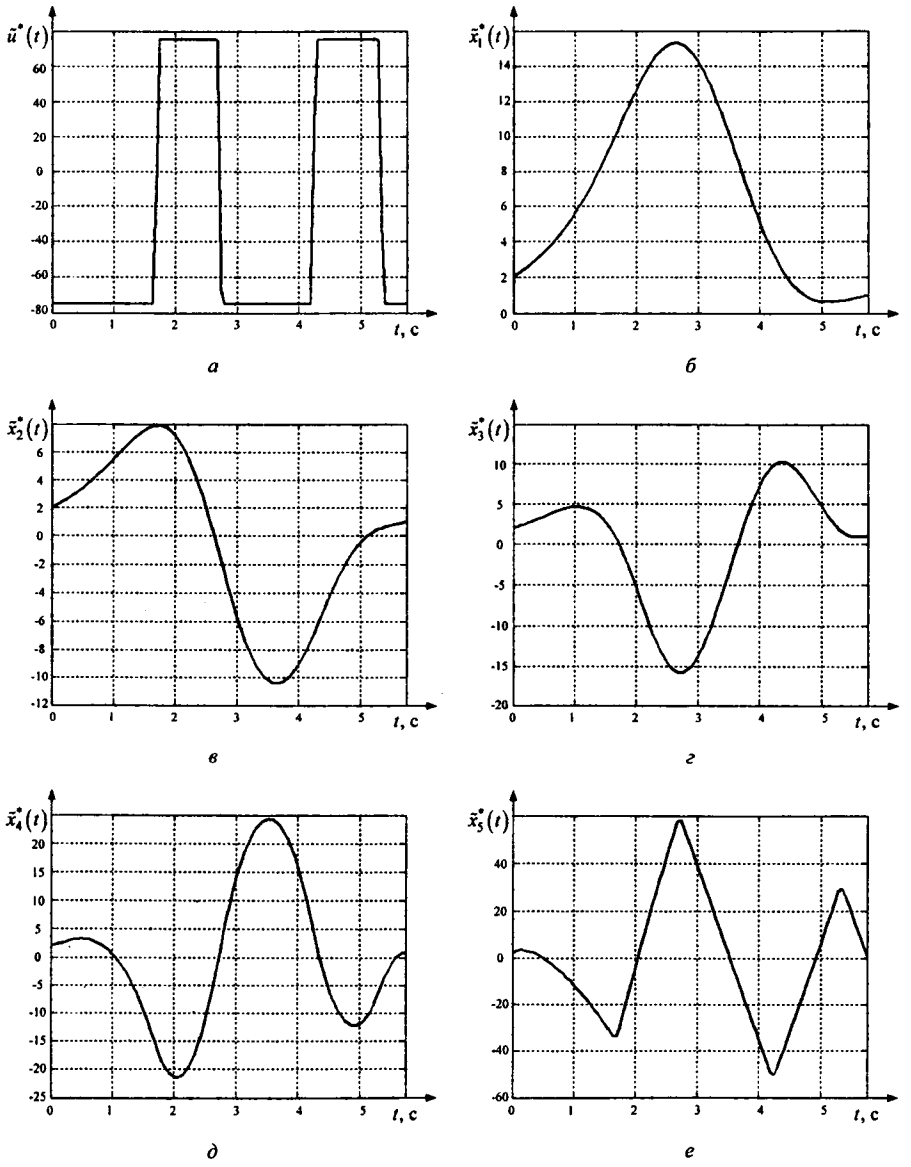


Рис. 5.63. Графики функций $\vec{u}^*(t)$, $\vec{x}_1^*(t)$, $\vec{x}_2^*(t)$, $\vec{x}_3^*(t)$, $\vec{x}_4^*(t)$, $\vec{x}_5^*(t)$

Решим задачу с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 100.

Приведем результаты решения задачи при $\delta^{\tilde{x}_i} = 1 \cdot 10^{-2}$, $i = \overline{1,5}$. Дискретные значения $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,5}$, представлены в табл. 5.14.

Таблица 5.14

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$	$\tilde{x}_3(T_i)$	$\tilde{x}_4(T_i)$	$\tilde{x}_5(T_i)$
1	3033	1,4272	–2,3033	3033	–2,3033
2	3,0777	–1,0777	3,0777	0,8745	–1,0111
3	2,0402	–0,0402	2,0402	–0,0402	2,0402
4	1,3865	0,6135	1,3865	0,6135	1,3865
5	1,1052	0,8948	1,1052	0,8948	1,1052
5,5	1,0362	0,9638	1,0362	0,9638	1,0362
5,6	1,0257	0,9743	1,0257	0,9743	1,0257
5,7	1,0161	0,9839	0,0161	0,9839	1,0161
5,7677	1,0100	0,9900	1,0100	0,9900	1,0100
5,77	1,0100	0,9900	1,0100	0,9900	1,0100

Из анализа данных табл. 5.14 можем прийти к выводу, что $T_{\min} = 5{,}7677$ с, поскольку при $T = T_{\min}$ конечные условия выполняются с принятой точностью, а при $T > T_{\min}$ оптимальное управление уже не носит релейный характер.

Полученный в результате решения задачи максимального быстродействия закон оптимального управления имеет вид

$$\tilde{u}^*(t) = \begin{cases} -75, & 0 \le t < 1{,}6985, \\ 75, & 1{,}6985 \le t < 2{,}7115, \\ -75, & 2{,}7115 \le t < 4{,}2365, \\ 75, & 4{,}2365 \le t \le 5{,}3416, \\ -75, & 5{,}3416 \le t \le 5{,}7677. \end{cases} \tag{5.328}$$

Графики оптимального управления и фазовых траекторий системы представлены на рис. 5.63.

Приведем результаты решения задачи синтеза оптимального программного управления по критерию максимального быстродействия для системы (5.318) при ограничениях на фазовые координаты

$$x_4(t) \le 5. \tag{5.329}$$

Дискретные значения переменных состояния $\tilde{x}_k(T_i)$, $k = \overline{1,5}$, для различных T_i приводятся в табл. 5.15.

Таблица 5.15

Дискретные значения фазовых координат в конечной точке

T_i, с	$\tilde{x}_1(T_i)$	$\tilde{x}_2(T_i)$	$\tilde{x}_3(T_i)$	$\tilde{x}_4(T_i)$	$\tilde{x}_5(T_i)$
3	2,4194	–0,4194	2,4194	–0,4194	2,4194
4	1,7120	0,2880	1,7120	0,2880	1,7120
5	1,3060	0,6940	1,3060	0,6940	1,3060
6	1,1144	0,8856	1,1144	0,8856	1,1144
6,5	1,0617	0,9383	1,0617	0,9383	1,0617
7	1,0248	0,9752	1,0248	0,9752	1,0248
7,1	1,0187	0,9813	1,0187	0,9813	1,0187
7,2	1,0131	0,9869	1,0131	0,9869	1,0131
7,2628	1,0100	0,9900	1,0100	0,9900	1,0100
7,3	1,0100	0,9900	1,0100	0,9900	1,0100

При ограничении (5.329) для данной задачи $T_{\min} = 7{,}2628$ с. На рис. 5.64 изображены графики оптимального управления и фазовых траекторий.

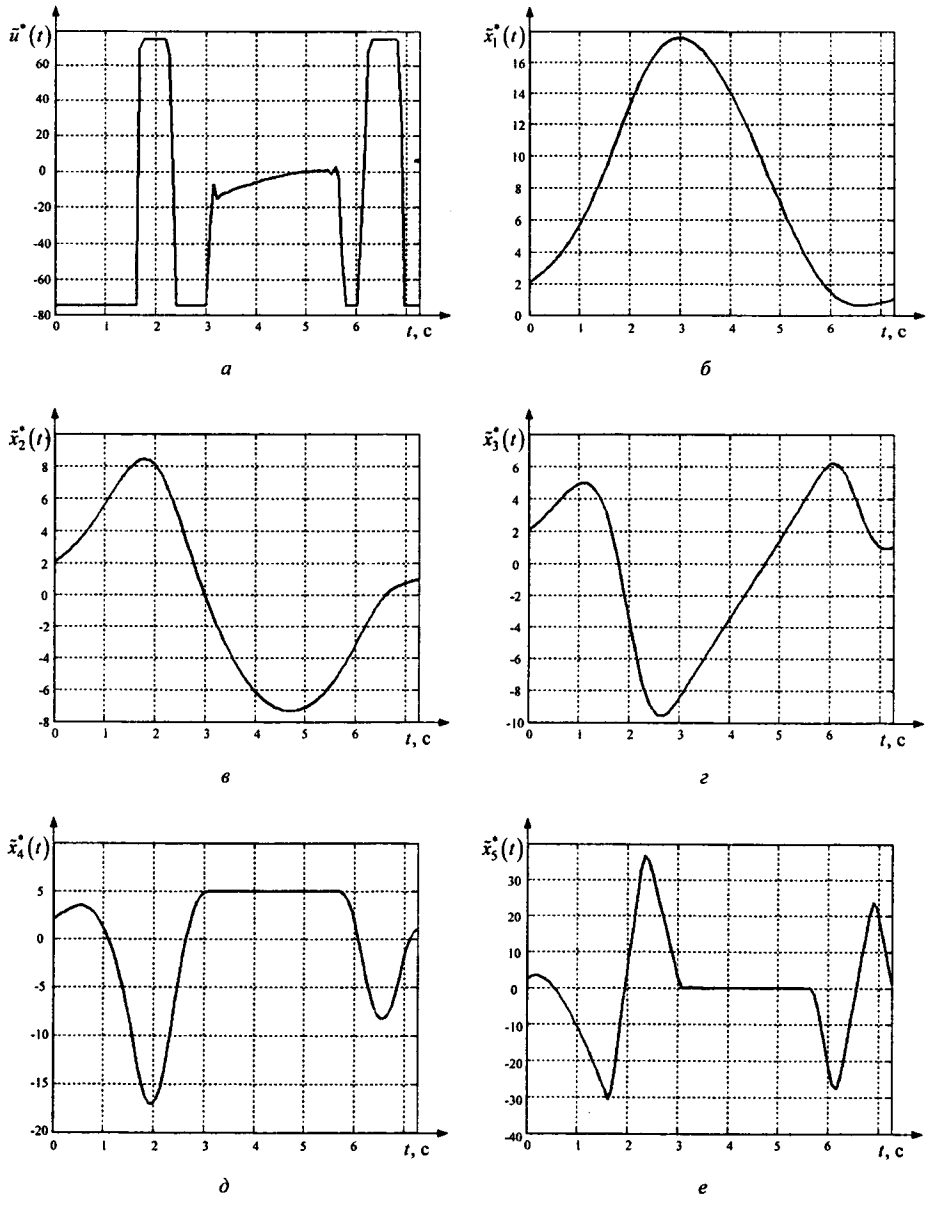


Рис. 5.64. Графики функций $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_1(T_i)$, $\tilde{x}_3^*(t)$, $\tilde{x}_2(T_i)$, $\tilde{x}_5^*(t)$

5.5.6. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию минимального расхода топлива

Задача построения программных управлений, оптимальных по расходу топлива, может быть сформулирована так: требуется определить управление $\mathbf{U}(t) \in U^m \subset R^m$, переводящее объект

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) \qquad (5.330)$$

из начального состояния $\mathbf{X}^0$ в конечное $\mathbf{X}^T$, причем функционал

$$I(\mathbf{U}) = \int_0^T \sum_{j=1}^{m} c_j \left| u_j(t) \right| dt \tag{5.331}$$

достигал бы при этом минимума.

Время перехода T может быть при этом задано, а может быть и не задано.

Для иллюстрации алгоритма решения поставленной задачи приведем пример.

Пример 5.27. Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: построить программное управление $u(t)$, переводящее объект

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t) \end{cases} \tag{5.332}$$

из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = [1 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{5.333}$$

в конечное

$$\mathbf{X}^T = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}} \tag{5.334}$$

при заданном значении $T = 3$ с, при этом функционал качества

$$I(u) = \int_0^T \left| u(t) \right| dt \tag{5.335}$$

принимал бы минимальное значение. На управление накладываются следующие ограничения:

$$\left| u(t) \right| \le 1. \tag{5.336}$$

Ограничения на фазовые координаты не накладываются.

Точное решение задачи имеет вид

$$u^*(t) = \begin{cases} -1, & 0 \le t \le 0,4, \\ 0, & 0,4 < t \le 2,6, \\ 1, & 2,6 < t \le 3. \end{cases}$$

Для нахождения $\tilde{u}^*(t)$, $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ методом математического программирования перепишем уравнения объекта управления в виде

$$\begin{cases} x_1(t) = \int_0^t x_2(\tau) d\tau + x_1(0), \\ x_2(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau + x_2(0). \end{cases}$$

Решим задачу с использованием ортогональной системы блочно-импульсных функций размерностью 70. Проекционно-матричный оператор интегрирования в этом базисе для $T = 3$ имеет вид (приведен вырез матрицы размером 5×5):

$$\mathbf{A}_{\text{и}} = \begin{bmatrix} 0,0169 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0337 & 0,0169 & 0 & 0 & 0 \\ 0,0337 & 0,0337 & 0,0169 & 0 & 0 \\ 0,0337 & 0,0337 & 0,0337 & 0,0169 & 0 \\ 0,0337 & 0,0337 & 0,0337 & 0,0337 & 0,0169 \end{bmatrix}.$$

Параметризованные вектор фазовых координат и управление имеют вид

$$\tilde{\mathbf{X}}_l(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}(t) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{\Phi}}(t) \mathbf{C}^{\tilde{\mathbf{X}}}, \quad \tilde{u}_l(t) = \mathbf{\Phi}(t) \mathbf{C}^{\tilde{u}},$$

$$\mathbf{\Phi}(t) = [\varphi_1(t) \quad \dots \quad \varphi_l(t)], \quad \mathbf{C}^{\tilde{x}_i} = \left[c_1^{\tilde{x}_i} \quad \dots \quad c_l^{\tilde{x}_i} \right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{C}^{\tilde{u}} = \left[c_1^{\tilde{u}} \quad \dots \quad c_l^{\tilde{u}} \right]^{\mathrm{T}}.$$

Уравнения объекта управления (5.332) с использованием проекционно-матричного оператора интегрирования можно записать так:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \tilde{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} + \tilde{\mathbf{B}} \mathbf{C}^{\tilde{u}} + \begin{bmatrix} x_1(0) \mathbf{\Phi}_N^0 \\ x_2(0) \mathbf{\Phi}_N^0 \end{bmatrix}, \tag{5.337}$$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{A}_и \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_и \end{bmatrix}.$$

Решение задачи синтеза оптимального управления по критерию минимального расхода топлива методом математического программирования требует параметризации функционала качества (5.335). Для этого можно воспользоваться какой-либо квадратурной формулой приближенного вычисления определенного интеграла; в простейшем случае это может быть формула прямоугольников. Тогда формулировка задачи в терминах математического программирования может быть представлены так:

$$I\left(c_k^{\tilde{u}}\right) = \Delta t \cdot \sum_{k=0}^{N-1} \left|\mathbf{\Phi}(t_k)\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right| \to \min_{\mathbf{C}^{\tilde{u}}} \tag{5.338}$$

при ограничениях типа равенств (5.337) и ограничениях типа неравенств

$$\begin{bmatrix} \left|\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_1}\right| \\ \left|\mathbf{\Phi}(T)\mathbf{C}^{\tilde{x}_2}\right| \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix}, \tag{5.339}$$

$$\left|\mathbf{\Phi}(t_k)\mathbf{C}^{\tilde{u}}\right| \le 1 \quad \forall k = \overline{0, N-1}. \tag{5.340}$$

В соотношении (5.339) константы $\delta^{\tilde{x}_i}$, $i = 1,2$, выбираются из соображений точности решения задачи перевода системы (5.332) из начального состояния в конечное для каждой из фазовых координат. Ограничения, учитывающие начальное состояние объекта управления (5.332), заложены в ограничения (5.337).

Решение задачи реализуем в системе *Matlab 6.1*. Ограничения (5.337), (5.339), (5.340) приводятся к виду

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} & -\mathbf{A}_и \\ -\mathbf{A}_и & \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_N^{01} \\ \mathbf{\Phi}_N^{02} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{\Phi}(T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{\Phi}(T) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{\Phi}(T) \\ \mathbf{\Phi}(t_0) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -\mathbf{\Phi}(t_{N-1}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}^{\tilde{u}} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_1} \\ \mathbf{C}^{\tilde{x}_2} \end{bmatrix} \le \begin{bmatrix} \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_1} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ \delta^{\tilde{x}_2} \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Приведем фрагмент программы на языке системы *Matlab*, реализующий формирование параметризованного функционала качества и ограничений, а также процесс поиска условного минимума.

```
% The functional conditional minimum search.%%%
```

```
Ag2;
-Ag2   ];
Bun = [ xT(1)+EPSL;
-xT(1)+EPSL;
xT(2)+EPSL;
-xT(2)+EPSL;
Bg2;
Bg2        ];
%%%
```

1 Гб, память типа *DDR SDRAM* с частотой 266 МГц. Время вычислений составило 1777,7 с, при этом машинное время решения собственно оптимизационной задачи с вызовом функции *fmincon* пакета *Optimization Toolbox* составило 1776,61 с. Оптимизация проводилась по 90 переменным при наличии 180 ограничений типа равенств и 188 ограничений типа неравенств. Очевидно, что существенные временные затраты связаны прежде всего со сложным видом минимизируемого функционала.

Таблица 5.16

Дискретные значения $\tilde{u}^*(t_k)$, $\tilde{x}_1^*(t_k)$ и $\tilde{x}_2^*(t_k)$

t_k	$\tilde{u}^*(t_k)$	$\tilde{x}_1^*(t_k)$	$\tilde{x}_2^*(t_k)$
0	–0,0006	1,0000	0,0000
0,2022	–1,0000	0,9827	–0,1854
0,4045	–0,4212	0,9249	–0,3779
0,6067	–0,0000	0,8471	–0,3850
0,8090	0,0000	0,7693	–0,3850
1,0112	–0,0000	0,6914	–0,3850
1,2135	–0,0000	0,6135	–0,3850
1,4157	–0,0000	0,5357	–0,3850
1,6180	–0,0000	0,4578	–0,3850
1,8202	0,0000	0,3799	–0,3850
2,0225	–0,0000	0,3021	–0,3850
2,2247	0,0000	0,2242	–0,3850
2,4270	0,0000	0,1463	–0,3850
2,6292	0,9215	0,0687	–0,3695
2,8315	1,0000	0,0142	–0,1685
3,0000	1,0000	0,0000	–0,0000

5.6. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ МЕТОДА МОМЕНТОВ

Проблема моментов, рассмотренная Крейном, получила название L-проблемы моментов [54]. Результаты решения этой проблемы были использованы рядом авторов для построения оптимальных программных управлений, а также для синтеза систем, работающих по принципу обратной связи. Н.Н. Красовский использовал метод L-проблемы моментов для решения задачи оптимального управления объектами с сосредоточенными параметрами [53]. А.Г. Бутковский показал, что этот *метод может быть с успехом обобщен для решения более сложных задач, связанных с бесконечномерной проблемой моментов и с задачами оптимального управления системами с распределенными параметрами* [17]. Метод оказался общим аппаратом решения многих задач синтеза оптимальных управлений*. Он дает единый подход к рассмотрению различных классов линейных управляемых систем, например, с сосредоточенными и распределенными параметрами произвольного порядка. Куликовский получил конструктивные результаты, связанные с решением задачи синтеза оптимальных управлений, используя аппарат приближения в различных функциональных пространствах. Особенно простые результаты получены при рассмотрении задачи в $L^2[0,T]$ [55]. Широкий спектр задач теории управления рассмотрен А.И. Морозом; он получил решение с использованием L-проблемы моментов задач, связанных с управляемостью и наблюдаемостью систем, с синтезом оптимальных управлений по ряду конкретных критериев.

В [16] алгоритмы определения функций управления с минимальной нормой сформулированы для линейных систем из более простых рассуждений, которые вытекают из геометрической интерпретации в фазовом пространстве рассматриваемых задач управления.

* В третьем томе изложены положения метода моментов применительно к решению еще одной важной задачи — задачи синтеза регуляторов.

Метод L-проблемы моментов применим к классам систем:

1) *непрерывных и дискретных*;
2) *стационарных и нестационарных*;
3) *автономных и неавтономных*;
4) *с одним и несколькими управляющими воздействиями* [17].

При этом допускаются весьма разнообразные оптимизируемые функционалы и в первую очередь функционалы типа норм в функциональных пространствах.

Как указано в [17], *метод моментов часто позволяет найти вид управляющих сигналов в замкнутой аналитической форме, а в тех случаях, когда это сделать невозможно, дает единый алгоритм для построения точного или приближенного решения задач*. При этом сложность алгоритма мало зависит от числа управляющих воздействий, она зависит лишь от порядка уравнения и характера собственно оптимальных задач [17].

5.6.1. ФОРМУЛИРОВКА ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ И ЕЕ РЕШЕНИЕ

Линейным функционалом в гильбертовом пространстве H называется отображение l, ставящее в соответствие любому $x \in H$ число lx, т.е. $l: H \to R^1$, причем отображение является:

1) аддитивным: $l(x_1 + x_2) = lx_1 + lx_2$;
2) однородным: $l(cx) = clx$, $c \in R^1$;
3) ограниченным: $|lx| \le c\|x\|_H$ для всех $x \in H$.

Весьма важным для дальнейшего изложения является содержание следующего факта [53]:

1) любому линейному функционалу в пространстве $L^p[0,T]$ $(1 \le p \le \infty)$ соответствует производящая функция $u(\tau)$, которая определена почти всюду на $[0,T]$ и
$$u(\tau) \in L^q[0,T] \quad (1/p + 1/q = 1);$$
2) всякий линейный функционал lx в пространстве $L^p[0,T]$ может быть представлен в виде
$$lx = (x,u) = \int_0^T x(\tau)u(\tau)d\tau; \quad x(\tau) \in L^p[0,T], \quad u(\tau) \in L^q[0,T], \tag{5.341}$$
причем производящая функция $u(\tau)$ однозначно определяется заданием функционала l;
3) норма функционала равна норме производящей функции в пространстве $L^q[0,T]$:
$$\|u(\tau)\|_{L^q[0,T]} = \|l\| = \begin{cases} \left\{\int_0^T |u(\tau)|^q d\tau\right\}^{1/q} & \text{при } p > 1,\ q < 0; \\ \operatorname{vrai}_{0 \le \tau \le T} \max |u(\tau)| & \text{при } p = 1,\ q = \infty. \end{cases} \tag{5.342}$$

Множество линейных ограниченных функционалов, определенных на $L^p[0,T]$, называется *сопряженным к* $L^p[0,T]$ *пространством* и обозначается $L^{p*}[0,T]$.

Из содержания приведенного выше факта следует два важных положения: каждый функционал из $L^{p*}[0,T]$ представляется в виде операции интегрирования

на $[0,T]$ (формула (5.341)); норма функционала в $L^{p*}[0,T]$ равна норме производящей функции в $L^q[0,T]$ (изометрический изоморфизм пространств L^{p*} и L^q (формула (5.342)). Пусть

$$H(t)=\left\{h_k(t):\ k=\overline{1,n},\ h_k(t)\in L^p[0,T]\right\}$$

— некоторая система функций. i-м моментом функции $u(\tau)$ относительно $h_i(t)$ системы $H(t)$ называется интеграл вида

$$lh_i=\int_0^T h_i(t)u(t)dt,\ \ i=\overline{1,n}. \tag{5.343}$$

Система равенств (5.343) называется *моментной системой* (или системой моментных уравнений).

Система функций H называется *моментной системой функций.*

Числа λ_i, $i=\overline{1,n}$, называются *моментами функции* $u(t)$ относительно моментной системы H.

Множество $\lambda=\left\{\lambda_k:\ k=\overline{1,n}\right\}$ называется *множеством моментов.*

Отметим, что равенства (5.343) — это функционалы, имеющие одну и ту же норму: если $h_k(t)\in L^p$, $t\in[0,T]$, то

$$\|l\|_{L^{p*}}=\|u\|_{L^q}. \tag{5.344}$$

Проблема моментов формулируется следующим образом [17, 53]. *Заданы моменты* λ_k *функции* $u(t)$ *относительно элементов моментной системы* $H(t)$. *Число заданных моментов может быть как конечным, так и бесконечным. Как показано в* [17], *задание конечного числа моментов соответствует системе с сосредоточенными параметрами. Для исследования управляемых систем с распределенными параметрами необходимо рассматривать бесконечное* (счетное) *число моментов.*

Требуется найти условия существования, единственности, а по возможности вычислить или оценить производящую функцию $u(t)$ (или, что то же самое, необходимо найти функционал $l\in L^{p*}$ из набора моментных уравнений (5.343)). Так как интеграл (5.343) можно рассматривать как линейный функционал, то последний определяется порождающей функцией $u(t)$, а функции $h_k(t)$ можно рассматривать как элементы, на которых этот функционал определен, т.е. интеграл (5.343) записывается в виде

$$lh_k,\ \ k=1,2,3,\ldots.$$

Поскольку мы рассматриваем пространство $L^p[0,T]$, как уже указывалось выше, всякий линейный функционал записывается как скалярное произведение

$$lh_i=(u,h_i)=\lambda_i,\ \ i=\overline{1,n}. \tag{5.345}$$

Приведенные рассуждения можно обобщить на абстрактные линейные нормированные пространства и рассмотреть проблему моментов в этих пространствах. Выше было отмечено, что всякий линейный функционал можно рассматривать как элемент сопряженного пространства. Для функциональных пространств функционал задается производящей функцией $u(t)$. Поэтому в наиболее общей форме проблема моментов может быть сформулирована так: *найти такой функционал* l, *который на заданной системе элементов* $h_1(t)$, $h_2(t)$,..., $h_n(t)$ *принимал бы значения* λ_1, λ_2,..., λ_n, *т.е.*

$$lh_i = \lambda_i,\ i = \overline{1,n}. \tag{5.346}$$

Функционал, который удовлетворяет (5.346), *называется разрешающим.*

Известно [53], что сформулированная проблема моментов имеет неединственное решение, т.е. существует много функционалов l, которые дают решение проблемы моментов. Для получения единственности решения вводят дополнительные ограничения. Например, можно поставить задачу об отыскании такого линейного функционала l, который не только давал бы решение проблемы моментов (5.346), но и имел бы минимальную норму $\left(\text{например, в пространстве } L^{p^*}[0,T]\right)$.

L-проблема моментов формулируется так: найти необходимые и достаточные условия для существования такого функционала l, который дает решение сформулированной выше проблемы моментов и удовлетворяет неравенству

$$\|u\| = \left\{ \begin{array}{ll} \left\{ \int\limits_0^T |u(\tau)|^q \, d\tau \right\}^{1/q} & \text{при } p > 1,\ q < \infty; \\ \operatorname{vrai}_{0 \le \tau \le T} \max |u(\tau)| & \text{при } p = 1,\ q = \infty \end{array} \right\} \le L. \tag{5.347}$$

Содержание оптимальной проблемы моментов: найти такой функционал $l \in L^{p^*}[0,T]$ $\left(\text{или, что то же самое, производящую функцию } u(\tau)\right)$, *который удовлетворяет условиям* (5.346) *и имеет минимальную норму в* $L^{p^*}[0,T]$, т.е.

$$\|l\|_{L^{p^*}[0,T]} = \|u\|_{L^q[0,T]} = \min. \tag{5.348}$$

Функционал l, удовлетворяющий условиям (5.346) и (5.348), *называется оптимальным разрешающим функционалом* [53]. Такого рода задачи были рассмотрены Крейном для конечномерной проблемы моментов. Далее будем рассматривать задачу в $L^p[0,T]$.

Можно показать справедливость следующей теоремы: *проблема моментов разрешима для любых* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *тогда и только тогда, когда функции* $h_1(t), h_2(t), \ldots, h_n(t)$ *линейно независимы.*

Теорема, приводимая ниже, дает ответы на следующие вопросы [17, 53]:

1. Существует и является ли единственным функционал l с минимальной нормой $\|l\|_{L^{p^*}[0,T]} = \min$?
2. Как найти порождающую функцию $u(t)$, дающую решение оптимальной проблемы моментов?
3. Как найти минимальную норму функционала l в $L^{p^*}[0,T]$?

Теорема 5.1 [55]. *Пусть*

$$h_i(t) \in L^p[0,T];\ \lambda_i \in R^1;\ i = \overline{1,n};$$

$$u(t) \in L^q[0,T];\ 1/p + 1/q = 1$$

и задана система

$$\int\limits_0^T h_k(t) u(t) dt = \lambda_k,\ k = \overline{1,n},$$

где $h_k(t)$ *— линейно независимые элементы.*

Тогда в пространстве $L^{p^*}[0,T]$ *существует единственный линейный функционал* l, *такой, что выполнены условия*

$$lh_i = \int_0^T h_i(t)u(\tau)d\tau = \lambda_i, \quad i = \overline{1,n};$$

$$\|l\|_{L^{p^*}[0,T]} = \|u\|_{L^q[0,T]} = \min.$$

Минимальная норма определяется равенством

$$\|l\|_{L^{p^*}[0,T]} = \max_{k_\nu} \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \lambda_\nu\right|}{\left\|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu h_\nu(t)\right\|_{L^p[0,T]}} = \frac{1}{\min\limits_{k_\nu} \left\|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu h_\nu(t)\right\|_{L^p[0,T]}\Big|_{\text{при } \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \lambda_\nu = 1}} =$$

$$= \frac{1}{\left\|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^* h_\nu(t)\right\|_{L^p[0,T]}\Big|_{\text{при } \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^* \lambda_\nu = 1}} = \|u\|_{L^q[0,T]} = \min,$$

где

$$\min_{k_\nu} \left\|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu h_\nu(t)\right\|_{L^p[0,T]}\Big|_{\text{при } \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \lambda_\nu = 1} = \min_{k_\nu} \left\{\int_0^T \left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu h_\nu(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}\Bigg|_{\text{при } \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu \lambda_\nu = 1}. \qquad (5.349)$$

Порождающая функция определяется выражением

$$u(t) = \frac{\left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^* h_\nu(t)\right|}{\|H_э(t)\|^p_{L^p[0,T]}} |H_э(t)|^{p-1} \operatorname{sign} H_э(t), \qquad (5.350)$$

где

$$H_э(t) = \sum_{\nu=1}^{n} k_\nu^* h_\nu(t). \qquad (5.351)$$

Таким образом, в явном виде найдена зависимость для порождающей функции функционала, т.е. найдено решение оптимальной проблемы моментов. Кроме того, получена зависимость для расчета неизвестных коэффициентов $k_1^*,\ldots, k_n^*$. Заметим, что для нахождения указанных коэффициентов может быть использован *аппарат нелинейного программирования.** Найдем

$$\min_{k_\nu} I = \min_{k_\nu} \left(\int_0^T \left|\sum_{\nu=1}^{n} k_\nu h_\nu(t)\right|^p dt\right) \qquad (5.352)$$

при линейном ограничении

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n = 1.$$

Поскольку функционал I является нелинейным, то и задача поиска $k_1^*,\ldots, k_n^*$ относится к классу задач нелинейного программирования.

* См. Приложение 2.

Укажем еще один эффективный подход к решению оптимальной проблемы моментов. Из соотношения

$$k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n = 1$$

находим

$$k_1\lambda_1 = 1 - k_2\lambda_2 - k_3\lambda_3 - \ldots - k_n\lambda_n. \tag{5.353}$$

Отсюда

$$k_1 = \frac{1}{\lambda_1} - k_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - k_3\frac{\lambda_3}{\lambda_1} - \ldots - k_n\frac{\lambda_n}{\lambda_1}. \tag{5.354}$$

Перепишем зависимость

$$k_1h_1(t) + k_2h_2(t) + \ldots + k_nh_n(t),$$

учитывая выражение (5.354), в виде

$$\begin{aligned}&\left(\frac{1}{\lambda_1} - k_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1} - k_3\frac{\lambda_3}{\lambda_1} - \ldots - k_n\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)h_1(t) + k_2h_2(t) + \ldots + k_nh_n(t) = \\ &= \frac{1}{\lambda_1}h_1(t) - k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}h_1(t) - h_2(t)\right) - k_3\left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}h_1(t) - h_3(t)\right) - \ldots - \\ &-k_n\left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}h_1(t) - h_n(t)\right) = f_1(t) - k_2f_2(t) - k_3f_3(t) - \ldots - k_nf_n(t),\end{aligned} \tag{5.355}$$

где

$$f_1(t) = \frac{1}{\lambda_1}h_1(t)$$

— известная функция;

$$f_i(t) = \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}h_1(t) - h_i(t)\right),\ i = \overline{2,n},$$

— известные функции.

Учитывая (5.355), интеграл (5.352) принимает вид

$$I = \int_0^T \left|f_1(t) - k_2f_2(t) - k_3f_3(t) - \ldots - k_nf_n(t)\right|^p dt. \tag{5.356}$$

Из последней зависимости следует, что *задача минимизации функционала I свелась к задаче нашлучшего приближения функции $f_1(t)$ линейной комбинацией функций* $f_2(t), f_3(t), \ldots, f_n(t)$ (в смысле метрики пространства $L^p[0,T]$).

Метод решения оптимальной проблемы моментов, основанный на использовании теоремы Крейна, обладает тем достоинством, что сводит проблему к задаче аппроксимации, позволяя тем самым использовать ряд методов и готовых результатов, известных в теории аппроксимации. По условиям задачи система элементов в $L^p[0,T]$ $h_1(t), \ldots, h_n(t)$ обладает свойством линейной независимости. Отсюда вытекает линейная независимость функций $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$. В пространстве $L^2[0,T]$ задача нахождения $k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*$ затруднений не вызывает и ее решение очевидно. В пространстве же $L^1[0,T]$, когда функционал I, подлежащий минимизации, имеет вид

$$I = \int_0^T \left|f_1(t) - k_2f_2(t) - k_3f_3(t) - \ldots - k_nf_n(t)\right| dt,$$

решение задачи неоднозначно.

Чтобы обеспечить однозначность аппроксимации в метрике пространства $L^1[0,T]$, необходимо наложить дополнительные ограничения на функции $\{h_i(t)\}$ и $\{f_i(t)\}$ [55]. Положим, что система $\{f_i(t)\}$ образует систему Чебышева, т.е. является линейно независимой и количество нулей функции $\sum_{\nu=2}^{n} k_\nu f_\nu(t)$ на промежутке $[0,T]$ не превышает n. Тогда, используя известные из теории аппроксимации факты, можно заключить, что решение задачи аппроксимации в $L^1[0,T]$ однозначно.

Достаточно полно изучен вопрос о том, какие системы функций образуют систему Чебышева [54, 55].

5.6.2. Алгоритм синтеза оптимальных программных управлений методом моментов для класса линейных одномерных объектов

Поставленная задача формулируется так: *для линейного объекта, описываемого дифференциальным уравнением вида*[*]

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(t)x^{(k)} = \sum_{k=0}^{m} b_k(t)u^{(k)}, \tag{5.357}$$

построить программное управление $u^*(t)$, переводящее объект из начального состояния

$$\mathbf{X}^0 = \left[x(0) \quad x'(0) \quad \ldots \quad x^{(n-1)}(0)\right]^{\mathrm{T}}$$

в конечное

$$\mathbf{X}^T = \left[x(T) \quad x'(T) \quad \ldots \quad x^{(n-1)}(T)\right]^{\mathrm{T}}$$

за промежуток времени $[t_0 = 0, t_1 = T]$, причем норма управления $u(t)$ в пространстве $L^q[0,T]$ должна иметь минимум, т.е.

$$\|u\|_{L^q[0,T]} = \left\{\int_0^T |u(t)|^q\, dt\right\}^{1/q} \to \min. \tag{5.358}$$

Эта задача может быть решена с помощью метода моментов, основные положения которого изложены в предыдущем параграфе.

Запишем векторно-матричный интеграл Коши для уравнения САУ (пока будем полагать, что $\mathbf{U}(t)$ — вектор-функция)

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t). \tag{5.359}$$

Он имеет вид

$$\mathbf{X}(t) = \int_0^T \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau + \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(0)\mathbf{X}^0, \tag{5.360}$$

где $\mathbf{X}^0$ — начальное состояние.

Обозначая

$$\mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau) = \mathbf{\Phi}(t,\tau),$$

[*] Задачи оптимального управления объектами с распределенными параметрами подробно рассмотрены в [17].

перепишем (5.360)

$$\mathbf{X}(t)=\int_0^T \mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau+\mathbf{\Phi}(t,0)\mathbf{X}^0.$$

Поскольку

$$\mathbf{X}_\phi^{-1}(\tau)=\mathbf{\Psi}(\tau), \tag{5.361}$$

где $\mathbf{\Psi}(\tau)$ — фундаментальная система решений сопряженной системы, то (5.360) можно переписать в виде

$$\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}^0+\int_0^T \mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{\Psi}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau.$$

Умножая обе части последнего равенства на $\mathbf{\Psi}(t)$, получим

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{X}(t)=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{X}_\phi(t)\mathbf{X}^0+\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{X}_\phi(t)\int_0^T \mathbf{\Psi}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau.$$

Учитывая (5.361), запишем

$$\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}^0+\int_0^T \mathbf{\Psi}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau. \tag{5.362}$$

Или, что то же самое,

$$\int_0^t \mathbf{\Psi}(\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau=\mathbf{\Psi}(t)\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}^0.$$

Полагая в последнем интеграле верхний предел $t=T$, находим

$$\int_0^T \mathbf{H}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau=\mathbf{\Lambda}, \tag{5.363}$$

где

$$\mathbf{H}(\tau)=\mathbf{\Psi}(\tau)\mathbf{B}(\tau);\ \mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Psi}(T)\mathbf{X}(T)-\mathbf{X}^0.$$

Равенство (5.363) выражает необходимые и достаточные условия, которым должна удовлетворять функция $\mathbf{U}(t)$, чтобы система (5.359) перешла из заданного начального состояния $\mathbf{X}^0$ в заданное конечное состояние $\mathbf{X}^T$.

Если же предыдущие рассуждения отнести к скалярному объекту (5.357), то соотношение (5.363) в скалярной форме запишется так:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T h_1(\tau)u(\tau)d\tau=\lambda_1;\\
&\int_0^T h_2(\tau)u(\tau)d\tau=\lambda_2;\\
&\qquad\vdots\\
&\int_0^T h_n(\tau)u(\tau)d\tau=\lambda_n.
\end{aligned} \tag{5.364}$$

Теперь, пользуясь вышеизложенными результатами, легко записать зависимость, определяющую оптимальное управление:

$$u^*(t)=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*\lambda_\nu}{\left\|H_э(t)\right\|^p_{L^p[0,T]}}\left|H_э(t)\right|^{p-1}\operatorname{sign}H_э(t), \tag{5.365}$$

где

$$H_э(t)=\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t). \tag{5.366}$$

Управление (5.365) имеет минимальную норму в пространстве $L^q[0,T]$:

$$\|u\|_{L^q[0,T]}=\left\{\int_0^T|u(t)|^q\,dt\right\}^{1/q}\to\min.$$

Важно обратить внимание на факт, который здесь используется: *норма функционала l в терминах теории управления является одновременно нормой входного воздействия в пространстве $L^q[0,T]$, так как воздействие совпадает с производящей функцией функционала.* Норма функционала l в рассматриваемом подходе является функционалом качества работы системы управления.

В формулу, определяющую оптимальное программное управление $u^*(t)$, входят коэффициенты k_1^*, k_2^*,..., k_n^*. Они находятся путем решения следующей задачи нелинейного программирования:

$$\min_{k_\nu}\left\{\int_0^T\left|\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu h_\nu(t)\right|^p dt\right\}^{1/q} \tag{5.367}$$

при ограничении

$$k_1\lambda_1+k_2\lambda_2+\ldots+k_n\lambda_n=1. \tag{5.368}$$

Эта задача может быть решена только на ЭВМ; результатом ее решения являются числовые значения k_1^*, k_2^*, ..., k_n^*.

Рассмотрим случай, когда $p=q=2$. Функционал качества в рассматриваемом случае имеет вид

$$I=\left\{\int_0^T u^2(t)dt\right\}^{1/2}.$$

Реализуя последовательность решения задачи, получаем формулу для оптимального программного управления в виде

$$u^*(t)=\frac{\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*\lambda_\nu}{\int_0^T\left\{\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t)\right\}^2dt}\left|\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t)\right|\operatorname{sign}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t)\right\}=\left[\|l\|^*\right]^2\left\{\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t)\right\},$$

так как

$$\|l\|^*=\frac{1}{\left\|\sum_{i=1}^{n}k_i^*h_i(t)\right\|_{L^2[0,T]}};\quad\left|\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t)\right|\operatorname{sign}\left\{\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t)\right\}=\sum_{\nu=1}^{n}k_\nu^*h_\nu(t).$$

Для нахождения оптимальных значений $k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*$ необходимо решить задачу

$$\min_{k_\nu} \int_0^T \left| \sum_{\nu=1}^n k_\nu h_\nu(t) \right|^2 dt$$

при условии

$$\sum_{\nu=1}^n k_\nu \lambda_\nu = 1. \tag{5.369}$$

Последняя задача является классической задачей аппроксимации, а еще более конкретно — задачей о наилучшем приближении в среднеквадратичном.

Системы управления минимальной силой являются частным случаем оптимальных систем, рассмотренных выше, когда $p = 1$ и $q = \infty$, поскольку $1/p + 1/q = 1$.

Величина

$$I = \operatorname{vrai}_{0 \le t \le T} \max |u(t)| \tag{5.370}$$

называется силой управления скалярным объектом. Критерий (5.370) получается из общей формулы

$$I = \left\{ \int_0^T |u(t)|^q \, dt \right\}^{1/q} = \left\{ \int_0^T |u(t)|^\infty \, dt \right\}^{1/\infty}.$$

Выражение, определяющее оптимальное программное управление, в явном виде следует из зависимости (5.365) при $p = 1$ и $q = \infty$.

Имеем

$$u^*(t) = \frac{\sum_{\nu=1}^n k_\nu^* \lambda_\nu}{\int_0^T \left| \sum_{\nu=1}^n k_\nu^* h_\nu(t) \right| dt} \left| \sum_{\nu=1}^n k_\nu^* h_\nu(t) \right|^{l-1} \operatorname{sign} \left\{ \sum_{\nu=1}^n k_\nu^* h_\nu(t) \right\} = \|l\|^* \operatorname{sign} \left\{ \sum_{\nu=1}^n k_\nu^* h_\nu(t) \right\}, \tag{5.371}$$

где оптимальные коэффициенты $k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*$ находятся из решения задачи

$$\min_{k_\nu} \int_0^T \left| \sum_{\nu=1}^n k_\nu h_\nu(t) \right| dt$$

при условии $k_1\lambda_1 + k_2\lambda_2 + \ldots + k_n\lambda_n = 1$. Эта задача может быть решена на ЭВМ как задача математического программирования.

Рассмотренная задача расчета $k_1^*, k_2^*, \ldots, k_n^*$ может быть сведена к задаче аппроксимации в $L^1[0,T]$.

5.6.3. Векторно-матричный вариант

Если объект управления является многомерным, а его динамика описывается уравнением в пространстве состояний (5.359), то имеет место векторно-матричное соотношение (5.363), или, что то же самое,

$$\int_0^T \begin{bmatrix} h_{11}(\tau) & h_{12}(\tau) & \ldots & h_{1m}(\tau) \\ h_{21}(\tau) & h_{22}(\tau) & \ldots & h_{2m}(\tau) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{n1}(\tau) & h_{n2}(\tau) & \ldots & h_{nm}(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(\tau) \\ u_2(\tau) \\ \vdots \\ u_m(\tau) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{5.372}$$

Решение задачи имеет вид

$$\mathbf{U}(t)=\lambda_n\left|\mathbf{K}^*\mathbf{H}(t)\right|^{p-1}\operatorname{sign}\left\{\mathbf{K}^*\mathbf{H}(t)\right\},\quad 0\le t\le T,\quad p>1, \tag{5.373}$$

где вектор $\mathbf{K}^*=\left[k_1^*\quad k_2^*\quad\ldots\quad k_n^*\right]$ и число λ_n есть решение следующей задачи: найти

$$\min_{\mathbf{K}}\left\{\int_0^T\left|\mathbf{KH}(t)\right|^p dt\right\}^{1/p}=\frac{1}{\lambda_n^*}$$

при условии $\Lambda\mathbf{K}=1$.

Норма оптимального управления определяется формулой [17]

$$\|\mathbf{U}\|=\lambda_n^*.$$

Каждая из компонент вектора $\mathbf{U}^*(\tau)$ может быть рассчитана по формуле (5.373) или

$$u_k(t)=\left[\|l\|^*\right]^p\left|\sum_{i=1}^n k_i^* h_{ik}(t)\right|^{p-1}\operatorname{sign}\left\{\sum_{i=1}^n k_i^* h_{ik}(t)\right\},\quad k=\overline{1,m},$$

при этом оптимальные коэффициенты k_1^*, k_2^*,..., k_n^* находятся как решение следующей задачи: найти

$$\min_{k_1,\ldots,k_n}\left\{\int_0^T\left(\sum_{k=1}^m\left|\sum_{i=1}^n k_i^* h_{ik}(t)\right|^p\right)dt\right\}^{1/q}$$

при условии

$$\lambda_1 k_1+\lambda_2 k_2+\ldots+\lambda_n k_n=1.$$

Доказательство приведенного факта можно найти в [17]. Полученные результаты могут быть использованы для построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ.

5.7. НЕКОТОРЫЕ ПОДХОДЫ К СИНТЕЗУ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ, РАБОТАЮЩИХ ПО ПРИНЦИПУ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

5.7.1. Линейно-квадратичные задачи

Здесь кратко рассмотрим методы, позволяющие получить зависимости для компонент оптимального управления в виде $u_i^*\left(t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right)$, т.е. *сразу же реализовать управление по принципу обратной связи*.

Поскольку управление по принципу обратной связи является краеугольным камнем в теории систем, то рассмотрение соответствующих методов представляет, с одной стороны, самостоятельный интерес, а с другой — интерес с точки зрения использования положений теории в задачах *двухэтапной оптимизации*.

Решение задач нахождения $u_i^*\left(t,x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t)\right)$ с квадратичным критерием качества можно получить в замкнутой форме. Таким образом, решается проблема конструирования систем, работающих по принципу обратной связи.

Рассмотрим класс линейных объектов, поведение которых описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением вида

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t),\ \mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0. \tag{5.374}$$

Требуется построить управление, обеспечивающее достижение заданного конечного состояния $\mathbf{X}^T = 0$ с наименьшим значением функционала

$$I[\mathbf{U}(t)] = \frac{1}{2}\int_0^T \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right)dt. \qquad (5.375)$$

В уравнении (5.374) матрицы $\mathbf{A}(t)$, $\mathbf{B}(t)$ в общем случае зависят от времени, весовая матрица $\mathbf{Q}(t)$ — симметрична и положительно полуопределена, а весовая матрица $\mathbf{R}(t)$ — симметрична и положительно определена.

Для поставленной задачи характерно следующее:

- в формулировке задачи в явной форме отсутствуют ограничения на управление и фазовые координаты. *Ограничения достигаются с помощью выбора весовых функций* (матриц $\mathbf{Q}(t)$, $\mathbf{R}(t)$). Например, требуемое ограничение на управление $\mathbf{U}(t)$, которое в явной форме не учтено в постановке задачи, может быть обеспечено соответствующим выбором весовой функции $\mathbf{R}(t)$. В общем случае выбор указанных матриц представляет собой сложную задачу;
- поскольку в рассматриваемой задаче управление находится в виде $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(t, \mathbf{X}(t))$, то состояние системы $\mathbf{X}(t)$ или ее выход $\mathbf{X}_{\text{в}}(t)$ доступны для измерения. В общем же случае *к оптимальному регулятору необходимо конструировать наблюдатели состояния, необходимые для получения оценки вектора состояния* $\hat{\mathbf{X}}(t)$;
- сформулированная задача называется задачей детерминированного нестационарного линейного оптимального регулятора (нестационарная задача). Если же все матрицы в постановке задачи **A**, **B**, **C**, **Q**, **R** постоянны, то эта задача называется детерминированной задачей построения линейного оптимального регулятора с постоянными коэффициентами (стационарная задача) [94];
- различают два типа задач: без ограничений на конечное состояние и с фиксированным конечным состоянием. Наиболее часто рассматривается задача о регуляторе нулевого состояния. Ее содержание состоит в том, что система с оптимальной обратной связью должна возвращаться в нуль из любого состояния, причем критерий качества вдоль любого такого движения должен достигать минимума.

Оптимальный закон управления в виде обратной связи по состоянию (или просто оптимальный регулятор) *задается выражением*

$$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}(t)) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t), \qquad (5.376)$$

или

$$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}(t)) = \mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t), \qquad (5.377)$$

где

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t). \qquad (5.378)$$

Обратим внимание на следующее обстоятельство: матрица $\mathbf{K}(t)$, определяющая оптимальное управление, может быть заранее рассчитана один раз, поскольку она не зависит ни от $\mathbf{X}(t)$, ни от $\mathbf{U}(t)$ (в уравнение Риккати, а также в зависимость, определяющую $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}(t))$, входят матрицы, известные по постановке задачи).

Решение рассмотренной задачи существует и единственно (даже в том случае, если объект является полностью неуправляемым). В формулу, определяющую оптимальное управление, входит функция $\mathbf{P}(t)$, являющаяся решением дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t).$$

Последнее является нелинейным, и решить его можно только численным методом или путем моделирования в обратном времени, начиная с момента $t = T$.

Структурная схема системы имеет вид (рис. 5.66). Представляет интерес частный случай, когда $\mathbf{A} = \text{const}$, $\mathbf{B} = \text{const}$, $\mathbf{Q} = \text{const}$, $\mathbf{R} = \text{const}$, $T = \infty$.

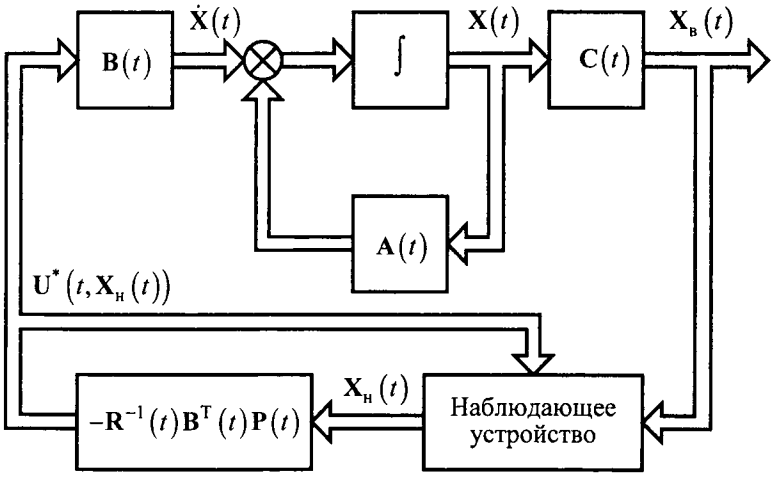


Рис. 5.66. Структурная схема оптимальной системы

Сформулируем результат решения задачи: пусть заданы матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ — положительно определенные матрицы, пара $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ — стабилизируема.

Рассмотрим критерий качества

$$I = \int_0^{\infty} \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{U}\right) dt. \tag{5.379}$$

Существует управление $\mathbf{U}^*\left(t, \mathbf{X}(t)\right)$, которое доставляет минимум критерию качества для системы

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0.$$

Минимизирующее управление в виде обратной связи имеет вид

$$\mathbf{U}^*\left(t, \mathbf{X}(t)\right) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\mathbf{X}(t),$$

где $\mathbf{P}$ — постоянная положительно определенная матрица, определяемая из алгебраического уравнения Риккати

$$-\mathbf{P}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Получено управление с обратной связью, при котором замкнутая система асимптотически устойчива, и критерий качества принимает минимальное значение.

Алгебраическое уравнение Риккати имеет единственное решение, если оно удовлетворяет критерию Сильвестра положительной определенности матрицы $\mathbf{P}$:

$$p_{11} > 0,\ \det\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} > 0, \ldots,\ \det\begin{bmatrix} p_{11} & \cdots & p_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} > 0.$$

Известно, что *проблема модального управления не исчерпывает всей задачи инженерного конструирования регулятора, а реализует этап выбора динамической обратной связи по заданным желаемым собственным числам замкнутой системы. Предполагается, что конструктору известно, какой набор собственных чисел желателен* [4].

Синтез же систем по квадратичному критерию качества позволяет обеспечить асимптотическую устойчивость (при модальном управлении единственным обязательным требованием является устойчивость замкнутой системы, качество же переходного процесса зависит не только от собственных значений, но и от нулей передаточной функции; и в этом смысле модальное управление не является оптимальным) *и в то же время оптимальные характеристики переходного процесса в том смысле, что любое ненулевое начальное состояние переводится в нулевое состояние оптимальным образом. Для стационарных систем этот результат является хорошим дополнением к теории модального управления: любая система, в общем случае, может быть стабилизирована с помощью линейного закона с обратной связью, а полюса можно разместить произвольно. Решение же задачи синтеза оптимальных регуляторов дает метод рационального распределения полюсов.*

Для случая, когда

$$I = \int_0^T \left(\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{U}\right) dt, \tag{5.380}$$

где $\mathbf{A} = \text{const}$, $\mathbf{B} = \text{const}$, $\mathbf{Q} = \text{const}$, $\mathbf{R} = \text{const}$, оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{U}^*\left(t, \mathbf{X}(t)\right) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t), \tag{5.381}$$

где $\mathbf{P}(t)$ зависит от времени и рассчитывается из дифференциального уравнения Риккати.

Аналогичным образом формулируется задача синтеза оптимального линейного регулятора по выходу: рассматривается система вида

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t),\ \ \mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t),\ \ \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0. \tag{5.382}$$

Критерий качества принимает форму

$$I = \int_0^T \left[\mathbf{X}_{\text{в}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\mathbf{Q}}(t)\mathbf{X}_{\text{в}}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right] dt. \tag{5.383}$$

Решение идентично решению рассмотренных выше задач с той лишь разницей, что роль матрицы $\mathbf{Q}$ играет произведение $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{Q}}\mathbf{C}$.

В рассмотренном подходе важную роль играют уравнения Риккати: дифференциальное и алгебраическое. В соответствующей литературе изложены методы решения уравнений (прямой метод интегрирования, метод Калмана–Энглара, метод Ньютона–Рафсона и др.). Матрица $\mathbf{P}(t)$ не только входит в формулу для оптимального управления, но и позволяет оценить значение критерия качества для любых заданных начального состояния и начального момента времени.

В предыдущей постановке задачи синтеза оптимальных систем конечное состояние не фиксировалось. Широкий класс задач предполагает, что управляющее воздействие $\mathbf{U}^*(t)$ *должно обеспечить перевод системы в заданное состояние*

$$\mathbf{X}^T = \left[x_1(T)\ \ x_2(T)\ \ \ldots\ \ x_n(T)\right]^{\mathrm{T}}.$$

Такая задача минимизации квадратичного функционала носит название задачи с фиксированным конечным состоянием, или терминальной задачи.

Линейно-квадратичные задачи поставлены и решены для объектов с распределенными параметрами и с запаздыванием [81].

Рассмотрим задачу синтеза при полной информации о состоянии.

Постановка задачи состоит в следующем.

Рассматривается объект

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t)+\mathbf{N}(t),\ \ \mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0. \tag{5.384}$$

В приведенном уравнении $\mathbf{N}(t)$ — белый шум с интенсивностью $\mathbf{S}_0(t)$. Начальное состояние является случайным, не зависящим от белого шума $\mathbf{N}(t)$. Статистические характеристики определяются соотношениями:

$$M\{\mathbf{N}(t)\}=0;\ \ M\{\mathbf{N}(t_1)\mathbf{N}^{\mathrm{T}}(t_2)\}=\mathbf{S}_0(t_1)\delta(t_2-t_1);$$

$$M\{\mathbf{X}(t)\}=0;\ \ M\left\{\left[\mathbf{X}^0-\bar{\mathbf{X}}^0\right]\left[\mathbf{X}^0-\bar{\mathbf{X}}^0\right]^{\mathrm{T}}\right\}=\mathbf{R}_0.$$

Критерий оптимальности имеет вид (производится осреднение по всем случайным факторам)

$$I=M\left\{\int_0^T\left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right]dt\right\}, \tag{5.385}$$

где $\mathbf{Q}$ — неотрицательно определенная симметричная матрица; $\mathbf{R}$ — положительно определенная симметричная матрица.

Задача построения оптимального управления формулируется так: *определить для любого момента* $t\in[0,T]$ *управление* $\mathbf{U}(t,\mathbf{X}(t))$, *при котором критерий достигает минимума* (эта задача носит название *задачи построения стохастического линейного оптимального регулятора*).

Если в такой постановке задачи все матрицы являются постоянными, то эту *задачу называют задачей построения стохастического линейного оптимального регулятора с постоянной настройкой.*

Решение задачи построения стохастического линейного оптимального регулятора заключается в реализации входного воздействия в виде

$$\mathbf{U}^*(t,\mathbf{X}(t))=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t), \tag{5.386}$$

где симметричная матрица $\mathbf{P}(t)$ — решение матричного дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{\mathbf{P}}(t)=-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{Q}(t). \tag{5.387}$$

Из приведенных соотношений ясно, что оптимальный закон управления $\mathbf{U}^*(t,\mathbf{X}(t))$ не зависит от случайного воздействия $\mathbf{N}(t)$ и от случайных начальных условий $\mathbf{X}^0=\mathbf{X}(0)$. *Случайные факторы влияют лишь на критерий качества: он увеличивается.*

Структурная схема системы приведена выше (она совпадает со схемой, в которой отсутствуют случайные факторы).

Сделаем некоторые замечания по поводу рассмотренной задачи. Использование закона управления $\mathbf{U}(t,\mathbf{X}(t))$ предполагает, что *вектор* $\mathbf{X}(t)$ *можно точно измерить для любого* $t\in[0,T]$. *Такое предположение является нереальным, особенно в стохастическом случае, когда вектор состояния может включать компоненты, описывающие возмущения.*

Преодоление этой трудности состоит в восстановлении $\mathbf{X}(t)$ *по неполным или неточным измерениям. Результат дает только наилучшее линейное решение стохастической задачи. Очевидно, линейный закон является оптимальным, если белый шум* $\mathbf{N}(t)$ *является гауссовским.*

Рассмотрим задачу синтеза стохастических оптимальных систем при неполной информации. Во всех рассмотренных выше теоретических положениях предполагалось, что вектор состояния $\mathbf{X}(t)$ доступен для измерения.

Целесообразно рассмотреть более реальный случай, в котором наблюдения системы являются неполными и неточными, т.е. когда измерить полный вектор состояния нельзя, а доступные измерения содержат шум. Также предполагается, что на систему действуют стохастические возмущения.

Сформулируем постановку задачи: рассматривается система

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{N}_1(t); \quad \mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0, \tag{5.388}$$

где $\mathbf{X}^0$ — стохастический вектор, имеющий $\bar{\mathbf{X}}^0 = M\{\mathbf{X}^0\}$ — математическое ожидание и $M\left\{[\mathbf{X}^0 - \bar{\mathbf{X}}^0][\mathbf{X}^0 - \bar{\mathbf{X}}^0]^{\mathrm{T}}\right\} = \mathbf{D}_{00}$ — матрицу дисперсий; случайный процесс $\mathbf{N}_1(t)$ — гауссовский белый шум с характеристиками

$$M\{\mathbf{N}_1(t)\} = 0; \quad M\left\{\mathbf{N}_1(t_1)\mathbf{N}_1^{\mathrm{T}}(t_2)\right\} = \mathbf{S}_1(t_1)\delta(t_2 - t_1).$$

Наблюдаемая переменная описывается выражением

$$\mathbf{X}_{\text{в}}(t) = \mathbf{C}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}_2(t),$$

где $\mathbf{N}_2(t)$ — гауссовский белый шум с характеристиками

$$M\{\mathbf{N}_2(t)\} = 0; \quad M\left\{\mathbf{N}_2(t_1)\mathbf{N}_2^{\mathrm{T}}(t_2)\right\} = \mathbf{S}_2(t_1)\delta(t_2 - t_1).$$

Случайные факторы $\mathbf{X}^0$, $\mathbf{N}_1(t)$ и $\mathbf{N}_2(t)$ — не коррелированы.

Тогда задача синтеза стохастического линейного оптимального регулятора с обратной связью при неполной информации является задачей нахождения

$$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}(t)), \; 0 \le t \le T,$$

при котором критерий оптимальности

$$I = M\left\{\int_0^T \left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right]dt\right\} \tag{5.389}$$

достигает минимума.

Матрицы $\mathbf{R}(t)$ и $\mathbf{Q}(t)$ — положительно определены.

Результат решения задачи: *оптимальный закон управления определяется зависимостью* [68, 81, 94]

$$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}_0(t)) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}_0(t), \tag{5.390}$$

где $\mathbf{P}(t)$ — матрица, определяемая из уравнения

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t); \tag{5.391}$$

$\mathbf{X}_0(t)$ — линейная оптимальная оценка вектора состояния, получаемая с помощью наблюдателей Калмана–Бьюси.

Таким образом, *оптимальное линейное решение задачи синтеза стохастического линейного оптимального регулятора с обратной связью при неполной информации*

является точно таким же, как в детерминированной задаче синтеза оптимальных систем и в задаче синтеза стохастических линейных оптимальных систем управления с полной информацией.

Разница заключается в том, что в двух предыдущих случаях вектор состояния определяется с помощью идентификаторов состояния (наблюдателей), в последнем же случае — с помощью специальных фильтров, называемых *наблюдателями Калмана–Бьюси.*

Очевидно, *задача синтеза оптимальной системы состоит из двух независимых подзадач: синтеза детерминированного оптимального регулятора и синтеза наблюдателей Калмана–Бьюси. Этот результат называют принципом разделения.* Структурная схема системы представлена на рис. 5.67.

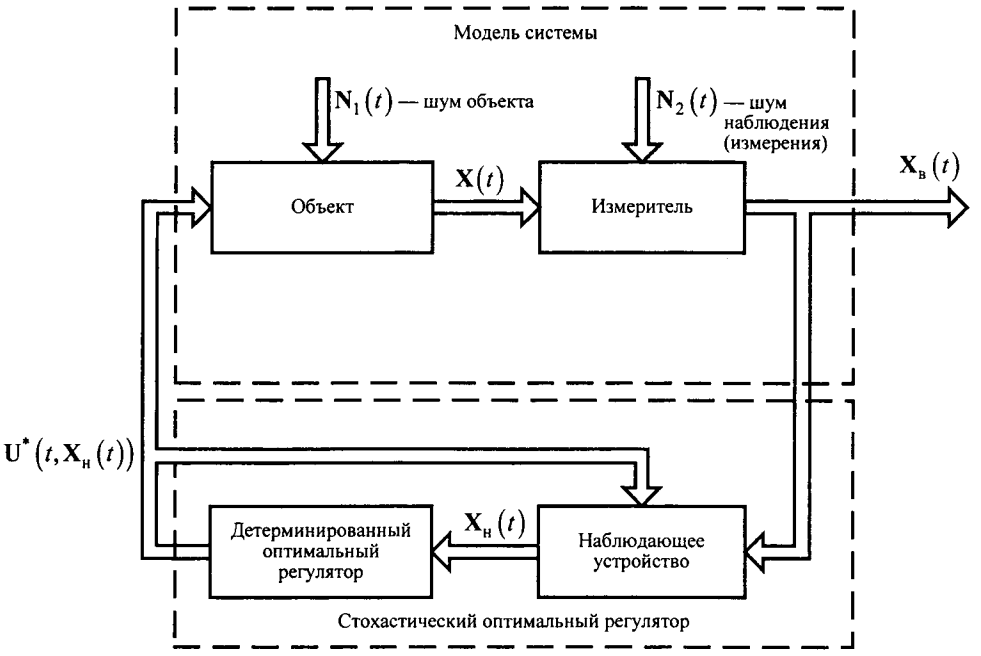


Рис. 5.67. Структурная схема оптимальной системы

5.7.2. Применение решения линейно-квадратичных задач для синтеза оптимальных нелинейных систем, работающих по принципу обратной связи

Кратко остановимся на свойствах управляемости, стабилизируемости и нормализуемости нелинейных объектов. Напомним, что *свойство стабилизируемости линейных объектов заключается в том, что с помощью регулятора в цепи обратной связи все неустойчивые моды могут быть сделаны устойчивыми.* Очевидно, *устойчивый объект стабилизируется тривиальным образом, а всякий управляемый объект стабилизируем. Нормализуемость же представляет собой наиболее сильную форму управляемости* (каждая компонента вектор-функции $\mathbf{U} = \left[u_1(t) \ \ldots \ u_m(t)\right]^{\mathrm{T}}$ в отдельности обеспечивает управляемость объекта). Для линейных объектов получены критерии управляемости, стабилизируемости и нормализуемости [81].

Строгие же условия управляемости, стабилизируемости и нормализуемости найдены лишь для некоторых классов нелинейных объектов. Линеаризация нелиней-

ных уравнений объекта во многих случаях позволяет установить наличие или отсутствие указанных выше свойств [81].

Пример 5.28 [81]. Рассмотрим нелинейный объект, поведение которого описывается дифференциальными уравнениями вида

$$\frac{dx_1}{dt} = -x_1 - Da_1 x_1^2 + u_1, \tag{5.392}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = Da_1 x_f^2 - x_2 - Da_3 (x_2)^{1/2} + u_2. \tag{5.393}$$

Проведем линеаризацию этих уравнений в окрестности установившегося состояния x_{1s}, x_{2s}, задаваемого уравнениями $u_{1s} = 1$, $u_{2s} = 0$. Обозначим $\hat{x}_i = x_i - x_{is}$, $\hat{u}_i = u_i - u_{is}$ $(i = 1, 2)$. Разложим уравнения (5.392), (5.393) в ряд Тейлора, пренебрегая членами выше первого порядка. Результат с учетом введенных обозначений запишется в форме

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = -(1 + 2Da_1 x_{1s})\hat{x}_1 + \hat{u}_1, \tag{5.394}$$

$$\frac{dx_2}{dt} = (2Da_1 x_{1s})\hat{x}_1 - \left[1 + 1/2(Da_3 / x_{2s})^{1/2}\right]\hat{x}_2 + \hat{u}_2, \tag{5.395}$$

где x_{1s}, x_{2s} — решения уравнений, определяющих установившееся состояние:

$$\begin{aligned} 0 &= -x_{1s} - Da_1 x_{1s}^2 + 1, \\ 0 &= Da_1 x_{1s}^2 - x_{2s} - Da_3 (x_{2s})^{1/2}, \end{aligned} \tag{5.396}$$

или, в векторно-матричной форме, $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{AX} + \mathbf{BU}$, где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -(1 + 2Da_1 x_{1s}) & 0 \\ 2Da_1 x_{1s} & -\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{Da_3}{(x_{2s})^{1/2}}\right) \end{bmatrix}, \tag{5.397}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{5.398}$$

Критерий управляемости состоит в том, что ранг матрицы управляемости должен быть равен 2. Имеем

$$\mathbf{L}_c = [\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB}] = \left[\begin{array}{cc:cc} 1 & 0 & -(1 + 2Da_1 x_{1s}) & 0 \\ 0 & 1 & 2Da_1 x_{1s} & -\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{Da_3}{(x_{2s})^{1/2}}\right) \end{array}\right].$$

Очевидно, rank $\mathbf{L}_c = 2$, из чего следует, что нелинейный объект будет управляемым в любом установившемся состоянии.

Нелинейный же объект, описываемый системой дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = -x_1 - Da_1 x_1^2 + d_1, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = Da_1 x_1^2 - x_2 - Da_3 (x_2)^{1/2} + u_1, \end{cases}$$

не является управляемым, поскольку ранг матрицы управляемости

$$\mathbf{L}_c = [\mathbf{B} \vdots \mathbf{AB}] = \left[\begin{array}{cc:c} & & 0 \\ 0 & \vdots & \\ 1 & \vdots & -\left(1 + \dfrac{1}{2}\dfrac{Da}{(x_{2s})^{1/2}}\right) \end{array}\right]$$

равен единице.

Далее обратимся к задаче синтеза оптимальной обратной связи.

Выше был подробно рассмотрен вопрос синтеза линейных систем по интегральному квадратичному критерию. *Принципиальным фактором при решении линейно-квадратичных задач является возможность синтезировать системы, работающие по принципу обратной связи.* Эти результаты можно использовать для синтеза опти-

мальных нелинейных систем, работающих по принципу обратной связи. Далее изложим алгоритм решения этой задачи [1, 81].

Расчет оптимальной программной траектории, исходящей из начального состояния $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0$. Пусть нелинейный объект описывается векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{X}}=\mathbf{F}(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t)),\ \ \mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0 \tag{5.399}$$

с критерием оптимальности

$$I=g_0(\mathbf{X}(T))+\int_0^T f_0(\mathbf{X}(t),\mathbf{U}(t))dt. \tag{5.400}$$

Для решения этой задачи можно применять методы математического программирования, подробно рассмотренные выше. Вместе с тем разработано большое число алгоритмов, основу которых составляет совокупность необходимых условий оптимальности.

Выбор того или другого алгоритма расчета оптимальной программы $\mathbf{X}^*(t)$ определяется конкретным содержанием задачи.

Линеаризация в окрестности оптимальной программы $\mathbf{X}^*(t)$ **и программного управления** $\mathbf{U}^*(t)$. Для вариации функционала путем разложения выражения (5.400) в ряд Тейлора в окрестности $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ можно получить зависимость

$$\begin{aligned}\delta I=&\frac{\partial g_0}{\partial \mathbf{X}}\bigg|_T^*\delta\mathbf{X}(T)+\frac{1}{2}\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(T)\frac{\partial^2 g_0}{\partial\mathbf{X}^2}\bigg|_T^*\delta\mathbf{X}(T)-\\&-\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(T)\delta\mathbf{X}(T)+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(0)\delta\mathbf{X}(0)+\int_0^T\left[\frac{\partial H}{\partial\mathbf{U}}\bigg|^*\delta\mathbf{U}+\frac{1}{2}\delta\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{U}^2}\bigg|_T^*\delta\mathbf{U}+\frac{\partial H}{\partial\mathbf{X}}\bigg|_T^*\delta\mathbf{X}+\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{X}^2}\bigg|^*\delta\mathbf{X}+\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{U}}\bigg|^*\delta\mathbf{U}+\frac{d\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}}{dt}\delta\mathbf{X}\right]dt,\end{aligned} \tag{5.401}$$

где $\delta\mathbf{X}=\mathbf{X}-\mathbf{X}^*$, $\delta\mathbf{U}=\mathbf{U}-\mathbf{U}^*$, $H=f_0+\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{F}$. Положим, что $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ удовлетворяют необходимым условиям оптимальности первого порядка [81]:

$$\frac{\partial H}{\partial\mathbf{U}^*}=0,\ \ \frac{d\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial\mathbf{X}}\bigg|^*\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}(T)=\left[\frac{\partial g_0}{\partial\mathbf{X}}(T)\right]^*, \tag{5.402}$$

причем предполагается, что $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0$ задано $\left(\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^*(0)\right)$, а $\mathbf{X}(T)$ свободно. В этом случае $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ определяют оптимальную программу и оптимальную траекторию. Тогда выражение (5.401) принимает вид

$$\begin{aligned}\delta I=&\int_0^T\left[\frac{1}{2}\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{U}^2}\bigg|^*\delta\mathbf{U}+\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{X}\partial\mathbf{U}}\bigg|^*\delta\mathbf{U}+\right.\\&\left.+\frac{1}{2}\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 H}{\partial\mathbf{X}^2}\bigg|^*\delta\mathbf{X}\right]dt+\frac{1}{2}\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(T)\frac{\partial^2 g_0}{\partial\mathbf{X}^2}\bigg|_T^*\delta\mathbf{X}(T).\end{aligned} \tag{5.403}$$

С учетом свойства нелинейности объекта, оптимальная программа $\mathbf{X}^*(t)$ и оптимальное программное управление $\mathbf{U}^*(t)$ рассчитываются для каждого начального состояния $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0$. Для решения этой задачи можно применить линеаризацию уравнения (5.399) в окрестности $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ при $\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0$. В результате будет иметь место *уравнение в вариациях для возмущенного движения* [1, 81].

Кратко опишем соответствующий алгоритм. Для компонент вектор-функций $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{U}^*(t)$ справедливы соотношения

$$x_i(t)=x_i^*(t)+\delta x_i(t),\ i=\overline{1,n},\ \text{и}\ u_k(t)=u_k^*(t)+\delta u_k(t),\ k=\overline{1,m}.$$

Таким образом, $\mathbf{U}^*(t)$ и $\mathbf{X}^*(t)$ — оптимальное управление и оптимальная программная траектория, $\mathbf{X}(t)=\mathbf{X}^*(t)+\delta\mathbf{X}(t)$, $\mathbf{U}(t)=\mathbf{U}^*(t)+\delta\mathbf{U}(t)$ — вектор-функции, характеризующие реальное движение, определяемое уравнением (5.399). Положим, что $\delta x_i(0)$, $i=\overline{1,n}$, — случайные погрешности при реализации заданных начальных условий, для которых имеет место неравенство

$$\sum_{i=1}^{n}\delta x_i^2(0)\le\varepsilon^2, \tag{5.404}$$

где ε — известное число.

При проведении всех последующих рассуждений полагается, что *малость начальных отклонений, определенных неравенством* (5.404), *гарантирует малость отклонений* $\mathbf{X}(t)$ *от* $\mathbf{X}^*(t)$ *на интервале управления* $[0,T]$, *т.е. при всех* $t\in[0,T]$.

Запишем уравнения, описывающие отклонения реального движения от программного; имеем

$$\begin{aligned}\dot{x}_i^*(t)+\delta\dot{x}_i(t)=f_i\big(&x_1^*(t)+\delta x_1(t),\ldots,\ x_n^*(t)+\delta x_n(t),\\ &u_1^*(t)+\delta u_1(t),\ldots,\ u_m^*(t)+\delta u_m(t),t\big),\ i=\overline{1,n}.\end{aligned} \tag{5.405}$$

Поскольку

$$\dot{x}_i^*(t)=f_i\big(x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t),\ u_1^*(t),\ldots,u_m^*(t),\ t\big),\ i=\overline{1,n}, \tag{5.406}$$

то следующие уравнения определяют возмущенное движение

$$\delta\dot{x}_i^*(t)=\delta f_i\big(\delta x_1(t),\ldots,\ \delta x_n(t),\ \delta u_1(t),\ldots,\ \delta u_m(t),\ t\big),\ i=\overline{1,n}, \tag{5.407}$$

где

$$\begin{aligned}&\delta f_i\big(\delta x_1(t),\ldots,\ \delta x_n(t),\ \delta u_1(t),\ldots,\ \delta u_m(t),\ t\big)=\\ &=f_i\big(x_1^*(t)+\delta x_1(t),\ldots,\ x_n^*(t)+\delta x_n,\ u_1^*(t)+\delta u_1,\ldots,\ u_m^*(t)+\delta u_m,\ t\big)-\\ &\qquad-f_i\big(x_1^*,\ldots,\ x_n^*,\ u_1^*,\ldots,\ u_m^*,\ t\big).\end{aligned}$$

Путем разложения функции δf_i, $i=\overline{1,n}$, в ряд Тейлора в окрестности точки $\big(x_1^*,\ldots,\ x_n^*,\ u_1^*,\ldots,\ u_m^*\big)$ получим

$$\delta\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{F}_{\mathbf{X}}'\big|^*\,\delta\mathbf{X}+\mathbf{F}_{\mathbf{U}}'\big|^*\,\delta\mathbf{U}+o(\delta\mathbf{X}), \tag{5.408}$$

где

$$\mathbf{F}_{\mathbf{X}}'\Big|^{*} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}\Big|^{*} & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big|^{*} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\Big|^{*} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}\Big|^{*} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}\Big|^{*} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\Big|^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1}\Big|^{*} & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2}\Big|^{*} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_n}\Big|^{*} \end{bmatrix}, \tag{5.409}$$

$$\mathbf{F}_{\mathbf{U}}'\Big|^{*} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial u_1}\Big|^{*} & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_2}\Big|^{*} & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial u_m}\Big|^{*} \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial u_1}\Big|^{*} & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_2}\Big|^{*} & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial u_m}\Big|^{*} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n}{\partial u_1}\Big|^{*} & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_2}\Big|^{*} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial u_m}\Big|^{*} \end{bmatrix}. \tag{5.410}$$

В приведенных выше формулах символ $\Big|^{*}$ означает, что частные производные находятся в точке $x_i = x_i^*$, $i = \overline{1,n}$, $u_k = u_k^*$, $k = \overline{1,m}$; а $o_i(\delta x_1, \ldots, \delta x_n, \delta u_1, \ldots, \delta u_m, t)$, $i = \overline{1,n}$, — зависимость, характеризующая члены второго порядка малости.

Пренебрегая членами второго порядка малости $o(\delta\mathbf{X})$, уравнение (5.408) можно переписать так

$$\frac{d}{dt}\left(\delta\mathbf{X}(t)\right) = \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{X}}\Big|^{*}\delta\mathbf{X} + \frac{\partial\mathbf{F}}{\partial\mathbf{U}}\Big|^{*}\delta\mathbf{U},\ \ \delta\mathbf{X}(0) = \delta\mathbf{X}^0. \tag{5.411}$$

Как уже отмечалось, это уравнение описывает движение объекта для начальных условий, удовлетворяющих неравенству $|\delta\mathbf{X}(0)| < \varepsilon$. Очевидно, качество управления изменится; степень изменения, обусловленного возмущениями, можно рассчитать по формуле (5.411).

Систему дифференциальных уравнений (5.411), описывающую отклонение фактического движения объекта $\mathbf{X}(t)$ от оптимальной программы $\mathbf{X}^*(t)$, можно записать в виде

$$\delta\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\delta}\delta x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^{\delta}\delta u_k,\ \ i = \overline{1,n},$$

где

$$a_{ij}^{\delta} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}\Big|^{*},\ \ b_{ik}^{\delta} = \frac{\partial f_i}{\partial u_k}\Big|^{*}.$$

Синтез оптимальной обратной связи. С помощью приведенных выше рассуждений исходная нелинейная задача (5.399) и (5.400) свелась к линейной задаче (5.411). Положим, что функционал, характеризующий степень близости траекторий $\mathbf{X}(t)$ и $\mathbf{X}^*(t)$ на промежутке $[0, T]$, является квадратичным

$$I = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i \delta x_i^2(t) \right\} dt, \tag{5.412}$$

а на управление ограничения не налагаются.

Поскольку система (5.411) является линейной, а задача минимизации функционала (5.412) является *линейно-квадратичной задачей* относительно неизвестных $\delta\mathbf{X}(t)$ и $\delta\mathbf{U}(t)$, то ее решение имеет вид

$$\delta\mathbf{U}(t) = \mathbf{K}(t)\delta\mathbf{X}(t). \tag{5.413}$$

Последняя формула отражает факт управления по принципу обратной связи по отклонениям от программы $\delta x_i(t) = x_i(t) - x_i^*(t)$, $i = \overline{1,n}$. Таким образом, по формуле (5.413) можно рассчитать стабилизирующие управления $\delta u_1(t)$, $\delta u_2(t)$,..., $\delta u_m(t)$, минимизирующие критерий (5.412) и уменьшающие расстояние (в смысле критерия (5.412)) между $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{X}(t)$.

Если найдены компоненты стабилизирующего управления $\delta u_1(t)$, $\delta u_2(t)$,..., $\delta u_m(t)$, то компоненты результирующей вектор-функции управления определяются зависимостями $u_k(t) = u_k^*(t) + \delta u_k(t)$, $k = \overline{1,m}$.

В практических задачах компоненты $u_k^*(t)$ обеспечивают основное движение системы, а компоненты $\delta u_k(t)$ парируют малые отклонения от программного движения, обеспечивая, если $T \to \infty$, устойчивость и требуемую точность реализации программного движения. Поэтому обычно выполнено неравенство [1]

$$\left|u_k^*(t)\right| \geq \left|\delta u_k(t)\right|, \; k = \overline{1,m}.$$

Если на стабилизирующее управление накладывается ограничение вида

$$\int_0^T \delta u_k^2(t)\, dt \leq I_{yk}^*, \; k = \overline{1,m},$$

то критерием, определяющим качество стабилизации, может служить функционал [1]

$$I = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_i \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \delta u_k^2 \right\} dt. \tag{5.414}$$

Поскольку введены критерии, характеризующие степень близости $\mathbf{X}^*(t)$ и $\mathbf{X}(t)$, то *функции*

$$\delta u_k(t) = r_k\left[\delta x_1(t),\, \delta x_2(t),\ldots,\, \delta x_n(t)\right], \; k = \overline{1,m}, \tag{5.415}$$

при которых на движениях системы (5.411), *возбужденных произвольными начальными отклонениями из множества* (5.404), *показатель качества принимает наименьшее значение, называются компонентами оптимального стабилизирующего управления* (при $T \to \infty$ оптимальное стабилизирующее управление при принятых условиях обеспечивает асимптотическую устойчивость системы).

В результате проведенных рассуждений найдены компоненты (5.415) управления с обратной связью, при котором при начальных условиях, удовлетворяющих неравенству (5.404), квадратичный критерий качества (5.414) принимает минимальное значение [1]. Важным является тот факт, что оптимальная программа $\mathbf{X}^*(t)$ рассчитывается с учетом знания вектора $\mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \;\; \ldots \;\; x_n(0)\right]^{\mathrm{T}}$, таким образом, матрица $\mathbf{K}(t)$ в формуле (5.413) также не зависит от $\mathbf{X}^0$.

Расчет же стабилизирующего управления не требует измерения реальных начальных условий, необходимо лишь выполнение условия (5.404) (малость начальных отклонений). Приведем алгоритм реализации рассмотренного выше подхода [1, 81]:

- вычисляется и запоминается набор оптимальных программ $\mathbf{U}^*(t)$, $\mathbf{X}^*(t)$ для достаточно грубой сетки начальных условий $\mathbf{X}^0$;
- вычисляется и запоминается матричный коэффициент $\mathbf{K}(t)$ усиления регулятора, обеспечивающего оптимальную коррекцию;
- формируется текущее управляющее воздействие $\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^*(t) + \mathbf{K}(t)\delta\mathbf{X}(t)$.

Структурная схема оптимальной системы, работающей по принципу обратной связи, представлена на рис. 5.68.

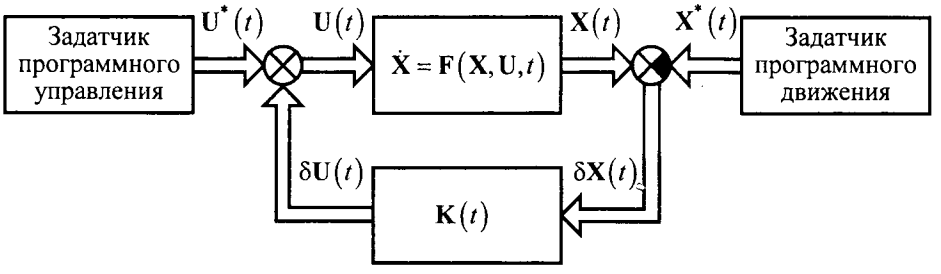


Рис. 5.68. Структурная схема замкнутой нелинейной оптимальной системы

При наличии внешних возмущений $\mathbf{N}(t) = \left[n_1(t) \quad \ldots \quad n_s(t)\right]^{\mathrm{T}}$ уравнение (5.399) имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{N}, t). \tag{5.416}$$

Из последнего уравнения можно получить

$$\delta\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\delta}(t)\,\delta x_j + \sum_{k=1}^{m} b_{ik}^{\delta}(t)\,\delta u_k + \sum_{\nu=1}^{s} \psi_{i\nu}^{\delta}(t)\,\delta n_\nu, \quad i = \overline{1,n}, \tag{5.417}$$

где

$$\psi_{i\nu}(t) = \left.\frac{\partial f_i}{\partial n_\nu}\right|^*, \quad i = \overline{1,n}, \ \nu = \overline{1,s}.$$

Можно указать следующие случаи, определяемые объемом информации о δn_ν:

- о вектор-функции $\mathbf{N}(t)$ имеется полная информация, например, компоненты $n_k(t)$ могут быть точно измерены в процессе движения объекта;
- известны статистические характеристики процессов $\delta n_\nu(t)$, $\nu = \overline{1,s}$;
- известно, что $|\delta n_\nu(t)| \le \delta\overline{n}_\nu$, $\nu = \overline{1,s}$, т.е. функции $\delta n_\nu(t)$ ограничены известными числами.

В зависимости от указанных трех факторов используется следующая классификация оптимальных систем [1]:

- равномерно-оптимальные;
- статистически-оптимальные;
- минимаксно-оптимальные.

В первом случае мерой эффективности стабилизирующего управления служит интеграл вида

$$I = \int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_{ii} \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{kk} \delta u_k^2 \right\} dt, \tag{5.418}$$

а во втором случае — интеграл

$$I = M\left[\int_0^T \left\{ \sum_{i=1}^{n} q_{ii} \delta x_i^2 + \sum_{k=1}^{m} \gamma_{kk} \delta u_k^2 \right\} dt \right]; \tag{5.419}$$

стабилизирующие управления находятся из условия минимума функционалов (5.418) и (5.419) на решениях системы (5.417).

В третьем случае, когда информация о $\mathbf{N}(t)$ отсутствует, находит применение *игровой подход* к определению оптимального управления, обеспечивающий наилучший результат при наихудшем внешнем воздействии. Соответствующие системы получили название минимаксно-оптимальных [1].

Остановимся на некоторых обстоятельствах, которые необходимо учитывать при решении задачи синтеза оптимальной нелинейной системы с помощью рассмотренного здесь алгоритма, в основу которого положены следующие ключевые моменты:

- известна оптимальная программа $\mathbf{X}^*(t)$;
- задача сводится с помощью линеаризации в окрестности программной траектории $\mathbf{X}^*(t)$ к синтезу оптимальной линейной системы по интегральному квадратичному критерию.

Одно из обстоятельств состоит в том, что *алгоритм предполагает гладкость характеристик нелинейных элементов*. Другое обстоятельство — *отсутствие ограничений на* $\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}(t))$ *и* $\mathbf{X}(t)$, т.е. *на управление и фазовые переменные ограничения не накладываются*.

При теоретическом обосновании рассмотренного подхода для решения конкретных задач *важным является обоснование факта малости отклонения* $\mathbf{X}(t)$ *от* $\mathbf{X}^*(t)$ *для всех* $t \in [0, T]$, *если имеет место малость начальных отклонений*. Рассмотренная схема имеет весьма широкое распространение; ее же *теоретическое обоснование требует проведения соответствующих исследований*.

Особенности оптимальных систем программного управления и стабилизации. Рассмотрим более подробно связь и различие программного и стабилизирующего управлений. В связи с этим рассмотрим структурную схему реализации этих управлений (рис. 5.68), на которой объект управления описывается уравнениями (5.399), а регулятор реализует стабилизирующие управления (5.415). Объект вместе с задатчиками программного управления и движения образует систему программного управления, а объект вместе с регулятором — систему стабилизации программного движения. На рис. 5.68 не показаны исполнительные и измерительные устройства, которые включены в модель объекта.

Различие способа функционирования системы программного управления и системы стабилизации состоит в следующем [1].

1. Для первой из этих систем начальные условия известны до начала проектирования, а для второй начальные условия неизвестны, известно лишь, что они находятся в пределах, устанавливаемых неравенством (5.404).
2. В первом случае функции управления являются явными функциями времени, а во втором — функциями измеряемых переменных состояния (а в общем случае и вре-

мени). Таким образом, в первом случае управление осуществляется по разомкнутому циклу, а во втором — по принципу обратной связи.

3. Эффективность работы системы программного управления оценивается функционалом качества (5.400), в котором функция $f_0(\mathbf{X},\mathbf{U},t)$ определяетя физической природой объекта управления.

   В системе стабилизации критерий качества (5.414) ее функционирования часто не связан с физической природой объекта управления, а его коэффициенты q_{ii}, $i=\overline{1,n}$, определяются исходя из инженерных соображений (времени переходного процесса от истинного движения к программному, перерегулирования при этом движении, установившейся ошибки в осуществлении программного движения и т.п.). Однако в теории оптимального управления полагают критерий (5.414), аналогично (5.400), заданным, оставляя вопросы выбора его коэффициентов (а в общем случае и структуры) за пределами этой теории.

4. При построении стабилизирующего управления (5.415) обычно используют уравнения первого приближения (5.411). Это объясняется тем, что стабилизирующее управление предназначено для уменьшения отклонений δx_i, $i=\overline{1,n}$, а при малых значениях этих отклонений уравнения (5.408) и (5.411) имеют близкие решения, так как функции o_i, $i=\overline{1,n}$, зависят от квадратов, кубов и т.д. этих отклонений, и поэтому эти функции можно опустить.

Линейный характер уравнений первого приближения существенно упрощает процедуры построения стабилизирующих управлений (5.415). *Использование же уравнений первого приближения при построении программного управления, как правило, недопустимо.*

В заключение отметим, что для измерения переменных состояния необходимо использовать наблюдающие устройства. В общем случае, свойство наблюдаемости нелинейных объектов установить весьма сложно. Поэтому на практике используют линеаризованные уравнения: линеаризуют уравнения объекта в окрестности $\mathbf{X}^*(t)$, а затем уже применяют стандартные критерии наблюдаемости для линейных нестационарных систем.

Отметим также, что в [68] рассмотрены задачи синтеза приближенно оптимальных (субоптимальных) обратных связей при следующих гипотезах:

- гипотеза слабой управляемости объекта;
- гипотеза слабой нелинейности;
- гипотеза о разных скоростях изменения переменных состояния.

5.7.3. Применение решения линейно-квадратичных задач для синтеза оптимальных линейных систем, работающих по принципу обратной связи

Рассмотрим линейный (в общем случае нестационарный) объект управления, описываемый дифференциальным уравнением в форме Коши

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t). \tag{5.420}$$

Пусть заданы начальное

$$\mathbf{X}(0)=\mathbf{X}^0 \tag{5.421}$$

и конечное

$$\mathbf{X}(T)=\mathbf{X}^T \tag{5.422}$$

состояния объекта (5.420). Пусть решена задача построения оптимального программного управления $\mathbf{U}^*(t)$, переводящего объект из начального состояния (5.421) в конечное (5.422) и доставляющего экстремум заданному функционалу качества

$$I(\mathbf{U}^*) = \int_0^T f_0(\mathbf{X}^*(t), \mathbf{U}^*(t))dt = \underset{\mathbf{U}\in U^m \subset R^m}{\text{extr}} I(\mathbf{U}) \tag{5.423}$$

при выполнении заданных ограничений на управление и фазовые координаты

$$\begin{cases} \mathbf{U} \in U^m \subset R^m, \\ \mathbf{X} \in X^n \subset R^n. \end{cases} \tag{5.424}$$

Оптимальному программному управлению $\mathbf{U}^*(t)$ соответствует оптимальная программа $\mathbf{X}^*(t)$.

Реальное (истинное) движение системы всегда отличается от программного по следующим причинам [1]:

1) начальные условия (5.421) заданы неточно;
2) отсутствует полная информация о внешних возмущениях, действующих на систему;
3) программное управление реализовано неточно.

Пусть реальное движение описывается функциями

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*(t) + \delta\mathbf{X}(t), \quad \mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^*(t) + \delta\mathbf{U}(t), \tag{5.425}$$

где $\delta\mathbf{X}(t)$ — отклонение (возмущение) фактического движения от программного, $\delta\mathbf{U}(t)$ — отклонения реального управления от программного. Пусть $\delta x_i(0)$, $i = \overline{1,n}$, — случайные погрешности при реализации заданных начальных условий, для которых выполняется неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} \delta x_i^2(0) \le \varepsilon^2, \tag{5.426}$$

где ε — известное число.

Будем предполагать, что малые начальные отклонения, определенные неравенством (5.426), вызывают лишь малые отклонения $\mathbf{X}(t)$ от $\mathbf{X}^*(t)$ на интервале управления $[0,T]$.

Рассмотрим алгоритм решения задачи стабилизации линейного нестационарного объекта вблизи заданной программной траектории. Поскольку $\delta\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t)$, $\delta\dot{\mathbf{X}}(t) = \dot{\mathbf{X}}(t) - \dot{\mathbf{X}}^*(t)$, $\delta\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}(t) - \mathbf{U}^*(t)$, то уравнение возмущенного движения для рассматриваемого случая имеет вид

$$\delta\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\delta\mathbf{U}(t), \quad \delta\mathbf{X}(0) = \delta\mathbf{X}^0. \tag{5.427}$$

Решения уравнения (5.427) при начальных условиях из множества (5.426) описывают отклонения реального движения от программного в каждый момент времени. Для количественной характеристики этих отклонений будем использовать критерий качества стабилизации

$$I = \delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(T)\mathbf{P}_T\delta\mathbf{X}(T) + \int_0^T \left\{\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\delta\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}\delta\mathbf{U}(t)\right\}dt, \tag{5.428}$$

где постоянные матрицы $\mathbf{Q} = \operatorname{diag}\{q_i\}$, $q_i > 0$, $i = \overline{1,n}$; $\mathbf{R} = \operatorname{diag}\{r_i\}$, $r_i > 0$, $i = \overline{1,m}$; $\mathbf{P}_T = \operatorname{diag}\{p_i^T\}$, $p_{ii}^T > 0$, $i = \overline{1,n}$. Функционал (5.428) представляет собой взвешенную с помощью весовых (штрафных) матриц $\mathbf{Q}$, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{P}_T$ сумму площадей, ограниченных квадратом отклонений реальных фазовых траекторий и управлений от программных, и является мерой их близости.

Задача минимизации функционала (5.428) является *линейно-квадратичной задачей* относительно неизвестных $\delta\mathbf{X}(t)$ и $\delta\mathbf{U}(t)$, а ее решение — оптимальное стабилизирующее управление — имеет вид

$$\delta\mathbf{U}(t) = \mathbf{K}(t)\delta\mathbf{X}(t), \tag{5.429}$$

где

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t). \tag{5.430}$$

В последнем выражении матрица $\mathbf{P}(t)$ является решением дифференциального уравнения Риккати

$$\dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q} \tag{5.431}$$

при условии

$$\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}_T. \tag{5.432}$$

Для нахождения матрицы $\mathbf{P}(t)$ уравнение Риккати (5.431) следует интегрировать в обратном времени, поскольку условие (5.432) определяет значение матрицы $\mathbf{P}(t)$ при $t = T$.

Если найдено стабилизирующее управление (5.429), то результирующее управление определяется зависимостью

$$\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^*(t) + \delta\mathbf{U}(t) = \mathbf{U}^*(t) + \mathbf{K}(t)\delta\mathbf{X}(t). \tag{5.433}$$

Структурная схема оптимальной системы, работающей по принципу обратной связи, представлена на рис. 5.69.

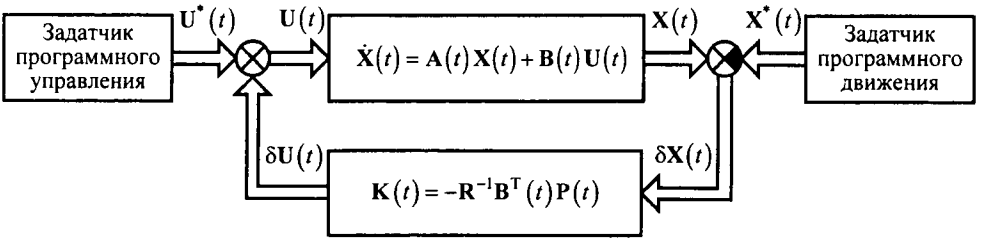


Рис. 5.69. Структурная схема замкнутой линейной оптимальной системы

Рассмотренный алгоритм стабилизирует движение линейной нестационарной системы (5.420) вблизи оптимальных программных траекторий $\mathbf{X}^*(t)$ на *конечном* интервале времени $[0, T]$. Решим теперь аналогичную задачу на *полубесконечном* временном интервале $t \in [0, \infty)$ для линейного *стационарного* объекта

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t). \tag{5.434}$$

Известно [71], что если линейная *стационарная* система (5.434) является *полностью управляемой и наблюдаемой*, то решение уравнения Риккати (5.431) при

$T \to \infty$ стремится к установившемуся решению $\overline{\mathbf{P}}$, не зависящему от $\mathbf{P}_T$, и определяется следующим алгебраическим уравнением:

$$\mathbf{0} = -\overline{\mathbf{P}}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}} + \overline{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}. \tag{5.435}$$

Функционал качества для данной задачи имеет вид

$$I = \int_0^{\infty} \left\{ \delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\delta\mathbf{X}(t) + \delta\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}\delta\mathbf{U}(t) \right\} dt. \tag{5.436}$$

Оптимальное значение функционала (5.436) равно

$$I_{\min} = \left[\delta\mathbf{X}^0\right]^{\mathrm{T}} \overline{\mathbf{P}}\delta\mathbf{X}^0$$

и является квадратичной функцией от начальных значений отклонения вектора состояния.

Таким образом, получаем, что при $T = \infty$ оптимальное стабилизирующее управление приобретает форму *стационарной* обратной связи по состоянию

$$\delta\mathbf{U}(t) = \overline{\mathbf{K}}\delta\mathbf{X}(t), \quad \overline{\mathbf{K}} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}}, \tag{5.437}$$

где $\overline{\mathbf{P}}$ — решение *алгебраического* матричного уравнения Риккати (5.435).

Перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

Пример 5.29. Управление положением ротора двигателя постоянного тока (см. пример 5.6 из п. 5.4.2).

Постановка задачи построения оптимального программного управления и оптимальных программ: при заданном уравнении объекта управления

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t), \tag{5.438}$$

отсутствии ограничений на управление $u(t)$ и фазовый вектор $\mathbf{X}(t)$, заданных краевых условиях

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^0 &= \begin{bmatrix} -2 & -10 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \\ \mathbf{X}^T &= \begin{bmatrix} 5 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \end{aligned} \tag{5.439}$$

времени управления $T = 14$ с требуется найти такое управление $u(t)$ и фазовые траектории $x_1(t)$, $x_2(t)$, при которых функционал качества, характеризующий энергию управления:

$$I(u) = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u.$$

Расчет оптимального программного управления выполнялся методами математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов (см. пример 5.15 из п. 5.5.2). Решение осуществлялось в базисе ортонормированных на интервале [0,14] полиномов Лежандра, размерность базиса принималась равной 10.

Следующие соотношения определяют оптимальное программное управление и оптимальные программы, полученные с помощью конечномерной оптимизации:

$$\begin{aligned} u^*(t) &= 0{,}1095691132 \cdot 10^{-19} \cdot t^9 - 0{,}6902854128 \cdot 10^{-18} \cdot t^8 + 0{,}2049034294 \cdot 10^{-12} \cdot t^7 - \\ &- 0{,}9320783501 \cdot 10^{-11} \cdot t^6 + 0{,}1669435799 \cdot 10^{-9} \cdot t^5 - 0{,}1491175270 \cdot 10^{-8} \cdot t^4 + \\ &+ 0{,}6927732939 \cdot 10^{-8} \cdot t^3 - 0{,}1580064935 \cdot 10^{-7} \cdot t^2 - 0{,}3061224347 \cdot t + 2{,}928571429; \\ x_1^*(t) &= 0{,}2845626646 \cdot 10^{-14} \cdot t^9 - 0{,}1664378153 \cdot 10^{-12} \cdot t^8 + 0{,}3974792409 \cdot 10^{-11} \cdot t^7 - \\ &- 0{,}4970544002 \cdot 10^{-10} \cdot t^6 + 0{,}3463847692 \cdot 10^{-9} \cdot t^5 - 0{,}1316715415 \cdot 10^{-8} \cdot t^4 - \\ &- 0{,}05102040579 \cdot t^3 + 1{,}464285712 \cdot t^2 - 9{,}999999999 \cdot t - 1{,}999999994; \\ x_2^*(t) &= -0{,}4625017567 \cdot 10^{-33} \cdot t^9 + 0{,}2561063982 \cdot 10^{-13} \cdot t^8 - 0{,}1331502523 \cdot 10^{-11} \cdot t^7 + \\ &+ 0{,}2782354686 \cdot 10^{-10} \cdot t^6 - 0{,}2982326401 \cdot 10^{-9} \cdot t^5 + 0{,}1731923846 \cdot 10^{-8} \cdot t^4 - \\ &- 0{,}5266861660 \cdot 10^{-8} \cdot t^3 - 0{,}1530612172 \cdot t^2 + 2{,}928571428 \cdot t - 9{,}999999996. \end{aligned}$$

Решим задачу стабилизации объекта управления (5.438) вблизи рассчитанных оптимальных программных траекторий на полубесконечном временном интервале $[0,\infty)$. В качестве характеристики отклонений реального движения системы от программного будем использовать критерий качества стабилизации

$$I=\int_0^{\infty}\left\{\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\delta\mathbf{X}(t)+r\left[\delta u(t)\right]^2\right\}dt \tag{5.440}$$

при следующих значениях весовых матриц:

$$\mathbf{Q}=\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 100\end{bmatrix},\quad r=100.$$

Матрицы системы (5.438) определяются выражениями

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}.$$

Для сформулированной линейно-квадратичной задачи алгебраическое уравнение Риккати имеет вид

$$-\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{100}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22}\end{bmatrix}-$$
$$-\begin{bmatrix}100 & 0\\ 0 & 100\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Его решение равно

$$\bar{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}1{,}7321\cdot10^2 & 1{,}0000\cdot10^2\\ 1{,}0000\cdot10^2 & 1{,}7321\cdot10^2\end{bmatrix}.$$

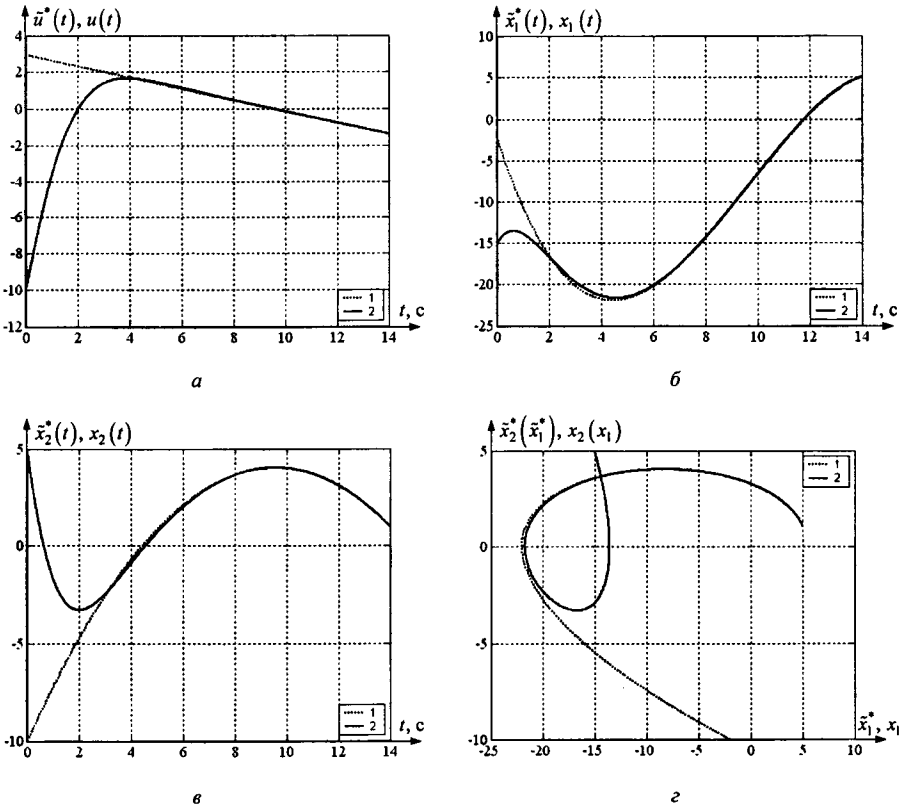


Рис. 5.70. *а* — графики оптимального программного управления $\tilde{u}^*(t)$ (1, пунктир) и результирующего управления $u(t)$ замкнутой системы (2, сплошная линия), *б–в* — графики оптимальных программных фазовых траекторий $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, пунктир) и реального движения системы $x_1(t)$, $x_2(t)$ (2, сплошная линия), *г* — фазовый портрет системы: пунктир — программное движение, сплошная линия — реальное

Рассчитаем вектор коэффициентов усиления регулятора:

$$\bar{\mathbf{K}} = -\frac{1}{100}\cdot\begin{bmatrix}0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1{,}7321\cdot 10^2 & 1{,}0000\cdot 10^2\\ 1{,}0000\cdot 10^2 & 1{,}7321\cdot 10^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1{,}0000 & -1{,}7321\end{bmatrix}. \tag{5.441}$$

Оптимальное стабилизирующее управление определяется выражением

$$\delta u(t) = -\delta x_1(t) - 1{,}7321\cdot\delta x_2(t), \tag{5.442}$$

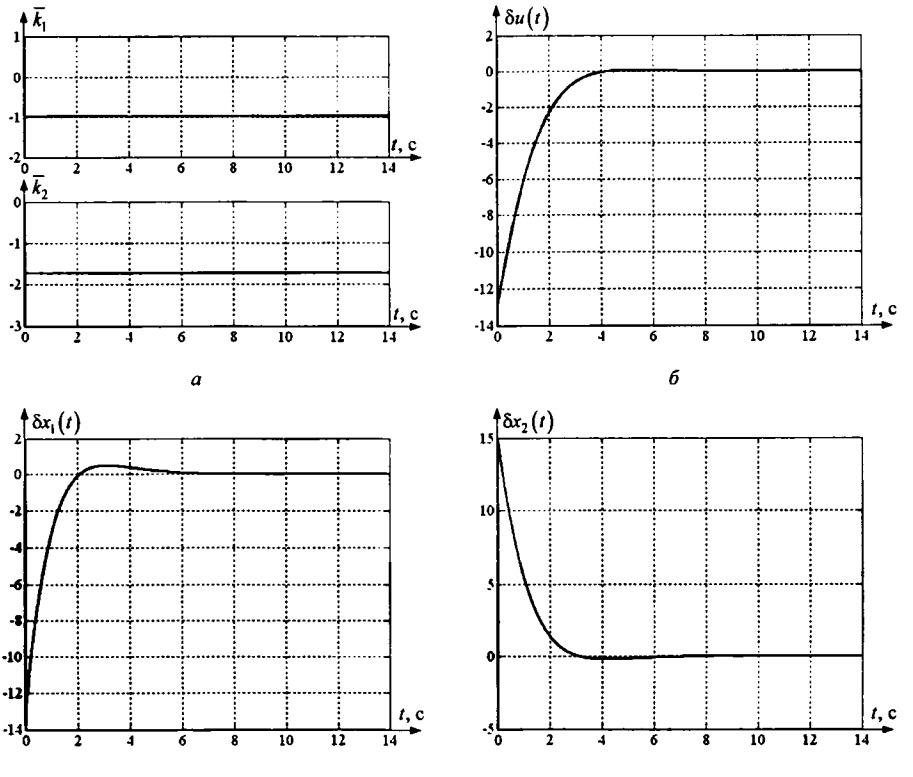
где $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$ — отклонения реального движения системы от программного. Оптимальное результирующее управление для системы (5.438) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t) = {} & 0{,}1095691132\cdot 10^{-19}\cdot t^9 - 0{,}6902854128\cdot 10^{-18}\cdot t^8 + 0{,}2049034294\cdot 10^{-12}\cdot t^7 - \\ & -0{,}9320783501\cdot 10^{-11}\cdot t^6 + 0{,}1669435799\cdot 10^{-9}\cdot t^5 - 0{,}1491175270\cdot 10^{-8}\cdot t^4 + \\ & +0{,}6927732939\cdot 10^{-8}\cdot t^3 - 0{,}1580064935\cdot 10^{-7}\cdot t^2 - 0{,}3061224347\cdot t + 2{,}928571429 - \\ & -\delta x_1(t) - 1{,}7321\cdot\delta x_2(t). \end{aligned} \tag{5.443}$$

Приведем результаты решения задачи. Реальное движение системы моделировалось с использованием разностной схемы решения дифференциальных уравнений — метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0{,}001$ с. Представленные результаты соответствуют вектору отклонения начальных условий

$$\delta\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix}-13 & -15\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.444}$$

Графики результирующего управления (4.443), оптимального программного управления, оптимальных программных, а также реальных фазовых траекторий изображены на рис. 5.70. На рис. 5.71 приводятся графики коэффициентов усиления регулятора, стабилизирующего управления (5.442) и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$.



а *б* *в* *г*

Рис. 5.71. *а* — графики коэффициентов усиления регулятора $\bar{k}_1$ и $\bar{k}_2$,
б — график стабилизирующего оптимального управления $\delta u(t)$,
в–г — графики отклонений реального движения системы от программного

Решим задачу стабилизации объекта управления (5.438) вблизи рассчитанных оптимальных программных траекторий на конечном временном интервале $[0,T]$. В качестве характеристики отклонений реального движения системы от программного будем использовать критерий качества стабилизации

$$I = \delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(T)\mathbf{P}_T\delta\mathbf{X}(T) + \int_0^T \left\{\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\delta\mathbf{X}(t) + r\left[\delta u(t)\right]^2\right\}dt \tag{5.445}$$

при значениях весовых матриц

$$\mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} 100 & 100 \\ 100 & 100 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}, \quad r = 100.$$

Для данной линейно-квадратичной задачи дифференциальное уравнение Риккати имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{100} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}. \tag{5.446}$$

Решение уравнения (5.446) осуществлялось интегрированием в обратном времени при начальных условиях $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}_T$ с использованием разностной схемы Адамса–Башфорта–Моултона с шагом $h = 0{,}001$. Графики решений уравнения Риккати (5.446) приводятся на рис. 5.72.

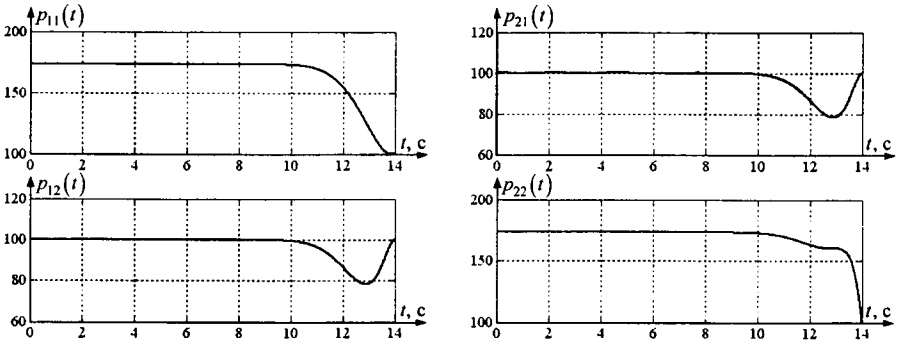


Рис. 5.72. Графики решений дифференциального уравнения Риккати (5.446)

Вектор коэффициентов усиления регулятора определяется выражением

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{1}{100}\begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{P}(t) = -\left[0{,}01p_{21}(t) \quad 0{,}01p_{22}(t)\right].$$

Оптимальное стабилизирующее управление имеет вид

$$\delta u(t) = -0{,}01p_{21}(t)\delta x_1(t) - 0{,}01p_{22}(t)\delta x_2(t). \tag{5.447}$$

Приведем результаты решения задачи. Реальное движение системы моделировалось с использованием метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0{,}001$ с. Представленные результаты соответствуют вектору отклонения начальных условий (5.444). Графики результирующего управления, оптимального программного управления, оптимальных программных, а также реальных фазовых траекторий изображены на рис. 5.73. На рис. 5.74 приводятся графики коэффициентов усиления регулятора, стабилизирующего управления (5.447) и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$.

Из сравнительного анализа графиков на рис. 5.73, 5.74 и на рис. 5.70, 5.71 можно сделать вывод, что результаты решения задачи стабилизации объекта управления (5.438) вблизи заданных оптимальных программных траекторий на конечном временном интервале $[0,T]$ и на полубесконечном $[0,\infty)$ практически не отличаются. Это объясняется тем, что в данном случае коэффициенты усиления регулятора $k_1(t)$ и $k_2(t)$ проявляют переменный характер лишь в конце интервала управления $[0,T]$, когда отклонения реального движения системы от оптимальной программы близки к нулю. В связи с этим фактом для данного примера более целесообразной видится стабилизация на полубесконечном интервале $[0,\infty)$, поскольку в таком случае как решение задачи, так и реализация регулятора являются менее сложными.

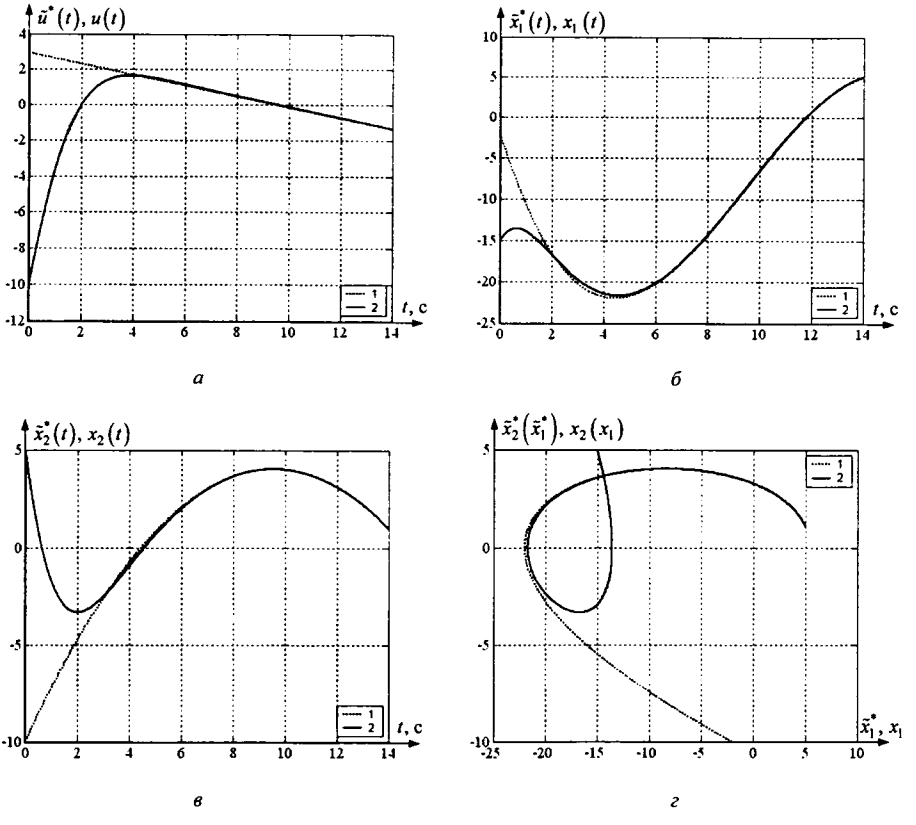


Рис. 5.73. *а* — графики оптимального программного управления $\tilde{u}^*(t)$ (1, пунктир) и результирующего управления $u(t)$ замкнутой системы (2, сплошная линия), *б–в* — графики оптимальных программных фазовых траекторий $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, пунктир) и реального движения системы $x_1(t)$, $x_2(t)$ (2, сплошная линия), *г* — фазовый портрет системы: пунктир — программное движение, сплошная линия — реальное

Изменим теперь некоторые условия задачи. Пусть при построении оптимального программного управления по критерию минимальной энергии на фазовые траектории объекта управления накладывались ограничения

$$x_1(t) \geq -10, \quad x_2(t) \leq 1 \quad \forall t \in [0,14]. \tag{5.448}$$

Для оптимального программного управления и оптимальных программ при ограничениях (5.448) в базисе ортонормированных полиномов Лежандра размерностью $l = 14$ были получены выражения

$$\begin{aligned}\tilde{u}^*(t) = {} & 0,1118740105 \cdot 10^{-5} \cdot t^{10} - 1,106868822 \cdot t - 0,5870468967 \cdot 10^{-2} \cdot t^7 + \\ & + 0,03171508019 \cdot t^6 + 0,5933065600 \cdot 10^{-3} \cdot t^8 + 2,184800311 \cdot t^3 - \\ & - 0,3458152591 \cdot t^4 - 0,05491564790 \cdot t^5 - 0,3484350763 \cdot 10^{-4} \cdot t^9 + \\ & + 0,3318929209 \cdot 10^{-19} \cdot t^{13} - 0,3136697356 \cdot 10^{-17} \cdot t^{12} - 0,1522675563 \cdot 10^{-7} \cdot t^{11} - \\ & - 3,943122775 \cdot t^2 + 8,031806785;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{x}_1^*(t) = {} & 0,6592295115 \cdot 10^{-5} \cdot t^{10} - 10,00000000 \cdot t - 0,1307515428 \cdot 10^{-2} \cdot t^7 - \\ & - 0,01152717533 \cdot t^6 + 0,5663407181 \cdot 10^{-3} \cdot t^8 - 0,1844781364 \cdot t^3 - \\ & - 0,3285935646 \cdot t^4 + 0,1092400154 \cdot t^5 - 0,8153429124 \cdot 10^{-4} \cdot t^9 - 0,9760740873 \cdot 10^{-10} \cdot t^{13} + \\ & + 0,8475303845 \cdot 10^{-8} \cdot t^{12} - 0,3167591608 \cdot 10^{-6} \cdot t^{11} + 4,015903393 \cdot t^2 - 2,000000002;\end{aligned}$$

$$\tilde{x}_2^*(t) = -0,3484350769\cdot10^{-5}\cdot t^{10} + 8,031806784\cdot t + 0,4530725746\cdot10^{-2}\cdot t^7 -$$
$$-0,9152608003\cdot10^{-2}\cdot t^6 - 0,7338086215\cdot10^{-3}\cdot t^8 - 1,314374257\cdot t^3 + 0,5462000769\cdot t^4 -$$
$$-0,06916305168\cdot t^5 + 0,6592295117\cdot10^{-4}\cdot t^9 - 0,8959367413\cdot10^{-20}\cdot t^{13} -$$
$$-0,1268896313\cdot10^{-8}\cdot t^{12} + 0,1017036462\cdot10^{-6}\cdot t^{11} - 9,999999997 - 0,5534344118\cdot t^2.$$

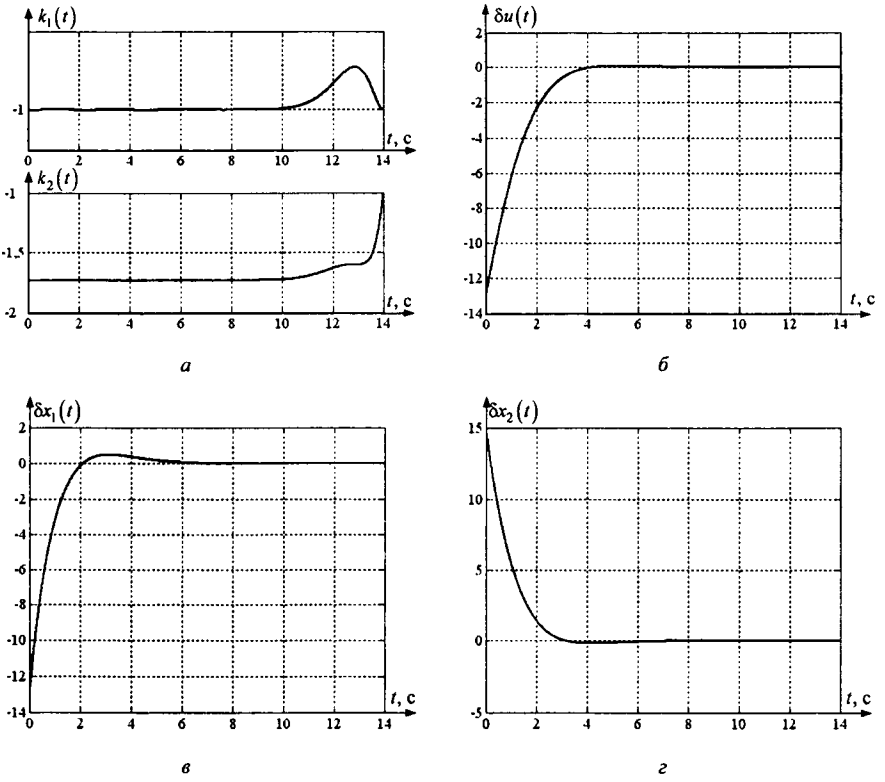


Рис. 5.74. *а* — графики коэффициентов усиления регулятора $k_1(t)$ и $k_2(t)$,
б — график стабилизирующего оптимального управления $\delta u(t)$,
в–г — графики отклонений реального движения системы от программного

Для решения задачи стабилизации движения объекта управления вблизи оптимальных программных траекторий используем результаты, полученные для полубесконечного временного интервала $[0,\infty)$. Постоянные коэффициенты усиления регулятора определяются выражением (5.441), оптимальное стабилизирующее управление — формулой (5.442). Оптимальное результирующее управление для системы (5.438) имеет вид

$$u(t) = 0,1118740105\cdot10^{-5}\cdot t^{10} - 1,106868822\cdot t - 0,5870468967\cdot10^{-2}\cdot t^7 +$$
$$+0,03171508019\cdot t^6 + 0,5933065600\cdot10^{-3}\cdot t^8 + 2,184800311\cdot t^3 -$$
$$-0,3458152591\cdot t^4 - 0,05491564790\cdot t^5 - 0,3484350763\cdot10^{-4}\cdot t^9 + \qquad (5.449)$$
$$+0,3318929209\cdot10^{-19}\cdot t^{13} - 0,3136697356\cdot10^{-17}\cdot t^{12} - 0,1522675563\cdot10^{-7}\cdot t^{11} -$$
$$-3,943122775\cdot t^2 + 8,031806785 - \delta x_1(t) - 1,7321\cdot\delta x_2(t),$$

где $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$ — отклонения реальных траекторий системы от оптимальных программ.

Ниже приводятся результаты решения задачи при ограничениях на программное управление (5.448). Реальное движение системы моделировалось с использованием разностной схемы решения дифференциальных уравнений — метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0,001$ с. Представленные результаты соответствуют вектору отклонения начальных условий

$$\delta\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} -6 & -8 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \qquad (5.450)$$

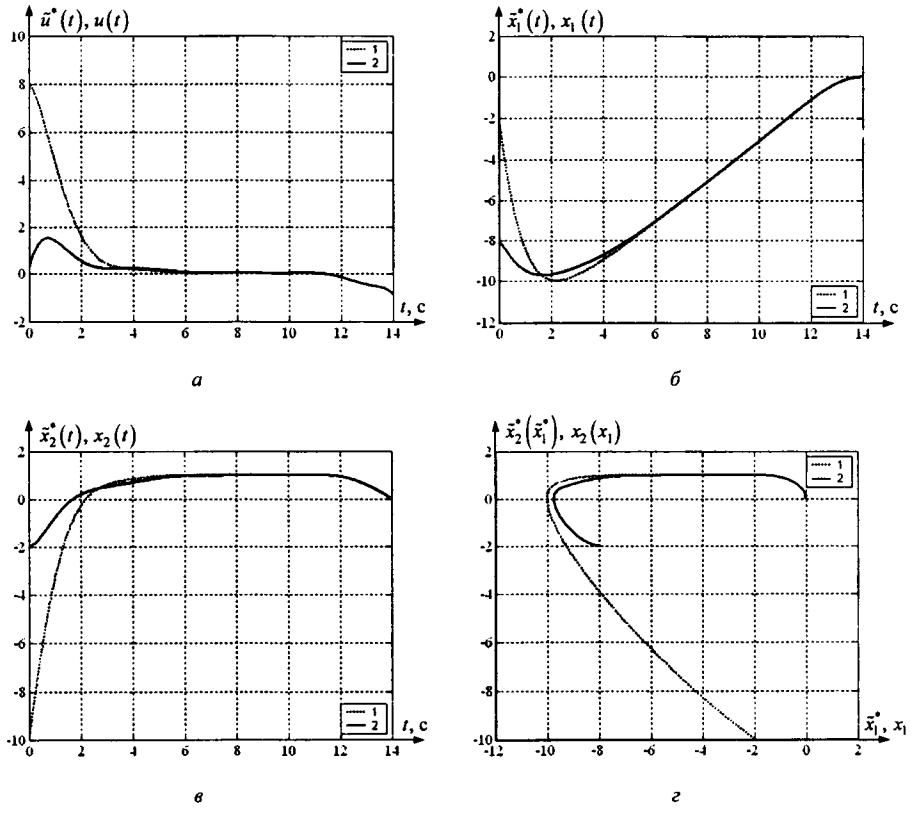


Рис. 5.75. *а* — графики оптимального программного управления $\tilde{u}^*(t)$ (1, пунктир) и результирующего управления $u(t)$ замкнутой системы (2, сплошная линия), *б–в* — графики оптимальных программных фазовых траекторий $\tilde{x}_1^*(t)$, $\tilde{x}_2^*(t)$ (1, пунктир) и реального движения системы $x_1(t)$, $x_2(t)$ (2, сплошная линия), *г* — фазовый портрет системы: пунктир — программное движение, сплошная линия — реальное

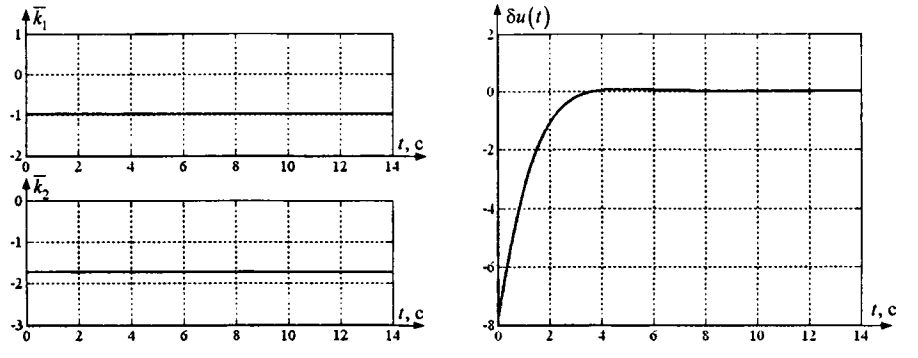
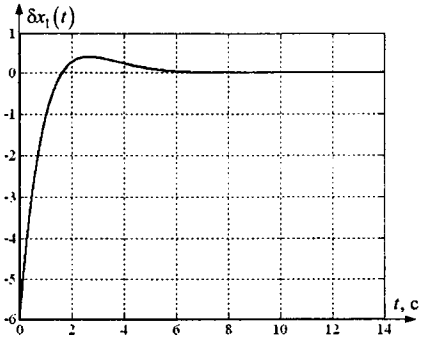
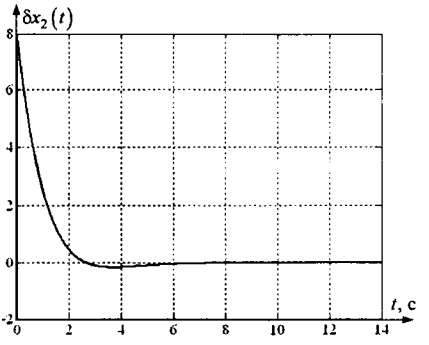


Рис. 5.76. *а* — графики коэффициентов усиления регулятора $k_1(t)$ и $k_2(t)$, *б* — график стабилизирующего оптимального управления $\delta u(t)$, *в–г* — графики отклонений реального движения системы от программного



в



г

Продолжение рис. 5.76

Графики результирующего управления (5.449), оптимального программного управления, оптимальных программных, а также реальных фазовых траекторий изображены на рис. 5.75. На рис. 5.76 приводятся графики коэффициентов усиления регулятора, стабилизирующего управления (5.442) и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$.

Пример 5.30. Стыковка космических объектов (см. пример 5.17 из п. 5.5.2).

При решении задачи были выбраны обозначения: $x_1 = L_1$ — горизонтальная координата цели (первого объекта), $x_2 = v_1$ — скорость горизонтального перемещения цели, $x_3 = L_2$ — горизонтальная скорость перехватчика (второго объекта), $x_4 = v_2$ — скорость горизонтального перемещения перехватчика, $x_5 = \delta$ — перемещение управляющего органа реактивной двигательной установки перехватчика, $u(t)$ — закон управления ускорением перехватчика, α_1 — постоянное горизонтальное ускорение цели.

Постановка задачи построения оптимального программного управления и оптимальных программ: перевести объект управления

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\\ \dot{x}_3(t)\\ \dot{x}_4(t)\\ \dot{x}_5(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3{,}3333\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -33{,}3333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\\ x_3(t)\\ x_4(t)\\ x_5(t)\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 0\\ 10\end{bmatrix} u(t) + \begin{bmatrix}0\\ \alpha_1\\ 0\\ 0\\ 0\end{bmatrix} \tag{5.451}$$

из начального состояния $\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix}x_{10} & \dots & x_{50}\end{bmatrix}^T$ в конечное состояние $\mathbf{X}^T$ за промежуток времени $[0, T]$, при этом функционал качества

$$I = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u. \tag{5.452}$$

Были выбраны следующие значения констант:

- $\alpha_1 = 0$ (цель движется без ускорения),
- $T = 30$ с (время процесса стыковки),
- $x_{10} = L_{10} = 1200$ м (начальная координата цели),
- $x_{20} = v_{10} = 8000$ м/с (начальная скорость цели),
- $x_{30} = L_{20} = 1000$ м (начальная координата перехватчика),
- $x_{40} = v_{20} = 8000$ м/с (начальная скорость перехватчика),
- $x_{50} = 0$.

Конечные условия:

- $x_{1T} = x_{3T}$ (координаты перехватчика и цели совпадают),
- $x_{2T} = x_{4T}$ (скорости перехватчика и цели совпадают).

Ограничения на управление и фазовые траектории не накладывались.

Расчет оптимального программного управления проводился методами математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов. Решение осуществлялось в базисе ортонормированных на интервале [0,30] полиномов Лежандра, размерность базиса принималась равной 16.

Для координаты цели и ее скорости были получены зависимости

$$L_1(t) = 8000 \cdot t + 1200,$$

$$v_1(t) = 8000.$$

Следующие соотношения определяют оптимальное программное управление и оптимальные программы, полученные с помощью конечномерной оптимизации:

$$\tilde{u}^*(t) = 4,32904952867 \cdot t + 2,83761910190 \cdot t^3 + 0,00224609925152 \cdot t^7 + 0,228718282153 \cdot 10^{-12} \cdot t^{13} +$$
$$+0,641743841621 \cdot 10^{-5} \cdot t^9 - 0,445108646322 \cdot 10^{-10} \cdot t^{12} - 0,194970011061 \cdot 10^{-6} \cdot t^{10} +$$
$$+0,384931503214 \cdot 10^{-8} \cdot t^{11} - 5,10152116060 \cdot t^2 + 0,182205446816 \cdot t^5 + 0,366010658931 \cdot 10^{-28} \cdot t^{15} -$$
$$-0,0244081747774 \cdot t^6 - 0,143975704017 \cdot 10^{-3} \cdot t^8 - 0,146500820195 \cdot 10^{-22} \cdot t^{14} -$$
$$-0,905663781035 \cdot t^4 + 0,139532068725;$$

$$\tilde{L}_2(t) = 7999,99999999 \cdot t + 0,775178158691 \cdot t^3 + 0,444488434770 \cdot 10^{-2} \cdot t^7 + 0,247780194821 \cdot 10^{-10} \cdot t^{13} +$$
$$+0,316815705802 \cdot 10^{-4} \cdot t^9 - 0,148670896144 \cdot 10^{-8} \cdot t^{12} - 0,161915897776 \cdot 10^{-5} \cdot t^{10} +$$
$$+0,588755643257 \cdot 10^{-7} \cdot t^{11} + 0,9012437669 \cdot 10^{-9} \cdot t^2 + 0,147482954250 \cdot t^5 + 0,108913466231 \cdot 10^{-14} \cdot t^{15} -$$
$$-0,0311222183798 \cdot t^6 - 0,444414287325 \cdot 10^{-3} \cdot t^8 - 0,245055299297 \cdot 10^{-12} \cdot t^{14} -$$
$$-0,447249206069 \cdot t^4 + 1000,00000056;$$

$$\tilde{v}_2^*(t) = -1,78899682616 \cdot t^3 - 0,355531430364 \cdot 10^{-2} \cdot t^7 - 0,343077421248 \cdot 10^{-11} \cdot t^{13} -$$
$$-0,161915898092 \cdot 10^{-4} \cdot t^9 + 0,322114254620 \cdot 10^{-9} \cdot t^{12} + 0,647631209125 \cdot 10^{-6} \cdot t^{10} -$$
$$-0,178405075918 \cdot 10^{-7} \cdot t^{11} + 2,32553447870 \cdot t^2 - 0,186733310493 \cdot t^5 - 0,976121766612 \cdot 10^{-24} \cdot t^{15} +$$
$$+0,0311141904730 \cdot t^6 + 0,285134135689 \cdot 10^{-3} \cdot t^8 + 0,163370201541 \cdot 10^{-13} \cdot t^{14} + 8000,00000001 +$$
$$+0,737414772046 \cdot t^4;$$

$$\tilde{\delta}^*(t) = 1,39532068722 \cdot t - 0,280099965740 \cdot t^4 + 0,194289362737 \cdot 10^{-5} \cdot t^9 - 1,61009714356 \cdot t^2 +$$
$$+0,686154846476 \cdot 10^{-13} \cdot t^{13} + 0,684321925651 \cdot 10^{-3} \cdot t^7 + 0,115961131664 \cdot 10^{-8} \cdot t^{11} +$$
$$+0,0560055428515 \cdot t^5 - 0,588736750527 \cdot 10^{-7} \cdot t^{10} - 0,133800194287 \cdot 10^{-10} \cdot t^{12} - 0,00746616003762 \cdot t^6 +$$
$$+0,147094928355 \cdot 10^{-28} \cdot t^{15} - 0,437172924844 \cdot 10^{-4} \cdot t^8 - 0,439585758564 \cdot 10^{-23} \cdot t^{14} +$$
$$+0,884897726455 \cdot t^3 + 0,4 \cdot 10^{-12}.$$

Введем новые переменные состояния. Пусть теперь $x_1 = L_2$, $x_2 = v_2$ и $x_3 = \delta$. Движение перехватчика в процессе стыковки описывается дифференциальным уравнением в форме Коши

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3,3333 \\ 0 & 0 & -33,3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t), \tag{5.453}$$

при начальных условиях

$$\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} 1000 & 8000 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.454}$$

Проведем стабилизацию объекта управления (5.453) вблизи полученных оптимальных программных траекторий на полубесконечном временном интервале $[0,\infty)$. Характеристику отклонений реального движения перехватчика от программного (критерий качества стабилизации) выберем в виде

$$I = \int_0^\infty \left\{ \delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\delta\mathbf{X}(t) + r\left[\delta u(t)\right]^2 \right\} dt \tag{5.455}$$

при значениях весовых матриц

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix}, \quad r = 10^4.$$

Матрицы системы (5.453) есть

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3,3333 \\ 0 & 0 & -33,3333 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix}.$$

Для данной линейно-квадратичной задачи алгебраическое уравнение Риккати имеет вид

$$-\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \bar{p}_{13}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \bar{p}_{23}\\ \bar{p}_{31} & \bar{p}_{32} & \bar{p}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3{,}3333\\ 0 & 0 & -33{,}3333\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 3{,}3333 & -33{,}3333\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \bar{p}_{13}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \bar{p}_{23}\\ \bar{p}_{31} & \bar{p}_{32} & \bar{p}_{33}\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \bar{p}_{13}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \bar{p}_{23}\\ \bar{p}_{31} & \bar{p}_{32} & \bar{p}_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 10\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{10^4}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\bar{p}_{11} & \bar{p}_{12} & \bar{p}_{13}\\ \bar{p}_{21} & \bar{p}_{22} & \bar{p}_{23}\\ \bar{p}_{31} & \bar{p}_{32} & \bar{p}_{33}\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}10^3 & 0 & 0\\ 0 & 10^3 & 0\\ 0 & 0 & 10^3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Его решение есть

$$\bar{\mathbf{P}}=\begin{bmatrix}2{,}7413\cdot10^3 & 3{,}2573\cdot10^3 & 3{,}1623\cdot10^2\\ 3{,}2573\cdot10^3 & 8{,}8344\cdot10^3 & 8{,}6687\cdot10^2\\ 3{,}1623\cdot10^2 & 8{,}6687\cdot10^2 & 1{,}0018\cdot10^2\end{bmatrix}.$$

Рассчитаем вектор коэффициентов усиления регулятора:

$$\bar{\mathbf{K}}=-\frac{1}{10^4}\cdot\begin{bmatrix}0 & 0 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2{,}7413\cdot10^3 & 3{,}2573\cdot10^3 & 3{,}1623\cdot10^2\\ 3{,}2573\cdot10^3 & 8{,}8344\cdot10^3 & 8{,}6687\cdot10^2\\ 3{,}1623\cdot10^2 & 8{,}6687\cdot10^2 & 1{,}0018\cdot10^2\end{bmatrix}= \tag{5.456}$$

$$=\begin{bmatrix}-0{,}031623 & -0{,}86687 & -0{,}10018\end{bmatrix}.$$

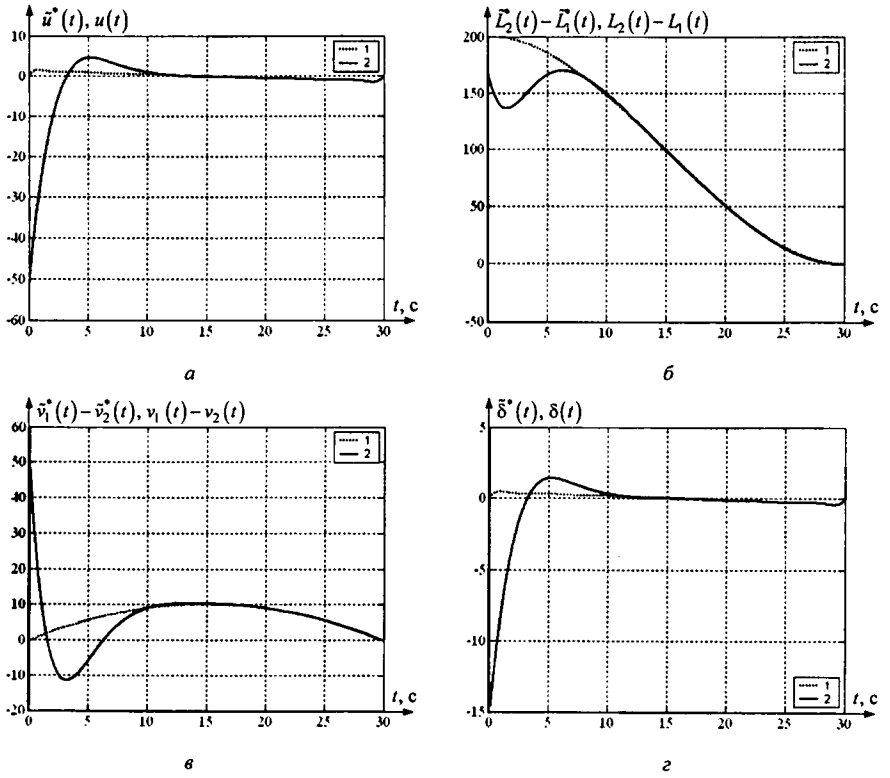


Рис. 5.77. Оптимальное программное (1, пунктир) и реальное (2, сплошная линия) управление и движение системы «цель–перехватчик»

Оптимальное стабилизирующее управление имеет вид

$$\delta u(t)=-0{,}31623\cdot\delta x_1(t)-0{,}86687\cdot\delta x_2(t)-0{,}10018\cdot\delta x_3(t), \tag{5.457}$$

где $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$ и $\delta x_3(t)$ — отклонения реального движения системы от программного. Оптимальное результирующее управление для системы (5.453) определяется выражением

$$u(t) = 4,32904952867 \cdot t + 2,83761910190 \cdot t^3 + 0,00224609925152 \cdot t^7 + 0,228718282153 \cdot 10^{-12} \cdot t^{13} +$$
$$+0,641743841621 \cdot 10^{-5} \cdot t^9 - 0,445108646322 \cdot 10^{-10} \cdot t^{12} - 0,194970011061 \cdot 10^{-6} \cdot t^{10} +$$
$$+0,384931503214 \cdot 10^{-8} \cdot t^{11} - 5,10152116060 \cdot t^2 + 0,182205446816 \cdot t^5 + 0,366010658931 \cdot 10^{-28} \cdot t^{15} -$$
$$-0,0244081747774 \cdot t^6 - 0,143975704017 \cdot 10^{-3} \cdot t^8 - 0,146500820195 \cdot 10^{-22} \cdot t^{14} - 0,905663781035 \cdot t^4 +$$
$$+0,139532068725 - 0,31623 \cdot \delta x_1(t) - 0,86687 \cdot \delta x_2(t) - 0,10018 \cdot \delta x_3(t).$$

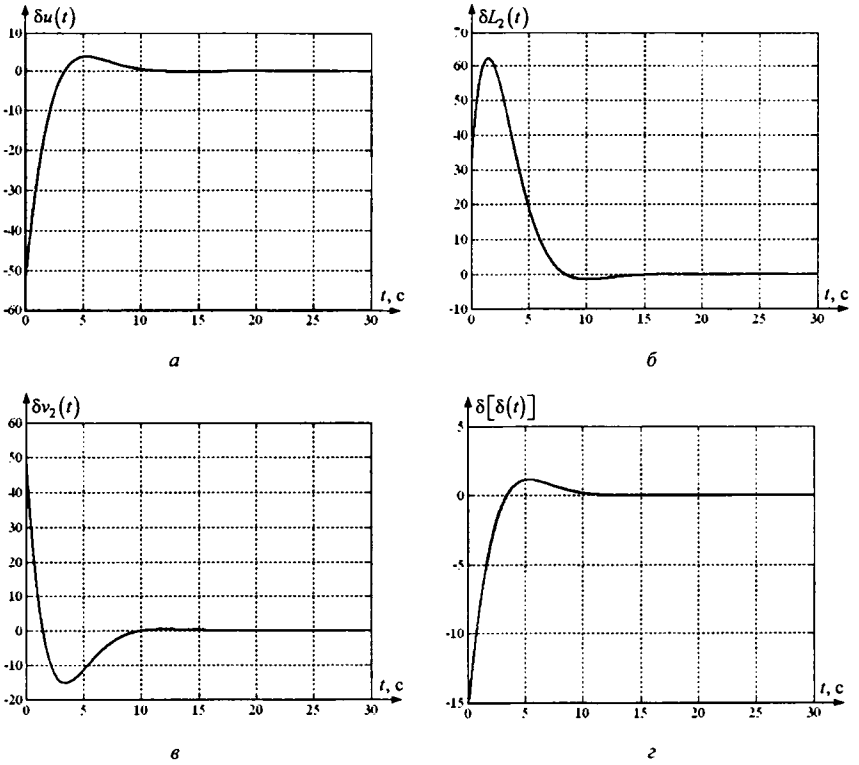


Рис. 5.78. *а* — график стабилизирующего оптимального управления $\delta u(t)$, *б–г* — графики отклонений реального движения системы от программного

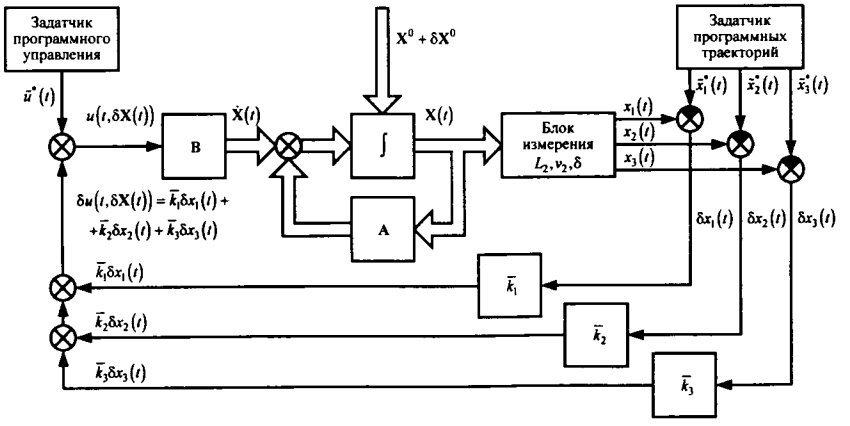


Рис. 5.79. Структурная схема оптимальной замкнутой системы управления стыковкой космических объектов

Реальное движение системы моделировалось с использованием метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0{,}001$ с. Представленные результаты соответствуют вектору отклонения начальных условий

$$\delta\mathbf{X}^0 = [30 \quad 50 \quad 5]^{\mathrm{T}}. \tag{5.458}$$

Графики результирующего управления, оптимального программного управления, а также функций $\vec{L}_2(t) - \vec{L}_1^*(t)$, $\tilde{v}_1^*(t) - \tilde{v}_2^*(t)$, $\tilde{\delta}^*(t)$ (программное движение системы) и $L_2(t) - L_1(t)$, $v_1(t) - v_2(t)$, $\delta(t)$ (реальное движение системы) представлены на рис. 5.77. На рис. 5.78 изображены графики оптимального стабилизирующего управления (5.457) и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta L_2(t)$, $\delta v_2(t)$ и $\delta[\delta(t)]$.

Структурная схема замкнутой системы изображена на рис. 5.79.

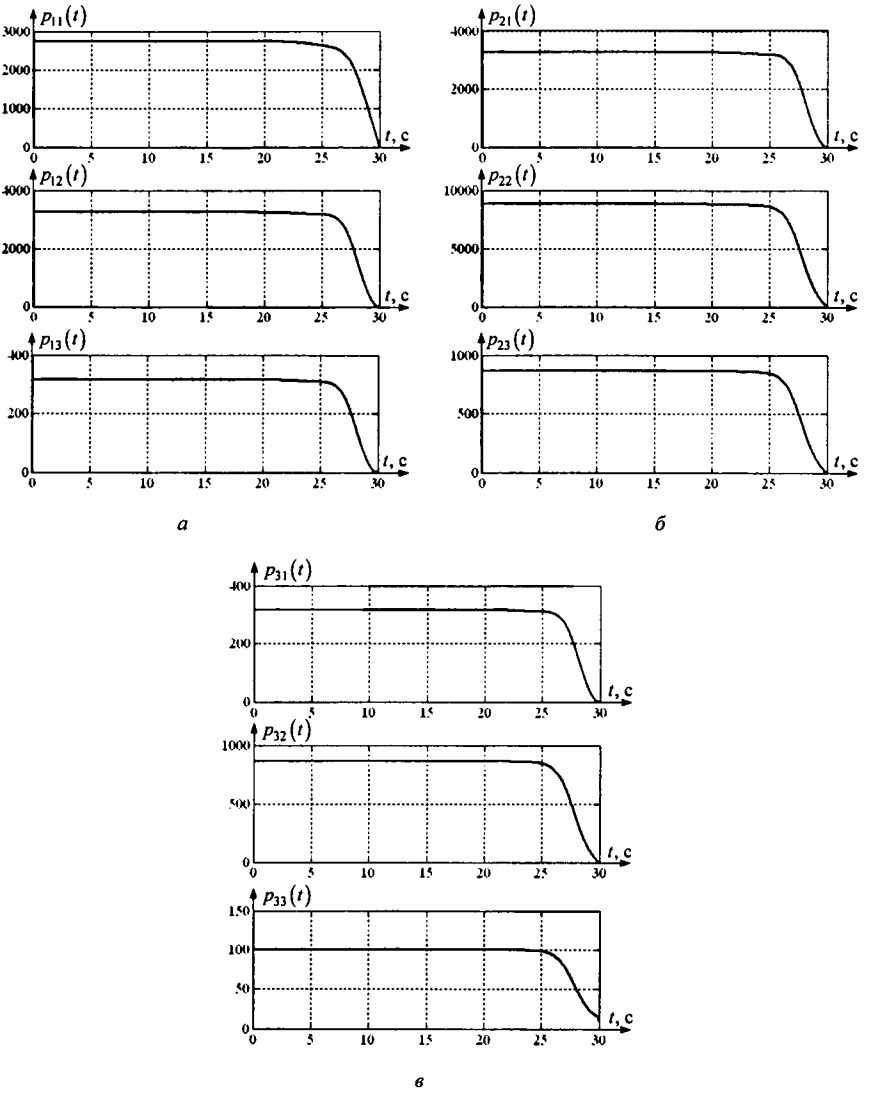


Рис. 5.80. Графики решений дифференциального уравнения Риккати

Решим теперь задачу стабилизации объекта управления (5.453) вблизи оптимальных программных траекторий на конечном временном интервале $[0, T]$. В данном случае критерий качества стабилизации имеет вид

$$I = \delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(T)\mathbf{P}_T\delta\mathbf{X}(T) + \int_0^T \left\{\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\delta\mathbf{X}(t) + r\left[\delta u(t)\right]^2\right\}dt \tag{5.459}$$

при значениях весовых матриц

$$\mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix}, \quad r = 10^4. \tag{5.460}$$

Для данной линейно-квадратичной задачи дифференциальное уравнение Риккати имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} & \dot{p}_{13} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} & \dot{p}_{23} \\ \dot{p}_{31} & \dot{p}_{32} & \dot{p}_{33} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3{,}3333 \\ 0 & 0 & -33{,}3333 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3{,}3333 & -33{,}3333 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10^4} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10^3 & 0 & 0 \\ 0 & 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{bmatrix}.$$

Решение дифференциального уравнения Риккати было построено интегрированием в обратном времени при начальных условиях $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}_T$ с использованием разностной схемы Адамса–Башфорта–Моултона с шагом $h = 0{,}001$. Графики решений дифференциального уравнения Риккати приводятся на рис. 5.80.

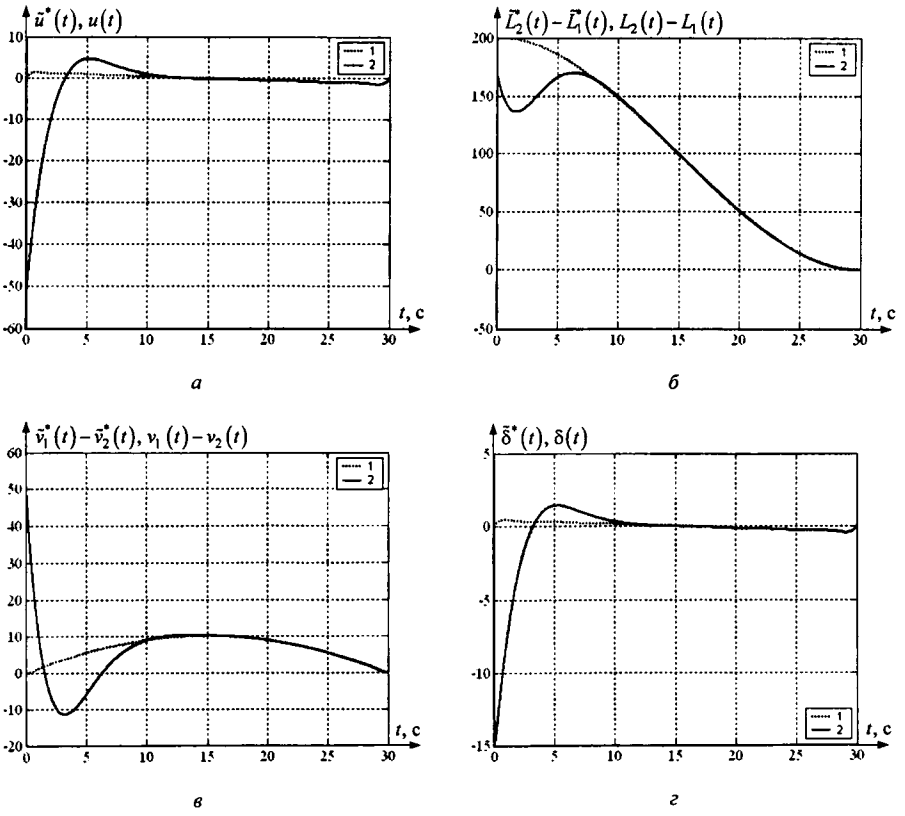


Рис. 5.81. Оптимальное программное (1, пунктир) и реальное (2, сплошная линия) управление и движение системы «цель–перехватчик»

Вектор коэффициентов усиления регулятора имеет вид

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{1}{10^{-4}} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}\mathbf{P}(t) = -\left[0{,}001p_{31}(t) \quad 0{,}001p_{32}(t) \quad 0{,}001p_{33}(t)\right].$$

Оптимальное стабилизирующее управление определяется выражением

$$\delta u(t) = -0,001p_{31}(t)\delta x_1(t) - 0,001p_{32}(t)\delta x_2(t) - 0,001p_{33}(t)\delta x_3(t). \qquad (5.461)$$

Приведем результаты решения задачи стабилизации на конечном интервале $[0,T]$. Реальное движение системы моделировалось с использованием метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0,001$ с. Приводимые ниже результаты соответствуют вектору отклонения начальных условий (5.458). Графики результирующего управления, оптимального программного управления, а также функций $\tilde{L}_2(t) - \tilde{L}_1(t)$, $\tilde{v}_1^*(t) - \tilde{v}_2^*(t)$, $\tilde{\delta}^*(t)$ (программное движение системы) и $L_2(t) - L_1(t)$, $v_1(t) - v_2(t)$, $\delta(t)$ (реальное движение системы) представлены на рис. 5.81. На рис. 5.82 изображены графики коэффициентов усиления регулятора, оптимального стабилизирующего управления (5.461) и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta L_2(t)$, $\delta v_2(t)$ и $\delta[\delta(t)]$.

Сравнивая графики на рис. 5.77, 5.78 и на рис. 5.81, 5.82 можно видеть, что результаты решения задачи стабилизации объекта управления (5.453) вблизи оптимальных программных траекторий на конечном временном интервале $[0,T]$ при $T = 30$ и на полубесконечном $[0,\infty)$ практически не отличаются. Как и в примере 5.29, в рассматриваемом случае коэффициенты усиления регулятора $k_1(t)$, $k_2(t)$ и $k_3(t)$ начинают изменяться лишь в конце интервала управления $[0,T]$, когда отклонения реального движения системы от оптимальной программы близки к нулю. Для данного примера более целесообразной видится стабилизация на полубесконечном интервале $[0,\infty)$, поскольку в таком случае и решение задачи, и реализация регулятора менее сложны.

Изменим теперь некоторые условия задачи. Пусть при построении оптимального программного управления по критерию минимальной энергии время управления было равным $T = 3$ с, цель двигалась с постоянным ускорением $\alpha_1 = 10$ м/с^2, а на управление и перемещение управляющего органа реактивной двигательной установки перехватчика накладывались ограничения

$$|u(t)| \le 9 \cdot 9,81, \quad |\delta(t)| \le 3 \cdot 9,81 \quad \forall t \in [0,3]. \qquad (5.462)$$

Таким условиям соответствуют следующие зависимости для координаты и скорости цели:

$$L_1(t) = 5t^2 + 8000 \cdot t + 1200,$$
$$v_1(t) = 10 \cdot t + 8000.$$

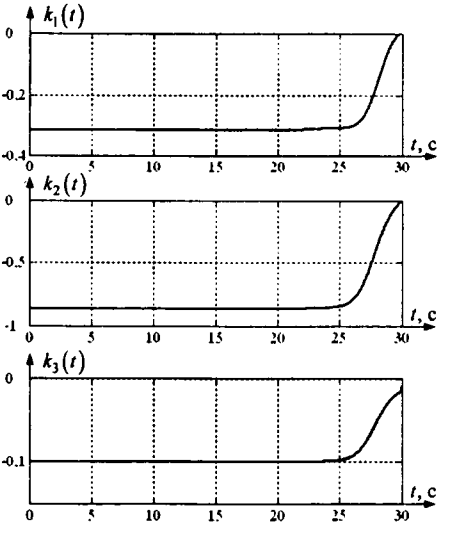
Для оптимального программного управления и оптимальных программ при ограничениях (5.462) в базисе ортонормированных полиномов Лежандра размерностью $l = 15$ были получены выражения:

$$\tilde{u}^*(t) = -76476,3834550 \cdot t^7 - 6243,47873221 \cdot t^2 + 993,275423632 \cdot t + 5750,09007330 \cdot t^{10} -$$
$$-817,219133435 \cdot t^{11} - 18067,9686979 \cdot t^4 + 17214,8390889 \cdot t^3 + 53364,1771505 \cdot t^8 +$$
$$+60198,1882128 \cdot t^6 - 22541,2944455 \cdot t^9 + 0,151191944965 \cdot 10^{-9} \cdot t^{14} + 49,7885986233 \cdot t^{12} -$$
$$-0,314554854096 \cdot 10^{-8} \cdot t^{13} - 13372,907540 \cdot t^5 + 44,0959622448;$$

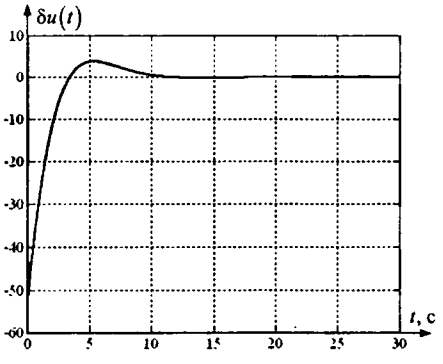
$$\tilde{L}_2^*(t) = -658,170236781 \cdot t^7 + 0,11 \cdot 10^{-8} \cdot t^2 + 7999,99999999 \cdot t + 665,982303526 \cdot t^{10} -$$
$$-221,354551144 \cdot t^{11} + 999,999999966 - 661,930534097 \cdot t^4 + 244,977568027 \cdot t^3 +$$
$$+1415,69865119 \cdot t^8 - 464,049873522 \cdot t^6 - 1261,96668345 \cdot t^9 + 0,273563728539 \cdot t^{14} +$$
$$+45,6491460018 \cdot t^{12} - 5,35348095365 \cdot t^{13} + 944,27093166 \cdot t^5;$$

$$\tilde{v}_2^*(t) = 11325,5892091 \cdot t^7 + 734,932704089 \cdot t^2 + 0,6 \cdot 10^{-9} \cdot t - 2434,90006257 \cdot t^{10} +$$
$$+547,789752019 \cdot t^{11} + 4721,3546586 \cdot t^4 - 2647,72213645 \cdot t^3 - 11357,7001509 \cdot t^8 -$$
$$-4607,19165692 \cdot t^6 + 6659,82303521 \cdot t^9 - 0,240205876138 \cdot 10^{-11} \cdot t^{14} - 69,5952523975 \cdot t^{12} +$$
$$+3,82989219959 \cdot t^{13} - 2784,2992413 \cdot t^5 + 8000,00000001;$$

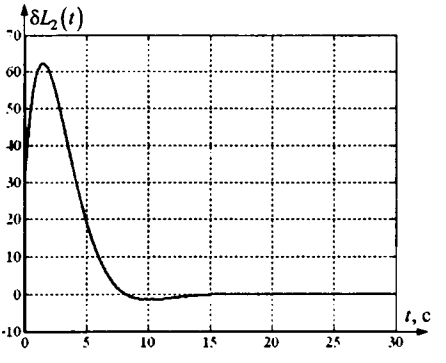
$$\tilde{\delta}^*(t) = -27258,4803636 \cdot t^7 - 2382,94992277 \cdot t^2 + 440,959622452 \cdot t + 1807,70618186 \cdot t^{10} -$$
$$-250,542908681 \cdot t^{11} - 4176,44886177 \cdot t^4 + 5665,62559004 \cdot t^3 + 17981,5221960 \cdot t^8 +$$
$$+23783,7373399 \cdot t^6 - 7304,70018820 \cdot t^9 + 0,448764121872 \cdot 10^{-10} \cdot t^{14} + 14,9365795872 \cdot t^{12} -$$
$$-0,952493302729 \cdot 10^{-9} \cdot t^{13} - 8292,9449832 \cdot t^5 - 0,17 \cdot 10^{-9}.$$



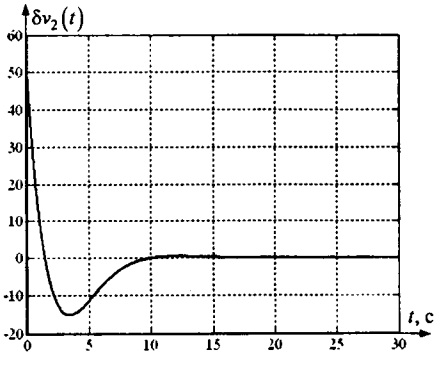
а



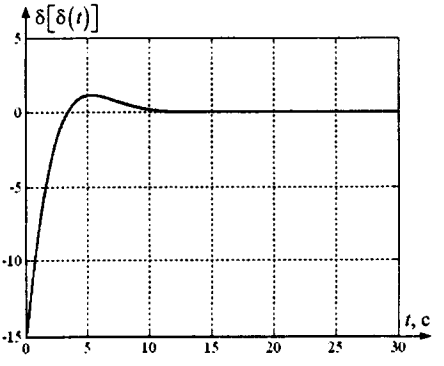
б



в



г



д

Рис. 5.82. *а* — графики коэффициентов усиления регулятора,
б — график стабилизирующего оптимального управления $\delta u(t)$,
в–д — графики отклонений реального движения системы от программного

Для решения задачи стабилизации движения объекта управления вблизи оптимальных программных траекторий используем результаты, полученные для полубесконечного временного интервала $[0,\infty)$. Постоянные коэффициенты усиления регулятора определяются выражением (5.456), оптимальное стабилизирующее управление — формулой (5.461). Оптимальное результирующее управление для системы (5.453) имеет вид

$$\begin{aligned}\tilde{u}^*(t) = &-76476{,}3834550\cdot t^7 - 6243{,}47873221\cdot t^2 + 993{,}275423632\cdot t + 5750{,}09007330\cdot t^{10} - \\ &-817{,}219133435\cdot t^{11} - 18067{,}9686979\cdot t^4 + 17214{,}8390889\cdot t^3 + 53364{,}1771505\cdot t^8 + \\ &+60198{,}1882128\cdot t^6 - 22541{,}2944455\cdot t^9 + 0{,}151191944965\cdot 10^{-9}\cdot t^{14} + 49{,}7885986233\cdot t^{12} - \\ &-0{,}314554854096\cdot 10^{-8}\cdot t^{13} - 13372{,}907540\cdot t^5 + 44{,}0959622448 - \\ &-0{,}31623\cdot\delta x_1(t) - 0{,}86687\cdot\delta x_2(t) - 0{,}10018\cdot\delta x_3(t),\end{aligned} \tag{5.463}$$

где $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$, $\delta x_3(t)$ — отклонения реальных траекторий системы от оптимальных программ.

Ниже приводятся результаты решения задачи при ограничениях (5.462). Реальное движение системы моделировалось с использованием разностной схемы решения дифференциальных уравнений — метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0{,}0002$ с. Представленные результаты соответствуют вектору отклонений начальных условий

$$\delta\mathbf{X}^0 = [-30 \quad 50 \quad 5]^{\mathrm{T}}. \tag{5.464}$$

Графики результирующего управления, оптимального программного управления, а также функций $\vec{L}_2(t) - \vec{L}_1(t)$, $\vec{v}_1^*(t) - \vec{v}_2^*(t)$, $\tilde{\delta}^*(t)$ (программное движение системы) и $L_2(t) - L_1(t)$, $v_1(t) - v_2(t)$, $\delta(t)$ (реальное движение системы) представлены на рис. 5.83. На рис. 5.84 изображены графики оптимального стабилизирующего управления и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta L_2(t)$, $\delta v_2(t)$ и $\delta[\delta(t)]$.

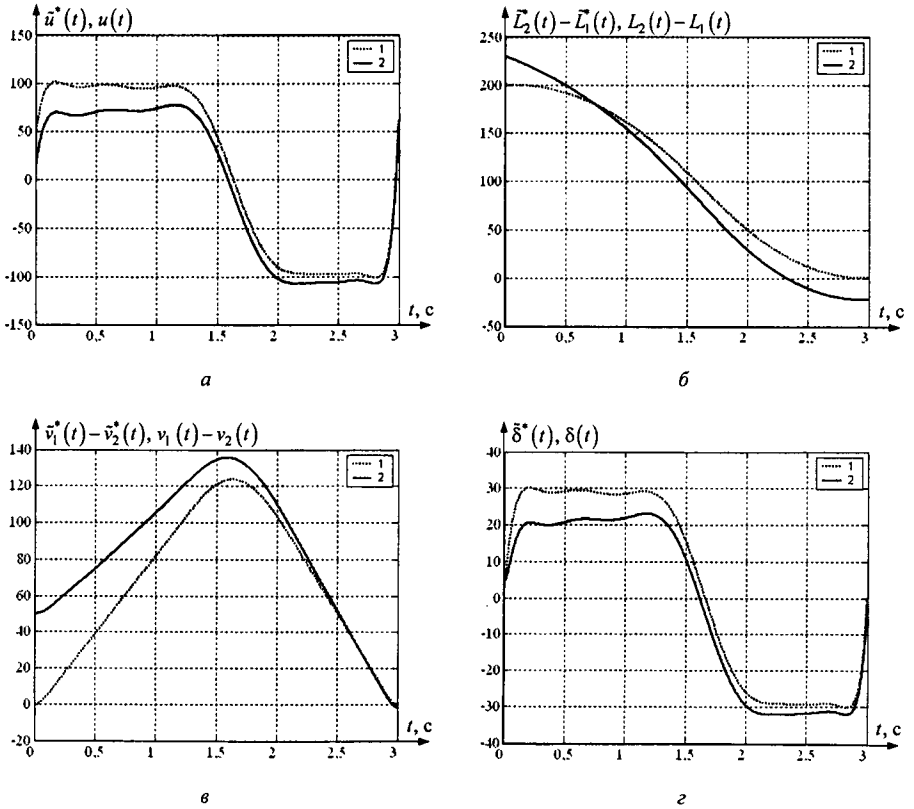


Рис. 5.83. Оптимальное программное (1, пунктир) и реальное (2, сплошная линия) управление и движение системы «цель–перехватчик»

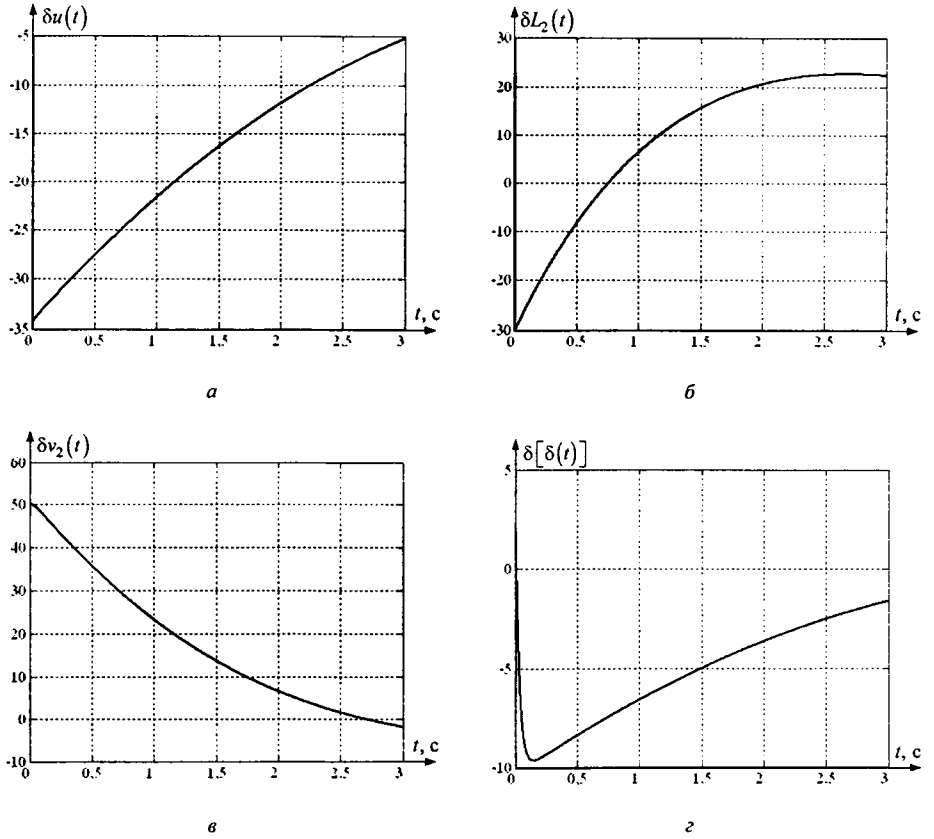


Рис. 5.84. *а* — график стабилизирующего оптимального управления $\delta u(t)$, *б–г* — графики отклонений реального движения системы от программного

Анализируя графики на рис. 5.83, 5.84 можем заключить, что результаты стабилизации объекта вблизи оптимальных программных траекторий на полубесконечном интервале при измененных условиях задачи (интервал управления [0,3] с, движение цели с постоянным ускорением и ограничения (5.462)) не являются удовлетворительными. Во-первых, перехватчик не достигает цели (см. рис. 5.83, *а*); во-вторых, не выполняются ограничения (5.462). Этот результат объясняется тем, что при уменьшении интервала управления стабилизация возмущенного движения не успевает осуществиться при выбранных значениях весовых матриц функционала (5.455). В данной ситуации можно было бы выбрать новые значения весовых матриц, но мы попробуем решить задачу стабилизации на *конечном* временном интервале $[0,T]$.

Выберем значения весовых матриц функционала (5.459) следующим образом:

$$\mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} 10^6 & 0 & 0 \\ 0 & 10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 10^4 \end{bmatrix}, \tag{5.465}$$

матрица $\mathbf{Q}$ и r заданы выражением (5.460). Графики решений дифференциального уравнения Риккати приводятся на рис. 5.85.

Вектор коэффициентов усиления регулятора имеет вид

$$\mathbf{K}(t) = -\frac{1}{10^{-4}} \cdot [0 \quad 0 \quad 10]\mathbf{P}(t) = -[0{,}001p_{31}(t) \quad 0{,}001p_{32}(t) \quad 0{,}001p_{33}(t)].$$

Оптимальное стабилизирующее управление определяется выражением (5.461).

Ниже представлены результаты решения задачи стабилизации на конечном интервале $[0,T]$ при $T = 3$ с. Реальное движение системы моделировалось с использованием метода Рунге–Кутта 4-го порядка

точности с шагом $h = 0{,}0002$ с. Результаты моделирования соответствуют вектору отклонений начальных условий (5.464). Графики результирующего управления, оптимального программного управления, а также функций $\vec{L}_2(t) - \vec{L}_1(t)$, $\vec{v}_1^*(t) - \vec{v}_2^*(t)$, $\vec{\delta}^*(t)$ (программное движение системы), $L_2(t) - L_1(t)$, $v_1(t) - v_2(t)$, $\delta(t)$ (реальное движение системы) изображены на рис. 5.86. На рис. 5.87 приводятся графики коэффициентов усиления регулятора, оптимального стабилизирующего управления и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta L_2(t)$, $\delta v_2(t)$ и $\delta[\delta(t)]$.

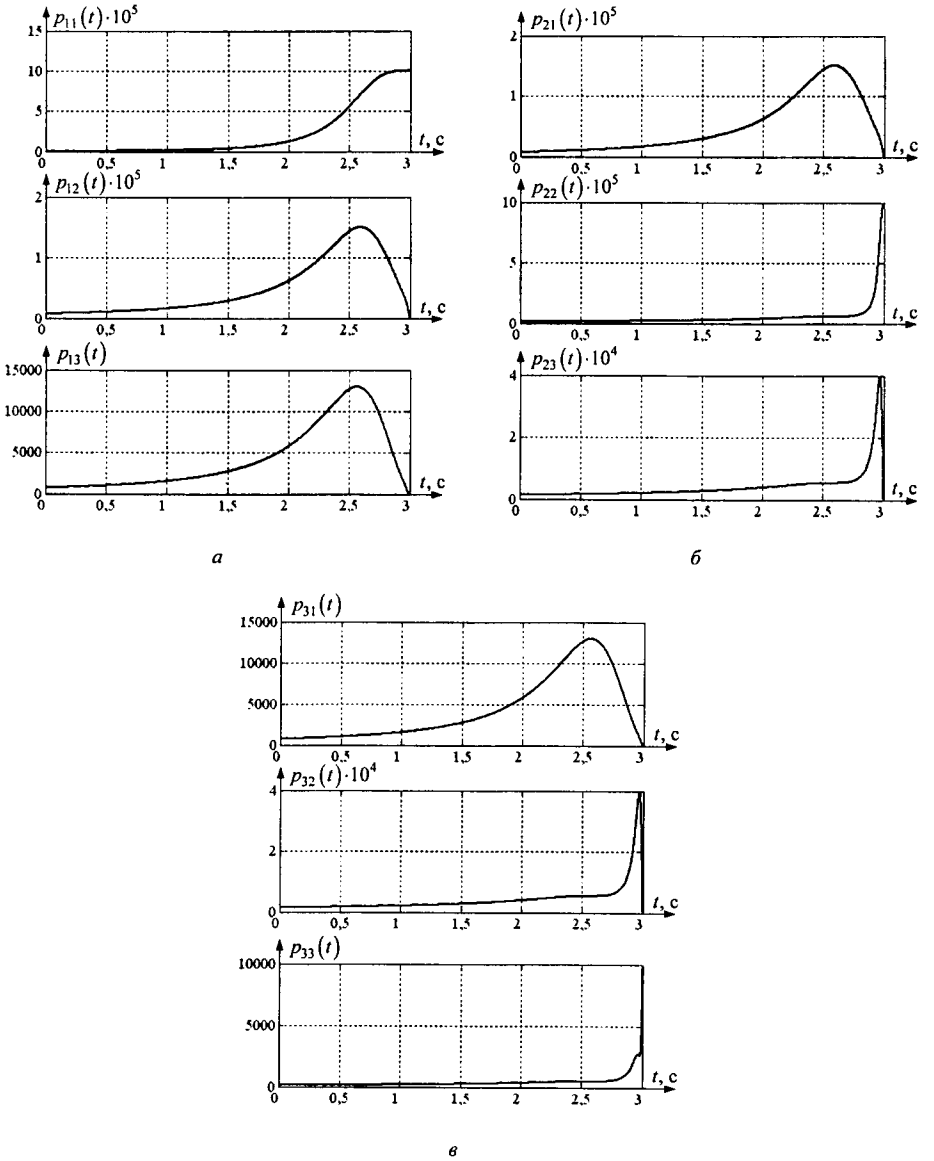


Рис. 5.85. Графики решений дифференциального уравнения Риккати

Из анализа графиков на рис. 5.86 можно сделать вывод, что *разности координат и скоростей перехватчика и цели составляют малые величины, т.е. имела место плавная безударная стыковка.*

Структурная схема замкнутой системы соответствует структурной схеме на рис. 5.79, но коэффициенты усиления регулятора в данном случае переменные.

