ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

ЧАСТЬ I

Под общей редакцией А. В. Нетушила

Допущено
Министерством высшего и среднего
специального образования СССР
в качестве учебника для студентов,
специализирующихся по автоматике и телемеханике,
вычислительной и информационно-измерительной
технике

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1968

УДК 62-5
Т-338

*Л. С. Гольдфарб, А. В. Балтрушевич, Г. К. Круг,
А. В. Нетушил, Е. Б. Пастернак*

Рецензенты:
Кафедра Московского физико-технического института
Проф. Миролюбов Н. Н.

Теория автоматического управления. Ч. I. Коллектив авторов. Под ред. проф. А. В. Нетушила. Учебник. «Высшая школа», 28 л., 1967, стр. 1—424.

Книга написана в соответствии с программой подготовки специалистов по автоматике, измерительной и вычислительной технике. В ней изложена теория линейных непрерывных и импульсных автоматических систем при детерминированных воздействиях. В основу положены структурный подход к системе и частотные методы ее анализа и синтеза. Обращено внимание на моделирование; рассмотрены не только типовые звенья, но и более сложные, применительно к объектам с распределенными параметрами. С достаточной полнотой изложены вопросы исследования качества процессов управления и синтеза систем.

Учебник предназначен для студентов технических вузов, специализирующихся в области автоматики и телемеханики, вычислительной и информационно-измерительной техники. Может также служить для самостоятельного изучения теории линейных систем инженерами, работающими с системами автоматического регулирования и управления. Рисунков 287, таблиц 13, библиографий 29.

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, Ч. I

Лев Семенович Гольдфарб
Анатолий Васильевич Балтрушевич
Герман Карлович Круг
Анатолий Владимирович Нетушил
Евгений Борисович Пастернак

Редактор С. М. Оводова
Художник В. З. Казакевич
Технический редактор С. П. Передерий
Корректор А. Н. Видревич

Т-03427 Сдано в набор 20/II — 67 г. Подп. к печати 26/III — 68 г.
Формат 60×90/16. Объем 26,5 п. л. Уч.-изд. л. 22,95 Изд. № СТД-26 Заказ 2092
Тираж в пер. № 7 5.000 экз. Цена 98 коп.
Тираж в пер. № 8 45.000 экз. Цена 93 коп
Тематический план изд-ва «Высшая школа» (вузы и техникумы) на 1967 г.
Позиция № 95
Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Отпечатано с матриц 13-й типографии в Московской типографии № 4 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Б. Переяславская, 46.

3—3—13
———
95—67

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый читателю учебник представляет собой изложение первой части курса теории автоматического управления, или теории автоматического регулирования и управления, читающегося авторами в Московском энергетическом институте для специальностей «Автоматика и телемеханика», «Вычислительная техника» и «Информационно-измерительная техника».

Этот курс в течение ряда лет читался в МЭИ доктором технических наук, профессором Л. С. Гольдфарбом. Конспект лекций Л. С. Гольдфарба был издан в МЭИ в 1960, 1962 и 1965 гг. и пользуется широкой известностью.

В соответствии с новыми программами, в дальнейшем курс был расширен за счет ряда новых вопросов.

Это потребовало методической переработки классического материала первой части курса с целью более компактного изложения основных положений теории линейных систем при детерминированных воздействиях, иллюстрированных рядом примеров, расширения вопросов оценки качества систем и их синтеза.

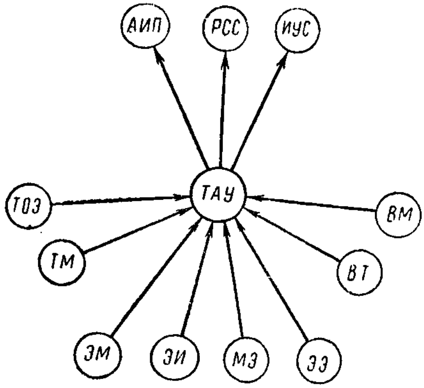
В настоящем учебнике излагается теория линейных систем автоматического регулирования при детерминированных воздействиях, включающая непрерывные и импульсные системы.

При изложении теории импульсных систем приводится ряд примеров, относящихся преимущественно к цифровым системам. Последовательность изложения непрерывных и импульсных систем одинакова. Это дает возможность некоторым лекторам при изложении материала рассматривать непрерывные и импульсные системы совместно.

Во второй части учебника будут рассмотрены линейные системы при случайных воздействиях, нелинейные и самонастраивающиеся системы.

При изложении материала данного учебника, в соответствии с учебными планами специальностей, предполагается, что учащиеся перед изучением курса теории автоматического управления *ТАУ* уже изучили необходимые разделы курсов (см. рис.) теоретических основ электротехники *ТОЭ*, высшей математики *ВМ*, теоретической механики *ТМ* и вычислительной техники *ВТ*, а также знакомы с объектами и элементами автоматики из курсов электрических машин *ЭМ*, электрических измерений *ЭИ*, магнитных *МЭ* и электронных элементов *ЭЭ* автоматики.

На курсе теории автоматического управления базируются последующие курсы автоматических измерительных приборов *АИП*, регуляторов и следящих систем *РСС*, информационно-управляющих систем *ИУС* и др.



Для исключения дублирования материала в различных курсах требуется хорошее согласование программ. В связи с этим в приложении к книге приведено краткое изложение вопросов, излагаемых в курсе математики, необходимых для данного курса.

Также предполагается, что к началу курса *ТАУ* студентам известно математическое описание процессов в электрических машинах, измерительных устройствах, электронных и магнитных усилителях и они знакомы с аналоговыми вычислительными устройствами.

Некоторые вопросы, как, например, системы управления переменного тока, в курсе не рассматриваются, так как их изучение составляет самостоятельный раздел курса следящих систем и регуляторов.

Работа над книгой распределялась между авторами следующим образом: главы I—VI написаны А. В. Нетушилом; главы VII—VIII и § 9.5 — Л. С. Гольдфарбом и несколько расширены А. В. Нетушилом за счет включения дополнительных примеров; главы IX, X — Е. Б. Пастернаком; глава XI — Г. К. Кругом и главы XII—XIV — А. В. Балтрушевичем. Общее редактирование рукописи выполнено А. В. Нетушилом.

При написании книги авторы стремились сохранить стиль изложения Л. С. Гольдфарба, отличавшийся простотой и доступностью.

При подготовке рукописи к печати большую помощь оказали сотрудники кафедры Автоматики и телемеханики ст. инж. В. В. Бурляев и инж. Д. А. Белова, которым авторы весьма признательны.

Авторы также считают своим приятным долгом выразить благодарность проф. Н. Н. Миролюбову и проф. А. Я. Лернеру за ряд ценных замечаний, сделанных ими при рецензировании рукописи, и доц. Е. Л. Львову, доц. В. А. Петровой, ст. преподавателю Г. С. Чхартишвили, доц. Н. М. Александровскому, доц. А. А Сиротину за обсуждение рукописи перед ее опубликованием.

Все замечания по книге просьба направлять в издательство «Высшая школа» по адресу: Москва, К-51, Неглинная, 29/14.

Глава I

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ОБЪЕКТОВ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1.1. ВВЕДЕНИЕ

Курс теории автоматического управления ставит свой целью ознакомление учащегося с общими принципами построения систем автоматического управления, с процессами и методами исследования процессов в этих системах. Принципы построения систем автоматического управления связаны с общими законами управления, значение которых выходит далеко за пределы технических задач. Однако теория автоматического управления сформировалась в самостоятельную науку, в первую очередь, на основе изучения процессов управления техническими устройствами. Изучение принципов построения и исследования систем управления в данном курсе производится на основе рассмотрения управления различными техническими устройствами. Рассматриваемые принципы управления имеют более широкий общий смысл и могут быть применены при изучении процессов управления в совершенно иных системах, например в биологических, экономических, общественных и др.

Развитие техники автоматического управления связано с проблемой замены человека в различных звеньях управления производственными процессами. В Программе КПСС исключительное значение придается автоматизации и механизации производства как основы создания материально-технической базы коммунизма. В Программе КПСС прямо записано, что в течение ближайшего двадцатилетия «ускорится внедрение высокосовершенных систем автоматического управления. Получат широкое применение кибернетика, электронные счетно-решающие и управляющие устройства в производственных процессах промышленности, строительной индустрии и транспорте, в научных исследованиях, в плановых и проектно-конструкторских расчетах, в сфере учета и управления».

Кибернетика — наука об оптимальном, целенаправленном управлении сложными системами — основывается на изучении объектов управления при внешних воздействиях на них, получении информации о протекании процессов в этих объектах и на выработке управляющих воздействий, обеспечивающих оптимальное в определенном заданном смысле состояние управляемых объектов.

Объектами управления могут быть: живые организмы (животные, растения), коллективы людей, производственные предприятия, заводы, цехи, отдельные станки, машины. В зависимости от объекта и задачи управления системы управления могут быть различными — от самых простых систем автоматического регулирования, поддерживающих неизменной какую-либо величину (например, напряжение, температуру или давление), до сложных, содержащих десятки вычислительных машин, решающих задачи оптимального управления множеством объектов.

В настоящем курсе в качестве объектов управления рассматриваются технические устройства и, в первую очередь, наиболее простые.

Наука об управлении техническими устройствами называется *технической кибернетикой.*

Разделами технической кибернетики являются теория информационных устройств, связанная со сбором и переработкой информации, необходимой для управления системой человеком, и теория автоматического управления, связанная с управлением системой без непосредственного участия человека.

Проблема исследования функционирования человека в системе управления техническими устройствами представляет самостоятельный раздел технической кибернетики, известный под названием «Человек и автомат».

В основу теории автоматического управления положена теория автоматического регулирования, которая сформировалась в самостоятельную научную дисциплину только к 1940 году. Регулирование представляет собой простейшую разновидность управления.

Автоматическим регулированием называется поддержание постоянной некоторой заданной величины, характеризующей процесс, или изменение ее по заданному закону, осуществляемое при помощи измерения состояния объекта или действующих на него возмущений и воздействия на регулирующий орган объекта [Л. 1].

Управление охватывает бóльший круг задач. Под *автоматическим управлением понимается автоматическое осуществление совокупности воздействий, выбранных из множества возможных на основании определенной информации и направленных на поддержание или улучшение функционирования управляемого объекта в соответствии с целью управления* [Л. 1].

Сравнивая определения управления и регулирования, можно заключить, что все задачи регулирования входят в состав задач управления как более простые случаи.

Кроме того, задачи автоматического управления охватывают такие вопросы, как адаптация, или самонастройка системы управления, в соответствии с изменением ее параметров или внешних воздействий, вопросы обеспечения оптимального функционирования системы управления при различных условиях, автоматический выбор наилучших режимов из нескольких возможных и др., не входящих в круг задач автоматического регулирования.

Теория автоматического управления включает в себя теорию автоматического регулирования как основную и наиболее разработанную часть однако она ставит перед собой и более сложные задачи управления, рассматриваемые в последней части курса.

В начале курса термины регулирование и управление часто применяются как синонимы, однако в последней части различие между ними проявляется с полной определенностью.

Теория автоматического управления как научная дисциплина переживает стадию формирования. Ряд вопросов, выходящих за пределы классической теории автоматического регулирования, еще находится в состоянии становления.

§ 1.2. ОБЪЕКТ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Система автоматического управления может быть представлена двумя основными частями: управляемым объектом (или сокращенно — объектом) и управляющим устройством.

В качестве объекта управления может рассматриваться как управляемое техническое устройство, так и более простая система управления. Во втором случае речь идет о некоторой иерархической системе управления, в которой система управления более сложная включает в себя управляемую ею более простую систему или подсистему. Обычно элементарными системами являются системы регулирования.

Первоначально рассмотрим объекты управления в более простых системах.

Состояние объекта определяется рядом величин, характеризующих как воздействие на объект внешней среды и управляющих устройств, так и протекание процессов внутри самого объекта.

Одни из этих величин непрерывно измеряются в процессе работы и называются *контролируемыми.* Другие, оказывая влияние на режим работы объекта, не измеряются и называются *неконтролируемыми.*

Величины, выражающие внешние влияния на объект, носят название *воздействий.*

Воздействия, вырабатываемые управляющим устройством, называются *управляющими величинами*, или *управляющими воздействиями.*

Воздействия, не зависящие от управляющего устройства, называются *возмущениями*. Возмущения можно подразделить на два вида: а) нагрузка; б) помехи. Наличие изменяющейся во времени нагрузки обусловлено работой объекта, от нее объект принципиально не может быть защищен. Помехи бывают связаны с побочными нежелательными явлениями и всякое уменьшение их улучшает работу объекта.

Контролируемые величины, по которым ведется управление, носят название *управляемых, или регулируемых, величин*. Обычно регулируемые величины в той или иной степени характеризуют качественные показатели процесса в управляемом объекте.

В общем случае объект управления *ОУ* может быть представлен схемами, показанными на рис. 1.1, *а* и *б*. Здесь совокупность контролируемых внешних воздействий обозначена вектором $\mathbf{Z}=\{z_1, z_2, ..., z_r\}$, неконтролируемых внешних воздействий — вектором $\mathbf{F}=\{f_1, f_2, ..., f_k\}$, управляющих воздействий — вектором

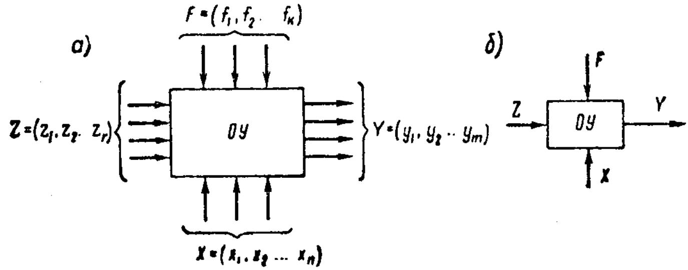


Рис. 1.1

$\mathbf{X} = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, управляемых величин — вектором $\mathbf{Y} = \{y_1, y_2, ..., y_m\}$. Если известно математическое описание объекта, то известна и система уравнений, связывающая управляемые величины со всеми внешними воздействиями на объект.

При известных начальных условиях эта система уравнений дает возможность по внешним воздействиям $\mathbf{X}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{F}$ найти выходные управляемые величины $\mathbf{Y}$.

Если объект характеризуется одной управляющей и одной управляемой величиной, т. е. векторы $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ имеют по одной координате, то объект называется *простым*, или *односвязным*. При наличии нескольких взаимно связанных координат векторов $\mathbf{X}$ и $\mathbf{Y}$ объект называется многосвязным.

Каждый объект управления может рассматриваться в условиях статики и динамики. В первом случае и внешние неуправляемые воздействия $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{F}$, и управляющие воздействия $\mathbf{X}$ рассматриваются постоянными, не зависящими от времени. Характеристиками объекта являются зависимости управляемых величин от внешних воздействий

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}\{\mathbf{X}, \mathbf{Z}, \mathbf{F}\}. \tag{1.1}$$

Если объект подвержен гармоническим воздействиям, то в установившемся режиме он также может быть описан соотношением между не зависящими от времени величинами, например амплитудами и фазами гармонических воздействий. В этом случае его рассмотрение сводится к квазистатическому, или стационарному, случаю, для которого также может быть применено уравнение (1.1).

При изучении динамики исследуется зависимость $\mathbf{Y}(t)$ при заданных изменениях внешних воздействий $\mathbf{Z}(t)$, $\mathbf{F}(t)$ и $\mathbf{X}(t)$. В этом случае уравнение (1.1) принимает вид системы дифференциальных уравнений.

Если эта система может быть сведена к системе линейных дифференциальных уравнений, то объект называется *линейным.*

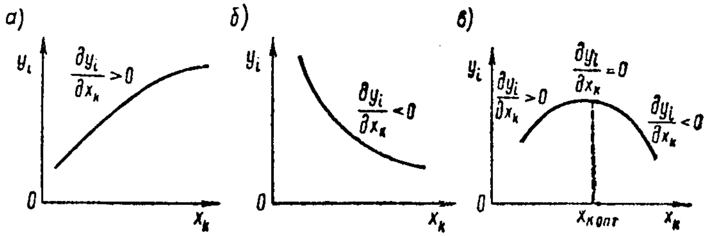


Рис. 1.2

При описании объекта системой нелинейных дифференциальных уравнений его относят к *нелинейным.*

При изучении статики основной интерес представляет зависимость управляемой величины $\mathbf{Y}$ от управляющего воздействия $\mathbf{X}$. Эта характеристика носит название *статической характеристики управления*. Характеристики управления $y_i = y_i(x_k)$ могут быть монотонными, когда $\frac{\partial y_i}{\partial x_k}$ нигде не меняет знака (рис. 1.2*а* и *б*), и экстремальными, когда при некоторых, обычно оптимальных, значениях управляющей величины $x_k = x_{k.\,опт}$ производная $\frac{\partial y_i}{\partial x_k} = 0$ и меняет знак (рис. 1.2, *в*).