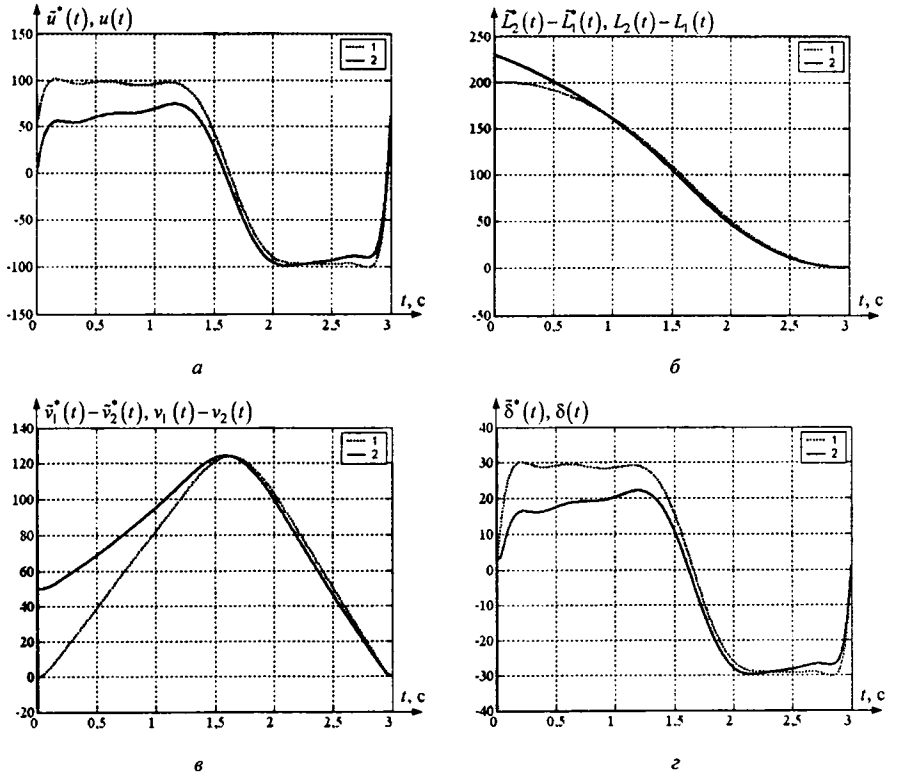


Рис. 5.86. Оптимальное программное (1, пунктир) и реальное (2, сплошная линия) управление и движение системы «цель–перехватчик»

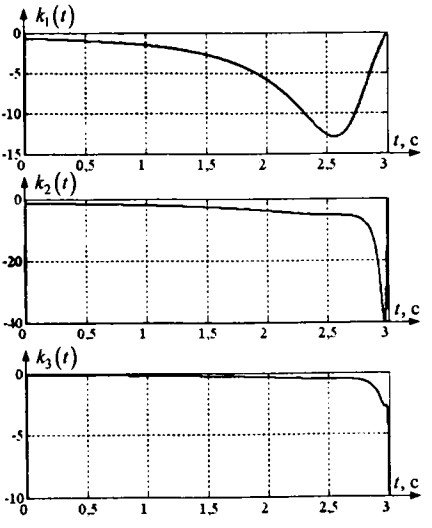
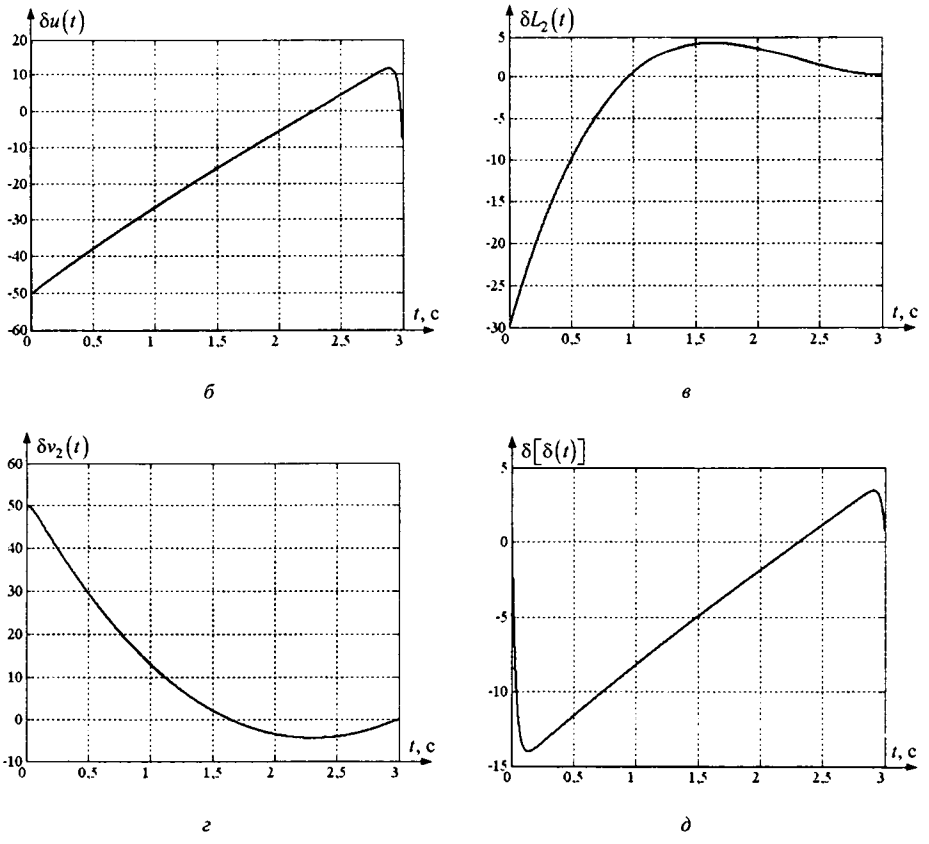


Рис. 5.87. *а* — графики коэффициентов усиления регулятора,
б — график стабилизирующего оптимального управления $\delta u(t)$,
в–д — графики отклонений реального движения системы от программного



Продолжение рис. 5.87

Пример 5.31. Линейная нестационарная система 2-го порядка (см. пример 5.7 из п. 5.4.2).

Постановка задачи построения оптимального программного управления и оптимальных программ формулируется так: при заданном уравнении объекта управления

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}t^2 & 1-t\\ 1+t & t-t^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}t^2 & 0\\ 1 & t\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1(t)\\ u_2(t)\end{bmatrix}, \tag{5.466}$$

отсутствии ограничений на управление $\mathbf{U}(t)$ и вектор состояния $\mathbf{X}(t)$, заданных краевых условиях

$$\mathbf{X}^0=\begin{bmatrix}9 & -9\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{5.467}$$

$$\mathbf{X}^T=\begin{bmatrix}0 & 0\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}, \tag{5.468}$$

времени управления $T = 4$ с требуется найти управление $\mathbf{U}(t)$, минимизирующее функционал качества, характеризующий энергию управления:

$$I(\mathbf{U})=\int_0^T \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{U}(t)dt\to\min_{\mathbf{U}},$$

и переводящее объект управления (5.466) из начального состояния (5.467) в конечное (5.468).

Построение оптимального программного управления и оптимальных программ проводилось методами математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов (см. пример 5.19 из п. 5.5.3). Решение было выполнено в базисе ортонормированных на интервале [0,4] полиномов Лежандра размерностью 14.

Оптимальные программные управления и оптимальные программы, полученные с помощью конечномерной оптимизации, определяются выражениями:

$$\tilde{u}_1^*(t) = -33{,}8312\cdot t^7 + 7{,}8253\cdot t - 142{,}3602\cdot t^5 - 9{,}9991\cdot t^8 + 109{,}1337\cdot t^6 +$$
$$+0{,}5186\cdot 10^{-2}\cdot t^{13} - 5{,}1499\cdot t^{10} + 103{,}2184\cdot t^4 - 0{,}1150\cdot t^{12} + 1{,}0615\cdot t^{11} +$$
$$+13{,}0203\cdot t^9 - 4{,}1337\cdot t^2 - 41{,}1046\cdot t^3 - 2{,}8237;$$
$$\tilde{u}_2^*(t) = 29{,}6088\cdot t^7 - 2{,}7895t + 33{,}6943\cdot t^5 - 15{,}1160\cdot t^8 - 38{,}6432\cdot t^6 +$$
$$+0{,}4639\cdot 10^{-3}\cdot t^{13} - 1{,}1465\cdot t^{10} - 18{,}2983\cdot t^4 - 0{,}0131\cdot t^{12} + 0{,}1618\cdot t^{11} +$$
$$+5{,}1345\cdot t^9 - 0{,}4283\cdot 10^{-3} + 7{,}7858\cdot t^2 + 0{,}7357\cdot t^3;$$
$$\tilde{x}_1^*(t) = 178{,}9159\cdot t^7 - 7{,}6516t + 290{,}5453\cdot t^5 - 74{,}2607\cdot t^8 - 283{,}2997\cdot t^6 +$$
$$+0{,}4631\cdot 10^{-3}\cdot t^{13} - 3{,}5760\cdot t^{10} - 189{,}4439\cdot t^4 - 0{,}0219\cdot t^{12} + 0{,}3835\cdot t^{11} +$$
$$+20{,}2931\cdot t^9 + 8{,}9707 - 7{,}6108\cdot t^2 + 73{,}3025\cdot t^3;$$
$$\tilde{x}_2^*(t) = -268{,}7514\cdot t^7 + 5{,}2918\cdot t - 321{,}8612\cdot t^5 + 133{,}6327\cdot t^8 + 361{,}5492\cdot t^6 -$$
$$-0{,}3817\cdot 10^{-2}\cdot t^{13} + 9{,}7920\cdot t^{10} + 184{,}2697\cdot t^4 + 0{,}1092\cdot t^{12} - 1{,}3648\cdot t^{11} -$$
$$-44{,}5097\cdot t^9 + 10{,}9663\cdot t^2 - 62{,}2514\cdot t^3 - 8{,}9835.$$

Решим задачу стабилизации объекта управления (5.466) вблизи рассчитанных оптимальных программных траекторий на конечном интервале времени $[0,T]$. В качестве характеристики отклонений реального движения системы от программного будем использовать критерий качества стабилизации

$$I = \delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(T)\mathbf{P}_T\delta\mathbf{X}(T) + \int_0^T \left\{\delta\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\delta\mathbf{X}(t) + r\left[\delta u(t)\right]^2\right\}dt. \tag{5.469}$$

Выберем следующие значения весовых матриц:

$$\mathbf{P}_T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix},\quad \mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрицы системы (5.466) имеют вид

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 1-t \\ 1+t & t-t^2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix}.$$

Запишем дифференциальное уравнение Риккати для данной линейно-квадратичной задачи:

$$\begin{bmatrix} \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 & 1-t \\ 1+t & t-t^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} t^2 & 1+t \\ 1-t & t-t^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} +$$
$$+\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 & 0 \\ 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t^2 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}. \tag{5.470}$$

Решение уравнения (5.470) получено интегрированием в обратном времени при начальных условиях $\mathbf{P}(T) = \mathbf{P}_T$ с использованием разностной схемы Адамса–Башфорта–Моултона с шагом $h = 0{,}001$. Графики решений уравнения Риккати (5.470) изображены на рис. 5.88.

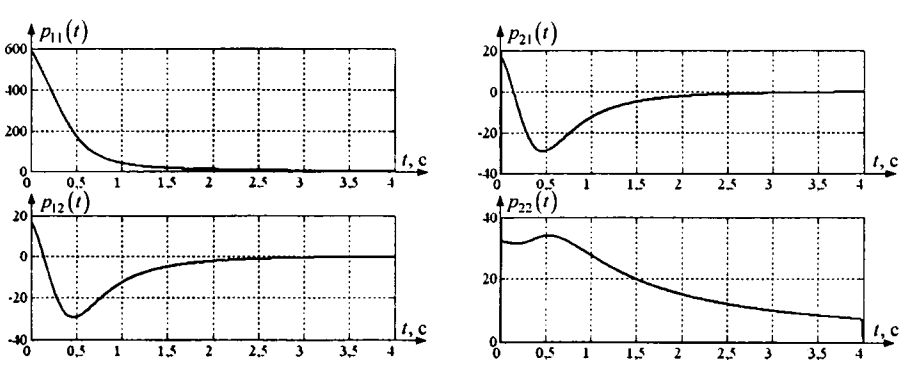


Рис. 5.88. Графики решений дифференциального уравнения Риккати (5.470)

Матрица коэффициентов усиления регулятора рассчитывается так:

$$\mathbf{K}(t) = -\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} t^2 & 1 \\ 0 & t \end{bmatrix}\mathbf{P}(t) = -\begin{bmatrix} t^2 p_{11}(t) + p_{21}(t) & t^2 p_{21}(t) + p_{22}(t) \\ t \cdot p_{21}(t) & t \cdot p_{22}(t) \end{bmatrix}. \tag{5.471}$$

Оптимальное стабилизирующее управление имеет вид

$$\delta\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} \delta u_1(t) \\ \delta u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\left(t^2 p_{11}(t) + p_{21}(t)\right)\delta x_1(t) - \left(t^2 p_{21}(t) + p_{22}(t)\right)\delta x_2(t) \\ -t \cdot p_{21}(t)\delta x_1(t) - t \cdot p_{22}(t)\delta x_2(t) \end{bmatrix}. \tag{5.472}$$

Приведем результаты решения задачи. Реальное движение системы моделировалось с использованием метода Рунге–Кутта 4-го порядка точности с шагом $h = 0{,}001$ с. Приводимые ниже результаты соответствуют вектору отклонений начальных условий

$$\delta\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} -3 & 4 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}. \tag{5.473}$$

Графики результирующего управления, оптимального программного управления, оптимальных программных, а также реальных фазовых траекторий изображены на рис. 5.89. На рис. 5.90 приводятся графики коэффициентов усиления регулятора, на рис. 5.91 — графики стабилизирующего управления (5.472) и отклонений реального движения системы от оптимальных программ $\delta x_1(t)$, $\delta x_2(t)$.

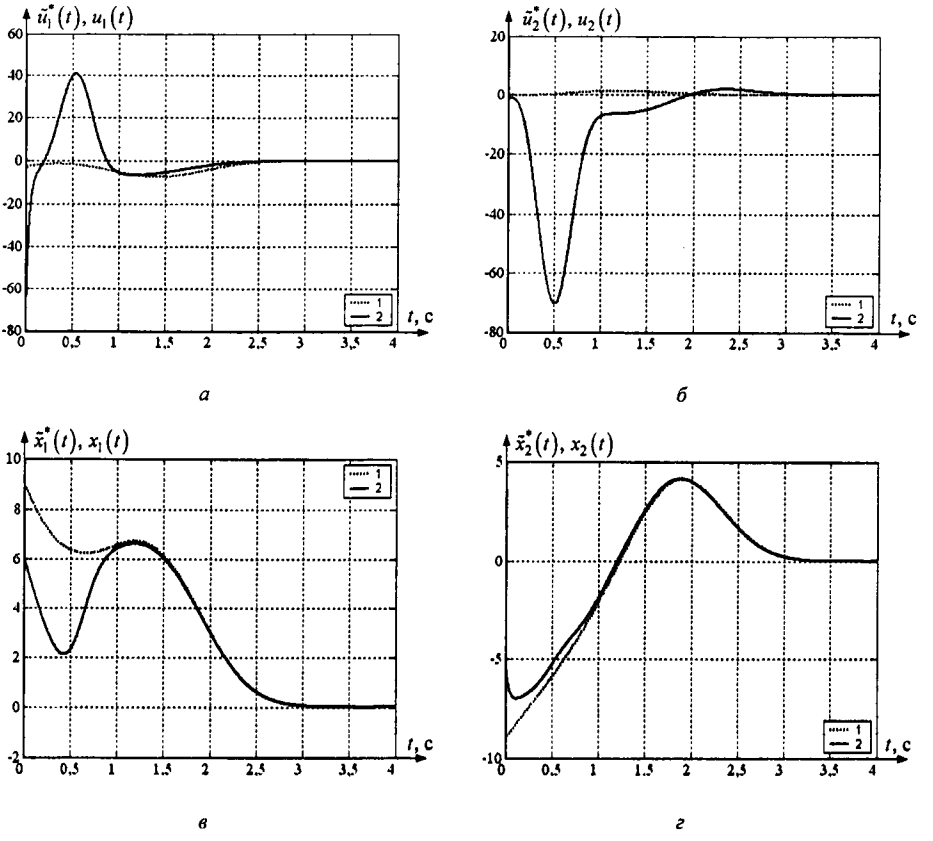


Рис. 5.89. Оптимальное программное (1, пунктир) и реальное (2, сплошная линия) управление и движение системы (5.466)

Изменим теперь условия задачи построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ. Пусть на фазовые траектории системы было наложено ограничение

$$x_2(t) \le 1 \quad \forall t \in [0, T]. \tag{5.474}$$

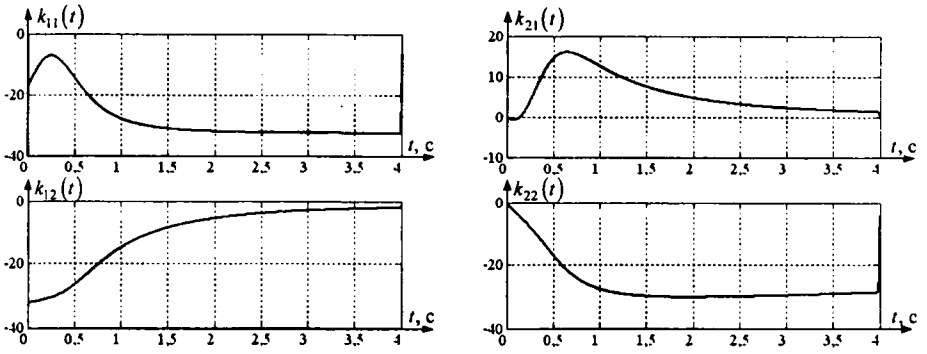
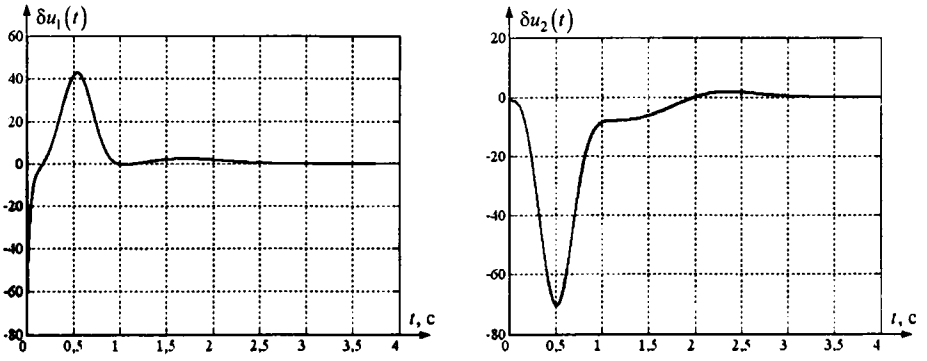
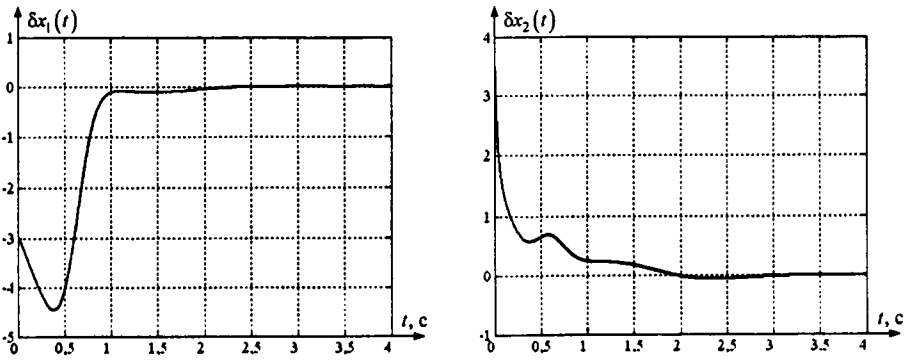


Рис. 5.90. Графики коэффициентов усиления регулятора



а *б*



в *г*

Рис. 5.91. *а–б* — графики стабилизирующего оптимального управления $\delta U(t)$, *в–г* — графики отклонений реального движения системы от программного

Для задачи с ограничением (5.474) методами математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов и базиса полиномов Лежандра размерностью $l = 14$ получены следующие оптимальные программные управления и оптимальные программы:

$$\tilde{u}_1^*(t) = 597{,}4540 \cdot t^7 - 578{,}8648 \cdot t^6 + 8{,}5627 \cdot t + 328{,}3350 \cdot t^5 -$$
$$- 389{,}5550 \cdot t^8 - 45{,}0554 \cdot t^{10} + 0{,}0315 \cdot t^{13} - 0{,}7479 \cdot t^{12} + 7{,}7003 \cdot t^{11} -$$
$$- 80{,}6114 \cdot t^4 + 164{,}7014 \cdot t^9 - 8{,}2005 \cdot t^3 - 5{,}8602 \cdot t^2 - 3{,}7800;$$
$$\tilde{u}_2^*(t) = 1061{,}3248 \cdot t^7 - 1421{,}8416 \cdot t^6 - 0{,}4774 \cdot t + 1264{,}3406 \cdot t^5 - 536{,}3884 \cdot t^8 -$$
$$- 42{,}3505 \cdot t^{10} + 0{,}0200 \cdot t^{13} - 0{,}5321 \cdot t^{12} + 6{,}2373 \cdot t^{11} - 716{,}7248 \cdot t^4 - 0{,}0638 +$$
$$+ 184{,}2256 \cdot t^9 + 236{,}6003 \cdot t^3 - 33{,}6521 \cdot t^2;$$
$$\tilde{x}_1^*(t) = 1341{,}8563 \cdot t^7 - 1979{,}5208 \cdot t^6 - 0{,}4267 \cdot t + 1947{,}9083 \cdot t^5 -$$
$$- 618{,}2802 \cdot t^8 - 40{,}9757 \cdot t^{10} + 0{,}0151 \cdot t^{13} - 0{,}4358 \cdot t^{12} + 5{,}5488 \cdot t^{11} -$$
$$- 1234{,}4390 \cdot t^4 + 194{,}2719 \cdot t^9 + 471{,}4220 \cdot t^3 - 89{,}7447 \cdot t^2 + 8{,}8135;$$
$$\tilde{x}_2^*(t) = 88{,}7893 \cdot t^7 - 239{,}1131 \cdot t^6 + 7{,}8891 \cdot t + 331{,}9768 \cdot t^5 - 4{,}8045 \cdot t^8 +$$
$$+ 4{,}9333 \cdot t^{10} - 0{,}5359 \cdot 10^{-2} \cdot t^{13} + 0{,}1174 \cdot t^{12} - 1{,}0637 \cdot t^{11} - 263{,}3323 \cdot t^4 -$$
$$- 10{,}5362 \cdot t^9 + 118{,}4054 \cdot t^3 - 27{,}6235 \cdot t^2 - 9{,}0634.$$

Для решения задачи стабилизации объекта (5.466) вблизи заданных программных траекторий используем полученные ранее результаты. Коэффициенты усиления регулятора определяются решением дифференциального уравнения Риккати (5.470) (см. рис. 5.88) и имеют вид (5.471). Графики коэффициентов усиления регулятора изображены на рис. 5.90. Оптимальное стабилизирующее управление определяется выражением (5.472). Результаты моделирования движения системы, соответствующие вектору отклонений начальных условий (5.473), представлены на рис. 5.92, 5.93.

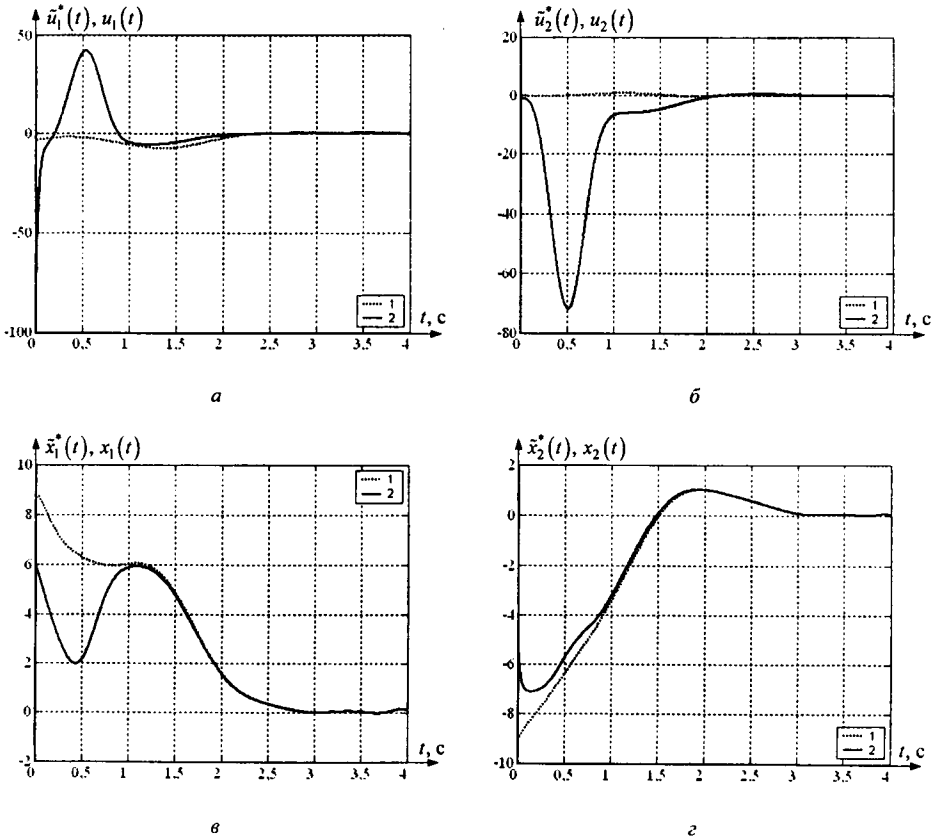


Рис. 5.92. Оптимальное программное (1, пунктир) и реальное (2, сплошная линия) управление и движение системы (5.466)

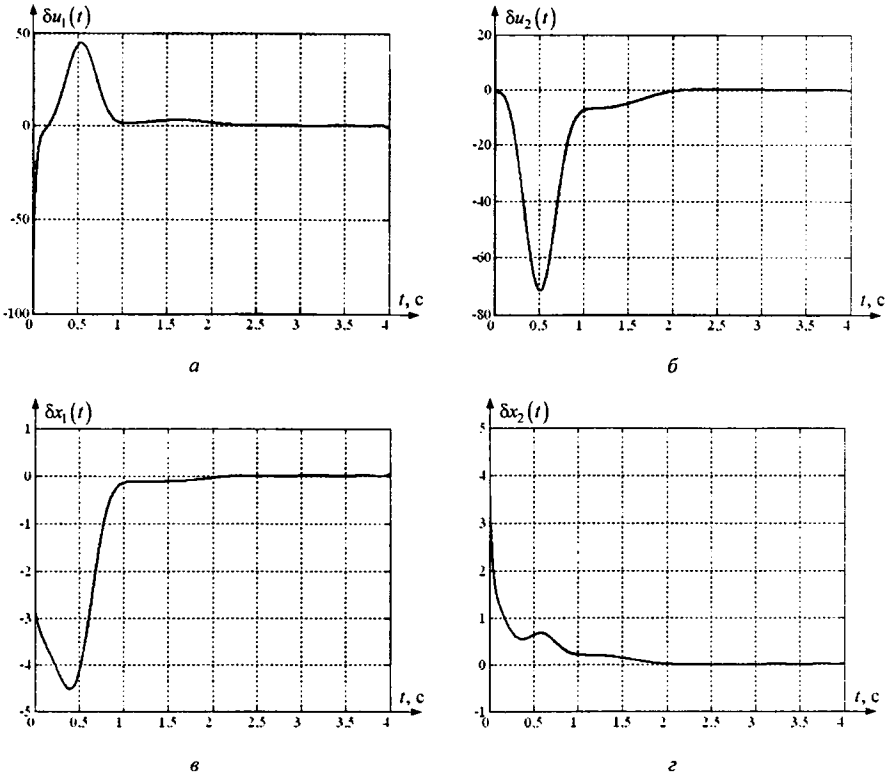


Рис. 5.93. *а–б* — графики стабилизирующего оптимального управления $\delta U(t)$, *в–г* — графики отклонений реального движения системы от программного

Ниже приводится текст программы *Matlab*, реализующей решение задачи стабилизации объекта управления (5.466) вблизи оптимальных программных траекторий, полученных для задачи без ограничений на фазовые траектории.

```
warning off
clc
close all
clear all
pack

global Q R n Afun Bfun                          % global variables
syms t                                          % independent variables

n = 2;
dt = 0.001;
T = 4;
tc = 0:dt:T;

x1_p = 178.915945127*t^7-7.65168219465*t-189.443934420*t^4+290.545377942*t^5-...
       283.299711373*t^6-7.6108076839*t^2-74.2607171818*t^8-3.57601492703*t^10+...
       .463052527223e-3*t^13-.218972340850e-1*t^12+.383501554526*t^11+...
       20.2931190763*t^9+8.97073292073+73.3025282121*t^3;
x2_p = -268.751396058*t^7+5.29180015810*t+184.269689672*t^4-321.861243913*t^5+...
       361.549244455*t^6+10.9663490576*t^2+133.632707003*t^8+9.79197317838*t^10-...
       .381705455877e-2*t^13+.109163376406*t^12-1.36475647949*t^11-...
       44.5096986000*t^9-62.2514369354*t^3-8.98352065007;
u1_p = -33.8312401177*t^7+7.82527553242*t+103.218444660*t^4-142.360212697*t^5+...
       109.133728327*t^6-4.1336703040*t^2-9.999091263*t^8-5.14994929857*t^10+...
       .518642792567e-2*t^13-.114970180030*t^12+1.06152121499*t^11+...
       13.0203091296*t^9-41.1045727058*t^3-2.82374591954;
u2_p = 29.6087626774*t^7-2.78951353497*t-18.2983055632*t^4+33.6942798992*t^5-...
       38.6432709399*t^6+7.78576228286*t^2-15.1159590600*t^8-1.14645449988*t^10+...
       .463948188630e-3*t^13-.130989243410e-1*t^12+.161800605788*t^11+...
       5.13445082144*t^9-.428257279e-3+.7357373369*t^3;
```

```
A = [t^2 1-t  ;
     1+t t-t^2];
B = [t^2 0;
     1   t];

X0 = [9; -9];
XT = [0; 0];

dX0 = [-3; 4];

% Functions forming. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
size_A = size(A);
funstr = '[';
for k = 1:size_A(1)-1
    for j = 1:size_A(2)-1
        str = char(A(k,j));
        funstr = strcat(funstr,str,',');
    end
    str = char(A(k,size_A(2)));
    funstr = strcat(funstr,str,';');
end
for j = 1:size_A(2)-1
    str = char(A(size_A(1),j));
    funstr = strcat(funstr,str,',');
end
str = char(A(size_A(1),size_A(2)));
funstr = strcat(funstr,str,'];');

Afun = inline(funstr,'t');

size_B = size(B);
funstr = '[';
for k = 1:size_B(1)-1
    for j = 1:size_B(2)-1
        str = char(B(k,j));
        funstr = strcat(funstr,str,',');
    end
    str = char(B(k,size_B(2)));
    funstr = strcat(funstr,str,';');
end
for j = 1:size_B(2)-1
    str = char(B(size_B(1),j));
    funstr = strcat(funstr,str,',');
end
str = char(B(size_B(1),size_B(2)));
funstr = strcat(funstr,str,'];');

Bfun = inline(funstr,'t');

% Stabilization. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
P1 = [1 0;
      0 1];
R = [1 0;
     0 1];
Q = [1000 0;
     0 1000];

% Riccati equation solving. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
options = odeset('AbsTol',1e-8,'RelTol',1e-6);
tspan = fliplr(tc);
[tinv, res] = ode113(@odefun,tspan,reshape(P1,1,n^2),options);
P = reshape(flipud(res),size(res,1),n,n);

% Controller coefficientes matrix forming. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k = 1:length(tc)
      M(:,:) = P(k,:,:);
      K(:,:,k) = - inv(R)*(Bfun(tc(k)))'*M;
end
% Modelling. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
u1_pc = double(subs(u1_p,'t',tc)); u2_pc = double(subs(u2_p,'t',tc));
x1_pc = double(subs(x1_p,'t',tc)); x2_pc = double(subs(x2_p,'t',tc));

N = length(tc);
Xs = X0+dX0;
dXs = dX0;
KM(:,:) = K(:,:,1);
dU(:,1) = KM*dXs;
```

```
Xn(:,1) = Xs;
for k = 2:N
   KM(:,:) = K(:,:,k);
   U = [u1_pc(k);u2_pc(k)];
   k11 = Afun(tc(k))*Xs+Bfun(tc(k))*U;
   k21 = Afun(tc(k)+dt/2)*(Xs+dt*k11/2)+Bfun(tc(k)+dt/2)*U;
   k31 = Afun(tc(k)+dt/2)*(Xs+dt*k21/2)+Bfun(tc(k)+dt/2)*U;
   k41 = Afun(tc(k)+dt)*(Xs+dt*k31)+Bfun(tc(k)+dt)*U;
   Xs = Xs+dt*(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;

   dXs = Xs-[x1_pc(k); x2_pc(k)];
   dU(:,k) = KM*dXs;

   U = [u1_pc(k); u2_pc(k)]+dU(:,k);
   k11 = Afun(tc(k))*Xs+Bfun(tc(k))*U;
   k21 = Afun(tc(k)+dt/2)*(Xs+dt*k11/2)+Bfun(tc(k)+dt/2)*U;
   k31 = Afun(tc(k)+dt/2)*(Xs+dt*k21/2)+Bfun(tc(k)+dt/2)*U;
   k41 = Afun(tc(k)+dt)*(Xs+dt*k31)+Bfun(tc(k)+dt)*U;
   Xs = Xs+dt*(k11+2*k21+2*k31+k41)/6;

   dXn(:,k) = dXs;
   Xn(:,k) = Xs;
end

% Graphs plotting. %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
for k = 1:N
    p11(1,k) = P(k,1,1); p12(1,k) = P(k,1,2);
    p21(1,k) = P(k,2,1); p22(1,k) = P(k,2,2);
end

figure
subplot(2,1,1)
plot(tc,p11,'-k','LineWidth',2)
ylabel('p11(t)')
xlabel('t, c')
grid
subplot(2,1,2)
plot(tc,p12,'-k','LineWidth',2)
ylabel('p12(t)')
xlabel('t, c')
grid
figure
subplot(2,1,1)
plot(tc,p21,'-k','LineWidth',2)
ylabel('p21(t)')
xlabel('t, c')
grid
subplot(2,1,2)
plot(tc,p22,'-k','LineWidth',2)
ylabel('p22(t)')
xlabel('t, c')
grid
figure
plot(tc,u1_pc,':k',tc,u1_pc+dU(1,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('u1(t)')
legend('1','2',4)
grid
zoom
figure
plot(tc,u2_pc,':k',tc,u2_pc+dU(2,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('u2(t)')
legend('1','2',4)
grid
zoom
figure
plot(tc,x1_pc,':k',tc,Xn(1,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x1(t)')
legend('1','2')
grid
zoom
figure
```

```
plot(tc,x2_pc,':k',tc,Xn(2,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('x2(t)')
legend('1','2',4)
grid
zoom
figure
plot(x1_pc,x2_pc,':k',Xn(1,:),Xn(2,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('x1')
ylabel('x2(x1)')
legend('1','2')
grid
zoom

for k = 1:N
    k11(k) = K(1,1,k); k12(k) = K(1,2,k);
    k21(k) = K(2,1,k); k22(k) = K(2,2,k);
end

figure
subplot(2,1,1)
plot(tc,k11,'-k','LineWidth',2)
ylabel('k11(t)')
xlabel('t, c')
grid
subplot(2,1,2)
plot(tc,k12,'-k','LineWidth',2)
ylabel('k12(t)')
xlabel('t, c')
grid
figure
subplot(2,1,1)
plot(tc,k21,'-k','LineWidth',2)
ylabel('k21(t)')
xlabel('t, c')
grid
subplot(2,1,2)
plot(tc,k22,'-k','LineWidth',2)
ylabel('k22(t)')
xlabel('t, c')
grid
figure
plot(tc,dU(1,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('du1(t)')
grid
zoom
figure
plot(tc,dU(2,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('du2(t)')
grid
zoom
figure
plot(tc,dXn(1,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('dx1(t)')
grid
zoom
figure
plot(tc,dXn(2,:),'-k','LineWidth',2)
title(' ')
xlabel('t, c')
ylabel('dx2(t)')
grid
zoom

% Riccati equation odefun determination.%%%
```

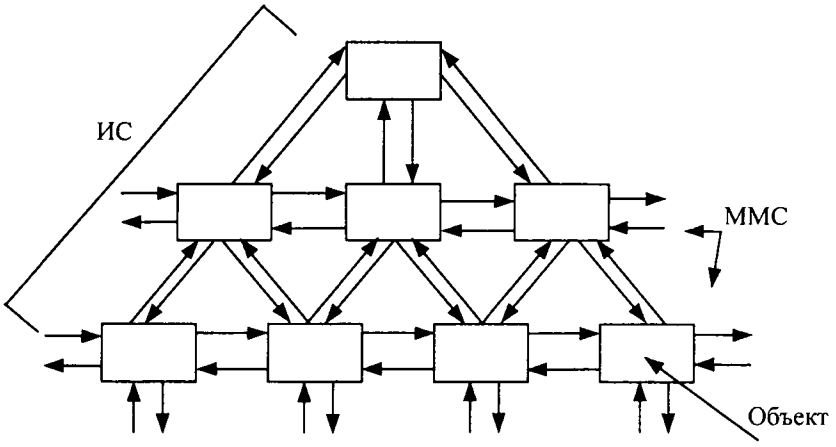
ГЛАВА 6. ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМИЗАЦИЮ УПРАВЛЕНИЯ МНОГООБЪЕКТНЫМИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ (ММС) НА ОСНОВЕ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫХ КОМПРОМИССОВ (ИГРОВЫЕ ПОДХОДЫ В УПРАВЛЕНИИ)

6.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ПРОЕКТИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ МНОГООБЪЕКТНОЙ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНОЙ СИСТЕМОЙ НА ОСНОВЕ СТАБИЛЬНЫХ ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ И КОМПРОМИССОВ В УСЛОВИЯХ ИСХОДНОЙ СТРУКТУРНОЙ НЕСОГЛАСОВАННОСТИ, КОНФЛИКТА И НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

С ростом информационной и структурно-целевой сложности функционирования и проектирования управляемых систем все более существенным становится учет факторов несогласованности, конфликтности и неопределенности различного характера.

Развиваемые игровые подходы управления в условиях конфликта являются основными в одном из классов задач теории оптимального управления. Проблема взаимодействия объектов (коалиций) возникает при прямом формировании многообъектной многокритериальной системы (ММС) в физической модели конфликтной ситуации, при структуризации классической однообъектной и однокритериальной задачи управления с формированием ММС с элементами конфликтности в процессах согласования и координации в структуре, а также при представлении сложной задачи и системы многоуровневой структурой. Действительно, структура многоуровневой системы [61, 70] (рис. 6.1) позволяет выделить три вида систем: систему-объект; систему, которую составляет горизонтальный ряд в общем случае равнозначных объектов (ММС); полную иерархическую систему (ИС).

Каждый вид системы формирует свой «вклад» в задачи оптимизации. В рамках ММС формируется класс задач оптимизации, в котором известные подходы оптимизации объекта (вариационные подходы, принцип максимума, методы динамического программирования и процедуры нелинейного программирования) существенно дополняются игровыми подходами с собственными принципами оптимизации многообъектного взаимодействия в ММС, методы решения в рамках которых базируются на многообъектности структуры, многокритериальности задач и свойствах взаимодействия объектов при проектировании и управлении ММС антагонистического, бескоалиционного, коалиционного, кооперативного и комбинированного характера. По существу, создается достаточно полный набор методов оптимизации ММС как основа теории оптимального управления ММС, которая занимает определенное промежуточное место между классической теорией управления и теорией оптимизации решений в многоуровневых системах. Поэтому предлагаемая разработка способов управления ММС, имеющих свойства межобъектной устойчивости (стабильности) и эффективности в конфликте и кооперации и обеспечивающих компромиссы на тактической и информационной основе с элементами интеллектуализации, является актуальной в теории управления ММС.



Структуры	Классы задач
Объект	Эффективность на основе классической теории оптимального управления (ТОУ)
ММС	Эффективность и стабильность на основе ТОУ и игровых подходов (ИП)
ИС	Эффективность, стабильность, межуровневая оптимальность на основе ТОУ, ИП и теории принятия решений в ИС

Рис. 6.1. Структура многоуровневой системы и классы задач

Анализ подтверждает вывод Ю.Б. Гермейера о преждевременной и чрезмерной заформализованности принятия решения в классах игр и позволяет развить его в том смысле, что принципы конфликтного взаимодействия, принципы кооперативной оптимальности, как правило, взаимосвязаны в рамках практической задачи (так как стабильность и эффективность — две грани одной задачи управления ММС), и эти взаимосвязи требуют формирования различных форм компромиссов.

Известна [62, 87] следующая классификация неопределенных факторов:

- неопределенные факторы как следствие недостаточной изученности каких-либо процессов функционирования объекта-подсистемы (внешних воздействий, возмущений, начальных условий, текущего состояния — позиции, параметров функций, в частности, законов распределения и моментов случайных функций и т.д.) — это так называемые природные неопределенности или неопределенности среды;
- неопределенные факторы, отражающие неопределенность во взаимной информации, связанной с описанием, действиями объектов-подсистем в сложной многообъектной системе, — неопределенности взаимодействующих объектов-подсистем (неопределенность «активного партнера»);
- неопределенные факторы, отражающие неточное знание цели и показателей цели в сложной системе (это проблема перехода от цели, сформулированной на естественном языке, к вектору показателей, обладающему полнотой описания исходной цели, независимостью свойств и ограниченной размерностью, это неопределенность по выбору решения в задаче с векторным показателем, это параметрическая неопределенность скалярного показателя и т.д.), — так называемая неопределенность цели.

Данный подход является достаточно универсальным при управлении и проектировании в условиях всех трех видов неопределенности на основе обоснования целевых «активных» свойств неопределенности и различных степеней ее конфликтности.

6.1.1. Общее определение игры. Частные классы игр

Определение 6.1 [20]. Игрой называется набор

$$\Gamma = \left[N, P, \{X_K\}, S, \left\{S\left(x^K\right)\right\}, \left\{\succsim_K\right\}\right], \tag{6.1}$$

где N — произвольное множество игроков; P — коалиционная структура, $P \in \mathrm{P}$ — множество коалиционных структур; K — коалиция — группа игроков, которой приписаны действия и интересы; X_K — произвольное множество стратегий коалиции, $K \in P \in \mathrm{P}$ (при любом множестве $\mathrm{P}: K \subset N$); S — произвольное множество всех исходов игры на $P \in \mathrm{P}$; $S\left(x^K\right)$ — множество возможных исходов на $P \in \mathrm{P}$, если коалиция K применяет стратегию x^K; $\succsim_K$ — транзитивное отношение предпочтения коалиции $K \in P \in \mathrm{P}$.

Индивидуальные предпочтения, как правило, представляются некоторыми отображениями J_i на S, которые являются функциями выигрыша (потерь). Тогда предпочтительность исхода s' по сравнению с исходом s'' $\left(s' \succsim_K s''\right)$ означает $J_i\left(s'\right) \geq J_i\left(s''\right)$ для всех $i \in K$.

Множество $S\left(x^K\right) \subset S$ позволяет каждой коалиции оценивать, как выбор коалицией K конкретной стратегии $x^K \in X_K$ изменяет множество возможных исходов.

Определение 6.2. Коалиционной структурой (разбиение множества N) называется такое семейство коалиций $P \in \mathrm{P}$, что

$$\begin{gathered} X_K \neq \varnothing \text{ для всех } K \in P \text{ (и } X_i \neq \varnothing,\ i \in K\text{)}, \\ K \cap K' = \varnothing \text{ для всех } K, K' \in P,\ K \neq K', \\ \left(\bigcup_{K \in P} K\right) \cap K' \neq \varnothing \text{ для любого } K'. \end{gathered} \tag{6.2}$$

Если игроки разбились на коалиции и эти коалиции выбрали свои стратегии, то считается, что игра Γ разыграна.

Определение 6.3. Для любой коалиционной структуры P набор стратегий $x(P) = \bigcup x^K$, $K \in P$ называется *ситуацией* в игре.

При реализации ситуации $x(P)$ множество исходов сужается до $\bigcap S\left(x^K\right)$, $K \in P$. Далее предполагается, что последнее множество исходов состоит из единственного элемента [20].

Замечание 6.1. При отсутствии коалиций $P = (1, \ldots, i, \ldots, N)$ $(K = i)$ получаем частный случай определения 6.1:

$$\Gamma = \left[N, \{X_i\}, S, S(i), \left\{\succsim_i\right\}\right].$$

Определение 6.4 [20]. Динамической игрой называется набор

$$\Gamma = \left[N, \mathrm{P}, S, W, \{X_K(s)\}, \left\{S\left(x^K\right)\right\}, \left\{\succsim_K\right\}\right], \tag{6.3}$$

где N, P, S, W, $S \cap W \neq \varnothing$ — произвольные множества игроков, коалиционных структур, неокончательных состояний игры и множества окончательных исходов игры; $X_K(s)$ — произвольное множество стратегий коалиции K в состоянии $s \in S$;

$S(x^K) \subset S \cup W$ — множество исходов (как окончательных, так и неокончательных) после применения коалицией стратегий $x^K \in X_K(s)$; $\succcurlyeq_K$ — предпочтение коалиции K на множестве конечных исходов W.

Реализация динамической игры состоит из последовательности состояний игры $s_1,\ldots,s_m \in S$, коалиционных структур $P_1,\ldots,P_m \in \mathrm{P}$ в данных состояниях и выбранных ситуаций $x(P_j,s_j)=(x^K)_{K\in P_j}$, $x^K \in X_K(s_j)$ $(j=\overline{1,m})$, причем в ситуациях $x(P_j,s_j)$ $(j<m)$ возможны исходы из S, в том числе s_{j+1}, а в ситуации $x(P_m,s_m)$ — только из W. То есть из $S(x(P,s))=\bigcap\limits_{K\in P} S(x^K)$ следует

$$s_{j+1} \in S(x(P_j,s_j)) \quad j=\overline{1,m-1}, \quad S(x(P_m,s_m)) \subset W.$$

Определение 6.5. Бескоалиционной игрой при фиксированном P называется набор

$$\Gamma=[N,P,\{X_K\},\{J_K\}], \tag{6.4}$$

где P — фиксированное разбиение, $J_K=\{J_i\}_{i\in K}$ или $J_K=\sum_i J_i$ $\left(J_K=\sum_i \alpha_i J_i;\ \sum \alpha_i=1,\ 0\le\alpha_i\le 1\right)$, но при отсутствии разбиения $P\neq\varnothing$ — набор

$$\Gamma=[N,\{X_K\},\{J_K\}]. \tag{6.5}$$

Аналогичное описание коалиционной игры приводит к следующему определению.

Определение 6.6. Коалиционной игрой называется набор

$$\Gamma=[N,\mathrm{P},\{X_K\},\{J_K\}], \tag{6.6}$$

$K \in P \subset \mathrm{P}$ (при любом множестве P: $K \subset N$),

$$X_K=\prod_{i\in K} X_i,\ J_K(x)=\{J_i(x)\}_{i\in K},\ x\in X_N.$$

Для получения определения кооперативной игры вводится характеристическая функция $v(K)$, $K \subset N$, т.е. числовая функция, определенная на множестве 2^N всех подмножеств множества игроков N, $v(\varnothing)=0$.

Определение 6.7. Кооперативная игра на основе характеристической функции $v(K)$ с $v(\varnothing)=0$ моделирует распределение между игроками из N общего их выигрыша $v(N)$ согласно силе коалиции $v(K)$ и описывается набором

$$\Gamma=\left[N,S,\{X_K\},S(x^K),\left\{\succcurlyeq_K\right\}\right], \tag{6.7}$$

где $N=\{1,\ldots,N\}$;

$$S=\left\{x=(x_1,\ldots,x_N):\ x_i\ge v(i),\ \sum x_i=v(N)\right\};$$

$$X_K=\left\{x\in S:\ \sum_{i\in K} x_i \le v(K)\right\},\ K\subset N;$$

$$S(x^K)=\{(x^K)\},\ x^K\in X_K;$$

$x \succcurlyeq_K y$ означает $x_i > y_i$, $i \in K$.

Частный случай кооперативной игры может быть сформулирован на основе векторной оптимизации.

Определение 6.8 [18]. Кооперативной игрой называется набор

$$\Gamma = \left[N, X, X(N)\right], \tag{6.8}$$

где множество ситуаций

$$X(N) = \left\{\overline{x}(N)\right\} = \left\{\overline{x} \in X: \max_{x \in X} \sum_{i=1}^{N} J_i(x) = \right\} \sum_{i=1}^{N} J_i(\overline{x}).$$

И, наконец, в плане иерархических игр один или несколько игроков ограничивают множество исходов остальных на основе права первого хода. Остальные игроки в зависимости от условий разыгрывают игру в рамках одного из четырех классов игр. В работе Э.М. Вайсборда, В.И. Жуковского [18] предложено следующее определение.

Определение 6.9 [18]. Иерархической игрой называется набор

$$\Gamma = \left[N, L, N/L, X_N, X_{N/L}\right], \tag{6.9}$$

где N — число игроков в игре; L — число игроков, имеющих право первого хода; N/L — число координируемых игроков; $X_N = \bigcup\limits_{i \in N} X_i$ — общее множество стратегий; $X_{N/L} = \bigcup\limits_{i \in N/L} X_i$ — множество стратегий координируемых игроков.

6.1.2. Математическая модель конфликтной ситуации в ММС

Математическое описание ММС. В качестве основного описания ММС принимается система динамико-алгебраических связей

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^{\text{д}} = f\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_N\right), \ \mathbf{x}\left(t_0\right) = \mathbf{x}_0; & (6.10a) \\ \mathbf{x}^{\text{a}} = \left(t, \mathbf{x}, \mathbf{q}, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_N\right), \ \mathbf{x} \in X; & (6.10б) \\ \mathbf{y} = \mathbf{y}\left(\mathbf{x}, \mathbf{q}, t\right), \ \mathbf{q} \in Q; & (6.10в) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{q}\right), \ \mathbf{u} \in U, & (6.10г) \end{cases}$$

где N — число объектов в ММС; $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}^{\text{д}}, \mathbf{x}^{\text{a}}\right)$ — вектор состояния ММС с $\mathbf{x}^{\text{д}}$ — динамическими и $\mathbf{x}^{\text{a}}$ — алгебраическими состояниями; $\mathbf{y}$ — вектор выхода ММС; $\mathbf{u} \in U$ — вектор управления ММС; $\mathbf{q} \in Q$ — вектор параметров ММС, которые характеризуют параметрическую неопределенность в (6.10*а*, *б*, *в*) и возможную параметризацию в (6.10*г*).

Выражения (6.10) характеризуют динамические связи (*а*), алгебраические связи (*б*), вектор выхода (*в*) и функцию принятия решения и управления (*г*). Управление

$$\mathbf{u} \in U = U_1 \times \ldots \times U_N, \tag{6.11}$$

$\mathbf{u}_i \in U_i$ — подвектор управления i-м объектом ММС; U_i, как правило, выпукло и компактно.

Свойства правых частей (6.10*а*), (6.10*б*) типичные. В основном, это непрерывность и дифференцируемость, а для (6.10*а*) — выполнены условия Липшица.

О выборе управляющих сил. Как известно, существует несколько способов задания управляющих сил:

Вектор параметров $\mathbf{q} \in Q$.

Программное управление $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t) = \left\{\mathbf{u}_i(t)\right\}$.

Закон управления (*или позиционное управление*) $\mathbf{u} = \mathbf{u}\left(t, \mathbf{x}\right), \mathbf{u} \in U$.

Параметризированное программное управление $\mathbf{u}_i = \left\{u_s\right\}$, где

$$u_s = u_s\left(q^s, t\right) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{l} q_j^s f_j(t); & (6.12a) \\ \sum_{j=n}^{l} q_j^s f_j(t) 1\left[t_j - t_{j-1}\right], \ n = \overline{1, l-1}, & (6.12б) \end{cases}$$

где $\mathbf{q}^s = \left(q_1^s, \ldots, q_l^s\right) \in Q_s$: $u_s \in U_s$, $U_i = \prod_s U_s$; $Q_i = \prod_s Q_s$, $f_i(t)$ — непрерывные функции, заданные на отрезке $[t_0, T]$ (6.12*а*) или на отрезке $\left[t_{j-1}, T\right]$ (6.12*б*); $1\left[t_j - t_{j-1}\right]$ — интервал применения управления u_s (6.12*б*)

$$1\left[t_j - t_{j-1}\right] = \begin{cases} 1 \text{ при } t \in \left[t_{j-1}, \ t_j\right]; \\ 0 \text{ при } t \notin \left[t_{j-1}, \ t_j\right], \end{cases}$$

при этом $1\left[t_j - t_{j-1}\right] = 1\left[t - t_{j-1}\right] - 1\left[t - t_j\right]$ и $\left[t_0, t_1, \ldots, t_{j-1}, t_j, \ldots, T\right]$ — заданное разбиение отрезка $[t_0, T]$.

Параметризованный закон управления (позиционная стратегия) $\mathbf{u}_i = \left\{u_s\left(\mathbf{q}^s, \mathbf{x}, t\right)\right\}$

$$u_s = u_s\left(\mathbf{q}^s, \mathbf{x}, t\right) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{l} q_j^s f_j(\mathbf{x}, t); \\ \sum_{j=1}^{l} q_j^s f_j(\mathbf{x}, t) 1\left[t_j - t_{j-1}\right], \end{cases} \quad (6.13)$$

где $\mathbf{q}^s \in Q_s$, $u_s \in U_s$, $f_j(\mathbf{x}, t)$ — заданные непрерывные функции.

Программно-корректируемый закон управления (ПКЗУ) (стратегия) при заданном разбиении отрезка $[t_0, T]$ с малым $\Delta t = t_j - t_{j-1}$

$$\mathbf{u}_i(\bullet) = \left\{u_s(\bullet)\right\};$$

$$u_s(\bullet) = \sum_{j=1}^{l} u_{sj}\left(\mathbf{x}\left(t_{j-1}\right), t\right) 1\left[t_j - t_{j-1}\right], \ t_l = T, \quad (6.14)$$

где $u_{sj}\left(\mathbf{x}\left(t_{j-1}\right), t\right) = u_{sj}(t)$ — допустимое программное управление $u_s \in U_{sj}$ на отрезке $\left[t_{j-1}, T\right]$ при известном начальном условии $\mathbf{x}\left(t_{j-1}\right)$ и реализуемое на $t \in \left[t_{j-1} - t_j\right]$.

Параметризованный ПКЗУ, который получается на основе комбинации 4 и 6, например в виде (6.14), где

$$u_{sj}\left(\mathbf{x}\left(t_{j-1}\right), t\right) = \sum_{k=1}^{p} q_{jk}^s 1\left[t_k - t_{k-1}\right] \quad (6.15)$$

с разбиением $\left[t_{j-1}, t_j, \ldots, t_{k-1}, t_k, \ldots, T\right]$ на отрезке $\left[t_{j-1}, T\right]$ при фиксированном $\mathbf{x}\left(t_{j-1}\right)$.

Векторный целевой показатель. Целевые свойства ММС характеризуются вектором

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}\left[\mathbf{x}_0, t_0, T, \mathbf{q}, \mathbf{x}(\bullet), \mathbf{u}(\bullet), \mathbf{y}(\bullet)\right], \quad (6.16)$$

который представляет собой сложную функциональную связь с указанными величинами. Типичным видом i-й функции выигрыша (потерь) является функционал на $t_0 \le t \le T$

$$J_i(\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_N)=\Phi_i(T,\mathbf{x}(T))+\int_{t_0}^{T}F_i(t,\mathbf{x},\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_N)dt,\ i=\overline{1,m}. \quad (6.17)$$

Коалиционная структура действий и интересов ММС. Пусть $P=\left(P^{д},P^{и}\right)$ — коалиционная структура действий и интересов с размерностью m_k множества M_K индексов коалиций в каждой $P^{д}$, где $M_K=(1,\ldots,m_k)$.

Тогда

$$P^{д}=\left\{K_1^{д},\ldots,K_{m_r}^{д}\left|K_i^{д}\bigcap_{i\neq j}K_j^{д}=0;\ \bigcup_{i\in M_K}K_i^{д}=R=[1,r]\right.\right\}, \quad (6.18)$$

где r — размерность множества индексов вектора параметров (после параметризации управлений) или множество индексов управлений (без параметризации)

$$P^{и}=\left\{K_1^{и},\ldots,K_{m_m}^{и}\left|K_i^{и}\bigcap_{i\neq j}K_j^{и}=0;\ \bigcup_{i\in M_K}K_i^{и}=M=[1,m]\right.\right\}, \quad (6.19)$$

где m — размерность множества индексов вектора показателей.

В свою очередь, каждой $K_i^{д}$ соответствует, например, при полной параметризации вектор параметров $\mathbf{q}^i$ или вектор $\mathbf{u}_i$ (без параметризации). Каждой $K_i^{и}$ соответствует целевой вектор

$$P^{д}=P^{и}=P=\left\{K_1,\ldots,K_{m_k}:K_i\bigcap K_j=\varnothing;\bigcup_{j=1}^{m_k}K_j=[R,M]\right\}.$$

Принципы конфликтного взаимодействия. Понятия стабильности и эффективности. В общем случае имеют место пять принципов конфликтного взаимодействия:

- антагонизм $\left\{M_K=\{1,2\},\ J^1=-J^2\right\}$;
- бескоалиционное взаимодействие;
- коалиционное взаимодействие;
- кооперативное взаимодействие;
- иерархическое взаимодействие (с правом первого хода).

Как известно, в данных принципах конфликтного взаимодействия заложены три фундаментальных понятия теории игр: *стабильность*, *эффективность и стабильно-эффективный компромисс*.

Стабильность ММС — это обеспечение межобъектно-устойчивых (равновесных) процессов функционирования и проектирования многообъектных структур в условиях конфликтности, несогласованности или неопределенности.

Эффективность ММС — это достижение максимального целевого качества объектов, коалиций и ММС в целом на основе устойчивого и рационального коалиционирования.

Стабильно-эффективный компромисс в ММС (СТЭК ММС) — это объединение стабильности и эффективности в рамках множества решений: от полного совпадения данных свойств до обеспечения определенной степени сближения в условиях информационно-тактических расширений соглашений.

6.1.3. Методы получения стабильных и эффективных решений

Определения стабильности и эффективности, используемые в работе, без ограничения общности сформулируем в рамках параметризованных управлений и/или процедур принятия решения, причем на общий вектор параметров $\mathbf{q}$ наложены ограничения $\mathbf{q}\in Q$, где

$$Q = \sum_{i \in M_K} Q_i, \quad Q = \left\{ \mathbf{q} \in E^r \middle| \mathbf{q}_L^i \le \mathbf{q}^i \le \mathbf{q}_H^i;\ \mathbf{C}_i \mathbf{q}^i \le \mathbf{b}^i \right\},$$

где $\mathbf{q}_L^i, \mathbf{q}_H^i \in E_i^r$; $\mathbf{C}_i = [s_i \times r_i]$, $\mathbf{b}^i = [s^i \times 1]$.

Понятия эффективного управления базируется на Парето-оптимальном решении, Ω-оптимальном решении и дележе Шепли.

Определение 6.10. Пусть множество индексов коалиции $M_K = \{1\}$, $K = K_1$, $\mathbf{J} = (J_1, \ldots, J_m)$. Вектор $\mathbf{q}^0 \in Q$ оптимален по Парето, если из условия $\mathbf{q} \in Q$, $\mathbf{J}(\mathbf{q}) \ge \mathbf{J}(\mathbf{q}^0)$ следует либо $\mathbf{J}(\mathbf{q}) = \mathbf{J}(\mathbf{q}^0)$, либо система неравенств несовместна и хотя бы одно из неравенств противоположного смысла.

Определение 6.11. Пусть Ω — многогранный конус, определенный матрицей

$$\mathbf{B} = \{p \times m\}, \ \Omega = \left\{ \mathbf{z} \in E^m \middle| \mathbf{B} \cdot \mathbf{z} \ge 0 \right\}, \ \mathbf{J}(\mathbf{q}) \in E^m.$$

Пусть $\mathbf{H}(\mathbf{q}) \in E^p$ — новый векторный показатель вида $\mathbf{H}(\mathbf{q}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{q})$. Тогда оптимальное по Парето множество для $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ совпадает с Ω-оптимальным множеством для $\mathbf{J}(\mathbf{q})$: $Q_\Pi^H = Q_\Omega^J$.

Определение 6.12. Набор параметров $\mathbf{q}^{\text{ш}} = \left\{ q_1^{\text{ш}}, \ldots, q_r^{\text{ш}} \right\}$ называется оптимальным по Шепли, если обеспечивает $\min\limits_q \sum\limits_{i \in M_K} \left[J_i - J_i^{\text{ш}} \right]^2$, где $\mathbf{J}^{\text{ш}} = \left\{ J_i^{\text{ш}} \right\}$ — функция Шепли, которая, например при $M_K = \{1,2,3\}$ имеет вид

$$J_1^{\text{ш}} = \frac{2!0!}{3!}\left[\nu(1,2,3) - \nu(2,3) \right] + \frac{1!1!}{3!}\left[\nu(1,2) - \nu(2) \right] +$$
$$+ \frac{1!1!}{3!}\left[\nu(1,3) - \nu(3) \right] + \frac{0!2!}{3!}\left[\nu(1) - \nu(0) \right];$$

.....

$$J_3^{\text{ш}} = \frac{2!0!}{3!}\left[\nu(1,2,3) - \nu(1,2) \right] + \frac{1!1!}{3!}\left[\nu(2,3) - \nu(2) \right] +$$
$$+ \frac{1!1!}{3!}\left[\nu(1,3) - \nu(1) \right] + \frac{0!2!}{3!}\left[\nu(3) - \nu(0) \right],$$

где $\nu(K) = \max\limits_K J_K \left[K, (N|K)^r \right] = J_K \left[K^r, (N|K)^r \right]$ — характеристическая функция, как точка равновесия по Нэшу. Например, $\nu(1,2)$ означает:

$$K = 1,2,\ N/K = 3,\ \nu(1,2) = J_K \left[K^r, (N/K)^r \right].$$

Стабильные решения формируются в виде гарантирующих решений, скалярного равновесия по Нэшу, векторных равновесий (векторное равновесие по Нэшу, Ω-равновесие) и коалиционного равновесия на основе V-решений в форме угроз-контругроз (УКУ) Вайсборда–Жуковского [24].

Определение 6.13. Набор решений $\mathbf{q}^r = \left(\mathbf{q}^{r,1}, \ldots, \mathbf{q}^{r,m_k} \right)$ является равновесным по Нэшу относительно скалярного показателя $\Phi_i^c = \sum\limits_{j \in K_i} \lambda_j^i J_j^i$, который является функцией эффективности коалиции K_i, если для любого

$$\mathbf{q}^i \in Q_i, i \in M_K = (1,2,\ldots,m_k),\ \Phi_i^c\left(\mathbf{q}^r \middle\| \mathbf{q}^i\right) \le \Phi_i^c\left(\mathbf{q}^r\right),$$

где $\left(\mathbf{q}^r \| \mathbf{q}^i\right) = \left\{\mathbf{q}^{r,1},\ldots,\mathbf{q}^{r,i-1},\mathbf{q}^i,\mathbf{q}^{r,i+1},\ldots,\mathbf{q}^{r,m_k}\right\}$.

Определение 6.14. Набор векторов параметров $\left\{\mathbf{q}^{\text{УКУ},i},\mathbf{q}^{\text{УКУ},M_K/i}\right\}$, где

$$\mathbf{q}^{\text{УКУ},M_K/i} = \left\{\mathbf{q}^{\text{УКУ},1},\ldots,\mathbf{q}^{\text{УКУ},i-1},\mathbf{q}^{\text{УКУ},i+1},\ldots,\mathbf{q}^{\text{УКУ},m_k}\right\}$$

называется коалиционным равновесием (*V*-решением в форме угроз-контругроз) при показателе коалиции $\Phi_i^c = \sum_{j\in K_i} \lambda_j^i J_j^i$, если при попытке коалиции K_i улучшить свой показатель $\left(\text{угроза} \;—\; \overline{q}^i\right)$

$$\Phi_i^c\left\{\mathbf{q}^{\text{УКУ},i},\mathbf{q}^{\text{УКУ},M_K/i}\right\} \le \Phi_i^c\left\{\overline{\mathbf{q}}^i,\mathbf{q}^{\text{УКУ},M_K/i}\right\}$$

на множестве *P* допустимых коалиционных структур существует возможность создания контркоалиции

$$\Phi_{M_K/i}^c = \sum_{j\in M_K/i} \lambda_j^{M_K/i} J_j^{M_K/i},$$

для которой реализуется контругроза $\overline{\mathbf{q}}^{M_K/i}$

$$\Phi_i^c\left\{\overline{\mathbf{q}}^i,\overline{\mathbf{q}}^{M_K/i}\right\} \le \Phi_i^c\left\{\mathbf{q}^{\text{УКУ},i},\mathbf{q}^{\text{УКУ},M_K/i}\right\};$$

$$\Phi_{M_K/i}^c\left\{\overline{\mathbf{q}}^i,\overline{\mathbf{q}}^{M_K/i}\right\} > \Phi_{M_K/i}^c\left\{\overline{\mathbf{q}}^i,\mathbf{q}^{\text{УКУ},M_K/i}\right\}.$$

Определение 6.15. Набор параметров $\mathbf{q}^r$ является равновесным по Нэшу относительно векторного показателя $\mathbf{J} = \left\{\mathbf{J}^1,\ldots,\mathbf{J}^{m_k}\right\}$, где $\mathbf{J}^i \in K_i$, $i \in M_K$ (фиксированная коалиционная структура), если набор $\mathbf{q}^r$ является *V*-решением без угроз и если для любых $i \in M_K$ и $\mathbf{q}^i \in Q_i$ из условия $\mathbf{J}_i\left(\mathbf{q}^r \middle\| \mathbf{q}^i\right) \ge \mathbf{J}_i\left(\mathbf{q}^r\right)$ следует лишь $\mathbf{J}^i\left(\mathbf{q}^r \middle\| \mathbf{q}^i\right) = \mathbf{J}^i\left(\mathbf{q}^r\right)$ (т.е. на векторе $\mathbf{J}^i$ имеет место Парето-оптимальность).

Определение 6.16. Набор векторов параметров $\mathbf{q}^\Omega$ называется Ω-равновесным относительно векторного показателя $\mathbf{J} = \left\{\mathbf{J}^1,\ldots,\mathbf{J}^{m_k}\right\}$, где $\mathbf{J}^i \in K_i$, $i \in M_K$, если $\mathbf{q}^\Omega$ есть *V*-решение без угроз и если для любых $i \in M_K$ и $\mathbf{q}^i \in Q_i$ из условия $\mathbf{H}^i\left(\mathbf{q}^\Omega \middle\| \mathbf{q}^i\right) \ge \mathbf{H}^i\left(\mathbf{q}^\Omega\right)$, где $\mathbf{H}^i = \mathbf{B}^i \cdot \mathbf{J}^i$, следует либо $\mathbf{H}^i\left(\mathbf{q}^\Omega \middle\| \mathbf{q}^i\right) = \mathbf{H}^i\left(\mathbf{q}^\Omega\right)$, либо его несовместность (т.е. на векторе $\mathbf{J}^i$ в соответствии с определением 6.11 имеет место Ω-оптимальность).

Данные в [24, гл. 1], а также в разделах 6.2–6.5 главы определения стабильных и эффективных решений (скалярное Нэш-равновесие, векторные равновесия, угрозы-контругрозы (УКУ), векторно-оптимальные решения по Парето и конусу, дележ по Шепли и т.д.) позволили далее разработать методы модификации и поиска этих решений на основе вновь созданного математического и алгоритмического обеспечения [24, гл. 2–5, 7, 8]. На рис. 6.3 представлены восемь разработанных методов и алгоритмов. Данные методы и алгоритмы реализованы в рамках разработанных программных систем [24, гл. 9]:

- ПС «МОМДИС» (многокритериальной оптимизации многообъектных динамических систем) с разработкой методов и алгоритмов определения Нэш-, Парето-, УКУ-, Шепли-решений [38] и компромиссов;

- ПС FILTR (оптимизация стохастических антагонистических моделей (в интегродифференциальной форме) на основе фильтрации и управления) [32];
- ПС «Гарантия», ПС «Конфликт» (программная реализация программно-корректируемого закона управления на основе экстремального прицеливания) [28, 33];
- ПС ВР (алгоритмы поиска векторного равновесия) [18].

На рис. 6.3 справа указана степень проработки каждого алгоритма в соответствии с рис. 6.2.

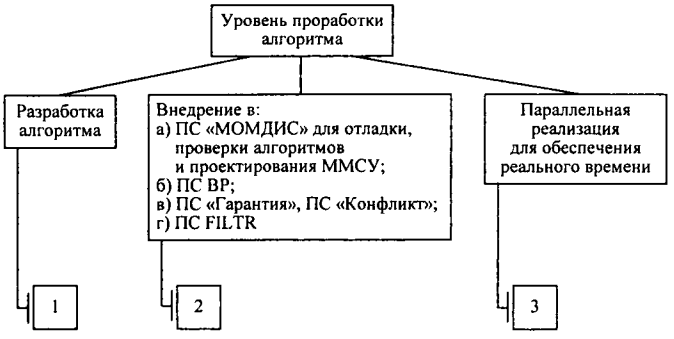


Рис. 6.2. Схема, иллюстрирующая уровень проработки алгоритма

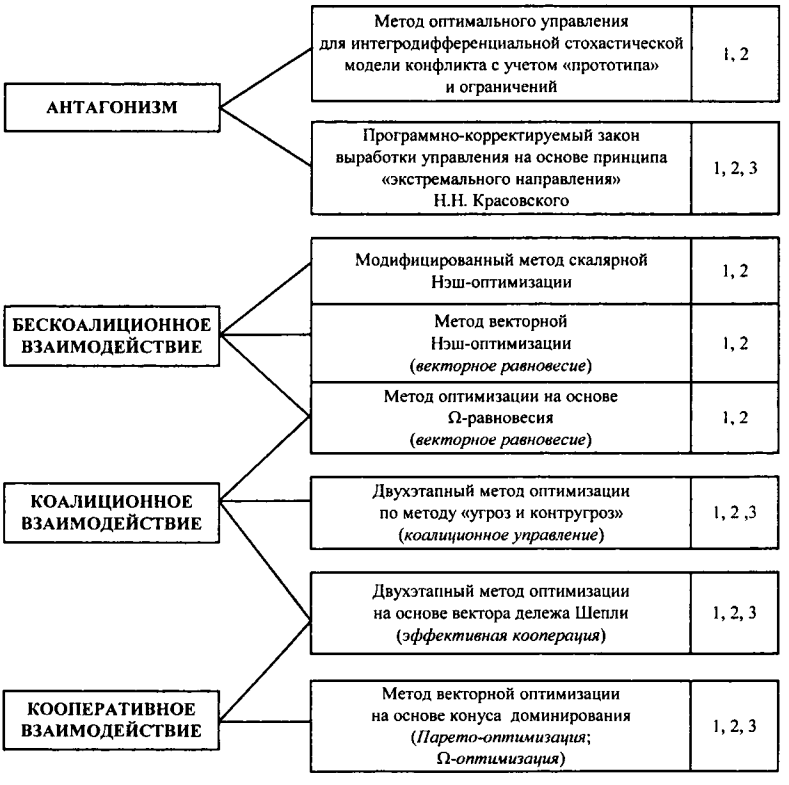


Рис. 6.3. Разработанные методы и алгоритмы взаимодействия объектов и коалиций

Для ряда алгоритмов были исследованы возможности их параллельной реализации [24, гл. 9].

На рис. 6.4 дана классификация разработанных стабильно-эффективных компромиссов ММС на основе необязательных соглашений Мулена и строгой договорной основе [24, гл. 6].

Смысл компромиссов на основе комбинации Парето–Нэш–УКУ–Шепли-подходов иллюстрирует рис. 6.5.

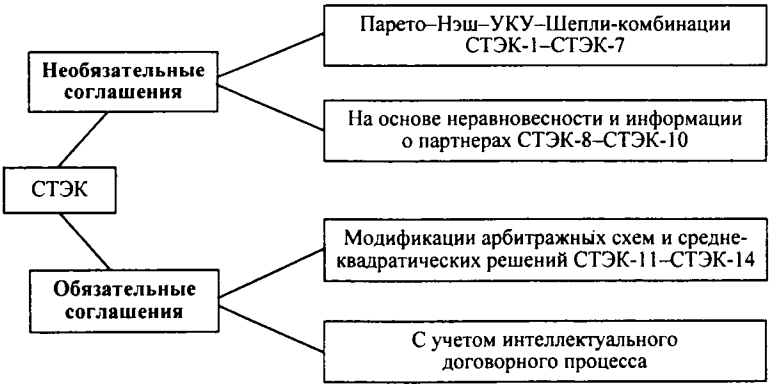


Рис. 6.4. Схема, иллюстрирующая классификацию стабильно-эффективных компромиссов ММС

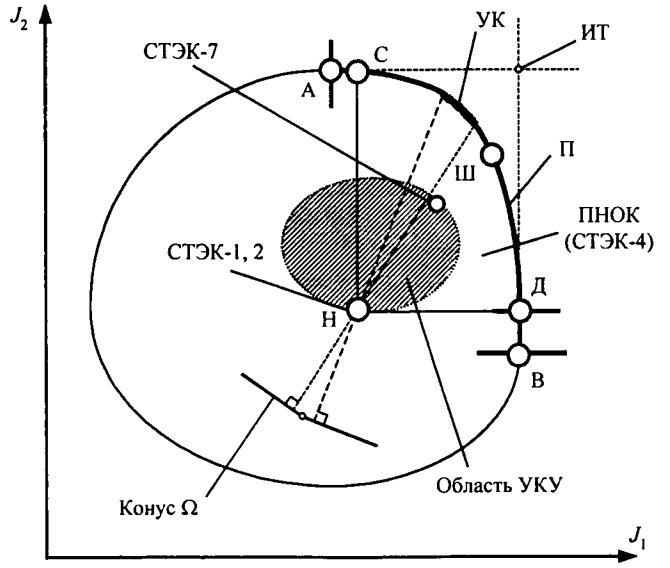


Рис. 6.5. Компромиссы на основе комбинации Парето–Нэш–УКУ–Шепли-подходов:
П — Парето-граница АВ; Н — Нэш-равновесие; УКУ — область угроз-контругроз;
ИТ — идеальная точка; УК — Ω-оптимальная часть П-границы на основе узкого конуса Ω;
Ш — точка Шепли; СНД — Парето–Нэш-область компромиссов (ПНОК)

СТЭКи заключаются в выборе недоминируемого наиболее эффективного Нэш-решения (точка Н), в формировании Парето–Нэш-области компромиссов (ПНОК) на основе прямоугольного конуса СНД, границей которой является Парето-граница, в выборе УКУ-решения на области ПНОК в той или иной степени близости к точке Шепли либо к «идеальной» точке и т.д.

Участникам игры имеет смысл выполнять необязательные соглашения в связи с устойчивостью ситуации.

В рамках обязательных соглашений рассматриваются комбинации арбитражных схем и среднеквадратических решений с опорным Нэш-равновесием и др. Игровые подходы имеют большую значимость в развитии интеллектуальных систем управления (ИСУ) [75], в состав которых входят, по меньшей мере, два присущих лишь ИСУ блока: динамическая экспертная система (ДЭС) и подсистема предельного целевого качества (ППЦК). Кроме необходимости пополнения базы знаний ДЭС разрабатываемыми игровыми алгоритмами, с одной стороны, и интеллектуализации компромиссов с учетом возможностей ИСУ, с другой стороны, в настоящее время разрабатывается концепция формирования ППЦК на основе игровых компромиссов в ММС и обобщенного гомеостаза [34, 76], а также на основе игровых компромиссов в иерархических системах [78].

6.1.4. О ПРИМЕНЕНИИ РАЗРАБОТАННЫХ МЕТОДОВ И АЛГОРИТМОВ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНОГО УПРАВЛЕНИЯ В ПРАКТИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

На основе данных подходов исследуются практически важные модели ММС в технических, экономических и биотехнических приложениях.

Так, в рамках технических задач разработаны методы оптимизации поуровневых фрагментов трехуровневой конфликтной ситуации ЛС СВН–ЛС ПВО (локальной подсистемы системы воздушного нападения и локальной подсистемы ПВО) [24], мехатронных структур робототехники, систем управления торможением автомобиля [84].

В рамках экономических задач микроэкономики разработанные методы применяются для исследования конкурентоспособности фирмы-предприятия на товарном и финансовом рынке. Так, на товарном рынке исследования проводятся на реальных моделях статической и динамической олигополии, на финансовом рынке ГДО сформирована модель и исследована эффективность «портфеля» инвестора [24].

В рамках биотехнических приложений рассмотрены вопросы стабильно-эффективного функционирования системы естественной технологии организма (СЕТО) на основе предложенной модели обобщенного гомеостаза (самосохранения организма) в задачах геронтологии, токсикологии, экологии и разработке искусственных органов с биологической (процессы жизнедеятельности и потоки веществ) и «кибернетической» моделью СЕТО и гомеостаза по В.Н. Новосельцеву [24, 65].

В связи со спецификой СЕТО следует отметить, что СЕТО содержит четыре основные функции: доставка в организм «горючего» и окислителя — функция систем пищеварения и дыхания; внутренний транспорт с помощью функции сердечно-сосудистой системы; собственно процессы жизнедеятельности (суммарное описание синтеза биополимеров (метаболизм), проведение нервного импульса, сокращение мышечных волокон и др.) с образованием конечных продуктов; элиминация и выведение конечных продуктов (функции печени и почек).

6.2. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ ДВУХУРОВНЕВЫЙ МЕТОД СКАЛЯРНОЙ НЭШ-ОПТИМИЗАЦИИ В БЕСКОАЛИЦИОННОЙ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ (СТАБИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ) С ТРЕХЭТАПНОЙ РЕАЛИЗАЦИЕЙ МЕТОДА

6.2.1. НЕОБХОДИМОЕ УСЛОВИЕ РАВНОВЕСИЯ ПО НЭШУ В ФОРМЕ ДВУХУРОВНЕВОЙ СТРУКТУРЫ ПАО [113]

Рассматривается конфликтное взаимодействие N коалиций со скаляризованными показателями J_i на фиксированном интервале времени $[0,T]$ как бескоалиционная игра с ненулевой суммой.

Модель конфликтной ситуации дана следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}(\cdot),t);\\
&\dot{\mathbf{x}}_0(t)=\overline{\mathbf{g}}(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{z}(0),t);\\
&\mathbf{z}(t)=(\mathbf{x}(t),\mathbf{x}_0(t))\in E^{n+N};\\
&\mathbf{x}(t)\in\mathbf{X}(t)\subset E^n;\\
&u_i(\cdot)\in U_i\subset F_i,\ \ i=\overline{1,N},\ \ F=F_1\times\ldots\times F_N;\\
&\mathbf{u}\in F,
\end{aligned}\tag{6.20}$$

где E^k — евклидово пространство размерности k; F_i — рефлексивное банахово (полное, линейное, нормированное) пространство действительных функций, определенных на интервале $[0,T]$, с предгильбертовым скалярным произведением $\langle\cdot,\cdot\rangle: F_i\times F_i\to E^1$; $\mathbf{X}(t)$ — заданное компактное множество в E^n при любых $t\in[0,T]$, и такое, что дополнительное к $\mathbf{X}(t)$ множество в E^n — связанное; $\mathbf{x}(t)$ — вектор состояния в E^n, для которого определены ограничения $\mathbf{X}(t)$ для всех $t\in[0,T]$; начальное состояние $\mathbf{x}(0)\in\mathbf{X}(0)$ — задано; конечное состояние принадлежит $\mathbf{X}(T)$; $U_i(\cdot)$ — заданное замкнутое ограниченное компактное подмножество из F_i, такое, что дополнительное к $U_i(\cdot)$ подмножество в F_i связное; $u_i(\cdot)$ — управляющий функционал i-й коалиции, кусочно-непрерывный на $[0,T]$, $u_i(t)\in U_i(t)$; f_k — для всех $k\in(1,n)$ непрерывно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям Липшица, а также непрерывно дифференцируемые по $\mathbf{u}$; $\overline{g}_i$ — для всех $i\in 1,N$ непрерывные и дифференцируемые функции для всех $\mathbf{u}(\cdot)$, $\mathbf{x}(0)\in\mathbf{X}(0)$, дважды непрерывно дифференцируемые по $\mathbf{u}(\cdot)$ в смысле Фреше; кроме того, обычно $\overline{g}_i$ явно зависит от состояния $\mathbf{x}(t)$, а так как состояние единственно для заданных $\mathbf{x}(0)$ и $\mathbf{u}(\cdot)$, то применяется сокращенное обозначение для $\overline{g}_i=\overline{g}_i(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{z}(0),t)$.

Показатели коалиций сведены к минимизируемому относительно $\mathbf{u}(\cdot)$ терминальному виду

$$\begin{aligned}
&J_i=x_{oi}(T)=x_{oi}(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{z}(0),T),\ \ i=\overline{1,N},\\
&x_{oi}(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{z}(0),t)=x_{oi}(0)+\int_0^t\overline{g}_i(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{z}(0),\tau)d\tau,\ \ t\in[0,T].
\end{aligned}\tag{6.21}$$

Терминальные платы x_{oi} дважды непрерывно дифференцируемы по Фреше относительно $\mathbf{u}(\cdot)$.

Определение 6.17. Управление $\mathbf{u}(\cdot)\in F$ является допустимым для данного $\mathbf{x}(0)$, если $\mathbf{u}(\cdot)\in U_1(\cdot)\times\ldots\times U_N(\cdot)$ и если $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{x}(t)\in\mathbf{X}(t)$ для всех $t\in[0,T]$.

Определение 6.18. Управление $\mathbf{u}^*(\cdot)\in F$ является оптимальным по Нэшу для данного $\mathbf{x}(0)$, если $\mathbf{u}^*(\cdot)$ является допустимым для $\mathbf{x}(0)$ и удовлетворяет условиям равновесия по Нэшу для терминальных плат

$$\forall i \in (1,N) \quad \begin{cases} \forall u_i(\bullet) \in U_i(\bullet); \\ \mathbf{u}^{oi} = \left(u_1^*, \ldots u_{i-1}^*, u_i, u_{i+1}^* \ldots, u_N^*\right) = \mathbf{u}^* \,\|\, u_i; \\ x_{oi}\left(\mathbf{u}^*(\bullet), \mathbf{z}(0), T\right) \le x_{oi}\left(\mathbf{u}^{oi}(\bullet), \mathbf{z}(0), T\right). \end{cases} \tag{6.22}$$

То есть уход любой подсистемы от ситуации равновесия в первую очередь невыгоден ей самой, так как увеличивает ее собственную плату.

Необходимое условие Пао формируется с учетом конструктивной идеи поиска решения, которая заключается в том, что бескоалиционное конфликтное взаимодействие систем с неполной информацией может быть сведено к двухуровневой иерархической системе (рис. 6.6), которая включает в себя:

1) N элементарных подсистем — коалиций, имеющих целью минимизацию своих локальных показателей $x_{oi}\left(\mathbf{u}(\bullet), \mathbf{z}(0), T\right)$ $i = \overline{1,N}$;
2) одну сверхсистему — фиктивного или реального арбитра ($i = 0$), глобальный показатель которой g при его минимизации формирует локальное необходимое условие равновесия по Нэшу.

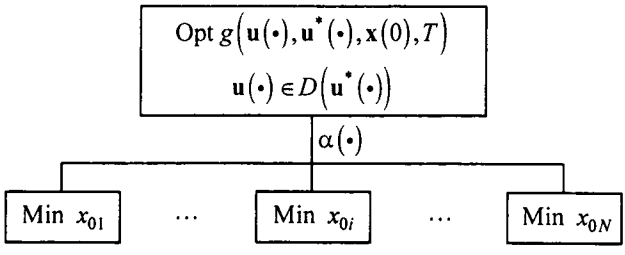


Рис. 6.6. Необходимое условие Нэш–Пао

Координация подсистем осуществляется таким образом, что вначале обеспечиваются интересы арбитра, а потом — остальных подсистем.

Координация выполняется итеративно координирующей функцией

$$\mathbf{a}(\bullet) = \left(a_1(\bullet), \ldots, a_N(\bullet)\right) \in F,$$

составляющей наилучшую текущую аппроксимацию $\mathbf{u}^*(\bullet)$, которая используется i-й элементарной подсистемой в качестве фиксированной компоненты a_i в векторе управления

$$\mathbf{u} \,\|\, a_i = \left(u_1, \ldots u_{i-1}, a_i, u_{i+1} \ldots, u_N\right)$$

при минимизации показателей подсистем.

Оптимизация управления $\mathbf{u}(\bullet)$ в каждой элементарной подсистеме нижнего уровня осуществляется по компонентам партнеров. Таким образом, каждая элементарная подсистема откликается на функцию координации $\mathbf{a}(\bullet)$ тем, что «сообщает» арбитру локальную информацию о том, каково должно быть управление остальных $(N-1)$ подсистем, чтобы оно минимизировало плату i-й подсистемы.

Арбитр осуществляет следующий итеративный шаг по определению координаций, учитывая информацию, полученную от подсистем.

Подобная двухуровневая структура имеет универсальный характер и может быть использована для того, чтобы найти другие типы равновесных управлений, (например, на основе «угроз и контругроз» и т.д.) при конфликтном взаимодействии.

Смысл оптимизационной конфликтной задачи «заложен» в структуре функции качества $g\left(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{u}^*(\cdot),\mathbf{x}(0),T\right)$, а «предельно неконфликтные» (похожие с учетом координации на аппроксимацию «утопической точки») итерационные оценки на нижнем уровне формируют максимально возможные начальные отклонения для каждой итерации на верхнем уровне.

Данная двухуровневая структура учитывает определенную неполноту информации, которая может иметь место при конфликтном взаимодействии.

Определение 6.19. Пусть $\mathbf{v}(\cdot)$ и $\mathbf{u}(\cdot)$ — допустимые управления, определенные на F при $x(0)$. Функция качества Пао определяется выражением

$$g\left(\mathbf{u}(\cdot),\mathbf{v}(\cdot),\mathbf{x}(0),t\right)=\prod_{i=1,N}\left\langle\frac{\partial x_{oi}\left(\mathbf{v}^{oi}(\cdot),\mathbf{z}(0),t\right)}{\partial u_i(\cdot)},u_i(\cdot)-v_i(\cdot)\right\rangle_i, \tag{6.23}$$

$$\mathbf{v}=(v_1,\ldots,v_N),\ \mathbf{v}^{oi}=\left(v_1^o,\ldots,v_{i-1}^o,u_i,v_{i+1}^o,\ldots,v_N^o\right),$$

где $\mathbf{v}=\mathbf{a}$; $\mathbf{v}^{oi}$ — результат оптимизации x_{oi} на нижнем уровне (на итерации), частные производные определены в смысле Фреше; $\langle\cdot,\cdot\rangle_i$ — предгильбертово скалярное произведение. Под знаком скалярного произведения находится частный дифференциал x_{oi} (основная линейная часть приращения x_{oi})

$$\partial x_{oi}=\frac{\partial x_{oi}(\cdot)}{\partial u_i}\Delta u_i.$$

В работе [24] даны обобщения необходимых условий ПАО: снятие постановочного требования $\mathbf{x}\in X$, векторное обобщение показателей и управлений подсистем, обобщение необходимого условия до необходимого и достаточного на основе верификации.

Субоптимальный алгоритм Пао–Нэш-параметризированного оптимального управления [24] (этап 2). В данном пункте формируется «рабочий» субоптимальный алгоритм на основе прямого использования структуры Пао и аппроксимации оптимального управления. При этом аппроксимация ПКЗУ на такте заключается в параметризации программно-корректируемого позиционного управления (зависящего от начальной позиции такта).

Для этого исходное управление $u_i(t)$, $i=\overline{1,N}$ заменяем на управление

$$u_i(t)\cong\sum_{l=j-1}^{k}q_{il}\left(1\left[t-t^l\right]-1\left[t-t^{l+1}\right]\right), \tag{6.24}$$

где $t_{j-1},t^1,\ldots,t^l,t^{l+1},\ldots,T$ суть разбиение отрезка $\left[t_{j-1},T\right]$ на достаточно малые отрезки; q_{il} — параметры, $q_{il\min}\le q_{il}\le q_{il\max}$, $\mathbf{q}^l=\{q_{il},l=j-1,\ldots,k\}$.

При этом ПКЗУ получен, если параметрическая оптимизация будет реализовываться на отрезках $\left[t_{j-1},T\right]$ при измеряемых позициях $\mathbf{x}\left(t_{j-1}\right)$ и оптимальная программа применяется на такте $\left[t_{j-1},t_j\right]$ до следующей коррекции (оптимизации на $[t_j,T]$ при вновь измеренном $\mathbf{x}\left(t_j\right)$).

Для ускорения вычислений можно применить упрощенную аппроксимацию управления на каждом $\left[t_{j-1},T\right]$ типа

$$u_i = \begin{cases} q_{i_1} \quad \text{при } t \in \left[t_{j-1}, \dfrac{T + t_{j-1}}{2} \right]; \\ q_{i_2} \quad \text{при } t \in \left[\dfrac{T + t_{j-1}}{2}, T \right]. \end{cases} \tag{6.25}$$

В этом случае точность возрастает по мере уменьшения оставшегося времени. В целом исходная задача превращается в задачу нелинейного программирования, взаимосвязь которых сохраняется при достаточно малом шаге Δt.

Глобальный показатель в соответствии с [36, 113] будем определять в виде

$$V(\hat{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}) = \prod_{i \in M_K} \left[\left(\frac{\partial \Theta_i \left(\tilde{\mathbf{q}} \,\|\, \hat{\mathbf{q}}^i \right)}{\partial \tilde{\mathbf{q}}^i} \right)^{\mathrm{T}} \left(\hat{\mathbf{q}}^i - \tilde{\mathbf{q}}^i \right) \right], \tag{6.26}$$

где $\tilde{\mathbf{q}}$ — старая функция координации, $\hat{\mathbf{q}}$ — новая функция координации.

Итерацию алгоритма поиска равновесного по Нэшу решения можно представить в виде следующей последовательности:

Шаг 1. Выбор начального приближения старой функции координации $\tilde{\mathbf{q}}^0$. Присваиваем $\tilde{\mathbf{q}} = \tilde{\mathbf{q}}^0$. Задаем ε — условие остановки.

Шаг 2. Решение m_k оптимизационных задач вида:

$$\text{определить} \min_{\mathbf{q} \in Q(M_K \setminus i)} \Theta_i(\mathbf{q}), \quad i \in M_K \subset P, \tag{6.27}$$

где $Q(M_K \setminus i) = \left\{ \mathbf{q} \in E^r \mid \mathbf{q}^i = \tilde{\mathbf{q}}^i, \mathbf{q}^j \in Q_j, \; j \in M_K, \; j \neq i \right\}$, а M_K — множество коалиций фиксированного коалиционного разбиения P.

Результатом решения i-й оптимизационной подзадачи является вектор

$$\mathbf{q}(K_i) = \begin{cases} \mathbf{q}^i(K_i) = \tilde{\mathbf{q}}^i; \\ \mathbf{q}^{(M_K \setminus i)}(K_i) = \mathbf{q}^{(M_K \setminus i) i}, \end{cases} \tag{6.28}$$

где в $\mathbf{q}^{ij}$ — первый верхний индекс означает номер подсистемы, к которой относится соответствующая компонента, а второй индекс — номер оптимизационной подзадачи (номер подсистемы, параметры которой фиксируются).

Таким образом, каждая подсистема «откликается» на функцию координации $\tilde{\mathbf{q}}$ тем, что сообщает арбитру локальную информацию о том, какими по ее, i-й подсистемы, «мнению», должны быть параметры остальных подсистем, чтобы достигался минимум показателя Θ_i.

Шаг 3. Выбор начального приближения новой функции координации $\hat{\mathbf{q}}^0$ на основе обработки «рекомендаций» подсистем. Для вычисления $\hat{\mathbf{q}}^0$ усредняем по формуле

$$\hat{\mathbf{q}}^{0i} = \frac{1}{m_k} \left[\lambda_{r1} \tilde{\mathbf{q}}^i + \lambda_{r2} \sum_{j \in M_K, j \neq i} q^{ij} \right], \quad i \in M_K; \;\; \lambda_{r1}, \lambda_{r2} > 0; \;\; \lambda_{r1} + \lambda_{r2} = 1. \tag{6.29}$$

Выбор коэффициентов λ_{ri} зависит от свойств показателя Θ_i и влияет на скорость сходимости всего алгоритма.

Шаг 4. Решение задачи минимизации функционала арбитра:

$$\text{определить} \min_{\hat{\mathbf{q}} \in Q \subset E^r} V(\hat{\mathbf{q}}, \tilde{\mathbf{q}}), \tag{6.30}$$

получаем решение $\hat{\mathbf{q}}^*$.

Шаг 5. Проверка условия останова алгоритма. Если $\left|V\left(\hat{\mathbf{q}}^*,\tilde{\mathbf{q}}\right)\right| \le \varepsilon$, то полагаем, что начальное приближение для градиентного алгоритма $\tilde{\mathbf{q}}^0 = \hat{\mathbf{q}}^*$. Алгоритм завершает работу. Если же $\left|V\left(\hat{\mathbf{q}}^*,\tilde{\mathbf{q}}\right)\right| > \varepsilon$, то полагаем $\tilde{\mathbf{q}} = \hat{\mathbf{q}}^*$ и возвращаемся к шагу 2.

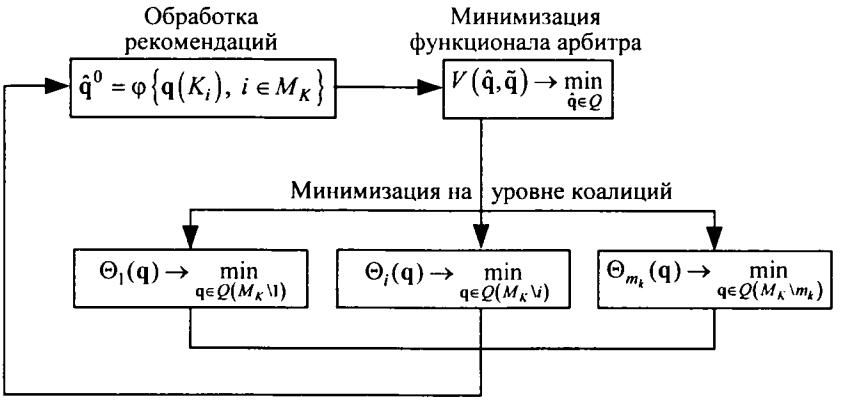


Рис. 6.7. Численный алгоритм Нэш–Пао-оптимизации

Применение градиентного алгоритма Ермольева для ускорения сходимости в малой окрестности равновесного решения [24] (этап 3). В малой окрестности Нэш-равновесия итерационная процедура алгоритма Пао–Нэш-равновесия останавливается (если $V < \varepsilon$) и формируется начальное приближение для градиентного алгоритма Ермольева.

Применение градиентного алгоритма дает высокую скорость сходимости и малые вычислительные затраты в достаточно малой окрестности равновесного решения q^r, чему соответствует $|V| \le \varepsilon$. При $|V| > \varepsilon$ (этап 2) имеет место либо «заклинивание» алгоритма этапа 3 (вследствие наличия овражных областей), либо его останов в локально равновесной точке (вследствие невыпуклости компонент векторного показателя ММС).

Выбор начальных приближений на основе сетевых подходов (этап 1). Для определения начальных приближений равновесных решений при существовании Нэш-равновесия или выявления равновесных «предпосылок» при отсутствии информации о существовании равновесия предлагается следующий подход.

Как известно, на основе безусловной оптимизации с учетом ограничений простейшие необходимые условия равновесия $\mathbf{q}^*$ по Нэшу принимают вид системы [24]

$$\mu^i \frac{\partial J_i\left(\mathbf{q}^* \| \mathbf{q}^i\right)}{\partial \mathbf{q}^i} + \nu^i \frac{\partial g_a^i\left(\mathbf{q}^* \| \mathbf{q}^i\right)}{\partial \mathbf{q}^i} = 0,\ \ i = \overline{1,N}, \tag{6.31}$$

где g_a^i — активные ограничения i-й подсистемы, J_i — скалярный показатель i-й подсистемы, $\mathbf{q}^i$ — подвектор параметров i-й подсистемы

$$\mathbf{q}^i \in Q_{ri} \subset E_{ri},$$

Q_{r_i} — r_i-мерный куб ограничений, соответствующий параметризации программного управления ПКЗУ на отрезке $\left[t_{j-1}, T\right]$, например при $j = 1$

$$u_i(t) = q_1^i \cdot 1[t_1 - t_0] + q_2^i \cdot 1[t_2 - t_1] + \ldots + q_{r_i}^i \cdot 1\left[T - t_{r_{i-1}}\right],$$

где $1[t_i - t_k] = 1[t - t_k] - 1[t - t_i]$, $t_i > t_k$.

В каждом r_i-мерном кубе сформируем равномерную (на основе ЛП-последовательности [38, 86]) или ортогональную сеть.

Для каждого фиксированного набора $\left(\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}^i\right) = \left(\mathbf{q}_\Phi^1, \ldots, \mathbf{q}^i, \ldots, \mathbf{q}_\Phi^N\right)$ получаем задачу перебора $J_i\left(\mathbf{q} \,\|\, \mathbf{q}^i\right)$ сети куба параметров i-й подсистемы с целью минимизации, где

$$\overline{J}_i\left(\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}^i\right) = \left[\mu^i \frac{\partial J_i\left(\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}^i\right)}{\partial \mathbf{q}^i}\right]^2 + \left[\nu^i \frac{\partial g_a^i\left(\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}^i\right)}{\partial \mathbf{q}^i}\right]^2 \to \min_{\mathbf{q}^i}; \tag{6.32}$$

для внутренних точек $\mathbf{q}^i$ ($\nu^i \equiv 0$).

Пусть

$$\min_{\mathbf{q}^i} \overline{J}_i = \overline{J}_i\left(\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}_{opt}^i\right).$$

Многократно решаем $\mathbf{q}$-подобную матричную задачу для различных фиксированных наборов в пределах сетей j-х подсистем ($i \neq j$).

Выбираем среди множества решений одну точку (или несколько) из условия

$$\min_{\mathbf{q}_\Phi}\left[\overline{J}_i\left(\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}_{opt}^i\right)\right] = \min_{\mathbf{q}_\Phi} \min_{\mathbf{q}^i} \overline{J}_i\left(\mathbf{q} \,\|\, \mathbf{q}^i\right) = \varepsilon.$$

Если ε достаточно малая величина, то запоминаем точку $\mathbf{q}_\Phi$ и соответствующую ей $\mathbf{q}_{opt}^i$, т.е.

$$\left(\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}_{opt}^i\right) = \left(\mathbf{q}_{\Phi opt}^1, \ldots, \mathbf{q}_{opt}^i, \ldots, \mathbf{q}_{\Phi opt}^N\right).$$

Если ε — большая величина, то увеличиваем плотность r_i-сетей для уменьшения ε. Аналогичные задачи решаем для всех N.

Далее производим сравнение результатов. Если «встречаются» общие векторы $\mathbf{q}_\Phi \,\|\, \mathbf{q}_{opt}^i$ при решении всех N задач, то это свидетельствует о существовании равновесия, эти вектора — потенциальные первые приближения. Если вектора параметров близки друг другу, то необходимо увеличить плотность сетей ε в многомерных r_i-кубах, что, возможно, приведет к сближению векторов или к полному совпадению.

О параллельной реализации алгоритма. Для введения ПКЗУ в реальное время полезно использовать структурные возможности Пао-подхода.

Действительно, судя по структурной схеме алгоритма, на итерации одновременно решается $N+1$ задача оптимизации, что может быть реализовано на $N+1$ процессоре в параллельном режиме.

Но для ускорения вычислительных процедур приблизительно в $N+1$ раз необходимо сравнить время вычислений в задаче-арбитре и в однотипных задачах нижнего уровня. Если задача-арбитр решается по времени дольше, чем каждая задача нижнего уровня, то введение $N+1$ процессоров не имеет смысла, так как часть времени N процессоров будут простаивать и увеличение стоимости вычислительной системы неправомерно.

Исследование тестовых примеров показало, что время решения задачи арбитра соизмеримо с временем решения задачи в каждой системе на нижнем уровне, поэтому параллельная реализация допустима. И решение может быть ускорено в N раз.

Ресурсы распараллеливания структурными свойствами не исчерпываются и могут быть дополнены в подсистеме моделирования на этапе формирования градиентного алгоритма и при вычислении начальных приближений, что исследовано в соответствующей главе [24], посвященной реализации стабильных и эффективных решений, а также СТЭК.

6.3. СТАБИЛЬНЫЕ И ЭФФЕКТИВНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НА ОСНОВЕ КОАЛИЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ

6.3.1. КЛАССИФИКАЦИЯ СТАБИЛЬНЫХ И ЭФФЕКТИВНЫХ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ КОАЛИЦИОННОГО РАВНОВЕСИЯ

Определение 6.20 [20]. Пара $\left(K, x^K\right)$, $x^K \in X_K \neq \varnothing$ называется *угрозой* против исхода $s \in S$, если $s' \underset{K}{\succ} s$ для всех $s' \in S\left(x^K\right)$.

Определение 6.21 [20]. Пара $\left(Q, x^Q\right)$, $x^Q \in X_Q \neq \varnothing$ называется *контругрозой* на угрозу $\left(K, x^K\right)$, если $K \cap Q \neq \varnothing$ и для некоторого $s' \in S\left(x^K\right)$ и всех $s'' \in S\left(x^Q\right)$ имеет место $s'' \underset{Q}{\succ} s'$. Комментарий определениям 6.20 и 6.21 дан в [24, с.96].

Определение 6.22 [20]. Угроза считается *эффективной*, если на нее нет контругрозы. Исход игры считается *оптимальным*, если против него нет эффективных угроз. Множество всех оптимальных исходов есть *V-решение*.

Определение 6.23 [20]. Игра называется игрой *без запрещенных ситуаций*, если для любой ее реализации $\left(P, x(P)\right)$

$$S\left(x(P)\right) = \bigcap_{K \in P} S\left(x^K\right) \neq \varnothing, \tag{6.33}$$

где P — коалиционное разбиение, $x(P) = \left(x^K\right)_{K \in P}$ — набор решений (ситуация).

Отсутствие запрещенных ситуаций означает, что игру можно разыграть без согласования действий непересекающихся коалиций, когда независимый выбор любой коалицией своих решений в рамках данной структуры P приводит к исходу игры.

Утверждение 6.1 [20] (комментарий — в [24, с.96]). Для любой игры без запрещенных ситуаций существует такая реализация игры $\left(P, x(P)\right)$, что

$$V \supset \bigcap_{K \in P} S\left(\overline{x}^K\right) \neq \varnothing. \tag{6.34}$$

Определение 6.24 [20]. Ситуация $\overline{x}^P$ называется *коалиционным равновесием*, если принадлежит *V*-решению и для любых $K \in P \subset \mathbf{P}$ и $x^K \in X_K$ либо $J_i\left(\overline{x}^P\right) > J_i\left(\overline{x}^P \middle\| x^K\right)$ хотя бы для одного $i \in K$, либо $J_i\left(\overline{x}^P\right) = J_i\left(\overline{x}^P \middle\| x^K\right)$ для всех $i \in K$.

Таким образом, ситуация $\overline{x}^P$ будет коалиционным равновесием, если $\overline{x}^P \in V$ и для любого $K \in P$ стратегия $\overline{x}^P$ максимизирует по Парето вектор выигрышей $J_i\left(\overline{x}^P \middle\| x^K\right)$ в X_K в том смысле, что если другая стратегия-решение дает больший выигрыш игроку $i \in K$, то одновременно она дает меньший выигрыш игроку $j \in K$.

(Более общий вариант реализации коалиционного равновесия на **P** и комментарий определения 6.24 — см. [24, с.97].)

Определение 6.25 [20]. Коалиционное равновесие называется *сильным* (абсолютным) *равновесием* $\bar{x}$, если оно оптимально по Парето в X_K относительно $J_i\left(\bar{x}\middle\|x^K\right)$, $(i \in K)$ для *всех* $K \subset N$.

Против сильного равновесия, очевидно, нет угроз. Кроме того, оно является равновесием при любом P. Поэтому сильное равновесие является коалиционным равновесием при любом P, причем в наиболее общей форме.

Определение 6.26. Множество *собственно коалиционных равновесий* определяется множеством оптимальных исходов в V-решении (множеством неэффективных угроз) на допустимом множестве коалиционных структур P при локальной Парето-оптимизации в рамках коалиции.

Определенную связь с собственно коалиционным равновесием имеет понятие угроз и контругроз (УКУ-решение), введенное Вайсбордом, Жуковским [18, 23, 24].

Определение 6.27. При отсутствии угроз (частный случай V-решения) и единственности коалиционной структуры P коалиционное равновесие $\bar{x}^P$ принимает вид *векторного Нэш-равновесия* (ВНР) $\left(\bar{x} = x^r\right)$, так как данное равновесие определяется потерей эффективности при отклонении K-й коалиции от Парето-решения $\bar{x}^K \in \bar{x}^P$ относительно вектора $J_i\left(\bar{x}^P\middle\|x^K\right)$, $i \in K$.

Определение 6.28. При отсутствии угрозы и фиксации коалиционной структуры в виде одной коалиции $K = N$ коалиционное равновесие $\bar{x}^P$ принимает вид *Парето-оптимального решения в задаче векторной оптимизации* $J_i\left(x^K\right)$, $i \in K = N$ $\left(\bar{x} = x^{\Pi}\right)$.

«Сужение» множества решений может быть обеспечено тем или иным подходом Парето-оптимизации, например Ω-оптимизацией на основе конусов доминирования [36, 89, 114]

$$\Omega = \left(x : \mathbf{B}\mathbf{J}(x) \geq 0\right), \tag{6.35}$$

где **B** — матрица конуса доминирования Ω.

Определение 6.29. Подмножество $\left(\bar{x}^P_{\Omega},\ K \in P\right)$ ВНР-решений называется Ω*-равновесием* $\left(\bar{x}_{\Omega} = x^r_{\Omega}\right)$, если матрицы $\mathbf{B}_K$, $K \in P$ многогранных конусов доминирования Парето-оптимизации коалиции K

$$\Omega_K = \left\{x^K : \mathbf{B}_K \mathbf{J}_K\left(\bar{x}^P\middle\|x^K\right) \geq 0\right\},\ K \in P$$

не равны единичной матрице $\left(\mathbf{B}_K \neq \mathbf{E}\right)$ хотя бы частично.

Определение 6.30. При отсутствии угроз, единственности коалиционной структуры P и полной свертке показателей коалиции

$$\Phi_K = \sum_{i \in K} \alpha_i J_i,\ 0 \leq \alpha_i \leq 1,\ \sum \alpha_i = 1,\ K \in P \tag{6.36}$$

коалиционное равновесие x^P приобретает смысл *скалярного Нэш-равновесия*.

Определение 6.31. При отсутствии угроз, фиксации набора коалиционных структур **P** $\left(P \in \mathbf{P}\right)$ и свертке показателей коалиции коалиционное равновесие принимает вид *кооперативного решения Харшаньи–Скеруса* на основе множества недоминируемых Нэш-равновесий на **P** [18].

6.3.2. Алгоритм векторной оптимизации на основе конусов доминирования (эффективные решения)

Сравнительный анализ методов векторной оптимизации дан в работе [24]. Здесь основное внимание уделяется Парето-оптимизации как частного случая коалиционного равновесия.

С учетом параметризации управляющих сил основная постановка имеет вид

$$\max_{q\in Q(i)}\left\{\mathbf{J}^i(\mathbf{q})\middle|K_i,\ R_i\right\},\quad i\in M_K\subset P_N, \tag{6.37}$$

где $Q(i)=\left\{\mathbf{q}\in Q\subset E^r\middle|\mathbf{q}^i\in Q_i\subset E_i^r;\ \mathbf{q}^{(M_K/i)}\ \text{— фиксированы}\right\}$; $\mathbf{J}^i(\mathbf{q})$ — векторный показатель эффективности i-й коалиции (или показатель потерь — при минимизации); M_K — множество коалиций коалиционного разбиения P ММС из N объектов; $Q(i)$ — множество параметров i-й коалиции; R_i — отношение предпочтения на подмножестве K_i.

Из (6.37) следует, что необходимо определить значение векторного показателя $\mathbf{J}^i(\mathbf{q})$ на множестве Парето i-й коалиции K_i, максимальное в смысле отношения предпочтения R_i, варьируя лишь компоненты вектора $\mathbf{q}^i$. Остальные компоненты вектора $\mathbf{q}$ известны и фиксированы. Если предположить $K_i = K$ и состоит из N объектов, то ММС составляет единую коалицию и задача (6.37) сводится к определению решений $\mathbf{q}$, оптимальных по Парето $\left(\mathbf{q}^{\Pi}\right)$ относительно векторного показателя $\mathbf{J}(\mathbf{q})$.

Ввиду сложности точного решения задачи (6.37), в связи с проблемой глобальной оптимизации $\mathbf{J}^i$ на множестве $Q(i)$, предлагается двухэтапная процедура, первый этап которой — определение

$$\left\{\tilde{\mathbf{J}}^i_{R_i}(Q(i))\middle|K_i,R_i\right\} \tag{6.38}$$

— является дискретной аппроксимацией задачи (6.37). Здесь $\tilde{\mathbf{J}}^i_{R_i}$ — дискретная аппроксимация множества Парето-оптимальных в смысле значений $\mathbf{J}^i$ [22]. При этом множество $\tilde{\mathbf{J}}^i_{R_i}$ формируется на соответствующем дискретном множестве $\tilde{Q}^{\mathbf{J}^i}_{R_i}\in Q_i$.

Задача (6.38) дает возможность сформировать начальные приближения для задачи (6.37) или для более сложной задачи из серии задач поиска коалиционного равновесия

$$\max_{q\in Q}\left\{\mathbf{J}(\mathbf{q})\middle|\mathbf{P},\left\{R_i\right\}_{i\in M_K}\right\} \tag{6.39}$$

относительно коалиционных разбиений $\mathbf{P}$ и системы отношений предпочтения R_i, $i\in M_K$ в каждой коалиционной структуре $P\subset\mathbf{P}$.

Понятие конуса доминирования Ω. Необходимые условия Парето- и Ω-оптимизации

Утверждение 6.2 [110]. Пусть Ω — многогранный конус, определенный матрицей $\mathbf{B}$

$$\Omega=\left\{\mathbf{z}\in E^m\middle|\ \mathbf{Bz}\le\mathbf{O}_P\right\}\ \text{(при минимизации).}$$

Пусть $\mathbf{H}(\mathbf{q})\in E^P$ и $\mathbf{H}(\mathbf{q})=\mathbf{BJ}(\mathbf{q})$.

Тогда эффективные (оптимальные по Парето) решения для векторного показателя $\mathbf{H}(\mathbf{q})$ точно совпадают с Ω-оптимальными решениями для векторного показателя $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ на множестве Q:

$$Q_{\Omega}^{J} = Q_{\Pi}^{H}, \tag{6.40}$$

т.е. конус определяет часть множества Парето-решений.

Следствие 6.1. Из утверждения 6.2 следует, что

$$Q_{\Omega}^{J} = Q_{\Pi}^{J} \text{ при } \mathbf{B} = \mathbf{E}, \tag{6.41}$$

т.е. «прямоугольный» конус доминирования определяет все множество Парето-решений.

Определение 6.32 [36, 89]. Решение $\mathbf{J}^* = \mathbf{J}\left(\mathbf{q}^*\right)$ ($\mathbf{J}$ — показатель потерь) называется *слабо оптимальным по конусу* Ω с матрицей $\mathbf{B} = [p \times m]$ в критериальном пространстве E^m векторного показателя $\mathbf{J}$, если не существует такого $\mathbf{q} \in Q$, для которого при минимизации $\mathbf{J}$ справедлива система неравенств

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{J}(\mathbf{q}) - \mathbf{J}\left(\mathbf{q}^*\right)\right) < \mathbf{O}_P. \tag{6.42}$$

Утверждение 6.3. Пусть $\mathbf{q}^*$ — оптимальное решение по конусу доминирования Ω относительно целевого вектора $\mathbf{J}$ и множества Q, заданного в виде

$$Q = \left\{ q \in E^r \middle| \mathbf{G}(\mathbf{q}) \le 0 \right\},$$

где $\mathbf{G}(\mathbf{q}) = \left\{ g_i(\mathbf{q}) \le 0,\ i = \overline{1, s_g};\ \mathbf{Cq} \le \mathbf{b},\ \mathbf{C} = [s_c, r],\ b = (s_c \times 1),\ \mathbf{q}_L \le \mathbf{q} \le \mathbf{q}_H \right\}$.

Функционал $\Psi^{\mathrm{T}} = \left[\mathbf{J}^{\mathrm{T}}, \mathbf{G}_s^{\mathrm{T}} \right]$ дифференцируем по Фреше в точке $\mathbf{q}^*$, где s — множество индексов ограничений $\mathbf{G}$, активных в точке $\mathbf{q}^*$.

Тогда является совместной система уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Psi\left(\mathbf{q}^*\right)}{\partial \mathbf{q}} \right) \mathbf{A}^{\mathrm{T}} \gamma = 0,\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{B} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix}; \\ \gamma \ge 0,\ \gamma = (\mu, \nu),\ \dim(\mu) = p,\ \mu \ne 0,\ \dim(\nu) = s; \\ \mathbf{B} = [p \times m],\ \mathbf{E} = [s \times s]. \end{cases} \tag{6.43}$$

Следствие 6.2. Так как множество слабо оптимальных по конусу решений содержит в себе множество оптимальных по конусу решений, то условие (6.43) является также необходимым условием оптимальности по конусу.

Следствие 6.3. При $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ условие (6.43) превращается в необходимое условие Парето-оптимальности $\mathbf{q}^*$.

Об алгоритмах вычисления конусов доминирования. В [24, 36, 89, 114] сформировано несколько вариантов вычисления конусов доминирования в рамках задач векторной оптимизации, в которых учитываются:

- требование проектировщика к допустимым взаимным локальным изменениям показателей;
- равномерное улучшение компонент векторного показателя;
- неопределенность весовых коэффициентов компонент векторного показателя.

Так, третий вариант оптимально учитывает условия неопределенности [24, гл. 3].

Второй вариант используется, например, для построения модифицированной арбитражной схемы в условиях обязательных соглашений [24, гл. 6].

Первый вариант вычисления конуса как функции матрицы коэффициентов замещения рассматривается далее как основной при формировании алгоритмического обеспечения Ω-оптимизации [24, гл. 3].

Выбор направления спуска внутри конуса доминирования. Как следует из [89, 110, 114], условие доминирования решения $\mathbf{J}''$ над решением $\mathbf{J}'$ относительно конуса Ω с матрицей $\mathbf{B}$ при минимизации $\mathbf{J}$ записывается в виде

$$\mathbf{B}\Delta\mathbf{J} \le \mathbf{O}, \tag{6.44}$$

где $\Delta\mathbf{J} = \mathbf{J}'' - \mathbf{J}'$.

Использование соотношения (6.44) в качестве условия спуска в алгоритме векторной релаксации позволяет сформулировать задачу выбора направления спуска внутри конуса доминирования в виде

$$\text{определить} \max_{[\mathbf{d}^{\mathrm{T}},\, z]\in D} \mathbf{z}; \tag{6.45а}$$

$$D:\begin{cases} \mathbf{B}\left(\dfrac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right)\mathbf{d} + \mathbf{Z}_P \le \mathbf{O}_P; & (6.45б)\\ \mathbf{A}_a\mathbf{d} \le \mathbf{O}_{S_a}; & (6.45в)\\ \|\mathbf{d}\|_K \le 1, & (6.45г) \end{cases}$$

где (6.45*б*) — условие $\mathbf{d} \in \Omega$; (6.45*в*) — условие того, что вектор $\mathbf{d}$ направлен вовнутрь области допустимых значений параметров Q; $\mathbf{A}_a = [s_a \times r]$ — матрица линейных ограничений (как общего вида, так и тривиальных), активных в точке $\mathbf{q}$; $\|\bullet\|_K$ — условие нормировки.

Постановка задачи выбора направления вида (6.45) [89] является более общей по сравнению с постановками [79, 112], которые могут быть получены из (6.45) как ее частные случаи. Для этого матрицу $\mathbf{B}$ конуса доминирования Ω необходимо задать с помощью первого алгоритма в виде функции коэффициентов замещения.

В вычислительной практике, как правило, используются следующие виды нормировки:

$$\text{при} \quad K = \infty \quad |d_i| \le 1,\ i = \overline{1,r}, \tag{6.46а}$$

$$\text{при} \quad K = 2 \quad \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{d} \le 1. \tag{6.46б}$$

В [79] учет условия нормировки (6.46*а*) при решении задачи выбора направления спуска приводит к задаче линейного программирования. В работе [36] методика, предложенная в [79], распространяется на задачу Ω-оптимизации вида (6.45). В результате получаем задачу линейного программирования вида:

$$\text{определить} \max_{[\tilde{\mathbf{d}}^{\mathrm{T}},\, z]\in D} \mathbf{z}; \tag{6.47а}$$

$$D:\begin{cases} \mathbf{B}\left(\dfrac{\partial \mathbf{J}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}}\right)\left(\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{G}\right) + \mathbf{Z}_P \le \mathbf{O}_P; & (6.47б)\\ \mathbf{A}_a\left(\tilde{\mathbf{d}} - \mathbf{G}\right) \le \mathbf{O}_{S_a}; & (6.47в)\\ 0 \le \tilde{\mathbf{d}}_i \le 2,\ i = \overline{1,r};\ \mathbf{z} \ge 0, & (6.47г) \end{cases}$$

где $\mathbf{G}$ — вспомогательный вектор, с помощью которого осуществляется переход от переменной $\mathbf{d}$ к неотрицательной вспомогательной переменной $\tilde{\mathbf{d}}$, необходимой для решения задачи (6.45):

$$\tilde{\mathbf{d}} = \mathbf{d} + \mathbf{G}. \tag{6.48}$$

Для решения задачи (6.47) используется симплекс-метод.

В результате алгоритм поиска оптимального решения предлагается рассматривать в виде последовательности следующих основных этапов, составляющих в совокупности одну диалоговую итерацию:

- формирование конуса доминирования;
- выбор направления спуска внутри конуса доминирования;
- вычисление шаговой длины в выбранном направлении [24, с.113].

Выбор начального приближения в задаче многокритериальной оптимизации (постановка (6.38)). Как известно, для векторного показателя $\mathbf{J}(\mathbf{q})$ общего вида, когда некоторые его компоненты, вообще говоря, являются невыпуклыми на Q функциями, на множестве достижимых векторных оценок $\mathbf{J}(Q)$ могут существовать локально эффективные точки, не принадлежащие глобальному множеству Парето $\mathbf{J}_{\Pi}(Q)$. В этих точках также выполняются необходимые условия Ω-оптимальности (6.43). Поэтому неудачное расположение начального приближения в задаче (6.37) может привести к неправильному результату вследствие преждевременного останова алгоритма Ω-оптимизации в локально эффективной внутренней точке множества $\mathbf{J}(Q)$.

С другой стороны, при решении задачи Нэш-оптимизации в случае неединственности равновесия по Нэшу необходимо на множестве равновесных решений определить недоминируемые точки, т.е. ближайшие к множеству Парето [18]. В этом случае начальное приближение целесообразно назначать в окрестности множеств Парето, что повышает возможность определения недоминируемого равновесного решения.

Таким образом, выбор начального приближения является важным фактором, влияющим на эффективность вычислительных процедур и правильность получаемых результатов.

В данном разделе для решения задачи (6.38) предлагается использовать известный метод зондирования пространства параметров, основанный на методике ЛП-поиска [86]. В этом методе условно можно выделить два основных этапа:

1) составления таблицы испытаний;
2) оптимизация таблицы испытаний.

Для определенности полагаем, что K_i составляет все множенство M_K.

Этап 1. Генерируется последовательность точек $\left\{\mathbf{p}^{(i)}, i=\overline{1,l}\right\}$, равномерно распределенная в r-мерном единичном кубе. Как обосновывается в [86], наилучшими характеристиками равномерности обладают так называемые $ЛП_{\tau}$-последовательности. Для генерации $ЛП_{\tau}$-последовательности в [86] предлагается арифметический алгоритм, использующий специальную таблицу направляющих чисел. После этого с помощью линейного преобразования L, сохраняющего равномерность распределения, преобразуем множество сгенерированных точек $\left\{\mathbf{p}^{(i)}, i=\overline{1,l}\right\} \in \Pi_p$ в множество точек $\left\{\mathbf{q}^{(i)}, i=\overline{1,l}\right\}$, равномерно заполняющих r-мерный параллелепипед Π_q, определяемый верхними и нижними ограничениями на параметры задачи $\mathbf{q}_L$ и $\mathbf{q}_H$:

$$\Pi_q = \mathrm{L}\left(\Pi_p\right). \tag{6.49}$$

Преобразование L задается [86] в виде

$$q_j^{(i)} = q_{Lj} + p_j^{(i)}\left(q_{Hj} - q_{Lj}\right). \tag{6.50}$$

Так как в описании области Q используются линейные ограничения общего вида, то в каждой точке $\mathbf{q}^{(i)}$ необходимо проверять выполнение системы неравенств

$\mathbf{C}\mathbf{q}^{(i)} \le \mathbf{b}$. Если $\mathbf{q}^{(i)}$ является допустимой, то в ней вычисляется значение векторного показателя $\mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(i)}\right)$ и заносится в таблицу испытаний.

Этап 2. В данной работе предлагается алгоритм оптимизации таблицы испытаний по конусу доминирования Ω. Для этого из таблицы испытаний выбирается какая-либо точка $\mathbf{q}^{(i)}$ и помечается. Просматривая все точки $\mathbf{q}^{(i)}$ таблицы испытаний, отличные от $\mathbf{q}^{(i)}$, исключим те из них, для которых ($\mathbf{J}$ — вектор потерь)

$$\mathbf{B}\left(\mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(i)}\right)\right) - \mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(i)}\right) \ge \mathbf{O}, \tag{6.51}$$

причем хотя бы одно из неравенств строгое. То есть проверяется принадлежность точек Δ_{ij} конусу $(-\Omega)$; $\Delta_{ij} = \mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(j)}\right) - \mathbf{J}\left(\mathbf{q}^{(i)}\right)$.

Затем среди оставшихся точек выбирается непомеченная и вновь повторяется процесс исключения по правилу (6.51). После конечного числа шагов останутся только помеченные точки, являющиеся дискретной аппроксимацией множества Ω-оптимальных решений.

Второй этап данного алгоритма [89] отличается от приведенного в работе [86] более общей постановкой, основанной на использовании понятия конуса доминирования. В случае $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ оптимизация таблицы испытаний приведет к построению дискретной аппроксимации всего множества Парето.

6.3.3. Методы определения векторного равновесия (стабильные решения)

Необходимые условия векторного равновесия (Нэш-равновесия и Ω-равновесия). В соответствии с понятиями коалиционного равновесия, изложенными ранее, формулировка вида коалиционного равновесия определяется тремя степенями свободы:

- множество коалиционных разбиений P;
- вид V-решения;
- степень «охвата» Парето-области коалиции.

На основе определения 6.27, векторное равновесие по Нэшу является частным случаем коалиционного равновесия при единственном коалиционном разбиении, отсутствии угроз (частный случай V-решений) и с получением полной Парето-области коалиции.

В соответствии с определением 6.29 Ω-равновесие является частным случаем векторного равновесия по Нэшу, так как формулируется на части Парето-области коалиции. С другой стороны, при применении единой технологии решения обеих задач, например на основе конусов доминирования, необходимые условия и алгоритмы определения близки. Поэтому имеет смысл объединить оба определения 6.27, 6.29 в рамках единой схемы поиска *векторного равновесия*.

Раскрывая необходимое условие Ω-оптимальности (6.43), можно получить

$$\left(\frac{\partial \mathbf{J}\left(\mathbf{q}^*\right)}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\mu} + \left(\frac{\partial \mathbf{G}_a\left(\mathbf{q}^*\right)}{\partial \mathbf{q}}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{v} = 0, \tag{6.52}$$

где $\boldsymbol{\mu}, \mathbf{v} \ge 0$, $\boldsymbol{\mu} \ne 0$; $\mathbf{G}_a$ — переобозначение активных ограничений.

Как известно, при $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ данное условие дает необходимое условие Парето-оптимальности.

Формирование постановки (6.37) для каждого $i \in M_K$ и совместных необходимых условий (6.52) для всех i приводит к следующему утверждению.

Утверждение 6.4 [28, 37, 89]. Пусть $\mathbf{q}^r$ — векторное равновесное решение. Тогда является совместной система равенств

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\partial \mathbf{J}^i(\mathbf{q}^r)}{\partial \mathbf{q}^i}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\mu}^i + \left(\dfrac{\partial \mathbf{G}_a^i(\mathbf{q}^r)}{\partial \mathbf{q}^i}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{v}^i = 0; \\ \boldsymbol{\mu}^i,\ \mathbf{v}^i \geq 0,\ \boldsymbol{\mu}^i \neq 0,\ i \in M_K,\ i = \overline{1, m_k}, \end{cases} \tag{6.53}$$

где $\mathbf{J}^i$, $\mathbf{B}_i$, $\mathbf{G}_a^i$, $\mathbf{q}^i$ — соответственно показатели, матрица конуса доминирования Ω_i, активные ограничения, параметры i-й коалиции K_i. Доказательство следует из определений 6.27, 6.29 векторных равновесий как частных случаев коалиционного равновесия (определение 6.26) и необходимых условий Ω-оптимизации.

Сведение необходимых условий (6.53) к задаче квадратического программирования. Сущность преобразования состоит в формировании и минимизации целевой функции специального вида $\Psi(\mathbf{q})$, значения которой характеризуют «степень несовместимости» необходимых условий векторного равновесия вида (6.53).

Для произвольного $\mathbf{q} \in Q$ введем вектор

$$\boldsymbol{\varphi}^i\left(q, \boldsymbol{\mu}^i, \mathbf{v}^i\right) = M_i(\mathbf{q}) \cdot \boldsymbol{\mu}^i + N_i(\mathbf{q}) \cdot \mathbf{v}^i,\ i \in M_K, \tag{6.54}$$

где $M_i(\mathbf{q}) = \left(\dfrac{\partial \mathbf{J}^i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^i}\right)^{\mathrm{T}} \mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}$; $N_i(\mathbf{q}) = \left(\dfrac{\partial \mathbf{G}_a^i(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}^i}\right)^{\mathrm{T}}$; $\boldsymbol{\varphi}^i \in E^{r_i}$.

На переменные $\boldsymbol{\mu}^i, \mathbf{v}^i$ наложены ограничения

$$\boldsymbol{\mu}^i, \mathbf{v}^i \geq 0,\ \boldsymbol{\mu}^i \neq 0.$$

Обозначим:

$$\tilde{\mathbf{S}}_i = [\mathbf{M}_i, \mathbf{N}_i],\ \boldsymbol{\rho}^{i\mathrm{T}} = \left[\boldsymbol{\mu}^{i\mathrm{T}}, \mathbf{v}^{i\mathrm{T}}\right].$$

Тогда $\boldsymbol{\varphi}^i = \tilde{\mathbf{S}}_i \boldsymbol{\rho}^i$.

Образуется показатель вида

$$\Phi_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}^{i\mathrm{T}} \boldsymbol{\varphi}^i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^{i\mathrm{T}} \mathbf{S}_i \boldsymbol{\rho}^i, \tag{6.55}$$

где $\mathbf{S}_i$ — симметричная положительно полуопределенная матрица:

$$\mathbf{S}_i = \tilde{\mathbf{S}}_i^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{S}}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_i & \mathbf{M}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_i \\ \mathbf{N}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_i & \mathbf{N}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_i \end{bmatrix}.$$

Далее определяется показатель вида

$$\Phi = \sum_{i \in M_K} \Phi_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} \mathbf{S}(\mathbf{q}) \boldsymbol{\rho}, \tag{6.56}$$

где $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & & & 0 \\ & \mathbf{S}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \mathbf{S}_{M_K} \end{bmatrix}$ — симметричная положительно полуопределенная матрица, $\boldsymbol{\rho}^{\mathrm{T}} = \left[\boldsymbol{\rho}^{i\mathrm{T}}, \ldots, \boldsymbol{\rho}^{M_K\mathrm{T}}\right]$.

Ставится оптимизационная задача:

$$\text{определить } \min_{\rho\in Q_\rho}\Phi(\mathbf{q},\rho)=\psi\left(\mathbf{q},\rho^*(\mathbf{q})\right)=\psi(\mathbf{q}), \tag{6.57а}$$

$$Q_\rho\begin{cases}\rho\ge 0, & (6.57б)\\ \sum\limits_{j=1}^{\rho_1}\mu_j^1\ge 1, & (6.57в)\\ \quad\vdots & \\ \sum\limits_{j=1}^{\rho_{m_k}}\mu_j^{m_k}\ge 1. & (6.57г)\end{cases}$$

Наличие группы ограничений (6.57*в*) обусловлено следующими причинами.

Во-первых, они отражают требование $\mu^i\neq 0,\ i\in M_K$.

Во-вторых, условия (6.57*в*) ограничивают $\|\rho\|$ снизу, и поэтому $\Psi(\mathbf{q})=0$ в (6.57*а*) получается только в точках, удовлетворяющих необходимым условиям векторного равновесия (6.53).

Таким образом, решение оптимизационной задачи (6.57) определяет значение показателя $\Psi(\mathbf{q})$, характеризующее «степень несовместности» совокупности уравнений вида (6.53).

Задача (6.57) является задачей квадратичного программирования с положительно полуопределенным показателем, и, следовательно, она имеет единственное решение. Структура задачи (6.57) позволяет найти это решение за конечное число шагов, что очень важно для вычисления $\Psi(\mathbf{q})$.

Значение $\Psi(\mathbf{q})$ характеризует степень «неравновесности» точки $\mathbf{q}$. Если $\mathbf{q}^r$ — равновесие по Нэшу, то $\Psi(\mathbf{q}^r)=0$. Следовательно, для нахождения $\mathbf{q}^r$ необходимо решить задачу:

$$\text{определить } \min_{q\in Q}\Psi(\mathbf{q}). \tag{6.58}$$

Так как $\Psi(\mathbf{q})\ge 0$ для любых $\mathbf{q}\in Q$ и $\Psi(\mathbf{q}^r)=0$, то решение задачи (6.58) существует, если существует в принципе равновесие по Нэшу. Это обеспечивает сходимость применяемых алгоритмов к $\mathbf{q}^r$.

Задача выпуклого квадратичного программирования реализована в универсальной вычислительной среде *Matlab*, поэтому на ее основе разработана специализированная вычислительная система проектирования системы управления ММС на основе векторного равновесия (ПС ВР). Рассмотрим основные алгоритмические особенности метода в составе ПС ВР.

Разработка метода определения векторного равновесия и управления ММС с использованием СТЭК-3 [24, 37]. В основе метода лежит приведение необходимых условий векторного равновесия к задаче квадратичного программирования и ее непосредственное решение.

В процессе оптимизации ММС осуществляется глобальное зондирование области показателей $\mathbf{J}$ с целью выявления ее границы, приближенного определения Парето-области, а также для нахождения множества векторных решений.

Метод состоит из нескольких этапов.

Этап 1. Этап заключается в том, что на области параметров Q определяется равномерная «сеть» размерности M_K и густоты l. Узлы этой сети отображаются в про-

странство показателей **J**, формируя, таким образом, ее вид, а также примерную Парето-область (*а*) и «идеальную точку» (*б*) (см. рис. 6.8). Найденная в дальнейшем «идеальная точка» используется для выявления наилучшей точки векторного равновесия при анализе множества решений. При этом для увеличения быстродействия алгоритма используется апроксимация описания ММС на основе рядов и ПС *Maple* [24], а также области начальных приближений на основе антагонистического ядра в векторе **J** [24].

Этап 2. Для каждой ячейки сети реализуется итерационный процесс поиска равновесного решения (см. рис. 6.11, 6.12).

Шаг 1. За начальное приближение оптимизации на области выбирается геометрический центр ячейки «гиперкуба» с границами: минимальная — $\tilde{q}^i_{\min}$, максимальная — $\tilde{q}^i_{\max}$, $\left(i=\overline{1,m_k}\right)$ (рис. 6.9).

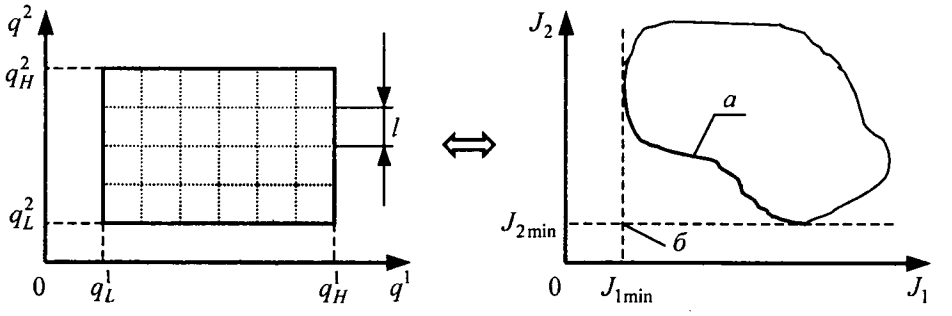


Рис. 6.8. Отображение множества значений параметров на множество значений показателей

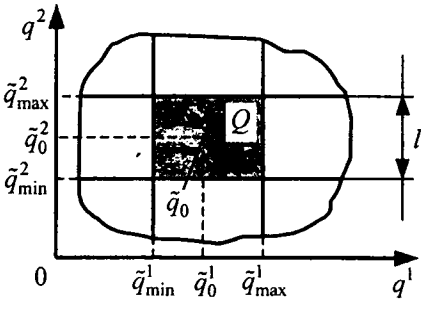


Рис. 6.9. Область локальной оптимизации

Таким образом (для простоты иллюстрации q^i — скаляр),

$$\tilde{q}^i_0=\frac{\tilde{q}^i_{\max}+\tilde{q}^i_{\min}}{2},\ i=1,\ldots,m_k,\ i\in M_K \tag{6.59}$$

является начальной точной итерационного поиска равновесного решения.

Шаг 2. Решается задача квадратической минимизации:

$$\min_{\rho\in Q_\rho}\Phi(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho})=\Psi\left(\mathbf{q},\boldsymbol{\rho}^*(\mathbf{q})\right)=\Psi(\mathbf{q}).$$

Шаг 3. На каждом итерационном шаге находится вектор направления убывания $\hat{\mathbf{P}}^j_0$ функции $\Psi(\mathbf{q})$

$$\hat{\mathbf{P}}_0^j = \frac{f\left(q_0^i\right) - f\left(q_0^i + \Delta^i\right)}{\Delta^i}, \quad \Delta^i = \begin{cases} 0, & i \neq j; \\ \xi^i, & i = j, \end{cases} \quad i, j = \overline{1, m_k}, \tag{6.60}$$

где малая величина ξ^i выбирается особым образом и зависит от линейного размера i-го ребра «гиперкуба».

Находим точку $\tilde{\mathbf{q}}_g$ пересечения вектора $\hat{\mathbf{P}}_0^j$ и границ данной ячейки оптимизации. На отрезке $\left(\tilde{\mathbf{q}}_0, \tilde{\mathbf{q}}_g\right)$ модифицированным методом «золотого сечения» производим поиск минимального значения функции $\Psi(\mathbf{q})$.

Шаг 4. Полученную точку принимаем за начальную $\tilde{\mathbf{q}}_0$, и процесс повторяется с самого начала до тех пор, пока либо координаты точки совпадут с координатами, полученными на предыдущем этапе, и это будет решение, либо минимум окажется на границе, и мы переходим к следующей ячейке сетки.

Таким способом удается достаточно точно выявить множество решений.

Этап 3. Проводится анализ полученного множества и на основе СТЭК выявляются равновесные решения, обладающие преимуществами по всем показателям (доминирующие точки).

Для СТЭК-3 этап 3 состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Попарное сравнение всех решений и отбрасывание тех, чьи значения хуже по всем показателям (доминируемые точки).

Шаг 2. Формирование «идеальной точки» $\mathbf{J}^{\text{и}}$ (см. рис. 6.8)

$$\mathbf{J}^{\text{и}} = \left\{ J_j^{\text{и}} \in E^m \middle| J_j^{\text{и}} = \min J_j ; j = \overline{1, m} \right\}, \tag{6.61}$$

которая представляет собой вершину прямоугольной m-мерной пирамиды, образованной пересечением m плоскостей, перпендикулярных осям координат и проходящими через минимальные значения показателей (см. рис. 6.10, *а*).

Шаг 3. Выбор из прореженного множества решений (доминирующих точек) точки, наиболее близкой к «идеальной», т.е. удовлетворяющей условию

$$\sum_{j=1}^{m} \left(J_j - J_j^{\text{и}} \right)^2 \to \min. \tag{6.62}$$

Этап 4. Формирование проекции типа (рис. 6.10, *б*). Формирование оптимальных ПКЗУ ММС. Моделирование оптимальных траекторий ММС.

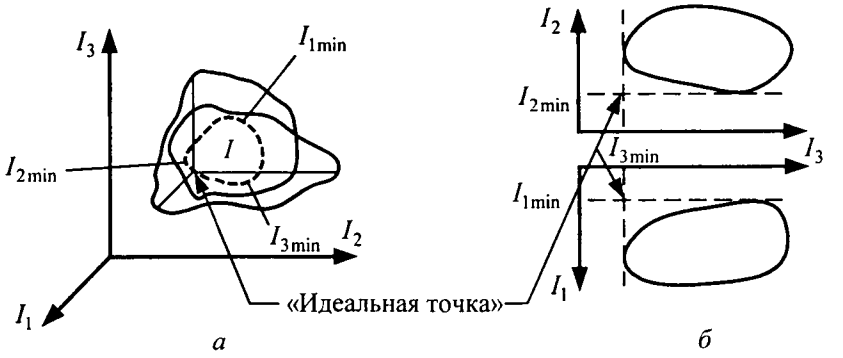


Рис. 6.10. Формирование идеальной точки (*а*) и проекций (*б*)

На рис. 6.11, 6.12 даны блок-схемы алгоритма получения управления ММС на основе векторного равновесия.

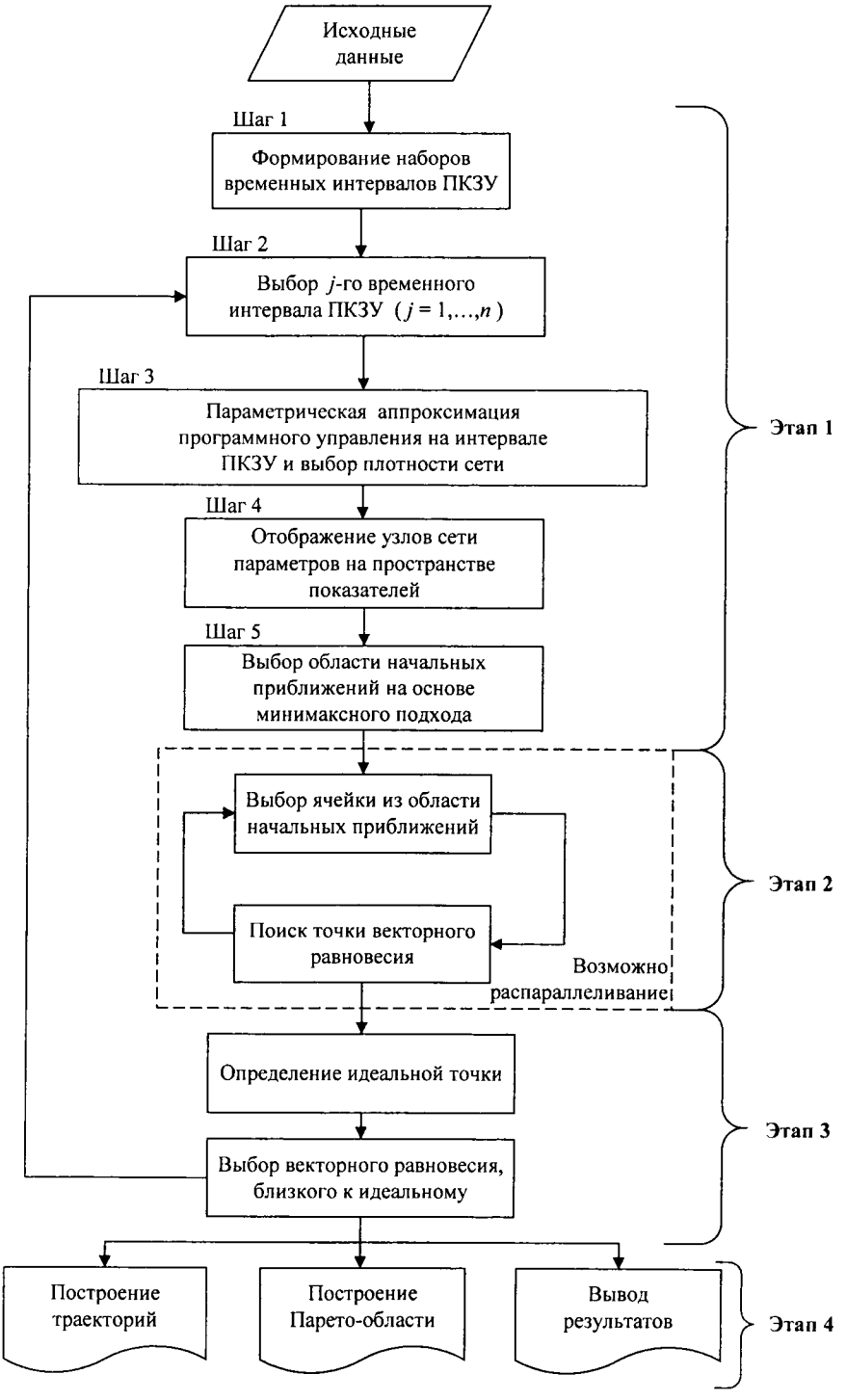


Рис. 6.11. Блок-схема алгоритма управления на основе векторного равновесия

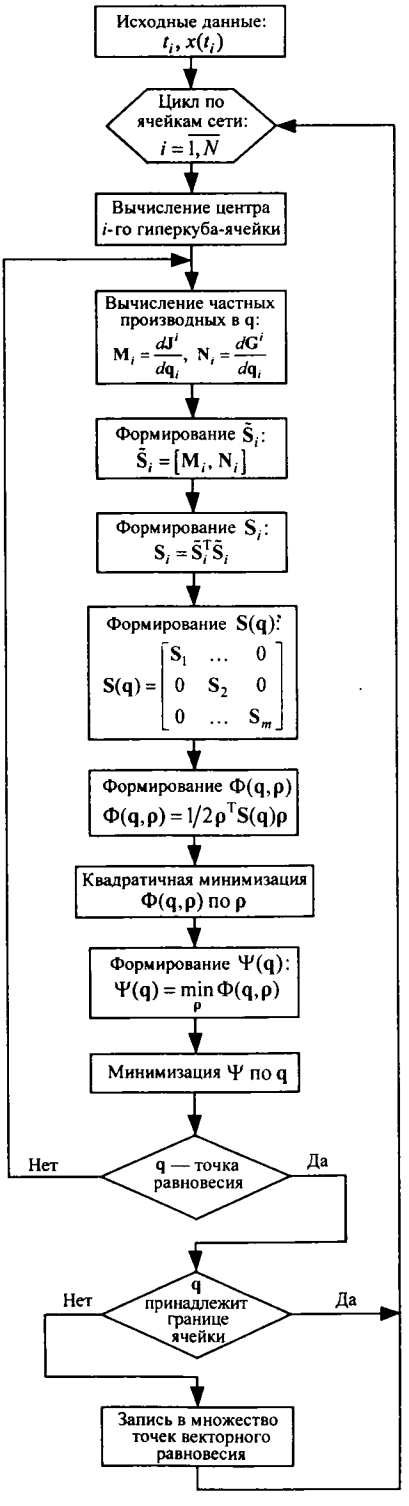


Рис. 6.12. Блок-схема алгоритма поиска векторного равновесия с данным начальным приближением (этап 2)

В [24, гл. 3] данный алгоритм применяется в практической задаче наведения звена высокоскоростных ЛА как группового перехвата цели с учетом противодействия. Рассматриваются нелинейные динамические модели ЛА высокого порядка (общий порядок системы — 18), учитываются ограничения на управление и координаты, показатели учитывают точность наведения и маневренность ЛА, построение ведущий-ведомый. Получен наиболее эффективный векторно-равновесный приближенный ПКЗУ ЛА в конфликте с учетом рассмотренного СТЭК-3 для начальных продольных, поперечных и встречных курсов ЛА.

Повышение быстродействия метода. В соответствии с рис. 6.11 для увеличения быстродействия алгоритма применены аппроксимация описания ММС, минимаксный подход для уменьшения области начальных условий и оценивается возможность параллельной реализации этапа 2 метода [24].

6.3.4. Решение задачи коалиционного перехвата подвижной цели с учетом противодействия на этапе ближнего наведения ЛА

Динамическая модель ММС. Движение центров масс (ЦМ) ЛА описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений в нормальной земной системе координат (СК) $O_{Д}X_{Д}Y_{Д}Z_{Д}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \theta_i}{\partial t} = \dfrac{g}{V_i}(n_{Yi} - \cos\theta_i); \\ \dfrac{\partial \Psi_i}{\partial t} = -\dfrac{g n_{Zi}}{V_i \cos\theta_i}; \\ \dfrac{\partial X_{Дi}}{\partial t} = V_i \cos\theta_i \cos\Psi_i; \\ \dfrac{\partial Y_{Дi}}{\partial t} = V_i \sin\theta_i; \\ \dfrac{\partial Z_{Дi}}{\partial t} = -V_i \cos\theta_i \sin\Psi_i; \\ i = \overline{1,3}, \end{cases}$$

где $\left[X_{Дi}, Y_{Дi}, Z_{Дi}\right]$, $i = \overline{1,3}$, — координаты ЦМ ЛА; V_i — скорость ЛА; Θ_i — угол наклона траектории полета ЛА; Ψ_i — угол поворота траектории.

Далее будем предполагать, что каждый из ЛА движется без скольжения $(\beta_i = 0)$ и величины скоростей не меняются в течении всего времени взаимодействия коалиций $(|V_i| = \text{const})$.

Вектор состояния системы имеет вид

$$\mathbf{x} = \left[\Theta_i, \Psi_i, X_{Дi}, Y_{Дi}, Z_{Дi}, X_K, Y_K, Z_K\right]^{\mathrm{T}}, \; i = \overline{1,3},$$

где X_K, Y_K, Z_K — координаты центра коалиции истребителей-перехватчиков (ИП):

$$\begin{cases} X_K = \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{X_{Дj}}{2}; \\ Y_K = \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{Y_{Дj}}{2}; \\ Z_K = \sum\limits_{j=1}^{2} \dfrac{Z_{Ej}}{2}. \end{cases}$$

В качестве вектора наблюдаемого выхода будем рассматривать расстояния между подсистемами «ИП–цель» и внутри коалиции ИП:

$$\mathbf{y} = \left[\rho_j, \rho_K, R\right]^{\mathrm{T}}, j = 1,2,$$

где ρ_j — расстояние между j-м ИП и целью, ρ_K — расстояние от центра коалиции ИП до цели, R — расстояние между ИП:

$$\rho_j = \left(X_{\text{Д3}} - X_j\right)^2 + \left(Y_{\text{Д3}} - Y_j\right)^2 + \left(Z_{\text{Д3}} - Z_j\right)^2;$$

$$\rho_K = \left(X_{\text{Д3}} - X_K\right)^2 + \left(Y_{\text{Д3}} - Y_K\right)^2 + \left(Z_{\text{Д3}} - Z_K\right)^2;$$

$$R = \left(X_{\text{Д1}} - X_{\text{Д2}}\right)^2 + \left(Y_{\text{Д1}} - Y_{\text{Д2}}\right)^2 + \left(Z_{\text{Д1}} - Z_{\text{Д2}}\right)^2.$$

Изменение положения ЛА в пространстве обеспечивается системой управления ЛА путем изменения величины перегрузки и ее направления (за счет «накренения» γ_i ЛА). Поэтому вектор управления имеет вид

$$\mathbf{u} = \left[n_{yi}, n_{zi}\right]^{\mathrm{T}}, \; i = \overline{1,3},$$

где $n_{yi} = n_i \cdot \cos\left(\gamma_i\right)$; $n_{zi} = n_i \cdot \sin\left(\gamma_i\right)$.

Вектор ограничений определяет конфигурацию истребителей-перехватчиков (ИП) внутри коалиции.

Приведя ограничения к стандартному виду, запишем вектор $\mathbf{g_a}$:

$$\mathbf{g_a} = \begin{bmatrix} R^2 - R_{\max}^2 \\ R_{\min}^2 - R^2 \\ -Y_{\text{Д}i} \end{bmatrix} < 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Таким образом, полностью описана модель, характеризующая динамические особенности каждого из участников взаимодействия и всей системы в целом.

Векторный показатель системы имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \rho_1^2 + \lambda_1 \int\limits_0^T \left(n_{Z1}^2 + n_{Y1}^2\right) dt; \\ \rho_2^2 + \lambda_2 \int\limits_0^T \left(n_{Z2}^2 + n_{Y2}^2\right) dt; \\ -\rho_K^2 + \lambda_3 \int\limits_0^T \left(n_{Z3}^2 + n_{Y3}^2\right) dt. \end{bmatrix}$$

Показатели содержат соответствующие промахи ЛА и энергетические затраты со штрафными коэффициентами λ_j. При помощи коэффициентов λ_j можно гибко менять смысл вектора интегральных показателей: при малых λ_j интегральные показатели в большей степени отслеживают промах, а не энергетические затраты, когда же $\lambda_j \gg 1$, на передний план выступает минимизация энергетических затрат при перехвате цели. Кроме этого, при $\lambda_1 \neq \lambda_2$ можно задать режим перехвата цели звеном с разделением функций ЛА «ведущий–ведомый» ($\lambda_1 = \lambda_2$ задают режим полета звена с равноправными ЛА). При разделении функций ЛА в звене основная задача по перехвату цели лежит на «ведущем», а «ведомый» выступает в качестве прикрытия «ве-

дущего». Поэтому «ведущий» должен в большей степени учитывать промах при противодействии, чем «ведомый».

ММС представляет собой две коалиции, векторный функционал которой не поддается скаляризации. Это связано, например, с тем, что тактические приемы коалиции ИП не только неизвестны заранее цели, но и могут меняться во время взаимодействия.

Формирование параметризованного ПКЗУ. Разобьем интервал $[t_0, T]$ на n вложенных интервалов $[t_{j-1}, T]$. Зададим на каждом интервале $[t_{j-1}, T]$ ПКЗУ программу управления в виде

$$\begin{cases} \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_1^j \quad t \in \left[t_{j-1}, \dfrac{t_{j-1}+T}{2} \right]; \\ \mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_2^j \quad t \in \left(\dfrac{t_{j-1}+T}{2}, T \right], \\ j = \overline{1,n}; \\ \mathbf{x}\left(t_{j-1}\right) = \mathbf{x}_{j-1}. \end{cases}$$

Анализ эффективности коалиционного перехвата подвижной цели. Выбор плотности параметрической сети для анализа эффективности ММС на основе векторного равновесия представлен в двух вариантах в табл. 6.1.

Таблица 6.1

Варианты «сетей» значений параметров

Параметр	Диапазон изменения		Количество интервалов	
	$\mathbf{u}_L^j$	$\mathbf{u}_H^j$		
n_1, ед.	–3	8	3	5
γ_1	–60	60	1	1
n_2, ед.	–3	8	3	5
γ_2	–60	60	1	1
n_3, ед.	–1	5	2	3
γ_3°	–30	30	1	1
Число «ячеек» в сети			324	5625

Более густая сеть точнее отображает всю область пространства показателей. Однако для исследования необходима не вся область, а только ее часть — Парето-множество и точки векторного Нэш-равновесия. А их с достаточной точностью можно определить и при менее густой сети, выиграв при этом во времени поиска решения.

Исходные значения параметров-констант: $V_1 = 600$ м/с; $V_2 = 600$ м/с; $V_3 = 300$ м/с; $R_{\max} = 2000$ м; $R_{\min} = 50$ м; $\lambda_1 = 1$; $\lambda_2 = 1$; $\lambda_3 = 1$;

Результаты оптимизации и получения СТЭК-3 приведены в [24]: даны временные реализации законов управления, множество векторных Нэш-решений, получено наиболее эффективное Нэш-решение в виде СТЭК-3, построены оптимальные траектории ЛА. Проведено исследование методов повышения быстродействия для обеспечения реального времени.

6.4. СТАБИЛЬНЫЕ КОАЛИЦИОННЫЕ РЕШЕНИЯ В ММС. УПРАВЛЕНИЯ НА ОСНОВЕ МЕТОДА «УГРОЗ И КОНТРУГРОЗ»

6.4.1. Понятие равновесия на основе «угроз и контругроз» (УКУ). Стратегическая значимость УКУ. Существование УКУ. Двухэтапная процедура оптимизации на основе принципа УКУ

Угрозой коалиции K, где $K = K_l \in P$ или K — объединение нескольких коалиций $\left(K = \bigcup K_l,\ K \notin P,\ K \in \mathrm{P}\right)$, называется [18] возможность такого изменения управления $\mathbf{u}_K$ на $\mathbf{v}_K \in U_K$, чтобы

$$J_K\left(\mathbf{v}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right) < J_K\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right), \tag{6.63}$$

где N/K — контркоалиция, составленная из всех, кроме состава K, игроков множества N $\left(N/K \in \mathrm{P}\right)$.

Из неравенства (6.63) следует, что хотя потери какого-либо из игроков из K могут и увеличиться, но игроки коалиции K в свою очередь могут договориться, чтобы суммарное снижение потерь

$$J_K\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right) - J\left(\mathbf{v}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right) = \Delta > 0$$

разделить между собой поровну, уменьшив потери каждого участника коалиции S на величину Δ/K.

Чтобы у игроков коалиции K при выполнении условия (6.63) не было стремления к изменению ситуации $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$, у контркоалиции N/K должна быть возможность заменить свои управления $\mathbf{u}_{N/K}$ на управления $\mathbf{v}_{N/K} \in U_{N/K}$ так, что для набора $\mathbf{v} = \left(\mathbf{v}_K, \mathbf{v}_{N/K}\right)$ выполняются условия контругрозы контркоалиции N/K

$$\begin{aligned} J_K\left(\mathbf{v}_K, \mathbf{v}_{N/K}\right) &\geq J_K\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right), \\ J_{N/K}\left(\mathbf{v}_K, \mathbf{v}_{N/K}\right) &< J_{N/K}\left(\mathbf{v}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right). \end{aligned} \tag{6.64}$$

Условия (6.64) показывают, что если коалиция K заменила набор $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$ набором $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$, то у контркоалиции N/K есть возможность заменить набор $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$ набором $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$, для которого ее суммарные потери меньше, чем при наборе $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$, а суммарные потери K выше, чем при начальном наборе $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$. Поэтому коалиция K теряет стимул для замены $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$ на $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$.

Определение 6.33. Набор $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$ является угрозой и контругрозой для коалиции K, если для любой ее угрозы существует контругроза контркоалиции N/K.

Определение 6.34. Набор $\left(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}\right)$ является УКУ-оптимальным решением дифференциальной коалиционной игры, если для любой угрозы любой коалиции K у контркоалиции существует контругроза.

В [20] на основе принципа УКУ сформировано общее понятие V-оптимальности и коалиционного равновесия.

Угроза считается эффективной, если на нее нет контругрозы.

Исход игры считается оптимальным, если против него нет эффективных угроз. Множество всех оптимальных исходов есть V-решение игры.

Тогда для динамической игры исход называется V-оптимальным, если на любую угрозу против него существует контругроза. Определение для коалиционной дифференциальной игры принимает вид:

Определение 6.35. Ситуация $\mathbf{u}^P$ будет коалиционным равновесием, если $\mathbf{u}^P \in V$ и для любого $K \in P \subset \mathrm{P}$ и $\mathbf{u}_K \in U_K$ ситуация $\mathbf{u}_K^P$ минимизирует (максимизирует) по Парето вектор потерь (выигрышей) $\mathbf{J}_i\left(\mathbf{u}^P \| \mathbf{u}_K\right)_{i \in K}$ в U_K.

Обобщает понятие коалиционного равновесия так называемое сильное равновесие [20].

При кажущейся конструктивности существующих необходимых и достаточных условий [24] применить их сложно. Поэтому, используя определенным образом условия существования УКУ-решений, можно предложить следующий двухэтапный метод их определения [23, 24].

На первом этапе, на основе простейшей параметризации управлений и создания ортогональной сети на основе определений УКУ, формируется сеть приближенных решений.

На втором этапе, используя найденные оценки множества УКУ в качестве начальных приближений в сетевой «ячейке», решается задача определения точных УКУ-решений на основе понятия локальных угроз и контругроз [18, 23, 24].

6.4.2. Этап 1. Выбор начальных приближений УКУ на основе построения ортогональной равномерной сети

Формирование ортогональной равномерной сети. Рассмотрим кусочно-непрерывные управления $u_j(t)$ вида

$$u_j(t) = q_{1j}\left(1[t-t_0]-1[t-t_1]\right)+\ldots+q_{nj}\left(1[t-t_{n-1}]-1[t-t_n]\right),\ j \in M_K = \overline{\{1, m_k\}}, \quad (6.65)$$

где $q_{ij_{\min}} \le q_{ij} \le q_{ij_{\max}}$, а $q_{ij_{\min}}$ и $q_{ij_{\max}}$ определяются значениями сети параметров $\left(q_{ij_{\min}} \ge q_{L_{ij}};\ q_{ij_{\max}} \le q_{H_{ij}}\right)$.

Управление (6.65) является параметризованной программой на r-м интервале ПКЗУ вида

$$u_j(t) = \sum_{i=r}^{n} q_{ij} \cdot \left(1[t-t_{i-1}]-1[t-t_i]\right),\ t_{r-1} \le t \le t_n = T,\ r = \overline{1,n} \ \text{ при } \ r = 1.$$

На каждом интервале ПКЗУ формируется $(n-r)$ наборов m_k-мерной ортогональной сети шагов управлений (или m_k наборов $(n-r)$-мерной ортогональной сети каждого управления).

То есть для выбора начальных приближений УКУ для интервала ПКЗУ вида (6.65) каждого i-го шага управления

$$u_{ij}(t) = q_{ij} \cdot \left(1[t-t_{i-1}]-1[t-t_i]\right) \quad (6.66)$$

формируется m_k-мерная совместная ортогональная сеть точек густоты l_i, на множестве $(n-r)$ сетей и вычисляются области стабильного по УКУ взаимодействия коалиций.

Множество точек этой сети отображается в пространство показателей $\mathbf{J}$, формируя, таким образом, ее вид.

Если рассматривается многошаговое двухкоалиционное взаимодействие, то на каждом i-м шаге изменения управления формируется совместная двухмерная ортогональная равномерная сеть. В том случае, когда имеет место вырожденное управление, постоянное на всем интервале взаимодействия

$$u_j(t) = q_j = \text{const},$$

сеть формируется перед началом игры и остается неизменной при взаимодействии (не зависит от i).

Густота сети l_i (длина шага сети) неявно характеризует точность определения области показателей $\mathbf{J}$ в целом, а также области УКУ-равновесных точек в частности. В каждом конкретном случае «густота», достаточная в смысле точности области $\mathbf{J}$, определяется свойствами сжатия функционалов $\mathbf{J}$. При этом густота сети и размерность области $\mathbf{q}$ непосредственно связаны с временем оптимизации — уменьшение шага сети ведет к значительному увеличению продолжительности работы алгоритма поиска УКУ-оптимальных решений, так как количество «ячеек» сети $N_{яi}$ и точек сети $N_{тi}$ определяется для (6.65) из выражения

$$N_я = \prod_{i=1}^{n} N_{яi},\ N_т = \prod_{i=1}^{n} N_{тi},\ N_{яi} = \prod_{j=1}^{m_i} \frac{q_{H_{ij}} - q_{L_{ij}}}{l_i},\ N_{тi} = \prod_{j=1}^{m_i} \left(\frac{q_{H_{ij}} - q_{L_{ij}}}{l_i} + 1 \right),$$

где n — размерность области параметров $\mathbf{q}$, l_i — густота сети на i-м шаге, $q_{L_{ij}}$, $q_{H_{ij}}$ — нижняя и верхняя границы i-й компоненты q_{ij} вектора параметров.

Так как УКУ-решения, полученные на первом этапе алгоритма оптимизации методом УКУ, используются только для формирования начальных приближений для дальнейшей оптимизации, то возможен выбор достаточно большого значения шага (малой густоты) сети l. При этом имеет место увеличение быстродействия алгоритма.

Например, для ряда приложений имеет место

$$\frac{q_{H_{ij}} - q_{L_{ij}}}{l_i} \geq 5 \div 10 .$$

Алгоритм получения сетевых УКУ-решений. Алгоритм вычисления сетевых УКУ-решений является итерационным и в общем случае имеет следующий вид:

Шаг 1: задается модель конфликта, определяются параметры системы.

Шаг 2: для r-го интервала ПКЗУ формируется равномерная ортогональная сеть с $N_я$ и $N_т$ для $t \in [t_{r-1}, t_n]$.

Шаг 3: для точки в сети с координатами $(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K})$ проверяется наличие угрозы коалиции K, т.е. точки с координатами $(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K})$ для которой выполняется условие (6.63).

Шаг 4:

а) если угроза существует, проверяется наличие контругрозы коалиции N/K, т.е. точки с координатами $(\mathbf{v}_K, \mathbf{v}_{N/K})$, для которой выполняются условие (6.64);

б) если угрозы не существует, то переходим на шаг 6, б.

Шаг 5:

а) если контругроза существует, то переходим на шаг 6, а;

б) если контругрозы не существует, то данная точка не является УКУ-оптимальной и происходит переход на шаг 7.

Шаг 6:

а) точка $(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K})$ является УКУ-решением;

б) точка имеет признаки равновесия.

Шаг 7:

а) переходим к следующей точке сети на шаге 3;

б) если перебраны все точки сформированной сети, то переходим к шагу 2 для формирования $(r+1)$-го шага ПКЗУ.

6.4.3. Этап 2. Оптимизация управления ММС на основе модифицированных достаточных условий локальных УКУ (ЛУКУ) [24] и метода моментов Н.Н. Красовского [52]

Модифицированные достаточные условия ЛУКУ. *Локальной угрозой коалиции* $S = K_l$ (или $S = \bigcup_l K_l$ по некоторым K_l из P или из **P**) является возможность замены коалицией S управления $\mathbf{u}_K(t)$ на $\mathbf{v}_K(t) \in U_K$, $\int_{t_0}^{T} \|\mathbf{u}_K(t) - \mathbf{v}_K(t)\|^2 dt < \varepsilon$ так, чтобы

$$J_K(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}) > J_K(\mathbf{v}_K, \mathbf{u}_{N/K}). \tag{6.67}$$

Локальной контругрозой контркоалиции N/K является возможность замены контркоалицией N/K управления $\mathbf{u}_{N/K}(t)$ на $\mathbf{v}_{N/K}(t) \in U_{N/K}$, $\int_{t_0}^{T} \|\mathbf{u}_{N/K}(t) - \mathbf{v}_{N/K}(t)\|^2 dt < \varepsilon$ так, чтобы

$$\begin{aligned} J_K(\mathbf{v}_K, \mathbf{v}_{N/K}) &> J_K(\mathbf{u}_K, \mathbf{u}_{N/K}), \\ J_{N/K}(\mathbf{v}_K, \mathbf{v}_{N/K}) &< J_{N/K}(\mathbf{v}_K, \mathbf{u}_{N/K}). \end{aligned} \tag{6.68}$$

Локальный характер угроз и контругроз принят к рассмотрению для уточнения сетевых УКУ в промежутках между узлами сети.

Определение 6.36. Локальной угрозой и контругрозой для коалиции K называется набор управлений

$$\mathbf{u}(t) = \{\mathbf{u}_K(t), \mathbf{u}_{N/K}\} \in \overline{U} = \prod_{i=1}^{N} U_i,$$

для которого существует постоянная $\varepsilon > 0$, такая, что на любую локальную угрозу коалиции K у контркоалиции N/K имеется локальная контругроза.

Определение 6.37. Если один и тот же набор управлений является локальной угрозой и контругрозой для любой допустимой коалиции K, то $\mathbf{u}(t)$ называется локальной угрозой и контругрозой коалиционной игры.

Для получения достаточных условий класс допустимых вариаций $\mathbf{u}_K(t)$ и $\mathbf{u}_{N/K}(t)$ ограничивается допустимыми управлениями вида

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_K(t) &= \mathbf{u}_K(t) + \gamma_K \cdot \overline{\mathbf{u}}_K(t), \\ \mathbf{v}_{N/K}(t) &= \mathbf{u}_{N/K}(t) + \gamma_{N/K} \cdot \overline{\mathbf{u}}_{N/K}(t), \end{aligned}$$

где $\overline{\mathbf{u}}_K \in U_K$, $\overline{\mathbf{u}}_{N/K} \in U_{N/K}$, а γ_K, $\gamma_{N/K}$ — постоянные.

Постоянные γ_K, $\gamma_{N/K}$ можно выбрать настолько малыми по абсолютной величине, что при ограниченных $\overline{\mathbf{u}}_K$, $\overline{\mathbf{u}}_{N/K}$ имеет место

$$\int_{t_0}^{T} \left[\|\mathbf{u}_K(t) - \mathbf{v}_K(t)\|^2 + \|\mathbf{u}_{N/K}(t) - \mathbf{v}_{N/K}(t)\|^2 \right] dt < \varepsilon. \tag{6.69}$$

Вводятся системы вида

$$\dot{\xi}_j(t) = \mathbf{A}(t) \cdot \xi_j(t) + \mathbf{B}_j(t) \cdot \overline{\mathbf{u}}_j(t), \quad \xi(t_0) = 0, \tag{6.70}$$

где $\mathbf{A}(t) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$; $\mathbf{B}(t) = \partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{u}_j$ $(j = K, N/K)$ — матрицы Якоби, $\mathbf{Y}(t)$ — матрица фундаментальных решений. Далее для удобства будем обозначать УКУ-решение как $\mathbf{u}^0 = \{\mathbf{u}_K^0, \mathbf{u}_{N/K}^0\}$.

Теорема 6.1. Для того, чтобы набор $\mathbf{u}^0(t)=\left\{\mathbf{u}_K^0(t),\,\mathbf{u}_{N/K}^0\right\}$ был локальной угрозой и контругрозой для коалиции K, достаточно, чтобы для любых допустимых $\overline{\mathbf{u}}(t)=\left\{\overline{\mathbf{u}}_K(t),\,\overline{\mathbf{u}}_{N/K}\right\}\in U$ выполнялась система неравенств

$$\left\{\frac{\partial f_K(0,0)}{\partial\gamma_K}\neq 0;\ \frac{\partial f_K(0,0)}{\partial\gamma_{N/K}}>0;\ \frac{\partial f_{N/K}(0,0)}{\partial\gamma_{N/K}}<0,\right. \tag{6.71}$$

где

$$\frac{\partial f_K(0,0)}{\partial\gamma_K}=\frac{\partial J_K(\mathbf{v}_K,\mathbf{v}_{N/K})}{\partial\gamma_K}\bigg|_{\gamma_K=\gamma_{N/K}=0};\ \ldots$$

$$\frac{\partial f_k}{\partial\gamma_j}=\left[\frac{\partial\Phi_k\left(T,\mathbf{x}^0(T)\right)}{\partial\mathbf{x}},\xi_j(T)\right]+\int_{t_0}^{T}\left[\left(\frac{\partial F_k\left(t,\mathbf{x}^0(t),\mathbf{u}^0\right)}{\partial\mathbf{x}},\xi_j(t)\right)+\left(\frac{\partial F_k}{\partial\mathbf{u}_j^0},\overline{\mathbf{u}}_j\right)\right]dt, \tag{6.72}$$

где

$$k,j=[K,N/K],\ \ \dot{\xi}_j(t)=\mathbf{A}(t)\cdot\xi_j(t)+\mathbf{B}_j(t)\cdot\overline{\mathbf{u}}_j(t),$$

$$\xi_j(t_0)=0,\ \ \mathbf{A}=\left\{\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{x}}\right\},\ \ \mathbf{B}_j=\left\{\frac{\partial\mathbf{f}}{\partial\mathbf{u}_j}\right\};$$

$\dot{\mathbf{x}}^0(t)=\mathbf{f}\left(\mathbf{x},\mathbf{u}_K^0,\mathbf{u}_{N/K}^0\right)$, $\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0$, $\mathbf{v}_j\equiv\mathbf{u}_j^0+\gamma_j\cdot\overline{\mathbf{u}}_j$ — реализация угроз и контругроз, $\mathbf{v}_j$, $\mathbf{u}_j^0$, $\overline{\mathbf{u}}_j$ принадлежат U_j, вектор малых величин γ_j выбираем из условия

$$\int_{y_0}^{T}\sum\left\|\mathbf{u}_j^0-\mathbf{v}_j\right\|^2dt<\varepsilon,$$

где $\varepsilon>0$ — малая величина.

Если показатели имеют смысл показателей эффективности, то знаки второго и третьего неравенств в (6.71) меняются на противоположные.

Как показано в [24], данные достаточные условия локальных УКУ (6.71) являются более удобными для практических применений.

Метод оптимизации. Один из вариантов методического упрощения структуры метода на втором этапе заключается в сведении исходной задачи к такому виду, когда для получения $\mathbf{u}^0$ достаточно использовать из (6.72) лишь первое скалярное произведение с областью достижимости $\xi_j(T)$.

Для этого вводятся дополнительные координаты:

$$\dot{\mathbf{x}}_{0_K}=F_K(t,\mathbf{x},\mathbf{u}),\ \ \mathbf{x}_{0_K}(t_0)=0,\ \ \dot{\mathbf{x}}_{0_{N/K}}=F_{N/K}(t,\mathbf{x},\mathbf{u}),\ \ \mathbf{x}_{0_{N/K}}(t_0)=0, \tag{6.73}$$

и исходная задача сводится к задаче с терминальным показателем

$$J_K=\Phi_K\left(\mathbf{x}(T),T\right)+\mathbf{x}_{0_K}(T)=\overline{\Phi}_K\left(\overline{\mathbf{x}}(T),T\right),\ \ J_{N/K}=\overline{\Phi}_{N/K}\left(\overline{\mathbf{x}}(T),T\right), \tag{6.74}$$

где $\overline{\mathbf{x}}(T)=\left(\mathbf{x}_{0_K}(T),\mathbf{x}_{0_{N/K}}(T),\mathbf{x}(T)\right)$ — расширенный вектор.

Тогда

$$\frac{\partial f_k}{\partial\gamma_j}=\left[\frac{\partial\overline{\Phi}_k\left(\mathbf{x}^0(T),T\right)}{\partial\overline{\mathbf{x}}},\overline{\xi}_j(T)\right],\ \ k,j=(K,N/K); \tag{6.75}$$

$$\dot{\overline{\xi}}_j(t)=\overline{\mathbf{A}}(t)\cdot\overline{\xi}_j(t)+\overline{\mathbf{B}}_j(t)\cdot\overline{\mathbf{u}}_j(t),\ \ \overline{\xi}_j(t_0)=0,\ \ \overline{u}_j\in U_j; \tag{6.76}$$

$$\dot{\overline{\mathbf{x}}}^0(t)=\overline{f}\left(\mathbf{x}^0,\mathbf{u}_K^0,\mathbf{u}_{N/K}^0\right),\ \ \overline{\mathbf{x}}(t_0)=\overline{\mathbf{x}}_0, \tag{6.77}$$

где последняя система имеет вид

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}^0_{0_K}(t) = F_K\left(t, \mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0_K, \mathbf{u}^0_{N/K}\right), \ \mathbf{x}_{0_K}(t_0) = 0; \\ \dot{\mathbf{x}}^0_{0_{N/K}}(t) = F_{N/K}\left(t, \mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0_K, \mathbf{u}^0_{N/K}\right), \ \mathbf{x}_{0_{N/K}}(t_0) = 0; \\ \dot{\mathbf{x}}^0(t) = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}^0, \mathbf{u}^0_K, \mathbf{u}^0_{N/K}\right), \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \tag{6.78}$$

В данной трактовке достаточные условия принимают вид системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_K}{\partial \gamma_K} = \left[\dfrac{\partial \bar{\Phi}_K\left(T, \bar{\mathbf{x}}^0(T)\right)}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \bar{\xi}_K(T) \right] \neq 0; \\ \dfrac{\partial f_K}{\partial \gamma_{N/K}} = \left[\dfrac{\partial \bar{\Phi}_K\left(T, \bar{\mathbf{x}}^0(T)\right)}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \bar{\xi}_{N/K}(T) \right] > 0; \\ \dfrac{\partial f_{N/K}}{\partial \gamma_{N/K}} = \left[\dfrac{\partial \bar{\Phi}_{N/K}\left(T, \bar{\mathbf{x}}^0(T)\right)}{\partial \bar{\mathbf{x}}}, \bar{\xi}_{N/K}(T) \right] < 0 \end{cases} \tag{6.79}$$

при наличии связей (6.76)–(6.78).

Здесь и далее рассматриваются кусочно-непрерывные управления $u_j(t)$ вида

$$u_j(t) = u_j\left(t, \mathbf{x}(t_{r-1})\right), \ t_{r-1} \le t \le t_n = T, \ r = \overline{1,n}, \tag{6.80}$$

а также параметризованные стратегии $u_j(t) = u_j\left(\mathbf{q}_j, \mathbf{x}(t)\right)$.

Таким образом, необходимо найти пару $\left(\mathbf{u}^0_K, \mathbf{u}^0_{N/K}\right)$, которая на множествах допустимых управлений $\bar{\mathbf{u}}_K \in U_K$ и $\bar{\mathbf{u}}_{N/K} \in U_{N/K}$ и, как следствие, на множествах $\bar{\xi}_K(t)$, $\bar{\xi}_{N/K}(t)$ обеспечивает систему неравенств (6.79).

Общую алгоритмическую структуру этапа 2 теперь можно базировать на основе следующей геометрической трактовки.

Примем для рассуждений без ограничения общности результата, что размерность систем (6.76) и (6.77) $\dim \bar{\xi}_j = 2$, $\dim \bar{\mathbf{x}} = 2$.

Тогда система (6.79) является системой скалярных неравенств следующего вида (прочерки над переменными опускаем)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_K}{\partial \gamma_K} = \left(\mathbf{a}, \xi_K(T)\right) = a_1 \cdot \xi_{K,1}(T) + a_2 \cdot \xi_{K,2}(T) \neq 0; \\ \dfrac{\partial f_K}{\partial \gamma_{N/K}} = \left(\mathbf{a}, \xi_{N/K}(T)\right) = a_1 \cdot \xi_{N/K,1}(T) + a_2 \cdot \xi_{N/K,2}(T) > 0; \\ \dfrac{\partial f_{N/K}}{\partial \gamma_{N/K}} = \left(\mathbf{b}, \xi_{N/K}(T)\right) = b_1 \cdot \xi_{N/K,1}(T) + b_2 \cdot \xi_{N/K,2}(T) < 0. \end{cases} \tag{6.81}$$

Векторы **a**, **b** являются векторами, однозначно зависящими от $\mathbf{u}^0$. Векторы $\xi_K(T)$, $\xi_{N/K}(T)$ заполняют соответствующие области достижимости (ОД) (рис. 6.13).

Утверждение 6.5 [24]. Для того, чтобы третье неравенство системы (6.81) выполнялось на всей $\text{ОД}_{\xi_{N/K}}$, достаточно, чтобы вектор нормали **b** гиперплоскости, проходящей через начало координат, находился «внутри» конуса $\left(\ell^{\text{I}} 0 \ell^{\text{II}}\right)$, где ℓ^{I} и ℓ^{II} — вектора нормали касательных гиперплоскостей к $\text{ОД}_{\xi_{N/K}}$.

Утверждение 6.6 [24]. Для того, чтобы второе неравенство системы (6.81) выполнялось на всей $ОД_{\xi_{N/K}}$, достаточно, чтобы вектор нормали к гиперплоскости находился «внутри» конуса $(-\ell^{I}0-\ell^{II})$.

Утверждение 6.7 [24]. Первое неравенство системы (6.81) ограничивает область допустимых значений нормали а гиперплоскости второго неравенства системы пересечением конусов $(-\ell^{I}0-\ell^{II})$ и $(-\ell^{IV}0-\ell^{III})$, где ℓ^{III} и ℓ^{IV} — нормали к гиперплоскостям, касающимся $ОД_{\xi_K}$ и конусом $(-\ell^{II}0\ell^{III})$.

Утверждение 6.8 [24]. При касании $ОД_{\xi_{N/K}}$ начала координат или при включении начала координат во внутреннюю точку области $ОД_{\xi_{N/K}}$ $(ОД_{\xi_K})$ задача решения не имеет.

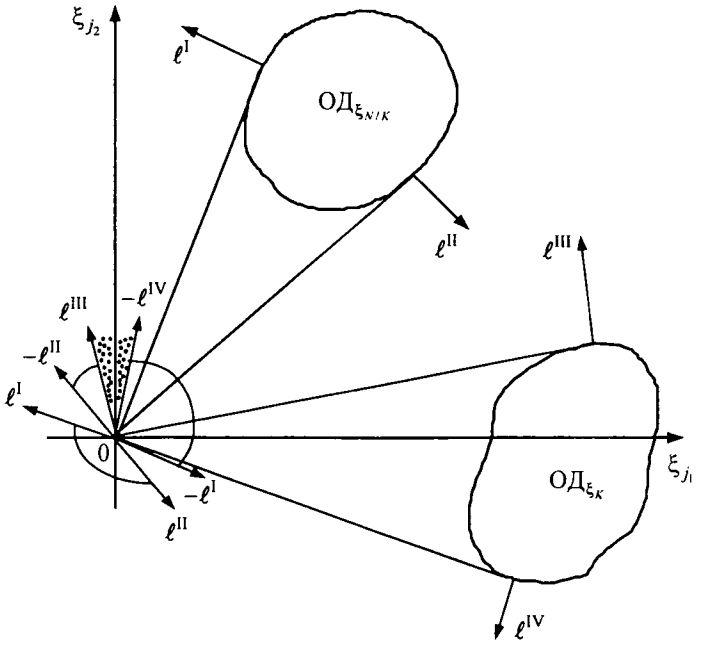


Рис. 6.13. Топология метода на основе ОД

Теорема 6.2 [24]. Оптимальное управление, приводящее траекторию $\bar{\xi}_j(t)$ системы

$$\dot{\bar{\xi}}_j(t)=\mathbf{A}\cdot\bar{\xi}_j(t)+\bar{\mathbf{B}}_j\cdot\bar{\mathbf{u}}_j,\ \ \bar{\xi}_j(t_0)=0 \tag{6.82}$$

в точку касания ОД и гиперплоскости, а также вектор нормали ℓ в точке касания определяются при решении задачи

$$\min_{\|\ell\|=1}\ \max_{\bar{u}_j}\int_{t_0}^{T}\ell^{\mathrm{T}}\cdot\mathbf{X}(T,\tau)\cdot\bar{\mathbf{B}}_j\cdot\bar{\mathbf{u}}_j(\tau)d\tau=0, \tag{6.83}$$

где $\mathbf{X}(T,\tau)$ — матрица фундаментальных решений системы (матрица перехода):

$$\mathbf{X}(T,t)=\begin{bmatrix}x_{11}(T,t) & \cdots & x_{1n}(T,t)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ x_{n1}(T,t) & \cdots & x_{nn}(T,t)\end{bmatrix}. \tag{6.84}$$

В соответствии с полученными результатами общая структура алгоритма 2-го этапа оптимизации управлений на основе объединения модифицированных достаточных условий ЛУКУ (МДУ ЛУКУ) и метода моментов Н.Н. Красовского можно представить итерационным процессом, основой которого являются следующие шесть шагов:

Шаг 1: приведение исходной постановки к виду (6.74)–(6.78);

Шаг 2: формирование системы неравенств (6.79) (МДУ ЛУКУ);

Шаг 3: *итерация* 1: задание начальных приближений $\mathbf{u}^0$ и «ячейки» U допустимых значений $\mathbf{u} \in U$ на основе сетевых решений этапа 1;

итерация $i > 1$: формирование текущих приближений $\mathbf{u}^0 \in U$;

Шаг 4: формирование системы (6.82) $\left(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{X}(T,t)\right)$ на основе приближений $\mathbf{u}^0 \in U$; решение задачи (6.83) для определения границ конусов нормалей $\mathrm{Con}\,\ell$ (рис. 6.13), удовлетворяющих МДУ ЛУКУ:

$$\widehat{\ell^{\mathrm{I}} 0 \ell^{\mathrm{II}}}; \widehat{-\ell^{\mathrm{II}} 0 - \ell^{\mathrm{I}}} \cap \widehat{-\ell^{\mathrm{IV}} 0 - \ell^{\mathrm{III}}}; \widehat{-\ell^{\mathrm{II}} 0 \ell^{\mathrm{III}}},$$

а также соответствующих конусов $\mathrm{Con}\,\xi$, образованных векторами $\overline{\xi}_K(T)$, $\overline{\xi}_{N/K}(T)$ касательных к $\mathrm{ОД}_\xi$;

Шаг 5: решение задачи Парето-оптимизации $\mathbf{u} \in U$ (или Ω-оптимизации) для набора коалиций K и N/K на множестве U, начальных или текущих приближениях $\mathbf{u}^0 \in U$ и дополнительных ограничениях, сформированных на шаге 4 в одном из двух видах: $-\mathbf{u}^0 \in \mathrm{Con}\,\ell$; $-\mathbf{u}^0 \in \mathrm{Con}\,\overline{\xi}$, т.е. удовлетворяют системе неравенств (6.79) МДУ ЛУКУ при $\overline{\xi}_K(T)$ и $\overline{\xi}_{N/K}(T)$ — векторах касательных соответствующих $\mathrm{ОД}_\xi$ и являющихся границами множеств $\mathrm{Con}\,\overline{\xi}$;

Шаг 6:

а) задача решена, если управление $\mathbf{u}^0 \in U$ оптимизирует (экстремизирует) набор $\overline{\Phi}_K, \overline{\Phi}_{N/K}$ внутри «ячейки» U сети при удовлетворении неравенств МДУ ЛУКУ;

б) если ограничения не выполняются, то возвращаемся к шагу 3 на итерации $i > 1$.

6.4.4. Применение двухэтапного метода получения УКУ-оптимального управления прогнозом динамики конфликта ЛС СВН–ЛС ПВО

Постановка задачи. Рассмотрим этап задачи противодействия локальной системы воздушного нападения (ЛС СВН) и локальной системы ПВО (ЛС ПВО) [64]. Противодействие ЛС СВН–ЛС ПВО состоит в том, что ЛС СВН стремится преодолеть ЛС ПВО для поражения защищаемого объекта, а ЛС ПВО препятствует прорыву.

Задача получения программно-корректируемого закона управления активными средствами при взаимодействии ЛС СВН – ЛС ПВО представляет собой итерационную процедуру, на каждой итерации которой выполняются четыре шага:

Шаг 1: формирование конфигурации конфликта;

Шаг 2: целераспределение активных средств (АС) СВН и ПВО по активным и пассивным средствам ПВО и СВН соответственно;

Шаг 3: имитация конфликта;

Шаг 4: прогнозирование динамики конфликта.

Далее рассматривается упрощенный вариант последнего шага — прогноза динамики конфликта. В данной задаче является естественным поиск таких режимов функционирования ЛС СВН–ЛС ПВО, которые были бы конфликтно-оптимальными.

Каждая система состоит из двух подсистем: активной и пассивной. Активные средства каждой коалиции воздействуют на активные и пассивные средства противоположной коалиции. Для ЛС СВН активными средствами являются истребители-перехватчики с ракетами «воздух–земля» и противорадиолокационными ракетами, а для ЛС ПВО — зенитно-ракетные комплексы. Пассивные средства для ЛС СВН — бомбардировщики, для ЛС ПВО — радиолокационные станции [64].

На рис. 6.14 приведена структура взаимодействия сторон, где АС — совокупность активных средств коалиции, ПС — совокупность пассивных средств коалиции.

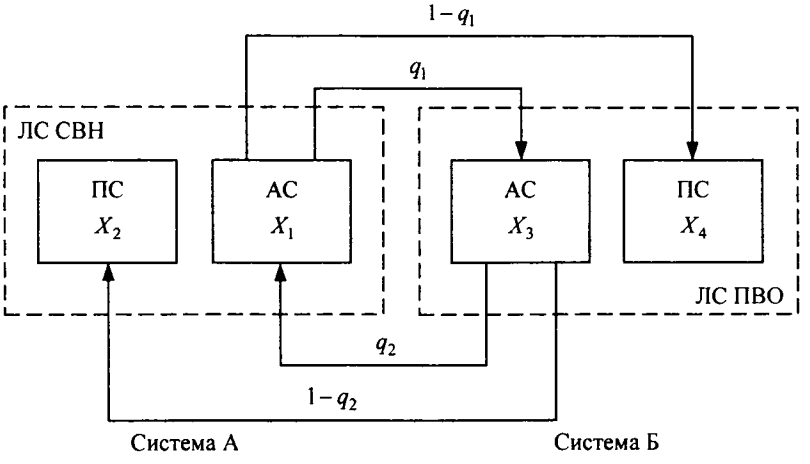


Рис. 6.14. Структура взаимодействия в ММС

Система задается на основе динамики средних [24] следующим образом:

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -P_{31}\cdot q_2\cdot x_3\cdot R(x_1) \\ \dot{x}_2 &= -P_{32}\cdot(1-q_2)\cdot x_3\cdot R(x_2) \end{aligned}\right\} \text{— система А;} \\ \left.\begin{aligned} \dot{x}_3 &= -P_{13}\cdot q_1\cdot x_1\cdot R(x_3) \\ \dot{x}_4 &= -P_{14}\cdot(1-q_1)\cdot x_1\cdot R(x_4) \end{aligned}\right\} \text{— система Б,} \end{cases} \tag{6.85}$$

где P_{ij} — эффективность воздействия одного объекта i-го вида одной системы на один объект j-го типа другой системы, $0 \le P_{ij} \le 1$; q_i — доли активных средств воздействия на активные средства партнера, $0 \le q_i \le 1$; $(1-q_i)$ — доля активных средств воздействия на пассивные средства партнера; x_i — текущая средняя численность объектов i-го типа:

$$R(x_i) = \begin{cases} x_i, & x_i \le 1; \\ 1, & x_i > 1. \end{cases}$$

Рассмотрим данную систему в пошаговом варианте. Шаг — конечный интервал времени; число шагов конечно $(k = \overline{1,r})$. Каждое активное средство делает на шаге один ход.

Шаг равен

$$\Delta T = \frac{T}{r}.$$

В пошаговом варианте система (6.85) преобразуется в систему

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - P_{31} \cdot q_2 \cdot x_3(k) \cdot R(x_1); \\ x_2(k+1) = x_2(k) - P_{32} \cdot (1-q_2) \cdot x_3(k) \cdot R(x_2); \\ x_3(k+1) = x_3(k) - P_{13} \cdot q_1 \cdot x_1(k) \cdot R(x_3); \\ x_4(k+1) = x_4(k) - P_{14} \cdot (1-q_1) \cdot x_1(k) \cdot R(x_4). \end{cases} \tag{6.86}$$

Здесь $k = 1,2,\ldots$, $0 \le q_i \le 1$ $(i = 1,2)$, $0 \le P_{ij} \le 1$ $(i = 1,3;\ j = 1,2,3,4)$, $x_i > 0$, $x_i(k)$ — численность к началу k-го шага.

В качестве показателя терминальных потерь (J) выберем показатель, имеющий смысл суммарного перевеса по активным и пассивным средствам и скорости убывания активных средств «партнера» (с меньшей площадью — большее убывание).

$$\begin{cases} J_{\text{А}} = \alpha_{11} \cdot \left[x_3^2(T) - x_1^2(T) \right] + \alpha_{12} \cdot \left[x_4^2(T) - x_2^2(T) \right] + \alpha_{13} \cdot \int\limits_{t_0}^{T} x_3 \cdot dt; \\ J_{\text{Б}} = \alpha_{21} \cdot \left[x_1^2(T) - x_3^2(T) \right] + \alpha_{22} \cdot \left[x_2^2(T) - x_4^2(T) \right] + \alpha_{23} \cdot \int\limits_{0}^{T} x_1 \cdot dt; \end{cases} \tag{6.87}$$

$$J_{\text{А}} \Rightarrow \min, \quad J_{\text{Б}} \Rightarrow \min,$$

где $J_{\text{А}}$ — показатель потерь коалиции А. Чем меньше $J_{\text{А}}$, тем больше выигрыш коалиции А; $J_{\text{Б}}$ — показатель потерь коалиции Б. Чем меньше $J_{\text{Б}}$, тем больше выигрыш коалиции Б; α_{ij} — весовые коэффициенты, определяющие целевой приоритет каждой стороны в поражении активных или пассивных средств противоположной стороны (терминальная составляющая) или в увеличении интегральной скорости убывания активных средств противника (интегральная составляющая) $(0 \le \alpha_{ij} \le 1;\ \alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} = 1;\ i = \{1,2\})$, значения коэффициентов задаются в зависимости от тактики каждой из сторон.

Применение сетевого подхода для получения начального приближения УКУ. Для реализации сетевого подхода, используя алгоритм общего вида, базирующийся на определении угроз и контругроз, сформирован алгоритм получения сетевых приближений УКУ-решений для задач данного класса: двухкоалиционных, двухкритериальных (со сверткой векторных показателей) [23, 27].

На шаге 1 алгоритма формируется двумерная ортогональная равномерная сеть.

На шагах 2–8 формируется множество УКУ-оптимальных сетевых решений, которые можно использовать в качестве начальных приближений для 2-го этапа получения оптимального управления ММС. Структура алгоритма (шаги 2–8) показана на рис. 6.15.

Сетевой алгоритм на этапе 1 позволяет получить начальное приближение для поиска точного решения на этапе 2 оптимизации на основе модифицированных достаточных условий ЛУКУ и метода моментов. В работе [24, гл. 4] дана методика решения данной прикладной задачи на этапе 2. Следует отметить, что при достаточной плотности сети результат этапа 1 близок к точному решению.

Таблица 6.2

Временные замеры работы сетевого УКУ-алгоритма

Число точек	100	625	1600	2500	5625
Время, с	1	4	15	30	125

$k = 1,2;\ X_{i_0} = 10;\ P_{13} = P_{14} = P_{31} = P_{32} = 0,8;\ \alpha_{11} = 0,7;\ \alpha_{12} = 0,3;\ \alpha_{21} = 0,3;\ \alpha_{22} = 0,7.$

Показатели — терминальные квадратичные.

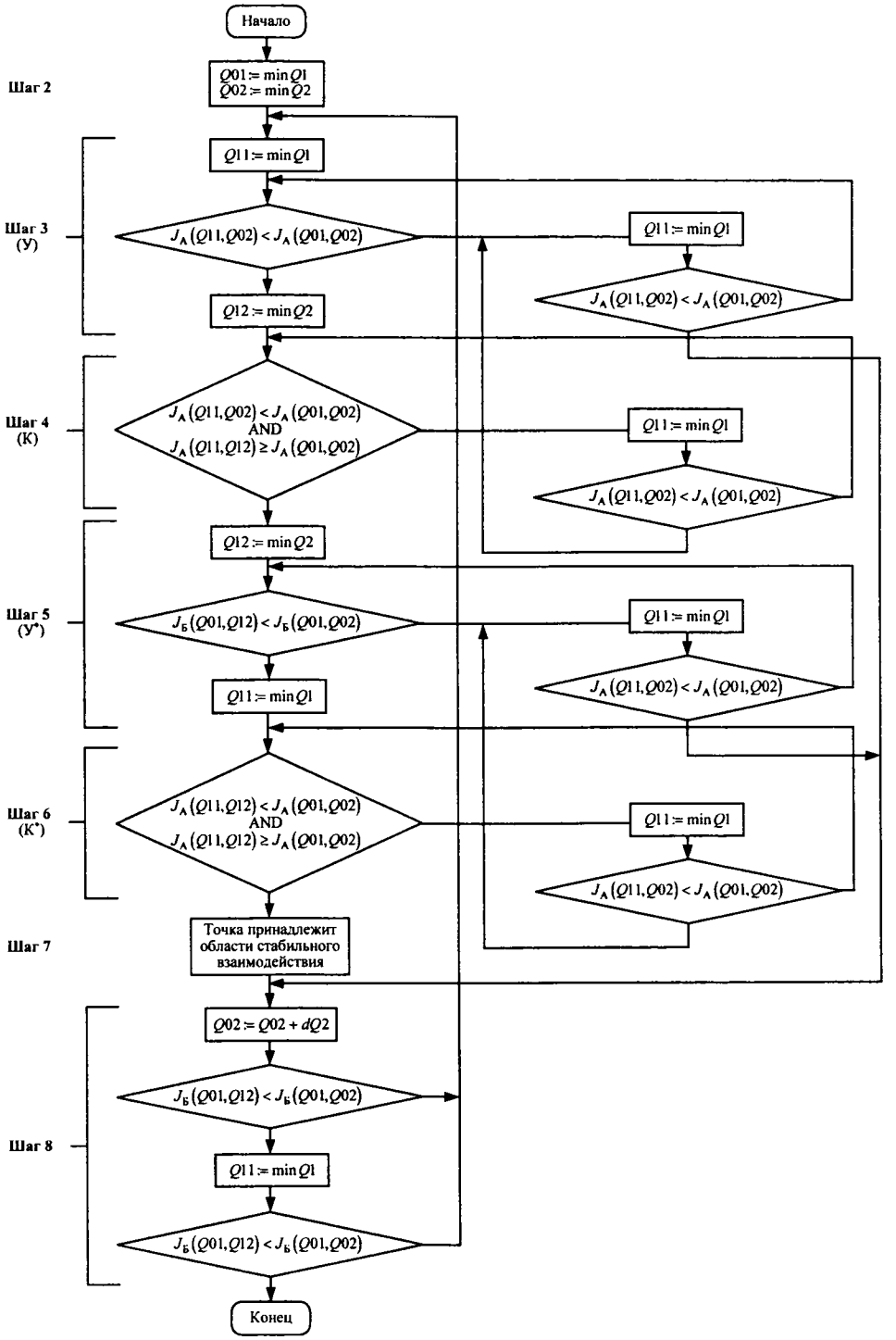


Рис. 6.15. Сетевой алгоритм поиска начальных приближений УКУ-решений

Реализация сетевого алгоритма УКУ-оптимизации осуществлена на алгоритмическом языке *Borland Pascal* в среде ПС «МОМДИС» [31, 38]. В качестве базового рассматривался следующий вариант:

- начальные условия задачи: $x_i(t_0) = 10,\ i = \overline{1,4}$;
- эффективности воздействия объектов i-го типа одной системы на объекты j-го типа другой системы: $P_{13} = P_{14} = P_{31} = P_{32} = 0,8$;
- весовые коэффициенты, определяющие приоритет каждой из систем в поражении активных и пассивных средств противника:

$$\alpha_{11} = 0,7;\ \alpha_{12} = 0,3;\ \alpha_{21} = 0,3;\ \alpha_{22} = 0,7;$$

- квадратичный критерий (без учета скорости):

$$J_{\text{А}} = \alpha_{11} \cdot \left[x_3^2 - x_1^2 \right] + \alpha_{12} \cdot \left[x_4^2 - x_2^2 \right] \to \min,$$

$$J_{\text{Б}} = \alpha_{21} \cdot \left[x_1^2 - x_3^2 \right] + \alpha_{22} \cdot \left[x_2^2 - x_4^2 \right] \to \min;$$

- анализ проводился на двух тактах.

На рис. 6.16, 6.17 показаны область параметров и область показателей для базового варианта. Результаты временных замеров приведены в табл. 6.2.

Анализ влияния изменения параметров моделей. Исследования [24] проводились в следующих направлениях:

- влияние соотношения весовых коэффициентов вектора показателей $\boldsymbol{\alpha}_{ij}$ (приближенное положение Парето-оптимальной точки УКУ-СТЭК на ПНОК, данное на рис. 6.16, 6.17, полностью отражает тактические свойства конфликта $(\boldsymbol{\alpha}_{ij})$, когда ЛС СВН стремится к прорыву АС ЛС ПВО, а ЛС ПВО стремится в основном к поражению ПС ЛС СВН);
- влияние соотношения численностей объектов x_i;
- влияние соотношения эффективности воздействия P_{ij};
- влияние вида показателей J_i;
- влияние числа шагов ΔT.

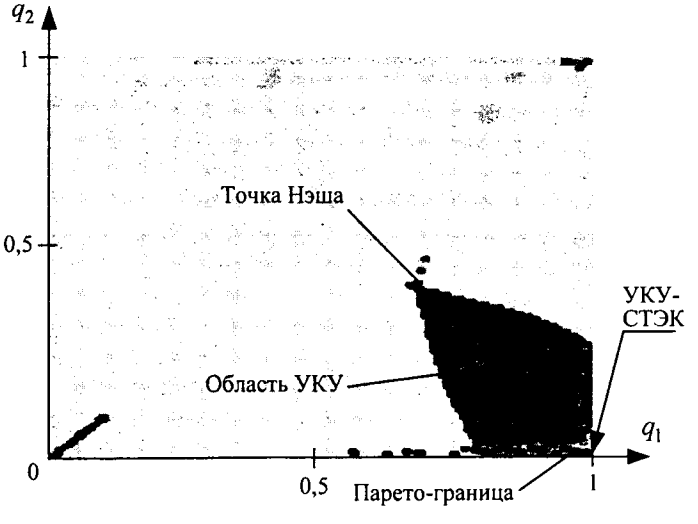


Рис. 6.16. Результаты Нэш–Парето–УКУ-оптимизации (область параметров)

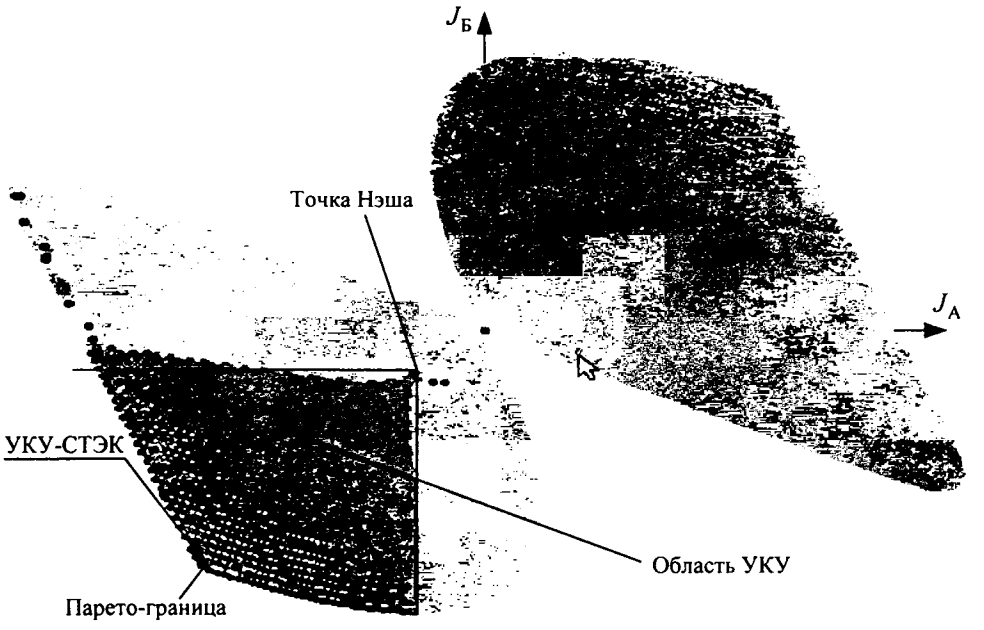


Рис. 6.17. Результаты Нэш–Парето–УКУ-оптимизации (область показателей)

О пересечении множества УКУ и ПНОК при различных ресурсных соотношениях коалиций. Из анализа прикладных результатов выявляются некоторые общие закономерности, которые сложно получить «прямыми» теоретическими исследованиями.

Среди других следует отметить явно проявившуюся тенденцию не единственности УКУ-решений коалиционной дифференциальной игры. При этом большая часть решений находится внутри области Парето–Нэш-компромиссов.

Если ресурсы коалиций не равные, то на ПНОК имеем небольшое число точек УКУ, которые смещены в пользу коалиции с большими ресурсами. При выравнивании ресурсов число УКУ-решений увеличивается, а само множество заполняет ПНОК, принимая во многих случаях очертания ПНОК, причем Парето-граница содержит УКУ-решения.

6.5. ОЦЕНКА ЭФФЕКТИВНОСТИ КООПЕРАТИВНОГО КОМПРОМИССА И ОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ В ММС НА ОСНОВЕ ВЕКТОРА ДЕЛЕЖА ШЕПЛИ

6.5.1. Обобщение характеристической функции, предпосылка игры, дележ и его свойства

В данном параграфе формулируется и исследуется способ оценки средней эффективности игры с позиции каждого объекта ММС на полном множестве возможных коалиционных структур с его участием. Основой являются Парето–Нэш-множество предпосылок, заданное в критериальной и параметрической форме, и вектор дележа Шепли, который формирует указанную оценку без применения сложного коалиционного компромисса. Рассмотрим обобщение понятия характеристической функции на основе Нэш-равновесия.

Определение 6.38. Характеристической функцией игры N лиц $\{i \in N\}$ называется вещественная функция ν, определенная на подмножествах множества N и ставящая в соответствие любой коалиции $K \subset N$ равновесное значение (для K) бескоа-

лиционной игры (или гарантирующее значение антагонистической игры) двух лиц, которую сыграли бы K и N/K (множество N без K), если бы эти две коалиции действительно возникли; при этом показатель коалиции K есть сумма взвешенных показателей участников коалиции

$$\Phi_K = \sum_{i \in K} \alpha_i J_i; \quad \alpha_i > 0; \quad \sum_{i \in K} \alpha_i = 1$$

(в типичном случае «без приоритетов» $\alpha_i = 1/l$, где l — число элементов K).

Далее без ограничения общности будем считать величины $\mathbf{J}$ показателя эффективности Φ_K выигрышами систем-игроков. Для показателей потерь все неравенства в определениях и результатах меняются на противоположные.

Тогда характеристическая функция для коалиции K на основе бескоалиционного равновесия имеет вид

$$\nu(K) = \max_K \Phi_K\left((K, N \setminus K)^r\right) = \Phi_K\left(K^r, (N \setminus K)^r\right), \tag{6.88}$$

где $K^r, (N \setminus K)^r$ находятся из системы неравенств

$$\begin{cases} \Phi_K\left(K, (N \setminus K)^r\right) \le \Phi_s\left(K^r, (N \setminus K)^r\right); \\ \Phi_{N/K}\left(K^r, (N \setminus K)\right) \le \Phi_{N/K}\left(K^r, (N \setminus K)^r\right). \end{cases} \tag{6.89}$$

Характеристическая функция для коалиции K на основе гарантирующих решений

$$\nu(K) = \max_K \min_{N/K} \Phi_K(K, N \setminus K). \tag{6.90}$$

Определение 6.39. Характеристическая функция обладает следующими свойствами:

1) $\nu(0) = 0$;

2) $\nu(N) = \max \Phi_N$ (min — для минимизируемых J_i);

3) супераддитивность $\nu(K \cup R) \ge \nu(K) + \nu(R)$ ($\le$ для минимизируемых J_i);

4) $\nu(K) + \nu(N \setminus K) = \nu(N)$ (для игр с постоянной суммой $\sum_{i \in N} J_i = \text{const}$).

Определение 6.40. Дележом для кооперативного компромисса N объектов с характеристической функцией ν называется вектор $\mathbf{J}_d$, удовлетворяющий условиям:

1) $\sum_{i \in N} J_{d_i} = \nu(N)$ (коллективная рациональность);

2) $J_{d_i} \ge \nu(i)$ (индивидуальная рациональность) для всех $i \in N$.

Для предпосылки дележа игры условие коллективной рациональности имеет вид

$$\sum J_{d_i} \le \nu(N). \tag{6.91}$$

Понятие дележа существенно отличает кооперативную игру от бескоалиционной. Бескоалиционные игры являются стратегическими в том смысле, что исход игры формируется в результате действий тех игроков, которые в исходе получают те или иные выигрыши. Исходом кооперативной игры является дележ, который возникает не как следствие действий игроков, а как результат их соглашений. То есть в кооперативных играх сравниваются по предпочтительности не действия с исходами, а дележи, и сравнение это не ограничивается рассмотрением индивидуальных выигрышей, а носит более содержательный характер.

Условием существования наилучшего дележа является свойство *трансферабельности* выигрышей коалиции K, когда совокупный выигрыш коалиции K может быть произвольным образом поделен между членами коалиции. Если данное свойство

не выполняется и дележ единственный, то объединение игроков в коалиции не приведет к увеличению выигрышей всех игроков и в этом смысле игра несущественна.

Определение 6.41 [22]. Несущественной игрой называется кооперативная игра с аддитивной характеристической функцией, когда

$$v(K \cup R) = v(K) + v(R). \tag{6.92}$$

Утверждение 6.9. Всякая кооперативная игра двух игроков с постоянной суммой несущественна.

Утверждение 6.10. Для того, чтобы характеристическая функция $V(S)$ была аддитивной, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\sum_{i \in N} v(i) = v(N). \tag{6.93}$$

6.5.2. Методы оптимизации дележей

Принципы оптимальности классической теории кооперативных игр, заданных в форме характеристических функций, условно можно разделить на два типа [18]:

1) оптимальность на основе принципов устойчивого поведения каждого игрока (оптимальность по Парето, С-ядро, Н-М-решение);
2) оптимальность на основе «здравых» гипотез о свойствах, которыми должно обладать решение, исходящее от явно или неявно существующего арбитра (вектор Шепли, арбитражные схемы).

Из свойства коллективной рациональности дележа следует, что предпосылки дележа оптимальны по Парето, но из свойства индивидуальной рациональности следует, что не все решения по Парето являются предпосылками дележа.

Утверждение 6.11. Парето-граница Парето–Нэш-множества компромиссов однотипных ММС содержит множество предпосылок дележей.

6.5.3. Вычисление дележа в форме вектора Шепли

Вывод общего выражения вектора Шепли [69]. Имеет смысл поставить вопрос о заранее ожидаемом определенном значении выигрыша каждого игрока. Оказывается, что некоторое априорно ожидаемое значение можно найти.

Пусть π — любая перестановка множества N, т.е. преобразование каждого игрока i в $\pi(i)$. Всего таких преобразований $N!$, где N — число элементов множества N. Пусть игроки образуют одну коалицию, вступая в нее по одному в произвольном порядке, т.е. порядок вступления в коалицию случаен. Следовательно, игроки упорядочиваются согласно некоторой случайной перестановке $\pi\colon N \to N$.

Все перестановки равновероятны, т.е. имеют вероятность $1/N!$ каждая. Множество первых i игроков по порожденному перестановкой π порядку обозначим через K_i^{π}

$$K_i^{\pi} = \left\{ k \in N \middle| \pi(k) \le i \right\}.$$

Когда игрок i входит в коалицию $\pi(i)$-м по порядку, то множество игроков, вступивших в коалицию до него, имеет вид

$$K_i^{\pi} = \left\{ k \in N \middle| \pi(k) \le \pi(i) \right\}.$$

Общий выигрыш коалиции $K_{\pi(i)}^{\pi} / (i)$ есть $v\left(K_{\pi(i)}^{\pi} / (i) \right)$.

После вступления в коалицию i игрока равновесный выигрыш соответственно $v\left(K_{\pi(i)}^{\pi} \right)$. Тогда разность $v\left(K_{\pi(i)}^{\pi} \right) - v\left(K_{\pi(i)}^{\pi} / (i) \right)$ — «лепта» игрока i, вносимая им в коалицию $K_{\pi(i)}^{\pi}$.

Определение 6.42. Игрок i в кооперативной игре называется болваном, если

$$v\left(K^{\pi}_{\pi(i)}\right) - v\left(K^{\pi}_{\pi(i)}/(i)\right) = v(i). \tag{6.94}$$

То есть игрок i не привносит в коалицию ничего по сравнению с тем, что он имел бы, если бы действовал самостоятельно.

Определение 6.43. Коалиция, содержащая всех игроков, не являющихся болванами,

$$R = \left\{ i \in N:\ v(K) - v\left(K \setminus (i)\right) > v(i),\ K \subset N,\ (i) \subset K \right\} \tag{6.95}$$

называется носителем игры.

Определение 6.44. Если R — носитель игры, а K — любая коалиция $K \subset N$, то

$$v(K) = v(R \cap K) + \sum v(i),\ (i) \in N \setminus R, \tag{6.96}$$

где $N \setminus R$ — множество болванов.

Так как игроки вступают в коалицию в любом порядке, то можно сформировать «априорно ожидаемый выигрыш» игрока i как усредненную по всем перестановкам «долю» игрока i [69]

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{N!}\sum_{\pi}\left[v\left(K^{\pi}_{\pi(i)}\right) - v\left(K^{\pi}_{\pi(i)} \setminus (i)\right)\right]. \tag{6.97}$$

Определение 6.45. Вектор

$$\Phi(v) = \left\{ \Phi_i(v),\ i = \overline{1,N} \right\} \tag{6.98}$$

называется вектором Шепли.

Вычисление вектора Шепли. Рассмотрим способ вычисления вектора Шепли. Для этого фиксируем $K \subset N$ и вводим обозначение $s = |K|$; где $|K|$ — «мощность» множества K (число элементов).

Пусть

$$\Omega = \left\{ \pi \mid K^{\pi}_{\pi(i)} = K \right\}.$$

Заменим в соотношении (6.97) $K^{\pi}_{\pi(i)}$ на K, а сумму по всем перестановкам соответственно на сумму по всем $K \subset N$. Тогда получим

$$\Phi_i(v) = \frac{1}{N!}\sum_{K \subset N} |\Omega| \left[v(K) - v\left(K \setminus (i)\right)\right],\ i \in K, \tag{6.99}$$

где суммирование ведется по всем K, содержащим i-го игрока. Пусть перестановка $\pi \in Q$. Представим ее как

$$1, \ldots, s-1, s, s+1, \ldots, N.$$

В соотношении (6.99) надо вычислить $|Q|$. Это число всевозможных перестановок π, таких, что

$$\pi(i) = s \ \text{ и } \ K^{\pi}_{\pi(i)} = K, \ \text{где} \ K^{\pi}_{\pi(i)} = \left\{ k \in N \middle| \pi(k) \le \pi(i) \right\}.$$

Очевидно, что для множества $K^{\pi}_{\pi(i)} \setminus (i)$ имеем $(s-1)!$ перестановок, где s — число элементов множества K, а для множества $N \setminus K^{\pi}_{\pi(i)}$ находим $(N-s)!$ всевозможных перестановок, где

$$K^{\pi}_{\pi(i)} \setminus (i) = (1, \ldots, s-1);$$

$$N \setminus K^{\pi}_{\pi(i)} = (s+1, \ldots, N),$$

следовательно,

$$|Q| = (s-1)!(N-s)!.$$

Подставляя это выражение в формулу (6.99), получаем формулу, удобную для вычисления вектора Шепли:

$$\Phi_i(\nu)=\frac{1}{N!}\sum_{K\subset N}\frac{(s-1)!(N-s)!}{N!}\Big[\nu(K)-\nu\big(K\setminus(i)\big)\Big],\ i\in K, \tag{6.100}$$

где суммирование происходит по всем коалициям K, содержащим i-го игрока. Приведем несколько вариантов решения в зависимости от N.

При $N=2$

$$\begin{aligned}\Phi_1(\nu)&=\frac{1!0!}{2!}\big[\nu(1,2)-\nu(2)\big]+\frac{0!1!}{2!}\big[\nu(1)-\nu(0)\big]=\frac{1}{2}\big[\nu(1,2)+\nu(1)-\nu(2)\big];\\ \Phi_2(\nu)&=\frac{1!0!}{2!}\big[\nu(1,2)-\nu(1)\big]+\frac{0!1!}{2!}\big[\nu(2)-\nu(0)\big]=\frac{1}{2}\big[\nu(1,2)+\nu(2)-\nu(1)\big].\end{aligned} \tag{6.101}$$

При $N=3$ возможные коалиции K с игроком i

$$\begin{aligned}i=1:&\ (1,2,3);(1,2);(1,3);(1);\\ i=2:&\ (1,2,3);(1,2);(2,3);(2);\\ i=3:&\ (1,2,3);(1,3);(3,2);(3).\end{aligned}$$

Поэтому, например,

$$\begin{aligned}\Phi_1(\nu)=&\frac{2!0!}{3!}\big[\nu(1,2,3)-\nu(2,3)\big]+\frac{1!1!}{3!}\big[\nu(1,2)-\nu(2)\big]+\\ &+\frac{1!1!}{3!}\big[\nu(1,3)-\nu(3)\big]+\frac{0!2!}{3!}\big[\nu(1)-\nu(0)\big].\end{aligned} \tag{6.102}$$

Утверждение 6.12. Вектор Шепли при общих свойствах Парето-множества и при любой характеристической функции обеспечивает на Парето-границе ПНОК сильную предпосылку дележа игры, где для задачи максимизации (*а*)

$$\begin{cases}\sum\limits_i\Phi_i(\nu)=\nu(N)=\max\sum J_i;\\ \Phi_i\ge\nu(i),\ \ i=\overline{1,N}\end{cases}$$

и для задачи минимизации (*б*)

$$\begin{cases}\sum\limits_i\Phi_i(\nu)=\nu(N)=\min\sum J_i;\\ \Phi_i\le\nu(i),\ \ i=\overline{1,N}.\end{cases}$$

Например, для (*б*) при $N=2$ точка Нэша — равновесная точка, которая обладает свойствами устойчивости (стабильности), имеет вид $\nu(1),\ \nu(2)$; точка $\min(J_1+J_2)$ — точка Парето-множества — минимальные суммарные потери (максимальный суммарный выигрыш) систем, объединившихся в коалицию; точка Шепли — «априорно ожидаемое значение» — ожидаемое значение выигрыша каждого игрока, усредненное по всем перестановкам, по всем возможным коалициям.

Утверждение 6.13. При $N=2$ имеет место геометрический метод получения точки Шепли в системе координат (J_1,J_2). Точка Шепли есть пересечение двух прямых, одна из которых проведена под углом 45° к оси OJ и проходит через точку $\big(\nu(1),\nu(2)\big)$, другая проведена под углом 135° к оси OJ и проходит через точку Парето-границы $\min(J_1+J_2)$ для (*б*) (или $\max(J_1+J_2)$ для (*а*)).

6.5.4. Формирование двухэтапного алгоритма оптимизации решений в ММС на основе вектора дележа Шепли [24]

Может быть сформирован алгоритм оптимизации решений, состоящий из следующих двух этапов.

Этап 1. Определение значений вектора дележа Шепли $\{\Phi_i, i \in N\}$ на основе выражений (6.100), которые для $N = 2,3$ приведены в точной форме (6.101).

Утверждение 6.14. Численные значения компонент $\{\Phi_i, i \in N\}$ вектора дележа Шепли являются линейными комбинациями конечного числа R-задач Парето- и Нэш-оптимизации, причем R удовлетворяет следующему соотношению:

$$R_{N+1} = 2R_N, \text{ при } R_2 = 2 \ldots N > 2. \tag{6.103}$$

В конечном наборе R_N при каждом фиксированном N имеет место $N-1$ задача Нэш-оптимизации. Доказательство следует из анализа выражений (6.100).

Если при решении задачи этапа 1 применяется параметризация управления, то данный набор задач может быть решен с помощью ПС «МОМДИС», в составе которой реализованы модули Парето- и Нэш-оптимизации.

При неединственности вектора Шепли, вызванной возможной неединственностью решения задачи Парето–Нэш-оптимизации, в качестве дополнительного подэтапа возникает задача определения дополнительного компромисса на основе групповой неудовлетворенности.

Теперь $\mathbf{\Phi}^* \in \{\mathbf{\Phi}\}$ выбирается из условия

$$\min_{\mathbf{\Phi}} \sum \left[\Phi_i - J_i^*\right]^2 \to \mathbf{\Phi}^*, \tag{6.104}$$

где $\mathbf{J}^* = \{J_i^*, i \in N\}$ — идеальная точка векторной оптимизации.

Этап 2. Целью данного этапа является решение относительно управлений системы функциональных уравнений

$$\begin{cases} J_i(\mathbf{u}) = \Phi_i^*, \ i \in N; \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \ \mathbf{u} \in U, \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \tag{6.105}$$

Данная система может быть приведена к обычной форме задачи оптимизации. С учетом параметризации ПКЗУ и параметрическим уточнением кооперативной структуры ММС задача оптимизации принимает вид

$$\min_{\bar{\mathbf{q}}\,\bar{\bar{\mathbf{q}}}} \sum_{i \in N} \left[J_i - \Phi_i^*\right]^2, \text{ или } \overline{J}_i = \left[J_i - \Phi_i^*\right]^2, \ i = \overline{1,N} \to \min;$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{q}}, \mathbf{u}\left(\bar{\bar{\mathbf{q}}}, \mathbf{x}, t\right), t\right), \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0; \tag{6.106}$$

$$\bar{\mathbf{q}} \in \bar{Q}; \ \bar{\bar{\mathbf{q}}} \in \bar{\bar{Q}}; \ \mathbf{u} \in U.$$

Для решения задачи определения параметризованного программного управления и ПКЗУ применяется модуль Ω-оптимизации ПС «МОМДИС». Детально алгоритм рассмотрен в [24, п. 5.4].

6.5.5. Применение двухэтапного алгоритма для получения УКУ–Шепли-оптимального управления прогнозом динамики конфликта ЛС СВН–ЛС ПВО

Постановка данной задачи подобна постановке рассмотренной ранее.

Первый такт прогноза.

$$\begin{cases} N_1 = 10; \\ N_2 = 10; \\ N_3 = 10; \\ N_4 = 10; \end{cases} \quad \begin{cases} P_{31} = 0,8; \\ P_{32} = 0,8; \\ P_{13} = 0,8; \\ P_{14} = 0,8; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{11} = 0,7; \\ \alpha_{12} = 0,3; \\ \alpha_{21} = 0,3; \\ \alpha_{22} = 0,7; \end{cases}$$

$$\begin{cases} J_{\text{А}} = J_1 = \alpha_{11}\left[x_3^2 - x_1^2\right] + \alpha_{12}\left[x_4^2 - x_2^2\right] \to \min; \\ J_{\text{Б}} = J_2 = \alpha_{21}\left[x_1^2 - x_3^2\right] + \alpha_{22}\left[x_2^2 - x_4^2\right] \to \min. \end{cases}$$

1. Определение значений вектора дележа Шепли на основе Парето–Нэш-оптимизации (первый этап алгоритма).

Общий вид множества показателей J_1, J_2 на основе ортогональной и ЛП-сетей приведен на рис. 6.18.

Множество УКУ, Парето-граница, точки Нэша и Шепли даны на рис. 6.19:

- точка $\min(J_1 + J_2)$: $q_1 = 1$; $q_2 = 0$; $J_1 = -38,7$; $J_2 = -40,4$;
- точка Нэша — $q_1^r = 0,668$; $q_2^r = 0,430$; $J_1^r = -10,2$; $J_2^r = -7,29$;
- точка Шепли — $\Phi_1 = -41,005$; $\Phi_2 = -38,095$.

2. Векторная оптимизация управления коалициями для минимизации отклонения от точки Шепли (на основе Ω-оптимизации) (второй этап алгоритма): на множестве показателей $\overline{J}_1$, $\overline{J}_2$ (рис. 6.20, 6.21), где $\overline{J}_i = \left[J_i - \Phi_i\right]^2$, $i = 1,2$. В данной системе координат:

- точка $\min(J_1 + J_2)$: $q_1 = 1$; $q_2 = 0$; $\overline{J}_1 = 5,313$; $\overline{J}_2 = 5,313$ (рис. 6.20, 6.21);
- точка Нэша — $q_1^r = 0,668$, $q_2^r = 0,430$, $\overline{J}_1^r = 948,948$, $\overline{J}_2^r = 948,948$ (рис. 6.20);
- точка Шепли — $\overline{\Phi}_1 = 0$, $\overline{\Phi}_2 = 0$ (рис. 6.20, 6.21);
- результатом оптимизации является точка сильной предпосылки игры и УКУ (СТЭК при однотактовом прогнозе) (рис. 6.19–6.21):

$$q_1 = 0,995;\ q_2 = 0,003;\ \overline{J}_1 = 0,043;\ \overline{J}_2 = 0,003;$$

$$q_1 = 0,995;\ q_2 = 0,003;\ J_1 = -41,003;\ J_2 = -38,094.$$

Таким образом, Парето–УКУ–Шепли-оптимальный вектор параметров на первом такте

$$\left\{q_1^{opt} = 0,995;\ q_2^{opt} = 0,003\right\}.$$

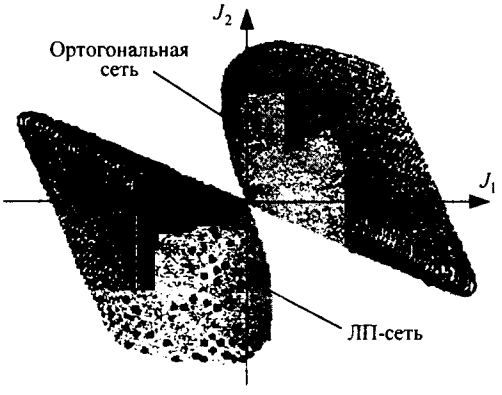


Рис. 6.18. Множество показателей J_1, J_2 на сетевой основе

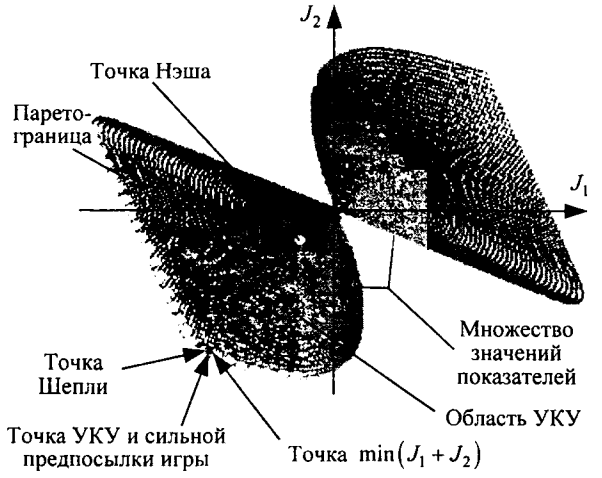


Рис. 6.19. Результаты первого этапа алгоритма

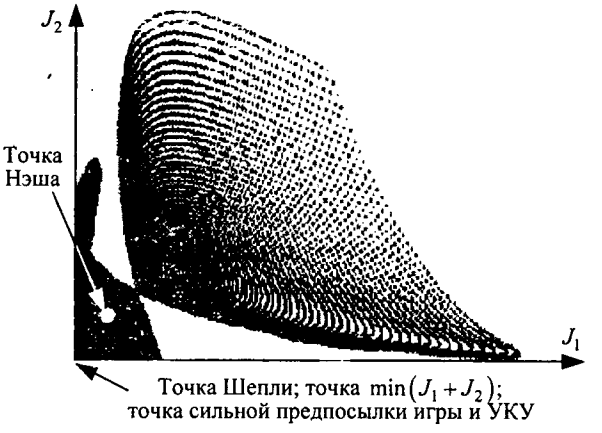


Рис. 6.20. Результаты второго этапа алгоритма на первом такте прогноза

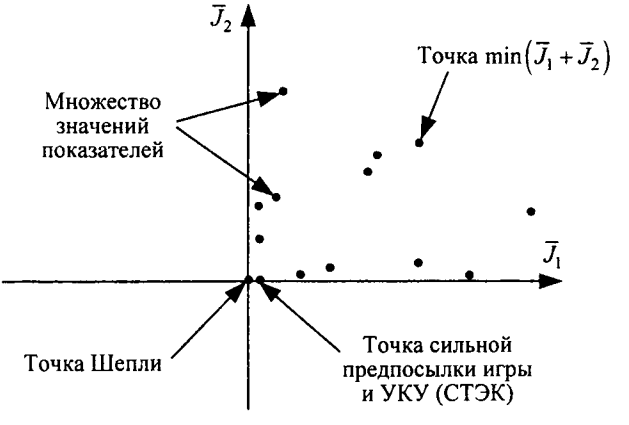


Рис. 6.21. СТЭК при однотактовом прогнозе (окрестность начала координат, рис. 6.20)

Вектор состояния к концу первого такта:

$$x_1 = 9{,}972,\ x_2 = 2{,}027,\ x_3 = 2{,}039,\ x_4 = 9{,}96.$$

Второй такт прогноза.

$$\begin{cases} x_1(2) = x_{01} = 9{,}972; \\ x_2(2) = x_{02} = 2{,}027; \\ x_3(2) = x_{03} = 2{,}039; \\ x_4(2) = x_{04} = 9{,}960; \end{cases} \quad \begin{cases} P_{31} = 0{,}8; \\ P_{32} = 0{,}8; \\ P_{13} = 0{,}8; \\ P_{14} = 0{,}8; \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha_{11} = 0{,}7; \\ \alpha_{12} = 0{,}3; \\ \alpha_{21} = 0{,}3; \\ \alpha_{22} = 0{,}7. \end{cases}$$

1. Определение значений вектора дележа Шепли на основе Парето–Неш-оптимизации (на первом этапе алгоритма). Множество показателей J_1, J_2 и УКУ-Парето-граница даны на рис. 6.22:

- точка $\min(J_1 + J_2)$: $q_1 = 1$; $q_2 = 0$; $J_1 = -39{,}7$; $J_2 = -39{,}6$;
- точка Нэша: $q_1^r = 0{,}321$; $q_2^r = 0{,}988$; $J_1^r = 50{,}1$; $J_2^r = 23{,}8$;
- точка Шепли: $\Phi_1 = -76{,}6$; $\Phi_2 = -2{,}7$.

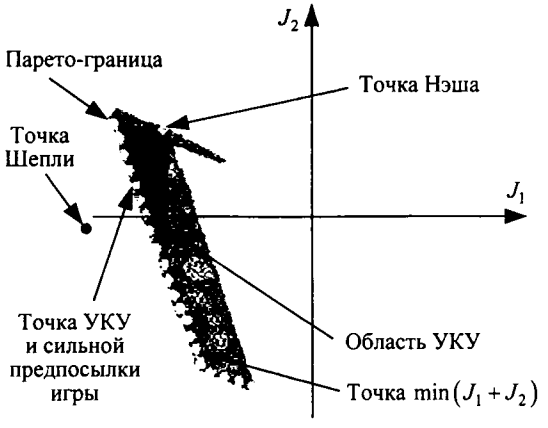


Рис. 6.22. Результаты первого этапа алгоритма на втором такте

2. Векторная оптимизация управления коалициями для минимизации отклонения от точки Шепли (на основе Ω-оптимизации) (на втором этапе алгоритма) на множестве показателей $\overline{J}_1, \overline{J}_2$ (рис. 6.23, 6.24):

- точка $\min(J_1 + J_2)$: $q_1 = 1$, $q_2 = 0$, $\overline{J}_1 = 1361{,}61$, $\overline{J}_2 = 1361{,}61$ (рис. 6.23, 6.24);
- точка Нэша: $q_1^r = 0{,}321$, $q_2^r = 0{,}988$, $\overline{J}_1^r = 702{,}25$, $\overline{J}_2^r = 702{,}24$ (рис. 6.23);
- точка Шепли $\overline{\Phi}_1 = 0$, $\overline{\Phi}_2 = 0$ (рис. 6.23, 6.24).

Результат оптимизации — точка сильной предпосылки игры и УКУ (СТЭК на двух тактах прогноза):

$$q_1 = 0{,}295,\ q_2 = 0{,}068,\ \overline{J}_1 = 301{,}67,\ \overline{J}_2 = 68{,}96;$$

$$q_1 = 0{,}295,\ q_2 = 0{,}068,\ J_1 = -59{,}23,\ J_2 = 5{,}6.$$

Парето–УКУ–Шепли-оптимальный вектор параметров на втором такте:

$$\{q_1 = 0{,}295,\ q_2 = 0{,}068\}.$$

Вектор состояния после двух тактов прогноза:

$$x_1(T) = 9{,}86;\ x_2(T) = 0;\ x_3(T) = 0;\ x_4(T) = 4{,}335.$$

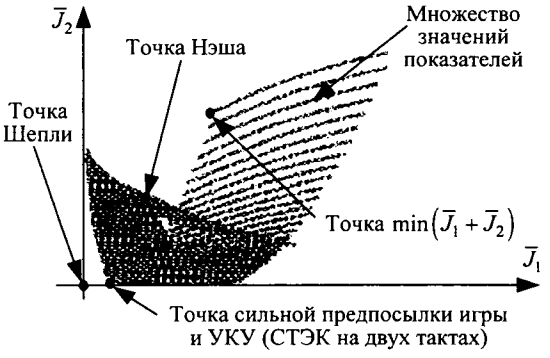


Рис. 6.23. Результаты второго этапа оптимизации на двух тактах

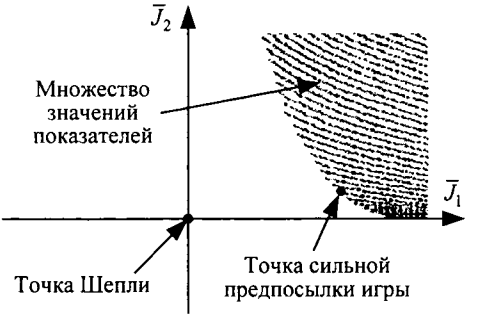


Рис. 6.24. СТЭК на двух тактах прогноза (окрестность начала координат, рис. 6.23)

Таким образом, изменения численностей и Парето–УКУ–Шепли-оптимального параметризованного управления имеют вид (рис. 6.25).

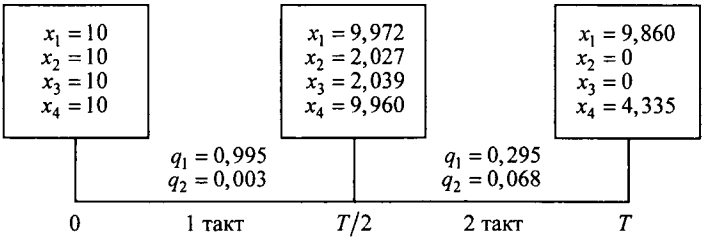


Рис. 6.25. Изменения численностей

На двух тактах формируется оптимальное управление активными средствами ЛС СВН и ЛС ПВО — q_1^{opt}, q_2^{opt}.

ЛС СВН отдает предпочтение поражению активных средств ЛС ПВО ($\alpha_{11} = 0{,}7$; $\alpha_{12} = 0{,}3$), так как ее задача — подавить активные средства ЛС ПВО с целью обеспечения прорыва своих пассивных средств к охраняемому ЛС ПВО объекту.

ЛС ПВО отдает предпочтение поражению пассивных средств ЛС СВН ($\alpha_{21} = 0{,}3$; $\alpha_{22} = 0{,}7$), т.е. задача ЛС ПВО — не пропустить противника, а именно пассивные средства ЛС СВН к охраняемому объекту, тем самым не допустить поражение объекта.

В начале первого такта имеют место равные начальные количества активных и пассивных средств ЛС СВН и ЛС ПВО: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 10$.

На первом такте получены следующие численности активных и пассивных средств ЛС СВН и ЛС ПВО: $x_1 = 9{,}972$; $x_2 = 2{,}027$; $x_3 = 2{,}039$; $x_4 = 9{,}96$ и оптимальный вектор параметров: $q_1^{opt} = 0{,}995$; $q_2^{opt} = 0{,}003$.

Результаты в конце первого такта соответствуют точке сильной предпосылке игры первого такта.

Результаты показывают, что ЛС СВН, выбрав оптимальное управление $q_1^{opt} = 0{,}995$, направив тем самым практически все активные средства на поражение активных средств ЛС ПВО, добьется нужного результата — активные средства ЛС ПВО уменьшаются в численности до $x_3 = 2{,}039$. ЛС ПВО, выбрав оптимальное управление $q_2^{opt} = 0{,}003$ $(1 - q_2^{opt} = 0{,}997)$, направляет практически все активные средства на уничтожение пассивных средств ЛС СВН и выполняет свою задачу — пассивные средства ЛС СВН уменьшаются по численности до $x_2 = 2{,}027$.

Активные средства ЛС СВН и пассивные средства ЛС ПВО существенно не изменяются $(x_1 = 9{,}972, x_3 = 9{,}960)$, так как они по приоритетам стоят на втором месте для обеих систем соответственно.

На втором такте численности активных и пассивных средств ЛС СВН и ЛС ПВО убывают до значений: $x_1 = 9{,}860$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; $x_4 = 4{,}335$, а оптимальный вектор параметров $q_1^{opt} = 0{,}295$, $q_2^{opt} = 0{,}068$. Результаты в конце второго такта соответствуют точке сильной предпосылки игры.

Результаты показывают, что ЛС СВН, задав оптимальное управление $q_1^{opt} = 0{,}295$, не только завершит выполнение своей главной задачи — численность активных средств ЛС ПВО $x_3 = 0$, но и, выделив практически большую часть своих активных средств на поражение пассивных средств ЛС ПВО, нанесет урон противнику по пассивным средствам $(x_4 = 4{,}335)$.

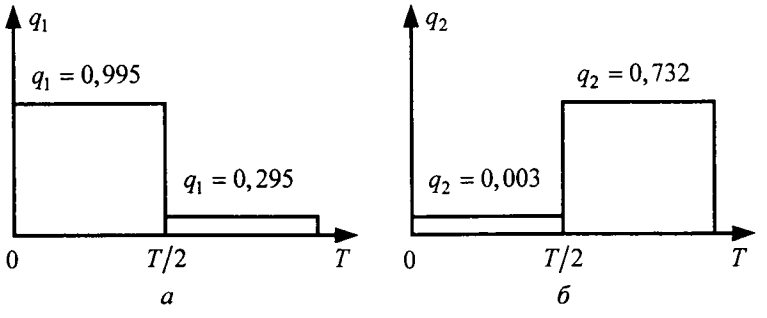


Рис. 6.26. Оптимальное параметризованное управление активными средствами ЛС СВН (*а*) и ЛС ПВО (*б*) на двух тактах

ЛС ПВО, выбрав оптимальное управление $q_2^{opt} = 0{,}068$, практически все активные средства направляет на поражение пассивных средств ЛС СВН из-за того, что в результате 1-го такта взаимодействия ее активные средства значительно уменьшились. В результате ЛС ПВО достигает своей цели — численность пассивных средств ЛС СВН $x_2 = 0$.

Окончательно Парето–УКУ–Шепли-оптимальные параметризованные управления (СТЭК-7) ЛС СВН и ЛС ПВО даны на рис. 6.26.

Применение полученных программных управлений обеспечивает Парето–Нэш–УКУ–Шепли-компромисс с двухтактным прогнозом. В общем случае повторение данной процедуры на следующем временном интервале $(T, 2T)$ с измеренным вектором $\mathbf{x}(T)$ позволяет получить ПКЗУ.

6.6. МЕТОДЫ КОМБИНИРОВАНИЯ РЕШЕНИЙ ПО НЭШУ (СКАЛЯРНЫЙ И ВЕКТОРНЫЙ ВАРИАНТЫ), ПАРЕТО, УКУ, ШЕПЛИ, «ИДЕАЛЬНОЙ ТОЧКИ», ε-РАВНОВЕСНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ И АРБИТРАЖНЫХ СХЕМ ДЛЯ ПОЛУЧЕНИЯ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫХ КОМПРОМИССОВ В ММС

6.6.1. СТЭК НА ОСНОВЕ ПАРЕТО–НЭШ–УКУ–ШЕПЛИ-КОМБИНАЦИЙ [24]

В данном разделе рассматриваются схемы формирования компромиссов, реализованных в ПС «МОМДИС», их систематизация на основе принципа необязательных соглашений и в условиях объективной информации о ММС.

Выбор наиболее эффективного решения по Нэшу (СТЭК-1). Потребность в данном СТЭК возникает, когда скалярное равновесие по Нэшу при фиксированной структуре ММС является неединственным. Практически речь идет о выборе недоминируемых решений по Нэшу.

Определение 6.46. Нэш-решение игры $\Gamma(P)$

$$\mathbf{u}^{r''} = \left(\mathbf{u}_{K_1}^{r''}, \ldots, \mathbf{u}_{K_l}^{r''}\right), \text{ где } K_i \in P,\ i = \overline{1,l};\ \mathbf{u} \in U,$$

доминирует решение $\mathbf{u}^{r''}$, если

$$J_{K_i}\left(\mathbf{u}^{r^*}\right) \geq J_{K_i}\left(\mathbf{u}^{r'}\right),\ i = \overline{1,l}.$$

В рамках СТЭК-1 предполагается, что недоминируемое решение $\mathbf{u}^{r^*}$ — единственное, тогда оно наиболее эффективно для всего коалиционного разбиения ММС, поэтому принимается игроками как необязательное соглашение.

Таким образом, итерация алгоритма для получения СТЭК-1 состоит из трех этапов:

Этап 1. Получение решения, равновесного по Нэшу.

Этап 2. Сравнение данного решения с полученными ранее.

Этап 3. Исключение доминируемых решений на данном множестве.

Данная схема реализуется на интерактивной комбинации программных модулей ПС «МОМДИС».

Выбор компромиссного недоминируемого Нэш-решения по критерию уравновешивания потерь в окрестности наилучшего для каждой коалиции Нэш-решения (СТЭК-2). Предыдущий СТЭК-1 может иметь не единственное недоминируемое решение $\mathbf{u}^{r_i}$, $i = \overline{1,n}$. Тогда сужение полученного множества может быть достигнуто дополнительными компромиссными условиями близости к наилучшему для каждой коалиции значению $\max\limits_i J_{K_j}^{r_i}$ и/или уравновешиванию потерь $\Delta_{K_j}^i$ в связи с его недостижимостью, где

$$\Delta_{K_j}^i = \frac{\max\limits_i J_{K_j}^{r_i} - J_{K_j}^{r_i}}{\max\limits_i J_{K_j}^{r_i}} \geq 0.$$

По заданным двум условиям может быть введен дополнительный критерий оптимизации на конечном множестве недоминируемых Нэш-решений:

$$\min_i R(i) = \min_i \left[\sum_{j,\mu} \left(\Delta^i_{K_j} - \Delta^i_{K_\mu} \right)^2 + \rho \sum_j \left(\Delta^i_{K_j} \right)^2 \right], \quad j,\mu = \overline{1,l}; \quad j \neq \mu.$$

Первая сумма обеспечивает уравновешивание потерь, вторая — близость к наилучшему для каждой коалиции K_j решению, ρ — весовой коэффициент.

Общая схема алгоритма для получения СТЭК-2 имеет следующую поэтапную структуру:

Этап 1. Получение решения, равновесного по Нэшу.

Этап 2. Сравнение данного решения с полученными ранее.

Этап 3. Исключение доминируемого решения и переход к этапу 1.

Этап 4. Нахождение полного набора недоминируемых решений и переход к этапу 5.

Этап 5. Получение точек $\max\limits_j J^{r_i}_{K_j}$ и переход к этапу 6.

Этап 6. Вычисление разностей $\Delta^i_{K_j}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,l}$ и переход к этапу 7.

Этап 7. Формирование процедуры перебора недоминируемых Нэш-решений.

Выбор векторного Нэш-решения относительно идеальной для множества допустимых решений точки (СТЭК-3). Общий алгоритм определения компромисса принимает вид следующей многоэтапной последовательности:

Этап 1. Получение векторных Нэш-равновесий: $\mathbf{u}^{p_i}$, $i = \overline{1,n}$.

Этап 2. Фиксация множества недоминируемых векторных равновесий $\mathbf{J}^{\text{нд}}\left(\mathbf{u}^{p_i}\right)$.

Этап 3. Получение идеального решения $J^*_j = \max\limits_{\mathbf{u}} J_j(\mathbf{u})$, $j = \overline{1,m}$.

Этап 4. Получение компромиссного решения на конечном множестве недоминируемых векторных равновесий

$$\sum_{j=1}^{m} \left(J^{\text{нд}}_j \left(\mathbf{u}^{p_i} \right) - J^*_j \right)^2 \to \min.$$

Формирование Парето-Нэш-области компромиссов (СТЭК-4). Алгоритм получения ПНОК базируется на комбинации алгоритмов Парето-оптимизации, Нэш-оптимизации и получения СТЭК-1 (2, 3), что может быть представлено в упрощенном виде следующей процедурой:

Этап 1. Получение множества скалярных (векторных) недоминируемых Нэш-равновесий.

Этап 2. Определение стабильно-эффективных решений СТЭК-1 (2, 3).

Этап 3. Формирование конуса доминирования на области значений показателей с вершиной в точке СТЭК.

Этап 4. Получение области Парето-оптимальных решений и ее подобласти $U^{\text{П}}$, удовлетворяющей конусу.

Этап 5. Формирование системы значений показателей и системы решений, удовлетворяющих ПНОК (рис. 6.5), с элементами проективнографического анализа.

Взаимосвязь ПНОК и области УКУ-решений (СТЭК-5) [24]. Взаимосвязь ПНОК и множества дележей (СТЭК-6) [24]. Выбор наиболее эффективного УКУ-решения на основе ПНОК и точки дележа Шепли (СТЭК-7). СТЭК-5 и СТЭК-6 обобщаются в виде СТЭК-7, который имеет наиболее общий вид в условиях необязательных соглашений и содержит предыдущие СТЭК-1–СТЭК-6 как частные случаи.

Определение 6.47. Общий стабильно-эффективный компромисс в условиях необязательных соглашений формируется как устойчивое решение с предостережением, обладающее максимальной степенью близости к оценке наилучшего результата, который может быть достигнут при кооперативном объединении на основе обязательных соглашений. Таким свойством обладает УКУ-равновесие на ПНОК, которое является наиболее близким к точке дележа по Шепли или максимальной реализуемой предпосылке (СТЭК-7) (рис. 6.5).

Общая схема алгоритма определения данного СТЭК заключается в последовательном поэтапном решении следующих задач:

Этап 1. Определение множества Нэш-равновесий.

Этап 2. Определение наилучшего Нэш-решения на основе СТЭК-1–СТЭК-3.

Этап 3. Определение множества УКУ-равновесных решений.

Этап 4. Формирование подмножества УКУ-решений на основе СТЭК-4, СТЭК-5.

Этап 5. Определение дележа по Шепли на ПНОК (СТЭК-6).

Этап 6. Определение УКУ-решения, принадлежащего ПНОК и наиболее близкого к точке дележа по Шепли (рис. 6.5).

6.6.2. Комбинированные методы в условиях ε-равновесия по Нэшу, минимизации угроз и неполной информации о партнерах [24, 82]

Рассматриваются комбинированные процедуры, объединяющие алгоритмические модули: Ω-оптимизации (модуль 1), векторной Нэш-оптимизации (модуль 2а), скалярной Нэш-оптимизации (модуль 2б), начального приближения Парето-множества на основе (6.38) (модуль 3).

Выбор эффективного решения с допустимыми техническими требованиями и степенью неравновесности с оценкой и минимизацией угроз (полная информация о коалициях-партнерах) (СТЭК-8). Рассмотрим подробно алгоритм получения данного СТЭК, структурная схема которого изображена на рис. 6.27.

Этап 1. Построение дискретной аппроксимации множества Парето в пространстве показателя $\mathbf{J}^j$ при варьировании вектора параметров $\mathbf{q}^j$. То есть решается задача (модуль 3) определения

$$\left\{\tilde{\mathbf{J}}^j_{\Pi}\Big(\underset{\mathbf{q}\in Q(j)}{Q}(j)\Big|K_j, E^{m_j}_{\leq}\right\},$$

где $Q(j)=\left\{\mathbf{q}\in Q\subset E^r\middle|\mathbf{q}^j\in Q_j, \mathbf{q}^{(M_K\setminus j)}=\text{фикс.}\right\}$; $E^{m_j}_{\leq}$ означает, что на любом E^{m_j} решается задача минимизации; $Q^{J^j}_{\Pi}$ — дискретная аппроксимация множества Парето относительно $\mathbf{J}^j$ в пространстве параметров.

Этап 2. Полагаем $k=0$.

Шаг 1. Из множества $J^{j(k)}_{\Pi}\big(Q(j)\big)$ проектировщик выбирает наиболее подходящее решение $\mathbf{J}^{j(k)}=\mathbf{J}^j\left(\mathbf{q}^{(k)}\right)$, $\mathbf{q}^{(k)}\in Q^{J^j}_{\Pi}$, удовлетворяющее априорным техническим требованиям.

Шаг 2. Решение задачи $\Omega^{(k)}_j$-оптимизации (модуль 1) из начального приближения $\mathbf{q}^{(k)}$: определить

$$\min_{\mathbf{q}\in Q(j)}\left\{\mathbf{J}^j(\mathbf{q})\middle|K_j,\Omega^{(k)}_j\right\}. \tag{6.107}$$

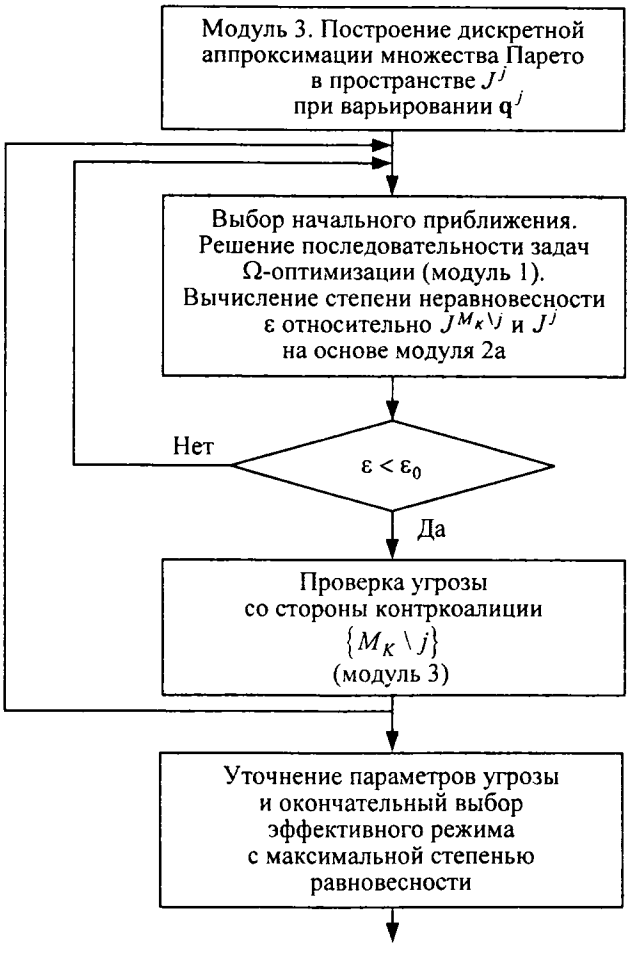


Рис. 6.27. Алгоритм СТЭК-8

Если $k = 0$, то матрица конуса доминирования $\Omega_j^{(k)}$:

$$\mathbf{B}_j^{(k)} = \mathbf{E} = \left[m_j \times m_j \right].$$

И в результате находим решение $\mathbf{J}^{j(k+1)}$, более предпочтительное, чем $\mathbf{J}^{j(k)}$:

$$\mathbf{J}^{j(k+1)} \leq \mathbf{J}^{j(k)}.$$

Шаг 3. Формирование матрицы $\mathbf{B}_j^{(k)}$ допустимых взаимных локальных изменений компонент вектора $\mathbf{J}^{j(k)}$ [24, гл. 3]. Решается задача вида (6.107) (модуль 1) и находится решение

$$\mathbf{J}^{j(k+1)} = \mathbf{J}^{j(k)},\ \mathbf{q}^{(k+1)} \in Q_{\Pi}^{J^j},$$

оптимальное по конусу доминирования, определяемому матрицей $\mathbf{B}_j^{(k)}$.

Шаг 4. Вычисляется степень неравновесности $\varepsilon^{(k+1)}$ решения

$$\mathbf{J}^{(M_K \setminus j)(k+1)} = \mathbf{J}^{(M_K \setminus j)}\left(\mathbf{q}^{(k+1)}\right)$$

относительно контркоалиции $K_{(M_K \setminus j)}$. Для этого решается оптимизационная задача (модуль 2а), в которой определяется степень несовместности необходимых условий векторного равновесия относительно векторного показателя $\mathbf{J}^{(M_K \setminus j)}$ и вектора параметров $\mathbf{q}^{(M_K \setminus j)}$, полагаем $k = k+1$.

Шаг 5. Если значения некоторых компонент вектора $\mathbf{J}^{j(k)}$ или степень неравновесности решения $\varepsilon^{(k)}$ не устраивают проектировщика, то перейти к шагу 3 и сделать очередную попытку $\Omega_j^{(k)}$-оптимизации. Иначе

$$\mathbf{q}^{opt} = \mathbf{q}^{(k)};\ \mathbf{J}^{jopt} = \mathbf{J}^{j}\left(\mathbf{q}^{opt}\right)$$

и перейти к этапу 3.

Этап 3. Определение «угрозы» со стороны контркоалиции $K_{(M_K \setminus j)}$ при $\mathbf{q}^{j} = \mathbf{q}^{jopt}$ и варьировании параметров контркоалиции. Для этого решается задача (модуль 3) относительно всего векторного показателя $\mathbf{J}$ при варьировании вектора параметров $\mathbf{q}^{(M_K \setminus j)}$.

Определить

$$\left\{\mathbf{J}_{\Omega}\left(Q\left(M_K \setminus j\right)\right) \middle| K_{(M_K \setminus j)};\ Q\right\},\ \mathbf{q} \in Q\left(M_K \setminus j\right),$$

где

$$Q\left(M_K \setminus j\right) = \left\{\mathbf{q} \in Q \subset E^r \middle| \mathbf{q}^{j} = \mathbf{q}^{opt};\ \mathbf{q}^{i} \in Q_i,\ i \in \left\{M_K \setminus j\right\}\right\}.$$

При этом матрица конуса доминирования Ω формируется в виде, необходимом для оценки «угроз» [89].

Таким образом, использование комбинированной процедуры СТЭК-8 дает возможность не только определить Ω_j-оптимальные параметры $\mathbf{q}^{jopt}$ коалиции K_j, обладающие максимальной степенью равновесности, но и оценить при этом возможности контркоалиции $K_{(M_K \setminus j)}$ по созданию «угрозы» для коалиции K_j.

Выбор скалярного Нэш-решения, близкого к идеальной точке, на основе ε-равновесного эффективного решения (взаимная параметрическая неопределенность (СТЭК-9)). Структурная схема, изображенная на рис. 6.28, используется, когда приоритеты показателей внутри коалиции заданы в виде векторов весовых коэффициентов, т.е. возможна скаляризация:

$$\Phi_i = \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{J}^{i},\ i \in M_K.$$

Этап 1. Построение начального приближения целевой (идеальной) точки.

Шаг 1. Решение задачи глобального анализа в модуле 3 в критериальном пространстве показателя $\boldsymbol{\Phi} = \left[\Phi_1, \ldots, \Phi_{m_k}\right]^{\mathrm{T}}$ при варьировании вектора параметров $\mathbf{q} \in Q$:

$$\left\{\Phi_{\Pi}(Q) \middle| R,\ E_{\le}^{m_k}\right\}, \tag{6.108}$$

$\mathbf{q} \in Q,\ R = \overline{(1,r)}$ — множество индексов компонент вектора $\mathbf{q}$. Получаем дискретную аппроксимацию множества Парето:

$$\Phi_{\Pi}(Q) = \left\{\Phi^{(k)}, k \in M_{\Pi} = \left\{1, m_{\Pi}\right\}\right\},$$

где m_{Π} — количество точек в множестве $\Phi_{\Pi}(Q)$.

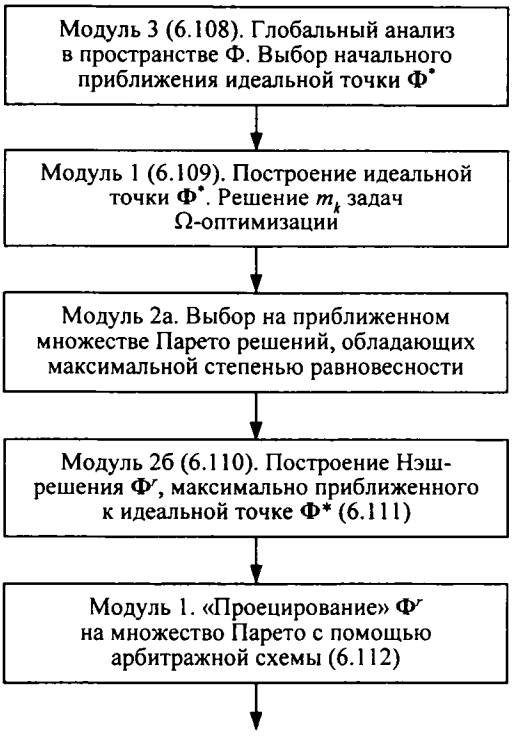


Рис. 6.28. Алгоритм СТЭК-9

Шаг 2. Для $j=\overline{1,m_k}$ определяем

$$\Phi^*_{\text{н}j}=\min\Phi^{(k)}_j=\Phi_j\left(\mathbf{q}^*(j)\right),\ k\in M_{\Pi}.$$

Полагаем $\Phi^*_{\text{н}}=\left[\Phi^*_{\text{н}1},\ldots,\Phi^*_{\text{н}m_k}\right]^{\text{T}}$ — начальное приближение идеальной точки.

Этап 2. Построение идеальной точки Φ^*. Для $j=\overline{1,m_k}$ решаем совокупность задач (6.37) (модуль 1):

$$\text{определить } \min\Phi_j(\mathbf{q}),\ \mathbf{q}\in Q \tag{6.109}$$

из начального приближения $\Phi^*_{\text{н}j}=\Phi_j\left(\mathbf{q}^*(j)\right)$.

Получаем решение Φ^*_j. Полагаем $\Phi^*=\left[\Phi^*_1,\ldots,\Phi^*_{m_k}\right]^{\text{T}}$.

Этап 3. Построение множества начальных приближений для определения равновесных решений.

Шаг 1. Для $k=\overline{1,m_{\Pi}}$ решаем совокупность задач (модуль 2а) в точках $\Phi^{(k)}\in\Phi^*_{\Pi}(Q)$ и получаем $\varepsilon^{(k)}$ — степень неравновесности решения $\Phi^{(k)}\left(q(k)\right)$.

Шаг 2. Из множества $\Phi^*_{\Pi}(Q)$ формируем множество

$$\Phi_r(Q)=\left\{\Phi^{(i)},\ i\in M_r=\{1,m_r\}\right\}$$

решений, у которых $\varepsilon^{(i)}\le\varepsilon^{(k)}$, эти точки будут использоваться в качестве начальных приближений при поиске равновесных по Нэшу решений.

Этап 4. Поиск равновесного по Нэшу решения, максимально приближенного к идеальной точке.

Шаг 1. Для $k=\overline{1,m_r}$ решаем совокупность задач поиска равновесия по Нэшу между скалярными показателями (модуль 2б):

$$\text{определить } \min_{\mathbf{q}\in Q}\left\{\Phi(\mathbf{q})\middle| K,\ \{\mathbf{R}_i\}_{i\in M_K}\right\} \tag{6.110}$$

из начального приближения $\Phi^{(k)}=\Phi_r^*(Q)$, где $K=\left(K_j=j,\ j\in M_K\right)$, $\mathbf{R}_j=\lambda^j$ — вектор весовых коэффициентов, определяющий конус доминирования Ω_j в виде гиперплоскости в подпространстве E^{mj}. В результате получаем множество равновесных решений

$$\Phi_r(Q)=\left\{\Phi^{(k)},\ k\in M_r=\left\{1,m_r\right\}\right\},\ m_r\le\overline{m}_r.$$

Шаг 2. Решение задачи вида:

$$\text{определить } \min\left\|\Phi^*-\Phi^{(k)}\right\| \text{ по } \Phi^{(k)}\in\Phi_r(Q). \tag{6.111}$$

То есть определяем решение $\Phi^{r^*}=\Phi\left(\mathbf{q}^{r^*}\right)\in\Phi_r(Q)$, максимально приближенное к идеальной точке $\mathbf{\Phi}^*$.

Этап 5. Проецирование равновесной точки Φ^{r^*} на множество Парето $\Phi_{\Pi}(Q)$. Для этого решаем задачу Ω-оптимизации (модуль 1) в «узком» конусе доминирования с матрицей $\mathbf{B}$ вида, обеспечивающей равномерное улучшение векторного показателя [24, гл. 6]:

$$\text{определить } \min\left\{\Phi(\mathbf{q})\middle| R,\Omega\right\}\ \mathbf{q}\in Q \tag{6.112}$$

из начального приближения $\Phi^{r^*}=\Phi\left(\mathbf{q}^{r^*}\right)$.

Задание матрицы $\mathbf{B}$ в указанном виде характеризует разумность поведения коалиций-партнеров без дискриминации какой-либо из сторон, что в определенном смысле может компенсировать отсутствие возможности переговоров между партнерами. В результате осуществляется согласованный выход на множество Парето.

Выбор векторного Нэш-решения, близкого к наилучшей целевой точке проектировщика, на основе ε-равновесного эффективного решения (СТЭК-10) [24, гл. 6]. Используется, когда приоритетность показателей внутри каждой коалиции K_i возможно определить лишь с точностью до конуса доминирования Ω_i с матрицей $\mathbf{B}_i$, $i\in M_K$. Алгоритм и структурная схема даны, например в [24, 82].

6.6.3. Понятие о договорных компромиссах на основе комбинации обязательных и необязательных соглашений

Практически при усложнении алгоритма компромисса с соответствующим увеличением числа условий его выполнения и повышением структурной сложности элемент обязательности выполнения соглашения усиливается, так как свойство устойчивости с предостережением существенно дополняется обязательным договорным элементом. Данная динамика имеет место в последних алгоритмах поиска СТЭК.

В данном разделе кратко рассматриваются некоторые пути формирования обязательных компромиссов при управлении ММС (СТЭК-11–14), использующие результаты необязательных компромиссов и содержащие, в том числе, элементы модифи-

кации арбитражных схем и среднеквадратических решений, комбинации УКУ-решений и дележа Шепли и др.

Договорной диапазон на основе комбинации вектора Шепли и УКУ-решений (СТЭК-11).

Как известно, СТЭК-7 в условиях необязательных соглашений обеспечивает выбор УКУ-решения на ПНОК наиболее близкого к точке Шепли, которая является средней оценкой эффективности данной коалиции — объекта на множестве возможных кооперативных объединений.

В результате, в общем случае остается диапазон между СТЭК-7 (УКУ-решением) и точкой Шепли, на котором может быть сформировано обязательное соглашение.

Алгоритм данного варианта базируется также на модифицированном двухэтапном алгоритме (см. п. 6.5.4) с введением последовательной системы предпосылок вида

$$\mathbf{J}^{\text{УКУ}} \le \mathbf{J}^1 \le \mathbf{J}^2 \le \mathbf{J}^{\text{ш}}.$$

Модификации основных арбитражных схем. При всем разнообразии структурных вариантов арбитражных схем (АС), рассмотренном в [24, гл. 6], выделяются четыре АС: АС Нэша, АС Райфы, пропорциональная АС [20] и АС Нэша–Харшаньи–Селтена при неполной информации (АСНХС) [24].

О модификации арбитражных схем Нэша и Райфы с использованием Нэш- и УКУ-решений (СТЭК-12). По определению арбитражной схемы Нэша арбитражное решение удовлетворяет условию

$$\max_{\mathbf{u}} \prod_{i \in N} \left(J_i(\mathbf{u}) - J_i^* \right) \to \mathbf{u}^a, \tag{6.113}$$

где J_i^* — значения вектора показателей в начальной точке, $\mathbf{u}^a$ — Парето-решение.

В классической АСН в качестве J_i^* выбирается гарантированное значение показателя i-го объекта (коалиции)

$$J_i^* = \max_{\mathbf{u}^i \in U^i} \min_{\mathbf{u}/\mathbf{u}^i \in U/U_i} J\left(\mathbf{u}^i, \mathbf{u}/\mathbf{u}^i\right).$$

По определению арбитражной схемы Райфы [20] арбитражное решение удовлетворяет условию

$$\max_{\mathbf{u} \in U} \min_{i \in N} \frac{J_i(\mathbf{u}) - J_i^*}{J_i^{\text{ид}}} \to \mathbf{u}^a, \tag{6.114}$$

где J_i^* — значения вектора показателей в начальной точке; $J_i^{\text{ид}}$ — значения вектора показателей в «идеальной точке».

Предлагается в качестве $\mathbf{J}^*$ использовать значения СТЭК-3 или СТЭК-7 как наилучших Нэш- и УКУ-решений соответственно, которые «продвинуты» к Парето-границе по сравнению с гарантированным значением показателя и поэтому имеют большую эффективность. Кроме того, АС меньше подвержена влиянию локальных экстремумов.

В результате имеем

$$J_i^* = J_i^{\text{УКУ}}, \quad \left(J_i^* = J_i^{\text{Н}}\right). \tag{6.115}$$

Таким образом, модифицированная задача определения, например арбитражного решения по схеме Райфы, решается в постановке (6.114), (6.115).

Общая схема алгоритма содержит, по крайней мере, три этапа.

Этап 1. Определение идеальной точки.

Этап 2. Определение СТЭК-7 (СТЭК-3) для получения $\mathbf{J}^*$.

Этап 3. Формирование итерационного процесса максимизации наименьшей компоненты текущего приближения (6.114).

Модифицированная арбитражная схема на основе «узкого» конуса доминирования и ПНОК (СТЭК-13) [24, гл. 6].

Алгоритм СТЭК-13 имеет следующий вид:

Этап 1. Формирование СТЭК-7 (СТЭК-1–3).

Этап 2. Формирование «узкого» конуса доминирования Ω с равномерным улучшением вектора показателей [24, гл. 6] вершиной в СТЭК-7 (СТЭК-1–3).

Этап 3. Процедура оптимизации по конусу Ω.

Среднеквадратическое решение (СКР) относительно идеальной точки и значения дележа по Шепли (СТЭК-14).

СКР является решением задачи

$$\min_{\mathbf{u}\in U}\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[J_i(\mathbf{u})-J_i^*\right]^2\to\mathbf{u}^c; \tag{6.116}$$

$$J_i^*=\max_{\mathbf{u}}J_i(\mathbf{u}),\ i=\overline{1,N},$$

где веса λ_i удовлетворяют условию

$$0\le\lambda_i\le 1,\ \sum_{i=1}^{N}\lambda_i=1.$$

В данном разделе рассматривается модифицированное СКР как задача (6.116) с дополнительным условием

$$\left\|\mathbf{J}-\mathbf{J}^{\text{ш}}\right\|\le c,$$

$$\max_{\mathbf{u}\in U}\left\{\sum_{i=1}^{N}\lambda_i\left[J_i(\mathbf{u})-J_i^*\right]^2+\rho\sum_{i=1}^{N}\gamma_i\left[J_i(\mathbf{u})-J_i^{\text{ш}}\right]^2\right\}, \tag{6.117}$$

где $J_i^{\text{ш}}$ — компоненты вектора дележа по Шепли; ρ — множитель Лагранжа, который после получения решения как функции $\mathbf{u}(\bullet,\rho)$ определяется из дополнительного условия.

Очевидно, что общий алгоритм решения полученной задачи имеет три этапа.

Этап 1. Решение N задач для получения идеальной точки $\mathbf{J}^*$ (см. СТЭК-3, СТЭК-9).

Этап 2. Решение задачи получения значения дележа по Шепли $\mathbf{J}^{\text{ш}}$ (см. СТЭК-6).

Этап 3. Получение СКР на основе решения задачи (6.117).

6.6.4. Об интеллектуальных СТЭК на основе обобщенного гомеостаза в форме предельного целевого качества интеллектуальной системы (ИС) с динамической экспертной поддержкой [24, 34, 65, 76]

Интеллектуализация СТЭК, т.е. внедрение интеллектуальных подходов в сложный механизм формирования СТЭК на основе экспертных систем, является важным технологическим фактором. С другой стороны, подходы на основе емких структур информационно-тактических компромиссов, учитывающих факторы многообъектности и многокритериальности сложных систем и задач, позволяют сформировать оценки предельного целевого качества ИС, в которой в соответствии с ее структурой [76] существенными являются вопросы взаимодействия с внешней и внутренней средой.

Современное состояние управления сложными техническими системами порождает потребность в формировании положений кибернетики, которые равноправно объединяют технические и биологические аспекты управления [34, 65, 76].

В данной работе рассматривается обобщение свойств формального представления гомеостаза [65] на основе учета целевых признаков и стабильно-эффективных компромиссов при компенсаторном взаимодействии ИС с активной средой. Игровые

подходы обогащают методы анализа охранительных свойств гомеостаза в условиях конфликта и неопределенности среды, а учет целевых признаков позволяет сформировать предельное целевое качество ИС как обобщенное самосохранение.

В общем случае, развивая точку зрения [65], можно утверждать, что термин «самосохранение» означает поддержание эффективной работоспособности системы и обеспечения ее энергетическими, материальными и информационными потоками, необходимыми для производственных процессов реального времени.

Существенным элементом обеспечения самосохранения живых, технических и биотехнических систем является их ресурсная и алгоритмическая избыточность, которая у живых систем образовалась в ходе естественной эволюции, а у технических — в ходе эпигенетического [65] развития с формированием в составе ИС экспертной подсистемы реального времени с развитой базой знаний [76]. Избыточность позволяет достигать более высоких целей (оптимизационных, адаптационных, интеллектуальных и т.п.).

Интеллектуальная техническая система [75] по своей функциональной гибкости, благодаря встроенной динамической экспертной системе и биофизически подобным механизмам саморегуляции с использованием афферентного синтеза цели, эфферентной программе действия, обратной афферентации, является технической средой, способной воспринять и реализовать предельное целевое качество на основе самосохранения в форме обобщенного гомеостаза [76].

Общий характер целей управления, связанных с самосохранением ИС, формируется в следующем порядке: обеспечение собственно функционирования ИС; поддержание гомеостаза и обеспечение стабильного хода основных процессов; обеспечение обобщенного гомеостаза для реализации предельного целевого качества ИС.

В соответствии со структурными схемами функциональной и интеллектуальной систем обстановочная афферентация с учетом памяти, прогноза и мотивации порождает на этапе афферентного синтеза цели две структурные обобщенные категории собственного состояния и окружающей среды.

Каждая из категорий может быть достаточно полно описана системой с пятью компартментами системы и среды соответственно: ресурсные процессы; векторы состояний динамических объектов; информационные процессы притока и оттока информации; энергетические процессы; целевые процессы (обновление и реализация целевых признаков в реальном времени).

Система уравнений на пространстве компартментных состояний описывает совокупность процессов возникновения, перемещения, накопления, преобразования и элиминации некоторого набора веществ (материалов, продуктов, и т.п.), энергии и информации и имеет вид [65]

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} y_{kj}(\mathbf{x},\mathbf{v}) - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} y_{jk}(\mathbf{x},\mathbf{v}) + y_{k0}(\mathbf{x},\mathbf{v}) - y_{0k}(\mathbf{x},\mathbf{v}) + w_k, \qquad (6.118)$$

где $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — вектор компартментного состояния системы; y_{kj} — темп транспортного потока вещества, энергии, информации из j-го компартмента в k-й $(k = \overline{1,n})$; $\mathbf{v} = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n)$ — вектор возмущений, $\mathbf{w} = (w_1, w_2, \ldots, w_n)$ — вектор режимов протекания вещественно-энергетических процессов в компартментах, который может быть дополнен вектором управления $\mathbf{u}(t)$.

Модель (6.118) содержит n компартментов, каждому из которых отвечает одна переменная состояния x_k. Компартменты подразделяются на производственные $w_i(t) \neq 0$ и накопительные $w_i(t) = 0$.

В общем случае для учета эффективности функциональных свойств и конкретизации оценок в ИС необходимо сформулировать общую цель эффективного самосохранения на естественном языке (явный вид), а если это невозможно, то сформировать набор целевых признаков самосохранения (неявный вид). Явный или неявный вид эффективного самосохранения необходимо формализовать вектором показателей, обладающим минимальной размерностью, независимостью свойств и полнотой описания (отражения) общей цели эффективного самосохранения.

Векторный целевой компартмент системы компартментов формирует полный набор признаков цели в данный момент времени, значимость каждого из которых в следующий момент времени меняется либо учитывается возможность частичного обновления признаков цели в реальном времени.

Свойствами полноты обладает следующий формализованный набор признаков цели: эффективность (точность, быстродействие, степень чувствительности некоторых скалярных компонентов к возмущениям среды, качество исполнения управления, надежность), стабильность функционирования в условиях неопределенности среды взаимодействия и цели, материальные затраты, энергетические расходы, информационные потери. Количественные показатели, введенные в соответствии с целевыми признаками, позволяют получить динамическое описание векторного компартмента целевых процессов.

Общий вектор компартментного состояния принимает вид

$$\mathbf{x} = \left(x_1,\ldots,x_{n_1},x_{n_1+1},\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{n+r},x_{n+r+1},\ldots,x_{n+r+p}\right), \tag{6.119}$$

где $x_1,\ldots,x_{n_1}$ — производственные компартменты; $x_{n_1+1},\ldots,x_n$ — накопительные компартменты; $x_{n+1},\ldots,x_{n+r}$ — целевые компартменты ИС; $x_{n+r+1},\ldots,x_{n+r+p}$ — целевые компартменты среды.

Стабильно-эффективный обобщенный гомеостатический режим определяется следующим образом. Пусть:

1) в пространстве $(\mathbf{v},\mathbf{w})$ возмущений и управлений соответственно существует такая область $\Omega_s(\mathbf{v},\mathbf{w})$, что для всех точек $(\mathbf{v}^*,\mathbf{w}^*)\in\Omega_s$ существует стационарный режим вектора (6.119)

$$\mathbf{x}^*\left(\mathbf{v}^*,\mathbf{w}^*\right) = \text{const}; \tag{6.120}$$

2) существует область $\Omega_h(\mathbf{v},\mathbf{w})\in\Omega_s(\mathbf{v},\mathbf{w})$ такая, что в точке $(\mathbf{v}^*+\Delta\mathbf{v},\mathbf{w}^*+\Delta\mathbf{w})\in$ $\in\Omega_s(\mathbf{v},\mathbf{w})$ в системе устанавливается новый стационарный режим $\mathbf{x}^*+\Delta\mathbf{x}$ с малой чувствительностью и малыми градиентами:

$$\mathbf{I}^j, \tag{6.121}$$

$$\left.\frac{\Delta x_i}{\Delta w_k}\right|_{x\in\Omega_h} \ll \left.\frac{\Delta x_i}{\Delta w_k}\right|_{x\notin\Omega_h},\ i\in(n+1,\ldots,n+r),\ k\in(1,\ldots,n_1), \tag{6.122}$$

$$\left.\frac{\Delta x_i}{\Delta v_k}\right|_{x\in\Omega_h} \ll \left.\frac{\Delta x_i}{\Delta v_k}\right|_{x\notin\Omega_h},\ i\in(n+r+1,\ldots,n+r+p),\ k\in(1,\ldots,l),\ l\le m. \tag{6.123}$$

При этом условия (6.122), (6.123) по содержанию суть условия коалиционного равновесия [20] взаимодействующих системы и среды. Соотношения (6.120)–(6.123) составляют определение стабильно-эффективного обобщенного гомеостаза. Обобщение состоит в развитии модели компенсаторных динамических свойств гомеостаза в соответствии с функциональными свойствами организма на основе игровых ста-

бильно-эффективных компромиссов, что обогащает механизмы обеспечения самосохранения ИС в подсистеме предельного целевого качества (ППЦК).

Таким образом, в условиях неопределенности и активнодействующей среды в ИС имеет смысл формировать количественные методы с учетом явно взаимодействующих партнеров — системы и среды функционирования — при различных степенях их несогласованности и на основе стабильно-эффективных компромиссов [24, 27].

В связи с последними замечаниями алгоритмы СТЭК помещаются в базу знаний экспертной подсистемы ИС и применяются в качестве робастных алгоритмов управления ИС в условиях неопределенности и для обеспечения предельного целевого качества ИС в условиях активной среды функционирования ИС.

6.7. ПРОГРАММНО-КОРРЕКТИРУЕМОЕ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНОЕ ПОЗИЦИОННОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ ДВУХКОАЛИЦИОННОЙ СИСТЕМОЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА «ЭКСТРЕМАЛЬНОГО ПРИЦЕЛИВАНИЯ» Н.Н. КРАСОВСКОГО

6.7.1. Постановка и анализ существования гарантирующих и равновесных решений

В [24] выполнен сравнительный анализ подходов к исследованию двухкоалиционных ММС в условиях антагонизма, известных как задачи сближения-уклонения (или преследования-убегания) с анализом методов получения гарантирующих (максиминных, минимаксных) и равновесных решений для преследователя P и цели E. Для получения программно-корректируемого закона управления в условиях антагонизма и бескоалиционной ситуации с высокой степенью конфликтности, а также коалиционного преследования в данном параграфе принят один из самых конструктивных подходов — принцип «экстремального прицеливания» Н.Н. Красовского.

В данном параграфе общий показатель эффективности (потерь)

$$J = F\left(t, \mathbf{x}(T)\right) + \int_{t_0}^{T} f_0\left(x, \mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) dt = J\left(\mathbf{u}_E, \mathbf{u}_P\right), \tag{6.124}$$

при описании ММС, например, в виде системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}\left(x, \mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E, t\right). \tag{6.125}$$

Утверждение 6.15 [10, 29, 52]. Пусть U_P^m и U_E^m — компактные множества (одно из множеств компактно), $J\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right)$ — функционал, выпукло-вогнутый или квазивыпукло-квазивогнутый и непрерывный на $U_P^m \times U_E^m$.

Тогда

$$\max_{\mathbf{u}_E} \inf_{\mathbf{u}_P} J\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) = \min_{\mathbf{u}_P} \sup_{\mathbf{u}_E} J\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) = \nu$$

$$\left(\sup_{\mathbf{u}_E} \inf_{\mathbf{u}_P} J\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) = \inf_{\mathbf{u}_P} \sup_{\mathbf{u}_E} J\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) = \nu_1 \right).$$

Как видно, теорема формулирует типовые условия существования равновесия и ε-равновесия.

В последнем равенстве отклонение от найденных решений может улучшить результат «отклоняющегося» не более чем на малое $\varepsilon > 0$ $\left(\nu_1 \pm \varepsilon\right)$.

Сделаем некоторые замечания:

1. Если J является лишь полунепрерывным, то существование равновесия возможно лишь при его вогнуто-выпуклости. $J\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right)$ называется полунепрерывным

снизу по $\mathbf{u}_P$ (сверху по $\mathbf{u}_E$) в точке $\mathbf{u}_P$ ($\mathbf{u}_E$), если для любого $c>0$ существует такая окрестность точки, в которой

$$J(\mathbf{u}_P,\mathbf{u}_E)>J(\mathbf{u}'_P,\mathbf{u}_E)-c$$

$$\left(J(\mathbf{u}_P,\mathbf{u}_E)<J(\mathbf{u}_P,\mathbf{u}'_E)+c\right).$$

2. Для существования ε-равновесия компактность одного из множеств U_i^m может быть заменена слабой компактностью.

3. Условия равновесия и ε-равновесия для стохастической модели приводят к обобщению утверждения 6.15 (см., например, [25, 29]).

4. Существование равновесных управлений обеспечивается, если имеет место следующее «расщепление» (или разделение) правых частей (6.125):

$\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x},\mathbf{u}_P,\mathbf{u}_E,t)=\mathbf{f}_P(\mathbf{x},\mathbf{u}_P,t)+\mathbf{f}_E(\mathbf{x},\mathbf{u}_E,t)$ и подынтегральной функции (6.124)

$$\mathbf{f}_0=\mathbf{f}_{0P}(\mathbf{x},\mathbf{u}_P,t)+\mathbf{f}_{0E}(\mathbf{x},\mathbf{u}_E,t).$$

5. Как было отмечено выше, равновесие — «седло» — является частным случаем равновесия по Нэшу двух и более игроков (объекта, неопределенности среды, активных партнеров и т.д.), которые обобщают рассмотренные условия.

Основные структурные особенности принципа экстремального прицеливания и его применение в классах линейных и нелинейных дифференциальных игр. Одним из самых конструктивных подходов, позволяющих получить программно-корректируемый закон управления в условиях антагонизма, является принцип экстремального прицеливания. Принцип экстремального прицеливания Н.Н. Красовского основан на использовании экстремальной конструкции, фундаментом которой является понятие области достижимости (управляемости) динамической системы. Он включает в себя три этапа:

- формирование областей достижимости объектов управления;
- определение экстремальных направлений и соответствующих им траекторий движения;
- получение законов управления, реализующих движение по экстремальным траекториям.

Областью достижимости объекта (ОД) называется область фазового пространства $G(t_0,T)$, в каждую точку которого объект может попасть в момент T, выбирая любое допустимое управление.

Первый символ в скобках означает момент начала движения, а второй символ — момент определения ОД.

Символом $\partial G(T)$ будет обозначаться граница ОД в момент T.

Анализ взаимного расположения ОД объекта-преследователя $G_P(T)$ и ОД объекта-цели $G_E(T)$ и использование свойства сжимаемости ОД

$$G(t,T)\subset G(t_0,T),\ t_0\le t<T \tag{6.126}$$

делает весьма наглядным и простым решение задачи сближения-уклонения линейных объектов фиксированной продолжительности T с критерием конечного промаха

$$K_h(\mathbf{u}_P,\mathbf{u}_E)=h(T), \tag{6.127}$$

где

$$h(T)=\begin{cases}r(T),\ r(T)>l,\\ 0,\ r(T)\le l;\end{cases}$$

$$r(t)=\left\|\mathbf{y}_P(t)-\mathbf{y}_E(t)\right\|,\ t_0<t'<t<T;$$

$\mathbf{У}_i$ — вектор геометрических координат объекта i; $l \geq 0$ — заранее заданное число, характеризующее область влияния преследователя, T — фиксированный известный момент окончания игры.

Для определения оптимальных управлений $\mathbf{u}_P^o(t')$ и $\mathbf{u}_E^o(t')$ достаточно построить области $G_{Pl}(t',T)$ и $G_{El}(t',T)$ и проанализировать их взаимоположение. Здесь возможны ситуации неполного и полного поглощения (рис. 6.29).

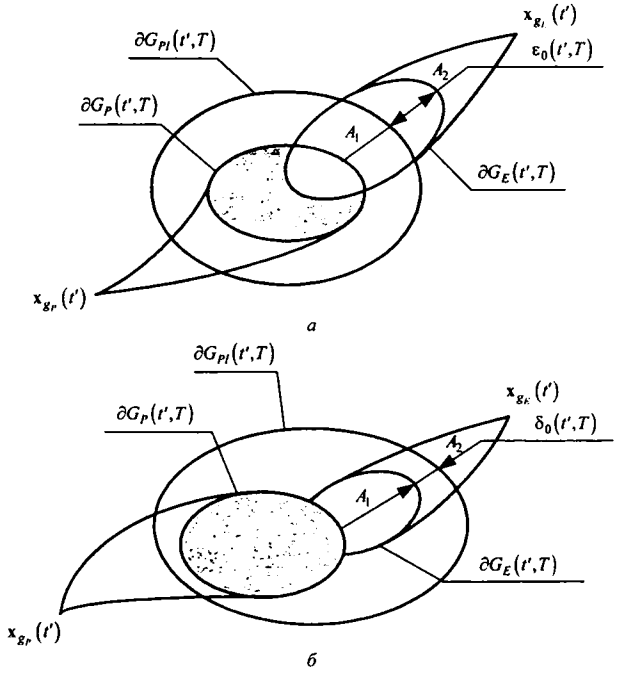


Рис. 6.29. Неполное (*а*) и полное (*б*) поглощение

В случае неполного поглощения прогнозируемые значения конечного промаха $\varepsilon_0(t',T) > 0$. Для максимизации этого промаха цель направляет (прицеливает) свое движение в точку A_2 — точку, наиболее удаленную от $G_{Pl}(T)$. Причем ясно [50, 52], что

$$A_2 \in \partial G_E(T) \subset G_E(T). \tag{6.128}$$

Ибо если это не так, то существует другая точка $A_2 \in \partial G_E(T) \subset G_E(T)$, для которой $\varepsilon_0(t',T)$ больше. Таким образом, величина $\varepsilon_0(t',T)$ есть минимальный гарантированный запас цели по уклонению. Объект-преследователь должен прицеливать свое движение, рассчитывая на самое неблагоприятное (экстремальное) поведение цели, в точку $A_1 \in \partial G_P(T) \subset G_P(T)$. Точка A_1 должна быть наиболее близкой к точке A_2, т.е. аналогично (6.128)

$$A_1 \in \partial G_P(T) \subset G_P(T). \tag{6.129}$$

Управления $\mathbf{u}_P^0$ и $\mathbf{u}_E^0$, нацеливающие движение объектов в точки A_1 и A_2 соответственно, доставляют седловую точку игры и при этом

$$\mathbf{u}_i^0 \in U_i^\partial, \tag{6.130}$$

U_i^{∂} — множество программных управлений i-го объекта, приводящих на границу $\partial G_i(T)$, называемое множеством граничных управлений; $G_E(T) \subset G_{Pl}(T)$ — полное поглощение.

В этом случае ясно, что преследователь всегда может обеспечить себе нулевой промах, так как у него есть некоторый запас [111] $\delta_0(t',T) \geq 0$ поглощения, как бы себя ни вела цель.

Поэтому теоретически допустимы любые управления $\mathbf{u}_P$, $\mathbf{u}_E$, пока существует ситуация 2. В.М. Кейн [50] заметил, что, с практической точки зрения, такой «произвол» в выборе оптимальных управлений никак не оправдан, поскольку преследователь заинтересован в сохранении ситуации 2, а цель заинтересована в превращении ситуации 2 в ситуацию 1. Используя свойство (6.126), цели необходимо направлять свое движение в точку A_2, максимально приближенную к $\partial G_{Pl}(T)$. Тем самым будет достигнуто невозрастание запаса поглощения $\delta_0(t',T)$ в процессе игры, а при неоптимальном движении преследователя запас поглощения будет убывать. Таким образом, будет обеспечено выполнение неравенства

$$\frac{\partial \delta_0(t,T)}{\partial t} \leq 0, \quad t' < t \leq T, \tag{6.131}$$

что, возможно, приведет в некоторый момент $t^* > t'$ к ситуации

$$\delta_0(t^*,T) = 0, \tag{6.132}$$

а затем и к ситуации 1, где

$$\varepsilon_0(t,T) > 0, \quad t^* < t \leq T. \tag{6.133}$$

Преследователь, наоборот, стремится сохранить запас поглощения $\delta_0(t',T)$ и по возможности увеличить его. Для этого ему необходимо нацеливать свое движение в точку A_1, ближайшую к A_2. Тогда по свойству (6.126) $\delta_0(t',T)$ не будет убывать со временем, а при неоптимальности наведения цели возможно даже увеличение запаса. Таким образом, обеспечивается выполнение неравенства

$$\frac{\partial \delta_0(t,T)}{\partial t} \geq 0, \quad t' < t \leq T. \tag{6.134}$$

При этом опять справедливо включение (6.130). Здесь необходимо заметить, что при выполнении включения

$$G_E(T) \subset G_P(T) \tag{6.135}$$

преследователь может нацеливаться в точку A_2, допуская медленное уменьшение запаса $\delta_0(t,T)$, $t' < t \leq T$, но обеспечивая выполнение условия

$$\varepsilon_0(t,T) = 0, \quad t' \leq t \leq T, \tag{6.136}$$

при этом $\mathbf{u}_P^0 \notin U_P^{\partial}$.

Описанному способу управления в ситуации полного поглощения, предложенному В.М. Кейном в [50], можно найти аналогию в классической теории регулирования, когда в закон управления по ошибке

$$u = k_1 \cdot \varepsilon$$

вводят производную от ошибки $\dot{\varepsilon}$ для улучшения качества регулирования

$$u = k_2 \cdot \varepsilon + k_3 \cdot \dot{\varepsilon}.$$

Для решения задачи может быть предложен другой по форме способ определения оптимальных управлений, взаимосвязанный с подходами А.Б. Куржанского, В.Ф. Би-

рюкова, Д.А. Овсянникова, Л.А. Петросяна [69, 87], суть которого состоит в построении только области $G_E(T)$ и множества U_P^n — множества управлений, потребных для l-сближения к моменту T. Тогда на основании анализа взаимного положения ансамбля располагаемых и потребных траекторий определяется оптимальное управление обоих объектов. Именно такой подход будет использоваться при решении поставленных нелинейных задач игрового управления.

Рассмотрим задачу преследования–уклонения с критерием времени до l-встречи объектов

$$K_t(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E) = \int_{t_0}^{t_l} 1 \cdot dt,$$

где $t_l = \inf\{t : \|\mathbf{У}_P(t) - \mathbf{У}_E(t)\| \le l\}$.

В рассматриваемых задачах экстремального прицеливания положение точки экстремального прицеливания A_1 или A_2 определяется конфигурацией ОД и их взаимным положением. Поэтому вполне возможны ситуации, когда таких точек у каждого объекта окажется несколько. Такая ситуация называется нерегулярной [42, 50, 52].

В нерегулярной ситуации необходимо выбрать одну точку — любую из них [50]. В принципе, нерегулярная ситуация более выгодна для цели, потому что преследователю не удастся обеспечить невозрастание величины прогнозируемого промаха $\varepsilon_0(t', T)$ и $\varepsilon_0(t', \vartheta)$ в случае непоглощения или не удастся обеспечить неубывание запаса $\delta_0(t', \vartheta)$ в случае поглощения с критерием промаха и не удастся обеспечить невозрастание времени встречи t^* в случае поглощения с критерием времени. Поэтому в нерегулярной ситуации процедура экстремального прицеливания не позволяет предсказать гарантированный результат, но, как отмечает В.М. Кейн [50], дает способ выбора управления, который во многих случаях оказывается вполне приемлемым.

Формально и здесь задача определения управления $\mathbf{u}_P^0$ и $\mathbf{u}_E^0$ может быть решена несколько иначе [35, 111]: для всего ансамбля траекторий, определяемого множеством граничных управлений U_E^∂, необходимо определить множество потребных траекторий, необходимых для l-встречи. При этом сами моменты l-встречи будут различными. Затем на основе анализа ансамбля располагаемых и потребных траекторий находится оптимальное управление. Этот способ дает существенный выигрыш в простоте процесса решения. При использовании построения ОД достаточно трудоемкой операцией является определение момента t_* поглощения, если он существует, поскольку необходимо строить ОД не в фиксированный момент T, а в некотором интервале $[t_1, t_2]$, а затем уже определять $t_* \in [t_1, t_2]$.

Применение принципа экстремального прицеливания для линейных объектов управления достаточно подробно освещено в литературе [36, 42, 52]. В.М. Кейн [50] рассмотрел вопросы гарантированного управления самолетом при взлете и посадке при наличии ветра, Л.Н. Лысенко [42] рассмотрел задачу оптимального наведения телеуправляемого снаряда на маневрирующую цель применительно к линейным моделям движения с критериями конечного промаха и времени до встречи.

Принцип максимума в сочетании с подходом Е.А. Ивановой [47] использован Е.М. Вороновым и А.В. Савиным для определения границ ОД нелинейного объекта пятого порядка.

В задачах преследования-уклонения полное поглощение

$$G_E(t_*) \subset G_{Pl}(t_*) \tag{6.137}$$

является необходимым условием встречи. Н.К. Гупта [111] показал, что это условие может быть заменено менее жестким условием: преследователь может обеспечить l-встречу с целью при любом ее поведении, если часть ее ОД поглощается областью достижимости преследователя в момент t_*, а оставшаяся часть — в какой-то другой (другие) момент времени. Другими словами, если процесс поглощения ОД цели областью достижимости преследователя происходит на интервале $[t_*, t^*]$, то разумное поведение преследователя обеспечит ему l-встречу не позднее, чем к моменту t^*, при любом поведении цели, хотя ни в один отдельно взятый момент времени полного поглощения не происходит. Это ведет к тому, что если полного поглощения в момент t_* не существует и выполняется условие

$$G_E(t_*) \not\subset G_{Pl}(t_*), \tag{6.138}$$

то это не означает, что цель может гарантировать себе уклонение, поскольку может иметь место поглощение на интервале. Таким образом, задача сближения-уклонения к фиксированному моменту времени T с критерием промаха не может быть решена в общем случае для нелинейных объектов построением $G_{Pl}(T)$ и $G_E(T)$, как в линейном случае. Значение минимального промаха никак не связано с величиной $\varepsilon_0(t', T)$, которое определяется по областям $G_{Pl}(T)$ и $G_E(T)$, а момент времени минимального промаха никак не связан с моментом T. Эти соображения приводят к выводу о возможной модификации подхода к решению задачи оптимального наведения, рассмотренном Е.А. Ивановой в [47], поскольку необходимо решать задачу с критерием промаха при условии, что сам момент времени минимального промаха заранее неизвестен и он определяется в процессе игры.

6.7.2. Постановка и формализация задач оптимального преследования и уклонения летательных аппаратов

Краткая характеристика противодействующих объектов и множеств допустимых управлений. Противодействующими аэродинамическими объектами являются летательный аппарат-перехватчик P и летательный аппарат–цель E. Параметры и координаты перехватчика будут записываться с индексом «P», а цели — с индексом «E». В задаче преследования P является союзником, а E — противником.

Известно [58], что для воздействия на величину скорости полета необходимо изменить тангенциальную силу, действующую на ЛА в направлении движения, а для изменения направления полета необходимо приложить к ЛА силу, перпендикулярную вектору скорости, то есть нормальную силу. Диапазон располагаемых нормальных перегрузок современных целей и ракет-перехватчиков на этапе наведения на порядок шире диапазона располагаемых тангенциальных перегрузок. Это позволяет сделать вывод о неэффективности использования тангенциальных перегрузок для решения задач преследования и уклонения. Поэтому в качестве вектора управления $\mathbf{u}_i$ $(i = P, E)$ принимается вектор нормальной перегрузки $\vec{n}_i$.

Для P рассматриваются два возможных способа управления: «управление в полярных координатах» — для летательных аппаратов обычной самолетной схемы и «управление в декартовых координатах» — для летательных аппаратов с крестообразным крылом.

Для создания нормальной перегрузки требуемой величины n_i и требуемого направления γ_{ci} в обычной самолетной схеме (с крыльями, расположенными в одной плоскости) используются угол атаки α_i и угол крена γ_i («управление в полярных координатах»). Поскольку между α_i и n_i, а также γ_i и γ_{ci} существуют определенные

связи, то вектор $\vec{n}_i$ характеризуется величиной нормальной перегрузки n_i и углом γ_{ci}, задающим положение $\vec{n}_i$ в плоскости, ортогональной вектору скорости $\mathbf{V}_i$ (рис. 6.30).

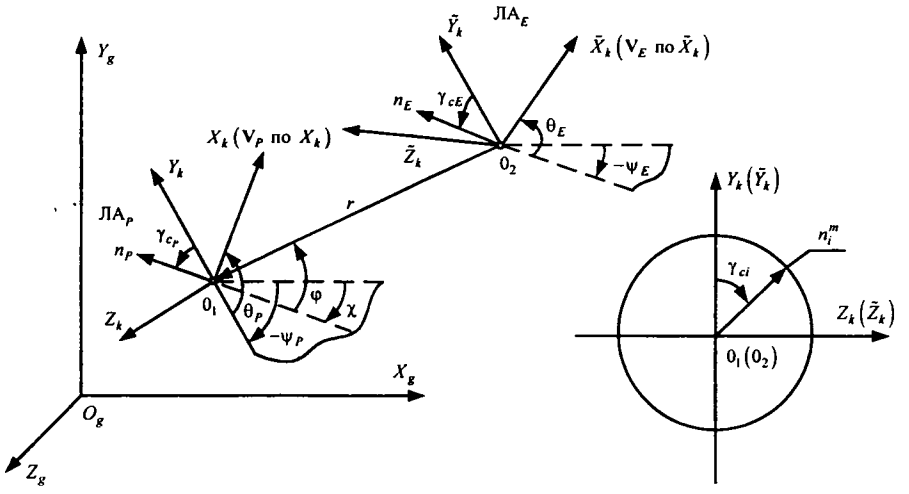


Рис. 6.30. Введенные системы координат и допустимое множество управлений

Базой для отсчета угла γ_{ci} является вертикальная плоскость. Таким образом, вектор управления имеет вид

$$\mathbf{u}_i = \left[n_i, \gamma_{ci}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{6.139}$$

Множество допустимых управлений U_i^m является кругом плоскости, ортогональной вектору $\mathbf{V}_i$, и определяется следующим образом:

$$\left|n_i\right| \le n_i^m. \tag{6.140}$$

Угол γ_{ci} неограничен и его требуемое значение всегда можно найти в диапазоне $\left[-\pi, \pi\right]$. Предполагается, что влияние угла скольжения β_i несущественно и им можно пренебречь.

Для создания нормальной перегрузки требуемой величины и требуемого направления у ЛА с крестообразным крылом используются угол атаки α_i и угол скольжения β_i. Поскольку между n_{Yi} и α_i, а также между n_{Zi} и β_i существуют определенные связи, то вектор $\vec{n}_i$ создается в результате геометрического сложения перегрузок n_{Yi} и n_{Zi}, формируемых в двух взаимно-перпендикулярных плоскостях («управление в декартовых координатах»). Вектор управления имеет вид

$$\mathbf{u}_i = \left[n_{Yi}, n_{Zi}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \left|n_{Yi}\right| \le n_{Yi}^m, \quad \left|n_{Zi}\right| \le n_{Zi}^m. \tag{6.141}$$

При этом накренение ЛА уже не требуется. Более того, предполагается, что угол крена жестко стабилизирован и равен нулю.

Для того чтобы использовать математическое описание вектора управления в виде (6.141) для ЛА с управлением в «полярных координатах», необходимо определить n_{Yi}, n_{Zi} по следующим соотношениям:

$$n_{Yi} = n_i \cos\gamma_{ci}, \tag{6.142}$$

$$n_{Zi} = n_i \sin\gamma_{ci}. \tag{6.143}$$

Тогда множество допустимых управлений U_i^m вида (6.140) будет определяться

$$\|\mathbf{u}_i\| \le n_i^m, \tag{6.144}$$

где символ $\|\bullet\|$ обозначает евклидову норму, т.е.

$$\|\mathbf{u}_i\| = \left(n_{Yi}^2 + n_{Zi}^2\right)^{1/2}. \tag{6.145}$$

В качестве ЛА-противника будет всегда рассматриваться объект, для которого известно ограничение на нормальную к вектору скорости $\mathbf{V}_i$ перегрузку. Поэтому и для ЛА-противника вектор управления имеет вид (6.141), а множество допустимых управлений U_i^m имеет вид (6.144).

Будем предполагать, что длительность этапа управляемого движения невелика, поэтому множества допустимых управлений (множества располагаемых перегрузок) $U_i^m\ (i = P,E)$ изменяются незначительно и этими изменениями можно пренебречь.

Разрабатываемые алгоритмы преследования и уклонения являются позиционными «в обратных связях», поэтому возмущения, возникающие в системе $P-E$ из-за неидеальной работы системы стабилизации ЛА-союзника и возможного неоптимального поведения ЛА-противника, будут учитываться при формировании закона управления.

Движение центров масс P и E в системе координат $O_gX_gY_gZ_g$ описывается системой нелинейных дифференциальных уравнений [58]:

$$\begin{aligned}
\frac{dV_i}{dt} &= g\left(n_{xi} - \sin\Theta_i\right);\\
\frac{d\Theta_i}{dt} &= \frac{g}{V_i}\left(n_{Yi} - \cos\Theta_i\right);\\
\frac{d\Psi_i}{dt} &= -\frac{g\cdot n_{Zi}}{V_i\cos\Theta_i};\\
\frac{dX_{gi}}{dt} &= V_i\cos\Theta_i\cos\Psi_i;\\
\frac{dY_{gi}}{dt} &= V_i\sin\Theta_i;\\
\frac{dZ_{gi}}{dt} &= -V_i\cos\Theta_i\sin\Psi_i;
\end{aligned} \tag{6.146}$$

где g — ускорение свободного падения; V_i — скорость ЛА; $i = P,E$.

При активном маневрировании E на малой высоте полета возможно столкновение с Землей, поэтому необходимо формировать закон управления $\mathbf{u}_i\ (i = P,E)$ с учетом требования

$$Y_{g_E} > 0. \tag{6.147}$$

Предполагается, что высота полета P всегда положительна и поэтому подобное ограничение на движение P не накладывается.

Критерии управления. Вектором координат ЛА$_i$ в СК $O_gX_gY_gZ_g$ будем называть

$$\mathbf{У}_{gi} = \left[X_{gi}, Y_{gi}, Z_{gi}\right]^{\mathrm{T}}. \tag{6.148}$$

Вектором позиции ЛА$_i$ в СК будем называть

$$\mathbf{x}_{gi} = \left[X_{gi}, Y_{gi}, Z_{gi}, V_i, \Theta_i, \Psi_i\right]^{\mathrm{T}}, \tag{6.149}$$

где $\mathbf{V}_{gi} = \left[V_i, \Theta_i, \Psi_i\right]^{\mathrm{T}}$ — вектор скорости ЛА$_i$, а V_i — модуль скорости ЛА$_i$.

Множество позиционных стратегий ЛА$_i$ обозначается

$$U_i\left(\mathbf{x}_{g_P},\mathbf{x}_{g_E}\right)\subset U_i^m. \tag{6.150}$$

Множество программных стратегий ЛА$_i$ обозначается

$$U_i(t)\subset U_i^m. \tag{6.151}$$

Предполагается, что ЛА-союзнику в каждый момент управляемого движения t' $(t'\geq t_0)$ точно известны векторы позиций и множества допустимых управлений P и E. Процесс принятия решения от замера позиций до выдачи оптимального управления осуществляется мгновенно. Способы определения векторов позиций рассматриваются ниже.

Расстояние между P и E обозначается

$$r(t)=\left\|\mathbf{У}_{g_P}(t)-\mathbf{У}_{g_E}(t)\right\|. \tag{6.152}$$

Пусть управляемое движение системы (6.146) началось в некоторый момент времени $t=t_0$, и зона перехвата P имеет радиус действия l.

Тогда целью управления P является обеспечение в некоторый момент времени $t=t^*$ условия

$$r\left(t^*\right)\leq l,\ t^*>t_0, \tag{6.153}$$

которое называется l-встречей, при этом E стремится не допустить выполнения условия (6.152).

Введем критерии управления.

Пусть $t=t^h$ — момент времени, когда выполняется условие

$$r\left(t^h\right)=\inf_t r(t). \tag{6.154}$$

Конечный промах h' определим следующим образом:

$$h=\begin{cases} r\left(t^h\right),\ r\left(t^h\right)>l, \\ 0,\ r\left(t^h\right)\leq l. \end{cases} \tag{6.155}$$

Тогда в качестве первого критерия управления принимается

$$K_h=K_h\left(\mathbf{u}_P,\mathbf{u}_E\right)=h. \tag{6.156}$$

Таким образом, P стремится достичь минимально-возможного конечного промаха h, а E, наоборот, стремится увеличить конечный промах, причем никаких дополнительных условий на момент t^h конечного промаха не накладывается.

Минимальный промах и минимальное время до l-встречи. Пусть $t=t^l$ — момент времени, когда впервые выполняется условие (6.153) (рис. 6.31), где

$$t_0<t^l\leq t^*, \tag{6.157}$$

т.е.

$$t^l=\inf\left\{t^*:r\left(t^*\right)=l\right\}. \tag{6.158}$$

P стремится обеспечить выполнение условия (6.153), причем за минимальное время, а E стремится не допустить l-встречи (6.153) или хотя бы отдалить ее во времени. Поэтому в качестве второго критерия управления принимается

$$K_t=K_t\left(\mathbf{u}_P,\mathbf{u}_E\right)=\int_{t_0}^{t^l}1\cdot dt. \tag{6.159}$$

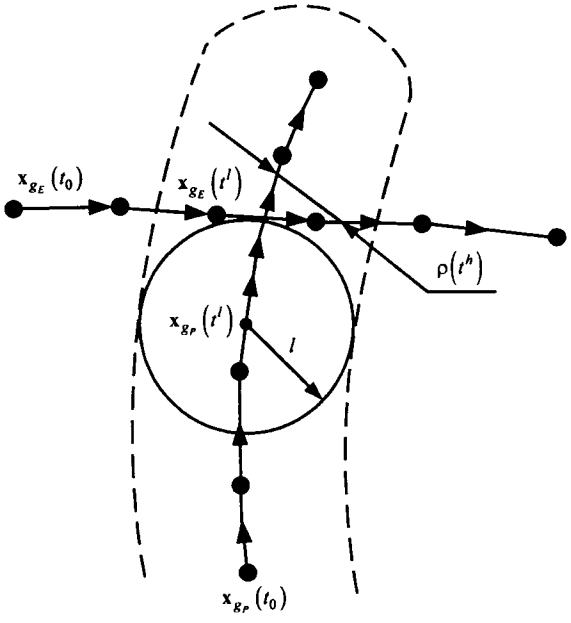


Рис. 6.31. Минимальный промах и время до l-встречи

Следует заметить, что момент существует всегда, поскольку для каждой пары траекторий P и E всегда найдется момент времени, когда расстояние (6.152) между ними минимально. Момент существует только в том случае, если выполняется условие (6.153), а если t^* — единственный, то $t^* = t^l$.

Сформулируем задачи преследования и уклонения в соответствии с введенными критериями K_h (6.156) и K_t (6.159).

Задача 1. K_h. В классе позиционных стратегий $U_P\left(\mathbf{x}_{g_P}, \mathbf{x}_{g_E}\right)$ требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}_P^0$, удовлетворяющее условию

$$\max_{\mathbf{u}_E \in U_E^m} K_h\left(\mathbf{u}_P^0, \mathbf{u}_E\right) = \min_{\mathbf{u}_P \in U_P\left(\mathbf{x}_{g_P}, \mathbf{x}_{g_E}\right)} \max_{\mathbf{u}_E \in U_E^m} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) \tag{6.160}$$

и условию (6.147), какими бы ни были начальные позиции объектов.

Векторы управления $\mathbf{u}_i$ $(i = P, E)$ являются двухмерными

$$\mathbf{u}_i = \left[n_{Yi}, n_{Zi}\right]^{\mathrm{T}}, \quad i = P, E. \tag{6.161}$$

Допустимые множества управлений U_i^m задаются в виде (6.144)

$$\left(n_{Yi}^2 + n_{Zi}^2\right)^{1/2} \le n_i^m. \tag{6.162}$$

Задача 2. K_t. Формулируется аналогично задаче 1. K_h, но вместо критерия K_h используется критерий K_t (6.158).

Задача 3. K_h. В классе позиционных стратегий $U_E\left(\mathbf{x}_{g_P}, \mathbf{x}_{g_E}\right)$ требуется найти оптимальное управление $\mathbf{u}_E^0$, удовлетворяющее условию

$$\min_{\mathbf{u}_P \in U_P^m} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^0\right) = \max_{\mathbf{u}_E \in U_E\left(\mathbf{x}_{g_P}, \mathbf{x}_{g_E}\right)} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P^m} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) \tag{6.163}$$

и условию (6.147), какими бы ни были начальные позиции объектов. Вектора управления $\mathbf{u}_i$ являются двухмерными

$$\mathbf{u}_i = \left[n_{Yi}, n_{Zi}\right]^{\mathrm{T}}, \quad i = P, E.$$

Допустимые множества управлений U_i^m задаются в виде (6.144).

Задача 4. K_t. Формулируется аналогично задаче 3. Вместо критерия K_h используется критерий K_t (6.159).

Об анализе условий существования равновесия (седловой точки). Приведенное доказательство базируется на изложенной выше теореме существования равновесия. В антагонистической дифференциальной игре имеет место равенство

$$\min_{\mathbf{u}_P \in U_P} \max_{\mathbf{u}_E \in U_E} K\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right) = \max_{\mathbf{u}_E \in U_E} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P} K\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right), \tag{6.164}$$

если оптимальные управления $\mathbf{u}_P^0$, $\mathbf{u}_E^0$ доставляют седловую точку [52].

Соотношение (6.164) соответствует выполнению равенства

$$\max_{\mathbf{u}_P \in U_P} \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} H = \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} H, \tag{6.165}$$

где H — функция Гамильтона для данной игры.

В случае терминального показателя (6.165) $K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E) = h$. Гамильтониан имеет вид

$$H_h = \boldsymbol{\Psi}^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}\left(\mathbf{x}_P, \mathbf{x}_E, \mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right), \tag{6.166}$$

где $\boldsymbol{\Psi}$ — сопряженный вектор, $\mathbf{f}\left(\mathbf{x}, \mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right)$ — векторная запись уравнений (6.156).

Поскольку движение всей системы (6.146) есть две отдельные траектории P и E (т.е. уравнения, описывающие движения одного объекта, не зависят от вектора управлений другого), то уравнение (6.166) представимо в виде (6.167)

$$H = \boldsymbol{\Psi}_P^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_P\left(\mathbf{x}_P, \mathbf{u}_P\right) + \boldsymbol{\Psi}_E^{\mathrm{T}} \cdot \mathbf{f}_E\left(\mathbf{x}_E, \mathbf{u}_E\right) = H_P + H_E. \tag{6.167}$$

Поскольку H_P явно зависит только от $\mathbf{u}_P$, а H_E — только от $\mathbf{u}_E$, то

$$\max_{\mathbf{u}_P \in U_P} \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} H_P = \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} H_P = \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} H_P, \tag{6.168}$$

$$\max_{\mathbf{u}_P \in U_P} \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} H_E = \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} H_E = \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} H_E. \tag{6.169}$$

Таким образом,

$$\max_{\mathbf{u}_P \in U_P} \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} H = \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} \left(H_P + H_E\right) = \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} H_P + \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} H_E, \tag{6.170}$$

$$\min_{\mathbf{u}_E \in U_E} \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} H = \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} \left(H_P + H_E\right) = \max_{\mathbf{u}_P \in U_P} H_P + \min_{\mathbf{u}_E \in U_E} H_E. \tag{6.171}$$

Поскольку правые части уравнений (6.170) и (6.171) равны друг другу и выполняется условие «разделения» (см. утверждение 6.15), то в случае $K = K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right)$ имеет место седловая точка [24].

Общая характеристика способа оценки области достижимости. Область достижимости $G\left(t_0, T\right)$ в момент времени T из начальной точки $\mathbf{x}_g\left(t_0\right)$ и начального момента t_0 определяется как множество значений вектора координат $\mathbf{У}_g\left(t_0\right)$ в момент времени T, полученное при всевозможных допустимых законах управления $u(t) \in U^m\left(t_0 \le t \le T\right)$ и начальном условии $\mathbf{x}_g\left(t_0\right)$. Динамика области достижимости (ОД) может быть описана динамикой ее границ [50]. Если движение исследуемого объекта описывается линейной системой уравнений, то существуют относительно простые способы построения границы ОД с использованием фундаментальной матрицы решений [50, 52]. Граница ОД определяется траекториями предельного быст-

родействия [50]. Эта методика существенно использует выпуклость ОД линейных систем. Для нелинейных систем свойство выпуклости ОД в общем случае не имеет места. Поэтому для них задача определения границ ОД, или граничных управлений (т.е. приводящих на границу ОД), может быть сформулирована в следующем виде [50]. Необходимо в пространстве координат $O_g X_g Y_g Z_g$ каким-либо образом задать направление ν, например, задав прямую, проходящую через начальное положение центра масс ЛА O_0, и некоторую другую точку O' этого пространства (рис. 6.32), и решить две отдельные задачи:

1) найти управление, максимизирующее расстояние $R^2(T)$, пройденное объектом за фиксированное время T в направлении ν;
2) найти управление, минимизирующее расстояние $R^2(T)$, пройденное объектом за фиксированное время T в направлении ν.

Варьируя направлением ν в пространстве координат и каждый раз решая эти две поставленные задачи, можно сделать поточечную [34] оценку ОД для фиксированного T.

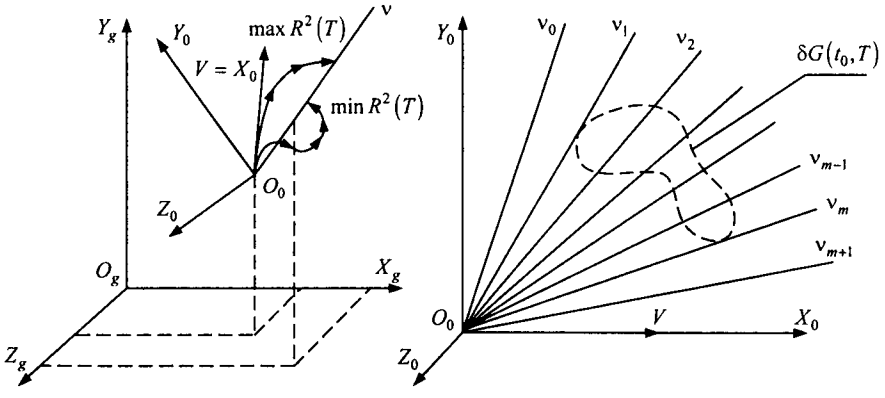


Рис. 6.32. Постановка задач экстремума расстояния

При решении обеих задач весьма желательно выявить структурные свойства оптимального в смысле общих критериев $\left(\max R^2(T) \text{ и } \min R^2(T)\right)$ управления, не зависящие от конкретного направления ν и времени T. Знание структуры граничного управления существенно упрощает определение границ ОД в фиксированный момент времени T.

В работе [24, гл. 7] показано, что решению задачи минимизации $R^2(T)$ соответствует релейное управление с одной точкой переключения, а решению задачи максимизации $R^2(T)$ — в общем случае некоторая особая структура предельного управления с одной точкой выключения.

В соответствии с приведенным анализом в [24] получен необходимый набор систем координат, для которого описание движения объекта и вектора управления имеет компактную форму, наиболее удобную для оценки области достижимости ОД. Задача оценки ОД нелинейного объекта в трехмерном пространстве сформулирована как задача экстремума расстояния, пройденного объектом за фиксированный интервал времени.

Решена задача оценки пространственной ОД рассматриваемого нелинейного объекта с учетом гипотезы постоянства модуля его скорости в будущем времени. Получено параметрическое описание границ ОД, при этом параметрами являются γ_c и положе-

ние точки переключения или выключения n. На основе параметрического описания сформирован алгоритм вычисления границ пространственной ОД рассматриваемого нелинейного объекта, обладающий экономичностью вычислительных процедур.

6.7.3. Формирование нелинейных алгоритмов преследования и уклонения на основе принципа экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [24]

Алгоритм оптимального нелинейного позиционного уклонения. Пусть управляемое движение системы началось в некоторый момент времени $t = t_0$. Формирование оптимального управления U_E^0 в каждый момент времени t' $(t' \geq t_0)$ основывается на точном знании векторов позиции $\mathbf{x}_{g_P}(t')$ и $\mathbf{x}_{g_E}(t')$, прогнозировании будущего хода игры на основе гипотезы равномерного (с постоянной скоростью) движения обоих объектов P и E. Прогнозируемое время, в отличие от реального или прошлого времени t, обозначается символом τ.

Таким образом,

$$V_i(\tau) = V_i(\tau_0), \quad i = P, E, \quad \tau \geq \tau_0,$$

где $\tau_0 = t'$ и в каждый момент t' решается вспомогательная задача

$$\min_{\mathbf{u}_P \in U_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^0\right) = \max_{\mathbf{u}_E \in U_E(\tau)} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P(\tau)} K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E), \tag{6.172}$$

решение которой является оптимальным решением исходной задачи в момент t'. Символы $U_P(\tau)$, $U_E(\tau)$ обозначают множества программных управлений, где $U_P(\tau) \subset U_P^m$, $U_E(\tau) \subset U_E^m$, а $K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E)$ — прогнозируемый промах на любой паре траекторий, определяемых управлениями $\mathbf{u}_P \in U_P(\tau)$, $\mathbf{u}_E \in U_E(\tau)$. Прогнозируемый промах определяется так же, как и в постановке задачи с заменой t на τ:

$$K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E) = \begin{cases} \inf\limits_{\tau} r(\tau), & \text{если } \inf\limits_{\tau} r(\tau) > l; \\ 0, & \text{если } \inf\limits_{\tau} r(\tau) \leq l. \end{cases} \tag{6.173}$$

Величина l предполагается известной, в частном случае можно принять $l = 0$.

Программные траектории $\mathbf{У}_{g_P}(\tau)$ и $\mathbf{У}_{g_E}(\tau)$, определяемые управлениями $\mathbf{u}_P \in U_P(\tau)$ и $\mathbf{u}_E \in U_E(\tau)$, подвержены возмущениям, вносимым силой тяжести, причем эти возмущения могут как «помогать», так и «мешать» E в решении задачи уклонения. По «принципу наибольшей неприятности» будем предполагать, что возмущения всегда «мешают». Это приводит к необходимости расширения множества допустимых управлений P U_P^m на максимальную величину возможного возмущения и необходимости сужения множества допустимых управлений E на эту величину. Возмущение, вносимое силой тяжести, не превышает единицы перегрузки, поэтому вместо множеств U_P^m и $U_P(\tau)$ используются $\overline{U}_P$ и $\overline{U}_P(\tau)$, а вместо множеств U_E^m и $U_E(\tau)$ используются $\underline{U}_E$ и $\underline{U}_E(\tau)$.

Множество $\overline{U}_P$ задается как

$$\sqrt{n_{Y_P}^2 + n_{Z_P}^2} \leq \overline{n}_P, \tag{6.174}$$

где

$$\overline{n}_P = n_P^m + 1. \tag{6.175}$$

Множество $\underline{U}_E$ задается как

$$\sqrt{n_{Y_E}^2 + n_{Z_E}^2} \le \underline{n}_E, \tag{6.176}$$

где

$$\underline{n}_E = n_E^m - 1. \tag{6.177}$$

С учетом указанных замен равенство (6.173) принимает вид

$$\min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^0\right) = \max_{\mathbf{u}_E \in \underline{U}_E(\tau)} \min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right). \tag{6.178}$$

Было показано, что в случае неполного поглощения на прогнозируемом участке τ

$$\underline{G}_E(\tau) \propto \overline{G}_{Pl}(\tau)$$

оптимальное управление $\mathbf{u}_E^0$ является граничным, т.е.

$$\mathbf{u}_E^0 \in \underline{U}_E^{\partial}, \text{ где } \underline{U}_E^{\partial} \subset U_E(\tau). \tag{6.179}$$

В случае полного поглощения на прогнозируемом участке

$$\underline{G}_E(\tau) \subset \overline{G}_{Pl}(\tau)$$

в соответствии со способом, предложенном В.М. Кейном [50], оптимальное управление $\mathbf{u}_E^0$ также является граничным. Поэтому, независимо от вида поглощения, равенство (6.178) приобретает вид

$$\min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^0\right) = \max_{\mathbf{u}_E \in \underline{U}_E^{\partial}(\tau)} \min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right). \tag{6.180}$$

Ранее было показано, что граница субдостижимости $\partial \underline{G}_E(T)$ состоит из двух частей: ближней границы $\partial^- \underline{G}_E(T)$, достигаемой с использованием управления $u_2 \in \underline{U}_E^-$, и дальней границы $\partial^+ \underline{G}_E(T)$, достигаемой с использованием управления $u_2 \in \underline{U}_E^+$. Поэтому

$$\underline{U}_E^{\partial} = \underline{U}_E^{+-} = \underline{U}_E^- \cup \underline{U}_E^+, \tag{6.181}$$

а равенство (6.180) приобретает вид

$$\min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^0\right) = \max_{\mathbf{u}_E \in \underline{U}_E^{+-}(\tau)} \min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right). \tag{6.182}$$

Как известно, чтобы найти максиминное значение промаха (6.182), необходимо сформировать последовательно два этапа оптимизации:

а) этап минимизации выражения

$$K_h\left(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^*\right) = \min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^*\right), \tag{6.183}$$

где $\mathbf{u}_E^*$ — любое управление из множества $\underline{U}_E^{+-}$;

б) этап максимизации показателя

$$K_h\left(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^0\right) = \max_{\mathbf{u}_E^* \in \underline{U}_E^{+-}(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^*\right) = \max_{\mathbf{u}_E^* \in \underline{U}_E^{+-}} \left\{ \min_{\mathbf{u}_P \in \overline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E^*\right) \right\}. \tag{6.184}$$

Этап минимизации [24]. Для граничной траектории E, определяемой граничным управлением $\mathbf{u}_E^* \in \underline{U}_E^{+-}$, необходимо подобрать такую траекторию P, определяемую управлением $\mathbf{u}_P^* \in \overline{U}_P$, которая будет минимизировать конечный промах в момент τ^h (минимизировать (6.152)), причем сам момент τ^h заранее неизвестен. Траектория движения E должна удовлетворять ограничению по высоте. Алгоритм решения такой задачи состоит из трех шагов.

Для всех граничных управлений E находится множество потребных управлений U_P^n. Для этого необходимо повторить все вычисления первого шага этапа минимизации при варьировании параметров управления $\mathbf{u}_E^* \in \underline{U}_E^{+-}$: γ_{c_E} варьируется в пределах $[0, 2\pi]$ (γ_{c_E} и γ_{c_P} — постоянные величины на такте ПКЗУ), τ_E^+ или τ_E^- варьируется в пределах $[0, \tau^h]$. Все исследуемые траектории E проверяются на предмет удовлетворения ограничению (6.147) и отбрасываются те, которые не обеспечивают (6.147) (второй шаг этапа минимизации). Затем формируется множество управлений U_P^*, минимизирующих прогнозируемый конечный промах в соответствии с третьим шагом этапа минимизации, и множество $K_h\left(\underline{U}_E^{+-}, \bar{U}_P\right)$ минимальных для каждого $\mathbf{u}_E \in \underline{U}_E^{+-}$ конечных промахов.

Этап максимизации. Если $U_P^n \neq U_P^*$ и, следовательно, $U_P^n \not\subset \bar{U}_P$, то из множества конечных промахов $K_h\left(\underline{U}_E^{+-}, \bar{U}_P\right)$ необходимо выбрать максимальный элемент, удовлетворяющий равенству (6.185) и являющийся точкой экстремального прицеливания (ТЭП)

$$K_h\left(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E^0\right) = \max_{\mathbf{u}_E \in \underline{U}_E^{+-}} K_h\left(\mathbf{u}_P^*, \mathbf{u}_E\right). \tag{6.185}$$

Соответствующее управление $\mathbf{u}_E^0$ является оптимальным.

Если $U_P^n = U_P^*$ и, следовательно, $U_P^n \subset \bar{U}_P$, то множество $K_h\left(\underline{U}_E^{+-}, \bar{U}_P\right)$ состоит из нулевых элементов. Это означает, что для любого управления существует управление, приводящее к встрече. В этом случае точка экстремального прицеливания ищется на множестве U_P^n как элемент этого множества, обладающий максимальным по модулю параметром управления n_P^n. Тогда соответствующее управление $\mathbf{u}_E^0$ является оптимальным, и задача решена.

Алгоритм оптимального нелинейного позиционного преследования [24]. Повторяя рассуждения, приведенные ранее, легко показать, что решение задачи K_h будет совпадать в каждый момент времени t' с решением вспомогательной задачи

$$\max_{\mathbf{u}_E \in U_E^\partial} K_h\left(\mathbf{u}_P^0, \mathbf{u}_E\right) = \min_{\mathbf{u}_P \in U_P(\tau)} \max_{\mathbf{u}_E \in U_E^\partial} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right), \tag{6.186}$$

где $U_E^\partial \subset U_E(\tau)$.

Программные траектории $\mathbf{У}_{g_P}(\tau)$ и $\mathbf{У}_{g_E}(\tau)$, определяемые управлениями $\mathbf{u}_P \in U_p(\tau)$ и $\mathbf{u}_E \in U_E(\tau)$, подвержены возмущениям, вносимым силой тяжести, причем эти возмущения могут как «помогать», так и «мешать» P в решении задачи сближения. По «принципу наибольшей неприятности» предполагается, что возмущения всегда «мешают». Это приводит к необходимости расширения множества допустимых управлений E U_E^m на максимальную величину возможного возмущения и необходимости сужения множества допустимых управлений P U_P^m на эту величину. Возмущение, вносимое силой тяжести, не превышает единицы перегрузки, поэтому вместо множеств U_P^m и $U_P(\tau)$ используются $\underline{U}_P$ и $\underline{U}_P(\tau)$, а вместо множеств U_E^m и $U_E(\tau)$ используются $\bar{U}_E$ и $\bar{U}_E(\tau)$.

Поэтому равенство (6.186) приобретает вид

$$\max_{\mathbf{u}_E \in \overline{U}_E^{\partial}} K_h\left(\mathbf{u}_P^0, \mathbf{u}_E\right) = \min_{\mathbf{u}_P \in \underline{U}_P(\tau)} \max_{\mathbf{u}_E \in \overline{U}_E^{\partial}} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right). \tag{6.187}$$

Поскольку

$$\overline{U}_E^{\partial} = \overline{U}_E^{+-}, \tag{6.188}$$

то равенство (6.187) приобретает вид

$$\max_{\mathbf{u}_E \in \overline{U}_E^{+-}} K_h\left(\mathbf{u}_P^0, \mathbf{u}_E\right) = \min_{\mathbf{u}_P \in \underline{U}_P(\tau)} \max_{\mathbf{u}_E \in \overline{U}_E^{+-}} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right). \tag{6.189}$$

В данной игре имеет место седловая точка, поэтому справедливо и следующее равенство

$$\max_{\mathbf{u}_E \in \overline{U}_E^{+-}} \min_{\mathbf{u}_P \in \underline{U}_P(\tau)} K_h\left(\mathbf{u}_P^0, \mathbf{u}_E\right) = \min_{\mathbf{u}_P \in \underline{U}_P(\tau)} \max_{\mathbf{u}_E \in \overline{U}_E^{+-}} K_h\left(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E\right). \tag{6.190}$$

Алгоритм решения максиминной задачи уже известен. Особенность его применения для решения минимаксной задачи (6.187) состоит в использовании множеств управлений $\underline{U}_P(\tau)$ и $\overline{U}_E(\tau)$ вместо $\overline{U}_P(\tau)$ и $\underline{U}_E(\tau)$ соответственно.

Выбор точки экстремального прицеливания — элемента множества $K_h\left(\underline{U}_P, \overline{U}_E\right)$ в случае неполного поглощения $U_P^n \not\subset \underline{U}_P$ или элемента множества U_P^n в случае полного поглощения $U_P^n \subset \underline{U}_P$ — определяет не только оптимальное управление $\mathbf{u}_E^0$, но и оптимальное управление $\mathbf{u}_P^0$.

Формирование программно-корректируемого закона управления [24, с.309]. ПКЗУ реализуется в виде многотактового алгоритма. Длительность такта определяется необходимой точностью наведения с учетом полосы пропускания системы стабилизации ЛА. На каждом такте осуществляется коррекция программного закона управления преследователя, полученного на предыдущем такте, причем вычисленный в данный конкретный момент закон управления является программой движения на всем временном интервале вплоть до прогнозируемого момента встречи. Алгоритм синтеза ПКЗУ на отдельно взятом такте состоит из пяти этапов [24].

На последнем этапе в соответствии с полученным программным законом управления вычисляются для текущего момента времени t оптимальные значения вектора управления $P\left[n_P^o, \gamma_{c_P}^o\right]$. Далее для учета силы тяжести ЛА они корректируются

$$\begin{aligned} n_P^k &= \operatorname{sign}\left(n_P^o\right)\left\{\left(n_P^o \sin\gamma_{c_P}^o\right)^2 + \left(n_P^o \cos\gamma_{c_P}^o + \cos\theta_P\right)^2\right\}^{1/2}, \\ \gamma_{c_P}^k &= \operatorname{arctg}\left(n_P^o \sin\gamma_{c_P}^o \Big/ \left(n_P^o \cos\gamma_{c_P}^o + \cos\theta_P\right)\right), \end{aligned} \tag{6.191}$$

формируются, и выдаются команды для системы стабилизации.

Необходимо отметить, что для реализации данного алгоритма в реальных условиях необходима мощная вычислительная база борта. Для обеспечения требуемой точности наведения для высокоскоростных ЛА каждая граница области достижимости должна аппроксимироваться массивом из 200 точек. Внутри цикла по их расчету выполняется сложная итерационная процедура оптимизации нелинейного функционала. Благодаря хорошей геометрической интерпретации алгоритм может быть распараллелен на большое количество параллельных процессов и реализован в многопроцессорной вычислительной системе, например, на транспьютерах. Однако, учитывая, что в настоящее время параллельные системы еще не нашли широкое применение в системах управления ЛА, ниже будет рассмотрен упрощенный (субоптимальный)

алгоритм преследования-уклонения, предъявляющий значительно меньшие требования по быстродействию и поэтому легко реализуемый в реальном времени.

ПКЗУ может быть адаптирован к реальным условиям воздушного боя, когда в конфликте находятся не один, а несколько ЛА. В [24] приведены результаты моделирования противодействия высокоскоростных ЛА. Сопоставление результатов применения различных штатных методов наведения и ПКЗУ дают основание утверждать, что на основе ПКЗУ формируется высокоэффективный алгоритм конфликтно-оптимального наведения с прогнозом. При неоптимальном поведении цели и небольших временах взаимодействия ЛА ПКЗУ близок по своим свойствам к методу наведения в мгновенную точку встречи.

Формирование программно-корректируемого закона управления в задаче уклонения осуществляется таким же образом, как и в задаче преследования. Разница состоит лишь в отличии входных и выходных данных. Данные для P заменяются на данные для E и наоборот. Кроме этого, вместо закона управления преследователем формируется закон управления целью.

6.7.4. Алгоритм субоптимального позиционного преследования-уклонения

Алгоритмы преследования и уклонения остаются труднореализуемыми в реальном масштабе времени из-за высоких требований к быстродействию вычислительной системы, поскольку необходимо формировать поточечно области достижимости ЛА, проводить расчет с помощью численных методов управлений, обеспечивающих минимальный промах, и выполнять оптимизацию на множествах значений критериев управления (на каждом программном такте). В связи с этим рассмотрим алгоритм субоптимального преследования-уклонения.

При формировании субоптимального алгоритма применяется аппроксимизация областей достижимости изохронами (поверхностями, состоящими из конечных точек траекторий постоянной кривизны). При этом было установлено, что при средних и малых интервалах времени противодействия аппроксимация близка к точному описанию, а применяемая оценка близка к точному времени противодействия.

Для взаимного положения P и E в момент t' (рис. 6.33) точка 2 является точкой экстремального прицеливания для уклоняющегося ЛА, так как она наиболее удалена от всех точек ОД преследователя, а точка 1 — наилучшая точка для P.

При формировании субоптимального алгоритма сделаем два обоснованных предположения. Области $G_i(T)$ заменяются на изохроны $C_i(T)$, а оптимальные управления на такте заменяются на постоянные управления. Кроме строгой проверки работоспособности полученного алгоритма и близости к оптимальному, выполненной в [24], можно привести и простое физическое обоснование. При уменьшении времени противодействия внешние и внутренние границы приближаются друг к другу (алгоритм самоуточняется), а построенное потребное управление P, равное по площади под кривой оптимальному, приводит примерно в ту же точку 1 (рис. 6.34) при том же значении γ_{c_p}. Если за основу принять максиминный подход и, следовательно, задачу уклонения, то подобная аппроксимация выполняется за игрока-противника P. Таким образом, вместо всей $G_P(T)$ необходимо ограничиться построением в момент T изохроны $C_P(T)$ траекторий постоянной кривизны.

Для каждой точки области $G_E(T)$ необходимо найти ближайшую к ней точку изохроны, всегда принадлежащей нормали, проведенной из точки области $G_E(T)$ к изохроне $C_P(T)$.

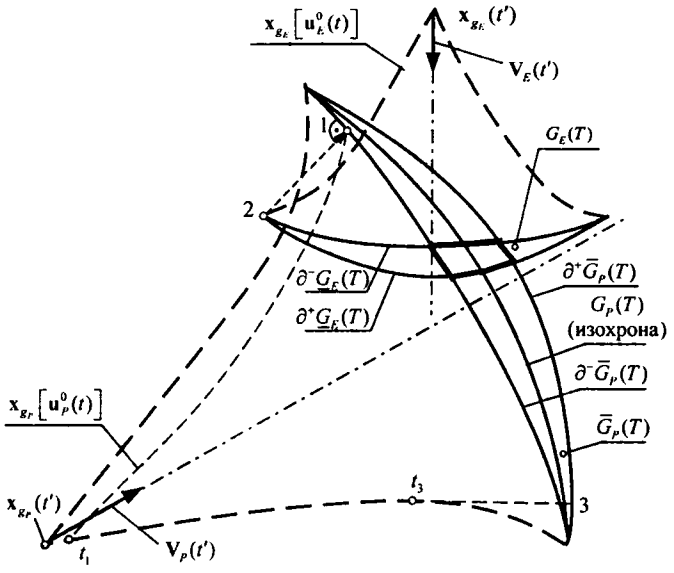


Рис. 6.33. Формирование точки прицеливания

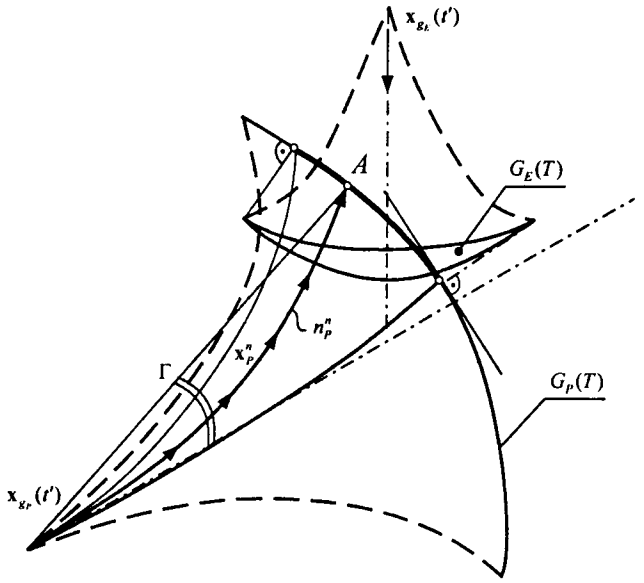


Рис. 6.34. Формирование множества потребных траекторий

Найденное множество точек изохроны $C_P(T)$ приближенно оценивает множество потребных траекторий P (рис. 6.34) и, следовательно, множество потребных ускорений перехватчика, поскольку в работе показано, что для траекторий постоянной кривизны справедливо соотношение

$$\frac{\Gamma}{n_P^n} = \frac{gT}{2V_P}, \tag{6.192}$$

где Г — угол между вектором скорости $\mathbf{V}_P(t)$ и направлением на некоторую точку А изохроны $C_P(T)$, n_P^n — потребная перегрузка для точки A.

Следует отметить, что отрезок изохроны $C_P(T)$, ярко выделенный на рис. 6.34, является аппроксимацией множества, которое минимизирует промах при всех фиксированных управлениях E (для всех точек области $G_E(T)$). Изохрона $C_P(T)$ близка к окружности некоторого радиуса, поэтому нормаль из точки области $G_E(T)$ к изохроне совпадает с направлением на точку центра окружности, что позволяет заменить фактическое построение изохроны $C_P(T)$ и нормали к ней из каждой точки области $G_E(T)$ определением угла Г (а следовательно, потребной перегрузки n_P^n) между $\mathbf{V}_P(t)$ и направлением на каждую точку $G_E(T)$. Максимальное значение угла Г, т.е. потребной перегрузки P, определяет точку экстремального прицеливания для P.

По свойству оптимальных управлений ТЭП определяется траекторией E максимальной кривизны, поэтому значение перегрузки преследуемого ЛА

$$n_E^s = n_E^m.$$

Остается определить субоптимальное значение параметра $\gamma_{c_E}^s$. Множество концов траекторий предельной кривизны E является окружностью определенного радиуса R (рис. 6.35) с центром в точке F. Окружность лежит в некоторой плоскости Λ, направленной к плоскости XOY. Необходимо решить геометрическую задачу: найти на окружности (F,R) точку, направление на которую из точки O_1 составляет максимальный угол Г с вектором скорости $\mathbf{V}_P(t)$. Решение данной задачи иллюстрируется на рис. 6.35. В результате получаем

$$\mathbf{u}_E^s = \begin{bmatrix} n_E^s \\ \gamma_{2c_E}^s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\operatorname{sign}\left(\tilde{Y}_B\right)\cdot n_E^m \\ \operatorname{arctg}\left(\tilde{Z}_B/\tilde{Y}_B\right) \end{bmatrix}, \tag{6.193}$$

где

$$\tilde{Y}_B = \frac{\tilde{V}_{Y_P}\cdot\left(\tilde{X}_F - \tilde{X}_P\right)}{\tilde{V}_{X_P}} + \tilde{Y}_P;$$

$$\tilde{X}_B = \frac{\tilde{V}_E^2}{n_E^m g}\cdot\sin\left(\frac{n_E^m g\nu}{V_E}\right);$$

$$\tilde{Z}_B = \frac{\tilde{V}_{Z_P}\cdot\left(\tilde{X}_F - \tilde{X}_P\right)}{\tilde{V}_{X_P}} + \tilde{Z}_P;$$

$\tilde{V}_{X_P}$, $\tilde{V}_{Y_P}$, $\tilde{V}_{Z_P}$ — проекции вектора скорости $\mathbf{V}_P(t)$ на оси системы координат O_2XYZ; $\tilde{X}_P$, $\tilde{Y}_P$, $\tilde{Z}_P$ — проекции точки O_1 на оси системы координат O_2XYZ.

Управляющие воздействия E определяются из соотношений

$$n_{Y_E}^s = \frac{-n_E^m\cdot\tilde{Y}_B}{\sqrt{\tilde{Y}_B^2+\tilde{Z}_B^2}};$$

$$n_{Z_E}^s = \frac{-n_E^m\cdot\tilde{Z}_B}{\sqrt{\tilde{Y}_B^2+\tilde{Z}_B^2}}. \tag{6.194}$$

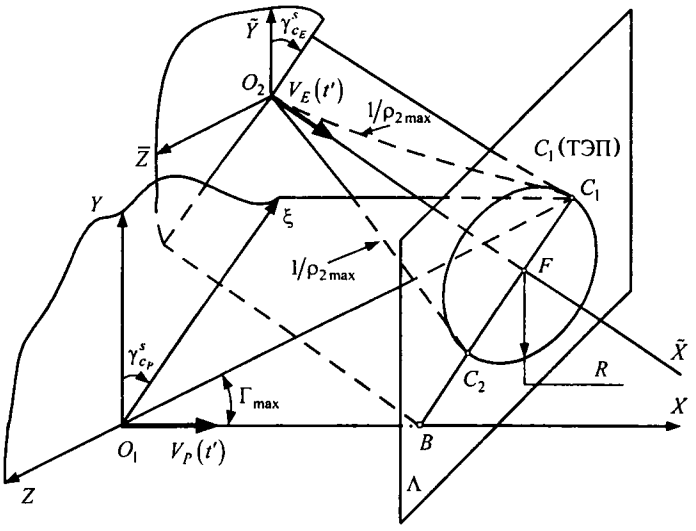


Рис. 6.35. Определение $\gamma^s_{c_E}$

Так как задача противодействия имеет седловую точку, то точка C_1 (рис. 6.33) определяет субоптимальный вектор управления P и E. Для P получаем

$$\mathbf{u}^s_P = \begin{bmatrix} n^s_P \\ \gamma^s_{c_P} \end{bmatrix}, \tag{6.195}$$

где

$$n^s_P = \begin{cases} (\operatorname{sign} Y_B)\cdot\dfrac{2\Gamma V_P}{gT}, \text{ если } \left|\dfrac{2\Gamma V_P}{gT}\right| \le n^m_P, \\ (\operatorname{sign} Y_F)\cdot n^m_P, \text{ если } \left|\dfrac{2\Gamma V_P}{gT}\right| > n^m_1; \end{cases}$$

$$\gamma^s_{c_P} = \operatorname{arctg}\frac{Z_F}{Y_F};\ \Gamma = \operatorname{arctg}\frac{\xi_{1c_P}}{X_{c_P}};$$

$$\xi_{1c} = \left(Z_F^2 + Y_F^2\right)^{1/2}\cdot\left(1 + R\cdot\left(\left(X_B - X_F\right)^2 + Y_F^2 + Z_F^2\right)^{1/2}\right);$$

$$X_{c_P} = X_F - R\cdot\left(X_B - X_F\right)\cdot\left(\left(X_B - X_F\right)^2 + Y_F^2 + Z_F^2\right)^{1/2};$$

$$R = \left(\frac{V_2^2}{n^m_E g}\right)\cdot\left(1 - \cos\left(\frac{n^m_E gT}{V_E}\right)\right);$$

$$\begin{cases} X_F = \dfrac{V_{X_E}}{V_E}\cdot\tilde{X}_F + X_E; \\ Y_F = \dfrac{V_{Y_E}}{V_E}\cdot\tilde{X}_F + Y_E; \\ Z_F = \dfrac{V_{Z_E}}{V_E}\cdot\tilde{X}_F + Z_E, \end{cases}$$

где $V_{X_E}, V_{Y_E}, V_{Z_E}$ — проекции V_E на оси системы координат O_1XYZ, X_E, Y_E, Z_E — проекции точки O_2 на оси системы координат O_1XYZ.

В работе [35] для оценки времени встречи T получено выражение

$$T = \frac{r}{\sqrt{V_P^2 - V_E^2 + V_{Er}^2} \pm V_{Er}}, \tag{6.196}$$

где «±» используется, если E приближается и удаляется по отношению к P соответственно, V_{Er} — проекция вектора скорости E на линию визирования. Относительная погрешность формулы составляет 5–10% от точного значения T.

6.7.5. Исследование противодействия ЗУР и ЛА-цель

Моделирование противодействия зенитной управляемой ракеты (ЗУР) и высокоскоростного самолета (ЛА-цели) проведено с помощью программной системы «Гарантия-М» по следующему сценарию. ЗУР стартует с земной поверхности и разгоняется до максимальной скорости. Время разгона (время работы двигателя ЗУР) составляет 5 секунд. Задержка начала наведения (время неуправляемого полета) при старте с пусковой установки составляет 2 секунды. Моделирование проведено для встречных, поперечных и догонных курсов ЛА-цели относительно начальной позиции ЗУР. Параметры математических моделей ЛА приведены в табл. 6.3. Начальные позиции ЛА даны в табл. 6.4. В качестве методов наведения ЗУР рассматривались: штатный метод наведения с упреждением, субоптимальный ПКЗУ, оптимальный ПКЗУ. Движение ЛА-цели моделировалось в двух вариантах: прямолинейное движение и оптимальный ПКЗУ при уклонении. Результаты моделирования сведены в табл. 6.5. Траектории ЛА изображены на рис. 6.36–6.38.

Таблица 6.3

Параметры моделей ЛА

Объект	n_{max}	V, м/с	Такт выработки управления, с
P (ЗУР)	20	0–700	0,01
E (ЛА-цель)	8	400	0,1

Таблица 6.4

Начальные позиции ЛА

ЛА	Курс	X_g, м	Y_g, м	Z_g, м	Θ, град	Ψ, град
P	Встречный	0	0	0	85	0
E		25000	10000	1000	0	–175
P	Догонный	0	0	0	75	0
E		3000	10000	–1000	0	10
P	Поперечный	0	0	0	75	0
E		4000	10000	8000	0	85

Анализ некоторых результатов моделирования с иллюстрацией субоптимального (P) и оптимального (E) противодействия на рис. 6.36–6.38 позволяет сделать следующие выводы.

Наибольшей эффективностью при оптимальном уклонении ЛА-цели обладает оптимальный ПКЗУ. Достаточно близок к нему по конечному результату субоптимальный ПКЗУ. В обоих случаях удается «удержать» конечный промах в пределах 5 метров. При использовании ЗУР штатного метода наведения конечный промах возрастает. Применение оптимального ПКЗУ при уклонении позволяет избежать перехвата при штатном наведении ЗУР на встречном и поперечном курсе.

Таблица 6.5

Результаты моделирования

Курс	K_h, м	T, с	n_{max}	Закон управления (вид движения)	
				P	E
Встречный	7,8	15,3	2,7	Штатный	Прямолинейный
	4,6	15,2	10	Субоптимальный	Прямолинейный
	4,1	15,0	20	Оптимальный	Прямолинейный
	16,4	14,8	20	Штатный	Оптимальный
	8,1	15,2	20	Субоптимальный	Оптимальный
	6,0	15,0	20	Оптимальный	Оптимальный
Догонный	0,1	10,5	17	Штатный	Прямолинейный
	0,8	10,4	20	Субоптимальный	Прямолинейный
	0,4	10,3	20	Оптимальный	Прямолинейный
	8,6	11,2	20	Штатный	Оптимальный
	1,2	11,1	20	Субоптимальный	Оптимальный
	0,6	11,0	20	Оптимальный	Оптимальный
Поперечный	1,9	10,0	18	Штатный	Прямолинейный
	2,5	10,1	20	Субоптимальный	Прямолинейный
	1,7	9,9	20	Оптимальный	Прямолинейный
	19,8	8,7	20	Штатный	Оптимальный
	4,7	8,9	20	Субоптимальный	Оптимальный
	3,5	9,1	20	Оптимальный	Оптимальный

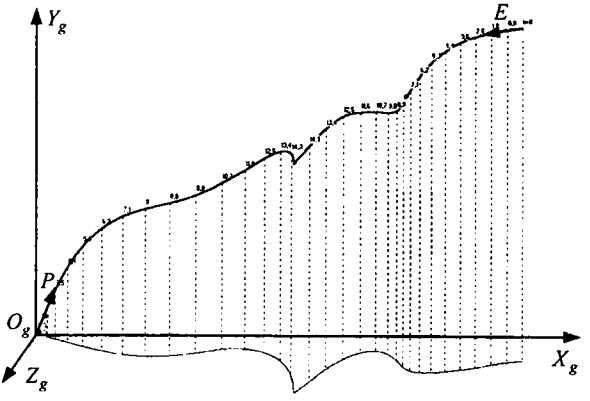


Рис. 6.36. Встречный курс

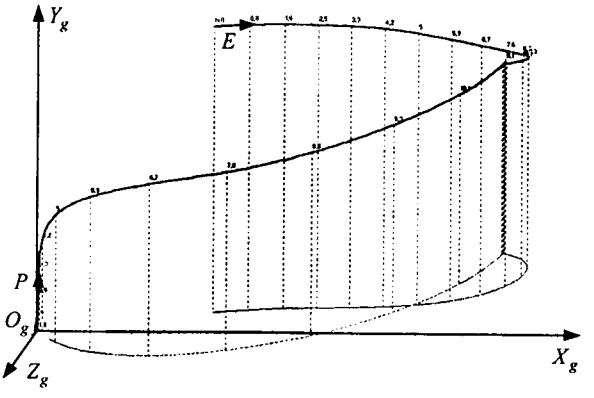


Рис. 6.37. Догонный курс

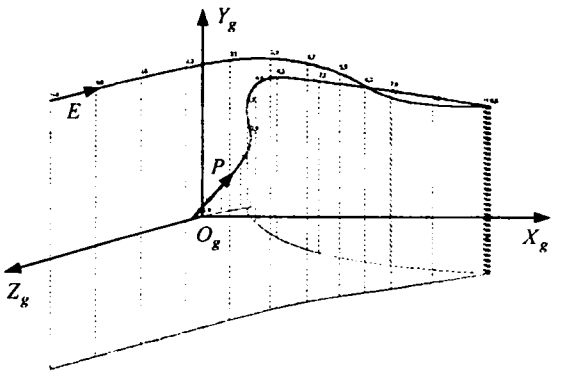


Рис. 6.38. Поперечный курс

Если ЛА-цель движется прямолинейно, то достигаемые конечные промахи приблизительно одинаковы для сравниваемых методов наведения. Максимальные перегрузки при оптимальном и субоптимальном ПКЗУ ЗУР выше, чем при штатном наведении, так как преследователь в каждый момент времени «ожидает», что ЛА-цель применит маневр по уклонению от перехвата, и стремится перекрыть область достижимости цели своей ОД.

Время перехвата незначительно отличается при различных методах наведения. В основном оно зависит от маневрирования ЛА-цели.

По характеру траекторий видно, что при использовании обоими ЛА оптимальных ПКЗУ сохраняется относительное постоянство движения. Каждый ЛА направляет свое движение в точку экстремального прицеливания, которая сохраняет свое положение в пространстве на всем временном интервале противодействия. При этом для встречных и догонных курсов ЗУР в начале перехвата осуществляет разворот по траектории максимальной кривизны. Затем траектория ЗУР спрямляется, что соответствует управлению с особым участком (рис. 6.36, 6.37). ЛА-цель на такте ПКЗУ движется с постоянным углом крена и максимальной перегрузкой. На поперечном курсе ЗУР и ЛА-цель применяют закон управления с точкой переключения, и траектории обоих ЛА имеют «*S*»-образный вид (рис. 6.38). Отклонение ЗУР от оптимального наведения дает возможность ЛА-цели осуществлять дополнительное маневрирование (рис. 6.36–6.38), тем самым увеличивая конечный промах.

Таким образом, результаты моделирования противодействия зенитной управляемой ракеты и высокоскоростного самолета подтверждают высокую эффективность и практическую значимость ПКЗУ для проектирования и исследования систем управления ЛА.

6.7.6. Формирование ПКЗУ в бескоалиционной конфликтной ситуации с антагонистическим ядром на основе принципа экстремального направления Н.Н. Красовского

Сведение задачи преследования-уклонения с векторными показателями к бескоалиционному конфликту с антагонистическим ядром. Рассмотренный алгоритм формирования ПКЗУ позволяет решать исходную задачу конфликтного взаимодействия двух ЛА при строгом антагонизме критериев управления

$$\begin{aligned} J_P &= K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E) \to \min_{\mathbf{u}_P \in U_P} \max_{\mathbf{u}_E \in U_E} K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E); \\ J_E &= -K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E) \to \max_{\mathbf{u}_E \in U_E} \min_{\mathbf{u}_P \in U_P} K_h(\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E); \\ J_P &+ J_E = 0. \end{aligned} \tag{6.197}$$

При этом искомые решения определяются путем построения областей достижимости объектов и формирования ансамблей траекторий движения, что требует значительных вычислительных мощностей для практической реализации ПКЗУ.

В реальных системах помимо основных показателей управления часто требуется учитывать дополнительные критерии управления, например время до встречи, энергетические затраты и т.д. В общем виде критерий управления двухобъектной системой с антагонистическим ядром имеет вид

$$\begin{aligned}&\tilde{\mathbf{J}}_P = \mathbf{J}_1 = \left[J_{11}, J_{12}, \ldots, J_{1n_P}\right]^{\mathrm{T}};\\ &\tilde{\mathbf{J}}_E = \mathbf{J}_2 = \left[J_{21}, J_{22}, \ldots, J_{2n_E}\right]^{\mathrm{T}};\\ &J_{11} + J_{21} = 0.\end{aligned} \tag{6.198}$$

Для использования результатов преобразуем (6.198) к скалярному виду путем введения весовых коэффициентов, учитывающих приоритетность того или иного показателя

$$\begin{cases}\tilde{J}_P = J_1 = \sum\limits_{i=1}^{n_P} \alpha_i J_{1i};\\ \tilde{J}_E = J_2 = \sum\limits_{j=1}^{n_E} \beta_j J_{2j};\end{cases} \tag{6.199}$$

$J_{11} + J_{21} = 0;\ \forall \alpha_i, \beta_j \geq 0,\ \sum \alpha_i = \sum \beta_j = 1$ при $i = \overline{1, n_P};\ j = \overline{1, n_E}$.

В [24] сформировано следующее утверждение: при небольшом уходе от антагонизма в пределах 10–30% $\left(D_c \geq 0{,}7,\ \text{см. (6.201)}\right)$

$$\alpha_1 \geq 0{,}7,\ \alpha_2 + \ldots + \alpha_{n_P} \leq 0{,}3;$$

$$\beta_1 \geq 0{,}7,\ \beta_2 + \ldots + \beta_{n_P} \leq 0{,}3$$

структура оптимальных ПКЗУ P и E, сформированных в соответствии с принципом экстремального направления Н.Н. Красовского, эффективна с параметрической перенастройкой, где

$$\begin{aligned}&\mathbf{u}^{+}\left(\tau^{+}, \gamma_c^{+}\right) = \left[\begin{array}{l} n = \begin{cases} n^m, t_{j-1} \leq t \leq \tau^{+} \\ 0, \tau^{+} \leq t \leq T \end{cases} \\ \gamma_c = \gamma_c^{+} = \text{const},\ \gamma_c \in [-\pi, \pi] \end{array}\right],\ j = 1, 2, 3, \ldots;\\ &\mathbf{u}^{-}\left(\tau^{-}, \gamma_c^{-}\right) = \left[\begin{array}{l} n = \begin{cases} n^m, t_{j-1} \leq t \leq \tau^{-} \\ -n^m, \tau^{-} \leq t \leq T \end{cases} \\ \gamma_c = \gamma_c^{-} = \text{const},\ \gamma_c \in [-\pi, \pi] \end{array}\right],\ j = 1, 2, 3, \ldots.\end{aligned} \tag{6.200}$$

Выражение (6.200) есть не что иное, как параметрическая запись закона управления ЛА на такте $\left[t_{j-1}, T\right]$. Здесь $\tau^{+}\ (\tau^{-})$ — определяют соответственно момент времени «выключения» («переключения») при движении по экстремальной траекторий на дальнюю (ближнюю) границу области достижимости, а $\gamma_c^{+}\ (\gamma_c^{-})$ — скоростной угол крена.