Объект управления может быть *устойчивым, неустойчивым* и *нейтральным.*

Объект *устойчив,* если после окончания внешнего воздействия он с течением времени возвратится к исходному состоянию или близкому к нему.

Нелинейные объекты могут быть устойчивы в «малом» — при малых воздействиях и неустойчивы в «большом» — при больших воздействиях.

Статические характеристики имеют смысл только для устойчивых объектов управления. Если в устойчивом объекте воздействие, например x_k, в течение некоторого времени τ изменится на Δx_k (рис. 1.3), то после окончания этого воздействия управляемая величина y_i по истечении некоторого времени приходит в исходное состояние или близкое к нему.

Для таких объектов может быть предложена механическая аналогия в виде шарика в лунке, который может быть смещен при внешнем воздействии, однако возвращается обратно по окончании воздействия (рис. 1.3, *а*, внизу). Устойчивые объекты иногда называются *объектами с самовыравниванием.*

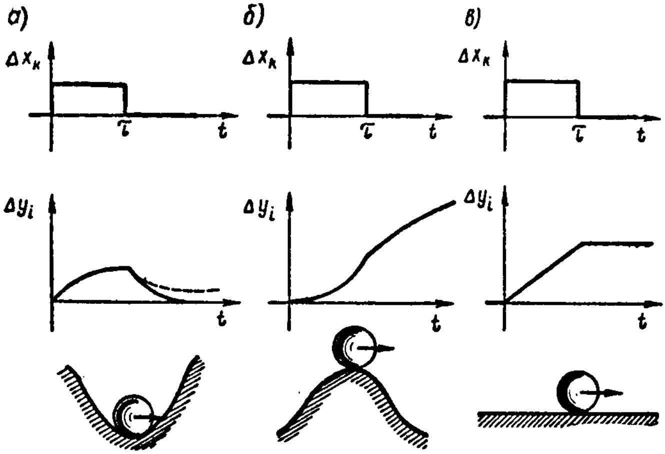


Рис. 1.3

В *неустойчивом объекте* по окончании воздействия, как бы мало оно ни было, управляемая величина продолжает изменяться. Для этих объектов механическая аналогия имеет вид шарика на вершине холма (рис. 1.3, *б*, внизу). По окончании импульса шарик продолжает удаляться от положения равновесия.

Нейтральными объектами являются такие, в которых по окончании воздействия устанавливается новое состояние равновесия, отличное от первоначального и зависящее от произведенного воздействия. Шарик на горизонтальной плоскости является механической аналогией этого типа объектов (рис. 1.3, *в*). Нейтральные объекты иногда называются *объектами без самовыравнивания.*

Один и тот же объект при нелинейной его характеристике в зависимости от режима работы может находиться в устойчивом, неустойчивом и нейтральном состояниях.

Установившиеся и переходные процессы в объектах могут изучаться при регулярных и случайных внешних воздействиях.

§ 1.3. ПРИМЕРЫ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим некоторые наиболее простые примеры объектов управления, которые будут использованы в дальнейшем при описании различных принципов автоматического управления.

При этом в основном будут рассмотрены объекты с монотонной характеристикой управления, так как они будут служить объектами систем управления, изучаемых в первой части курса.

Объекты с экстремальными характеристиками и более сложные, не имеющие математического описания, рассматриваются только в той степени, которая необходима для общего представления о более сложных системах управления.

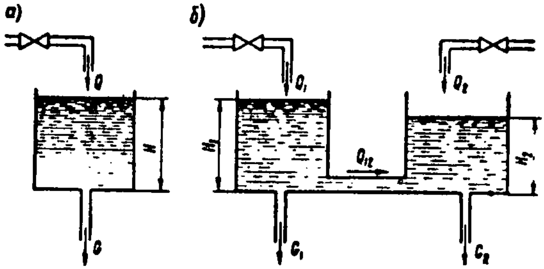


Рис. 1.4

Объекты с монотонной характеристикой описываются на примерах гидравлических, электромеханических, тепловых и аэромеханических объектов, располагаемых в порядке нарастания сложности их математического описания.

Примеры уравнений объектов рассматриваются для простейших случаев при пренебрежении рядом менее существенных факторов. Суждение об устойчивости объектов приводится без необходимых доказательств или для простейших случаев вытекает из рассмотрения дифференциальных уравнений первого порядка.

Гидравлический резервуар, пример простейшего объекта автоматического управления, показан на рис. 1.4, *а*. Управляющим воздействием x является скорость притока воды в резервуар Q; управляемой величиной y — уровень воды в резервуаре H, а внешним возмущением — расход воды из резервуара G.

Между величинами Q, H и G может быть написана следующая зависимость:

$$S \cdot \frac{dH}{dt} = Q - G, \tag{1.2}$$

где S — площадь поперечного сечения резервуара.

Уравнение (1.2) представляет собой математическое описание рассматриваемого простейшего объекта. Легко заметить, что рассматриваемый объект нейтрален, так как при $Q=0$, $G=0$ и $H=H_0$ кратковременное увеличение Q (после снижения Q до нуля) приведет к повышению уровня H и переходу к новому состоянию $H_0'>H_0$, что соответствует графику, показанному на рис. 1.3, *в*. Так как возрастание Q приводит к увеличению $\frac{dH}{dt}$, то характеристика объекта является монотонной.

При наличии двух сообщающихся резервуаров (рис. 1.4, *б*) объект будет описан системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} S_1\frac{dH_1}{dt} &= Q_1 - G_1 - Q_{12}; \\ S_2\frac{dH_2}{dt} &= Q_2 - G_2 + Q_{12}, \end{aligned}\right\} \qquad (1.3)$$

где $Q_{12}=Q_{12}(H_1-H_2)$ представляет собой некоторую в общем случае нелинейную монотонную функцию.

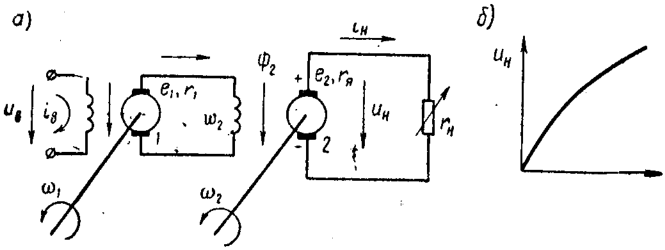


Рис. 1.5

Уравнения (1.3) представляют собой математическое описание объекта, в котором каждый из векторов управляемых величин и воздействий имеет по две компоненты

$$\mathbf{X}=\{Q_1, Q_2\},\ \mathbf{Y}=\{H_1, H_2\},\ \mathbf{F}=\{G_1, G_2\}.$$

При этом каждый из уровней H_1 и H_2 зависит от величин Q_1, Q_2, G_1 и G_2 и, следовательно, объект многосвязный.

В электрическом генераторе постоянного тока, в зависимости от задачи управления, регулируемыми величинами могут быть ток, напряжение или мощность на выходе генератора.

Наиболее часто необходимо поддерживать постоянным напряжение на зажимах генератора; в этом случае регулируемой величиной будет напряжение на нагрузке $y_1=u_н$ (рис. 1.5, *а*).

Управление генератором производится со стороны обмотки возбуждения. Если основной генератор *2* имеет еще и вспомогательный возбудитель *1* (см. рис. 1.5, *а*), то управляющей величиной x_1 служит ток возбуждения возбудителя $i_в$. Внешними воздействиями для генератора являются: изменения скорости вращения вала генератора ω_2 и возбудителя ω_1, сопротивления нагрузки $r_н$ или тока нагрузки $i_н$, смещение щеток относительно полюсов машины, износ коллектора, изменение магнитных характеристик стали и воздушных зазоров машины и т. п. Некоторые из этих воздействий, например ток нагрузки $i_н$ или скорости вращения ω_1 и ω_2, могут измеряться и, следовательно, могут быть отнесены к категории контролируемых величин, остальные не поддаются контролю и относятся к числу неконтролируемых.

Если величина $i_в$ измеряется, а величины ω_1 и ω_2 не измеряются, то для рассматриваемого объекта $z_1 = i_н$, $f_1 = \omega_1$, $f_2 = \omega_2$. Дифференциальные уравнения, устанавливающие зависимость между $u_н$, $i_н$, ω_1, ω_2 и $i_в$, определяют математическое описание объекта.

Для схемы, показанной на рис. 1.5, эти уравнения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 &= \phi_1(i_в); \\ e_1 &= c_1\omega_1\phi_1 = i_1 r_1 + w_2 \frac{d\phi_2}{dt}; \\ \phi_2 &= \phi_2(i_1); \\ e_2 &= c_2\omega_2\phi_2 = u_н + i_н r_я. \end{aligned}\right\} \qquad (1.4)$$

Здесь e_1 и e_2 — э. д. с., наводимые соответственно в якорях вспомогательного и основного генераторов; $\phi_1(i_в)$ и $\phi_2(i_1)$ — зависимости потоков намагничивания генераторов от токов их возбуждения.

При составлении уравнений пренебрегли реакцией якоря, магнитным рассеянием, вихревыми токами в магнитной системе и рядом менее существенных факторов.

Коэффициенты пропорциональности c_1 и c_2 являются параметрами объекта и зависят от обмоточных данных якорей генераторов и положения щеток относительно полюсов машины.

Система уравнений (1.4) при заданных начальных условиях полностью определяет зависимость $u_н$ от $i_в$, $i_н$, ω_1, ω_2 и может служить математическим описанием объекта.

Для электрического генератора с независимым возбуждением характеристика управления $u_н = u_н(i_в)$ носит монотонный характер, и с ростом тока возбуждения напряжение на нагрузке растет (рис. 1.5, *б*).

Рассматриваемый генератор представляет собой устойчивый объект, и для него при импульсном изменении управляющей величины $\Delta x_k = \Delta i_в$ изменение управляемой величины $\Delta y_l = \Delta u_н$ носит такой характер, как показано на рис. 1.3, *а*. При наличии гистерезиса по окончании импульса напряжение на зажимах генератора может несколько отличаться от первоначального (см. пунктир на рис. 1.3, *а*).

В электрическом двигателе постоянного тока управление скоростью вращения вала может производиться со стороны питания цепи якоря или обмотки возбуждения (рис. 1.6, *а*).

В первом случае управляющей величиной является напряжение $u_я$ или ток $i_я$ в цепи якоря, а во втором случае — напряжение $u_в$ или ток $i_в$ питания обмотки возбуждения.

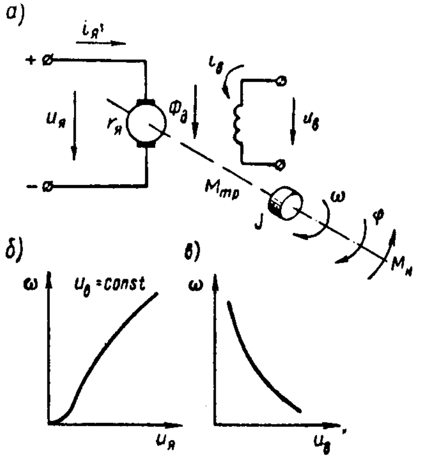


Рис. 1.6

Регулируемой величиной для двигателя обычно служит угол поворота вала двигателя φ или скорость его вращения $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$. В этом случае $y_1 = \varphi$ или $y_1 = \omega$.

Под внешними воздействиями понимаются силы, действующие на вал двигателя, обусловленные трением и инерцией приводимого в движение механизма. Если управление двигателем производится со стороны якоря двигателя, то изменения напряжения или тока питания обмотки возбуждения могут рассматриваться как внешние воздействия, и, наоборот, при управлении двигателем со стороны обмотки возбуждения внешними воздействиями должны рассматриваться изменения напряжения или тока питания цепи якоря.

Если, например, управляющим воздействием x_1 является напряжение питания якоря $u_я$, то по величине тока якоря можно судить о нагрузке на валу двигателя, и ток якоря $i_я$ может являться контролируемой величиной, характеризующей внешние воздействия z_1.

Под неконтролируемыми воздействиями для двигателя понимаются силы, действующие на вал двигателя, изменения параметров двигателя, обусловленные нагревом, механическими воздействиями, износом, смещением щеток и т. п.

Процессы в электрическом двигателе, так же как и в генераторе, могут быть описаны математически. Система дифференциальных уравнений двигателя имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} Ф_д &= Ф_д(i_в); \\ u_я &= i_я r_я + c_1 \omega Ф_д; \\ a_1 i_я Ф_д &= J\frac{d\omega}{dt} + M_{тр} + M_н; \\ M_{тр} &= M_{тр}(\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (1.5)$$

Здесь $\phi_д(i_в)$ и $M_{тр}(\omega)$ — обычно нелинейные функции;
J — момент инерции механизма, приведенный к оси двигателя;
$M_н$ — момент нагрузки на валу двигателя;
$M_{тр}$ — момент трения на валу двигателя.

Коэффициенты пропорциональности c_1 и a_1 являются параметрами двигателя и определяются его конструкцией. Так же как и при рассмотрении генератора, реакцией якоря, магнитным рассеянием и влиянием вихревых токов пренебрегли.

При управлении со стороны якоря характеристика управления двигателем $\omega = \omega(u_я)$ носит монотонный характер и с ростом напряжения питания якоря скорость вращения вала растет (рис. 1.6, *б*). При управлении со стороны обмотки возбуждения характеристика управления двигателя $\omega = \omega(u_в)$ носит монотонный характер, но с ростом напряжения на обмотке возбуждения скорость вращения вала падает (рис. 1.6, *в*). Обе эти зависимости непосредственно вытекают из рассмотрения системы уравнений (1.5) при $\frac{d\omega}{dt} = 0$ и монотонном характере зависимостей $\phi_д(i_в)$, $M_н(\omega)$ и $M_{тр}(\omega)$.

Расчет динамических процессов при управлении двигателем со стороны обмотки якоря значительно проще, чем при управлении со стороны обмотки возбуждения, так как в последнем случае уравнения (1.5) имеют переменный коэффициент $\phi_д$ при неизвестной ω.

Однако в обоих рассматриваемых случаях управления скоростью двигателя ω объект устойчив и переходные процессы при импульсном воздействии на управляющие величины подобны графикам $\Delta\omega = \Delta y_i(t)$, представленным на рис. 1.3, *а* (график, показанный пунктиром, соответствует наличию трения в системе).

В случае управления со стороны якоря $\frac{\partial y_i}{\partial x_к} = \frac{\Delta\omega}{\Delta u_я}$ — положительно, а при управлении со стороны обмотки возбуждения $\frac{\partial y_i}{\partial x_к} = \frac{\Delta\omega}{\Delta u_в}$ — отрицательно.

По отношению к изменению угла φ

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^t \omega\, dt \tag{1.6}$$

двигатель является нейтральной системой. В этом случае управление производится со стороны якоря и в установившемся состоянии $u_я = 0$ и $\omega = 0$.

Примем за начало отсчета угла поворота вала двигателя положение $\varphi_0 = 0$. Тогда при импульсе напряжения на управляющей стороне вал двигателя повернется на некоторый угол;

после снижения управляющего напряжения до нуля вал двигателя остановится в новом положении $\varphi_1 = \int\limits_0^t \omega dt$. Примерные графики $u_я(t)$ и $\varphi(t)$ для этого случая показаны на рис. 1.7.

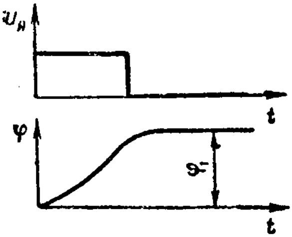


Рис. 1.7

Асинхронный двигатель, в зависимости от рабочей точки на его характеристике, может быть устойчивым или неустойчивым объектом.

Управление асинхронным двигателем, в зависимости от режима его работы, может протекать в различных условиях.

Рассмотрим асинхронный двигатель (рис. 1.8, *а*), нагрузка на валу которого характеризуется инерционными массами с моментом инерции J и не зависящим от скорости вращения моментом $M_н$.

Управление двигателем производится путем изменения трехфазного напряжения питания U, имеющего частоту f.

Зависимость момента, развиваемого на валу двигателя $M_д$, от угловой скорости вращения его вала ω показана на рис. 1.8, *б*.

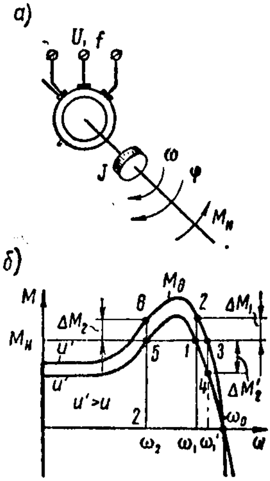


Рис. 1.8

При некотором значении скорости момент, развиваемый двигателем, достигает максимального значения и далее, по мере приближения скорости к синхронной, убывает до нуля при

$$\omega = \omega_0 = \frac{2\pi f}{n},$$

где n — число пар полюсов.