Таким образом, исходная задача преследования-уклонения сформулирована в новой постановке с векторными показателями и сведена к бескоалиционному конфликту с антагонистическим ядром $J_{11} = -J_{21}$. Степень конфликтности определяется так:

$$D_c = \min\left\{\alpha_1, \beta_1\right\}. \tag{6.201}$$

Обобщенная степень конфликтности при свертке показателей (6.199)

$$\tilde{J} = \gamma J_1 + (1-\gamma) J_2 = \gamma \sum_{i=1}^{n_P} \alpha_i J_{1i} + (1-\gamma) \sum_{j=1}^{n_E} \beta_j J_{2j},\ 0 \le \gamma \le 1$$

имеет вид

$$D_c^0 = \min\{\gamma\alpha_1, (1-\gamma)\beta_1\}. \qquad (6.202)$$

Алгоритмическое обеспечение настройки ПКЗУ формируется на основе Парето–Нэш-оптимизации и реализовано в программной системе «МОМДИС» (см. пример [24, гл. 7]).

6.7.7. Пример противодействия ЛА с вектором показателей (промах, время и энергетические затраты)

Рассмотрим следующую практически полезную задачу конфликтного взаимодействия двух ЛА. Преследующий P и преследуемый E объекты описываются системой уравнений

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{g}{V} n \cdot \cos\gamma_c;$$
$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{g}{V} \frac{n \cdot \sin\gamma_c}{\cos\Theta};$$
$$\frac{dX}{dt} = V \cos\Theta \cos\Psi;$$
$$\frac{dY}{dt} = V \sin\Theta;$$
$$\frac{dZ}{dt} = -V \cos\Theta \sin\Psi.$$

Вектор управления задан в параметрическом виде (6.14), (6.15). При малом времени T оптимальная структура принимает форму особого управления $\mathbf{u}^+\left(\tau^+, \gamma_c^+\right)$ [24].

Критерии управления:

$$J_1 = \alpha K_h + (1-\alpha) \int_{t_0}^{T} n_P^2 dt = \alpha J_{11} + (1-\alpha) J_{12} \to \min_{\mathbf{u}_P};$$
$$J_2 = \beta(-K_h) + (1-\beta)(-T) = \beta J_{21} + (1-\beta) J_{22} \to \min_{\mathbf{u}_E};$$
$$J = \gamma J_1 + (1-\gamma) J_2 \to \min_{\mathbf{u}_P, \mathbf{u}_E};$$
$$0 \le \alpha \le 1,\ 0 \le \beta \le 1,\ 0 \le \gamma \le 1.$$

Здесь показатель J_{12} характеризует энергетические затраты преследователя при перехвате, а J_{22} выражает «стремление» цели затянуть момент времени встречи T с объектом P. Антагонистическое ядро образуют показатели J_{11} и J_{21}, где K_h — конечный промах.

Данная постановка увеличивает практическую значимость оптимизации конфликта с приоритетом конечного промаха, так как позволяет перехватчику с допустимыми потерями по промаху контролировать перегрузку, а цели — «затянуть» время перехвата.

На основе программного модуля ПС «МОМДИС» произведена оптимизация конфликтной ситуации в виде стабильно-эффективной настройки ПКЗУ на бескоалиционный конфликт.

Моделирование проводилось на поперечных, догонных и встречных курсах. Соответствующие начальные условия (1, 2, 3) даны в табл. 6.6.

Параметры моделирования: $T_{mod} = 7{,}5$ с — время моделирования, шаг — 0,01 с, точность — 0,01, $n_1 = [0;15]$, $n_2 = [0;8]$, γ_{c1} и $\gamma_{c2} \in [-\pi;\pi]$, $V_1 = 700$, $V_2 = 500$.

Результаты оптимизации антагонистического варианта $(\alpha = \beta = 1)$ даны в табл. 6.7.

Таблица 6.6

Начальные условия

	X_1	Y_1	Z_1	Θ_1	Ψ_1	X_2	Y_2	Z_2	Θ_2	Ψ_2
1	0	2000	1000	10	10	1000	2000	1500	45	10
2	1000	2000	50	10	10	2200	2000	50	10	10
3	1000	2000	50	10	10	6000	500	50	10	170

Таблица 6.7

Результаты оптимизации $(\alpha = \beta = 1)$

№	α	β	J	τ_1^+	γ_{c1}	τ_2^+	γ_{c2}
1	1	1	10	3,1	120	3,3	110
2	1	1	3	3,8	87	4,2	83
3	1	1	14,5	6,2	154	6,3	81

На рис. 6.39 дана динамика оптимальных по Нэшу значений показателей в зависимости от степени одновременного ухода от антагонизма.

Как следует из рис. 6.39, при степени конфликтности в пределах от 1 до 0,7 антагонистическое ядро сохраняет свою значимость, так как промах при исходных малых значениях изменяется в 1,5–2 раза. Поэтому применение антагонистических оптимальных структур управления в бескоалиционном конфликте правомерно. Кроме того, уход от оптимального значения ядра промаха в допустимых пределах позволяет больше чем в два раза увеличить оптимальное время перехвата цели, что очень важно при быстроменяющейся ситуации с парной поддержкой в звене ЛА.

В режиме одновременного ухода соответственно на рис. 6.40 даны результаты по СТЭК на основе Парето–Нэш-подхода для поперечных, догонных, встречных начальных положений с одновременным и поочередным уходом соответственно. При этом результаты имеют аббревиатуру «*mnk*», что означает: m — номер исходных данных в табл. 6.6; n — «уход» P от антагонизма с вариантами $\alpha = 1$; 0,9; 0,7; 0,3, которые обозначены 0, 1, 2, 3 соответственно; k — соответствует аналогичному «уходу» цели.

Так, рис. 6.40 показывает, что при одновременном «уходе» от антагонизма на догонном курсе значительный одинаковый уход обоих ЛА $\alpha = \beta = 0{,}3$ $(mnk = 233)$ делает Нэш-решение наименее эффективным и приводит к большим потерям обоих ЛА. При уходе $\alpha = \beta = 0{,}9$; 0,7 точка равновесия в 2–3 раза ближе к эффективному пределу, хотя по энергетическим и временным показателям получено улучшение по сравнению с антагонизмом.

Таким образом, данные материалы позволяют проанализировать три группы факторов: настройку управления, точностную оптимальность Нэш-равновесия в зависимости от временных, энергетических затрат и степени конфликтности и, наконец, относительную эффективность Нэш-решений (относительно Парето-границы) в зависимости от начальных взаимоположений, степени конфликтности и уходов от антагонизма.

В заключение можно утверждать, что при сохранении значимости антагонистического ядра могут быть получены практически полезные решения дифференциальной игры двух объектов с векторными показателями на основе принципа экстремального направления Н.Н. Красовского.

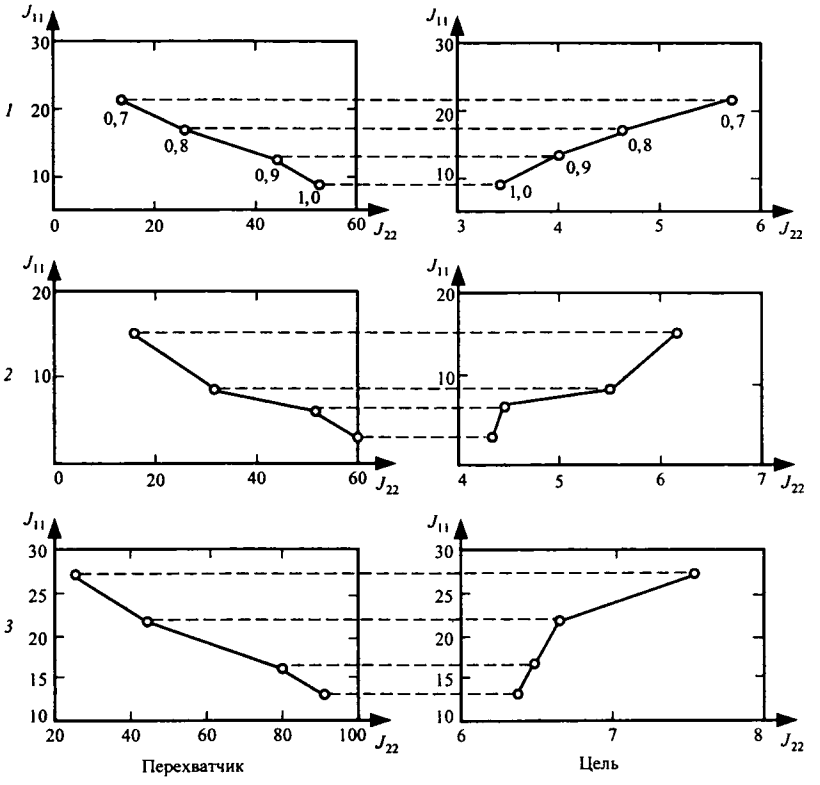


Рис. 6.39. Результаты оптимизации при одновременном уходе P и E от антагонизма ($D_c = \alpha = \beta$)

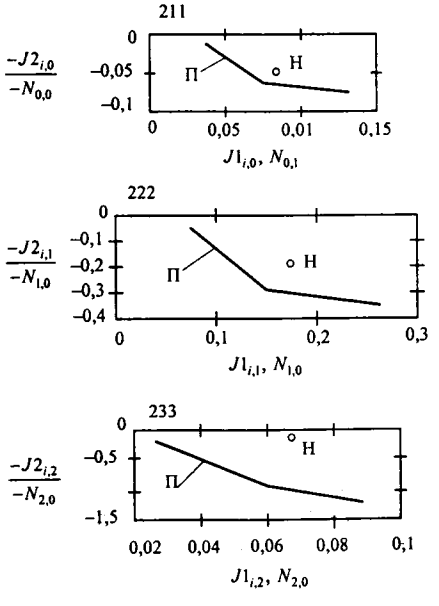


Рис. 6.40. Анализ эффективности стабильных решений

6.8. РАЗРАБОТКА СТОХАСТИЧЕСКОЙ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ СТАБИЛЬНОГО АНТАГОНИСТИЧЕСКОГО КОНФЛИКТА В ДВУХКОАЛИЦИОННЫХ ММС В УСЛОВИЯХ ε-РАВНОВЕСИЯ НА ОСНОВЕ КОМБИНАЦИИ ФИЛЬТРАЦИИ И УПРАВЛЕНИЯ С УЧЕТОМ ПРОМЕЖУТОЧНЫХ КООРДИНАТ, ПРОТОТИПА, ЗАДАННОЙ ЧАСТИ МОДЕЛИ, АДДИТИВНЫХ И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ ПОМЕХ

6.8.1. МАКСИМИННАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СБЛИЖЕНИЯ-УКЛОНЕНИЯ ПОЗИЦИОННО (P)- И ПРОГРАММНО-УПРАВЛЯЕМОГО (Q) ОБЪЕКТОВ С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛЬЮ, АДЕКВАТНОЙ РЕАЛЬНЫМ СИСТЕМАМ

Общая характеристика подходов, формализация и сравнительный анализ работ по исследованию позиционно-программных задач сближения-уклонения даны в [24].

В данной главе в качестве основного рассматривается максиминный вариант задачи сближения-уклонения программно-управляемого уклоняющегося объекта Q и позиционно-управляемого объекта P, который при наличии ε-равновесия, кроме гарантированного решения для Q, позволяет оценивать оптимальное решение для P более простым способом, чем минимаксный. Излагается метод оценки эффективности и поиска оптимального (гарантирующего) управления (стратегии) объекта Q в условиях антагонизма и частичной неопределенности описания СУ объекта P при аддитивных и «мультипликативных» помехах в его каналах измерения [24].

Постановка задачи. Расчетная схема задачи, справедливая для телеуправляемого и самонаводящегося обьектов P, приведена на рис. 6.41.

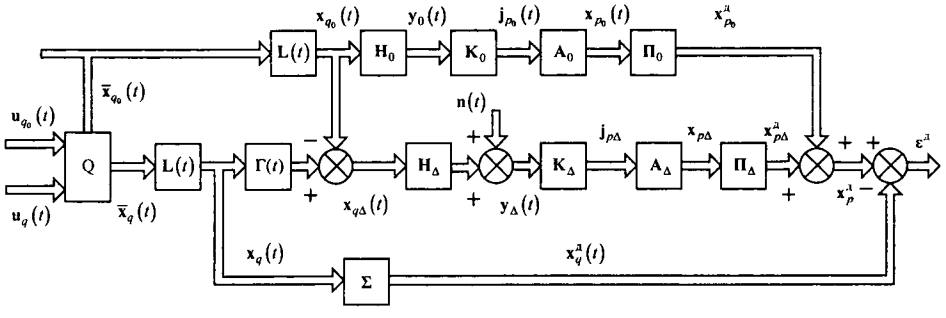


Рис. 6.41. Расчетная схема задачи

Активным средством лица, принимающего решение (ЛПР), является уклоняющийся от встречи с объектом P объект Q, описываемый векторным дифференциальным уравнением

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_q(t) = \mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}_q, \mathbf{u}_q, t\right),\ \tilde{\mathbf{x}}_q(t_0) = \tilde{\mathbf{x}}_q^0, \tag{6.203}$$

где $t_0 = 0$ — момент начала операции; $t_k > t_0$ — момент окончания операции; $\tilde{\mathbf{x}}_q(t) \in \tilde{X}_q(t)$ — $(m \times 1)$-вектор фазовых координат, где $\tilde{X}_q(t)$ — непустое компактное и непрерывное в R^m множество допустимых значений фазовых координат, задаваемое с помощью конечного или бесконечного семейства действительных непрерывных функций $h^i : \tilde{X}_q(t) = \left\{\tilde{\mathbf{x}}_q(t) :\ h^i\left(\tilde{\mathbf{x}}_q(t)\right) \geq 0,\ i = 1,2,3,\ldots\right\}$; $\mathbf{u}_q(t) \in U_q(t)$ — $(r \times 1)$-вектор управления — стратегии ЛПР (Q), где $U_q(t) = \left\{\mathbf{u}_q(t) : \left|u_{q_i}(t)\right| \leq \overline{u}_{q_i}(t),\ i = \overline{1,r}\right\}$ — множество

измеримых функций — пространство стратегий ЛПР (Q); $\mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}_q(t),\mathbf{u}_q,t\right)$ — удовлетворяющая условию Липшица на прямом произведении $\tilde{X}_q(t)\times U_q(t)\times\left[\tilde{\mathbf{x}}_q(t),\mathbf{u}_q,t\right]$ вектор-функций; множество $\left\{f_i\left(\tilde{\mathbf{x}}_q,\mathbf{u}_q,t\right):\mathbf{u}_q\in U_q(t)\right\}$ векторов скорости полагается при каждом фиксированном наборе $\left(\tilde{\mathbf{x}}_q,t\right)$, $\tilde{\mathbf{x}}_q(t)\in\tilde{X}_q(t)$, $t\in[t_0,t_k]$ выпуклым и ограниченным. В число фазовых координат $\tilde{\mathbf{x}}_q(t)$ входят координаты центра масс объекта в системе координат $O_0X_qY_qZ_q$ или $O_0r\varphi\chi$. Эти координаты составляют n-мерный вектор $\mathbf{x}_q(t)$, $n\le m$, $n\le 3$. Так что $\mathbf{x}_q(t)=\mathbf{L}\cdot\tilde{\mathbf{x}}_q(t)$, где $\mathbf{L}$ — $(n\times m)$-матрица, «вырезающая» из вектора $\tilde{\mathbf{x}}_q(t)$ координаты $\mathbf{x}_q(t)$.

Активное средство противника — стремящийся к сближению с объектом Q объект P — полагается линеаризованным относительно опорной траектории $\mathbf{x}_{p_0}(t)$, соответствующей «опорной» траектории объекта Q $\tilde{\mathbf{x}}_{q_0}(t)\in\tilde{X}_q(t)$:

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}_{q_0}(t)=\mathbf{f}\left(\tilde{\mathbf{x}}_{q_0},\mathbf{u}_{q_0},t\right),\ \tilde{\mathbf{x}}_{q_0}(t_0)=\tilde{\mathbf{x}}_q^0, \tag{6.204}$$

где $\mathbf{u}_{q_0}(t)\in U_q(t)$ — «опорное» управление, назначаемое ЛПР.

На опорной траектории ЛПР принята следующая модель объекта Р. Объект Р описывается нелинейными непрерывными ограниченными известными операторами $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{K}_0$, $\mathbf{A}_0$ из R^n в R^n, соответствующими связями векторов $\mathbf{x}_q(t)$, $\mathbf{y}(t)$; $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{j}_p(t)$; $\mathbf{j}_p(t)$, $\mathbf{x}_p(t)$ на опорной траектории. Так что $\mathbf{y}_0(t)=\mathbf{H}_0\left(\mathbf{x}_{q_0}(t)\right)$, $\mathbf{j}_{p_0}(t)=\mathbf{K}_0\left(\mathbf{y}_0(t)\right)$, $\mathbf{x}_{p_0}(t)=\mathbf{A}_0\left(\mathbf{j}_{p_0}(t)\right)$ и $\mathbf{x}_{p_0}(t)=\mathbf{A}_0\left(\mathbf{K}_0\left(\mathbf{H}_0\left(\mathbf{x}_{q_0}(t)\right)\right)\right)$. Выражения для операторов $\mathbf{H}_0$ и $\mathbf{A}_0$ приведены, например, в [48, п. 1]; оператор $\mathbf{K}_0$ определяется конкретной системой; $\mathbf{j}_p$ — вектор нормальных ускорений объекта Р.

На линеаризованной траектории принята следующая модель объекта Р. Объект описывается известной $(n\times n)$-матрицей $\mathbf{H}_\Delta(t)=\left\{h_{\Delta ij}(t)\in C[t_0,t_k],\ i,j=\overline{1,n}\right\}$, неизвестной $(n\times n)$-МИПФ $\mathbf{K}_\Delta(t,\tau)$, $t_0\le\tau\le t\le t_k$ (стратегия противника), и известной невырожденной $\forall\tau<t$ $(n\times n)$-МИПФ $\mathbf{A}_\Delta(t,\tau)=\left\{\alpha_{\Delta ij}(t,\tau)\in C_\Delta[t_0,t_k],\ i,j=\overline{1,n}\right\}$ — непрерывность на треугольнике $t>\tau$, которые соответствуют связям векторов $\mathbf{x}_q(t)$, $\mathbf{y}(t)$; $\mathbf{y}(t)$, $\mathbf{j}_p(t)$; $\mathbf{j}_p(t)$, $\mathbf{x}_p(t)$ на этой траектории.

Таким образом,

$$\mathbf{y}_\Delta(t)=\mathbf{H}_\Delta(t)\left[\boldsymbol{\Gamma}(t)\mathbf{x}_q(t)-\mathbf{x}_{q_0}(t)\right], \tag{6.205}$$

где $\boldsymbol{\Gamma}(t)$ — диагональная $(n\times n)$-матрица случайных функций с единичным средним значением и положительно определенной корреляционной матрицей

$$\mathbf{R}_\Gamma(t_1,t_2)=\operatorname{diag}\left(r_{\gamma 11}(t_1,t_2),r_{\gamma 22}(t_1,t_2),\ldots,r_{\gamma nn}(t_1,t_2)\right),$$

$$r_{\gamma ii}(t_1,t_2)\in L_2[t_0,t_k]\times L_2[t_0,t_k],\ i=\overline{1,n},$$

— мультипликативная векторная помеха, допускающая аппроксимацию нестационарным «белым» шумом (случайный фиксированный фактор).

При этом $M\left[\mathbf{y}_\Delta(t)\right]=\overline{\mathbf{y}}_\Delta(t)$. При нулевых начальных условиях:

$$\mathbf{x}_{p_\Delta}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{A}_\Delta(t,\tau)\mathbf{j}_{p_\Delta}(\tau)d\tau; \tag{6.206}$$

$$\mathbf{j}_{p_\Delta}(t)=\int_{t_0}^{t}\mathbf{K}_\Delta(t,\tau)[\mathbf{y}_\Delta(\tau)+\mathbf{n}(\tau)]d\tau, \tag{6.207}$$

где $\mathbf{n}(\tau)$ — аддитивная векторная помеха (случайный фиксированный фактор) не коррелированная с $\mathbf{\Gamma}(t)$, допускающая аппроксимацию нестационарным «белым» шумом и имеющая нулевое среднее значение и симметричную положительно определенную корреляционную матрицу

$$\mathbf{R}_n(t_1,t_2)=\left\{r_{nij}(t_1,t_2)\in L_2[t_0,t_k]\times L_2[t_0,t_k],\ \ i,j=\overline{1,n}\right\}.$$

Множество допустимых стратегий U_p объекта Р задается с помощью «функционала сложности» $E_2(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)$.

Именно,

$$U_p=\left\{\mathbf{K}_\Delta(\mathbf{u}_q,t,\tau)=\mathbf{K}_\Delta(\mathbf{u}_q(\cdot),t,\tau):\ E_2(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)\in\left[S(\mathbf{u}_q,t_k)\pm\varepsilon_S\right]\right\},$$

где $S(\mathbf{u}_q,t_k)$, ε_S — принятая ЛПР известная положительная функция — уровень ограничения сложности и требуемая точность соответственно. Рассматриваются два функционала сложности.

Функционал сложности $E_2^{(1)}(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)$, ограничивающий полосу пропускания контура наведения объекта Р:

$$E_2^{(1)}(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)=\mathrm{tr}\left\{\int_{t_0}^{t_k}\Omega(\tau)\times M\left\{\left[\mathbf{j}_{p_\Delta}(\tau)-M(\mathbf{j}_{p_\Delta}(\tau))\right]\left[\mathbf{j}_{p_\Delta}(\tau)-M(\mathbf{j}_{p_\Delta}(\tau))\right]^{\mathrm{T}}\right\}d\tau\right\}, \tag{6.208}$$

где $\mathbf{\Omega}(\tau)=\mathrm{diag}(w_{11}(\tau),w_{22}(\tau),\ldots,w_{nn}(\tau))$, $1\le w_{ii}(\tau)<\infty$, $i=\overline{1,n}$ — известная матрица веса

$$\mathbf{j}_{p_\Delta}(\tau)-M[\mathbf{j}_{p_\Delta}(\tau)]=\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{K}_\Delta(t,\theta)\left\{\mathbf{H}_\Delta(\theta)[\mathbf{\Gamma}(\theta)-\mathbf{E}]\mathbf{x}_q(\theta)+\mathbf{n}(\theta)\right\}d\theta. \tag{6.209}$$

Функционал сложности $E_2^{(2)}(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)$, ограничивающий «удаленность» параметров контура наведения объекта Р от «прототипа», в качестве которого может быть использован объект-аналог объекта Р:

$$E_2^{(2)}(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)=\mathrm{tr}\left\{\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{\Omega}(\tau,\theta)\times\left[\mathbf{K}_\Delta(\tau,\theta)-\mathbf{K}_\Delta^n(\tau,\theta)\right]\times\left[\mathbf{K}_\Delta(\tau,\theta)-\mathbf{K}_\Delta^n(\tau,\theta)\right]^{\mathrm{T}}d\theta d\tau\right\}, \tag{6.210}$$

где $\mathbf{\Omega}(\tau,\theta)=\mathrm{diag}(w_{11}(\tau,\theta),w_{22}(\tau,\theta),\ldots,w_{nn}(\tau,\theta))$, $1\le w_{ii}(\tau,\theta)<\infty$, $w_{ii}(\tau,\theta)\in C[t_0,t_k]$, $i=\overline{1,n}$ (непрерывность на квадрате) — известная матрица веса; $\mathbf{K}_\Delta^n(t,\tau)=\left\{k_{\Delta ij}^n(t,\tau)\in C[t_0,t_k],\ i,j=\overline{1,n}\right\}$ — МИПФ «прототипа».

Критерий эффективности операции строится на основе $(n\times 1)$-вектора декартовых компонент «промаха» объектов в момент времени t_k:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}(t_k)=\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)=\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{д}}(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta)+\boldsymbol{\varepsilon}_2^{\text{д}}(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_0), \tag{6.211}$$

где

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{д}}\left(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_0\right)=\mathbf{x}_{p0}^{\text{д}}\left(t_k\right)-\mathbf{x}_q^{\text{д}}\left(t_k\right)=\boldsymbol{\Pi}_0\mathbf{x}_{p0}\left(t_k\right)-\sum\mathbf{x}_q\left(t_k\right)\neq 0, \tag{6.212}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_1^{\text{д}}\left(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_0\right)=\boldsymbol{\Pi}_\Delta\left(t_k\right)\int_{t_0}^{t_k}\mathbf{K}\left(t_k,\tau\right)\left[\mathbf{y}_\Delta\left(\tau\right)+\mathbf{n}\left(\tau\right)\right]d\tau; \tag{6.213}$$

здесь $\boldsymbol{\Pi}_0$ и $\sum$ — нелинейные непрерывно ограниченные операторы из R^n в R^n, соответствующие кинематическим связям векторов $\mathbf{x}_{p_0}\left(t\right)$ и $\mathbf{x}_q\left(t\right)$ с этими же векторами $\mathbf{x}_{p_0}^{\text{д}}\left(t\right)$, $\mathbf{x}_q^{\text{д}}\left(t\right)$ в декартовой системе координат; $\boldsymbol{\Pi}_\Delta\left(t\right)=\left\{\pi_{\Delta ij}\left(t\right)\in C\left[t_0,t_k\right],\ i,j=\overline{1,n}\right\}$ — $(n\times n)$-матрица, соответствующая кинематическим связям вектора $\mathbf{x}_{p\Delta}\left(t\right)$ с этим же вектором $\mathbf{x}_{p\Delta}^{\text{д}}\left(t\right)$ в декартовой системе координат; $(n\times n)$-МИПФ

$$\mathbf{K}\left(t_k,\tau\right)=\int_{\tau}^{t_k}\mathbf{A}_\Delta\left(t_k,\theta\right)\mathbf{K}_\Delta\left(\theta,\tau\right)d\theta,\ t_0\le\tau\le t_k. \tag{6.214}$$

Операторы $\boldsymbol{\Pi}_0$, $\sum$ и матрица $\boldsymbol{\Pi}_\Delta\left(t\right)$ приведены, например, в [48]. В качестве критерия эффективности операции, который ЛПР стремится максимизировать, рассматривается критерий Солодовникова–Баткова — неотрицательный вещественный функционал

$$\begin{aligned}E_1\left(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta\right)&=\operatorname{tr}\left\{M\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}\left(t_k\right)\right]\cdot M\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}\text{т}}\left(t_k\right)\right]\right\}+\\&+\lambda_q\operatorname{tr}\left\{M\left\{\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}\left(t_k\right)-M\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}\left(t_k\right)\right)\right]\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}\left(t_k\right)-M\left(\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}\left(t_k\right)\right)\right]^{\text{т}}\right\}\right\},\end{aligned} \tag{6.215}$$

где $\lambda_q=\text{const},\ 0<\lambda_q<\infty$ — известная величина,

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}\left(t_k\right)-M\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}}\left(t_k\right)\right]=\boldsymbol{\Pi}_\Delta\left(t_k\right)\int_{t_0}^{\tau}\mathbf{K}\left(t_k,\tau\right)\left\{\mathbf{H}_\Delta\left(\tau\right)\left[\boldsymbol{\Gamma}\left(\tau\right)-\mathbf{E}\right]\mathbf{x}_q\left(\tau\right)+\mathbf{n}\left(\tau\right)\right\}d\tau. \tag{6.216}$$

Ставится задача поиска:

1) гарантированной оценки эффективности заданной стратегии $\mathbf{u}_q\left(t\right)$

$$E_1^*\left(\mathbf{u}_q,t_k\right)=E_1\left(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta^*\right)=\min_{\mathbf{K}_\Delta\left(t,\tau\right)\in U_p}E_1\left(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta\right); \tag{6.217}$$

2) оптимальной (гарантирующей) стратегии

$$\mathbf{u}_q^*\left(t\right)=\arg\max_{\mathbf{u}_q\left(t\right)\in U_q}E_1^*\left(\mathbf{u}_q,t_k\right). \tag{6.218}$$

Вследствие того что задача 1 входит в задачу 2, далее рассматривается только задача 2, которая называется при этом просто «задача».

В результате того что для фигурирующих в (6.216)–(6.218) математических ожиданий и дисперсий легко найти аналитические выражения (так, что критерий качества операции и функционалы сложности оказываются известными детерминированными функциями $\mathbf{u}_q\left(\cdot\right)$, $\mathbf{K}_\Delta$, t_k, ρ), сформулированная задача представляет собой детерминированную «бесшумную» позиционно-программную игру с идеальной информацией. Первый этап решения этой игры состоит в нахождении оптимальной стратегии объекта Р — МИПФ:

$$\mathbf{K}_\Delta^*\left(\mathbf{u}_q\left(\cdot\right),t_k,\tau,\theta\right)=\arg\min_{\mathbf{K}_\Delta\left(t,\tau\right)\in U_q}E_1\left(\mathbf{u}_q,t_k,\mathbf{K}_\Delta\right). \tag{6.219}$$

В соответствии с принципом ограниченной сложности [88] эта задача сводится к минимизации по $\mathbf{K}_\Delta$ функционала

$$\hat{E}\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho, \mathbf{K}_\Delta\right) = E_1\left(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta\right) + \rho E_2^{(i)}\left(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta\right). \tag{6.220}$$

Для этого на первом шаге решается задача

$$\min_{\mathbf{K}_\Delta} \hat{E}\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho, \mathbf{K}_\Delta\right) = \hat{E}\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho, \mathbf{K}_\Delta^*\left(\mathbf{u}_q(\cdot), t_k, \rho, \tau, \theta\right)\right) =$$

$$= \hat{E}^*\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho\right) = E_1\left(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta^*\left(\mathbf{u}_q(\cdot), t_k, \rho, \tau, \theta\right)\right) + \tag{6.221}$$

$$+\rho E_2^{(i)}\left(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta^*\left(\mathbf{u}_q(\cdot), t_k, \rho, \tau, \theta\right)\right) = E_1^*\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho\right) + \rho E_2^{(i)*}\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho\right), \quad i = 1,2,$$

где множитель Лагранжа $\rho = \rho^* > 0$ определяется на втором шаге:

$$E_2^{(i)*}\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho^*\right) = E_2^{(i)**}\left(\mathbf{u}_q, t_k\right) \in \left[U^{(i)}\left(\mathbf{u}_q, t_k\right) \pm \varepsilon_S\right], \quad i = 1,2. \tag{6.222}$$

Заметим, что величина $E_1^*\left(\mathbf{u}_q, t_k, \rho^*\right) = E_1^{**}\left(\mathbf{u}_q, t_k\right)$ является гарантированной оценкой эффективности стратегии $\mathbf{u}_q(t)$.

Второй этап решения игры состоит в нахождении оптимальной стратегии объекта Q:

$$\mathbf{u}_q^*(t) = \arg \max_{\mathbf{u}_q(t) \in U_q[t_0, t_k]} E_1^{**}\left(\mathbf{u}_q, t_k\right). \tag{6.223}$$

Гарантированной оценкой эффективности оптимальной стратегии $\mathbf{u}_q^*(t)$ является, таким образом, величина $E_1^{***}(t_k) = E_1^{**}\left(\mathbf{u}_q^*, t_k\right)$.

Приведенная постановка задачи может быть содержательно расширена без выхода за рамки основного содержания рассматриваемого метода.

1. Можно поставить задачу без предварительной фиксации момента времени окончания операции t_k. В этом случае вторым этапом решения задачи является поиск гарантированной оценки эффективности $E_1^{***}\left(\mathbf{u}_q\right)$ стратегии $\mathbf{u}_q(t)$:

$$E_1^{***}\left(\mathbf{u}_q\right) = \min_{t_k \in \left[\breve{\theta}_k, \hat{\theta}_k\right]} E_1^{**}\left(\mathbf{u}_q, t_k\right) = E_1^{**}\left(\mathbf{u}_q, t_k^*\right). \tag{6.224}$$

Здесь $\breve{\theta}_k = \theta_k - \Delta t_1$, $\hat{\theta}_k = \theta_k + \Delta t_2$; θ_k, $\Delta t_1 < \theta_k < \infty$ — момент времени, определяемый из условия равенства «промаха» на опорной траектории заданной величине $\varepsilon_t \geq 0$:

$$\min_{t > 0} \left| \left\| \mathbf{x}_{p_0}^{\text{д}}(t) - \mathbf{x}_{q_0}^{\text{д}}(t) \right\| - \varepsilon_t \right| = \left| \left\| \mathbf{x}_{p_0}^{\text{д}}(\theta_k) - \mathbf{x}_{q_0}^{\text{д}}(\theta_k) \right\| - \varepsilon_t \right|, \tag{6.225}$$

Δt_i, $0 \leq t_i < \infty$ — фиксированные интервалы времени; $i = 1,2$. Оптимальная (гарантирующая) стратегия $\mathbf{u}_q^*(t)$ в этом случае равна

$$\arg \max_{\mathbf{u}_q(t) \in U_q\left[t_0, t_k^*\right]} E_1^{***}\left(\mathbf{u}_q\right).$$

2. Можно полагать, что критерий эффективности $E_1\left(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta\right)$ является минимизируемым критерием противника (это должно быть гарантировано, т.е. точно известно или с риском принято ЛПР). Тогда критерием эффективности ЛПР является некоторый критерий эффективности $E_3\left(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta\right)$, который в рассмотренном частном случае совпадает с $E_1\left(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta\right)$. Вторым этапом решения задачи в этом случае является поиск

$$E_3^{**}(\mathbf{u}_q) = \min_{t_K \in [\bar{\theta}_K, \bar{\theta}_K]} E_3^{*}(\mathbf{u}_q, t_k) = \min_{t_K \in [\bar{\theta}_K, \bar{\theta}_K]} E_3(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta^{*}). \quad (6.226)$$

При этом оптимальная (гарантирующая) стратегия объекта Q:

$$\mathbf{u}_q^{*}(t) = \arg \operatorname*{extr}_{\mathbf{u}_q \in U_q[t_0, t_k^{*}]} E_3^{**}(\mathbf{u}_q). \quad (6.227)$$

3. Расширением только что рассмотренной постановки задачи является введение для определения момента времени $t_k = t_k^{*}$ еще одного функционала (совпадающего в частном случае с $E_1(\mathbf{u}_q, t_k, \mathbf{K}_\Delta)$). В соответствии с принципом гарантированного результата при этом должно быть гарантировано, т.е. точно известно исследователю или с риском принято ЛПР, что противник заканчивает операцию именно в соответствии с этим критерием.

4. Функционалу (6.208) может быть придан более общий вид, когда в него входят не только дисперсия координаты $\mathbf{j}_{p_\Delta}(t)$, но и математическое ожидание этой координаты. Ограничение интеграла от дисперсии ускорения $\mathbf{j}_{p_\Delta}(t)$, которое обеспечивает (6.208), физически означает сужение полосы пропускания системы, что вызывает, понятно, ограничение и интеграла от математического ожидания $\mathbf{j}_{p_\Delta}(t)$, но, кроме того, учитывает влияние на $\mathbf{j}_{p_\Delta}(t)$ маневра цели.

Краткая характеристика этапов исследования. В [24] приводится постановка задачи оценки эффективности и поиска оптимальных (гарантирующих) стратегий уклонения программно управляемого объекта Q. При этом используется терминология [40]. Задача ставится как задача исследования операции объекта Q в условиях наличия противника (объекта P) и случайных неконтролируемых факторов (мультипликативных и аддитивных помех). Множество стратегий противника — матрица ИПФ $\mathbf{K}_\Delta(t, \tau)$ — ограничено с помощью двух интегральных функционалов сложности [88]. Первый функционал сложности использует вектор ускорений $\mathbf{j}_{p_\Delta}(t)$ объекта РЦ; второй — МИПФ «прототипа» оптимизируемой части этого объекта. Все изложение главы ведется для обоих этих функционалов. Исходная задача исследования операции сводится к позиционно-программной «бесшумной» игре с идеальной информацией, решение которой распадается на два этапа.

В [24] рассматривается первый шаг первого этапа решения игры — для случая помех, аппроксимируемых «белыми» шумами, находятся явные выражения для оптимальных стратегий объекта P, как функций стратегий $\mathbf{u}_q$ объекта Q, момента времени окончания игры t_k и множителя Лагранжа ρ, с помощью которого вводятся функционалы сложности.

Материал [24] дополняют п. 2, 3 приложения [48], в которых выведены матричные интегральные уравнения, задающие необходимые и достаточные условия оптимальности стратегий объекта P, и решено матричное интегральное уравнение, задающее необходимое и достаточное условие оптимальности МИПФ $\mathbf{K}_\Delta(t, \tau)$ в случае расширенного первого функционала сложности.

В [24, п. 8.3] рассматривается второй шаг первого этапа решения игры — определяются множители Лагранжа ρ^{*}, обеспечивающие заданный уровень ограничения сложности стратегии $\mathbf{K}_\Delta^{*}(t, \tau)$. Материал [24, п. 8.3] дополняет п. 4 приложения [48], в котором приводится вывод уравнения, задающего оценку сверху ρ^{*} при использовании второго функционала сложности.

В п. 8.4 [24] рассматривается второй этап решения игры — нахождение оптимальной стратегии $\mathbf{u}_q^*(t)$ объекта Q.

Параграф 8.5 [24] посвящен исследованию равновесия в данной задаче сближения-уклонения, сравнительному анализу и оценке преимущества максиминного подхода для получения оптимального управления объектом Q и оценке оптимальной системы позиционного управления объектом P.

В п. 8.6 [24] на основе АО разработанного метода исследования позиционно-программных задач сближения-уклонения, детальное описание которого приведено в [24, гл. 9], приведены два упрощенных примера применения метода для практически полезных задач сближения-уклонения: уклонения маневрирующего аэродинамического объекта от телеуправляемой ЗУР и защиты РЛС от СУ ПРР с помощью ДИИ (система РЛС–ДИИ–СУ ПРР). Полное исследование данных задач приведено в [24, гл. 10].

6.8.2. Решение задачи поиска оптимальной стратегии объекта P (для помех типа «белого» шума)

Данный пункт посвящен рассмотрению первого шага определения оптимальной стратегии объекта P и опирается на [24], в котором с использованием известной формальной процедуры определения первой вариации функционала получены матричные интегральные уравнения, задающие необходимые и достаточные условия оптимальности МИПФ $\mathbf{K}_\Delta(\tau,\theta)$. В параграфе рассматривается решение этих уравнений. Мультипликативная и аддитивная помехи аппроксимируются здесь не коррелированными между собой нестационарными векторными «белыми» шумами: полагается

$$\mathbf{R}(\tau_1,\tau_2)=\mathbf{H}_\Delta(\tau_1)\mathbf{x}_q(\tau_1)\mathbf{N}_\Gamma^2(\tau_1)\delta(\tau_1-\tau_2)\mathbf{x}_q^{\mathrm{T}}(\tau_2)\mathbf{H}_\Delta^{\mathrm{T}}(\tau_2)+\mathbf{N}_n^2(\tau_2)\delta(\tau_1-\tau_2), \quad (6.228)$$

где $\mathbf{N}_\Gamma^2(\tau_1)=\left\{n_{\Gamma ij}(\tau_1)\in L_2[t_0,t_k],\ i,j=\overline{1,n}\right\}$ — положительная положительно определенная $(n\times n)$-матрица уровней спектральных плотностей «белой» мультипликативной помехи; $\mathbf{N}_n^2(\tau_1)=\left\{n_{nij}(\tau_1)\in L_2[t_0,t_k],\ i,j=\overline{1,n}\right\}$ — симметричная положительная положительно определенная $(n\times n)$-матрица уровней спектральных плотностей «белой» аддитивной помехи; $\delta(\tau_1-\tau_2)$ — символ дельта-функции.

В [24, п. 8.2.1] получено решение уравнения, соответствующего функционалу качества (6.215) и функционалу сложности (6.208). В п. 8.2.2 — уравнения, соответствующего тому же функционалу качества (6.215) и функционалу сложности (6.210).

В обоих случаях для $\forall\tau_1$, $t_0\le\tau_1\le t_k$, используется существенно положительная определенность и интегрируемость с квадратом элементов матрицы

$$\mathbf{N}^2(\tau_1)=\tilde{\mathbf{N}}_\Gamma^2(\tau_1)+\mathbf{N}_n^2(\tau_1), \quad (6.229)$$

где

$$\tilde{\mathbf{N}}_\Gamma^2(\tau_1)=\mathbf{H}_\Delta(\tau_1)\mathbf{x}_q(\tau_1)\mathbf{N}_\Gamma^2(\tau_1)\mathbf{x}_q^{\mathrm{T}}(\tau_1)\mathbf{H}_\Delta^{\mathrm{T}}(\tau_1). \quad (6.230)$$

Для положительной определенности достаточна неотрицательная определенность матрицы $\tilde{\mathbf{N}}_\Gamma^2(\tau_1)$ $\forall\tau_1$, $t_0\le\tau_1\le t_k$, что с учетом положительной определенности матрицы $\tilde{\mathbf{N}}_\Gamma^2(\tau_1)$ следует из леммы 8.1 [24].

Ограничение множества допустимых стратегий с помощью функционала сложности, использующего вектор ускорений (функционал $E_2^{(1)}$). Подставляя в интегральное уравнение [24] выражение (6.228) для $\mathbf{R}(\tau_1,\tau_2)$ и транспонируя результат, получим

$$\lambda_q \int_{\tau_1}^{t_k} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\mathbf{A}(t_k,t_3)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_3,\tau_1)dt_3\mathbf{N}^2(\tau_1)+\rho\boldsymbol{\Omega}(t_2)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_2,\tau_1)\mathbf{N}^2(\tau_1)=$$
$$=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\left[\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_3}\mathbf{A}(t_k,t_3)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_3,\tau_2)\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}(\tau_2)d\tau_2dt_3+\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{д}}(t_k)\right]\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}^{\mathrm{T}}(\tau_1), \tag{6.231}$$

где матрица $\mathbf{N}^2(\tau_1)$ положительно определена, интегрируема с квадратом в $L_2^{n\times n}[t_0,t_k]$, в первом интеграле учтено, что $\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_3,\tau_1)=0$ при $t_3<\tau_1$. В случае использования противником оптимальной стратегии

$$\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_3}\mathbf{A}(t_k,t_3)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_3,\tau_2)\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}(\tau_2)d\tau_2dt_3+\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{д}}(t_k)=M\left[\boldsymbol{\varepsilon}^{\text{д}^*}(t_k)\right]=\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}^*}(t_k)<\infty. \tag{6.232}$$

Окончательное искомое явное выражение для оптимальной МИПФ [24]

$$\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_2,\tau_1)=-\lambda_q\rho^{-1}\boldsymbol{\Omega}^{-1}(t_2)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\mathbf{V}_1^{-1}(\tau_1)\mathbf{D}_1^{-1}(t_k)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{д}}(t_k)\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}^{\mathrm{T}}(\tau_1)\mathbf{N}^{-2}(\tau_1), \tag{6.233}$$

где $t_2\in[t_0,t_k]$, $t_0\le\tau_1\le t_2$. Матрицы $\mathbf{V}_1,\mathbf{D}_1$ даны в [24].

Утверждение 6.16 [24]. Решение матричного интегрального уравнения (6.231) существует, единственно в пространстве $L_2^{n\times n}[t_0,t_k]$ и задается выражением (6.233) для любого $\tilde{\mathbf{x}}_q(t)\in\tilde{X}_q(t)$.

Ограничение множества допустимых стратегий с помощью функционала сложности, использующего «прототип» $\left(\text{функционал } E_2^{(1)}\right)$ **[24, 48].** Подставляя в интегральное уравнение выражение (6.228) для $\mathbf{R}(\tau_1,\tau_2)$ в случае мультипликативной и аддитивной помех типа «белых» шумов и транспонируя результат аналогично (6.231), получим

$$\lambda_q \int_{\tau_1}^{t_k} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\mathbf{A}(t_k,t_3)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_3,\tau_1)\mathbf{N}^2(\tau_1)dt_3+$$
$$+\rho\boldsymbol{\Omega}(t_k,\tau_1)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_2,\tau_1)=\rho\boldsymbol{\Omega}(t_2,\tau_1)\mathbf{K}_{\Delta}^{n}(t_2,\tau_1)-$$
$$-\int_{t_0}^{t_k}\int_{t_0}^{t_3}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\mathbf{A}(t_k,t_3)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_3,\tau_2)\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}(\tau_2)\overline{\mathbf{y}}^{\mathrm{T}}(\tau_1)d\tau_2dt_3- \tag{6.234}$$
$$-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{д}}(t_k)\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}^{\mathrm{T}}(\tau_1),$$

где $\mathbf{N}^2(\tau_1)$ положительно определена, интегрируема с квадратом в $L_2^{n\times n}[t_0,t_k]$ и определяется выражениями (6.229), (6.230). Введем в рассмотрение неизвестный $(n\times1)$-вектор $\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}^*}(t_k)<\infty$. Тогда из (6.234) при фиксированных t_k, τ_1, $t_k>\tau_1$ следует матричное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с вырожденным ядром $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\mathbf{A}(t_k,t_3)$

$$\lambda_q \int_{\tau_1}^{t_k} \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\mathbf{A}(t_k,t_3)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_3,\tau_1)dt_3+\rho\boldsymbol{\Omega}(t_2,\tau_1)\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_2,\tau_1)\mathbf{N}^{-2}(\tau_1)=$$
$$=\rho\boldsymbol{\Omega}(t_2,\tau_1)\mathbf{K}_{\Delta}^{n}(t_2,\tau_1)\mathbf{N}^{-2}(\tau_1)-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}^*}(t_k)\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}^{\mathrm{T}}(\tau_1)\mathbf{N}^{-2}(\tau_1). \tag{6.235}$$

Уравнения (6.232), (6.235) образуют систему, эквивалентную (6.234) для определения МИПФ $\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t,\tau)$.

Явное выражение для искомой оптимальной $\left(n^2 \times n^2\right)$-симметричной МИПФ [24]

$$\begin{aligned}\left|\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(t_2,\tau_1)\right. &= \left|\mathbf{K}_{\Delta}^{\Pi}(t_2,\tau_1) - \lambda_q\left[\mathbf{\Omega}^{-1}(t_2,\tau_1)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\otimes\mathbf{N}^{2}(\tau_1)\right]\times\mathbf{G}^{-1}(\tau_1)\times\right.\\ &\times\left(\mathbf{E}\otimes\mathbf{N}^{-2}(\tau_1)\right)\left|\mathbf{K}^{\Pi}(t_k,\tau_1) - \lambda_q\rho^{-1}\left\{\left[\mathbf{\Omega}^{-1}(t_2,\tau_1)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\otimes\mathbf{N}^{-2}(\tau_1)\right]\times\right.\right.\\ &\times\mathbf{G}^{-1}(\tau_1)\left[\mathbf{V}(\tau_1)\otimes\mathbf{N}^{-2}(\tau_1)\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}(\tau_1)\right] + \lambda_q^{-1}\left[\mathbf{\Omega}^{-1}(t_2,\tau_1)\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t_k,t_2)\otimes\overline{\mathbf{y}}_{\Delta}(\tau_1)\right]\Big\}\times\\ &\left.\times\mathbf{D}_2^{-1}(t_k)\left[\rho\mathbf{I}_3(t_k) + \boldsymbol{\varepsilon}_0^{\text{д}}(t_k)\right],\right.\end{aligned} \tag{6.236}$$

где $t_2 \in [t_0, t_k]$, $t_0 \le \tau_1 < t_k$. Матрицы $\mathbf{V}, \mathbf{G}, \mathbf{D}_2$ даны в [24].

Утверждение 6.17 [24]. Решение матричного интегрального уравнения (6.234) существует и единственно в пространстве $L_2^{n\times n}[t_0, t_k]$ и задается выражением (6.236) для любого $\tilde{\mathbf{x}}_q(t) \in \tilde{X}_q(t)$.

Далее в [24] рассматривается второй шаг этапа определения оптимальной стратегии обьекта P — задача поиска множителя Лагранжа ρ, обеспечивающего значение функционала сложности, не превышающего заданное (6.222).

6.8.3. Об алгоритме определения оптимальной стратегии объекта Q

В параграфе рассматривается второй этап решения игры — поиск оптимальной (гарантирующей) стратегии $\mathbf{u}_q^*(t)$.

Выражения для функционала выигрыша $E_1^{**}(t_k) = E_1\left(t_k, \mathbf{K}_{\Delta}^{*}\left(\rho^*, t_k, \tau, \theta\right)\right)$ могут быть получены путем подстановки (при $\rho = \rho^*$) выражений для МИПФ $\mathbf{K}_{\Delta}^{*}(\tau,\theta)$ в интегральные уравнения. Однако такой путь приводит к слишком громоздким результатам.

Представим функционал $E_1^{**}(t_k)$ в виде суммы двух функционалов:

$$E_1^{**}(t_k) = E_1^{(1)}\left(\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}*}\left(\rho^*, t_k\right)\right) + \lambda_q E_1^{(2)}\left(t_k, \mathbf{K}^{*}\left(\rho^*, t_k, \tau\right)\right) = E_1^{(1)**}(t_k) + \lambda_q E_1^{(2)**}(t_k), \tag{6.237}$$

где

$$E_1^{(1)**}(t_k) = \mathrm{tr}\left[\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}*}\left(\rho^*, t_k\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}*\mathrm{T}}\left(\rho^*, t_k\right)\right]; \tag{6.238}$$

$$E_1^{(2)**}(t_k) = \mathrm{tr}\left[\int_{t_0}^{t_k}\mathbf{K}^{*}\left(\rho^*, t_k, \tau_1\right)\mathbf{N}^{2}(\tau_1)\mathbf{K}^{*\mathrm{T}}\left(\rho^*, t_k, \tau_1\right)d\tau_1\right]. \tag{6.239}$$

В случае первого функционала сложности путем несложных преобразований получим

$$E_2^{(1)**}(t_k) = \rho^*\mathrm{tr}\left\{\int_{t_0}^{t_2}\mathbf{V}(\tau_1)\mathbf{V}_1^{-2}\left(\rho^*, \tau_1\right)\mathbf{V}(\tau_1)\dot{\mathbf{z}}(\tau_1)d\tau_1\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}*}\left(\rho^*, t_k\right)\overline{\boldsymbol{\varepsilon}}^{\text{д}*\mathrm{T}}\left(\rho^*, t_k\right)\right\}. \tag{6.240}$$

Задача оптимального управления для определения оптимальной стратегии $\mathbf{u}_q^*(t)$ формируется в результате следующим образом.

Объект управления Q описывается системой дифференциальных уравнений в нормальной форме Коши (6.204), где $\tilde{\mathbf{x}}_q(t)$ — вектор фазовых координат, $\mathbf{u}_q(t)$ — вектор управлений.

Начальное состояние объекта задается вектором $\mathbf{x}_q^0$, «терминальное множество» — множеством $\tilde{X}_q(t_k)$.

Имеется совокупность ограничений на фазовые координаты объекта, задаваемая системой $h^i\left(\tilde{\mathbf{x}}_q(t)\right) \geq 0$.

Классом допустимых управлений является класс измеримых на $[t_0, t_k]$ функций; «ограничивающее множество» задается множеством $U_q(t)$.

Утверждение 6.18. Решение сформулированной задачи оптимального управления для обоих функционалов сложности существует.

Для доказательства достаточно показать, что в условиях сформулированной задачи оптимального управления:

- существует равномерная оценка для всех решений (6.204) при $\mathbf{u}_q(t) \in U_q$;
- критерий качества управления (6.237) непрерывен по $\tilde{\mathbf{x}}_q(t)$ в R^m.

Вопросы алгоритмического и программного обеспечения метода поиска оптимальных (гарантирующих) решений для обьекта Q, оценки его вычислительной точности с анализом путей повышения быстродействия рассмотрены в работах [31, 32] и изложены в [24, гл. 9].

6.8.4. Программные системы FILTR, FILTR-1, FILTR-2

Алгоритмическое обеспечение метода поиска оптимальных (гарантирующих) управлений обьекта Q. Общую структуру программной системы [32] «FILTR» для решения задач оптимального управления рекомендованными ранее методами можно представить в виде изображенной на рис. 6.42 (сервисные блоки не показаны). Основными в этой схеме, для задачи поиска оптимальных гарантирующих стратегий, являются блоки 2, 5 и 6.

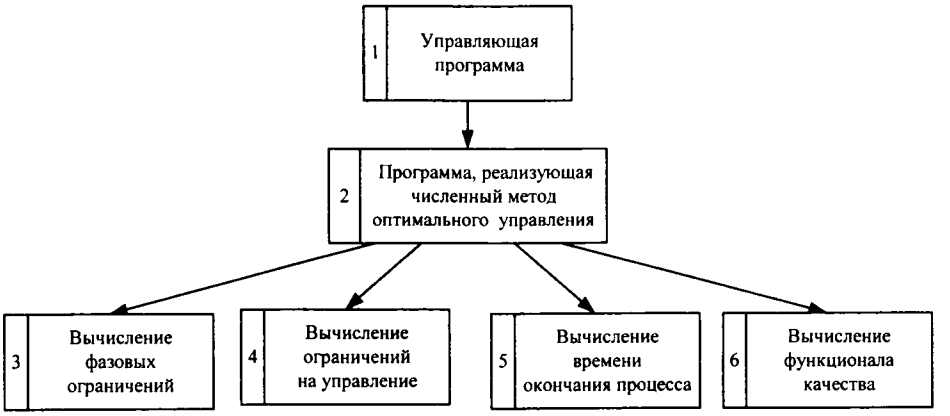


Рис. 6.42. Структура программной системы «FILTR»

Структура блока 6 приведена на рис. 6.43. Основу блока составляет программа KIPF (модуль KPFO — в случае функционала сложности $E_2^{(1)}$ и модуль KPFP — в случае функционала сложности $E_2^{(2)}$). Подпрограмма KIPF при заданном моменте времени окончания процесса t_k, векторах фазовых координат $\mathbf{x}_q(\tau)$, $\mathbf{x}_{q_0}(\tau)$, $\mathbf{x}_{p_0}(\tau)$, $\tau \in [t_0, t_k]$ и множителе Лагранжа ρ вычисляет математическое ожидание и корреляционную матрицу вектора «промаха» $\boldsymbol{\varepsilon}(t_k)$ и значение функционала $E_2^{(i)*}$. Подпрограмма FFG вычисляет по этим результатам функционал качества E_1^*, а также реали-

зует какой-либо численный метод решения нелинейного алгебраического уравнения — для вычисления множителя Лагранжа ρ^*, обеспечивающего заданный уровень ограничения сложности $E_2^{(i)*}$. Исходными данными для работы подпрограммы FFG, кроме перечисленных возможностей программы KIPF, являются: заданный уровень ограничения сложности $\varepsilon_S^{(i)}$, $i=1,2$; исходное значение множителя Лагранжа $\rho=\rho^0$; максимально допустимое количество итераций для определения ρ^*. Модуль FFG реализует известный «метод секущих», при котором итерационный процесс задается формулой

$$\rho^{n+1}=\rho^n=-\frac{\Im\left(\rho^n\right)\left(\rho^n-\rho^{n-1}\right)}{\Im\left(\rho^n\right)-\Im\left(\rho^n-\rho^{n-1}\right)}, \tag{6.241}$$

где $\Im\left(\rho^n\right)=E_2^{(i)*}\left(t_k,\rho^n\right)-S^{(i)}\left(t_k\right)$, $i=1,2$.

В модуле KPFO для вычисления математического ожидания вектора «промаха» $\varepsilon^{-д*}\left(t_k\right)$ используются полученные ранее соотношения; корреляционная $(n\times n)$-матрица этого вектора

$$\mathbf{R}\left[\varepsilon^{д*}\left(t_k\right)\right]=-\rho^{-2}\int_{t_0}^{t_k}\mathbf{V}\left(\tau_1\right)\mathbf{V}_1^{-2}\left(\rho,\tau_1\right)\mathbf{V}\left(\tau_1\right)\dot{\mathbf{z}}\left(\tau_1\right)d\tau_1\,\varepsilon^{-д*}\left(\rho,t_k\right). \tag{6.242}$$

Для вычисления функционала сложности $E_2^{(1)*}$ используется формула, приведенная в [87]. Фигурирующие в этих формулах матрицы $\mathbf{N}^2(\tau)$, $\mathbf{V}_1(\tau)$, $\mathbf{I}_1\left(t_k\right)$, $\mathbf{D}_1\left(t_k\right)$ и вектор $\mathbf{z}(t)$ определяются по известным соотношениям [24, 48]. Модуль KPFP соответствует рассмотренному частному случаю

$$\mathrm{R}\left[\varepsilon^{д*}\left(t_k\right)\right]=\int_{t_0}^{t_k}\mathbf{K}^*\left(\rho,t_k,\tau_1\right)\mathbf{N}^2\left(\tau_1\right)\mathbf{K}^{*\mathrm{T}}\left(\rho,t_k,\tau_1\right)d\tau_1. \tag{6.243}$$

В обоих случаях

$$\overline{\mathbf{y}}_\Delta^*(\tau)=\mathbf{H}_\Delta(\tau)\mathbf{x}_{q\Delta}(\tau). \tag{6.244}$$

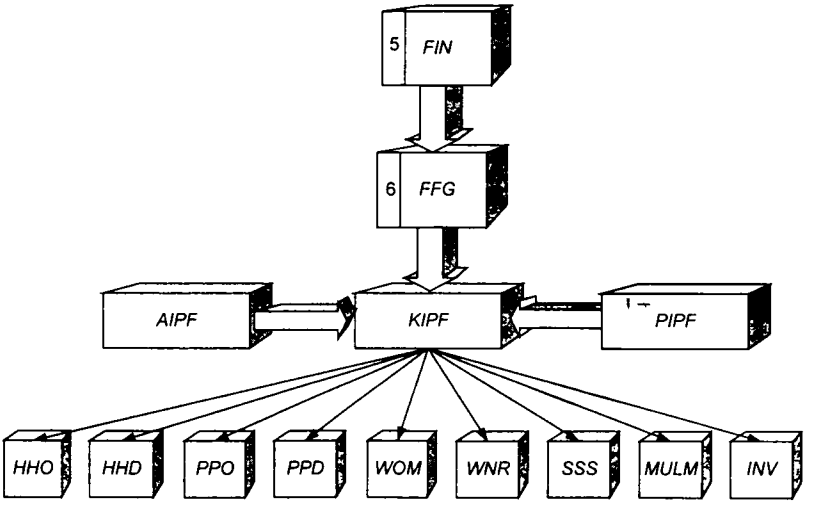


Рис. 6.43. Структура блока 6 программной системы «FILTR»

При работе подпрограммы KIPF используются подпрограммы (см. рис. 6.43) HHO, HHD, PRO, SSS, соответствующие операторам $\mathbf{H}_0$, $\mathbf{H}_\Delta$, Σ; подпрограмма AIPF соответствует МИПФ $\mathbf{A}_\Delta(t,\tau)$; подпрограммы WOM, WNR соответствуют матрицам $\boldsymbol{\Omega}(\tau)$, в модуле KPFP — $\boldsymbol{\Omega}(\tau,\Theta)$, $\mathbf{N}^2(\tau)$; подпрограммы MULM, INV — вспомогательные, осуществляют операции матричной алгебры. Модуль KPFP использует, кроме того, подпрограмму PIPF, соответствующую МИПФ «прототипа» $\mathbf{K}_\Delta^\Pi\Omega(\tau,\Theta)$.

Блоку 5 соответствует (см. рис. 6.42) подпрограмма FIN. Обычно момент времени окончания процесса $t_k = t_k^*$ задается с помощью некоторой монотонной функции $h(t,\mathbf{x}(t))$. При этом полагается, что

$$h\left(t_k^*, \mathbf{x}\left(t_k^*\right)\right) = 0 \tag{6.245}$$

с заданной точностью $\varepsilon_t > 0$.

Этот способ задания $t_k = t_k^* \in \left[\breve{\Theta}_k, \hat{\Theta}_k\right]$ принят в данном пункте. Основу FIN составляет подпрограмма FFG. Сама подпрограмма FIN реализует некоторый метод поиска минимума E_1^{**} функционала E_1^* по t_k. Исходными данными для работы подпрограммы FIN кроме величин, указанных при описании подпрограммы FFG, являются: моменты времени $\breve{\Theta}_k$, $\hat{\Theta}_k$, ε_t, исходное значение момента времени $t_k = t_k^0$, максимально допустимое количество итераций для определения t_k^0. В модуле FIN0 реализуется метод локального поиска минимума путем сокращения интервала неопределенности — «метод золотого сечения». Заметим, что при исследовании операция с фиксированным временем окончания подпрограммы FIN становится очень простой, вследствие чего следует ожидать существенного сокращения времени решения всей задачи.

Программный блок 2 иллюстрируем случаем, когда компоненты управления объекта Q ограничены по модулю и оптимальное гарантирующее управление $\mathbf{u}_q^*(t)$ определяется в классе релейных управлений с конечным числом точек переключения.

Обозначим через K количество точек переключения в каждой компоненте исходного управления, а через t_{ji}, $j = \overline{1,m}$, $i = \overline{1,K}$ — моменты переключения j-й компоненты вектора управления $\mathbf{u}_q(t)$. Тогда очевидны ограничения на параметры

$$t_{ji} \geq t_{j(i-1)},\ i = \overline{2,K},\ j = \overline{1,m}, \tag{6.246}$$

которые естественно упорядочить следующим образом:

$$\begin{cases} t_1 = t_{11},\ t_2 = t_{12}, \ldots,\ t_K = t_{1K}; \\ t_{K+2} = t_{21},\ t_{K+2} = t_{23}, \ldots,\ t_{2\times K} = t_{2K}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ t_{(m-1)K+1} = t_{m1},\ t_{(m-1)K+2} = t_{m2}, \ldots,\ t_{m\times K} = t_{mK}. \end{cases} \tag{6.247}$$

Полученная $m \times K$ параметрическая задача нелинейного программирования с ограничениями (6.246) может быть решена известными методами нелинейного программирования.

Общая структура блока 2 для нахождения оптимальных гарантирующих (в классе релейных функций) управлений программно-управляемого объекта Q включает в себя два сервисных модуля (модуль ввода и контроля данных и модуль вывода результатов): модуль, реализующий один из методов нелинейного программирования с ограничениями, — модуль EKSTREM, а также обрабатывающий модуль FUNK.

Модуль FUNK вычисляет для каждого набора параметров t_{ij}, $j=\overline{1,m}$, $i=\overline{1,K}$ (точнее, для соответствующего вектора управления $U_q(t)$) значение функционала $E_3^{**}\left(\mathbf{u}_q(t)\right)$. Кроме того, для работы модуля EKSTREM необходимо вычисление ограничений (6.246), которое осуществляется в модуле GRAND.

Структура связей модулей в подпрограмме FUNK приведена на рис. 6.44.

$$E_3 = E_1^{**}\left(\mathbf{u}_q, \mathbf{K}^*\left(t,\tau,\mathbf{u}_q\right)\right).$$

Здесь блок WUQ вычисляет вектор управления $\mathbf{u}_q(t)$, соответствующий параметрам t_{ij}: WXQ вычисляет значения фазовых координат $\mathbf{x}_q(t)$ объекта Q на интервале $[0,t_B]$ при управлении $\mathbf{u}_q(t)$, в блоке WXP определяются значения фазовых координат $X_{P_0}(t)$ объекта P на опорной траектории.

Блок WE2 вычисляет значение функционала сложности при $\mathbf{K}_0^*\left(t,\tau,\mathbf{u}_q,\rho\right)$. При работе этого блока кроме подпрограммы, вычисляющей матрицу $\mathbf{K}_0^*\left(t,\tau,\mathbf{u}_q,\rho\right)$, используется подпрограмма WNR, которая вычисляет функционал качества $E_3\left(\mathbf{u}_q,t\right)$ объекта Q и зависит от его конкретного вида.

Матрица ИПФ $\mathbf{K}_0^*\left(t,\tau,\mathbf{u}_q,\rho\right)$ и матрица $\mathbf{K}^*\left(t,\tau,\mathbf{u}_q,\rho\right)$ вычисляются с помощью подпрограммы KIPF, для работы которой, как было показано выше, в первом случае используются подпрограммы PIPF, WOM, AIPF, PPD, WNR, PRO, SSS, а во втором случае — подпрограммы WOM, AIPF, PPD, WNR, PRO, SSS.

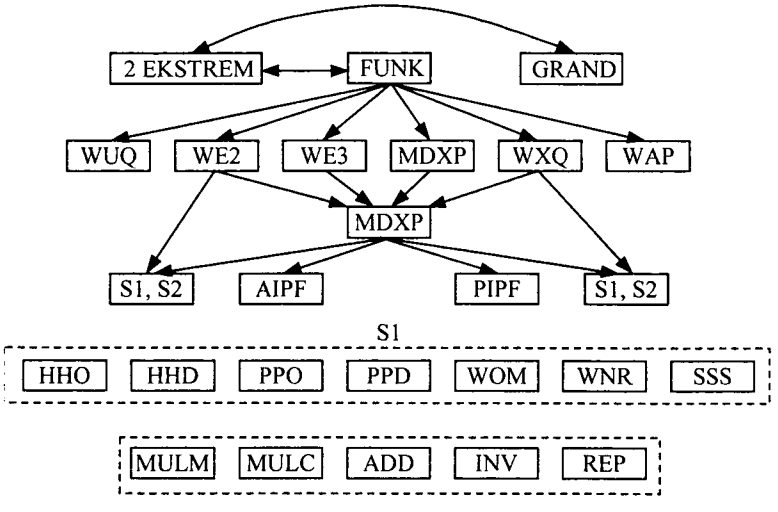


Рис. 6.44. Структура связей модулей в подпрограмме FUNK

При решении поиска гарантированной оценки эффективности заданной $\mathbf{u}_q(t)$ объекта Q из АО исключается блок 2 (см. рис. 6.42). При исключении блока 2 оптимизации управления объекта Q задача превращается также в задачу гарантированной оценки многомерного фильтра с заданной частью и прототипом [11, 31].

С учетом измерений разработаны варианты получения характеристик фильтра с ограничением промежуточной координаты FILTR-1 и учетом прототипа FILTR-2 [24].

6.8.5. Об анализе близости минимаксных и максиминных оценок эффективности в интегро-дифференциальной позиционно-программной задаче сближения-уклонения на основе ε-равновесия

Сравнение алгоритмических особенностей минимаксных и максиминных подходов. Полное исследование рассматриваемой задачи сближения-уклонения требует ее решения с позиции обоих сторон, т.е. решения максиминной (для Q) и минимаксной (для P) задач, причем решение последней задачи дает оптимальную матричную ИПФ, которая имеет смысл оптимального описания замкнутой системы управления объектом P.

Как известно, обе задачи могут быть также интерпретированы как задачи фильтрации, например [2, 11, 26], с получением гарантированных оценок фильтрации и характеристик фильтров. При этом «технологии» получения решения в обоих видах интерпретации (управления и фильтрации) одинаковы (см., например, максиминные задачи получения гарантирующего управления [12] и гарантирующего фильтра [11]).

Из анализа следует, что в отличие от линейной задачи фильтрации максиминного подхода [24, п. 8.2, 8.3] с ее аналитической разрешимостью относительно $\mathbf{K}(t_k,\tau)$ при фиксированном $\mathbf{u}_q(t)$ (даже при учете заданной части $\alpha(t,\tau)$) минимаксная задача сводится к комбинации задач нелинейной фильтрации и «накопления возмущений», которая еще более усложнится при ее рассмотрении в общем виде и учете заданной части фильтра.

Условия ε-равновесия и равновесия в интегро-дифференциальной задаче сближения-уклонения. Очевидно, что если между минимаксными и максиминными оценками имеет место близость (ε-равновесие), то находить оптимальные решения для P и Q можно на основе одного из двух подходов, при этом сравнение подходов в [24, п. 8.5.1] показывает преимущество максиминного подхода.

Поэтому выполнение условий равновесия или ε-равновесия упрощает поиск оптимальных решений противодействующих сторон. Кроме того, как известно [24, гл. 7], равновесные решения являются устойчивыми к дополнительной информации.

В [24, гл. 7] даны типичные условия равновесия и ε-равновесия. С учетом специфики рассматриваемой интегро-дифференциальной задачи условия близости максимина и минимакса обсуждаются, например, в работах [2, 26, 29]. Если в работе [2] анализ равновесия для родственной задачи фильтрации проводится на интуитивной основе, то в [26, 29] для исследования ε-равновесия рассматриваемой задачи с учетом ограничений, заданной части и аддитивных шумов привлечены результаты общей теории игр — теоремы Сайона, Фань-Цзи, Никайдо [10]. В данном пункте на основе сформулированных типовых условий приводятся результаты исследований специфических особенностей условий равновесия и ε-равновесия для интегро-дифференциальной задачи противодействия с учетом мультипликативных и аддитивных помех, обобщенных ограничений для обоих объектов (двух видов ограничений сложности решения для P, общих свойств множества управления Q), обобщения заданной части (для телесамонаведения объектов P), нелинейного описания объекта Q, а также обобщенного анализа требуемых условий квазивогнутости показателя по управлению объекта Q.

Вначале рассмотрим утверждение при условии, что $\mathbf{\Gamma}(t)=\mathbf{E}$ и описание объекта Q линейно.

Утверждение 6.19 (условия ε-равновесия). Пусть X_k и U — выпуклые множества евклидова или гильбертова бесконечного мерного пространства (в частном случае $X_k \subset C_1[t_0,t_k]$; $U \subset L_2[t_0,t_k]$ или $X_k, U \subset L_2[t_0,t_k]$), U — слабокомпактное в L_2

(релейные управления вида $|u_i| = u_{im}$, $i = 1,2,\ldots$). Если функционал $J(\mathbf{u},\mathbf{K})$ при каждом $\mathbf{u} \in U$ определен, непрерывен (следовательно, полунепрерывен снизу) и выпуклый на замыкании X_k, при каждом $\mathbf{K} \in X_k$, определен, непрерывен (следовательно, полунепрерывен сверху) и вогнутый на U, то

$$\inf_{\mathbf{K}} \sup_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u},\mathbf{K}) = \sup_{\mathbf{u}} \inf_{\mathbf{K}} J(\mathbf{u},\mathbf{K}) = J(\mathbf{u}^0,\mathbf{K}^0). \tag{6.248}$$

То есть имеет место ситуация ε-равновесия:

$$\begin{aligned} &\sup_{\mathbf{u}} J(\mathbf{u},\mathbf{K}) \geq J(\mathbf{u}^0,\mathbf{K}^0) - \varepsilon, \\ &\inf_{\mathbf{K}} J(\mathbf{u},\mathbf{K}) \leq J(\mathbf{u}^0,\mathbf{K}^0) + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \end{aligned} \tag{6.249}$$

которая означает, что объект P при всех возможных действиях может улучшить свой результат (уменьшить потери J) по сравнению с (6.248) не более, чем на малое $\varepsilon > 0$; аналогично, объект Q может улучшить свой результат (увеличить «выигрыш» J) по сравнению с (6.248) не более, чем на малое $\varepsilon > 0$.

Перед тем как перейти к доказательству, укажем несколько следствий.

Следствие 1. Так как из выпуклости и вогнутости функционала J следует его квазивыпуклость и квазивогнутость, то утверждение 6.19 справедливо и для квазивогнуто-квазивыпуклых J.

Следствие 2. Если U — компактное, утверждение 6.19 близко к теореме Сайона [10, 26], а при X_k — ограниченном и замкнутом, еще сильнее компактном, всегда имеет место ситуация равновесия $(\varepsilon = 0)$.

6.8.6. Примеры применения интегро-дифференциальной задачи сближения-уклонения

Как было указано в [24, гл. 1, 8], данная методика нашла применение в двух практически полезных задачах сближения-уклонения, которые, как известно, имеют место в конфликтной ситуации ЛС СВН–ЛС ПВО [30, 59, 64, 67]. Это задача защиты РЛС от управляемой противорадиолокационной ракеты (ПРР) с помощью дополнительных источников излучения (ДИИ) и задача уклонения программно-маневрирующего аэродинамического объекта (АДО) от зенитно-управляемой ракеты (ЗУР).

В данном пункте рассматриваются частные случаи приведенных задач в качестве иллюстративных примеров. Более полное исследование данных задач приведено в [24, гл. 10].

Защита РЛС от СУ ПРР (объект P) с помощью ДИИ (объект Q). При обращении ДИИ вокруг РЛС с частотой в полосе пропускания ПРР с РГСН с опережающим РЛС импульсным излучением ДИИ или с выключением РЛС на малом интервале времени [24, гл. 10] задача может быть описана следующей моделью, для которой приводятся полученные результаты.

Рассматривается программно-управляемый объект Q, равномерно движущийся по окружности радиуса l_0 в плоскости, перпендикулярной оси OX системы координат $OXYZ$ (рис. 6.45), и самонаводящийся объект P, находящийся в момент времени $t_0 = 0$ в начале координат системы $OXYZ$.

Объект Q описывается в разрешенном относительно системы координат $OXYZ$ виде $\mathbf{x}_{q\Delta}$ $(L = E,\ n = 2)$:

$$\psi(t) = \operatorname{arctg}(l_0/l)\sin(ut+b);$$

$$\eta(t) \cong \operatorname{arctg}(l_0/l)\cos(ut+b) \quad \text{при } l \gg l_0,$$

где $u(t) = u = \text{const} \in U$ $(u\colon\ 0 \le u \le \vec{u})$ — угловая скорость движения объекта, b — угол, задающий начальное положение объекта Q относительно оси O_1Y, $\vec{u}$ — определяется полосой частот СУ ПРР.

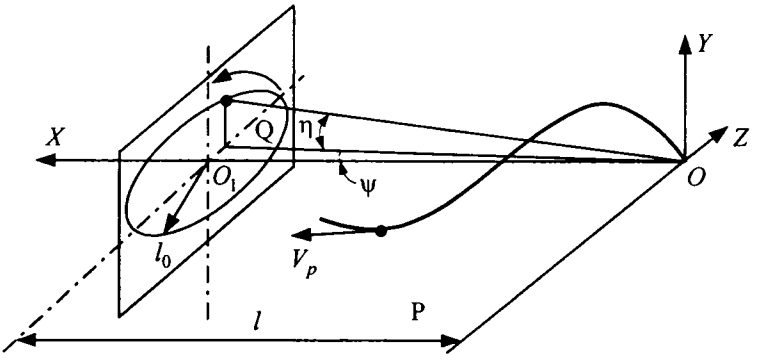


Рис. 6.45. Равномерное движение программно-управляемого объекта Q

В качестве опорного используется движение объекта Р по прямой OO_1 со скоростью $V_{p_0} = \text{const}$. Кроме того, полагается, что

$$\mathbf{H}_\Delta(t) = \left(l/\left(l - V_{p0}t\right)\right)\mathbf{E}, \quad \mathbf{A}_\Delta(t_k,\tau) = \left((t_k - \tau)/\left(V_{p0}t_k\right)\right)\mathbf{E}.$$

Рассматривается случай ограничения сложности стратегии объекта Р с помощью функционала сложности $E_2^{(2)}(\mathbf{K}_\Delta)$, где в качестве прототипа используется матрица ИПФ

$$\mathbf{K}_\Delta^n(t,\tau) = \delta e^{-\alpha(t-\tau)}\sin\left(w(t-\tau)+\beta\right)\mathbf{E}.$$

На рис. 6.46 приведены величины $\Delta_{\text{отн}}$ (отношения преобразованной в декартову систему координат гарантированной оценки динамической компоненты $\sqrt{\operatorname{tr}\left\{M\left[\varepsilon^{\text{д}}(t_k)\right]M\left[\varepsilon^{\text{д}\mathrm{T}}(t_k)\right]\right\}} = f\left(\mathbf{K}^*\right)$ «промаха» к l_0) для различных стратегий объекта Q, разных уровней ограничения сложности $S^{(2)}$ и двух начальных углов b. Случайная компонента «промаха» в широком диапазоне изменения уровня спектральной плотности помехи здесь мала по сравнению с динамической компонентой. Таким образом, оптимальной (гарантирующей) стратегией объекта Q является при $b = 0$ движение с угловой скоростью $u = 0{,}8\ \text{с}^{-1}$, а при $b = 1{,}57$ — с угловой скоростью $u = 0{,}3\ \text{с}^{-1}$.

Представляет интерес также рис. 6.47, на котором приведены осредненные по начальному углу b, полагаемому равномерно распределенным в интервале $(0, 2\pi)$, величины $\overline{\Delta}_{\text{отн}}$. Приведенные результаты получены при $l_0 = 200$ м, $l = 2500$ м, $V_{p_0} = 521$ м/с, $t_k = 4{,}7$ с, $\delta = 5$, $\alpha = 0{,}35$, $\omega = 0{,}41\ \text{с}^{-1}$, $\beta = 0$, $\lambda_q = 1$, $\mathbf{\Omega}(t,\tau) = \mathbf{E}$, $\mathbf{\Gamma}(t) = \mathbf{E}$, $\mathbf{N}_n^2(\tau) = N_n^2\mathbf{E}$, $N_n^2 = \text{const} = 1\cdot10^{-6} - 1\cdot10^{-8}\ \text{с}^{-1}$. Оптимально $u \cong 0{,}4\ \text{с}^{-1}$.

Следует отметить, что возможность получения оптимального решения для Р в «окрестности» прототипа (ПРР — СТАНДАРТ, ХАРМ и т.д.) отражает возможную

для Q неопределенность действий объекта P (отсутствие точной информации о методе наведения объекта P, ресурсах и т.п.). Поэтому данная методика, кроме всего остального, позволяет получать решение для Q в условиях неопределенности относительно объекта P [12].

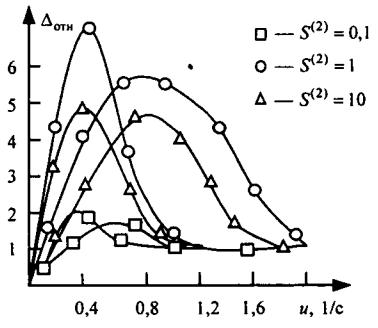


Рис. 6.46. Графики $\Delta_{отн}$

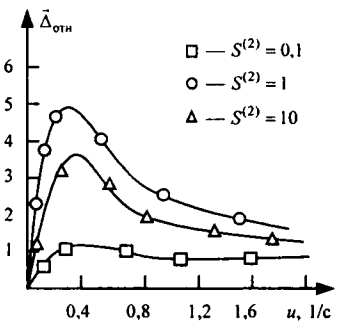


Рис. 6.47. Графики $\bar{\Delta}_{отн}$

Уклонение программно-маневрирующего аэродинамического объекта (объект Q) от системы управления ЗУР (объект P). В соответствии с рис. 6.48 простейшее описание объекта Q, программно-маневрирующего в вертикальной плоскости, имеет вид

$$\dot{\mathbf{x}}_{q\Delta} = \mathbf{A}_q \mathbf{x}_{q\Delta} + \mathbf{B}_q \mathbf{u}_q, \quad t_0 \le t \le t_k;$$

$$\mathbf{A}_q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{\ddot{r}}{r} & -\dfrac{2\dot{r}}{r} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B}_q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_q = (0,u)^{\mathrm{T}},$$

где $x_{q_1\Delta}(t_0) = x_{q_2\Delta}(t_0) = 0$, $r_q = r_0 - V_q t$, $V_q = V_{q_0} = \text{const}$, $r_0 = H_0^2 + L_0^2$.

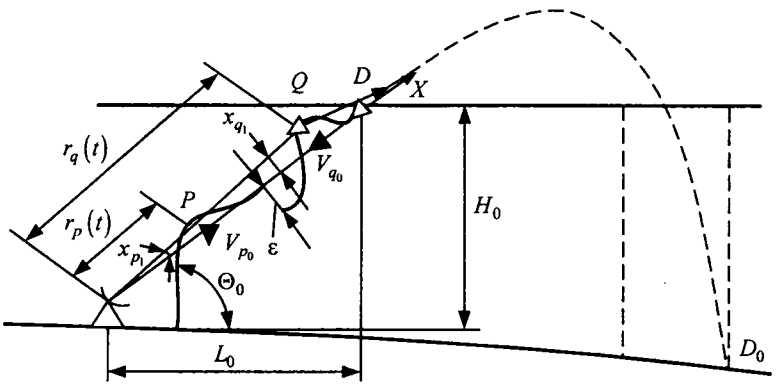


Рис. 6.48. Объект Q, программно-маневрирующий в вертикальной плоскости

В данном примере $n = 2$, $r = 1$. Множество допустимых управлений Q определяется условием $U = U(u: |u| \le at)$ (рис. 6.49).

Примем, что объекту P доступна для измерения координата $x_{q_1\Delta}(t)$, $N_1^2 = \text{const}$. Тогда $y_1 = x_{q_1}(t) + n_1(t)$ и $\mathbf{H}_\Delta = (1,0)$. Кинематические связи объекта P имеют вид

$$\mathbf{A}_{\Delta}(t_k,\tau)=\frac{t_k-\tau}{r_p(t)},$$

где $r_p(t)=V_p t$, $V_p=\text{const}$, $t\ge t_0$.

Величина t_k определяется из равенства $r_P(t_k)=r_Q(t_k)$.

В данной задаче рассматривается функционал ограничений вида $E_2^{(1)}$ с ограничением среднего квадрата ускорений объекта Р $j_p(t)$.

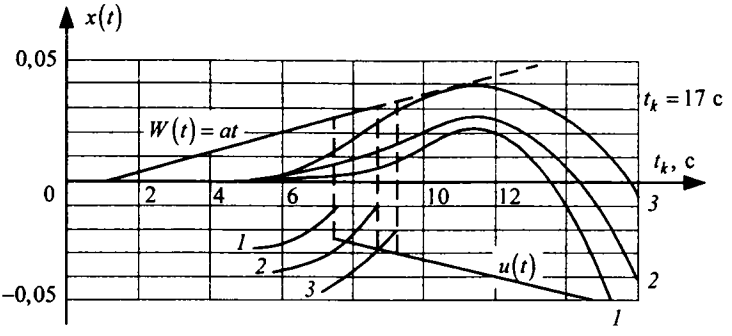


Рис. 6.49. Графики оптимальных управлений и траекторий $x^0_{q1\Delta}(t_k)$

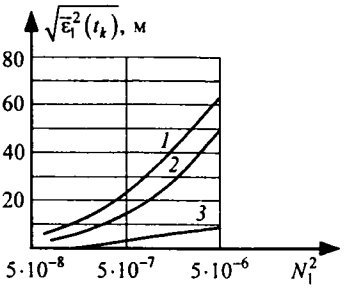


Рис. 6.50. Графики среднеквадратической оптимальной ошибки

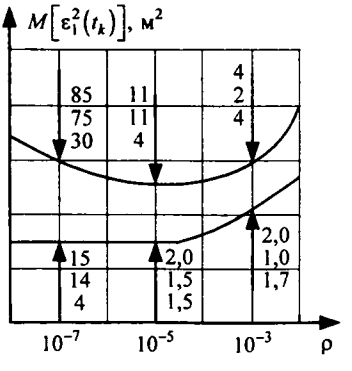


Рис. 6.51. Зависимость величины $M\left[\varepsilon_1^2(t_k)\right]$ на оптимальной траектории

На рис. 6.49–6.51 приведены некоторые результаты решения задачи для трех правых условий задачи максимизации:

$$x_{q_1\Delta}(t_k) = -0{,}065,$$

$$x_{q_1\Delta}(t_k) = -0{,}05,$$

$$x_{q_1\Delta}(t_k) = -0{,}01.$$

Графики оптимальных управлений и траекторий $x^0_{q_1\Delta}(t_k)$ изображены на рис. 6.49. Характерной особенностью управлений является наличие одной точки переключения (для данных вариантов $t_n \approx 8 \div 9$ с).

Анализ рис. 6.50 позволяет сделать вывод о характере роста среднеквадратической оптимальной ошибки при увеличении уровня спектральной плотности N_1^2 помехи.

На рис. 6.51 приведена зависимость величины $M\left[\varepsilon_1^2(t_k)\right]$ на оптимальной траектории от уровня ограничения нормальных ускорений объекта P. На этом же рисунке приведены столбцами максимальные на траекториях P среднеквадратические значения $j_p(t)$, значения дисперсии и математического ожидания $j_p(t)$. Показан характер роста ошибки с увеличением уровня ограничений (или уровня сложности) и убывания трех характеристик ускорения. Построить параметрические области возможного ускорения и перехвата объекта Q позволяют рис. 6.50, 6.51.

6.9. ПРОГРАММНО-ТЕХНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ ДЛЯ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ АВТОМАТИЗИРОВАННОГО ПРОЕКТИРОВАНИЯ И УПРАВЛЕНИЯ ММС

6.9.1. Программная система многокритериальной оптимизации многообъектных динамических систем («МОМДИС») для отладки алгоритмов моделирования и оптимизации ММС и исследования СТЭК

Назначение. ПС «МОМДИС» позволяет проектировать в интерактивном режиме параметризованные программно-корректируемые законы управления сложных систем, проектируемых или функционирующих в условиях исходной структурной несогласованности, конфликта и неопределенности.

Принцип действия. ПС «МОМДИС» состоит из совокупности двух больших подсистем: подсистемы пользовательского интерфейса и математической подсистемы. Математическая подсистема реализована в математическом пакете *Matlab* и состоит из необходимых для проектирования подсистем моделирования и оптимизации. Пользовательский интерфейс на основе GUI-интерфейса позволяет гибко управлять процессом проектирования и получать полную информацию в виде графиков и таблиц. После введения в ПС динамической модели сложной системы в виде набора коалиционных структур на множестве взаимодействующих объектов управления производится оптимизация управления многообъектной системой по вектору показателей. Подсистема оптимизации содержит ряд модулей, которые отдельно и в совокупности позволяют найти оптимальное управление или закон управления при бескоалиционном, коалиционном и кооперативном взаимодействии объектов на основе методов оптимизации по Нэшу, Парето, Шепли, по методу «угроз и контругроз» и др. Проектировщик имеет возможности комбинировать решения для получения стабильно-эффективных компромиссов. Для выбора начальных приближений применяется модуль сетевого глобального анализа. Поэтому алгоритмы приобретают двухэтапный

характер. Для получения и отладки законов управления реализуется потактовая комбинация подсистемы моделирования и оптимизации.

В ПС «МОМДИС» на основе достижений теории игр и теории управления реализованы оригинальные, модифицированные и классические методы получения стабильных (равновесных) и эффективных (векторно-оптимальных) решений, а также вновь полученные комбинации данных методов в виде стабильно-эффективных компромиссов при взаимодействии подсистем сложной системы, коалиций динамических объектов в конфликтной ситуации или в условиях неопределенности.

Область применения: оптимизация управления и моделирование в технических, экономических, экологических, биомедицинских, социальных и других процессах и системах.

Комплектация оборудования: IBM-совместимый компьютер с процессором не ниже Pentium-II и установленным пакетом *Matlab*, 20 Мб свободного дискового пространства, операционная система Windows'98 и выше. Позволяет исследовать взаимодействие до четырех коалиций, размерность векторного целевого функционала ≤12; порядок вектора состояния ≤50; порядок вектора управления ≤20; число компонент вектора измеряемого выхода для вычисления векторного целевого функционала ≤12.

Структура ПС «МОМДИС». Структурная схема ПС «МОМДИС», основы которой изложены в [24], дана на рис. 6.52.

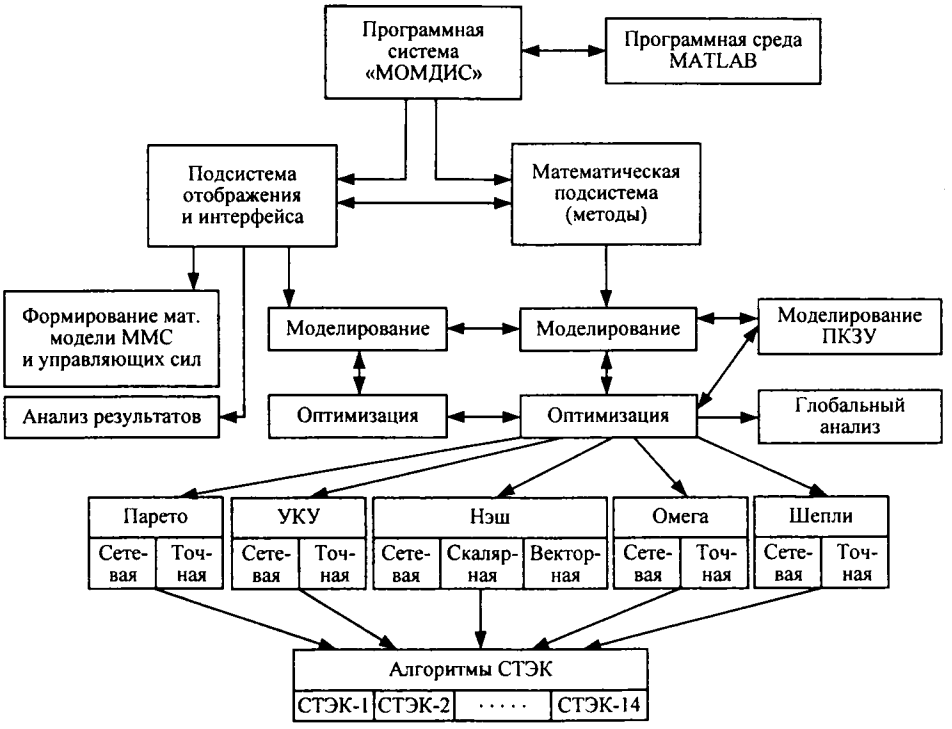


Рис. 6.52. Структура ПС «МОМДИС»

Объектно-ориентированная структура ПС «МОМДИС» сформирована как совокупность двух больших подсистем: математической подсистемы и подсистемы отображения информации и пользовательского интерфейса.

Математическая подсистема ПС «МОМДИС». Как следует из рис. 6.52, математическая подсистема включает совокупность методов моделирования и оптимиза-

ции. В системе представлены десять методов интегрирования (Эйлера, Адамса второго и четвертого порядка, Рунге–Кутта второго, четвертого и шестого порядка, Кутта–Мерсона четвертого порядка, Гира четвертого порядка, Дорманда–Принса пятого порядка, экстраполяционный метод с переменным шагом и порядком — обобщение схемы Рунге–Кутта). Каждый из методов применяется к своему классу задач, однако интерфейс организован таким образом, что разработчик в любой момент может использовать любой метод.

Функции имитационного моделирования реализуются в рамках математической подсистемы, когда на начальном этапе проектирования отлаживается математическая модель системы, исследуется влияние различных факторов на динамические свойства системы, а на заключительном этапе исследуются свойства системы в окрестности полученных оптимальных режимов.

В настоящее время для настройки параметров ПКЗУ и моделирования ПКЗУ ММС формируется последовательная процедура потактового моделирования, оптимизации и сетевых подходов. В ПС «МОМДИС» реализованы рассмотренные в данной главе двухэтапные методы оптимизации ММС: Нэш-оптимизация (п. 6.2); Парето-оптимизация (п. 6.3); Ω-оптимизация (п. 6.3); УКУ-оптимизация (см. п. 6.4); Шепли-оптимизация как комбинация Нэш- и Парето-подходов (п. 6.5): глобальный анализ на основе сетевых методов (п. 6.3), который, как правило, формирует первый этап выбора начальных приближений в алгоритмах оптимизации. На основе комбинации Парето–Нэш–УКУ–Шепли-оптимизации ПС «МОМДИС» позволяет формировать ряд стабильно-эффективных компромиссов в ММС (п. 6.6).

Библиотека алгоритмов имеет двухуровневую структуру, где I-й уровень — элементы алгоритмов, II-й уровень — собственно алгоритмы Парето–Нэш–УКУ–Шепли-оптимизации, организующие работу алгоритмов I-го уровня в соответствии с определенной логикой.

В библиотеку I-го уровня включены следующие структурные элементы алгоритмов:

- вычисление конуса доминирования и выбор направления спуска;
- вычисление шаговой длины внутри конуса;
- элементы шаговой оптимизации с линейными ограничениями (направление движения — по градиенту (аппроксимирующему градиенту), по методу возможных направлений, по методу Хука–Дживса; шаговая длина — дробление шага, параболическая интерполяция, золотое сечение, комбинация двух последних, модификация дробления шага на случай разрывных показателей; определение состава активных ограничений; вычисление расстояния до границы допустимой области в данном направлении);
- использование стандартной подпрограммы симплекс-метода;
- численное дифференцирование (вектора по вектору, скаляра по вектору) (формирование односторонних, центральных разностей);
- организация штрафных итераций при наличии нелинейных ограничений;
- организация вычислений при варьировании подвектора параметров $q \in Q$ в алгоритме Нэш-оптимизации;
- элементы глобального анализа (генерация ЛП-последовательности, равномерно заполняющей допустимую область, или ортогональной последовательности; составление таблицы испытаний; Ω- или УКУ-оптимизация таблицы);
- вычисление значений векторного показателя.

Математическая подсистема взаимодействует с подсистемой пользовательского интерфейса, получая от нее модель и данные для расчетов и передавая ей результаты для отображения.

Подсистема отображения и пользовательского интерфейса. Данная подсистема объединяет совокупность модулей, отвечающих за общение программы с внешним

миром: чтение-запись данных и результатов, отображение и манипулирование данными и др. Сюда же можно отнести и подсистему анализа и компиляции исходной модели.

Оболочка ПС «МОМДИС» позволяет в режиме диалога изменять параметры системы, задавать начальные данные, выбирать методы моделирования и оптимизации, проектировать в интерактивном режиме параметризованные программно-корректируемые законы управления, производить обработку и анализ полученных результатов. Разработан оригинальный многооконный пользовательский интерфейс. Переработана система отображения информации, которая позволяет одновременно просматривать необходимое количество графиков нескольких моделей и выполнять с ними необходимые действия.

Самый верхний уровень оболочки в экранном представлении предлагает следующую пятиуровневую структуру (рис. 6.53): задание математической модели ММС, моделирование, оптимизация, моделирование ПКЗУ, просмотр результатов.

Окно задания математической модели ММС (рис. 6.54) позволяет полностью описать исходную систему уравнений, задав в ней необходимое число параметров, участвующих в процедуре оптимизации, ввести математическое описание показателей с участием вектора состояния системы, задать необходимые ограничения на параметры, начальные значения параметров, логические условия («IF») и др.

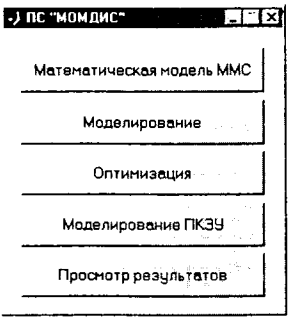


Рис. 6.53. Окно верхнего уровня ПС «МОМДИС»

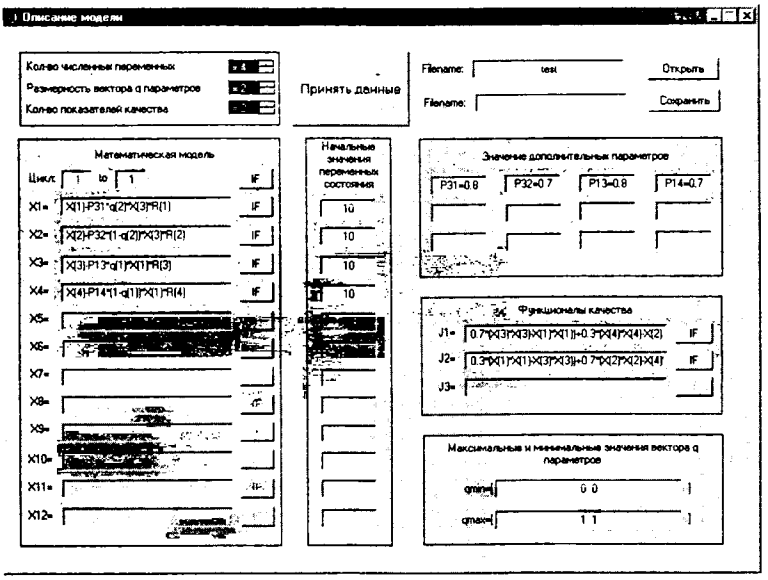
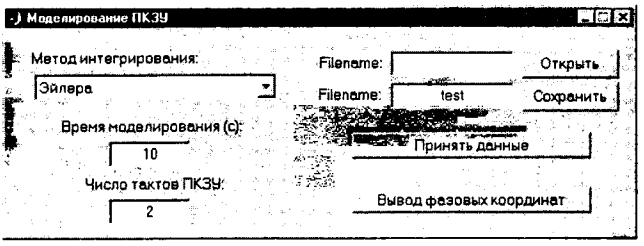


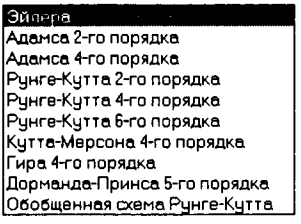
Рис. 6.54. Пример задания математической модели ММС

Диалоговое окно «Моделирование» (рис. 6.55, *а*) предлагает перейти к форме, в которой необходимо задать следующие данные:

- метод интегрирования (один из 10, представляемых в раскрывающемся списке — см. рис. 6.55, *б*);
- время моделирования задаваемой ММС;
- число тактов программно-корректируемого управления;
- возможность загрузки данных из файла для ранее созданной модели ММС, а также сохранения введенных данных для текущей модели (необходимо ввести имя файла в нужное поле «Filename»).



а



б

Рис. 6.55. Окно «Моделирование ММС» (*а*) и выбор метода интегрирования (*б*)

С помощью модуля моделирования возможно построение фазовых координат системы в зависимости от времени моделирования и числа тактов ПКЗУ, а также графическое отображение полученного в ходе оптимизации закона управления ММС.

Отдельно следует выделить моделирование программно-корректируемого закона управления (окно представлено на рис. 6.56), когда на отдельном программном такте ПКЗУ происходит вызов сначала модуля оптимизации с расчетом оптимального управления такта, затем осуществляется моделирование ММС с учетом полученного решения, после чего конечные значения переменных, полученные в результате моделирования к концу текущего такта, передаются как начальные условия для следующего такта ПКЗУ. Данная процедура продолжается до тех пор, пока не будет полностью сформировано программное управление на всем интервале времени, на котором рассматривается система.

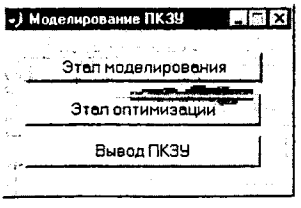


Рис. 6.56. Окно моделирования ПКЗУ

Вывод результатов моделирования подразумевает построение всех необходимых графиков (ПКЗУ, вектор состояния), вывод как на экран, так и в отдельные файлы полученного оптимального решения задачи и промежуточных результатов оптимизации и моделирования для всех используемых методов, которые применялись для решения поставленной задачи оптимизации ММС.

С целью упрощения общей структуры интерфейса ПС «МОМДИС», представленной на рис. 6.53, разработано несколько модификаций ПС «МОМДИС» с однотипным интерфейсом для различных типов учебных задач. Ниже рассматривается вариант для расчета двух- и трехкоалиционных задач (размерность вектора показателей $n \le 3$, размерность вектора показателей каждой из сторон $n \ge 2$), который позволяет эффективно решать наиболее часто встречающиеся задачи оптимизации ММС. Для данной модификации полностью проработан интерфейс, позволяющий пользователю задавать математическую модель ММС, наглядно получать результаты оптимизации, управляя выводом как числовых данных оптимизации, так и их визуализацией в процессе расчетов. Такой вариант достаточно удобен, например, для использования в качестве одного из инструментов при выполнении студентами курсовых и дипломных работ. Табличные данные позволяют легко оценить качество оптимизации различными методами.

Для задания более сложных моделей, требующих подробного задания математической модели, предусмотрена модификация ПС «МОМДИС», реализующая последовательный диалоговый многооконный режим общения с пользователем, где данные оптимизации представляются только в табличной форме без применения процедур визуализации. Для моделей ММС с размерностью вектора показателей больше трех при необходимости могут быть построены проекции областей показателей и параметров в окрестности оптимального решения.

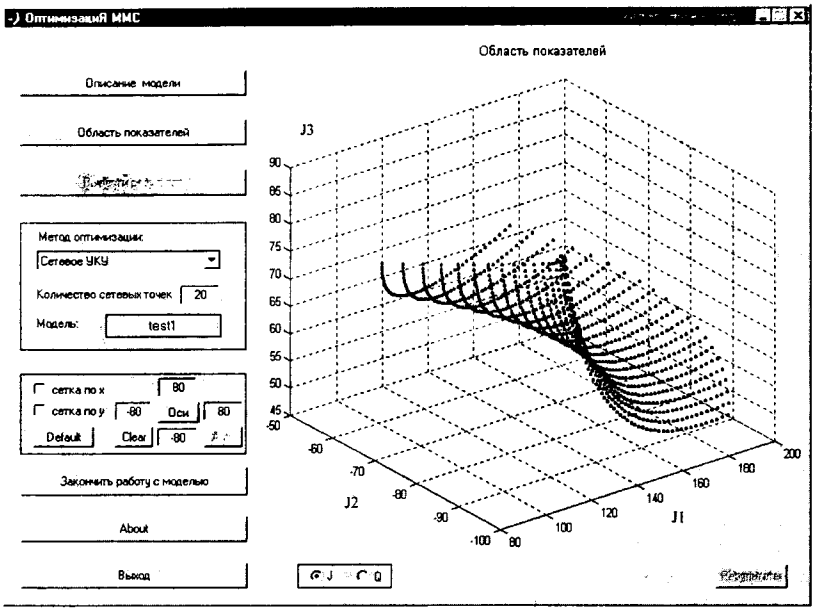
На рис. 6.57, *а* представлено главное окно модуля оптимизации, включающее графическое окно, которое отображает результаты оптимизации; кнопки, необходимые для ввода и коррекции математической модели; выбор метода оптимизации ММС; блок управления графическим полем.

Окно модуля оптимизации ММС содержит следующие управляющие элементы:

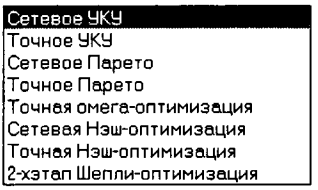
1. «Описание модели» (рис. 6.57, *а*): задание размерностей вектора параметров и вектора показателей, векторов нижних и верхних ограничений на параметры; ввод математической модели ММС в виде разностных уравнений и начальных значений переменных состояния; задание дополнительных параметров, используемых при задании и расчете модели ММС; а также задание функционалов качества, необходимых для формирования области показателей и получения на ней оптимального решения задачи. Для загрузки параметров с диска в систему и наоборот используется окно диспетчера файлов: ввод данных в систему («Открыть») и загрузка ранее заданной модели ММС («Загрузить»). После загрузки модели переход к окнам моделирования и оптимизации осуществляется с помощью окна верхнего уровня.
2. «Область показателей» — кнопка расчета области показателей, которая выводится сразу по окончании вычислений в графическом поле с тем же названием. Переключатель «J»–«Q» позволяет осуществлять визуализацию либо области функционалов (J), либо области параметров (Q), при размерности вектора показателей $n \le 3$, получая либо двухмерное, либо трехмерное изображение областей (см. рис. 6.57, *а*) при использовании заданной ортогональной сети.
3. Меню «Метод оптимизации» — позволяет выбрать один из восьми методов оптимизации ММС (рис. 6.57, *б*). После выбора метода нажатием кнопки «Вывести результат» происходит расчет оптимальных значений показателей и параметров и одновременный вывод ее в графическом окне, используя конкретное цветовое

обозначение для данного типа точек. Набор значений по каждому из параметров в пределах такта конфликта определяется путем задания необходимого количества сетевых точек на области определения параметра.

4. «Результаты» — кнопка, выводящая отдельное окно с численными пошаговыми результатами работы для выбранной процедуры оптимизации, а также полная информация о количестве найденных оптимальных точек, о количестве фактических точек и времени счета по текущему методу.
5. Предусмотрена возможность управления графическим выводом: задание масштаба по обеим координатам, вывод равномерной сетки, выбор цветовой гаммы отображения соответствующих областей для различных методов; возможность стирания полученных областей, а также автоматического масштабирования области в зависимости от максимальных значений по координатам.



а



б

Рис. 6.57. Главное окно модуля оптимизации программной системы «МОМДИС» (*а*); раскрывающийся список при выборе метода оптимизации ММС (*б*)

Параметризация управления осуществляется на этапе составления и ввода исходной математической модели, описывающей поведение ММС, где учтено необходимое число параметров, аппроксимирующих функцию управления, и определены границы их изменения путем задания минимального и максимального пороговых значений для каждого параметра. Может быть предусмотрен ввод числа параметров параметризованного управления для каждой из коалиций, по умолчанию же полагается,

что общее число параметров коалиций равно количеству, вводимому в поле «Размерность вектора **q** параметров», распределенному равномерно на все коалиции (например, для числа коалиций $n = 2$ при вводе размерности $n_q = 4$ предполагается по умолчанию, что число параметров для каждой коалиции равно $n_q / n = 2$). При необходимости использования только части из выбранного числа параметров для данной коалиции необходимо задать интервал его изменения [0, 0], и, таким образом, в циклах оптимизации он участвовать не будет. На отдельном такте необходимо, чтобы размерность вектора параметров являлась четным числом. Все используемые на этапе оптимизации параметры должны быть использованы в записи математической модели ММС при ее составлении. Все остальные действия по оптимизации, моделированию и анализу результатов формируются через оболочку ПС.

Получение и исследование стабильно-эффективных компромиссов предполагает разработку процедур последовательной оптимизации в соответствии со свойствами СТЭК, когда СТЭК с номером i сужает множество решений, полученных для СТЭК с номером $i-1$, для последующего определения на нем решений на основе СТЭК с номером $i+1$.

Часть рассмотренных процедур реализована, часть составляет одну из перспективных задач развития ПС «МОМДИС» в рамках получения алгоритмов СТЭК.

Далее в качестве примера рассмотрим учебный вариант задания математической модели ММС при наличии двух коалиций в структуре ММС и по одному параметру для каждой стороны конфликта. Предполагается, что управление на отдельном такте постоянно, следовательно, параметризация для данного случая не применяется. Пример задания математической модели приведен выше на рис. 6.54.

Область значений показателей (двухмерный случай) с указанием точек СТЭК, полученных при оптимизации, и пояснениями приведена в главном окне оптимизации на рис. 6.58.

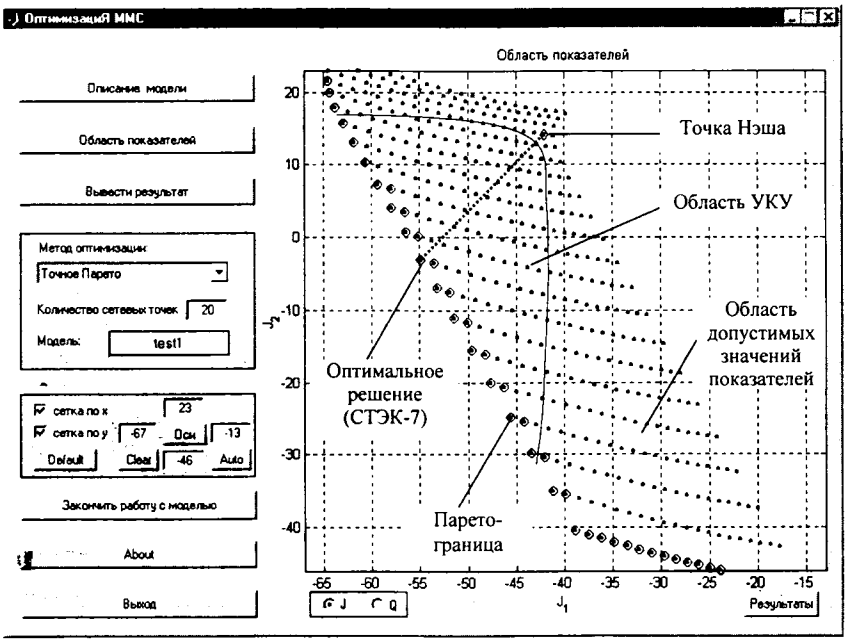


Рис. 6.58. Окно «Оптимизация ММС» с построенной областью значений показателей и указанием Нэш-, УКУ-, Парето-решений полученного оптимального решения задачи (СТЭК-7), приведенной на рис. 6.54

6.10. АЛГОРИТМ КОНФЛИКТНО-ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ММС С УЧЕТОМ ТЕКУЩИХ КОНФИГУРАЦИЙ СИСТЕМ, ОПТИМАЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ АКТИВНЫХ РЕСУРСОВ ПО ЦЕЛЯМ (ЦР) И ПРОГНОЗА ДИНАМИКИ КОНФЛИКТА (ПДК) НА ОСНОВЕ СТЭК

На рис. 6.59 приведена типовая конфигурация и схема противодействия конфликтной ситуации на основе ЗРК «Усовершенствованный Хок» с дивизионом ЗУР (четыре батареи) в рамках собственно тактической АСУ «Миссайл-Монитор» [59], которая применяется для управления ЛС ПВО в условиях театра военных действий (ТВД). Данной ЛС ПВО противодействует подразделение истребительной авиации (ПИА) ЛС СВН, которое состоит из эскадрильи ПИА (ударная группа (УГ) ПИА с ракетами ВВ и ВП (ПРР)) и эскадрильи подразделения бомбардировщиков (ПБ) (с управляемыми авиабомбами). Данная линейная конфигурация ЗРК имеет четырехслойную защиту ТВД или составляет сектор защиты объекта при известном направлении действия СВН. Приведенные на рис. 6.59 размеры конфигурации ПБ СВН являются минимальными. Данная ЛС ПВО в рамках тактической комплексной АСУ «Флорида» [59] может быть усилена двумя эскадрильями ПИА ПВО оснащенными УР ВВ дальнего и ближнего боя. Эта ситуация отражена на рис. 6.59 пунктирной линией.

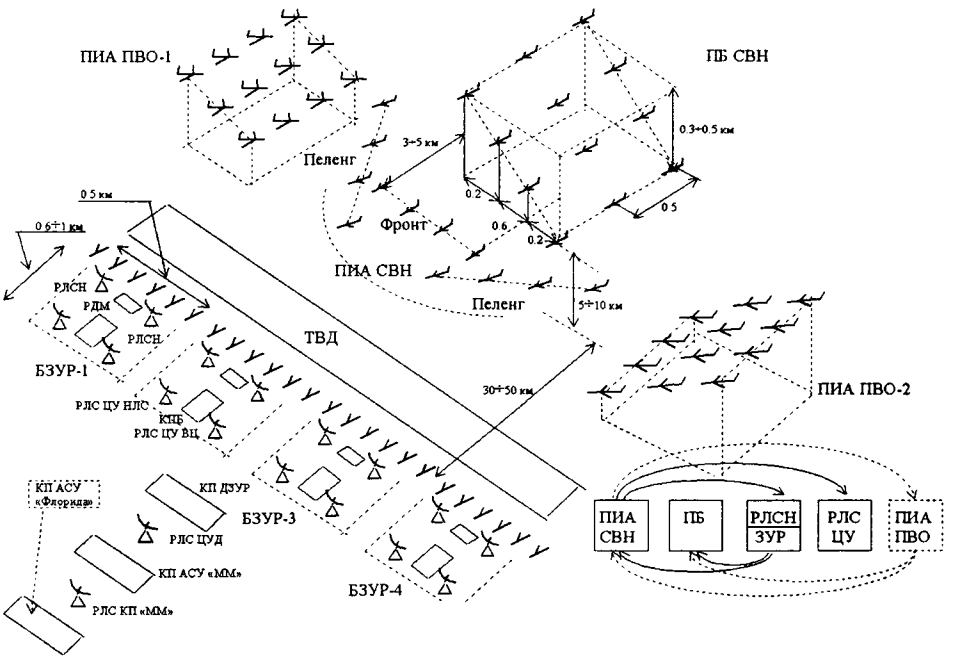


Рис. 6.59. Конфигурация КС ЛС СВН–ЛС ПВО (ЗРК «Ус. Хок» с ДЗУР и АСУ «ММ»)

В соответствии с рис. 6.59 начальные численности активных и пассивных объектов (АО, ПО) конфликтующих ММС составляют:

- активные объекты — АО СВН (эскадрилья УГ ПИА) — 12;
- пассивные объекты — ПО СВН (эскадрилья ПБ) — 12;
- активные объекты — АО ПВО (канальность ДЗУР по цели на такте конфликта) — 8;
- пассивные объекты — ПО ПВО (РЛС ЦУ БЗУР, ДЗУР, «М-М») (РДМ) — 10(14).

6.10.1. Учет «текущей» конфигурации на такте конфликта в задаче ЦР

Реальная задача целераспределения, в общем случае, выходит за рамки задач о назначении [19]. Для ее решения важна информация о взаимной конфигурации конфликтующих систем. Информация о взаимной конфигурации систем ПВО и СВН задается набором матриц $\left\{P_{ij}^{\theta\psi}\right\}$, где $P_{ij}^{\theta\psi}$ — вероятность поражения (эффективность взаимодействия) объекта типа j в точке конфигурации с меткой ψ объектом типа i в точке с меткой θ. Значение $P_{ij}^{\theta\psi}$ зависит от некоторых основных характеристик конфигурации: $P_{ij}^{\theta\psi} = f\left(P_{ij}^{\theta\psi}{}_0, r_{ij}^{\theta\psi}, \eta_{ij}^{\theta\psi}, \ell_{ij}^{\theta\psi}, \ldots\right)$, где $P_{ij}^{\theta\psi}{}_0$ — начальные вероятности; $r_{ij}^{\theta\psi}$ — наклонные дальности; $\eta_{ij}^{\theta\psi}$ — ракурсы при неподвижных точках θ и ψ; $\ell_{ij}^{\theta\psi}$ — уязвимость в направлении θ ψ в зависимости от многоместности защиты и другие факторы.

Начальные вероятности $P_{ij}^{\theta\psi}{}_0$ могут назначаться при знании типа активного средства и некоторых прицельных условий. С учетом известных характеристик активных средств СВН и ПВО ($0{,}2–0{,}3 \le P_{ij}^{\theta\psi} \le 0{,}8–0{,}9$) величины $P_{ij}^{\theta\psi}{}_0$ можно выбирать следующим образом:

$$P_{ij}^{\theta\psi}{}_0 = \begin{cases} 0{,}2 \div 0{,}3 \text{ — минимальный диапазон;} \\ 0{,}5 \div 0{,}6 \text{ — средний диапазон,} \end{cases}$$

но вероятность поражения МФ РЛС с учетом защиты меньше:

$$P_{ij}^{\theta\psi}{}_0 = 0{,}1 \div 0{,}25.$$

Учет наклонной дальности и ракурса формируется по простейшей вероятностной схеме. Если так называемый мешающий фактор α имеет ограничения $|\alpha| \le \alpha_k$, то отношение $|\alpha|/\alpha_k$ является мерой «неэффективности», вносимой данным фактором, а соответственно выражение $1-|\alpha|/\alpha_k$ является мерой «эффективности». Тогда зависимость вероятности от мешающего фактора имеет следующий вид:

$$P(\alpha) = P - \left[|\alpha|/\alpha_k\right]\cdot(P - P_0) = P_0 + \left[1 - |\alpha|/\alpha_k\right]\cdot(P - P_0),$$

где $P_0 \le P(\alpha) \le P$.

Таким образом, учет ракурса η формируется по следующей формуле:

$$P_{ij}^{\theta\psi}(\eta) = \begin{cases} P_{ij}^{\theta\psi}{}_0 + \left(1 - \dfrac{|\eta|}{\eta_k}\right)\cdot\left(0{,}7 - P_{ij}^{\theta\psi}{}_0\right) \text{ при } |\eta| \le \eta_k,\ P_0 \le P(\eta) \le 0{,}7; \\ \left(2 - \dfrac{|\eta|}{\eta_k}\right)\cdot P_{ij}^{\theta\psi}{}_0 \text{ при } \eta_k \le |\eta| \le 2\eta_k,\ 0 \le P(\eta) \le P_0. \end{cases} \tag{6.250}$$

Угол η определяется из выражения

$$\cos(\eta) = \cos(\overline{\theta})\cos(\varphi)\cos(\overline{\psi} - \chi) + \sin(\overline{\theta})\sin(\varphi),$$

где $\overline{\theta}$, $\overline{\psi}$ — координаты вектора $\mathbf{V}$; φ, χ — координаты вектора $\mathbf{r}$.

При вычислении величины η не требуется получение точного значения, так как в данном случае информативно лишь угловое положение $|\eta|$ в конусе $|\eta| \le \eta_k$, а при выходе из конуса вероятность $P_{ij}^{\theta\psi}(\eta)$ изменяется от $P_{ij}^{\theta\psi}{}_0$ до нуля. Аналогично формируется учет дальности:

$$P_{ij}^{\theta\psi}(\eta,r)=\begin{cases}P_{ij}^{\theta\psi}(\eta)+\left(1-\dfrac{r_{ij}^{\theta\psi}}{r_{ij\max}}\right)\cdot\left(0{,}8-P_{ij}^{\theta\psi}(\eta)\right)\\ \text{при } r_{\max}=10\div30 \text{ км},\ P(\eta)\le P(r_m)\le 0{,}8;\\ P_{ij}^{\theta\psi}(\eta)+\left(1-\dfrac{k\cdot r_{ij}^{\theta\psi}}{r_{ij\max}}\right)\cdot\left(0{,}8-P_{ij}^{\theta\psi}(\eta)\right)\\ \text{при } r_{\max}=40\div60 \text{ км},\ P(\eta)\le P(r_m)\le 0{,}8,\end{cases} \tag{6.251}$$

где, например, $1\le k\le r_{ij\max}/r_{ij}^{\theta\psi}$, $r_{ij}^{\theta\psi}\neq 0$ и т.д. Аналогично могут быть учтены и другие факторы конфигурации, например, уязвимость объектов ПИА СВН

$$P_{ij}^{\theta\psi}\left(P_{ij}^{\theta\psi}{}_0,\eta,r,\ell\right)\cong\left(1-\frac{\ell_{ij}^{\theta\psi}}{\ell_{\max}}\right)\cdot P_{ij}^{\theta\psi}\left(P_{ij}^{\theta\psi}{}_0,\eta,r\right),$$

где $\ell_{\max}$ — максимальная многолистность в направлении $\ell_{ij}^{\theta\psi}$; $\ell_{ij}^{\theta\psi}$ — многолистность в точке залпа.

При линейной плотной конфигурации подразделения ЗУР с одинаковой многолистностью в направлении $\ell_{ij}^{\theta\psi}$ последний фактор не существенен (неразличим).

Таким образом, алгоритм формализации конфигурации конфликта ЛС СВН–ЛС ПВО можно описать следующим образом:

- формирование матриц координат объектов СВН и ПВО $\{\theta_i(x,y,z)\}$ и $\{\psi_j(x,y,z)\}$;
- вычисление элементов матриц дальностей $\{r_{ij}^{\theta\psi}\}$ и ракурсов η;
- где $r_{ij}^{\theta\psi}=\sqrt{\left|x_i^{\theta}-x_j^{\psi}\right|^2+\left|y_i^{\theta}-y_j^{\psi}\right|^2+\left|z_i^{\theta}-z_j^{\psi}\right|^2}$;
- вычисление элементов матриц $\{P_{ij}^{\theta\psi}(\eta)\}$ по формулам (6.250);
- вычисление элементов матриц $\{P_{ij}^{\theta\psi}\}=\{P_{ij}^{\theta\psi}(\eta,r,\ldots)\}$ по формулам (6.251).

6.10.2. Вариант алгоритма ЦР-ПДК

Для постановки задачи ЦР-ПДК необходимо описать структуру конфликта (например, см. рис. 6.59), формализовать информацию о текущей конфигурации ММС, задать модель или комбинацию моделей, задать показатели ПДК и учесть имеющиеся ограничения.

В общем случае возможны совместный и последовательный варианты алгоритма ЦР-ПДК на основе многотактовой и непрерывной динамики ПДК с точной и приближенной процедурой решения, с применением того или другого варианта ИТК для связи ЦР и ПДК. Непрерывный вариант более полезен при оценке предельных свойств конфликта по скорострельности, возможным ресурсам и другим факторам.

В реальных условиях находит применение многотактовый вариант с решением задачи ЦР-ПДК на каждом такте на основе информации о конфигурации и с учетом прогноза на данном такте или на данном и последующем тактах (прогноз на большое число тактов не имеет смысла из-за неустойчивости или распада конфигурации). Специфика рассматриваемой задачи с залповым взаимодействием на дальних границах зон

поражения и малым числом тактов требует эффективного решения конфликта на первых тактах с полной начальной информацией о конфигурациях и численностях (без запаздывания и с точными значениями $N_i(k)$). Длительность такта можно соотнести с временем перехвата целей, поэтому запаздывание из-за полетного времени УР мало или отсутствует. При малом числе тактов для объектов с более чем четырехзалповым запасом боевых средств истощение объектов $\overline{\lambda}_i$ также можно не учитывать.

Структурная схема точного последовательного четырехэтапного алгоритма ЦР-ПДК при выполнении дополнительных условий дана на рис. 6.60. Процедуры ПДК рассмотрены на примере в п. 6.4.4.

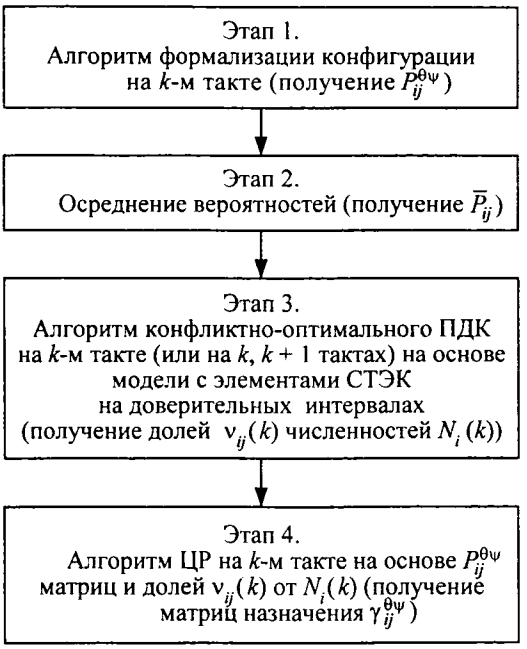


Рис. 6.60. Последовательный алгоритм ЦР-ПДК на ΔT

Данный алгоритм является численным итерационным алгоритмом оптимизации параметризованного потактового программно-корректируемого управления активными объектами (распределение активных объектов). При этом программный такт программно-корректируемого закона распределения (ПКЗР) АО до некоторого T заключается в получении распределения для данного такта с учетом текущего состояния (конфигурации) и конфликтно-оптимального прогноза на все такты до T; очевидно, что число тактов прогноза на каждом следующем программном этапе взаимодействия уменьшается.

6.10.3. Описание модели конфликта ЗРК «Ус. Хок» с ДЗУР — ПБ с ПИА (модель 1)

Модель конфликтной ситуации укладывается в схему конфликтной ситуации, данную на рис. 6.59, при наличии у каждой стороны по одному виду АО. Модель конфликтной ситуации выглядит так, как показано на рис. 6.61, где $x_i(t) > 0$ — текущая средняя численность объектов i-го типа; $N = N_1, N_2, N_3, N_4$ — начальные численности, соответственно равные: 12, 12, 24(8), 10, где 8 — количество РЛС наведения для 24 ПУ.

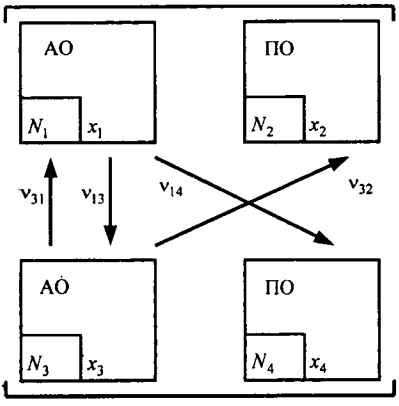


Рис. 6.61. Структурная схема конфликтной ситуации ЗРК «Ус. Хок» с ДЗУР — ПБ с ПИА: ν_{ij} — доля объектов i-го типа, выделенных для поражения объектов j-го типа

Управляющие функции ν_{ij} удовлетворяют следующим ограничениям:

$$\sum_j \nu_{ij} = 1, \ \forall i = \{1,3\}.$$

Математическая модель конфликта ЗРК «Ус. Хок» с ДЗУР — ПБ с ПИА для перспективного ЗРК шестиканального на базе БЗУР в разностных уравнениях может быть представлена следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - \overline{P}_{31} \cdot \nu_{31} \cdot x_3(k) \cdot R(x_1(k)); \\ x_2(k+1) = x_2(k) - \overline{P}_{32} \cdot (1-\nu_{31}) \cdot x_3(k) \cdot R(x_2(k)); \\ x_3(k+1) = x_3(k) - 3 \cdot \overline{P}_{13} \cdot \nu_{13} \cdot x_1(k) \cdot R(x_3(k)); \\ x_4(k+1) = x_4(k) - \overline{P}_{14} \cdot (1-\nu_{13}) \cdot x_1(k) \cdot R(x_4(k)). \end{cases} \quad (6.252)$$

На эту систему накладываются следующие ограничения: $0 \le \nu_{ij}^{\theta\psi} \le 1$ при $i = \{1,3\}$, $j = \{1,3\}$; $0 \le P_{ij}^{\theta\psi} \le 1$ при $i = \{1,3\}$, $j = \{1,2,3,4\}$; $x_i \ge 0$ при $i = \{1,2,3,4\}$; $\overline{P}_{13}$ — вероятность поражения РЛС наведения; $3\overline{P}_{13} \cdot \nu_{13} \cdot x_1(k)$ — среднее число пораженных ПУ; x_3 — количество ПУ (Если станция наведения уничтожена, то три пусковых установки не обслуживаются.)

Представим эту систему уравнений в виде системы уравнений

$$\begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) - \left(\sum\limits_{\psi=1}^{x_1} \sum\limits_{\theta=1}^{x_3} P_{31}^{\theta\psi} \gamma_{31}^{\theta\psi} \right) \cdot R(x_1(k)); \\ x_2(k+1) = x_2(k) - \left(\sum\limits_{\psi=1}^{x_2} \sum\limits_{\theta=1}^{x_3} P_{32}^{\theta\psi} \gamma_{32}^{\theta\psi} \right) \cdot R(x_2(k)); \\ x_3(k+1) = x_3(k) - \left(3 \cdot \sum\limits_{\psi=1}^{x_3} \sum\limits_{\theta=1}^{x_1} P_{13}^{\theta\psi} \gamma_{13}^{\theta\psi} \right) \cdot R(x_3(k)); \\ x_4(k+1) = x_4(k) - \left(\sum\limits_{\psi=1}^{x_4} \sum\limits_{\theta=1}^{x_1} P_{14}^{\theta\psi} \gamma_{14}^{\theta\psi} \right) \cdot R(x_4(k)) \end{cases} \quad (6.253)$$

при $k = 0$ и

$$\begin{cases} \sum\limits_{\psi=1}^{x_1}\sum\limits_{\theta=1}^{x_3}\gamma_{31}^{\theta\psi} = \nu_{31}x_3(t); \\ \sum\limits_{\psi=1}^{x_2}\sum\limits_{\theta=1}^{x_3}\gamma_{32}^{\theta\psi} = (1-\nu_{31})x_3(t); \\ \sum\limits_{\psi=1}^{x_3}\sum\limits_{\theta=1}^{x_1}\gamma_{13}^{\theta\psi} = \nu_{13}x_1(t); \\ \sum\limits_{\psi=1}^{x_4}\sum\limits_{\theta=1}^{x_1}\gamma_{14}^{\theta\psi} = (1-\nu_{13})x_1(t). \end{cases} \tag{6.254}$$

Формулы для оптимизации ЦР принимают вид

$$\max\left(\sum_{\psi=1}^{x_j}\sum_{\theta=1}^{x_i}P_{ij}^{\theta\psi}\gamma_{ij}^{\theta\psi} + \sum_{\psi=1}^{x_k}\sum_{\theta=1}^{x_i}P_{ik}^{\theta\psi}\gamma_{ik}^{\theta\psi}\right) \tag{6.255}$$

при следующих условиях:

$$\sum_{\psi=1}^{x_j}\sum_{\theta=1}^{x_i}\gamma_{ij}^{\theta\psi} = \nu_{ij}x_i;\ \sum_{\psi=1}^{x_k}\sum_{\theta=1}^{x_i}\gamma_{ik}^{\theta\psi} = (1-\nu_{ij})x_i \text{ при } i=\{1,3\},\ j=\{1,3\}. \tag{6.256}$$

Если в ЗРК БЗУР количество РЛС наведения и количество применяемых ПУ совпадают, то в этом случае коэффициент «3» в третьих уравнениях систем (6.252), (6.253) опускается.

В качестве показателя потерь (J) берем показатель, имеющий смысл суммарного перевеса противника по активным и пассивным средствам и контроля скорости убывания его активных средств:

$$\begin{cases} J_{\text{А}} = L_{11}\cdot\left[x_3^2(T)-x_1^2(T)\right] + L_{12}\cdot\left[x_4^2(T)-x_2^2(T)\right] + L_{13}\cdot\int\limits_{t_0}^{T}x_3\cdot dt; \\ J_{\text{Б}} = L_{21}\cdot\left[x_1^2(T)-x_3^2(T)\right] + L_{22}\cdot\left[x_2^2(T)-x_4^2(T)\right] + L_{23}\cdot\int\limits_{0}^{T}x_1\cdot dt; \end{cases} \tag{6.257}$$

$$J_{\text{А}} \Rightarrow \min;\ J_{\text{Б}} \Rightarrow \min.$$

Результаты исследования конфликтной ситуации ПБ с ПИА и ЗРК «Ус. Хок» с ДЗУР (рис. 6.59) и с моделью ЦР-ПДК (6.253) [24]. В базовом варианте ЛС СВН отдает предпочтение уничтожению активных средств ЛС ПВО, а ЛС ПВО, наоборот, стремиться уничтожить пассивные средства противника. Сравнение результатов, полученных на основе СТЭК-1 и СТЭК-7, показывает преимущество СТЭК-7 с точки зрения выполнения тактики. Это выражается в улучшении значений показателей и тактического результата, что видно при анализе численностей, оставшихся после такта взаимодействия.

Базовый эксперимент имеет следующие исходные условия.

Начальные численности:

$$X_1 = 24,\ X_2 = 24,\ X_3 = 24(8),\ X_4 = 8.$$

Весовые коэффициенты:

$$L_{11} = 0,7;\ L_{12} = 0,3;\ L_{13} = 0;$$
$$L_{21} = 0,3;\ L_{22} = 0,7;\ L_{23} = 0.$$

Эффективности воздействия объектов i-го типа на объекты j-го типа:

$$P_{13}, P_{14}, P_{31}, P_{32} = 0,4.$$

Результаты исследования даны на рис. 6.62 и в табл. 6.8.

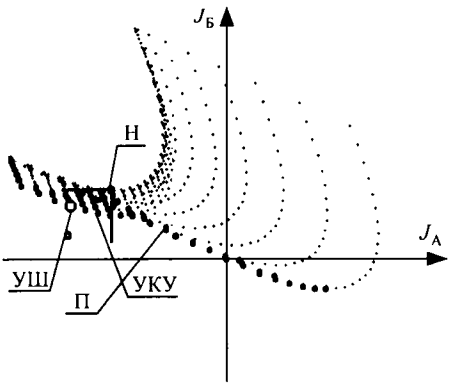


Рис. 6.62. Область нормированных показателей

Таблица 6.8

Результаты пошаговой работы алгоритма

	Численности				Доли		Показатели		Сумма
	X_1	X_2	X_3	X_4	ν_1 $X_1 \to X_3$	ν_2 $X_3 \to X_1$	$J_А$	$J_Б$	$J_А + J_Б$
Нач.	24	24	24	8					
Нэш (СТЭК-1)	17	7	0	0	$\nu_1 = 0{,}680$	$\nu_2 = 0{,}300$	–217	121	–96
У–Ш (СТЭК-7)	21	3	0	8	$\nu_1 = 1{,}000$	$\nu_2 = 0{,}140$	–292	94	–198

Матрицы целераспределения $\left\{\gamma_{ij}^{\theta\psi}\right\}$ имеют следующий вид:

$$\left\{P_{13}\right\}:\ \gamma_{13}^{1,1} = \gamma_{13}^{2,5} = \gamma_{13}^{5,8} = \gamma_{13}^{6,4} = \gamma_{13}^{9,6} = \gamma_{13}^{11,3} = \gamma_{13}^{13,2} = \gamma_{13}^{22,7} = 1;$$

$$\left\{P_{14}\right\}:\ \gamma_{14}^{i,j} = 0;\ \left\{P_{31}\right\}:\ \gamma_{31}^{8,5} = \gamma_{31}^{10,12} = \gamma_{31}^{20,23} = 1;$$

$$\left\{P_{32}\right\}:\ \gamma_{32}^{1,13} = \gamma_{32}^{2,16} = \gamma_{32}^{3,5} = \gamma_{32}^{4,4} = \gamma_{32}^{5,8} = \gamma_{32}^{6,6} = \gamma_{32}^{7,14} =$$

$$= \gamma_{32}^{9,20} = \gamma_{32}^{11,23} = \gamma_{32}^{12,10} = \gamma_{32}^{13,18} = \gamma_{32}^{14,24} = \gamma_{32}^{15,15} = \gamma_{32}^{16,17} =$$

$$= \gamma_{32}^{17,11} = \gamma_{32}^{18,2} = \gamma_{32}^{19,9} = \gamma_{32}^{21,22} = \gamma_{32}^{22,19} = \gamma_{32}^{23,21} = \gamma_{32}^{24,7} = 1.$$

6.11. МОДЕЛЬ КОНФЛИКТНО-ОПТИМАЛЬНОГО ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ АВТОМОБИЛЯ И ПОВЕРХНОСТИ ТОРМОЖЕНИЯ НА ЭТАПЕ РОБАСТНОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ [84]

Рассматривается модель и алгоритм конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения. Исследование неопределенностей на основе игрового подхода позволяет получить характеристики среды — «активного партнера» (поверхности торможения), а также робастного регулятора антиблокировочной системы торможения, обеспечивающего робастно-игровое качество [71]*. Базовыми для исследования являются методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений и компромиссов.

* См. также: Магомедов М.Х. Дисс. д-ра физ.-мат. наук. — М., 2003.

6.11.1. Общая характеристика задачи

В настоящее время актуальной задачей управления является создание эффективных антиблокировочных систем (АБС) автоматизированного торможения автомобиля.

Потребность в эффективном торможении привела к необходимости формирования последовательного набора этапов оптимального регулирования торможением (режимов функционирования АБС), состоящего из робастного регулирования, адаптивного регулирования и др. [84].

Первым и наиболее ответственным является этап робастного регулирования. Как следует из физической модели, данному этапу соответствуют наиболее выраженные факторы неопределенности. Как известно [24], по классификации академика Н.Н. Моисеева, свойства неопределенности представимы в виде трех групп условий: неопределенностей среды, «активного партнера» и цели.

В качестве метода регулирования на первом этапе применяется робастный метод регулирования в условиях неопределенности среды на основе функции А.М. Ляпунова.

Робастный метод регулирования дополняется универсальным методом исследования неопределенности на основе игрового подхода, который позволяет обосновать характеристики среды (поверхности торможения), принятые на стадии робастного регулирования, как основные и расширить учет свойств неопределенности в форме неопределенности «активного партнера» и неопределенности цели.

Базовыми для исследования принимаются результаты по методам оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами (ММС) [24]. В данном параграфе представлена впервые разработанная модель конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения и формулируется практически важный метод исследования полученной конфликтной ситуации и алгоритм робастно-игровой коррекции, повышающий робастное качество регулирования.

Предваряет данную модель и метод общая характеристика робастно-игровой коррекции робастного регулирования.

6.11.2. Проблема робастно-игровой коррекции робастного регулирования

Рассматриваемая модель принадлежит классу линейных систем на пространстве состояний с параметрической матричной аффинной неопределенностью.

Для детерминированных моделей систем с неопределенностями, в том числе и указанного вида, как правило применяется подход с целью достижения гарантирующего робастного качества стабилизирующего регулятора в форме скалярного [71] и векторного [44, 83] минимакса.

Данный подход в ряде случаев (например, при типичном квадратическом показателе потерь) дает возможность получения точного решения проблемы робастности, но при этом гарантированное качество является достаточно низким (гарантированные потери по своей природе достаточно большие), так как решение явно или неявно ориентировано на наихудшие ситуации с «целевым» антагонизмом параметрической неопределенности. Характер данных оценок качества часто не соответствует природе неопределенных факторов, и, кроме того, как отмечено в [71], «...рассчитывая на самые худшие ситуации, мы занижаем размах допустимых возмущений...», т.е. диапазонов неопределенностей, при которых система стабилизируема.

В качестве альтернативы выступает известный вероятностный подход к робастности. Но неопределенные факторы могут не иметь вероятностной природы или их законы распределения неизвестны. Кроме того, оценки и ограничения параметров приобретают вероятностный характер.

По аналогии с компромиссным критерием Гурвица теории статистических решений, в данном параграфе предлагается подход к получению скалярной или векторной

оценки робастно-игрового качества на основе игр с непротивоположными интересами, который дополняет подходы [44, 71, 83] и совместно с указанными подходами расширяет возможности построения и исследования робастных систем регулирования и управления.

В соответствии с требованиями к системе формируется скалярный или векторный показатель качества системы, а неопределенностям в соответствии с квалификацией неопределенных факторов по Н.Н. Моисееву придается смысл «активного партнера». При этом на основе информации об общих тенденциях влияния заданного допустимого множества неопределенных параметров на систему, которая как правило имеет место в практических задачах, формулируется скалярный или векторный показатель общих свойств допустимого множества неопределенных параметров (виртуальных целевых свойств данного «активного партнера»).

Очевидно, что в общем случае степень конфликтности «проявления» неопределенности может быть различна. Варианты степени конфликтности взаимодействия неопределенности с системой на основе бескоалиционных, коалиционных и кооперативных подходов формируются в виде стабильно-эффективных игровых компромиссов (СТЭК) [24]. Рассматриваются способы построения СТЭК для скалярных показателей сторон на основе выбора наиболее эффективных равновесных решений по Дж. Нэшу, Э.Р. Смольякову [84], УКУ (угроз-контругроз по Э.М. Вайсборду, В.И. Жуковскому и др.) в смысле близости к Парето-границе и точке дележа Шепли на области Парето–Нэш-компромиссов. Для векторных показателей сторон принцип векторного минимакса [44] может быть расширен на основе векторной Нэш-оптимизации.

Данный гибкий метод оценки робастно-игрового качества применяется для уточнения параметров семейства стабилизирующих регуляторов, полученных на основе функции Ляпунова, а также для формирования компенсационных режимов, улучшающих условия стабилизируемости, которые составляют процедуру робастно-игровой коррекции робастного регулирования.

6.11.3. ФОРМИРОВАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ КОНФЛИКТНОЙ СИТУАЦИИ «АВТОМОБИЛЬ–ПОВЕРХНОСТЬ»

Рассматривается процедура формирования математической модели конфликтного взаимодействия автомобиля и поверхности торможения для этапа робастного регулирования начальным процессом торможения с применением АБС.

В качестве базовой выбирается система, описывающая процесс линеаризованного движения автомобиля (или автобуса) при малых угловых скоростях вращения его корпуса Ω_z.

Вводится столбец вектора состояния $\mathbf{x}$ в виде

$$\mathbf{x}^{\mathrm{T}} = \left(V_y, \Omega_z, \Omega_{11y}, \Omega_{12y}, \Omega_{21y}, \Omega_{22y}, P_{11x}, P_{12x}, P_{21x}, P_{22x}, P_{11y}, P_{12y}, P_{21y}, P_{22y}\right), \quad (6.258)$$

где V_y — скорость заноса автомобиля (автобуса); Ω_z — скорость вращения автомобиля вокруг вертикальной оси Oz; Ω_{ijy} — скорость вращения i,j-го колеса $(i,j=1,2)$ вокруг оси вращения колеса Oy; P_{ijx} — контактная сила i,j-го колеса $(i,j=1,2)$ (сила сопротивления поверхности) в направлении оси Ox автомобиля; P_{ijy} — контактная сила i,j-го колеса $(i,j=1,2)$ (сила сопротивления поверхности) в направлении оси Oy.

Вводятся также управляющие силы автомобиля и поверхности в виде векторов параметров $\mathbf{q}_{\mathrm{A}} \in Q_{\mathrm{A}}$ и $\mathbf{q}_{\mathrm{П}} \in Q_{\mathrm{П}}$ соответственно.

При этом вектор параметров

$$\mathbf{q}_{\mathrm{A}} = \left(S_{11x}, S_{12x}, S_{21x}, S_{22x}\right), \quad (6.259)$$

где S_{ijx} — проскальзывание i,j-го колеса в направлении Ox, которое входит в выражение для моментов управления колесами (в данном случае торможения);

$$L_{ij} = k_{ij} \cdot S_{ijx},\ i,j = 1,2. \tag{6.260}$$

Коэффициенты k_{ij} в выражениях (3) — это заданные коэффициенты матрицы регулятора, обеспечивающие оптимальность робастного регулирования по А.М. Ляпунову. Поэтому L_{ij} — заданная линейная функция управляющего параметра S_{ijx}.

Множество Q_{A} имеет вид

$$Q_{\text{A}} = \left\{ S_{ijx}:\ 0 \le S_{ijx} \le 0{,}15,\ \ i,j = 1,2 \right\}, \tag{6.261}$$

где $S_{ijx} = 0{,}15$ — максимально допустимая величина проскальзывания колеса на робастном участке регулирования торможением автомобиля (автобуса).

В общем случае

$$S_{ijx} \cong \frac{V_{ijx}^{\text{A}} - \Omega_{ijy} R}{V_{ijx}^{\text{A}}}, \tag{6.262}$$

где R — радиус колеса, $V_{ijx}^{\text{A}} = V_x$ — продольная скорость автомобиля. При $V_{ijx}^{\text{A}} = V_x = \text{const}$ (линейная модель) S_{ijx} пропорциональны скорости вращения колеса Ω_{ijy}.

Вектор «управляющих» параметров поверхности

$$\mathbf{q}_{\text{П}} = \left(\nu_{11x}, \nu_{12x}, \nu_{21x}, \nu_{22x} \right), \tag{6.263}$$

где ν_{ijx} — коэффициент сцепления с поверхностью под i,j-м колесом (точнее коэффициент кулонова трения скольжения в площадке контакта i,j-го колеса) в выражениях для контактной силы

$$P_{ijx} = -U_{ijx} S_{ijx};\ -U_{ijx} = -\nu_{ijx} \cdot N_{ij} \cdot k_0,\ i,j = 1,2. \tag{6.264}$$

Величины нормалей контактных сил N_{ij} и коэффициент k_0 являются заданными величинами. Поэтому $-U_{ijx}$ является заданной линейной функцией управляющего параметра ν_{ijx}.

Множество $Q_{\text{П}}$ имеет вид

$$Q_{\text{П}} = \left\{ \nu_{ijx}:\ 0{,}05 \le \nu_{ijx} \le 1,\ \ i,j = 1,2 \right\}. \tag{6.265}$$

Неравенства (6.265) характеризуют допустимый разброс свойств поверхности торможения. В этих условиях из физических соображений следует определенная «рациональность поведения» поверхности в конфликтной ситуации в форме mix-состояния, что вызывает вращение автомобиля вокруг оси Oz и занос по оси Oy при неоптимальном торможении. Подобные наборы ν_{ijx} могут быть использованы в качестве начальных приближений «управляющих» параметров поверхности в конфликтной ситуации.

Вполне вероятно, что среди «рациональных» свойств поверхности можно выделить малые, хотя и разные значения коэффициентов сцепления ν_{ijx}, что также в общих условиях торможения может вызывать вращение автомобиля, занос и малое замедление, а также ряд других вариантов, которые могут быть выявлены в процессе исследования.

В общем случае под каждым i,j-м колесом поверхность имеет различные свойства, но при больших величинах ν_{ijx} будут иметь место большие зависимые величины ν_{ijy}, и наоборот.

Поэтому из анализа взаимосвязи получены приближенные соотношения между ν_{ijx} и ν_{ijy} следующего вида:

$$\begin{cases} \nu_{ijx}^2 + \nu_{ijy}^2 = 1{,}2^2, \text{ если } \nu_{ijx} > 0{,}45; \\ \nu_{ijx}^2 + \nu_{ijy}^2 = 0{,}45^2, \text{ если } \nu_{ijx} < 0{,}45. \end{cases} \tag{6.266}$$

Окончательно математическое описание динамики взаимодействия автомобиля и поверхности принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{q}. \tag{6.267}$$

Матрица $\mathbf{C}$ — матрица с диагональю

$$\left(M, I, I_1, I_1, I_2, I_2, T_{11x}, T_{12x}, T_{21x}, T_{22x}, T_{11y}, T_{12y}, T_{21y}, T_{22y}\right), \tag{6.268}$$

где M — масса автомобиля, I — момент инерции вращения вокруг оси Oz; I_i — момент инерции вращения i,j-го колеса вокруг оси Oy $(i,j=1,2)$; T_{ijx} — постоянные времени динамического запаздывания контактной силы P_{ijx} i,j-го колеса $(i,j=1,2)$; T_{ijy} — постоянные времени динамического запаздывания контактной силы P_{ijy} i,j-го колеса $(i,j=1,2)$.

Матрица $\mathbf{A}$ имеет вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}
0 & MV_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
 & & & & & & -B & B & -B & B & A_1 & A_1 & -A_2 & -A_2 \\
 & & & & & & -R & & & & & & & \\
 & & & & & & & -R & & & & & & \\
 & & & & & & & & -R & & & & & \\
 & & & & & & & & & -R & & & & \\
 & & K_{11x}R & & & & -1 & & & & & & & \\
 & & & K_{12x}R & & & & -1 & & & & & & \\
 & & & & K_{21x}R & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & K_{22x}R & & & & -1 & & & & \\
-K_{11y} & -K_{11y}A_1 & & & & & & & & & -1 & & & \\
-K_{12y} & -K_{12y}A_1 & & & & & & & & & & -1 & & \\
-K_{21y} & K_{21y}A_2 & & & & & & & & & & & -1 & \\
-K_{22y} & K_{22y}A_2 & & & & & & & & & & & & -1
\end{bmatrix},$$

где V_x — продольная скорость автомобиля; B — расстояние от колеса до продольной плоскости симметрии автомобиля; A_i — расстояние от колеса до поперечной плоскости симметрии автомобиля ($i=1$ — передняя ось, $i=2$ — задняя ось); R — радиус колеса;

$$K_{ijx} = \frac{\nu_{ijx} N_{ij} k_0}{V_x}; \quad K_{ijy} = \frac{\nu_{ijy} N_{ij} k_0}{V_x}; \quad T_{ijx} = \frac{K_{ijx}}{K_x}; \quad T_{ijy} = \frac{K_{ijy}}{K_y}.$$

Матрица $\mathbf{B}$ — матрица с диагональю

$$\left(0, 0, k_{11}, k_{12}, k_{21}, k_{22}, N_{11}k_0, N_{12}k_0, N_{21}k_0, N_{22x}k_0, 0, 0, 0, 0\right). \tag{6.269}$$

Здесь вектор-столбец $\mathbf{q}$ имеет вид

$$\mathbf{q}^{\mathrm{T}} = \left(0, 0, S_{11x}, S_{12x}, S_{21x}, S_{22x}, \nu_{11x}, \nu_{12x}, \nu_{21x}, \nu_{22x}, 0, 0, 0, 0\right). \tag{6.270}$$

Таким образом, система (6.267) дает динамическое описание ММС. Следует отметить, что часть параметров управления $\mathbf{q}$ в системе (6.267), а именно $\mathbf{q}_{\Pi}$, входят

в матрицу состояния **A**. Это является естественным следствием неопределенности среды, в условиях которой рассматривается задача робастного регулирования.

Поэтому в общем случае при переходе в описании управляющих сил от управляющих параметров к программным управлениям и управлениям в обратных связях и их приближениям данное описание (6.267) становится нелинейным по управляющим силам поверхности.

Очевидной в данном варианте конфликтной ситуации является коалиционная структура ММС, которая состоит из двух объектов-коалиций. Характер коалиции «объект–автомобиль» приобретает, если учесть его структурные свойства: четыре колеса и подрессоренную массу автомобиля. Соответственно и поверхность торможения может быть описана коалицией сил сопротивления под каждым из четырех колес.

Коалиционной структуре можно придать более общий характер, если рассматривать конфликтную ситуацию на нескольких этапах регулирования, когда в процессе торможения вмешивается водитель. В этом случае данная конфликтная ситуация содержит три объекта-коалиции: «автомобиль–водитель–поверхность торможения». При этом в процессе функционирования данной ММС водитель при удачном участии в процессе торможения может составлять совместную коалицию с автомобилем, а при неудачном — совместную коалицию с поверхностью торможения. Тогда исходная ситуация превращается в так называемую динамическую игру [24] с изменением коалиционной структуры в процессе функционирования ММС. Указанные особенности раскрывают перспективу исследования коалиционных свойств данной ММС, а в настоящем параграфе исследование ограничивается двухкоалиционной структурой из двух объектов-коалиций с кооперативными свойствами внутри каждой коалиции.

Векторный показатель формирует многокритериальное целевое качество робастного регулирования в условиях неопределенности, т.е. позволяет учесть некоторые технические требования при торможении автомобиля и типичные «целевые» свойства неопределенности среды.

Поэтому введение «активного партнера» — автомобиля в виде поверхности торможения с естественной несогласованностью во взаимодействии с автомобилем, оформленной в виде обоснованной степени конфликтности или стабильно-эффективного компромисса, а также задание векторного показателя, прагматически (но субъективно) учитывающего свойства — цели каждой из сторон, позволяет получить решение, имеющее в общем случае смысл прогноза.

Данный прогноз дает ориентировку, т.е. оценку неопределенных свойств, и либо может уточнить результаты робастного регулирования по выбору робастных оценок неопределенности, либо в соединении с методами регулирования на основе функций А.М. Ляпунова сформировать обобщенный метод робастного регулирования с робастно-игровой коррекцией, повышающей качество робастного регулирования.

Векторный показатель в рассматриваемом варианте конфликтной ситуации задан в виде трех показателей для каждого объекта:

$$\mathbf{J}_{\mathrm{A}} = \left(J_{\mathrm{A1}}, J_{\mathrm{A2}}, J_{\mathrm{A3}}\right); \quad \mathbf{J}_{\mathrm{П}} = \left(J_{\mathrm{П1}}, J_{\mathrm{П2}}, J_{\mathrm{П3}}\right). \tag{6.271}$$

Показатели автомобиля и критерии оптимизации имеют следующий вид:

$$J_{\mathrm{A1}} = \int_{t_0}^{T} \left(\dot{\Omega}_z - \dot{\Omega}_{z\,\mathrm{доп}}\right)^2 dt \to \min_{q_{\mathrm{A}}} \tag{6.272}$$

— курсовая устойчивость автомобиля (точнее, допустимая курсовая неустойчивость на интервале времени (t_0, T)), где $\dot{\Omega}_{z\,\mathrm{доп}}$ — допустимая величина углового ускорения; типичные значения начала и окончания робастного интервала управления АБС $t_0 = 0$ и $T = 0{,}15$ с соответственно;

$$J_{A2} = V_x(T_1) \to \min_{q_A} \tag{6.273}$$

— продольное замедление;

$$J_{A3} = \int_{t_0}^{T} V_y^{\,2} dt \to \min_{q_A} \tag{6.274}$$

— минимальный занос.

В данных показателях T — заданный интервал робастного регулирования (меньший, чем время реакции водителя), T_1 — заданная величина времени прогноза замедления.

Для вычисления $V_x(T_1)$ используется следующее уравнение динамики автомобиля:

$$M\frac{dV_x}{dt} = \sum_{i,j}^{2} P_{ijx} + F_{ax} + MV_y\Omega_z, \quad V_x(0) = V_x, \tag{6.275}$$

где величина F_{ax} — аэродинамическая сила сопротивления.

Показатели поверхности и критерии оптимизации имеют следующий вид:

$$J_{П1} = -J_{A1} \to \min_{q_П} \tag{6.276}$$

— курсовая неустойчивость автомобиля;

$$J_{П2} = \int_{t_0}^{T} \sum_{i,j=1}^{2} P_{ijy}^2 dt \to \min_{q_П} \tag{6.277}$$

— минимизация сил сопротивления поверхности по оси Oy («способствование» поверхности вращению и заносу автомобиля);

$$J_{П3} = \int_{t_0}^{T} \left[\gamma_1 \sum_{i,j=1}^{2} \nu_{ijy}^2 + \gamma_2 \sum_{i,j=1}^{2} \nu_{ijx}^2 \right] dt \to \min_{q_П}, \quad 0 \le \gamma_i \le 1, \ \gamma_1 + \gamma_2 = 1 \tag{6.278}$$

— минимальные энергетические свойства поверхности по кулонову трению скольжения (качество сцепления с поверхностью).

Данные вектора $\mathbf{J}_A$ и $\mathbf{J}_П$ имеют антагонистическое ядро, так как $J_{П1} + J_{A1} = 0$.

Показатели J_{Ai}, $J_{Пi}$ нормируем по формулам (6.279) и (6.280).

$$\hat{J}_{Ai} = \frac{J_{Ai} - J_{Ai\,наим}}{J_{Ai\,наиб} - J_{Ai\,наим}}, \quad i = 1,2,3, \tag{6.279}$$

где значения $\hat{J}_{Ai}$ принадлежат отрезку $0 \le \hat{J}_{Ai} \le 1$ и где $J_{Ai\,наиб}$ и $J_{Ai\,наим}$ — наибольшие и наименьшие значения показателей J_{Ai}, полученные на основе параметрических сетей $0 \le S_{ijx} \le 0{,}15$; $0{,}05 \le \nu_{ijx} \le 1$.

Аналогично определяются

$$\hat{J}_{Пi} = \frac{J_{Пi} - J_{Пi\,наим}}{J_{Пi\,наиб} - J_{Пi\,наим}}, \quad i = 1,2,3. \tag{6.280}$$

Нормированные векторные показатели скаляризуются в виде

$$\hat{J}_A = \sum_{i=1}^{3} \alpha_i \hat{J}_{Ai}, \quad 0 \le \alpha_i \le 1, \ \sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1; \tag{6.281}$$

$$\hat{J}_П = \sum_{i=1}^{3} \beta_i \hat{J}_{Пi}, \quad 0 \le \beta_i \le 1, \ \sum_{i=1}^{3} \beta_i = 1, \tag{6.282}$$

где α_i и β_i — нормированные весовые коэффициенты степени значимости показателя в сумме.

Антагонистическое ядро в нормированной форме принимает вид

$$\hat{J}_{\text{A1}} + \hat{J}_{\text{П1}} = 1, \tag{6.283}$$

что легко преобразуется к исходному виду антагонистического ядра, если (6.283) записать в виде

$$\left(\hat{J}_{\text{A1}} - 0{,}5\right) + \left(\hat{J}_{\text{П1}} - 0{,}5\right) = 0. \tag{6.284}$$

Таким образом, набор выражений (6.258)–(6.284) дает искомую математическую модель конфликтной ситуации «автомобиль–поверхность торможения», которая в дополнение к разработанному робастному алгоритму в условиях неопределенности среды позволяет в исследовании учесть свойства неопределенности «активного партнера», присущие данной задаче, и элементы компенсации целевой неопределенности, вводя прагматические векторные показатели сторон.

6.11.4. Исследование конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения с элементами робастно-игровой коррекции

В качестве объекта торможения рассматривается автобус с характеристиками, данными в табл. 6.9 (в системе СИ).

Таблица 6.9

Характеристика автобуса

Масса M, кг	Момент инерции I, кг м^2	Момент инерции колес		Габариты		Радиус колеса R, м
		передние I_1	задние I_2	$B_1 = B_2$, м	$A_1 = A_2$, м	
14120	97730	18,9	37,9	2,6	0,9	0,5

Неизменяемые параметры конфликтной ситуации имеют вид:

1. Коэффициент наклона линейной характеристики колеса $k_0 = 10$.
2. Нормаль контактной силы колеса $N_{ij} = N = Mg/4 = 34594$ Н, где $g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения.
3. Коэффициенты K_x, K_y в постоянных времени T_{ijx}, T_{ijy} динамического запаздывания контактных сил от упругих деформаций пневматики колес $K_x = 700 \cdot 10^3$ Н/м, $K_y = 375 \cdot 10^3$ Н/м.
4. Допустимое ускорение вращения автобуса вокруг оси Oz $\dot{\Omega}_{z\,\text{доп}} = 0{,}04$ с$^{-1}$ (при ненулевых начальных условиях по заносу и вращению автобуса); $\dot{\Omega}_{z\,\text{доп}} = 4 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$ (при нулевых начальных условиях по заносу и вращению автобуса).
5. Аэродинамическое сопротивление в продольном направлении для (6.275) оценивается выражением

$$F_{ax} = \begin{cases} -1000g \text{ [Н], если } 10° \le \Psi(T_1) \le 15°; \\ -850g \text{ [Н], если } 5° \le \Psi(T_1) \le 10°; \\ -700g \text{ [Н], если } 0° \le \Psi(T_1) \le 5°, \end{cases} \tag{6.285}$$

где $T_1 = 1$ с — время прогноза V_x; $g = 9{,}8$ м/с^2 и где угол Ψ поворота автобуса вокруг оси Oz в радианах вычисляется приближенно из выражения

$$\Psi(T_1) = \int_{t_0}^{T} \Omega_z(t)\,dt + \Omega_z(T)\left(T - T_1\right) \text{ [рад]}, \tag{6.286}$$

где $t_0 = 0$; $T = 0{,}15$ с.

Изменяемые параметры, условия взаимодействия, оценки результатов взаимодействия составляют направления исследования данной конфликтной ситуации.

Исследование эффективности конфликтного взаимодействия проведено в следующих направлениях: изменение весовых параметров α_i, β_i в показателях учитывает различную целевую настройку конфликтного взаимодействия ($\alpha_i = \beta_i = 0{,}33$, $i = 1,2,3$; $\alpha_1 = \beta_1 = 0{,}8$; $\alpha_i = \beta_i = 0{,}1$, $i = 2,3$; $\alpha_1 = \alpha_3 = \beta_1 = \beta_2 = 0{,}45$; $\alpha_2 = \beta_3 = 0{,}1$); учет влияния начальной продольной скорости V_x ($V_x = 40$, $V_x = 20$); учет начальных условий робастного участка регулирования (базовые варианты); учет качества робастного регулирования (два варианта матриц $\{k_{ij}\}$); вид стабильно-эффективного компромисса (СТЭК-1 — стабильное решение в виде Нэш-равновесия, наиболее близкого к Парето-границе — базовый вариант, и СТЭК-7 — Нэш–Парето–УКУ–Шепли-компромисс). Таким образом, было проанализировано 24 варианта (см. сноску в начале п. 6.11).

Исходными для исследования являются два базовых варианта с нулевыми (№1) и ненулевыми (№2) начальными условиями по скорости вращения, заносу и силам.

Начальные данные и условия базовых вариантов №1 и №2 приведены в табл. 6.10.

Таблица 6.10

Базовые варианты

№ варианта	$\dot{\Omega}_{z\text{доп}}$ [$с^{-2}$]	α_i, β_i	$V_x(t_0)$ [м/с]	$P_{ijx}(t_0)$ [Н]	$\Omega_z(t_0)$ [$с^{-1}$]	$V_y(t_0)$ [м/с]	$P_{ijy}(t_0)$ [Н]	$\Omega_{ijy}(t_0)$ [$с^{-1}$]	СТЭК
1	$4 \cdot 10^{-6}$	$\alpha_i = \beta_i = 0{,}33$, $i = 1,2,3$	40	0	0	0	0	80	СТЭК-1
2	0,04	$\alpha_i = \beta_i = 0{,}33$, $i = 1,2,3$	40	0	0,1	0,4	Формула (30)	80	СТЭК-1

Вариант №1 отражает в начальный момент времени t определенную степень близости к условиям робастного регулирования: не только стабилизация заноса по оси Oy и вращения вокруг оси Oz, но и обнуление этих величин.

Вариант №2 среди других трактовок ненулевых начальных условий может приближенно отражать результат неудачного (в «коалиции» с поверхностью торможения) воздействия водителя на процесс торможения на некотором его предыдущем цикле (например, поворот передних колес, вызвавших занос и вращение).

$$P_{ijy}(t_0) = -\frac{\nu_{ijy} N k_0}{V_x(t_0)} \left[V_y(t_0) + (-1)^{i+1} \Omega_z(t_0) A_i \right], \quad i, j = 1,2. \tag{6.287}$$

Каждый оптимизационный эксперимент представляет собой достаточно сложную процедуру вычислений в рамках ПС «МОМДИС» (см. п. 6.9), состоящую из глобального сетевого анализа на допустимых множествах управляющих параметров и показателей на сети $3^8 = 6561$ параметрических точек, где каждый из восьми управляющих параметров задается тремя значениями, и комбинированной оптимизации на основе многоэтапных алгоритмов оптимизации по Парето, Нэшу, а также на основе «угроз и контругроз» с отбором УКУ в окрестности точки Шепли для небазовых вариантов.

Результаты каждого эксперимента содержат текстовый и графический материал.

6.11.5. Примеры анализа результатов экспериментов на основе базовых вариантов

Изменения в проведенных экспериментах связаны с заменой точки СТЭК-1 на точку СТЭК-7.

Вариант №1. Результаты оптимизации имеют следующий вид:

- диапазоны изменения показателей

$$0{,}170\cdot10^{-12} \le J_{\text{A1}} \le 8{,}097\cdot10^{-12};$$
$$39{,}51025 \le J_{\text{A2}} \le 39{,}51031;$$
$$0 \le J_{\text{A3}} \le 5{,}13\cdot10^{-13};$$
$$-8{,}097\cdot10^{-12} \le J_{\text{П1}} \le -0{,}170\cdot10^{-12};$$
$$0 \le J_{\text{П2}} \le 2{,}00\cdot10^{-4};$$
$$0{,}32 \le J_{\text{П3}} \le 2{,}19;$$

- оптимальные значения управляющих параметров:

СТЭК-1

i, j	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
ν^r_{ijx}	0,72	0,34	0,79	0,22
s^r_{ijx}	0,04	0,15	0,03	0,15

СТЭК-7

i, j	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
$\nu^{\text{УКУ}}_{ijx}$	0,5	0,4	0,6	0,35
$s^{\text{УКУ}}_{ijx}$	0,09	0,15	0,07	0,15

- оптимальные значения показателей

$$\text{СТЭК-1:}\begin{cases} J^r_{\text{A}i}\text{: } 1{,}93\cdot10^{-12};\ 39{,}51029;\ 2{,}06\cdot10^{-15};\ \hat{J}^r_{\text{A}i}\text{: } 0{,}22;\ 0{,}63;\ 0{,}004; \\ J^r_{\text{П}i}\text{: } -1{,}93\cdot10^{-12};\ 4{,}32\cdot10^{-7};\ 1{,}281;\ \hat{J}^r_{\text{П}i}\text{: } 0{,}78;\ 0{,}002;\ 0{,}51; \end{cases}$$

$$\text{СТЭК-7:}\begin{cases} J^{\text{УКУ}}_{\text{A}i}\text{: } 0{,}67\cdot10^{-12};\ 39{,}51028;\ 4{,}51\cdot10^{-14};\ \hat{J}^{\text{УКУ}}_{\text{A}i}\text{: } 0{,}06;\ 0{,}41;\ 0{,}09; \\ J^{\text{УКУ}}_{\text{П}i}\text{: } -0{,}67\cdot10^{-12};\ 6{,}09\cdot10^{-6};\ 0{,}32;\ \hat{J}^{\text{УКУ}}_{\text{П}i}\text{: } 0{,}94;\ 0{,}03;\ 0{,}0004; \end{cases}$$

- терминальные значения угла поворота $\Psi(T_1)$

$$\Psi(T_1) = \begin{cases} \text{СТЭК-1: } \left(4{,}2\cdot10^{-6}\right)^\circ; \\ \text{СТЭК-7: } \left(3{,}66\cdot10^{-5}\right)^\circ. \end{cases}$$

Область допустимых значений всех показателей приведена на рис. 6.63–6.68.

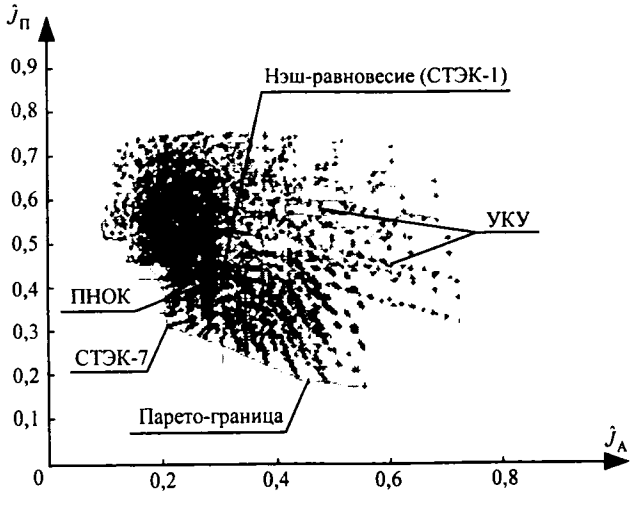


Рис. 6.63. Область допустимых значений показателей

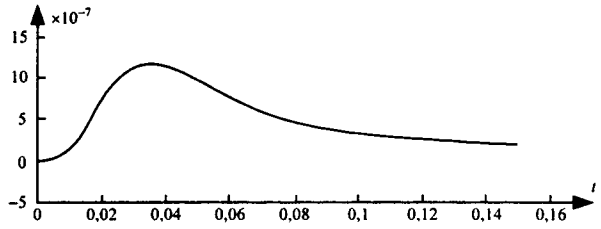


Рис. 6.64. Угловое ускорение $\dot{\Omega}_z(t)$

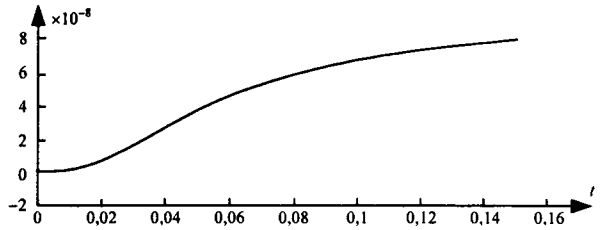


Рис. 6.65. Угловая скорость $\Omega_z(t)$

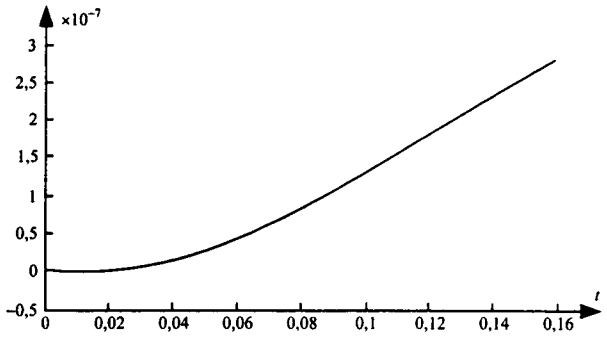


Рис. 6.66. Скорость заноса $V_y(t)$

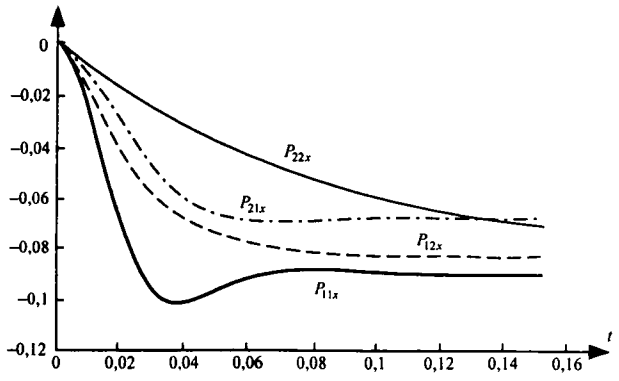


Рис. 6.67. Продольные контактные силы $P_{ijx}(t)$

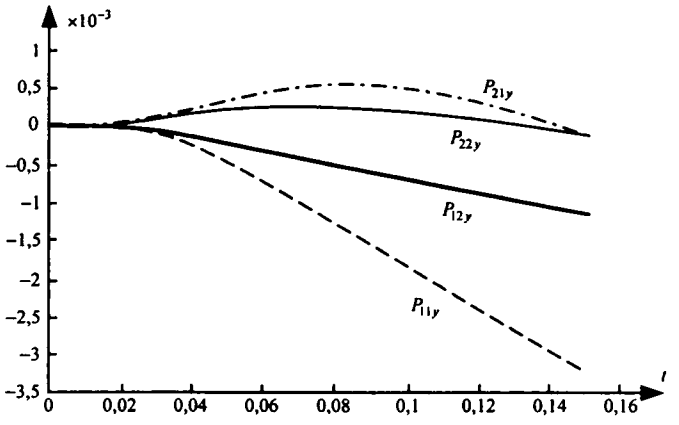


Рис. 6.68. Поперечные контактные силы $P_{ijy}(t)$

Конфликтная оптимальность в точке СТЭК-1 для поверхности дает явно выраженный оптимальный бортовой микс (mix) между правым и левым бортом, который компенсируется оптимальным торможением колес типа «крест» (наибольшее проскальзывание на малом сцеплении), что обеспечивает требуемое понижение курсовой неустойчивости на робастном этапе торможения (рис. 6.64) и дает определенную стабилизацию угловой скорости вращения $\Omega_z(t)$ к концу робастного интервала (рис. 6.65) с соответствующими изменениями скорости заноса и контактных сил (рис. 6.66–68).

Конфликтная оптимальность в точке СТЭК-7 дает некоторые улучшения в значениях показателей для обеих сторон (рис. 6.63) и выявляет другой оптимальный вариант «управляющих» параметров поверхности с малыми кулоновыми силами трения скольжения и с траекториями близкими к предыдущим. При этом данный вариант $\nu_{ijx}^{\text{УКУ}}$ вызывает положительное вращение автобуса вокруг нормали 2 первого колеса и положительный занос, а оптимальное торможение типа крест, близкое по величинам s_{ijx} к торможению в точке СТЭК-1, также компенсирует это вращение и противодействует заносу.

Оптимальность режима малого сцепления «со стороны» поверхности в СТЭК-7 (эксперимент 2) в дополнение к бортовому миксу в СТЭК-1 (эксперимент 1) является следствием некоторого уменьшения «потерь» в показателях $J_{\text{П}}$ в точке СТЭК-7, в том числе в показателе $J_{\text{П3}}$, который, уменьшая ν_{ijx}, формирует ν_{ij} лишь в рамках второго равенства системы (6.266). Значение курсовой устойчивости автобуса в точке СТЭК-7 лучше, чем в точке СТЭК-1 поэтому АБС автобуса полезно точнее настраивать на параметрический режим СТЭК-7, хотя для автобуса оптимальные параметры базового варианта 1 в СТЭК-1 и СТЭК-7 близки. Следует отметить, определенное прогнозируемое замедление на величину 0,5 м/с в обоих экспериментах.

Вариант №2. Результаты экспериментов имеют следующий вид:

- диапазоны изменения показателей

$$0{,}00042 \le J_{\text{A1}} \le 0{,}01638;$$
$$39{,}55 \le J_{\text{A2}} \le 39{,}59;$$
$$0{,}051 \le J_{\text{A3}} \le 0{,}065;$$
$$-0{,}01638 \le J_{\text{П1}} \le -0{,}00042;$$

$$0{,}40\cdot10^7 \le J_{\text{П}2} \le 1{,}75\cdot10^7;$$

$$0{,}32 \le J_{\text{П}3} \le 2{,}19;$$

- оптимальные значения управляющих параметров:

СТЭК-1

i, j	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
ν^r_{ijx}	0,58	0,23	0,64	0,3
s^r_{ijx}	0,03	0,12	0,04	0,10

СТЭК-7

i, j	1, 1	1, 2	2, 1	2, 2
$\nu^{\text{УКУ}}_{ijx}$	0,96	0,46	0,07	0,05
$s^{\text{УКУ}}_{ijx}$	0,12	0,11	0,04	0,09

- оптимальные значения показателей

$$\text{СТЭК-1:}\begin{cases} J^r_{\text{A}i}:\ 0{,}00549;\ 39{,}569;\ 0{,}058; & \hat{J}^r_{\text{A}i}:\ 0{,}32;\ 0{,}48;\ 0{,}55; \\ J^r_{\text{П}i}:\ -0{,}00549;\ 1{,}05\cdot10^7;\ 1{,}285; & \hat{J}^r_{\text{П}i}:\ 0{,}68;\ 0{,}48;\ 0{,}51; \end{cases}$$

$$\text{СТЭК-7:}\begin{cases} J^{\text{УКУ}}_{\text{A}i}:\ 0{,}01209;\ 39{,}557;\ 0{,}055; & \hat{J}^{\text{УКУ}}_{\text{A}i}:\ 0{,}73;\ 0{,}16;\ 0{,}28; \\ J^{\text{УКУ}}_{\text{П}i}:\ -0{,}01209;\ 1{,}20\cdot10^7;\ 1{,}27; & \hat{J}^{\text{УКУ}}_{\text{П}i}:\ 0{,}27;\ 0{,}59;\ 0{,}51; \end{cases}$$

- терминальные значения угла поворота $\Psi(T_1)$

$$\Psi(T_1) = \begin{cases} \text{СТЭК-1:}\ 8{,}9°; \\ \text{СТЭК-7:}\ 9{,}2°. \end{cases}$$

Область допустимых значений всех показателей приведена на рис. 6.69.

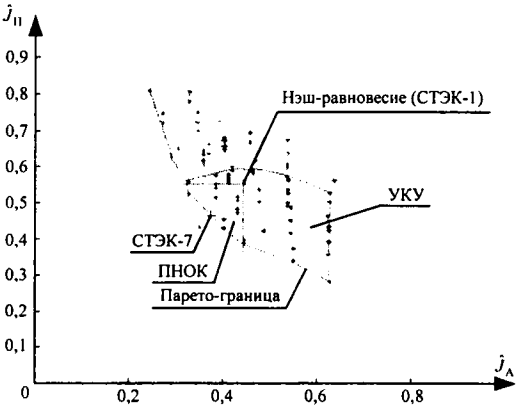


Рис. 6.69. Область допустимых значений показателей

Анализ экспериментов показывает, что в точке СТЭК-1 (точке равновесия по Нэшу) имеет место бортовой микс между правым и левым бортом на поверхности торможения при реакции АБС в виде «креста» (наибольшее проскальзывание на малом сцеплении). Из-за ненулевых начальных условий по $\Omega_z = 0{,}1\,\text{с}^{-1}$ и заносу $V_y = 0{,}4$ м/с (1% от V_x), которые более «выгодны» поверхности торможения; бортовой микс «смягчен» по сравнению с базовым вариантом №1 с нулевыми начальными условиями (коэффициенты сцепления на обоих бортах уменьшились), что в свою очередь приводит к смягчению реакции АБС.