Управляющей величиной здесь служит напряжение источника питания, а управляемой — скорость вращения вала двигателя. Контролируемым внешним воздействием может быть частота сети, неконтролируемыми воздействиями — изменения нагрузки, параметров двигателя, вибрации и т. п.

Приближенным математическим описанием процессов в двигателе может служить уравнение движения

$$M_д = J\frac{d\omega}{dt} + M_н \tag{1.7}$$

или

$$J\frac{d\omega}{dt} = M_д - M_н = \Delta M. \qquad (1.7, a)$$

Если ΔM по мере увеличения скорости вращения двигателя уменьшается, то режим устойчив. Если же возрастание ω

приводит к увеличению ΔM и, следовательно, к дальнейшему росту скорости, то режим неустойчив.

Рассмотрим параметры объекта, характеризующиеся зависимостью, показанной на рис. 1.8, *б*. Допустим для простоты, что $M_н$ не зависит от ω. Равенство нулю ΔM, а следовательно, и $\frac{d\omega}{dt}$ определяет две точки стационарного режима *1* и *5*.

В точке *1* при скорости вращения ω_1 возрастание напряжения до $U_1' > U_1$ приводит к разгону двигателя с ускорением $\frac{d\omega}{dt} = \frac{\Delta M_1}{J}$. Величина начального ускорения определяется отрезком *1—2* в соответствующем масштабе, выражающем ΔM_1.

Скорость двигателя будет возрастать до тех пор, пока не достигнет величины ω_1' (точка *3* на характеристике). Последующее уменьшение управляющего напряжения до первоначального приводит к отрицательному значению $\Delta M_2'$ (отрезок *3—4*) и замедлению двигателя до первоначальной скорости ω_1.

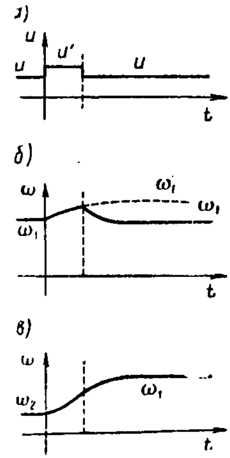


Рис. 1.9

Переходные процессы, соответствующие этому режиму, схематически показаны на рис. 1.9, *а*, *б* и характерны для устойчивых объектов.

В точке *5* при $\omega = \omega_2$ возрастание напряжения приводит к прогрессивно-нарастающему разгону двигателя. Величина начального ускорения $\frac{d\omega}{dt}$ определяется отрезком *5—6*, выражающим ΔM_2. По мере разгона двигателя и увеличения скорости ω эта величина возрастает до тех пор, пока скорость ω не превысит величину, для которой момент максимален; после чего $\frac{d\omega}{dt}$ начнет уменьшаться до тех пор, пока скорость не достигнет величины ω_1' в точке *3*. Снижение напряжения до первоначального значения не изменяет характера процесса. В этом случае скорость нарастает до величины ω_1. Переходный процесс, соответствующий этому неустойчивому режиму, показан на рис. 1.9, *а*, *б*.

Печи (топливные и электрические). Более сложным объектом управления является печь, нагрев которой производится путем сжигания топлива (рис. 1.10).

Для печи регулируемой величиной является температура в определенных точках ϑ_n. Управляющими величинами служат положения вентилей и шиберов u_1, u_2, u_3, u_4, регулирующих подачу горючего, приток воздуха и вытяжку газов. Внешними воздействиями являются изменения в составе и расходе горючего, в давлении воздуха системы, изменения тепловых параметров, связанных с загрузкой и выгрузкой печи. Некоторые из этих величин могут контролироваться (например, расходы и температура), однако большинство не поддается контролю.

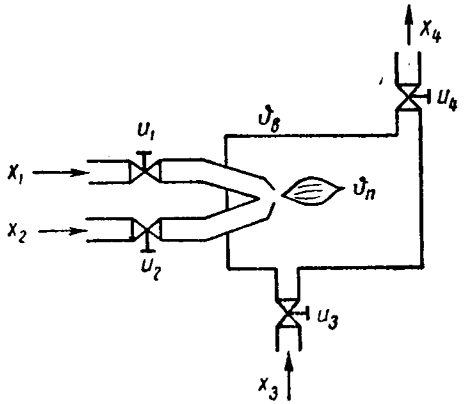


Рис. 1.10

Тепловой режим печи описывается сложной системой дифференциальных уравнений в частных производных, которые обычно дают приближенное представление о характере процессов в печи.

В приближенных расчетах систем, в которых управление ведется только путем изменения скорости подачи горючего в пламенных печах или мощности электрических нагревателей в электрических печах, математическое описание объекта может быть сведено к дифференциальному уравнению первого порядка.

Если Q — количество тепла, выделяемого в печи за единицу времени,— управляющая величина, а $\vartheta_{ср}$ — средняя температура печи (рис. 1.11,*а*), то уравнение теплового баланса может быть приближенно записано как

$$Q = g(\vartheta_{ср} - \vartheta_в) + C\frac{d\vartheta_{ср}}{dt}, \qquad (1.8)$$

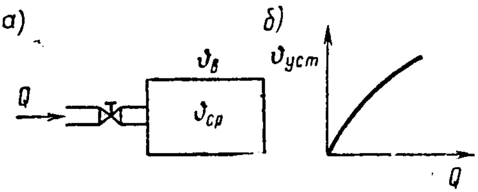


Рис. 1.11

где C — объемная теплоемкость печи,

g — коэффициент теплопроводности системы печь — окружающая среда, температура которой $\vartheta_в$.

Распределенный характер системы печь — нагреваемая деталь приближенно учитывается введением некоторого запаздывания между средней температурой печи $\vartheta_{ср}$ и температурой детали или некоторой точки печи ϑ, являющейся регулируемой величиной, измеряемой в процессе управления

$$\vartheta(t) = \vartheta_{ср}(t - \tau), \qquad (1.9)$$

где τ — некоторое эквивалентное время запаздывания.

В общем случае параметры печи g и C зависят от температуры и только в приближенных расчетах могут быть приняты постоянными.

Неконтролируемыми воздействиями являются изменения окружающей внешней температуры $\vartheta_в$, изменения теплоемкости печи C и изменения условий теплообмена g.

Зависимость между установившейся температурой печи $\vartheta_{уст}$ и количеством тепла, выделяемого в печи за единицу времени Q, выражается монотонной статической характеристикой управления (рис. 1.11, *б*).

Несколько сложнее описать математически процесс в электрических печах радиационного нагрева поверхности различных изделий. На рис. 1.12 схематически показана система радиационных нагревателей, излучающих тепло для нагрева поверхности массивного тела. Мощность, излучаемая на единицу поверхности изделия, в тепловых единицах

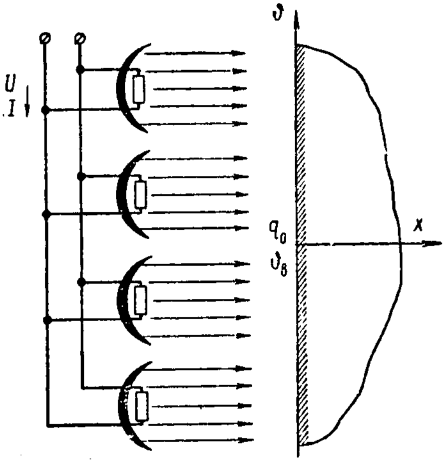


Рис. 1.12

$$q_0 = kUI,$$

где U и I — соответственно напряжение и ток нагревателей;
k — коэффициент пропорциональности, зависящий от излучателя и обратно пропорциональный поверхности облучения.

Управляющим воздействием служит напряжение питания излучателя U. Удельная мощность

$$q_0 = q_0(U) \tag{1.10}$$

нелинейно зависит от напряжения питания.

Управляемой величиной является температура нагрева поверхности изделия.

Внешние, большей частью неконтролируемые воздействия — различие в параметрах нагреваемых изделий, изменения параметров излучателей, условий теплоотвода с поверхности изделия и т. п.

Тепловой режим нагрева поверхности материала приближенно описывается одномерным уравнением Фурье для полуограниченного тела

$$\lambda \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} = c \frac{\partial \vartheta}{\partial t} \tag{1.11}$$

при начальных условиях

$$\vartheta(x, 0) = \vartheta_0(x) \tag{1.12}$$

и граничных условиях, определяемых теплообменом на поверхности изделия,

$$q_0 = -\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x}(0, t) + q_п[\vartheta(0, t), \vartheta_в]. \tag{1.13}$$

В уравнениях (1.11 ÷ 1.13) приняты следующие обозначения: c и λ — соответственно удельная объемная теплоемкость и удельная теплопроводность нагреваемого материала; x — координата точки материала, отсчитываемая от его поверхности; $\vartheta_в$ — температура воздуха, омывающего поверхность материала; $q_п$ — плотность теплового потока отвода тепла от поверхности тела в окружающее пространство, зависящая от температуры поверхности $\vartheta(0, t)$ и окружающей температуры $\vartheta_в$.

Решение этих уравнений дает возможность ориентировочно судить о переходных процессах нагрева деталей.

Рассмотренные примеры печей относятся к категории устойчивых объектов с самовыравниванием.

Управление углом тангажа летательного аппарата. Движение летательного аппарата состоит из двух составляющих: движения центра масс и вращения вокруг него. Каждое из этих движений обладает тремя степенями свободы и управляется силами тяги и рулями самолета.

Рассмотрим движение летательного аппарата, при котором вектор скорости центра масс лежит в вертикальной плоскости симметрии, перпендикулярной горизонту. Такое движение называется *продольным*. Оно характеризуется тремя степенями свободы: двумя составляющими скорости, лежащими в плоскости симметрии, и вектором угловой скорости вращения относительно центра масс, нормальным по отношению к плоскости симметрии.

Угол между горизонтом и продольной осью летательного аппарата называется *углом тангажа* ϑ (рис. 1.13).

Одна из задач управления, осуществляемая автопилотом, сводится к управлению углом тангажа, характеризующим продольное движение летательного аппарата. Управляемыми величинами являются скорость движения v и угол тангажа ϑ. Управление летательным аппаратом осуществляется с помощью изменения силы тяги R, совпадающей по направлению с продольной осью аппарата, и положения руля высоты (угол δ), изменяющего вращающий момент, поворачивающий аппарат в вертикальной плоскости симметрии.

Кроме того, на летательный аппарат действуют сила веса G, направленная вертикально, подъемная сила L, перпендикулярная вектору скорости v, сила лобового сопротивления N, направленная навстречу вектору скорости. На величины подъемной силы и силы лобового сопротивления оказывают существенное влияние плотность воздуха, скорость, высота над уровнем моря и т. п. Изменения этих величин в большинстве случаев относятся к неконтролируемым воздействиям, существенно влияющим на режим полета.

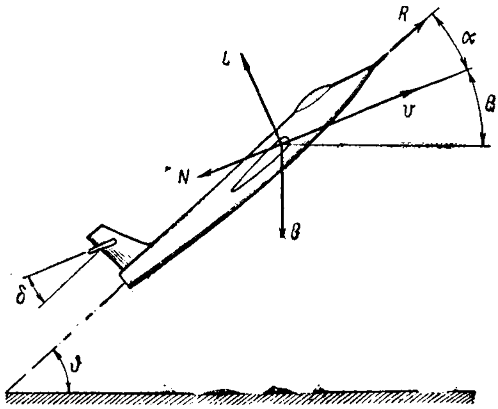


Рис. 1.13

Для нахождения математического описания объекта рассмотрим уравнения сил и моментов для продольного движения летательного аппарата.

Обозначим: α — угол между продольной осью аппарата и вектором скорости, называемый *углом атаки;* θ — угол между горизонтом и вектором скорости v, называемый *углом наклона траектории*. При этом (рис. 1.13)

$$\vartheta = \alpha + \theta. \tag{1.14}$$

Уравнения сил и моментов для рассматриваемой системы с тремя степенями свободы имеют следующий вид:

для оси, совпадающей с вектором скорости v,

$$m\frac{dv}{dt} = R\cos\alpha - N - G\sin\theta; \tag{1.15}$$

для оси, нормальной к вектору скорости,

$$mv\frac{d\theta}{dt} = R\sin\alpha + L - G\cos\theta; \tag{1.16}$$

для моментов сил, действующих в продольной плоскости,

$$J\frac{d^2\vartheta}{dt^2} = M, \tag{1.17}$$

где J — момент инерции летательного аппарата относительно оси, перпендикулярной продольной плоскости и проходящей через центр масс;

M — суммарный момент аэродинамических сил относительно той же оси.

В приведенной системе уравнений величины N, L и M представляют собой сложные нелинейные функции скорости, угла атаки и других величин, характеризующих полет. Выделив наиболее существенные факторы, можно эти зависимости представить так:

$$\left.\begin{aligned} N &= N(v,\ \alpha); \\ L &= L\ v,\ \alpha); \\ M &= M\left(v,\ \delta,\ \alpha,\ \dot{\vartheta} = \frac{d\vartheta}{dt}\right). \end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

В величины N, L и M в качестве слагаемых входят неконтролируемые механические воздействия на летательный аппарат (порывы ветра, воздушные течения и т. п.).

Система уравнений (1.14)-:-(1.18) дает возможность найти зависимость между управляющими воздействиями δ и R и управляемыми величинами v, θ и ϑ при заданных начальных условиях. Простейший случай рассмотрения этих уравнений для линейного приближения будет приведен в гл. II.

При полете, близком к горизонтальному, N и L возрастают с ростом v и α, а M, возрастая с ростом δ и ϑ, уменьшается при увеличении α и $\frac{d\vartheta}{dt}$.

При горизонтальном стационарном полете $\theta \approx 0$, $\frac{d^{\circ}}{d} \approx 0$ и $\frac{d^2\vartheta}{dt^2} \approx 0$. Уравнение (1.17) принимает вид $M = 0$.

Так как зависимости M от δ и α имеют различный характер, т. е. $\frac{\partial M}{\partial \delta}$ и $\frac{\partial M}{\partial \alpha}$ имеют разные знаки, то из уравнения $M = 0$ можно заключить, что в стационарном режиме с ростом δ угол атаки α монотонно возрастает и каждому значению δ соответствует определенное значение α.

Действительно, для этого случая

$$\frac{\partial M}{\partial \delta} \Delta\delta + \frac{\partial M}{\partial \alpha} \Delta\alpha = 0 \tag{1.20}$$

и, следовательно,

$$\Delta\alpha = -\left[\frac{\partial M}{\partial \delta} \Big/ \frac{\partial M}{\partial \alpha}\right] \Delta\delta = \mathrm{A} \cdot \Delta\delta, \tag{1.21}$$

где $\mathrm{A} > 0$.

Объекты с экстремальной статической характеристикой. Далеко не все объекты обладают монотонной характеристикой управления. Существует много различных объектов, для которых зависимость между управляющей и управляемой величинами имеет явно выраженный максимум или минимум. Так, например, зависимость между скоростью движения автомобиля и расходом горючего на один километр пробега имеет минимум при определенной оптимальной скорости. Движение с меньшей или большей скоростью, чем оптимальная, приводит к перерасходу горючего. В зависимости от регулировки двигателя и от условий пути, этот минимум несколько перемещается.

Вторым примером объекта с экстремальной характеристикой может служить система управления подачей долота при бурении скважин. Скорость бурения v (скорость подачи долота) зависит от давления на долото P так, что существует определенное давление $P_{\text{опт}}$, при котором скорость бурения максимальна. При меньших или больших значениях давления, чем $P_{\text{опт}}$, скорость

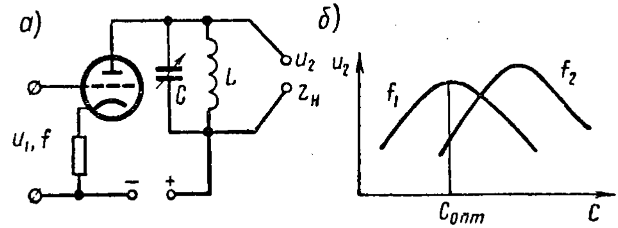


Рис. 1.14

бурения уменьшается. Аналогичные экстремальные характеристики имеют место при сверлении. Максимальная скорость сверления соответствует определенному оптимальному давлению на сверло.

В электрических устройствах, работающих в режиме резонанса, характеристика управления имеет экстремальный характер. В качестве одного из примеров подобных устройств рассмотрим выходной каскад генератора радиостанции. Упрощенная схема каскада показана на рис. 1.14, *а*.

На сетку электронной лампы поступает напряжение $u_1 = U_{1m}\sin 2\pi ft$. Напряжение u_2, поступающее на излучающую антенну, зависит от настройки в резонанс нагрузочного контура электронной лампы.