По этой причине увеличивается угол поворота автобуса $\Psi(T_1) = 8{,}9°$ и ухудшается курсовая устойчивость автобуса, когда $\hat{J}^r_{\text{A}1} = 0{,}32\ (0{,}22)$ (см. рис. 6.65).

Значительно увеличивается интегральная характеристика заноса $\hat{J}^r_{A3} = 0,55\ (0,058)$, но одновременно значительно увеличиваются контактные силы поверхности, когда $\hat{J}^r_{П2} = 0,48\ (0,002)$, поэтому в целом ситуация разрешается в пользу автобуса $\left(\hat{J}^r_A < \hat{J}^r_П\right.$, см. рис. 6.63$\left.\right)$.

В точке СТЭК-7 оптимальные параметры поверхности имеют свойства осевого микса, который при неравных величинах ν_{11} и ν_{12} и ненулевых условиях ухудшает курсовую устойчивость $\hat{J}^{УКУ}_{A1} = 0,73$, вызывая вращение автобуса вокруг нормали в точке касания колеса 11, и незначительно увеличивается угол $\Psi(T_1)$. Но оптимальное торможение автобуса уменьшает нормированный показатель заноса и нормированный показатель скорости в момент T_1 (увеличивает замедление). Поэтому в целом ситуация также разрешается в пользу автобуса $\left(\hat{J}^{УКУ}_A < \hat{J}^{УКУ}_П\right.$, см. рис. 6.63$\left.\right)$.

В данном базовом варианте №2 (при ненулевых условиях) оптимальное торможение в точке СТЭК-1 отличается по структуре от торможения в точке СТЭК-7.

Если в СТЭК-1 имеет место «крест» — реакция АБС, то в точке СТЭК-7 величины проскальзывания колес S_{11x} и S_{12x} обеспечивают максимальное замедление, а совместно с колесом 22 обеспечивают определенную компенсацию заноса и вращения.

По основному показателю курсовой устойчивости при потерях в замедлении и заносе более выгодным для автобуса является режим торможения (крест) в точке СТЭК-1.

Полный анализ из [40] экспериментов позволяет сделать следующие выводы. Разработан метод анализа конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения на основе игровых подходов. Применение метода в практически ценной модели торможения автомобиля (автобуса) высокого порядка на этапе робастного регулирования АБС позволило получить следующие теоретико-прикладные результаты:

1. Выявлены четыре вида конфликтно-оптимальных свойств поверхности (коэффициентов кулоновых сил трения скольжения ν_{ijx}, $i,j = 1,2$) в процессе торможения: бортовой и осевой микс, малое сцепление (ν_{ijx} — малые величины), комбинирование бортового и осевого микс и ряд оптимальных реакций тормозной АБС, среди которых наиболее типичны проскальзывание S_{ijx}, $i,j = 1,2$ типа «крест» (малое проскальзывание при большом сцеплении и наоборот), «антикрест» с компенсацией.

2. Обоснованы результаты выбора свойств поверхности торможения в методах робастного регулирования. Выявлена зависимость вида взаимодействия от характера стабильно-эффективного компромисса (СТЭК-1, СТЭК-7): бортовой микс — «крест» для СТЭК-1, малое сцепление — «крест» и осевой микс — «антикрест» с компенсацией для СТЭК-7 с лучшей (для большинства вариантов) курсовой устойчивостью в СТЭК-1 и вырождением взаимодействия в бортовой микс — «крест» в условиях, близких к антагонизму. Показана существенная зависимость результатов оптимизации от начальных условий по угловой скорости $\Omega_z(t_0)$ и заносу $V_y(t_0)$ и ограниченное влияние на результаты изменения продольной скорости $V_x(t_0)$.

3. Сформирована база данных оптимального взаимодействия АБС и поверхности торможения с разными степенями конфликтности поверхности процессу торможения. Оценено влияние качества робастно регулирования на конфликтно-оптимальное взаимодействие с поверхностью. Получены элементы комбинированного исследования взаимодействия автомобиля и поверхности торможения методом робастного регулирования на основе функций А.М. Ляпунова и методом анализа конфликтно-

оптимального взаимодействия, которые в целом охватывают свойства неопределенности поверхности и формируют метод робастного регулирования с робастно-игровой коррекцией. Последняя в данной прикладной задаче может быть реализована следующим образом.

4. В процессе применения полученного робастного регулятора на этапе робастного регулирования выполняются начальные грубые оценки угловых скоростей вращения колес автомобиля и идентифицируются коэффициенты сцепления — величины ν_{ij}, $i,j=1,2$. Полученный вектор $\boldsymbol{\nu}$ позволяет выбрать из детальной базы данных соответствия $\mathbf{s}_{opt}=f\left(\boldsymbol{\nu}_{opt}\right)$, размещенных в памяти АБС, близкий вектор $\boldsymbol{\nu}_{opt}$ и соответствующий ему набор коэффициентов проскальзывания $\mathbf{s}_{opt}=\left\{s_{ij},\ i,j=1,2\right\}$, которые определяют требуемые скорости вращения колес (6.262), а следовательно, оптимальную реакцию АБС в виде $\Delta\Omega_{ijy}=\Omega_{ijy}^{\text{тр}}-\Omega_{ijy}$. По окончании этапа робастного регулирования более полная информация «из-под колес» позволяет перейти к этапу адаптивного регулирования.

6.12. ОПТИМИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНИЯ РОБОТА «УНИВЕРСАЛ-5» С УЧЕТОМ МЕХАТРОННОЙ СТРУКТУРЫ В УСЛОВИЯХ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ НА ОСНОВЕ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫХ КОМПРОМИССОВ

В настоящее время вопросы проектирования, модификации и управления в технических системах в соответствии с основными результатами относительно нового научно-технического направления — мехатроники — базируются на универсальной структуре мехатронной системы в виде трех, в общем случае, равнозначных сильно связанных подсистем: механической (конструкция), электротехнической (привод) и компьютерной подсистемы управления. Простейшая структура такой системы дана на рис. 6.70.



Рис. 6.70. Простейшая структура мехатронной системы

К подобным системам могут быть отнесены: летательные аппараты (ЛА), если система управления ЛА выбирается не только с учетом законов управления и вычислительных средств их реализации, но и с учетом изменяемой механики полета ЛА; робототехнические системы; собственно следящие приводы, а также множество других систем.

В процессе проектирования и модификации управляемых мехатронных систем формулируются векторные требования к каждой подсистеме в виде показателей эффективности и потерь, типы и допустимые множества изменяемых параметров и управляющих сил, варьируемые схемы и модели подсистем.

В большинстве случаев разработчики подобных систем идут по пути последовательного создания и оптимизации каждой из подсистем. Например, в начале создается механическая часть, затем под нее разрабатывается электротехническая часть и, наконец, выбираются алгоритмы и носители алгоритмов управления.

В данном параграфе обсуждается подход к проблеме оптимизации мехатронных систем как ММС на основе стабильно-эффективных игровых решений, позволяющий одновременно учесть требования к каждой из подсистем в условиях исходной несогласованности и к системе в целом и найти компромиссную комбинацию параметров. При этом работа системы оценивается показателями качества, которые позволят оптимизировать не только каждую подсистему, но всю мехатронную систему в целом. В исследовании применяются методы оптимизации ММС в условиях конфликта и неопределенности.

6.12.1. Математическая модель робота «Универсал-5» в пространстве состояний

В качестве примера рассматривается процедура оптимизации параметров промышленного робота «Универсал-5», представленного электромеханической и компьютерной подсистемами. Для данного робота формируется математическая модель привода поворота робота. В модели учтены нелинейности, характеризующие насыщение на выходе тиристорного усилителя и приведенный момент сухого трения на валу электродвигателя, а также варьируемые параметры и переменный момент инерции объекта управления. Применяется схема адаптации с эталонной моделью. Эффективность компьютерной системы оценивается интегральным показателем J_1 ошибки, который характеризует качество переходных процессов при отработке воздействия типа скачка на конечном интервале времени. Второй интегральный показатель J_2 учитывает нестабильность массово-инерционных характеристик электромеханической подсистемы робота в процессе эксплуатации, а также конфликтность параметров схемы управления, часть из которых отвечает за статическую точность, а часть — за динамическую.

Промышленный робот «Универсал-5» предназначен для автоматизации технологических процессов загрузки и разгрузки, межстаночного складирования в механических, заготовительных и других цехах. Манипулятор промышленного робота подобного типа представляет собой механическую руку с пневматическим приводом кисти и схвата, которая с помощью четырех электромеханических следящих приводов позиционируется в пространстве в цилиндрической системе координат.

Схематическое изображение промышленного робота «Универсал-5» представлено на рис. 6.71.

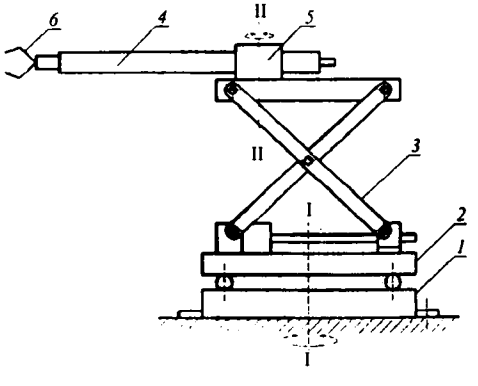


Рис. 6.71. Схематическое изображение промышленного робота «Универсал-5»:
1 — основание робота; *2* — платформа; *3* — пантографический механизм подъема;
4 — механическая рука; *5* — механизм поворота и выдвижения руки; *6* — схват

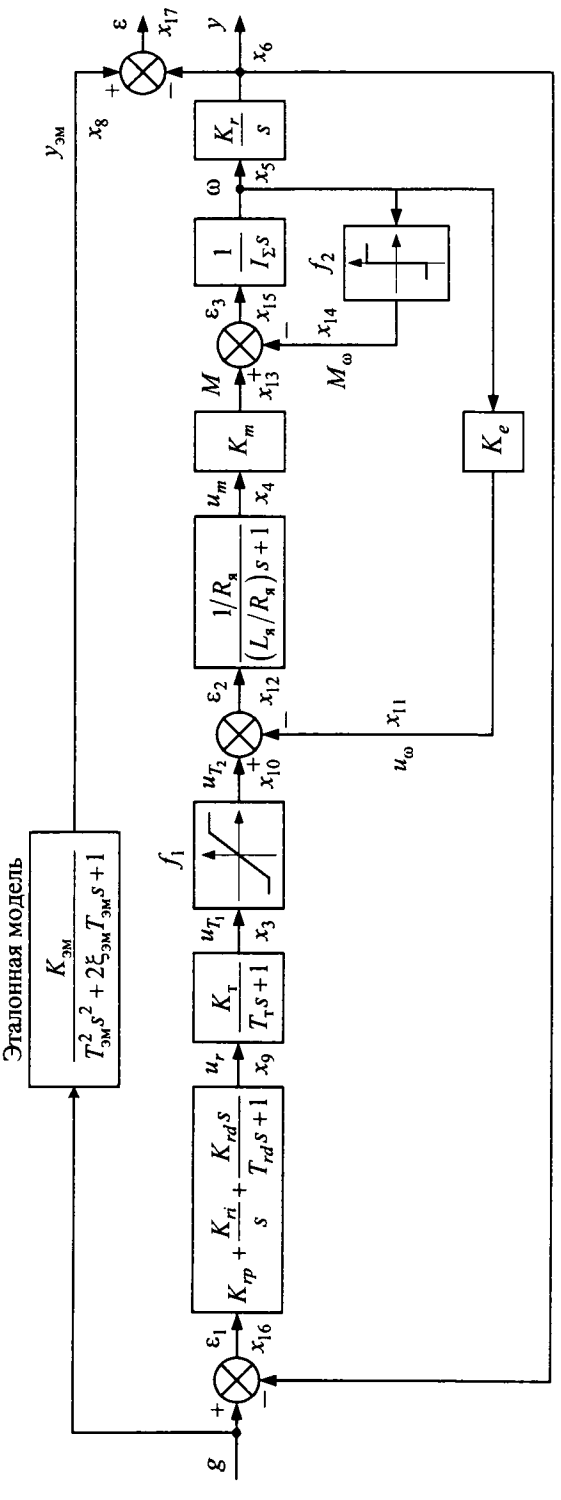


Рис. 6.72. Структурная схема адаптивной системы управления приводом поворота промышленного робота «Универсал-5»

Весьма важной особенностью работы приводов манипулятора является переменный момент инерции объекта управления. В наибольшей степени положение руки *4* и масса детали, установленной в схвате *6*, оказывают влияние на момент инерции нагрузки для привода поворота манипулятора относительно оси II–II.

Основным режимом работы приводов манипулятора промышленного робота является режим отработки сигналов типа скачка различной амплитуды. При этом следящие приводы должны обеспечивать заданную точность позиционирования схвата и отрабатывать входное воздействие без перерегулирования. Экспериментальные данные, полученные в ходе испытаний и эксплуатации промышленного робота «Универсал-5», показывают, что вариации параметров приводов и объекта управления приводят к тому, что не обеспечивается заданная точность позиционирования, а также возможно возникновение недопустимых в работе манипулятора перерегулирований. Структурная схема системы управления приводом поворота манипулятора промышленного робота типа «Универсал-5» представлена на рис. 6.72.

На структурной схеме приняты следующие обозначения: $K_{rp}, K_{ri}, K_{rd}, T_{rd}$ — параметры ПИД-контроллера; $K_{\text{т}}, T_{\text{т}}$ — параметры тиристорного усилителя; f_1 — нелинейная характеристика типа «насыщение» тиристорного усилителя; $L_{\text{я}}$, $R_{\text{я}}$, $K_{\text{я}}$ — конструктивные параметры электродвигателя постоянного тока; K_e — коэффициент противо-ЭДС; f_2 — нелинейная характеристика типа «сухое трение», учитывающая приведенный момент сухого трения; $I_{\Sigma} = I_{\text{дв}} + I_{\text{пр}}$ — суммарный момент инерции на валу электродвигателя (собственный и приведенный), относительно которого имеет место неопределенность; K_r — передаточное число редуктора; $K_{\text{эм}}, T_{\text{эм}}, \xi_{\text{эм}}$ — параметры эталонной модели (ЭМ); y — угловое перемещение манипулятора промышленного робота; ω — угловая скорость вращения вала электродвигателя; M — момент на валу электродвигателя; K_m — коэффициент момента; M_{ω} — приведенный момент сухого трения; u_{T_2} — выходной сигнал тиристорного преобразователя.

Для оценки поведения объекта управления в систему включена эталонная модель (ЭМ), динамика которой приближенно может быть описана колебательным звеном. Сигнал рассогласования $\varepsilon(t) = y(t) - y_{\text{эм}}(t)$ между выходом объекта и эталонной моделью анализируется по значению показателя качества J_1. Представим математическую модель исследуемой системы управления в нормальной форме. Для этого введем следующие переменные:

$$\dot{x}_1 = x_2 + Q_1\varepsilon_1;\ \dot{x}_2 = -\frac{x_2}{T_{rd}} + Q_2\varepsilon_1,$$

где

$$Q_0 = \frac{K_{rp}T_{rd} + K_{rd}}{T_{rd}};\ Q_1 = \frac{K_{rp} + K_{ri}T_{rd} - Q_0}{T_{rd}};\ Q_2 = \frac{K_{ri} - Q_1}{T_{rd}};$$

$$x_3 = u_{T_1};\ x_4 = u_m;\ x_5 = \omega;\ x_6 = y;\ x_7 = \dot{x}_8;\ x_8 = y_{\text{эм}};\ x_9 = u_r;$$

$$x_{10} = u_{T_2};\ x_{11} = u_{\omega};\ x_{12} = \varepsilon_2;\ x_{13} = M;\ x_{14} = M_{\omega};\ x_{15} = \varepsilon_3;\ x_{16} = \varepsilon_1;\ x_{17} = \varepsilon.$$

Тогда в качестве математического описания системы управления приводом поворота манипулятора промышленного робота можно принять систему динамико-алгебраических связей:

$$\dot{x}_1 = x_2 + Q_1x_{16};\ \dot{x}_2 = -\frac{1}{T_{rd}}x_2 + Q_2x_{16};\ \dot{x}_3 = -\frac{1}{T_{\text{т}}}x_3 + \frac{K_{\text{т}}}{T_{\text{т}}}x_9;$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{R_я}{L_я}x_4 + \frac{1}{L_я}x_{12},\ \ \dot{x}_5 = \frac{1}{I_\Sigma}x_{15},\ \ \dot{x}_6 = K_r x_5,$$

$$\dot{x}_7 = \frac{K_{эм}g}{T_{эм}^2} - \frac{2\xi_{эм}T_{эм}}{T_{эм}^2}x_7 - \frac{1}{T_{эм}^2}x_8;\ \ \dot{x}_8 = x_7;\ \ x_9 = x_1 + Q_0 x_{16};$$

$$x_{10} = f_1(x_3) = \begin{cases} x_3, & -a \le x_3 \le a; \\ a, & x_3 > a; \\ -a, & x_3 < -a; \end{cases} \qquad x_{11} = K_e x_5;\ \ x_{12} = x_{10} - x_{11};\ \ x_{13} = K_m x_4;$$

$$x_{14} = M_\omega = \begin{cases} c, & x_5 \ge 0; \\ -c, & x_5 < 0; \end{cases} \quad x_{15} = x_{13} - x_{14};\ \ x_{16} = g - x_6;\ \ x_{17} = x_6 - x_8.$$

Представленные соотношения характеризуют динамические связи на основе вектора $x_1,\ldots,x_8$, и алгебраические связи на основе вктора $x_9,\ldots,x_{17}$, присутствующие в модели системы управления, и имеют следующий физический смысл: x_1, x_2, x_9, $x_{16},\ldots,x_{18}$ — характеризуют модель системы управления; x_3, x_{10} — модель тиристорного преобразователя; $x_4,\ldots,x_6$, $x_{11},\ldots,x_{15}$ — модель электродвигателя постоянного тока; x_7, x_8 — эталонную модель.

В данной модели учтен тот факт, что суммарный момент инерции на валу электродвигателя является величиной переменной $I_\Sigma \in Q$; диапазон Q, в котором может изменяться I_Σ в процессе эксплуатации промышленного робота, задан в виде

$$Q = \left\{ I_\Sigma \middle| 2I_{дв} \le I_\Sigma \le 5I_{дв} \right\};$$

Качество работы системы определяется при отработке входного воздействия типа скачка на конечном интервале времени $[t_0, T]$:

$$g_1(t) = 1[t];\ \ g_2(t) = 1{,}5[t].$$

Составление конечномерной модели робота на основе непрерывной математической модели. Для перехода от системы дифференциальных и алгебраических уравнений, описывающих физические процессы, которые протекают в мехатронной системе при отработке входного воздействия, к рекуррентным уравнениям, позволяющим использовать для изучения модели и нахождения оптимальных параметров контура управления методы стабильно-эффективных компромиссов, заменим производные в дифференциальных уравнениях на отношение конечных разностей к шагу, причем шаг берем единичный:

$$\frac{dx_i}{dt} \to \frac{\Delta x_i}{\Delta t} \to \left.\frac{x_i(k+1) - x_i(k)}{\Delta t}\right|_{\Delta t = 1} = x_i(k+1) - x_i(k).$$

После подобной замены и упрощения исходной системы уравнений окончательно получим систему из восьми разностных уравнений:

$$x_1(k+1) = x_1(k) + \left[x_2(k) + \frac{K_{ri}T_{rd}^2 - K_{rd}}{T_{rd}^2}\left(g(k) - x_6(k)\right) \right]\Delta t;$$

$$x_2(k+1) = \left(1 - \frac{\Delta t}{T_{rd}}\right)x_2(k) + \left[\frac{K_{ri}T_{rd}^2 - K_{rd}}{T_{rd}^3}\left(g(k) - x_6(k)\right) \right]\Delta t;$$

$$x_3(k+1) = \frac{K_т}{T_т}x_1(k)\Delta t + \left(1 - \frac{\Delta t}{T_т}\right)x_3(k) + \left[\frac{K_т}{T_т}\left(\frac{K_{rp}T_{rd} + K_{rd}}{T_{rd}} \right)\left(g(k) - x_6(k)\right) \right]\Delta t;$$

$$x_4(k+1) = \left(1 - \frac{R_я \Delta t}{L_я}\right)x_4(k) + \left[\frac{1}{L_я}\left(f_J\left(x_3(k)\right) - K_e x_5(k)\right) \right]\Delta t;$$

$$x_5(k+1) = x_5(k) + \left[\frac{1}{J_\Sigma}\left(K_m x_4(k) + f_2\left(x_5(k)\right)\right)\right]\Delta t;$$

$$x_6(k+1) = x_6(k) + x_5(k)\Delta t;$$

$$x_7(k+1) = x_7(k) + \left[\frac{K_{эм}}{T_{эм}^2} g(k) - \frac{2\xi_{эм}T_{эм}}{T_{эм}^2} x_7(k) - \frac{1}{T_{эм}^2} x_8(k)\right]\Delta t;$$

$$x_8(k+1) = x_8(k) + x_7(k)\Delta t,$$

где

$$f_J\left(x_3(k)\right) = \begin{cases} x_3(k), & -a \le x_3(k) \le +a; \\ a, & x_3(k) > +a; \\ -a, & x_3(k) < -a; \end{cases} \qquad f_2\left(x_5(k)\right) = \begin{cases} +c, & x_5(k) \ge 0; \\ -c, & x_5(k) \le 0. \end{cases}$$

Формирование показателей качества работы системы. Показатель качества подсистемы управления робота выбирается в форме интегральной квадратической оценки

$$J_1 = \int_{t_0}^{t_k} \varepsilon^2(t)dt \to \min,$$

где $\varepsilon(t) = x_8(t) - x_6(t)$ является сигналом рассогласования между выходной координатой $y(t) = x_8(t)$ робота и выходной координатой эталонной модели $y_{эм}(t) = x_6(t)$.

В [83] получено робастное решение для параметров регулятора в более общей постановке на основе генетических алгоритмов адаптации, перцептронной модели нейросети и векторного минимакса. В данном примере неопределенность рассматривается как активный партнер, у которого антагонистический характер проявления, следующий из условий минимакса, дополняется типовыми вариантами бескоалиционного и коалиционного взаимодействия, и, следовательно, робастное качество дополняется на основе СТЭК менее жестким робастно-игровым качеством, учитывающим типовые варианты бескоалиционной и коалиционной степени конфликтности неопределенности.

Для этого показатель электромеханической подсистемы J_2 учитывает в первом слагаемом конфликтный характер взаимодействия системы управления робота и неопределенных параметров механической части, вытекающий из свойств гарантированного робастного качества (первое слагаемое J_2 и J_1 составляют антагонистическое ядро показателей J_1 и J_2), а во втором слагаемом — возможность уменьшения степени конфликтности в бескоалиционном и коалиционном равновесии по сравнению с антагонизмом на основе типичной ситуации в условиях неопределенности

$$J_2 = -\alpha_1 \int_{t_0}^{t_k} \varepsilon^2(t)dt + \alpha_2 \int_{t_0}^{t_k} \left(\varepsilon_2(t) - \varepsilon_2\left(t, J_\Sigma = 3{,}5J_{дв}\right)\right)^2 dt \to \min.$$

Таким образом, параметры контура управления для дальнейшей адаптации выбираются не только из соображений антагонизма внешней среды (робастный момент инерции J_Σ, дающий гарантированное решение с максимальной степенью конфликтности со стороны неопределенности момента инерции робота, в [83] равен $5J_{дв}$), но и из условий меньшей степени конфликтности. Абсолютные значения коэффициентов α_1, α_2 выбираются из соображений, учитывающих значимость типичной ситуации в показателе J_2.

В более общей постановке [83] данное свойство снижения степени конфликтности робастного решения может быть учтено введением векторного равновесия по Нэшу в дополнение к векторному минимаксу.

6.12.2. Моделирование в программной среде «МОМДИС»

Для оптимизации системы применена программная среда «МОМДИС», в которой, как известно, реализованы алгоритмы Нэш–Парето–УКУ–Шепли-оптимизации, а также их комбинации. В рамках полученной структуры из двух подсистем в виде электромеханической и алгоритмической частей применены указанные алгоритмы оптимизации, которые позволяют получить наиболее эффективные решения среди уравновешивающих эффективность каждой из подсистем, т.е. приводящие к компромиссу между показателями качества подсистем.

При моделировании диапазон неопределенности момента инерции робота ограничен пределами $2I_{\text{дв}} \le I_{\Sigma} \le 5I_{\text{дв}}$, при этом момент инерции изменяется дискретно с шагом $\Delta I_{\Sigma} = 0,5I_{\text{дв}}$, $I_{\text{дв}} = 1$. В качестве искомых управляемых величин подсистемы управления выбраны параметры ПИД-регулятора K_{rp}, K_{ri}, K_{rd}, T_{rd}. Суть задачи оптимизации состоит в подборе наиболее эффективной комбинации этих коэффициентов с использованием алгоритмов оптимизации СТЭК для последующей точной настройки [83] к режиму без перерегулирования. Критерием отбора той или иной комбинации параметров являются неантагонистические показатели качества J_1, J_2. Область возможных значений параметров ПИД-регулятора задается конструкцией промышленного робота «Универсал-5» и имеет следующей вид:

$$P = \left\{ \begin{array}{l} 0,4 \le K_{rp} \le 0,8; \\ 0,002 \le K_{ri} \le 0,008; \\ 0,2 \le K_{rd} \le 0,6; \\ 0,02 \le T_{rd} \le 0,06 \end{array} \right\}.$$

Полученная модель была введена в ПС «МОМДИС». Далее построена область показателей качества, на которой найдены Нэш-оптимальное решение, сетевая область Парето-решений, а также область УКУ-решений.

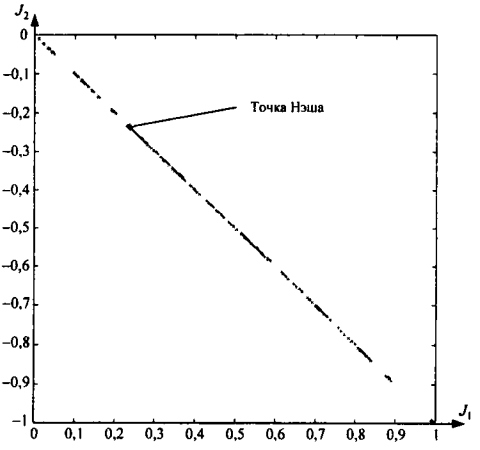


Рис. 6.73. Область нормированных значений показателей качества J_1, J_2, полученная в эксперименте №1

Эксперимент №1. Система исследуется при следующих значениях параметров промышленного робота:

$$L_{\text{я}} = 0,05;\ R_{\text{я}} = 1;\ K_m = 3,8;\ K_r = 1;\ K_l = 0,3;\ T_{\text{т}} = 0,05;\ K_{\text{т}} = 4,1;$$
$$K_{\text{эм}} = 1;\ T_{\text{эм}} = 1;\ \xi_{\text{эм}} = 0,9;\ c = 0,1;\ a = 1;\ \alpha_1 = 1;\ \alpha_2 = 0.$$

Численные значения коэффициентов показателя J_2 — $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, что соответствует антагонистической ситуации, которая порождает на плоскости показателей качества прямую, проходящую под углом 135°. После проведения оптимизационной процедуры в ПС «МОМДИС» получена точка Нэша (рис. 6.73), а также набор параметров ПИД-регулятора и значения I_Σ, соответствующих этой точке:

$$K_{rp} = 0,72;\ K_{ri} = 0,008;\ K_{rd} = 0,6;\ T_{rd} = 0,028;\ I_\Sigma \cong 4,8.$$

Эксперимент №2. Второй эксперимент проводился при тех же исходных данных робота, что и в первом. Изменены лишь численные значения коэффициентов второго показателя качества $\alpha_1 = 0,5$, $\alpha_2 = 0,5$.

Новые значения выбраны таким образом, чтобы в показателе качества J_2 оба интеграла были равнозначны. Новая ситуация порождает на плоскости показателей качества некую область сложной формы (вид которой приведен на рис. 6.74), значительно отличающуюся от области, полученной в эксперименте №1. После проведения оптимизационной процедуры в ПС «МОМДИС» получены: точка Нэша, область Парето-оптимальных решений и область УКУ, а также набор параметров ПИД-регулятора и момента инерции, соответствующих точке Нэша:

$$K_{rp} = 0,595;\ K_{ri} = 0,008;\ K_{rd} = 0,472;\ T_{rd} = 0,06;\ J_\Sigma \cong 3,46$$

и точке СТЭК-7:

$$K_{rp} = 0,4;\ K_{ri} = 0,008;\ K_{rd} = 0,333;\ T_{rd} = 0,06;\ J_\Sigma \cong 2,5.$$

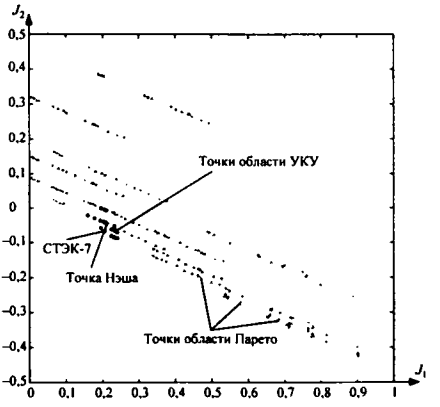


Рис. 6.74. Область нормированных значений показателей качества J_1, J_2, полученная в эксперименте №2

Значение показателя качества J_1, который отвечает за качество работы системы управления и должен стремиться к минимально возможному значению, в точке Нэша меньше, чем в аналогичной точке, полученной в первом эксперименте, что еще раз доказывает: качество работы системы улучшилось.

Эксперимент №3. В третьем эксперименте коэффициенты второго показателя качества α_1=0,2, $\alpha_2 = 0,8$.

Новые значения выбраны таким образом, чтобы в показателе качества J_2 второй интеграл имел больший вес, что еще больше уменьшает степень конфликтности. В результате оптимизации в ПС «МОМДИС» рассчитаны: точка Нэша, область Парето-оптимальных решений и область УКУ (рис. 6.75). Набор параметров ПИД-регулятора и J_Σ, соответствующих точке Нэша:

$$K_{rp} = 0,59;\ K_{ri} = 0,008;\ K_{rd} = 0,473;\ T_{rd} = 0,06;\ J_\Sigma \cong 3,34$$

и точке СТЭК-7:

$$K_{rp} = 0,4;\ \ K_{ri} = 0,008;\ \ K_{rd} = 0,333;\ \ T_{rd} = 0,06;\ \ J_{\Sigma} \cong 2,5.$$

Работа ПИД-регулятора с данными параметрами была промоделирована в ПС *Matlab* с использованием пакета *Simulink*; получен вид реакции мехатронной системы на типовые воздействия $g_1(t) = 1[t]$, $g_2(t) = 1,5[t]$. Значение момента инерции варьировалось в пределах $2I_{\text{дв}} < I_{\Sigma} < 5I_{\text{дв}}$, момент инерции изменялся дискретно с шагом $\Delta I_{\Sigma} = 0,5I_{\text{дв}}$, $I_{\text{дв}} = 1$. Полученным переходным процессам (ПП) со средним временем ПП 3–5 секунд свойственна колебательность с перерегулированием, которое компенсируется последующей адаптивной настройкой ПП на эталонный ПП на основе нейросети [83] с базовыми параметрами ПИД-регулятора, полученными в экспериментах 2 и 3.

Значение критерия качества J_1 в точке Нэша меньше, чем в аналогичной точке, полученной в первом и втором экспериментах, т.е. параметры системы, полученные в третьем эксперименте придают системе наилучшее качество.

Анализ полученных результатов моделирования. В результате оптимизации получены параметры ПИД-регулятора в системе управления роботом и момент инерции в электромеханической части на основе СТЭК в условиях антагонистического бескоалиционного и коалиционного учета проявления неопределенности момента инерции робота. Проанализированы робастное и робастно-игровое качество системы, которые базируются не только на гарантированных решениях с максимальной степенью конфликтности со стороны неопределенности момента инерции робота, но и на меньшей степени конфликтности.

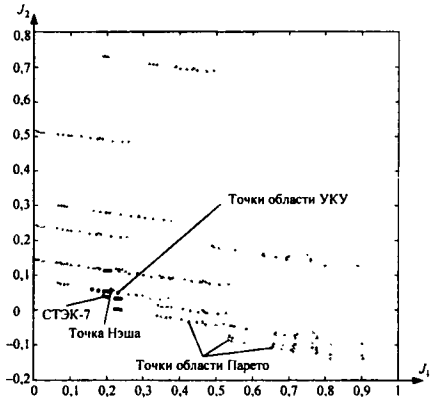


Рис. 6.75. Область нормированных значений показателей качества J_1, J_2, полученная в эксперименте №3

Моделирование показало, что результаты оптимизации удовлетворяют практическим задачам качества функционирования робота в условиях неопределенности его параметров. В частности качество переходных процессов для системы с параметрами, оптимизированными по данному методу, позволяет выбирать из серии возможных значений наиболее подходящее как базовое для последующей адаптивной настройки [83].

Необходимо отметить, что данная работа является лишь начальным этапом в изучении возможности применения методов СТЭК для мехатронных систем. Результаты работы показали перспективность данного подхода и необходимость развития данной методологии для более сложных систем, в которых будет учитываться полное влияние всех трех частей мехатронной системы.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ

По-прежнему рассматривается решение задачи оптимального управления. Однако в отличие от главы 2 теперь предполагается, что ограничения заданы как на вектор управления, так и на фазовые переменные системы. Ограничения на фазовые координаты существенным образом усложняют определение оптимального управления и оптимальной траектории.

Большое внимание уделяется изложению необходимых условий оптимальности. Изложение начинается с рассмотрения условий оптимальности при ограничениях на фазовые координаты произвольного порядка, а затем указываются те упрощения, которые имеют место при ограничениях на фазовые координаты первого порядка. Такой способ изложения позволяет избежать ненужной тавтологии, которая обязательно имела бы место, если бы в начале рассматривались ограничения первого порядка, а потом — любого порядка.

Как и в главе 2, большое место отводится оптимальному по быстродействию управлению линейными объектами. Для таких задач формируются достаточные условия оптимальности, рассматривается управление объектом с помощью инерционного руля, приводятся примеры решения задачи синтеза оптимального по быстродействию управления со специально подобранными модельными объектами.

П.1.1. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ

При определении оптимального управления, наряду с ограничениями на управление, часто необходимо учитывать также ограничения на фазовый вектор системы. При управлении двигателем постоянного тока, например, ограничения могут быть наложены: на величину управляющего напряжения, на величину тока якорной цепи, на скорость вращения двигателя. Ограничения на фазовые координаты существенно усложняют определение оптимального управления.

Необходимые условия оптимальности при ограничениях на фазовые координаты в форме принципа максимума были получены Р.В. Гамкрелидзе [39] (см. также [72]). По современной терминологии указанные условия относятся к случаю, когда ограничения на фазовые координаты имеют первый порядок. Вообще следует отметить, что установлению условий оптимальности при ограничениях на фазовые координаты посвящено много работ, причем в подавляющем большинстве этих работ рассматриваются ограничения первого порядка. При управлении техническими объектами ограничения на фазовые координаты выше первого порядка встречаются весьма часто.

В настоящем параграфе излагаются необходимые условия оптимальности при ограничениях на фазовые координаты произвольного порядка. При этом мы не будем останавливаться на доказательстве формулируемых теорем ввиду их громоздкости.

Рассмотрим объект, движение которого определяется уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \qquad (\text{П}.1.1)$$

здесь $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ — n-мерные векторы, $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ — r-мерный вектор управления. Вектор $\mathbf{x}$ будем называть в дальнейшем *вектором со-*

стояния или *фазовым вектором* системы (П.1.1). Область U допустимых значений управления зададим неравенствами

$$R_\gamma(\mathbf{u}) \le 0,\ \gamma = \overline{1,l}. \qquad (П.1.2)$$

Предположим далее, что заданы ограничения на область значений фазового вектора $\mathbf{x}$. Именно, будем считать, что вектор $\mathbf{x}$ может принимать свои значения из некоторой ограниченной области B, определяемой неравенствами

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0,\ j = \overline{1,k}. \qquad (П.1.3)$$

Граница области B образована k поверхностями S_j, заданными уравнениями

$$g_j(\mathbf{x}) = 0,\ j = \overline{1,k}.$$

Рассмотрим следующую задачу. Пусть в фазовом пространстве X системы (П.1.1) заданы две точки $\mathbf{x}^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\right)$ и $\mathbf{x}^1 = \left(x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1\right)$, каждая из которых принадлежит области B. Требуется среди управлений $\mathbf{u}(t) \in U$, $t_0 \le t \le t_1$, переводящих фазовую точку $\mathbf{x}$ системы (П.1.1) из начального положения $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ в конечное положение $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}^1$ и притом так, что соответствующая траектория $\mathbf{x}(t) \in B$, найти такое, которое доставляет минимум функционалу

$$I = \int_{t_0}^{t_1} f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})dt. \qquad (П.1.4)$$

Управление и траекторию, решающие поставленную задачу, будем называть *оптимальными*.

Обозначим t^* точку выхода фазовой траектории $\mathbf{x}(t)$ на границу области B, а через t^{**} — точку схода траектории $\mathbf{x}(t)$ с границы области B в открытое ядро области. Точку отражения, как и точку выхода, обозначим t^*. Точки t^*, t^{**} (точки выхода, схода и отражения) называются также *точками стыка траектории* $\mathbf{x}(t)$. Ниже рассматриваются только такие оптимальные траектории $\mathbf{x}(t)$, которые имеют конечное число точек стыка. Далее, будем предполагать, что каждый граничный участок оптимальной траектории $\mathbf{x}(t)$ не имеет точек, лежащих на пересечении двух и более ограничивающих поверхностей.

Если траектория $\mathbf{x}(t)$ лежит на границе S_j области B, то производная $\frac{d}{dt}g_j(\mathbf{x})$, вычисленная в силу уравнений (П.1.1), должна равняться нулю, т.е. имеет место равенство

$$\frac{d}{dt}g_j(\mathbf{x}) = \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0.$$

Будем предполагать, что каждая из функций $g_j(\mathbf{x})$ дифференцируема по t q_j раз, где q_j — порядок производной, в которой впервые (в силу (П.1.1)) появляется явно управление $\mathbf{u}$. При этих условиях ограничение

$$g_j(\mathbf{x}) \le 0$$

назовем ограничением порядка q_j. Обозначим

$$\frac{d^\nu}{dt^\nu}g_j(\mathbf{x}) = \Phi_j^\nu(\mathbf{x}),\ \nu = \overline{1, q_j - 1},$$

и будем предполагать, что для любого j $q_j \le n$, ибо в противном случае система уравнений

$$\begin{cases} g_j(\mathbf{x}) = 0, \\ \Phi_j^{\nu}(\mathbf{x}) = 0, \ \nu = \overline{1, q_j - 1}, \end{cases} \tag{П.1.5}$$

может оказаться противоречивой.

Ниже широко используется понятие регулярной точки $\mathbf{x}$. Это понятие относится к переменной области управления и его удобно ввести для некоторой абстрактной области, которая в работе конкретно нигде не используется. Рассмотрим такую область. Обозначим ее через $U(\mathbf{x})$ и зададим соотношениями

$$\begin{aligned} R_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le 0, \ \gamma = \overline{1, l}, \\ P_\alpha(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0, \ \alpha = \overline{1, \kappa}, \end{aligned} \tag{П.1.6}$$

где функции R_γ и P_α, $\gamma = \overline{1, l}$, $\alpha = \overline{1, \kappa}$, непрерывно дифференцируемы по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Пусть $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ — произвольная пара, удовлетворяющая условиям (П.1.6). Индекс γ, $\gamma = \overline{1, l}$, назовем *активным* в точке $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$, если

$$R_\gamma(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = 0.$$

Множество всех активных в точке $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ индексов γ обозначим $I(\mathbf{x}, \mathbf{u})$. Точку $\mathbf{x}^*$ назовем *регулярной*, если для любого $\mathbf{u} \in U(\mathbf{x}^*)$ векторы

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad}_{\mathbf{u}} P_\alpha(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}), \ \alpha = \overline{1, \kappa}, \\ &\operatorname{grad}_{\mathbf{u}} R_\gamma(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}), \ \gamma \in I(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}), \end{aligned}$$

линейно независимы. Множество регулярных точек $\mathbf{x} \in X$ назовем *областью регулярности*. Справедливо следующее утверждение.

Лемма. *Если* $\mathbf{x}^0$ — *некоторая регулярная точка и множество* $U(\mathbf{x}^0)$ *ограничено, то найдется такое* $\varepsilon > 0$, *что окрестность* $|\mathbf{x} - \mathbf{x}^0| < \varepsilon$ *принадлежит области регулярности.*

Доказательство леммы приводится в [102].

Предполагается, что функции $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$; $f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u})$; $R_\gamma(\mathbf{u})$, $\gamma = \overline{1, l}$, непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. В качестве допустимых управлений будем рассматривать кусочно-непрерывные вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, принимающие свои значения из области U, определяемой неравенствами (П.1.2). Пусть, далее, соотношения (П.1.2) удовлетворяют *условию общности положения*, т.е. для любого $\mathbf{u}^0 \in U$ векторы

$$\operatorname{grad} R_\gamma(\mathbf{u}^0), \ \gamma \in I(\mathbf{u}^0),$$

линейно независимы.

Введем функции

$$P_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{d^{q_j}}{dt^{q_j}} g_j(\mathbf{x}) = \left[\operatorname{grad} \Phi_j^{q_j - 1}(\mathbf{x})\right]^{\mathrm{T}} \cdot f(\mathbf{x}, \mathbf{u}). \tag{П.1.7}$$

Обозначим $\omega_j^*(\mathbf{x})$ переменную область управления, заданную неравенствами

$$\begin{aligned} R_\gamma(\mathbf{u}) \le 0, \ \gamma = \overline{1, l}, \\ P_j(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \le 0. \end{aligned}$$

Символом $\omega_j^{**}(\mathbf{x})$ будем обозначать область управления, определяемую соотношениями

$$R_\gamma(\mathbf{u}) \le 0,\ \gamma = \overline{1,l},$$
$$P_j(\mathbf{x},\mathbf{u}) \ge 0,$$

а через $\omega_j(\mathbf{x})$ обозначим область управления, заданную условиями

$$R_\gamma(\mathbf{u}) \le 0,\ \gamma = \overline{1,l},$$
$$P_j(\mathbf{x},\mathbf{u}) = 0.$$

Так как соотношения (П.1.2) удовлетворяют условию общности положения, то отсюда следует: если $\mathbf{x}$ — некоторая точка, регулярная относительно области $\omega_j^*(\mathbf{x})$, то она регулярна одновременно и относительно областей $\omega_j(\mathbf{x})$ и $\omega_j^{**}(\mathbf{x})$. Это позволяет единообразно ввести понятие регулярной траектории.

Если в некоторый момент t_0 выполняются равенства

$$g_i\left(\mathbf{x}(t_0)\right) = 0,\ \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}(t_0)\right) = 0,\ \nu = \overline{1, q_j - 1},$$

а в интервале $t_0 \le t \le t_1$ управление $\mathbf{u}(t)$ удовлетворяет неравенству

$$P_j\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right) \le 0, \qquad (\text{П.1.8})$$

то, как легко видеть,

$$g_j\left(\mathbf{x}(t)\right) \le 0,\ t_0 \le t \le t_1.$$

Если неравенство (П.1.8) заменить равенством

$$P_j\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right) = 0,$$

то траектория $\mathbf{x}(t)$ целиком лежит на границе S_j.

Очевидно, в каждой точке t_α^* выхода на ограничение и в каждой точке t_α^{**} схода с ограничения должны выполняться соотношения (П.1.5). Однако в точке отражения траектории нет необходимости требовать выполнения всех равенств (П.1.5). Точку t_α^* назовем *точкой отражения* порядка $\tilde{q}_j$ $\left(\tilde{q}_j \le q_j\right)$, если

$$\Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right) = 0,\ \nu = \overline{1, \tilde{q}_j - 1},\ \tilde{q}_j < q_j,$$
$$\Phi_j^{\tilde{q}_j}\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right) \ne 0$$

или

$$\Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right) = 0,\ \nu = \overline{1, \tilde{q}_j - 1},\ \tilde{q}_j = q_j.$$

Если $\tilde{q}_j < q_j$, то $\tilde{q}_j$ должно быть четно и, кроме того,

$$\Phi_j^{\tilde{q}_j}\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right) < 0. \qquad (\text{П.1.9})$$

Уравнения (П.1.5) задают в фазовом пространстве X некоторое многообразие. Будем считать, что для любого j указанное многообразие является гладким, т.е. в каждой точке многообразия векторы

$$\operatorname{grad} g_j(\mathbf{x}),\ \operatorname{grad}\Phi_j^1(\mathbf{x}),\ldots,\ \operatorname{grad}\Phi_j^{q_j-1}(\mathbf{x})$$

линейно независимы. Положим, далее, что функции $P_j(\mathbf{x},\mathbf{u})$, определяемые соотношением (П.1.7), имеют непрерывные производные по переменным $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$.

Пусть $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, — оптимальная траектория, соединяющая заданные точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$ и принадлежащая допустимой области B. Точками стыков траектория $\mathbf{x}(t)$ разбивается на ряд участков. Каждый из таких участков будем называть элементарным процессом. Траекторию $\mathbf{x}(t)$ можно рассматривать, таким образом, как сложный процесс, состоящий из нескольких последовательно протекающих элементарных процессов.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу. Пусть сложный процесс $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, точками $t_1^*, t_1^{**}, \ldots, t_s^*, t_s^{**}$ разбит на элементарные процессы. Каждый из этих элементарных процессов описывается системой дифференциальных уравнений (П.1.1), причем на отрезках $t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**}$, $\alpha = \overline{1,s}$, управление $\mathbf{u}(t)$ может принимать значения из области $\omega_j^*(\mathbf{x})$, а в остальных случаях — из области U. В точках t_α^* переключения элементарных процессов должны выполняться соотношения (П.1.5), если t_α^* — точка выхода на ограничения или точка отражения порядка q_j, или соотношения

$$g_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right) = 0,$$
$$\Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right) = 0, \ \nu = \overline{1, \tilde{q}_j - 1},$$

если t_α^* — точка отражения порядка $\tilde{q}_j$, $\tilde{q}_j < q_j$. Относительно моментов t_α^{**}, $\alpha = \overline{1,s}$, будем предполагать, что они могут выбираться свободно. Требуется так выбрать управление $\mathbf{u}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, и моменты времени $t_0, t_1, \ldots, t_\alpha^*, t_\alpha^{**}$, $\alpha = \overline{1,s}$, чтобы соответствующая фазовая траектория $\mathbf{x}(t)$, соединяющая точки $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{x}^1$, доставляла минимум функционалу (П.1.4).

При выводе необходимых условий оптимальности оптимальную траекторию сравнивают с близкими (варьируемыми) траекториями. Обозначим $t_\alpha^* + \delta t_\alpha^*$, $t_\alpha^{**} + \delta t_\alpha^{**}$ точки стыка варьируемой траектории. Если $\mathbf{x}(t) \in B$, то в соответствии с (П.1.5) и (П.1.8) близкие траектории $\mathbf{x}(t) + \delta\mathbf{x}(t)$ на отрезках $t_\alpha^* + \delta t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**} + \delta t_\alpha^{**}$ также принадлежат области B. И только в окрестностях точек стыка t_α^*, t_α^{**} варьируемые траектории вспомогательной задачи могут, вообще говоря, выходить за пределы области B. Однако, как показано в [46] (см. п. 4.4), несмотря на отмеченное обстоятельство, необходимые условия оптимальности вспомогательной задачи сохраняют свою силу и для исходной задачи. Условия оптимальности для вспомогательной задачи можно записать, воспользовавшись теоремой 4.4 [13].

Введем вспомогательный вектор $\psi(t) = \left(\psi_0(t), \psi_1(t), \ldots, \psi_n(t)\right)^{\mathrm{T}}$ и скалярную функцию

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{n} \psi_i f_i(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left[\psi\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}),$$

где $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \left(f_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}), \ldots, f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u})\right)$ — $(n+1)$-мерный вектор. Вспомогательную вектор-функцию $\psi(t)$, если она соответствует движению в открытом ядре области B, определим системой уравнений

$$\frac{d\psi_0}{dt}=0,\quad \frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n}, \tag{П.1.10}$$

а при движении по границе области B — уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt}=0,\quad \frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i}+\lambda(t)\frac{\partial P_j(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n}. \tag{П.1.11}$$

Траекторию $t_0\le t\le t_1$ будем называть *регулярной*, если регулярен каждый граничный участок этой траектории, т.е. если регулярна относительно области $\omega_j^*(\mathbf{x})$ каждая лежащая на границе области B точка $\mathbf{x}(t)$ данной траектории.

Будем говорить, что в точке t_α^* выхода на ограничение выполнено условие скачка, если имеет место одно из трех выписанных ниже соотношений:

$$\begin{cases}\psi_0\left(t_\alpha^*+0\right)=\psi_0\left(t_\alpha^*-0\right),\\ \psi_i\left(t_\alpha^*+0\right)=\psi_i\left(t_\alpha^*-0\right)+\mu_\alpha^0\dfrac{\partial g_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{q_j-1}\mu_\alpha^\nu\frac{\partial \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n};\end{cases} \tag{П.1.12}$$

$$\begin{cases}\psi_0\left(t_\alpha^*-0\right)=0,\\ \psi_i\left(t_\alpha^*-0\right)=\mu_\alpha^0\dfrac{\partial g_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{q_j-1}\mu_\alpha^\nu\frac{\partial \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n},\\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{q_j-1}\left(\mu_\alpha^\nu\right)^2\ne 0;\end{cases} \tag{П.1.13}$$

$$\begin{cases}\psi_0\left(t_\alpha^*+0\right)=0,\\ \psi_i\left(t_\alpha^*+0\right)=\mu_\alpha^0\dfrac{\partial g_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{q_j-1}\mu_\alpha^\nu\frac{\partial \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n},\\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{q_j-1}\left(\mu_\alpha^\nu\right)^2\ne 0.\end{cases} \tag{П.1.14}$$

Аналогично, в точке отражения t_α^* выполнено условие скачка, если выполняется одно из трех соотношений:

$$\begin{cases}\psi_0\left(t_\alpha^*+0\right)=\psi_0\left(t_\alpha^*-0\right),\\ \psi_i\left(t_\alpha^*+0\right)=\psi_i\left(t_\alpha^*-0\right)+\mu_\alpha^0\dfrac{\partial g_i\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\tilde q_j-1}\mu_\alpha^\nu\frac{\partial \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n};\end{cases} \tag{П.1.15}$$

$$\begin{cases}\psi_0\left(t_\alpha^*-0\right)=0,\\ \psi_i\left(t_\alpha^*-0\right)=\mu_\alpha^0\dfrac{\partial g_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\tilde q_j-1}\mu_\alpha^\nu\frac{\partial \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n},\\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\tilde q_j-1}\left(\mu_\alpha^\nu\right)^2\ne 0;\end{cases} \tag{П.1.16}$$

$$\begin{cases} \psi_0\left(t_\alpha^* + 0\right) = 0, \\ \psi_i\left(t_\alpha^* + 0\right) = \mu_\alpha^0 \dfrac{\partial g_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i} + \displaystyle\sum_{\nu=1}^{\tilde{q}_j - 1} \mu_\alpha^\nu \frac{\partial \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right)\right)}{\partial x_i}, \ i = \overline{1,n}, \\ \displaystyle\sum_{\nu=0}^{\tilde{q}_j - 1} \left(\mu_\alpha^\nu\right)^2 \neq 0; \end{cases} \tag{П.1.17}$$

здесь $\tilde{q}_j$ $\left(\tilde{q}_j \le q_j\right)$ — порядок точки отражения.

Далее, будем считать, что в момент t_α^{**} схода с ограничения выполнено условие скачка, если

$$\psi\left(t_\alpha^{**} + 0\right) = \psi\left(t_\alpha^{**} - 0\right), \tag{П.1.18}$$

либо

$$\begin{gathered} \psi_0\left(t_\alpha^{**} + 0\right) = 0, \\ \psi_i\left(t_\alpha^{**} + 0\right) = \beta \frac{\partial \Phi_j^{q_j - 1}\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^{**}\right)\right)}{\partial x_i}, \ i = \overline{1,n}, \\ \psi\left(t_\alpha^{**} - 0\right) \neq \left(0, \beta_\alpha^0 \operatorname{grad} g_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^{**}\right)\right) + \sum_{\nu=1}^{q_j - 1} \beta_\alpha^\nu \operatorname{grad} \Phi_j^\nu\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^{**}\right)\right)\right). \end{gathered} \tag{П.1.19}$$

Последнее соотношение (П.1.19) должно иметь место для любых действительных чисел β_α^ν, $\nu = \overline{0, q_j - 1}$.

В равенствах (П.1.12)–(П.1.19) μ_α^ν, $\nu = \overline{1, q_j - 1}$, — некоторые действительные числа. Для констант $\mu_\alpha^{q_j - 1}$, $\mu_\alpha^{\tilde{q}_j - 1}$, входящих в условия (П.1.12), (П.1.15), справедливы следующие соотношения:

$$\mu_\alpha^{q_j - 1} \ge 0, \tag{П.1.20}$$

если t_α^* — точка выхода на ограничение;

$$\mu_\alpha^{\tilde{q}_j - 1} \le 0, \ \tilde{q}_j \le q_j, \tag{П.1.21}$$

если t_α^* — точка отражения траектории;

$$\mu_\alpha^{q_j - 1} = 0, \tag{П.1.22}$$

если t_α^* — точка отражения траектории и выполняется хотя бы одно из двух соотношений:

$$P_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right), \mathbf{u}\left(t_\alpha^* - 0\right)\right) = 0,$$

$$P_j\left(\mathbf{x}\left(t_\alpha^*\right), \mathbf{u}\left(t_\alpha^* + 0\right)\right) = 0.$$

Кроме того, в условии (П.1.13), если оно применяется в паре с (П.1.18) (а это возможно, когда $q_j > 1$), а также в равенствах (П.1.16) и (П.1.17) при $\tilde{q}_j = q_j$ справедливо соотношение (П.1.22).

Далее отметим, что для одного и того же граничного интервала $t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**}$ условие скачка в форме (П.1.14) может применяться только в сочетании с условием

(П.1.18). Обратное утверждение неверно, т.е. условие скачка в форме (П.1.18) может применяться в паре с (П.1.12) либо (П.1.13).

Интервал $t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**}$ назовем *граничным интервалом первого рода*, если в момент t_α^{**} схода с ограничения выполняется соотношение (П.1.18). Интервал $t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**}$ будем называть *граничным интервалом второго рода*, если в точке схода t_α^{**} выполняется соотношение (П.1.19). Интервалы $t_\alpha^{**} \le t \le t_{\alpha+1}^{**}$, $\alpha = \overline{1, s-1}$, $t_0 \le t \le t_1^*$, $t_s^{**} \le t \le t_1$, соответствующие движению фазовой точки в открытом ядре области B, назовем *внутренними интервалами*.

Теорема П.1.1. *Пусть регулярная траектория* $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, *принадлежит области* B *и соединяет заданные точки* $\mathbf{x}^0$ *и* $\mathbf{x}^1$. *Для оптимальности управления* $\mathbf{u}(t)$ *и траектории* $\mathbf{x}(t)$ *необходимо существование непрерывной на отрезке* $t_0 \le t \le t_1$ *(за исключением, быть может, точек стыка) вектор-функции* $\psi(t)$, *кусочно-непрерывных функций* $\lambda(t)$, $\nu_\gamma(t)$, $\gamma = \overline{1, l}$, *определенных в каждом из граничных интервалов* $t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**}$, $\alpha = \overline{1, s}$, *таких, что*:

1) *вектор-функция* $\psi(t)$ *определяется на внутренних интервалах системой уравнений* (П.1.10), *на граничных интервалах — уравнениями* (П.1.11);
2) *в каждом из интервалов движения функция*
$$\psi_0(t) \le 0;$$
3) *на граничных интервалах выполняются соотношения*
$$\frac{\partial H\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)}{\partial u_i} = \lambda(t)\frac{\partial P_j\left(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)}{\partial u_i} + \sum_{\gamma=1}^{l} \nu_\gamma(t)\frac{\partial R_\gamma\left(\mathbf{u}(t)\right)}{\partial u_i}, \quad i = \overline{1, r},$$
$$\nu_\gamma(t) R_\gamma\left(\mathbf{u}(t)\right) \equiv 0, \ \nu_\gamma(t) \ge 0, \ \gamma = \overline{1, l}, \ t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**}, \qquad (\text{П.1.23})$$
причем $\lambda(t) \ge 0$, *если* $t_\alpha^* \le t \le t_\alpha^{**}$ *— граничный интервал первого рода*;
4) *в каждой точке стыка оптимальной траектории выполнено условие скачка*;
5) *выполняется условие максимума функции* $H\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right)$:

а) *на внутренних интервалах*
$$H\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) = \max_{\mathbf{u} \in U} H\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}\right), \qquad (\text{П.1.24})$$
б) *на граничных интервалах первого рода*
$$H\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) = \max_{\mathbf{u} \in \omega_j^*(\mathbf{x})} H\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}\right), \qquad (\text{П.1.25})$$
в) *на граничных интервалах второго рода*
$$H(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) = \max_{\mathbf{u} \in \omega_j(\mathbf{x})} H(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}); \qquad (\text{П.1.26})$$
6) *в каждом из граничных интервалов выполнено условие нетривиальности решения*
$$\psi(t) \ne \left(0, \mu \cdot \operatorname{grad} \Phi_j^{q_j - 1}\left(\mathbf{x}(t)\right)\right), \qquad (\text{П.1.27})$$
где μ *— произвольное действительное число*;
7) *в каждый момент времени* t, $t_0 \le t \le t_1$, *вектор-функция* $\psi(t) \ne 0$ *(общее условие нетривиальности решения)*;
8) *функция*
$$H\left(\psi(t), \mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)\right) \equiv 0, \ t_0 \le t \le t_1.$$

Замечание П.1.1. Условие скачка в форме (П.1.12) можно отнести к точке схода t_α^{**}, положив вектор-функцию $\psi(t)$ непрерывной в точке t_α^*. Но тогда условие максимума (П.1.25) следует заменить соотношением

$$H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)=\max_{\mathbf{u}\in\omega_j^{**}(\mathbf{x})} H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}\right).$$

Теорема П.1.1 задает необходимые условия оптимальности при ограничениях произвольного порядка. Однако степень сложности условия скачка существенно зависит от порядка ограничения. Для ограничений первого порядка условие скачка заметно упрощается. Если t_α^* — точка выхода на ограничение первого порядка (или точка отражения), то, как следует из (П.1.22), (П.1.18), (П.1.27), соотношения (П.1.16), (П.1.17), (П.1.14) оказываются принципиально невыполнимыми и их следует исключить из условия скачка. Далее, в [72] доказывается, что в условии скачка, соответствующем точке отражения, $\mu_\alpha^0>0$. Из (П.1.21) следует, что $\mu_\alpha^0=0$, т.е. соотношение (П.1.15) принимает вид

$$\psi\left(t_\alpha^*+0\right)=\psi\left(t_\alpha^*-0\right). \tag{П.1.28}$$

Очевидно, условие скачка в форме (П.1.28) можно отнести также и к теореме 24 [72]. Отметим, наконец, что условие скачка в форме (П.1.13) может выполняться (для одного и того же граничного участка) только в сочетании с условием скачка в форме (П.1.19).

Вместо регулярности траектории $\mathbf{x}(t)$ можно требовать ее слабую регулярность. Пусть $\mathbf{u}(t)$, $t_\alpha^*\le t\le t_\alpha^{**}$, — некоторое управление, а $\mathbf{x}(t)$ — соответствующая ему траектория системы (П.1.1), целиком лежащая на границе S_j области B. Граничный участок $t_\alpha^*\le t\le t_\alpha^{**}$ траектории $\mathbf{x}(t)$ называется *слабо регулярным*, если в каждый момент времени t, $t_\alpha^*\le t\le t_\alpha^{**}$, векторы

$$\begin{gathered}\operatorname{grad}R_\gamma\left(\mathbf{u}(t)\right),\ \gamma\in I\left(\mathbf{u}(t)\right),\\ \operatorname{grad}_{\mathbf{u}}P_j\left(\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)\end{gathered} \tag{П.1.29}$$

линейно независимы. При этом в каждой точке t' разрыва управления $\mathbf{u}(t)$ (включая и точки t_α^*, t_α^{**}) линейно независимыми должны быть как векторы (П.1.29), определяемые парой $\left(\mathbf{x}(t'),\mathbf{u}(t'-0)\right)$, так и векторы, определяемые парой $\left(\mathbf{x}(t'+0),\mathbf{u}(t'+0)\right)$. Траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_0\le t\le t_1$, называется *слабо регулярной*, если слабо регулярны все ее граничные участки.

Ниже, наряду с областью $\omega_j^*(\mathbf{x})$, нам понадобится такое ее подмножество $\tilde\omega_j^*(\mathbf{x})$, что точка $\mathbf{x}$ регулярна относительно множества $\tilde\omega_j^*(\mathbf{x})$. Аналогичным образом вводятся области $\tilde\omega_j^{**}(\mathbf{x})$ и $\tilde\omega_j(\mathbf{x})$.

Теорема П.1.2. Пусть $\mathbf{u}(t)$, $t_0\le t\le t_1$, — оптимальное управление, а $\mathbf{x}(t)\in B$ — соответствующая ему траектория. Если траектория $\mathbf{x}(t)$ слабо регулярна, то справедливы все условия теоремы П.1.1, кроме соотношений (П.1.25) и (П.1.26), которые следует заменить равенствами:

$$H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)=\max_{\mathbf{u}\in\tilde\omega_j^*(\mathbf{x})} H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}\right), \tag{П.1.30}$$

$$H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)=\max_{\mathbf{u}\in\tilde\omega_j(\mathbf{x})} H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}\right). \tag{П.1.31}$$

Для технических объектов области $\omega_j^*(\mathbf{x})$ и $\omega_j(\mathbf{x})$ обычно совпадают с замыканием множеств $\tilde{\omega}_j^*(\mathbf{x})$ и $\tilde{\omega}_j(\mathbf{x})$. Но тогда условия максимума (П.1.30) и (П.1.31) можно заменить соотношениями (П.1.25), (П.1.26), т.е. в этом случае слабо регулярная оптимальная траектория удовлетворяет всем условиям теоремы П.1.1.

Теорему П.1.1 можно усилить, если в качестве допустимых управлений рассматривать кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие вектор-функции $\mathbf{u}(t)$.

Теорема П.1.3. Пусть допустимые управления $\mathbf{u}(t)$ представляют собой кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие вектор-функции $\mathbf{u}(t) \in U$. Если оптимальная траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, регулярна, то:

1) выполняются все условия теоремы П.1.1;
2) на каждом граничном интервале в каждой точке дифференцируемости функции $\lambda(t)$

$$\frac{d\lambda}{dt} \le 0. \qquad \text{(П.1.32)}$$

Замечание П.1.2. В теореме П.1.3 оптимальную траекторию $\mathbf{x}(t)$ можно считать слабо регулярной. Это приводит к изменению пункта 1 теоремы. Именно, в пункте 1 ссылку на теорему П.1.1 следует заменить ссылкой на теорему П.1.2.

Сделаем замечание, общее для теорем П.1.1–П.1.3.

Замечание П.1.3. В теоремах П.1.1–П.1.3 соотношения (П.1.12), (П.1.15), (П.1.18) являются главными в условиях скачка. Дело в том, что в нормальном случае $\psi_0(t) \ne 0$, и условия скачка в других формах оказываются невозможными.

Остановимся кратко на обсуждении полученных результатов.

В теореме П.1.3 рассматривается более узкий класс допустимых управлений. Однако это позволило получить дополнительное соотношение (П.1.32). Опыт применения условий оптимальности показывает, что неравенство (П.1.32) имеет важное значение. Можно привести достаточно простые примеры, в которых дополнительное условие (П.1.32) заметно облегчает синтез оптимального управления. Впервые неравенство (П.1.32) в числе необходимых условий оптимальности было получено в [72] (см. теорему 2.5) для систем с фазовыми ограничениями первого порядка. Теорема П.1.3 устанавливает справедливость данного неравенства для фазовых ограничений произвольного порядка.

Если теорему П.1.3 записать применительно к ограничениям первого порядка и сравнить с известной в теории оптимального управления теоремой 25 [72], то теорема П.1.3 отличается тем, что сочетает в себе сильное условие максимума (П.1.25) с неравенством (П.1.32). В теореме 25 приводится лишь слабое условие максимума (П.1.31).

Доказательство теоремы П.1.1 приводится в [46], причем схема доказательства данной теоремы заимствована из работы [21], в которой получены условия оптимальности при ограничениях на фазовые координаты первого порядка. Возможность замены условий типа «общности положения» более слабым требованием регулярности оптимальной траектории непосредственно следует из сформулированной выше леммы. Далее, теорема П.1.2 легко выводится из теоремы П.1.1.

П.1.2. ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ОПТИМАЛЬНОСТИ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ

В настоящем параграфе доказывается, что для линейного объекта полученные в п. П.1.1 необходимые условия оптимальности являются одновременно достаточными или переводятся в разряд достаточных путем незначительного усиления их.

Будем предполагать, что движение объекта задается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}, \tag{П.1.33}$$

здесь $\mathbf{A}$ и $\mathbf{D}$ — постоянные матрицы, имеющие размерности соответственно $n \times n$ и $n \times r$, $\mathbf{x}$ — n-мерный вектор, характеризующий состояние системы, $\mathbf{u}$ — r-мерный вектор управления. Управление $\mathbf{u}$ может принимать свои значения из замкнутого параллелепипеда U, определяемого неравенствами

$$A_\nu^1 \le u_\nu \le A_\nu^2, \quad \nu = \overline{1,r}, \tag{П.1.34}$$

где $A_\nu^1 < 0$, $A_\nu^2 > 0$. Пусть, далее, ограничение на фазовые координаты имеет вид

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i \right| \le M, \tag{П.1.35}$$

здесь $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n$ и M — некоторые константы. Ниже предполагается, что ограничение (П.1.35) имеет порядок q. В силу линейности ограничения (П.1.35) и уравнения (П.1.33) каждая из функций $\Phi_j^1(\mathbf{x}), \Phi_j^2(\mathbf{x}), \ldots, \Phi_j^{q-1}(\mathbf{x})$, $j = \overline{1,2}$, также является линейной. Положим

$$\Phi_1^{q-1}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i, \quad \Phi_2^{q-1}(\mathbf{x}) = -\sum_{i=1}^{n} c_i x_i.$$

В тех случаях, когда речь идет о произвольной ограничивающей поверхности S_j будем использовать обозначение $\Phi^{q-1}(\mathbf{x})$.

Рассмотрим двухточечную задачу об оптимальном по быстродействию управлении объектом (П.1.33) при наличии ограничений (П.1.34), (П.1.35). При этом предполагается, что начальная точка $\mathbf{x}^0$ принадлежит открытому ядру области B, а конечная точка $\mathbf{x}^1$ совпадает с началом координат. Отметим, что в данном случае функционал (П.1.4) имеет вид

$$I = \int_{t_0}^{t_1} dt. \tag{П.1.36}$$

В настоящем параграфе в качестве допустимых управлений рассматриваются кусочно-непрерывные, кусочно-гладкие вектор-функции $\mathbf{u}(t)$, удовлетворяющие неравенствам (П.1.34). Далее, оптимальная траектория предполагается слабо регулярной. Такая траектория, очевидно, должна удовлетворять условиям теоремы П.1.3 (см. также замечание П.1.2).

Выведем для сформулированной выше задачи из теоремы П.1.3 ряд простых результатов, которые будут использованы затем для доказательства достаточности указанных условий.

Для объекта (П.1.33)

$$H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u}) = \psi_0 + \psi^{\mathrm{T}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \psi^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{u}, \tag{П.1.37}$$

а функция

$$P(\mathbf{x}) = \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x} + \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{D}\mathbf{u}, \tag{П.1.38}$$

здесь $\psi = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n)$ — n-мерный вектор. Из условия слабой регулярности траектории $\mathbf{x}(t)$ следует, что при движении по границе области B управление $\mathbf{u}(t)$ не может принимать вершинного значения параллелепипеда U, а функции

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi^{q-1}}{\partial x_i}d_{i\upsilon}=\frac{\partial P(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial U_\upsilon},\quad \upsilon=\overline{1,r},$$

не могут одновременно превращаться в нуль. Более того, в каждой точке t граничного интервала $t^*\le t\le t^{**}$ существует такое $\upsilon=m$, что

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \Phi^{q-1}}{\partial x_i}d_{im}\neq 0,\quad A_m^1<U_m<A_m^2. \tag{П.1.39}$$

В соответствии с (П.1.38) уравнение

$$P(\mathbf{x},\mathbf{u})=0 \tag{П.1.40}$$

при фиксированном $\mathbf{x}$ определяет в пространстве E_r некоторую плоскость. Так как вектор

$$\operatorname{grad} P(\mathbf{x},\mathbf{u})$$

не зависит от $\mathbf{x}$ и $\mathbf{u}$, то область управления $\omega_j^*(\mathbf{x})$ является замыканием множества $\tilde{\omega}_j^*(\mathbf{x})$. Аналогично область $\omega_j(\mathbf{x})$ представляет собой замыкание множества $\tilde{\omega}_j(\mathbf{x})$. Отсюда, учитывая непрерывность по управлению функции (П.1.37), находим, что на слабо регулярной траектории $\mathbf{x}^*(t)$ условия (П.1.30), (П.1.31) можно заменить соответственно равенствами (П.1.25), (П.1.26).

Рассмотрим участок оптимальной траектории, принадлежащий границе области B.

Принимая во внимание (П.1.39), разрешим уравнение (П.1.40) относительно u_m:

$$u_m=-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i}d_{im}}\left[\frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\mathbf{A}\mathbf{x}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{\upsilon=1}^{r(m)}\frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i}d_{i\upsilon}u_\upsilon\right], \tag{П.1.41}$$

где символ $\sum\limits_{\upsilon=1}^{r(m)}$ означает суммирование по υ от 1 до r, пропуская $\upsilon=m$. Подставляя далее (П.1.41) в функцию

$$\Delta H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{u})=\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\mathbf{u}, \tag{П.1.42}$$

найдем

$$\Delta H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{u})=\Delta H^{(m)}(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x},\mathbf{u})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\upsilon=1}^{r(m)}d_{i\upsilon}\psi_i u_\upsilon-\frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i}d_{ir}}\times$$
$$\times\left[\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}d_{\rho m}\psi_j\frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i}a_{ij}x_j+\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(m)}d_{\rho m}\psi_\rho\frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i}d_{i\nu}u_\nu\right]. \tag{П.1.43}$$

Здесь обозначение $H^{(m)}(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x},\mathbf{u})$ введено, чтобы подчеркнуть, что выражение (П.1.43) получается из (П.1.42) при подстановке в последнее (П.1.41).

Утверждение П.1.1. Если $\max\limits_{\mathbf{u}\in\omega^*(\mathbf{x})}\Delta H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{u})$ достигается на управлении $\mathbf{u}^*$, причем $A_m^1<u_m^*<A_m^2$, $\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i}d_{im}\neq 0$, то управления u_ν^*, $\nu=\overline{1,r}$, $\nu\neq m$, доставляют $\max\limits_{\mathbf{u}\in U^{(m)}}\Delta H(\boldsymbol{\psi},\mathbf{x},\mathbf{u})$. Здесь область $U^{(m)}$ задается неравенствами (П.1.34), из которых следует исключить индекс $\nu=m$.

Утверждение П.1.1 непосредственно следует из равенства (П.1.43).

На границе области B вспомогательный вектор $\psi(t)$ находится из уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{d\psi_0}{dt} = 0, \\ \dfrac{d\psi}{dt} = -\dfrac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} + \lambda(t)\dfrac{\partial P(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}}, \end{cases} \tag{П.1.44}$$

здесь скалярный множитель $\lambda(t)$, в свою очередь, определяется из уравнения

$$\frac{\partial H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} = \lambda(t)\frac{\partial P(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}} + \sum_{\alpha=1}^{\kappa} \frac{\partial R_\alpha(\mathbf{u})}{\partial \mathbf{u}}, \tag{П.1.45}$$

где $R_\alpha(\mathbf{u}) = 0$ — уравнение проходящей через точку $\mathbf{u}(t)$ грани параллелепипеда U. Учитывая (П.1.39), из (П.1.45) найдем

$$\lambda(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \psi_i d_{im}}{\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} d_{im}}. \tag{П.1.46}$$

Условимся считать, что в момент t определен скалярный множитель $\lambda_m(t)$, если для данного t выполнено условие (П.1.39). Тогда скалярный множитель $\lambda(t)$ определяется формулой (П.1.46). Вообще говоря, в один и тот же момент времени t может быть определено несколько множителей: $\lambda_m(t), \lambda_\kappa(t), \ldots, \lambda_c(t)$, причем $\lambda_m(t) = \lambda_\kappa(t) = \ldots = \lambda_c(t)$.

Пусть в момент t_* непрерывности управления $\mathbf{u}(t)$ определен множитель $\lambda_c(t_*)$. Тогда в силу непрерывности $\mathbf{u}(t)$ и $\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x}(t))/\partial x_i$ найдется такая окрестность точки t_*, что для $t_* - \varepsilon < t < t_* + \varepsilon$ будет определен множитель $\lambda_c(t)$. Пусть, далее, t_* — точка разрыва управления $\mathbf{u}(t)$ и пусть для $\mathbf{u}(t_* - 0)$ определен множитель $\lambda_m(t_*)$, а для $u(t_* + 0)$ — множитель $\lambda_\kappa(t_*)$. Тогда, очевидно, можно указать такие полуинтервалы $[t_*, t_* - \varepsilon_1), [t_*, t_* + \varepsilon_2)$, в каждой точке которых определены соответственно $\lambda_m(t)$ и $\lambda_\kappa(t)$. Точку t' будем называть *точкой переключения* множителя $\lambda(t)$ (множитель множитель $\lambda_m(t)$ переключается на множитель $\lambda_\kappa(t)$), если существуют два таких интервала $[t', t' - \varepsilon_1)$ и $[t', t' + \varepsilon_2)$, что $\lambda(t) = \lambda_m(t)$ при $t \in (t', t' - \varepsilon_1)$ и $\lambda(t) = \lambda_\kappa(t)$ при $t \in (t', t' + \varepsilon_2)$ и не существует такого интервала $(t' - \varepsilon, t' + \varepsilon)$ и такого c, что $\lambda(t) = \lambda_c(t)$ при $t \in (t' - \varepsilon, t' + \varepsilon)$. Из заданного определения следует, что точка непрерывности управления $\mathbf{u}(t)$ не может быть точкой переключения.

Утверждение П.1.2. В каждой точке t' переключения множителя $\lambda(t)$ последний остается непрерывным.

Из условия непрерывности функции $H(\psi, \mathbf{x}, \mathbf{u})$ следует, что управления $\mathbf{u}^*(t' - 0)$ и $\mathbf{u}^*(t' + 0)$ доставляют в момент t' максимум функции (П.1.37). Соединим точки $\mathbf{u}^*(t' - 0)$ и $\mathbf{u}^*(t' + 0)$ в пространстве E_r отрезком Π $(\Pi \subset \omega(\mathbf{x}(t')))$. В силу линейности относительно управления функция (П.1.37) достигает максимума относи-

тельно множества $\omega^*\left(\mathbf{x}(t')\right)$ в каждой точке отрезка П. Учитывая утверждение П.1.1, получаем, что функции $\Delta H^{(m)}(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})$ и $\Delta H^{(\kappa)}(\psi,\mathbf{x},\mathbf{u})$ достигают на отрезке П максимума относительно параллелепипеда $U^{(m)}$ и $U^{(\kappa)}$ соответственно.

По определению точки t' имеем:

$$A_m^1 < u_m^*(t'-0) < A_m^2,\quad u_m^*(t'+0) \subset A_m^1 \cup A_m^2,$$
$$A_\kappa^1 < u_\kappa^*(t'+0) < A_\kappa^2,\quad u_\kappa^*(t'-0) \subset A_\kappa^1 \cup A_\kappa^2,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} d_{ik} \neq 0,$$
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} d_{im} \neq 0.$$

Для любого управления $\mathbf{u}' \in \Pi$ $\left(\mathbf{u}' \neq \mathbf{u}^*(t'-0),\ \mathbf{u}' \neq \mathbf{u}^*(t'+0)\right)$

$$A_m^1 < u_m' < A_m^2,\quad A_\kappa^1 < u_\kappa' < A_\kappa^2. \tag{П.1.47}$$

Из (П.1.47), учитывая сказанное выше и (П.1.43), получаем

$$\sum_{i=1}^{n} d_{i\kappa}\psi_i(t') - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}(t')\right)}{\partial x_i} d_{im}} \left[\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{\rho m} \frac{\partial \Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}(t')\right)}{\partial x_i} \psi_\rho(t') d_{i\kappa} \right] = 0. \tag{П.1.48}$$

Разделив (П.1.48) на

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i} d_{i\kappa}$$

и принимая во внимание (П.1.46), найдем

$$\lambda_\kappa(t') - \lambda_r(t') = 0.$$

Таким образом, утверждение П.1.2 доказано.

Сделаем некоторые преобразования. Подставив в уравнение (П.1.33) $u_m(t)$ из (П.1.41), получим

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \mathbf{D}_m \tilde{\mathbf{u}}, \tag{П.1.49}$$

где

$$\mathbf{A}_m = \left(a_{ij} - \frac{d_{im}}{\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_s} d_{sm}} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_\rho} a_{\rho j} \right),\ i,j = \overline{1,n},$$

— матрица размерности $n \times n$,

$$\mathbf{D}_m = \left(d_{i\nu} - \frac{d_{im}}{\sum\limits_{s=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_s} d_{sm}} \sum_{\rho=1}^{n} \frac{\partial \Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_\rho} d_{\rho\nu} \right),\ i = \overline{1,n},\ \nu = \overline{1,r},\ \nu \neq m,$$

— матрица размерности $n \times (r-1)$, $\tilde{\mathbf{u}}$ — $(r-1)$-мерный вектор, получаемый из вектора $\mathbf{u}$ путем исключения m-й компоненты. Подставим в функцию (П.1.37) управление $u_m(t)$ из (П.1.41). Тогда

$$H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right) = \psi_0 + \left[\psi(t)\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{A}_m \mathbf{x} + \left[\psi(t)\right]^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_m \tilde{\mathbf{u}}. \tag{П.1.50}$$

Раскрывая, наконец, множитель $\lambda_m(t)$ в уравнениях (П.1.44), находим

$$\frac{d\psi_0}{dt}=0,\quad \frac{d\psi}{dt}=-\mathbf{A}_m^{\mathrm{T}}\psi. \tag{П.1.51}$$

Таким образом, из (П.1.50), (П.1.51) и утверждения П.1.1 следует, что на каждом интервале, на котором определен некоторый множитель $\lambda_m(t)$, относительно уравнения (П.1.49) должен выполняться принцип максимума в том виде, как он формулируется для открытого ядра области B.

Введем некоторое обобщенное условие общности положения (в смысле работы [72]). Будем считать, что относительно уравнения (П.1.33) и ограничений (П.1.34) и (П.1.35) выполнено *обобщенное условие общности положения*, если:

1) для любого ребра κ параллелепипеда U векторы

$$\mathbf{D}\kappa,\ \mathbf{AD}\kappa,\ldots,\ \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{D}\kappa$$

линейно независимы в X;

2) для любого l, $l=\overline{1,r}$, и любого ребра $\tilde{\kappa}$ параллелепипеда $U^{(l)}$ векторы

$$\mathbf{D}_m\kappa,\ \mathbf{A}_m\mathbf{D}_m\kappa,\ldots,\ \mathbf{A}_m^{\,n-1}\mathbf{D}_m\kappa$$

линейно независимы.

Ниже мы будем предполагать, что соотношения (П.1.33), (П.1.34), (П.1.35) удовлетворяют обобщенному условию общности положения.

Пусть t_i' и t_{i+1}' — две соседние точки, в которых происходит переключение множителя $\lambda(t)$. Из обобщенного условия общности положения вытекает, что в интервале $t_i'<t<t_{i+1}'$ определен только один множитель Лагранжа, например $\lambda_m(t)$. Разобьем точками переключения множителя $\lambda(t)$ отрезок $\left[t^*,t^{**}\right]$ на сумму отрезков:

$$\left[t^*,t^{**}\right]=\sum_{s=1}^{N}\Delta s,$$

здесь N — конечное число, так как $\mathbf{u}(t)$ — кусочно-непрерывная, кусочно-гладкая вектор-функция. Если множитель λ соответствует отрезку Δs, то будем обозначать его $\lambda_{\Delta s}$.

В силу непрерывности функции $H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\mathbf{u}(t)\right)$

$$H\left(\psi\left(t^*-0\right),\mathbf{x}\left(t^*\right),\mathbf{u}\left(t^*-0\right)\right)=H\left(\psi\left(t^*+0\right),\mathbf{x}\left(t^*\right),\mathbf{u}\left(t^*+0\right)\right). \tag{П.1.52}$$

Из (П.1.52), условия скачка (П.1.12), соотношений (П.1.5) и равенства

$$P\left(\mathbf{x}\left(t^*\right),\mathbf{u}\left(t^*+0\right)\right)=0$$

найдем

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}d_{i1}\psi_i\left(t^*-0\right)\left(u_1\left(t^*-0\right)-u_1\left(t^*+0\right)\right)+\ldots+\\&+\sum_{i=1}^{n}d_{ir}\psi_i\left(t^*-0\right)\left(u_r\left(t^*-0\right)-u_r\left(t^*+0\right)\right)=0.\end{aligned} \tag{П.1.53}$$

В соответствии с условием максимума (П.1.24) каждое из слагаемых (П.1.53) неотрицательно, т.е. равенство (П.1.53) возможно, если каждое слагаемое равно нулю.

Пусть в момент t^* определен множитель $\lambda_m\left(t\right)$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n}d_{im}\psi_i\left(t^*-0\right)=0. \tag{П.1.54}$$

Если в момент t^{**} определен множитель $\lambda_{\kappa}(t^{**})$, то аналогичным образом можно доказать, что

$$\sum_{i=1}^{n} d_{i\kappa}\psi_i\left(t^{**}+0\right)=0. \qquad (\text{П.1.55})$$

Пусть $\mathbf{u}^*(t)$ и $\mathbf{x}^*(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, — соответственно управление и траектория, удовлетворяющие условиям теоремы П.1.3, причем предполагается, что

$$\psi_0(t) \neq 0,\ t_0 \le t \le t_1. \qquad (\text{П.1.56})$$

В соответствии с замечанием П.1.3 в этом случае условия скачка допускаются только в главной форме (П.1.12), (П.1.15), (П.1.18).

Будем говорить, что траектория $\mathbf{x}^*(t)$ доставляет слабый относительный минимум функционалу (П.1.36), если

$$I\left(\mathbf{x}^*(t)\right) \le I\left(\mathbf{x}(t)\right)$$

для любых траекторий $\mathbf{x}(t)$, принадлежащих «классу» варьируемых траекторий теоремы П.1.3. Отличительными чертами этого «класса» траекторий являются:

1) траектория $\mathbf{x}(t)$ выходит на границу области B в близкие моменты $t^*+\delta t^*$, причем выход на границу области B обязателен, если траектория $\mathbf{x}^*(t)$ имеет граничный участок;
2) в интервалах $t^*+\delta t^* \le t \le t^{**}+\delta t^{**}$ выполняется неравенство
$$\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}(t)\right) \le 0; \qquad (\text{П.1.57})$$
3) если t^* — точка отражения порядка $\tilde{q}$ $\left(\tilde{q} \le q\right)$, то траектория $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет соотношениям
$$g\left(\mathbf{x}\left(t^*+\delta t^*\right)\right)=0,$$
$$\Phi^j\left(\mathbf{x}\left(t^*+\delta t^*\right)\right)=0,\ \ j=\overline{1,\tilde{q}-1}.$$

Теорема П.1.4. Пусть $\mathbf{u}^*(t)$ и $\mathbf{x}^*(t)$ — управление и траектория, переводящие фазовую точку $\mathbf{x}$ системы (П.1.33) из заданного начального положения $\mathbf{x}^0$ в начало координат. Если траектория $\mathbf{x}^*(t)$ слабо регулярна и удовлетворяет условиям теоремы П.1.3 и равенству (П.1.56), то на траектории $\mathbf{x}^*(t)$ функционал (П.1.36) достигает слабого относительного минимума.

Доказательство. Условимся простоты ради считать, что траектория $\mathbf{x}^*(t)$ имеет один участок, лежащий на границе области B. Положим для определенности, что при $t^* \le t \le t^{**}$ траектория $\mathbf{x}^*(t)$ лежит на границе

$$\sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i - M = 0.$$

Введем обозначение

$$y = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i x_i.$$

Для доказательства теоремы воспользуемся методом, изложенным в [100]. Запишем равенство*

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\psi_i\left(x_i^*-x_i\right)=\sum_{i=0}^{n}\psi_i\left(\dot{x}_i^*-x_i\right)+\sum_{i=0}^{n}\left(x_i^*-x_i\right)\frac{d\psi_i}{dt}, \qquad (\text{П.1.58})$$

где траектория $\mathbf{x}(t)$ близка к траектории $\mathbf{x}^*(t)$ в указанном выше смысле. Равенство (П.1.58) справедливо для любого t, $t_0 \le t \le t_1$, за исключением, быть может, точек стыка.

Принимая во внимание условие скачка (П.1.12), можно записать

$$\sum_{i=1}^{n}d_{im}\psi_i\left(t^*+0\right)=\sum_{i=1}^{n}d_{im}\left[\psi_i\left(t^*-0\right)+\mu^0\frac{\partial g\left(\mathbf{x}\left(t^*\right)\right)}{\partial x_i}+\sum_{\nu=1}^{q-1}\mu^\nu\frac{\partial \Phi^\nu\left(\mathbf{x}\left(t^*\right)\right)}{\partial x_i}\right]. \qquad (\text{П.1.59})$$

Поскольку ограничение (П.1.35) имеет порядок q, то

$$\sum_{i=1}^{n}d_{im}\frac{\partial g(\mathbf{x})}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}d_{im}\frac{\partial \Phi^1(\mathbf{x})}{\partial x_i}=\ldots=\sum_{i=1}^{n}d_{im}\frac{\partial \Phi^{q-2}(\mathbf{x})}{\partial x_i}=0.$$

Из (П.1.59), (П.1.54), (П.1.46) находим, что

$$\mu^{q-1}=\lambda_m\left(t^*\right)=\lambda\left(t^*\right). \qquad (\text{П.1.60})$$

Далее, из (П.1.55) следует равенство

$$\lambda\left(t^{**}\right)=\lambda_\kappa\left(t^{**}\right)=0. \qquad (\text{П.1.61})$$

Определим значение производной $d\psi/dt$ при $t=t^*$ через δ-функцию. Именно, будем считать, что вспомогательный вектор $\psi(t)$ при движении в открытом ядре области B определяется уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt}=0,\ \frac{d\psi}{dt}=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\psi+\left[\mu^0\nabla g\left(\mathbf{x}\left(t^*\right)\right)+\sum_{\nu=1}^{q-1}\mu^\nu\nabla\Phi^\nu\left(\mathbf{x}\left(t^*\right)\right)\right]\delta\left(t-t^*\right). \qquad (\text{П.1.62})$$

Подставляя в (П.1.58) уравнения (П.1.33), (П.1.62), (П.1.44), найдем

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\psi_i\left(x_i^*-x_i\right)&=\alpha\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}\right)+\beta\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial P(\mathbf{x},\mathbf{u})}{\partial x_i}\lambda(t)\left(x_i^*-x_i\right)+\\&+\beta\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}\right)+\lambda\left(t^*\right)\left[y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right]\delta\left(t-t^*\right)+\\&+\left[\mu^0\left(y^*-y\right)+\sum_{\nu=1}^{q-2}\mu^\nu\left(y^{*\nu}(t)-y^\nu(t)\right)\right]\delta\left(t-t^*\right),\end{aligned} \qquad (\text{П.1.63})$$

где

$$\alpha=\begin{cases}1 & \text{при } t_0\le t\le t \text{ и } t^{**}\le t\le t_1,\\ 0 & \text{при } t^*<t<t^{**},\end{cases}$$

$$\beta=\begin{cases}0 & \text{при } t_0\le t\le t^* \text{ и } t^{**}\le t\le t_1,\\ 1 & \text{при } t^*<t<t^{**}.\end{cases}$$

---

* Координата $x_0(t)$ находится из уравнения

$$\frac{dx_0}{dt}=1,\ x_0\left(t_0\right)=0,$$

т.е. $x_0(t_1)=I$.

На отрезке Δs

$$\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\left(\mathbf{u}^{*}-\mathbf{u}\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda(t)\left(x_i^{*}-x_i\right)\frac{\partial P\left(\mathbf{x}^{*},\mathbf{u}^{*}\right)}{\partial x_i}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)}d_{i\nu}\psi_i\left(u_\nu^{*}-u_\nu\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\psi_i d_{i\Delta s}\left(u_{\Delta s}^{*}-u_{\Delta s}\right)+\sum_{i=1}^{n}\lambda(t)\left(x_i^{*}-x_i\right)\sum_{\rho=1}^{n}\frac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^{*}\right)}{\partial x_i}a_{\rho i}. \qquad (\text{П.1.64})$$

Прибавим к правой части соотношения (П.1.64) выражение

$$\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)}\frac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^{*}\right)}{\partial x_i}d_{i\nu}\left(u_\nu^{*}-u_\nu\right)$$

и вычтем его, чтобы не нарушить равенства. Тогда, принимая во внимание (П.1.46), (П.1.33) и (П.1.35), найдем

$$\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{D}(\mathbf{u}^{*}-\mathbf{u})+\sum_{i=1}^{n}\lambda(t)\left(x_i^{*}-x_i\right)\frac{\partial P\left(\mathbf{x}^{*},\mathbf{u}^{*}\right)}{\partial x_i}=$$
$$=\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)}d_{i\nu}\psi_i\left(u_\nu^{*}-u_\nu\right)+\lambda(t)\frac{d}{dt}\left[\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^{*}(t)\right)-\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}(t)\right)\right]- \qquad (\text{П.1.65})$$
$$-\lambda(t)\sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{r(\Delta s)}\frac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^{*}\right)}{\partial x_i}d_{i\nu}\left(u_\nu^{*}-u_\nu\right).$$

Подставляя (П.1.65) в (П.1.63) и учитывая (П.1.46), получим

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\psi_i\left(x_i^{*}-x_i\right)=\alpha\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\left(\mathbf{u}^{*}-\mathbf{u}\right)+\left[y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right]\lambda(t)\times$$
$$\times\delta\left(t-t^{*}\right)+\beta\sum_{s=1}^{N}1(\Delta s)\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)}d_{i\nu}\psi_i\left(u_\nu^{*}-u_\nu\right)+$$
$$+\beta\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\left(y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right)\right]-\beta\left[y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right]\frac{d\lambda}{dt}- \qquad (\text{П.1.66})$$
$$-\beta\sum_{s=1}^{N}1(\Delta s)\frac{\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)}d_{\rho\Delta s}\dfrac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^{*}\right)}{\partial x_i}d_{i\nu}\left(u_\nu^{*}-u_\nu\right)\psi_\rho}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^{*}\right)}{\partial x_i}d_{i\Delta s}}+$$
$$+\left[\mu^{0}\left(y^{*}(t)-y(t)\right)+\sum_{\nu=1}^{q-2}\mu^{\nu}\left(y^{*(\nu)}(t)-y^{(\nu)}(t)\right)\right]\delta\left(t-t^{*}\right).$$

Отметим, что в точке выхода t^{*} справедливы равенства

$$y^{*}\left(t^{*}\right)=\mathbf{D},$$
$$y^{*(\nu)}\left(t^{*}\right)=0,\ \nu=\overline{1,q-1}. \qquad (\text{П.1.67})$$

Представим траекторию $\mathbf{x}(t)$ в виде $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^{*}(t)+\delta\mathbf{x}(t)$. В соответствии с (П.1.5)

$$y\left(t^{*}+\delta t^{*}\right)=y^{*}\left(t^{*}+\delta t^{*}\right)+\delta y\left(t^{*}+\delta t^{*}\right)=\mathbf{D},$$
$$y^{(\nu)}\left(t^{*}+\delta t^{*}\right)=y^{*(\nu)}\left(t^{*}+\delta t^{*}\right)+\delta y^{(\nu)}\left(t^{*}+\delta t^{*}\right)=0,\ \nu=\overline{1,q-1}. \qquad (\text{П.1.68})$$

Из (П.1.68), принимая во внимание (П.1.67), найдем

$$\begin{aligned}&\delta y\left(t^*\right)+o\left(\delta t^*\right)=0,\\&\delta y^{(\nu)}\left(t^*\right)+o\left(\delta t^*\right)=0,\ \nu=\overline{1,q-2},\\&P\left(\mathbf{x}^*\left(t^*\right)\mathbf{u}^*\left(t^*-0\right)\right)\delta t^*+\delta y^{(q-1)}\left(t^*\right)+o\left(\delta t^*\right)=0.\end{aligned}\qquad(\text{П.1.69})$$

Здесь символом $o\left(\delta t^*\right)$ обозначена величина, имеющая порядок малости выше первого относительно δt^*, т.е.

$$\lim_{\delta t^*\to 0}\frac{o\left(\delta t^*\right)}{\delta t^*}=0.$$

Из условия слабой регулярности траектории $\mathbf{x}^*(t)$ следует, что

$$P\left(\mathbf{x}^*\left(t^*\right),\mathbf{u}^*\left(t^*-0\right)\right)\neq 0.$$

Из (П.1.69) вытекает тогда

$$\begin{aligned}&\delta y\left(t^*\right)=o\left|\delta\mathbf{x}\left(t^*\right)\right|,\\&\delta y^{(\nu)}\left(t^*\right)=o\left|\delta\mathbf{x}\left(t^*\right)\right|,\ \nu=\overline{1,q-2}.\end{aligned}\qquad(\text{П.1.70})$$

Обозначим через τ момент времени, в который траектория $\mathbf{x}(t)$ проходит через начало координат. Покажем, что $\tau\geq t_1$. Предположим противное и назначим $\mathbf{u}(t)\equiv 0$ при $\tau\leq t\leq t_1$. Тогда $\mathbf{x}(t)=\mathbf{x}^1$, $\tau\leq t\leq t_1$.

Проинтегрируем равенство (П.1. 66):

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\psi_i\left(x_i^*-x_i\right)dt=\int_{t_0}^{t_1}\alpha\psi^{\mathrm{T}}\mathbf{D}\left(\mathbf{u}^*-\mathbf{u}\right)dt+\int_{t_0}^{t_1}\left[y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right]\lambda\left(t^*\right)\delta\left(t-t^*\right)dt+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\beta\frac{d}{dt}\left[\lambda(t)\left(y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right)\right]dt+\int_{t_0}^{t_1}\beta\sum_{s=1}^{N}1(\Delta s)\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)}d_{i\nu}\psi_i\left(u_\nu^*-u_\nu\right)-\right.\\&\left.-\left(\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)}d_{\rho\Delta s}\frac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^*\right)}{\partial x_i}d_{i\nu}\left(u_\nu^*-u_\nu\right)\psi_\rho\right)\Bigg/\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial\Phi^{q-1}(\mathbf{x})}{\partial x_i}d_{i\Delta s}\right]dt-\\&-\int_{t^*}^{t^*+\delta t^*}\beta\left[y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right]\frac{d\lambda}{dt}dt+\int_{t^*+\delta t^*}^{t^{**}}\beta\left[y^{*(q-1)}-y^{(q-1)}\right]\left(-\frac{d\lambda}{dt}\right)dt+\\&+\int_{t_0}^{t_1}\left[\mu^0\left(y^*(t)-y(t)\right)+\sum_{\nu=1}^{q-2}\mu^\nu\left(y^{*(\nu)}(t)-y^{(\nu)}(t)\right)\right]\times\delta\left(t-t^*\right)dt.\end{aligned}\qquad(\text{П.1.71})$$

Учитывая фильтрующие свойства δ-функции и (П.1.70), можно записать

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t_1}\left[\mu^0\left(y^*(t)-y(t)\right)+\sum_{\nu=1}^{q-2}\mu^\nu\left(y^{*(\nu)}(t)-y^{(\nu)}(t)\right)\right]\delta\left(t-t^*\right)dt=\\&=\mu^0\delta y\left(t^*\right)+\sum_{\nu=1}^{q-2}\mu^\nu\delta y^{(\nu)}\left(t^*\right)=o\left|\delta\mathbf{x}^*\left(t^*\right)\right|.\end{aligned}\qquad(\text{П.1.72})$$

Далее, если $\delta t^* > 0$, то в интервале $t^* < t < t^* + \delta t^*$ неравенство (П.1.57) не выполняется. Имеем

$$\int_{t^*}^{t^*+\delta t^*} \beta\left(y^{*(q-1)} - y^{(q-1)}\right)\frac{d\lambda}{dt}dt = \delta y^{(q-1)}\left(t^*\right)\frac{d\lambda\left(t^*\right)}{dt}\delta t^* + o\left(\delta t^*\right).$$

Из (П.1.69) следует тогда, что

$$\int_{t^*}^{t^*+\delta t^*} \beta\left(y^{*(q-1)} - y^{(q-1)}\right)\frac{d\lambda}{dt}dt = o\left|\delta\mathbf{x}\left(t^*\right)\right|. \qquad (П.1.73)$$

В соответствии с условием максимума (П.1.24) в каждой точке внутреннего интервала

$$\boldsymbol{\psi}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{D}\left(\mathbf{u}^*(t) - \mathbf{u}(t)\right) \geq 0. \qquad (П.1.74)$$

Далее, из утверждения П.1.1 вытекает, что на граничном интервале

$$\sum_{s=1}^{N} 1(\Delta s)\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)} d_{i\nu}\psi_i\left(u_\nu^* - u_\nu\right) - \frac{\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{\nu=1}^{r(\Delta s)} d_{\rho\Delta s}\psi_\rho \dfrac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^*\right)}{\partial x_i} d_{i\nu}\left(u_\nu^* - u_\nu\right)}{\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial\Phi^{q-1}\left(\mathbf{x}^*\right)}{\partial x_i} d_{i\Delta s}}\right] \geq 0. \qquad (П.1.75)$$

Из (П.1.71), принимая во внимание соотношения (П.1.61), (П.1.32), (П.1.72)–(П.1.74), найдем, что

$$o = b, \qquad (П.1.76)$$

где $b > 0$. Противоречие (П.1.76) доказывает недопустимость предположения о том, что $\tau < t_1$.

Если t^* — точка отражения траектории $\mathbf{x}^*(t)$ порядка $\tilde{q}$, $\tilde{q} \leq q$, то из уравнения (П.1.52), соотношений (П.1.15), (П.1.21), (П.1.22) следует равенство

$$\mu^{\tilde{q}-1} = 0.$$

Далее, при $\tau < t_1$ рассмотренным выше способом можно получить неравенство (П.1.76). Теорема П.1.4, таким образом, доказана.

Если ограничение (П.1.35) имеет первый порядок, то удается получить существенно более сильный результат. При этом отпадает необходимость в дополнительном условии (П.1.56).

Теорема П.1.5. *Пусть* $\mathbf{x}^*(t)$ *— слабо регулярная траектория, переводящая фазовую точку* $\mathbf{x}$ *из заданного начального положения* $\mathbf{x}^0$ *в начало координат и удовлетворяющая условиям теоремы* П.1.3; *если ограничение* (П.1.35) *имеет первый порядок, то на траектории* $\mathbf{x}^*(t)$ *функционал* (П.1.36) *достигает абсолютного минимума.*

Теорема П.1.6 (теорема единственности). *Пусть* $\mathbf{x}^*(t)$ *— траектория, удовлетворяющая условиям теоремы* П.1.5, *а* $\mathbf{x}^{**}(t)$ *— любая другая оптимальная траектория, соединяющая точку* $\mathbf{x}^0$ *с началом координат. Тогда* $\mathbf{x}^{**}(t) \equiv \mathbf{x}^*(t)$.

Доказательство теорем П.1.5 и П.1.6 следует из равенства (П.1.71). Так как теперь $y^{(q-1)}(\mathbf{x}) = y(\mathbf{x})$, то условие (П.1.76) можно получить, не предполагая траектории $\mathbf{x}^*(t)$ и $\mathbf{x}(t)$ близкими. Подробное доказательство теорем П.1.5 и П.1.6 приводится в [100].

Рассмотрим объект, движение которого задается уравнением

$$y^{(n)} - a_{n-1}y^{(n-1)} - \ldots - a_1 y' - a_0 y = \kappa u, \qquad (П.1.77)$$

здесь y — выходная координата, u — управляющий параметр, a_i, $i=\overline{0,n-1}$, κ — некоторые константы, причем $\kappa > 0$. Представим уравнение (П.1.77) в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ldots,\ \dot{x}_{n-1} = x_n, \\ \dot{x}_n = \kappa u - a_0 x_1 - a_1 x_2 - \ldots - a_{n-1} x_n, \end{cases} \tag{П.1.78}$$

где $x_1 = y$. Пусть на управляющий параметр u наложено ограничение $|u| \le A_1$. Предположим, далее, что фазовые координаты системы (П.1.78) должны удовлетворять неравенству

$$\left| x_{n-1} - d_{n-2} x_{n-2} - \ldots - d_1 x_1 \right| \le M, \tag{П.1.79}$$

здесь d_i, $i=\overline{1,n-2}$, и M — некоторые числа.

Ограничение (П.1.79) имеет второй порядок, причем граница допустимой области B задается уравнением

$$g(\mathbf{x}) = x_{n-1} + d_{n-2} x_{n-2} + \ldots + d_1 x_1 - c = 0, \tag{П.1.80}$$

где $c = \pm M$. Как следует из соотношений (П.1.78), (П.1.80), движение по границе области B описывается уравнениями

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_2,\ \dot{x}_2 = x_3,\ldots,\ \dot{x}_{n-3} = x_{n-2}, \\ &\dot{x}_{n-2} = c - d_1 x_1 - d_2 x_2 - \ldots - d_{n-2} x_{n-2}. \end{aligned} \tag{П.1.81}$$

Траекторию движения $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, в задаче (П.1.78), (П.1.80), (П.1.36) будем интерпретировать как некоторый «эстафетный» процесс [46]. В этом «эстафетном» процессе движение в открытом ядре области B задается уравнениями (П.1.78), движение по границе области B — уравнениями (П.1.81). Переключение уравнений движения с (П.1.78) на (П.1.81) происходит в момент t^* выхода фазовой точки на $(n-2)$-мерную гиперплоскость

$$\begin{aligned} &g(\mathbf{x}) = 0, \\ &\Phi^1(\mathbf{x}) = \left(x_n + d_{n-2} x_{n-1} + \ldots + d_1 x_2 \right) = 0. \end{aligned}$$

Момент t^{**} переключения уравнений движения с (П.1.81) на (П.1.78) выбирается свободно. В точках t^* и t^{**} фазовые координаты связаны соотношениями

$$x_i\left(t^* + 0\right) = x_i\left(t^* - 0\right),\ i=\overline{1,n-2}, \tag{П.1.82}$$

$$x_i\left(t^{**} + 0\right) = x_i\left(t^{**} - 0\right),\ i=\overline{1,n-2},$$

$$g\left(\mathbf{x}\left(t^{**} + 0\right)\right) = 0, \tag{П.1.83}$$

$$\Phi^1\left(\mathbf{x}\left(t^{**} + 0\right)\right) = 0.$$

Последние два равенства (П.1.83) определяют координаты $x_{n-1}\left(t^{**} + 0\right)$, $x_n\left(t^{**} + 0\right)$.

Для указанного «эстафетного» процесса необходимые условия оптимальности задаются теоремой 4.4 [46].

Введем $(n-2)$-мерный вектор $\hat{\mathbf{x}} = \left(x_1, x_2, \ldots, x_{n-2}\right)$ и $(n-1)$-мерный вспомогательный вектор $\hat{\psi} = \left(\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n-2}\right)$, который определяется уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0,\ \frac{d\psi_i}{dt} = -\frac{\partial H\left(\hat{\psi}, \hat{\mathbf{x}}, c\right)}{\partial x_i},\ i=\overline{1,n-2}, \tag{П.1.84}$$

здесь $H(\hat{\psi},\hat{\mathbf{x}},c)$ — функция Гамильтона, записанная относительно уравнений (П.1.81) и функционала (П.1.36). Будем говорить, что траектория $\mathbf{x}(t)=(x_1(t),x_2(t),\ldots,x_n(t))$, $t^*\le t\le t^{**}$, целиком лежащая на границе области B, удовлетворяет условию оптимальности на границе, если найдется такая ненулевая непрерывная вектор-функция $\hat{\psi}(t)$, определяемая уравнениями (П.1.84), что в каждый момент времени t $(t^*\le t\le t^{**})$

$$\begin{aligned} &H(\hat{\psi}(t),\hat{\mathbf{x}}(t),c)=\max_{W=\pm M} H(\hat{\psi}(t),\hat{\mathbf{x}}(t),W)=0,\\ &\psi_0(t)\le 0. \end{aligned} \tag{П.1.85}$$

Далее, участок траектории $\mathbf{x}(t)$, целиком лежащий в открытом ядре области B, должен удовлетворять теореме 2.1 (принципу максимума Понтрягина).

Будем говорить, что в точке выхода t^* выполнено условие скачка, если

$$\begin{aligned} &\psi_0(t^*-0)=\psi_0(t^*+0),\\ &\psi_i(t^*-0)=\psi_i(t^*+0)+\mu_0\frac{\partial g(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_i}+\mu_1\frac{\partial \Phi^1(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_i},\ i=\overline{1,n-2},\\ &\psi_{n-1}(t^*-0)=\mu_0\frac{\partial g(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_{n-1}}+\mu_1\frac{\partial \Phi^1(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_{n-1}},\\ &\psi_n(t^*-0)=\mu_0\frac{\partial g(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_n}+\mu_1\frac{\partial \Phi^1(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_n}. \end{aligned} \tag{П.1.86}$$

Если t^* — точка отражения, то условие скачка будем задавать одним из соотношений:

$$\psi(t^*-0)=\psi(t^*+0), \tag{П.1.87}$$

либо

$$\begin{aligned} &\psi_0(t^*-0)=\psi_0(t^*+0),\\ &\psi_i(t^*-0)=\psi_i(t^*+0)+\mu_0\frac{\partial g(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_i}+\mu_1\frac{\partial \Phi^1(\mathbf{x}(t^*))}{\partial x_i},\ i=\overline{1,n},\\ &\mu_0\operatorname{sign}c\le 0,\\ &\mu_1\operatorname{sign}c\ge 0. \end{aligned} \tag{П.1.88}$$

Равенство (П.1.87) относится к точке отражения первого порядка, равенство (П.1.88) — к точке отражения второго порядка. Причем в условии (П.1.88) неравенство $\mu_1\operatorname{sign}c\ge 0$ выливается в равенство

$$\mu_1=0, \tag{П.1.89}$$

если выполняется хотя бы одно из условий:

$$\begin{aligned} &P(\mathbf{x}(t^*),\mathbf{u}(t^*-0))=0,\\ &P(\mathbf{x}(t^*),\mathbf{u}(t^*+0))=0. \end{aligned}$$

Аналогично, в точке схода t^{**} выполняется условие скачка, если

$$\psi_0\left(t^{**}+0\right)=\psi_0\left(t^{**}-0\right),$$

$$\psi_i\left(t^{**}+0\right)=\psi_i\left(t^{**}-0\right)+\mu_2\frac{\partial g\left(\mathbf{x}\left(t^{**}\right)\right)}{\partial x_i}+\mu_3\frac{\partial \Phi^1\left(\mathbf{x}\left(t^{**}\right)\right)}{\partial x_i},\quad i=\overline{1,n-2},$$

$$\psi_{n-1}\left(t^{**}+0\right)=\mu_2\frac{\partial g\left(\mathbf{x}\left(t^{**}\right)\right)}{\partial x_{n-1}}+\mu_3\frac{\partial \Phi^1\left(\mathbf{x}\left(t^{**}\right)\right)}{\partial x_{n-1}},\qquad (\text{П.1.90})$$

$$\psi_n\left(t^{**}+0\right)=\mu_2\frac{\partial g\left(\mathbf{x}\left(t^{**}\right)\right)}{\partial x_n}+\mu_3\frac{\partial \Phi^1\left(\mathbf{x}\left(t^{**}\right)\right)}{\partial x_n}.$$

В равенствах (П.1.86)–(П.1.90) μ_0,μ_1,μ_2,μ_3 — произвольные действительные числа.

Выписанные выше условия, кроме неравенства $\mu_0 \operatorname{sign} c \le 0$, вытекают из теоремы 4.4 [46], записанной для сформулированного выше «эстафетного» процесса, а в случае точки отражения — также из теоремы П.1.1. Правда, условия скачка приводятся здесь лишь в главной форме.

Будем предполагать, что в точке выхода t^* и в точке схода t^{**} выполняются соотношения

$$\left.\frac{d^2}{dt^2}g\left(\mathbf{x}(t)\right)\right|_{t=t^*-0}\neq 0,\quad \left.\frac{d^2}{dt^2}g\left(\mathbf{x}(t)\right)\right|_{t=t^{**}+0}\neq 0.$$

Эти соотношения, в известном смысле, эквивалентны требованию регулярности или слабой регулярности граничного участка траектории $\mathbf{x}(t)$.

Теорема П.1.7. Пусть управление $\mathbf{u}(t)$ и траектория $\mathbf{x}(t)$, $t_0 \le t \le t_1$, переводят фазовую точку $\mathbf{x}$ из заданного начального положения $\mathbf{x}^0=\left(x_1^0,\ldots,x_n^0\right)$ в начало координат. Если траектория $\mathbf{x}(t)$ удовлетворяет на внутренних интервалах движения теореме 2.1, на граничных интервалах — условию оптимальности (П.1.85), а в точках стыка — условиям скачка (П.1.86)–(П.1.88), (П.1.90), то на траектории $\mathbf{x}(t)$ функционал (П.1.36) достигает абсолютного минимума.

Теорема П.1.8. *Пусть* $\mathbf{x}^*(t)=\left(x_1^*(t),\ldots,x_n^*(t)\right)$ — *траектория, удовлетворяющая условиям теоремы* П.1.7, *а* $\mathbf{x}^{**}(t)$ — *любая другая оптимальная траектория. Тогда*

$$\mathbf{x}^{**}(t)\equiv\mathbf{x}^*(t).$$

Теорема П.1.7 задает достаточные условия оптимальности. В случае достаточных условий обычно важно знать, не являются ли эти условия чрезмерно жесткими. Опыт применения теоремы П.1.7 показывает, что она с успехом может быть использована для синтеза оптимального управления.

Доказательство теорем П.1.7 и П.1.8 аналогично доказательству теоремы П.1.4. Оно подробно приводится в [99].

П.1.3. ОПТИМАЛЬНОЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЕ В СЛУЧАЕ ИНЕРЦИОННОГО РУЛЯ

В теории оптимального по быстродействию управления особое место занимает теорема о числе переключений, полученная еще А.А. Фельдбаумом [104] и обобщенная в известной монографии [72]. Именно на основании этой теоремы решено большинство практических примеров по синтезу оптимального по быстродействию

управления. В данном параграфе (см. также [107]) теорема о числе переключений распространяется на случай, когда управление объектом осуществляется с помощью инерционного руля.

Итак, пусть движение объекта описывается уравнением

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}, \tag{П.1.91}$$

здесь $\boldsymbol{\delta} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)$ — r-мерный вектор, каждая координата которого задает перемещение соответствующего рулевого органа. На перемещение рулей наложены ограничения

$$|\delta_j| \le R_j, \quad j = \overline{1,r}. \tag{П.1.92}$$

Будем считать рули инерционными, полагая, что их движение описывается уравнением

$$\frac{d\boldsymbol{\delta}}{dt} = \mathbf{u}, \tag{П.1.93}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_r)$ — r-мерный вектор, задающий безынерционное управление. Пусть, далее, вектор $\mathbf{u}$ может принимать свои значения из области U, которая задается неравенствами

$$|u_j| \le A_j, \quad j = \overline{1,r}. \tag{П.1.94}$$

В неравенствах (П.1.92) и (П.1.94) R_j и A_j — некоторые числа.

Ниже предполагается, что система уравнений (П.1.91) является нормальной. Именно, будем считать, что для любого j, $j = \overline{1,r}$, векторы

$$\mathbf{d}_j, \mathbf{A}\mathbf{d}_j, \mathbf{A}^2\mathbf{d}_j, \ldots, \mathbf{A}^{(n-1)}\mathbf{d}_j$$

— линейно независимы, здесь $\mathbf{d}_j$ — n-мерный вектор, представляющий собой j-й столбец матрицы $\mathbf{D}$. В этом случае, как показано в п. 2.3, управление $\mathbf{u}(t)$ находится из условия максимума функции Гамильтона (за исключением конечного числа точек) однозначно.

В соответствии с уравнением (П.1.93) каждый из рулей описывается интегрирующим звеном, и, следовательно, о его инерционности можно говорить лишь условно. Однако во многих технических системах переходные процессы в приводе руля оканчиваются весьма быстро (по сравнению с временем движения с постоянной скоростью). В этом случае инерционный руль с достаточной для практики точностью может быть описан соотношением (П.1.93).

Рассмотрим задачу о наибыстрейшем переводе фазовой точки системы (П.1.91), (П.1.93) из некоторого начального положения в начало координат. Будем рассматривать эту задачу в двух вариантах. В первом варианте (назовем его вариантом E) конечное значение задается как для вектора $\mathbf{x}$, так и для вектора $\boldsymbol{\delta}$, т.е. $\mathbf{x}^1 = 0$, $\boldsymbol{\delta}^1 = 0$. Во втором варианте (вариант L) конечное значение задается только для вектора $\mathbf{x}$ $(\mathbf{x}^1 = 0)$. Что же касается начального состояния, то оно предполагается полностью заданным, т.е. в начальный момент времени заданы векторы $\mathbf{x}$ и $\boldsymbol{\delta}$.

Приняв переменные δ_j, $j = \overline{1,r}$, за фазовые переменные, а вектор $\mathbf{u}$ — за безынерционное управление, сформулированную выше задачу оптимального «инерционного» управления сведем к задаче об оптимальном безынерционном управлении, но при ограничениях на фазовые координаты системы.

Сформулируем сначала достаточные условия оптимальности.

Ограничения (П.1.92) выделяют в фазовом пространстве X системы (П.1.91), (П.1.93) допустимую область B, ограниченную поверхностями S_j^1 и S_j^2 $\left(j=\overline{1,r}\right)$, причем поверхность S_j^1 задается уравнением

$$g_j^1(\delta)=\delta_j-R_j=0,$$

а поверхность S_j^2 — уравнением

$$g_j^2(\delta)=-\delta_j-R_j=0.$$

В дальнейшем наряду с обозначением S_j^1 и S_j^2 будет широко использоваться обозначение S_j, где под поверхностью S_j понимается любая из поверхностей S_j^1, S_j^2. Уравнение поверхности S_j условимся записывать в виде

$$g_j(\delta)=0. \qquad (\text{П.1.95})$$

В отличие от рассмотренного выше здесь допускается движение фазовой точки по пересечению двух и более ограничивающих поверхностей S_j. Обозначим через ρ множество таких индексов j, что

$$\left|\delta_j\right|=R_j,$$

если $j\in\rho$. При движении по границе области B

$$P_j\left(\delta(t),\mathbf{u}(t)\right)=\frac{d}{dt}g_j\left(\delta(t)\right)=u_j(t)\ \operatorname{sign}\delta_j=0$$

для любого $j\in\rho$. Область управления, определяемую соотношениями

$$\left|u_j\right|\le A_j,\ j=\overline{1,r},\ P_j(\delta,\mathbf{u})=0,\ j\in\rho,$$

обозначим ω_ρ. Будем считать, что при движении фазовой точки по границе области B управление $\mathbf{u}$ принимает свои значения из области ω_ρ.

Обозначим t^j точку выхода на поверхность S_j, а через $\tilde{t}_j$ — точку схода с поверхности S_j. Точку отражения от поверхности, как и точку выхода, будем обозначать t^j. Так как возможен одновременный выход на две и более ограничивающие поверхности, то допускаются соотношения

$$t^j=t^\nu=t^\rho.$$

Аналогичные соображения справедливы и для точек схода и отражения. Более того, одна и та же точка может совмещать в себе, например, выход на границы S_j, S_ν и сход с границ S_α и S_β, т.е. возможны соотношения

$$t^j=t^\nu=\tilde{t}^\alpha=\tilde{t}^\beta.$$

Точки выхода, схода и отражения называют еще *точками стыка траектории*. Если точка стыка представляет собой только точку выхода, или только точку схода, или только точку отражения относительно некоторой ограничивающей поверхности S_j, то соответствующую точку стыка назовем *простой*. Каждую точку стыка, которая не является простой, будем называть *сложной*. Будем, далее, предполагать, что сложная точка стыка является точкой выхода на поверхности S_j для всех $j\in\Xi$, точкой схода с поверхностей S_j для $j\in\theta$ и точкой отражения от поверхностей S_j для $j\in\Gamma$, здесь Ξ, θ и Γ — некоторые множества. Участок $\tau_1\le t\le\tau_2$, на котором траектория

$(\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\delta}(t))$ принадлежит границе области B и не имеет других точек стыка, кроме τ_1 и τ_2, назовем *простым граничным интервалом*.

Введем векторы

$$\boldsymbol{\psi}^1 = (\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n), \quad \boldsymbol{\psi}^2 = (\psi_{n+1}, \psi_{n+2}, \ldots, \psi_{n+r}),$$

$$\boldsymbol{\psi} = (\psi_0, \boldsymbol{\psi}^1, \boldsymbol{\psi}^2) = (\psi_0, \psi_1, \ldots, \psi_{n+r})$$

и составим функцию

$$H(\boldsymbol{\psi}, \mathbf{x}, \boldsymbol{\delta}, \mathbf{u}) = \psi_0 + (\boldsymbol{\psi}^1)^{\mathrm{T}} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{D}\boldsymbol{\delta}) + (\boldsymbol{\psi}^2)^{\mathrm{T}} \mathbf{u}.$$

Вектор $\boldsymbol{\psi}(t)$ определим уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \quad \frac{d\boldsymbol{\psi}^1}{dt} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^1, \quad \frac{d\boldsymbol{\psi}^2}{dt} = -\mathbf{D}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\psi}^1. \tag{П.1.96}$$

При движении по границе области B нам понадобятся также вспомогательные функции $\lambda_j(t)$, $j \in \rho$, которые зададим уравнениями

$$\frac{\partial H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\delta}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_j} = \lambda_j(t) \frac{\partial P_j(\boldsymbol{\delta}(t), \mathbf{u}(t))}{\partial u_j}, \quad j \in \rho. \tag{П.1.97}$$

Пусть $\tau_1 \le t \le \tau_2$ — простой граничный интервал. Будем говорить, что в *интервале* $\tau_1 \le t \le \tau_2$ *выполнено условие оптимальности на границе, если найдется такая ненулевая непрерывная вектор-функция* $\boldsymbol{\psi}(t)$ *и такие вспомогательные функции* $\lambda_j(t)$, $j \in \rho$, *что*:

1) *в каждый момент времени* t, $\tau_1 \le t \le \tau_2$, *выполняется условие максимума*

$$H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\delta}(t), \mathbf{u}(t)) = \max_{\mathbf{u} \in \omega_\rho} H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\delta}(t), \mathbf{u}) \equiv 0;$$

2) *для любого* $j \in \rho$ *в каждой точке дифференцируемости*

$$\frac{d\lambda_j}{dt} \le 0; \tag{П.1.98}$$

3) *выполнено условие нетривиальности, т.е. решения системы* (П.1.96) *вида*

$$\psi_0(t) \equiv 0, \quad \boldsymbol{\psi}^1(t) \equiv 0,$$

$$\boldsymbol{\psi}^2(t) = \sum_{j \in \rho} \mu_j \operatorname{grad} g_j(\boldsymbol{\delta}(t)),$$

$$\psi_{n+j}(\tau - 0) = 0, \quad j \in \Xi,$$

$$\psi_{n+j}(\tau + 0) = 0, \quad j \in \theta,$$

где μ_j *— произвольные действительные числа, не допускаются.*

Рассмотрим точку стыка τ. Условие скачка в этой точке зададим уравнениями*

---

* Если τ — простая точка стыка, то соотношения типа $\psi_{\eta+j}(\tau - 0) = 0$, $\psi_{\eta+j}(\tau + 0) = 0$ следуют из непрерывности функции $H(\boldsymbol{\psi}(t), \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\delta}(t), \mathbf{u}(t))$ в точке стыка, а условие непрерывности, в свою очередь, вытекает из возможности варьирования момента τ. В силу особенностей системы (П.1.91), (П.1.93) в сложной точке стыка, например, при $t_j^* = t_\nu^* = t_\alpha^{**} = t_\beta^{**}$, моменты времени $t_j^*, t_\nu^*, t_\alpha^{**}, t_\beta^{**}$ варьируются независимо друг от друга. Это позволяет записать последние два условия (П.1.99).

$$\psi_0(\tau+0)=\psi_0(\tau-0),\ \psi^1(\tau+0)=\psi^1(\tau-0),$$
$$\psi^2(\tau+0)=\psi^2(\tau-0)+\sum_{j\in\Xi}\mu_j\operatorname{grad} g_j(\delta(\tau)), \qquad (\text{П.1.99})$$

здесь μ_j — произвольные действительные числа.

Теорема П.1.9. *Пусть* $\mathbf{u}(t), t_0 \le t \le t_1$, — *кусочно-непрерывное, кусочно-гладкое управление, переводящее фазовую точку* $(\mathbf{x},\delta)$ *системы* (П.1.91), (П.1.93) *из заданного начального положения* $(\mathbf{x}^0,\delta^0)$ *в начало координат, т.е. в точку* $\mathbf{x}^1=0,\ \delta^1=0$. *Если соответствующая управлению* $\mathbf{u}(t)$ *траектория* $(\mathbf{x}(t),\delta(t))$ *удовлетворяет на внутренних интервалах движения принципу максимума Понтрягина* (*теорема* 2.1), *на каждом простом граничном интервале — условию оптимальности на границе, а в точках стыка — условиям скачка, то на траектории* $(\mathbf{x}(t),\delta(t))$ *функционал* (П.1.36) *достигает абсолютного минимума.*

Теорема П.1.9 задает достаточные условия. Однако эти условия являются, по-видимому, также и необходимыми. Нетрудно видеть, что в случае скалярного δ теорема П.1.9 совпадает с теоремой П.1.3.

Теорема П.1.10. *Если* $(\mathbf{x}^*(t),\delta^*(t))$ — *траектория, удовлетворяющая условиям теоремы* П.1.9, *а* $(\mathbf{x}^{**}(t),\delta^{**}(t))$ — *любая другая оптимальная траектория, то*

$$(\mathbf{x}^*(t),\delta^*(t))=(\mathbf{x}^{**}(t),\delta^{**}(t)).$$

Для задания достаточных условий в случае варианта L необходимо к теореме П.1.9 присоединить условие трансверсальности

$$\psi_{n+j}(t_1)=0,\ j=\overline{1,r}. \qquad (\text{П.1.100})$$

При этом теоремы П.1.7 и П.1.8 сохраняют свою силу.

Доказательство теорем П.1.9 и П.1.10 аналогично доказательству теоремы П.1.4, причем в силу частных особенностей объекта (П.1.91), (П.1.93) оно сильно упрощается.

Легко видеть, что на каждом простом граничном интервале вектор $\psi(t)$ определяется условием оптимальности на границе с точностью до слагаемого

$$\psi_0(t)=0,\ \psi^1(t)=0,$$
$$\psi^2(t)=\sum_{j\in\rho}\mu_j\operatorname{grad} g_j(\delta(t)).$$

Это позволяет условие скачка в форме (П.1.99) заменить условием скачка вида

$$\psi_0(\tau-0)=\psi_0(\tau+0),\ \psi^1(\tau-0)=\psi^1(\tau+0),$$
$$\psi^2(\tau+0)=\psi^2(\tau-0)+\sum_{j\in\theta}\mu_j\operatorname{grad} g_j(\delta(\tau)), \qquad (\text{П.1.101})$$
$$\psi_{n+j}(\tau-0)=0,\ j\in\Xi,$$
$$\psi_{n+j}(\tau+0)=0,\ j\in\theta.$$

Условие скачка в форме (П.1.101) часто оказывается более удобным при практическом применении, нежели условие (П.1.99).

Будем предполагать, что матрица $\mathbf{A}$ имеет действительные собственные числа. Тогда матрица $\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$ также имеет действительные собственные числа.

Теорема П.1.11 (теорема о числе переключений). *Если все собственные числа матрицы* $\mathbf{A}$ — *действительны, а траектория* $(\mathbf{x}(t),\delta(t))$ *удовлетворяет условиям*

теоремы П.1.7, *то оптимальные по быстродействию управления* $u_j(t)$, $j=\overline{1,r}$, *представляют собой кусочно-постоянные функции, принимающие значения* A_j, 0, $-A_j$, *и каждое управление* $u_j(t)$ *изменяет знак не более* n *раз, если рассматривается вариант* E, *и не более* $(n-l)$ *раз, если рассматривается вариант* L, *здесь* n — *порядок системы* (П.1.91).

Доказательство. Из условия максимума функции $H\left(\psi(t),\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\delta}(t),\mathbf{u}(t)\right)$ находим, что при движении в открытом ядре области B оптимальное управление

$$u_j(t)=A_j\operatorname{sign}\psi_{n+j}(t),\ j=\overline{1,r}, \tag{П.1.102}$$

а при движении по границе области B

$$u_j(t)=0,\ j\in\rho,$$

$$u_j(t)=A_j\operatorname{sign}\psi_{n+j}(t),\ j\notin\rho.$$

Далее, в соответствии с (П.1.97)

$$\lambda_j(t)=\psi_{n+j}(t)\operatorname{sign}\boldsymbol{\delta},$$

и условие (П.1.98) принимает вид

$$\frac{d\psi_{n+j}}{dt}\operatorname{sign}\boldsymbol{\delta}\le 0,\ j\in\rho. \tag{П.1.103}$$

При доказательстве теоремы будем использовать условие скачка в форме (П.1.101). В соответствии с (П.1.101) и (П.1.96) вектор $\psi^1(t)$ непрерывен и задается вторым уравнением (П.1.96). Далее, как следует из (П.1.101), (П.1.95) и (П.1.96), точка стыка τ вносит изменение лишь во вспомогательные функции $\psi_{n+j}(t)$ для всех $j\in\theta$ и оставляет без изменения остальные компоненты вектора $\psi(t)$. Итак, если рассматривать вспомогательную функцию $\psi_{n+j}(t)$, то она определяется, кроме уравнений (П.1.92), только точками схода с границы S_j.

Пусть $\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_m$ — попарно различные собственные числа матрицы $-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}$. Предположим, далее, что собственное число γ_υ имеет кратность k_υ, так что $k_1+k_2+\ldots+k_m=n$. Тогда на любом интервале, не содержащем точек стыка,

$$\psi_{n+j}(t)=g_1^j(t)\cdot e^{\gamma_1\cdot t}+g_2^j(t)\cdot e^{\gamma_2\cdot t}+\ldots+g_m^j(t)\cdot e^{\gamma_m\cdot t}+c_j,\ j=\overline{1,r}, \tag{П.1.104}$$

здесь $g_\upsilon^j(t)$, $\upsilon=\overline{1,m}$, — многочлены, причем степень многочлена $g_\upsilon^j(t)$ (для любого j) не превосходит $k_\upsilon-1$, c_j — некоторые константы. Равенство (П.1.104) соответствует случаю, когда собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ отличны от нуля. Если среди собственных значений имеется число 0, то вид равенства (П.1.104) изменится, однако полностью сохраняются все приводимые ниже рассуждения.

Так как для любого j вектор

$$\psi(t)=\left(\psi_0(t),\psi^1(t),\psi^2(t)\right)=\left(0,0,\mu_j\frac{\partial g\left(\mathbf{x}(t),\boldsymbol{\delta}(t)\right)}{\partial\boldsymbol{\delta}}\right),$$

где μ_j — произвольная константа, является тривиальным решением системы (П.1.96), то, как следует из (П.1.101) и (П.1.104), в интервале $t_0\le t\le\tilde{t}_{\alpha+1}^j$

$$\psi_{n+j}(t) = g_1^j(t)e^{\gamma_1 \cdot t} + g_2^j(t)e^{\gamma_2 \cdot t} + \ldots + g_m^j(t)e^{\gamma_m \cdot t} + c_j^0 + \\ + \sum_{S=1}^{\alpha} \mu_j^S \frac{\partial g_j\left(\delta\left(\tilde{t}_S^j\right)\right)}{\partial \delta_j} 1\left(t - \tilde{t}_S^j\right), \qquad (\text{П.1.105})$$

здесь

$$1\left(t - \tilde{t}_S^j\right) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \le \tilde{t}_S^j, \\ 1 \text{ при } t > \tilde{t}_S^j, \end{cases}$$

c_j^0 — некоторая константа.

Обозначим $\psi_{n+j}^0(t)$ функцию $\psi_{n+j}(t)$, задаваемую равенством (П.1.104), если в нем положить $c_j = c_j^0$. В соответствии с леммой п. 2.3 квазимногочлен $\psi_{n+j}^0(t)$ имеет не более, чем $(k_1 - 1) + (k_2 - 1) + \ldots + (k_m - 1) + m = n$ корней, а квазимногочлен $\frac{d}{dt}\psi_{n+j}^0(t)$ не более $(n-1)$ корней. Таким образом, функция $\psi_{n+j}^0(t)$ имеет не более чем $(n-1)$ точек экстремума и, следовательно, не более n участков монотонности. График функции $\psi_{n+j}^0(t)$ при $n = 4$ изображен на рис. П.1.1.

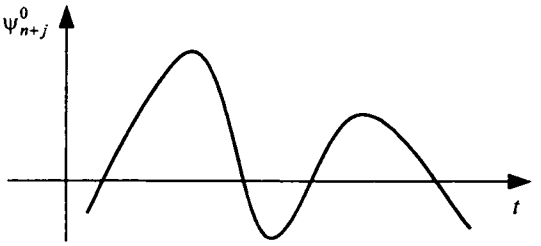


Рис. П.1.1. График функции $\psi_{n+j}^0(t)$

График функции $\psi_{n+j}^0(t)$ позволяет задать функцию $\psi_{n+j}(t)$. При этом, как следует из (П.1.105) и последнего равенства (П.1.101), условие скачка в момент схода $\tilde{t}_S^j$ может быть учтено параллельным переносом оси абсцисс так, чтобы она проходила через точку $\psi_{n+j}^0\left(\tilde{t}_S^j\right)$. Этот перенос, очевидно, следует выполнять в каждой точке схода с поверхности S_j.

В соответствии с (П.1.102) знак управления $u_j(t)$ совпадает со знаком функции $\psi_{n+j}(t)$, если $\left|\delta_j(t)\right| < R_j$. Далее, так как $u_j\left(\tilde{t}_S^j - 0\right) = -u\left(\tilde{t}_S^j + 0\right)$, то движение по границе S_j всегда приводит к смене знака управления. Если траектория движения системы (П.1.91), (П.1.93) такова, что $\left|\delta_j(t)\right| < R_j$, $t_0 \le t \le t_1$, то переключение управления $u_j(t)$ осуществляется в нулях функции $\psi_{n+j}(t) \equiv \psi_{n+j}^0(t)$, и, следовательно, управление $u_j(t)$ может изменять знак не более n раз.

Отметим, что функция $\psi_{n+j}^0(t)$ имеет максимальное число нулей, равное n, если каждый участок монотонности этой функции содержит один нуль, как это изображено

на рис. П.1.1. Далее, в соответствии с (П.1.103) в интервале $t_S^j < t < \tilde{t}_S^j$ функция $\psi_{n+j}(t)$ и, следовательно, функция $\psi_{n+j}^0(t)$ монотонна. Таким образом, число граничных участков функции $\delta_j(t)$ не может превышать число участков монотонности функции $\psi_{n+j}^0(t)$. Если некоторый участок монотонности функции $\psi_{n+j}(t)$ занят таким нулем t^*, что $\left|\delta_j\left(t^*\right)\right| < R_j$, то, как следует из предпоследнего равенства (П.1.101), он не может соответствовать граничному участку функции $\delta_j(t)$.

Таким образом, число изменений знака управления $u_j(t)$ не может превышать числа участков монотонности функции $\psi_{n+j}^0(t)$. Отсюда следует доказательство теоремы для варианта E. Попутно было доказано также, что функция $\delta_j(t)$ не может иметь более чем n граничных участков.

Для доказательства теоремы П.1.11 в случае варианта L необходимо принять во внимание условие трансверсальности (П.1.100). Это условие занимает нуль на последнем участке монотонности функции $\psi_{n+j}(t)$, т.е. на последнем участке монотонности функции $\psi_{n+j}(t)$ теперь невозможно изменение знака управления. В этом случае, как легко видеть, функция $\delta_j(t)$ может иметь не более $(n-1)$ граничных участков.

Замечание П.1.4. Теорема П.1.11, естественно, остается справедливой и в том случае, когда конечная точка $\mathbf{x}^1$ либо $\left(\mathbf{x}^1, \boldsymbol{\delta}^1\right)$ не совпадает с началом координат, но принадлежит открытому ядру области B.

При $r = 1$, т.е. в случае одного управляющего воздействия, теорема П.1.11 позволяет весьма просто осуществлять синтез оптимального управления. Именно, сохраняет свою силу классический способ построения поверхности переключения, предложенный в [104] для задач без ограничений на фазовый вектор.

Пример П.1.1. Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0 x = \kappa\delta, \\ &\dot{\delta} = u \end{aligned} \qquad \text{(П.1.106)}$$

при ограничениях $\delta \le R$, $u \le A$. Будем решать задачу о наибыстрейшем переводе фазовой точки системы (П.1.106) в начало координат (случай E). Для данной системы поверхность переключения образуется исходящими (в обратном времени χ) из начала координат фазовыми траекториями, на которых координата $\delta(\chi)$ имеет вид ломаной линии OMN либо $OM'N'$ (рис. П.1.2). Возможные положения линий MN и $M'N'$ показаны пунктиром. С помощью этой поверхности задается управление при движении фазовой точки в открытом ядре области B.

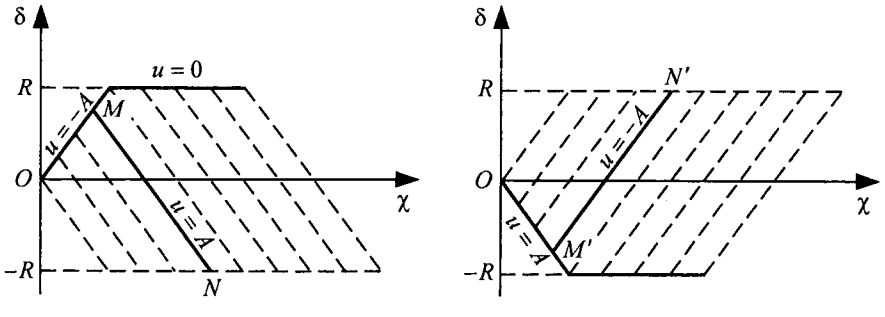


Рис. П.1.2. К примеру П.1.1

П.1.4. СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОГО ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ УПРАВЛЕНИЯ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА СКОРОСТЬ ДВИЖЕНИЯ И УСКОРЕНИЕ

1. Ограничение на ускорение. Рассмотрим объект третьего порядка

$$\dddot{y} + a_1\ddot{y} + a_2\dot{y} + a_3 y = u. \qquad (П.1.107)$$

Пусть заданы ограничения

$$|u| \le A, \ |\ddot{y}| \le D.$$

Будем, далее, предполагать, что характеристическое уравнение

$$s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0 \qquad (П.1.108)$$

имеет только действительные корни.

Представим уравнение (П.1.107) в виде системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = x_3, \ \dot{x}_3 = u - a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3. \qquad (П.1.109)$$

Область B допустимых значений фазового вектора $\mathbf{x}$ задается неравенством

$$|x_3| \le D.$$

Сначала будут рассмотрены только регулярные оптимальные траектории. Поэтому для синтеза оптимального по быстродействию управления воспользуемся теоремой П.1.5.

Выпишем функции

$$P_j(\mathbf{x}, u) = (u - a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3)\operatorname{sign} x_3,$$

$$H(\psi, \mathbf{x}, u) = \psi_0 + \psi_1 x_2 + \psi_2 x_3 + \psi_3 (u - a_3 x_1 - a_2 x_2 - a_1 x_3).$$

Из условия максимума функции $H(\psi, \mathbf{x}, u)$ находим, что при движении в открытом ядре области B

$$u(t) = A \operatorname{sign} \psi_3(t). \qquad (П.1.110)$$

При движении по границе области B

$$u = a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3. \qquad (П.1.111)$$

Движение на границе области B возможно лишь в полосе

$$|a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3| \le A. \qquad (П.1.112)$$

В соответствии с условиями регулярности ограничимся рассмотрением в открытой полосе

$$|a_3 x_1 + a_2 x_2 + a_1 x_3| < A.$$

Вспомогательная вектор-функция $\psi(t)$ определяется в открытом ядре области B уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \ \frac{d\psi_1}{dt} = a_3\psi_3, \ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1 + a_2\psi_3, \ \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_2 + a_1\psi_3, \qquad (П.1.113)$$

на границе области B — уравнениями

$$\frac{d\psi_0}{dt} = 0, \ \frac{d\psi_1}{dt} = 0, \ \frac{d\psi_2}{dt} = -\psi_1, \ \frac{d\psi_3}{dt} = -\psi_2. \qquad (П.1.114)$$

Условие $d\lambda/dt \le 0$ выливается в неравенство

$$\frac{d\psi_3}{dt}\operatorname{sign} x_3 = -\psi_2 \operatorname{sign} x_3 \le 0. \qquad (П.1.115)$$

Далее, соотношения (П.1.54) и (П.1.55) принимают вид

$$\psi_3(t_\alpha^* - 0) = 0, \ \psi_3(t_\alpha^{**}) = 0. \qquad (П.1.116)$$

Перейдем к обратному времени τ. В соответствии с теоремой П.1.5 в точках схода τ_α^{**} (каждой точке выхода t_α^* в обратном времени соответствует точка схода) должны выполняться условия скачка

$$\begin{aligned}&\psi_0\left(\tau_\alpha^{**}+0\right)=\psi_0\left(\tau_\alpha^{**}-0\right),\ \ \psi_1\left(\tau_\alpha^{**}+0\right)=\psi_1\left(\tau_\alpha^{**}-0\right),\\&\psi_2\left(\tau_\alpha^{**}+0\right)=\psi_2\left(\tau_\alpha^{**}-0\right),\ \ \psi_3\left(\tau_\alpha^{**}+0\right)=\psi_3\left(\tau_\alpha^{**}-0\right)-\mu_\alpha\operatorname{sign}x_3.\end{aligned}\qquad(\text{П.1.117})$$

Далее, в точках выхода, очевидно,

$$\psi\left(\tau_\alpha^{*}+0\right)=\psi\left(\tau_\alpha^{*}-0\right).\qquad(\text{П.1.118})$$

Соотношения (П.1.110), (П.1.111), (П.1.115)–(П.1.118) и условие

$$H\left(\psi(\tau=0),\ \mathbf{x}(\tau=0),\ u(\tau=0)\right)=0\qquad(\text{П.1.119})$$

образуют полную систему необходимых и достаточных условий оптимальности, которым должна удовлетворять регулярная оптимальная траектория.

Покажем, что исходящая в обратном времени из начала координат траектория $OMNQ$ (рис. П.1.3) оптимальна, а участки этой траектории OM и NQ, лежащие в открытом ядре области B, принадлежат поверхности переключения.

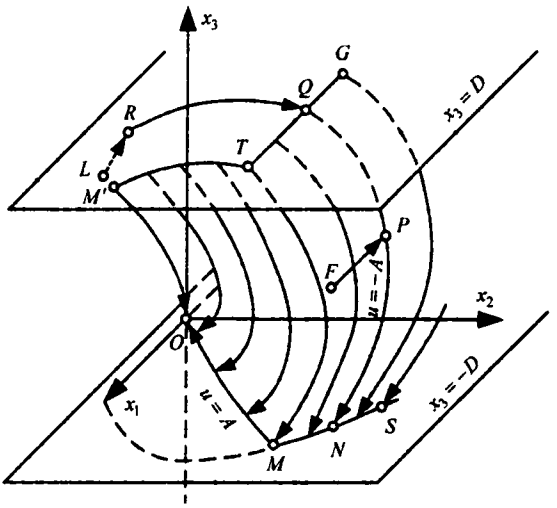


Рис. П.1.3. К задаче синтеза оптимального управления при ограничениях на ускорение

В соответствии с уравнениями (П.1.113) вспомогательные функции $\psi_3(\tau)$ и $\psi_1(\tau)$ определяются в открытом ядре области B уравнениями

$$\begin{aligned}\psi_3(\tau)&=\psi_1^0K(\tau)+\psi_2^0K'(\tau)+\psi_3^0K''(\tau),\\\psi_1(\tau)&=-\psi_1^0K^*(\tau)-a_3\psi_2^0K(\tau)-a_3\psi_3^0K'(\tau),\end{aligned}\qquad(\text{П.1.120})$$

где

$$\psi_i^0=\psi_i(\tau=0),\ \ i=1,2,3,$$

$$K(\tau)=L^{-1}\left|\frac{1}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}\right|,$$

$$K^*(\tau)=L^{-1}\left|\frac{-s^2-a_1s-a_2}{s^3+a_1s^2+a_2s+a_3}\right|,$$

L^{-1} — оператор обратного преобразования Лапласа. На границе области B $\left(\tau_1^* \le \tau < \tau_1^{**}\right)$

$$\psi_0(\tau) = \psi_0\left(\tau_1^*\right),\ \ \psi_1(\tau) = \psi_1\left(\tau_1^*\right),$$
$$\psi_2(\tau) = \psi_1\left(\tau_1^*\right)\left(\tau - \tau_1^*\right) + \psi_2\left(\tau_1^*\right).$$

Далее, в интервале $\tau_1^{**} < \tau \le \tau_2^*$ (точка M соответствует τ_1^*, точка N — τ_1^{**}, точка Q — τ_2^*)

$$\psi_3(\tau) = \psi_1\left(\tau_1^*\right)K\left(\tau - \tau_1^{**}\right) + \left[\psi_1\left(\tau_1^*\right)\left(\tau_1^{**} - \tau_1^*\right) + \psi_2\left(\tau_1^*\right)\right]\times$$
$$\times K'\left(\tau - \tau_1^{**}\right) + \psi_3\left(\tau_1^*\right)K''\left(\tau - \tau_1^{**}\right), \qquad (\text{П.1.121})$$

или

$$\psi_3\left(\tau^0\right) = \psi_1{}^0K\left(\tau^0\right) + \psi_2{}^0K'\left(\tau^0\right) + \psi_3{}^0K''\left(\tau^0\right) +$$
$$+\left[-\psi_1{}^0K^*\left(\tau_1^*\right) - a_3\psi_2{}^0K\left(\tau_1^*\right) - a_3\psi_3{}^0K'\left(\tau_1^*\right)\right]\left(\tau_1^{**} - \tau_1^*\right)K'\left(\tau^0 - \tau_1^*\right), \qquad (\text{П.1.122})$$

здесь τ^0 — время «свободного» движения, т.е. время, отсчитываемое только при движении фазовой точки в открытом ядре области B.

Для любого $\tau_1^{**} < \tau_* < \tau_2^*$ $\left(\tau_*^0 > \tau_1^{0*} = \tau_1^*\right)$ можно так выбрать вектор начальных значений $\psi^0 = \left(\psi_0^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0\right)$, что в интервале $0 \le \tau \le \tau_*$ участок траектории $OMNQ$ удовлетворяет всем условиям оптимальности, а в самой точке τ_*

$$\psi_3\left(\tau_*\right) = 0,$$

т.е. соответствующая точка $\mathbf{x}\left(\tau_*\right)$ принадлежит поверхности переключения. Указанные числа ψ_1^0, ψ_2^0, ψ_3^0 с точностью до постоянного множителя найдутся из системы линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} \psi_3\left(\tau_1^*\right) = \psi_1^0K\left(\tau_1^*\right) + \psi_2^0K'\left(\tau_1^*\right) + \psi_3^0K''\left(\tau_1^*\right) = 0, \\ \psi_3\left(\tau_*^0\right) = \psi_1^0K\left(\tau_1^0\right) + \psi_2^0K'\left(\tau_1^0\right) + \psi_3^0K''\left(\tau_1^0\right) + \left[-\psi_1^0K^*\left(\tau_1^*\right) - \right. \\ \left. - a_3\psi_2^0K\left(\tau_1^*\right) - a_3\psi_3^0K'\left(\tau_1^*\right)\right]\left(\tau_1^{**} - \tau_1^*\right)K'\left(\tau_*^0 - \tau_1^*\right) = 0. \end{cases} \qquad (\text{П.1.123})$$

Покажем, что выбранный в соответствии с (П.1.123) вектор $\psi^0 = \left(\psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0\right)$ определяет функцию $\psi_3(\tau)$, которая на отрезке $0 \le \tau \le \tau_*$ не имеет других нулей, кроме точек τ_1^*, τ_1^{**}, τ_*.

При $\tau_1^{**} < \tau < \tau_*$ $\psi_3(\tau)$ не может обращаться в нуль, так как в соответствии с леммой (см. п. 2.3) функция (П.1.121) может иметь не более двух нулей. Предположим, что $\psi_3(\tau)$ имеет нуль в интервале $0 < \tau < \tau_1^*$. Тогда, как следует из указанной леммы, функция

$$\psi_3^*(\tau) = \psi_1^0K(\tau) + \psi_2^0K'(\tau) + \psi_3^0K''(\tau) \qquad (\text{П.1.124})$$

не может иметь нулей при $\tau > \tau_1^*$. В равенстве (П.1.124) индекс «звездочка» введен, чтобы подчеркнуть различие между $\psi_3(\tau)$ и функцией (П.1.124). Это различие имеет

место при $\tau > \tau_1^*$. Если функции (П.1.124) соответствует управление $u(\tau)$, $0 \le \tau \le \tau_1^*$, переводящее фазовую точку из начала координат на границу

$$x_3 = -D,$$

то

$$\psi_3^*(\tau) < 0 \qquad \text{(П.1.125)}$$

при $\tau > \tau_1^*$.

Учитывая, что $\psi_3^*(\tau_1^*) = \psi_3(\tau_1^*) = 0$, уравнение (П.1.124) можно переписать в виде

$$\psi_3^*(\tau) = \psi_1(\tau_1^*) K(\tau - \tau_1^*) + \psi_2(\tau_1^*) K'(\tau - \tau_1^*). \qquad \text{(П.1.126)}$$

При $\tau > 0$ $K(\tau) > 0$, а для астатического объекта $(a_3 = 0)$ и $K'(\tau) > 0$. Для астатического объекта функция $K'(\tau)$ имеет вид, изображенный на рис. П.1.4. Отметим, что

$$K(0) = K'(0) = 0,$$
$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{K'(\tau)}{K(\tau)} = 0. \qquad \text{(П.1.127)}$$

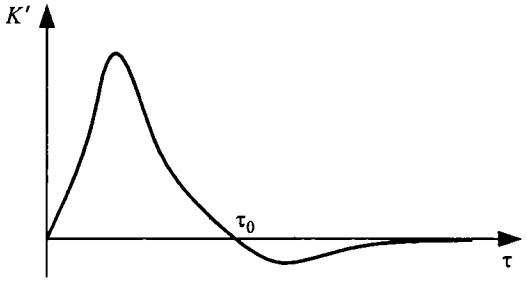


Рис. П.1.4. График функции $K'(\tau)$

Из (П.1.127) вытекает, что при малых значениях разности $\tau - \tau_1^{**}$ знак функции (П.1.127) определяется вторым слагаемым, а при больших — первым слагаемым. Неравенство (П.1.125) поэтому возможно только при

$$\psi_1(\tau_1^*) \le 0, \quad \psi_2(\tau_1^*) \le 0. \qquad \text{(П.1.128)}$$

Для статического объекта будем дополнительно предполагать, что время движения по траекториям NQ от одной ограничивающей плоскости до другой меньше τ_0, где τ_0 — отличное от нуля решение уравнения

$$K'(\tau) = 0.$$

Из (П.1.128) и (П.1.121) находим, что функция (П.1.122) не может обращаться в нуль в точке τ_*. Последнее противоречит уравнениям (П.1.123). Таким образом, функция $\psi_3(\tau)$ имеет нули только в точках τ_1^*, τ_1^{**}, τ_*.

Из совокупности решений (П.1.123) выберем решение, в котором $\psi_3^0 > 0$. Равенство (П.1.119) удовлетворим соответствующим подбором числа ψ_0^0. Из (П.1.116) и неравенства $\psi_3^0 > 0$ следует, что функция $\psi_3(\tau)$ убывает на отрезке $0 < \tau < \tau_*^1$. Поэтому

$$\psi_2(\tau_1^*) \le 0. \qquad \text{(П.1.129)}$$

Далее, из соотношений

$$\psi_3\left(\tau_1^{**}+0\right)=0,\ \ \psi_3\left(\tau_*\right)=0$$

вытекает, что

$$\psi_1\left(\tau_1^{**}\right)\geq 0,\ \ \psi_2\left(\tau_1^{**}\right)<0. \qquad (\text{П.1.130})$$

Из (П.1.129), принимая во внимание (П.1.130), (П.1.114), получим условие (П.1.115).

Таким образом, траектория NQ принадлежит поверхности переключения, причем проводимые выше рассуждения распространяются на всю совокупность траекторий, сходящих в обратном времени с линии MS. Далее, поверхности переключения принадлежит также траектория OM и примыкающая к OM (с управлением $u=-A$) совокупность траекторий (рис. П.1.3).

На рис. П.1.3 представлена лишь часть траекторий, образующих поверхность переключения. Остальные траектории являются симметричными (относительно начала координат) изображенным. $FPNMO$ и $LRQNMO$ — оптимальные траектории соответственно с одним и двумя заходами на границу.

В заключение отметим, что выше был рассмотрен наиболее интересный для приложений случай «жесткого» ограничения по ускорению, когда траектории, образующие поверхность переключения, имеют участок (MS), лежащий на границе области B. При менее «жестких» ограничениях, когда в силу (П.1.112) в точке M невозможно движение на границе области B, поверхностью переключения является изображенная на рис. П.1.3 совокупность траекторий, ограниченная линией OMT.

2. Ограничение на скорость движения. Рассмотрим теперь задачу синтеза оптимального по быстродействию управления объектом (П.1.109), когда вместо ограничения на ускорение задано ограничение на скорость движения, т.е. область допустимых значений фазового вектора $\mathbf{x}$ задается неравенством

$$|x_2|\leq D. \qquad (\text{П.1.131})$$

Неравенство (П.1.131) представляет собой ограничение второго порядка. Для отыскания оптимальных траекторий и оптимального управления воспользуемся достаточными условиями оптимальности, задаваемыми теоремой П.1.7. Отметим, что в соответствии с теоремой П.1.7 движение по границе области B определяется уравнением

$$\dot{x}_1=C,$$

а функция

$$\Phi(\mathbf{x})=x_3.$$

Как следует из (П.1.109), при движении по границе области B управление

$$u(t)=a_3x_1+a_2x_2. \qquad (\text{П.1.132})$$

В силу ограничения $|u|\leq A$ движение по границе области возможно только по отрезкам прямых

$$x_2=D,\ \ x_3=0,\ \ |a_2D+a_3x_1|\leq A, \qquad (\text{П.1.133})$$

$$x_2=-D,\ \ x_3=0,\ \ |a_3x_1-a_2D|\leq A. \qquad (\text{П.1.134})$$

Ниже в соответствии с условиями теоремы П.1.7 вместо допустимых отрезков рассмотрим интервалы, которые получаются из (П.1.133) и (П.1.135) при замене нестрогих неравенств на строгие.

В соответствии с теоремой П.1.7 определим функцию Гамильтона при движении по границе области B равенством

$$H\left(\hat{\psi},\hat{\mathbf{x}},c\right)=\psi_0+\psi_1c, \qquad (\text{П.1.135})$$

где вспомогательный вектор $\hat{\psi}=\left(\psi_0,\psi_1\right)$ определяется из уравнений

$$\frac{d\psi_0}{dt}=0,\quad \frac{d\psi_1}{dt}=0. \tag{П.1.136}$$

Из условия максимума функции (П.1.135) находим

$$c\cdot\operatorname{sign}\psi_1\geq 0. \tag{П.1.137}$$

Как и выше, синтез оптимального управления будем проводить с использованием обратного времени τ. Выпишем условия скачка:

$$\begin{aligned}&\psi_0\left(\tau^*+0\right)=\psi_0\left(\tau^*-0\right),\ \psi_1\left(\tau^*+0\right)=\psi_1\left(\tau^*-0\right),\\&\psi_2\left(\tau^*-0\right)=\mu_2,\ \psi_3\left(\tau^*-0\right)=\mu_3;\end{aligned} \tag{П.1.138}$$

$$\begin{aligned}&\psi_0\left(\tau^{**}+0\right)=\psi_0\left(\tau^{**}-0\right),\ \psi_1\left(\tau^{**}+0\right)=\psi_1\left(\tau^{**}-0\right),\\&\psi_2\left(\tau^{**}+0\right)=\mu_0,\ \psi_3\left(\tau^{**}+0\right)=\mu_1;\end{aligned} \tag{П.1.139}$$

$$\begin{aligned}&\psi_0\left(\tau^*+0\right)=\psi_0\left(\tau^*-0\right),\ \psi_1\left(\tau^*+0\right)=\psi_1\left(\tau^*-0\right),\\&\psi_2\left(\tau^*+0\right)=\psi_2\left(\tau^*-0\right)+\mu_0,\ \psi_3\left(\tau^*+0\right)=\psi_3\left(\tau^*-0\right)+\mu_1;\\&\mu_0\operatorname{sign}c\leq 0,\ \mu_1\operatorname{sign}c\geq 0.\end{aligned} \tag{П.1.140}$$

Соотношения (П.1.138) соответствуют точке выхода на ограничение (в обратном времени τ), соотношения (П.1.139) — точке схода, а соотношения (П.1.140) — точке отражения.

Пусть τ^* — точка выхода на ограничение. Из уравнения

$$H\left(\psi\left(\tau^*-0\right),\mathbf{x}\left(\tau^*\right),u\left(\tau^*-0\right)\right)=H\left(\hat{\psi}\left(\tau^*+0\right),\hat{\mathbf{x}}\left(\tau^*\right),c\right),$$

принимая во внимание (П.1.138), найдем

$$\psi_3\left(\tau^*-0\right)=\mu_3=0. \tag{П.1.141}$$

Аналогичным образом можно показать, что в точке схода τ^{**}

$$\psi_3\left(\tau^{**}+0\right)=\mu_1=0. \tag{П.1.142}$$

Если τ^* — точка отражения второго порядка, то из уравнения

$$H\left(\psi\left(\tau^*-0\right),\mathbf{x}\left(\tau^*\right),u\left(\tau^*-0\right)\right)=H\left(\psi\left(\tau^*+0\right),\mathbf{x}\left(\tau^*\right),u\left(\tau^*+0\right)\right)$$

и соотношения (П.1.140) следует равенство

$$\mu_1\left.\frac{d^2g\left(\mathbf{x}(\tau)\right)}{d\tau^2}\right|_{\tau=\tau^*+0}+\psi_3\left(\tau^*-0\right)\left(u\left(\tau^*+0\right)-u\left(\tau^*-0\right)\right)=0. \tag{П.1.143}$$

По определению точки отражения

$$\left.\frac{d^2g\left(\mathbf{x}(\tau)\right)}{d\tau^2}\right|_{\tau=\tau^*+0}\operatorname{sign}c\leq 0.$$

Из равенства (П.1.140) находим

$$\mu_1\left.\frac{d^2g\left(\mathbf{x}(\tau)\right)}{d\tau^2}\right|_{\tau=\tau^*+0}\leq 0.$$

Далее, из условия максимума функции $H\left(\psi,\mathbf{x},u\right)$ следует, что

$$\psi_3\left(\tau^*-0\right)\left(u\left(\tau^*+0\right)-u\left(\tau^*-0\right)\right)\leq 0.$$

Таким образом, каждое слагаемое, стоящее в левой части равенства (П.1.143), неположительно и, следовательно,

$$\mu_1 \frac{d^2 g(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=\tau^*+0} = 0, \qquad (П.1.144)$$

$$\psi_3(\tau^* - 0)\big(u(\tau^* + 0) - u(\tau^* - 0)\big) = 0.$$

Из (П.1.144) и (П.1.89) вытекает, что

$$\mu_1 = 0.$$

Соотношения (П.1.110), (П.1.119), (П.1.132), (П.1.137)–(П.1.142), (П.1.145) образуют полную систему достаточных условий оптимальности.

Отметим, что в соответствии с (П.1.132) и условиями регулярности

$$|u(\tau^* + 0)| = |a_3 x_1(\tau^*) + a_2 x_2(\tau^*)| < A,$$

$$|u(\tau^{**} - 0)| = |a_3 x_1(\tau^{**}) + a_2 x_2(\tau^{**})| < A.$$

Поскольку

$$\operatorname{sign} c \frac{d^2 g(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=\tau^{**}+0} < 0, \quad \operatorname{sign} c \frac{d^2 g(\mathbf{x}(\tau))}{d\tau^2}\bigg|_{\tau=\tau^*-0} < 0, \qquad (П.1.145)$$

то из (П.1.110) и (П.1.109) получаем равенство

$$u(\tau^* - 0) = u(\tau^{**} + 0) = -A \operatorname{sign} c. \qquad (П.1.146)$$

Из (П.1.146) следует, что при переходе фазовой точки с одной ограничивающей плоскости на другую оптимальное управление $u(\tau)$ должно иметь хотя бы одно переключение. Из (П.1.141) и (П.1.142) вытекает тогда, что первая из функций (П.1.120) должна иметь не менее трех нулей. Последнее невозможно, так как в соответствии с леммой (п. 2.3) указанная функция может иметь не более двух нулей. Таким образом, оптимальная траектория $\mathbf{x}(\tau)$ может иметь только один участок, лежащий на границе области B.

Покажем, что изображенная на рис. П.1.5 траектория $OMNPL$ принадлежит поверхности переключения. Для этого достаточно показать, что для любого τ_*, $\tau_1^{**} < \tau_* < \tau_2^*$, можно так выбрать вектор начальных значений $\boldsymbol{\psi}^0 = (\psi_0^0, \psi_1^0, \psi_2^0, \psi_3^0)$ и число μ_0, что в интервале $0 \le \tau \le \tau_*$ выполняются условия оптимальности (П.1.110), (П.1.119), (П.1.137)–(П.1.142), а в самой точке τ_*

$$\psi_3(\tau_*) = 0. \qquad (П.1.147)$$

Для статического объекта будем по-прежнему предполагать, что время движения фазовой точки по траектории PL от одной ограничивающей плоскости до другой меньше τ_0.

Указанный выше вектор $\boldsymbol{\psi}^0$ с точностью до постоянного множителя найдется из системы уравнений

$$\begin{cases} \psi_3(\tau_1) = \psi_1^0 K(\tau_1) + \psi_2^0 K'(\tau_1) + \psi_3^0 K''(\tau_1) = 0, \\ \psi_3(\tau_1^*) = \psi_1^0 K(\tau_1^*) + \psi_2^0 K'(\tau_1^*) + \psi_3^0 K''(\tau_1^*) = 0, \\ H(\boldsymbol{\psi}(0), \mathbf{x}(0), u(0)) = 0, \end{cases} \qquad (П.1.148)$$

где τ_1 — момент первого переключения (соответствует точке M). При $\tau > \tau_1^{**}$ функция $\psi_3(\tau)$ определяется равенством

$$\psi_3(\tau) = \psi_1\left(\tau_1^*\right) K\left(\tau - \tau_1^{**}\right) + \mu_0 K'\left(\tau - \tau_1^{**}\right).$$

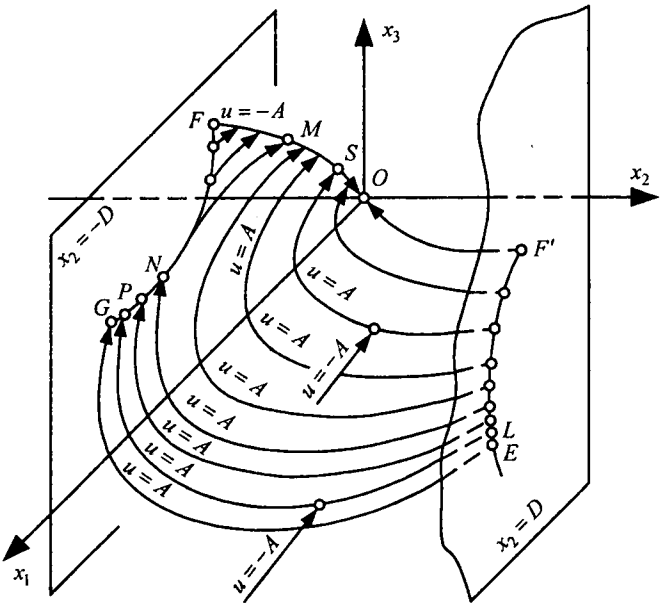


Рис. П.1.5. Графики траекторий

Число μ_0 выберем таким образом, чтобы обеспечить выполнение уравнения (П.1.147), т.е. положим

$$\mu_0 = -\psi_1\left(\tau_1^*\right)\frac{K\left(\tau_* - \tau_1^{**}\right)}{K'\left(\tau_* - \tau_1^{**}\right)}. \qquad \text{(П.1.149)}$$

Из соотношений

$$H\left(\psi\left(\tau_1^*\right), \mathbf{x}\left(\tau_1^*\right), u\left(\tau_1^*\right)\right) = \psi_0 + \psi_1\left(\tau_1^*\right) x_2\left(\tau_1^*\right) = 0, \ \psi_0(\tau) < 0$$

и уравнений (П.1.136) вытекает выполнение неравенства (П.1.137), выполнение условий (П.1.110), (П.1.119), (П.1.141), (П.1.142) следует из уравнений (П.1.148) и (П.1.149).

Таким образом, доказано, что траектория PL (как и вообще любая из сходящих в обратном времени с прямой NG траекторий) принадлежит поверхности переключения. Далее, изображенная на рис. П.1.5 совокупность траекторий, примыкающих с управлением $u = A$ к линии OMF и не имеющих граничного участка, также принадлежит поверхности переключения. Для завершения построения поверхности переключения необходимо к траекториям, изображенным на рис. П.1.5, присоединить симметричные (относительно начала координат).

Изображенная на рис. П.1.5 поверхность переключения была построена, исходя из достаточных условий оптимальности (теорема П.1.7). Однако тот же самый результат может быть получен, если воспользоваться необходимыми условиями оптимальности, задаваемыми теоремой П.1.7.

Далее, отметим, если ограничения на фазовый вектор имеют вид

$$|x_3 + b_2 x_2 + b_1 x_1| \le D$$

или

$$|x_2 + b_1 x_1| \le D,$$

то в первом случае поверхность переключения строится аналогично пункту 1, а во втором — по аналогии с пунктом 2.

3. Обобщение задачи синтеза. В заключение остановимся кратко на случае, когда одновременно заданы ограничения на скорость движения и ускорение, т.е. область B задается неравенствами

$$|x_3| \le D_1, \quad |x_2| \le D_2.$$

Для отыскания оптимального управления можно воспользоваться достаточными условиями оптимальности (теорема П.1.4) или необходимыми условиями оптимальности, задаваемыми теоремой П.1.7. На рис. П.1.6 изображены траектории, задающие поверхности переключения, причем рассмотрен наиболее интересный с теоретической и практической точек зрения случай, когда траектория OMN нарушает ограничение

$$|x_3| \le D. \qquad (\text{П.1.150})$$

Если траектория OMN не нарушает ограничение (П.1.150), то поверхность переключения образуется траекториями, изображенными на рис. П.1.5 и продолжаемыми до пересечения с границей области B. Правда, при этом линия MF может иметь граничный участок, и тогда точка F лежит на пересечении плоскостей

$$x_2 = -D_2, \quad x_3 = D_1.$$

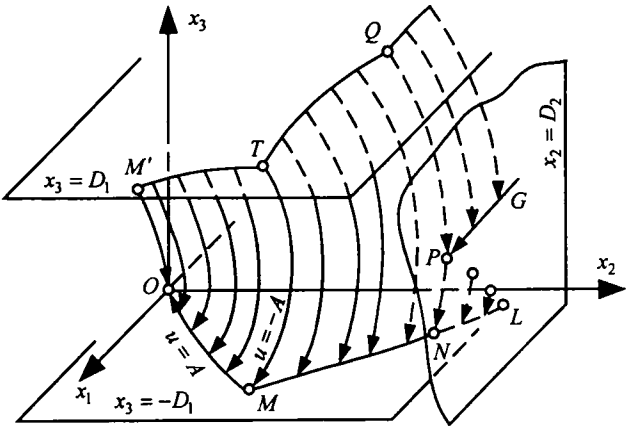


Рис. П.1.6. Графики траекторий

На рис. П.1.6 траектория $OMNPQ$ касается ограничивающей плоскости $x_2 = D_2$ в точке P. Отрезок PG представляет собой траекторию движения системы (П.1.109) по границе $x_2 = D_2$. Напомним, что движение по указанной границе возможно лишь в пределах отрезка (П.1.133).

Дополним исследование, проведенное выше, рассмотрением нерегулярных траекторий. В целях упрощения будем предполагать, что в уравнениях (П.1.109) $a_3 = 0$, т.е. рассматривается астатический объект.

Граница допустимой полосы (П.1.112) на плоскости $x_3 = -D$ задается прямыми

$$a_2 x_2 - a_1 D = A,$$
$$a_2 x_2 - a_1 D = -A,$$

на одной из которых управление достигает значения A, а на другой $-A$ (см. рис. П.1.7). На плоскости $x_3 = D$ допустимая полоса ограничена прямыми

$$a_2 x_2 + a_1 D = A,$$
$$a_2 x_2 + a_1 D = -A.$$

Условие регулярности (слабой регулярности) траектории $\mathbf{x}(t)$ для рассматриваемой задачи выливается в требование: на каждом граничном интервале управление $u(t)$ должно удовлетворять неравенству

$$|u(t)| < A,$$

т.е. траектория $\mathbf{x}(t)$ не должна содержать точек, принадлежащих границе полосы (П.1.112).

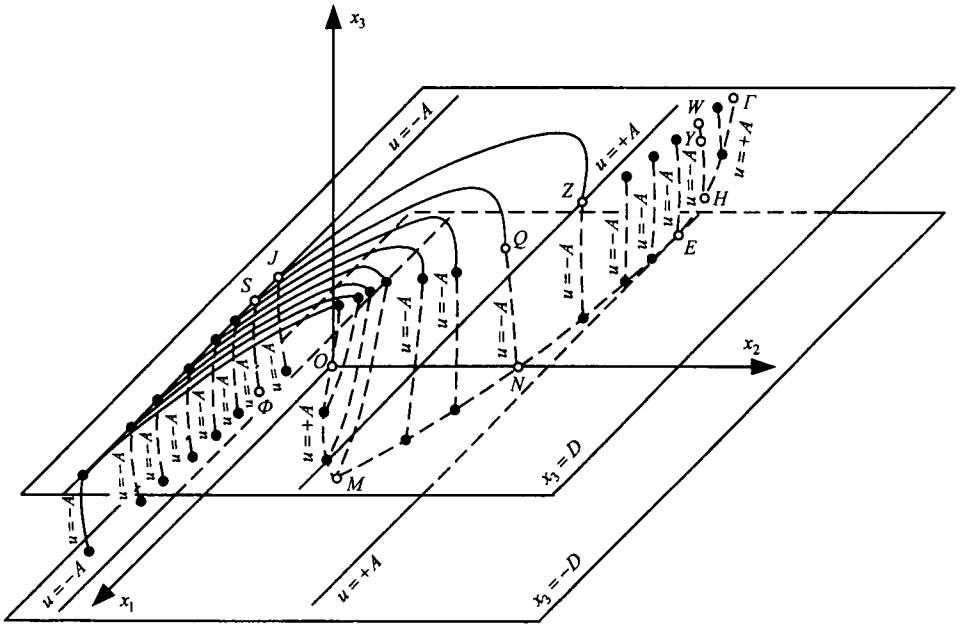


Рис. П.1.7. Графики траекторий

Так как движение системы (П.1.109) по границе полосы (П.1.112) невозможно, то траектория $\mathbf{x}(t)$ может иметь лишь некоторое конечное число точек, в которых не выполняются условия регулярности. Повторив рассуждения, приведенные в п. П.1.2, нетрудно показать, что для объекта (П.1.109) теорема П.1.5 сохраняет свою силу и в случае нерегулярных траекторий.

На рис. П.1.7 изображены траектории, задающие поверхность переключения, построенную с учетом нерегулярных траекторий. Включение в рассмотрение нерегулярных траекторий позволяет заметно расширить область оптимальной управляемости системы. Именно, построенная в пункте 1 поверхность переключения (см. рис. П.1.3)

дополняется совокупностью траекторий, примыкающих с управлением $u=-A$ к траектории $E\Gamma$ (рис. П.1.7), где точка E лежит на границе допустимой полосы (П.1.112) $(x_3=-D)$. Кроме того, поверхности переключения принадлежат также траектории, примыкающие с управлением $u=-A$ к отрезку JE' (точка E' симметрична относительно начала координат точке E). Отметим, что отрезок JE' и точка z лежат на границе допустимой полосы (П.1.112) $(x_3=D)$.

На рис. П.1.7 представлена лишь часть траекторий, образующих поверхность переключения. Остальные траектории являются симметричными (относительно начала координат) изображенным.

Мы рассмотрели синтез оптимального управления в предположении о том, что характеристическое уравнение (П.1.108) имеет только действительные корни. Нетрудно видеть, что полученные результаты справедливы также и в случае комплексных корней характеристического уравнения, если время движения по оптимальным траекториям от одной ограничивающей плоскости до другой не превышает $1/2\cdot T$, где T — период собственных колебаний системы (П.1.109). Пример синтеза оптимального по быстродействию управления при ограничениях на фазовые координаты для системы, состоящей из колебательного звена и интегратора, подробно рассмотрен в п. 4.3 [46].

В [66] выделен класс нелинейных объектов управления, названных неосциллирующими, для которых выполняется теорема об $(n-1)$ переключении оптимального управления. Анализ задаваемых теоремой П.1.3 необходимых условий оптимальности показывает, что для неосциллирующих объектов третьего порядка справедливы результаты, аналогичные изложенным в настоящем параграфе. Именно, если ограничения на фазовые координаты имеют первый порядок, то структура поверхности переключения, с помощью которой задается оптимальное управление при движении фазовой точки в открытом ядре области B, совпадает с изображенной на рис. П.1.7. В тех случаях, когда ограничения на фазовые координаты имеют второй порядок, структура оптимальной поверхности переключения задается рис. П.1.5.

Пусть, например, движение системы описывается уравнениями

$$\begin{aligned}&\dot{x}_1=f_1(x_1,x_2),\ \ \dot{x}_2=f_2(x_1,x_2,x_3),\\&\dot{x}_3=f_3(x_3,u)=h(x_3)\cdot u+g(x_3),\\&h(x_3)>0\end{aligned}\qquad\text{(П.1.151)}$$

и заданы ограничения

$$|u|\le A,\qquad\text{(П.1.152)}$$

$$|x_3|\le D.\qquad\text{(П.1.153)}$$

Будем предполагать, что функция f_i $(i=\overline{1,3})$ непрерывно дифференцируема по переменным x_1, x_2, x_3. В соответствии с [66] система (П.1.151) является неосциллирующей, если выполняются неравенства

$$\frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_3}\ge 0,\ \ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1}>0.$$

Для объекта (П.1.151) ограничение (П.1.153) имеет первый порядок, и, следовательно, в открытом ядре области B оптимальное управление задается с помощью поверхности переключения, изображенной на рис. П.1.7.

Заменим в соотношениях (П.1.151)–(П.1.153) неравенство (П.1.153) ограничением

$$|x_2| \le D,$$

которое имеет второй порядок. Тогда структура оптимальной поверхности переключения будет задаваться рис. П.1.5. Здесь следует только иметь в виду, что линия *GPN*, представляющая собой траекторию движения фазовой точки по границе области *B*, в отличие от (П.1.134) определяется уравнениями

$$x_2 = -D,\ f_2(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Далее, движение по границе области *B* происходит под воздействием управления $u(t)$, которое вычисляется из условия

$$P_j(\mathbf{x}(t), u(t)) = 0.$$

Если система имеет второй порядок, то синтез оптимального управления (см. [46]) существенно упрощается.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

При проектировании систем автоматического управления часто приходится решать задачу оптимизации: определить параметры $\mathbf{x}^*$ из условия минимума некоторого критерия качества функционирования системы $f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$, определяющего связь минимизируемого критерия $f(\mathbf{x})$ с управляющими параметрами $x_1,\ldots, x_n$.

Аналитический подход к решению этой задачи, основанный на использовании необходимых условий существования точек минимума и сводящийся к решению систем нелинейных уравнений

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0, \quad i = \overline{1,n},$$

не всегда приемлем. Он еще более усложняется, если на управляющие параметры $\mathbf{x}$ наложены дополнительные условия — ограничения.

Практика показала, что при оптимизации систем автоматического управления более целесообразно применять численные методы оптимизации.

П.2.1. БЕЗУСЛОВНЫЕ МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Ниже будут рассмотрены методы безусловной минимизации функции $f(\mathbf{x})$, понимая под этим поиск локального минимума. Если локальный минимум в каком-то случае не является и глобальным, то поиск глобального минимума и других локальных минимумов должен быть продолжен, выбрав другие начальные точки итерационных процессов.

Как правило, изложенные алгоритмы ориентированы для отыскания точек минимума положительно определенной квадратичной формы n-го порядка. Для других видов функций оговариваются условия их применимости.

П.2.1.1. Метод, использующий только значения функции

Пусть задана функция качества $f(\mathbf{x})$. Ее производные могут быть разрывными либо вообще могут не вычисляться явно. Эта ситуация возможна, например, если значения функции $f(\mathbf{x})$ берутся из таблиц.

Здесь выделяют методы поиска и методы сопряженных направлений. В методах поиска в основном используются одномерные пробные шаги. Эффективность методов поиска возрастает с увеличением степени сепарабельности функции задачи. Например, задача минимизации функции $f(\mathbf{x}) = x_1^4 + 10000x_2^4$ методами поиска решается за два шага, несмотря на то, что линии уровня этой функции очень вытянуты (образуют овраг) и движение по любому направлению, не параллельному главной оси, весьма затруднено.

Методы сопряженных направлений обеспечивают достижение минимума положительно определенной квадратичной формы размерностью n за n^2 шагов. Направления $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{s}_j$ называются *сопряженными* относительно матрицы $\mathbf{G}$, если

$$\mathbf{s}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{s}_j = 0, \quad i \neq j.$$

В частности, покоординатный спуск является одним из методов сопряженных направлений. В этом методе отыскивается точка минимума последовательно по одной из координат, когда другим координатам заданы фиксированные значения. Для квадратичной функции порядка n этим методом можно достичь точки минимума за n итераций, если на одной итерации определяется точка минимума по одной координате.