В качестве управляющей величины может быть принята регулируемая емкость C. Управляемой величиной является напряжение на антенне u_2. При некотором оптимальном значении емкости C напряжение на антенне и, следовательно, мощность излучения при заданной частоте f_1 максимальны.

Характеристика управления таким объектом показана на рис. 1.14, *б*.

С изменением частоты или емкости излучающего устройства характеристика изменяется (см. характеристику при частоте f_2). Внешними возмущающими воздействиями для данного объекта будут изменения частоты f, комплексного сопротивления излучения антенны $z_н$, напряжения питания и других параметров системы. Частота может быть как контролируемой, так и неконтролируемой величиной. Изменения параметров нерегулируемой части контура обычно не поддаются контролю.

Особенно существенно влияние изменения параметров резонансного контура, если нагрузкой служит не антенна радиопередающего устройства, а конденсатор, заполненный материалом, нагреваемым токами высокой частоты. В этом случае при изменяющихся в течение нагрева параметрах материала характеристики управления существенно изменяются и максимум характеристики смещается.

Более сложные объекты управления. В ряде производств химической, строительной, пищевой промышленности и других многие процессы не поддаются математическому

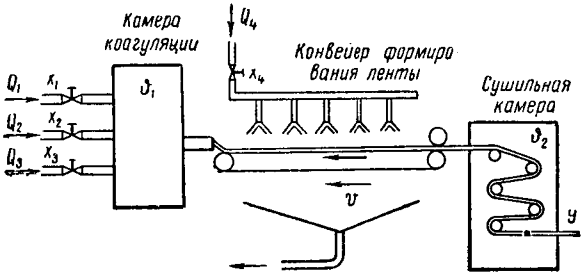


Рис. 1.15

описанию, а управление ими производится на основании многолетнего опыта эксплуатации.

Однако и в этих процессах могут быть очень четко выделены управляющие и управляемые величины, а также контролируемые и неконтролируемые воздействия.

В качестве примера одного из сложных объектов управления рассмотрим систему выделения каучука на лентоотливочной машине, схематически показанную на рис. 1.15.

В камеру коагуляции посредством вентилей, регулирующих скорость поступления материала, подаются компоненты: латекс (продукт полимеризации дивинил-стирольной шихты), масло, раствор поваренной соли, серная кислота, вода. В камере происходит смешение латекса с наполнителем и его коагуляция. Из камеры пульпа поступает на лентоотливочную машину, где на движущемся сите происходит промывка крошки, отделение от нее серума, формирование ленты и частичное удаление влаги.

Затем лента поступает в сушильную камеру, где ее влажность снижается до долей процента.

Показателями качества процесса являются производительность установки, конечная влажность ленты и ее механические свойства. Все эти величины измеряются на выходе агрегата и составляют вектор показателя качества **Y**. По этим величинам производится основное управление процессом и они являются управляемыми.

Управляющими воздействиями служат положения вентилей x_1, x_2, ..., регулирующих поступление материалов в камеру коагуляции, воды в лентоотливочную машину, скорость движения конвейера v и др.

В качестве контролируемых воздействий могут быть приняты изменения показателей качества латекса, процентное содержание в нем каучука, концентрация соли, изменения температуры сушильной камеры (ϑ_2) и т. п. (z_1, z_2, z_3 и т. д.).

Неконтролируемыми воздействиями являются неучитываемые примеси в компонентах, засорение сит лентоотливочной машины, колебания температуры в неконтролируемых точках и т. п.

Управление сложными процессами основывается на накоплении опыта эксплуатации. Современные технические средства автоматики дают возможность автоматизировать накопление опыта и решить задачу оптимального автоматического управления сложными процессами, не имеющими математического описания (см. § 1.5).

§ 1.4. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ ОБЪЕКТОВ

При изображении систем управления применяются два принципа — функциональный и структурный и, соответственно, схемы подразделяются на функциональные и структурные.

Функциональной схемой называется такая, в которой каждому функциональному элементу системы соответствует определенное звено.

Структурной схемой называется такая, в которой каждой математической операции преобразования сигнала соответствует определенное звено.

Все рассмотренные выше примеры объектов могут быть представлены общей функциональной схемой, показанной на рис. 1.1.

При этом внешние воздействия каждого вида (**X**, **Z**, **F**) и управляемая величина (**Y**) могут изображаться одной стрелкой (см. рис. 1.1, *б*).

В зависимости от полноты математического описания и от математических операций, выполняемых различными звеньями, для каждого из рассмотренных объектов могут быть составлены различные структурные схемы.

Рассмотрим структурные схемы, соответствующие некоторым из рассмотренных выше объектов.

Для структурного представления о гидравлическом резервуаре, изображенном на рис. 1.4, *а* и описанном уравнением

(1.2), достаточно ввести понятия интегрирующего звена и суммирующего узла. Структурная схема для этого объекта показана на рис. 1.16, *а*. Здесь суммирующий узел *1* изображен кругом, разделенным на четыре сектора. Сектор, к которому подводится суммируемая величина со знаком плюс, не зачернен, а сектор, к которому подводится суммируемая величина со знаком минус, зачернен.

Звено, осуществляющее операцию интегрирования, изображено соответствующим прямоугольником *2*.

Аналогично, применяя тот же принцип для представления уравнения (1.3) двух сообщающихся резервуаров, получаем более сложную схему для двухсвязного объекта, показанную на рис. 1.16, *б*. Здесь, кроме суммирующих узлов и интегрирующих звеньев, двойной рамкой показано нелинейное звено, преобразующее величину $\Delta H = H_1 - H_2$ в расход Q_{12}.

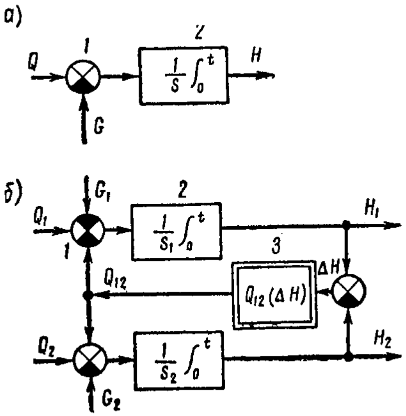


Рис. 1.16

Для рассмотренного на рис. 1.5, *а* двухкаскадного генератора постоянного тока, описываемого системой четырех уравнений (1.4), структурная схема показана на рис. 1.17. Здесь нелинейные зависимости $\phi_1(i_в)$ и $\phi_2(i_1 r_1)$ изображаются нелинейными звеньями *1* и *4*. Умножение величины ϕ_1 на $c_1\omega_1$ и ϕ_2 на $c_2\omega_2$ изображается звеньями умножения *2* и *5*, обозначенными косым крестом. Вычитание величины $w_2 \frac{d\phi_2}{dt}$ из e_1 и $i_н r_н$ из e_2 показано в суммирующих узлах *3* и *6*. Операция дифференцирования и умножения на w_2 выражается дифференцирующим звеном *7*. Показанная на рис. 1.17 схема состоит из трех типов звеньев (нелинейных, произведения и дифференцирования) и суммирующих узлов.

Для рассмотренного на рис. 1.6, *а* двигателя постоянного тока как объекта управления по системе дифференциальных уравнений (1.5) может быть составлена структурная схема, показанная на рис. 1.18, *а*. Она строится из суммирующих узлов и звеньев, выражающих операции умножения, нелинейного преобразования и интегрирования.

Управление по цепи якоря и обмотке возбуждения выражается на схеме двумя входами $u_я$ и $i_в$. Выходной величиной является скорость вращения вала двигателя ω.

Влияние параметров двигателя a_1, $r_я$, c_1 и момента нагрузки

$M_н$ на схеме изображается соответствующими воздействиями в суммирующих узлах и звеньях умножения.

Для асинхронного двигателя, показанного на рис. 1.8 и описанного уравнением (1.7), структурная схема показана на рис. 1.18, *б*.

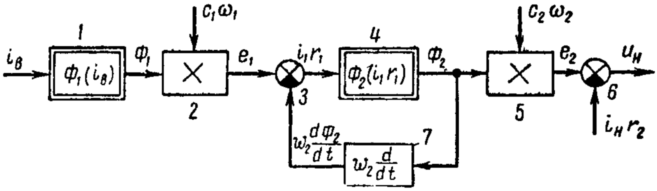


Рис. 1.17

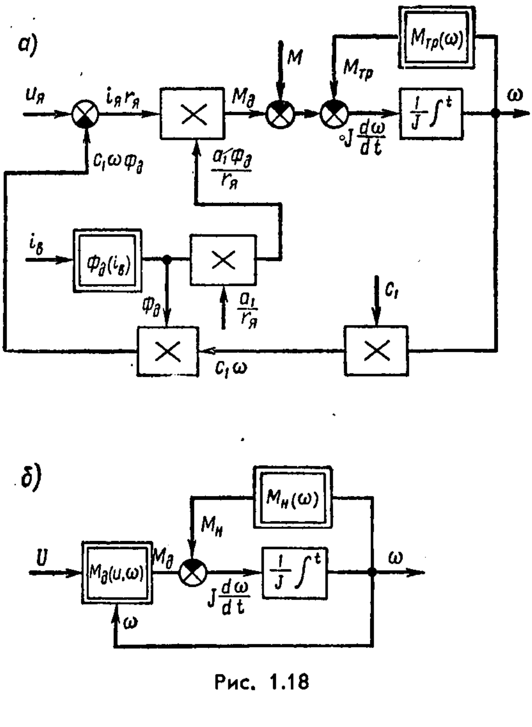


Рис. 1.18

Так как момент двигателя представляет собой нелинейную функцию двух переменных — напряжения питания U и скорости вращения вала двигателя ω, — то структурная схема объекта содержит соответствующий нелинейный элемент $M_д(U, \omega)$.

Если момент нагрузки зависит от скорости вращения вала двигателя, то эта зависимость выражается нелинейным звеном $M_н(\omega)$.

Применяя рассмотренный метод, можно построить соответствующие структурные схемы для любых объектов, описанных известными уравнениями. В качестве упражнения можно предложить читателю построить структурные схемы для объектов, показанных на рис. 1.11, 1.12 и 1.13.

Представление математического описания объекта в виде структурных схем имеет большое значение для расчета и моделирования систем автоматического управления.

Большинство рассмотренных объектов описывается нелинейными уравнениями и их анализ представляет большие трудности. Рассмотрение малых приращений воздействий позволяет линеаризовать уравнения, описывающие объекты. В этих случаях как уравнения, так и структурные схемы объектов могут быть значительно упрощены (гл. II).

§ 1.5. ПРИНЦИПЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В зависимости от характера информации, получаемой об объекте в процессе его работы, наличия его математического описания, статических характеристик объекта и главное — задачи, поставленной перед системой автоматического управления, принципы автоматического управления существенно различаются.

Если при рассмотрении объектов управления был получен ответ на вопрос: чем управлять, то теперь ставятся вопросы: с какой целью, как, какими средствами управлять объектом?

Задачи, поставленные перед системой управления, можно разделить на следующие группы.

1. *Стабилизация какой-либо управляемой величины.* В этом случае необходимо с заданной точностью поддерживать постоянными те или иные управляемые величины.

2. *Программное управление одной из управляемых величин.* При этом закон изменения управляемой величины может быть либо заранее известным и задаваться оператором, обслуживающим систему управления, либо автоматически соответствовать изменению какой-либо заранее неизвестной измеряемой величины. В первом случае регулирование называется программным, а во втором система управления называется следящей.

3. *Самонастройка системы на оптимум какого-либо из показателей объекта или системы.* Это может быть обеспечение и экстремального значения управляемой величины, и максимального быстродействия системы управления путем подстройки ее параметров, и режима работы объекта оптимального в определенном, заданном смысле. Самонастройка может сочетаться и со стабилизацией, и с программным управлением.

Системы управления разделяются на разомкнутые и замкнутые.

В *разомкнутых системах* управляющее воздействие задается без учета действительного значения управляемой величины на основании цели управления, характеристик объекта и известных внешних воздействий. Такое управление называется *жестким*.

В *замкнутых системах* управляющее воздействие формируется в непосредственной зависимости от управляемой величины.

Разомкнутые системы управления требуют отсутствия влияния неконтролируемых возмущений; применяются для стабилизации и программного управления, а также для дистанционного управления. Теория разомкнутых систем, связанная с вопросами теории релейных устройств и конечных автоматов, выходит за пределы программы данного курса, рассматривающего в основном замкнутые системы.

Стабилизация. В зависимости от информации об управляемом объекте и о внешних воздействиях на него, задача стабилизации может решаться различными путями. Если все внешние воздействия на объект контролируются и могут быть измерены, а свойства объекта и его динамические характеристики известны, то управление может вестись на основании результатов измерений контролируемых внешних воздействий. Такое управление называется *управлением по возмущению*, или *системой компенсации внешних воздействий*, и является примером разомкнутой системы управления. Схематически устройство, управляющее по возмущению, показано на рис. 1.19, *а*. Здесь неконтролируемые воздействия отсутствуют ($F \approx 0$), и задача управления решается путем нахождения функции

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}(\mathbf{Z}), \tag{1.22}$$

при которой обеспечивается условие

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}_0 = \text{const},$$

где $\mathbf{Y}_0$ — заданная уставка управляемой величины.

Регулятор, выполняющий эту задачу, обеспечивает *стабилизацию регулируемых величин* или *их инвариантность*, т. е. независимость от внешних воздействий.

При наличии неконтролируемых возмущений и при недостаточно полном математическом описании объекта регулирование по возмущению не может обеспечить стабилизации управляемой величины. В этом случае применяется принцип *управления по отклонению*, реализуемый в замкнутой системе управления. Схематически устройство управления по отклонению показано на рис. 1.19, *б*.

Воздействие на управляющую величину зависит от разности между управляемой величиной и заданной и направлено в сторону уменьшения этой разности.

Для повышения точности систем автоматического управления применяются комбинированные системы управления, сочетающие принципы управления по отклонению и возмущению (рис. 1.19, *в*).

В дальнейшем основное внимание будет обращено на системы управления при неконтролируемых возмущениях, поскольку они требуют применения принципа управления по отклонению, делающего управляемую величину практически не зависящей от внешних возмущений.

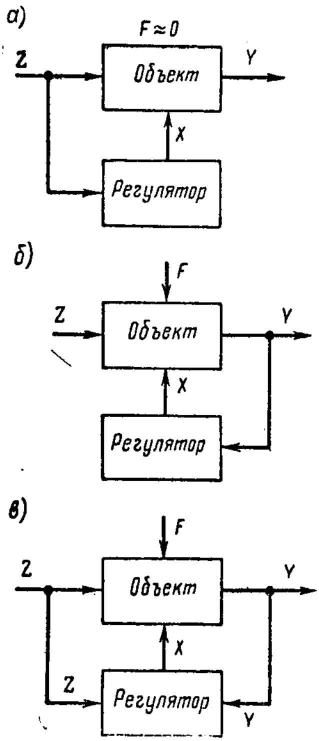


Рис. 1.19

Программное управление. Программное управление какой-либо управляемой величиной в зависимости от наличия математического описания объекта и неконтролируемых внешних воздействий также может осуществляться *разомкнутыми* и *замкнутыми системами.*

Если существует точное математическое описание объекта, а все внешние воздействия контролируются и путем регулирования по возмущению их влияние может быть сведено до нуля, то программное управление объектом может вестись *по разомкнутой системе жесткого управления.* При этом управлении задается такой закон изменения управляющей величины, который обеспечивает требуемый закон изменения управляемой величины.

Пусть требуется, чтобы управляемая величина y изменилась во времени по закону

$$y=y_0(t). \tag{1.23}$$

Тогда с помощью уравнений, описывающих объект, можно вычислить требуемый закон изменения управляющей величины

$$x = x_0(t). \tag{1.24}$$

Применение программного устройства, задающего эту зависимость, обеспечивает выполнение требуемого условия.

Нахождение зависимости $x_0(t)$ может осуществляться автоматически с помощью специального вычислительного устройства. На рис. 1.20, *а* показана схема такой разомкнутой системы программного управления, в которой на вход системы подается требуемый закон управления $y_0(t)$, с помощью модели вычисляется соответствующая зависимость $x_0(t)$ и подается на управление объектом.

Любая неточность математического описания объекта или наличие неконтролируемого воздействия на объект приводит к нарушению соответствия между $y(t)$ и $y_0(t)$ и невыполнению требуемого закона изменения управляемой величины.

При наличии неконтролируемых воздействий применяется принцип *программного управления по отклонению*. Системы, реализующие этот принцип, представляют собой *замкнутые системы управления*. В этих системах на регулятор поступают две величины: требуемый закон изменения $y_0(t)$ (уставка) и фактическое значение управляемой величины $y(t)$ (рис. 1.20, *б*). В регуляторе производится сравнение уставки $y_0(t)$ и регулируемой величины $y(t)$ и вырабатывается такое управляющее воздействие $x(t)$, которое обеспечивает минимальное значение рассогласования

$$\varepsilon(t) = y_0(t) - y(t). \qquad (1.25)$$

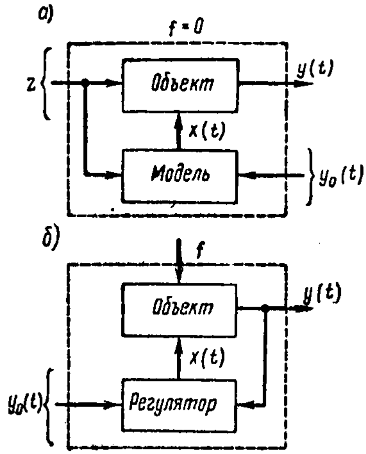


Рис. 1.20

Чем меньше эта погрешность, тем выше качество регулятора.

В программных регуляторах функция $y_0(t)$ задается с помощью некоторого программного устройства, в следящих системах этой функцией обычно является заранее неизвестный угол поворота некоторого вала, скорость его вращения или изменение какой-либо иной физической величины, которое должно быть воспроизведено с минимальной погрешностью.

В этом случае систему регулирования, состоящую из объекта и регулятора, можно рассматривать как объект разомкнутой системы управления (очерчен пунктиром), в котором входной величиной является $y_0(t)$, а выходной — $y(t)$.

Рассмотренные ранее системы автоматической стабилизации являются частным случаем программных систем регулирования, в которых программа не зависит от времени, т. е. $y_0(t) = \text{const}$.

С а м о н а с т р о й к а. Задачи, ставящиеся перед самонастраивающимися системами управления, значительно сложнее и разнообразнее, чем задачи, решаемые программными системами автоматического управления.

Первой задачей является поддержание экстремума управляемой величины. Для этой цели на объект подаются пробные воздействия со стороны управления δX, анализируется знак изменения управляемой величины Y и производится управляющее воздействие, приближающее режим к точке экстремума.

Таким образом, система управления автоматически поддерживает режим, близкий к оптимальному, при котором $\frac{\partial y_l}{\partial x_k} \approx 0$. Устройства, обеспечивающие режим работы управляемого объекта, близкий к оптимальному, называются *автоматическими оптимизаторами*, или *экстремальными регуляторами*.

Схематически экстремальное управление объектом показано на рис. 1.21, *а*. Такие системы управления применяются для объектов, имеющих экстремальные характеристики в том случае,

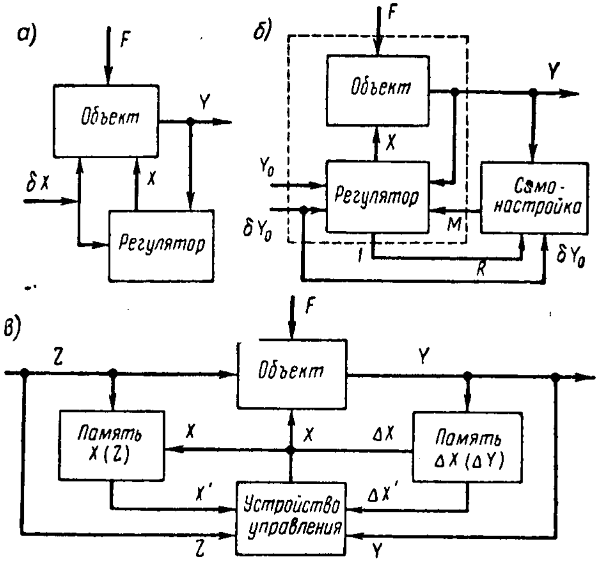


Рис. 1.21

когда имеются существенные, но медленно меняющиеся неконтролируемые факторы, приводящие к изменению экстремальных характеристик. При этом можно считать, что за время прихода к экстремуму характеристика управления объектом существенно не изменяется.

Второй задачей самонастройки является поддержание оптимальной работы системы регулирования по условию максимального ее быстродействия. В этом случае показателем экстремума является время, в течение которого система приходит в соответствие с изменением уставки регулирования. Это время может анализироваться с помощью специального устройства самонастройки. На основании анализа это устройство изменяет параметры регулятора таким образом, чтобы время регулирования стало минимальным. Схематически такая система показана на рис. 1.21, *б*. Здесь воздействие, изменяющее параметры регулятора, обозначено M. Для определения времени регулирования могут производиться пробные изменения уставки регулятора δY_0.

Определение времени регулирования может производиться с помощью модели объекта, выполненной в ускоренном масштабе времени. При этом параметры модели приводятся в соответствие с параметрами объекта автоматически. В этом случае на модели может быть найдено условие оптимального по быстродействию воздействия X, которое в дальнейшем осуществляется с помощью регулятора.

В самонастраивающейся системе, показанной на рис. 1.21, *б*, объект вместе с регулятором можно рассматривать как объект экстремального управления более высокой категории, управляемый устройством самонастройки. Показатель качества переходных процессов в системе регулирования, вычисляемый в устройстве самонастройки на основании вводимых в нее величин Y и R, является управляемой величиной, а некоторый настраиваемый параметр регулятора M — управляющей.

Такая самонастраивающаяся система может быть представлена в виде двух систем, из которых одна управляет другой.

В сложных, не имеющих математического описания, системах с многими неконтролируемыми воздействиями для нахождения оптимального условия работы необходимо запоминать различные режимы управления, автоматически накапливать опыт управления, учиться управлять. Это осуществляется самообучающимися системами автоматического управления, в которых с помощью специальных устройств запоминаются различные ситуации управления. Автомат может в зависимости от входных и выходных величин выбирать из памяти системы соответствующие значения управляющих воздействий и воздействовать соответственно на объект. При этом могут реализоваться принципы воздействия как по возмущению X, так и по отклонению Y. При малом значении неконтролируемых воздействий F управляющее воздействие X выбирается по значению Z. При существенном значении F вариация управляющего воздействия ΔX выбирается в соответствии с требуемой вариацией управляемой величины ΔY.

Схематически самообучающееся комбинированное устройство, управляющее как по возмущению Z, так и по отклонению Y, изображено на рис. 1.21, *в*.

Поскольку самонастраивающиеся системы имеют двойственное значение, так как сочетают изучение объекта и управление им, они получили название *устройств дуального управления*.

Самонастраивающиеся автоматические системы до сих пор получили относительно небольшое распространение в связи с их сложностью. Однако, быстрое развитие принципов построения надежных вычислительных устройств, моделей для запоминания и преобразования сигналов, а также применение цифровых вычислительных машин для задач управления и выпуск специальных управляющих машин открывают перспективы для построения самонастраивающихся систем, которые, очевидно, в ближайшее время получат широкое распространение.

Более подробно принципы построения самонастраивающихся систем и их классификация будут рассмотрены в последних разделах второй части курса. Там же будут рассмотрены примеры самонастраивающихся систем.

В первой части курса объектом изучения являются системы регулирования.

§ 1.6. ПРИМЕРЫ НЕПРЕРЫВНЫХ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ И ИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СХЕМЫ

Всякая система регулирования может быть представлена рядом элементов, выполняющих определенные функции:

1 — объект регулирования, *2* — измерительное устройство, *3* — устройство задания уставки, *4* — устройство сравнения, *5* — усилитель, *6* — исполнительное устройство, *7* — устройство коррекции.

Схематически все перечисленные элементы системы регулирования, кроме устройства коррекции, показаны на рис. 1.22.

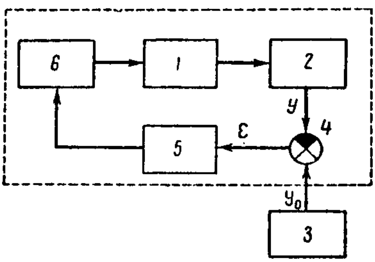


Рис. 1.22

Объекты управления уже были рассмотрены в § 1.3. Принципиально отличает объект управления от всех остальных элементов системы то, что он обычно бывает задан и при разработке системы управления не может быть изменен, тогда как все остальные элементы выбираются специально для решения заданной задачи управления.

Совокупность всех элементов системы, кроме объекта, образует *управляющее устройство*, или *регулятор*.

Измерительные устройства предназначены для получения сигнала, соответствующего регулируемой величине, который в *устройстве сравнения* вычитается из величины *уставки*, заданной с помощью специального устройства. Полученная разность, называемая величиной рассогласования, подается на *усилитель*. Выход усилителя подключается к *исполнительному устройству*, воздействующему на управляющую величину объекта.

В зависимости от физической природы управляющей и управляемой величины в системе регулирования могут отсутствовать измерительное и исполнительное устройства. Если выходом усилителя является управляющая величина, то отсутствует исполнительное устройство. Если же выходная управляемая величина может непосредственно подаваться на устройство сравнения, то отсутствует измерительное устройство.

Кроме перечисленных элементов, в системах иногда применяется дополнительное *устройство коррекции,* улучшающее характеристики системы (на схеме не показано).

Измерительное и усилительное устройства могут быть непрерывными и дискретными, а устройство сравнения — соответственно аналогового и цифрового типов. В первом случае все величины, преобразуемые различными звеньями системы, непрерывно изменяются во времени; во втором — представляют собой разрывную функцию времени, причем моменты разрыва задаются либо специальным импульсным устройством (импульсные системы), либо определяются нелинейными характеристиками этих элементов (релейные системы и системы с переменной структурой). В настоящей главе рассматриваются примеры непрерывных систем. Импульсные системы рассматриваются в гл. XII, а релейные и с переменной структурой — во второй части курса.

Поплавковый регулятор уровня. Одним из первых в мире технических регуляторов является поплавковый регулятор уровня жидкости, построенный И. И. Ползуновым в 1765 году для поддержания постоянного уровня воды в паровом котле. Сейчас регуляторы такого типа находят широкое приме-

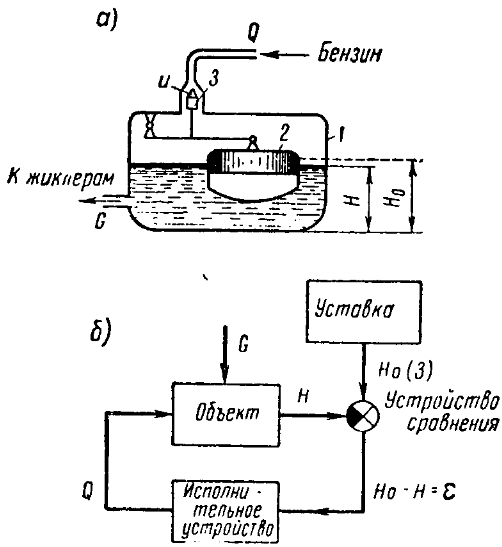


Рис. 1.23

нение в технике. Примером простейшего современного регулятора уровня является поплавковая камера автомобильного карбюратора (рис. 1.23, *а*). Объектом регулирования является камера *1*, в которой уровень бензина H непосредственно измеряется положением поплавка *2*. Системой рычагов с поплавком связана игла *3*, регулирующая приток бензина в камеру Q. При уровне $H = H_0$ игла полностью запирает канал притока бензина $Q = 0$.

Внешним неконтролируемым воздействием будет расход бензина G, поступающего к жиклерам двигателя, приводящий к уменьшению уровня в поплавковой камере.

Функциональная схема рассматриваемого регулятора показана на рис. 1.23, *б*. В ней выделено два элемента системы: поплавковая камера, служащая объектом, совмещенным с измерительным устройством, на вход которого подается разность $Q - G$, а выходной величиной является уровень бензина H, и исполнительное устройство, представляющее собой управляемый изменением положения поплавка и перемещением иглы канал притока бензина, задающий величину Q.

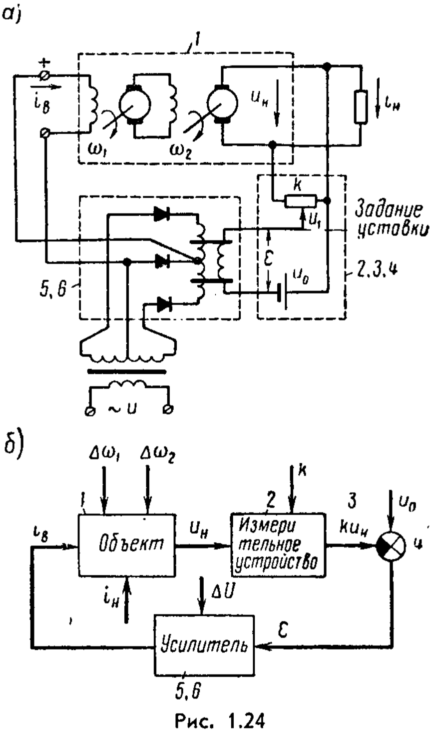


Рис. 1.24

Система автоматической стабилизации напряжения на зажимах генератора постоянного тока. На рис. 1.24, *а* показана схема регулирования напряжения на зажимах генератора постоянного тока с помощью магнитного усилителя с самоподмагничиванием. На обмотку управления магнитного усилителя подается величина рассогласования — разность некоторого эталонного напряжения u_0 и напряжения u_1, снимаемого с делителя, пропорционального напряжению на зажимах генератора $u_н$,

$$\varepsilon = u_0 - u_1 = u_0 - ku_н. \tag{1.26}$$

Нагрузкой магнитного усилителя служит ток $i_в$ в обмотке возбуждения вспомогательного возбудителя генератора.

Уставка задается регулируемым коэффициентом делителя напряжения k, устанавливающим соответствие регулируемого напряжения $u_н$ и эталонного напряжения u_0.

Функциональная схема системы регулирования показана на рис. 1.24, *б*.

В регуляторе измерительное устройство совмещено с устройством задания уставки, а исполнительное устройство отсутствует, так как ток нагрузки магнитного усилителя является управляющей величиной.

Возмущающими неконтролируемыми воздействиями служат: падение напряжения в обмотке генератора, вызванное током нагрузки $i_н$; помехи, вызванные изменением скоростей вращения валов генератора $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ и колебанием напряжения питания магнитного усилителя Δu, и др.

Регулятор скорости электрического двигателя. Система регулирования скорости электрического двигателя с электромашинным усилителем показана на рис. 1.25, *а*.

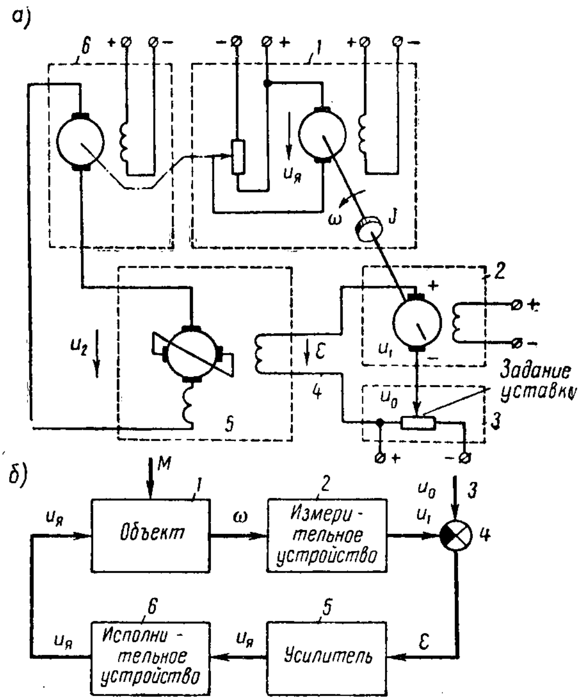


Рис. 1.25

Здесь объектом регулирования является некоторый механизм *1*, приводимый в движение электрическим двигателем постоянного тока. Скорость вращения вала двигателя должна изменяться по заданному закону или поддерживаться постоянной. Для измерения скорости вращения вала служит тахометрический генератор *2*, напряжение на зажимах которого u_1 пропорционально скорости вращения вала. Это напряжение сравнивается с заданной уставкой u_0 и разность $\varepsilon = u_0 - u_1$, полученная в контуре 4—2—3, подается на обмотку возбуждения электромашинного усилителя *5*. Электромашинный усилитель питает якорь исполнительного двигателя *6*, перемещающего движок делителя напряжения, управляющего регулируемым объектом.

Функциональная схема рассматриваемой системы изображена на рис. 1.25, *б*. Внешним возмущением в рассматриваемой схеме является изменение момента нагрузки M на валу рабочего двигателя.

При любой нагрузке исполнительный двигатель перемещает движок делителя напряжения до тех пор, пока рабочий двигатель не разовьет скорость, точно соответствующую заданной уставке, и исполнительный двигатель не остановится. В идеальном случае погрешность системы в стационарных условиях равна нулю, т. е. $u_0 = u_1$. Практически, вследствие трения в системе, исполнительный двигатель имеет некоторую зону нечувствительности, определяемую напряжением трогания двигателя. Расхождение между u_1 и u_0 определяется этой зоной и не зависит от величины внешнего возмущения M.