Рассмотрим один из методов безусловной минимизации функций, использующий только значения функции. В этом методе используется аппроксимация матрицы вторых частных производных и градиента за $1/2 \cdot n(n+1)$ итераций. Для положительно определенной квадратичной формы этот метод является точным. Фактически здесь реализуется метод Ньютона.

Пусть $f(\mathbf{x})$ — квадратичная форма, $\mathbf{G}$ — ее матрица вторых частных производных $\nabla^2 f(\mathbf{x})$, $\nabla f(\mathbf{x})$ — градиент функции $f(\mathbf{x})$, $\boldsymbol{\sigma}_k = \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k$, тогда

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k) + \nabla^{\mathrm{T}} f^k \boldsymbol{\sigma}_k + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}_k. \qquad (\text{П.2.1})$$

Предположим, что для перехода от $\mathbf{x}_k$ к $\mathbf{x}_{k+1}$ оптимизация ведется по направлению $\boldsymbol{\sigma}_k$, т.е.

$$\nabla^{\mathrm{T}} f^{k+1} \boldsymbol{\sigma}_k = 0. \qquad (\text{П.2.2})$$

Таким образом,

$$f(\mathbf{x}_k) = f(\mathbf{x}_{k+1}) + \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}_k. \qquad (\text{П.2.3})$$

В силу (П.2.1) и (П.2.3) имеем

$$\nabla^{\mathrm{T}} f^k \boldsymbol{\sigma}_k = -\boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}_k$$

или

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = f(\mathbf{x}_k) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{G} \boldsymbol{\sigma}_k. \qquad (\text{П.2.4})$$

С помощью (П.2.4) можно получить диагональные элементы матрицы $\mathbf{G}$, считая первые n направляющих векторов равными [1, 0,..., 0],..., [0, 0,..., 1]. Пусть $\mathbf{x}_0$ служит начальной точкой, а векторы $\mathbf{s}_{i-1}$ при $i = \overline{1,n}$ имеют единицу на i-ом месте и нули на остальных местах. Тогда $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda_i \mathbf{s}_i$, где число λ_i выбирается так, чтобы минимизировать $f(\mathbf{x})$ по лучу $\mathbf{s}_{i-1}$, выходящему из $\mathbf{x}_{i-1}$; значения λ_i могут иметь любой знак. Диагональные элементы вычисляются по формуле

$$g_{i+1,i+1} = \frac{-2\left(f^{i+1} - f^i\right)}{\left(\lambda_i\right)^2}; \quad i = \overline{0,n-1}. \qquad (\text{П.2.5})$$

Для вычисления остальных элементов матрицы $\mathbf{G}$ поступают следующим образом. Пусть $\mathbf{x}_{k_0} = \mathbf{x}_n$ (значение $\mathbf{x}_n$ получено после n шагов, проделанных для вычисления диагональных элементов). Для $i = \overline{1,n}$ и $j = \overline{i+1,n}$ положим

$$\mathbf{s}_{ij} = \left(\mathbf{e}_i + \mathbf{e}_j\right),$$

где $\mathbf{e}_i$ — единичный вектор с единицей на i-ом месте.

Выберем λ_{ij} так, чтобы функция $f(\mathbf{x})$ достигла минимума по направлению $\mathbf{s}_{ij}$, начиная с точки $\mathbf{x}_k$. Тогда

$$g_{ij} = \frac{2\left(-f^{k+1} + f^{k}\right) - \lambda_{ij}^2 g_{ii} - \lambda_{ij}^2 g_{jj}}{2\lambda_{ij}^2}. \qquad (\text{П.2.6})$$

Если квадратичная форма достигла минимума в выбранном направлении, то получим соответствующее $\lambda_{ij} = 0$. В этом случае можно сделать малый произвольный шаг и продолжать считать по приведенным формулам.

Для вычисления градиента заметим, что после элементарного шага в i-ом направлении $(\mathbf{s}_{i-1} = \mathbf{s}_i)$ имеем

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_n)}{\partial x_i} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{n} g_{ij}\left((\mathbf{x}_n)_j - (\mathbf{x}_i)_j\right),$$

если только $f(\mathbf{x})$ — квадратичная форма. Но

$$(\mathbf{x}_n)_j = (\mathbf{x}_i)_j, \quad j = \overline{1,i} \text{ и } (\mathbf{x}_i)_j = (\mathbf{x}_0)_j, \quad j = \overline{i+1,n}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_n)}{\partial x_i} = \sum_{j=i+1}^{n} g_{ij}\left((\mathbf{x}_n)_j - (\mathbf{x}_0)_j\right). \qquad (\text{П.2.7})$$

Градиент в точке $\mathbf{x}_n$ можно получить, если вычислены все элементы матрицы $\mathbf{G}$. Для любой другой точки $\mathbf{y}$

$$\nabla f(\mathbf{y}) = \nabla f(\mathbf{x}_n) + \mathbf{G}(\mathbf{y} - \mathbf{x}_n). \qquad (\text{П.2.8})$$

После того как матрица $\mathbf{G}$ вычислена, можно по формуле (П.2.8) получить $\nabla f(\mathbf{y})$ и вычислить направление $-\mathbf{G}^{-1}\nabla f(\mathbf{y})$. Точка $\mathbf{y} - \mathbf{G}^{-1}\nabla f(\mathbf{y})$ будет безусловным минимумом положительно определенной квадратичной формы.

Пример П.2.1. Пусть

$$f(\mathbf{x}) = [1 \quad 1]\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \to \min.$$

Положим $\mathbf{x}_0 = [0 \quad 0]$, тогда $f(0) = 0$.

Пусть $\mathbf{s}_0 = [1 \quad 0]$, отсюда $\lambda_0 = -\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\sigma}_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$, $f^1 = -\frac{1}{4}$.

По формуле (П.2.5) $g_{11} = 2$.

Возьмем $\mathbf{s}_1 = [0 \quad 1]$. Тогда $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $f^2 = -\frac{3}{8}$.

Вычисляем $g_{22} = 1$.

Возьмем $\mathbf{s}_2 = [1 \quad 1]$. Тогда $\lambda_3 = \frac{1}{10}$, $\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}$, $f^3 = -\frac{2}{5}$.

По формуле (П.2.6) $g_{12} = -1$.

Для вычисления градиента ∇f^2 воспользуемся формулой (П.2.7):

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_2)}{\partial x_1} = g_{12}\left((\mathbf{x}_2)_2 - (\mathbf{x}_0)_2\right) = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2} + 0\right) = -\frac{1}{2}, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x}_2)}{\partial x_2} = 0.$$

По формуле (П.2.8)

$$\nabla f^3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\left\{\begin{bmatrix} -2/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix} -1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}.$$

Это значение точное. Теперь получим искомый безусловный минимум

$$\mathbf{x}_3 - \mathbf{G}^{-1}\nabla f^3 = \begin{bmatrix} -2/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

П.2.1.2. Методы, использующие первые производные

Методы минимизации функции $f(\mathbf{x})$, использующие первые производные, базируются на учете в разложении функции $f(\mathbf{x})$ в ряд Тейлора только линейных членов. Поэтому эти методы иногда называют линейными методами.

Градиентный метод

Старейшим численным методом безусловной минимизации функций является градиентный метод, алгоритм которого имеет вид

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda_i \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}}, \quad i = 0,1,2,\ldots, \tag{П.2.9}$$

где $\mathbf{x}_0$ — начальное приближение; λ_i — значение шага на i-ой итерации; $\frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}} \equiv \nabla f(\mathbf{x}_i)$ — градиент функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_i$.

Очередное приближение $\mathbf{x}_{i+1}$ получается из предыдущего $\mathbf{x}_i$ путем движения в направлении антиградиента (в направлении наиболее быстрого убывания функции $f(\mathbf{x})$ в окрестности точки $\mathbf{x}_i$).

Наиболее широко распространены две модификации градиентного метода:

1. Простой градиентный метод, где размер шага λ остается постоянным или на протяжении всей итерационной процедуры изменяется через какое-то число итераций.
2. Метод наискорейшего спуска, в котором на каждой итерации размер шага выбирается из условия минимума функции в направлении антиградиента, т.е. λ_i выбирается из условия

$$f\left(\mathbf{x}_i - \lambda_i \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}}\right) = \min_{\lambda>0} f\left(\mathbf{x}_i - \lambda_i \frac{\partial f(\mathbf{x}_i)}{\partial \mathbf{x}}\right), \quad i = 0,1,2,\ldots.$$

В этой процедуре соседние градиенты ортогональны, т.е.

$$\nabla^{\mathrm{T}} f(\mathbf{x}_{i+1}) \nabla f(\mathbf{x}_i) = 0 \text{ для всех } i.$$

Доказано, что всякая предельная точка $\bar{\mathbf{x}}$ последовательности $\{\mathbf{x}_i\}$ стационарна, $\nabla f(\bar{\mathbf{x}}) = 0$.

Выбор шага λ_i может проводиться и другими методами, в частности методом дробления. Если $\mathbf{s}_k$ — направление убывания значений функции $f(\mathbf{x})$, то дробление шага осуществляется следующим образом.

Выбираются некоторые константы $\beta > 0$, $0 < \alpha < 1$ (часто $\alpha = 1/2$). Для коэффициента $\lambda = \beta$ проверяется условие

$$f(\mathbf{x}_k + \lambda \mathbf{s}_k) < f(\mathbf{x}_k).$$

Если оно выполнено, то полагают $\lambda_k = \beta$. Если нет, производится дробление шага, т.е. принимается $\lambda = \alpha\beta$, и вновь проверяется выполнение приведенного условия. Процесс дробления продолжается до тех пор, пока приведенное условие не будет выполняться. Этот процесс не может быть бесконечным, поскольку $\mathbf{s}_k$ — направление убывания значений функции $f(\mathbf{x})$.

Если проверяемое в процессе дробления шага условие оказывается выполненным на первом шаге при значении $\lambda = \beta$, то иногда бывает полезно увеличить шаг, поло-

жив $\lambda = \mu\beta$, где $\mu > 1$. Может оказаться, что умножение на μ следует повторить несколько раз. Последнее значение λ, при котором произошло уменьшение значения функции $f(\mathbf{x})$, и берется за λ_k.

Градиентный метод имеет следующие недостатки, затрудняющие его применение в практической деятельности:

1. При минимизации положительно определенной квадратичной формы этот метод, вообще говоря, бесконечен.
2. Каждая итерация выполняется независимо от других, т.е. информация не накапливается и не используется для увеличения скорости сходимости.
3. Скорость сходимости в сильной степени зависит от вида функции $f(\mathbf{x})$. Если отношение наибольшего собственного значения матрицы $\mathbf{G}$ вторых частных производных функции к наименьшему (коэффициент обусловленности матрицы $\mathbf{G}$) в некоторой точке минимума велико (овражная функция), то траектория наискорейшего спуска в окрестности такой точки состоит из коротких зигзагообразных кусков. Могут понадобиться тысячи таких же шажков, прежде чем будет достигнута удовлетворительная близость к предельной точке. Если же коэффициент обусловленности матрицы $\mathbf{G}$ близок к единице, то линии (поверхности) уровня функции $f(\mathbf{x})$ принимают вид окружности (сферы) и градиентный метод быстро сходится к точке минимума. Поэтому в ряде случаев целесообразно перейти в $f(\mathbf{x})$ к новой системе координат, чтобы поверхности (линии) уровня приняли вид близкий к сферам (окружностям).

Для увеличения скорости сходимости и для минимизации «овражных» функций применяется метод «тяжелого шажка»

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda_i \nabla f(\mathbf{x}_i) + \beta(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i-1}),$$

где коэффициент β подбирается в числовом эксперименте; $0 < \beta < 1$.

Метод сопряженных направлений

Направления $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{s}_j$ называются *сопряженными* относительно матрицы $\mathbf{G}$, если $\mathbf{s}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{s}_j = 0$, $i \neq j$.

Пусть функция $f(\mathbf{x})$ имеет вид

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{x}, \qquad (\text{П.2.10})$$

где $\mathbf{G}$ — положительно определенная матрица.

Пусть $\mathbf{s}_0, \ldots, \mathbf{s}_{n-1}$ — ненулевые векторы и числа λ_i таковы, что

$$f(\mathbf{x}_{k+1}) = f\left[\mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i\mathbf{s}_i + \lambda_k\mathbf{s}_k\right]$$

есть минимум функции $f(\mathbf{x})$ в направлении $\mathbf{s}_k$, если начинать движение с точки

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=0}^{k-1}\lambda_i\mathbf{s}_i, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Точка $\mathbf{x}_n$ будет безусловным минимумом функции $f(\mathbf{x})$ на всем пространстве, если $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{n-1}$ — сопряженные направления.

Теперь задача состоит в подборе подходящих сопряженных направлений. В таком случае положительно определенная квадратичная форма размерности n минимизируется за n или менее шагов.

Пусть $\mathbf{x}_0$ — начальная точка и $\mathbf{s}_0 = -\nabla f(\mathbf{x}_0)$. Обозначим через $\mathbf{x}_{i+1}$ точку минимума функции $f(\mathbf{x})$ на луче, выходящем из $\mathbf{x}_i$ в направлении $\mathbf{s}_i$.

Положим $\beta_i = \dfrac{\|\nabla f(\mathbf{x}_{i+1})\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_i)\|^2}$.

Новое направление $\mathbf{s}_{i+1}$ вычисляется по формуле

$$\mathbf{s}_{i+1} = -\nabla f(\mathbf{x}_{i+1}) + \beta_i \mathbf{s}_i.$$

Направления $\mathbf{s}_i$, $i = \overline{0, n-1}$, оказываются сопряженными, если функция $f(\mathbf{x})$ задана в форме (П.2.10). Этот метод получил название *метода сопряженных градиентов*.

Алгоритм метода сопряженных градиентов можно представить в виде

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda_i \mathbf{s}_{i+1}, \quad i = 0,1,2,\ldots,$$

$$\mathbf{s}_1 = \nabla f(\mathbf{x}_0), \quad \mathbf{s}_{i+1} = \nabla f(\mathbf{x}_0) + \beta_i \mathbf{s}_i,$$

$$\beta_i = \frac{\|\nabla f(\mathbf{x}_i)\|^2}{\|\nabla f(\mathbf{x}_{i-1})\|^2}.$$

Значение λ_i находится из условия

$$f(\mathbf{x}_i - \lambda_i \mathbf{s}_{i+1}) = \min_{\lambda} f(\mathbf{x}_i - \lambda \mathbf{s}_{i+1}).$$

Анализ сходимости показывает, что метод сопряженных градиентов имеет примерно такую же область сходимости, что и метод наискорейшего спуска, но скорость сходимости квадратичная. Метод сопряженных градиентов может быть применен к функциям произвольного вида. Но в данном случае рекомендуется производить обновление направления либо через $n+1$ шагов, либо подобрать время обновления направления в числовом эксперименте, т.е. при обновлении направления в точке $\mathbf{x}_k$ вновь выбирают $\mathbf{s}_{k+1} = \nabla f(\mathbf{x}_k)$.

Метод переменной метрики

Этот метод обеспечивает сходимость за n шагов для положительно определенной квадратичной формы порядка n.

Пусть $\mathbf{x}_0$ — начальная точка; $\mathbf{H}_0$ — начальное приближение для обратной матрицы вторых частных производных функции $f(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}_0$, произвольная симметричная положительно полуопределенная матрица. Обозначим через $\mathbf{s}_i$ ненулевой направляющий вектор i-ой итерации $\mathbf{s}_i = -\mathbf{H}_i \nabla f(\mathbf{x}_i)$, $\sigma_i = \lambda_i \mathbf{s}_i$, $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \sigma_i$, $\mathbf{s}_i$ — линейно независимый со всеми предыдущими векторами $\mathbf{s}_0, \ldots, \mathbf{s}_{i-1}$. Общее требование к векторам $\mathbf{s}_i$ такое:

$$\nabla^{\mathrm{T}} f^i \mathbf{s}_i < 0 \text{ для всех } i.$$

Здесь λ_i выбираются так, чтобы минимизировать $f(\mathbf{x})$ в направлении $\mathbf{s}_i$, начиная с точки $\mathbf{x}_i$. Так как $\mathbf{H}_i$ положительно определена, то λ_i должно быть больше нуля, если только $\mathbf{x}_i$ не является точкой минимума функции $f(\mathbf{x})$.

Пусть $\mathbf{y}_i = \nabla f(\mathbf{x}_{i+1}) - \nabla f(\mathbf{x}_i)$. Тогда очередное приближение обратной матрицы вторых частных производных функции $f(\mathbf{x})$ равно

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + \frac{\boldsymbol{\sigma}_i \boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{T}}}{\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{y}_i} - \frac{\mathbf{H}_i \mathbf{y}_i \mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_i}{\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i}.$$

Если матрица $\mathbf{H}_i$ положительно определена, то матрица $\mathbf{H}_{i+1}$ тоже положительно определена, а этим и обеспечивается убывание функции $f(\mathbf{x})$ на каждом шаге. Векторы $\boldsymbol{\sigma}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_1$,..., $\boldsymbol{\sigma}_{n-1}$ сопряжены относительно матрицы $\mathbf{A}$, если функция $f(\mathbf{x})$ задана в виде (П.2.10). В методе присутствует большая свобода в выборе $\mathbf{s}_i$ и $\mathbf{H}_0$.

Модифицированный метод переменной метрики

В модифицированном методе новое приближение для обратной матрицы вторых частных производных $f(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\mathbf{H}_{i+1} = \mathbf{H}_i + (\boldsymbol{\sigma}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i)\left[\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\sigma}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i)\right]^{-1} \left[\boldsymbol{\sigma}_i^{\mathrm{T}} - \mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} \mathbf{H}_i\right].$$

Если $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\sigma}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i) = 0$, то новое приближение для $\mathbf{H}_i$ не вычисляется, а только выбираются новые направления. Поэтому полагают, что $\mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\sigma}_i - \mathbf{H}_i \mathbf{y}_i) \neq 0$.

После n преобразований матрицы $\mathbf{H}$ берем направление $\mathbf{s}^n = -\mathbf{H}_n \nabla f^n$. Тогда $\mathbf{x}_{n+1}$ будет искомым безусловным минимумом положительно определенной квадратичной формы. В этом методе на каждой итерации добавляется только один член к текущей обратной матрице вторых частных производных функции $f(\mathbf{x})$.

Пример П.2.2. Рассмотрим квадратичную форму

$$f(\mathbf{x}) = [1 \quad 1]\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x} \to \min.$$

Пусть $\mathbf{x}_0 = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Тогда $\nabla f^0 = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$.

Берем $\mathbf{s}_0 = [-1 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, получим $\lambda_0 = \frac{1}{2}$, $\boldsymbol{\sigma}_0 = \left[-\frac{1}{2} \quad 0\right]^{\mathrm{T}}$,

$$\mathbf{x}_1 = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}} + \left[-\frac{1}{2} \quad 0\right]^{\mathrm{T}} = \left[-\frac{1}{2} \quad 0\right]^{\mathrm{T}}, \quad \nabla f^1 = \left[0 \quad \frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{y}_0 = \left[0 \quad \frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}} - [1 \quad 1]^{\mathrm{T}} = \left[-1 \quad -\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{H}_0 \mathbf{y}_0 = \left[-\frac{1}{2} \quad 0\right]^{\mathrm{T}}, \quad \mathbf{y}_0^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{\sigma}_0 - \mathbf{H}_0 \mathbf{y}_0) = \frac{1}{2},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 0 \end{bmatrix} 2[-1/2 \quad 0] = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть $\mathbf{s}_1 = [0 \quad -1]$. Тогда

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}, \quad \boldsymbol{\sigma}_1 = \left[0 \quad -\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{x}_2 = \left[-\frac{1}{2} \quad 0\right]^{\mathrm{T}} + \left[0 \quad -\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}} = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}}, \quad \nabla f^2 = \left[-\frac{1}{2} \quad 0\right]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{y}_1 = \left[-\frac{1}{2} \quad 0\right]^{\mathrm{T}} - \left[0 \quad \frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}} = \left[-\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{2}\right]^{\mathrm{T}};$$

$$\sigma_1 - \mathbf{H}_1\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}}(\sigma_1 - \mathbf{H}_1\mathbf{y}_1) = \frac{1}{8},$$

$$\mathbf{H}_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/4 \\ -1/2 \end{bmatrix} 8 \begin{bmatrix} 1/4 & -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{H}_2$ точно равна матрице, обратной к $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

На последнем шаге получаем безусловный минимум

$$\mathbf{x}_3 = \begin{bmatrix} -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Если известна какая-нибудь квадратная подматрица порядка $(n-r)$-матрицы вторых частных производных порядка n, то для минимизации положительно определенной квадратичной формы потребуется только $n+1$ шагов алгоритма переменной метрики (если выполняются предыдущие предположения).

Пусть, например, известны $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$; $i, j = \overline{1, n-r}$.

Обозначим эту квадратную подматрицу матрицы вторых частных производных через $\widetilde{\mathbf{G}}$. Тогда

$$\mathbf{G} \equiv \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{G}} & \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^{\mathrm{T}} & \mathbf{b} \end{bmatrix}.$$

Матрица $\mathbf{G}^{-1} = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\widetilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{a} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix}\left[-\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{G}}^{-1}\mathbf{a} + \mathbf{b}\right]^{-1}\begin{bmatrix} -\mathbf{a}^{\mathrm{T}}\widetilde{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix}$.

Второе слагаемое здесь есть матрица ранга r. Ее можно найти за r шагов. При известной $\widetilde{\mathbf{G}}^{-1}$ можно вычислить $\mathbf{G}^{-1}$.

Единственное отличие от прежней вычислительной процедуры состоит в том, что матрица $\mathbf{H}_0$ берется в виде

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} \widetilde{\mathbf{G}}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Переход от $\mathbf{H}_k$ к $\mathbf{H}_{k+1}$ выполняется как прежде, но теперь матрица $\mathbf{H}_k$ положительно полуопределена и не станет положительно определенной до тех пор, пока не будет полностью получена обратная матрица.

Достоинство этого алгоритма состоит в том, что с его помощью удается применить метод переменной метрики для задач большой размерности, структура которых такова, что можно вычислить вторые частные производные лишь для части переменных, а не для всех. Для задач большой размерности возможность провести минимизацию менее чем за n шагов существенна.

Пример П.2.3. Рассмотрим ту же функцию, что и в предыдущем примере:

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x} \to \min.$$

Допустим, что диагональный элемент g_{11} известен и равен 2.

Пусть $\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$. Тогда $\nabla f^0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Если $\mathbf{s}_0 = [-1 \quad -1]^T$, то

$$\lambda_0 = \frac{1}{5}, \quad \sigma_0 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{x}_1 = [1 \quad -2]^T + \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{11}{5} \end{bmatrix}^T, \quad \nabla f^1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T - [1 \quad 0]^T = \begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \end{bmatrix}^T, \quad \gamma_i = \mathbf{y}_i^T(\sigma_i - \mathbf{H}_i\mathbf{y}_i),$$

$$\sigma_0 - \mathbf{H}_0\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} -1/5 \\ -1/5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -3/5 \\ -2/5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \end{bmatrix}, \quad \gamma_0 = \frac{1}{50},$$

$$\mathbf{H}_1 = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/10 \\ -2/10 \end{bmatrix} 50 [1/10 \quad -2/10] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix},$$

т.е. после первой итерации получена искомая обратная матрица.

П.2.1.3. Использование вторых частных производных

Рассмотрим обобщенный метод Ньютона, использующий вторые частные производные минимизируемой функции $f(\mathbf{x})$, т.е. учитывающий дополнительную информацию о форме поверхности $f(\mathbf{x})$. Предположим, что матрица вторых частных производных $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \equiv \nabla^2 f(\mathbf{x})$ невырождена. Итерационный процесс отыскания точки минимума функции $f(\mathbf{x})$ имеет вид

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda_i \mathbf{G}^{-1}\mathbf{x}_i \nabla f(\mathbf{x}_i), \qquad (\text{П.2.11})$$

где $\lambda_i > 0$ и выбрано так, чтобы минимизировать $f(\mathbf{x})$ по направлению $-\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_i)\nabla f(\mathbf{x}_i)$, начиная с точки $\mathbf{x}_i$. Если $\lambda_i \equiv 1$, то получим «чистый» метод Ньютона. Идея метода состоит в том, что функция $f(\mathbf{x})$ заменяется двумя первыми членами ее разложения в ряд Тейлора, и в последующей минимизации полученной квадратичной формы.

Если $f(\mathbf{x})$ — положительно определенная квадратичная форма, то итерационный метод (П.2.11) с $\lambda_1 \equiv 1$ приводит в минимум за один шаг. Если $f(\mathbf{x})$ произвольная выпуклая функция, то итерационный процесс (П.2.11) гарантирует ее монотонное убывание от итерации к итерации.

Однако метод Ньютона имеет следующие недостатки:

1. Не всегда существует обратная матрица к $\mathbf{G}(\mathbf{x})$.
2. В невыпуклых функциях, т.е. когда $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ не является положительно определенной матрицей, не гарантировано монотонное убывание функции, если точка $\mathbf{x}_i$ не близка к точке минимума. Тогда можем получить $\lambda_i = 0$ и процесс остановится в точке $\mathbf{x}_i$.
3. Для некоторых функций с непрерывными вторыми частными производными бывает трудно вычислять аналитически производные.

В модифицированном методе Ньютона эти недостатки пытаются устранить. Направляющий вектор $\mathbf{s}_i$ вычисляется в соответствии с двумя правилами. В обоих случаях $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i$, причем λ_i выбрано наименьшим из всех $\lambda \geq 0$, для которых $\mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i$ есть локальный минимум функции $f(\mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}_i)$.

Эти правила следующие:

1. Если матрица $\mathbf{G}(\mathbf{x}_i)$ имеет отрицательное собственное значение, то $\mathbf{s}_i$ — такой вектор, для которого
$$\mathbf{s}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{G}(\mathbf{x}_i)\mathbf{s}_i < 0, \quad \mathbf{s}_i \nabla f^i \le 0. \tag{П.2.12}$$
2. Если все собственные значения матрицы $\mathbf{G}(\mathbf{x}_i)$ больше или равны нулю, то выбираем $\mathbf{s}$ так, чтобы выполнялось
$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_i)\mathbf{s} = 0, \quad \mathbf{s}^{\mathrm{T}}\nabla f^i < 0 \tag{П.2.13\textit{а}}$$
$$\text{либо } \mathbf{G}(\mathbf{x}_i)\mathbf{s} = -\nabla f^i. \tag{П.2.13\textit{б}}$$
Одновременно (П.2.13*а*) и (П.2.13*б*) выполняться не могут.

Единственным случаем, когда с помощью правил 1 и 2 нельзя указать ненулевой направляющий вектор $\mathbf{s}$, является случай, когда $\mathbf{G}(\mathbf{x}_i)$ — положительная полуопределенная матрица и $\nabla f^i = 0$, т.е. когда мы находимся в точке, удовлетворяющей необходимым условиям первого и второго порядка безусловного локального минимума функции $f(\mathbf{x})$.

Для невыпуклой функции несколько итераций по направлению вектора, удовлетворяющего (П.2.12), могут привести к значительному прогрессу в процессе минимизации.

Однако правила 1 и 2 не гарантируют, что полученная последовательность $\mathbf{x}_i$ будет иметь предельные точки, удовлетворяющие необходимым условиям минимума.

В общем случае алгоритм модифицированного метода Ньютона имеет следующий вид:

1. Приводим матрицу $\mathbf{G}(\mathbf{x}_i)$ к виду
$$\mathbf{G}(\mathbf{x}_i) = \mathbf{L}_i\mathbf{D}_i\mathbf{L}_i^{\mathrm{T}},$$
где $\mathbf{L}_i$ — невырожденная нижняя треугольная матрица, $\mathbf{D}_i$ — диагональная матрица.
2. Если все диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_i$ положительны, то берем
$$\mathbf{s}_i = -\mathbf{G}^{-1}(\mathbf{x}_i)\nabla f^i.$$
3. Если некоторые диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_i$ отрицательны, то решаем уравнение $\mathbf{L}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{p} = \mathbf{a}_i$, где $\mathbf{a}_i$ — вектор-столбец, j-я компонента которого равна 0, если j-й диагональный элемент матрицы $\mathbf{D}_i$ больше 0, и равна единице, если j-й диагональный элемент матрицы $\mathbf{D}_i$ не больше 0. Положим $\mathbf{s}_i = \mathbf{p}$ при $\mathbf{p}^{\mathrm{T}}\nabla f^i \le 0$ и $\mathbf{s}_i = -\mathbf{p}$ в остальных случаях. Отметим, что $\mathbf{s}_i$ удовлетворяет (П.2.12).
4. Если все диагональные элементы матрицы $\mathbf{D}_i$ неотрицательны и по крайней мере один из них равен нулю, выбираем $\mathbf{s}$ согласно (П.2.13*а*) или (П.2.13*б*).

Пример П.2.4. Минимизировать
$$f(\mathbf{x}) = 100\left(x_2 - x_1^2\right)^2 + (1-x_1)^2 + 90\left(x_4 - x_3^2\right)^2 + (1-x_3)^2 +$$
$$+10{,}1\left[(x_2-1)^2 + (x_4-1)^2\right] + 19{,}8(x_2-1)(x_4-1).$$

Аналитическое решение есть $\mathbf{x}^* = [1{,}0 \quad 1{,}0 \quad 1{,}0 \quad 1{,}0]^{\mathrm{T}}$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

Выберем $\mathbf{x}_0 = [-3 \quad -1 \quad -3 \quad -1]^{\mathrm{T}}$. Обычные метод наискорейшего спуска и метод Ньютона приводят к решению $\mathbf{x}_0 = [-1{,}07 \quad 1{,}116 \quad -0{,}86 \quad 0{,}76]^{\mathrm{T}}$ при $f(\mathbf{x}) = 7{,}89$. Это объясняется тем фактом, что в данной

задаче матрица вторых частных производных имеет отрицательное собственное значение. Для решения с использованием модифицированного метода Ньютона потребовалось 24 итерации; на 3 и 6 итерациях использовалось условие (П.2.12), в остальных случаях применялся метод Ньютона.

Пример П.2.5. Минимизировать

$$f(\mathbf{x}) = \left(x_1^4 - 3\right)^2 + x_2^4.$$

За начальную точку примем $\mathbf{x}_0 = \left[10^{-3} \quad 10^2\right]^{\mathrm{T}}$.

Метод наискорейшего спуска приводит в окрестность точки $[0 \quad 0]$.

В модифицированном методе Ньютона учитывается, что матрица

$$\mathbf{H}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -72 \cdot 10^{-6} & 0 \\ 0 & 12 \cdot 10^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет отрицательный диагональный элемент.

За счет выбора направляющего вектора движение идет перпендикулярно направлению x_2. Первая итерация приводит к точке $\mathbf{x}_1 = \left[\sqrt[4]{3} \quad 10\right]^{\mathrm{T}}$, причем матрица вторых частных производных положительно определена. После восьми итераций получено $\mathbf{x}_8 = \left[1{,}316 \quad 1{,}535 \cdot 10^{-6}\right]^{\mathrm{T}}$, $f(\mathbf{x}_8) = 8{,}08 \cdot 10^{-16}$. Точное решение есть $\mathbf{x}^* = \left[\sqrt[4]{3} \quad 0\right]^{\mathrm{T}}$, $f(\mathbf{x}^*) = 0$.

Сравнение обычных методов наискорейшего спуска, сопряженных градиентов, переменной метрики, обобщенного метода Ньютона показывает, что наиболее медленным является метод наискорейшего спуска, наиболее быстрым — метод Ньютона. Так в одном из примеров в процессе определения точки минимума функции обычного вида (не квадратичной формы) метод наискорейшего спуска не показал сходимости даже после 151 итерации, когда счет был прекращен; метод сопряженных градиентов сошелся за 40 итераций, метод переменной метрики за 28, метод Ньютона за 8. Объем вычислений на одну итерацию примерно одинаков для всех методов.

При минимизации «овражных» функций, когда велик коэффициент обусловленности для матрицы вторых производных минимизируемой функции, процесс минимизации останавливается на дне «оврага», не достигая точки минимума. Пусть это будет точка $\mathbf{A}_1$. Затем из новой точки, удаленной от начального нулевого приближения, начинается новый процесс поиска точки минимума. Он «остановится» в точке $\mathbf{A}_2$. По прямой $\mathbf{A}_1\mathbf{A}_2$ в сторону точки с меньшим значением функции $f(\mathbf{x})$ делается шаг, размер которого выбирается экспериментально, но больше шага градиентного метода. Из полученной точки делается спуск в точку $\mathbf{A}_3$. Затем движение идет по прямой $\mathbf{A}_2\mathbf{A}_3$ и т.д.

П.2.2. МЕТОДЫ УСЛОВНОЙ ОПТИМИЗИЦИИ (ЗАДАЧИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ)

В настоящее время трудно назвать область практической и научной деятельности, где бы не применялись методы математического программирования: планирование производства; системы автоматического управления, управление запасами полезных ископаемых и трудовыми ресурсами; планирование и размещение объектов; техническое обслуживание оборудования; планирование работ над проектами и календарное планирование; построение систем — вычислительных, информационных, городской сферы обслуживания, здравоохранения, электроэнергетических, военных, транспортных; организация туризма, спорта и развлечений и т.д. Поэтому наряду с термином *решение* в математическом программировании употребляются в этом же смысле термины *план*, *стратегия*, *управление*, *поведение*.

П.2.2.1. Общая запись задачи математического программирования и ее виды

Из приведенных примеров видно, что задача математического программирования должна содержать некую целевую функцию, оптимум которой следует определить, и систему равенств и неравенств, описывающих условия-ограничения задачи. Общая задача математического программирования состоит в определении вектора $\mathbf{x}^*$ с координатами $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*$, который является решением следующей задачи: оптимизировать

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{П.2.14}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \end{cases} \tag{П.2.15}$$

$$\begin{cases} h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ h_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases} \tag{П.2.16}$$

Используем понятие вектора как упорядоченной совокупности действительных чисел $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n]$ (в отличие от свободного вектора, известного в геометрии, — направленного отрезка, который можно переносить в пространстве параллельно его первоначальному положению). Тогда выражения (П.2.14)–(П.2.16) можно записать в более компактной форме: оптимизировать $f(\mathbf{x})$ при ограничениях

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = \overline{1, m},$$
$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = \overline{1, p}.$$

Текущие индексы i и j пробегают все целочисленные значения от 1 соответственно до m и p.

Общая задача математического программирования разбивается на задачи, названия которых определяются видом функций, которые необходимо оптимизировать и которые входят в условия-ограничения, типом переменных в задаче, алгоритмом решения. Если функции $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $h_j(\mathbf{x})$ в выражениях (П.2.14)–(П.2.16) *линейны*, то полученную задачу называют задачей *линейного программирования*.

Если хотя бы одна из функций $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $h_j(\mathbf{x})$ *нелинейна*, то (П.2.14)–(П.2.16) называют задачей *нелинейного программирования*. Многие задачи, в свою очередь, разбивают на подмножества. Так, если $f(\mathbf{x})$ является *квадратичной функцией*, а ограничения *линейны*, то получаем задачу *квадратичного программирования* (более точно, $f(\mathbf{x})$ должна быть квазиопределенной квадратичной формой).

В *сепарабельном программировании* целевая функция $f(\mathbf{x})$ представляет собой сумму функций, различных для каждой переменной. Условия-ограничения здесь могут быть как линейными, так и нелинейными, но все недиагональные элементы матрицы, состоящей из вторых частных производных любой функции задачи, равны нулю.

Если координаты искомого вектора являются только целыми числами, то получаем задачу *целочисленного программирования* (линейного или нелинейного).

П.2.2.2. Некоторые сведения об экстремуме функции, частных производных, градиенте и производной по направлению

Из курса математики хорошо известны простейшие задачи на отыскание точек *максимума или минимума функции* одной переменной. Функция $y = f(x)$, определенная в точке x_0, достигает максимума (минимума) в окрестности точки x_0, если для всех точек этой окрестности удовлетворяется неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

Максимум и минимум функции объединяют одним названием *экстремум*. Как правило, точка x_0 — внутренняя точка естественной области определения функции $f(x)$ и экстремум называют *внутренним*. Если существует производная $f'(x)$ в точке x_0, то функция $f(x)$ может иметь в точке x_0 внутренний экстремум лишь в том случае, когда при $x = x_0$ производная $f'(x) = 0$ (*необходимое условие экстремума*). Экстремум может быть и в тех точках x_0, где производная $f'(x_0)$ не существует. Но выполнение необходимого условия еще не означает, что в точке x_0 будет экстремум. Для того чтобы в точке x_0 был экстремум, производная $f(x)$ в окрестности точки x_0 при переходе через $x = x_0$ должна менять свой знак с плюса на минус в точке максимума и с минуса на плюс в точке минимума. Можно применить и другой признак: если в точке x_0 первая производная $f'(x_0) = 0$ и существует вторая производная $f''(x_0) \ne 0$, то в точке x_0 будет максимум при $f''(x_0) < 0$ и минимум при $f''(x_0) > 0$.

В общем случае, если существуют производные от $f(x)$ до n-го порядка включительно и если $f'(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$, а $f^n(x_0) \ne 0$, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 максимум при n четном и $f^n(x_0) < 0$ и минимум при n четном и $f^n(x_0) > 0$. Если n нечетно, то функция $f(x)$ в точке x_0 не имеет ни минимума, ни максимума, а имеет точку *перегиба*.

Дадим несколько определений, которые потребуются в дальнейшем.

Действительная функция $f(x)$, определенная при $x = x_0$, имеет в точке x_0 (*локальный*) *максимум или* (*локальный*) *минимум* $f(x_0)$, если существует такое положительное число δ, что при всех приращениях $\Delta x = x - x_0$, для которых выполняется неравенство $0 < |\Delta x| < \delta$ и существует значение $f(x_0 + \Delta x)$, приращение данной функции соответственно $\Delta f \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < 0$ или $\Delta f \equiv f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) > 0$.

Если в каждом из этих случаев выполняются нестрогие неравенства, то говорят, что функция $f(x_0)$ имеет в точке x_0 *нестрогий максимум* (*минимум*).

Локальный (*максимум*) *минимум* называют *внутренним* (*максимумом*) *минимумом* или *граничным* (*максимумом*) *минимумом*, если соответственно точка x_0 является внутренней или граничной точкой области определения функции $f(x)$.

В формулировке задачи должна быть точно указана область определения функции $f(x)$. Например, функция $f_1(x)=x$ при $-\infty < x < \infty$ не имеет максимума, а функция $f_2(x)=x$ при $x \le 1$ имеет при $x=1$ граничный максимум.

Если неравенства $f(x)<f(x_0)$ $\left(f(x)>f(x_0)\right)$ выполняются для любой точки x, принадлежащей области определения функции $f(x)$, то говорят о *глобальном максимуме* (*минимуме*) функции $f(x)$ в точке x_0.

Аналогичные определения справедливы *для функции многих переменных.*

Функцию $f(x)$, имеющую в данной точке $x=x_0$ производную, называют *дифференцируемой* в этой точке; функцию, имеющую производную во всех точках некоторого промежутка (a,b), называют *дифференцируемой* на этом промежутке.

Функцию многих переменных, имеющую полный дифференциал (в данной точке, области), называют *дифференцируемой* (в этой точке, области). *Необходимое условие* дифференцируемости функции многих переменных — наличие частных производных первого порядка (в точке, в области). *Достаточные условия* дифференцируемости функции многих переменных — существование и непрерывность всех частных производных первого порядка (в точке, в области).

Числовую функцию $f(\mathbf{x})$ одного векторного аргумента $\mathbf{x}=\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{bmatrix}$ вида

$$f(\mathbf{x})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j \equiv \sum_{i=1}^{n}a_{ij}x_i^2 + 2\cdot\sum_{1\le i<j\le n}a_{ij}x_ix_j,$$

где a_{ij} — элементы симметричной матрицы $\mathbf{A}=\left\|a_{ij}\right\|_{n\times n}$ размерности $n\times n$, называют *квадратичной формой* переменных.

Квадратичную форму $f(\mathbf{x})$ называют *положительно* (*отрицательно*) *определенной*, если для любого ненулевого вектора $\mathbf{x}$ выполняется неравенство $f(\mathbf{x})>0$ $\left(f(\mathbf{x})<0\right)$.

Такие формы объединяют общим названием — *знакоопределенные.* Если же имеется ненулевой вектор $\mathbf{x}$, для которого $f(\mathbf{x})=0$, форму называют *квазизнакоопределенной.*

Квадратичную форму называют *знакопеременной*, если существуют такие векторы $\mathbf{x}_1$ и $\mathbf{x}_2$, что $f(\mathbf{x}_1)>0$, $f(\mathbf{x}_2)<0$.

Для наглядного представления поведения функции $y=f(x)$ *строят график функции.* Если независимую переменную x (аргумент) и зависимую переменную y рассматривать как декартовы координаты на плоскости, то действительная функция $y=f(x)$ действительного переменного изобразится кривой — графиком функции y от x.

Для функции многих переменных $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ упорядоченному множеству значений независимых переменных $x_1, x_2,\dots, x_n$ ставят в соответствие значения переменного y. Множество значений $x_1, x_2,\dots, x_n$, для которых определено соотношение $y=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$, есть *область определения функции* $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$.

Графиком функции многих переменных является *поверхность* для функций двух переменных и *гиперповерхность* — для большего числа переменных. Чтобы предста-

вить функцию n переменных, вводятся понятия *линий* и *поверхностей уровня*. Это геометрическое место точек, в которых функция принимает одинаковое значение. Уравнение поверхности уровня имеет вид $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = C$. Давая константе C различные значения, получаем семейство поверхностей уровня, определяющих поведение функции. Линии уровня вводятся для функции двух переменных: $f(x_1, x_2) = C$. Семейство линий уровня дает возможность представить функцию двух переменных $y = f(x_1, x_2) = C$ на плоскости. Например, семейство линий уровня на географических картах дает представление и о морских глубинах, и о высоте горных хребтов.

Для характеристики скорости изменения функции многих переменных относительно одной из переменных, например x_i, при фиксированных значениях остальных независимых переменных вводится понятие *частных производных* $\partial f / \partial x_i$. Частная производная $\partial f / \partial x_i \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ может быть найдена посредством дифференцирования функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ по x_i, если остальные $n-1$ независимых переменных рассматривать как постоянные параметры.

Направление, в котором скорость возрастания функции многих переменных наибольшая, определяется вектором, называемым *градиентом*. Противоположное направление называют *антиградиентом*. Градиент скалярной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ есть *векторная функция* точки и определяется как

$$\operatorname{grad} f \equiv \nabla f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{x_1}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{x_2}\mathbf{j} + \ldots + \frac{\partial f}{x_n}\mathbf{k},$$

где ∇ — знак градиента (набла); $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы (орты), направленные по координатным осям: $\mathbf{i} = [1 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 0]$, $\mathbf{j} = [0 \ \ 1 \ \ \ldots \ \ 0]$, $\mathbf{k} = [0 \ \ 0 \ \ \ldots \ \ 1]$. Иногда применяется обозначение градиента в виде $\nabla_x f$; индекс x у оператора набла показывает переменные, по которым определяется градиент. Другими словами, градиент скалярной функции — это вектор, координатами которого являются частные производные заданной функции.

Скорость изменения скалярной функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в произвольном направлении, задаваемом единичным вектором $\mathbf{u} = \cos\alpha \cdot \mathbf{i} + \cos\beta \cdot \mathbf{j} + \ldots + \cos\gamma \cdot \mathbf{k}$ с направляющими косинусами $\cos\alpha$, $\cos\beta$,..., $\cos\gamma$, определяется *производной по направлению*, (действительное число)

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial x_2}\cos\beta + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\cos\gamma.$$

Производная по направлению с градиентом скалярной функции ∇f связана *скалярным произведением*: $\partial f / \partial \mathbf{u} = (\nabla f, \mathbf{u})$.

Скалярным произведением двух векторов $\mathbf{a} = [a_1 \ \ a_2 \ \ \ldots \ \ a_n]$, $\mathbf{b} = [b_1 \ \ b_2 \ \ \ldots \ \ b_n]$ называют действительное число, равное сумме произведений соответствующих координат векторов: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$, или произведению длин этих векторов на косинус угла между ними: $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\left(\widehat{\mathbf{a}.\mathbf{b}}\right)$. Градиент ∇f всегда ортогонален поверхности (линии) уровня функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Действительно,

$\partial f/\partial \mathbf{u} = |\nabla f| \cdot |\mathbf{u}| \cdot \cos\left(\widehat{\nabla f, \mathbf{u}}\right)$. Производная по направлению касательной к поверхности (линии) уровня $\partial f/\partial \mathbf{u}$ равна нулю, $|\nabla f| \neq 0$, $|u| \neq 0$. Поэтому

$$\cos\left(\widehat{\nabla f, \mathbf{u}}\right) = 0,$$

$$\left(\widehat{\nabla f, \mathbf{u}}\right) = \frac{\pi}{2}, \quad \nabla f \perp \mathbf{u}.$$

Нам потребуются понятия *линейной зависимости* и *независимости векторов*. Векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ называют *линейно зависимыми*, если найдутся такие действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, не все равные нулю, что линейная комбинация векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ равна нулю: $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. Если же это равенство выполняется только тогда, когда все числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ равны нулю, то векторы $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ называют *линейно независимыми*.

Из определения линейной зависимости векторов следует, что если векторы линейно зависимы, то один из них может быть представлен в виде линейной комбинации остальных, и, обратно, если один из векторов есть линейная комбинация остальных, то векторы линейно зависимы.

П.2.2.3. Особенности нахождения оптимальных решений в задачах математического программирования

В задачах математического программирования требуется найти так называемый условный экстремум (максимум или минимум) функции при наличии ограничений. Рассмотрим задачу математического программирования, в которой есть только ограничения в виде равенств. Пусть целевая функция задачи является функцией двух переменных: $z = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2)$. Ее аргументы связаны уравнением $\varphi(x_1, x_2) = 0$ (ограничения в виде неравенств отсутствуют). Если функции $z = f(x_1, x_2)$ поставить в соответствие некоторую поверхность, то в данной задаче необходимо найти следующие точки:

1) точки, принадлежащие линии пересечения поверхности $z = f(x_1, x_2)$ и цилиндра с образующей, параллельной оси OZ, и с направляющей $\varphi(x_1, x_2) = 0$;
2) точки, в которых функция $z = f(x_1, x_2)$ принимает экстремальные значения (рис. П.2.1).

Как видно из рис. П.2.1, точки условного экстремума A и B не совпадают с наибольшим или наименьшим значением функции $z = f(x_1, x_2)$ — с безусловным экстремумом функции $z = f(x_1, x_2)$. Если из уравнения связи $\varphi(x_1, x_2) = 0$ можно выразить в явном виде одну переменную через другую, например $x_2 = \psi(x_1)$, то $z = f(x_1, x_2) = f(x_1, \psi(x_1))$ становится функцией одной переменной x_1 и ее безусловный экстремум отыскивается традиционными методами (приравниваем первую производную от $f(x_1, \psi(x_1))$ по x_1 к нулю). Безусловный экстремум функции $f(x_1, \psi(x_1))$ является условным экстремумом для функции $f(x_1, x_2)$ при ограничении $\varphi(x_1, x_2) = 0$.

Однако выразить в явном виде из условий-ограничений необходимую часть переменных, как правило, не удается.

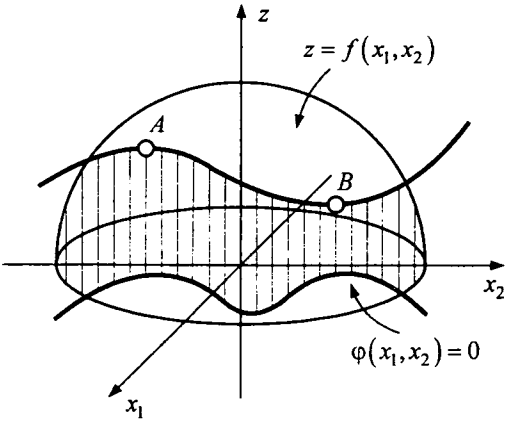


Рис. П.2.1. Геометрическая интерпретация метода Лагранжа

Лагранж предложил оригинальный метод нахождения условного экстремума функции. Метод носит его имя. Пусть требуется решить следующую задачу: минимизировать $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при ограничениях $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$, $j = \overline{1, p}$. По условию задачи составляется *функция Лагранжа*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Здесь λ_j — неизвестные постоянные множители, подлежащие определению (*множители Лагранжа*), т.е. требуется найти n неизвестных x_1, x_2,..., x_n и p множителей Лагранжа λ_1, λ_2,..., λ_p. Для рассматриваемого в начале параграфа примера

$$F(x_1, x_2) = f(x_1, x_2) + \lambda\varphi(x_1, x_2).$$

Точки, в которых возможен экстремум, находятся как решение системы алгебраических уравнений, полученной приравниванием нулю частных производных от функции Лагранжа по искомым переменным (n уравнений) и включением в эту систему p ограничений-равенств. Метод Лагранжа сводит задачу отыскания *условного экстремума функции* $f(\mathbf{x})$ к задаче отыскания *безусловного экстремума* функции $F(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$.

Ограничения типа неравенств еще более усложняют задачу. Дело в том, что ограничения-неравенства задают область допустимых значений переменных. Например, пусть требуется оптимизировать некоторую функцию $f(\mathbf{x})$ при ограничениях

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2^2 \geq 0;$$
$$g_2(\mathbf{x}) = 1 - x_1^2 - x_2^2 \geq 0.$$

Область допустимых значений переменных x_1 и x_2 в этой задаче есть пересечение области, лежащей «внутри» параболы $x_1 = x_2^2$, с кругом единичного радиуса, уравнение окружности которого имеет вид $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (рис. П.2.2).

Пересечение цилиндра, направляющей которого является граница полученной области D, с поверхностью $z = f(\mathbf{x})$ может давать самые разнообразные варианты. На рис. П.2.3 показаны поверхности, полученные в результате пересечения цилинд-

ра, направляющей которого служит граница области допустимых значений переменных x_1 и x_2, и поверхности, соответствующей целевой функции $z = f(x_1, x_2)$. На рис. П.2.3, *а* точка M безусловного экстремума функции $z = f(x_1, x_2)$ является и точкой условного экстремума задачи. На рис. П.2.3, *б* точка M является уже граничной и в ней целевая функция достигает своего наибольшего значения. На рис. П.2.3, *в* точка M не принадлежит области допустимых значений переменных, а целевая функция имеет равные наибольшие значения по линиям ALB и AKB (т.е. неясно, что же брать за решение задачи). Эти неоднозначные результаты получены даже в случае, когда поверхность целевой функции $z = f(\mathbf{x})$ достаточно проста и обладает единственным (глобальным) максимумом.

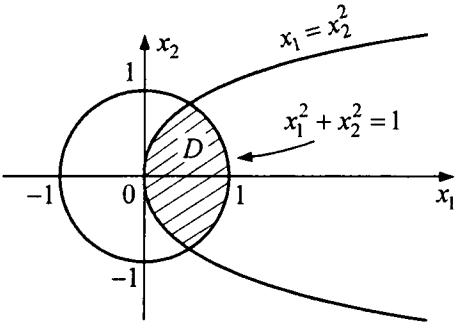


Рис. П.2.2. Область допустимых значений x_1 и x_2

Наиболее полные результаты в задачах математического программирования получены для *выпуклых* целевых функций, когда область допустимых значений является *выпуклым множеством*. Множество точек D называют *выпуклым*, если для любых точек M_1 и M_2, принадлежащих области D, отрезок M_1M_2 принадлежит множеству (области) D (рис. П.2.4, *а*). Другими словами, любая точка $\left[\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2\right]$ принадлежит области D для любого λ, $0 \le \lambda \le 1$, и для любых точек M_1 и M_2, принадлежащих области D. Причем пересечение конечного числа выпуклых множеств выпукло.

На рис. П.2.4, *б* показаны невыпуклые множества. Функцию $f(M)$ называют *выпуклой* на непустом выпуклом множестве D, если для любых двух точек M_1 и M_2, принадлежащих области D, и любого числа λ, $0 \le \lambda \le 1$, справедливо неравенство $f\left(\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2\right) \le \lambda f(M_1) + (1-\lambda) f(M_2)$.

Функцию $f(M)$ называют *строго выпуклой*, если для $0 < \lambda < 1$ и $M_1 \ne M_2$ выполняется строгое неравенство $f\left(\lambda M_1 + (1-\lambda)M_2\right) < \lambda f(M_1) + (1-\lambda) f(M_2)$.

Геометрически выпуклая функция лежит над своими касательными. Примером выпуклой функции является парабола.

Сумма выпуклых на множестве D функций есть также выпуклая на D функция.

Функцию $f(\mathbf{x})$ называют *вогнутой* на выпуклом множестве D, если функция $-f(\mathbf{x})$ выпукла на D.

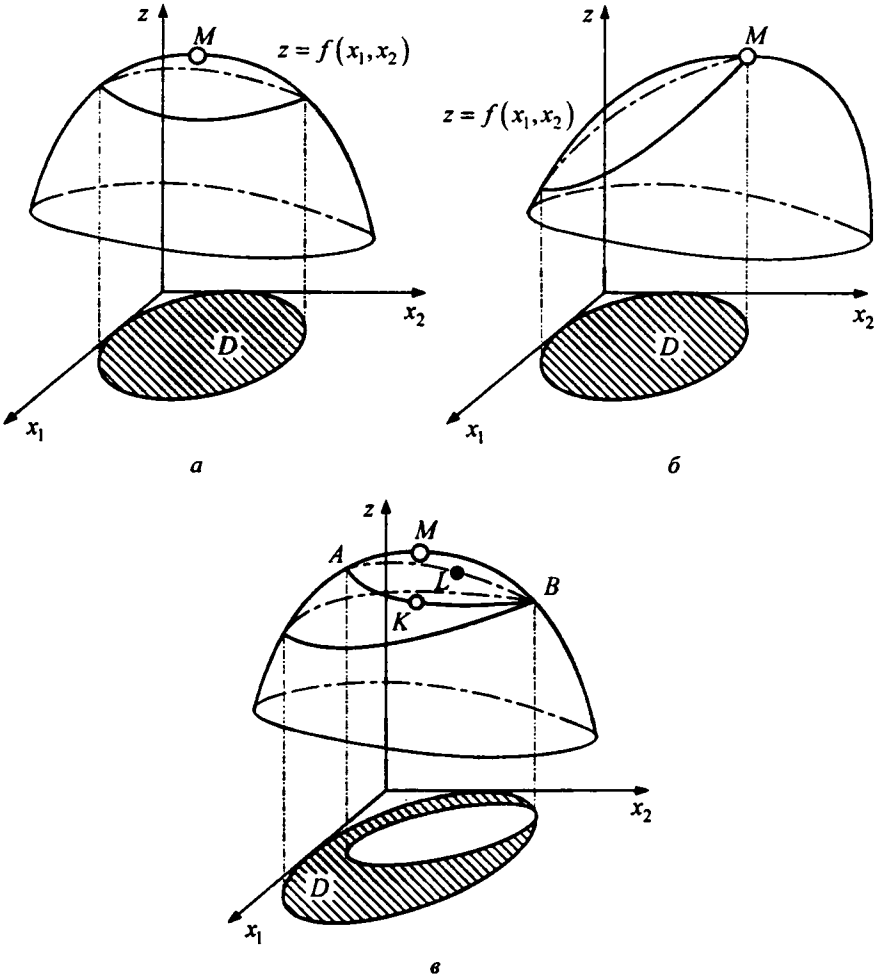


Рис. П.2.3. Точка экстремума M:
а — функции $f(x_1, x_2)$ и задачи; *б* — стала граничной;
в — не принадлежит области допустимых значений x_1 и x_2

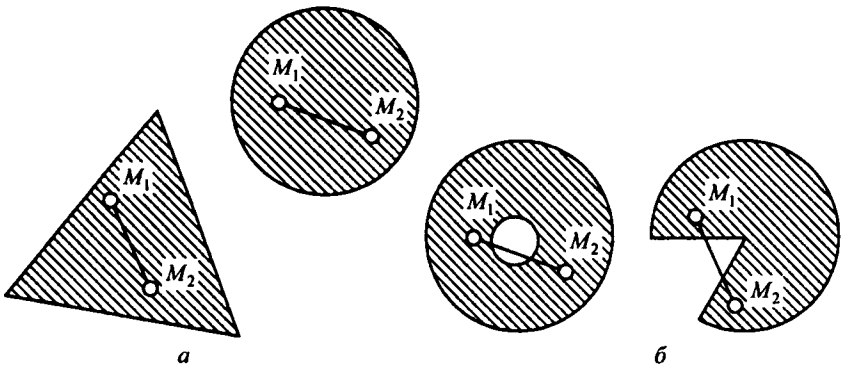


Рис. П.2.4. Выпуклые (*а*) и невыпуклые (*б*) области (множества)

Ограничения $g_i(\mathbf{x}) \geq 0;\ i = \overline{1,m}$, образуют *выпуклое множество* D (выпуклую область D), если все функции $g_i(\mathbf{x})$ *вогнуты*.

В математическом программировании выделяется важный класс задач — *задачи выпуклого программирования*: минимизировать $f(\mathbf{x})$ при ограничениях

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0,\ i = \overline{1,m},$$

где $f(\mathbf{x})$ — выпуклая функция, а все функции $g_i(\mathbf{x})$ вогнуты, т.е. рассматривают выпуклые функции на выпуклых множествах.

Задачи выпуклого программирования обладают важным положительным свойством: *локальные минимумы* целевых функций являются одновременно *глобальными* (единственными).

Очевидно, что решить подобную задачу проще (но не просто!), чем в случае, когда целевая функция $f(\mathbf{x})$ и область D будут общего вида.

П.2.2.4. Необходимые и достаточные условия оптимума в задачах математического программирования

В общем случае в задачах математического программирования ставится вопрос об отыскании локального минимума (максимума) целевой функции, т.е. такого значения $\mathbf{x}^*$, что для значений $\mathbf{x}$, принадлежащих некоторой окрестности этого значения $\mathbf{x}^*$, выполняются неравенства $f(\mathbf{x}^*) < > f(\mathbf{x})$ для строгого минимума (максимума) и $f(\mathbf{x}^*) \leq \geq f(\mathbf{x})$ для нестрогого минимума (максимума). Как и для функций одной переменной, в задачах математического программирования требуется сформулировать необходимые и достаточные условия существования оптимума. Если в задаче математического программирования множество D выпукло, а функция $f(\mathbf{x})$ дифференцируема в точке $\mathbf{x}^* \in D$, то градиент $\nabla f(\mathbf{x}^*)$, если он отличен от нуля, составляет не тупой угол φ с вектором, направленным из $\mathbf{x}^*$ в любую точку $\mathbf{x}_1 \in D$. Другими словами, скалярное произведение $(\nabla f(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}^*) \geq 0$ (рис. П.2.5). Для точки $\bar{\mathbf{x}}$, не являющейся решением задачи, всегда найдется такая точка $\mathbf{x}_2$, что угол φ будет больше $\pi/2$.

В тех случаях, когда решение $\mathbf{x}^*$ принадлежит внутренней области D, градиент $\nabla f(\mathbf{x}^*) = 0$.

Сформулированное условие является *необходимым условием* локальной оптимальности в задаче минимизации дифференцируемой функции на выпуклом множестве (для выпуклой задачи оно является и *достаточным условием глобальной оптимальности*).

Для области D в виде параллелепипеда, когда $a_i \leq x_i \leq b_i$, $-\infty < a_i < b_i < +\infty$, $i = \overline{1,m}$, данное (необходимое) условие следует понимать как

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}^*)}{\partial x_i} = \begin{cases} = 0, \text{ если } a_i < x_i^* < b_i, \\ \geq 0, \text{ если } x_i^* = a_i \neq -\infty, \\ \leq 0, \text{ если } x_i^* = b_i \neq +\infty. \end{cases}$$

Здесь градиент «смотрит» внутрь области D.

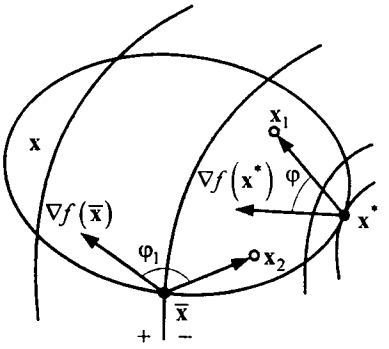


Рис. П.2.5. Положение градиента $\nabla f(\mathbf{x}^*)$ в точке решения $\mathbf{x}^*$ и в точке $\bar{\mathbf{x}}$, не являющейся решением задачи математического программирования (знаками «+» и «–» указано направление возрастания значений линий уровня)*

Чтобы определить координаты возможной оптимальной точки, надо из необходимых условий составить соответствующие системы уравнений и решить их.

В общем случае для задачи вида

$$f(\mathbf{x}) \to \min, \tag{П.2.17}$$

$$g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{П.2.18}$$

$$h_j(\mathbf{x}) = 0, \quad j = \overline{1,p}, \tag{П.2.19}$$

вводится функция Лагранжа

$$L(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}) = f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} u_i g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(\mathbf{x}), \tag{П.2.20}$$

где $u_i\left(i = \overline{1,m}\right)$, $\lambda_j\left(j = \overline{1,p}\right)$ — множители Лагранжа, подлежащие определению наряду с координатами вектора $\mathbf{x}$. Множители Лагранжа λ_j для ограничений типа равенств могут иметь любой знак; множители Лагранжа u_i для ограничений типа неравенств *неотрицательны*. Если в задаче математического программирования (П.2.17)–(П.2.19) множество P, $\mathbf{x} \in P \subset R^n$, выпукло, функции $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i = \overline{1,m}$, выпуклы на P и дифференцируемы в точке $\mathbf{x}^* \in D$:

$$D = \left\{\mathbf{x} \in P \mid g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \ h_j = 0, \ j = \overline{1,p}\right\},$$

функции $h_j(\mathbf{x})$, $j = \overline{1,p}$, линейны и при некоторых u_j^*, λ_j^* выполняются условия $\left(\nabla_{\mathbf{x}} L\left(\mathbf{x},\mathbf{u}^*,\boldsymbol{\lambda}^*\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0$ при всех $\mathbf{x} \in P$ и $u_i^* g_i\left(\mathbf{x}^*\right) = 0$, $i = \overline{1,m}$, то $\mathbf{x}^*$ — (глобальное) решение этой задачи.

Соотношения

$$\left(\nabla_{\mathbf{x}} L\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{u}^*,\boldsymbol{\lambda}^*\right), \mathbf{x} - \mathbf{x}^*\right) \geq 0 \quad \forall \mathbf{x} \in P, \tag{П.2.21}$$

$$u_i^* g_i\left(\mathbf{x}^*\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}, \tag{П.2.22}$$

для задачи выпуклого программирования являются не только необходимыми, но и достаточными условиями существования решения (условия Куна–Таккера):

а) если $\mathbf{x}^*$ является внутренней точкой области P, $\mathbf{x}^* \in \operatorname{int} P$, то условие (П.2.21) эквивалентно $\nabla_{\mathbf{x}} L\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\right) = 0$;

б) если область P имеет вид параллелепипеда:

$$P = \left\{\mathbf{x} \in R^n \mid a_k \le x_k \le b_k,\ k = \overline{1,n}\right\},$$

где $-\infty < a_k < b_k < +\infty$, то соотношение (П.2.21) эквивалентно следующему условию: для любого $k = \overline{1,m}$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}\right)^* \begin{cases} = 0, \text{ если } a_k < x_k^* < b_k; \\ \ge 0, \text{ если } x_k^* = a_k \ne -\infty; \\ \le 0, \text{ если } x_k^* = b_k \ne +\infty; \end{cases}$$

в) если P учитывает условие неотрицательности части (s) переменных и имеет вид

$$P = \left\{\mathbf{x} \in R^n \mid x_k \ge 0,\ k = \overline{1,s}\right\},$$

где $0 \le s \le n$, то условие (П.2.21) эквивалентно совокупности условий:

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial x_k}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\right) \ge 0, \\ x_k^* \frac{\partial L}{\partial x_k}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\right) = 0,\ k = \overline{1,s}, \\ \frac{\partial L}{\partial x_k}\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda}^*\right) = 0,\ k = \overline{s+1,n}. \end{gathered} \qquad \text{(П.2.23)}$$

В отличие от методов отыскания оптимальных решений в задачах без ограничений типа неравенств появляется дополнительное условие (П.2.22), которое называют *условием дополняющей нежесткости*:

$$u_i^* g_i\left(\mathbf{x}^*\right) = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Это условие разделяет ограничения-неравенства на активные, которые в точке оптимума обращаются в нуль $\left(g_i\left(\mathbf{x}^*\right) = 0,\ i = \overline{1,l_1},\ l_1 \le m\right)$, и пассивные $\left(g_i\left(\mathbf{x}^*\right) \ne 0,\ i = \overline{l_1+1,m}\right)$. Для пассивных ограничений коэффициенты Лагранжа u_i^* должны быть равны нулю, при этом пассивные ограничения не оказывают своего влияния на решение $\mathbf{x}^*$.

Рассмотрим случай, когда в функции Лагранжа присутствуют только ограничения типа неравенств:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \min, \\ g_i(\mathbf{x}) \le 0,\ i = \overline{1,m}. \end{gathered}$$

Тогда в точке минимума $\nabla_{\mathbf{x}} f\left(\mathbf{x}^*\right) + \sum_{i=1}^{m} u_i^* \nabla_{\mathbf{x}} g_i\left(\mathbf{x}^*\right) = 0$, т.е. *антиградиент* целевой функции является неотрицательной линейной комбинацией градиентов функций, образующих активные ограничения в точке $\mathbf{x}^*$ (рис. П.2.6).

На рис. П.2.6 показано множество, образованное неравенствами $g_1(\mathbf{x}) \le 0$, $g_2(\mathbf{x}) \le 0$, $g_3(\mathbf{x}) \le 0$. Здесь же в точках $\mathbf{x}^*$ и $\bar{\mathbf{x}}$ указаны направления градиентов

активных ограничений и антиградиента целевой функции. Отсюда следует, что точкой оптимума не может быть точка $\bar{\mathbf{x}}$, так как в ней не выполняется условие того, что антиградиент $f(\mathbf{x})$ есть положительная линейная комбинация градиентов активных ограничений. Решением является точка $\mathbf{x}^*$, где данное условие выполняется.

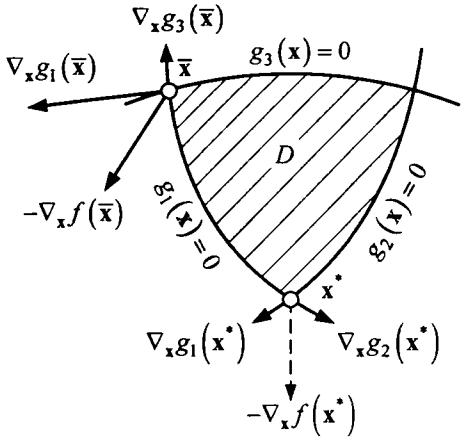


Рис. П.2.6. Связь направлений градиентов активных ограничений и антиградиента целевой функции в точке решения $\mathbf{x}^*$ и в точке $\bar{\mathbf{x}}$, не являющейся точкой решения

Мы рассмотрели некоторые условия существования решения, учтя производные первого порядка. Как и для функции одной переменной, при анализе условий оптимальности можно рассматривать производные высших порядков (в частности, второго). В задачах математического программирования сформулированы и доказаны условия оптимальности второго порядка, в которых оперируют вторыми частными производными от функции Лагранжа. Здесь мы их рассматривать не будем.

В общем случае задачу математического программирования можно было бы решать по следующей схеме:

1. Запись задачи в канонической форме вида (П.2.17)–(П.2.19) и составление функции Лагранжа (П.2.20).
2. Составление системы условий, которые характеризуют решение (определяют точки, где возможно существование оптимального решения — стационарные точки): в развернутой форме записывают условия (П.2.21), (П.2.22), а также условия, накладываемые задачей на допустимые значения и на множители Лагранжа. Например, для условия (П.2.23) полная система для определения стационарных точек имеет следующий вид:

$$x_k \ge 0,\ \frac{\partial L}{\partial x_k}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}) \ge 0,\ x_k \frac{\partial L}{\partial x_k}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}) = 0,\ k=\overline{1,s},$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_k}(\mathbf{x},\mathbf{u},\boldsymbol{\lambda}) = 0,\ k=\overline{s+1,n},$$

$$u_i \ge 0,\ g_i(\mathbf{x}) \ge 0,\ u_i g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i=\overline{1,l},$$

$$g_i(\mathbf{x}) = 0,\ i=\overline{l+1,m}.$$

3. Решение полученной системы необходимых условий. Это удается сделать в аналитическом виде лишь в редких случаях.
4. Если удалось получить решение системы необходимых условий — получены стационарные точки, надо провести исследование стационарных точек для отбора среди них решений. Это тоже сделать непросто. Иногда проще провести непосредственное исследование поведения целевой функции в стационарной точке.

На последних двух этапах полезно привлечение физических и геометрических соображений о возможном решении задачи математического программирования.

П.2.2.5. Теория двойственности и недифференциальные условия оптимальности в задаче выпуклого программирования

В задачах математического программирования (П.2.17)–(П.2.19) можно указать условия оптимальности, не прибегая к понятиям производных и градиентов, с помощью так называемой *теории двойственности*. Особенно плодотворен этот подход в задачах выпуклого программирования.

Будем рассматривать функцию Лагранжа (П.2.20). Обозначим через f^* точную нижнюю грань целевой функции задачи (П.2.17)–(П.2.19) на ее допустимом множестве D: $f^* = \inf\limits_{\mathbf{x}\in D} f(\mathbf{x})$. Точка $\mathbf{x}^* \in D$ является решением задачи (П.2.17)–(П.2.19) в том и только в том случае, если $f^* = f(\mathbf{x}^*)$.

Введем вектор $\mathbf{y}$ с координатами $u_i \left(i = \overline{1,m}\right)$ и $\lambda_j \left(j = \overline{1,p}\right)$. Вектор $\mathbf{y}^*$ называется вектором Куна–Таккера задачи (П.2.17)–(П.2.19), если при всех $\mathbf{x} \in D$

$$f^* \le f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} u_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* h_j(\mathbf{x}) = L\left(\mathbf{x}, \mathbf{y}^*\right).$$

Любой задаче математического программирования можно поставить в соответствие так называемую *двойственную задачу оптимизации*. Между *прямой* и *двойственной* задачами имеются полезные связи.

Двойственной к задаче (П.2.17)–(П.2.19) называют задачу

$$\varphi(\mathbf{y}) \to \max, \quad \mathbf{y} \in Y,$$

где

$$\varphi(\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}\in D} L(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \boldsymbol{\lambda}) = \inf_{\mathbf{x}\in D}\left[f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} u_i^* g_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{p} \lambda_j h_j(\mathbf{x}) \right],$$

$$Y = \left\{ \mathbf{y} \in Q \mid \varphi(\mathbf{y}) > -\infty \right\}.$$

Рассмотрим подробнее задачу линейного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

при

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad i = \overline{1,k},$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{k+1,m},$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,s}.$$

Переменные x_j, $j=\overline{\overline{s}+1,n}$, могут иметь любые значения. Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y})=\sum_{j=1}^{n}c_jx_j+\sum_{i=1}^{m}y_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)=\sum_{j=1}^{n}\left(c_j-\sum_{i=1}^{m}y_ia_{ij}\right)x_j+\sum_{i=1}^{m}y_ib_i,$$

где

$$\mathbf{x}\in P,\ P=\left\{\mathbf{x}\in R^n\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\ge b_i,\ i=\overline{1,k},\ \sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j=b_i,\ i=\overline{k+1,m}\right.\right\},$$

$$\mathbf{y}\in Q,\ Q=\left\{\mathbf{y}\in R^m\mid y_i\ge 0,\ i=\overline{1,k}\right\}.$$

Тогда

$$\inf_{\mathbf{x}\in P}L(\mathbf{x},\mathbf{y})=\begin{cases}\sum\limits_{i=1}^{n}y_ib_i, & \text{если } \mathbf{y}\in Y,\\ -\infty, & \text{если } \mathbf{y}\in Q\setminus Y,\end{cases}$$

где

$$Y=\left\{\mathbf{y}\in Q\left|\sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i<c_j,\ j=\overline{\overline{1,s}},\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}y_i=c_j,\ j=\overline{\overline{s}+1,n}\right.\right\}.$$

Согласно определению двойственности, двойственной задачей к исходной задаче является следующая:

$$\sum_{i=1}^{m}y_ib_i\to\max$$

при

$$\sum_{i=1}^{m}y_ia_{ij}\le c_j,\ j=\overline{\overline{1,s}},$$

$$\sum_{i=1}^{m}y_ia_{ij}=c_j,\ j=\overline{\overline{s}+1,n},$$

$$y_i\ge 0;\ i=\overline{1,k}.$$

Исходную задачу называют *прямой*. Если целевую функцию в двойственной задаче $\varphi(\mathbf{y})\to\max$ заменить на $-\varphi(\mathbf{y})\to\min$, то можно утверждать, что задача, двойственная к произвольной задаче математического программирования, всегда выпукла. Если в задаче математического программирования множество замкнуто и выпукло, функции $f(\mathbf{x})$, $g_i(\mathbf{x})$, $i=\overline{1,m}$, непрерывны и выпуклы на D, функции $h_j(\mathbf{x})$, $j=\overline{1,p}$, линейны или отсутствуют и решение прямой задачи конечно $\left(f^*>-\infty\right)$, в частности, она имеет решение, то множество решений двойственной задачи непусто и совпадает с множеством векторов Куна–Таккера прямой задачи. При этом справедливо *соотношение двойственности* $f^*=\varphi^*$, т.е. *минимум целевой функции прямой задачи совпадает с максимумом целевой функции двойственной задачи*. Учитывая, что число переменных в двойственной задаче равно числу условий-ограничений в прямой задаче, в ряде случаев двойственную задачу решить проще.

Получим необходимые и достаточные условия оптимальности в задаче выпуклого программирования на основе теории двойственности. В этом случае изменится толь-

ко форма необходимых и достаточных условий (не будут участвовать производные), но предпосылки в обоих случаях одинаковы.

Для примера рассмотрим задачу квадратичного программирования:

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Cx},\mathbf{x}) + (\mathbf{d},\mathbf{x}) \to \min$$

$$\text{при } (\mathbf{a}_i,\mathbf{x}) \le b_i,\ \ i = \overline{1,k},$$

$$(\mathbf{a}_i,\mathbf{x}) = b_i,\ \ i = \overline{k+1,m},$$

где $\mathbf{C}$ — положительно определенная симметричная матрица размерностью $n \times n$, $\mathbf{d}, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ — заданные векторы из R^n; $b_1, \ldots, b_m$ — заданные числа.

Функция Лагранжа задачи имеет вид

$$L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Cx},\mathbf{x}) + (\mathbf{d},\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^{m} y_i\left[(\mathbf{a}_i,\mathbf{x}) - b_i\right] =$$

$$= \frac{1}{2}(\mathbf{Cx},\mathbf{x}) + (\mathbf{d},\mathbf{x}) + (\mathbf{y},\mathbf{Ax}-\mathbf{b}) = \frac{1}{2}(\mathbf{Cx},\mathbf{x}) + (\mathbf{d}+\mathbf{yA},\mathbf{x}) - (\mathbf{y},\mathbf{b}).$$

Задача, двойственная к исходной, есть

$$\varphi(\mathbf{y}) \to \max,\ \ \mathbf{y} \in Y,$$

где

$$\varphi(\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}\in R^n} L(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \inf_{\mathbf{x}\in R^n}\left[\frac{1}{2}(\mathbf{Cx},\mathbf{x}) + (\mathbf{d}+\mathbf{yA},\mathbf{x}) - (\mathbf{y},\mathbf{b})\right],$$

$$Y = \left\{\mathbf{y} \in Q \mid \varphi(\mathbf{y}) > -\infty\right\}.$$

Для положительно определенной матрицы $\mathbf{C}$ производная функции Лагранжа

$$L'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x},\mathbf{y}) = \mathbf{Cx} + \mathbf{d} + \mathbf{yA} = 0$$

в точке

$$\mathbf{x}(\mathbf{y}) = -\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{d}+\mathbf{yA}),$$

и двойственная задача записывается в виде

$$\varphi(\mathbf{y}) \to \max,\ \ \mathbf{y} \in Q,$$

где

$$\varphi(\mathbf{y}) = L(\mathbf{x}(\mathbf{y}),\mathbf{y}) = -\frac{1}{2}\left(\mathbf{C}^{-1}\{\mathbf{d}+\mathbf{yA}\},\mathbf{d}+\mathbf{yA}\right) - (\mathbf{y},\mathbf{b}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\left[\mathbf{AC}^{-1}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right]\mathbf{y},\mathbf{y}\right) - \left(\mathbf{AC}^{-1}\mathbf{d}+\mathbf{b},\mathbf{y}\right) - \frac{1}{2}\left(\mathbf{C}^{-1}\mathbf{d},\mathbf{d}\right).$$

Полученная функция квадратична, она учитывает условия неотрицательности для первых k переменных. Решить двойственную задачу гораздо проще. Если же в исходной задаче нет ограничений типа неравенств, то двойственная задача приводит к безусловной оптимизации квадратичной функции.

Пара $\left\{\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*\right\} \in P \times Q$ называется *седловой точкой* функции $L(\mathbf{x},\mathbf{y})$ на $P \times Q$, если

$$L\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*\right) = \min_{\mathbf{x}\in P} L\left(\mathbf{x},\mathbf{y}^*\right),$$

$$L\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*\right) = \max_{\mathbf{y}\in Q} L\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}\right),$$

т.е. $L\left(\mathbf{x},\mathbf{y}^*\right) \ge L\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}^*\right) \ge L\left(\mathbf{x}^*,\mathbf{y}\right)\ \ \forall \mathbf{x} \in P,\ \mathbf{y} \in Q.$

Тогда точка $\mathbf{x}^* \in P$ является решением прямой задачи в том и только в том случае, если существует такой вектор $\mathbf{y}^* \in Q$, что пара $\{\mathbf{x}^*, \mathbf{y}^*\}$ — седловая точка функции Лагранжа $L(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ на $P \times Q$. Таким образом, если одновременно решать и прямую и двойственную задачи, то к точке минимума (к решению) мы можем приближаться с двух сторон.

П.2.2.6. Графическое решение задач математического программирования

Самыми наглядными методами решения задач математического программирования являются графические. Но они приемлемы только для функций двух и иногда трех переменных.

Пример П.2.6. Минимизировать

$$f(\mathbf{x}) = |x_1 - 2| + |x_2 - 2|$$

при ограничениях

$$g_1(\mathbf{x}) = x_1 - x_2^2 \geq 0,$$

$$h_1(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0.$$

Получили задачу *нелинейного* математического программирования. Прежде всего построим по условиям-ограничениям допустимую область D — множество точек (x_1, x_2), удовлетворяющих ограничениям задачи. Ограничение $g_1(\mathbf{x})$ определяет область «внутри» параболы $x_1 = x_2^2$ (рис. П.2.7); ограничение $h_1(\mathbf{x})$ — окружность единичного радиуса с центром в начале координат (рис. П.2.7). Допустимая область D этой задачи — дуга окружности $\overset{\frown}{ABC}$. Чтобы найти точку, в которой функция $f(\mathbf{x})$ принимает минимальное значение на допустимой области D, построим линии уровня $f(\mathbf{x})$ — штриховые линии. В точке $(2, 2)$ $f(\mathbf{x}) = 0$; при $f(\mathbf{x}) = 1$ и $f(\mathbf{x}) = 2$ линии уровня образуют квадраты. Градиент функции $\nabla f(\mathbf{x})$ направлен в сторону дуги $\overset{\frown}{ABC}$, и функция $f(\mathbf{x})$ будет иметь минимальное значение в точке касания линии уровня к дуге $\overset{\frown}{ABC}$. Так как линии уровня отсекают от осей x_1 и x_2 равные отрезки, то координаты точки касания равны

$$1 \cdot \cos\frac{\pi}{4} = 1 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Решение задачи имеет вид

$$x_1^* = \frac{1}{\sqrt{2}},\ x_2^* = \frac{1}{\sqrt{2}},\ f_{\min}(\mathbf{x}) = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - 2\right| \approx 2{,}6.$$

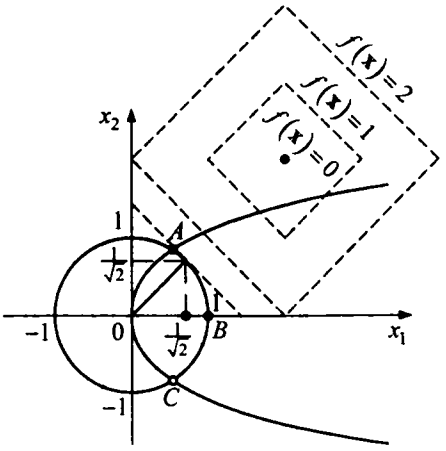


Рис. П.2.7. Графическое решение задачи математического программирования

Нетрудно видеть, что то же решение будет и в том случае, если вместо $h_1(\mathbf{x})$ взять $g_2(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \le 0$. Тогда допустимая область D будет заключена между дугами $\overset{\frown}{ABC}$ и $\overset{\frown}{AOC}$ (рис. П.2.7). Но минимальное значение функции $f(\mathbf{x})$ в области D будет достигнуто в точках $x_1^* = 1/\sqrt{2}$, $x_2^* = 1/\sqrt{2}$.

П.2.3. ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

П.2.3.1. Математическая постановка задачи линейного программирования

Из рассмотрения задач математического программирования следует, что в общем виде решить их практически невозможно. Целесообразно рассматривать отдельные классы (виды) задач. Для каждого такого класса удается сформулировать алгоритм решения, приемлемый только для данного класса задач. Наиболее разработанными в математическом программировании являются задачи линейного программирования (ЛП).

В задачах линейного программирования целевая функция линейна, а условия-ограничения содержат линейные равенства и линейные неравенства. Переменные могут быть подчинены или не подчинены требованию неотрицательности. Одна и та же задача линейного программирования может быть записана в различной форме. Говорят, что задача линейного программирования записана в *канонической форме*, если все ее ограничения, кроме $x_j \ge 0$, $j = \overline{1,n}$, представляют собой *равенства*. Если все ограничения имеют вид неравенств, то задача записана в *стандартной форме*.

Для записи задачи линейного программирования в различной форме применяются следующие приемы:

1. Точка минимума функции $f(\mathbf{x})$ совпадает с точкой максимума функции $-f(\mathbf{x})$.
2. Ограничения в виде неравенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$$

можно представить в виде равенств, использовав новые переменные $x_i \left(i = \overline{n+1, n+m}\right)$, $x_i \ge 0$, называемые *слабыми*:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - x_i = b_i.$$

Для неравенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ можно взять x_i и получить равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_i = b_i.$$

3. Ограничение в виде равенства $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i$ можно заменить двумя неравенствами

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i.$$

Если имеется m равенств $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right)$, их можно заменить $(m+1)$ неравенствами

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \ \left(i=\overline{1,m}\right), \ \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i\right) \le 0.$$

4. Если на переменную $x_j \ \left(j=\overline{1,n}\right)$ не наложено условие неотрицательности, ее можно заменить двумя неотрицательными переменными x_j^+ и x_j^-, положив

$$x_j = x_j^+ - x_j^-; \ x_j^+ \ge 0; \ x_j^- \ge 0.$$

Если имеется n таких переменных $x_j \ \left(j=\overline{1,n}\right)$, то их можно заменить $(n+1)$ неотрицательными переменными x_j^1 и x_0, положив $x_j = x_j^1 - x_0$.

Система ограничений в виде равенств и неравенств образует выпуклое множество — *выпуклый многогранник*. Это множество может быть ограниченным и неограниченным. Целевая функция задачи линейного программирования также является выпуклой функцией. Таким образом, задача линейного программирования является частным случаем задачи выпуклого программирования.

Рассмотрим систему ограничений задачи линейного программирования в виде равенств

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i=\overline{1,m}, \ n>m. \qquad (\text{П.2.24})$$

Говорят, что система (П.2.24) линейных уравнений *совместна*, если она имеет, по крайней мере, одно решение. Система (П.2.24) называется *избыточной*, если одно из уравнений можно выразить в виде линейной комбинации остальных. Система (П.2.24) *несовместна*, если ранг матрицы $\|c_{ij}\|; \ i=\overline{1,m}, \ j=\overline{1,n}$, равен r, ранг *расширенной матрицы* этой системы (с присоединенным столбцом b_i) больше r.

В системе (П.2.24) число переменных (неизвестных x_j) n больше, чем число уравнений m. Будем считать, что ранг этой системы равен m (система неизбыточна) и что система (П.2.24) совместна. Тогда m переменных из общего их числа образуют *базисные переменные*, а остальные $(n-m)$ переменных называют *свободными*. Система (П.2.24) в этом случае будет иметь бесчисленное множество решений, так как свободным переменным можно давать любые значения, для которых находят значения базисных переменных. Решение системы (П.2.24) называют *базисным*, если все свободные переменные равны нулю. Если система уравнений имеет решение, то она имеет и базисное решение. Решение системы уравнений (П.2.24) называют *допустимым*, если все его компоненты неотрицательны. Если система линейных уравнений обладает допустимым решением, то она имеет и базисное допустимое решение. Совокупность всех допустимых решений системы (П.2.24) есть выпуклое множество, т.е. множество решений задачи линейного программирования выпукло. Так как это множество образовано плоскостями (гиперплоскостями), то оно имеет вид выпуклого многогранника. *Базисное допустимое решение* соответствует крайней точке выпуклого многогранника (его грани или вершине).

Если существует оптимальное решение задачи линейного программирования, то существует *базисное оптимальное решение*.

Целевая функция задачи линейного программирования есть уравнение плоскости (или гиперплоскости для числа переменных больше трех). Пусть в вершинах выпуклого многоугольника мы установили «столбы», высота которых определяет значения целевой функции в данной вершине. На эти «столбы» наложим плоскость (графическое представление целевой функции). Очевидно, что максимальное и минимальное значение целевая функция задачи линейного программирования достигает либо в вершине выпуклого многогранника, либо на одной из его граней. Таким образом, решение (решения) задачи линейного программирования лежит в вершинах выпуклого многогранника и для его нахождения надо вычислить значения целевой функции в вершинах выпуклого многогранника, определяемого условиями-ограничениями задачи.

П.2.3.2. Симплекс-метод — основной метод решения задач линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в канонической форме: найти минимум функции

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \quad m \le n, \quad x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Предполагается, что решение этой задачи существует. Чтобы найти оптимальное решение, надо найти допустимые базисные решения, а из них выбрать оптимальное базисное решение. Для чего мы должны поочередно из столбцов матрицы $\|a_{ij}\|$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, выбирать m столбцов и решать систему из m уравнений с m неизвестными. Такой метод требует решения $C_m^n = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ систем уравнений, что практически невозможно даже для небольших значений m.

Для решения задач линейного программирования в 1949 г. американским математиком Дж. Данцигом разработан симплекс-метод, ставший основным методом решения задач линейного программирования.

Разберем главные моменты симплекс-метода на конкретном примере.

Пример П.2.7. Минимизировать

$$f(\mathbf{x}) = 3 - x_4 + x_5$$

при ограничениях

$$x_2 + 2x_4 + 3x_5 - 7 = 0,$$

$$x_3 - x_4 - 3x_5 - 2 = 0,$$

$$x_1 + x_4 + x_5 - 2 = 0,$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

Определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3, имеет вид

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

и не равен нулю. Поэтому ранг матрицы ограничений равен 3, базисные переменные — x_1, x_2, x_3, а свободные переменные — x_4, x_5. Выразим базисные переменные через свободные:

$$x_1 = 2 - x_4 - x_5,$$

$$x_2 = 7 - 2x_4 - 3x_5,$$
$$x_3 = 2 + x_4 + 3x_5.$$

Базисное решение (при нулевых значениях свободных переменных x_4 и x_5) в данном случае — $x_1 = 2, x_2 = 7, x_3 = 2$ — является допустимым (значения x_1, x_2, x_3 положительны). Значение целевой функции при таких значениях переменных $f(\mathbf{x}) = 3$. Но оно может быть уменьшено, если увеличить значение переменной x_4, входящей с отрицательным коэффициентом. Очевидно, что увеличивать x_4 можно до тех пор, пока не будут нарушены условия-ограничения задачи, в частности, пока переменные x_1, x_2 и x_3 будут неотрицательны. Например, если $x_4 = 2$, $x_5 = 0$, то $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$ — новое допустимое решение. При $x_5 = 0$ переменная $x_1 = 0$, если $x_4 = 2/1 = 2$; $x_2 = 0$, если $x_4 = 7/2 = 3{,}5$; $x_3 = 0$, если $x_4 = 2/(-1) = -2$. Чтобы ни одна из переменных x_1, x_2, x_3 не стала отрицательной, надо выбрать наименьшее положительное отношение элементов столбца свободных членов к соответствующим коэффициентам при x_4. Берем $x_4 = 2$, x_1 становится равным нулю, т.е. x_1 переводим в свободные переменные, а $x_4 = 2$ становится базисной переменной. Ограничения и целевую функцию надо выразить теперь через x_1 и x_5: из первого уравнения имеем $x_3 = 2 - x_1 - x_5$, из второго — $x_2 = 3 + 2x_1 - x_5$; из третьего — $x_3 = 4 - x_1 + 2x_5$ и $f(\mathbf{x}) = 3 - 2 + x_1 + x_5 + x_5 = 1 + x_1 + 2x_5$. В данном случае любое увеличение значений свободных переменных x_1 и x_5 ведет к увеличению (но не к уменьшению) значений целевой функции, т.е. получили оптимальное решение:

$$x_1 = 0,\ x_5 = 0,\ x_2 = 3,\ x_3 = 4,\ x_4 = 2,$$
$$f_{\min}(\mathbf{x}) = 1.$$

Какие выводы можно сделать из этого примера? Во-первых, надо так разделить базисные и свободные переменные, чтобы получить допустимое базисное решение, а затем выразить базисные переменные и целевую функцию через свободные переменные. Во-вторых, по знаку коэффициентов при неизвестных в целевой функции следует определить:

а) не достигли ли мы уже оптимального решения (нет отрицательных коэффициентов);

б) значение какой переменной лучше увеличить, т.е. какую переменную следует перевести в свободные.

Другими словами, определяя минимальное положительное отношение элементов столбца свободных членов к коэффициентам при новой свободной переменной, находим переменную, которую необходимо перевести из базисных в свободные. После чего выражаем условия-ограничения и целевую функцию через новые свободные переменные.

Процесс повторяют до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение. Если среди коэффициентов при неизвестных в целевой функции есть положительный, а все коэффициенты в условиях-ограничениях при нем неположительны, то задача линейного программирования не имеет оптимального решения, минимальное значение целевой функции равно $-\infty$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию симплекс-метода, давшую название методу.

В условия одной из первых задач линейного программирования, для которых Данциг разработал вычислительный метод, входили ограничения вида

$$\sum_{j=1}^{n} x_j = 1,\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Эти ограничения в n-мерном пространстве определяют *симплекс*. Симплекс трехмерного пространства изображен на рис. П.2.8. Рассмотрим неравенство $x_1 + x_2 \leq b_1$

при условиях $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$. Область решения этого неравенства показана на рис. П.2.9. Данное неравенство можно преобразовать в уравнение введением слабой переменной x_3. Тогда получим систему $x_1 + x_2 + x_3 = b_1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$.

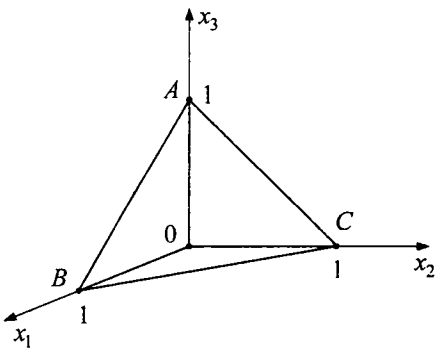


Рис. П.2.8. Симплекс трехмерного пространства

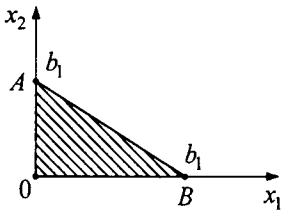


Рис. П.2.9. Область решения неравенства

Областью решений этой системы является треугольник ΔABC, показанный на рис. П.2.8, если принять, что $A = B = C = b_1$. Каждой точке треугольной области рис. П.2.8 соответствует точка области на рис. П.2.9. Соответствие можно устанавливать, проектируя эту треугольную область на плоскость x_1, x_2. Если придать слабой переменной x_3 постоянное значение c, то x_1 и x_2 должны удовлетворять уравнению $x_1 + x_2 = b_1 - c$, которое является уравнением прямой, параллельной $x_1 + x_2 = b_1$. Если слабая переменная равна нулю, то $x_1 + x_2 = b_1$. Таким образом, значение слабой переменной может служить мерой близости точки из треугольной области к границе полупространства, определяемого исходным неравенством.

В общем случае в симплекс-методе процедуру поиска начинают с допустимой вершины, а затем переходят в соседнюю вершину так, чтобы значение целевой функции «улучшилось». В пространстве векторов свободных переменных возрастание значения одной из свободных переменных от нуля, при котором остальные свободные переменные остаются равными нулю, соответствует движению из начала системы координат, образованной свободными переменными, по одной из координатных осей. При этом, поскольку $(n-1)$ свободных переменных равны нулю, $(n-1)$ ограничений задачи выполняются как равенства. Другими словами, все соседние с началом координат вершины (которые соответствуют текущему решению) связаны с началом координат $(n-1)$ ребрами выпуклого многогранника. Возраста-

ние от нуля значения некоторой свободной переменной может привести к тому, что эта переменная станет базисной. Для того чтобы получить в качестве решения вершину, необходимо заменить одну из базисных переменных на свободную, т.е. произвести соответствующее перемещение вдоль одной из координатных осей до тех пор, пока не будет достигнута другая вершина. Если двигаться дальше, то будет нарушено условие неотрицательности переменных. Таким образом, в симплекс-методе начинают с локальной координатной системы с началом координат, соответствующим текущему решению, и перемещаются вдоль ребра к соседней вершине, в которой значение целевой функции «улучшается». После перехода в новую вершину рассматривают новую систему координат с началом в этой вершине. Если движение осуществляют согласно критерию (выбирают минимальный отрицательный коэффициент при неизвестных в целевой функции), то это соответствует спуску по самому крутому ребру из всех пересекающихся в начале координат. Величину изменения целевой функции за одну итерацию определяют как углом наклона (крутизной) ребра, так и длиной ребра. Более точно она равна минимальному значению по i величины $\left|c_i b_i / a_{ij}\right|$ для данного j, где a_{ij} — соответствующий элемент вектора-столбца a_j для j-й свободной переменной.

Замечание П.2.1. Итак, в симплекс-методе всегда считают, что в первую таблицу внесено допустимое базисное решение. В задачах, описывающих реальные системы, допустимое базисное решение подобрать трудно. Для этого решают вспомогательную задачу линейного программирования, которая позволяет не только найти допустимое базисное решение, но и установить, совместна ли система ограничений исходной задачи.

Пусть система ограничений исходной задачи записана в следующем виде:

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = 0,\ i = \overline{1,m},$$

где $b_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}$. Этого нетрудно добиться, умножив при необходимости уравнения на -1. Введем новые переменные

$$\xi_i = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad \text{(П.2.25)}$$

и рассмотрим новую целевую функцию

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \to \min. \qquad \text{(П.2.26)}$$

Допустимое решение для задачи (П.2.25), (П.2.26) сразу задано. В процессе решения задачи возможны следующие случаи:

1) $\min f(\xi) = 0,\ \xi_i = 0,\ i = \overline{1,m}$ (все ξ_i стали свободными переменными), — полученное решение $x_j, j = \overline{1,n}$, является допустимым решением исходной задачи линейного программирования;
2) $\min f(\xi) > 0$ — система ограничений исходной задачи несовместна.

В первом случае можно отметить две особенности:

1. Целевая функция $f(\xi)$ достигла своего минимума, равного нулю, а некоторые из переменных ξ_i находятся среди базисных, хотя и равны нулю. При этом нет необходимости обращать внимание на знаки в строке для целевой функции (можно

любую свободную переменную выводить в базисные), так как значение целевой функции не изменится, но следует выполнить условия, обеспечивающие допустимость нового базисного решения (рассмотреть минимальное положительное отношение).

2. Даже после выполнения предыдущего пункта в строке для базисной переменной ξ_i нет положительных элементов (нельзя получить положительное отношение). Это означает, что переменные, входящие в уравнение для ξ_i с ненулевыми коэффициентами, должны быть равными нулю в данной задаче. В процессе дальнейшего решения их надо исключить из рассмотрения.

Наряду с решением вспомогательной задачи линейного программирования (П.2.25), (П.2.26) преобразуется и целевая функция исходной задачи, которая приписывается к задаче (П.2.25), (П.2.26) в виде дополнительной строки.

П.2.3.3. Метод полного исключения Жордана для решения систем линейных алгебраических уравнений

На каждом шаге симплекс-метода требуется определять новые «наборы» базисных и свободных переменных, т.е. решать системы линейных алгебраических уравнений. Задачи линейного программирования решают с помощью стандартных симплекс-таблиц, формализующих алгоритм перевода базисных переменных в свободные. Этот алгоритм и определяет конкретный вид симплекс-таблиц. Рассмотрим симплекс-таблицы, преобразуемые с помощью метода полного исключения Жордана, получившего наибольшее распространение в линейном программировании.

Рассмотрим систему m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

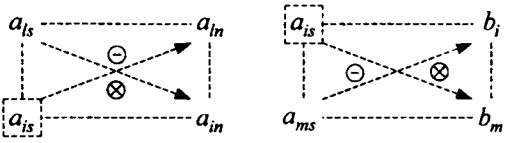
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1s}x_s + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \vdots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{is}x_s + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{ms}x_s + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

В методе полного исключения Жордана делают такие преобразования, в результате которых в каждой строке и в каждом столбце матрицы системы линейных алгебраических уравнений остается по одному неизвестному с коэффициентами, равными единице. Например, мы хотим исключить переменную x_s из всех строк за исключением i-й строки. Элемент a_{is} — коэффициент, стоящий перед переменной x_s, называют *генеральным элементом*, *i-я* строка и *s*-й столбец — *разрешающими*. Прежде всего разрешающую строку делят на $(-a_{is})$ и она остается неизменной. Чтобы исключить x_s из первого уравнения, умножим разрешающую строку на $(-a_{is})$ и сложим с первой строкой. В результате получим первую строку с нулевым элементом на месте a_{is}. Аналогично исключаем x_s в остальных строках. Получим новую эквивалентную запись системы алгебраических уравнений. В ней i-я строка имеет прежний вид, но все коэффициенты у нее поделены на a_{is}; s-й столбец состоит из нулевых элементов (кроме единицы, стоящей в i-й строке). Остальные элементы матрицы системы и столбец свободных членов пересчитываются по *правилу прямоугольника*. Например, новое значение элемента a_{ln} будет равно

$$a_{ln}^{\text{н}} = \frac{a_{is}a_{ln} - a_{ls}a_{in}}{a_{is}},$$

а новое значение b_m столбца свободных членов

$$b_m^{\text{н}} = \frac{a_{is}b_m - a_{ms}b_i}{a_{is}}.$$



Из правила прямоугольника следует, что когда в разрешающей строке (столбце) есть нулевые элементы, то элементы столбцов (строк), пересекающих эти нулевые элементы, остаются без изменения.

В процессе решения задачи линейного программирования симплекс-методом возможно *«зацикливание»*. Поясним его суть. Пусть в процессе решения задачи линейного программирования на некотором шаге симплекс-метода наименьших положительных отношений свободных членов к элементам разрешающего столбца оказалось больше одного, т.е. выбор разрешающего элемента неоднозначен. После этого шага все упомянутые свободные члены, за исключением свободного члена разрешающей строки, обратятся в нуль. Этот случай называют *вырождением*: сливаются две или большее число вершин выпуклого многогранника D, когда ребро (или ребра), соединяющие эти вершины, стягиваются в точку.

В алгоритме симплекс-метода каждый шаг означает переход по ребру от данной вершины многогранника D к соседней (расположенной на том же ребре), а при вырождении — совпадении двух соседних вершин — алгоритм может потерять монотонность, т.е. может случиться, что после указанного шага мы остались в той же вершине, только выраженной с помощью другого набора из n уравнений, относящихся к этой вершине. Если продолжать решение симплекс-методом, то не исключено, что после некоторого числа шагов мы вернемся к уже взятой ранее вершине и процесс начнет повторяться. Произойдет *зацикливание*. Если в процессе решения проводилось запоминание уже испытанных ребер, то для прерывания зацикливания достаточно сменить генеральный элемент.

Существуют алгоритмы, где автоматически предусмотрены меры против зацикливания — «расклеивание» слипшихся вершин.

Пример П.2.8. Максимизировать $f(\mathbf{x}) = 10x_1 + 20x_2$ при условии

$$x_1 + 3{,}5x_2 \le 350,$$
$$2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240,$$
$$x_1 + x_2 \le 150,$$
$$x_1 + x_2 \ge 110,$$
$$10x_1 + 20x_2 \ge 1400,$$
$$x_1 \ge 0;\ x_2 \ge 0.$$

Для решения задачи симплекс-методом сведем систему ограничений к равенствам путем введения неотрицательных слабых переменных x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 (в первом и втором ограничениях проведем умножение на 2, а в пятом сократим обе части неравенства на 10):

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 7x_2 + x_3 &&= 700,\\
&4x_1 + x_2 + x_4 &&= 480,\\
&x_1 + x_2 + x_5 &&= 150,\\
&-x_1 - x_2 + x_6 &&= -110.\\
&-x_1 - 2x_2 + x_7 &&= -140,
\end{aligned} \qquad \text{(П.2.27)}$$

$$x_j \geq 0;\ j=\overline{1,7}.$$

Первым этапом в симплекс-методе является отыскание опорного решения — допустимого базисного решения, с которого начинается поиск оптимального решения. Чтобы решение было опорным, базисные переменные должны быть неотрицательны, т.е. элементы b_i $\left(i=\overline{1,5}\right)$ столбца свободных членов должны быть неотрицательны. В задачах небольшой размерности опорное решение легко увидеть. В нашем случае самое простое в качестве базисных переменных взять x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, но такое базисное решение не является допустимым (опорным), так как b_4 и b_5 отрицательны. Для поиска опорного решения надо сформулировать дополнительную фиктивную целевую функцию $\varphi(\mathbf{x})$, элементы которой равны сумме элементов строк, отражающих те ограничения, где $b_i<0$. В симплекс-таблице для $\varphi(\mathbf{x})$ отводится своя строка, получаемая *суммированием* соответствующих элементов строк с *отрицательными значениями* b_i (в нашем случае 4-я и 5-я строки). С помощью симплекс-метода фиктивная целевая функция *максимизируется*. Если $\max \varphi(\mathbf{x})=0$ и при этом все коэффициенты в строке для $\varphi(\mathbf{x})$ будут нулевые, то базисное решение, соответствующее этой таблице, будет опорным. Тогда, исключая строку для $\varphi(\mathbf{x})$, переходим к отысканию оптимального решения исходной задачи. Если $\max \varphi(\mathbf{x})\neq 0$, то система ограничений задачи противоречива. Может иметь место случай, когда $\varphi(\mathbf{x})$ достигла своего максимума, равного нулю, а среди элементов строки $\varphi(\mathbf{x})$ есть ненулевые элементы. Это означает, что соответствующие переменные в столбцах, для которых есть ненулевые элементы, тождественно равны нулю и могут быть исключены из рассмотрения. Рассмотрим исходную таблицу симплекс-метода для нашей задачи (табл. П.2.1).

Таблица П.2.1 соответствует системе ограничений-равенств (П.2.27). Так, согласно этой таблице

$$\begin{aligned}
0 &= 700 - 2x_1 - 7x_2 - x_3;\\
0 &= 480 - 4x_1 - x_2 \qquad - x_4;\\
&\vdots\\
0 &= -140 - x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - x_7,
\end{aligned}$$

что соотносится с системой уравнений (П.2.27). Согласно табл. П.2.1 $f(\mathbf{x}) = -10(-x_1)+(-20)(-x_2) = 10x_1 + 20x_2$. Последний контрольный столбец содержит сумму всех чисел в строке, и в процессе пересчетов сумма всех чисел в строках должна быть равной числу в контрольном столбце.

Таблица П.2.1

Исходная таблица симплекс-метода

Базисные переменные	Столбец свободных членов b_i	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	Контроль
x_3	700	2	7	1	0	0	0	0	710
x_4	480	4	1	0	1	0	0	0	486
x_5	150	1	1	0	0	1	0	0	153
x_6	−110	−1	−1	0	0	0	1	0	−111
x_7	−140	−1	[−2]	0	0	0	0	1	−142
$f(\mathbf{x})$	0	−10	−20	0	0	0	0	0	−30
$\varphi(\mathbf{x})$	−250	−2	−3	0	0	0	1	1	−253

Проведем максимизацию функции $\varphi(\mathbf{x})$. Среди элементов строки $\varphi(\mathbf{x})$ есть отрицательные. Берем меньший отрицательный коэффициент, равный −3; он указывает, что переменную x_2 надо перевести в базисные. Чтобы определить, какую переменную надо из базисных перевести в свободные, рассмотрим положительные отношения b_i к соответствующим элементам столбца x_2: $700/7=100$; $480/1=480$; $150/1=150$; $-110/(-1)=110$; $-140/(-2)=70$. Минимальное значение, равное 70, указывает, что x_7 надо перевести в свободные, а *генеральным* (разрешающим) элементом является (-2) (обведен). Для получения следующей симплекс-таблицы применим метод полного исключения Жордана (табл. П.2.2).

Таблица П.2.2

Первая итерация

Базис	b_i	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	Контроль
x_3	210	−3/2	0	1	0	0	0	7/2	213
x_4	410	7/2	0	0	1	0	0	1/2	415
x_5	80	1/2	0	0	0	1	0	1/2	82
x_6	−40	**−1/2**	0	0	0	0	1	−1/2	−40
x_7	70	1/2	1	0	0	0	0	−1/2	71
$f(\mathbf{x})$	1400	0	0	0	0	0	0	−10	1390
$\varphi(\mathbf{x})$	−40	−1/2	0	0	0	0	1	−1/2	−40

Разрешающую строку (для x_7) делим на (-2) и заносим в табл. П.2.2; столбец x_2 заполняем нулями. Столбцы для x_3, x_4, x_5, x_6 переносим без изменения, так как они пересекают нулевые элементы разрешающей строки. Остальные элементы таблицы пересчитываем по правилу прямоугольника. Проверяем, совпадает ли сумма чисел в строке с числом в контрольном (последнем) столбце. Если совпадения нет, произошла ошибка в расчете. Вместе с функцией $\varphi(\mathbf{x})$ пересчитывают и целевую функцию $f(\mathbf{x})$.

Продолжаем максимизировать $\varphi(\mathbf{x})$. В базисные переменные можно перевести x_1 и x_7, так как для них есть отрицательные коэффициенты в строке $\varphi(\mathbf{x})$. Переводим x_1 в базисные переменные. По минимуму положительных отношений b_i к элементам столбца $(-x_1)$ выбираем элемент x_6, который надо перевести в свободные; генеральный элемент — $(-1/2)$, разрешающая строка для x_6 и разрешающий столбец для x_1. Получим табл. П.2.3.

Таблица П.2.3

Вторая итерация

Базис	b_i	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	Контроль
x_3	330	0	0	1	0	0	−3	**5**	333
x_4	130	0	0	0	1	0	7	−3	135
x_5	40	0	0	0	0	1	1	0	42
x_1	80	1	0	0	0	0	−2	1	80
x_2	30	0	1	0	0	0	1	−1	31
$f(\mathbf{x})$	1400	0	0	0	0	0	0	−10	1390
$\varphi(\mathbf{x})$	0	−10	0	0	0	0	0	0	0

Из табл. П.2.3 видно, что достигнут максимум фиктивной целевой функции $(\varphi(\mathbf{x}) = 0)$, и все коэффициенты в строке $\varphi(\mathbf{x})$ равны нулю, т.е. получено *опорное* решение $x_6 = x_7 = 0$, $x_1 = 80$, $x_2 = 30$, $x_3 = 330$, $x_4 = 130$, $x_5 = 40$. Это решение не является оптимальным, так как в строке $f(\mathbf{x})$ имеется отрицательный коэффициент.

Продолжаем улучшать решение симплекс-методом. Строку $\varphi(\mathbf{x})$ исключаем. Генеральным будет элемент $(1,7)$, равный 5; x_7 переводим в базис (вместо x_3). Получим табл. П.2.4, затем табл. П.2.5. В табл. П.2.4 отмечен генеральный элемент.

Таблица П.2.4

Третья итерация

Базис	b_i	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	Контроль
x_7	66	0	0	1/5	0	0	−3/5	5/5	333/5
x_4	328	0	0	3/5	1	0	26/5	0	1674/5
x_5	40	0	0	0	0	1	**1**	0	42
x_1	14	1	0	−1/5	0	0	−7/5	0	67/5
x_2	96	0	1	1/5	0	0	2/5	0	488/5
$f(\mathbf{x})$	2060	0	0	2	0	0	−6	0	2056

Таблица П.2.5

Оптимальное решение

Базис	b_i	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$	Контроль
x_7	90	0	0	1/5	0	3/5	0	1	459/5
x_4	120	0	0	3/5	1	−26/5	0	0	582/5
x_6	40	0	0	0	0	1	1	0	42
x_1	70	1	0	−1/5	0	7/5	0	0	361/5
x_2	80	0	1	1/5	0	−2/5	0	0	404/5
$f(\mathbf{x})$	2300	0	0	2	0	6	0	0	2308

В табл. П.2.5 все коэффициенты строки $f(\mathbf{x})$ неотрицательны, значит, максимум $f(\mathbf{x})$ достигнут и получено соответствующее ему решение: $x_1 = 70$, $x_2 = 80$, $f_{\max}(\mathbf{x}) = 2300$. Слабые переменные оказались равными $x_3 = 0$, $x_4 = 120$, $x_5 = 0$, $x_6 = 40$, $x_7 = 90$.

Замечание П.2.2. Обратим внимание на тот факт, что в рассмотренной задаче оптимальное решение мы устанавливали по наличию неотрицательных коэффициентов в строке максимизируемой целевой функции, а в примере П.2.7 — по наличию неотрицательных коэффициентов в минимизируемой целевой функции. Здесь никакого противоречия нет: в нашем примере переменные указаны со знаком минус, поэтому и рассматривались неотрицательные коэффициенты.

Продолжение примера П.2.8. Рассмотрим графическое решение этой задачи. Поскольку задача двухмерная, то решим ее графически. Система ограничений-неравенств определяет многоугольник допустимых решений (рис. П.2.10). Определим полуплоскости, задаваемые неравенствами-ограничениями задачи. Для этого построим прямые, заменив в ограничениях знаки неравенств на знаки равенств. Чтобы выяснить, какую часть плоскости описывает неравенство, подставляем в него пробную точку, например (0, 0), и устанавливаем, удовлетворяет ли она неравенству. Если неравенство удовлетворяется, то искомая полуплоскость включает точку (0, 0). В противном случае берут другую половину плоскости.

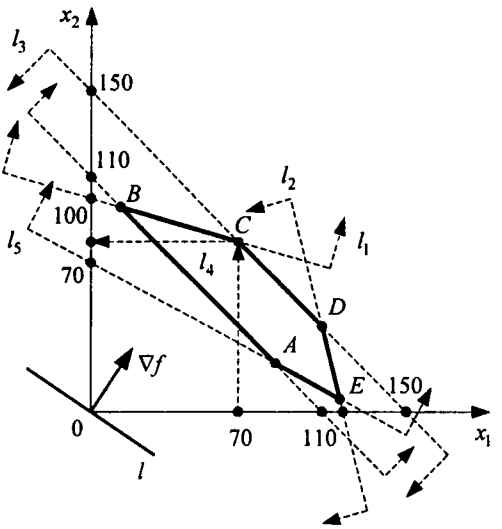


Рис. П.2.10. Графическое решение

Для первого неравенства прямую l_1 $(x_1 + 3{,}5x_2 = 350)$ строим по точкам $x_1 = 0$, $x_2 = 350/3{,}5 = 100$ и $x_2 = 0$, $x_1 = 350$. Пробная точка (0, 0) удовлетворяет неравенству $0 < 350$, т.е. точка (0, 0) входит в искомую полуплоскость (она отмечена стрелочками у прямой l_1). Прямую l_2 $(2x_1 + 0{,}5x_2 = 240)$ строим аналогично: при $x_1 = 0$, $x_2 = 240/0{,}5 = 480$ и при $x_2 = 0$, $x_1 = 240/2 = 120$. Точка (0, 0) принадлежит искомой полуплоскости. Рассмотрим последнее неравенство $10x_1 + 20x_2 \geq 1400$, ему соответствует прямая

$l_5\,(x_1 + 2x_2 = 140)$: при $x_1 = 0$, $x_2 = 140/2 = 70$ и при $x_2 = 0$, $x_1 = 140$. Точка (0, 0) не удовлетворяет неравенству $0 \geq 1400$ (ложно), т.е. надо взять полуплоскость, не содержащую точку (0, 0). Пересечение полуплоскостей дает выпуклый многоугольник *ABCDE*. Для нахождения максимума функции $f(\mathbf{x})$ надо построить линию уровня. Пусть $f(\mathbf{x}) = 0$, тогда уравнение линии уровня l будет $10x_1 + 20x_2 = 0$ — прямая, проходящая через начало координат параллельно прямой l_5: $x_2 = -0{,}5x_1$. Градиент целевой функции $\nabla f = \{10,\ 20\}$ показывает направление ее возрастания. Прямую l перемещаем параллельно самой себе в направлении ∇f до тех пор, пока она «не выйдет» из области D. Получаем точку C — точку пересечения прямых l_1 и l_3:

$$\begin{cases} x_1 + 3{,}5x_2 = 350, \\ x_1 + x_2 = 150. \end{cases}$$

Решая полученную систему уравнений, находим оптимальное решение — координаты точки $C\,(x_1 = 70,\ x_2 = 80)$; вычисляем максимальное значение целевой функции

$$f_{\max}(\mathbf{x}) = 10 \cdot 70 + 20 \cdot 80 = 2300.$$

Допустим, что в рассматриваемой задаче требовалось найти минимум целевой функции

$$f(\mathbf{x}) = 10x_1 + 20x_2.$$

В этом случае линия уровня «вошла» бы в область по линии l_5, т.е. все точки отрезка AE являлись бы оптимальным решением (бесчисленное множество решений).

П.2.3.4. Двойственность в задачах линейного программирования

Рассмотрим теорию двойственности для задач линейного программирования. Для каждой задачи линейного программирования можно построить другую задачу линейного программирования, называемую *двойственной*. Понятие двойственности дает ощутимые преимущества при построении алгоритмов решения задач линейного программирования.

Запишем обе задачи:

Прямая задача:
минимизировать

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,k};$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{k+1,m};$$

$$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,l};$$

$$x_j <> 0,\ j = \overline{l+1,n}.$$

Двойственная задача:
максимизировать

$$\varphi(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$$

при условиях

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,k};$$

$$y_i <> 0,\ i = \overline{k+1,m};$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \leq c_j,\ j = \overline{1,l};$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i = c_j,\ j = \overline{l+1,n}.$$

Симметричность обеих задач очевидна. Неравенству в одной задаче соответствует неотрицательная переменная другой. Равенству одной задачи соответствует свободная переменная другой. Задача, двойственная к двойственной задаче, есть исходная (прямая) задача. Таким образом, любую из этой пары задач можно считать прямой.

Для стандартного и канонического видов задачи линейного программирования двойственные задачи можно записать следующим образом:

Стандартный вид

Прямая задача:	*Двойственная задача*:
минимизировать	максимизировать
$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\varphi(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
при условиях	при условиях
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = \overline{1,m};$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \leq c_j,\ j = \overline{1,n};$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$	$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,m}.$

Канонический вид

Прямая задача:	*Двойственная задача*:
минимизировать	максимизировать
$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$	$\varphi(\mathbf{y}) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i$
при условиях	при условиях
$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = \overline{1,m},$	$\sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \leq c_j,\ j = \overline{1,n},$
$x_j \geq 0,\ j = \overline{1,n}.$	$y_i <> 0,\ i = \overline{1,m}.$

Из сравнения обеих задач нетрудно видеть, что:

1) матрицу из коэффициентов при переменных в исходной задаче

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

и аналогичную матрицу в двойственной задаче

$$\mathbf{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

получают друг из друга простой заменой строк столбцами с сохранением их порядка (такую операцию называют *транспонированием* и обозначают значком «Т»);

2) в исходной задаче имеется n переменных и m ограничений; в двойственной — m переменных и n ограничений;

3) в правых частях систем ограничений каждой из задач стоят коэффициенты целевой функции, взятой из другой задачи;

4) в исходной задаче в систему ограничений входят неравенства типа $\geq$ и требуется *минимизировать* целевую функцию $f(\mathbf{x})$; в двойственной задаче в систему ограничений входят неравенства типа $\leq$ и требуется *максимизировать* целевую функцию $\varphi(\mathbf{y})$.

В теории двойственности доказывают следующую теорему.

Пусть дана пара двойственных задач линейного программирования (заданных в стандартном виде). Тогда справедливо одно и только одно из следующих утверждений:

1. *Обе задачи имеют оптимальные решения и оптимальные значения целевых функций равны, т.е.*
$$\min f(\mathbf{x}) = \max\ \varphi(\mathbf{y}).$$
2. *Одна из задач не имеет ни одного допустимого решения, а другая имеет, по крайней мере, одно допустимое решение, но не имеет оптимального решения* (целевая функция на множестве допустимых решений неограничена).
3. *Ни одна пара задач не имеет допустимых решений.*

Между решениями пары двойственных задач линейного программирования существуют и другие соотношения, которые устанавливаются теоремами о *дополняющей нежесткости*: для того чтобы допустимые решения **x** и **y** прямой и двойственной задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие соотношения:

$$\mathbf{y}(\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0, \qquad \text{(П.2.28)}$$

$$(\mathbf{c} - \mathbf{y}\mathbf{A})\mathbf{x} = 0. \qquad \text{(П.2.29)}$$

Условие (П.2.28) равносильно условиям:

$$\text{если } y_i > 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \ i = \overline{1,m},$$

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j > b_i, \ y_i = 0.$$

Условие (П.2.29) равносильно условиям:

$$\text{если } c_j > \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i, \text{ то } x_j = 0,$$

$$\text{если } x_j > 0, \text{ то } c_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i.$$

Это условия дополняющей нежесткости в слабой форме. В сильной форме условия дополняющей нежесткости утверждают:

$$\text{если } y_i = 0, \text{ то } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i > 0,$$

$$\text{если } \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i = 0, \text{ то } y_i > 0.$$

Может случиться, что $y_i = 0$ и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ одновременно. Но всегда существует, по крайней мере, одна пара оптимальных решений, для которых условия $y_i = 0$ и $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i$ не могут выполняться одновременно.

Нетрудно проверить, что если вектор **x** — решение прямой задачи, а вектор **y** — решение двойственной задачи, то сумма произведений соответствующих координат векторов **x** и **y** равна нулю (скалярное произведение векторов **x** и **y** равно нулю).

Геометрическая интерпретация теории двойственности в задачах линейного программирования

Выберем задачу линейного программирования стандартного вида: минимизировать

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \quad i = \overline{1,m},$$

$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Пусть $\mathbf{a}_i^*\left(b_i^*\right)$ при $i = \overline{1,m}$ совпадают с $\mathbf{a}_i(b_i)$; $\mathbf{a}_{m+i}^*$ есть единичный орт $\mathbf{e}_i$, а $b_{m+i}^* = 0$ при $i = \overline{1,n}$. В пп. П.2.2.2–П.2.2.4 мы видели, что обычное условие наличия безусловного экстремума функции во внутренней точке есть обращение в нуль градиента функции в этой точке. Если при этом должны выполняться некоторые ограничения на переменные в виде равенств, то условием наличия экстремума в допустимой точке будет требование, чтобы в этой точке градиент функции и нормали к поверхностям, соответствующим ограничениям, были направлены в одну сторону. Более точно, градиент функции в этой точке должен быть неотрицательной линейной комбинацией этих нормалей к поверхностям-ограничениям. В задаче линейного программирования каждое неравенство определяет допустимую область — полупространство. Для того чтобы допустимая точка $\mathbf{x}$ была оптимальной, необходимо, чтобы градиент целевой функции в точке $\mathbf{x}$ выражался в виде неотрицательной линейной комбинации направляющих векторов тех и только тех ограничений, которые в точке $\mathbf{x}$ обращаются в равенства, т.е. градиент целевой функции (вектор $\mathbf{c}$) есть неотрицательная линейная комбинация нормалей векторов $\mathbf{a}_i^*$ для ограничений, обращающихся в равенство:

$$\mathbf{c} = \sum_{i=1}^{m+n} y_i \mathbf{a}_i^*, \quad y_i > 0 \Rightarrow \left(\mathbf{a}_i^*, \mathbf{x}\right) = b_i^*,$$

где y_i — соответствующие коэффициенты линейной комбинации.

Из условий дополняющей нежесткости в слабой форме следовало:

$$\text{если } y_i > 0, \text{ то } (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i = 0,$$

$$\text{и если } (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i > 0, \text{ то } y_i = 0.$$

В сильной форме утверждалось, что

$$\text{если } y_i = 0, \text{ то } (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i > 0,$$

$$\text{и если } (\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i = 0, \text{ то } y_i > 0.$$

На рис. П.2.11 изображены три гиперплоскости $(\mathbf{a}_i, \mathbf{x}) - b_i = 0 \ \left(i = \overline{1,3}\right)$ и нормали к ним $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$. Если вектор $\mathbf{c}$ такой, как показано на рис. П.2.11, то он может быть выражен в виде неотрицательной линейной комбинации векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$; вершина, обозначенная кружком, соответствует оптимальному решению. Здесь выполняются и условия дополняющей нежесткости как в слабой, так и в сильной форме: $y_3 > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}) - b_3 = 0$; $y_1 > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) - b_1 = 0$; $y_2 > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) - b_2 = 0$. Если

вектор **c** таков, как показано на рис. П.2.12 (**c** — нормаль к одной из гиперплоскостей), то оптимальная вершина в кружке не удовлетворяет сильной форме условия дополняющей нежесткости, поскольку и $y_2 = 0$, и $(\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) - b_2 = 0$. Но точка, помеченная крестом на рис. П.2.12 и являющаяся оптимальным решением, удовлетворяет и слабой, и сильной формам дополняющей нежесткости: $y_1 > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_1, \mathbf{x}) - b_1 = 0$, $y_2 > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_2, \mathbf{x}) - b_2 = 0$, $y_3 > 0 \Leftrightarrow (\mathbf{a}_3, \mathbf{x}) - b_3 = 0$.

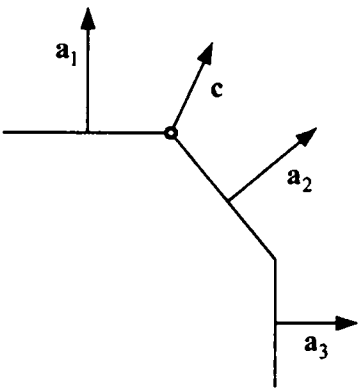


Рис. П.2.11. К иллюстрации выполнения условия дополняющей нежесткости

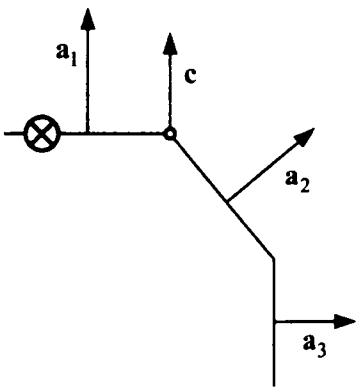


Рис. П.2.12. Нарушение сильной формы условия дополняющей нежесткости

Для решения задач линейного программирования разработан так называемый *двойственный симплекс-метод*. Процедуру начинают с двойственно допустимого решения, когда одновременно $b_i \geq 0$ и $c_j \geq 0$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$, и сохраняют его двойственно допустимым на протяжении всех шагов. Он реализуется посредством таких же таблиц, как и прямой симплекс-метод. Но здесь сначала определяется, какая переменная должна быть выведена из базиса, а затем — какая должна быть введена в базис.

Всегда имеется возможность выбора: решать прямую или двойственную задачу, использовать прямой или двойственный симплекс-метод. Выбирают ту модификацию задачи, которую проще решать. Например, если исходная задача содержит переменные, на которые не наложено условие неотрицательности, то бывает удобнее

решать двойственную задачу. Прежде чем записать двойственную задачу, полезно в исходной прямой задаче освободиться от ограничений в виде равенств, поскольку они будут порождать в двойственной задаче переменные, принадлежащие всей действительной оси.

В симплекс-таблице оптимального решения прямой задачи ЛП присутствует и решение двойственной к ней задачи. Чтобы это увидеть, надо элементы строки, где стоят коэффициенты целевой функции, представить в виде $\mathbf{c}_j - \mathbf{z}_j$; $\mathbf{z}_j = \mathbf{c}_B \cdot \mathbf{y}_j$; $j = \overline{1,n}$, где $\mathbf{c}_B$ — вектор, состоящий из коэффициентов целевой функции *исходной задачи*, стоящих в базисных клетках оптимального решения; $\mathbf{y}_j$ — элементы j-го столбца симплекс-таблицы оптимального решения, и добавить в симплекс-таблицу дополнительную строку $\mathbf{z}_j$. В строке $\mathbf{z}_j$ в столбцах базисных переменных *исходной задачи* (обычно это последние m столбцов) находится *оптимальное решение двойственной задачи*. Таким образом, оптимальное решение $\mathbf{y}^*$ двойственной задачи — это m последних элементов строки $\mathbf{z}_j$ оптимальной симплекс-таблицы прямой задачи; а оптимальным решением $\mathbf{x}^*$ прямой задачи являются n последних элементов строки $\mathbf{z}_j$ оптимальной таблицы двойственной задачи.

В литературе, кроме того, описаны методы одновременного решения прямой и двойственной задач, например метод *последовательного сокращения невязок* $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$, $i = \overline{1,m}$, при фиксированных значениях x_j.

Симплекс-метод дает возможность решить любую задачу линейного программирования. Однако существует много методов решения задач линейного программирования, которые учитывают конкретные особенности решаемой задачи, а потому более эффективны. Примером одной из таких задач является *транспортная задача*, где все коэффициенты при неизвестных в условиях-ограничениях равны единице.

П.2.3.5. Целочисленное линейное программирование

Рассмотрим следующую задачу линейного программирования: максимизировать

$$f(\mathbf{x}) = a_{00} - a_{01}x_1 - a_{02}x_2 - \ldots - a_{0n}x_n$$

при условии

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= a_{n+1,0} - a_{n+1,1}x_1 - a_{n+1,2}x_2 - \ldots - a_{n+1,n}x_n, \\ &\vdots \\ x_{n+m} &= a_{n+m,0} - a_{n+m,1}x_1 - a_{n+m,2}x_2 - \ldots - a_{n+m,n}x_n, \\ x_j &\geq 0 \ \left(j = \overline{1,n+m}\right). \end{aligned} \qquad \text{(П.2.30)}$$

Заметим, что $x_{n+1},\ldots, x_{n+m}$ — слабые переменные, а $x_1,\ldots, x_n$ — исходные переменные задачи (П.2.30). Если наряду с ограничениями (П.2.30) потребовать, чтобы все x_j $\left(j = \overline{1,n}\right)$ были целыми, то задача будет называться *задачей целочисленного программирования*. Существует большое число задач, особенно комбинаторных, которые можно сформулировать как задачи целочисленного программирования.

Ограничения (П.2.30) определяют выпуклую область $OABCD$ в n-мерном пространстве, как показано на рис. П.2.13. Узлы целочисленной решетки на рис. П.2.13 изображены точками. Такие точки, расположенные внутри области $OABCD$, являются

допустимыми решениями задачи целочисленного программирования. Оптимальные решения задачи линейного программирования всегда располагаются на границе области решений. В данном случае граничные точки не являются даже допустимыми решениями, поскольку ни одна из них не целочисленна. Предположим, что область допустимых решений сужена до выпуклой оболочки допустимых целых точек внутри допустимой области. На рис. П.2.13 эта выпуклая оболочка показана затененной областью *OEFGH*, которую можно рассматривать как область допустимых решений некоторой другой задачи линейного программирования. Действительно, если к задаче линейного программирования, определяющей допустимую область *OABCD*, добавить ограничение типа *RR'*, как показано на рис. П.2.13, то для вновь полученной задачи *OEFGH* будет областью допустимых решений. Такая область обладает двумя важными свойствами:

1) содержит все допустимые целочисленные точки исходной задачи линейного программирования (поскольку является выпуклой оболочкой этих точек);
2) все крайние точки новой области — целочисленны. Поэтому любое базисное оптимальное решение модифицированной задачи линейного программирования имеет своими компонентами целые числа и является оптимальным решением исходной задачи целочисленного программирования.

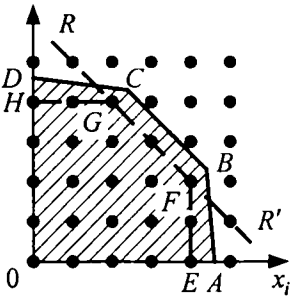


Рис. П.2.13. Области допустимых решений для задач линейного и целочисленного линейного программирования

Как только будут введены дополнительные ограничения, можно решать модифицированную задачу линейного программирования любым обычным методом, и полученное базисное оптимальное решение автоматически будет целочисленным. Представленный ниже целочисленный алгоритм обладает следующими свойствами:

1) все дополнительные ограничения сохраняют допустимые точки исходной целочисленной задачи;
2) за конечное число шагов создается достаточное число дополнительных ограничений для того, чтобы оптимальное решение модифицированной задачи было целочисленным;
3) дополнительные ограничения (гиперплоскости) проходят, по крайней мере, через одну целочисленную точку, хотя и не обязательно находящуюся внутри выпуклой оболочки;
4) каждое новое ограничение сокращает область допустимых решений исходной задачи целочисленного программирования.

Следует подчеркнуть, что оптимальное решение исходной задачи может быть получено прежде, чем размер допустимой области будет сокращен до размеров выпуклой оболочки. К тому же, поскольку оптимальное целочисленное решение определя-

ется пересечением n гиперплоскостей, таких гиперплоскостей существует не более, чем это необходимо; некоторые из них могут соответствовать ограничениям исходной задачи.

Задачу целочисленного программирования также можно записать в виде табл. П.2.6.

Таблица П.2.6

Табличная форма записи задачи целочисленного программирования

	1	$-x_1$	...	$-x_n$
$f(\mathbf{x})$	a_{00}	a_{01}	...	a_{0n}
x_1	0	–1	...	...
...	...	...	...	...
...	...	...	...	...
x_n	0	...	...	–1
x_{n+1}	$a_{n+1,0}$	$a_{n+1,1}$	...	$a_{n+1,n}$
...	...	...	...	...
x_{n+m}	$a_{n+m,0}$	$a_{n+m,1}$	...	$a_{n+m,n}$

Обычно в ограничения задачи (П.2.30) включают тривиальные соотношения $x_j = -(-x_j)$, $j = \overline{1,n}$. Причины представления переменных в виде $(-x_1)$, $(-x_2)$,..., $(-x_n)$ — чисто исторические, но это стало практикой в целочисленном программировании. Будем использовать $\mathbf{a}_j$ $\left(j = \overline{0,n}\right)$ для обозначения j-го столбца текущей таблицы, а a_{ij} $\left(i = \overline{0,n+m};\ j = \overline{0,1}\right)$ — для обозначения элемента i-й строки j-го столбца таблицы. Предполагается, что все a_{ij} в исходной таблице целые. Следовательно, все слабые переменные $x_{n+1},\ldots, x_{n+m}$ должны быть также неотрицательными целыми числами.

Вначале задачу целочисленного программирования рассматривают как задачу линейного программирования и решают ее с помощью прямого или двойственного симплекс-метода.

В двойственном симплекс-методе сначала выбирается переменная, которую исключают из базиса. Она определяется наибольшим по модулю отрицательным элементом столбца свободных членов, т.е. не надо решать вспомогательную задачу ЛП. Чтобы определить переменную, вводимую в базис, рассматривают отношение элементов строки для целевой функции и соответствующих отрицательных элементов ведущей строки. Наименьшее по значению отношение (в задаче максимизации) определяет переменную, вводимую в базис. Операция замещения проводится методом Жордана.

В конце работы алгоритма $a_{i0} \geq 0$, $i = \overline{1,n+m}$, и $a_{0j} \geq 0$, $j = \overline{1,n}$. Если $a_{i0} \geq 0$ целые для всех i, то получено оптимальное решение целочисленной задачи. В этом случае решение получается сразу, без использования ограничений целочисленности. Если $a_{i0} \geq 0$, но не все целые, к ограничениям (П.2.30) добавляют еще одно. Новое ограничение записывают внизу таблицы так, чтобы задача перестала быть прямо допустимой, т.е. $a_{i0} < 0$ для $i = n+m+1$. Затем используют двойственный симплекс-

метод с целью сделать все $a_{i0} \geq 0$. Если a_{i0} получаются нецелыми, в таблицу добавляют новые ограничения до тех пор, пока все a_{i0} $\left(i = \overline{1, n+m}\right)$ не станут целыми и неотрицательными.

Если после введения дополнительного ограничения текущая таблица перестает быть прямо допустимой, то текущее решение, представляющее собой вершину многогранника решений, не удовлетворяет этому дополнительному ограничению. Другими словами, дополнительное ограничение отсекает часть пространства решений. Если дополнительные ограничения не отсекают ни одной целочисленной точки пространства решений исходной задачи, то, вполне вероятно, после введения достаточного числа дополнительных ограничений вершины суженного множества решений будут целочисленными. Тогда, использовав симплекс-метод, можно найти оптимальное целочисленное решение. Трудность состоит в систематическом получении дополнительных ограничений и доказательстве конечности алгоритма.

Каждый раз после проведения итерации симплекс-метода происходит изменение множества небазисных переменных. Изменяется и таблица. Будем использовать t для обозначения t-ой таблицы. Изложим сам алгоритм.

Шаг 1. Решить задачу целочисленного программирования как задачу линейного программирования с помощью прямого или двойственного симплекс-метода. Если получено оптимальное решение задачи линейного программирования, то $a_{i0} \geq 0$, $i = \overline{1, n+m}$, и $a_{0j} \geq 0$, $j = \overline{1, n}$.

Шаг 2. Если a_{i0} все целые, то задача решена и решение получено без использования дополнительных ограничений. В противном случае пусть a_{i0}^t — первая нецелочисленная компонента в $\mathbf{a}_0^t$. Тогда i-я строка называется *производящей*. Следует записать внизу таблицы уравнение, используя данные производящей строки:

$$s = -f_{i0}^t - \sum_j f_{ij}^t \left(-x_j^t\right), \qquad \text{(П.2.31)}$$

где $f_{i0} = a_{i0} - \left[a_{i0}\right]$, $f_{i0} \geq 0$, $f_{ij} = a_{ij} - \left[a_{ij}\right]$; $[\bullet]$ — ближайшее целое к числу.

Переменную s называют *слабой переменной Гомори*, а уравнение (П.2.31) — *отсечением Гомори*. Далее следует проделать шаг (двойственного) симплекс-метода, использовав в качестве ведущей строки отсечение Гомори (П.2.31). При этом таблица останется двойственно допустимой. Повторять до тех пор, пока все a_{i0} $\left(i = \overline{1, n+m}\right)$ не станут целыми неотрицательными. Если a_{i0} на некотором шаге остается отрицательным, следующий шаг (двойственного) симплекс-метода производится без введения отсечения Гомори. (Если a_{00} становится отрицательным, нулевую строку не выбирают в качестве производящей. Если a_{00} становится нецелым, следует выбрать нулевую строку в качестве производящей.)

В приведенном ниже числовом примере все дополнительные ограничения сохраняются на протяжении вычислений. Это сделано для того, чтобы показать, что эти дополнительные ограничения представляют собой неравенства. Причем, если эти неравенства выразить через исходные небазисные переменные, они будут иметь целые коэффициенты.

Если сохранять все строки, соответствующие слабым переменным Гомори, то эти слабые переменные могут стать базисными. Если слабая переменная Гомори вошла в базис с неотрицательным значением, то соответствующая строка представляет собой неравенство, справедливое при текущем решении, и эта строка может быть вычерк-

нута. Если слабая переменная Гомори становится базисной с отрицательным значением, соответствующую строку следует использовать в качестве ведущей. Если сохранять все строки, соответствующие всем отсечениям Гомори, то, вообще говоря, потребуется меньшее число дополнительных ограничений, однако увеличение таблицы предпочтительнее, чем введение лишних дополнительных ограничений.

Приведем пример, иллюстрирующий алгоритм.

Пример П.2.9. Рассмотрим задачу целочисленного программирования: максимизировать

$$f(\mathbf{x}) = 4x_1 + 5x_2 + x_3$$

при условиях

$$3x_1 + 2x_2 \le 10;$$

$$x_1 + 4x_2 \le 11;$$

$$3x_1 + 3x_2 + x_3 \le 13;$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0 \text{ (целые).}$$

Вводя слабые переменные x_4, x_5, x_6, получаем:

	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
$f(\mathbf{x})$	0	–4	–5	–1
x_1	0	–1	0	0
x_2	0	0	–1	0
x_3	0	0	0	–1
x_4	10	3	2	0
x_5	11	1	**4**	0
x_6	13	3	3	1

Решаем задачу линейного программирования (ведущий элемент отмечен):

	1	$-x_1$	$-x_5$	$-x_3$
$f(\mathbf{x})$	55/4	–11/4	5/4	–1
x_1	0	–1	0	0
x_2	11/4	1/4	1/4	0
x_3	0	0	0	–1
x_4	18/4	**10/4**	–2/4	0
x_5	0	0	–1	0
x_6	19/4	9/4	–3/4	1

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_3$
$f(\mathbf{x})$	187/10	11/10	–7/10	–1
x_1	18/10	4/10	–2/10	0
x_2	23/10	–1/10	3/10	0
x_3	0	0	0	–1
x_4	0	–1	0	0
x_5	0	0	–1	0
x_6	7/10	–9/10	–3/10	**1**

↓ ведущий столбец

	1	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	
$f(\mathbf{x})$	194/10	2/10	4/10	1	
x_1	18/10	4/10	–2/10	0	
x_2	23/10	–1/10	3/10	0	
x_3	7/10	–9/10	–3/10	1	← производящая строка
x_4	0	–1	0	0	
x_5	0	0	–1	0	
x_6	0	0	0	–1	
s_1	–7/10	–1/10	**–7/10**	0	

Получено оптимальное решение задачи линейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) = 194/10,\ x_1 = 18/10,\ x_2 = 23/10,\ x_3 = 7/10.$$

Оно не целочисленное. Приступаем к шагу 2, дописываем в последней таблице уравнение отсечения и назначаем производящую строку и ведущий столбец.

	1	$-x_4$	$-s_1$	$-x_6$
$f(\mathbf{x})$	19	1/7	4/7	1
x_1	2	3/7	–2/7	0
x_2	2	–1/7	3/7	0
x_3	1	–6/7	–3/7	1
x_4	0	–1	0	0
x_5	1	1/7	–10/7	0
x_6	0	0	0	–1
s_1	0	0	–1	0

Откуда находим оптимальное целочисленное решение

$$f_{\max}(\mathbf{x}) = 19,\ x_1 = 2,\ x_2 = 2,\ x_3 = 1.$$

Выразив x_4, x_5 и x_6 через исходные небазисные переменные x_1, x_2 и x_3, получим неравенство $s_1 \geq 0$ с целыми коэффициентами:

$$-\frac{7}{10} + \frac{1}{10}(10 - 3x_1 - 2x_2) + \frac{7}{10}(11 - x_1 - 4x_2) \geq 0,$$

или $x_1 + 3x_2 \leq 8$. Чтобы получить матрицу, полностью целочисленную, просто продолжим введение отсечений:

↓ ведущий столбец

	1	$-x_4$	$-s_1$	$-x_6$	
$f(\mathbf{x})$	19	1/7	4/7	1	
x_1	2	3/7	–2/7	0	
x_2	2	–1/7	3/7	0	
x_3	1	–6/7	–3/7	1	← производящая строка
x_4	0	–1	0	0	
x_5	1	1/7	–10/7	0	
x_6	0	0	0	–1	
s_1	0	0	–1	0	
s_2	0	**–1/7**	–4/7	0	

	1	$-s_2$	$-s_1$	$-x_6$
$f(\mathbf{x})$	19	1	0	1
x_1	2	3	–2	0
x_2	2	–1	1	0
x_3	1	–6	3	1
x_4	0	–7	4	0
x_5	1	1	–2	0
x_6	0	0	0	–1
s_1	0	0	–1	0
s_2	0	–1	0	0

П.2.3.6. Дробно-линейное программирование

В дробно-линейном программировании (ДЛП) целевая функция является дробно-линейной вида

$$\max\left\{z=\frac{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\alpha}{\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\beta}\right\},$$

где α и β — скалярные константы; $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ — векторы; $\mathbf{x}$ — вектор искомых переменных

$$\mathbf{x}\in D=\left\{\mathbf{x}\in R^n \mid \mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b};\ \ \mathbf{x}\geq 0;\ \ \mathbf{b}\in R^m\right\}.$$

Таким образом, в качестве целевой функции используется отношение двух линейных функций; условия ограничения задачи остаются линейными: линейные равенства и неравенства.

Обычно предполагают, что знаменатель целевой функции положителен и не обращается в нуль в области D.

Задачи ДЛП применяются в тех приложениях, когда оптимизируются относительные показатели.

Поверхности уровня целевой функции в задаче ДЛП линейны, поскольку если взять значения целевой функции z_0, то

$$\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\alpha=z_0\left(\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\beta\right)$$

или $\left(\mathbf{c}-z_0\mathbf{d}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=z_0\beta+\alpha$ — линейное уравнение, если знаменатель целевой функции на D не равен нулю.

Таким образом, если задача ДЛП имеет оптимальное решение, то, по крайней мере, одна крайняя точка из D будет оптимальной. Однако линии уровня целевой функции расходятся как лучи от *множества вращения* размерности $(n-2)$. *Множество вращения* — это множество пересечения нулевой линии уровня числителя $\left(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\alpha=0\right)$ с нулевой линией уровня знаменателя $\left(\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\beta=0\right)$, т.е. множество точек, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases}\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=-\alpha;\\ \mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=-\beta.\end{cases}$$

Вращая линию уровня целевой функции в направлении вектора $\mathbf{d}$ против часовой стрелки, увеличиваем значение целевой функции; вращая линию уровня по часовой стрелке — уменьшаем значение целевой функции.

Если знаменатель целевой функции отрицателен на D, то следует дробь умножить на (-1), *не изменяя* при этом условия максимума или минимума целевой функции.

Для решения задач ДЛП применяют преобразование переменных и процедуру обновления целевой функции.

Преобразование переменных

Путем преобразования переменных задачу ДЛП при положительном на D знаменателе сводят к задаче линейного программирования.

Делается замена переменных

$$\rho = \left(\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \beta\right)^{-1} \text{ и } y_i = x_i\rho \text{ для всех } i.$$

Задача ДЛП принимает вид: отыскать

$$\max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \alpha\rho\right\}$$

при ограничениях

$$\frac{\mathbf{A}\mathbf{y}}{\rho} = \mathbf{b},$$

$$\left(\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} + \beta\right)\rho = 1,$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{y} \in R^n,\ 0 \le \rho \in R.$$

Появляется новая переменная ρ. Получили задачу линейного программирования: отыскать

$$\max\left\{\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \alpha\beta\right\}$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}\mathbf{y} - \mathbf{b}\rho = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{y} + \beta\rho = 1,$$

$$\mathbf{0} \le \mathbf{y} \in R^n,\ 0 \le \rho \in R,$$

с $(m+1)$ ограничениями и $(n+1)$ переменной.

Пример П.2.10. Решить задачу ДЛП: отыскать

$$\max\left\{\frac{x_2 - 5}{-x_1 - x_2 + 9} = z\right\}$$

при ограничениях

$$2x_1 + 5x_2 \ge 10,$$
$$4x_1 + 3x_2 \le 20,$$
$$-x_1 + x_2 \le 2,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0.$$

После замены переменных получим задачу линейного программирования: получить

$$\max\left\{y_2 - 5\rho\right\}$$

при ограничениях

$$2y_1 + 5y_2 - 10\rho \ge 0,$$
$$4y_1 + 3y_2 - 20\rho \le 0,$$
$$-y_1 + y_2 - 2\rho \le 0,$$
$$-y_1 - y_2 + 9\rho = 1,$$
$$y_1, y_2, \rho \ge 0.$$

Решая ее симплекс-методом, получим $y_1 = 2/3$, $y_2 = 4/3$, $\rho = 1/3$, т.е. оптимальное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

Обновление целевой функции

Задача ДЛП решается как последовательность задач линейного программирования, где на каждой итерации подсчитывается градиент целевой функции

$$\frac{\left(\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\beta\right)\mathbf{c}-\left(\mathbf{c}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\alpha\right)\mathbf{d}}{\left(\mathbf{d}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}+\beta\right)^{2}}$$

в полученной оптимальной точке. С новым значением градиента решается новая задача линейного программирования. Процесс повторяется до тех пор, пока решение не будет изменяться.

При обращении на D в нуль знаменателя могут быть следующие случаи:

1. Знаменатель принимает на D как положительные, так и отрицательные значения — в таких случаях целевая функция z не имеет ни конечного максимума, ни конечного минимума.
2. Знаменатель всюду на D равен нулю — всем точкам из D соответствуют неопределенные значения z.
3. Векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ коллинеарны:
   а) множество вращения пусто — нулевые линии уровня числителя и знаменателя параллельны, но не совпадают друг с другом; z не ограничена сверху и не определена в крайней точке;
   б) множество вращения не пусто — числитель и знаменатель имеют идентичные нулевые линии уровня; z постоянна на D, кроме некоторых точек, где z имеет значение $0/0$.
4. Векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$ не коллинеарны:
   а) D — подмножество множества вращения: всем точкам из D соответствуют значения z вида $0/0$;
   б) знаменатель всюду равен нулю: $z=0$ всюду, кроме точек из D, принадлежащих множеству вращения, где z принимает значения $0/0$;
   в) на D существуют точки, где знаменатель не равен нулю, здесь могут быть:
      - конечные минимумы и конечные максимумы;
      - конечные минимумы, но неограниченные максимумы;
      - неограниченные минимумы и максимумы.

П.2.3.7. Анализ устойчивости оптимального решения задачи линейного программирования

В задачах линейного программирования важно знать, как изменится решение задачи линейного программирования в процессе изменения ее параметров: коэффициентов целевой функции, элементов матрицы и правой части условий-ограничений. А особенно важно знать, при каких изменениях параметров задачи оптимальное решение этой задачи останется неизменным. Изменение параметров задачи линейного программирования может происходить за счет изменения условий функционирования описываемых объектов (например, изменяются цены на комплектующие изделия, на трудовые ресурсы, изменяется стоимость продукции на рынке и т.д.). Эти изменения определяют неопределенность параметров задачи и являются в данном случае детерминированными величинами.

В ряде других случаев параметры задачи линейного программирования являются случайными величинами. И тогда важно знать, как может изменяться решение задачи от реализации к реализации. При этом необходимо иметь, по крайней мере, сведения о математическом ожидании и дисперсии этих случайных величин, если нет возмож-

ности оценить их функции распределения. В таком случае неопределенностям значений параметров надо указать соответствующую им доверительную вероятность.

Как правило, в подобных случаях для получения ответа решают серию прямых близких задач, изменяя значения параметров.

Особенностью задачи линейного программирования является тот факт, что полученное оптимальное решение может не меняться при изменении значений параметров в целевой функции и в условиях-ограничениях в достаточно широких пределах. Более привычным является «непрерывный» вариант: при небольших изменениях параметров задачи обязательно изменяется и решение — координаты точки оптимума. В этом смысле можно использовать параметрическое программирование, когда определяется поведение решения задачи линейного программирования в зависимости от параметра t, включенного в коэффициенты целевой функции и в элементы матрицы и правой части условий-ограничений. Но эти процедуры даже для одного параметра t громоздки; и путем введения параметра t не удается описать все возможные изменения параметров задачи. Рассмотрим алгоритм, который позволяет определить допустимые множества значений параметров задачи линейного программирования, не приводящих к изменению найденного оптимального решения, и, таким образом, указать диапазон изменения каждого параметра.

Имеем задачу линейного программирования (с одним критерием): целевая функция

$$\max \mathbf{cx} = z \qquad (\text{П.2.32})$$

при условиях

$$\begin{cases} \mathbf{A}_1\mathbf{x} \geq \mathbf{b}_1, \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{b}_2, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \qquad (\text{П.2.33})$$

где $\mathbf{c}$ — вектор коэффициентов целевой функции; z — значение целевой функции; $\mathbf{x}$ — вектор исходных (структурных) переменных; $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$ — векторы правых частей; $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ — матрицы системы ограничений неравенств и равенств.

Для аналитического решения задача линейного программирования записывается в канонической форме: целевая функция

$$\max \mathbf{cx} = z$$

при условиях

$$\begin{cases} \mathbf{Ax} = \mathbf{b}, \\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}, \end{cases} \qquad (\text{П.2.34})$$

где $\mathbf{x}$ — вектор, включающий в себя исходные и дополнительные (слабые) переменные; $\mathbf{A}$ — прямоугольная матрица размерности $m \times n$, расширенная за счет дополнительных переменных, превращающих неравенства (П.2.33) в равенства; $\mathbf{b}$ — вектор правых частей (объединяет векторы $\mathbf{b}_1$ и $\mathbf{b}_2$); $\mathbf{c}$ — вектор коэффициентов целевой функции.

Будем исследовать устойчивость точки оптимального решения задачи (П.2.32), (П.2.33) в следующих вариантах:

1) неопределенность или погрешность содержится только в коэффициентах $\mathbf{c}$ целевой функции;
2) неопределенность или погрешность содержится только в элементах вектора $\mathbf{b}$;
3) неопределенность или погрешность содержится только в элементах матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ (т.е. в элементах матрицы $\mathbf{A}$, исключая элементы, относящиеся к дополнительным переменным).

Алгоритмы учета других комбинаций неопределенностей основываются на этих случаях.

Будем в дальнейшем полагать, что задача линейного программирования решается с помощью симплекс-метода.

Неопределенность в коэффициентах целевой функции

Точка оптимума в симплекс-методе определяется условием

$$c_j - z_j \le 0, \quad z_j = \left(\mathbf{c}_B \mathbf{a}_j\right), \quad j = \overline{1,n},$$

где $\mathbf{c}_B$ — вектор из элементов c_j, относящихся к базисным переменным; $\mathbf{a}_j$ — j-й столбец матрицы $\mathbf{A}$. Значение целевой функции $z = \mathbf{c}_B \mathbf{b}$.

Пусть вместо c_j имеем значение $c_j + \Delta c_j$, $j = \overline{1,n}$, тогда условие оптимума будет определяться величиной

$$c_j + \Delta c_j - \left[\left(\mathbf{c}_B + \Delta \mathbf{c}_B\right)\mathbf{a}_j\right] = \left[c_j - \left(\mathbf{c}_B \mathbf{a}_j\right)\right] + \left[\Delta c_j - \left(\Delta \mathbf{c}_B \mathbf{a}_j\right)\right], \quad j = \overline{1,n}. \qquad (\text{П.2.35})$$

Нарушение условия оптимальности зависит от конкретных значений последнего слагаемого в выражении (П.2.35): если все $\Delta c_j - \left(\Delta \mathbf{c}_B \mathbf{a}_j\right) \le 0$, то оптимальное решение не изменяется; при наличии хотя бы одного $\left(\Delta c_j - \left(\Delta \mathbf{c}_B \mathbf{a}_j\right)\right) > 0$ возможно изменение оптимального решения.

Система неравенств

$$\left[c_j - \left(\mathbf{c}_B \mathbf{a}_j\right)\right] + \left[\Delta c_j - \left(\Delta \mathbf{c}_B \mathbf{a}_j\right)\right] \le 0, \quad j = \overline{1,n}, \qquad (\text{П.2.36})$$

определяет то множество значений элементов Δc_j, $j = \overline{1,n}$ (куда входят и элементы вектора $\Delta \mathbf{c}_B$), которые не нарушают условия оптимума в данной точке.

Пример П.2.11. Рассмотрим задачу линейного программирования (см. п. П.2.3.3). Математическая модель этой задачи имеет следующий вид: отыскать

$$\max z = 10x_1 + 20x_2$$

при условиях

$$\begin{cases} x_1 + 3{,}5x_2 \le 350; \\ 2x_1 + 0{,}5x_2 \le 240; \\ x_1 + x_2 \le 150; \\ x_1 + x_2 \ge 110; \\ 10x_1 + 20x_2 \ge 1400, \end{cases} \qquad (\text{П.2.37})$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Оптимальное решение задачи приведено в симплекс-таблице (табл. П.2.7).

Таблица П.2.7

Оптимальное решение задачи

Базис	b	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_6$	$-x_7$
X_7	90	0	0	1/5	0	3/5	0	1
X_4	120	0	0	3/5	1	–26/5	0	0
X_6	40	0	0	0	0	1	1	0
X_1	70	1	0	–1/5	0	7/5	0	0
X_2	80	0	1	1/5	0	–2/5	0	0
Z	2300	0	0	2	0	6	0	0

Элементы строки Z для переменных x_j, $j=1,2,\ldots,7$, взятые с противоположным знаком, и есть значения $c_j - z_j = c_j - (\mathbf{c}_B \mathbf{a}_j)$, по которым судят об оптимальности решения. Различие в знаках обусловлено правилами заполнения симплекс-таблиц.

Неопределенность содержится в коэффициентах исходной целевой функции. Поэтому неопределенность $\Delta c_j \neq 0$ для $j=1,2$, $\Delta c_j = 0$ для $j=3,\ldots,7$; $\Delta \mathbf{c}_B = \{0,0,0,\Delta c_1, \Delta c_2\}$. Рассчитаем значения $\Delta_j = \Delta c_j - (\Delta \mathbf{c}_B \mathbf{a}_j)$ для различных j:

$$\text{при } j=1,2,4,6,7 \quad \Delta_j = 0,$$

$$\text{при } j=3 \quad \Delta_3 = 1/5\Delta c_1 - 1/5\Delta c_2,$$

$$\text{при } j=5 \quad \Delta_5 = -7/5\Delta c_1 + 2/5\Delta c_2.$$

Таким образом на выбор оптимальной точки в данном случае оказывают влияние только коэффициенты при $j=3$ и $j=5$. Точка оптимума не изменится для тех значений Δc_1 и Δc_2, когда, согласно (П.2.36),

$$\begin{cases} -2 + 1/5\Delta c_1 - 1/5\Delta c_2 \le 0, \\ -6 - 7/5\Delta c_1 + 2/5\Delta c_2 \le 0. \end{cases}$$

Множество D таких значений представляет собой часть плоскости Δc_1 и Δc_2, заключенную между двумя лучами, выходящими из точки $(-10,-20)$ в направлениях $\mathbf{v}_1 = \{1,1\}$ и $\mathbf{v}_2 = \{1,3,5\}$.

Проблему устойчивости точки оптимума в задаче линейного программирования при неопределенности только в коэффициентах целевой функции можно свести к геометрическому аналогу. Плоскость, вектор нормали которой определен коэффициентами целевой функции, в точке оптимума может быть повернута таким образом, чтобы она коснулась граней выпуклого многогранника, содержащего точку оптимума. Диапазон изменения углов поворота плоскости и будет определять допустимый разброс значений коэффициентов целевой функции.

Для удобства все уравнения линейных поверхностей запишем в нормальном (нормированном) виде. Таким образом, мы будем иметь дело с направляющими косинусами плоскостей; в трехмерном пространстве это $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$. Чтобы определить грани многогранника, содержащие точку оптимума, подставим координаты точки оптимума в ограничения (П.2.33). Те ограничения, которые выполняются в виде равенств, определяют искомые грани.

Пусть некоторая грань в 3-х мерном пространстве имеет уравнение

$$ax + by + cz + d = 0,$$

нормальное уравнение этой плоскости

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0,$$

где x, y, z — текущие координаты; a, b, c, d — параметры уравнения плоскости; p — параметр, определяющий расстояние до плоскости от начала координат;

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Для плоскости, соответствующей целевой функции с параметрами c_1, c_2, c_3, получим

$$\cos\alpha_0 = \frac{c_1}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}, \quad \cos\beta_0 = \frac{c_2}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}, \quad \cos\gamma_0 = \frac{c_3}{\sqrt{c_1^2+c_2^2+c_3^2}}.$$

Здесь важны не сами значения c_1, c_2, c_3, а их отношения

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\beta_0}, \quad \frac{c_1}{c_3} = \frac{\cos\alpha_0}{\cos\gamma_0}, \quad \frac{c_2}{c_3} = \frac{\cos\beta_0}{\cos\gamma_0}. \qquad \text{(П.2.38)}$$

Если некоторая i-я грань многогранника имеет направляющие косинусы $\cos\alpha_i$, $\cos\beta_i$, $\cos\gamma_i$, то всякая плоскость, направляющие косинусы которой будут иметь значения между $\cos\alpha_0$ и $\cos\alpha_i$; $\cos\beta_0$ и $\cos\beta_i$; $\cos\gamma_0$ и $\cos\gamma_i$, не изменит положение оптимальной точки. Проанализировав таким образом все грани, которым принадлежит оптимальная точка, найдем диапазон отношений параметров (коэффициентов) плоскости a, b и c, которым должны удовлетворять плоскости, проходящие через оптимальную точку и не изменяющие оптимальное решение задачи. Отсюда легко получить возможный диапазон неопределенностей в значениях коэффициентов целевой функции, не влияющих на решение задачи.

Продолжение примера П.2.11. Определим стороны многоугольника, которым принадлежит точка оптимума. Подставим оптимальное решение задачи $x_1 = 70$; $x_2 = 80$ в исходную модель (П.2.37) и получим, что оптимальная точка есть точка пересечения прямых $x_1 + 3{,}5x_2 = 350$ и $x_1 + x_2 = 150$.

Вектор нормали целевой функции имеет координаты $\{10,20\}$; вектор нормали первой прямой — $\{1,7/2\}$; вектор нормали второй прямой — $\{1,1\}$. С одной стороны, вектор нормали целевой функции может быть повернут до вектора нормали первой прямой, с другой стороны — до второй, т.е. согласно (П.2.38)

$$\frac{\cos\beta_1}{\cos\alpha_1} \ge \frac{c_2 + \Delta c_2}{c_1 + \Delta c_1} \ge \frac{\cos\beta_2}{\cos\alpha_2},$$

$$\cos\alpha_1 = 0{,}275,\ \cos\beta_1 = 0{,}962,\ \cos\alpha_2 = \cos\beta_2 = 0{,}707.$$

Окончательно условие (П.2.34) примет вид

$$3{,}5 \ge \frac{c_2 + \Delta c_2}{c_1 + \Delta c_1} \ge 1.$$

Таким образом, если отношение коэффициентов целевой функции лежит в пределах от 1 до 3,5, то координаты оптимальной точки не изменятся.

Полученный результат полезно сравнить с приведенным выше аналитическим расчетом.

Неопределенность только в координатах вектора правой части

При изменении значений правой части исходной системы (П.2.33), в процессе решения изменяется только столбец свободных членов $\mathbf{b}$ и значение целевой функции z. В точке оптимума столбец свободных членов не содержит отрицательных элементов. Таким образом, неопределенность в координатах вектора правой части до тех пор не влияет на оптимальное решение, пока не появятся отрицательные элементы в столбце свободных членов.

Представим матрицу полного ранга $\mathbf{A}$ из (П.2.34) в виде двух блоков $\mathbf{N}$ и $\mathbf{B}$: $\mathbf{A} = [\mathbf{N} \mid \mathbf{B}]$, где $\mathbf{N}$ состоит из небазисных столбцов $\mathbf{A}$, а $\mathbf{B}$ — из базисных. Аналогично, векторы $\mathbf{c}$ и $\mathbf{x}$ состоят из базисных и небазисных координат: $\mathbf{c} = [\mathbf{c_N} \mid \mathbf{c_B}]$; $\mathbf{x} = [\mathbf{x_N} \mid \mathbf{x_B}]$. Следовательно, имеем

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{Nx_N} + \mathbf{Bx_B} = \mathbf{b},$$

$$\mathbf{B^{-1}Nx_N} + \mathbf{B^{-1}Bx_B} = \mathbf{B^{-1}b},$$

$$\mathbf{x_B} = \mathbf{B^{-1}b},$$

так как $\mathbf{x_N} = \mathbf{0}$. Отсюда, столбец свободных членов $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$ на *любой* итерации может быть получен умножением матрицы $\mathbf{B^{-1}}$ на вектор $\mathbf{b}$ в *исходной* постановке (П.2.34). Сама же матрица $\mathbf{B}$ формируется из тех столбцов исходной матрицы $\mathbf{A}$ из (П.2.34), номера которых на данной итерации определяют базисные переменные. С другой сто-

роны, j-й столбец в матрице $\mathbf{A}$ (матрица $\mathbf{A}$ после преобразования становится матрицей $\mathbf{Y}$) для данной итерации $\left(\mathbf{y}_j\right)$ имеет вид

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j,$$

где $\mathbf{a}_j$ — j-й столбец в исходной матрице $\mathbf{A}$ из (П.2.34).

Столбцы матрицы $\mathbf{B}^{-1}$ — это столбцы тех переменных текущей матрицы $\mathbf{Y}$, которые были базисными в *исходной* таблице (как правило, это последние m столбцов), так как $\mathbf{Y} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$, а столбцы $\mathbf{A}$, относящиеся к базису *исходной* таблицы, образуют единичную матрицу, т.е. матрицу $\mathbf{B}^{-1}$ мы всегда имеем в процессе решения. *Исходный* вектор $\mathbf{b}$ и неопределенность его значения $\Delta\mathbf{b}$ задаются. Таким образом, получают новый столбец свободных членов. Если исходный вектор равен $\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}$, то новый столбец свободных членов

$$\mathbf{B}^{-1}\left(\mathbf{b} + \Delta\mathbf{b}\right) = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} = \mathbf{x}_\mathbf{B} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b}.$$

Поскольку в столбце свободных членов оптимального решения не должно быть отрицательных элементов, то условие стабильности примет вид

$$\mathbf{x}_\mathbf{B} + \mathbf{B}^{-1}\Delta\mathbf{b} \geq 0.$$

Пример П.2.12. Рассмотрим описанный пример в предположении, что *исходный* вектор правой части $\mathbf{b} = [350 \quad 240 \quad 150 \quad -110 \quad -1400]$ имеет неопределенность $\Delta\mathbf{b} = [\Delta b_1 \quad \Delta b_2 \quad \Delta b_3 \quad \Delta b_4 \quad \Delta b_5]$, т.е. надо рассматривать вектор $[350 + \Delta b_1 \quad 240 + \Delta b_2 \quad 150 + \Delta b_3 \quad -110 + \Delta b_4 \quad -1400 + \Delta b_5]$. Матрица $\mathbf{B}^{-1}$ занимает пять последних столбцов симплекс-таблицы оптимального решения:

$$\mathbf{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 & 3/5 & 0 & 1 \\ 3/5 & 1 & -26/5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1/5 & 0 & 7/5 & 0 & 0 \\ 1/5 & 0 & -2/5 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Условие стабильности оптимального решения данной задачи имеет вид

$$\begin{gathered} 90 + \Delta b_1 + 3/5\Delta b_3 \geq 0, \\ 120 + \Delta b_2 - 26/5\Delta b_3 \geq 0, \\ 40 + \Delta b_3 \geq 0, \\ 70 + \Delta b_4 + 7/5\Delta b_3 \geq 0, \\ 80 + \Delta b_5 - 2/5\Delta b_3 \geq 0. \end{gathered}$$

Отсюда находятся те комбинации Δb_i, $i = \overline{1,5}$, при которых оптимальное решение не изменится.

Неопределенность в элементах матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$

Если неопределенность имеет место в отдельных элементах матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$, то можно воспользоваться тем, что элементы матрицы $\mathbf{Y}$ оптимального решения определяются через матрицу $\mathbf{B}^{-1}$ и исходную матрицу $\mathbf{A}$ из (П.2.34):

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{a}_j,\ j = \overline{1,n}.$$

Пусть только один элемент a_{ij} имеет неопределенность Δa_{ij}. В матрице $\mathbf{Y}$ оптимального решения получим элемент $y_{ij} = \mathbf{B}_i^{-1}\left(\mathbf{a}_j + \Delta\mathbf{a}_j\right)$. По знаку рассматриваемого элемента y_{ij} принимается соответствующее решение.

Этот подход приемлем для небольшого числа элементов матриц, имеющих неопределенность.

Рассмотрим более общий подход. Пусть все элементы матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ имеют неопределенности Δa_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$. «Перенесем» неопределенности Δa_{ij} в неопределенности правой части. В таком случае надо вычислить неопределенность i-ой линейной комбинации $\sum_j a_{ij}x_j$ и добавить ее к неопределенности правой части Δb_i. Теперь возникает вопрос, согласно какой гипотезе вычислить неопределенность линейной комбинации и согласно какой гипотезе присоединить ее к неопределенности правой части. От выбора этих гипотез зависит конкретный алгоритм выполнения названных операций.

Рассмотрим два случая. В первом неопределенность Δa_{ij} является детерминированной величиной (например, показывает изменение цены некоторого ресурса); во втором (в задачах линейного программирования с другим физическим содержанием) — неопределенность Δa_{ij} будет случайной величиной, для которой известны математическое ожидание и дисперсия. Тогда, в первом случае неопределенность i-й линейной комбинации $\sum_j a_{ij}x_j$ будет равна $\sum_j \Delta a_{ij}x_j$, а полная неопределенность i-й координаты вектора правой части есть

$$\Delta_\Sigma b_i = \sum_j \Delta a_{ij}x_j + \Delta b_i. \qquad \text{(П.2.39)}$$

Во втором случае мы будем исходить из того, что все участвующие в расчете неопределенности носят случайный характер и мы можем вычислить дисперсию линейной комбинации, считая Δa_{ij}, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$, независимыми случайными величинами с известными дисперсиями $D(a_{ij})$, а затем суммировать дисперсию линейной комбинации и неопределенности правой части Δb_i, полагая $(\Delta b_i)^2$ равной дисперсии b_i, т.е. $D(b_i)=(\Delta b_i)^2$.

Таким образом, дисперсия линейной комбинации будет

$$D_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 D(a_{ij}),$$

а полная неопределенность (погрешность) i-ой координаты вектора правой части $\Delta_\Sigma b_i$ равна

$$\Delta_\Sigma b_i = \sqrt{D_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right) + D(b_i)} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 D(a_{ij}) + (\Delta b_i)^2}. \qquad \text{(П.2.40)}$$

В формулах (П.2.39) и (П.2.40) значения x_j, $j=\overline{1,n}$, берутся из таблицы оптимального решения. Далее анализируем ситуацию так же, как и в случае наличия неопределенности только в правой части. Очевидно, что исследование может проводиться подобным образом и для случая $\Delta b_i = 0$, $i=\overline{1,m}$.

П.2.3.8. Методы ветвей и границ

Методы типа ветвей и границ предназначены для решения широкого круга дискретных оптимизационных задач. Различные методы типа ветвей и границ существенно используют специфику конкретных задач и поэтому заметно отличаются друг от друга. Но все они основаны на последовательном разбиении допустимого множе-

ства решений X на подмножества (ветвления) и вычислении оценок (границ), позволяющих отбрасывать подмножества, заведомо не содержащие решения задачи.

Пусть требуется найти точку минимума функции $f(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in X$. В зависимости от специфики задачи выбирается способ вычисления оценок снизу $d(X')$ функции $f(\mathbf{x})$ на подмножествах $X' \subset X$ (может быть, что $X' = X$):

$$f(\mathbf{x}) \geq d(X'), \ \mathbf{x} \in X'.$$

Оценка снизу часто вычисляется путем релаксации, т.е. замены минимизации функции $f(\mathbf{x})$ на множестве X' задачей минимизации по некоторому более широкому множеству. Например, в целочисленных задачах отбрасывается требование целочисленности.

Выбирается также правило ветвления, состоящее в выборе разветвляемого подмножества X' из числа подмножеств, на которые к данному шагу разбито множество X, и выборе способа разбиения X' на непересекающиеся подмножества: ветвлению подвергается подзадача минимизации функции $f(\mathbf{x})$ на множестве X'. Обычно из числа кандидатов на ветвление выбирается множество X' с наименьшей оценкой, поскольку в таком множестве естественно искать минимум в первую очередь. При этом рассматриваются только такие способы вычисления оценок снизу, в которых оценки для подмножеств, получившихся в результате разветвления X', не меньше $d(X')$.

При решении релаксированной задачи может оказаться, что:

1) допустимое множество релаксированной задачи пусто, т.е. $X' = \varnothing$;
2) значение $d(X')$ минимума для релаксированной задачи больше или равно наименьшему из уже вычисленных значений функции $f(\mathbf{x})$ (текущему значению рекорда) и потому $\min\limits_{\mathbf{x} \in X} f(\mathbf{x})$ достигается вне множества X';
3) точка минимума для релаксированной задачи принадлежит множеству X' и, следовательно, является точкой минимума $f(\mathbf{x})$ на X'.

Во всех трех случаях множество X' исключается из числа кандидатов на дальнейшее ветвление. В случае 1 текущее значение рекорда полагается равным минимуму из предыдущего текущего значения — вычисленного значения $\min\limits_{\mathbf{x} \in X'} f(\mathbf{x})$.

В методе ветвей и границ на каждом шаге искомое значение не больше текущего значения рекорда (верхней границы) и не меньше наименьшей из оценок снизу для подзадач, входящих на данном шаге в число кандидатов на ветвление (нижняя граница).

Существуют варианты метода ветвей и границ, разработанные специально для отыскания приближенного решения различных задач.

Пример П.2.13. Рассмотрим решение целочисленной задачи линейного программирования:

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i, \ i = \overline{1,m}, \ x_j \geq 0, \ j = \overline{1,n},$$

$$x_j \in \{0,1,2,\ldots\}, \ j \in J \subset \{1,\ldots,n\}.$$

Допустимое множество задачи X предполагается ограниченным, оценки снизу вычисляются с помощью релаксации — отбрасывания условия целочисленности переменных. Оценку снизу получают с помощью симплекс-метода.

Если после решения симплекс-методом решение не является целочисленным, то на первом шаге алгоритма выбирается любая нецелочисленная компонента $X_{r_1}^1$, $r_1 \in J$, полученного решения и исходная задача разветвляется на две подзадачи: первая — с дополнительным ограничением $X_{r_1} \le \left[X_{r_1}^1\right]$, вторая — с дополнительным ограничением $X_{r_1} \ge \left[X_{r_1}^1\right]+1$. Вычисляются оценки снизу, и если обе подзадачи остаются в числе кандидатов на дальнейшее ветвление, то для ветвления на втором шаге выбирается подзадача с минимальной оценкой.

На k-м шаге выбранная на $(k-1)$-м шаге подзадача разветвляется на две новые с дополнительными ограничениями $X_{r_k} \le \left[X_{r_k}^k\right]$ и $X_{r_k} \ge \left[X_{r_k}^k\right]+1$ соответственно, где $X_{r_k}(r_k \in J)$ — любая нецелочисленная компонента решения X^k задачи линейного программирования, получающейся релаксацией подзадачи, выбранной на $(k-1)$-м шаге. Для новых подзадач вычисляются оценки снизу. Формируется список кандидатов на ветвление. Для ветвления на $(k+1)$-м шаге из числа кандидатов на ветвление выбирается подзадача с минимальной оценкой.

Конечность алгоритма следует из ограниченности множества X.

Процесс ветвления существенно упрощается, если в задаче фигурируют ограничения

$$x_j \in \{0;1\},\ j \in J \subset \{1,2,\ldots,n\}.$$

П.2.3.9. Решение задачи выбора оптимального маршрута методом ветвей и границ

Приведем словесную постановку задачи в общем виде. Необходимо посетить пять различных пунктов, причем каждый из пунктов — лишь один раз, и вернуться в исходный пункт. Перемещение между пунктами характеризуется определенными затратами (табл. П.2.8). Критерием оптимальности является минимальная стоимость выбранного маршрута. Матрица стоимостей является несимметричной. При симметричной матрице стоимостей процедура решения задачи не изменяется.

Таблица П.2.8

Матрица стоимостей (условные единицы)

№	Пункты	Исходный пункт	A	B	C	D	E
		1	2	3	4	5	6
1	Исходный пункт	—	27	43	16	30	26
2	A	7	—	16	1	30	30
3	B	20	13	—	35	5	0
4	C	21	16	25	—	18	18
5	D	12	46	27	48	—	5
6	E	23	5	5	9	5	—

Подобные задачи в математическом программировании носят название *«задача коммивояжера»*. Ее формулируют следующим образом. Отправившись из исходного пункта и побывав в каждом из остальных $(n-1)$ пунктов ровно один раз, необходимо вернуться в исходный пункт. Задача заключается в определении последовательности объезда пунктов, которая минимизирует некоторый критерий эффективности: стоимость маршрута, расход топлива, время пути, суммарное расстояние и т.д. Здесь требуется выбрать один или несколько оптимальных маршрутов из $(n-1)!$ возможных. Если некоторые пункты для посещения недоступны, то минимальное значение целевой функции должно быть бесконечно большим.

Рассмотрим решение данной задачи *методом ветвей и границ*. Вначале определяют некое допустимое решение (*допустимый маршрут*). После чего множество всех оставшихся маршрутов разбивают на все более мелкие подмножества и при

каждом разбиении вычисляют *нижнюю границу* целевой функции текущего наилучшего маршрута. С помощью найденных границ проводят дальнейшее разбиение подмножеств допустимых маршрутов и в конечном итоге определяют оптимальный маршрут. Это разбиение подмножеств маршрутов можно рассматривать как узлы дерева. Поэтому данный метод называют *методом поиска по дереву решений*, или методом ветвей и границ.

Матрица стоимостей содержит неотрицательные элементы c_{ij}. Маршрут T можно представить как множество упорядоченных пар пунктов $T = \{(i_1,i_2),(i_2,i_3),\ldots,(i_{n-1},i_n),(i_n,i_1)\}$. Каждый допустимый маршрут представляет собой цикл, при проходе по которому каждый пункт посещается ровно один раз с возвращением в исходную точку. Каждая упорядоченная пара (i,j) является дугой, или *звеном маршрута*. Стоимость маршрута T равна сумме соответствующих элементов матрицы стоимостей, но только тех, что лежат на маршруте T:

$$z(T) = \sum_{i,j \in T} c_{ij}.$$

Величина $z(T)$ определена для любого допустимого маршрута и не может быть меньше стоимости оптимального маршрута, т.е. текущее значение $z(T)$ *является верхней границей* $z_B(T)$ стоимости оптимального маршрута T.

Для вычисления нижних границ стоимости маршрута используют понятие *редукции строк и столбцов матрицы* стоимостей. Процедуру вычитания из каждого элемента строки наименьшего элемента этой же строки и из каждого элемента столбца наименьшего элемента этого же столбца называют соответственно *редукцией строк* и *редукцией столбцов*. Матрицу с неотрицательными элементами, в каждой строке и в каждом столбце которой содержится, по крайней мере, один ненулевой элемент, называют *редуцированной*. Она может быть получена в результате последовательной редукции ее строк и столбцов. Если вычесть из каждого элемента некоторой строки матрицы стоимости постоянную величину c, то стоимость любого маршрута, определяемая новой матрицей, меньше стоимости того же маршрута, определяемого старой матрицей, на величину c, так как для любого допустимого маршрута каждая строка и каждый столбец матрицы стоимостей содержит по одному элементу, соответствующему этому маршруту. При редукции относительные стоимости всех маршрутов останутся неизменными. Следовательно, останутся неизменными и все оптимальные маршруты.

Если $z(T)$ — стоимость маршрута T, определяемая матрицей стоимостей до выполнения редукции, $z_1(T)$ — стоимость того же маршрута, определяемая редуцированной матрицей, H — сумма всех констант, используемых при вычислении редуцированной матрицы, то $z(T) = z_1(T) + H$. Поскольку редуцированная матрица содержит только неотрицательные элементы, то H является *нижней границей* стоимости маршрута T для нередуцированной матрицы стоимостей.

В алгоритме метода ветвей и границ диагональные элементы исходной матрицы стоимостей полагают равными ∞, т.е. $c_{ij} = \infty$.

1. Выберем произвольный допустимый маршрут, например состоящий из звеньев (1,4), (4,5), (5,3), (3,6), (6,2), (2,1). Стоимость данного маршрута:

$$z_B(T) = 16 + 18 + 27 + 0 + 5 + 7 = 73,$$

т.е. для оптимального маршрута стоимость не может превосходить значения $z_B(T)$.

2. Выполним редукцию строк, а затем столбцов матрицы стоимостей; для этого в каждой строке определим минимальный элемент и найденное значение c_i вычтем из элементов соответствующей строки. Получим табл. П.2.9.

Таблица П.2.9

Редукция строк

Узлы	1	2	3	4	5	6	c_i
1	∞	11	27	0	14	10	16
2	6	∞	15	0	29	29	1
3	20	13	∞	35	5	0	0
4	5	0	9	∞	2	2	16
5	7	41	22	43	∞	0	5
6	18	0	0	4	0	∞	5

3. Затем в полученной табл. П.2.9 проведем редукцию столбцов. Из табл. П.2.9 видно, что проводить следует только редукцию первого столбца, так как остальные столбцы содержат нулевые элементы. Редукция столбцов показана в табл. П.2.10. Строка Q_j содержит вычитаемые константы для каждого столбца при редукции столбцов. Значение нижней границы для всех маршрутов в рассматриваемой задаче равно сумме всех вычитаемых констант: $H = \sum_{i=1}^{6} c_i + \sum_{j=1}^{6} Q_j = 48$.

Таблица П.2.10

Редукция столбцов

Узлы	1	2	3	4	5	6	c_i
1	∞	11	27	0	14	10	16
2	6	∞	15	0	29	29	1
3	20	13	∞	35	5	0	0
4	5	0	9	∞	2	2	16
5	7	41	22	43	∞	0	5
6	18	0	0	4	0	∞	5
Q_j	5	0	0	0	0	0	$H = 48$

4. Теперь следует выбрать оптимальный маршрут. Если бы в каждой строке и в каждом столбце было ровно по одному нулевому элементу, то эти элементы и образовали бы оптимальный маршрут и оптимальная стоимость перемещения равнялась бы H.

Однако нулевые элементы не единственны в строках и столбцах. Вместо того чтобы одновременно определять все звенья оптимального маршрута с помощью текущей матрицы стоимостей, воспользуемся алгоритмом, на каждом шаге которого по матрице стоимостей строится одно звено оптимального маршрута. Естественно вначале выбрать звено нулевой длины, а затем последовательно добавлять звенья нулевой или минимальной длины. Если выбрать звено (i, j), то решение не должно содержать других звеньев, соответствующих элементам i-й строки и j-го столбца; если звено (i, j) можно исключить из окончательного решения, то его можно не рассматривать при выполнении последующих операций. Следовательно, для каждого звена достаточно рассмотреть следующие два случая: в первом случае звено включают в текущее и все последующие решения до определения оптимального решения; во втором — звено исключают из дальнейшего рассмотрения. В нашем примере мы уже получили начальный узел дерева ветвления, соответствующий множеству всех маршрутов с нижней границей стоимости всех маршрутов, равной $H = 48$, и верхней, равной $z_B(T) = 73$.

5. Следующим шагом процедуры является выбор звена, на котором будет базироваться ветвление. Так как в каждой строке и в каждом столбце не единственный элемент имеет $c_{ij} = 0$, то надо рассматривать маршруты, не содержащие звено (i, j). Пункт должен быть связан с некоторым другим пунктом, и поэтому каждый маршрут, не содержащий узел $[i, j]$, должен содержать звено A, у которого стоимость не меньше минимального элемента i-й строки, не считая $c_{ij} = 0$. Стоимость звена A обозначим A_i. Таким образом, чтобы A_i было равно нулю, в строке должно быть не менее двух нулевых элементов. Аналогично, чтобы в пункт j можно было бы попасть из некоторого другого пункта, то маршрут, не содержащий узел (i, j), содержит звено B, у которого стоимость не меньше минимального элемента j-го столбца, не считая $c_{ij} = 0$. Обозначим стоимость перемещения по звену B через B_j, а сумму величин A_i и B_j через Φ_{ij}. Величину Φ_{ij} называют *вторичным штрафом* и она равна минимальному штрафу, которому мы подвергаемся, если не включаем звено (i, j) в оптимальный маршрут. Если штраф за неиспользование звена вычислить для всех звеньев, у которых $c_{ij} = 0$, то можно сравнить соответствующие значения Φ_{ij} и включить в текущий маршрут звено (i, j), за неиспользование которого был бы назначен максимальный штраф, т.е. включая звено (i, j), получаем выигрыш в стоимости, равный максимальному значению Φ_{ij}. Нижняя граница соответствующей ветви должна быть выбрана таким образом, чтобы она не превосходила стоимости ни одного из маршрутов, не содержащих звена (i, j). Данное требование будет выполнено, если значение новой нижней границы положить равным сумме значений текущей нижней границы и максимального штрафа за неиспользование звена (i, j). Для определения максимального значения Φ_{ij} будем исследовать все элементы $c_{ij} = 0$; при $c_{ij} \neq 0$ величина $\Phi_{ij} = 0$. Данное утверждение справедливо в силу того, что если положить $c_{ij} = \infty$, а затем провести редукцию i-й строки и j-го столбца, то сумма вычитаемых констант будет равна Φ_{ij}. Для рассматриваемого случая значения A_i и B_j, приведены в табл. П.2.11, а значения Φ_{ij} (вторичный штраф) для узлов, соответствующих $c_{ij} = 0$, — в табл. П.2.12. Максимальное значение $\Phi_{ij} = 10$ соответствует звену (1,4). Следовательно в качестве базового звена ветвления выбираем звено (1,4).

Таблица П.2.11

Значения A_i и B_j

Узлы	1	2	3	4	5	6	c_i	A_i
1	∞	11	27	0	14	10	16	10
2	1	∞	15	0	29	29	1	1
3	15	13	∞	35	5	0	0	5
4	0	0	9	∞	2	2	16	0
5	2	41	22	43	∞	0	5	2
6	13	0	0	4	0	∞	5	0
Q_j	5	0	0	0	0	0	$H = 48$	
B_j	1	0	9	0	2	0		

Таблица П.2.12

Значения Φ_{ij}

Звено	(1,4)	(2,4)	(3,6)	(4,1)	(4,2)	(5,6)	(6,2)	(6,3)	(6,5)
$\Phi_{ij} = A_i + B_j$	10	1	5	1	0	2	0	9	2

6. Нижняя граница для маршрутов, не включающих звено (1,4), равна $H + \Phi_{14} = 48 + 10 = 58$. Чтобы определить новую нижнюю границу для маршрутов, включающих звено (1,4), необходимо преобразовать матрицу стоимостей. Если мы включили в маршрут некоторое звено (k,l), то в дальнейшем мы не рассматриваем k-ю строку и l-й столбец. Кроме того, звено (k,l) является тогда звеном некоторого ориентированного цикла и не может принадлежать этому же маршруту. Последнее условие можно выполнить, положив $c_{lk} = \infty$.

Из рассмотрения следует исключить и так называемые *запрещенные звенья* — звенья, с помощью которых в дальнейшем могут быть образованы циклы, включающие в себя неполное множество пунктов (могут быть образованы подмаршруты). Элементы матрицы стоимостей, соответствующие этим звеньям, берут равными ∞. Преобразованная матрица стоимостей имеет вид (табл. П.2.13). Запрещенных звеньев в данном случае не существует. Вторая матрица решений после редукции строк и столбцов, а также с указанием значений c_i, A_i и b_i для второй матрицы приведена в табл. П.2.14. Нижняя граница для маршрута, включающего звено (1,4), может быть вычислена как сумма всех новых вычитаемых констант H_1 и старой нижней границы, т.е. нижняя граница равна $48 + 1 = 49$.

Таблица П.2.13

Преобразованная матрица стоимостей

	1	2	3	5	6
2	1	∞	15	29	29
3	15	13	∞	5	0
4	∞	0	9	2	2
5	2	41	22	∞	0
6	13	0	0	0	∞

Таблица П.2.14

Вторая матрица решений

Узлы	1	2	3	5	6	c_i	A_i
2	0	∞	14	28	28	1	14
3	15	13	∞	5	0	0	5
4	∞	0	9	2	2	0	2
5	2	41	22	∞	0	0	2
6	13	0	0	0	∞	0	0
Q_j	0	0	0	0	0	$H_1 = 1$	
B_j	2	0	9	2	0		

Дерево решений для рассмотренных двух этапов имеет вид, представленный на рис. П.2.14. На рис. П.2.14 показаны маршруты, включающие звено (1,4) и не включающие звено (1,4). В узлах дерева указаны нижние границы для каждого варианта маршрута.

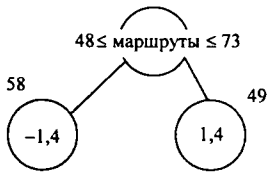


Рис. П.2.14. Дерево решений для первых двух этапов

7. С вычисления второй матрицы решений начинается вторая итерация решения. После второй редукции получаем значения $\Phi_{21} = 16$, $\Phi_{36} = 5$, $\Phi_{42} = 2$, $\Phi_{56} = 2$, $\Phi_{62} = 0$, $\Phi_{63} = 9$, $\Phi_{65} = 2$. Максимальным среди них является $\Phi_{21} = 16$, т.е. выбирают звено (2,1). Новая нижняя граница для маршрута, не включающего звено (2,1), равна $46 + 16 = 65$.

Чтобы определить множество маршрутов, содержащих звено (2,1), вычеркнем во второй матрице стоимостей вторую строку и первый столбец. Стоимость звена (1,2) равна теперь ∞, но в третью матрицу решений этот элемент не входит. Но звено (4,2) теперь является запрещенным, поскольку оно могло бы организовать подмаршрут. Поэтому полагаем $c_{42} = \infty$. В табл. П.2.15 приведена третья матрица решений после выполнения редукции.

Таблица П.2.15

Третья матрица решений

Узлы	2	3	5	6	c_i	A_i
3	13	∞	5	0	0	5
4	∞	7	0	0	2	0
5	41	22	∞	0	0	22
6	0	0	0	∞	0	0
Q_j	0	0	0	0	$H_1 = 1$	
B_j	13	7	2	0		

Новая нижняя граница для маршрутов, содержащих звено (2,1), равна $49 + 2 = 51$. Ветвление на следующей итерации будет осуществляться из узла [2,1]. Полный маршрут приведен на рис. П.2.15. Этот маршрут — промежуточное решение.

8. Построенный полный маршрут будет оптимальным, если его длина не превосходит длины любого маршрута, соответствующего другим звеньям дерева. Длина построенного полного маршрута равна 63, а нижняя граница для узла [1,4], равная 58, меньше 63. Необходимо исследовать и подмножество маршрутов, которые не содержат звено (1,4) — исходная матрица стоимости (табл. П.2.8). Для того чтобы исключить все маршруты, содержащие звено (1,4), значение элемента c_{14} матрицы стоимостей примем равным ∞. Получим табл. П.2.16. Процедуру анализа предыдущих промежуточных точек ветвления, которые могли бы определить более короткий маршрут, называют *возвратом*. Поэтому матрицу стоимостей называют в данном случае *матрицей стоимостей возврата*.

9. С новой матрицей стоимостей возврата выполняют описанные процедуры ветвления и построения границ. Полученное при этом дерево изображено на рис. П.2.16. Нахождение верхних границ не обязательно, но эта операция иногда позволяет сократить проводимые вычисления. Из рис. П.2.16 следует, что нижняя граница даже неполного маршрута, не содержащего звено (1,4), превышает 63. Таким образом, маршрут, содержащий звено (1,4), является оптимальным. Оптимальный маршрут состоит из следующих звеньев или пар пунктов: (6,2), (4,3), (3,5), (5,6), (2,1), (1,4). Он является ориентированным циклом, стоимость проезда по которому равна 63.

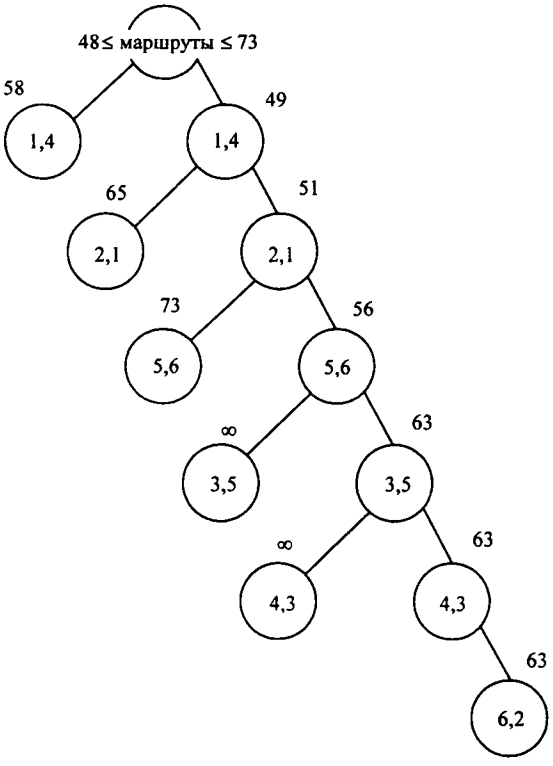


Рис. П.2.15. Промежуточное решение

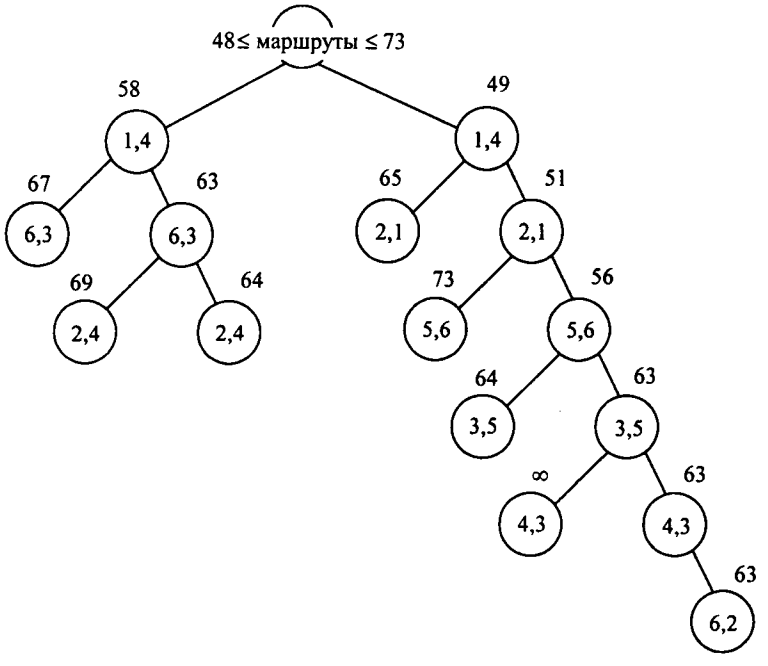


Рис. П.2.16. Оптимальное решение

Таблица П.2.16

Матрица стоимостей возврата

	1	2	3	4	5	6
1	∞	27	43	∞	30	26
2	7	∞	16	1	30	30
3	20	13	∞	35	5	0
4	21	16	25	∞	18	18
5	12	46	27	48	∞	5
6	23	5	5	9	5	∞

Задача выбора оптимального маршрута не может быть непосредственно сформулирована и решена как задача линейного программирования. Основная особенность данной задачи заключается в том, что в ней требуется существование ориентированного цикла, в который ровно один раз входят все узлы сети.

П.2.4. РАЗВИТИЕ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

П.2.4.1. Понятие о параметрическом программировании

Исходные данные, необходимые для численной постановки реальных задач математического программирования, определяют в большинстве случаев неточно, приближенно. Это связано не только с наличием погрешностей измерения, но и с желанием описать в математической постановке возможное изменение исходных данных, чтобы в дальнейшем для оптимизации решения использовать наилучшие их значения.

Исследование чисто математических проблем, таких как анализ чувствительности решения при вариации исходных данных, оценка устойчивости решения, также требует разработки методов, учитывающих неопределенность исходных данных.

Как было показано, наиболее развиты к настоящему времени и наиболее доступны для изучения задачи линейного программирования. Алгоритм учета неопределенности исходных данных мы рассмотрим на примере задач линейного программирования, так как в других случаях учет неопределенности может оказаться крайне трудной проблемой. Раздел математического программирования, в котором может быть решена данная проблема, называют *параметрическим программированием*. Параметрическое программирование изучает в основном задачи, которые являются естественным обобщением задач линейного программирования, когда исходные данные (коэффициенты) в целевой функции и в условиях-ограничениях предполагаются не постоянными величинами, а функциями, зависящими определенным образом (чаще всего линейно) от некоторых параметров. Всякой задаче параметрического программирования можно поставить в соответствие некоторую задачу линейного программирования, называемую *исходной*. От того, как именно трактуется исходная задача, зависит трактовка параметрической задачи. Введение параметра обычно отражает некоторую реальную ситуацию.

Приведем несколько постановок задач параметрического программирования, которые наиболее естественным образом могут быть сопоставлены с принятой исходной задачей. Рассмотрим, помимо этого, одну из интерпретаций задачи параметрического программирования.

Пусть коэффициенты целевой функции исходной задачи линейного программирования (П.2.27) зависят от одного параметра. В задаче (П.2.27) коэффициенты целевой функции представляют собой цену единицы количества некоторого продукта, а координаты векторов-ограничений могут быть истолкованы как запасы различных ресурсов.

Целевая функция рассматриваемой задачи параметрического программирования может иметь (в простейшем случае) следующий вид:

$$f(\mathbf{x}) = (a_{01} + b_1 t)x_1 + \ldots + (a_{0n} + b_n t)x_n \to \max,$$

где $a_{01},\ldots, a_{0n}$ — исходные (старые) коэффициенты задачи линейного программирования; $b_1,\ldots, b_n$ — новые коэффициенты; t — параметр, $t \in R^1$.

Зависимость коэффициентов этой функции от параметра t можно понимать, например, как зависимость цены единицы продукта от времени. Различные новые коэффициенты $b_1,\ldots, b_n$ отражают индивидуальный характер зависимости от параметра t цен разных продуктов. Значение целевой функции исходной задачи равно стоимости выпущенной продукции, а значение целевой функции соответствующей параметрической задачи показывает, чему равна стоимость выпускаемой продукции при условии изменения цен единицы продукции, когда закон изменения этих цен (от времени, от качества продукции и т.п.) задан.

Рассмотрим случай, когда от параметра зависят координаты системы ограничений. Можно учесть зависимость этих показателей от времени, способа выработки ресурса, района размещения объекта, модель которого рассматривается в задаче и т.п. Условия-ограничения примут вид

$$(a_{11} + c_{11}t)x_1 + \ldots + (a_{1n} + c_{1n}t)x_n \le a_{10} + d_1 t,$$
$$\vdots$$
$$(a_{m1} + c_{m1}t)x_1 + \ldots + (a_{mn} + c_{mn}t)x_n \le a_{m0} + d_m t,$$
$$x_1,\ldots, x_n \ge 0,\ t \in R^1.$$

Буквами a с соответствующими индексами обозначены исходные коэффициенты в условиях-ограничениях задачи, а буквами c и d — новые коэффициенты, определяющие зависимость исходных коэффициентов от параметра t.

Задача параметрического программирования с s независимыми переменными $t_1,\ldots, t_s$, или s-параметрическая задача, записывается следующим образом: максимизировать

$$f(\mathbf{x}) = (a_{01} + b_{11}t_1 + \ldots + b_{1s}t_s)x_1 + \ldots + (a_{0n} + b_{n1}t + \ldots + b_{ns}t_s)x_n + e_1 t_1 + \ldots + e_s t_s$$

при ограничениях

$$\begin{cases} (a_{11} + c_{111}t_1 + \ldots + c_{11s}t_s)x_1 + \ldots + (a_{1n} + c_{1n1}t_1 + \ldots + c_{1ns}t_s)x_n \le a_{10} + d_{11}t_1 + \ldots + d_{1s}t_s, \\ \vdots \\ (a_{m1} + c_{m11}t_1 + \ldots + c_{m1s}t_s)x_1 + \ldots + (a_{mn} + c_{mn1}t_1 + \ldots + c_{mns}t_s)x_n \le a_{m0} + d_{m1}t_1 + \ldots + d_{ms}t_s, \\ x_1,\ldots, x_n \ge 0,\ t \in R^1. \end{cases}$$

Рассмотрим метод решения частной задачи линейного параметрического программирования, в которой все коэффициенты целевой функции линейно зависят от некоторого действительного параметра t, на конкретном примере.

Пример П.2.14. Максимизировать

$$f(\mathbf{x}) = (2+t)x_1 + (3-t)x_2 + t \to \max;$$
$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ 2x_1 - x_2 \le 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ t \in R^1, \end{cases} \qquad (\text{П.2.41})$$

или, в векторно-матричной форме,

$$\max f(\mathbf{x}) = (\mathbf{a}_0 + \mathbf{b}t)^{\mathrm{T}}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{A}\mathbf{x} \le \mathbf{a},$$
$$\mathbf{x} \ge 0,\ t \in R^1,$$

где

$$\mathbf{a}_0=[2\ \ 3\ \ 0]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{b}=[1\ \ -1\ \ 1]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{x}=[x_1\ \ x_2\ \ 1]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{a}=[4\ \ 5\ \ 8]^{\mathrm{T}},$$

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 1 & 1\\ 2 & -1\end{bmatrix}.$$

Для каждого фиксированного значения t задача (П.2.41) становится задачей линейного программирования, которую называют *принадлежащей этому значению* t.

Решением параметрической задачи (П.2.41) называют явным образом заданную функцию

$$\hat{f}(t)=\max\left\{f(\mathbf{x})=(\mathbf{a}_0+\mathbf{b}t)^{\mathrm{T}}\mathbf{x}\,|\,\mathbf{A}\mathbf{x}\le\mathbf{a},\ \mathbf{x}\ge 0\right\},$$

решающую функцию задачи (П.2.41), вместе с набором *решающих отношений* $\hat{x}_1(t),\ldots,\hat{x}_n(t)$, каждое из значений которых при данном значении t равно значениям переменных $x_1, x_2,\ldots, x_n$, образующих *оптимальное решение задачи*, принадлежащей данному значению t (если это решение существует). Доказано, что *r-я критическая область* K^r задачи (П.2.41), $r=\overline{1,\infty}$, определяемая условием

$$K^r=\left\{t\,|\,a^r_{0j}(t)=a^r_{0j}+b^r_j t\ge 0,\ j=\overline{1,n+m}\right\},$$

является отрезком (замкнутым интервалом). Область определения Q решающей функции $\hat{f}(t)$ выпукла; решающая функция $\hat{f}(t)$ выпукла в своей области определения.

При любом $r=1,2,\ldots$ для всех значений t из критической области K^r решающая функция линейна и в силу этого непрерывна в области Q.

При любом $r=1,2,\ldots$ внутри критической области K^r множества значений отношений $\hat{x}_j(t)$, $j=\overline{1,n}$, ограничены постоянными величинами; сами эти отношения полунепрерывны сверху.

Для построения решающей функции будем пользоваться симплекс-методом в следующей его модификации. Под последней строкой первой из симплекс-таблиц, полученной при $t=t_0=0$ и содержащей некоторое допустимое базисное решение, приписывают еще одну строку коэффициентов $b^{(1)}_j t=-b_j t$, $j=\overline{1,n+m}$, где $b_j=0$ для $j=\overline{n+1,n+m}$. Полученная строка подвергается тем же преобразованиям, что и остальные (табл. П.2.17, $r=1$). Естественно, что в задаче (П.2.41) мы предварительно перешли к ограничениям-равенствам и ввели новые переменные x_3, x_4, x_5. За три итерации $(r=\overline{1,3})$ мы получили оптимальное решение при $t=0$ (в табл. П.2.17 для каждой итерации выделены разрешающие элементы).

Коэффициенты в целевой функции для выбора разрешающего элемента задаются двумя последними строками при фиксированном (заданном) значении $t=t_0$. Для данного допустимого базисного решения надо построить соответствующую критическую область — множество всех значений t, при которых это решение будет оптимальным. Это множество будет замкнутым интервалом. Надо найти границы этого интервала. Их находят по формулам

$$m^r_{-1}=\max\left\{-\frac{a^r_{0j}}{b^r_j},\ -\infty\,|\,b^r_j>0,\ j=\overline{1,n+m}\right\},$$

$$m^r_{+1}=\min\left\{\frac{a^r_{0j}}{b^r_j},\ +\infty\,|\,b^r_j<0,\ j=\overline{1,n+m}\right\}.$$

Если нижняя (верхняя) граница этого интервала есть $-\infty(+\infty)$, то найдена нижняя (верхняя) граница области Q. Для любой такой границы этого интервала, что координата ее есть число, по крайней мере один из коэффициентов целевой функции $a^r_{0j}(t)=a^r_{0j}+b^r_j t$ равен нулю. При значениях $t=t_p$, обращающих выражение $a^r_{0j}+b^r_j t$ в нуль и называемых *критическими*, решения задачи определены неоднозначно. Если существует второе базисное решение, то, изменяя базис, можно задавать соседнюю критическую область значений t. Если же при попытке заменить базис обнаружена неограниченность решения, то гиперплоскость, соответствующая целевой функции при рассматриваемом ее значении, оказывается параллельной одной из граней выпуклого многогранника, определяемого системой ограничений задачи. Такая грань содержит точки, хотя бы одна из координат которых сколь угодно велика по абсолютному значению. В этом случае достигнута конечная нижняя (верхняя) грань области Q. Пусть при построении обнаружилось, что некоторая точка полученного интервала имеет координату меньшую (большую), чем координата верхней (нижней) границы интервала, полученного на предыдущем шаге построения. Говорят в таком

случае, что эта *верхняя* (нижняя) *граница превзойдена*. Тогда сама эта верхняя (нижняя) граница является и нижней (верхней) границей строящегося интервала. Определим критическое значение $t_p = m_\pi^{(r)}$. Индекс $\pi = -1$ применяют при отыскании нижней границы области Q, индекс $\pi = +1$ — при отыскании верхней границы. В нашем случае $r = 3$; отыскиваем нижнюю границу области Q, т.е. полагаем $\pi = -1$. Получим, положив $p = \pi = -1$ $\left(\text{для } b_j > 0;\ j = \overline{1, n+m}\right)$,

$$t_{-1} = m_{-1}^3 = \max\left\{-\frac{7/3}{1/3}; -\infty\right\} = -7.$$

Таблица П.2.17

Симплекс-таблицы для линейной задачи параметрического программирования

Номер итерации	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	a	
$r=1$	−1	[2]	1	0	0	5	x_3
	1	1	0	1	0	5	x_4
	2	−1	0	0	1	8	x_5
	−2	−3	0	0	0	0	$-a_0$
	$-t$	t	0	0	0	t	$-b_j t$
$r=2$	1/2	1	1/2	0	0	2	x_2
	[3/2]	0	−1/2	1	0	3	x_4
	3/2	0	1/2	0	1	10	x_5
	−7/2	0	3/2	0	0	6	$-a_0$
	$-t/2$	0	$-t/2$	0	0	$-t$	$-b_j t$
$r=3$	0	1	1/3	1/3	0	3	x_2
	1	0	−1/3	[2/3]	0	2	x_1
	0	0	[1]	−1	1	7	x_5
	0	0	1/3	7/3	0	13	
	0	0	$-2t/3$	$t/3$	0	0	
$\pi = -1$							
$r=4$	1/2	1	1/2	0	0	2	x_2
	3/2	0	−1/2	1	0	3	x_4
	3/2	0	1/2	0	1	10	x_5
	−7/2	0	3/2	0	0	6	
	$-t/2$	0	$-t/2$	0	0	$-t$	
$\pi = +1$							
$r=4$	0	1	0	[2/3]	−1/3	2/3	x_2
	1	0	0	1/3	1/3	13/3	x_1
	0	0	1	−1	1	7	x_3
	0	0	0	8/3	−1/3	32/3	
	0	0	0	$-t/3$	$2t/3$	$14t/3$	
$r=5$	0	3/2	0	1	−1/2	1	x_4
	1	−1/2	0	0	1/2	4	x_2
	0	1	1	0	1/2	8	x_3
	0	−8/2	0	0	1	8	
	0	$t/2$	0	0	$t/2$	$5t$	

Из табл. П.2.17 при $r=3$ следует, что при $t=7$ $\hat{f}(t)=13$, $\hat{x}_1=2(1-\lambda)$, $\hat{x}_2=2\lambda+3(1-\lambda)$, $0\le\lambda\le 1$. Это критическое значение может быть превзойдено. В табл. П.2.17 при $r=3$ выбран разрешающий элемент, равный 2/3 при $j=4$. Общая формула для выбора этой небазисной переменной имеет вид

$$\tau_p^r \in \left\{\tau \mid a_{0\tau}^r + b_\tau^r t_p = 0,\ x_\tau \text{ — небазисная переменная}\right\}.$$

Для нас $t=8$ $\hat{f}(t)=1/3(13+14\cdot 8)=48$. Получим следующую таблицу при $\pi=-1$ и $r=4$. Она совпала с таблицей, полученной при $r=2$. Так как все b_j^4 отрицательны, то $t_{-2}=-\infty$ и является нижней границей области Q. Из табл. П.2.17 при $r=4$ получаем, что при $t<-7$ $\hat{f}(t)=6-t$, $\hat{x}_1=0$, $\hat{x}_2=2$.

Отыскиваем верхнюю границу области Q, полагаем $\pi=+1$, $p=\pi$, $p=+1$, $r=3$. Тогда для $b_j<0$, $j=\overline{1,n+m}$,

$$t_{+2}=m_1^3=\min\left\{-\frac{1/3}{-2/3};+\infty\right\}=1/2.$$

При $t=1/2$ $\hat{f}(t)=13$, $x_1=2\lambda+13(1-\lambda)/3$, $x_2=3\lambda+2(1-\lambda)/3$, $0\le\lambda\le 1$. Выбираем разрешающий элемент из столбца для $\hat{x}_1=\frac{13}{3}\lambda+4(1-\lambda)$, $\hat{x}_2=\frac{2\lambda}{3}$; и получаем новую таблицу при $\pi=+1$ и $r=4$. Из этой таблицы найдем новое t_{+2}, превышающее критическое значение $t_{+2}=1/2$. Новое значение t_{+2} при $-7<t<1/2$, $\hat{f}(t)=13$, $x_1=2$, $x_2=3$:

$$t_{+2}=m_{+1}^4=\min\left\{-\frac{8/3}{-1/3};+\infty\right\}=8.$$

При

$$t=8\ \ \hat{f}(t)=1/3(13+14\cdot 8)=48,\ \ \hat{x}_1=\frac{13}{3}\lambda+4(1-\lambda),\ \ \hat{x}_2=\frac{2\lambda}{3};$$

при

$$\frac{1}{2}<t<8\ \ \hat{f}(t)=(32+14t)/3,\ \ \hat{x}_1=13/3,\ \ \hat{x}_2=2/3.$$

Строим следующую таблицу при $r=5$ и $\pi=+1$. Получаем $t>8$.

Окончательные результаты приведены в табл. П.2.18 и на рис. П.2.17, где показано «вращение» целевой функции, поведение решающей функции $\hat{f}(t)$ и геометрические образы отношений $\hat{x}_1(t)$ и $\hat{x}_2(t)$.

Таблица П.2.18

Решение параметрической задачи

t	$f(t)$	$\hat{x}_1$	$\hat{x}_2$
$t<-7$	$6-t$	0	2
$t=-7$	13	$2(1-\lambda)$	$\frac{1}{2}<t<8$ $\hat{f}(t)=(32+14t)/3$, $\hat{x}_1=13/3$, $\hat{x}_2=2/3$
$-7<t<1/2$	13	2	3
$t=1/2$	13	$2\lambda+13(1-\lambda)/3$	$3\lambda+3(1-\lambda)/3$
$1/2<t<8$	$(32+14t)/3$	13/3	2/3
$t=8$	48	$13\lambda/3+4(1-\lambda)$	$2\lambda/3$
$t>8$	$8+5t$	4	0

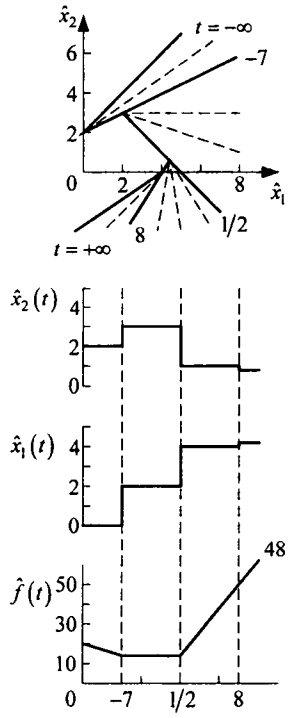


Рис. П.2.17. Решение задачи параметрического линейного программирования

Алгоритм решения линейной параметрической задачи в случае зависимости от параметра коэффициентов целевой функции (в предположении, что допустимая область, характеризующаяся ограничениями задачи, не пуста и что для некоторого значения параметра $t = t_0$ существует оптимальное решение) имеет следующий вид:

1. При $t = t_0$ r-я симплекс-таблица является оптимальной. Полагаем $\pi = -1$ и $p = \pi$, переходим к пункту 2.
2. Определяем критическое значение $t_p = m_r^{\pi}$:

   а) если $|t_p| = \infty$, то достигнута граница области Q;

   а1) если $\pi = -1$, то отыскиваем нижнюю границу области Q. Полагаем $\pi = +1$, $p = \pi$, заменяем r на $r + p + 1$ и переходим снова к пункту 2;

   а2) если $\pi = +1$, то отыскиваем верхнюю границу области Q. Переходим к пункту 3;

   б) если $|t_p| < \infty$, то определяем возможность превзойти критическое значение t_p. С помощью выражения для τ_p^r, иногда подбором из нескольких возможных значений, определяем новую базисную переменную. В этом случае следует принимать во внимание наличие множества различных решений;

   б1) если $a_{i\tau}^{\tau} \le 0$, $i = \overline{1,m}$, то достигнута граница области Q. Переходим к пункту 2а1 или к пункту 2а2;

   б2) в противном случае строим новую симплекс таблицу. Заменяя r на $r+1$, p на $p + \pi$, снова начинаем вычисления с пункта 2.

3. Вычисления прекращаем. Для каждой критической области значение решающей функции $\hat{f}(t)$ берем из соответствующей таблицы. Там же определены оптимальные значения решающих соотношений $\hat{x}_1(t),\ldots,\hat{x}_n(t)$.

В практических приложениях часто возникают следующие частные случаи параметрической задачи:

1) значение параметра t принадлежит некоторому заранее выбранному интервалу $L \in R^1$;
2) требуется отыскать только минимум (максимум) функции $\hat{f}(t)$ для всех $t \in R^1$, т.е. требуется определить те значения t, при которых возможно достижение этого минимума (максимума);
3) требуется отыскать интервал возможных изменений какого-то одного из коэффициентов целевой функции.

Особый интерес представляет задача нахождения такого наибольшего интервала $t_1 \le t \le t_2$, что оптимальное базисное решение любой из задач, принадлежащих значениям t из этого интервала, совпадает с оптимальным базисным решением задачи, принадлежащей значению $t = 0$.

Если область определения Q решающей функции $\hat{f}(t)$ ограничена заранее интервалом L, то вычисления, предписываемые пунктом 2 алгоритма, заканчивают, когда будут достигнуты границы интервала L. Если интервал $t_{-1} \le t \le t_{+1}$ не имеет общих точек с интервалом L, то полагают $\pi = -1$ или $\pi = +1$ в зависимости от того, будут ли значения $t \in L$ меньше t_{-1} или больше t_{+1}.

Если в задаче необходимо установить только минимум (максимум) значения решающей функции $\hat{f}(t)$, то вычисления, предписываемые пунктом 2, проводят при $\pi = -1$ или $\pi = +1$ в зависимости от того, в каком направлении уменьшается значение функции $\hat{f}(t)$.

Если требуется только определить возможность вариации одного из коэффициентов, то сперва устанавливают, существует ли решение при $t = 0$, и находят это решение. Вводя затем параметр t, сводят проблему к определению значений t_{-1} (равных t_1) и t_{+1} (равных t_2).

П.2.4.2. Штрафные (барьерные) функции. Методы внутренней точки для задачи математического программирования

Рассмотрим общую задачу математического программирования, не содержащую ограничений в виде равенств, т.е. минимизировать $f(\mathbf{x})$ при ограничениях $g_i(\mathbf{x}) \ge 0$, $i = \overline{1,m}$.

Пусть вблизи локального минимума этой задачи $\mathbf{x}^*$ существует окрестность, где есть такая точка $\mathbf{x}^0$, в которой $g_i(\mathbf{x}^0) \ge 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, и выполняются условия строгой дополняющей нежесткости — $u_i(\mathbf{x}^*) > 0$, если $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, $i = \overline{1,m}$.

Видоизменим достаточные условия локального минимума в точке $\mathbf{x}^*$, сформулированные в п. П.2.2.4. Предположим, что при малом $r > 0$ в точке $(\mathbf{x}(r), \mathbf{u}(r))$ вблизи точки $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ выполняются условия

$$\begin{cases} g_i(\mathbf{x}) \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \\ u_i g_i(\mathbf{x}) = r > 0, \ i = \overline{1,m}, \\ u_i \geq 0, \ i = \overline{1,m}, \\ \nabla f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{m} u_i \nabla g_i(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \end{cases}$$

Из второго условия выразим u_i и подставим это выражение в последнее равенство:

$$\nabla f(\mathbf{x}(r)) - \sum_{i=1}^{m} \frac{r}{g_i(\mathbf{x}(r))} \nabla g_i(\mathbf{x}(r)) = \mathbf{0}.$$

Непосредственной проверкой легко установить, что левая часть этого выражения есть градиент функции

$$L(\mathbf{x},r) = f(\mathbf{x}) - r\sum_{i=1}^{m} \ln g_i(\mathbf{x}),$$

обращающийся в нуль в точке $\mathbf{x}(r)$. Причем $\mathbf{x}(r)$ стремится к $\mathbf{x}^*$ при r, стремящемся к нулю. Функцию $L(\mathbf{x},r)$ в таком виде называют *логарифмической штрафной функцией.*

Аналогично получаем другой вид штрафной функции $L_1(\mathbf{x},r)$, полагая $u_i = \lambda_i^2$. При условии, что $\lambda_i g_i(\mathbf{x}) = r > 0$, $i = \overline{1,m}$, имеем

$$\nabla f[\mathbf{x}(r)] - \sum_{i=1}^{m} \frac{r^2}{g_i^2[\mathbf{x}(r)]} \nabla g_i[\mathbf{x}(r)] = \mathbf{0},$$

и функция $L_1(\mathbf{x},r)$ примет вид

$$L_1(\mathbf{x},r) = f(\mathbf{x}) + r^2 \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\mathbf{x})}.$$

Задавая последовательность значений $\{r_k\}$, стремящуюся к нулю, получаем последовательность $\{\mathbf{x}(r_k)\}$, сходящуюся к $\mathbf{x}^*$. С помощью новых функций $L(\mathbf{x},r)$ мы свели задачу на условный экстремум (задачу математического программирования) к задаче поиска безусловного экстремума функции $L(\mathbf{x},r)$. Точнее, задачу математического программирования заменили семейством функций, зависящих от параметра r и обладающих следующими свойствами:

1) в окрестности оптимальной точки они близки к заданной минимизируемой функции;
2) каждая функция из построенного семейства достаточно быстро возрастает при приближении к границе допустимой области из «*внутренней*» части допустимой области.

К минимизируемой функции исходной задачи мы добавили ряд слагаемых, называемых *штрафными* (барьерными) *функциями*, зависящими от параметра r и функции одного из ограничений. При фиксированном значении параметра r второе слагаемое стремится к бесконечности при стремлении к нулю его аргумента. Каждую функцию семейства подвергают безусловной минимизации, и этот процесс не может вывести $\mathbf{x}^*$ за пределы допустимой области. Подобные методы названы *методами внутренней точки.*

В задаче математического программирования при наличии ограничений-равенств допустимой области (в виде области) нет. Следовательно, метод внутренней точки не применим.

Рассмотрим некоторые примеры перехода от задачи математического программирования к задаче безусловной минимизации методом внутренней точки.

Пример П.2.15. Минимизировать $f(\mathbf{x}) = x_1 + x_2$ при ограничениях

$$g_1(\mathbf{x}) = -x_1^2 + x_2 \geq 0,$$

$$g_2(\mathbf{x}) = x_1 \geq 0.$$

Построим логарифмическую штрафную функцию

$$L(\mathbf{x}, r) = x_1 + x_2 - r\ln\left(-x_1^2 + x_2\right) - r\ln x_1.$$

Определим точки минимума $L(\mathbf{x}, r)$ аналитически, так как $L(\mathbf{x}, r)$ дифференцируема в рассматриваемой области. Для нахождения $x_1(r)$ и $x_2(r)$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x_1} = 1 + \dfrac{r \cdot 2x_1}{-x_1^2 + x_2} - \dfrac{r}{x_1} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial x_2} = 1 - \dfrac{r}{-x_1^2 + x_2} = 0. \end{cases}$$

Отсюда найдем

$$x_1(r) = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8r}}{4};$$

здесь оставим только знак «+», так как $x_1 \geq 0$;

$$x_2(r) = \frac{\left(-1 \pm \sqrt{1 + 8r}\right)^2}{16} + r.$$

Заметим, что значения $x_1(r)$ и $x_2(r)$ удовлетворяют условию положительной определенности матрицы $\nabla^2 L$. Дадим последовательность значений r: 1,0; 0,5; 0,25; 0,1. Соответственно получим последовательности значений

$$x_1(r) = 0{,}5;\ 0{,}309;\ 0{,}183;\ 0{,}085;$$

$$x_2(r) = 1{,}25;\ 0{,}595;\ 0{,}283;\ 0{,}107,$$

сходящиеся при $r \to 0$ к точке (0, 0). Графическое решение данной задачи представлено на рис. П.2.18.

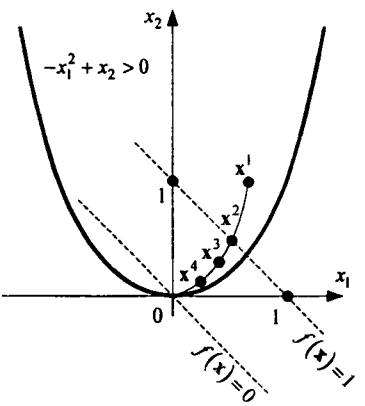


Рис. П.2.18. Графическое решение задачи математического программирования методом внутренней точки

В общем случае в задачах со многими локальными минимумами (при слабых условиях регулярности) существует последовательность безусловных локальных минимумов, сходящихся к каждому из условных локальных минимумов.

Рассмотрим второй пример: решение задачи линейного программирования методом внутренней точки.

Пример П.2.16. Минимизировать x при условии $g_1(x) = x > 0$.

Построим логарифмическую штрафную функцию

$$L(x,r) = x - r\ln x.$$

Необходимое условие существование минимума:

$$\frac{dL}{dx} = \frac{\partial L}{\partial x} = 1 - \frac{r}{x} = 0.$$

Отсюда $x(r) = r$.

Из условия $\frac{d^2L}{dx^2} > 0$ следует, что для $r_k < 1$ безусловный минимум будет при $x(r_k) = r_k$.

П.2.4.3. Методы внешней точки для задачи математического программирования

Попытаемся приблизится к оптимальной точке из *недопустимой* области. Для чего преобразуем достаточные условия локального минимума задачи математического программирования следующим образом:

1) рассмотрим ограничения в ослабленной форме:

$$g_i(\mathbf{x}) \geq -r,\ i = \overline{1,m},\ r > 0; \qquad \text{(П.2.42)}$$

2) преобразуем условие дополняющей нежесткости $u_i^* g_i(\mathbf{x}^*) = 0$ так, чтобы оно имело смысл для отрицательных значений $g_i(\mathbf{x})$ и сводилось к исходному условию при $r \to 0$ (это означает, что $u_i(\mathbf{x}^*) = 0$ при $g_i(\mathbf{x}^*) \neq 0$; если $g_i(\mathbf{x}^*) = 0$, то $u_i(\mathbf{x}^*)$ принимает любые значения), т.е.

$$u_i(r) = -\min[0, g_i(\mathbf{x})]. \qquad \text{(П.2.43)}$$

Если $r > 0$ и мало, $\mathbf{x}(r)$ удовлетворяет (П.2.42) и $g_i[\mathbf{x}(r)] \neq 0$ для некоторых i, то $u_i \equiv 0$ и $\lim\limits_{r\to 0} \mathbf{u}(r) = u_i(\mathbf{x}^*) = 0$. Если $g_1[\mathbf{x}(r)] < 0$, то

$$\lim_{r\to 0}\left[-\min\left(0, g[\mathbf{x}(r)]\right)\right] = 0,$$

так как из (П.2.42) следует, что точка $\mathbf{x}(r)$ при $r \to 0$ находится в допустимой области. В силу (П.2.42) $g_i[\mathbf{x}(r)] \geq -r$, а из (П.2.43) вытекает, что $\lim\limits_{r\to 0} \mathbf{u}(r)\cdot r = 0$, поэтому $\lim\limits_{r\to 0} u_i(r)\cdot g_i[\mathbf{x}(r)] = 0$.

Условие дополняющей нежесткости в данном случае выполняется в пределе (из (П.2.43) следует, что $u_i \geq 0$, $i = \overline{1,m}$).

Аналогично преобразуют другие достаточные условия:

$$u_i \geq 0,\ i = \overline{1,m},$$

$$\nabla f[\mathbf{x}(r)] - \sum_{i=1}^{m} u_i(r)\nabla g_i[\mathbf{x}(r)] = \mathbf{0}, \qquad \text{(П.2.44)}$$

и для каждого вектора $\mathbf{y}$, для которого $\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\nabla g_i[\mathbf{x}(r)] = 0$ при всех $i \in D^* = \{i \mid u_i^* > 0\}$, справедливо неравенство

$$\mathbf{y}^{\mathrm{T}}\left\{\nabla^2 f\left[\mathbf{x}(r)\right]-\sum_{i\in D^*} u_i(r)\nabla^2 g_i\left[\mathbf{x}(r)\right]\right\}\mathbf{y}>0.$$

Подставим (П.2.43) в (П.2.44):

$$\nabla f\left[\mathbf{x}(r)\right]+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{r}\min\left\{0, g_i\left[\mathbf{x}(r)\right]\right\}\nabla g_i\left[\mathbf{x}(r)\right]=\mathbf{0}.$$

Опять непосредственной проверкой убеждаемся, что функция, для которой выполняются названные условия, имеет вид

$$T(\mathbf{x})=f(\mathbf{x})+\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{2r}\left\{\min\left[0, g_i\left(\mathbf{x}(r)\right)\right]\right\}^2.$$

Это и есть функция, минимизируемая *методом внешней точки*. В нее могут входить ограничения и в виде неравенств, и в виде равенств. Можно доказать, что все необходимые условия минимума этой функции выполняются, например, $\nabla^2 T$ есть положительно определенная матрица. Причем для ограничений-неравенств

$$\left(\min\left\{0, g_i\left[\mathbf{x}(r)\right]\right\}\right)^2 \equiv\left[\frac{g_i-|g_i|}{2}\right]^2.$$

Для ограничений-неравенств $h_j\left[\mathbf{x}(r)\right]$ можно записать

$$g_{j1}(\mathbf{x})=h_j(\mathbf{x})\geq 0,$$
$$g_{j2}(\mathbf{x})=-h_j(\mathbf{x})\geq 0,$$

откуда $g_{j1}=-g_{j2}$, или

$$\frac{1}{r}\left\{\left[\frac{g_{j1}-|g_{j1}|}{2}\right]^2+\left[\frac{-g_{j1}-|-g_{j1}|}{2}\right]^2\right\}=\frac{g_{j1}^2}{r}=\frac{\left\{h_j\left[\mathbf{x}(r)\right]\right\}^2}{r}.$$

Рассмотрим пример применения *метода внешней точки* для решения задачи математического программирования.

Пример П.2.17. Минимизировать $f(\mathbf{x})=-x_1x_2$ при ограничениях

$$g_1(\mathbf{x})=-x_1-x_2^2+1\geq 0,$$
$$g_2(\mathbf{x})=x_1+x_2\geq 0.$$

Составим функцию штрафа для метода внешней точки:

$$T(\mathbf{x},r)=-x_1x_2+\frac{\left(-x_1-x_2^2+1-|x_1-x_2^2+1|\right)^2}{4r}+\frac{\left(x_1+x_2-|x_1+x_2|\right)^2}{4r}.$$

Из необходимого условия

$$\frac{\partial T}{\partial x_1}=0,$$
$$\frac{\partial T}{\partial x_2}=0$$

определим последовательность значений x_1 и x_2, сходящуюся к решению.

Зададим последовательность значений r: 1,0; 0,5; 1/3; 0,1; получим соответствующие последовательности значений:

$x_1(r)$: 0,89; 0,77; 0,73; 0,67;

$x_2(r)$: 0,64; 0,62; 0,61; 0,58.

Последовательность значений x_1 сходится к 2/3, а последовательность значений x_2 — к $\sqrt{3}/3$ (рис. П.2.19).

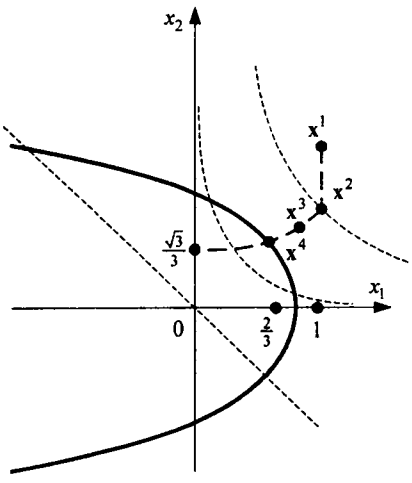


Рис. П.2.19. Графическое решение задачи математического программирования методом внешней точки

Методы внутренней и внешней точек основаны на разных принципах: в первом случае штрафной член препятствует нарушению ограничений, во втором — он предотвращает блуждание точек слишком далеко от допустимой области.

П.2.4.4. Комбинированный метод внутренней и внешней точек

Введем новый параметр $t = 1/r$ и рассмотрим комбинированную функцию

$$V(\mathbf{x}, r, t) = f(\mathbf{x}) + s(r)L(\mathbf{x}) + p(t)T(\mathbf{x}),$$

где $s(r)$ — функция от r $(r \to 0)$ для метода внутренней точки; $L(\mathbf{x})$ — функция штрафа для метода внутренней точки; $p(t)$ — функция от t $(t \to \infty)$ для метода внешней точки; $T(\mathbf{x})$ — функция штрафа для метода внешней точки.

Покажем на примере, как применяется комбинированная функция $V(\mathbf{x}, r, t)$ для решения задачи математического программирования.

Пример П.2.18. Минимизировать $f(\mathbf{x}) = \ln x_1 - x_1$ при ограничениях

$$g(\mathbf{x}) = x_1 - 1 \geq 0,$$

$$h(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 - 4 = 0, \quad x_2^2 = 4 - x_1^2.$$

Построим комбинированную функцию

$$V\left(\mathbf{x}, r, t = r^{-1}\right) = \underbrace{\ln(x_1 - x_2)}_{f(\mathbf{x})} - \underbrace{r \ln(x_1 - 1)}_{s(r)L(\mathbf{x})} + \underbrace{r^{-1} \ln\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\right)^2}_{p(t)T(\mathbf{x})}.$$

С помощью комбинированной функции мы избежали использования модулей $|g(\mathbf{x})|$, которые появляются в методе внешней точки. Необходимые условия минимума функции $V\left(\mathbf{x}, r, r^{-1}\right)$ дают

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = \frac{1}{x_1} - \frac{r}{x_1 - 1} + 4r^{-1}\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\right)x_1 = 0,$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = -1 + 4x_2 r^{-1}\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\right) = 0,$$

$$4r^{-1}\left(x_1^2 + x_2^2 - 4\right) = \frac{1}{x_2} = \frac{1}{\sqrt{4 - x_1^2}}.$$

Зададим последовательность значений r: 1,0; 1/4; 1/16; 1/64; 1/256 и получим соответствующие ей последовательности значений:

$x_1(r)$: 1,553; 1,159; 1,040; 1,010; 1,002;

$x_2(r)$: 1,334; 1,641; 1,711; 1,727; 1,731;

V: −0,2648; −1,0285; −1,4693; −1,6447; −1,7048.

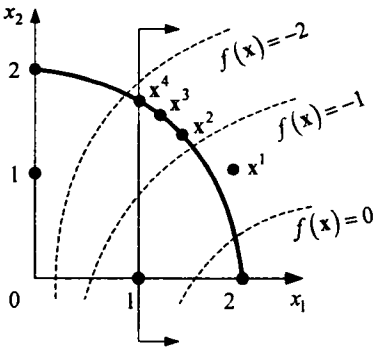


Рис. П.2.20. Графическое решение задачи математического программирования с помощью комбинированного метода

Последовательности значений x_1 и x_2 дают оптимальное решение $\left(1,\sqrt{3}\right)$. Графическое решение задачи математического программирования приведено на рис. П.2.20.

П.2.4.5. Метод проекции градиента

Естественны и другие попытки применить методы безусловной оптимизации для решения задач математического программирования. Одним из таких методов является метод проекции градиента (МПГ). Метод базируется на методе градиентного спуска безусловной оптимизации. МПГ — численный метод условной оптимизации для нелинейных задач. Рассмотрим задачу: отыскать

$$\min\left\{f(\mathbf{x})\right\} \text{ при } x \in D, \tag{П.2.45}$$

где D — замкнутое выпуклое множество в R^n, $f(\mathbf{x})$ — дифференцируемая функция на D.

Проекцией точки $\mathbf{a}$ на множество D называется точка $\text{пр}_D\mathbf{a}$, ближайшая к $\mathbf{a}$ среди всех точек D, т.е. $\text{пр}_D\mathbf{a}$ является решением *задачи проектирования*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{a}\|^2 \to \min,\ \mathbf{x} \in D. \tag{П.2.46}$$

Свойства проекции точки на множество определяются следующими леммами и теоремой.

Лемма П.2.1. *Пусть D — замкнутое выпуклое множество в R^n. Тогда*:

1) *проекция $\text{пр}_D\mathbf{a}$ любой точки $\mathbf{a} \in R^n$ существует и единственна*;
2) *точка $\bar{\mathbf{x}}$ является проекцией точки $\mathbf{a}$ на множество D $\left(\bar{\mathbf{x}} = \text{пр}_D\mathbf{a}\right)$ в том и только в том случае, если $\left(\bar{\mathbf{x}}-\mathbf{a}, \mathbf{a}-\bar{\mathbf{x}}\right) \geq 0$ при всех $\mathbf{x} \in D$*;
3) *для любых точек $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2 \in R^n$ справедливо неравенство*

$$\left\|\text{пр}_D\mathbf{a}_1 - \text{пр}_D\mathbf{a}_2\right\| \leq \left\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\right\|,$$

т.е. оператор проектирования обладает свойством нерастяжения.

Доказательство.

1. Функция $\varphi(\mathbf{x})$ есть строго выпуклая функция. Поэтому решение задачи (П.2.46) существует и единственно.
2. На выпуклом множестве и при выпуклой функции $\varphi(\mathbf{x})$, если $\mathbf{x}^*$ есть локальное решение задачи (П.2.45), должно выполняться условие $\left(\varphi'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right) \geq 0$ при всех $\mathbf{x} \in D$.

   Производная $\varphi'(\mathbf{x}) = 2(\mathbf{x}-\mathbf{a})$, т.е. $2\left(\mathbf{x}^*-\mathbf{a}, \mathbf{a}-\mathbf{x}^*\right) \geq 0$.
3. В силу утверждения 2 имеем

$$\left(\mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1,\ \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2 - \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1\right) \geq 0,\ \left(\mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_2,\ \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1 - \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2\right) \geq 0.$$

Сложим эти неравенства, получим

$$\left(\mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_1 - \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_2,\ \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2 - \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1\right) \geq 0,$$

что в силу неравенства Коши–Буняковского дает

$$\left\|\mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1 - \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2\right\|^2 \leq \left(\mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2 - \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1\right) \leq \left\|\mathrm{пр}_D\mathbf{a}_1 - \mathrm{пр}_D\mathbf{a}_2\right\| \left\|\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2\right\|.$$

Необходимые и достаточные условия оптимальности в выпуклой задаче на языке проекций формулируются следующим образом.

Лемма П.2.2. *Пусть множество D выпукло и замкнуто, функция $f(\mathbf{x})$ выпукла на D и дифференцируема в точке $\mathbf{x}^* \in D$. Тогда $\mathbf{x}^*$ является решением задачи* (П.2.45) *в том и только в том случае, если*

$$\mathbf{x}^* = \mathrm{пр}_D\mathbf{x}\left(x^* - \alpha f'(\mathbf{x}^*)\right) \text{ при произвольном } \alpha > 0.$$

Доказательство. Согласно пункту 2 леммы П.2.1 приведенное неравенство эквивалентно условию

$$\left(\mathbf{x}^* - \left(\mathbf{x}^* - \alpha f'(\mathbf{x}^*)\right), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right) \geq 0 \text{ при всех } \mathbf{x} \in D.$$

Поэтому $\left(f'(\mathbf{x}^*), \mathbf{x}-\mathbf{x}^*\right) \geq 0$ при всех $\mathbf{x} \in D$.

А это и есть условие решения задачи (П.2.45).

В методе градиентного спуска определяется последовательность точек

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k - \alpha_k f'(\mathbf{x}^k),$$

в методе проекции градиента на каждой k-й итерации требуется производить операцию проектирования точки на множество D, т.е. решать задачу (П.2.46) при $\mathbf{a} = \mathbf{x}^k - \alpha_k f'(\mathbf{x}^k)$.

В качестве очередной точки приближения к решению задачи (П.2.45) выбирается точка

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathrm{пр}_D\left(\mathbf{x}^k - \alpha_k f'(\mathbf{x}^k)\right),\ k = 0,1,2,\ldots. \qquad (\text{П.2.47})$$

Сходимость последовательности (П.2.47) к решению задачи (П.2.45) гарантируется следующей теоремой.

Теорема П.2.1 *Пусть множество D выпукло и замкнуто, функция $f(\mathbf{x})$ строго выпукла на D с константой $\theta > 0$ и дифференцируема на D, причем ее градиент удовлетворяет условию Липшица*

$$\left\|f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{x}_1)\right\| \leq M\left\|\mathbf{x}-\mathbf{x}_1\right\|,\ \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \in D.$$

Тогда последовательность, генерируемая по правилу (П.2.47), *где* $\mathbf{x}^0$ — *произвольная точка из* D, *а* $\alpha_k \equiv \alpha \in \left(0, 4\cdot\theta / M^2\right)$, *сходится к решению* $\mathbf{x}^*$ *задачи* (П.2.45) *со скоростью геометрической прогрессии*:

$$\left\|\mathbf{x}^{k+1} - \mathbf{x}^*\right\| \le q\left\|\mathbf{x}^k - \mathbf{x}^*\right\|,$$

где $q = \sqrt{1 - 4\theta\alpha + \alpha^2 M^2} \in (0,1)$.

Конкретных рекомендаций для выбора значений θ нет, поэтому значения α выбирают из опыта. В общем случае на каждой итерации надо решать задачу (П.2.47), но для некоторых множеств D удается получить явный вид проекции.

1. Шар:

$$D = \left\{\mathbf{x} \in R^n \,\middle|\, \left\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\right\| \le r\right\}, \quad \operatorname{пр}_D\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{a} - \mathbf{x}_0}{\left\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0\right\|} r.$$

2. Координатный параллелепипед:

$$D = \left\{\mathbf{x} \in R^n \,\middle|\, b_j \le x_j \le c_j;\ j = \overline{1,n}\right\},$$

$$\left[\operatorname{пр}_D\mathbf{a}\right]_j = \begin{cases} b_j, & \text{если } a_j < b_j, \\ a_j, & \text{если } b_j \le a_j \le c_j, \\ c_j, & \text{если } a_j > c_j. \end{cases}$$

3. Неотрицательный ортант:

$$D = \left\{\mathbf{x} \in R^n \,\middle|\, x_j \ge 0;\ j = \overline{1,n}\right\},$$

$$\operatorname{пр}_D\mathbf{a} = \left[\max\left(0, \mathbf{a}_1\right), \ldots, \max\left(0, \mathbf{a}_n\right)\right].$$

4. Гиперплоскость:

$$D = \left\{\mathbf{x} \in R^n \,\middle|\, \left(\mathbf{p}, \mathbf{x}\right) = \beta\right\},\ \mathbf{p} \ne \mathbf{0},$$

$$\operatorname{пр}_D\mathbf{a} = \mathbf{a} + \left(\beta - \left(\mathbf{p}, \mathbf{a}\right)\right)\frac{\mathbf{p}}{\left\|\mathbf{p}\right\|^2}.$$

5. Полупространство:

$$D = \left\{\mathbf{x} \in R^n \,\middle|\, \left(\mathbf{p}, \mathbf{x}\right) = \beta\right\},\ \mathbf{p} \ne \mathbf{0},$$

$$\operatorname{пр}_D\mathbf{a} = \mathbf{a} + \max\left(0, \beta - \left(\mathbf{p}, \mathbf{a}\right)\right)\frac{\mathbf{p}}{\left\|\mathbf{p}\right\|^2}.$$

6. Аффинное множество:

$$D = \left\{\mathbf{x} \in R^n \,\middle|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}\right\},\ \text{строки матрицы } \mathbf{A} \text{ линейно независимы},$$

$$\operatorname{пр}_D\mathbf{a} = \mathbf{a} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(\mathbf{A}\mathbf{a} - \mathbf{b}\right).$$

Если множество D задается с помощью более или менее сложной системы равенств и неравенств, то метод проекции градиента практически не применим — задача (П.4.46) не проще исходной задачи.

Пример П.2.19. Отыскать $\min\left\{f(\mathbf{x}) = x_1^2 - 2x_1 - x_2\right\}$ при ограничении $x_1^2 + x_2^2 \le 4$.

Здесь множество D — круг радиуса $r = 2$ с центром в начале координат $\mathbf{x}_0 = (0,0)$, т.е. это шар. Последовательность точек в методе проекции градиента задается формулой

$$\operatorname{пр}_D\mathbf{a} = \mathbf{x}_0 - \frac{\mathbf{a} - \mathbf{x}_0}{\left\|\mathbf{a} - \mathbf{x}_0\right\|} r. \qquad (\text{П.2.48})$$

Пусть нулевое приближение $\mathbf{x}^0 = (0,0)$ и $a_k \equiv \alpha = 0{,}1$. Производные

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} = 2x_1 - 2, \quad \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} = -1, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_1} = -2, \quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x_2} = -1,$$

тогда, согласно (П.2.47), точка $\mathbf{a}^1 = (0{,}2;0{,}1)$; длина вектора $\left\|\mathbf{a}^1 - \mathbf{x}_0\right\| = 0{,}22$; согласно (П.2.48) проекция $\text{пр}_D\mathbf{a}^1 = (2,1)$; значение целевой функции $f(2,1) = -1$.

На следующем шаге $\mathbf{x}^1 = (2,1)$; $\mathbf{a}^2 = (1{,}8;1{,}1)$; $\text{пр}_D\mathbf{a}^2 = (1{,}8;1{,}1)$, значение целевой функции $f(1{,}8;1{,}1) = -1{,}46$ — движение идет в правильном направлении: оптимальное решение имеет координаты (0,75;1,85) и значение целевой функции равно (–2,8).

П.2.4.6. Многокритериальные задачи линейного программирования

Реальные проблемы, решаемые с помощью методов математического программирования, во многих случаях выдвигают несколько критериев, которым одновременно должно удовлетворять решение задачи. Причем эти критерии часто бывают антагонистическими.

За последние десятилетия разработано много методов анализа и решения подобных задач. В значительной степени эти методы являются диалоговыми (или интерактивными), состоящие в последовательном анализе возможных решений лицом, принимающим решение (ЛПР), и переходе к более предпочтительному решению. Методы могут основываться на предварительном выделении множества не улучшаемых (эффективных) решений и представления этого множества ЛПР для принятия решений.

Многокритериальная задача линейного программирования (МКЛП) имеет вид:

$$\begin{gathered}\max\{\mathbf{c}_1\mathbf{x} = z_1\},\\ \max\{\mathbf{c}_2\mathbf{x} = z_2\},\\ \vdots\\ \max\{\mathbf{c}_k\mathbf{x} = z_k\}\\ \text{при } \mathbf{x} \in D,\end{gathered}$$

или, в матричной форме,

$$\max\{\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{z} | \mathbf{x} \in D\},$$

где k — число целевых функций (критериев); $\mathbf{c}_i$ — градиент (вектор коэффициентов) i-ой целевой функции (критерия); z_i — значение i-го критерия (целевой функции); D — множество допустимых значений переменных; max — означает, что нужно максимизировать все целевые функции одновременно; $\mathbf{C}$ — матрица критериев размерностью $k \times n$ (матрица коэффициентов целевой функции, ее строки $\mathbf{c}_i$ являются градиентами критериев); $\mathbf{z}$ — вектор критериев.

Предположим, что ЛПР всегда *имеет функцию полезности* $U: R^k \to R$. Эта функция отображает векторы критериев на действительную прямую так, что большее значение на этой прямой соответствует более предпочтительному вектору критериев. Функции полезности бывают разных видов: неубывающие, возрастающие, вогнутые, строго вогнутые, убывающие, выпуклые, строго выпуклые, монотонные и т.д. Но исходные функции полезности могут быть преобразованы таким образом, чтобы они приняли вид, необходимый ЛПР, например, чтобы функция полезности стала покоординатно возрастающей.

Многокритериальные задачи графически исследуются и в пространстве решений (как в задачах линейного программирования), и в пространстве критериев.

Пусть D обозначает допустимую область в пространстве решений, а Z — допустимое множество в пространстве критериев. Последнее представляет собой множество Z образов всех точек из D

$$Z = \left\{ \mathbf{z} \in R^k \middle| \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in D \right\}.$$

Если известна функция полезности U, то многокритериальная задача превращается в однокритериальную задачу

$$\max \left\{ U(\mathbf{z}) \middle| \mathbf{z} = \mathbf{C}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in D \right\}.$$

Но этот подход полезен только в концептуальном плане.

Пример П.2.20. Рассмотрим задачу МКЛП

$$\max\{x_1 + x_2 = z_1\},$$
$$\max\{x_1 = z_2\}$$
$$\text{при } 4x_1 + 3x_2 \le 12,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

где функция полезности $U = 2z_1z_2$.

В пространстве решений $U = 2x_1^2 + 2x_1x_2$.

Из рис. П.2.21 видно, что оптимальной точкой является точка (3, 0), оптимальный вектор имеет вид (3, 3), оптимальное значение $U = 18$.

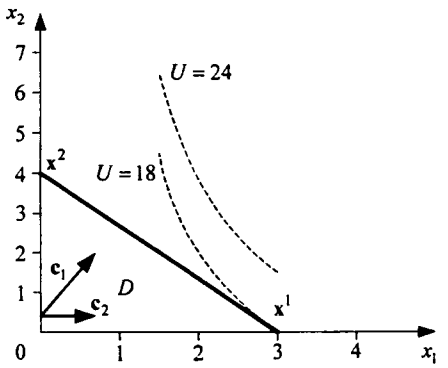


Рис. П.2.21. Пространство решений

В пространстве критериев $U = 2z_1z_2$ (рис. П.2.22).

Точка $\mathbf{z}^1$ есть образ точки $\mathbf{x}^1$, т.е. $\mathbf{z}^1 = (0, 0)$, точка $\mathbf{z}^2$ есть образ точки $\mathbf{x}^2$ и $\mathbf{z}^2 = (4, 0)$, точка $\mathbf{z}^3$ — оптимальный вектор критериев, $\mathbf{x}^3$ — прообраз, $\mathbf{z}^3$ — оптимальная точка; оптимальное значение $U = 18$.

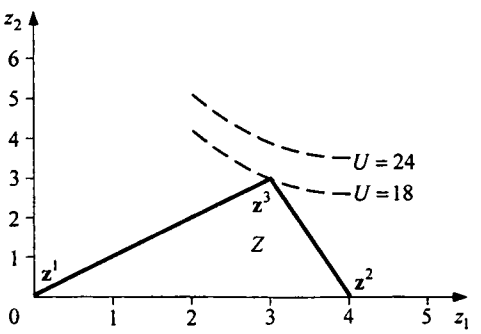


Рис. П.2.22. Пространство критериев

Для критериальных векторов $\mathbf{z}$ вводится понятие *доминирования*. Пусть $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \in R^k$ — критериальные векторы.

Вектор $\mathbf{z}_1$ *доминирует* вектор $\mathbf{z}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{z}_1 \geq \mathbf{z}_2$ и $\mathbf{z}_1 \neq \mathbf{z}_2$ (т.е. $\mathbf{z}_{1i} \geq \mathbf{z}_{2i}$ для всех i и $\mathbf{z}_{1i} > \mathbf{z}_{2i}$ по крайней мере для одного i).

Таким образом, никакой компонент вектора $\mathbf{z}_1$ не меньше соответствующего компонента вектора $\mathbf{z}_2$ и одновременно по крайней мере один компонент вектора $\mathbf{z}_1$ больше соответствующего компонента вектора $\mathbf{z}_2$.

Вектор $\mathbf{z}_1$ *сильно доминирует* вектор $\mathbf{z}_2$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{z}_1 > \mathbf{z}_2$ (т.е. $\mathbf{z}_{1i} > \mathbf{z}_{2i}$ для всех i).

Критериальный вектор считается *недоминируемым*, если он не доминируется ни одним из допустимых критериальных векторов.

Вектор $\overline{\mathbf{z}} \in Z$ является *недоминируемым* тогда и только тогда, когда не существует другого такого вектора $\mathbf{z} \in Z$, что $\mathbf{z} \geq \overline{\mathbf{z}}$ и $\mathbf{z} \neq \overline{\mathbf{z}}$, иначе $\mathbf{z}$ является доминируемым вектором.

Критериальный вектор не может быть *оптимальным*, если он не является *недоминируемым*. И для каждого *недоминируемого* критериального вектора существует *покоординатно возрастающая функция полезности*, для которой он является *оптимальным*.

Доминируемость относится к векторам в пространстве критериев; в пространстве решений вводится понятие *эффективности*.

Точка $\overline{\mathbf{x}} \in D$ *эффективна* тогда и только тогда, когда не существует другой такой точки $\mathbf{x} \in D$, что $C\mathbf{x} \geq C\overline{\mathbf{x}}$ и $C\mathbf{x} \neq C\overline{\mathbf{x}}$. В противном случае точка $\overline{\mathbf{x}}$ *неэффективна*. Точка $\overline{\mathbf{x}} \in D$ эффективна, если ее критериальный вектор не доминируется критериальными векторами других точек из D. Из эффективной точки *невозможно* сдвинуться допустимым образом так, чтобы увеличить один из критериев, не уменьшив, по крайней мере, один из остальных.

Вместе с термином «эффективность» используются термины «неулучшаемость» или «оптимальность по Парето». В практических приложениях особое внимание уделяется *области Парето*. Вильфредо Парето сформулировал проблему многокритериальной оптимизации в 1896 г. К этому вопросу вернулся в 1963 г. Лотфи Заде при проектировании систем управления. Область Парето задается в пространстве критериев, и любое принадлежащее этой области решение нельзя улучшить одновременно по всем скалярным критериям. Вне области Парето можно улучшать решение по всем критериям одновременно, но ни по одному критерию оптимальное значение здесь не достигается. Таким образом, необходимым условием решения задачи многокритериальной оптимизации является принадлежность решения области Парето, т.е. решение должно быть Парето-оптимальным, поскольку остальные решения заведомо хуже сразу по всем скалярным критериям. Однако необходима дополнительная информация, чтобы ЛПР могло выбрать единственное решение на множестве Парето-оптимальных решений. Для примера рассмотрим двухкритериальную задачу. На плоскости критериев, где задано множество допустимых решений, первый критерий достигает своего оптимума в точке A, а второй — в точке B. Кривая AB, принадлежащая области допустимых решений, определяет для данного примера область Парето.

Множество всех эффективных точек называется *эффективным множеством*. Обычно легче показать, что точка неэффективна, чем доказать ее эффективность. Чтобы доказать неэффективность точки $\mathbf{x}_1 \in D$ достаточно найти другую точку $\mathbf{x}_2 \in D$, критериальный вектор которой доминирует критериальный вектор точки $\mathbf{x}_1$.

В задаче линейного программирования эффективная точка — это некоторая оптимальная точка, так как не должна существовать такая точка $\mathbf{x} \in D$, что $\mathbf{C}^{\mathrm{T}}\mathbf{x} > \mathbf{C}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{x}}$.

В задаче ЛП с одним критерием эффективное множество E и оптимальное множество Θ совпадают и оба выпуклы. В случае многокритериальности E и Θ ведут себя по-разному:

1. Оптимальное множество может быть ограниченным и несвязным (наличие более чем одной оптимальной точки не означает, что число их обязательно бесконечно).
2. В задаче МКЛП может быть более одного оптимального критериального вектора (в ЛП имеется единственное оптимальное значение критерия независимо от числа оптимальных точек).
3. Эффективное множество E может оказаться невыпуклым.
4. Оптимальная точка не обязательно крайняя (многое зависит от вида функции полезности).
5. При сведении к однокритериальной задаче с помощью функции полезности, могут быть локальные оптимумы, не являющиеся глобальными.
6. Оптимальное множество Θ может быть пусто, когда не пусто эффективное множество E.

Для решения задач МКЛП применяются различные методы сведения к одному скалярному критерию: метод взвешенных сумм, методы сжатия допустимой области, метод ε-ограничений, алгоритмы векторной максимизации, различные интерактивные процедуры и др. Процедура сведения задачи к одному скалярному критерию с помощью функции полезности очевидна. Рассмотрим другой метод сведения к одному скалярному критерию — *метод взвешенных сумм с точечным оцениванием весов.*

П.2.4.7. Метод взвешенных сумм с точечным оцениванием весов

Метод заключается в следующем. Каждый критерий $\mathbf{c}_i\mathbf{x}$ умножается на положительный скалярный «вес» λ_i и все k взвешенных критериев суммируются и образуют составную целевую функцию (целевую функцию из взвешенной суммы) $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}$. Предположим, что все *весовые векторы* $\boldsymbol{\lambda} \in R^k$ нормированы так, что сумма их координат λ_i, $i = \overline{1,k}$, равна 1 (т.е. в соответствии с нормой L_1). Множество таких весовых векторов имеет вид

$$\Lambda = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in R^k \middle| \lambda_i > 0, \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_1 = 1 \right\}.$$

При известных весовых векторах $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$ получаем однокритериальную задачу ЛП

$$\max \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \middle| \mathbf{x} \in D \right\},$$

которая будет иметь оптимальное или достаточно близкое к нему решение для неизвестной нам функции полезности. Основная трудность заключается в отыскании подходящего весового вектора. В ряде случаев веса выбирают пропорционально важности критериев; или применяют метод взвешенных сумм, если считать его способом ранжирования точек из допустимого множества в соответствии с их коэффициентом качества, под которым понимают значение составной критериальной функции.

Теорема П.2.2. *Точка* $\overline{\mathbf{x}} \in D$, *которая максимизирует взвешенные суммы в задаче ЛП* $\max \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \middle| \mathbf{x} \in D \right\}$, *где* $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, *является эффективной точкой.*

Теорема П.2.3. *Если* $\overline{\mathbf{x}} \in D$ — *эффективная точка, то существует вектор* $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, *когда* $\overline{\mathbf{x}}$ — *решение задачи* $\max \left\{ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \middle| \mathbf{x} \in D \right\}$.

В силу этих теорем все точки, максимизирующие при $\boldsymbol{\lambda} > \mathbf{0}$ взвешенные суммы в задаче ЛП, являются эффективными.

Если взвешенная сумма в задаче ЛП оказалась неограниченной для некоторого весового вектора, то этому весовому вектору нельзя поставить в соответствие ни одной эффективной точки, но могут существовать другие положительные весовые векторы, для которых взвешенные суммы будут ограничены.

Если один или более весов — нули, то нельзя гарантировать, что все точки, максимизирующие взвешенную сумму в задаче ЛП, являются эффективными. Следует помнить, что стандартные пакеты ЛП могут не выявлять все крайние точки, максимизирующие целевую функцию, а выдают лишь первую подходящую точку, даже если эта точка не является эффективной.

Один из способов задать веса — назначить разным критериям веса так, чтобы градиент взвешенной суммы $\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$ совпадал по направлению с градиентом функции полезности $U = U(\mathbf{c}_1\mathbf{x}, \mathbf{c}_2\mathbf{x}, \ldots, \mathbf{c}_k\mathbf{x})$. Пусть функция полезности U дифференцируема. Градиент сложной функции U в точке $\bar{\mathbf{x}}$ имеет вид

$$\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} U = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial U}{\partial z_i} \nabla_{\bar{\mathbf{x}}} z_i,$$

где $\partial U/\partial z_i$ вычисляются в точке $\bar{\mathbf{x}}$, $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} z_i$ — градиент i-го критерия: $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} z_i = \mathbf{c}_i$.

Полагаем, что $\partial U/\partial z_i > 0$, и введем положительный скаляр $w_i = (\partial U/\partial z_i)/(\partial U/\partial z_1)$, вычисленный в точке $\bar{\mathbf{x}}$.

Тогда направление градиента $\nabla_{\mathbf{x}} U$ в точке $\bar{\mathbf{x}}$ можно задать в виде

$$\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} U = \sum_{i=1}^{k} w_i \mathbf{c}_i.$$

Нормируя w_i, получим $\nabla_{\bar{\mathbf{x}}} U = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{c}_i$, где $\lambda_i = w_i \Big/ \sum_{j=1}^{k} w_j$.

Функция полезности U в общем случае нелинейная, и ее градиент будет изменяться от точки к точке. Рассмотрим касательную гиперплоскость к поверхности уровня функции U в точке $\bar{\mathbf{x}}$

$$\frac{\partial U}{\partial z_1}(\bar{z}_1 - \mathbf{c}_1\mathbf{x}) + \frac{\partial U}{\partial z_2}(\bar{z}_2 - \mathbf{c}_2\mathbf{x}) + \ldots + \frac{\partial U}{\partial z_k}(\bar{z}_k - \mathbf{c}_k\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \text{ где } \bar{z}_i = \mathbf{c}_i\bar{\mathbf{x}},\ \mathbf{c}_i\mathbf{x} = z_i.$$

Разделим это уравнение на $\partial U/\partial z_1 > 0$, получим

$$1\cdot(\bar{z}_1 - z_1) + w_2(\bar{z}_2 - z_2) + \ldots + w_k(\bar{z}_k - z_k) = 0.$$

Для оценки w_i, $i = \overline{1,k}$, вводится произвольная величина $\Delta_1 > 0$, чтобы скомпенсировать изменения градиента, и в качестве оценки w_1 берется величина Δ_1/Δ_i, вычисленная в точке $\bar{\mathbf{x}}$. При $\Delta_1 = 1$ получим $w_1 = 1$; $w_2 = 1/\Delta_2, \ldots, w_k = 1/\Delta_k$. Нормируя оценки w_i, получим λ_i. От этого метода оценки весов не следует ожидать большой точности.

В общем случае множество оптимальных весовых векторов $\Lambda_\theta \in \Lambda$, когда при некотором $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda_\theta$ есть точка, являющаяся решением составной задачи ЛП $\max\{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D\}$, зависит не только от предпочтений ЛПР, но и от соотношения длин векторов-градиентов целевых функций и геометрии допустимой области, зависит также от степени корреляции критериев (от величины угла между градиентами

целевых функций — чем меньше этот угол, тем больше корреляция между критериями). При сильной корреляции двух критериев, задав большой вес одному критерию, нет необходимости вводить какой-либо вес для другого критерия. При увеличении размерности задачи трудности оценки оптимальных весовых векторов возрастают.

Для облегчения процедуры отыскания оптимальных весовых векторов и решения задач МКЛП проводится масштабирование целевых функций путем применения множителей, выравнивающих диапазоны изменения критериев, а также путем выбора наиболее подходящего определения нормы.

П.2.4.8. Сжатие множества допустимых решений

Метод *e*-ограничений. В этом методе для нахождения оптимального решения задачи МКЛП выбирается для максимизации только *один из критериев*, а остальные критерии ограничиваются снизу некоторыми числами e; т.е. переводятся в условия-ограничения, тем самым сжимают область допустимых решений. Таким образом, вместо задачи МКЛП решается задача ЛП

$$\max\{\mathbf{c}_i\mathbf{x} = \mathbf{z}_i\}$$

$$\text{при } \mathbf{c}_j\mathbf{x} \geq e_j,\ j \neq i,\ j = \overline{1,k},\ \mathbf{x} \in D.$$

То, какие критерии нужно перевести в ограничения и с какими значениями правых частей e_j, определяется пользователем. Например, неверный выбор e_j может привести к несовместной задаче ЛП. ЛПР принимает решение на основе анализа серии подобным образом построенных задач ЛП, т.е. процедура решения задачи МКЛП носит интерактивный характер.

Анализ почти-оптимальности — другой способ сжатия области допустимых решений. Процедура анализа эффективной точки выглядит так:

1. Решить задачу ЛП со взвешенными суммами
$$\max\left\{\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{z}\right\} \text{ при } \mathbf{x} \in D$$
и определить величину $\mathbf{z}^*$.
2. Выбрав некоторое $\mathbf{z}_1 < \mathbf{z}^*$, решить задачу ЛП для сжатой области допустимых решений.
3. Вычислить все критериальные векторы $\mathbf{z}_i \in R^n$, соответствующие крайним точкам $\mathbf{x}_i$ сжатой области.
4. Выбрать точку $\mathbf{x}_i$, соответствующую самому предпочтительному вектору в качестве окончательного решения МКЛП.

Трудности здесь могут возникнуть при нахождении всех альтернативных оптимумов для вычисления всех крайних точек.

В общем случае задачи МКЛП приводят к следующим взаимоисключающим и исчерпывающим ситуациям. Пусть D — множество допустимых решений, E — эффективное множество, тогда:

1) $D = \varnothing$ — несовместность;
2) $D \neq \varnothing$; $E = \varnothing$ и значение по крайней мере одного критерия ограничено;
3) $D = \varnothing$; $E = \varnothing$ и значения всех критериев неограничены;
4) $D \neq \varnothing$; E содержит только одну точку;
5) $D \neq \varnothing$; E ограничено и содержит бесконечное число точек;
6) $D \neq \varnothing$; E неограничено и значение по крайней мере одного критерия неограничено;
7) $D \neq \varnothing$; E неограничено и значения всех критериев неограничены.

В любом случае надо найти исходную эффективную крайнюю точку. Для этого можно использовать следующие методы:

1) взвешенных сумм;
2) взвешенных сумм с использованием подзадачи-теста;
3) лексикографической максимизации;
4) лексикографической максимизации с использованием подзадачи-теста;
5) метод Эккера–Куоды;
6) метод Бенсона.

В методе взвешенных сумм выбирается некоторое

$$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in R^k \middle| \lambda_i > 0,\ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \right\}$$

и решается задача $\max\left\{ \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}\mathbf{x} \middle| \mathbf{x} \in D \right\}$.

Если область D ограничена и $D \neq \varnothing$, то эффективная точка будет найдена. Если область D неограничена, метод не гарантирует нахождения эффективной точки.

При использовании подзадачи-теста еще до нахождения максимума целевой функции проверяются крайние точки в процессе работы метода, чем экономится время. При этом уменьшается вероятность неудачной реализации метода взвешенных сумм в случае неограниченной области D.

В процессе лексикографической максимизации применяется следующая процедура сжатия допустимых областей:

$$D_0 = D;\ D_1 = \left\{ \mathbf{y} \in D \middle| \mathbf{c}_{j1}\mathbf{y} = \max\left[\mathbf{c}_{j1}\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \in D_0 \right] \right\}, \ldots,$$

D_h — область сжатия допустимой области после h максимизаций,...,

$$D_k = \left\{ \mathbf{y} \in D \middle| \mathbf{c}_{jk}\mathbf{y} = \max\left[\mathbf{c}_{jk}\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \in D_{k-1} \right] \right\}.$$

Процесс начинается с максимизации целевой функции $\mathbf{c}_{j1}\mathbf{x}$ в области D_0. Затем, ограничиваясь точками из D_0, максимизируем j_1-й критерий, получаем область D_1.

В области D_1 максимизируем второй критерий $\mathbf{c}_{j2}\mathbf{x}$, ограничиваясь точками из D_1, максимизирующими j_2-й критерий; получаем область D_2. Процесс продолжается до тех пор, пока не получим либо $D_k \neq \varnothing$, либо, начиная с некоторого $l\,(1 \le l \le k)$, D_l, $D_{l+1}, \ldots, D_k = \varnothing$. Последнее будет иметь место, если все остающиеся целевые функции не ограничены на D_{l-1}.

При использовании подзадачи-теста быстрее находится эффективная точка и метод улучшается при неограниченности на D всех критериев. Подзадачу можно применять в начальной крайней точке и повторять проверку после каждого шага максимизации или проверить каждую крайнюю точку. Метод не гарантирует от неудачи, если все критерии не ограничены на D и $E \neq \varnothing$.

В методе Эккера–Куоды решается вспомогательная задача

$$\max\left\{ \mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{S} \right\}$$

при $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{I}\mathbf{S} + \mathbf{C}\mathbf{x}_0$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $0 \le \mathbf{x} \in R^n$, $0 \le \mathbf{S} \in R^k$.

Если $\left(\mathbf{x}^*, \mathbf{S}^*\right)$ — оптимальное решение этой задачи, то $\mathbf{x}^* \in E$, и если целевая функция $\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{S}$ не ограничена сверху, то $E = \varnothing$. Но здесь нет гарантии того, что обнаруженная эффективная точка будет точкой области D.

В методе Бенсона предлагается следующая процедура для определения исходной эффективной крайней точки:

1. Пусть $D \neq \varnothing$. Найти любую точку $\mathbf{x}_0 \in D$.
2. Решить задачу

$$\min\left\{-\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x}_0 + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{b}\right\}$$

при $\mathbf{z}^{\mathrm{T}}\mathbf{C} - \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{w}^{\mathrm{T}} = -\mathbf{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}$, $\mathbf{w}, \mathbf{z} \geq 0$.

Если оптимального решения этой задачи не существует, то задача МКЛП не имеет эффективных точек. Если существует оптимальное решение $(\mathbf{z}_0, \mathbf{U}_0, \mathbf{w}_0)$, то переходим к шагу 3.

3. Положить $\bar{\lambda} = (\mathbf{z}_0 + \mathbf{e})$ и решить задачу

$$\max\left\{\bar{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{x} \middle| \mathbf{x} \in D\right\}.$$

Найдем начальную эффективную крайнюю точку.

П.2.4.9. Минимальные значения критериев на множестве эффективных точек

Для того чтобы определить минимальное значение i-го критерия на эффективном множестве E, надо решить следующую задачу: отыскать

$$\min\left\{\mathbf{c}_i\mathbf{x} = z_i \middle| \mathbf{x} \in E\right\}.$$

Поскольку эффективное множество E неизвестно в явном виде, то нельзя непосредственно решить эту задачу. Причем для большинства задач МКЛП множество E не является выпуклым.

Один из способов решения поставленной задачи базируется на *таблице выигрышей* (табл. П.2.19).

Строки таблицы выигрышей представляют собой критериальные векторы, полученные в результате максимизации *отдельных* критериев.

Таблица П.2.19

Таблица выигрышей

	$\mathbf{Z}_1$	$\mathbf{Z}_2$	...	$\mathbf{Z}_k$
$\bar{\mathbf{z}}_1$	z_1^*	z_{12}	...	z_{1k}
$\bar{\mathbf{z}}_2$	z_{21}	z_2^*	...	z_{2k}
...	...	...	...	...
$\bar{\mathbf{z}}_k$	z_{k1}	z_{k2}	...	z_k^*

В том случае, когда оптимум не единственный, требуется принять специальные меры, чтобы все критериальные векторы, стоящие в строках, были недоминируемыми. Величины z_i^*, стоящие на главной диагонали, образовывают вектор максимальных значений критериев на множестве эффективных точек. Минимальное значение в j-ом столбце таблицы выигрышей — это некоторая оценка минимального значения j-го критерия на множестве E. Если минимальное по столбцу значение находится в строке, в которой стоит *доминируемый* критериальный вектор, то оно может оказаться меньше искомого минимума на множестве E. Если строка, содержащая минимальное значение, является *недоминируемым* критериальным вектором, то минимальное значение будет либо правильно определять минимальное значение критерия на множестве E, либо будет его оценкой сверху. Но в целом этот подход ненадежен.

Для определения минимального на множестве эффективных точек значения i-го критерия можно использовать симплекс-метод. Поочередно лексикографически максимизируя каждый из критериев, строим таблицу выигрышей. Пусть z_{mi} — минимальное значение критерия в i-ом столбце таблицы выигрышей. Добавим в условия-ограничения задачи еще одно ограничение $\mathbf{c}_i\mathbf{x} \le z_{mi}$. Начнем счет с крайней точки, соответствующей z_{mi}. Исследуем грань $\mathbf{c}_i\mathbf{x} = z_{mi}$ нового (после дополнительного ограничения) множества допустимых точек с целью найти такую крайнюю точку, из которой исходит эффективное ребро с убывающим значением i-го критерия. Если такого ребра нет, то текущее значение z_{mi} и есть минимальное значение i-го критерия на E; процесс окончен. Если такое ребро существует, то производим замещение вдоль этого ребра методом Жордана и переходим в крайнюю точку на другом его конце, где значение i-го критерия равно z^n_{mi}. Вводим дополнительное ограничение $\mathbf{c}_i\mathbf{x} \le z^n_{mi}$ и повторяем процедуру. Алгоритм заканчивает работу в точке минимума i-го критерия на множестве эффективных точек.

П.2.4.10. Параметризация целевой функции

Рассмотрим алгоритм метода взвешенных сумм на примере параметризации целевой функции для задачи ЛП с одним критерием (см. п. П.2.4.1).

Исходная задача имеет вид: отыскать

$$\max\{\mathbf{c}_i\mathbf{x} = \mathbf{z}\}$$

$$\text{при } \mathbf{x} \in D.$$

Задан вектор изменения $\mathbf{c}_2 \in R^n$, который определяет изменения координат целевой функции; вводится параметризованный (суммарный) градиент целевой функции $\mathbf{c}^+ \in R^n$, т.е.

$$\mathbf{c}^+ = \mathbf{c}_1 + P\mathbf{c}_2, \text{ где } P \in [0, P_{\max}].$$

Отсюда находится последовательность параметрически оптимальных крайних точек (и ребер) при изменении P от 0 до $P_{\max}$. Точка $\mathbf{x} \in D$ называется *параметрически оптимальной*, если она максимизирует величину $\mathbf{c}^+\mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \in D$ для некоторого значения $P \in [0, P_{\max}]$.

В *методе взвешенных сумм* вводится выпуклая комбинация векторов

$$\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda = \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in R^2 \,\middle|\, \lambda_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{2} \lambda_i = 1 \right\},$$

и тогда $\mathbf{c}^+ = \lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2$.

Между обоими подходами существует прямая связь:

$$P = \lambda_2 \,|\, (1 - \lambda_2), \text{ так как } \mathbf{c}_1 + P\mathbf{c}_2 = \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2).$$

Однако в первом случае вектор $\mathbf{c}^+$ не достигает вектора $\mathbf{c}_2$ (только к нему стремится), во втором — $\mathbf{c}^+ = \lambda_2\mathbf{c}_2$ при $\lambda_1 = 0$.

В поставленной задаче требуется определить критические значения P или λ_1 и λ_2, при которых новые базисы (крайние точки) становятся параметрически оптимальными (т.е. происходит смена базиса). Задача решается в три этапа:

1. Находится допустимая крайняя точка из области D для решения симплекс-методом задачи ЛП

$$\max\{\mathbf{c}_1\mathbf{x} = \mathbf{z}\} \text{ при } \mathbf{x} \in D.$$

2. Решается задача ЛП $\max\{\mathbf{c}_1\mathbf{x} = \mathbf{z}\}$ при $\mathbf{x} \in D$ — получаем исходный параметрически оптимальный базис.
3. Заменяем градиент $\mathbf{c}_1$ на $\mathbf{c}^+ = \lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2$ и получаем остальные параметрически оптимальные базисы (крайние точки), варьируя значение λ_2 от 0 до 1. При этом строка $\mathbf{c}_j^+ - \mathbf{z}_j^+ = \sum_{i=1}^{2}\lambda_i\left[\text{строка } \left(c_{ij} - z_{ij}\right)\right]$.

В процессе решения могут быть следующие варианты:

1. Все небазисные элементы $c_{2j} - z_{2j} \le 0$. Отсюда следует вывод — исходная точка уже оптимальна.
2. Существуют внебазисные положительные элементы $c_{2j} - z_{2j}$, т.е. найдется выпуклая комбинация, при которой $c_j^+ - z_j^+ > 0$; небазисную переменную, соответствующую этому элементу, переводим в базис.

Берем тот элемент $c_j^+ - z_j^+$, который первым стал больше 0 при увеличении значения λ_2.

Ближайшее большее критическое значение λ_2 будет

$$\lambda_2 = \min_{j \in J} \frac{-\left(c_{1j} - z_{1j}\right)}{\left(c_{2j} - z_{2j}\right) - \left(c_{1j} - z_{1j}\right)},$$

где $J = \left\{j \middle| \left(c_{2j} - z_{2j}\right) > 0 \text{ и } \left(c_{1j} - z_{1j}\right) \le 0\right\}$.

То значение j, при котором дробь минимизируется, указывает на небазисную переменную, переводимую в базис, чтобы продолжить параметризацию по λ_2.

Пример П.2.21. Для $\mathbf{c}_1 = [-3 \quad -1]$ и $\mathbf{c}_2 = [1 \quad 2]$ рассмотрим задачу параметрического ЛП с ограничениями

$$x_2 \le 3, \quad 3x_1 - x_2 \le 6, \quad x_1, x_2 \ge 0$$

(см. рис. П.2.23).

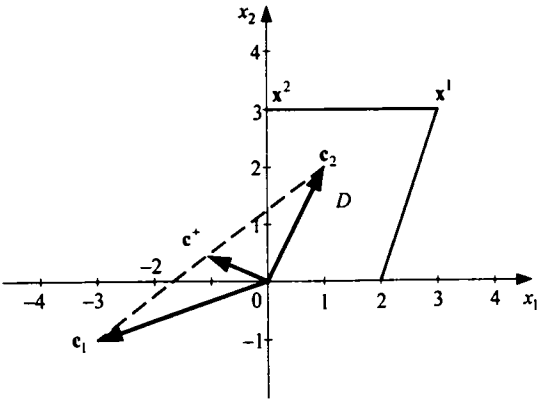


Рис. П.2.23. Допустимое множество примера П.2.21

Оптимальную исходную симплекс-таблицу (табл. П.2.20) задачи ЛП

$$\max\{\mathbf{c}_1\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D\}$$

дополним строкой $c_{2j} - z_{2j}$, $\mathbf{z}_j = \mathbf{c}_B \cdot \mathbf{y}_j$, где c_{iB} — координаты вектора $\mathbf{c}_i$, стоящие в базисных столбцах; $\mathbf{y}_j$ — элементы j-го столбца матрицы. Здесь $c_{1B} = (0,0)$; $c_{2B} = (0,0)$; S_3 и S_4 — слабые переменные.

Таблица П.2.20

Оптимальная исходная симплекс таблица

Базис		x_1	x_2	S_3	S_4
S_3	3	0	[1]	1	0
S_4	6	3	–1	0	1
$\mathbf{c}_1$		–3	–1	0	0
$\mathbf{c}_2$		1	2	0	0
$c_{1j} - z_{1j}$		–3	–1	0	0
$c_{2j} - z_{2j}$		1	2	0	0

Для небазисных переменных x_1 и x_2 $c_{1j} - z_{1j} < 0$, а $c_{2j} - z_{2j} > 0$, т.е. множество $J = \{1,2\}$. Критическое значение λ_2: $\lambda_2 = \min\{-(-3)/(1-(-3)); 1/(2+1)\} = 1/3$ при $j = 2$; $\lambda_1 = 2/3$, переменную x_2 следует перенести в базис (в таблице помечен генеральный элемент); $\mathbf{c}^+ = 2/3 \cdot \mathbf{c}_1 + 1/3 \cdot \mathbf{c}_2 = [-2/3 \quad 0]$. Вектор $\mathbf{c}^+$ ортогонален ребру $\gamma(x_1, x_2)$; строка $\mathbf{c}_j^0 - \mathbf{z}_j^+ = [-2/5 \quad 0 \quad 0 \quad 0]$. Получим табл. П.2.21, где $c_{1B} = (-1, 0)$; $c_{2B} = (2, 0)$.

Таблица П.2.21

Вторая итерация

Базис		x_1	x_2	S_3	S_4
x_2	3	0	1	1	0
S_4	9	[3]	0	1	1
$c_{1j} - z_{1j}$		–3	0	1	0
$c_{2j} - z_{2j}$		1	0	–2	0

Только для столбца x_1 удовлетворяются условия $c_{1j} - z_{1j} < 0$ и $c_{2j} - z_{2j} > 0$, т.е. $j = 1$. Новое критическое значение λ_2: $\lambda_2 = \min\{3/1+3\} = 3/4$; $\lambda_1 = 1/4$; x_1 переводим в базис; $\mathbf{c}^+ = 1/4\,\mathbf{c}_1 + 3/4\,\mathbf{c}_2 = [0 \quad 5/4]$. Вектор $\mathbf{c}^+$ ортогонален ребру $\gamma(x_2, x_3)$; строка $\mathbf{c}_j^+ - \mathbf{z}_j^+$ имеет вид $[0 \quad 0 \quad -5/4 \quad 0]$. Вводим в базис x_1. Получим табл. П.2.22.

Таблица П.2.22

Последняя симплекс-таблица

Базис		x_1	x_2	S_3	S_4
x_2	3	0	1	1	0
x_1	3	1	0	1/3	1/3
$c_{1j} - z_{1j}$		0	0	2	1
$c_{2j} - z_{2j}$		0	0	–7/3	–1/3

Здесь $c_{1j} - z_{1j} > 0$; $c_{2j} - z_{2j} < 0$, т.е. $j = \varnothing$ и процесс завершен.

Получим следующие подмножества Λ, относящиеся к различным параметрически оптимальным крайним точкам и ребрам:

$$\Lambda_{x1} = \left\{\lambda \in \Lambda \middle| \lambda_1 \in \left[\frac{2}{3}, 1\right],\ \lambda_2 \in \left[0, \frac{1}{3}\right]\right\},$$

$$\Lambda\gamma_{(x_1,x_2)} = \left\{\lambda \in \Lambda \middle| \lambda_1 = \frac{2}{3},\ \lambda_2 = \frac{1}{3}\right\},$$

$$\Lambda_{x2} = \left\{\lambda \in \Lambda \middle| \lambda_1 \in \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right],\ \lambda_2 \in \left[\frac{1}{3}, \frac{3}{4}\right]\right\},$$

$$\Lambda\gamma_{(x_2,x_3)} = \left\{\lambda \in \Lambda \middle| \lambda_1 = \frac{1}{4},\ \lambda_2 = \frac{3}{4}\right\},$$

$$\Lambda_{x3} = \left\{\lambda \in \Lambda \middle| \lambda_1 \in \left[0, \frac{1}{4}\right],\ \lambda_2 \in \left[\frac{3}{4}, 1\right]\right\}.$$

Пример П.2.22. Методом взвешенных сумм проанализировать задачу МКЛП

$$\mathbf{c}_1 = [-1 \quad 3],\ \mathbf{c}_2 = [3 \quad 3],\ \mathbf{c}_3 = [1 \quad 2]$$

при $x_2 \le 4,\ x_1 + 2x_2 \le 10,\ 2x_1 + x_2 \le 10,\ x_1, x_2 \ge 0$ (рис. П.2.24).

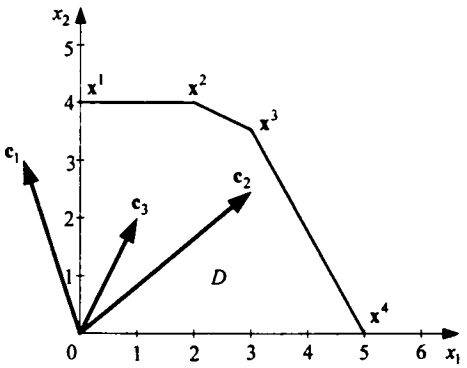


Рис. П.2.24. Допустимое множество примера П.2.22

Имеем

$$\mathbf{c}^+ = \lambda_1\mathbf{c}_1 + \lambda_2\mathbf{c}_2 + \lambda_3\mathbf{c}_3,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda = \left\{\lambda \in R^3 \middle| \lambda_i \ge 0;\ \sum_{i=1}^{3} \lambda_i = 1\right\}$.

Найдем подмножества Λ, принадлежащие различным параметрически оптимальным крайним точкам и ребрам. Решим задачу ЛП $\max\{\mathbf{c}_1\mathbf{x} \mid \mathbf{x} \in D\}$ и добавим в полученную оптимальную симплекс-таблицу строки для $c_{2j} - z_{2j}$ и $c_{3j} - z_{3j}$ (табл. П.2.23). После решения задачи ЛП мы получили начальную параметрически оптимальную крайнюю точку (0, 4).

Таблица П.2.23

Оптимальное решение задачи ЛП

Базис		x_1	x_2	s_3	s_4	s_5
x_2	4	0	1	1	0	0
s_3	2	[1]	0	–2	1	0
s_5	6	2	0	1	0	1
$c_{1j} - z_{1j}$		–1	0	2	0	0
$c_{2j} - z_{2j}$		3	0	–3	0	0
$c_{3j} - z_{3j}$		1	0	–2	0	0

Анализируем строку $c_j^+ - z_j^+ = \sum_{i=1}^{3} \lambda_i \left[\text{строка}\left(c_{ij} - z_{ij}\right)\right]$. Поскольку небазисные элементы строки $c_j^+ - z_j^+$ должны быть неположительны в параметрически оптимальной крайней точке для всех λ из подмножества Λ_{x1}, соответствующего точке x_1, то имеем

$$\begin{cases} -\lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 \le 0, \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 - 2\lambda_3 \le 0, \quad \lambda \in \Lambda, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \end{cases}$$

или, учитывая $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, получим

$$\begin{cases} 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \ge 1, \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \le 2, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \le 1, \\ \lambda_1,\ \lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Получили $\lambda^1 = [1/2 \quad 0 \quad 1/2]$, $\lambda^2 = [3/4 \quad 1/4 \quad 0]$. Множество Λ_{x1} изображено на рис. П.2.25.

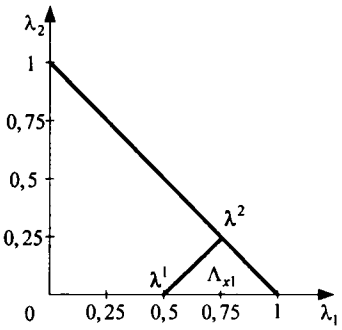


Рис. П.2.25. Множество Λ_{x1}

Переводим x_1 в базис и переходим путем замещения методом Жордана в точку (2, 4) (табл. П.2.24).

Таблица П.2.24

Вторая итерация

Базис		x_1	x_2	s_3	s_4	s_5
x_2	4	0	1	1	0	0
x_1	2	1	0	–2	1	0
s_5	2	2	0	[3]	–2	1
$c_{1j} - z_{1j}$		0	0	–5	1	0
$c_{2j} - z_{2j}$		0	0	3	–3	0
$c_{3j} - z_{3j}$		0	0	0	–1	0

Для определения Λ_{x2} получим систему

$$\begin{cases} -5\lambda_1 + 3\lambda_2 \le 0, \\ \lambda_1 - 3\lambda_2 - \lambda_3 \le 0, \quad \lambda \in \Lambda, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 \le 0, \\ 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \le 1, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \le 1, \\ \lambda_1,\ \lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Получили $\lambda^1 = [1/2 \quad 0 \quad 1/2]$, $\lambda^2 = [3/4 \quad 1/4 \quad 0]$, $\lambda^3 = [0 \quad 0 \quad 1]$, $\lambda^4 = [3/8 \quad 5/8 \quad 0]$. Множество Λ_{x2} изображено на рис. П.2.26.

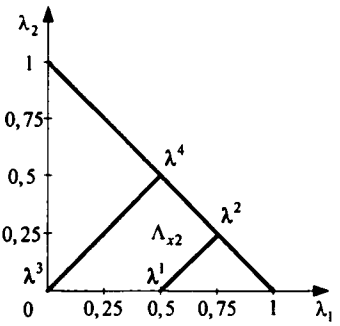


Рис. П.2.26. Множество Λ_{x2}

Далее переходим в точку $(10/3;\ 10/3)$ (табл. П.2.25).

Таблица П.2.25

Последняя итерация

Базис		x_1	x_2	s_3	s_4	s_5
x_2	10/3	0	1	0	2/3	−1/3
x_1	10/3	1	0	0	−1/3	2/3
s_3	2/3	0	0	1	−2/3	1/3
$c_{1j} - z_{1j}$		0	0	−5	−7/3	5/3
$c_{2j} - z_{2j}$		0	0	3	−1	−1
$c_{3j} - z_{3j}$		0	0	0	−1	0

Имеем

$$\begin{cases} -\frac{7}{3}\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 \le 0, \\ \frac{5}{3}\lambda_1 - \lambda_2 \le 0, \qquad \lambda \in \Lambda, \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} -\frac{4}{3}\lambda_1 \le 1, \\ \frac{5}{3}\lambda_1 - \lambda_2 \le 0, \\ \lambda_1 + \lambda_2 \le 1, \\ \lambda_1,\ \lambda_2 \ge 0. \end{cases}$$

Множество Λ_{x3} имеет вид (рис. П.2.27).

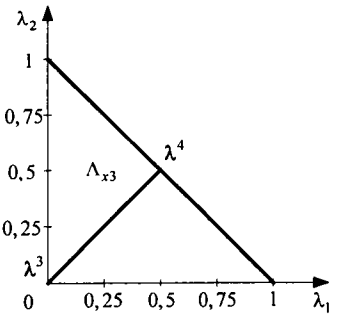


Рис. П.2.27. Множество Λ_{x3}

П.2.4.11. Целевое программирование

Целевое программирование (ЦП) зародилось как приложение обычного линейного программирования. В настоящее время — это область многокритериальной оптимизации. В целевом программировании устанавливается некоторый уровень достижения целей по каждому критерию. От обычного линейного программирования ЦП отличается следующими особенностями:

1) пониманием критериев как целей;
2) приписыванием приоритетов и/или весов достижению отдельных целей;
3) присутствием переменных d_i^+ и d_i^-, являющихся мерой отклонения от целевых уровней t_i сверху и снизу соответственно;
4) минимизацией взвешенных сумм переменных отклонений с целью найти решения, наилучшим образом удовлетворяющие целям.

Обычно точка, удовлетворяющая сразу всем целям, не является допустимой. Стараются найти допустимую точку, которая достигает всех целей «наилучшим» образом.

Для каждой цели (целевой функции) устанавливается значение критерия z_i, который должен быть достигнут (если возможно) по отношению к обусловленным числами t_i целям.

В задачах ЦП рассматриваются *утопическое множество* D *в пространстве решений* — множество тех точек из R^n, в которых одновременно достигаются все цели, и *утопическое множество* Z *в пространстве критериев* — это множество критериальных векторов в R^k, которые одновременно удовлетворяют всем целям.

В задаче ЦП делается попытка найти точку из D, для которой критериальный вектор — наилучший по сравнению с утопическим множеством Z в пространстве критериев.

В ЦП рассматриваются два основных подхода к решению задач: архимедова модель и модель с приоритетами. В архимедовой модели точки-кандидаты в решение генерируются путем определения тех точек из D, критериальные векторы которых являются ближайшими в смысле взвешенной метрики в L_1 к утопическому множеству в пространстве критериев. Для модели с приоритетами генерируют решения, для которых критериальные векторы оказываются наиболее соответствующими в лексикографическом смысле точками утопического множества в пространстве критериев.

Пример П.2.23. Рассмотрим задачу ЦП

$$\text{цель } \{\mathbf{c}_1\mathbf{x} = z_1\},\ z_1 \geq t_1,$$
$$\text{цель } \{\mathbf{c}_2\mathbf{x} = z_2\},\ z_2 = t_2,$$
$$\text{цель } \{\mathbf{c}_3\mathbf{x} = z_3\},\ z_3 \in [t_3^H, t_3^B],$$
$$\text{при } \mathbf{x} \in D.$$

Архимедова формулировка этой задачи выглядит так: отыскать

$$\min\{w_1^- d_1^- + w_2^+ d_2^+ + w_2^- d_2^- + w_3^- d_3^- + w_3^+ d_3^+\}$$

при

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{c}_1\mathbf{x} + d_1^- \geq t_1,\\ &\mathbf{c}_2\mathbf{x} - d_2^+ + d_2^- = t_2,\\ &\mathbf{c}_3\mathbf{x} + d_3^- \geq t_3^H,\\ &\mathbf{c}_3\mathbf{x} - d_3^+ \leq t_3^B,\\ &d_1^-,\ d_2^+,\ d_2^-,\ d_3^+,\ d_3^- \geq 0 \end{aligned}\right\} \text{— целевые ограничения,}$$

$$\mathbf{x} \in D.$$

Здесь переменные w в целевой функции — положительные штрафные веса; каждая цель порождает одно целевое ограничение, кроме случая, когда задан диапазон и возникает два целевых ограничения. В формулировке задачи используются переменные отклонений $d_1^-,\ d_2^+,\ d_2^-,\ldots$, которые соответствуют *нежелательным* отклонениям.

Архимедова целевая функция представляет собой взвешенную сумму переменных нежелательных отклонений. Переменные w позволяют штрафовать нежелательные отклонения от цели с разной степенью жесткости. Целевые ограничения расширяют область допустимых решений, переводя D в пространство большей размерности и создавая таким образом архимедову область допустимых решений для задачи ЦП.

Архимедовы задачи ЦП можно решать, используя обычные методы линейного программирования. Но тогда мы можем получить только крайние точки допустимой области в пространстве решений для архимедовой задачи ЦП (т.е. крайние точки области D после ее усечения целевыми ограничениями). Могут рассматриваться следующие варианты:

1) крайние точки области D;
2) точки границы области D, не являющимися крайними;
3) внутренние точки области D.

Если ЛПР предпочитает точку, не являющуюся крайней точкой допустимой области архимедовой задачи ЦП, то ее нельзя получить, не используя процедуры изменения целевых показателей t_i.

Задача ЦП с приоритетами

В приоритетном (лексикографическом) ЦП цели группируются по приоритетам. Цели с высшим уровнем приоритета считаются бесконечноважными по сравнению с целями со следующим уровнем приоритета. Рассмотрим задачу ЦП с приоритетами вида

$$\text{цель } \{\mathbf{c}_1\mathbf{x} = z_1\},\ P_1(z_1 \leq t_1),$$
$$\text{цель } \{\mathbf{c}_2\mathbf{x} = z_2\},\ P_2(z_2 \geq t)_2,$$
$$\text{цель } \{\mathbf{c}_3\mathbf{x} = z_3\},\ P_3(z_3 = t_3)$$
$$\text{при } \mathbf{x} \in D,$$

в которой $j = 1,2,3$ указывают цели с уровнем приоритета j. Величины P_j служат и в качестве факторов приоритетов, причем $P_j \gg P_{j+1}$ (P_j много больше P_{j+1}).

Запишем задачу ЦП с приоритетами в следующей лексикографической форме:

$$\text{lex min}\left\{d_1^+, d_2^-, \left(d_3^+ + d_3^-\right)\right\}$$

при

$$\mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1^+ \le t_1,$$

$$\mathbf{c}_2\mathbf{x} + d_2^- \ge t_2,$$

$$\mathbf{c}_3\mathbf{x} - d_3^+ + d_3^- = t_3,$$

$$\mathbf{x} \in D,$$

$$d_1^+,\ d_2^-,\ d_3^+,\ d_3^- \ge 0.$$

Решается эта задача с помощью алгоритмов линейного программирования, решая последовательно задачи с наибольшим приоритетом. На первом этапе решаем задачу отыскания:

$$\min\left\{d_1^+\right\}$$

при

$$\mathbf{c}_1\mathbf{x} - d_1^+ \le t_1,\ \mathbf{x} \in D,\ d_1^+ \ge 0.$$

Если в этой задаче есть альтернативные оптимумы $\left(\text{для небазисных элементов есть соответствующее значение } c_j - z_j = 0\right)$, то решаем задачу второго этапа: отыскать

$$\min\left\{d_2^-\right\}$$

при

$$\mathbf{c}_1\mathbf{x} \le t_1 + \left(d_1^+\right)_{\text{опт}},$$

$$\mathbf{c}_2\mathbf{x} + d_2^- \ge t_2,$$

$$\mathbf{x} \in D,$$

$$d_2^- \ge 0.$$

Здесь $\left(d_1^+\right)_{\text{опт}}$ — оптимальное значение переменной d_1^+, найденное на первом этапе.

Если в задаче второго этапа есть альтернативные оптимумы, то решаем задачу третьего этапа: отыскать

$$\min\left\{d_3^+ + d_3^-\right\}$$

при

$$\mathbf{c}_1\mathbf{x} \le t_1 + \left(d_1^+\right)_{\text{опт}},$$

$$\mathbf{c}_2\mathbf{x} \ge t_2 - \left(d_2^-\right)_{\text{опт}},$$

$$\mathbf{c}_3\mathbf{x} - d_3^+ + d_3^- = t_3,$$

$$\mathbf{x} \in D,$$

$$d_3^+, d_3^- \ge 0,$$

где $\left(d_2^-\right)_{\text{опт}}$ — оптимальное значение d_2^- после второго этапа.

Любое решение задачи третьего этапа определяет лексикографический минимум в задаче ЦП с приоритетами.

Но решение прекращается, как только на каком-то этапе будет единственное решение, т.е. цели нижних уровней могут и не повлиять на решение.

Задача ЦП с приоритетами может решаться в одном этапе, использовав *лексикографический* симплекс-метод.

Пример П.2.24. Рассмотрим задачу ЦП:

$$\text{цель } \{x_2 = z_1\},\ P_1(z_1 \geq 5),$$
$$\text{цель } \{-x_1 - x_2 = z_2\},\ P_2(z_2 \geq 4),$$
$$\text{цель } \{x_3 = z_3\},\ P_3(z_3 \geq 3)$$

при

$$x_2 \leq 2,\ x_3 \leq 3,$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geq 0.$$

Эта задача преобразуется к виду

$$\text{lex min}\{d_1^-, d_2^-, d_3^-\}$$

при

$$x_2 + d_1^- \geq 5,$$
$$-x_1 - x_2 + d_2^- \geq 4,$$
$$x_3 + d_3^- \geq 3,$$
$$x_2 \leq 2,$$
$$x_3 \leq 3,$$
$$\text{все переменные} \geq 0.$$

Таблица П.2.26

Симплекс-таблица первого этапа

Базис		x_1	x_3	S_1	S_2	S_3	S_4
d_1^-	3			−1			−1
d_2^-	6	−1			−1		
d_3^-	3		1			−1	
X_2	2						1
S_5	3		[1]				
$c_{1j} - z_{1j}$	3			1			1
$c_{2j} - z_{2j}$	6	1			1		−1
$c_{3j} - z_{3j}$	3		−1			1	

Введем дополнительные переменные $s_1, \ldots, s_5$ и заполним симплекс-таблицу (табл. П.2.26), из которой удалим столбцы базисных переменных; $c_j - z_j$ — строка относительных оценок целевой функции для каждого лексикографического уровня P_j, $j = 1,2,3$ (последние три строки симплекс-таблицы). Нулевые клетки — пустые.

Анализируя строки $c_j - z_j$, видим, что переменную s_4 можно было бы перевести в базисные переменные. Тогда целевая функция второго лексикографического уровня может быть уменьшена, но при этом увеличится целевая функция первого лексикографического уровня, чего допустить нельзя. Таким образом, точка $(x_1, x_2, x_3) = (0,2,0)$ минимизирует целевые функции первого и второго этапов. Так как существуют альтернативные оптимумы, переходим к третьему этапу. Вводим в базис переменную x_3, так как в первой и второй строках $c_j - z_j$ над (−1) нет положительных элементов. Получим новую табл. П.2.27 и оптимальное решение $(x_1, x_2, x_3) = (0,2,3)$, что и является лексикографическим минимумом для рассматриваемой задачи.

Таблица П.2.27

Заключительная симплекс-таблица

Базис		x_1	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
d_1^-	3		−1			−1	
d_2^-	6	−1		−1		1	
d_3^-	0				−1		−1
X_2	2					1	
X_3	3						1
P_1	3		1			1	
P_2	6	1		1		−1	
P_3	0				1		1

В точке оптимального решения для первой цели отклонение $d_1^- = 3$; для второй цели — $d_2^- = 6$; третья цель достигнута: $d_3^- = 0$.

Наилучшие результаты в решении задач ЦП получаются в интерактивном режиме, когда решаются одновременно и архимедова задача и задача с приоритетами.

Полезно бывает применить прием масштабирования целевых ограничений — записать отклонения от целей в процентах, т.е. ввести вместо d_i выражение $(t_i/100)\cdot d_i$. Если дополнительно минимизировать новую переменную α и добавить условия, что отклонения d_i не будут превышать значения α, то такая процедура будет минимизировать максимальное отклонение. В этом случае число дополнительных ограничений равно числу переменных отклонения на рассматриваемом уровне приоритета.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧИСЛОВОЙ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ВЕКТОРОВ

Во многих задачах управления требуется получить представление исходной системы в канонической форме, в которой каналы будут максимально развязаны. Наилучшей формой такого представления является *жорданова форма*. Для простых вещественных корней матрица преобразования **S** хорошо известна (она состоит из n собственных векторов).

Что же касается кратных корней, даже вещественных, формализованного алгоритма, доведенного до компьютерной программы, не существует. Хорошо известные математические пакеты *Matlab*, *Maple* не дают правильного ответа, что мы покажем ниже на конкретных примерах.

Если рассмотреть простые комплексные корни, то их алгоритм преобразования совпадает с алгоритмом для простых вещественных корней, однако в этом случае получаем представление в комплексном пространстве, что также весьма неудобно. В данном приложении мы рассмотрим алгоритмы приведения произвольной числовой матрицы к некоторому каноническому (не обязательно жорданову) виду с произвольной кратностью и видом корней.

П.3.1. НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ (ОПЕРАТОРЫ)

В начале рассмотрим простой пример. Дана матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3{,}2 & -0{,}2 & -0{,}6 \\ 1{,}4 & -4{,}6 & -3{,}8 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & -1{,}2 \end{bmatrix}.$$

Ее собственные значения $\lambda = -3$ алгебраической кратности (определение будет дано ниже) $m = 3$. Собственные векторы, найденные в различных математических пакетах:

а) *Matlab*: вычисляется только один — $\xi = [0{,}1162 \quad 0{,}93 \quad -0{,}3487]^{\mathrm{T}}$,

б) *Maple*: вычисляются собственные значения

$$\lambda_{1,2} = -2{,}999 \pm 0{,}0012j, \quad \lambda_3 = -3{,}0011$$

и матрица собственных векторов

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 386{,}137 & -238{,}701 & -0{,}097 \\ 3086{,}304 & -1907{,}902 & -0{,}7759 \\ -1158{,}412 & 714{,}898 & 0{,}2907 \end{bmatrix},$$

которая дает следующее представление:

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -2,9991 & 0,0013 & 0,0001 \\ -0,0009 & -2,9991 & 0,0001 \\ 0,0129 & -0,0191 & -3,0017 \end{bmatrix}.$$

Но точное значение матрицы $\tilde{\mathbf{D}}$ есть

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

поскольку геометрическая кратность $k = 3$.

Причина такого несоответствия в сложности формализации нахождения присоединенных векторов для кратных корней. Для того чтобы понять, в чем эта сложность, мы введем необходимые определения и понятия, и прежде всего, определения кратности корня.

Определение П.3.1. *Алгебраическая кратность* m_i $(n \geq m_i \geq 1)$ собственного значения λ_i — это кратность данного корня в характеристическом полиноме $\chi(s)$.

Алгебраическая кратность m_i определяет размерность корневого пространства K_i корня λ_i.

Определение П.3.2. *Геометрическая кратность* k_i $(n \geq k_i \geq 1)$ собственного значения λ_i — это кратность данного корня в минимальном полиноме $\mu(s)$.

Определение П.3.3. *Минимальный полином* — это минимальный аннулирующий полином матрицы **A**.

Процедура поиска собственных и присоединенных векторов связана с так называемыми нильпотентными преобразованиями, определения и свойства которых мы сейчас рассмотрим.

П.3.1.1. Нильпотентные преобразования

Нильпотентные, т.е. потенциально нулевые, преобразования и их свойства лежат в основе нахождения собственных и присоединенных векторов матрицы линейного преобразования с последующим представлением этой матрицы в канонической жордановой форме.

Введем некоторые определения.

Определение П.3.4. Линейное преобразование **B** линейного пространства K называют *нильпотентным*, если его минимальный полином имеет вид $\mu(\lambda) = \lambda^p$. Число p называется *показателем нильпотентности*.

Из этого определения следует, что все собственные значения матрицы нильпотентного преобразования **B** (мы обозначаем матрицу так же, как и само преобразование) являются *нулевыми*. Более того, если p — показатель нильпотентности, то $\mathbf{B}^p\xi = \mathbf{0}$ для *любого* вектора $\xi \in K$, но найдется такой вектор $\xi \in K$, что $\mathbf{B}^{p-1}\xi \neq \mathbf{0}$. Может оказаться, что для некоторых ξ будет иметь место $\mathbf{B}^h\xi = \mathbf{0}$ при $h < p$.

Наша задача — определить структуру линейного (в общем случае) пространства K и получить алгоритм построения такого и подобного ему подпространств. Прежде всего докажем следующее важное предложение.

Предложение П.3.1. *Пусть* $\mathbf{B}$ — *нильпотентное преобразование и для вектора* ξ *при некотором* h *выполняется условие* $\mathbf{B}^{h-1}\xi \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B}^{h}\xi = \mathbf{0}$. *Тогда векторы* ξ, $\mathbf{B}\xi$,..., $\mathbf{B}^{h-1}\xi$ *линейно независимы.*

Доказательство. Предположим, что векторы линейно зависимые и α_i $(i \geq 0)$ — первый отличный от нуля коэффициент в их нулевой линейной комбинации

$$\alpha_0\xi + \ldots + \alpha_i\mathbf{B}^i\xi + \ldots + \alpha_{h-1}\mathbf{B}^{h-1}\xi = \mathbf{0}. \qquad (\text{П.3.1})$$

Из условия предположения следует, что $i < h-1$. Рассмотрим преобразование $\mathbf{B}^{h-i-1}$. Подействуем им на обе части равенства (П.3.1). Получим $\alpha_i\mathbf{B}^{h-1}\xi = \mathbf{0}$, откуда следует, что $\alpha_i = 0$ вопреки предположению. Предложение доказано.

Из предложения П.3.1 вытекает следующее следствие.

Следствие П.3.1. *Показатель нильпотентности* p *не превосходит размерности* m *пространства* $\mathcal{K}$ $(p \leq m)$.

Для каждой квадратной матрицы $\mathbf{A}$ матрицей нильпотентного преобразования будет $\mathbf{B}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$, $i = \overline{1,q}$, где λ_i — собственное значение матрицы $\mathbf{A}$, $1 \leq q \leq n$ (считается, что корни могут быть кратными), q определяет число различных корней матрицы $\mathbf{A}$ и равно количеству корневых подпространств $\mathcal{K}_i$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$ линейного пространства $\mathcal{L}$.

П.3.1.2. Корневые подпространства

Алгебраическая кратность корня m_i задает размер так называемых корневых подпространств, которые определяют максимальные инвариантные подпространства каждого корня λ_i.

Определение П.3.5. Максимальное инвариантное подпространство $\mathcal{K}$ пространства $\mathcal{L}$, на котором оператор (преобразование) $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ (λ — собственное значение $\mathbf{A}$) нильпотентен, называется *корневым подпространством* оператора (преобразования) $\mathbf{A}$.

Важность корневых подпространств состоит в том, что пространство $\mathcal{L}$ является прямой суммой (пересечение подпространств только по нулевому вектору) корневых подпространств $\mathcal{K}_i$ $\left(i = \overline{1,q}\right)$ преобразования $\mathbf{A}$

$$\mathcal{L} = \mathcal{K}_1 \oplus \mathcal{K}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{K}_q.$$

Размерность корневых подпространств $\dim\mathcal{K}_i = m_i$, $i = \overline{1,q}$, равна алгебраической кратности корня λ_i.

Известно, что в общем случае $k_i \leq m_i$ (геометрическая кратность не превосходит алгебраической), так как характеристический полином не всегда является минимальным.

Однако имеет место следующее

Предложение П.3.2 [8]. Показатель (степень) нильпотентности p_i преобразования $\mathbf{B}_i$ в точности равен кратности k_i корня λ_i в минимальном полиноме. Так как в общем случае, как было уже сказано, $k_i \leq m_i$, то каждое корневое простран-

ство $\mathcal{K}_i$, в свою очередь, разбивается на сумму так называемых циклических подпространств.

П.3.1.3. Циклические подпространства

Определение П.3.6. *Циклическим подпространством* относительно нильпотентного оператора (преобразования) **B** называется линейная оболочка векторов ξ, $\mathbf{B}\xi,\ldots$, $\mathbf{B}^{h-1}\xi$ при $\mathbf{B}^{h-1}\xi \neq \mathbf{0}$ и $\mathbf{B}^{h}\xi = \mathbf{0}$. Будем говорить, что циклическое подпространство **Z** *порождается* вектором ξ.

Данное определение позволяет сформулировать следующую теорему.

Теорема П.3.1. Корневое подпространство $\mathcal{K}_i$, в котором задано нильпотентное преобразование $\mathbf{B}_i$, распадается в прямую сумму подпространств, циклических относительно $\mathbf{B}_i$:

$$\mathcal{K}_i = Z_i^1 \oplus Z_i^2 \oplus \ldots \oplus Z_i^{æ_i}, \quad i = \overline{1,q},$$

где $æ_i$ *— число циклических подпространств корневого пространства* $\mathcal{K}_i$ (методика нахождения $æ_i$ будет дана ниже).

Каждое циклическое подпространство Z_i^j, $j = \overline{1,æ_i}$, $i = \overline{1,q}$, определяется своим циклическим базисом, который строится следующим образом. Пусть для некоторого вектора ξ: $\mathbf{B}_i^h\xi \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{B}_i^{h+1}\xi = \mathbf{0}$. Тогда последовательность $\xi_i^{(h)} = \xi$, $\xi_i^{(h-1)} = \mathbf{B}_i\xi,\ldots$, $\xi_i^{(1)} = \mathbf{B}_i^{h-1}\xi$, $\xi_i^{(0)} = \mathbf{B}_i^h\xi$ формирует циклический базис (в скобках указан индекс).

Нетрудно заметить, что $\xi_i^{(0)}$ является собственным вектором, так как

$$\mathbf{B}_i\xi_i^{(0)} = \mathbf{B}_i^{h+1}\xi_i^{(h)} = \mathbf{B}_i^{h+1}\xi = \mathbf{0},$$

где $\mathbf{B}_i = (\mathbf{A} - \lambda_i\mathbf{I})$.

Остальные h векторов $\xi_i^{(1)},\ldots,\xi_i^{(h)}$ называются *присоединенными* (обобщенными [41]) к $\xi_i^{(0)}$ векторами. Таким образом, каждый циклический базис состоит из собственного и присоединенных к нему векторов.

Для того чтобы представить произвольную матрицу в канонической (жордановой) форме, необходимо найти все циклические и корневые подпространства пространства $\mathcal{L}$.

В комплексном подпространстве (для чисто вещественных корней в вещественном) каноническая жорданова форма матрицы **A** имеет вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{J}_2 & & \\ & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & \mathbf{J}_q \end{bmatrix}, \qquad (\text{П.3.2})$$

где каждая клетка $\mathbf{J}_i$, $i = \overline{1,q}$, определяется собственным значением λ_i, формирует корневое подпространство $\mathcal{K}_i$, которое, в свою очередь, включает циклические подпространства Z_i^j, $j = \overline{1,æ_i}$, $i = \overline{1,q}$:

$$\mathbf{J}_i = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}_{\beta_1 \times \beta_1} & & & \mathbf{0} \\ & \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ & \ddots & 1 \\ 0 & & \lambda_i \end{bmatrix}_{\beta_2 \times \beta_2} & & \\ & & \ddots & \cdots \\ & & & \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 \\ 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}_{\beta_{æ_i} \times \beta_{æ_i}} \\ \mathbf{0} & & & \end{bmatrix}_{m_i \times m_i}, \quad \text{(П.3.3)}$$

где $\beta_j \left(j = \overline{1, æ_i}\right)$ — размерность циклического подпространства Z_i^j, $1 \le \beta_j \le æ_i$, $\sum_{j=1}^{æ_i} \beta_j = m_i$, причем одна из жордановых клеток размерности $k_i \times k_i$ (напомним k_i — геометрическая кратность, m_i — алгебраическая кратность корня λ_i) *обязательно* присутствует в матрице $\mathbf{J}_i$; клетки меньшего размера могут отсутствовать. Представления (П.3.2), (П.3.3) определены с *точностью до перестановки клеток*.

Рассмотрим алгоритм нахождения представления (П.3.2), (П.3.3) для произвольной матрицы. Но начнем мы с матриц, имеющих только вещественные собственные значения. Так как алгоритм построения каждой жордановой клетке $\mathbf{J}_i$ (корневых подпространств K_i), $i = \overline{1,q}$, является одним и тем же и сводится к нахождению собственных и присоединенных векторов циклических базисов, то мы рассмотрим случай, когда $m = n$, т.е. алгебраическая кратность корня λ совпадает с порядком характеристического полинома, следовательно, будет одна клетка $\mathbf{J}$, которая может включать одну или несколько жордановых клеток (циклических базисов).

П.3.2. АЛГОРИТМЫ КАНОНИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МАТРИЦ

П.3.2.1. Алгоритм нахождения собственных и присоединенных векторов матрицы A для вещественных собственных значений

Сразу оговорим, что алгоритм полностью справедлив и для комплексных корней, но преобразование справедливо в комплексном пространстве. Если осуществить комплексификацию преобразование **A**, то можно получить решение в вещественном пространстве, но форма уже будет не жорданова. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Итак рассматриваем матрицу **A** с вещественными собственными значениями, у которой характеристический полином $\chi(s) = (s-\lambda_1)^{m_1}(s-\lambda_2)^{m_2}\ldots(s-\lambda_q)^{m_q}$. В первую очередь необходимо определить число жордановых клеток (циклических подпространств), геометрическую кратность k_i каждого корня λ_i в минимальном полиноме

$$\mu(s) = (s-\lambda_1)^{k_1}(s-\lambda_2)^{k_2}\ldots(s-\lambda_q)^{k_q}, \quad k_i \le m_i, \quad i = \overline{1,q}.$$

1. Геометрическая кратность k_i корня λ_i определяется из следующего условия [8]:

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{k_i} = n - m_i, \qquad (\text{П.3.4})$$

где $\operatorname{rank}\mathbf{C}$ — ранг матрицы $\mathbf{C}$.

2. Определяется число жордановых клеток порядка n_j $\left(j=\overline{1,k_i}\right)$ циклических базисов для данного собственного значения λ_i [73]:

$$n_j = \operatorname{rank}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{j-1} - 2\operatorname{rank}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{j} + \operatorname{rank}(\mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I})^{j+1}, \quad j=\overline{1,k_i}, \qquad (\text{П.3.5})$$

и общее количество клеток корневого пространства K_i:

$$\sum_{j=1}^{k_i} n_j = æ_i. \qquad (\text{П.3.6})$$

Число $æ_i$ определяет общее число *линейно независимых собственных векторов матрицы* $\mathbf{J}_i$, $i=\overline{1,q}$, начальных векторов циклических базисов.

Заметим, что если все корни простые (показатель нильпотентности оператора $\mathbf{B}_i = \mathbf{A}-\lambda_i\mathbf{I}$ $p=1$), то матрица $\mathbf{A}$ может быть представлена в диагональном виде, где на диагонали стоят одномерные жордановы клетки.

3. Определяем собственные и присоединенные векторы циклических базисов.

Эта процедура наиболее трудно реализуема, и поэтому до настоящего времени отсутствует алгоритм компьютерного программного нахождения этих векторов. Покажем процедуру поиска на конкретных примерах, где в первую очередь будем обращать внимание на особенности поиска собственных векторов.

После нахождения всех собственных и присоединенных векторов составляем матрицу преобразования

$$\mathbf{S} = \left[\xi_1^{(0)} \mid \xi_1^{(1)} \mid \cdots \mid \xi_1^{(k_1)} \mid \xi_q^{(0)} \mid \xi_q^{(1)} \mid \cdots \mid \xi_q^{(k_q)}\right], \qquad (\text{П.3.7})$$

которая позволяет получить каноническую жорданову (для вещественных корней в вещественном пространстве) форму

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S}. \qquad (\text{П.3.8})$$

Рассмотрим примеры.

Пример П.3.1. Дана матрица

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3{,}5 & -0{,}5 & 0 \\ 1 & -2{,}5 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 & -3 \end{bmatrix}, \; n=3.$$

Характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$

$$\chi(s) = (s+3)^3,$$

где $m=n=3$, алгебраическая кратность корня $\lambda=-3$ равна 3.

В пакете *Matlab* была получена матрица собственных векторов $\tilde{\mathbf{S}}$, которая по формуле (П.3.8) дает следующий результат:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

из чего следует, что минимальный полином $\tilde{\mu}(s) = (s+3)$, т.е. $\tilde{k}=1$. На самом деле это совсем не так. Следуя алгоритму, найдем правильный минимальный полином. По формуле (П.3.4) получим

$$\operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^{k} = n - m = 3 - 3 = 0.$$

Из чего находим геометрическую кратность $k = 3$, т.е. имеется одна жорданова клетка порядка 3:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Проверим формулу (П.3.5):

- одномерные жордановы клетки:

$$n_1 = \operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^0 - 2\operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^1 + \operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^2 = 3 - 4 + 1 = 0;$$

- двухмерные жордановы клетки:

$$n_2 = \operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^1 - 2\operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^2 + \operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^3 = 2 - 2 = 0;$$

- трехмерные жордановы клетки:

$$n_3 = \operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^2 - 2\operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^3 + \operatorname{rank}(\mathbf{A}+3\mathbf{I})^4 = 1,$$

т.е. действительно получим 1 жорданову клетку порядка 3:

$$æ = 1.$$

У матрицы $\mathbf{A}$, таким образом, один собственный и два присоединенных вектора (все векторы должны быть линейно независимы).

Итак, циклический базис состоит из следующих векторов $(\mathbf{B} = \mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})$:

$$\mathbf{B}\xi^{(1)} = \xi^{(0)}, \quad \mathbf{B}\xi^{(2)} = \xi^{(1)}, \quad \mathbf{B}\xi^{(0)} = \mathbf{0},$$

где $\xi^{(0)}$ — собственный вектор, а $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ — присоединенные векторы (показатель нильпотентности $p = 3$).

Для нахождения $\xi^{(0)}$, $\xi^{(1)}$, $\xi^{(2)}$ рассмотрим матрицы нильпотентного оператора

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & 0 \\ 1 & 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & 0,5 & 0 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}\mathbf{B} = 2;$$

$$\mathbf{B}^2 = \left[\mathbf{A}+3\mathbf{I}\right]^2 = \begin{bmatrix} -0,25 & 0 & -0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \\ 0,25 & 0 & 0,25 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}\mathbf{B}^2 = 1;$$

$$\mathbf{B}^3 = \left[\mathbf{A}+3\mathbf{I}\right]^3 = \mathbf{0}, \quad \operatorname{rank}\mathbf{B}^3 = 0.$$

Попробуем найти вектор $\xi^{(2)}$. Имеем

$$\mathbf{B}^2\xi^{(2)} = \mathbf{B}\xi^{(1)} = \xi^{(0)},$$

$$\mathbf{B}^3\xi^{(2)} = \mathbf{0}\cdot\xi^{(2)} = \mathbf{B}\xi^{(0)} = \mathbf{0}.$$

Из двух полученных выражений следует, что $\xi^{(2)}$ может быть любым вектором, не принадлежащим ядру преобразования $\mathbf{B}^2$, т.е. $\xi^{(2)} \notin \ker\mathbf{B}^2$, так как $\xi^{(2)}$ должен быть ненулевым. Выберем, например,

$$\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \notin \ker\mathbf{B}^2.$$

Тогда последовательно найдем:

$$\xi^{(1)} = \mathbf{B}\xi^{(2)} = \begin{bmatrix} -0,5 & 1,5 & 0,5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

$$\xi^{(0)} = \mathbf{B}\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} -0,5 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}.$$

Составляем матрицу преобразования $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \left[\xi^{(0)} \mid \xi^{(1)} \mid \xi^{(2)}\right].$$

Важное замечание: может иметь место ситуация, когда матрица $\mathbf{J}$ имеет зеркальный вид, например, в нашем примере:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Для получения канонической формы **достаточно** переставить в матрице $\mathbf{S}$ столбцы в обратной последовательности, например, в нашем случае

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left[\xi^{(2)} \mid \xi^{(1)} \mid \xi^{(0)}\right].$$

Эту же задачу можно решить и в обычной последовательности, т.е. от начального (собственного) вектора к двум присоединенным. Покажем, как получить начальный вектор, а остальные два можно получить согласно алгоритму. Итак, $\operatorname{rank}\mathbf{B} = 2$, т.е. у присоединенного вектора $\xi^{(0)}$ одна координата может быть выбрана произвольно. Пусть, например, $\xi_1^{(0)} = 1$. Тогда из системы уравнений для $\mathbf{B}\xi^{(0)} = \mathbf{0}$

$$\begin{cases} -0{,}5\xi_2^{(0)} + 0 \cdot \xi_3^{(0)} = 0{,}5, \\ 0{,}5\xi_2^{(0)} + 0{,}5\xi_3^{(0)} = -1 \end{cases}$$

получаем $\xi_2^{(0)} = -1$, $\xi_3^{(0)} = -1$, следовательно, $\xi^{(0)} = \left[1 \quad -1 \quad -1\right]^{\mathrm{T}}$. Заметим, что результат с точностью до ненулевого множителя $b = -0{,}5$ совпадает с полученным ранее вектором $\xi^{(0)} = \left[-0{,}5 \quad 0{,}5 \quad 0{,}5\right]$.

Присоединенные векторы $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ найдем из уравнений $\mathbf{B}\xi^{(1)} = \xi^{(0)}$, $\mathbf{B}\xi^{(2)} = \xi^{(1)}$.

Читателю рекомендуем самостоятельно найти оставшиеся присоединенные векторы, матрицу $\mathbf{S}$ и жорданову форму $\mathbf{J}$. При необходимости следует учесть указанные выше замечания.

Пример П.3.2. Рассмотрим матрицу 3-го порядка, у которой каноническое пространство состоит из двух циклических базисов (двух жордановых клеток):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3{,}75 & -0{,}5 & -0{,}25 \\ 0{,}75 & -2{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}5 & -2{,}75 \end{bmatrix}, \quad n = 3.$$

Характеристический полином $\chi(s) = (s+3)^3$, $\lambda = -3$, $m = 3$.

Минимальный полином (см. формулу (П.3.4)) $\mu(s) = (s+3)^2$, $k = 2$.

Для нахождения числа клеток æ можно использовать формулу (П.3.5), но это можно сделать и простыми рассуждениями. Максимальная жорданова клетка имеет размер порядка $k = 2$, оставшиеся клетки $(m = k = n - k = 1)$ это одна одноразмерная клетка, т.е. каноническая форма (с точностью до жордановых клеток) будет иметь вид

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad æ = 2.$$

Имеем

$$\mathbf{B} = \mathbf{A} + 3\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0{,}75 & -0{,}5 & -0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}5 & 0{,}25 \\ 0{,}75 & 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank}\mathbf{B} = 1.$$

Матрица $\mathbf{B}$ определяет два независимых (3–1) собственных вектора $\xi_1^{(0)}$, $\xi_2^{(0)}$.

Например, это могут быть

$$\xi_1^{(0)} = \left[1 \quad 0 \quad -3\right]^{\mathrm{T}}$$

и

$$\xi_2^{(0)} = \left[-1{,}5 \quad 1{,}5 \quad 1{,}5\right]^{\mathrm{T}}.$$

Заметим, что не существует вектора $\xi_1^{(1)}$: $\mathbf{B}\xi_1^{(1)} = \xi_1^{(0)}$, так как $\operatorname{rank}\left[\mathbf{B} \mid \xi_1^{(0)}\right] = 2 > 1$ — система несовместна. Напротив, $\operatorname{rank}\left[\mathbf{B} \mid \xi_2^{(0)}\right] = 1$, поэтому найдем $\xi_2^{(1)} = \left[1 \quad 1 \quad 1\right]^{\mathrm{T}}$. Матрица собственных векторов

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & -1{,}5 & 1 \\ 0 & 1{,}5 & 1 \\ -3 & 1{,}5 & 1 \end{bmatrix},$$

соответственно получаем

$$\mathbf{J} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix},$$

что совпадает (с точностью до порядка следования жордановых клеток) с ожидаемым представлением.

П.3.2.2. Комплексификация линейного оператора. Нахождение канонического представления для матриц с комплексными корнями

Комплексификацией линейного оператора (преобразования) называется представление данного оператора матрицей в $2n$-мерном *вещественном* пространстве, в случае рассмотрения действия оператора над полем комплексных чисел. Рассмотрим некоторую матрицу $\mathbf{A}$ с простым комплексным корнем

$$\lambda = \alpha + j\beta, \ \alpha, \beta \in R, \ \beta \neq 0.$$

Пусть $\tilde{\xi} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$ — комплексный собственный вектор матрицы $\mathbf{A}$. Тогда комплексификация оператора $\mathbf{A}$ означает

$$\mathbf{A}^{\mathrm{C}}\tilde{\xi} = \mathbf{A}^{\mathrm{C}}(\mathbf{x} + j\mathbf{y}) = (\alpha + j\beta)(\mathbf{x} + j\mathbf{y}), \tag{П.3.9}$$

где

$$\mathbf{A}^{\mathrm{C}}(\mathbf{x} + j\mathbf{y}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + j\mathbf{A}\mathbf{y}, \tag{П.3.10}$$

т.е.

$$\mathbf{A}^{\mathrm{C}}: \ C^n \to C^n \tag{П.3.11}$$

и

$$[\mathbf{x} \quad \mathbf{y}]^{\mathrm{T}} \in R^{2n}. \tag{П.3.12}$$

С учетом формул (П.3.9), (П.3.10) получим

$$\mathbf{A}\mathbf{x} + j\mathbf{A}\mathbf{y} = (\alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}) + j(\beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}) \tag{П.3.13}$$

или

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} &= \alpha\mathbf{x} - \beta\mathbf{y}, \\ \mathbf{A}\mathbf{y} &= \beta\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}. \end{aligned} \tag{П.3.14}$$

Таким образом, для нахождения векторов матрицы преобразования $\mathbf{S}$ при комплексных простых корнях необходимо перейти к $2n$-мерному пространству и найти собственный вектор $\tilde{\xi} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$. После преобразований с помощью матрицы $\mathbf{S}$ каждая простая пара комплексно сопряженных корней будет представлена двухмерной клеткой $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$ на главной диагонали.

Рассмотрим процедуру нахождения комплексных собственных векторов $\tilde{\xi} = \mathbf{x} + j\mathbf{y}$ в $2n$-мерном пространстве.

Перенесем в (П.3.14) все слагаемые влево и запишем это выражение в матричной форме

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \\ \hline -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = 0, \tag{П.3.15}$$

или

$$\tilde{\mathbf{B}}\xi = \mathbf{0},$$

где $\xi = [\mathbf{x} \quad \mathbf{y}]^T$ —$2n$-мерный вещественный вектор, $\tilde{\mathbf{B}}$ — $(2n \times 2n)$-мерная вещественная матрица. Из матричного уравнения (П.3.15) мы и будем искать каноническую форму для простых комплексно сопряженных корней по обычным правилам, которые мы установили выше для вещественных корней, причем n-мерные векторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ определяют два столбца в матрице преобразования $\mathbf{S}$.

Для того чтобы правильно найти собственные и присоединенные векторы для оператора $\mathbf{A}^C$, необходимо знать основные свойства его нильпотентного оператора в $2n$-мерном пространстве

$$\tilde{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \\ -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} \end{bmatrix} \tag{П.3.16}$$

так же, как мы использовали свойства нильпотентного оператора $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ для вещественных собственных чисел матрицы $\mathbf{A}$. Первое и наиболее важное отличие матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$ от $\mathbf{B}$ состоит в том, что

$$0 \le \operatorname{rank}\mathbf{B} \le (n-1), \tag{П.3.17}$$

а

$$n \le \operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}} \le 2(n-1). \tag{П.3.18}$$

Свойство (П.3.18) нильпотентного оператора $\tilde{\mathbf{B}}$ ниже будет показано для порядка нильпотентности $1 \le p \le 2$. Приведем важную лемму, которую мы будем использовать в дальнейшем.

Лемма П.3.1 [49]. Пусть $\mathbf{M}$ — квадратная блочная матрица вида

$$\mathbf{M} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{M}_1 & \mathbf{M}_2 \\ \hline \mathbf{M}_3 & \mathbf{M}_4 \end{array}\right]. \tag{П.3.19}$$

Тогда при $\det(\mathbf{M}_1) \ne 0$ *имеем*

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}_1)\det\left(\mathbf{M}_4 - \mathbf{M}_3\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{M}_2\right), \tag{П.3.20}$$

а при $\det(\mathbf{M}_4) \ne 0$ *получаем*

$$\det(\mathbf{M}) = \det(\mathbf{M}_4)\det\left(\mathbf{M}_1 - \mathbf{M}_2\mathbf{M}_4^{-1}\mathbf{M}_3\right). \tag{П.3.21}$$

Эту лемму мы будем использовать для нахождения высоты (порядка) нильпотентного оператора $\tilde{\mathbf{B}}$:

$$\det\tilde{\mathbf{B}} = \det\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \\ \hline -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} \end{array}\right]. \tag{П.3.22}$$

Из выражения (П.3.22) видно, что $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}} \ge n$, так как $\beta \ne 0$, а матрица $\beta\mathbf{I}$ всегда невырождена и имеет $\operatorname{rank} = n$. Так как α не является вещественным собственным значением матрицы $\mathbf{A}$ (собственным является $\lambda = \alpha + j\beta$), то можно воспользоваться формулой (П.3.20):

$$\det\tilde{\mathbf{B}} = \det(\mathbf{B}_0)\det\left(\mathbf{B}_0 + \beta^2\mathbf{B}_0^{-1}\right), \tag{П.3.23}$$

где $\mathbf{B}_0 = \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I}$. Из выражения (П.3.23) следует, что для простых собственных комплексных корней $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}} = \operatorname{rank}\mathbf{B}_0 = n$, при этом матрица

$$\mathbf{B}_0 + \beta^2 \mathbf{B}_0^{-1} = \mathbf{B}_0^2 + \beta^2 \mathbf{I} = \mathbf{0} \qquad (\text{П.3.24})$$

является нулевой. Ниже получение данного результата будет рассмотрено в примере. В том случае, если кратность комплексного корня $\lambda = \alpha + j\beta$ равна 2, условие (П.3.23) уже будет не достаточным, так как порядок нильпотентности больше 1. Необходимо рассмотреть оператор $\tilde{\mathbf{B}}^2$. Имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{B}}^2 &= \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}-\alpha\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \\ \hline -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A}-\alpha\mathbf{I} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \\ \hline -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A}-\lambda\mathbf{I} \end{array}\right] = \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \beta\mathbf{I} \\ -\beta\mathbf{I} & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{B}_0 & \beta\mathbf{I} \\ \beta\mathbf{I} & \mathbf{B}_0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I} & 2\beta\mathbf{B}_0 \\ \hline -2\beta\mathbf{B}_0 & \mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I} \end{array}\right]. \end{aligned} \qquad (\text{П.3.25})$$

Воспользовавшись леммой П.3.1, получим

$$\det\left(\tilde{\mathbf{B}}^2\right) = \det\left(\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}\right)\det\left(\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I} + 4\beta^2\mathbf{B}_0\left[\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}\right]^{-1}\mathbf{B}_0\right). \qquad (\text{П.3.26})$$

Для того чтобы $\det\left(\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}\right) = \det\left(\left[\mathbf{A} - (\alpha+\beta)\mathbf{I}\right]\left[\mathbf{A} - (\alpha-\beta)\mathbf{I}\right]\right) \neq 0$, необходимо чтобы вещественные числа $\lambda_1 = (\alpha+\beta)$ и $\lambda_2 = (\alpha-\beta)$ не были собственными значениями матрицы $\mathbf{A}$. Если это требование выполнено, то условия $\det\left(\tilde{\mathbf{B}}^2\right) = 0$ и $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}}^2 = n$ будут справедливы, если

$$\mathbf{B}_0^2 - \beta\mathbf{I} + 4\beta^2\mathbf{B}_0\left(\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}\right)^{-1}\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}. \qquad (\text{П.3.27})$$

Условие (П.3.27) будет проверено в нижеследующем примере.

После некоторого анализа нильпотентной матрицы $\tilde{\mathbf{B}}$ перейдем к рассмотрению примера.

Пример П.3.3. Случай кратного комплексного корня с нильпотентной матрицей порядка 1.

Рассмотрим матрицу ($n = 4$, $m = 2$, $k = 1$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1{,}4 & -1{,}6 & -4 & 2 \\ -4{,}4 & -1{,}4 & 4 & 18 \\ 4 & -1 & -5 & -5 \\ -0{,}4 & -0{,}4 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Данная матрица имеет двукратный комплексный корень $\lambda_{1,2} = -1 + j2$ и $\lambda_{3,4} = -1 - j2$. Характеристический полином

$$\chi(s) = \left((s-\alpha)^2 + \beta^2\right)^2 = \left((s+1)^2 + 4\right)^2, \quad m = 2.$$

Минимальный полином (см. формулу (П.3.5))

$$\mu(s) = \left((s-\alpha)^2 + \beta^2\right) = \left((s+1)^2 + 4\right), \quad k = 1.$$

Число клеток $\text{æ} = 2$, следовательно, мы делаем вывод о том, что каноническим представлением матрицы $\mathbf{A}$ в базисе собственных векторов будет

$$\mathbf{A}^{\mathrm{C}} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (\text{П.3.28})$$

Попробуем получить данную форму с помощью алгоритма комплексификации матрицы (оператора) $\mathbf{A}$:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}-\alpha\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \\ \hline -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A}-\alpha\mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2,4 & -1,6 & -4 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -4,4 & -0,4 & 4 & 18 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ -0,4 & -0,4 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & 2,4 & -1,6 & -4 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -4,4 & -0,4 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -0,4 & -0,4 & 0 & 2 \end{array}\right]. \qquad (\text{П.3.29})$$

Имеем $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}} = n = 4$. Значит, матрица $\mathbf{B}_0^2 + \beta^2\mathbf{B}_0^{-1}$ является нулевой. Непосредственная проверка подтверждает это. Порядок нильпотентности $p = 1 = k$ (геометрическая кратность корня).

Для получения матрицы преобразования $\mathbf{S}$ достаточно получить 2 собственных линейно независимых вектора.

Имеем

$$\tilde{\mathbf{B}}\xi_1 = \mathbf{0},$$
$$\tilde{\mathbf{B}}\xi_2 = \mathbf{0}.$$

В матрице $\tilde{\mathbf{B}}$ выберем какой-нибудь невырожденный минор порядка 4. Пусть это будет $\beta\mathbf{I}$. Задаем любые 4 координаты $\xi_{11}, \xi_{12}, \xi_{13}, \xi_{14}$ вектора ξ_1. Можем выбрать $\xi_{11} = \xi_{12} = \xi_{13} = \xi_{14} = 1$. Тогда из системы уравнений

$$[\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}]\begin{bmatrix}\xi_{11}\\ \xi_{12}\\ \xi_{13}\\ \xi_{14}\end{bmatrix} + \beta\mathbf{I}\begin{bmatrix}\xi_{15}\\ \xi_{16}\\ \xi_{17}\\ \xi_{18}\end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

находим оставшиеся координаты: $\xi_{15} = 0,6$, $\xi_{16} = -8,6$, $\xi_{17} = 3$, $\xi_{18} = -0,6$. Получаем

$$\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0,6 \\ -8,3 \\ 3 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

Для второго вектора зададим $\xi_{21} = 1$, $\xi_{22} = 1$, $\xi_{23} = 1$, $\xi_{24} = 2$. Аналогично предыдущему получим

$$\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -0,4 \\ -17,6 \\ 5,5 \\ -1,6 \end{bmatrix}.$$

Из этих векторов составим такую матрицу $\mathbf{S}$, что $\mathbf{J}_1 = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1]^{\mathrm{T}}$, $\mathbf{J}_2 = [\mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}_2]^{\mathrm{T}}$. Тогда

$$\mathbf{S} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{y}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{y}_2] = \left[\begin{array}{c:c:c:c} 1 & 0,6 & 1 & -0,4 \\ 1 & -8,6 & 1 & -17,6 \\ 1 & 3 & 1 & 5,5 \\ 1 & -0,6 & 2 & -1,6 \end{array}\right].$$

Окончательно находим искомое представление (П.3.28):

$$\mathbf{A}^{C} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Пример П.3.4. Случай кратного комплексного корня с нильпотентной матрицей порядка 2.

Пусть задана матрица ($n = 4$, $m = 2$, $k = 2$)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2{,}4 & -1{,}85 & -4{,}5 & 0{,}75 \\ -3{,}4 & -1{,}65 & 4{,}5 & 16{,}75 \\ 4 & -1 & -5 & -5 \\ 0{,}2 & -0{,}55 & -0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix}.$$

Ее характеристический полином $\chi(s) = \left((s+1)^2 + 4\right)^2$, ее минимальный полином $\mu(s) = \chi(s)$. В этом случае имеем только одну клетку порядка 4×4 вида

$$\mathbf{A}^{C} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}. \qquad (\text{П.3.30})$$

Требуется получить каноническую форму (П.3.30).

Проще всего найти матрицу нильпотентного преобразования комплексифицированного оператора $\mathbf{A}^{C}$:

$$\tilde{\mathbf{B}} = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} & \beta\mathbf{I} \\ \hline -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{B}_0 & \beta\mathbf{I} \\ \hline -\beta\mathbf{I} & \mathbf{A} - \alpha\mathbf{I} \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 3{,}4 & -1{,}85 & -4{,}5 & 0{,}75 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -3{,}4 & -0{,}65 & 4{,}5 & 16{,}75 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & -4 & -5 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0{,}2 & -0{,}55 & -0{,}5 & 1{,}25 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & 3{,}4 & -1{,}85 & -4{,}5 & 0{,}75 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -3{,}4 & -0{,}65 & 4{,}5 & 16{,}75 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 4 & -1 & -4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 0{,}5 & -0{,}55 & -0{,}5 & 1{,}25 \end{array}\right], \qquad (\text{П.3.31})$$

$\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}} = 6$, $n = 4$. Отсюда следует, что степень минимального полинома $k > 1$. Возведем $\tilde{\mathbf{B}}$ в квадрат, получим

$$\tilde{\mathbf{B}}^2 = \left[\begin{array}{cccc|cccc} -4 & -1 & -6 & -5 & 13{,}6 & -7{,}4 & -18 & 3 \\ 12 & -11 & -14{,}6 & -15 & -13{,}6 & -2{,}6 & 18 & 67 \\ 0 & 0 & -8 & 0 & 16 & -4 & -16 & -20 \\ 0{,}8 & -0{,}2 & -2 & -9 & 0{,}8 & -2{,}2 & -2 & 5 \\ \hline -13{,}6 & 7{,}4 & 18 & -3 & -4 & -1 & -6 & -5 \\ 13{,}6 & 2{,}6 & -18 & -67 & 12 & -11 & -14{,}6 & -15 \\ -16 & 4 & 16 & 20 & 0 & 0 & -8 & 0 \\ -0{,}8 & 2{,}2 & 2 & -5 & 0{,}8 & -0{,}2 & -2 & -9 \end{array}\right], \qquad (\text{П.3.32})$$

$\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}}^2 = 4 = n$, $k = 2$. Легко проверить, что выделенная часть матрицы $\tilde{\mathbf{B}}^2$ равна $\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}$ $(\beta = 2)$ и $\det\left(\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}\right) \neq 0$. При этом убеждаемся, что $\left(\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}\right) + 4\beta^2\mathbf{B}_0\left(\mathbf{B}_0^2 - \beta^2\mathbf{I}\right)\mathbf{B}_0 = \mathbf{0}$, что полностью подтверждает справедливость формулы (П.3.27).

Поскольку в данном случае показатель нильпотентности для $\tilde{\mathbf{B}}$ $p = 2$, необходимо, как и для вещественных корней, найти собственный и присоединенный векторы. При этом

$$\tilde{\mathbf{B}}\xi^{(1)} = \xi^{(0)}, \qquad (\text{П.3.33})$$

где $\xi^{(0)}$ — собственный, а $\xi^{(1)}$ — присоединенный векторы. Поскольку $\operatorname{rank}\tilde{\mathbf{B}} = 6$, зададимся двумя произвольными координатами вектора $\xi^{(0)}$, например, $\xi_1^{(0)} = 1$, $\xi_2^{(0)} = 0$. Тогда из системы уравнений $\tilde{\mathbf{B}}\xi^{(0)} = \mathbf{0}$ получим

$$\xi^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0,8 \\ 2 \\ 5 \\ 0 \\ 0,6 \end{bmatrix}.$$

Решая систему уравнений (П.3.32), находим присоединенный вектор

$$\xi^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0,6 \\ -8,6 \\ 3 \\ -0,6 \end{bmatrix}.$$

Составляем матрицу $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & x_2 & y_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c:c} 1 & 2 & 1 & 0,6 \\ 0 & 5 & 1 & -8,6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ -0,8 & 0,6 & 1 & -0,6 \end{array}\right].$$

В результате получаем нужное представление:

$$\mathbf{A}^C = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

ТЕМА 1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

Рассмотрим общую схему решения задач вариационного исчисления.
Задан функционал в форме Больца

$$I = \Phi\big(\mathbf{X}(t_0),\mathbf{X}(t_1),t_0,t_1\big) + \int_{t_0}^{t_1} f_0\big(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}},t\big)dt \to \text{extr}, \qquad \text{(Т.1.1)}$$

$$\mathbf{X} \in R^n,$$

с ограничениями:

а) алгебраическими:

$$\varphi_i\big(\mathbf{X}(t_0),t_0\big) = 0,\ \ i=\overline{1,m},\ \ m<n, \qquad \text{(Т.1.2)}$$

$$\psi_j\big(\mathbf{X}(t_1),t_1\big) = 0,\ \ j=\overline{1,p},\ \ p<n; \qquad \text{(Т.1.3)}$$

б) дифференциальными:

$$\dot{x}_i = f_i\big(\mathbf{X},t\big),\ \ i=\overline{1,s},\ \ s<n. \qquad \text{(Т.1.4)}$$

Предполагается, что подынтегральная функция f_0 зависит от вектор-функции $\mathbf{X}(t)$, времени t и производных только части переменных, а именно:

$$f_0 = f_0\big(\mathbf{X}(t),\dot{x}_{s+1}(t),\ldots,\dot{x}_n(t),t\big), \qquad \text{(Т.1.5)}$$

в противном случае прямая подстановка правых частей уравнения (Т.1.4) в f_0 приводит к выражению (Т.1.5);

в) интегральными (изопериметрическими):

$$\int_{t_0}^{t_1} g_i\big(\mathbf{X},t\big)dt = G_i,\ \ i=\overline{1,r}. \qquad \text{(Т.1.6)}$$

Схема решения.

1. Составляем функцию Лагранжа с соответствующими множителями Лагранжа

$$\mathcal{L} = l\big(\mathbf{X}(t_0),\mathbf{X}(t_1),t_0,t_1,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\big) + \int_{t_0}^{t_1} L\big(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}},t,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}\big)dt, \qquad \text{(Т.1.7)}$$

где терминальная часть

$$l\big(\mathbf{X}(t_0),\mathbf{X}(t_1),t_0,t_1,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\nu}\big) = \Phi\big(\mathbf{X}(t_0),\mathbf{X}(t_1),t_0,t_1\big) + \\ + \sum_{i=1}^{m}\mu_i\varphi_i\big(\mathbf{X}(t_0),t_0\big) + \sum_{j=1}^{p}\nu_j\psi_j\big(\mathbf{X}(t_1),t_1\big), \qquad \text{(Т.1.8)}$$

лагранжиан

$$L\big(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}},t,\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\beta}\big) = f_0\big(\mathbf{X},\dot{\mathbf{X}},t\big) + \sum_{i=1}^{s}\lambda_i\big[f_i\big(\mathbf{X},t\big) - \dot{x}_i\big] + \sum_{j=1}^{l}\beta_j g_j\big(\mathbf{X},t\big). \qquad \text{(Т.1.9)}$$

2. Уравнения экстремали (уравнения Эйлера). Стационарность функции Лагранжа по вариациям $\delta\mathbf{X}(t)$:

$\delta x_i(t)$: $$\frac{\partial L}{\partial x_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{Т.1.10}$$

3. Условия трансверсальности:

а) стационарность функции Лагранжа по t_0, t_1:

δt_0: $$\underbrace{-L\big|_{t=t_0}}_{1} + \frac{\partial l}{\partial t_0} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t=t_0} \cdot \partial \dot{x}_i(t_0)}_{2} = 0, \tag{Т.1.11}$$

δt_1: $$\underbrace{-L\big|_{t=t_1}}_{1} + \frac{\partial l}{\partial t_1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t=t_1} \cdot \partial \dot{x}_i(t_1)}_{2} = 0; \tag{Т.1.12}$$

б) стационарность функции Лагранжа $\mathcal{L}$ по полным вариациям на концах траектории:

$\delta \tilde{x}_i(t_0)$: $$\frac{\partial l}{\partial x_i(t_0)} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t=t_0}}_{2} = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{Т.1.13}$$

$\delta \tilde{x}_i(t_1)$: $$\frac{\partial l}{\partial x_i(t_1)} - \underbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\bigg|_{t=t_1}}_{2} = 0, \quad i = \overline{1,n}. \tag{Т.1.14}$$

В выражениях (Т.1.11)–(Т.1.14): 1 — составляющие $\mathcal{L}$, учитывающие переменные верхний t_1 и нижний t_0 пределы интегрирования функционала; 2 — составляющие $\mathcal{L}$, учитывающие переход от изохронных вариаций уравнений Эйлера (Т.1.10) $\delta\mathbf{X}(t)$ к полным вариациям $\delta\tilde{\mathbf{X}}(t)$;

в) стационарность функции Лагранжа $\mathcal{L}$ по множителям Лагранжа:

$\delta\boldsymbol{\lambda}$: $$\dot{x}_i = f_i(x,t), \; i = \overline{1,s}, \tag{Т.1.15}$$

$\delta\boldsymbol{\mu}$: $$\varphi_i(\mathbf{X}(t_0),t_0) = 0, \; i = \overline{1,m}, \tag{Т.1.16}$$

$\delta\boldsymbol{\nu}$: $$\psi_j(\mathbf{X}(t_1),t_1) = 0, \; j = \overline{1,p}, \tag{Т.1.17}$$

$\delta\boldsymbol{\beta}$: $$\int_{t_0}^{t_1} g_j(\mathbf{X},t)\,dt = G_j, \; j = \overline{1,r}. \tag{Т.1.18}$$

Уравнения (Т.1.10)–(Т.1.18) определяют необходимые условия экстремума.

Рассмотрим примеры решения конкретных задач.

Пример Т.1.1. Вариационная задача с алгебраическими связями (рис. Т.1.1).

Найти кривую S, соединяющую на плоскости (x,t) прямую $x = -2t$ и гиперболу $x = 2/t$.

Сформулируем эту задачу, как задачу вариационного исчисления. Элемент длины кривой S

$$dS = \sqrt{dx^2 + dt^2} = \sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt.$$

Тогда функционал, определяющий длину всей кривой, запишется так:

$$I = \int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+\dot{x}^2}\,dt \to \min. \tag{Т.1.19}$$

Начальная точка кривой S должна принадлежать многообразию M_0, конечная — M_1. Этот факт определяет следующие алгебраические связи:

M_0: $$x(t_0)+2t_0=0 \quad \big(\varphi(x(t_0),t_0)=0\big), \tag{T.1.20}$$

M_1: $$x(t_1)-\frac{2}{t_1}=0 \quad \big(\psi(x(t_1),t_1)=0\big). \tag{T.1.21}$$

Условия (T.1.19)–(T.1.21) определяют вариационную задачу Лагранжа с алгебраическими связями.

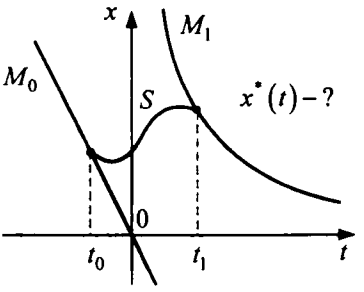


Рис. Т.1.1. Графическая иллюстрация вариационной задачи с алгебраическими связями

Решение. Найдем уравнение экстремали (уравнение Эйлера). Поскольку $f_0(x,\dot{x},t)=f_0(\dot{x})$, то

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial f_0(\bullet)}{\partial \dot{x}}=\frac{\partial^2 f_0(\bullet)}{\partial \dot{x}^2}\ddot{x}=\frac{\ddot{x}}{\left(1+\dot{x}^2\right)^{3/2}}=0.$$

Итак, уравнение экстремали — это уравнение прямой

$$x^*(t)=C_1t+C_2. \tag{T.1.22}$$

Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L}=\int_{t_0}^{t_1} f_0dt+\mu\varphi\big(x(t_0),t_0\big)+\nu\psi\big(x(t_1),t_1\big)=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{1+\dot{x}^2}dt+\mu\big[x(t_0)+2t_0\big]+\nu\left[x(t_1)-\frac{2}{t_1}\right].$$

Константы C_1 и C_2 найдем из условий трансверсальности.

1. Стационарность $\mathcal{L}$ по t_0:

δt_0: $$-f_0\big|_{t=t_0}+\mu\frac{\partial\varphi\big(x(t_0),t_0\big)}{\partial t_0}+\frac{\partial f_0}{\partial\dot{x}}\bigg|_{t=t_0}\dot{x}(t_0)=0,$$

$$-\sqrt{1+\dot{x}^2}\bigg|_{t=t_0}+2\mu+\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\bigg|_{t=t_0}\dot{x}(t_0)=0. \tag{T.1.23}$$

Поскольку $\dot{x}^*(t)=C_1$, то уравнение (T.1.23) примет вид

$$-\sqrt{1+C_1^2}+2\mu+\frac{C_1^2}{\sqrt{1+C_1^2}}=0. \tag{T.1.24}$$

2. Стационарность $\mathcal{L}$ по t_0:

δt_1: $$-f_0\big|_{t=t_1}+\nu\frac{\partial\psi\big(x(t_1),t_1\big)}{\partial t_1}-\frac{\partial f_0}{\partial\dot{x}}\bigg|_{t=t_1}\dot{x}(t_1)=0,$$

$$\sqrt{1+\dot{x}^2}\bigg|_{t=t_1}+\nu\frac{2}{t_1^2}-\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\bigg|_{t=t_1}\dot{x}(t_1)=0,$$

$$\sqrt{1+C_1^2}+\nu\frac{2}{t_1^2}-\frac{C_1^2}{\sqrt{1+C_1^2}}=0. \tag{T.1.25}$$

3. Стационарность $\mathcal{L}$ по полной вариации $x(t_0)$:

$$\delta x(t_0): \quad -\left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_0} + \mu \frac{\partial \varphi(x(t_0), t_0)}{\partial t_0} = 0,$$

$$-\left.\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right|_{t=t_0} + \mu \cdot 1 = 0,$$

$$-\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} + \mu = 0. \qquad \text{(Т.1.26)}$$

4. Стационарность $\mathcal{L}$ по полной вариации $x(t_1)$:

$$\delta x(t_1): \quad \left.\frac{\partial f_0}{\partial \dot{x}}\right|_{t=t_1} + \nu \frac{\partial \psi(x(t_1), t_1)}{\partial t_1} = 0,$$

$$\left.\frac{\dot{x}}{\sqrt{1+\dot{x}^2}}\right|_{t=t_1} + \nu \cdot 1 = 0,$$

$$\frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}} + \nu = 0. \qquad \text{(Т.1.27)}$$

Из выражений (Т.1.26) и (Т.1.27) следует, что

$$\mu = -\nu \qquad \text{(Т.1.28)}$$

и

$$\mu = \frac{C_1}{\sqrt{1+C_1^2}}. \qquad \text{(Т.1.29)}$$

Подставляя (Т.1.29) в (Т.1.24), найдем константу

$$C_1 = \frac{1}{2}. \qquad \text{(Т.1.30)}$$

Учитывая (Т.1.12) и (Т.1.10), из уравнения (Т.1.25) получим $t_1 = \pm 1$. Так как по условию задачи терминальное многообразие (гипербола) лежит в первом квадранте, то принимаем

$$t_1 = 1. \qquad \text{(Т.1.31)}$$

Оставшиеся две константы t_0 и C_2 найдем из условий стационарности функции Лагранжа по множителям μ и ν.

5. Стационарность $\mathcal{L}$ по μ:

$$\delta\mu: \quad \varphi(x(t_0), t_0) = 0,$$

$$x(t_0) + 2t_0 = 0,$$

$$C_1 t_0 + C_2 + t_0 = 0 \ (C_1 = 1/2),$$

$$\frac{5}{2} t_0 + C_2 = 0. \qquad \text{(Т.1.32)}$$

6. Стационарность $\mathcal{L}$ по ν:

$$\delta\nu: \quad \psi(x(t_1), t_1) = 0,$$

$$x(t_1) - \frac{2}{t_1} = 0,$$

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + C_2 - \frac{2}{1} = 0, \ C_2 = \frac{3}{2}. \qquad \text{(Т.1.33)}$$

Наконец, используя (Т.1.33), получим $t_0 = -3/5$. Окончательно, оптимальная траектория имеет вид

$$x^*(t) = \frac{1}{2} t + \frac{3}{2}, \ t_0 = -\frac{3}{5}, \ t_1 = 1.$$

Пример Т.1.2. Простейшая вариационная задача: задача о брахистохроне (И. Бернулли, 1696 г.). Постановка задачи (рис. Т.1.2):

$$I = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1+[y']^2}}{\sqrt{2gy}} dx \to \min, \qquad \text{(Т.1.34)}$$

$$x(0) = y(0) = 0,$$
$$y(x_1) = y_1.$$

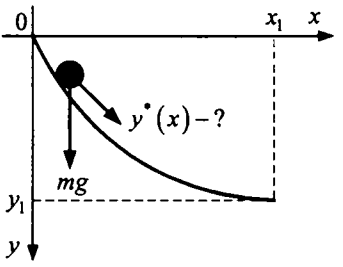


Рис. Т.1.2. Иллюстрация задачи о брахистохроне

Решение. Лагранжиан для данной задачи имеет вид

$$L = \sqrt{\frac{1+[y']^2}{2gy}}.$$

Уравнение экстремали (уравнение Эйлера):

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial L}{\partial y'} = 0.$$

Так как $L(x, y, y') = L(y, y')$, то это уравнение можно записать так:

$$\frac{1}{y'}\frac{d}{dx}\left[L(y,y') - y'\frac{\partial L(y,y')}{\partial y'}\right] = 0,$$

или

$$L(y,y') - y'\frac{\partial L(y,y')}{\partial y'} = \text{const} = C,$$

$$\sqrt{\frac{1+[y']^2}{2gy}} - y'\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+[y']^2}} = \frac{1}{\sqrt{2gy\left(1+[y']^2\right)}} = C.$$

Отсюда следует, что

$$2gy\left(1+[y']^2\right) = \frac{1}{C^2}.$$

Вводя новую константу

$$k_1 = \frac{1}{2C^2 g} > 0,$$

получаем окончательно уравнение Эйлера:

$$y = \frac{k_1}{1+[y']^2}. \tag{Т.1.35}$$

Необходимо решить нелинейное дифференциальное уравнение (Т.1.35). Решим его в параметрической форме. Для этого выполним подстановку

$$y' = \operatorname{ctg}\frac{t}{2}, \quad t \in (0, 2\pi). \tag{Т.1.36}$$

Тогда уравнение (Т.1.35) становится алгебраическим:

$$y(t) = \frac{k_1}{1+\operatorname{ctg}^2\frac{t}{2}}, \tag{Т.1.37}$$

или

$$y^*(t) = \frac{k_1}{2}[1-\cos t]. \tag{Т.1.38}$$

Уравнение (Т.1.38) является параметрическим представлением (t — параметр) решения исходной вариационной задачи. Для полного решения необходимо найти параметрическое представление для второй переменной — $x^*(t)$.