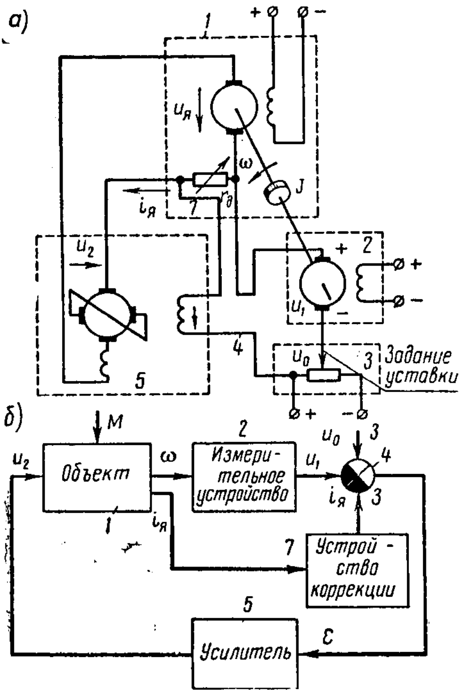


Рис. 1.26

Если мощность электромашинного усилителя достаточна для питания рабочего двигателя системы, то схема регулирования может быть несколько упрощена путем исключения исполнительного двигателя и делителя напряжения и подключения выходных зажимов электромашинного усилителя непосредственно к якорю рабочего двигателя (рис. 1.26,*а*). В этом случае так же, как и в системе регулирования напряжения (см. рис. 1.24), каждому значению регулируемой скорости ω соответствует определенное значение напряжения рассогласования между уставкой u_0 и напряжением тахогенератора u_1. Это рассогласование оказывается тем больше, чем больше момент нагрузки на валу двигателя M.

Для уменьшения этого влияния, а также для улучшения динамических характеристик системы применяется корректирующая цепь 7, вводящая в контур устройства сравнения дополнительно напряжение $r_д i_я$, пропорциональное току якоря двигателя. Это напряжение тем больше, чем больше момент нагрузки на валу двигателя. При соответствующем выборе сопротивления $r_д$ цепи якоря (см. схему) в системе регулирования может быть получена высокая точность. Так как в рассматриваемой системе управляющее воздействие u_2 зависит не только от управляемой величины ω, но и от внешнего воздействия M, контролируемого с помощью тока якоря $i_я$, то система является примером комбинированного управления по отклонению и возмущению, схема которой показана на рис. 1.20, *в*. Функциональная схема рассмотренной системы показана на рис. 1.26, *б*.

С л е д я щ а я с и с т е м а. Следящая система представляет собой систему регулирования угла поворота вала (отрабаты-

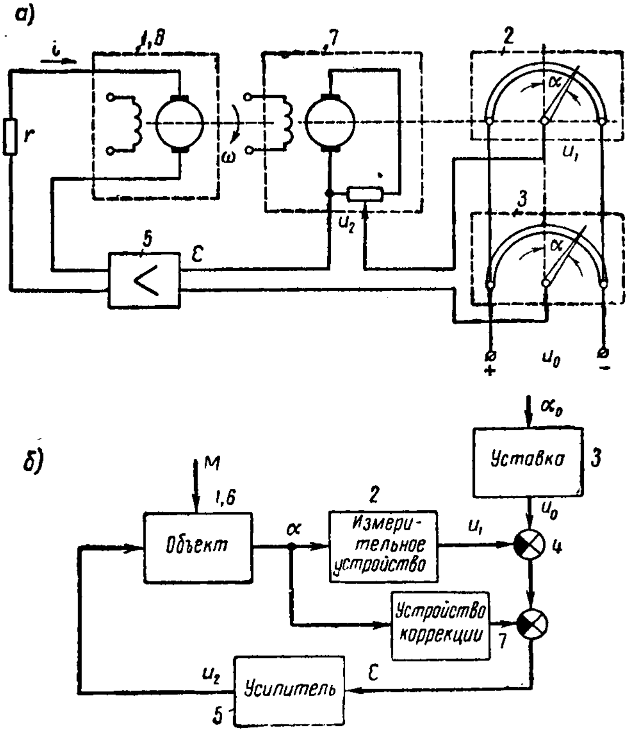


Рис. 1.27

вающая ось), управляемого двигателем; уставка задается путем поворота некоторого задающего вала (задающая ось). Простейшая схема следящей системы показана на рис. 1.27, *а*. Здесь два делителя напряжения *2* и *3* соединены с задающей и отрабатывающей осями. Напряжение, снимаемое с каждого из делителей u_0 или u_1, пропорционально углу поворота оси α_0 или α. Разность этих напряжений $u_0 - u_1$ в контуре *4* подается на усилитель *5*, питающий обмотку якоря рабочего двигателя 1,6. При любом несоответствии положения задающей и отрабатывающей осей в цепи усилителя появляется напряжение рассогласования ε и в обмотке якоря рабочего двигателя возникает ток. Вал двигателя вращается до тех пор, пока угол поворота отрабатывающей оси не станет равен углу поворота задающей оси и напряжение рассогласования не снизится до нуля.

Для улучшения устойчивости всей системы и повышения качества переходных процессов в ней применяется корректирующая цепь *7*, содержащая тахометрический генератор, измеряющий скорость вращения вала двигателя ω. Напряжение u_2, пропорциональное скорости ω, подается в цепь сравнения и складывается с напряжением u_1. В статическом режиме, когда $\omega = 0$, $u_0 = \mathrm{const}$ и $u_1 = \mathrm{const}$, величина $u_2 = 0$. В динамическом режиме при $\omega \neq 0$ корректирующая цепь несколько замедляет разгон двигателя, однако при этом она заглушает автоколебания в системе.

Функциональная схема рассматриваемой системы показана на рис. 1.27, *б*.

Роль корректирующей цепи будет более подробно рассмотрена в главах IX—XI.

§ 1.7. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Выше были рассмотрены некоторые простейшие системы автоматического управления объектами, для которых в § 1.3 были составлены уравнения и в § 1.4 построены структурные схемы. Построение структурных схем систем управления зависит от степени идеализации принятых уравнений, описывающих эти системы, и от характера процессов, в них происходящих. Большинство рассмотренных уравнений объектов являются нелинейными и их анализ представляет определенные трудности.

Описание характеристик управляющих устройств также может быть нелинейным. Однако при малых отклонениях управляемых величин от начальных значений и при несущественных нелинейностях характеристик реальные нелинейные системы могут быть с достаточной для практических выводов точностью описаны линейными дифференциальными уравнениями. В этих случаях анализ и синтез систем автоматического управления существенно упрощаются, так как может быть применен хорошо разработанный математический аппарат теории линейных дифференциальных уравнений.

Значительно сложнее исследовать процессы, описываемые нелинейными уравнениями, однако и в этих случаях знание решений, полученных для линейных систем, часто дает возможность подойти к решению для нелинейной системы.

В связи с этим рассмотрение методов исследования систем управления будет вестись в следующей последовательности: а) линейные системы управления, б) нелинейные системы управления.

В зависимости от характера внешних воздействий на систему и принятого их математического описания, эти воздействия можно подразделить на детерминированные, или регулярные, описываемые определенными функциями времени, и случайные, или статистические, описываемые некоторыми случайными функциями.

Математические методы анализа и синтеза систем при различных описаниях внешних воздействий имеют ряд существенных особенностей и требуют несколько различного математического аппарата. В связи с этим рассмотрение методов исследования систем управления будет вестись отдельно для систем при детерминированных воздействиях и систем при случайных воздействиях.

Как уже рассматривалось, системы управления существенно различаются в зависимости от задач управления и характеристик объектов. В тех случаях, когда объекты управления в требуемом диапазоне регулирования имеют монотонную характеристику и задача управления состоит в том, чтобы свести к нулю или к минимальной величине разницу между задаваемой величиной и требуемой, применяются системы стабилизации или программного управления, которые могут быть названы *нулевыми*. В тех же случаях, когда задачей управления является обеспечение экстремума какого-либо показателя системы управления при изменяющихся параметрах системы, применяются самонастраивающиеся, или адаптирующиеся, системы управления, которые могут быть названы *экстремальными*. В связи с этим сначала будут рассмотрены нулевые системы программного управления, а затем — экстремальные системы самонастройки.

В первой части курса рассматриваются наиболее разработанные вопросы теории, связанные с рассмотрением линейных систем программного управления при детерминированных внешних воздействиях. При этом сначала рассматриваются непрерывные, а затем импульсные линейные системы.

Глава II

ПРОХОЖДЕНИЕ РЕГУЛЯРНОГО СИГНАЛА ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНОЕ ЗВЕНО

§ 2.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РЕГУЛЯРНЫХ СИГНАЛОВ И ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Любая часть системы автоматического управления может быть рассмотрена как некоторое звено системы, преобразующее сигнал входа в сигнал выхода. Если в качестве такого звена рассматривается объект регулирования, то входными сигналами являются управляющие воздействия и внешние возмущения, а выходными — регулируемые величины. При рассмотрении элементарной системы регулирования как звена более сложной системы управления входным сигналом будет сигнал уставки, а выходным — регулируемая величина.

Если преобразование сигнала может производиться звеном только в одном направлении, то звено называется *звеном направленного действия*. Как объект управления, так и элементарная система регулирования являются направленными звеньями, поскольку изменение регулируемой величины не оказывает обратного влияния на уставку и на внешние воздействия.

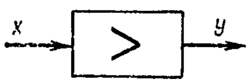


Рис. 2.1

Рассмотрим прохождение сигнала через направленное звено (рис. 2.1), в котором входной сигнал x преобразуется в выходной сигнал y. При регулярных сигналах x и y являются определенными функциями времени.

Дифференциальное уравнение, выражающее зависимость между x и y, определяет характеристики звена. Для линейных звеньев это дифференциальное уравнение линейное, и зависимость между x и y может быть выражена с помощью операторной функции. Так как реальные системы в действительности нелинейны, т. е. описываются нелинейными дифференциальными уравнениями, то линейное их представление возможно только при гладких нелинейностях и малых изменениях x и y.

Рассмотрим задачи анализа и синтеза. При анализе задача ставится так: дан сигнал $x(t)$ и дифференциальное уравнение звена, найти сигнал $y(t)$ при заданных начальных условиях.

При синтезе решаются обратные задачи. Например, необходимо, чтобы сигнал на выходе $y(t)$ удовлетворял заданным условиям; при этом бывает известен сигнал на входе $x(t)$, требуется найти характеристики звена, удовлетворяющие заданным условиям.

Если задачи анализа для линейных звеньев однозначны, то задачи синтеза бывают неоднозначны и их решение сложнее. При синтезе линейных систем важным условием является осуществимость или физическая реализуемость звена, удовлетворяющего полученному уравнению.

§ 2.2. РЕГУЛЯРНЫЕ СИГНАЛЫ

Любой сложный сигнал может быть представлен в виде совокупности более простых сигналов.

В качестве простейших сигналов будем пользоваться следующими:

а) гармонический сигнал $e^{j(\omega t+\psi)}$ или $\sin(\omega t+\psi)$;

б) единичный скачок $1_0(t)=\begin{cases}0 \text{ при } t\leqslant 0;\\ 1 \text{ при } t>0;\end{cases}$

в) единичный импульс $\delta(t)=\dfrac{d1_0(t)}{dt}$.

Преобразования Фурье и Лапласа для этих сигналов приведены в приложении. Пусть сигнал выражается некоторой функцией времени $x(t)$. Тогда выражение его в виде совокупности гармонических сигналов производится путем применения ряда Фурье для периодических сигналов и преобразования Фурье для непериодических сигналов (см. приложение П.1).

Применяя интеграл Дюамеля в различной форме, этот сигнал можно представить также или в виде совокупности единичных скачков

$$x(t)=x(\alpha)1_0(t)+\int_0^t\frac{dx(\tau)}{d\tau}1_0(t-\tau)\,d\tau, \tag{2.1}$$

при $\alpha\to 0$;

или в виде совокупности единичных импульсов

$$x(t)=\int_\alpha^{t+\alpha}x(\tau)\,\delta(t-\tau)\,d\tau, \tag{2.2}$$

где $\alpha\to 0$.

Графическая иллюстрация к интегралам (2.1) и (2.2) приведена на рис. 2.2. Здесь $x(t)$ представляется в виде совокупности скачков величиной $\frac{dx}{d\tau}\Delta\tau$, действующих в моменты τ при $\tau<t$ (рис. 2.2, *а*), или в виде интеграла от δ-функции, умножаемой на значение x в момент времени τ (рис. 2.2, *б*).

Для лучшего изучения поведения линейной системы при любых сигналах можно их представить в виде совокупности простых составляющих; на основании принципа наложения определить реакцию системы на каждую из составляющих и затем просуммировать полученные составляющие на выходе.

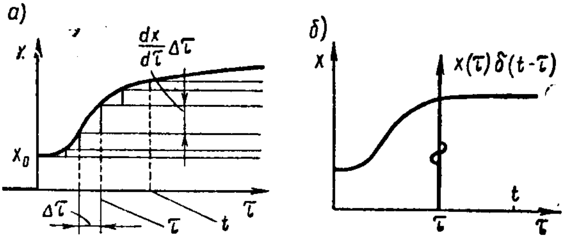


Рис. 2.2

Сигнал, например, можно представить себе в виде совокупности интегралов от единичных скачков, действующих или в момент времени $t=0$

$$x(t)=A_0 1_0(t)+A_1\int\limits_0^t 1_0(t)\,dt+A_2\int\limits_0^t\int\limits_0^t 1_0(t)\,dt^2+$$

$$+A_3\int\limits_0^t\int\limits_0^t\int\limits_0^t 1_0(t)\,dt^3+\ldots=1_0(t)\sum_{i=0}^{n}\frac{A_i}{i!}t^n \qquad (2.3)$$

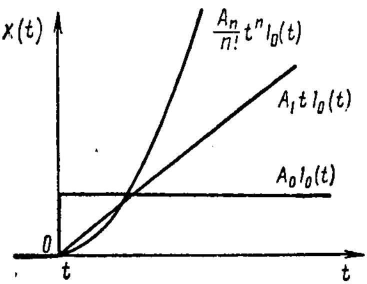


Рис. 2.3

или в момент времени t_k

$$x(t)=1_0(t-t_k)\sum_{i=0}^{n}\frac{A_i}{i!}(t-t_k)^n. \qquad (2.4)$$

Графики для каждой из этих составляющих показаны на рис. 2.3.

Возможна и совокупность слагаемых, выражаемых уравнением (2.4) для различных t_k.

Иногда бывает удобно представить сигнал в виде произведения простейших сигналов. Так, например, гармонический сигнал, начавший действовать в момент времени $t=0$, можно представить в виде

$$x(t)=\sin(\omega t+\psi)\cdot 1_0(t). \qquad (2.5)$$

Пример 2.1. Пусть сигнал $x(t)$ имеет вид графика, показанного на рис. 2.4, *а* Требуется найти его выражение в виде совокупности единичных скачков.

Разлагая сигнал на четыре составляющих, каждая из которых выражается функцией

$$x_k(t) = \pm a(t - t_k)\cdot 1_0(t - t_k),$$

получаем

$$x(t) = a\,[t\cdot 1_0(t) - (t - t_1)\cdot 1_0(t - t_1) - \\ - (t - t_2)\cdot 1_0(t - t_2) + (t - t_3)\cdot 1_0(t - t_3)]. \qquad (2.6)$$

Пример 2.2. Найти приближенное выражение для сигнала $y(t)$, показанного на рис. 2.4, *б*. Аппроксимируя $y(t)$ ломаной линией и раскладывая полученную функцию на ряд полупрямых $y_k(t) = a_k(t - t_k)\,1_0(t - t_k)$ и на скачок $k_0\cdot 1_0(t)$, получаем

$$y(t) = k_0\cdot 1_0(t) + \sum_{k=0}^{n} a_k(t - t_k)\,1_0(t - t_k). \qquad (2.7)$$

§ 2.3. УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНОГО ЗВЕНА

В общем случае обыкновенное дифференциальное уравнение простого (односвязного) звена, выражающее зависимость

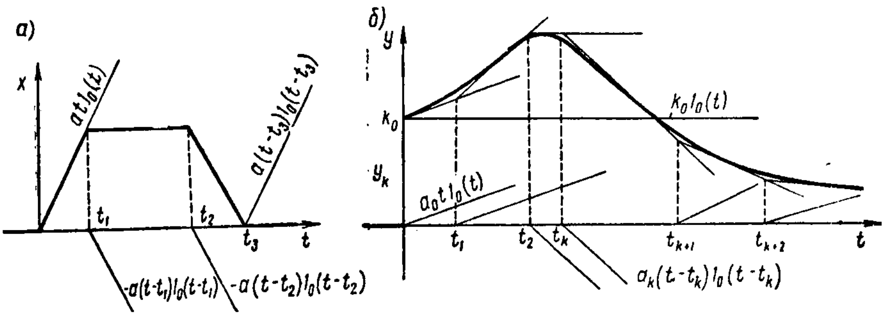


Рис. 2.4

между входным сигналом x и выходным сигналом y, записывается следующим образом:

$$F(x,\ x',\ x'',\ldots,\ x^{(m)},\ y,\ y',\ldots,\ y^{(n)},\ t) = 0, \qquad (2.8)$$

где

$$x^{(i)} = \frac{d^i x}{dt^i} \text{ и } y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}.$$

Для систем с параметрами, не изменяющимися во времени, функция F не зависит от t.