Продифференцируем выражение (Т.1.38) по x и воспользуемся подстановкой (Т.1.36):

$$y' = \operatorname{ctg}\frac{t}{2} = \frac{k_1}{2}\sin t \cdot \frac{dt}{dx}.$$

Отсюда

$$dx = k_1 \sin^2\frac{t}{2}\cdot dt = \frac{k_1}{2}[1-\cos t]\,dt,$$

и, значит,

$$x^*(t) = \frac{k_1}{2}[t - \sin t] + k_2. \tag{Т.1.39}$$

Константы k_1 и k_2 найдем из системы уравнений, определяемых краевыми условиями исходной задачи (Т.1.34):

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{k_1}{2}[t_0 - \sin t_0] + k_2, \\ 0 = \dfrac{k_1}{2}[1 - \cos t_0], \\ x_1 = \dfrac{k_1}{2}[t_1 - \sin t_1] + k_2, \\ y_1 = \dfrac{k_1}{2}[1 - \cos t_1]. \end{cases} \tag{Т.1.40}$$

Из выражений (Т.1.38) и (Т.1.39) видно, что оптимальным значением является циклоида, конкретный вид которой определяется константами, полученными из системы уравнений (Т.1.40).

Пример Т.1.3. Вариационная задача Больца с дифференциальными и алгебраическими связями.

Рассмотрим следующую вариационную задачу с фиксированным левым и подвижным правым концом:

$$I = \int_0^{t_1} \dot{x}_1^2\,dt + t_1^2 \to \text{extr} \tag{Т.1.41}$$

при ограничениях:

1) дифференциальных:

$$\dot{x}_2 = -x_1, \tag{Т.1.42}$$

2) алгебраических:

$$x_1(t_1) + x_2(t_1) = 3 \quad \big(\varphi(x(t_1), t_1) = 0\big), \tag{Т.1.43}$$

3) фиксированной начальной точки:

$$x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 10.$$

Решение.

1. Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \int_0^{t_1} \underbrace{\big[\dot{x}_1^2 + \lambda(-x_1 - \dot{x}_2)\big]}_{L} dt + t_1^2 + \nu\big[x_1(t_1) + x_2(t_1) - 3\big]. \tag{Т.1.44}$$

2. Уравнения Эйлера (уравнения экстремали) для лагранжиана L:

$\delta x_1(t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1} = 0,$$

$$-\lambda - 2\ddot{x}_1 = 0, \tag{Т.1.45}$$

$\delta x_2(t)$:

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2} = 0,$$

$$\dot{\lambda} = 0 \tag{Т.1.46}$$

$$\Rightarrow \lambda(t) = \lambda_0 = \text{const}. \tag{Т.1.47}$$

Уравнение (Т.1.46) можно получить из гамильтониана:

$$H(\mathbf{X}, \lambda) = \dot{x}_1^2 - \lambda x_1, \tag{Т.1.48}$$

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x_2} = 0.$$

Решение уравнения (Т.1.45) с учетом решения (Т.1.47) и начальных условий имеет вид

$$x_1^*(t) = x_1(0) + \dot{x}_1^*(0)t - \frac{\lambda_0}{4}t^2 = 1 + \dot{x}_1^*(0)t - \frac{\lambda_0}{4}t^2. \qquad \text{(Т.1.49)}$$

Для второй координаты из уравнения (Т.1.42) и (Т.1.49) получим

$$x_2^*(t) = 10 - t - x_1^*(0)\frac{t^2}{2} + \frac{\lambda_0}{12}t^3. \qquad \text{(Т.1.50)}$$

Чтобы в дальнейшем не потерять верхний индекс «$*$» оптимальной траектории, в промежуточных выкладках будем опускать его, а явно напишем только в окончательном выражении для оптимального решения.

Необходимые константы t_1, $\dot{x}_1(0)$, λ_0, ν найдем из условий трансверсальности.

3. Условия трансверсальности:

δt_1:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t_1} = 0,$$

$$L\Big|_{t=t_1} + \nu\frac{\partial \varphi(\mathbf{X}(t_1),t_1)}{\partial t_1} - \sum_{i=1}^{2}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i}\Big|_{t=t_1}\cdot\partial\dot{x}_i(t_1) + \frac{\partial \Phi(\mathbf{X}(t_1),t_1)}{\partial t_1} = 0,$$

$$\dot{x}_1^2(t_1) + \lambda_0\left[-x_1(t_1) - \dot{x}_2(t_1)\right] + \gamma\cdot 0 - 2\dot{x}_1^2(t_1) + \lambda_0\dot{x}_2(t_1) + 2t_1 = 0,$$

$$-\dot{x}_1^2(t_1) - \lambda_0 x_1(t_1) + 2t_1 = 0. \qquad \text{(Т.1.51)}$$

Подставляя в (Т.1.51) решение (Т.1.49), получим

$$\dot{x}_1^2(0) - 2\dot{x}_1(0)\lambda_0 t_1 + \frac{\lambda_0 t_1^2}{2} - \lambda_0 + 2t_1 = 0. \qquad \text{(Т.1.52)}$$

Соотношение (Т.1.52) можно получить, используя гамильтониан. Покажем это.

δt_1:
$$H\Big|_{t_1} = -\left[\frac{\partial \Phi(\mathbf{X}(t_1,t_1))}{\partial t_1} + \nu\frac{\partial \varphi(\mathbf{X}(t_1,t_1))}{\partial t_1} - \frac{\partial f_0(\bullet)}{\partial \dot{x}_1}\Big|_{t=t_1}\cdot\dot{x}_1(t_1)\right].$$

Подставляя в левую часть полученного выражения уравнение (Т.1.48), находим

$$\dot{x}_1^2(t_1) - \lambda_0 x_1(t_1) = -\left[2t_1 + \nu\cdot 0 - 2\dot{x}_1^2(t_1)\right].$$

После раскрытия скобок и приведения подобных мы получим выражение (Т.1.52).

$\delta\tilde{x}_1(t_1)$:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1(t_1)} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_1}\Big|_{t=t_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_1(t_1)} + \nu\frac{\partial \varphi(\mathbf{X}(t_1),t_1)}{\partial x_1(t_1)} = 0,$$

$$2\dot{x}_1(t_1) + 0 + \nu = 0,$$

$$2\left[\dot{x}_1(t_1) - \frac{\lambda_0}{2}t_1\right] + \nu = 0. \qquad \text{(Т.1.53)}$$

$\delta\tilde{x}_2(t_1)$:
$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2(t_1)} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_2}\Big|_{t=t_1} + \frac{\partial \Phi}{\partial x_2(t_1)} + \nu\frac{\partial \varphi(\mathbf{X}(t_1),t_1)}{\partial x_2(t_1)} = 0,$$

$$-\lambda_0 + 0 + \nu\cdot 1 = 0,$$

$$\lambda_0 = \nu. \qquad \text{(Т.1.54)}$$

$\delta\nu$:
$$x_1(t_1) + x_2(t_1) - 3 = 0,$$

$$1 + \dot{x}_1(0)t_1 - \frac{\lambda_0}{4}t_1^2 + 10 - t_1 - \dot{x}_1(0)\frac{t_1^2}{2} + \frac{\lambda_0}{12}t_1^3 - 3 = 0,$$

$$\dot{x}_1(0)t_1 - \frac{\lambda_0}{4}t_1^2 - t_1 - \dot{x}_1(0)\frac{t_1^2}{2} + \frac{\lambda_0}{12}t_1^3 + 8 = 0. \qquad \text{(Т.1.55)}$$

Из уравнений (Т.1.52)–(Т.1.55) численными методами находим неизвестные константы λ_0, ν, $\dot{x}_1(0)$, t_1. Данная система уравнений была решена в пакете *Maple 6*. Получено 10 решений, из них 5 вещественных

и 5 комплексных. Из 5 вещественных решений выбрано единственное, которое дает значение $t_1 > 0$ (остальные 4 решения дают $t_1 < 0$). Итак, получено

$$\dot{x}_1^*(0) = 1{,}60591, \quad \lambda_0 = \nu = 1{,}80456, \quad t_1 = 3{,}99206.$$

Экстремальное значение функционала $I^* = 33{,}1696$.

ЗАДАНИЕ 1.1

На плоскости задана линия $y = x^2$ и точка с координатами $(x = 0,\ y = 10)$. Используя вариационное исчисление, найдите линию, соединяющую точку (0,10) с кривой $y = x^2$ и имеющую минимальную длину.

ЗАДАНИЕ 1.2

Среди линий $y = y(x)$, удовлетворяющих условию $y(1) = 4,\ y(5) = 0$, найдите линии, минимизирующие следующие функционалы:

$$I = \int_1^5 \sin(yx)\,dx;$$

$$I = \int_1^5 \left\{y^2 + \alpha^2 \dot{y}^2\right\} dx; \quad \alpha = \text{const};$$

$$I = \int_1^5 \left\{\alpha y^2 + u^2\right\} dx, \quad \text{если } \dot{y} = ay + bu; \quad y(1) = 4; \quad y(5) = 0.$$

ЗАДАНИЕ 1.3

Решите следующую вариационную задачу с алгебраическими связями:

$$I = \int_0^{t_1} \dot{x}^2\,dt \to \text{extr};$$

$$x(0) = 0;$$

$$(t_1 - 1)x^2(t_1) + 2 = 0.$$

ЗАДАНИЕ 1.4

Решите вариационную задачу

$$I = \int_1^2 t^2 \dot{x}^2(t)\,dt - 2x(1) + x^2(2) \to \text{extr}.$$

ЗАДАНИЕ 1.5

Решите вариационную задачу с изопериметрическими ограничениями:

$$I = \int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt \to \min$$

при ограничениях

$$\int_0^1 x(t)\,dt = 3;\ \ x(0) = 1;\ \ x(1) = 6.$$

ЗАДАНИЕ 1.6

Решите вариационную задачу с алгебраическими связями:

$$I = \int_0^{t_1} \left(\dot{x}^2(t) + x^2(t)\right) dt \to \text{extr}$$

при ограничениях

$$x(t_1) + t_1 - 1 = 0;\ \ x(0) = 0{,}1.$$

ЗАДАНИЕ 1.7

Решите вариационную задачу с дифференциальными связями:

$$I = x_1(0) + 2x_2(0) + \int_0^1 \dot{x}_2^2(t)\,dt \to \min$$

при ограничениях

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t);\ \ x_1(0) = 1;\ \ x_2(1) = 1.$$

ЗАДАНИЕ 1.8

Решите вариационную задачу с алгебраическими связями:

$$I = \int_0^{t_1} \dot{x}^2(t)\,dt \to \min$$

при ограничениях

$$(t_1 - 1)x^2(t_1) + 2 = 0;\ \ x(0) = 0.$$

ЗАДАНИЕ 1.9

Решите вариационную задачу:

$$I = \int_0^{t_1} \left(\dot{x}^2(t) + 3x^2(t)\right) dt \to \text{extr}$$

при ограничениях

$$x(t_1) + t_1 - 1 = 0;\ \ x(0) = 0.$$

ЗАДАНИЕ 1.10

Решите вариационную задачу:

$$I = \int_0^{t_1} \left(\dot{x}^2(t) + x^2(t) + tx(t)\right) dt \to \text{extr}$$

при ограничении

$$x(0) + x(1) = 0.$$

ЗАДАНИЕ 1.11

Решите вариационную задачу с изопериметрическими связями:

$$I = \int_0^1 \dot{x}^2(t)\,dt \to \min$$

при ограничениях

$$\int_0^1 x(t)\,dt = 0;\ \ x(0) = 1;\ \ x(1) = 0.$$

ТЕМА 2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

Рассмотрим примеры решения задач оптимального управления методами вариационного исчисления.

Пример Т.2.1. Задача Дидоны.

Пусть трос длины P привязан к концам прямолинейного стержня длиной $2T \le P$ (рис. Т.2.1). Определить форму троса, при которой площадь, заключенная между тросом и стержнем, максимальна.

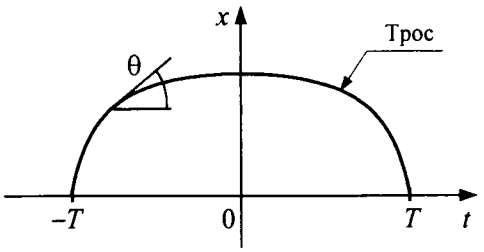


Рис. Т.2.1. Графическая иллюстрация задачи Дидоны

Формализуем задачу. Из геометрических построений имеем

$$dx = dP\sin\theta;\ \ dt = dP\cos\theta;$$

$$dP = \frac{1}{\cos\theta}dt;\ \ \frac{dx}{dt} = \operatorname{tg}\theta.$$

Тогда вариационная задача примет вид:

$$I = -\int_{-T}^{T} x dt \to \min_{\theta} \tag{Т.2.1}$$

при условиях

$$P = \int_{-T}^{T} \frac{1}{\cos\theta}dt,\ \ P \ge 2T, \tag{Т.2.2}$$

$$x(-T) = x(T) = 0, \tag{Т.2.3}$$

$$\frac{dx}{dt} = \operatorname{tg}\theta. \tag{Т.2.4}$$

Необходимо определить $t(\theta)$, $x(\theta)$ и $x(t)$.

Угол θ является свободно выражаемым параметром в задаче (Т.2.1)–(Т.2.4), поэтому его можно трактовать как управление и сформулировать задачу Дидоны как задачу оптимального управления:

$$I = -\int_{-T}^{T} x dt \to \min_{u} \tag{Т.2.5}$$

при ограничениях

$$\dot{x} = \operatorname{tg} u, \tag{Т.2.6}$$

$$\int_{-T}^{T} \frac{1}{\cos u}dt = P, \tag{Т.2.7}$$

$$x(-T) = x(T) = 0. \tag{Т.2.8}$$

Вводя модифицированный функционал, учитывающий изопериметрическое ограничение (Т.2.7) с множителем Лагранжа μ, составим гамильтониан для задачи (Т.2.5)–(Т.2.8):

$$H(x,u,\lambda,\mu) = -x + \mu\frac{1}{\cos u} + \lambda\operatorname{tg} u. \tag{Т.2.9}$$

Запишем уравнение экстремали (уравнение Эйлера)

$$\dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x} = 1, \tag{Т.2.10}$$

откуда

$$\lambda(t) = \lambda_0 + t. \tag{Т.2.11}$$

Условие стационарности гамильтониана (Т.2.9) по управлению

$$H_u = 0 \Rightarrow \lambda\frac{1}{\cos^2 u} + \mu\frac{\sin u}{\cos^2 u} = 0. \tag{Т.2.12}$$

Предполагая, что для всех $t \in (-T, T)$ $\cos u \neq 0$, из (Т.2.12) имеем

$$\lambda = -\mu \sin u. \tag{Т.2.13}$$

Приравнивая правые части выражений (Т.2.11) и (Т.2.13), получим

$$\lambda_0 + t = -\mu \sin u,$$

откуда найдем параметрическое представление переменной t в функции управления u

$$t = -(\mu \sin u + \lambda_0). \tag{Т.2.14}$$

Соответственно, $dt = -\mu \cos u\, du$.

Для нахождения зависимости $x = x(u)$ используем дифференциальную связь вида (Т.2.6):

$$dx = \operatorname{tg} u\, dt(u) = -\operatorname{tg} u \cdot \mu \cdot \cos u\, du = -\mu \sin u\, du. \tag{Т.2.15}$$

Интегрируя (Т.2.15) от $u(-T)$ до текущего управления u, получим параметрическое представление для переменной x

$$x(u) = \mu(\cos u - \cos(u(-T))). \tag{Т.2.16}$$

Для окончательного решения задачи необходимо найти все константы. Для этого используем изопериметрическое ограничение (Т.2.7), краевые условия (Т.2.8) и свойство гамильтониана быть первым интегралом стационарной системы (Т.2.5)–(Т.2.8) (т.е. гамильтониан не изменяется вдоль экстремального решения). Имеем

$$P = \int_{u(-T)}^{u(T)} \frac{1}{\cos u} dt(u) = -\int_{u(-T)}^{u(T)} \frac{1}{\cos u} \mu \cos u\, du = \mu(u(-T) - u(T)). \tag{Т.2.17}$$

Из (Т.2.14), (Т.2.16) и (Т.2.8) получим

$$\begin{cases} t(u(-T)) = -T = -(\mu \sin(u(-T)) + \lambda_0), \\ t(u(T)) = T = -(\mu \sin(u(T)) + \lambda_0); \end{cases} \tag{Т.2.18}$$

$$\begin{cases} x(u(-T)) = \mu(\cos u(-T) - \cos u(-T)) = 0, \\ x(u(T)) = \mu(\cos u(T) - \cos u(-T)) = 0. \end{cases} \tag{Т.2.19}$$

Из (Т.2.19) мы получаем

$$-u(T) = +u(-T), \tag{Т.2.20}$$

откуда находим для (Т.2.18)

$$\lambda_0 = 0. \tag{Т.2.21}$$

Параметризуя множитель (Т.2.11) уравнения, имеем

$$\lambda(u) = t(u) = -(\mu \sin u + \lambda_0) = -\mu \sin u. \tag{Т.2.22}$$

В этом случае параметризованный гамильтониан с неизвестным множителем μ (Т.2.9) имеет вид (подставляем в (Т.2.9) выражения (Т.2.22), (Т.2.16)):

$$H(u, \mu) = -\mu(\cos u - \cos(u(-T))) + (-\mu \sin u)\frac{\sin u}{\cos u} + \mu\frac{1}{\cos u} = \mu \cos(u(-T)) = \text{const}. \tag{Т.2.23}$$

Выразим значение гамильтониана (Т.2.23) через заданный параметр P. Для этого используем соотношения (Т.2.17) и (Т.2.20). Имеем

$$\mu = \frac{P}{u(-T) - u(T)} = \frac{P}{2u(-T)}. \tag{Т.2.24}$$

Тогда оптимальное значение гамильтониана равно

$$H(P, u(-T)) = \frac{P \cdot \cos(u(-T))}{2u(-T)}. \tag{Т.2.25}$$

Для нахождения управления $u(-T)$ используем выражения (Т.2.18), (Т.2.24) и условие (Т.2.21). Имеем

$$-T = -\mu \sin u(-T) = -\frac{P}{2u(-T)} \sin u(-T),$$

или

$$2Tu(-T) - P \sin u(-T) = 0. \tag{Т.2.26}$$

Из уравнения (Т.2.26) находим значение $u(-T)$. После этого определяем все оставшиеся константы и решение всей задачи:

$$\begin{cases} t^*(u) = -\dfrac{P}{2u(-T)} \sin u; \\ x^*(u) = +\dfrac{P}{2u(-T)} \left[\cos u - \cos\left(u(-T)\right)\right]. \end{cases} \tag{Т.2.27}$$

Исключая параметр u из системы (Т.2.27), найдем форму кривой:

$$t^2 + \left[x^* + \frac{P}{2u(-T)} \cos u(-T)\right]^2 = \frac{P^2}{4u^2(-T)}. \tag{Т.2.28}$$

Оптимальное решение — дуга окружности радиуса $P/\left(2u(-T)\right)$ с центром в точке

$$x^*(0) = -\frac{P}{2u(-T)} \cos\left(u(-T)\right).$$

Ясно, что это решение справедливо для параметра $2T \le P \le \pi T$, $0 \le u(-T) \le \pi/2$.

Пример Т.2.2. Для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \tag{Т.2.29}$$

$$\mathbf{X} \in R^2, u \in R^1,$$

M_0: $$\varphi\left(\mathbf{X}(t_0), t_0\right) = x_1(t_0) + x_2(t_0) - t_0^2 - 6 = 0, \tag{Т.2.30}$$

M_1: $$\psi\left(\mathbf{X}(t_1), t_1\right) = 2x_1^2(t_1) - x_2^2(t_1) + t_1^2 - 4 = 0, \tag{Т.2.31}$$

$$I = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)\,dt + x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) \to \min_u, \tag{Т.2.32}$$

найти оптимальное управление, доставляющее минимум функционал (Т.2.32).

Решение.

1. Составляем гамильтониан и функцию Лагранжа для исходной задачи:

$$H(\mathbf{X}, u, \lambda) = u^2 + \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_1 + u), \tag{Т.2.33}$$

$$L = \int_{t_0}^{t_1} \left\{u^2(t) + \lambda_1(x_2 - \dot{x}_1) + \lambda_2(-x_1 + u - \dot{x}_2)\right\} dt + x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) +$$
$$+ \mu\left(x_1(t_0) + x_2(t_0) - t_0^2 - 6\right) + \nu\left(2x_1^2(t_1) - x_2^2(t_1) + t_1^2 - 4\right).$$

2. Находим оптимальное управление из условия стационарности гамильтониана по u:

$$H_u = 0 \;\Rightarrow\; 2u + \lambda_2 = 0;$$

$$u^*(t) = -\frac{\lambda_2(t)}{2}. \tag{Т.2.34}$$

3. Уравнение экстремали (уравнение Эйлера):

$$\begin{cases} \dot{\lambda}_1 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_1} = \lambda_2, \\ \dot{\lambda}_2 = -\dfrac{\partial H}{\partial x_2} = \lambda_1. \end{cases} \tag{Т.2.35}$$

Подставляя оптимальное управление (Т.2.34) в систему (Т.2.29) и присоединяя к (Т.2.29) систему (Т.2.35), получим однородное линейное дифференциальное уравнение 4-го порядка

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{X}}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0 & -0,5\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \lambda_1\\ \lambda_2\end{bmatrix}, \tag{Т.2.36}$$

решение которого имеет вид

$$\begin{bmatrix}\mathbf{X}(t)\\ \lambda(t)\end{bmatrix}=e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-t_0)}\begin{bmatrix}\mathbf{X}(t_0)\\ \lambda(t_0)\end{bmatrix}, \tag{Т.2.37}$$

где

$$e^{\tilde{\mathbf{A}}(t-t_0)}=\begin{bmatrix}\cos(t-t_0) & \sin(t-t_0) & \frac{1}{4}\left(-\cos(t-t_0)(t-t_0)+\sin(t-t_0)\right) & \\ -\sin(t-t_0) & \cos(t-t_0) & \frac{1}{4}\sin(t-t_0)(t-t_0) & \dots \\ 0 & 0 & \cos(t-t_0) & \\ 0 & 0 & -\sin(t-t_0) & \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}-\frac{1}{4}\sin(t-t_0)(t-t_0)\\ \dots-\frac{1}{4}\left(\cos(t-t_0)(t-t_0)+\sin(t-t_0)\right)\\ \sin(t-t_0)\\ \cos(t-t_0)\end{matrix}\Bigg].$$

Для нахождения констант μ, ν, t_0, t_1, $\lambda_1(t_0)$, $\lambda_2(t_0)$, $x_1(t_0)$, $x_2(t_0)$ формулируем условия, определяемые условиями трансверсальности.

4. Условия трансверсальности:

а) условия стационарности функции Лагранжа по t_0, t_1:

δt_0:
$$H_{t_0}=\frac{\partial\Phi}{\partial t_0}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial t_0};$$

$$\frac{\lambda_2^2(t_0)}{4}+\lambda_1(t_0)x_2(t_0)+\lambda_2(t_0)\left\{-x_1(t_0)-\frac{\lambda_2(t_0)}{2}\right\}=-2\mu t_0; \tag{Т.2.38}$$

δt_1:
$$H_{t_1}=-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial t_1}+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial t_0}\right];$$

$$\frac{\lambda_2^2(t_1)}{4}+\lambda_1(t_1)x_2(t_1)+\lambda_2(t_1)\left\{-x_1(t_1)-\frac{\lambda_2(t_1)}{2}\right\}=-2\nu t_1; \tag{Т.2.39}$$

б) условия стационарности L по полным вариациям в начальной и конечной точках:

$\delta\tilde{x}_1(t_0)$:
$$\lambda_1(t_0)=-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_1(t_0)}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_1(t_0)}\right]=-\mu; \tag{Т.2.40}$$

$\delta\tilde{x}_2(t_0)$:
$$\lambda_2(t_0)=-\left[\frac{\partial\Phi}{\partial x_2(t_0)}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x_2(t_0)}\right]=-\mu; \tag{Т.2.41}$$

$\delta\tilde{x}_1(t_1)$:
$$\lambda_1(t_1)=\frac{\partial\Phi}{\partial x_1(t_1)}+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial x_1(t_1)}=2x_1(t_1)+4\nu x_1(t_1); \tag{Т.2.42}$$

$\delta\tilde{x}_2(t_1)$:
$$\lambda_2(t_1)=\frac{\partial\Phi}{\partial x_2(t_1)}+\nu\frac{\partial\varphi}{\partial x_2(t_1)}=2x_2(t_1)-2\nu x_2(t_1); \tag{Т.2.43}$$

в) условия стационарности L по множителям Лагранжа μ и ν:

$\delta\mu$:
$$x_1(t_0)+x_2(t_0)-t_0^2-6=0; \tag{Т.2.44}$$

$\delta\nu$:
$$2x_1^2(t_1)+x_2^2(t_1)-t_1^2-4=0; \tag{Т.2.45}$$

г) учет дифференциальных связей (уравнения движения):

$$x_1(t_1)=\cos(t_1-t_0)x_1(t_0)+\sin(t_1-t_0)x_2(t_0)+$$
$$+\frac{1}{4}\left\{-(t_1-t_0)\cos(t_1-t_0)+\sin(t_1-t_0)\right\}\lambda_1(t_0)-\frac{1}{4}\sin(t_1-t_0)(t_1-t_0)\lambda_2(t_0); \tag{Т.2.46}$$

$$x_2(t_1) = -\sin(t_1 - t_0)x_1(t_0) + \cos(t_1 - t_0)x_2(t_0) + \\ + \frac{1}{4}\sin(t_1 - t_0)(t_1 - t_0)\lambda_1(t_0) - \frac{1}{4}\{(t_1 - t_0)\cos(t_1 - t_0) + \sin(t_1 - t_0)\}\lambda_2(t_0); \quad \text{(T.2.47)}$$

$$\lambda_1(t_1) = \cos(t_1 - t_0)\lambda_1(t_0) + \sin(t_1 - t_0)\lambda_2(t_0); \quad \text{(T.2.48)}$$

$$\lambda_2(t_1) = -\sin(t_1 - t_0)\lambda_1(t_0) + \cos(t_1 - t_0)\lambda_2(t_0). \quad \text{(T.2.49)}$$

Из системы алгебраических уравнений (T.2.38)–(T.2.49) определяем с помощью пакета *Maple* неизвестные константы. Получим

$$t_0 = -0,2132; \quad t_1 = 2,6250;$$

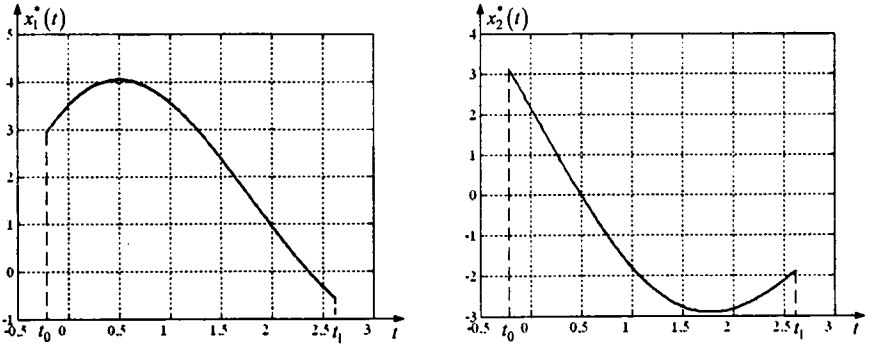
$$x_1(t_0) = 2,9343; \quad \dot{x} = \operatorname{tg} u, \quad x_2(t_0) = 3,1111; \quad x_2(t_1) = -1,8805;$$

$$\lambda_1(t_0) = 2,4130; \quad \lambda_1(t_1) = -1,5819; \quad \lambda_2(t_0) = 2,4130; \quad \lambda_2(t_1) = -3,024;$$

$$\mu = -2,4130; \quad \nu = 0,1960.$$

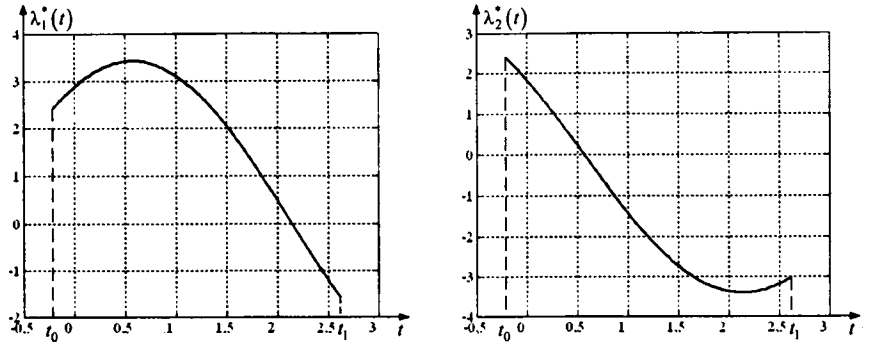
Для проверки полученного решения построим графики координат состояния (рис. T.2.2, T.2.3), график оптимального управления $u^*(t)$ (рис. T.2.4, *а*), график фазовой траектории $x_2^* = f(x_1^*)$ с начальным $\varphi(x(t_0), t_0) = 0$ и терминальным $\psi(x(t_1), t_1) = 0$ множествами (рис. T.2.4, *б*). Из данных рисунков видно, что траектория отвечает всем условиям оптимальности. Кроме того, учитывая, что система является стационарной, оптимальное значение гамильтониана $H^*(\mathbf{X}^*, \lambda^*)$ должно быть постоянной величиной. Для найденных значений t_0, t_1, μ, ν

$$H^*\big|_{t=t_0} = H^*\big|_{t=t_1} = 1,029.$$



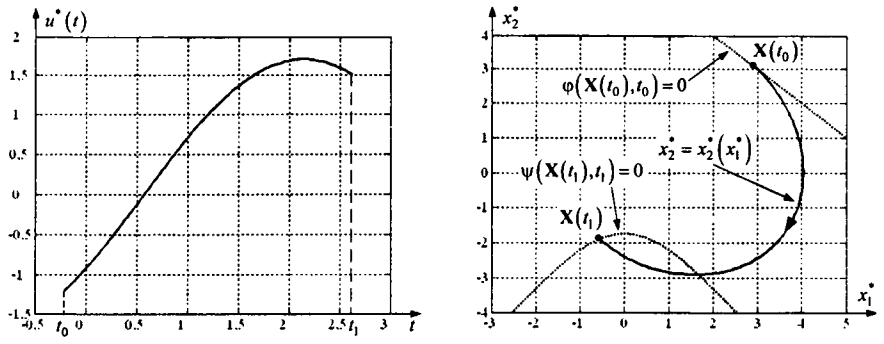
а *б*

Рис. T.2.2. Графики оптимальных координат состояния $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$



а *б*

Рис. T.2.3. Графики оптимальных координат состояния $\lambda_1^*(t)$, $\lambda_2^*(t)$



а *б*

Рис. Т.2.4. Графики: *а* — оптимального управления $u^*(t)$,
б — оптимальной фазовой траектории системы

ЗАДАНИЕ 2.1

Решите следующую задачу оптимального управления:

$$\dot{x} = x + u,\ x(0) = -1;$$

$$I = \int_0^{t_1} \left(u^2 + x^2\right) du + \frac{1}{2} x^2(t_1) \to \min_u;$$

$$x(t_1)(t_1 - 1{,}5) = 1.$$

Ответ:

$$t_1 = 0{,}80524 \text{ с};$$

$$u^*(t) = -\left(0{,}707e^{-1{,}41t} - 0{,}707e^{1{,}41t}\right) - 2{,}5617\left(0{,}146e^{1{,}41t} + 0{,}854e^{-1{,}41t}\right).$$

ЗАДАНИЕ 2.2

2.2-1. Для системы уравнений

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u,\ \mathbf{X} \in R^2,\ u \in R^1,$$

определите методами вариационного исчисления оптимальный закон управления $u^*(t)$, переводящего указанную систему из начального состояния

$$M_0:\ x_1(t_0) + x_2(t_0) - t_0^2 - 16 = 0\ \left(\varphi(x(t_0),t_0) = 0\right)$$

на терминальное множество

$$M_1:\ \psi(x(t_1),t_1) = 0$$

и минимизирующего функционал качества

$$I = \int_{t_0}^{t_1} u^2(t)\,dt + x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1).$$

2.2-2. Найдите зависимости $u^*(t)$, $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$ и постройте их графики.

2.2-3. Постройте фазовую траекторию $x_2^* = f\left(x_1^*\right)$; начальное и терминальное множества для найденных значений t_0 и t_1.

Варианты математических моделей (матрицы **A** и **B**) приведены в табл. Т.2.1, а конкретные значения их элементов определяются номером задания (табл. Т.2.2). В табл. Т.2.3 представлены терминальные многообразия $\psi\left(x(t_1),t_1\right)=0$ для каждого задания.

Указания:

1. При нахождении решения системы алгебраических уравнений, определяющих неизвестные константы для t_1, следует выразить значение из условия $t_1 > t_0$; кроме того, все константы должны быть только вещественными.
2. Для проверки правильности полученного решения убедитесь, что значения гамильтониана равны, т.е. $H_{t_0} = H_{t_1}$.

Таблица Т.2.1

Варианты математических моделей

№ модели	Матрица A	Матрица B
1	$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \end{bmatrix}$
5	$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$

Таблица Т.2.2

Элементы математических моделей

№ задания	№ модели	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1		–1			1	–1
2	2	–1		1		1	
3	3		1	–1			1
4	4		1		–2		1
5	5			–1		1	1
6	2	–2		–1		1,5	
7	4		1,5		–3		0,9
8	3		3	–1			–1,5
9	5			–2		2	0,5
10	1		0,8			1	–2
11	2	–2		0,6		1,4	
12	3		1	–2			0,8
13	4		4		–1		1,8
14	5			–3		1	1,5
15	3		–3	1			1,6
16	1		–3			–2	1
17	2	–0,9		3		2,3	
18	5			1,6		–0,7	2
19	4		–2		–0,5		1
20	3		2	–3			2
21	4		1,4		–1,5		–2

Продолжение табл. Т.2.2

1	2	3	4	5	6	7	8
22	2	–3		–2		–1,6	
23	1		1			2	1,1
24	3		–1	3			1,7
25	5			–3		1	3
26	2	–0,5		1,1		2	
27	4		–3		–2,1		1
28	3		2	–1			4
29	2	–2,2		1		2,6	
30	5			3		–1	–1
31	1		–4			1	4
32	3		–3	1			2
33	4		1,2		–4		2,2
34	2	–4		4		1	
35	5			–3,2		2	1
36	3		1,1	–2			3,3
37	1		3			–2	–1
38	2	–0,3		–3,3		2,5	
39	5			1		1,1	2
40	4		1,7		–2,2		1,8
41	3		–3	1			3,5
42	2	–1,2		4		2,1	
43	4		1,9		–2		5,2
44	1		2			–1	–4
45	5			–2,2		1	1
46	2	–1,7		2		3,1	
47	3		–4	2			0,5

Таблица Т.2.3

Варианты терминальных многообразий

№ задания	$\psi(x_1(t_1),x_2(t_1))=0$	№ задания	$\psi(x_1(t_1),x_2(t_1))=0$
1	2	1	2
1	$x_1^2(t_1)+\cos^2(x_2(t_1))-t_1^2-1=0$	25	$x_1^2(t_1)+x_1(t_1)\cdot x_2(t_1)-t_1^2-1=0$
2	$\operatorname{tg}(x_1(t_1))\cdot(x_2^2(t_1))-t_1^2-1=0$	26	$x_1^2(t_1)\cdot x_2(t_1)+x_2^3(t_1)-t_1^2+10=0$
3	$x_1(t_1)-x_2^2(t_1)-t_1^2-1=0$	27	$x_1(t_1)\sin(x_1(t_1))+x_2(t_1)-t_1^2=0$
4	$x_1(t_1)+x_2^2(t_1)-t_1-1=0$	28	$x_1^2(t_1)+4x_2^2(t_1)-t_1^2-6=0$
5	$\ln(x_1(t_1))+x_2^2(t_1)-t_1^2=0$	29	$x_1(t_1)-2x_2^2(t_1)-t_1^2-3=0$
6	$x_1^2(t_1)+2x_2^2(t_1)-t_1^2-1=0$	30	$\sin(x_1(t_1))+x_2(t_1)x_1(t_1)-t_1^2=0$
7	$x_1^2(t_1)+x_2(t_1)-t_1^2-2=0$	31	$x_1^2(t_1)-\exp(-x_2(t_1))-t_1^2=0$
8	$\exp(-x_1(t_1))+x_2(t_1)-t_1^2=0$	32	$\exp(-x_1(t_1))\cdot\operatorname{tg}(x_2(t_1))-t_1^2-1=0$
9	$x_1(t_1)-\exp(2x_2(t_1))-t_1^2-3=0$	33	$x_1(t_1)+\sin(x_2(t_1))-t_1^2=0$
10	$2x_1^2(t_1)+x_2^2(t_1)-t_1^2-1=0$	34	$x_1(t_1)+x_2(t_1)\sin(x_2(t_1))-t_1^2=0$
11	$x_1^2(t_1)\cdot x_2^3(t_1)-t_1^2-3=0$	35	$\operatorname{arctg}(x_1(t_1))+x_2(t_1)-t_1^2=0$
12	$0,2x_1^2(t_1)+2x_2^2(t_1)-t_1^2-5=0$	36	$\sin(x_1(t_1))\cdot\operatorname{tg}(x_2(t_1))-t_1^2-1=0$
13	$\exp(-1,2x_1(t_1))-x_2(t_1)-t_1^2=0$	37	$\cos^2(x_1(t_1))+x_2^2(t_1)-t_1^2-3=0$
14	$\operatorname{tg}(x_1(t_1))+x_2(t_1)-t_1^2=0$	38	$\sin^2(x_1(t_1))+x_2^2(t_1)-t_1^2-1=0$

Продолжение табл. Т.2.3

1	2	1	2
15	$\exp(-x_1(t_1))+\operatorname{tg}(x_2(t_1))-t_1^2-1=0$	39	$x_1(t_1)\cos(x_2(t_1))-t_1^2-6=0$
16	$x_1^2(t_1)+3(\sin^2(x_2(t_1)))-t_1^2-6=0$	40	$x_1^2(t_1)+13x_2^2(t_1)-t_1^2-7=0$
17	$\ln(x_1(t_1))+\operatorname{tg}(x_2(t_1))-t_1^2-1=0$	41	$4x_1(t_1)+x_2^2(t_1)-t_1^2-7=0$
18	$2x_1^2(t_1)+x_2^2(t_1)-t_1^2-3=0$	42	$\operatorname{tg}(x_1(t_1))+3x_2(t_1)-t_1^2=0$
19	$x_1(t_1)+\operatorname{th}(x_2(t_1))-t_1^2-3=0$	43	$\ln(x_1(t_1))+2x_2(t_1)-t_1^2=0$
20	$(\sin^2(x_1(t_1)))+x_2(t_1)-t_1^2=0$	44	$3\exp(-x_1(t_1))+\operatorname{tg}(x_2(t_1))-t_1^2-2=0$
21	$x_1(t_1)+x_2(t_1)\operatorname{ch}(x_2(t_1))-t_1^2-1=0$	45	$2x_1(t_1)-\exp(2x_2(t_1))-t_1^2-1=0$
22	$2x_1^2(t_1)-x_2^2(t_1)-t_1^2-4=0$	46	$5x_1(t_1)+\sin(x_2(t_1))-t_1^2=0$
23	$3x_1^2(t_1)+x_2^2(t_1)-t_1^2-7=0$	47	$x_1^2(t_1)+3\cos^2(x_2(t_1))-t_1^2-2=0$
24	$x_1(t_1)\cdot(x_2(t_1)+1)-t_1^2-3=0$		

ТЕМА 3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА Л.С. ПОНТРЯГИНА

ЗАДАНИЕ 3.1

Изучите теорию оптимального управления, содержанием которой является принцип максимума Л.С. Понтрягина. Сформулируйте принцип максимума для задачи с закрепленными концами и фиксированным временем и для задачи с подвижными концами. Установите связь между принципом максимума и методом множителей Лагранжа. Раскройте содержание задачи максимального быстродействия и покажите, что в случае линейной задачи при выполнении условий нормальности принцип максимума является не только необходимым, но и достаточным условием оптимальности.

Сформулируйте теорему об n интервалах. Раскройте содержание задач с ограничением на фазовые координаты, вырожденных и особых задач.

ЗАДАНИЕ 3.2

Для объекта, движение которого задается уравнением

$$\dot{x} + 4x = 2u, \quad |u| \le 1,$$

с помощью принципа максимума найдите управление $u(t)$, переводящее переменную $x(t)$ из состояния $x(0) = 0$ в состояние $x(10) = 4$ и минимизирующее функционал

$$I = \int_0^{10} x dx.$$

ЗАДАНИЕ 3.3

Постройте решение задачи поворота вала двигателя за заданное время T на максимальный угол, используя принцип максимума Л.С. Понтрягина:

$$\dot{x}_1 = x_2; \quad \dot{x}_2 = u; \quad |u| \le u_0;$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0; \quad x_2(T) = 0; \quad I = -x_1(T) \to \min.$$

ЗАДАНИЕ 3.4

Движение системы задается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u, \quad |u| \le 1.$$

Требуется решить задачу о наибыстрейшем переводе фазовой точки $\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ из заданного начального положения $\mathbf{X}^0 = \begin{bmatrix} x_1(0) & x_2(0) \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ на прямую $x_1 = 0$. В качестве начальной рассмотрите любую точку фазового пространства, т.е. требуется выделить всю совокупность оптимальных траекторий.

ЗАДАНИЕ 3.5

Для объекта, движение которого задается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u, \quad |u| \le 1,$$

найдите решение задачи о переводе фазовой точки $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$ из заданного начального состояния $\mathbf{X}^0 = [x_1(0) \quad x_2(0)]^{\mathrm{T}}$ в начало координат так, чтобы функционал $I = \int_0^T (k + u^2)\,dt$, где $k > 0$ и момент времени T не фиксирован, принимал свое наименьшее значение. Требуется выделить всю совокупность оптимальных траекторий.

ЗАДАНИЕ 3.6

Рассматривается система, движение которой задается уравнением

$$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + (\alpha^2 + \beta^2)x = u, \quad |u| \le 1$$
$$(\alpha > 0, \quad \beta > 0).$$

Используя принцип максимума, требуется осуществить синтез оптимального по быстродействию управления, переводящего фазовую точку из произвольного начального состояния $\mathbf{X}^0$ в начало координат $\mathbf{X}^T = 0$.

ЗАДАНИЕ 3.7

Для системы, движение которой задается уравнениями

$$\frac{dx_1}{dt} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dt} = u,$$

требуется осуществить синтез оптимального по быстродействию управления, переводящего фазовую точку $\mathbf{X} = [x_1 \quad x_2]^{\mathrm{T}}$ из произвольного начального состояния $\mathbf{X}^0$ в начало координат $\mathbf{X}^T = 0$, при ограничениях на управляющий параметр u и фазовую переменную x_2:

$$|u| \le u_0, \quad |x_2| \le B,$$

где u_0 и B — некоторые положительные числа.

Постройте решение задачи с помощью принципа максимума.

ЗАДАНИЕ 3.8

Задана математическая модель системы управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) + u(t), \\ \dot{x}_2(t) = -u(t), \end{cases}$$
$$|u| \le 1.$$

Переведите систему из $\mathbf{X}(0) = [-1 \quad 1]^{\mathrm{T}}$ в точку $[0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$, минимизируя по управлению функционал

$$I = \int_0^{t_1} x_1^2(t)\,dt.$$

ЗАДАНИЕ 3.9

Решите задачу оптимального управления:

$$I = \int_0^{t_1} u^2(t)\,dt \to \min_u, \quad u \in R^1,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = -x_1(t) + x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(0) = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}},$$

терминальное множество $x_1^2(t_1) + x_2^2(t_1) = t_1^2 + 1$.

ЗАДАНИЕ 3.10

Задача быстродействия:

$$I = t_1 \to \min_u;$$

$$\ddot{x}(t) = u(t), \quad |u| \le 2, \quad t_0 = -1,$$

$$x(-1) = 1, \quad x(t_1) = -1; \quad \dot{x}(-1) = \dot{x}(t_1) = 0.$$

ЗАДАНИЕ 3.11

Задана математическая модель системы управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$

$$|u| \le 1.$$

Требуется перевести систему из начального состояния $\mathbf{X}(0) = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ на многообразие $x_2 \equiv 0$, минимизируя по управлению функционал

$$I = \int_0^{t_1} dt + \alpha x_1^2(t_1), \quad \alpha > 0, \ \alpha = \text{const}.$$

Указание. Рассмотрите два предельных случая:

1) $\alpha = 0$;

2) $\alpha = \infty$.

ЗАДАНИЕ 3.12

Решите задачу оптимального управления:

$$I = x_2(1) \to \min_u$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$

$$\int_0^1 u^2(t)\,dt = 4, \quad x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = 0.$$

ЗАДАНИЕ 3.13

Задана математическая модель системы управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$

$$u \in R^1, \ x(0) = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}.$$

Найдите оптимальное управление, минимизирующее функционал

$$I = x_1(1) + x_2(1) + \int_0^1 u^2(t)\,dt \to \min_u.$$

ЗАДАНИЕ 3.14

Решите задачу оптимального управления:

$$I = \int_0^1 x_1(t)\,dt \to \min_u$$

при условиях

$$\int_0^1 u^2(t)\,dt = 1,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}(1) = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}.$$

ЗАДАНИЕ 3.15

Требуется остановить тележку, движущуюся по гладким рельсам, что соответствует управляемой системе

$$\ddot{x}(t) = u(t).$$

На управление наложено ограничение

$$\int_0^1 u^2(t)\,dt \le 1.$$

Необходимо перевести систему из начального состояния $x(0) = 0, \ \dot{x}(0) = 3,$ в точку $[0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ за минимальное время.

Указание. Ограничение следует считать изопериметрическим ограничением. Почему?

ЗАДАНИЕ 3.16

Решите задачу оптимального управления:

$$I = \int_0^{t_1} u^2(t)\,dt \to \min_u,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = u(t), \end{cases}$$

$u \le 24$ (одностороннее ограничение),

$$x_1(0)=11,\ \mathbf{X}(1)=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}.$$

Указания:

1. Сначала решите задачу без ограничения на управление. При этом следует учесть, что координата $x_2(0)$ — свободная (необходимо условие трансверсальности).
2. После ввода ограничения на управление необходимо найти точку выхода на границу управления.

ЗАДАНИЕ 3.17

Решите задачу оптимального управления:

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left\{x_1^2(t)+x_2^2(t)\right\}dt\to\min_u,$$

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=u(t),\end{cases}$$

$$|u|\le 1,$$

$$x_1(0)=0,\ x_2(0)=1,\ \mathbf{X}(t_1)=[0\quad 0]^{\mathrm{T}}.$$

ЗАДАНИЕ 3.18

Решите задачу оптимального управления:

$$I=t_1\to\min_u$$

при ограничениях

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2(t),\\ \dot{x}_2(t)=u(t),\end{cases}$$

$$\int_0^{t_1}u^2(t)dt=1,\ \mathbf{X}(0)=[0\quad 0]^{\mathrm{T}},\ x_2(t_1)=1.$$

ЗАДАНИЕ 3.19

Задана математическая модель системы управления

$$\begin{cases}\dot{x}_1(t)=x_2^2(t)+u^2(t),\\ \dot{x}_2(t)=u(t),\end{cases}$$

$$|u|\le 1,$$

$$x_1(0)=0,\ x_2(0)=0.$$

Требуется перевести систему из начального состояния на отрезок $G=\{x_1=1,\ |x_2|\le 1\}$ за минимальное время.

Покажите, что множество скоростей незамкнуто и что имеет место скользящий режим. Найдите линию (поверхность) скольжения. Постройте фазовый портрет.

ЗАДАНИЕ 3.20

3.20-1. Определите оптимальный по быстродействию закон $u^*(t)$ для системы

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}u,\ \mathbf{X} \in R^2,\ u \in [u_{\min}, u_{\max}] \subset R^1,$$

переводящий указанную систему из начального состояния $\mathbf{X}(0) = [x_{10} \quad x_{20}]^{\mathrm{T}}$ в конечное $\mathbf{X}(t_1) = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}$ за минимальное время. Математические модели приводятся в табл. Т.2.1. Варианты математических моделей приведены в табл. Т.3.1.

Таблица Т.3.1

Варианты математических моделей

№ варианта	№ модели	x_{10}	x_{20}	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	b_1	b_2	$[u_{\min}, u_{\max}]$
1	1	1	1		–1			1	–1	[–1;2]
2	2	–3	3	–1		1		1		[–2;1]
3	3	–3	1		1	–1			1	[–1,3;2]
4	4	1,2	3,1		1		–2		1	[–2;0,5]
5	5	–1	2,4			–1		1	1	[–3;1,6]
6	2	2	–3	–2		–1		1,5		[–1;3]
7	4	2	0		1,5		–3		0,9	[–1;3]
8	3	–5	5		3	–1			–1,5	[–3;3]
9	5	–4	0			2		2	0,5	[–1;2,5]
10	1	1	–3		0,8			1	–2	[–3;1]
11	2	0	–5	–2		0,6		1,4		[–2;6]
12	3	–2	2		1	–2			0,8	[–3;0,9]
13	4	–2	–1		4		–1		1,8	[–2;4]
14	5	0	–5			–3		1	1,5	[–1,5;3]
15	3	–3	3		–3	1			1,6	[–4;1]
16	1	2	3		–3			–2	1	[–1;2]
17	2	–3	–1,8	–0,9		3		2,3		[–3;1,9]
18	5	5	0			1,6		–0,7	2	[–1,4;2,3]
19	4	–3	–3		–2		–0,5		1	[–2;4]
20	3	4	0		2	–3			2	[–3;5]
21	4	–4	–2		1,4		–1,5		–2	[–3;1]
22	2	–5	0	–3		–2		–1,6		[–1;4]
23	1	3	4		1			2	1,1	[–2;2]
24	3	0	5		–1	3			1,7	[–2;4]
25	5	–1	–4			–3		1	3	[–3;1]
26	2	–2	–4	–0,5		1,1		2		[–1;3]
27	4	0	27		–3		–2,1		1	[–2;2]
28	3	4	4		2	–1			4	[–5;1]
29	2	–5	5	–2,2		1		2,6		[–4;3]
30	5	10	3			3		–1	–1	[–3;3]
31	1	–6	1		–4			1	4	[–4;3]
32	3	4	–6		–3	1			2	[–1;4]
33	4	–3	4		1,2		–4		2,2	[–1,5;3]
34	2	–2	–4	–4		4		1		[–3;2]
35	5	6	0			–3,2		2	1	[–3;3]
36	3	–4	–6		1,1	–2			3,3	[–5;1]
37	1	2	–3		3			–2	–1	[–3;1]
38	2	1,8	8	–0,3		3,3		2,5		[–2;6]
39	5	0	–4			1		1,1	2	[–1;1]
40	4	–1	5		1,7		–2,2		1,8	[–5;1]
41	3	2	–6		–3	1			3,5	[–2;4]
42	2	–5	5	–1,2		4		2,1		[–1;3]
43	4	–2	6		1,9		–2		5,2	[–1,5;3]
44	1	3	–5		2			–1	–4	[–6;1]
45	5	–4	6			–2,2		1	1	[–1;3]
46	2	–1	7	–1,7		2		3,1		[–4;3]
47	3	0	–4		–4	2			0,5	[–2;1]

3.20-2. Проверьте управляемость системы.

3.20-3. Найдите точку пересечения и фазовую траекторию $x_2^* = f\left(x_1^*\right)$.

3.20-4. Постройте графики $x_1^*(t)$, $x_2^*(t)$, $u^*(t)$.

ЗАДАНИЕ 3.21

3.21-1. Решите задачу оптимального управления объектом, определенным в задании 3.20, для случая, когда оптимизируемый функционал имеет вид

$$I = \int_0^{t_1} \left\{ x_1^2(t) + x_2^2(t) \right\} dt.$$

3.21-2. Проверьте необходимые условия оптимальности и найдите степень сингулярности особой траектории.

3.21-3. Постройте особые траектории на фазовой плоскости.

3.21-4. Выбирите начальные условия так, чтобы оптимальная траектория включала особый участок; найдите значение функционала.

3.21-5. Для начальных условий пункта 4 постройте оптимальное по быстродействию управление и найдите для полученного решения значение функционала текущей задачи.

3.21-6. Сравните значения функционалов пунктов 3 и 4 и сделайте выводы об оптимальности особого управления.

ЗАДАНИЕ 3.22

Поведение объекта описывается уравнениями вида

$$\dot{x}_1 = x_2 + u_1, \quad \dot{x}_2 = u_2.$$

На $u_1(t)$ и $u_2(t)$ наложены ограничения $|u_1(t)| \le 1$; $|u_2(t)| \le 1$. Постройте решение задачи оптимального быстродействия по переводу объекта из произвольной точки фазового пространства в начало координат.

При решении задачи необходимо учитывать тот факт, что рассматриваемая система не удовлетворяет условию общности положения, тем не менее принцип максимума является необходимым и достаточным условием в задаче о быстродействии этой системы с начальным состоянием $\mathbf{X}^0$ и конечным состоянием $\mathbf{X}^T = 0$.

Постройте решение задачи с помощью принципа максимума.

ЗАДАНИЕ 3.23

Принцип максимума для неавтономных систем может быть использован для решения задач следующего содержания.

Между пунктами A и B необходимо наметить профиль железнодорожного пути, задаваемый функцией $y(x)$ (используется прямоугольная система координат). Пункт A имеет координаты $(x = 0, y = 0)$, а пункт B — координаты $(x = 1000, y = 10)$. Рельеф местности задается функцией $y = f(x)$, а стоимость строительных работ — функционалом

$$I = \int_0^{1000} \left\{ y(x) - f(x) \right\}^2 dx.$$

Предполагается, что задано ограничение на уклон пути

$$\left|y'(x)\right| \le R.$$

Полагая, что

$$f(x) = 20\sin\frac{\pi}{50}x, \quad R = 0{,}1,$$

требуется найти профиль железнодорожного пути (функцию $y(x)$), минимизирующий стоимость строительных работ (функционал I). Задачу решать в двух вариантах:

- функция $y(x)$ проходит через точки $(0,0)$ и $(1000,10)$;
- значения функции $y(x)$ при $x = 0$ и $x = 1000$ не заданы, а выбираются из условия минимизации функционала.

ЗАДАНИЕ 3.24

Синтезируйте оптимальную систему, работающую по принципу обратной связи, если:

- объект имеет описание вида $\ddot{x} = u$;
- управление имеет ограничение $|u| \le u_0$.

Синтезируйте управление $u = u\left(x(t), \dot{x}(t)\right)$, обеспечивающее перевод объекта из состояния $\mathbf{X}^0 = \left[x(0) \quad \dot{x}(0)\right]^{\mathrm{T}}$ в начало координат за минимальное время.

Постройте структурную схему системы.

ЗАДАНИЕ 3.25

Полагая, что объект управления — апериодическое звено, т.е.

$$\dot{x} + a_0 x = u,$$

постройте функции

$$T^* = f_1\left(x(0), a_{0\,\text{фикс}}\right) = f_1\left(x(0)\right);$$

$$T^* = f_2\left(x(0)_{\text{фикс}}, a_0\right) = f_2\left(a_0\right),$$

где T^* — минимальное время перевода объекта из состояния $x(0) \ne 0$ в состояние $x(T) = 0$ с помощью управления $|u(t)| \le 1$; $a_{0\,\text{фикс}}$ — фиксированное значение a_0, $x(0)_{\text{фикс}}$ — фиксированное значение начального состояния $x(0)$.

ТЕМА 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

ЗАДАНИЕ 4.1

Изложите основы метода динамического программирования и его базовые положения: принцип оптимальности, инвариантное погружение и полученное на их основе функциональное уравнение. Запишите функцию и уравнение Беллмана.

Изложите алгоритм построения оптимального управления методом динамического программирования. Обратите внимание на то обстоятельство, что метод динамического программирования позволит находить оптимальное управление как функцию фазовых координат. Сформулируйте условия, при выполнении которых метод динамического программирования дает достаточное условие оптимальности.

ЗАДАНИЕ 4.2

Для объекта, движение которого задается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = u - 4x,$$

найдите методом динамического программирования управление $u(x)$, минимизирующее функционал

$$I = \int_0^{\infty} \left\{ x^2 + u^2 \right\} dx.$$

ЗАДАНИЕ 4.3

Для объекта, движение которого описывается уравнениями

$$\dot{x}_1 = x_2;\ \dot{x}_2 = u,$$

постройте методом динамического программирования управление $u(x_1, x_2)$ при следующих условиях:

$$\mathbf{X}^0 = \left[x_1(0) \quad x_2(0) \right]^{\mathrm{T}},\ \mathbf{X}^T = \mathbf{0},$$

$$I = \int_0^T \left\{ x_1^2(t) + u^2(t) \right\} dt \to \min_u;$$

момент T не фиксирован.

ЗАДАНИЕ 4.4

4.4-1. Методом динамического программирования решите следующую задачу оптимального управления:

$$I = \int_0^{\infty} \left(u^2(t) + x_1^2(t) \right) dt \to \min_u \qquad \text{(Т.4.1)}$$

при ограничениях

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + 2u(t), \end{cases} \qquad \text{(Т.4.2)}$$

$$x_1(0) = x_{10},\ x_2(0) = x_{20}. \qquad \text{(Т.4.3)}$$

Указание. Функцию Беллмана задайте в виде положительно определенной квадратичной формы $S(\mathbf{X}) = \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}}\mathbf{X}\ \left(\overline{\mathbf{P}} > 0\right)$.

4.4-2. Убедитесь, что матрица $\overline{\mathbf{P}}$ удовлетворяет уравнению Ляпунова

$$\overline{\mathbf{P}}\widetilde{\mathbf{A}} + \widetilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{P}} = -\mathbf{Q},\ \mathbf{Q} > 0,$$

где $\widetilde{\mathbf{A}}$ — матрица исходной системы управления, где введена обратная связь (гурвицева матрица).

4.4-3. С помощью функции Беллмана найдите значение функционала I.

ЗАДАНИЕ 4.5

4.5-1. Для исходной задачи оптимального управления

$$I = \int_0^1 u^2(t)dt \to \min_u,$$

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t),$$

$$x(0) = 1,\ x(1) = 3,$$

получите аналитическое решение методами вариационного исчисления, определите значение функционала.

4.5-2. Приведите дискретизацию интеграла к дифференциальным уравнениям по методу Эйлеру; перейдите к сумме и разностному уравнению. Используя рекуррентное уравнение Беллмана

$$S(x_j, t_j) = \min_{u_j}\left(f_0(x_j, u_j, t_j) + S(x_{j+1}, t_{j+1})\right),$$

$$S(x_N, t_N) = 0,$$

получите решение исходной задачи в дискретной форме (число шагов $N = 5$). Сравните полученное значение функционала со значением, полученным аналитически. Объясните несовпадение результатов.

ЗАДАНИЕ 4.6

Методом динамического программирования решите следующую задачу синтеза оптимального управления:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = 2x_2(t) + u(t), \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(0) = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}},$$

$$I = \int_0^\infty \left(2x_1^2(t) + x_2^2(t) + 0{,}5u^2(t)\right)dt \to \min_u.$$

ЗАДАНИЕ 4.7

Решите задачу оптимального управления методом динамического программирования для дискретной системы:

$$I = \int_0^t u^2(t)dt \to \min_u,$$

$$\dot{x}(t) = -x(t) + u(t),$$
$$x(0) = 1, \quad x(1) = 0, \quad u \in R^1.$$

Число шагов $N = 2$.

Указание. Предварительно получите оптимальное управление для непрерывной системы.

ЗАДАНИЕ 4.8

Решите задачу оптимального управления методом динамического программирования для дискретной системы:

$$I = \int_0^1 u^2(t)dt \to \min_u,$$
$$\dot{x}(t) = -3x(t) + u(t),$$
$$x(0) = 1, \quad x(1) = -1, \quad u \in R^1.$$

Число шагов $N = 2$.

Указание. Предварительно получите оптимальное управление для непрерывной системы.

ЗАДАНИЕ 4.9

Некоторая фирма имеет 3 предприятия и желает выгодно вложить свои денежные средства в размере 9 единиц в их реконструкцию. Каждое преприятие представляет проекты, которые характеризуются величинами суммарных затрат r и доходов c, связанных с реализацией каждого из проектов. Цель фирмы — получить максимальную прибыль от инвестиций 9 единиц. Данные о представленных проектах приведены в табл. Т.4.1.

Таблица Т.4.1

Данные о представленных проектах

Проект	Предприятие №1		Предприятие №2		Предприятие №3	
	R_1	C_1	R_2	C_2	R_3	C_3
1	0	0	0	0	0	0
2	1	4	3	7	1	3
3	2	7	5	9	2	5
4	3	8	7	11	8	12

Методом динамического программирования найдите оптимальное решение задачи.

ТЕМА 5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ (АКОР)

Кратко рассмотрим основные теоретические положения АКОР, а также теоретические положения, связанные с выполнением заданий для самостоятельной работы по данной теме.

Т.5.1. ЗАДАЧА СТАБИЛИЗАЦИИ ОБЪЕКТА УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим линейный объект управления, описываемый системой дифференциальных уравнений в нормальной форме

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \qquad \mathbf{X} \in R^n, \ \mathbf{U} \in R^m. \tag{Т.5.1}$$

Необходимо получить закон управления

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}\big(\mathbf{X}(t)\big), \tag{Т.5.2}$$

минимизирующий функционал вида

$$I = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t_1)\mathbf{P}_1\mathbf{X}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left\{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right\}dt. \tag{Т.5.3}$$

Моменты времени t_0, t_1 фиксированы. Матрицы $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{Q}$ — симметричные неотрицательно определенные:

$$\mathbf{P}_1 = \mathbf{P}_1^{\mathrm{T}} \geq 0, \quad \mathbf{Q} = \mathbf{Q}^{\mathrm{T}} \geq 0,$$

матрица $\mathbf{R}$ — положительно определенная:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^{\mathrm{T}} > 0.$$

Составим для данной задачи функцию Гамильтона:

$$H(\mathbf{X},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda}) = -\frac{1}{2}\left[\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}\mathbf{X} + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R}\mathbf{U}\right] + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}\right].$$

Уравнение для сопряженных переменных имеет вид

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^{\mathrm{T}} = -\boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{A} + \mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{Q} \ \Leftrightarrow \ \dot{\boldsymbol{\lambda}} = -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} + \mathbf{Q}\mathbf{X}. \tag{Т.5.4}$$

Так как нам задан функционал качества общего вида (в форме Больца), то в конечной точке t_1

$$\boldsymbol{\lambda}(t_1) = -\mathbf{P}_1\mathbf{X}(t_1). \tag{Т.5.5}$$

Для нахождения экстремума найдем производную гамильтониана по управлению и приравняем ее нулю:

$$\frac{\partial H(\mathbf{X},\mathbf{U},\boldsymbol{\lambda})}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ -\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{R} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathrm{T}}\mathbf{B} = \mathbf{0}.$$

Поскольку $\mathbf{R}^{\mathrm{T}} = \mathbf{R}$, то справедливо соотношение

$$-\mathbf{R}\mathbf{U} + \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{0}.$$

Окончательно имеем:

$$\mathbf{U} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}. \tag{Т.5.6}$$

Для решения задачи введем функцию Беллмана

$$S(\mathbf{X},t)=\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t),$$

матрица $\mathbf{P}(t)$ — симметричная положительно определенная. В граничных точках функция Беллмана имеет следующие значения:

$$S(\mathbf{X}(t_1),t_1)=\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t_1)\mathbf{P}_1(t_1)\mathbf{X}(t_1),\ \ S(\mathbf{X}(t_0),t_0)=I^0.$$

Рассмотрим функцию

$$V(\mathbf{X},t)=-S(\mathbf{X},t).$$

Найдем ее производную по $\mathbf{X}$:

$$V'_{\mathbf{X}}(\mathbf{X},t)=\boldsymbol{\lambda}(t)=-\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t). \qquad \text{(Т.5.7)}$$

Закон оптимального управления имеет вид

$$\mathbf{U}^*(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t). \qquad \text{(Т.5.8)}$$

Для нахождения матрицы $\mathbf{P}(t)$, входящей в управление, продифференцируем по переменной t выражение (Т.5.7), получим

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=-\left(\dot{\mathbf{P}}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{P}(t)\dot{\mathbf{X}}(t)\right)=-\left(\dot{\mathbf{P}}\mathbf{X}+\mathbf{P}(\mathbf{AX}+\mathbf{BU})\right)=$$

$$=-\left(\dot{\mathbf{P}}\mathbf{X}+\mathbf{P}\left(\mathbf{AX}-\mathbf{BR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{PX}\right)\right).$$

Раскрыв скобки, запишем

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)=-\left(\dot{\mathbf{P}}+\mathbf{PA}-\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right)\mathbf{X}. \qquad \text{(Т.5.9)}$$

Приравняв правые части соотношений (Т.5.9) и (Т.5.4), получим

$$-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(-\mathbf{PX})+\mathbf{QX}=-\left(\dot{\mathbf{P}}+\mathbf{PA}-\mathbf{PBR}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{P}\right)\mathbf{X}.$$

После некоторых упрощений окончательно получаем

$$\dot{\mathbf{P}}(t)=-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{Q}(t). \qquad \text{(Т.5.10)}$$

Уравнение (Т.5.10) есть матричное дифференциальное уравнение Риккати.

Поскольку $\boldsymbol{\lambda}(t)=-\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)$, то $\boldsymbol{\lambda}(t_1)=-\mathbf{P}(t_1)\mathbf{X}(t_1)$.

Из условия трансверсальности (Т.5.5) следует

$$\mathbf{P}(t_1)=\mathbf{P}_1. \qquad \text{(Т.5.11)}$$

Для нахождения матрицы $\mathbf{P}(t)$ уравнение Риккати следует интегрировать в обратном времени, поскольку известно значение матрицы $\mathbf{P}(t)$ при $t=t_1$.

После нахождения матрицы $\mathbf{P}(t)$ оптимальное управление может быть найдено из соотношения (Т.5.8). Если обозначить $\mathbf{K}(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)$, то можно записать

$$\mathbf{U}^*(t)=\mathbf{K}(t)\mathbf{X}(t).$$

Уравнение замкнутой скорректированной системы имеет вид

$$\mathbf{X}(t)=\left[\mathbf{A}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)\right]\mathbf{X}(t).$$

Рассмотренный алгоритм стабилизирует движение линейной нестационарной системы (Т.5.1) на *конечном* интервале времени $[t_0,t_1]$. Решим теперь аналогичную задачу на *полубесконечном* временном интервале $t\in[0,\infty)$ для линейного *стационарного* объекта

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{AX}(t)+\mathbf{BU}(t). \qquad \text{(Т.5.12)}$$

Если линейная *стационарная* система (Т.5.12) является *полностью управляемой и наблюдаемой*, то решение уравнения Риккати (Т.5.10) при $t_1 \to \infty$ стремится к установившемуся решению $\bar{\mathbf{P}}$, не зависящему от $\mathbf{P}_1$, и определяется следующим алгебраическим уравнением:

$$\mathbf{0} = -\bar{\mathbf{P}}\mathbf{A} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}} + \bar{\mathbf{P}}\mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}. \qquad \text{(Т.5.13)}$$

В рассматриваемом случае весовые матрицы $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ в функционале (Т.5.3) не зависят от времени.

Оптимальное значение функционала (Т.5.3) равно

$$I^0 = \left[\mathbf{X}^0\right]^{\mathrm{T}} \bar{\mathbf{P}}\mathbf{X}^0$$

и является квадратичной функцией от начальных значений отклонения вектора состояния.

Таким образом, получаем, что при $t_1 = \infty$ оптимальное управление приобретает форму *стационарной* обратной связи по состоянию

$$\mathbf{U}^*(t) = \bar{\mathbf{K}}\mathbf{X}(t), \quad \bar{\mathbf{K}} = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}}, \qquad \text{(Т.5.14)}$$

где $\bar{\mathbf{P}}$ — решение *алгебраического* матричного уравнения Риккати (Т.5.13).

Т.5.2. МЕТОД ДИАГОНАЛИЗАЦИИ ДЛЯ РЕШЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

Задана система и минимизируемый функционал

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U},$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0,$$

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left\{\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{Q}\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}\mathbf{U}(t)\right\}dt.$$

Оптимальное управление определяется так:

$$\mathbf{U}^*\left(\mathbf{X}(t)\right) = -\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}}\mathbf{X}(t), \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \mathbf{Q}\mathbf{X}(t) - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t).$$

Запишем уравнения для расширенной системы:

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{X}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{Q} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}(t)\\ \boldsymbol{\lambda}(t)\end{bmatrix},$$

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}}\right]\mathbf{X}(t),$$

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}}\right]^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\lambda}(t),$$

$$\begin{bmatrix}\dot{\mathbf{X}}(t)\\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & -\left[\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\bar{\mathbf{P}}\right]^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}(t)\\ \boldsymbol{\lambda}(t)\end{bmatrix}.$$

Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix}\mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\\ \mathbf{Q} & -\mathbf{A}^{\mathrm{T}}\end{bmatrix}.$$

Пусть для определенности у матрицы $\mathbf{Z}$ все собственные значения будут различные. Тогда $\mathbf{Z}$ может быть представлена в виде

$$\mathbf{Z} = \mathbf{S}\begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda} & 0 \\ 0 & -\mathbf{\Lambda} \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1},$$

где $\mathbf{S}$ — матрица собственных векторов; $\mathbf{\Lambda}$ — матрица собственных значений. Правило построения матрицы $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdot & \xi_n & \xi_{n+1} & \cdot & \xi_{2n} \\ \downarrow & \downarrow & \cdot & \downarrow & \downarrow & \cdot & \downarrow \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdot & \lambda_n & -\lambda_1 & \cdot & -\lambda_n \\ & \mathrm{Re}(\lambda_i) > 0 & \cdot & & & \mathrm{Re}(\lambda_i) < 0 & \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \lambda(t) \end{bmatrix} = \mathbf{S}\begin{bmatrix} e^{\Lambda t} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda t} \end{bmatrix}\mathbf{S}^{-1}\begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\Lambda t} & 0 \\ 0 & e^{-\Lambda t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{X}(0) \\ \lambda(0) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{S}_{12}e^{\Lambda t}\left[\mathbf{V}_{11} - \mathbf{V}_{12}\bar{\mathbf{P}}\right]\mathbf{X}(0),$$

$$\lambda(t) = \mathbf{S}_{22}e^{\Lambda t}\left[\mathbf{V}_{21} - \mathbf{V}_{22}\bar{\mathbf{P}}\right]\mathbf{X}(0),$$

$$\lambda(t) = \mathbf{S}_{22}\mathbf{S}_{21}^{-1}\mathbf{X}(t) = -\bar{\mathbf{P}}\mathbf{X}(t),$$

$$\bar{\mathbf{P}} = -\mathbf{S}_{22}\mathbf{S}_{12}^{-1}.$$

Замечания:

1. В случае наличия комплексных корней и соответственно комплексных собственных векторов в матрицу $\mathbf{S}$ для $\lambda_i = \alpha_i + j\beta_i$, $\lambda_{i+1} = -\alpha_i + j\beta_i$ необходимо подставлять соответствующий столбец, определяющий вещественную часть собственных векторов $\tilde{\xi}_i/\lambda_i$ $\left(\text{или } \tilde{\xi}_{i+1}/\lambda_{i+1}\right)$, и столбец, определяющий мнимые части данного вектора:

$$\mathbf{S}_i = \mathrm{Re}\left(\tilde{\xi}_i/\lambda_i\right) \text{ или } \mathbf{S}_i = \mathrm{Re}\left(\tilde{\xi}_{i+1}/\lambda_{i+1}\right),$$

$$\mathbf{S}_{i+1} = \mathrm{Im}\left(\tilde{\xi}_i/\lambda_i\right) \text{ или } \mathbf{S}_{i+1} = \mathrm{Im}\left(\tilde{\xi}_{i+1}/\lambda_{i+1}\right).$$

2. Для кратных корней необходимо найти обобщенные собственные векторы (векторы корневых подпространств). Подробнее алгоритм нахождения этих векторов рассматривается в Приложении 3 к настоящему тому.

Т.5.3. ЗАДАЧА АКОР ДЛЯ ОТСЛЕЖИВАНИЯ ИЗВЕСТНОГО ЗАДАЮЩЕГО ВОЗДЕЙСТВИЯ

Т.5.3.1. Первый подход

Задана система

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t),\ \mathbf{X} \in R^n,\ \mathbf{U} \in R^m. \tag{Т.5.15}$$

Известно дифференциальное уравнение задающего движения:

$$\dot{\mathbf{X}}_0(t) = \mathbf{A}_0(t)\mathbf{X}_0(t),\ \mathbf{X}_0 \in R^n. \tag{Т.5.16}$$

Функционал качества имеет вид

$$I = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\left[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0(t)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\left[\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_0(t)\right] + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right]dt \to \min_{\mathbf{U}}, \tag{Т.5.17}$$

$\mathbf{Q}$, $\mathbf{R} \geq 0$ — положительно определенные симметричные матрицы. Система является полностью управляемой.

Вводится новое описание системы

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t)=\tilde{\mathbf{A}}(t)\tilde{\mathbf{X}}(t)+\tilde{\mathbf{B}}(t)\mathbf{U}(t), \qquad \text{(Т.5.18)}$$

где

$$\tilde{\mathbf{A}}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{A}(t) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_0(t)\end{bmatrix}_{2n\times 2n},\quad \tilde{\mathbf{B}}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{B}(t)\\ \mathbf{0}\end{bmatrix}_{2n\times m},\quad \tilde{\mathbf{X}}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{X}(t)\\ \mathbf{X}_0(t)\end{bmatrix}_{2n\times 1}.$$

Обозначим

$$\left[\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_0(t)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\left[\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_0(t)\right]=\tilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ -\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{Q}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{I}\end{bmatrix}\tilde{\mathbf{X}}(t),$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $n\times n$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{Q}}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{I}\\ -\mathbf{I}\end{bmatrix}\mathbf{Q}(t)\begin{bmatrix}\mathbf{I} & -\mathbf{I}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{Q}(t) & -\mathbf{Q}(t)\\ -\mathbf{Q}(t) & \mathbf{Q}(t)\end{bmatrix}.$$

Функционал примет вид

$$I=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\tilde{\mathbf{X}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\mathbf{Q}}(t)\tilde{\mathbf{X}}(t)+\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right]dt\to\min_{\mathbf{U}}. \qquad \text{(Т.5.19)}$$

Для задачи составим уравнение Риккати ($\tilde{\mathbf{P}}$ — положительно определенная симметричная матрица)

$$\dot{\tilde{\mathbf{P}}}(t)=-\tilde{\mathbf{P}}(t)\tilde{\mathbf{A}}(t)-\tilde{\mathbf{A}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\mathbf{P}}(t)+\tilde{\mathbf{P}}(t)\tilde{\mathbf{B}}(t)\tilde{\mathbf{R}}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(t)\tilde{\mathbf{P}}(t)-\tilde{\mathbf{Q}}(t),$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{11}(t) & \mathbf{P}_{12}(t)\\ \mathbf{P}_{12}(t) & \mathbf{P}_{22}(t)\end{bmatrix},$$

$$\tilde{\mathbf{P}}(t_1)=0.$$

Имеем уравнение Риккати с конечным условием. Необходимо найти не всю матрицу $\tilde{\mathbf{P}}(t)$, а только составляющие $\mathbf{P}_{11}(t)$ и $\mathbf{P}_{12}(t)$ для получения оптимального управления ($\mathbf{P}_{22}(t)$ не будет фигурировать в решении):

$$\mathbf{U}^*(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\tilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(t)\left[\mathbf{P}_{11}(t)-\mathbf{P}_{12}(t)\tilde{\mathbf{X}}(t)\right].$$

Для каждой компоненты можно получить отдельное дифференциальное уравнение:

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{P}}_{11}(t)=-\mathbf{P}_{11}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}_{11}(t)+\mathbf{P}_{11}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}_{11}(t)-\mathbf{Q}(t),\\ \dot{\mathbf{P}}_{12}(t)=-\mathbf{P}_{12}(t)\mathbf{A}_0(t)-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}_{12}(t)+\mathbf{P}_{11}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}_{12}(t)+\mathbf{Q}(t),\end{cases}$$

$$\begin{cases}\mathbf{P}_{11}(t_1)=0,\\ \mathbf{P}_{12}(t_1)=0.\end{cases}$$

Вводятся обозначения: $\mathbf{K}_1(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}_{11}(t)$ — коэффициенты регулятора обратной связи, $\mathbf{K}_2(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}_{12}(t)$ — коэффициенты регулятора в прямой цепи.

Выражение для оптимального управления можно записать так:

$$\mathbf{U}^*(t)=\mathbf{K}_1(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{K}_2(t)\mathbf{X}_0(t).$$

Т.5.3.2. Второй подход (задача построения линейного сервомеханизма)

Задана система

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t),\ \ \mathbf{X}\in R^n,\ \ \mathbf{U}\in R^m. \tag{Т.5.20}$$

Известен вид задающего воздействия $\mathbf{X}_0(t)$. Решение аналогично решению задачи стабилизации, при этом функция Беллмана имеет вид

$$S(\mathbf{X},t)=\frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{q}(t)+\mathbf{1}(t), \tag{Т.5.21}$$

где $\mathbf{q}(t)$ — вектор-функция, связанная с $\mathbf{X}_0(t)$; $\mathbf{1}(t)$ — слагаемое, гарантирующее положительную определенность функции.

Введем функцию

$$V(\mathbf{X},t)=-S(\mathbf{X},t).$$

Вектор сопряженных переменных

$$\lambda(t)=V'_{\mathbf{X}}(\mathbf{X},t)=-\left[\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{q}(t)\right]. \tag{Т.5.22}$$

Функционал качества имеет вид

$$I=\frac{1}{2}\left[\mathbf{X}(t_1)-\mathbf{X}_0(t_1)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\left[\mathbf{X}(t_1)-\mathbf{X}_0(t_1)\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\left[\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_0(t)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\left[\mathbf{X}(t)-\mathbf{X}_0(t)\right]+\mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right]dt\to\min_{\mathbf{U}}.$$

Получаем два дифференциальных уравнения (уравнение Риккати и уравнение относительно $\mathbf{q}(t)$):

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{P}}(t)=-\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t)-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)-\mathbf{Q}(t),\\ \dot{\mathbf{q}}(t)=\left[\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)-\mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\right]\mathbf{q}(t)+\mathbf{Q}(t)\mathbf{x}_0(t).\end{cases} \tag{Т.5.23}$$

Начальные условия:

$$\lambda(t_1)=-\left[\mathbf{P}(t_1)\mathbf{X}(t_1)+\mathbf{q}(t_1)\right]. \tag{Т.5.24}$$

Из условия трансверсальности получаем

$$\lambda(t_1)=-\frac{\partial\mathbf{\Phi}(\bullet)}{\partial\mathbf{X}(t_1)}=-\mathbf{P}_1\left[\mathbf{X}(t_1)-\mathbf{X}_0(t_1)\right]. \tag{Т.5.25}$$

Приравнивая (Т.5.24) и (Т.5.25), получаем

$$\begin{cases}\mathbf{P}(t_1)=\mathbf{P}_1,\\ \mathbf{q}(t_1)=-\mathbf{P}_1\mathbf{X}_0(t_1).\end{cases} \tag{Т.5.26}$$

Оптимальное управление имеет вид

$$\mathbf{U}^*(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\lambda(t)=-\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\left[\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t)+\mathbf{q}(t)\right]. \tag{Т.5.27}$$

Т.5.3.3. Задача АКОР-слежения со скользящим интервалом

Пусть интервал времени $[0,T]$ является объединением нескольких отрезков. Известно некоторое задающее воздействие $\mathbf{X}_0(t)$, заданное аналитическим выражением, причем информация о задающем сигнале на следующем отрезке времени поступает только в конце предыдущего. Таким образом, зная задающий сигнал только на одном отрезке времени, мы будем синтезировать управление на этом отрезке.

Данная задача похожа на задачу отслеживания известного задающего воздействия, заданного аналитическим выражением, но с некоторыми изменениями:

1. Поскольку в уравнение Риккати относительно матрицы $\mathbf{P}(t)$ входят только параметры системы и функционала качества, то решать его будем один раз на первом отрезке, так как на остальных отрезках решение будет иметь тот же вид, но будет смещено по времени:
$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_{[0,\,t_1]}(t),$$
$$\mathbf{P}_{[t_1,\,t_2]}(t) = \mathbf{P}(t - t_1),$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{P}_{[t_{n-1},\,T]}(t) = \mathbf{P}(t - t_{n-1}).$$
2. Начальными условиями для системы на каждом отрезке будет точка, в которую пришла система на предыдущем отрезке:
$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}^0,$$
$$\mathbf{X}_{[t_1,\,t_2]}(t_1) = \mathbf{X}_{[0,\,t_1]}(t_1),$$
$$\vdots$$
$$\mathbf{X}_{[t_{n-1},\,T]}(t_{n-1}) = \mathbf{X}_{[t_{n-2},\,t_{n-1}]}(t_{n-1}).$$
3. Вектор $\mathbf{q}(t)$ необходимо пересчитывать на каждом отрезке.
4. В остальном данная задача аналогична задаче построения линейного сервомеханизма (п. Т.5.3.2).

Т.5.4. Задача АКОР-стабилизации для компенсации известного возмущающего воздействия

Задано уравнение объекта управления

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) + \mathbf{w}(t), \quad \mathbf{X},\ \mathbf{w} \in R^n, \quad \mathbf{U} \in R^m, \tag{Т.5.28}$$

где $\mathbf{w}(t)$ — известное возмущающее воздействие. Вид функционала качества:

$$I = \frac{1}{2}\mathbf{X}(t_1)^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_1\mathbf{X}(t_1) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\mathbf{X}(t)^{\mathrm{T}}\mathbf{Q}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{R}(t)\mathbf{U}(t)\right]dt \to \min_{\mathbf{U}}.$$

Функция Беллмана

$$S(\mathbf{X},t) = \frac{1}{2}\mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{X}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{q}(t) + \mathbf{I}(t), \tag{Т.5.29}$$

$$V(\mathbf{X},t) = -S(\mathbf{X},t),$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) = V'_{\mathbf{X}}(\mathbf{X},t) = -\left[\mathbf{P}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{q}(t)\right]. \tag{Т.5.30}$$

Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям при решении задачи стабилизации, можно получить два дифференциальных уравнения — уравнение Риккати и уравнение относительно неизвестной вектор-функции $\mathbf{q}(t)$:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{P}}(t) = -\mathbf{P}(t)\mathbf{A}(t) - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t) - \mathbf{Q}(t), \\ \dot{\mathbf{q}}(t) = \left[\mathbf{P}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t) - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}(t)\right]\mathbf{q}(t) + \mathbf{P}(t)\mathbf{w}(t). \end{cases} \tag{Т.5.31}$$

Конечные условия для $\mathbf{P}(t)$ и $\mathbf{q}(t)$ имеют вид

$$\begin{cases} \mathbf{P}(t_1) = \mathbf{P}_1, \\ \mathbf{q}(t_1) = \mathbf{0}. \end{cases} \tag{Т.5.32}$$

Положив

$$\mathbf{K}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{P}(t),$$

можем записать дифференциальное уравнение относительно $\mathbf{q}(t)$ следующим образом:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = -\left[\mathbf{A}(t) - \mathbf{B}(t)\mathbf{K}(t)\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{q}(t) - \mathbf{P}(t)\mathbf{w}(t).$$

Оптимальное управление определяется законом

$$\mathbf{U}^{*}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\boldsymbol{\lambda}(t) = -\mathbf{R}^{-1}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\left[\mathbf{P}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{q}(t)\right]. \qquad \text{(Т.5.33)}$$

Т.5.5. Построение наблюдателя пониженного порядка

Пусть задана линейная стационарная система вида

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t), \qquad \text{(Т.5.34)}$$

$$\mathbf{Y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \qquad \text{(Т.5.35)}$$

$$\mathbf{X}(t) \in R^{n},\ \mathbf{U}(t) \in R^{m},\ \mathbf{Y}(t) \in R^{l},\ \operatorname{rank}\mathbf{C} = l,\ l < n.$$

Построим для данной системы наблюдатель пониженного порядка. Введем дополнительный подвектор

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{C}'\mathbf{X}(t),\ \dim\mathbf{C}' = (n-l)\times n. \qquad \text{(Т.5.36)}$$

Матрицу $\mathbf{C}'$ выбираем таким образом, чтобы составная матрица $\begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{C}'\end{bmatrix}_{n\times n}$ была невырожденной, тогда

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix}\mathbf{C}\\ \mathbf{C}'\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}(t)\\ \mathbf{p}(t)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{L}_1 & \mathbf{L}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}(t)\\ \mathbf{p}(t)\end{bmatrix} = \mathbf{L}_1\mathbf{Y}(t) + \mathbf{L}_2\mathbf{p}(t), \qquad \text{(Т.5.37)}$$

$$\dim\mathbf{L}_1 = \dim\mathbf{C}^{\mathrm{T}} = n\times l,\ \dim\mathbf{L}_2 = \dim\left[\mathbf{C}'\right]^{\mathrm{T}} = n\times(n-l).$$

Для нахождения оценки вектора состояния необходимо построить наблюдатель пониженного порядка для восстановления подвектора $\mathbf{p}(t)$:

$$\hat{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{L}_1\mathbf{Y}(t) + \mathbf{L}_2\hat{\mathbf{p}}(t), \qquad \text{(Т.5.38)}$$

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{C}'\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{C}'\left(\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\right) = \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{Y}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{p}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{B}\mathbf{U}(t),$$

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) = \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{Y}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_2\hat{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{B}\mathbf{U}(t) + \mathbf{K}_{\text{н}}\left[\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}\hat{\mathbf{X}}(t)\right].$$

Вектор выхода $\mathbf{Y}(t)$ не несет информации о векторе $\mathbf{p}(t)$:

$$\dot{\mathbf{Y}}(t) = \mathbf{C}\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{C}\left[\mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{U}(t)\right] = \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{Y}(t) + \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{p}(t) + \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}(t).$$

Получаем следующее уравнение для наблюдателя:

$$\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t) = \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{Y}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_2\hat{\mathbf{p}}(t) + \mathbf{C}'\mathbf{B}\mathbf{U}(t) + \\ + \mathbf{K}_{\text{н}}\left[\dot{\mathbf{Y}}(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_1\mathbf{Y}(t) - \mathbf{C}\mathbf{A}\mathbf{L}_2\hat{\mathbf{p}}(t) - \mathbf{C}\mathbf{B}\mathbf{U}(t)\right],$$

$$\hat{\mathbf{p}}(0) = 0,$$

$$\hat{\mathbf{X}}(0) = \mathbf{L}_1\mathbf{Y}(0) + \mathbf{L}_2\hat{\mathbf{p}}(0) = \mathbf{L}_1\mathbf{Y}(0).$$

Введем ошибку восстановления

$$\mathbf{e}(t) = \mathbf{p}(t) - \hat{\mathbf{p}}(t),$$

$$\dot{\mathbf{e}}(t) = \left[\mathbf{C}' - \mathbf{K}_{\text{н}}\mathbf{C}\right]\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{e}(t). \qquad \text{(Т.5.39)}$$

Коэффициенты наблюдателя пониженного порядка $\mathbf{K}_н$ выбираются из выражения (Т.5.39) так, чтобы корни наблюдателя располагались в 3–5 раз дальше в левой полуплоскости, чем собственные значения матрицы $\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{L}_2$.

Чтобы освободиться от $\dot{\mathbf{Y}}(t)$ в уравнении наблюдателя, введем новую переменную

$$\mathbf{q}(t)=\hat{\mathbf{p}}(t)-\mathbf{K}_н\dot{\mathbf{Y}}(t),\quad \hat{\mathbf{p}}(t)=\mathbf{q}(t)+\mathbf{K}_н\mathbf{Y}(t),\quad \dot{\mathbf{q}}(t)=\dot{\hat{\mathbf{p}}}(t)-\mathbf{K}_н\dot{\mathbf{Y}}(t).$$

Уравнение наблюдателя пониженного порядка без дифференцирования выходного сигнала может быть записано следующим образом:

$$\begin{gathered}\dot{\mathbf{q}}(t)=(\mathbf{C}'-\mathbf{K}_н\mathbf{C})\mathbf{A}\mathbf{L}_2\mathbf{q}(t)+(\mathbf{C}'-\mathbf{K}_н\mathbf{C})\mathbf{A}(\mathbf{L}_2\mathbf{K}_н+\mathbf{L}_1)\mathbf{Y}(t)+\\+(\mathbf{C}'-\mathbf{K}_н\mathbf{C})\mathbf{B}\mathbf{U}(t),\end{gathered}\qquad(\text{Т.5.40})$$

$$\hat{\mathbf{p}}(0)=0,$$

$$\mathbf{q}(0)=-\mathbf{K}_н\mathbf{Y}(0).$$

Вектор оценки переменных состояния определяется выражением

$$\hat{\mathbf{X}}(t)=[\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2\mathbf{K}_н]\mathbf{Y}(t)+\mathbf{L}_2\mathbf{q}(t),$$

$$\hat{\mathbf{X}}(0)=[\mathbf{L}_1+\mathbf{L}_2\mathbf{K}_н]\mathbf{Y}(0).$$

ЗАДАНИЕ 5.1

Изложите основы теории синтеза оптимальных линейных систем по интегральному квадратичному критерию, рассматривая при этом линейные нестационарные и стационарные объекты (нестационарные и стационарные задачи); отразите роль матричного уравнения Риккати и изложите подходы к его решению.

Обратите внимание на следующие факты:

- в рассматриваемом случае реализуется принцип обратной связи, поскольку вектор управления непосредственно зависит от вектора состояния;
- закон управления не является динамическим, так как в определяющую его зависимость не входят производные и интегралы от соответствующих сигналов;
- поскольку закон управления содержит матрицу, зависящую от времени, то замкнутая система относится к классу систем с переменными параметрами. Рассмотрите представляющие интерес частные случаи.

Рассмотрите задачу синтеза оптимальных линейных систем по интегральному квадратичному критерию в классе систем с распределенными параметрами.

Покажите, что и в случае систем с распределенными параметрами решением линейно-квадратичной задачи является оптимальный закон обратной связи.

Изложите основы теории оптимального управления в классе систем с запаздыванием, познакомьтесь с принципом максимума.

Сформулируйте содержание линейно-квадратичной задачи управления в классе систем с запаздыванием (для класса объектов).

Убедитесь в том, что в зависимость, определяющую оптимальный закон управления, реализующий принцип обратной связи, входят слагаемые, вызванные наличием запаздываний по управлениям и состояниям. Отбрасывание членов, обусловленных запаздываниями, приводит к стандартной форме линейного квадратично-оптимального закона.

ЗАДАНИЕ 5.2

Для объекта управления, заданного передаточной функцией в табл. Т.5.1, получите математическую модель в пространстве состояний. Проверьте управляемость и наблюдаемость системы. Решите следующие задачи.

Таблица Т.5.1

Математические модели объектов управления

№	Передаточная функция объекта управления	№	Передаточная функция объекта управления
1	$\frac{10}{s(0,25s+1)(0,01s+1)(0,002s+1)}$	18	$\frac{31}{10s\left(3s^2+50s+500\right)}$
2	$\frac{400}{s(0,0143s+1)(0,005s+1)(0,0125s+1)}$	19	$\frac{272}{s(s+10)(s+20)}$
3	$\frac{200}{s(0,1s+1)(0,02s+1)(0,01s+1)(0,005s+1)}$	20	$\frac{35\cdot10^5}{159(30s+1)(11s+50)}$
4	$\frac{120}{s^2\left(5\cdot10^{-4}s+1\right)\left(1\cdot10^{-4}s+1\right)^2}$	21	$\frac{1600}{(s+10)(s+20)}$
5	$\frac{300}{s(0,017s+1)(0,005s+1)(0,001s+1)}$	22	$\frac{10^7}{s(9s+4000)(6s+5)}$
6	$\frac{2}{s(0,0025s+1)(0,001s+1)(0,25s+1)^2}$	23	$\frac{625,25\cdot10^4}{(2s+5)\left(4s^3+800s^2+105025s+625\cdot10^3\right)}$
7	$\frac{125}{s(0,66s+1)(0,005s+1)}$	24	$\frac{38115\cdot10^7(3s+100)}{6757s\left(3s^2+10^3s+5\cdot10^4\right)}\times$ $\times\frac{1}{\left(45s^2+9\cdot10^3s+3474529\right)}$
8	$\frac{100}{(5s+1)(0,0125s+1)(0,005s+1)}$	25	$\frac{7428275}{s\left(5159s^2+789750s+6,25\cdot10^5\right)}$
9	$\frac{300}{s(0,08s+1)(0,01s+1)(0,002s+1)}$	26	$\frac{5\cdot10^6(s+5)}{131s\left(33s^3+23565s^2+10,258\cdot10^5s+45\cdot10^4\right)}$
10	$\frac{1}{s(0,2s+1)\left(0,0016s^2+0,006s+1\right)}\times$ $\times\frac{1}{(0,02s+1)(0,005s+1)}$	27	$\frac{2}{(10s+1)(s+2)(20s+1)}$
11	$\frac{1}{s^2(0,04s+1)(0,01s+1)(0,0022s+1)}$	28	$\frac{4\cdot10^5}{s^2(s+100)(s+200)}$
12	$\frac{1140(s+2)}{s\left(6s^3+86s^2+348s+799\right)}$	29	$\frac{1075}{s(0,05s+1)}$
13	$\frac{10^6(s+20)}{1749\left(3s^4+97s^3+840s^2+4000s+8000\right)}$	30	$\frac{9s+5}{s\left(0,1153s^4+1,78s^3+3,92s^2+14,42s+8,583\right)}$
14	$\frac{144s^2(3s+50)}{\left(54s^2+900s+125\right)(s+100)}$	31	$\frac{13s+10}{s\left(1,125s^4+12,76s^3+389,2s^2+656,06s+267\right)}$
15	$\frac{965(10s+333)}{24s(s+100)(s+25)}$	32	$\frac{(33s+100)(s+1)}{1,6s^6+14s^5+112s^4+702s^3+1608s^2+1038s+100}$
16	$\frac{48\cdot10^4}{s(s+50)(13s+10)}$	33	$\frac{13671(19s+10)}{8(9s+5)\left(1805s^2+19608s+21320\right)}$
17	$\frac{255,75\cdot10^4s}{3069s^2+25575s+625\cdot10^4}$	34	$\frac{2\cdot10^5}{s(s+100)(s+200)}$

5.2-1. Решите задачу стабилизации объекта управления на бесконечном интервале времени (п. Т.5.1). Решение алгебраического уравнения Риккати осуществите методом диагонализации (п. Т.5.2, Приложение 3). Начальное состояние объекта управления задается преподавателем.

5.2-2. Решите задачу стабилизации объекта управления на конечном интервале времени (п. Т.5.1). Начальное состояние объекта управления и конечный интервал времени задаются преподавателем.

5.2-3. Решите задачу отслеживания известного задающего воздействия с использованием первого подхода (п. Т.5.3.1). Задающее воздействие, начальное состояние объекта управления и интервал времени задаются преподавателем.

5.2-4. Решите задачу отслеживания известного задающего воздействия с использованием второго подхода (п. Т.5.3.2). Задающее воздействие, начальное состояние объекта управления и интервал времени задаются преподавателем.

5.2-5. Решите задачу слежения со скользящими интервалами (п. Т.5.3.3). Задающие воздействия, начальное состояние объекта управления и интервалы времени задаются преподавателем.

5.2-6. Решите задачу стабилизации при наличии известных возмущений на основе второго подхода (п. Т.5.4). Возмущающее воздействие, начальное состояние объекта и интервал времени задаются преподавателем.

5.2-7. Синтезируйте наблюдатель пониженного порядка (п. Т.5.5). Синтезируйте оптимальную систему стабилизации по выходной переменной с учетом наблюдателя на бесконечном интервале времени (пп. Т.5.1, Т.5.2). Сравните при одних и тех же начальных условиях систему стабилизации без и с наблюдателем на бесконечном интервале времени. Порядок наблюдающего устройства и начальное состояние объекта управления задаются преподавателем.

Указания:

При выполнении вышеперечисленных заданий *необходимо*:

1) промоделировать движение замкнутой системы, используя численные методы решения дифференциальных уравнений;
2) построить графики фазовых координат и управляющего воздействия;
3) построить графики решений дифференциальных уравнений Риккати и коэффициентов усиления регуляторов;
4) построить графики задающих и возмущающих воздействий.

ЗАДАНИЕ 5.3

Задана система управления $\dot{x} = x + u$, $x(0) = 2$, и функционал

$$I = \frac{1}{2}\int_0^{t_1}\left(16(x - x_0)^2 + u^2\right)dt.$$

Эталонный сигнал на 2-х интервалах представлен на рис. Т.5.1.

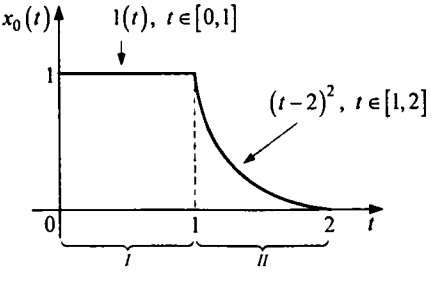


Рис. Т.5.1. Эталонный сигнал

Считая, что на каждом подынтервале решается задача с $t_1 \to \infty$, определите оптимальный регулятор для данного функционала.

ЗАДАНИЕ 5.4

Найдите собственные и присоединенные векторы, а также канонические жордановы представления для матриц, приведенных в табл. Т.5.2 (см. Приложение 3).

Таблица Т.5.2

Варианты заданий

№ варианта	Матрица **A**	№ варианта	Матрица **A**
1	$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0,5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$	5	$\begin{bmatrix} 0,4 & -1,6 & -4 & 2 \\ -4,4 & -2,4 & 4 & 18 \\ 4 & -1 & -6 & -5 \\ -0,4 & -0,4 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
2	$\begin{bmatrix} -4,25 & -1 & -0,25 \\ 3,25 & -1 & 1,25 \\ -1,75 & -1 & -3,75 \end{bmatrix}$	6	$\begin{bmatrix} -6 & -3 & -2 \\ 7 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -3 \end{bmatrix}$
3	$\begin{bmatrix} -3,2 & -0,2 & -0,6 \\ 1,4 & -4,6 & -3,8 \\ 0,6 & 0,6 & -1,2 \end{bmatrix}$	7	$\begin{bmatrix} -3,5 & -2 & -0,5 \\ 6,5 & 3 & 2,5 \\ -3,5 & -2 & -2,5 \end{bmatrix}$
4	$\begin{bmatrix} -3,2 & -0,2 & -0,6 \\ -1,6 & -4,6 & -4,8 \\ 0,6 & 0,6 & -1,2 \end{bmatrix}$	8	$\begin{bmatrix} 1,4 & -1,85 & -4,5 & 0,75 \\ -3,4 & -2,65 & 4,5 & 16,75 \\ 4 & -1 & -6 & -5 \\ 0,2 & -0,55 & -0,5 & -0,75 \end{bmatrix}$

ТЕМА 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

ЗАДАНИЕ 6.1

Познакомьтесь с методами решения задач линейного программирования, в частности, с симплекс-методом.

Убедитесь в том, что симплекс-метод позволяет за конечное число шагов алгоритма либо найти решение задачи, либо показать, что решения не существует (число итераций симплекс-метода имеет порядок $n^2 - 2n$, где n — количество переменных).

Изучите численные методы решения задач нелинейного программирования (задачи, сводящиеся к линейному программированию, методы возможных направлений, градиентные методы). Покажите, что решение некоторых задач нелинейного программирования можно свести к решению задач линейного программирования (задачи дробно-линейного и квадратичного программирования).

Важность задач линейного программирования обусловлена не только сведением к ним задач нелинейного программирования, но и тем обстоятельством, что для ряда других задач нелинейного программирования приходится решать вспомогательные задачи линейного программирования.

ЗАДАНИЕ 6.2

Решите задачу линейного программирования:

$$z = x_1 + 3x_2 \to \max$$

при ограничениях

$$2x_1 + 5x_2 \le 16,$$
$$6x_1 + 5x_2 \le 30,$$
$$x_1,\ x_2 \ge 0:$$

а) графически,

б) симплекс-методом.

ЗАДАНИЕ 6.3

Для задачи линейного программирования:

$$z = -x_1 + 2x_2 \to \max$$
$$-x_1 + 3x_2 \ge 0,$$
$$x_2 \ge 5,$$
$$5x_1 + 3x_2 \ge 15,$$
$$x_1, x_2 \ge 0,$$

определите базисные и небазисные переменные для каждой вершины, постройте симплекс-таблицу СТ(0) для ближайшей к началу координат вершины.

ЗАДАНИЕ 6.4

Изучите постановку и классификацию задач математического программирования, задач на условный экстремум; сформулируйте условия оптимальности в задаче выпуклого программирования; приведите доказательство теоремы Куна–Таккера.

Сформулируйте содержание направлений построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ методами математического программирования.

Убедитесь, что в этом случае бесконечномерную задачу заменяют конечномерной, что связано с аппроксимацией функциональных пространств конечномерными. Эффективность метода существенно зависит от того, как используется конкретная функциональная природа того или иного объекта.

Применение метода математического программирования предполагает замену исходной задачи сеточной или проекционной аппроксимацией. В результате имеет место конечномерная задача оптимизации, для решения которой можно применить аппарат нелинейного программирования.

Укажите трудности, которые необходимо преодолеть при таком подходе к решению задач оптимального управления.

ЗАДАНИЕ 6.5

Для линейного стационарного объекта управления, заданного передаточной функцией в табл. Т.5.1, получите математическую модель в пространстве состояний. Проверьте управляемость системы. Решите следующие задачи:

6.5-1. Решите задачу оптимального перевода объекта управления из начального состояния $\mathbf{X}^0$ в конечное $\mathbf{X}^T$ по критерию минимальной энергии

$$I = \int_0^T u^2(t)\,dt \to \min_u$$

без ограничений на управление и фазовые координаты. Решите данную задачу при ограничениях на управление и фазовые координаты.

6.5-2. Решите задачу оптимального перевода объекта управления из начального состояния $\mathbf{X}^0$ в конечное $\mathbf{X}^T$ по критерию максимального быстродействия

$$I = \int_0^T dt = T \to \min_{u \in U \subset R^1}$$

при симметричном ограничении на управление $|u(t)| \le u^{\text{доп}} \quad \forall t \in [0, T]$. Решите ту же задачу при ограничениях на фазовые координаты.

6.5-3. Решите задачу оптимального перевода объекта управления из начального состояния $\mathbf{X}^0$ в конечное $\mathbf{X}^T$ по критерию минимального расхода топлива

$$I = \int_0^T |u(t)|\,dt \to \min_{u \in U \subset R^1}$$

при симметричном ограничении на управление $|u(t)| \le u^{\text{доп}} \quad \forall t \in [0, T]$. Решите ту же задачу при ограничениях на фазовые координаты.

6.5-4. По результатам предыдущих пунктов для каждого рассматриваемого случая осуществите синтез оптимальной линейной системы, работающей по принципу обратной связи, используя алгоритм стабилизации движения линейного динамического объекта вблизи заданной оптимальной программной траектории при ограниченных отклонениях начальных условий и неточной реализации оптимального программного управления (п. 5.7.3). Решите задачу на конечном и полубесконечном временных интервалах.

Указания:

1. Начальное и конечное состояния объекта управления, ограничения на управление и фазовые координаты, а также время управления T задаются преподавателем;
2. Все задания выполните двумя способами:
   а) с использованием описания объектов интегральными уравнениями и сеточно-матричными операторами (п. 5.4);
   б) с использованием проекционных методов (п. 5.5). В качестве базисов следует рассмотреть ортонормированные полиномы Лежандра, тригонометрический базис косинусов, ортогональную систему блочно-импульсных функций, систему функций Уолша;
3. При решении задач расчета оптимальных программных управлений и оптимальных программ *необходимо* выполнить построение графиков управляющих воздействий и фазовых координат;
4. *Необходимо* промоделировать движение построенных оптимальных систем, работающих по принципу обратной связи, используя стандартные методы решения дифференциальных уравнений;
5. При решении задач синтеза оптимальных систем, работающих по принципу обратной связи, *необходимо* выполнить построение графиков решений дифференциальных уравнений Риккати; коэффициентов усиления регуляторов; программных и реальных, а также стабилизирующих управляющих воздействий; программных и реальных траекторий движения системы, отклонений реального движения системы от программного.

ЗАДАНИЕ 6.6

Для линейного нестационарного объекта управления, заданного дифференциальным уравнением в табл. Т.6.1, получите математическую модель в пространстве состояний. Выполните все пункты задания 6.5 в соответствии с указаниями.

Таблица Т.6.1

Математические модели объектов управления

№	Дифференциальное уравнение объекта управления	№	Дифференциальное уравнение объекта управления
1	2	1	2
1	$\ddot{x}(t)+0,2\dot{x}(t)+0,25e^{0,4t}x(t)=u(t)$	9	$\ddot{x}(t)+(0,5+0,1t)\dot{x}(t)+(0,1+0,05t)x(t)=u(t)$
2	$\ddot{x}(t)+\left(t^2+2\right)x(t)=u(t)$	10	$\ddot{x}(t)+t\dot{x}(t)+\left(0,25t^2+0,5\right)x(t)=u(t)$
3	$\ddot{x}(t)+(0,42+0,1t)\dot{x}(t)+$ $+2\cos 2,5t\cdot x(t)=u(t)$	11	$\ddot{x}(t)+\frac{2}{t+10}\dot{x}(t)+0,16x(t)=0,4u(t)$
4	$(0,2t+1,25)\dot{x}(t)+(0,4t+2,3)x(t)=$ $=\left(6,25+2t+0,16t^2\right)u(t)$	12	$\left(0,375+0,25e^{-t}\right)\dot{x}(t)+$ $+\left(1,5+1,25e^{-t}\right)x(t)=u(t)$
5	$\left(0,0144t^2+0,072t+0,09\right)\ddot{x}(t)+$ $+\left(0,0864t^2+0,4032t+0,468\right)\dot{x}(t)+$ $+\left(0,16t^2+0,7136t+0,8128\right)x(t)=u(t)$	13	$\left(2,25+1,8t+0,36t^2\right)\ddot{x}(t)+\left(0,3+0,8t+\right.$ $\left.+0,24t^2\right)\dot{x}(t)+\left(25,12+19,76t+4t^2\right)x(t)=$ $=\left(125+150t+60t^2+8t^3\right)u(t)$
6	$(1+0,5t)\dot{x}(t)+x(t)=u(t)$	14	$4\ddot{x}(t)+(1+t)\dot{x}(t)+x(t)=u(t)$
7	$(0,1t+1,5)\dot{x}(t)+(0,1t+1,4)x(t)=u(t)$	15	$\ddot{x}(t)+(0,9+0,1t)\dot{x}(t)+0,16=u(t)$
8	$0,1\dddot{x}(t)+4,2\ddot{x}(t)+(72-0,1t)\dot{x}(t)+$ $+400x(t)=400u(t)$	16	$0,0268\left(2-e^{-1,5t}\right)\dddot{x}(t)+0,337\left(3-2e^{-1,5t}\right)\ddot{x}(t)+$ $+2,65\dot{x}(t)+17,8x(t)=17,8u(t)$

Продолжение табл. Т.6.1

1	2
17	$0,0268\dddot{x}(t)+(0,337+0.52t)\ddot{x}(t)+2,65\dot{x}(t)+17,8x(t)=0,155e^{-10t}\ddot{u}(t)+0,966e^{-5t}\dot{u}(t)+17,8u(t)$
18	$\sum_{k=0}^{5} a_k(t)x^{(k)}(t)=y(t),$ $\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5596 & 1,8918 & 2,5825 & 1,7855 & 0,6277 & 0,0909 \\ 0,7113 & 2,3843 & 3,2220 & 2,1975 & 0,7588 & 0,1065 \\ 0,3717 & 1,2333 & 1,6449 & 1,1038 & 0,3728 & 0,0507 \\ 0,1002 & 0,3278 & 0,4300 & 0,2827 & 0,0930 & 0,0122 \\ 0,0140 & 0,0449 & 0,0576 & 0,0369 & 0,0118 & 0,0015 \\ 0,0008 & 0,0025 & 0,0031 & 0,0019 & 0,0006 & 0,00007 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ t^3 \\ t^4 \\ t^5 \end{bmatrix}$
19	$\sum_{k=0}^{5} a_k(t)x^{(k)}(t)=y(t),$ $\begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ a_2(t) \\ a_3(t) \\ a_4(t) \\ a_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,0000 & 3,5489 & 5,1523 & 3,8608 & 1,5192 & 0,2620 \\ 1,1716 & 4,1050 & 5,8550 & 4,2732 & 1,6091 & 0,2511 \\ 0,5579 & 1,9211 & 2,6761 & 1,8881 & 0,6743 & 0,0973 \\ 0,1349 & 0,4537 & 0,6125 & 0,4146 & 0,1405 & 0,0190 \\ 0,0165 & 0,0539 & 0,0699 & 0,0452 & 0,0146 & 0,0018 \\ 0,0008 & 0,0025 & 0,0031 & 0,0019 & 0,0006 & 0,0000 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-t} \\ e^{-2t} \\ e^{-3t} \\ e^{-4t} \\ e^{-5t} \end{bmatrix}$

ТЕМА 7. ОПТИМАЛЬНАЯ L-ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Кратко рассмотрим основные теоретические положения.

Т.7.1. ПОСТРОЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ОПТИМАЛЬНОЙ L-ПРОБЛЕМЫ МОМЕНТОВ

L-проблема моментов — метод решения задач оптимального управления с использованием функционального анализа. Данный подход позволяет решать задачи оптимального управления для линейных систем. Полученное управление является программным, т.е. реализует функцию времени.

Рассмотрим классическую L-проблему моментов.

Пусть $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, — совокупность непрерывно дифференцируемых моментных функций. Пусть для некоторой функции $u(t)$ известна совокупность моментных уравнений:

$$\int_0^T h_i(t)u(t)dt = a_i,\ \ i=\overline{1,n}, \tag{Т.7.1}$$

где $h_i(t)\in L^p[0,T]$, $u(t)\in L^q[0,T]$, т.е. принадлежат лебеговым пространствам $L^p[0,T]$ и $L^q[0,T]$ кусочно-непрерывных функций, интегрируемых в степени p и q соответственно.

Потребуем выполнения неравенства Гельдера, тогда

$$1\le p,\ \ q\le\infty,\ \ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Предполагаем, что $\mathbf{h}(t)$ — n-мерная вектор-функция $\mathbf{h}(t)=\left[h_1(t)\ \ \ldots\ \ h_n(t)\right]^{\mathrm{T}}$, а $u(t)$ — скалярная функция. Совокупность моментных уравнений (Т.7.1) определяет некоторый линейный функционал $\mathbf{f}(\mathbf{h})$:

$$\mathbf{f}(\mathbf{h})=\int_0^T \mathbf{h}(t)u(t)dt. \tag{Т.7.2}$$

Числа a_i, $i=\overline{1,n}$, называют *моментами* функционала $\mathbf{f}$ относительно моментных функций $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$. В классической проблеме моментов по заданным a_i, $i=\overline{1,n}$, и $h_i(t)$, $i=\overline{1,n}$, необходимо определить вид порождающей функции $u(t)$ (вида искомого функционала $\mathbf{f}$). Для перехода к L-проблеме моментов дадим некоторые определения.

Поскольку классическая задача решения проблемы моментов позволяет найти $u(t)$ неоднозначно, вводят дополнительные условия, которые сужают класс возможных решений.

L-проблема моментов является обобщением классической проблемы моментов и отличается от нее дополнительными условиями, при которых норма функционала $\|\mathbf{f}\|$

не должна превосходить заданного положительного числа L, т.е. L-проблема моментов формулируется следующим образом: по заданным моментным уравнениям (Т.7.2), где известными являются моментные функции h_i, а

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0 \text{ и } L > 0, \quad L \in R^1,$$

необходимо найти такое $u(t)$, что

$$\|u(t)\| \le L. \tag{Т.7.3}$$

Для оптимального управления имеет смысл поставить задачу об определении минимального из чисел L, для которого выполняются моментные равенства (Т.7.2) и условие (Т.7.3):

$$\gamma = \min \|u\| \le L. \tag{Т.7.4}$$

Рассмотрим неравенства

$$\|\mathbf{f}\| \ge \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}, \tag{Т.7.5}$$

$$\|u\| \ge \frac{\|\mathbf{f}(\mathbf{h})\|}{\|\mathbf{h}\|}. \tag{Т.7.6}$$

Связь между нормами $\|\mathbf{f}\|$ и $\|u\|$: точная верхняя грань для $\|u\|$, определяющая минимальную норму $\|u\|$, совпадает с нормой $\|\mathbf{f}\|$:

$$\gamma = \|u\|_{L_q[0,T]} = \|\mathbf{f}\|. \tag{Т.7.7}$$

Условие (Т.7.7) является соотношением, позволяющим решать задачи оптимального управления с функционалами типа норм $\|u\|_{L^q[0,T]}$ $(1 \le q \le \infty)$. Так как функции $h_i(t)$, $i = \overline{1,n}$, заданы, то нахождение экстремального элемента $\mathbf{h}^*$ возможно в виде линейной комбинации этих функций, т.е.

$$\mathbf{h}^*(t) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^* h_i(t). \tag{Т.7.8}$$

Поиск параметров $\xi^* = \left[\xi_1^* \quad \xi_2^* \quad \dots \quad \xi_n^*\right]^{\mathrm{T}}$ и составляет задачу оптимизации. В этом случае используются два подхода к решению этой задачи.

Первый подход: найти точную верхнюю грань (максимум)

$$\gamma = \|f\| = \sup_{\xi_i, i=\overline{1,n}} \left| f\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i h_i(t) \right) \right| = \sup_{\xi_i, i=\overline{1,n}} \left| \sum_{i=1}^{n} \xi_i a_i \right|$$

при условии, что $\|\mathbf{h}^*\| = 1$, т.е. $\sum_{i=1}^{n} \xi_i^* h_i = 1$. Подставляя найденные значения $\mathbf{h}^*$ и u^*, получим:

$$\mathbf{f}(\mathbf{h}^*) = \int_0^T \mathbf{h}^*(t) u^*(t) dt = 1.$$

Оптимальное управление (порождающая функция) $u^*(t)$ в L-проблеме моментов запишется так:

$$u^*(t)=\gamma^p\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* h_i(t)\right|^{p-1}\operatorname{sign}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* h_i(t)\right).$$

Второй подход: найти точную нижнюю грань (минимум)

$$d=\left\|\mathbf{h}^*\right\|=\inf_{\xi_i,\,i=\overline{1,n}}\left|\sum_{i=1}^{n}\xi_i h_i\right|=\frac{1}{\|\mathbf{f}\|}=\frac{1}{\gamma},$$

при условии, что $\mathbf{f}\left(\mathbf{h}^*\right)=1$, т.е.

$$\mathbf{f}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* h_i(t)\right)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i^* a_i=1.$$

Т.7.1.1. Оптимальная L-проблема моментов в пространстве «вход–выход»

Пусть объект управления представлен в пространстве «вход–выход» линейным дифференциальным уравнением n-го порядка

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(t)x^{(i)}(t)=\sum_{j=0}^{m}b_j(t)u^{(j)}(t). \tag{Т.7.9}$$

Определены начальные и конечные условия

$$\mathbf{X}^0=\left[x(t_0)\quad x'(t_0)\quad\ldots\quad x^{(n-1)}(t_0)\right]^{\mathrm{T}}, \tag{Т.7.10}$$

$$\mathbf{X}^T=\left[x(T)\quad x'(T)\quad\ldots\quad x^{(n-1)}(T)\right]^{\mathrm{T}}. \tag{Т.7.11}$$

Связь между входным и выходным сигналами в линейной системе определяется через интеграл Коши и фундаментальную систему решений (ФСР) по формуле

$$x(t)=\int_0^t k(t,\tau)u(\tau)d\tau+\sum_{i=1}^{n}c_i\tilde{x}_i(t), \tag{Т.7.12}$$

где $k(t,\tau)$ — ИПФ системы (Т.7.9), $\left\{\tilde{x}_i(t),\ i=\overline{1,n}\right\}$ — ФСР системы (Т.7.9), а коэффициенты $c_i=c_i\left(\mathbf{X}^0\right)$, $i=\overline{1,n}$. ФСР удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\sum_{i=0}^{n}a_i(t)\tilde{x}^{(i)}(t)=0. \tag{Т.7.13}$$

Если система (Т.7.9) стационарна, т.е. $a_i(t)=a_i$, $i=\overline{0,n}$, то ФСР определяется из характеристического уравнения

$$\sum_{i=0}^{n}a_i s^i=0. \tag{Т.7.14}$$

Свободное движение системы описывается уравнением

$$x_{\text{св}}(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i\tilde{x}_i(t), \tag{Т.7.15}$$

где c_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$ определены из матричного уравнения

$$\mathbf{C}=\mathbf{W}^{-1}\mathbf{X}^0. \tag{Т.7.16}$$

В (Т.7.16) $\mathbf{C}=\left[c_1\quad\ldots\quad c_n\right]^{\mathrm{T}}$, а $\mathbf{W}$ — матрица Вронского

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} \tilde{x}_1(0) & \dots & \tilde{x}_n(0) \\ \tilde{x}_1'(0) & \dots & \tilde{x}_n'(0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{x}_1^{(n-1)}(0) & \dots & \tilde{x}_n^{(n-1)}(0) \end{bmatrix}. \tag{T.7.17}$$

Вынужденное решение определяется через ядро Коши $k(t,\tau)$.

Перейдем к представлению L-проблемы моментов в пространстве «вход–выход».

Продифференцировав (T.7.12) $(n-1)$ раз по t и взяв левую и правую часть для $t=T$, получим систему

$$\begin{cases} x(T)=\int\limits_0^T k(t,\tau)u(\tau)d\tau+\sum\limits_{i=1}^n \tilde{c}_i\tilde{x}_i(T), \\ x'(T)=\int\limits_0^T \left.\dfrac{\partial k(t,\tau)}{\partial t}\right|_{t=T} u(\tau)d\tau+\sum\limits_{i=1}^n \tilde{c}_i\tilde{x}_i(T), \\ \vdots \\ x^{(n-1)}(T)=\int\limits_0^T \left.\dfrac{\partial^{n-1}k(t,\tau)}{\partial t^{n-1}}\right|_{t=T} u(\tau)d\tau+\sum\limits_{i=1}^n \tilde{c}_i\tilde{x}_i^{(n-1)}(T). \end{cases} \tag{T.7.18}$$

Если обозначить

$$a_i=x^{(i-1)}(T)-\sum_{j=1}^n \tilde{c}_j\tilde{x}_j^{(i-1)}(T),\ i=\overline{1,n}, \tag{T.7.19}$$

$$h_i(\tau)=\left.\frac{\partial^{i-1}k(t,\tau)}{\partial t^{i-1}}\right|_{t=T},\ i=\overline{1,n}, \tag{T.7.20}$$

то можно записать следующую систему:

$$\int\limits_0^T h_i(\tau)u(\tau)d\tau=a_i,\ i=\overline{1,n}. \tag{T.7.21}$$

Выражения (T.7.21) есть искомые моментные уравнения, где a_i — моменты, $h_i(t)$ — моментные функции для функционала $I=\min\|u\|_{L^2[0,T]}$.

T.7.1.2. Оптимальная L-проблема моментов в пространстве состояний

Рассмотрим систему

$$\dot{\mathbf{X}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{X}(t)+\mathbf{B}u(t), \tag{T.7.22}$$

где $u(t)\in U\subset R^1$.

Требуется найти

$$I=\min\|u\|_{L^2[0,T]}.$$

Движение системы задано выражением

$$\mathbf{X}(t)=e^{\mathbf{A}t}\mathbf{X}(0)+\int\limits_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau,$$

тогда

$$\int_0^T e^{\mathbf{A}(T-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = \mathbf{X}(T) - e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}(0),$$

откуда находим $\mathbf{h}(t) = e^{\mathbf{A}(T-\tau)}\mathbf{B}$ и $\mathbf{a} = \mathbf{X}(T) - e^{\mathbf{A}T}\mathbf{X}(0)$.

Т.7.2. НАХОЖДЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАМИАНА УПРАВЛЯЕМОСТИ (КРИТЕРИЙ — МИНИМИЗАЦИЯ ЭНЕРГИИ)

Рассмотрим динамическую систему

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{X} \in R^n, \ \mathbf{U} \in R^m, \tag{Т.7.22}$$

$$\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0, \ \mathbf{X}(t_1) = \mathbf{X}_1. \tag{Т.7.23}$$

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t,\tau)\mathbf{B}(\tau)u(\tau)d\tau =$$

$$= \mathbf{\Phi}(t,t_0)\left[\mathbf{X}(t_0) + \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau\right];$$

$$\mathbf{\Phi}(t,\tau) = \mathbf{\Phi}(t,t_0)\mathbf{\Phi}(t_0,\tau); \ \mathbf{\Phi}^{-1}(t_1,t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0,t_1); \ \mathbf{\Phi}(t_0,t_1)\mathbf{\Phi}(t_1,t_0) = \mathbf{I};$$

$$\mathbf{\Phi}(t_0,t_1)\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0 = \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t_0,\tau)\mathbf{B}(\tau)\mathbf{U}(\tau)d\tau.$$

Введем переменную

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{X}(t); \ \dot{\mathbf{Z}}(t) = \dot{\mathbf{\Phi}}(t_0,t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{\Phi}(t_0,t)\dot{\mathbf{X}}(t);$$

$$\frac{d\mathbf{\Phi}(t,t_0)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{\Phi}(t,t_0); \ \frac{d\left(\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{\Phi}(t,t_0)\right)}{dt} = 0; \ \frac{d\mathbf{\Phi}(t_0,t)}{dt} = -\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{A}(t).$$

Тогда выражение для $\mathbf{Z}$ запишется так:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = -\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) =$$

$$= \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)\mathbf{U}(t) = \mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{X}(t),$$

$$\mathbf{Z}(t_0) = \mathbf{\Phi}(t_0,t_0)\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}(t_0);$$

$$\mathbf{W}(t_0,t_1) = \int_{t_0}^{t_1}\widetilde{\mathbf{B}}(t)\widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(t)dt = \int_{t_0}^{t_1}\mathbf{\Phi}(t_0,t)\mathbf{B}(t)\mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)dt. \tag{Т.7.24}$$

Формула (Т.7.24) определяет *грамиан управляемости*. Оптимальное управление, минимизирующее энергию управления $\left(\|\mathbf{U}\|_{L^2[t_0,t_1]} \to \min\right)$, определяется из выражения

$$\mathbf{U}^*(t) = \widetilde{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{W}^{-1}(t_0,t_1)\mathbf{X} = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(t)\mathbf{\Phi}^{\mathrm{T}}(t_0,t)\mathbf{W}^{-1}(t_0,t_1)\left(\mathbf{\Phi}(t_0,t_1)\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_0\right). \tag{Т.7.25}$$

ЗАДАНИЕ 7.1

Изучите математические методы синтеза систем, обладающих минимальной нормой функции управления в некотором функциональном пространстве. К постановкам математических задач, где эти методы применяются, сводятся при определенных

предположениях прикладные задачи о переводе систем из одних состояний фазового пространства в другие *при минимуме энергетических затрат, максимальной величине усилий или импульса усилий за счет управляемых воздействий, приложенных к системе*. Развитие такого типа методов синтеза оптимальных систем наиболее глубоко представлено как решение задач оптимальной L-проблемы моментов и аппроксимаций в соответствующих функциональных пространствах. Рассмотрите наиболее важные частные случаи построения оптимальных управлений применительно к линейным системам:

- с сосредоточенными параметрами;
- с распределенными параметрами;
- с запаздыванием.

ЗАДАНИЕ 7.2

Для линейного стационарного объекта управления, заданного передаточной функцией в табл. Т.5.1, получите математическую модель в пространстве состояний. Проверьте управляемость системы. Постройте оптимальное программное управление с помощью метода оптимальной L-проблемы моментов для перевода объекта управления из некоторого начального состояния в некоторое конечное. Начальное и конечное состояния объекта, а также время управления задаются преподавателем. Перевод осуществлять по выходной переменной. Задачу решите следующими методами:

- методом оптимальной L-проблемы моментов в пространстве состояний;
- методом оптимальной L-проблемы моментов в пространстве «вход–выход»;
- с помощью грамиана управляемости.

Сравните полученные результаты, сделайте выводы.

ЗАДАНИЕ 7.3

Для линейного нестационарного объекта управления, заданного дифференциальным уравнением в табл. Т.6.1, получите математическую модель в пространстве состояний. Выполните все пункты задания 7.2 в соответствии с указаниями.

ЗАДАНИЕ 7.4

Задана система управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(0) = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{X}(1) = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}.$$

Определите оптимальное управление для функционала

$$\|u\|_{L^2[0,1]} \to \min.$$

ЗАДАНИЕ 7.5

Найдите координаты вектора $\mathbf{a}_0$, если для векторов

$$\mathbf{X}_1 = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{X}_2 = [0 \quad -2]^{\mathrm{T}}$$

$$(\mathbf{a}_0, \mathbf{X}_1) = 2, (\mathbf{a}_0, \mathbf{X}_2) = 2.$$

Задачу решите с помощью оптимальной L-проблемы моментов.

ЗАДАНИЕ 7.6

Задана система управления

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases}$$

$$\mathbf{X}(0) = [1 \quad 1]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{X}(1) = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}.$$

Пусть $L = 2$. Решите задачу быстродействия с помощью оптимальной L-проблемы моментов.

ЗАДАНИЕ 7.7

Поведение вполне управляемого объекта описывается системой уравнений вида

$$\dot{x}_1 = -x_2; \ \dot{x}_2 = x_1 + u.$$

Постройте $u^*(t)$ методом моментов, если:

$$\mathbf{X}^0 = [-4 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \ \mathbf{X}^T = [0 \quad 0]^{\mathrm{T}}, \ [0, T] = [0, \pi],$$

$$I = \operatorname{vrai} \max_{[0,\pi]} |u(\tau)|.$$

ЗАДАНИЕ 7.8

Широкий класс объектов управления описывается дифференциальным уравнением вида

$$W_0(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1},$$

или, что то же самое,

$$T^2 \ddot{x}(t) + 2T\xi \dot{x}(t) + x(t) = Ku(t).$$

Постройте $u^*(t)$, переводящее объект из точки $\mathbf{X}^0 = [x_1(0) \quad x_2(0)]^{\mathrm{T}}$ в точку $\mathbf{X}^T = [x_1(T) \quad x_2(T)]^{\mathrm{T}}$, $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = \dot{x}(t)$, за время T, если

$$I = \operatorname{vrai} \max_{0 \le t \le T} |u(t)|.$$

Преподавателем задаются исходные данные T, ξ, K, $x_1(0)$, $x_2(0)$, $x_1(T)$, $x_2(T)$, T. Найдите решение задачи с помощью оптимальной L-проблемы моментов в пространстве состояний и в пространстве «вход–выход» (функционал I — энергия и сила управления).

Выполните задание, если объект управления имеет передаточную функцию вида

$$W_0(s) = \frac{K}{s(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)}.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Абсолютный минимум....76, 77
Алгоритмическое обеспечение....457, 469
Аппроксимация поверхности переключения....91, 103

Б

Базовая система....114
Беллмана принцип оптимальности....122, 124
Беллмана уравнение....138, 140
– для непрерывных процессов....121
– для неавтономных систем....133
Больца задача....40
Быстродействие....55, 197, 202, 292, 300

В

Вариационное исчисление....12, 21
– простейшая задача....26
Вариация функционала....33, 34, 46, 66
– общая формула....31
Вейерштрасса–Эрдмана условия....35, 48
Вейерштрасса условие сильного минимума....36
Вектор состояния....42, 73, 128, 133, 142, 158
Вспомогательная задача....445

Г

Гамильтона функция....18, 60, 73, 443
Гладкое многообразие....518
Граница области....448

Д

Динамическое программирование....12, 121
Динамические характеристики....148
Дифференциальные уравнения....43, 167
– объекта управления....92, 283, 334, 335, 468
Дифференциал функционала....23, 26, 30
Допустимое управление....50, 54, 56, 434
Достаточные условия оптимальности....76, 216

З

Задача вариационного исчисления....26
– Лагранжа....39
– Майера....43
– на условный экстремум....38
– с *n* неизвестными функциями....30
– с подвижными концами....31, 34, 41
Задача вспомогательная....445
– об аналитическом конструировании регуляторов....134
– оптимального управления....54, 73, 78

И

Интервал граничный....522
– внутренний....522
– второго рода....522
– первого рода....522
– простой....540
Исчисление вариационное....12, 21

К

Квадратичная форма....135, 139
Критерий оптимальности....177, 190, 222, 322
– квадратичный....133
– Сильвестра....138

Л

Лагранжа задача....38
– лемма....28
– множители....39, 55, 68
Лемма
– об области регулярности....517
– о числе корней квазимногочлена....74

М

Майера задача....43
Максимизация функции Гамильтона....60, 72
Математическое программирование....13, 141
Метод
– динамического программирования....12, 121
– матричных операторов....216, 284
– моментов....310
Минимум абсолютный....76, 77
– сильный....24, 36
– слабый....24, 27, 33
Многообразие гладкое....518
Множители Лагранжа....39, 55, 68

Н

Наблюдаемость....150, 159, 163

О

Область управления....517
– на границе....518
– регулярности....518
Обратная связь....13, 85, 146, 157, 320, 326, 334
Объект управления....92, 133, 195, 283, 320, 468
Оператор....14, 149, 169, 174, 180, 212
Оптимальность по быстродействию....53, 72, 91
Оптимальная траектория....21, 55, 94, 128, 145
Оптимальное управление....21, 50, 68, 95, 147
Основное функциональное уравнение....122

П

Поверхность переключения 95, 100, 103
Принцип
– максимума Понтрягина.....12, 51, 66, 217
– оптимальности Беллмана.....123
Простой граничный интервал 540
Процесс многошаговый 123
– элементарный.....519
– эстафетный.....535

Р

Регулярная
– область.....518
– точка.....517
– траектория 518, 522, 534
Риккати матричное уравнение 136, 322, 336

С

Сильвестра критерий 138
Сильный минимум функционала.....24, 36
Синтез оптимального
управления 76, 84, 91, 147
– по квадратичному критерию.....133
Слабо регулярная траектория 524
Слабый минимум функционала.....24, 27, 33

Т

Теоремы
– о достаточных условиях оптимальности 77
– о необходимых условиях оптимальности ..54, 57
– о числе переключений 74, 75
Точка отражения.....530
– стыка 539
– – простая.....539
– – сложная.....539
– – траектории.....516
– схода с границы 542
– выхода.....546
– выхода на ограничение 550
Трансверсальности условия 34, 68, 72
Траектория оптимальная 21, 55, 94, 128, 145

У

Управление допустимое 50, 54, 56, 434
– оптимальное..... 21, 50, 68, 95, 147, 197
– оптимальное по быстродействию.....53, 72, 91
Управляемость
– определение.....150
– системы.....150
Управляющее воздействие
нормированное 198
Уравнение Беллмана 138, 140
– для автономных процессов.....129
– для неавтономных процессов.....133
Уравнение Риккати.....136, 322, 336
– Эйлера.....28
Условие Вейерштрасса сильного
минимума 36
– скачка.....520
– нетривиальности решения.....522
– регулярности.....554
– общности положения 529
– оптимальности 540, 541
Условия Вейерштрасса–Эрдмана 35, 48
Условия оптимальности достаточные.....77
– необходимые.....54, 57
Условия трансверсальности 34, 68, 72

Ф

Функционал
– квадратичный.....133
– линейный.....23, 26, 311
Функция Гамильтона 18, 60, 73, 443

Э

Эйлера уравнение 28
Элементарный процесс 519
Эстафетный процесс 535
Экстремаль 28

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1989. — 264 с.
2. *Александров В.М.* Минимаксный подход к решению задачи обработки информации // Техническая кибернетика. — 1966. — №5. — С.3–17.
3. *Амосов А.А., Дубинский Ю.А., Копченова А.Н.* Вычислительные методы для инженеров. — М.: Высшая школа, 1994. — 544 с.
4. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
5. *Астапов Ю.М., Медведев В.С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1982. — 304 с.
6. *Атинс М., Фалб П.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968. — 764 с.
7. *Батенко А.П.* Управление конечным состоянием движущихся объектов. — М.: Сов. радио, 1977. — 256 с.
8. *Беклемишев Д.В.* Дополнительные главы линейной алгебры. — М.: Наука, 1983. — 336 с.
9. *Беллман Р., Калаба Р.* Динамическое программирование и современная теория управления. — М.: Наука, 1969. — 118 с.
10. *Бесконечные* антагонистические игры / Под. ред. Н.Н. Воробьева. — М.: Физмат. изд., 1963. — 504 с.
11. *Бирюков В.Ф., Воронов Е.М., Карпенко А.П.* Гарантированная оценка эффективности многомерного нелинейного фильтра с заданной частью и прототипом // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. — 1989. — №4. — С.130–136.
12. *Бирюков В.Ф., Воронов Е.М., Карпенко А.П.* О применении принципа сложности и гарантированных решений в задачах программного управления в условиях неопределенности // Автоматика. — 1986. — №2. — С.53–60.
13. *Блисс Г.А.* Лекции по вариационному исчислению. — М.: Изд-во иностр. литер., 1950. — 348 с.
14. *Болтянский В.Г.* Математические методы оптимального управления. — М.: Наука, 1969. — 408 с.
15. *Брайсон А., Хо-Ю-Ши.* Прикладная теория оптимального управления. — М.: Мир, 1972. — 544 с.
16. *Бублик Б.Н., Кириченко Н.Ф.* Основы теории управления. — Киев: Издательское объединение «Вища школа», головное издательство, 1975. — 328 с.
17. *Бутковский А.Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. — М.: Наука, 1975. — 568 с.
18. *Вайсборд Э.М., Жуковский В.Н.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Сов. радио, 1980. — 304 с.
19. *Вентцель В.С.* Исследование операций. — М.: Сов. радио, 1972. — 552 с.
20. *Вилкас Э.И.* Оптимальность в играх и решениях. — М.: Наука, 1990. — 256 с.
21. *Волин Ю.М., Островский Г.М.* Принцип максимума для разрывных систем и его применение к задачам с фазовыми ограничениями // Известия вузов. Серия «Радиофизика». — 1969. — №11. — С.1609–1621.

22. *Воробьев Н.Н.* Основы теории игр. Бескоалиционные игры. — М.: Наука, 1984. — 496 с.
23. *Воронов Е.М.* Анализ стабильно-эффективных компромиссов в сложных системах на основе метода угроз и контругроз // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». — 1998. — №1.
24. *Воронов Е.М.* Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе разработки и модификации стабильно-эффективных игровых решений и компромиссов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 650 с.
25. *Воронов Е.М.* Оценка эффективности взаимодействия маневрирующего объекта и системы управления летательным аппаратом // Диссертация на соискание ученой степени канд. техн. наук. — М., 1972. — 162 с.
26. *Воронов Е.М.* Стабильно-эффективные компромиссы при управлении многокритериальными многообъектными большими системами в условиях конфликта и неопределенности // Труды Международной конференции «Управление большими системами». — М.: Изд-во ИПУ РАН, 1997. — 124 с.
27. *Воронов Е.М., Бурлакин А.Н.* Методы формирования компромиссов в ММС на основе стабильных и эффективных решений // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». — 1999. — №4. — С.68–96.
28. *Воронов Е.М., Вдовин А.Н.* Некоторые особенности реализации алгоритмов векторной Нэш-оптимизации // Труды I Международного симпозиума «ИНТЕЛС'94» / Под ред. К.А. Пупкова. — М.: Изд-во РУДН ПАИМС, 1994. — С.121–124.
29. *Воронов Е.М., Карабанов В.А.* Исследование задачи сближения-уклонения подвижных объектов в интегро-дифференциальной форме с учетом ограничений, случайных возмущений и заданных связей // Труды VII Всесоюзного совещания по проблемам управления. — М.: Изд-во ИПУ РАН, 1977. — С.221–224.
30. *Воронов Е.М., Карпенко А.П.* Метод анализа систем телесамонаведения на основе принципа гарантированных решений и принципа сложности // Известия вузов. Серия «Приборостроение». — 1984. — №8.
31. *Воронов Е.М., Карпенко А.П.* Параметрическая оптимизация вычислительного процесса для одной задачи фильтрации // Известия вузов. Серия «Приборостроение». — 1992. — №3–4. — С.9–15.
32. *Воронов Е.М., Карпенко А.П.* ППП для исследования гарантированных стратегий в позиционно-программной задаче сближения-уклонения // Труды МВТУ. — 1979. — №314. — С.133–138.
33. *Воронов Е.М., Килимник Ю.Я.* Программная система «Гарантия-М» для моделирования и анализа эффективности законов управления // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». — 1998. — №2.
34. *Воронов Е.М., Пупков К.А.* Предельное целевое качество интеллектуальной системы на основе стабильного гомеостаза // Труды III Международного симпозиума «ИНТЕЛС'98» / Под ред. К.А. Пупкова. — М.: ООО «ТВК», 1998. — С.43–48.
35. *Воронов Е.М., Савин А.В.* Модификация алгоритма конфликтно-оптимального управления // Труды МВТУ. — 1988. — №513.
36. *Воронов Е.М., Серов В.А.* Особенности функциональной части пакета прикладных программ многокритериальной оптимизации. Автоматизированное проектирование систем управления // Труды МВТУ. — 1985. — №429. — Вып. 3. — С.137–144.

37. *Воронов Е.М., Серов В.А.* Равновесие по Нэшу между векторными показателями эффективности в задаче многокритериальной параметрической оптимизации. Создание и внедрение систем автоматического и автоматизированного управления технологическими процессами: Тезисы докладов XI Всесоюзного н/т совещания (Новгород, 1986 г.). Ч.1. — М., 1986. — С.23–36.

38. *Воронов Е.М., Серов В.А., Степанищев А.Е.* ППП для автоматизации проектирования многообъектных многокритериальных систем управления // Вестник МГТУ. Серия «Приборостроение». — 1991. — №2.

39. *Гамкрелидзе Р.В.* Оптимальные процессы управления при ограниченных фазовых координатах // Изв. АН СССР. Математика. — 1960. — №3. — С.315–356.

40. *Гермейер Ю.Б.* Введение в теорию исследования операций. — М.: Наука, 1971. — 384 с.

41. *Директор С., Рорер Р.* Введение в теорию систем. — М.: Мир, 1974. — 464 с.

42. *Дмитриевский А.Л., Лысенко Л.Н.* Прикладные задачи теории оптимального управления движением летательных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1978. — 328 с.

43. *Дорф Р., Бишоп Р.* Современные системы управления. — М.: Лаборатория базовых знаний, Юнимедиастайл, 2002. — 832 с.

44. *Жуковский В.И., Молоствов В.С.* Многокритериальное принятие решений в условиях неопределенности. — М.: МНИИПУ, 1988. — 132 с.

45. *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. — М.: Наука, 1967. — 646 с.

46. *Иванов В.А., Фалдин Н.В.* Теория оптимальных систем автоматического управления. — М.: Наука, 1981. — 332 с.

47. *Иванова Е.А.* Построение на основе игрового подхода оптимального алгоритма наведения на маневрирующую цель // Сб. трудов. — Л.: ЛМИ, 1980.

48. *Карпенко А.П.* Разработка метода и алгоритмического обеспечения для исследования динамических режимов позиционно-програмного сближения-уклонения // Дисс. на соиск. уч. ст. канд. техн. наук. — М.: МВТУ, 1980.

49. *Квакернаак Х., Сиван Р.* Линейные оптимальные системы управления. — М.: Мир, 1977. — 650 с.

50. *Кейн В.М.* Оптимизация систем управления по минимаксному критерию. — М.: Наука, 1985. — 248 с.

51. *Клюев А.С., Колесников А.А.* Оптимизация автоматических систем управления по быстродействию. — М.: Энергоиздат, 1982. — 236 с.

52. *Красовский Н.Н.* Игровые задачи о встрече движений. — М.: Наука, 1970. — 420 с.

53. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968. — 476 с.

54. *Крейн М.Г., Нудельман А.А.* Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1973. — 552 с.

55. *Куликовский Р.* Оптимальные и адаптивные процессы в системах автоматического регулирования. — М.: Наука, 1967. — 380 с.

56. *Куропаткин П.В.* Оптимальные и адаптивные системы. — М.: Высшая школа, 1980. — 288 с.

57. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1982. — 272 с.

58. *Лебедев А.А., Карабанов В.А.* Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами: Уч. пособие. — М.: Машиностроение, 1965. — 528 с.

59. *Мальгин А.Е.* Управление огнем ЗРК. — М.: Воениздат, 1987. — 222 с.

60. *Марчук Г.И., Агошков В.И.* Введение в проекционно-сеточные методы. — М.: Наука, 1981. — 416 с.

61. *Месарович М., Мако Д., Такахара Н.* Теория иерархических многоуровневых систем: Пер. с англ. — М.: Мир, 1973. — 344 с.

62. *Моисеев Н.Н.* Математические задачи системного анализа. — М.: Наука, 1981. — 488 с.

63. *Моисеев Н.Н.* Численные методы в теории оптимальных систем. — М.: Наука, 1971. — 424 с.

64. *Неупокоев Ф.К.* Противовоздушный конфликт. — М.: Воениздат, 1989. — 262 с.

65. *Нефедов В.П., Ясейтис А.А., Новосельцев В.Н.* и др. Гомеостаз на различных уровнях организации биосистем. — Новосибирск: Наука, сиб. отд., 1991. — 232 с.

66. *Олейников В.А., Смирнов Т.М.* Оптимальное по быстродействию управление нелинейными объектами // Автоматика и телемеханика. — 1970. — №12. — С.167–170.

67. *Основы* синтеза систем летательных аппаратов / Под ред. А.А. Лебедева. — М.: Машиностроение, 1987. — 224 с.

68. *Первозванский А.А.* Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986. — 616 с.

69. *Петросян Л.А., Томский Г.В.* Динамические игры и их приложения. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1982. — 252 с.

70. *Плотников В.Н., Зверев В.Ю.* Принятие решений в системах управления. Ч.2: Теория и проектирование алгоритмов принятия проектных решений для многообъектных распределенных систем управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1994. — 146 с.

71. *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002. — 304 с.

72. *Понтрягин Л.С., Болтянский В.Г., Гамкрелидзе Р.В.* и др. Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1976. — 392 с.

73. *Постников М.М.* Линейная алгебра и дифференциальная геометрия. — М.: Наука, 1979. — 312 с.

74. *Построение* систем программного движения / Под ред. А.С. Галиуллина. — М.: Наука, 1971. — 180 с.

75. *Пупков К.А.* О некоторых новых задачах теории и техники интеллектуальных систем // Труды III Международного симпозиума «ИНТЕЛС'98» / Под ред. К.А. Пупкова. — М.: ООО «ТВК», 1998. — С.19–23.

76. *Пупков К.А., Воронов Е.М., Калинин С.А.* Обобщенный гомеостаз в динамических системах естественных технологий организма (СЕТО) и интеллектуальных технических системах (ИТС) // Труды Международной конференции «Управление большими системами». — М.: Изд-во ИПУ РАН, 1997. — С.296.

77. *Пупков К.А., Коньков В.Г.* Мировоззрение управленца. — М.: Биоинформ, 1997. — 80 с.

78. *Пупков К.А., Серов В.А.* Стабильные компромиссы как инструмент иерархического структурно-целевого синтеза в интеллектуальных интегрированных системах // Труды II Международного симпозиума «ИНТЕЛС'96» / Под ред. К.А. Пупкова. Т.1. — М.: Изд-во РУДН ПАИМС, 1996. — С.73–79.

79. *Растригин Л.А., Эйдук Я.Ю.* Поисковые алгоритмы определения множества Парето // Вопросы кибернетики. Адаптация в системах со сложной организацией. — М., 1977. — С.93–98.

80. *Расчет* и анализ движения летательных аппаратов: Инженерный справочник. — М.: Машиностроение, 1971. — 352 с.

81. *Рей У.Х.* Методы управления технологическими процессами. — М.: Мир, 1983. — 368 с.

82. *Серов В.А.* *E*-стабильное обобщенное равновесие в модели конфликта с векторными целевыми функционалами участников // Труды III Международного симпозиума «ИНТЕЛС'98» / Под ред. К.А. Пупкова. — М.: ООО «ТВК», 1998. — С.198–201.

83. *Серов В.А., Холба Ю.Я., Суханов Н.А.* Комбинированная вычислительная процедура многокритериального синтеза параметров нейроконтроллера в адаптивной системе управления промышленным роботом // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2001. — №1. — С.147–158.

84. *Смольяков Э.Р.* Расширение классического бескоалиционного равновесия и программные дифференциальные игры // Кибернетика и системный анализ. — 2000. — №4. — С.105–115.

85. *Смольяков Э.Р.* Сильное равновесие в бескоалиционных играх // Нелинейная динамика и управление. Вып. 1. — М.: Физматлит, 2001. — С.355–362.

86. *Соболь И.М., Статников Р.Б.* Выбор оптимальных параметров в задачах со многими критериями. — М.: Наука, 1981. — 110 с.

87. *Солодовников В.В., Бирюков В.Ф., Тумаркин В.И.* Принцип сложности в теории управления. — М.: Наука, 1977. — 340 с.

88. *Солодовников В.В., Воронов Е.М., Колесник В.П.* Оптимизация процессов управления в условиях неопределенности: Уч. пособие. — М.: МВТУ, 1985. — 64 с.

89. *Солодовников В.В., Воронов Е.М., Серов В.А.* Выбор параметров сложных динамических систем по векторному показателю: Описание // ППП «Игра», ГОСФАП, №50870000100. — М., 1985. — Ч.1. —102 с., Ч.2. — 108 с.

90. *Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егупов Н.Д.* Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1986. — 440 с.

91. *Справочник* по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского. — М.: Наука, 1987. — 712 с.

92. *Сю Д., Мейер А.* Современная теория автоматического управления и ее применение. — М.: Машиностроение, 1972. — 552 с.

93. *Табак Д., Куо Б.* Оптимальное управление и математическое программирование. — М.: Наука, 1975. — 280 с.

94. *Теория* автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. — Ч.1, 2. — М.: Высшая школа, 1986. — 362, 382 с.

95. *Теория* автоматического управления. Изд. 2 / Под ред. А.В. Нетушила. — М.: Высшая школа, 1983. — 432 с.

96. *Троицкий В.А.* Оптимальные процессы колебаний механических систем. — Л.: Машиностроение, 1976. — 248 с.

97. *Уткин В.И.* Скользящие режимы и их применение в системах с переменной структурой. — М.: Наука, 1974. — 272 с.

98. *Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. Издание 3-е, стереотипное. — СПб: Изд-во «Лань», 2002. — 736 с.

99. *Фалдин Н.В.* Достаточные условия оптимальности в одной задаче с ограниченными фазовыми координатами // Известия вузов. Серия «Радиофизика». — 1969. — №7. — С.1067–1075.

100. *Фалдин Н.В.* Линейные быстродействия при ограниченных фазовых координатах // Автоматика и телемеханика. — 1967. — №1. — С.23–33.

101. *Фалдин Н.В.* Оптимальное по быстродействию управление линейным объектом // Известия вузов. Серия «Электромеханика». — 1981. — №2. — С.1351–1356.

102. *Фалдин Н.В., Макаров Н.Н.* Условия общности положения в задачах оптимального управления // Некоторые вопросы дифференциальных уравнений в решении прикладных задач. — Тула: ТулПИ, 1983. — С.148–153.

103. *Федоренко Р.П.* Приближенное решение задач оптимального управления. — М.: Наука, 1978. — 488 с.

104. *Фельдбаум А.А.* Вычислительные устройства в автоматических системах. — М.: Физматгиз, 1959. — 800 с.

105. *Фельдбаум А.А.* Оптимальные процессы в системах автоматического управления // Автоматика и телемеханика. — 1953. — №6. — С.712–728.

106. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. — М.: Наука, 1981.

107. *Фролов К.В.* Машиностроение: Энциклопедия. — М.: Машиностроение, 2000. — 688 с.

108. *Хофер Э., Лундерштедт Р.* Численные методы оптимизации. — М.: Машиностроение, 1981. — 192 с.

109. *Янг Л.* Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления. — М.: Мир, 1974. — 488 с.

110. *Frehel J.* Problemes multicriteres: therie de la domination de Yu et efficacite de Pareto // Merta. — 1974. — Vol.13. — №1. — P.47–57.

111. *Gupta N.K.* Reachable set methods // Control & Dynamic Systems, Adv. in Theory & Appl. — 1981. — Vol. 17. — P.323–344.

112. *Mukai H.* Algorithm for multicriterion optimization IEEE // Trans on aut. control. — 1980. — Vol. AC-25. — №2. — P.177–186.

113. *Pau L.F.* Differential games and a Nash equilibrium searching algorithm // SIAM J. Contr. — 1975. — №4. — P.835–852.

114. *Yu P.L.* Cone convexity, cone extreme points and nondominated solution in decision problems with multiobjectives // J. Opt. Theory and appl. — 1974. — №3. — Vol. 14. — P.319–377.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩЕЕ ПРЕДИСЛОВИЕ К УЧЕБНИКУ 5

ВВЕДЕНИЕ К 4-МУ ТОМУ 11

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ АББРЕВИАТУР 16

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ 18

ГЛАВА 1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ 21

1.1. Необходимое условие экстремума функционала 21
1.1.1. Функциональные пространства 22
1.1.2. Дифференциал функционала 23
1.1.3. Простейшая задача вариационного исчисления 26
1.1.4. Вариационная задача с n неизвестными функциями 30
1.2. Задача с подвижными концами. Условия Вейерштрасса–Эрдмана 31
1.2.1. Общая формула вариации функционала 31
1.2.2. Задача с подвижными концами 33
1.2.3. Условия Вейерштрасса–Эрдмана 35
1.3. Необходимое условие Вейерштрасса сильного минимума функционала 36
1.4. Задачи на условный минимум 38
1.5. Решение задачи оптимального управления методом вариационного исчисления 41
1.5.1. Формулировка задачи оптимального управления 41
1.5.2. Необходимое условие экстремума 44
1.5.3. Необходимые условия Вейерштрасса 50

ГЛАВА 2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА 51

2.1. Необходимые условия оптимальности в форме принципа максимума 51
2.1.1. Задача оптимального управления 51
2.1.2. Необходимое условие оптимальности 54
2.2. Задача с подвижными концами. Принцип максимума для неавтономных систем 65
2.2.1. Задача с закрепленным временем 65
2.2.2. Задача с подвижными концами 66
2.2.3. Неавтономный случай 71
2.3. Оптимизация по быстродействию линейных объектов управления 72
2.3.1. Максимизация функции Гамильтона 72
2.3.2. Теорема о числе переключений 74
2.3.3. Достаточные условия оптимальности 76
2.4. Синтез оптимального управления 84

ГЛАВА 3. ОПТИМАЛЬНЫЕ ПО БЫСТРОДЕЙСТВИЮ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ 91

3.1. Синтез оптимального управления методом фазового пространства 91
3.1.1. Постановка задачи синтеза 91
3.1.2. Синтез оптимального управления 93
3.1.3. Обобщение задачи синтеза 100
3.2. Аппроксимация поверхности переключения 103
3.3. Ошибки слежения в оптимальных по быстродействию САУ 108
3.4. Приближенный способ учета малых постоянных времени 113

ГЛАВА 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ И АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ РЕГУЛЯТОРА 121

4.1. Дискретный многошаговый процесс принятия решений 121
4.2. Принцип оптимальности. Основное функциональное уравнение Беллмана 122
4.3. Метод динамического программирования для непрерывных систем 127
4.3.1. Автономная система 127
4.3.2. Неавтономная система 132
4.4. Задача об аналитическом конструировании регулятора 133
4.4.1. Автономная система 133
4.4.2. Неавтономная система 137
4.5. Связь между принципом максимума и динамическим программированием 139

ГЛАВА 5. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ 141

5.1. Постановка задачи оптимизации систем автоматического управления 142
5.2. Системы оптимального программного управления и оптимальные системы, работающие по принципу обратной связи 147
5.3. Управляемость и наблюдаемость систем 150
5.3.1. Управляемость систем 150
5.3.2. Наблюдаемость систем 158
5.4. Математическое программирование: расчет оптимальных программных управлений и оптимальных программ с использованием сеточных методов 165
5.4.1. Метод и общий алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ при описании объектов интегральными уравнениями и сеточно-матричными операторами 174
5.4.2. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию минимальной энергии 177
5.4.3. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию максимального быстродействия 195

5.4.4. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию минимального расхода топлива ... 208

5.5. Математическое программирование: расчет оптимальных программных управлений и оптимальных программ с использованием проекционных методов ... 211

5.5.1. Общий алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ методами математического программирования с использованием проекционно-матричных операторов ... 216

5.5.2. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ стационарных линейных объектов по критерию минимальной энергии ... 224

5.5.3. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ нестационарных линейных объектов по критерию минимальной энергии ... 251

5.5.4. Алгоритм расчета программного управления, обеспечивающего экстремальное значение заданных фазовых координат ... 275

5.5.5. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию максимального быстродействия ... 283

5.5.6. Алгоритм построения оптимальных программных управлений и оптимальных программ по критерию минимального расхода топлива ... 306

5.6. Основные положения метода моментов ... 310

5.6.1. Формулировка проблемы моментов и ее решение ... 311

5.6.2. Алгоритм синтеза оптимальных программных управлений методом моментов для класса линейных одномерных объектов ... 316

5.6.3. Векторно-матричный вариант ... 319

5.7. Некоторые подходы к синтезу оптимальных систем, работающих по принципу обратной связи ... 320

5.7.1. Линейно-квадратичные задачи ... 320

5.7.2. Применение решения линейно-квадратичных задач для синтеза оптимальных нелинейных систем, работающих по принципу обратной связи ... 326

5.7.3. Применение решения линейно-квадратичных задач для синтеза оптимальных линейных систем, работающих по принципу обратной связи ... 334

ГЛАВА 6. ВВЕДЕНИЕ В ОПТИМИЗАЦИЮ УПРАВЛЕНИЯ МНОГООБЪЕКТНЫМИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫМИ СИСТЕМАМИ (ММС) НА ОСНОВЕ СТАБИЛЬНО-ЭФФЕКТИВНЫХ КОМПРОМИССОВ (ИГРОВЫЕ ПОДХОДЫ В УПРАВЛЕНИИ) ... 365

6.1. Постановка задач проектирования и управления многообъектной многокритериальной системой на основе стабильных эффективных решений и компромиссов в условиях исходной структурной несогласованности, конфликта и неопределенности ... 365

6.1.1. Общее определение игры. Частные классы игр ... 367
6.1.2. Математическая модель конфликтной ситуации в ММС ... 369
6.1.3. Методы получения стабильных и эффективных решений ... 371
6.1.4. О применении разработанных методов и алгоритмов стабильно-эффективного управления в практических задачах ... 376
6.2. Модифицированный двухуровневый метод скалярной Нэш-оптимизации в бескоалиционной конфликтной ситуации (стабильные решения) с трехэтапной реализацией метода ... 376
6.2.1. Необходимое условие равновесия по Нэшу в форме двухуровневой структуры Пао [113] ... 376
6.3. Стабильные и эффективные оптимальные решения на основе коалиционного равновесия ... 383
6.3.1. Классификация стабильных и эффективных решений на основе коалиционного равновесия ... 383
6.3.2. Алгоритм векторной оптимизации на основе конусов доминирования (эффективные решения) ... 385
6.3.3. Методы определения векторного равновесия (стабильные решения) ... 389
6.3.4. Решение задачи коалиционного перехвата подвижной цели с учетом противодействия на этапе ближнего наведения ЛА ... 396
6.4. Стабильные коалиционные решения в ММС. Управления на основе метода «угроз и контругроз» ... 399
6.4.1. Понятие равновесия на основе «угроз и контругроз» (УКУ). Стратегическая значимость УКУ. Существование УКУ. Двухэтапная процедура оптимизации на основе принципа УКУ ... 399
6.4.2. Этап 1. Выбор начальных приближений УКУ на основе построения ортогональной равномерной сети ... 400
6.4.3. Этап 2. Оптимизация управления ММС на основе модифицированных достаточных условий локальных УКУ (ЛУКУ) [24] и метода моментов Н.Н. Красовского [52] ... 402
6.4.4. Применение двухэтапного метода получения УКУ-оптимального управления прогнозом динамики конфликта ЛС СВН–ЛС ПВО ... 406
6.5. Оценка эффективности кооперативного компромисса и оптимизация решений в ММС на основе вектора дележа Шепли ... 411
6.5.1. Обобщение характеристической функции, предпосылка игры, дележ и его свойства ... 411
6.5.2. Методы оптимизации дележей ... 413
6.5.3. Вычисление дележа в форме вектора Шепли ... 413
6.5.4. Формирование двухэтапного алгоритма оптимизации решений в ММС на основе вектора дележа Шепли [24] ... 416
6.5.5. Применение двухэтапного алгоритма для получения УКУ–Шепли-оптимального управления прогнозом динамики конфликта ЛС СВН–ЛС ПВО ... 416
6.6. Методы комбинирования решений по Нэшу (скалярный и векторный варианты), Парето, УКУ, Шепли, «идеальной точки», ε-равновесных приближений и арбитражных схем для получения стабильно-эффективных компромиссов в ММС ... 422

6.6.1. СТЭК на основе Парето–Нэш–УКУ–Шепли-комбинаций [24] 422
6.6.2. Комбинированные методы в условиях ε-равновесия по Нэшу, минимизации угроз и неполной информации о партнерах [24, 82] 424
6.6.3. Понятие о договорных компромиссах на основе комбинации обязательных и необязательных соглашений 428
6.6.4. Об интеллектуальных СТЭК на основе обобщенного гомеостаза в форме предельного целевого качества интеллектуальной системы (ИС) с динамической экспертной поддержкой [24, 34, 65, 76] 430
6.7. Программно-корректируемое стабильно-эффективное позиционное управление нелинейной динамической двухкоалиционной системой на основе принципа «экстремального прицеливания» Н.Н. Красовского 433
6.7.1. Постановка и анализ существования гарантирующих и равновесных решений 433
6.7.2. Постановка и формализация задач оптимального преследования и уклонения летательных аппаратов 438
6.7.3. Формирование нелинейных алгоритмов преследования и уклонения на основе принципа экстремального прицеливания Н.Н. Красовского [24] 445
6.7.4. Алгоритм субоптимального позиционного преследования-уклонения 449
6.7.5. Исследование противодействия ЗУР и ЛА-цель 453
6.7.6. Формирование ПКЗУ в бескоалиционной конфликтной ситуации с антагонистическим ядром на основе принципа экстремального направления Н.Н. Красовского 455
6.7.7. Пример противодействия ЛА с вектором показателей (промах, время и энергетические затраты) 457
6.8. Разработка стохастической интегро-дифференциальной модели стабильного антагонистического конфликта в двухкоалиционных ММС в условиях ε-равновесия на основе комбинации фильтрации и управления с учетом промежуточных координат, прототипа, заданной части модели, аддитивных и мультипликативных помех 460
6.8.1. Максиминная постановка задачи сближения-уклонения позиционно (P)- и программно-управляемого (Q) объектов с интегро-дифференциальной моделью, адекватной реальным системам 460
6.8.2. Решение задачи поиска оптимальной стратегии объекта P (для помех типа «белого» шума) 466
6.8.3. Об алгоритме определения оптимальной стратегии объекта Q 468
6.8.4. Программные системы FILTR, FILTR-1, FILTR-2 469
6.8.5. Об анализе близости минимаксных и максиминных оценок эффективности в интегро-дифференциальной позиционно-программной задаче сближения-уклонения на основе ε-равновесия 473
6.8.6. Примеры применения интегро-дифференциальной задачи сближения-уклонения 474
6.9. Программно-технические системы для обеспечения элементов автоматизированного проектирования и управления ММС 478

6.9.1. Программная система многокритериальной оптимизации многообъектных динамических систем («МОМДИС») для отладки алгоритмов моделирования и оптимизации ММС и исследования СТЭК ... 478

6.10. Алгоритм конфликтно-оптимального управления ММС с учетом текущих конфигураций систем, оптимального распределения активных ресурсов по целям (ЦР) и прогноза динамики конфликта (ПДК) на основе СТЭК ... 486

6.10.1. Учет «текущей» конфигурации на такте конфликта в задаче ЦР ... 487

6.10.2. Вариант алгоритма ЦР-ПДК ... 488

6.10.3. Описание модели конфликта ЗРК «Ус. Хок» с ДЗУР — ПБ с ПИА (модель 1) ... 489

6.11. Модель конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения на этапе робастного регулирования [84] ... 492

6.11.1. Общая характеристика задачи ... 493

6.11.2. Проблема робастно-игровой коррекции робастного регулирования ... 493

6.11.3. Формирование математической модели конфликтной ситуации «автомобиль–поверхность» ... 494

6.11.4. Исследование конфликтно-оптимального взаимодействия автомобиля и поверхности торможения с элементами робастно-игровой коррекции ... 499

6.11.5. Примеры анализа результатов экспериментов на основе базовых вариантов ... 500

6.12. Оптимизация управления робота «Универсал-5» с учетом мехатронной структуры в условиях неопределенности на основе стабильно-эффективных компромиссов ... 506

6.12.1. Математическая модель робота «Универсал-5» в пространстве состояний ... 507

6.12.2. Моделирование в программной среде «МОМДИС» ... 512

ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ОГРАНИЧЕНИЯХ НА ФАЗОВЫЕ КООРДИНАТЫ ... 515

П.1.1. Принцип максимума при ограничениях на фазовые координаты ... 515

П.1.2. Достаточные условия оптимальности по быстродействию ... 524

П.1.3. Оптимальное по быстродействию управление в случае инерционного руля ... 537

П.1.4. Синтез оптимального по быстродействию управления при ограничениях на скорость движения и ускорение ... 545

ПРИЛОЖЕНИЕ 2. МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ ... 557

П.2.1. Безусловные методы оптимизации ... 557

П.2.1.1. Метод, использующий только значения функции ... 557

П.2.1.2. Методы, использующие первые производные ... 560

П.2.1.3. Использование вторых частных производных ... 565

П.2.2. Методы условной оптимизиции (задачи математического программирования) ... 567

П.2.2.1. Общая запись задачи математического программирования и ее виды ... 568

П.2.2.2. Некоторые сведения об экстремуме функции, частных производных, градиенте и производной по направлению ... 569
П.2.2.3. Особенности нахождения оптимальных решений в задачах математического программирования ... 572
П.2.2.4. Необходимые и достаточные условия оптимума в задачах математического программирования ... 576
П.2.2.5. Теория двойственности и недифференциальные условия оптимальности в задаче выпуклого программирования ... 580
П.2.2.6. Графическое решение задач математического программирования ... 583
П.2.3. Линейное программирование ... 584
П.2.3.1. Математическая постановка задачи линейного программирования ... 584
П.2.3.2. Симплекс-метод — основной метод решения задач линейного программирования ... 586
П.2.3.3. Метод полного исключения Жордана для решения систем линейных алгебраических уравнений ... 590
П.2.3.4. Двойственность в задачах линейного программирования ... 595
П.2.3.5. Целочисленное линейное программирование ... 600
П.2.3.6. Дробно-линейное программирование ... 606
П.2.3.7. Анализ устойчивости оптимального решения задачи линейного программирования ... 608
П.2.3.8. Методы ветвей и границ ... 614
П.2.3.9. Решение задачи выбора оптимального маршрута методом ветвей и границ ... 616
П.2.4. Развитие методов математического программирования ... 623
П.2.4.1. Понятие о параметрическом программировании ... 623
П.2.4.2. Штрафные (барьерные) функции. Методы внутренней точки для задачи математического программирования ... 629
П.2.4.3. Методы внешней точки для задачи математического программирования ... 632
П.2.4.4. Комбинированный метод внутренней и внешней точек ... 634
П.2.4.5. Метод проекции градиента ... 635
П.2.4.6. Многокритериальные задачи линейного программирования ... 638
П.2.4.7. Метод взвешенных сумм с точечным оцениванием весов ... 641
П.2.4.8. Сжатие множества допустимых решений ... 643
П.2.4.9. Минимальные значения критериев на множестве эффективных точек ... 645
П.2.4.10. Параметризация целевой функции ... 646
П.2.4.11. Целевое программирование ... 652

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. ПРИВЕДЕНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЧИСЛОВОЙ КВАДРАТНОЙ МАТРИЦЫ К КАНОНИЧЕСКОЙ ФОРМЕ. НАХОЖДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ И присоединенных ВЕКТОРОВ ... 657

П.3.1. Нильпотентные преобразования (операторы) ... 657
П.3.1.1. Нильпотентные преобразования ... 658
П.3.1.2. Корневые подпространства ... 659
П.3.1.3. Циклические подпространства ... 660

П.3.2. Алгоритмы канонического представления матриц ... 661
П.3.2.1. Алгоритм нахождения собственных и присоединенных векторов матрицы A для вещественных собственных значений ... 661
П.3.2.2. Комплексификация линейного оператора. Нахождение канонического представления для матриц с комплексными корнями ... 665

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ... 671

ТЕМА 1. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ... 671

ТЕМА 2. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ... 681

ТЕМА 3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА Л.С. ПОНТРЯГИНА ... 690

ТЕМА 4. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ ... 698

ТЕМА 5. АНАЛИТИЧЕСКОЕ КОНСТРУИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ (АКОР) ... 701

Т.5.1. Задача стабилизации объекта управления ... 701
Т.5.2. Метод диагонализации для решения алгебраического уравнения Риккати ... 703
Т.5.3. Задача АКОР для отслеживания известного задающего воздействия ... 704
Т.5.3.1. Первый подход ... 704
Т.5.3.2. Второй подход (задача построения линейного сервомеханизма) ... 706
Т.5.3.3. Задача АКОР-слежения со скользящим интервалом ... 706
Т.5.4. Задача АКОР-стабилизации для компенсации известного возмущающего воздействия ... 707
Т.5.5. Построение наблюдателя пониженного порядка ... 708

ТЕМА 6. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДАМИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ ... 713

ТЕМА 7. ОПТИМАЛЬНАЯ *L*-ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ ... 717

Т.7.1. Построение оптимального программного управления с помощью оптимальной *L*-проблемы моментов ... 717
Т.7.1.1. Оптимальная *L*-проблема моментов в пространстве «вход–выход» ... 719
Т.7.1.2. Оптимальная *L*-проблема моментов в пространстве состояний ... 720
Т.7.2. Нахождение оптимального управления с использованием грамиана управляемости (критерий — минимизация энергии) ... 721

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ ... 724

ЛИТЕРАТУРА ... 726

TEXTBOOK ANNOTATION

The textbook "Methods of Classic and Modern Control Theory" includes five volumes:

Volume I — "Description and Analysis of Automatic Control Systems"
Volume II — "Stochastic Dynamics of Automatic Control Systems"
Volume III — "Controllers Design"
Volume IV — "Automatic Control Systems Optimization Theory"
Volume V — "Methods of Modern Control Theory"

I. Characteristic features of the textbook

1. This textbook is addressed to the wide range of readers:

a) The beginning control theory students. It should be mentioned that this subject may be both an obligatory one evaluating the level of engineer's proficiency and an optional one.
b) Students and specialists resuming studies in the field of control theory because of expanding range of problems concerned with automation processes.
c) Students and specialists who want to refresh their knowledge by studying a part of the textbook that has not been included into engineering specialities curriculum.

The readers are to choose the material according to a particular tasks a), b), c) and to general curriculum opportunities. Taking into consideration the purpose of the textbook it should be noted that it presents sufficient material to make a proper choice.

2. Material introduction methods

The textbook attempts to provide readers with knowledge of control theory methods from fundamental concepts of control theory (control aims and concepts, control systems analysis, systems classification, analysis and synthesis of the main tasks and others) to its state-of-the-art issues. Getting a deep insight into the problems of control theory is impossible within the framework of current syllabus, that's why the subject matter of some trends has not been included into this textbook.

3. The level of readers' mathematical background

The authors have tried to set out the material in a simple and readily available form.

A scope of knowledge of higher mathematics necessary for understanding the contents corresponds to the syllabus for earlier stages of tuition at higher technical educational institutions.

The textbook implements concepts of functional analysis. The necessary information is given in corresponding section of the textbook. Owing to language application and the results of functional analysis bring about the more thorough discussion of the essence of each method, the opportunity of obtaining in-depth theoretical information as well as correlation of methods that seem entirely different at first sight.

4. Technical trend of the textbook

The subject matter of the textbook is given from the engineering point of view. The author stresses the main ideas of forming basis of methods but does not always adduce strict methodological proofs. The textbook is supposed to find simpler methods for solving practical tasks. Besides, the presentation of the materials is intended to help students realize the practicality of described methods.

In most cases the methods are reduced to computing algorithms. Tables and other additional materials are available to facilitate their application.

The main merit of the textbook is the outline of the use of particular control systems in the atomic industry for thermotechnical processes control:

The textbook presents principal, functional and structural circuits of the system.

It illustrates the calculations using particular algorithms.

It gives the analysis of the results, etc.

It is impossible to study control theory without mastering the engineering aspect. That is why the engineering aspect of formulating and solving practical tasks is emphasized throughout the course.

5. "Computing colouring" of the material

The contents of the book is characterized by a certain "computing colouring" because present-day computers make it possible to reduce greatly automatic control systems designing time, stressing thus the significance of numerical methods in automatic control theory.

The author of the textbook has tried to take into account that the computer-aided control system design depends on many factors:

The adequacy degree of system mathematical model.

The efficiency degree of numerical methods used in algorithmic support.

The availability of high-quality software.

The extent of using the creative ability of the researcher-designer.

II. The contents

1. Mathematical models of automatic control systems

The problems of mathematical description of singular and nonsingular linear and nonlinear control systems, systems with distributed constants, continuous discrete systems are considered in the textbook in detail. Much attention is paid to the state space method in linear systems which gives basically new possibilities of the system analysis and control laws synthesis. The description by Volterra series is described in nonlinear system class.

2. Deterministic analysis of automatic control systems

The system theory methods has been studied to solve the following problems:

a). The investigation of the steady-state singular, nonstationary and nonlinear systems:
- the criteria of stability are considered in detail;
- much attention is paid to nonlinear system class;

(The original material concerning the problems of stability is given in the corresponding chapter.)

b). The analysis of system performance in unstable mode and creation of output processes.

c). The investigation of performance accuracy in stable mode.

3. Statistic analysis of automatic control systems

The textbook deals with technical methods of the broad class ACS statistic research, including nonlinear and stochastically disturbed systems.

4. Filtration and control systems statistical synthesis

This chapter includes the following methods:

a). Optimal filter synthesis on basis of Kolmogorov–Wienner's theory as well as R. Calman and R. Busy.

b). Synthesis of optimal observers.

c). Synthesis of optimal analytical and nonlinear filters, described by Volterra series, etc.

5. Numerical methods of complex control system analysis under deterministic and stochastic inputs

Matrix operator method forms the basis for computer-aided control system investigation useful for algorithmization and programming.

6. Control objects identification

Formulation of identification problem for linear and nonlinear objects classes, its main aspects and engineering approach to its solution are outlined in this textbook.

7. Control system synthesis based on quality (controller synthesis)

Alongside with traditional methods of controller synthesis (frequency, modal control, dynamic compensation methods etc.), great attention is devoted to the application of mathematical programming due to the fact, that it determines general approach to optimization problems solution and is computer-aided.

8. Synthesis of optimal automatic control systems

The following problems were analysed:

a). Basis principles of calculus of variations;

b). Pontryagin's maximal principle including the problem of state variables;

c). Dynamic programming;

d). Linear-quadratic problems;

e). Method of moments;

f). Mathematical programming as applied to optimal program controls development.

9. Methods of up-to-date CAD theory

Methods include rough control systems synthesis, H-control theory and robust methods as well as the problems of multi-object and multi-criteria systems optimization as well as application of effective compromises, calculation tasks and design of adaptive and intellectual control systems, differential geometry methods application for control theory, etc.

Учебное издание

Константин Александрович ***Пупков***
Николай Дмитриевич ***Егупов***
Александр Иванович ***Баркин***
Евгений Михайлович ***Воронов***
Александр Петрович ***Курдюков***
Владимир Николаевич ***Пилишкин***
Виктор Михайлович ***Рыбин***
Виктор Николаевич ***Тимин***
Николай Васильевич ***Фалдин***
Николай Борисович ***Филимонов***
Михаил Михайлович ***Чайковский***

МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В пяти томах

Том 4

ТЕОРИЯ ОПТИМИЗАЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Редакторы *С.Н. Капранов, К.Ю. Савинченко*
Корректоры *Н.Г. Варварская, Т.В. Тимофеева*
Компьютерная верстка *А.Л. Репкин, М.Р. Фишер*

Изд. лиц. №020523 от 25.04.97. Подписано в печать 12.04.2004.
Формат 70×100 1/16. Печ. л. 46,5. Усл. печ. л. 60,5.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 2500 экз. Заказ №42

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
107005, Москва, 2-я Бауманская, 5

Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским отделом
филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана в г. Калуге
совместно с Издательским Домом «Манускрипт»

Отпечатано с готового оригинал-макета в ГП «Облиздат»
248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции
ОК–005–93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ISBN 5-7038-2192-4

9 785703 821923

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
совместно с Издательским домом «Манускрипт»
предлагает Вашему вниманию
цикл учебников и учебных пособий
«Методы теории автоматического управления»

Подготовлен к изданию: Учебник для вузов в 5-ти томах, рекомендованный Министерством образования РФ: К.А. Пупков, Н.Д. Егупов и др. «*Методы классической и современной теории автоматического управления*». Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова; издание второе, переработанное и дополненное.

1-й том: *Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления*;
2-й том: *Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления*;
3-й том: *Синтез регуляторов систем автоматического управления*;
4-й том: *Теория оптимизации систем автоматического управления*;
5-й том: *Методы современной теории автоматического управления*.

Вышли в свет:

1. Учебник для вузов, рекомендованный Министерством образования: К.А. Пупков, Н.Д. Егупов и др. «*Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления*». Под ред. Н.Д. Егупова. Твердый переплет, золотое тиснение, 744 с.
2. К.А. Пупков, В.Г. Коньков. «*Интеллектуальные системы*». Мягкая обложка, 348 с.
3. Учебное пособие, рекомендованное УМО вузов: Е.А. Микрин. «*Бортовые комплексы управления космическими аппаратами и проектирование их программного обеспечения*». Твердый переплет, золотое тиснение, 336 с.

Готовятся к изданию в 2004 г.:

1. В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко и др. «*Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза*».
2. К.А. Пупков, Н.Д. Егупов и др. «*Нестационарные системы: исследование, синтез и оптимизация*».
3. К.А. Пупков, В.И. Капалин. «*Идентификация систем человек–машина*».

Эти учебники, а также другие книги
Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана Вы сможете приобрести
в Издательском доме «Манускрипт»

248000, г. Калуга, ул. Баженова, 4
Тел./факс (0842) 57-31-87
E-mail: id_manuskript@mail.ru
Электронный магазин: www.manuskript.ru