Для линейных систем функция F выражается линейной зависимостью и уравнение (2.8) принимает следующий вид:

$$b_0x + b_1x' + \ldots + b_mx^{(m)} - (a_0y + a_1y' + \ldots + a_ny^{(n)}) = 0. \qquad (2.9)$$

При гладкой зависимости функции F от ее аргументов и малых изменениях аргументов нелинейное уравнение, связывающее x и y, может быть приведено к линейному.

Пусть при $t = 0$

$$x = x_0,\ y = y_0,\ x^{(i)} = x_0^{(i)} = 0 \text{ и } y^{(i)} = y_0^{(i)} = 0 \text{ при } i \neq 0.$$

Тогда уравнение (2.8) приобретает вид

$$F\left(x_0, x_0', \ldots, x_0^{(m)}, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(m)}\right) = 0.$$

Разложив функцию F в ряд Тейлора в окрестности точек x_0, y_0 и $x^{(i)} = 0$, $y^{(i)} = 0$ для $i \neq 0$ и пренебрегая высшими членами разложения для $x = x_0 + \Delta x$ и $y = y_0 + \Delta y$, получим

$$k_0 \Delta x + k_1 \frac{d\Delta x}{dt} + \ldots + k_m \frac{d^m \Delta x}{dt^m} =$$

$$= d_0 \Delta y + d_1 \frac{d\Delta y}{dt} + \ldots + d_n \frac{d^n \Delta y}{dt^n}, \qquad (2.10)$$

где

$$k_i = \left[\frac{\partial F}{\partial x^{(i)}}\right]_0; \quad d_i = -\left[\frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}\right]_0.$$

При этом предполагается, что и знак F выбирается таким, чтобы $d_n > 0$.

Если теперь за начало отсчета x и y принять точки x_0 и y_0, то уравнение (2.10) можно записать так

$$\sum_{i=0}^{m} k_i \frac{d^{(i)} x}{dt^{(i)}} = \sum_{i=0}^{n} d_i \frac{d^{(i)} y}{dt^{(i)}}. \qquad (2.11)$$

Здесь под x и y понимаются их указанные выше приращения Δx и Δy.

Переходя от оригиналов к их изображениям по Лапласу, получаем:

$$K(p) \cdot X(p) = D(p) \cdot Y(p); \qquad (2.12)$$

$$\left.\begin{aligned} K(p) &= \sum_{i=0}^{m} k_i p^i; \\ D(p) &= \sum_{i=0}^{n} d_i p^i; \end{aligned}\right\} \qquad (2.13)$$

и, соответственно, зависимость между частотными спектрами $X(j\omega)$ и $Y(j\omega)$

$$K(j\omega) X(j\omega) = D(j\omega) Y(j\omega). \qquad (2.14)$$

Если решается задача с ненулевыми начальными условиями и в момент $t = 0$ как x и y, так и их производные могут быть отличны от нуля, то переход от оригинала к изображению (см. приложение П. 5) в уравнении (2.11) дает

$$X(p) \sum_{i=0}^{m} k_i p^i - \sum_{i=1}^{m} k_i \sum_{r=1}^{i} p^{r-1} x^{(i-r)}(0) =$$

$$= Y(p) \sum_{i=0}^{n} d_i p^i - \sum_{i=1}^{n} d_i \sum_{r=1}^{i} p^{r-1} y^{(i-r)}(0). \qquad (2.15)$$

Большинство задач, рассматриваемых в теории регулирования с помощью принципа наложения, сводится к решению задач с нулевыми начальными условиями. Этому также способствует рассмотрение каждого воздействия как сигнала, который начинает действовать только при $t > 0$, а при $t = 0$ он сам и его производные равны нулю. Разумеется, при этом необходимо учитывать разрывы функции, имеющие место сразу же при переходе от нуля в область, где $t > 0$.

Для сложных (многосвязных) звеньев может быть применена аналогичная линеаризация уравнений. В этом случае, в зависимости от количества входных и выходных сигналов, звено описывается системами уравнений типа (2.8), (2.11), (2.12). Так, например, если звено имеет два входных сигнала x_1 и x_2 и два выходных y_1 и y_2, то уравнение (2.12) приобретает вид системы уравнений:

$$\left.\begin{aligned} K_{11}(p)X_1(p)+K_{12}(p)X_2(p)=D_1(p)Y_1(p);\\ K_{21}(p)X_1(p)+K_{22}(p)X_2(p)=D_2(p)Y_2(p). \end{aligned}\right\} \qquad (2.16)$$

§ 2.4. ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНОГО ЗВЕНА

Для количественного описания свойств линейного звена в зависимости от постановки задачи, пользуются следующими взаимно связанными его характеристиками: комплексным коэффициентом усиления; передаточной функцией; переходной функцией; весовой функцией.

Рассмотрим определение каждой из перечисленных характеристик.

Комплексный коэффициент усиления звена.

Комплексным коэффициентом усиления звена $\widetilde{W}=W(j\omega)$ называется отношение комплексной амплитуды сигнала на выходе к комплексной амплитуде сигнала на входе при подаче на вход синусоидального воздействия.

Из уравнения (2.14) комплексный коэффициент линейного звена определяется как

$$\widetilde{W}=W(j\omega)=\frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m}=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=\frac{K(j\omega)}{D(j\omega)}. \qquad (2.17)$$

Полную характеристику звена дает изменение комплексного коэффициента звена при изменении частоты от нуля до бесконечности.

Геометрическое место конца вектора комплексного коэффициента усиления звена при изменении частоты от нуля до бесконечности называется *частотным годографом коэффициента усиления* или *комплексной частотной характеристикой звена*. Иногда его называют также амплитудно-фазовой характеристикой звена.

Комплексный коэффициент усиления звена может быть измерен экспериментально, если на вход звена подать синусоидальное напряжение определенной амплитуды и частоты, а на выходе измерить амплитуду и фазу сигнала. Так, например, если

$$x = X_m \sin \omega t,$$

$$y = Y_m \sin(\omega t + \varphi),$$

то комплексная амплитуда входного сигнала $\dot{X}_m = X_m$, а комплексная амплитуда выходного сигнала $\dot{Y}_m = Y_m e^{j\varphi}$. Таким образом,

$$\widetilde{W} = W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{Y_m}{X_m} e^{j\varphi} = W e^{j\varphi}. \qquad (2.18)$$

Отношение амплитуд и фазовый сдвиг определяются по графику зависимости y от x, полученному в установившемся режиме при синусоидально изменяющемся x от времени (рис. 2.5).

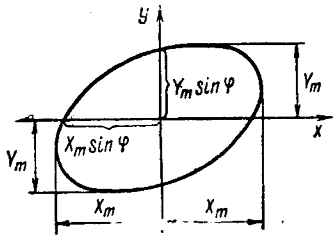


Рис. 2.5

Если на вход системы подать единичный импульс, частотный спектр которого равен единице, то частотный спектр выходного сигнала совпадает с зависимостью комплексного коэффициента усиления от частоты. Действительно, в этом случае по формуле (2.14)

$$W(j\omega) = Y(j\omega)$$

и, следовательно, ***комплексную частотную характеристику звена можно определить как частотный спектр выходного сигнала при подаче на вход звена единичного импульса***.

Такое определение $W(j\omega)$ носит чисто теоретический характер, так как в практических условиях реализация сигнала в виде единичного импульса невозможна.

Пример годографа комплексного коэффициента усиления звена (комплексной частотной характеристики) показан на рис. 2.6, *а*. В реальных звеньях обычно для дифференциального уравнения $m < n$ и в выражении (2.17) порядок числителя меньше порядка знаменателя. На годографе это выражается тем, что при $\omega \to \infty$ значение $W(j\omega) \to 0$. Вместо частотного годографа часто задают частотные зависимости амплитуды $W(\omega)$ и фазы $\varphi(\omega)$ (рис. 2.6, *б* и *в*), понимая под амплитудой ее значение на выходе при амплитуде синусоидального сигнала на входе, равном единице, или модуль коэффициента усиления.

Эти графики удобно выражать в логарифмическом масштабе, откладывая по оси абсцисс десятичный логарифм частоты, для которого единица соответствует изменению частоты в 10 раз. В этом случае говорят, что частота измеряется в *декадах* по отношению к некоторой заданной частоте, соответствующей началу отсчета.

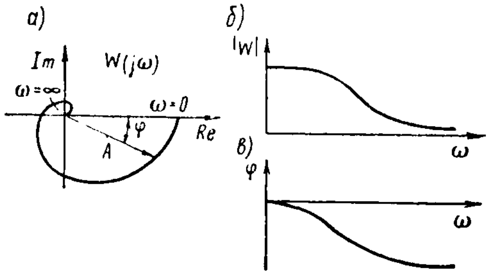


Рис. 2.6

Модуль коэффициента усиления $W(\omega) = |W(j\omega)|$ при этом измеряется в *децибеллах*

$$L(\omega) = 20\lg W(\omega). \tag{2.19}$$

Зависимость $L(\lg\omega)$ называется логарифмической амплитудно-частотной характеристикой (ЛАЧХ), а $\varphi(\lg\omega)$ — логарифмической фазочастотной характеристикой (ЛФЧХ). Характеристика $L(\omega) < 0$ при $|W| < 1$, проходит через нуль при $|W| = 1$ и $L(\omega) > 0$ при $|W| > 1$. Так как при $\omega \to \infty$ в реальных системах $W \to 0$, то $L \to -\infty$.

Передаточная функция звена. *Передаточной функцией звена* $W(p)$ называется отношение изображения сигнала на выходе к изображению сигнала на входе при нулевых начальных условиях.

Согласно (2.12), передаточная функция определяется как

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{K(p)}{D(p)}. \tag{2.20}$$

На структурной схеме линейного звена приводится обозначение передаточной функции (рис. 2.7, *а*).

Переход от передаточной функции к комплексному коэффициенту усиления осуществляется путем замены p на $j\omega$.

Если известны p_i — полюсы и q_i — нули функции $W(p)$, соответствующие корням уравнений $D(p) = 0$ и $K(p) = 0$, то выражение (2.20) можно записать как

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)} = \frac{k_m \prod_{i=1}^{m} (p - q_i)}{d_n \prod_{i=1}^{n} (p - p_i)}. \tag{2.21}$$

Предполагается, что многочлены $D(p)$ и $K(p)$ не имеют общих корней и дробь (2.21) не может быть сокращена.

С помощью разложения функции $W(p)$ на элементарные дроби формула (2.21) может быть преобразована

$$W(p)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K(p_i)}{D'(p_i)\cdot(p-p_i)}=\frac{K(0)}{D(0)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{pK(p_i)}{p_iD'(p_i)\cdot(p-p_i)}. \qquad (2.22)$$

Здесь предполагается, что функция $W(p)$ не имеет кратных полюсов и что $n>m$.

Многосвязное звено характеризуется матрицей передаточных функций, связывающих входные и выходные сигналы. Так, например, для звена с двумя входами и двумя выходами, в соответствии с уравнением (2.16),

$$\left.\begin{aligned} Y_1(p)&=W_{11}(p)X_1(p)+\\ &\quad+W_{12}(p)\cdot X_2(p);\\ Y_2(p)&=W_{21}(p)X_1(p)+\\ &\quad+W_{22}(p)\cdot X_2(p), \end{aligned}\right\} \qquad (2.23)$$

где

$$\left.\begin{aligned} W_{11}(p)&=\frac{K_{11}(p)}{D_1(p)};\\ W_{12}(p)&=\frac{K_{12}(p)}{D_1(p)};\\ W_{21}(p)&=\frac{K_{21}(p)}{D_2(p)};\\ W_{22}(p)&=\frac{K_{22}(p)}{D_2(p)}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.24)$$

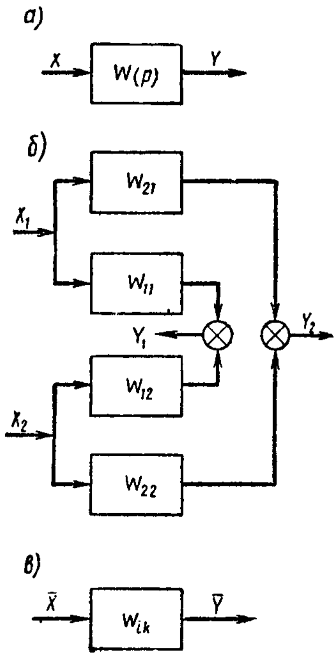


Рис. 2.7

В этом случае передаточная функция звена представляет собой матрицу

$$W_{ik}(p)=\begin{pmatrix} W_{11}(p) & W_{12}(p)\\ W_{21}(p) & W_{22}(p)\end{pmatrix}. \qquad (2.25)$$

Обозначения такого звена на структурной схеме показаны на рис. 2.7, *б* и *в*.

В дальнейшем, при обозначении передаточной функции звена для упрощения записи там, где это возможно, вместо W будет писаться просто W.

Переходная функция звена. *Переходной функцией звена* $h(t)$ называется сигнал на выходе звена при подаче на его вход единичного скачка $1_0(t)$. В этом случае жение по Лапласу входного сигнала $X(p)=\frac{1}{p}$ и, согласно (2.20), изображение выходного сигнала

$$H(p)=Y(p)=\frac{W(p)}{p}. \tag{2.26}$$

Переходя от изображения к оригиналу, получаем

$$h(t)=y(t)=L^{-1}\left[\frac{W(p)}{p}\right]. \tag{2.27}$$

Переходная функция звена может быть рассчитана операторным и классическим методами и, как видно из выражения (2.27), она однозначно связана с передаточной функцией звена.

Выражая $W(p)$ с помощью (2.22) и переходя от изображения к оригиналу (по пунктам 2 и 7 приложения п. 5), получаем

$$h(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K(p_i)}{p_iD'(p_i)}(e^{p_it}-1)\,1_0(t) \tag{2.28}$$

или

$$h(t)=\left[\frac{K(0)}{D(0)}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K(p_i)}{p_iD'(p_i)}e^{p_it}\right]1_0(t). \tag{2.28, а}$$

Установившаяся (вынужденная) составляющая переходной функции

$$h_{\text{уст}}=h(\infty)=\frac{K(0)}{D(0)}=W(0) \tag{2.29}$$

характеризует статические свойства звена.

Переходная (свободная) составляющая определяется как разность

$$h_{\text{п}}(t)=h(t)-h(\infty)=$$
$$=L^{-1}\left[\frac{W(p)-W(0)}{p}\right]=\sum_{i=1}^{n}\frac{K(p_i)}{p_iD'(p_i)}\cdot e^{p_it}. \tag{2.30}$$

Если принять $K(p)=1$ и определить передаточную функцию $h_0(t)$, то при любом

$$K(p)=k_0+k_1p+k_2p^2+\cdots+k_mp^m$$

переходная функция

$$h(t)=k_0h_0(t)+k_1\frac{d}{dt}h_0(t)+\cdots+k_m\frac{d^m}{dt^m}h_0(t). \tag{2.28, б}$$

Весовая, или импульсная, переходная функция звена. *Весовой, или импульсной, переходной функцией* $w(t)$ называется сигнал на выходе звена при подаче на его вход единичного импульса $\delta(t)$. В этом случае изображение по Лапласу входного сигнала $X(p)=1$, а изображение выходного сигнала совпадает с передаточной функцией

$$Y(p)=W(p). \tag{2.31}$$

Переходя от изображения к оригиналу, для весовой функции получаем

$$w(t)=y(t)=L^{-1}[W(p)], \tag{2.32}$$

т. е. *весовая функция является оригиналом передаточной функции*. Так как изображение весовой функции $W(p)$ отличается от изображения передаточной функции $H(p)$ только множителем p, то

$$w(t)=\frac{dh(t)}{dt}. \tag{2.33}$$

Таким образом, зная переходную функцию, всегда можно найти весовую функцию звена. Для $W(p)$ и $h(t)$, выражаемых формулами (2.20) и (2.28), получаем

$$w(t)=\sum_{i=1}^{n}\frac{K(p_i)}{D'(p_i)}e^{p_i t}\cdot 1_0(t). \tag{2.34}$$

Формулы (2.28) и (2.34) получены для некратных корней уравнения $D(p)=0$. Формулы для кратных корней могут быть получены из этих же выражений путем предельного перехода при стремлении к нулю разности между соответствующими корнями.

Устойчивость звена. Из рассмотрения выражения (2.34) можно сделать вывод о зависимости устойчивости системы от того, в какой области лежат корни p_i.

Для линейных систем определение устойчивости объекта или звена может быть сформулировано более жестко, чем для общего случая.

Линейное звено является устойчивым, если после окончания внешнего воздействия оно с течением времени возвратится к исходному состоянию.

Единичный импульс может быть рассмотрен как кратковременное воздействие. В таком случае о линейном звене можно судить по значению $w(t)$ при $t\to\infty$: звено устойчиво, если

$$\lim_{t\to\infty} w(t)=0; \tag{2.35, а}$$

звено неустойчиво, если

$$\lim_{t\to\infty} w(t)=\infty; \tag{2.35, б}$$

звено нейтрально, если

$$\lim_{t\to\infty} w(t)\neq\left\{\begin{matrix}0\\ \infty\end{matrix}\right\}. \tag{2.35, в}$$

Каждому действительному значению $p_l = \alpha_l$ соответствует в выражении (2.34) слагаемое вида

$$w_l(t) = c_l e^{\alpha_l t}, \tag{2.36}$$

где

$$c_l = \frac{K(p_l)}{D'(p_l)}.$$

Комплексной паре корней характеристического уравнения

$$p_l = \alpha_l + j\omega_l$$

и

$$p_{l+1} = \alpha_l - j\omega_l$$

соответствует слагаемое вида

$$w_k(t) = w_l(t) + w_{l+1}(t) = c_l e^{(\alpha_l + j\omega_l)t} +$$
$$+ c_{l+1} e^{(\alpha_l - j\omega_l)t} = 2Me^{\alpha_l t}\cos(\omega_l t + \varphi_l). \tag{2.37}$$

Следует различать три случая расположения корней:

1) вещественная часть корня положительна ($\alpha_l > 0$),
2) вещественная часть корня отрицательна ($\alpha_l < 0$),
3) вещественная часть корня равна нулю ($\alpha_l = 0$).

В первом случае корень лежит в правой полуплоскости корней, т. е. правее мнимой оси, во втором случае — в левой полуплоскости, т. е. левее мнимой оси (рис. 2.8). В третьем случае он лежит на мнимой оси.

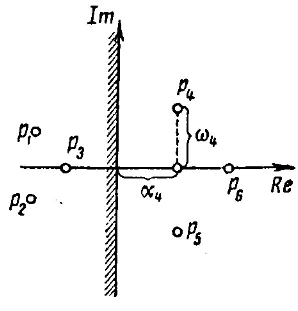


Рис. 2.8

В зависимости от расположения корней относительно мнимой оси характер изменения составляющих $w_l(t)$ во времени различен. При $\alpha_l > 0$ (рис. 2.9, *а*) соответствующая составляющая при $t \to \infty$ стремится к бесконечности, и, следовательно, к бесконечности стремится и вся величина $w(t)$ — звено неустойчиво.

При $\alpha_l < 0$ (рис. 2.9, *б*) соответствующая составляющая при $t \to \infty$ стремится к нулю и, следовательно, если все составляющие, число которых конечно, удовлетворяют этому условию, то $w(t)$ также стремится к нулю — звено устойчиво.

При $\alpha_l = 0$ (рис. 2.9, *в*) при $t \to \infty$ составляющая остается конечной и не равна нулю — звено нейтрально.

На рис. 2.9 для каждого случая расположения корней показаны графики при действительном корне (наверху) и при паре сопряженных комплексных корней (внизу).

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости линейного звена является отрицательное значение вещественной части всех полюсов функции $W(p)$, т. е. все полюсы должны лежать в левой полуплоскости p.

Рассмотренные четыре вида характеристик линейных звеньев однозначно связаны друг с другом и, зная одну из них, всегда можно найти любую другую. В дальнейшем при рассмотрении

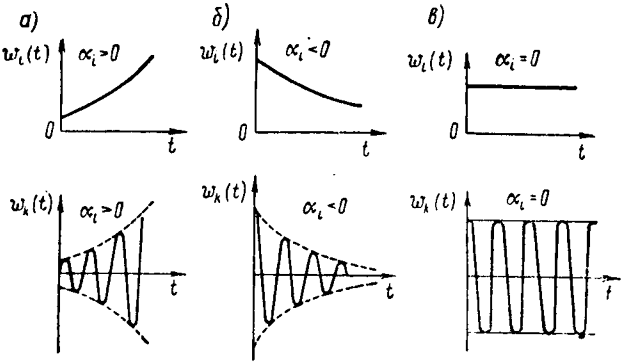


Рис. 2.9

математического описания линейного звена будет приниматься передаточная функция $W(p)$, из которой всегда могут быть найдены все остальные характеристики звена.

§ 2.5. ПРИМЕРЫ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ОБЪЕКТОВ

Для всех рассмотренных в § 1.2 и 1.4 объектов может быть проведена линеаризация уравнений, и они могут быть представлены в виде линейных звеньев с передаточными функциями $W(p)$.

Пример 2.3. Гидравлический резервуар (см. рис. 1.4, *а*). Для гидравлического резервуара, описываемого уравнением (1.2), входной величиной является изменение притока жидкости $x = Q - G$, а выходной — изменение уровня жидкости $y = \Delta H$. В операторной форме уравнение (1.2) имеет вид

$$SpY(p) = X(p) \tag{2.38}$$

и, следовательно,

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{1}{Sp}. \tag{2.39}$$

Так как уравнение $W(p)$ имеет один полюс $p = 0$, то, следовательно, объект является нейтральным.

Пример 2.4. Сообщающиеся резервуары (см. рис. 1.4, *б*). Для объекта, описываемого уравнениями (1.3), входными величинами x_1 и x_2 являются $Q_1 - G_1$ и $Q_2 - G_2$, а выходными величинами y_1 и y_2 служат ΔH_1 и ΔH_2.

Линеаризуя зависимость Q_{12} от $H_1 - H_2$, можно записать, что

$$Q_{12} = b_0(y_1 - y_2), \tag{2.40}$$

где $b_0 = \frac{\partial Q_{12}}{\partial y_1} = -\frac{\partial Q_{12}}{\partial y_2}$ при заданных значениях H_1 и H_2. После подстановки принятых обозначений и перехода от оригиналов к изображениям уравнения (1.3) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} S_1pY_1 &= X_1 - b_0(Y_1 - Y_2); \\ S_2pY_2 &= X_2 + b_0(Y_1 - Y_2), \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

Решим полученные уравнения относительно Y_1 и Y_2, тогда

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= W_{11}X_1 + W_{12}X_2; \\ Y_2 &= W_{21}X_1 + W_{22}X_2; \end{aligned}\right\} \tag{2.42}$$

где

$$W_{11} = \frac{b_0 + S_2p}{p\,[b_0(S_1 + S_2) + S_1S_2p]};$$

$$W_{22} = \frac{b_0 + S_1p}{p\,[b_0(S_1 + S_2) + S_1S_2p]};$$

$$W_{12} = W_{21} = \frac{b_0}{p\,[b_0(S_1 + S_2) + S_1S_2p]}.$$

Во всех уравнениях в обозначениях X_i, Y_i и W_{ik} для упрощения записи уравнений опущено обозначение функции p.

Структурная схема полученного линеаризованного объекта соответствует рис. 2.7, *б* (сравнить с рис. 1.16, *б*).

Пример 2.5. Электрический генератор постоянного тока (см. рис. 1.5, *а*). Для объекта, описываемого уравнениями (1.4), управляющей величиной является изменение тока возбуждения $x = \Delta i_в$, внешними возмущениями служат изменения скоростей вращения валов генераторов $f_1 = \Delta\omega_1$, $f_2 = \Delta\omega_2$ и тока нагрузки $f_3 = \Delta i_н$, а управляемой величиной служит изменение напряжения на зажимах генератора $y = \Delta u_н$.

Линеаризуя зависимость $\phi_1(i_в)$ и $\phi_2(i_1)$ вблизи значений $i_в$ и i_1, соответствующих начальному режиму, для малых приращений $\Delta\phi_1$, $\Delta\phi_2$, $\Delta i_в$, Δi_1, Δe_1, Δe_2, $\Delta u_н$, $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$ и $\Delta i_н$ и пренебрегая величинами второго порядка малости, получим следующие уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\phi_1 &= a_1\Delta i_в; \\ \Delta e_1 &= c_1\omega_1\Delta\phi_1 + c_1\phi_1\Delta\omega_1 = r\Delta i_1 + w_2\frac{d\Delta\phi_2}{dt}; \\ \Delta\phi_2 &= a_2\Delta i_1; \\ \Delta e_2 &= c_2\omega_2\Delta\phi_2 + c_2\phi_2\Delta\omega_2 = \Delta u_н + r_я\Delta i_н; \end{aligned}\right\} \tag{2.43}$$

где a_1 и a_2 соответственно $\dfrac{\partial\phi_1}{\partial i_в}$ и $\dfrac{\partial\phi_2}{\partial i_1}$ в заданной точке характеристики $\phi_1(i_в)$, $\phi_2(i_1)$.

Переходя от оригиналов к изображениям и исключая из уравнений $\Delta\phi_1$, $\Delta\phi_2$ и Δi_1, получим

$$Y = \frac{k_1}{1 + pT_1}X + \frac{k_1b_1}{1 + pT_1}F_1 + b_2F_2 - b_3F_3, \tag{2.44}$$

где

$$k_1 = \frac{a_1a_2c_1c_2\omega_1\omega_2}{r_1}, \quad T_1 = \frac{a_2w_2}{r_1},$$

$$b_1 = \frac{\phi_1}{a_1\omega_1}, \quad b_2 = c_2\phi_2 \text{ и } b_3 = r_я,$$

а через X, Y, F_1, F_2 и F_3 обозначены изображения x, y, f_1, f_2 и f_3.

При отсутствии внешних возмущений ($F_1 = F_2 = F_3 = 0$) зависимость между управляющей и управляемой величинами выражается передаточной функцией

$$W_1 = \frac{Y}{X} = \frac{k_1}{1 + pT_1}.$$

Для этого случая $W(p)$ имеет один полюс в точке $p_1 = -\frac{1}{T_1}$, а следовательно, звено устойчивое. Структурная схема для этого случая приведена на рис. 2.7, *а* (сравнить с рис. 1.17).

Пример 2.6. Электрический двигатель постоянного тока (см. рис. 1.6, *а*). Для объекта, описываемого уравнениями (1.5), входными величинами служат изменения напряжения питания якоря и тока возбуждения $x_1 = \Delta u_я$ и $x_2 = \Delta i_в$, а выходной величиной является изменение скорости вращения вала $y = \Delta\omega$. Линеаризуем уравнения (1.5) вблизи точки начального режима

$$\left.\begin{aligned} \Delta\phi_д &= a\Delta i_в = ax_2; \\ \Delta u_я &= x_1 = r_я\Delta i_я + c_1\omega\Delta\phi_д + c_1\phi_д\Delta\omega; \\ a_1 i_я\Delta\phi_д + a_1\phi_д\Delta i_я &= J\frac{d\Delta\omega}{dt} + b\Delta\omega, \end{aligned}\right\} \qquad (2.45)$$

где

$$a = \frac{\partial\phi_д}{\partial i_в};\ b = \frac{\partial M}{\partial\omega},\ M = M_{тр} + M_н.$$

Исключим из уравнений $\Delta i_я$ и $\Delta\phi_д$, тогда

$$k_1x_1 + k_2x_2 = y + T\frac{dy}{dt},$$

где

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= \frac{a_1\phi_д}{r_я b + c_1\phi_д^2 a_1}; \\ k_2 &= \frac{a_1 i_я a - a_1\phi_д\dfrac{a\omega c_1}{r_я}}{b + c_1\phi_д^2 a_1/r_я}; \\ T &= \frac{J}{b + c_1\phi_д^2 a_1/r_я}. \end{aligned}\right\} \qquad (2.4)$$

При этом предполагается, что малые пределы изменения входных и выходных величин дают право в линейном приближении считать параметры k_1, k_2 и T постоянными. В этом случае, переходя к изображениям, получаем

$$Y = W_1X_1 + W_2X_2, \qquad (2.47)$$

где

$$W_1 = \frac{k_1}{1 + pT};\quad W_2 = \frac{k_2}{1 + pT}.$$

Структурная схема рассматриваемого объекта показана на рис. 2.10, *а* (сравнить с рис. 1.18, *а*).

В том случае, когда управление ведется только по напряжению питания якоря, $x_2 = 0$, двигатель представляет собой простое звено с параметрами k_1 и T, которые можно считать не зависящими от ω.

Пример 2.7. Асинхронный двигатель (см. рис. 1.8, *а*). Для асинхронного двигателя в режиме, близком к состоянию равновесия, уравнение (1.7, *а*) имеет вид

$$J\frac{d\omega}{dt} = \Delta M, \qquad (2.48)$$

где ΔM — функция напряжения сети U и скорости вращения вала ω, показанная на рис. 1.8, *б*.

Разлагая ΔM в ряд по приращениям ω и U и пренебрегая составляющими высокого порядка, получаем

$$\Delta M = a\Delta\omega + b\Delta U, \tag{2.49}$$

где $a = \frac{\partial \Delta M}{\partial \omega}$, $b = \frac{\partial \Delta M}{\partial \Delta U}$, причем в устойчивых точках *1, 2, 3, 4* $a < 0$, а в неустойчивых *5, 6* $a > 0$. При этом b и J всегда положительны.

Рассматривая (2.48) и (2.49) совместно, будем иметь

$$kx = y + T\frac{dy}{dt}, \tag{2.50}$$

где

$$T = -\frac{J}{a};\ k = -\frac{b}{a};\ x = \Delta U;\ y = \Delta\omega.$$

Переходя к изображениям, получаем

$$W = \frac{Y}{X} = \frac{k}{1 + pT}. \tag{2.51}$$

При $a < 0$ k и T положительны и корень уравнения $1 + pT = 0$ меньше нуля — звено устойчивое. При $a > 0$ корень $p_1 = -\frac{1}{T} = \frac{a}{J}$ положителен и двигатель является неустойчивым звеном. Структурная схема объекта соответствует рис. 2.7, *а* (сравнить с рис. 1.18, *б*).

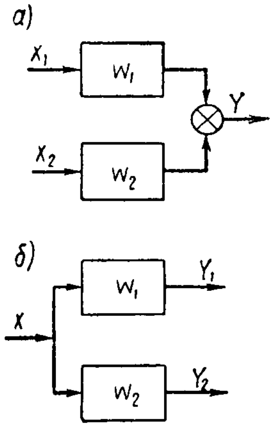


Рис. 2.10

Пример 2.8. Летательный аппарат. Рассмотрим уравнения движения летательного аппарата (1.14) ÷ (1.18) для случая, когда полет совершается с постоянной скоростью $v = \text{const}$.

Пусть начальный режим характеризуется величинами: R_0, N_0, L_0,

$$M_0 = 0,\ \delta_0,\ \vartheta_0,\ \alpha_0,\ \theta_0 \text{ и } \frac{d\vartheta}{dt} = 0.$$

Изменение угла руля высоты на величину $\Delta\delta$ приводит к изменениям N, L, M и соответственно ϑ и α. Для определения этих изменений могут быть применены уравнения (1.16) и (1.17), в которых нелинейные функции $L(\alpha)$ и $M\left(\delta,\ \alpha,\ \frac{d\vartheta}{dt}\right)$ разложены в ряд и отброшены члены высокого порядка. Уравнение (1.15) для $v = \text{const}$ во внимание может не приниматься. Тогда

$$\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha; \tag{2.52}$$

$$\vartheta = \vartheta_0 + \Delta\vartheta; \tag{2.53}$$

$$\delta = \delta_0 + \Delta\delta; \tag{2.54}$$

$$L \approx L_0 + \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha}\right)_0 \Delta\alpha = L_0 + l_\alpha \Delta\alpha; \tag{2.55}$$

$$M \approx \left(\frac{\partial M}{\partial \delta}\right)_0 \Delta\delta + \left(\frac{\partial M}{\partial \alpha}\right)_0 \Delta\alpha + \left(\frac{\partial M}{\partial \dot\vartheta}\right)_0 \frac{d\Delta\vartheta}{dt} =$$

$$= J\left(m_\delta \Delta\delta - m_\alpha \Delta\alpha - m_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt}\right); \tag{2.56}$$

$$G\cos\theta = G\cos\theta_0 - G\sin\theta_0\Delta\theta \approx G\cos\theta_0; \quad (2.57)$$

$$R\sin\alpha = R_0\sin\alpha_0 + R_0\cos\alpha_0\Delta\alpha. \quad (2.58)$$

Здесь с учетом отрицательного знака $\frac{\partial M}{\partial\alpha}$ и $\frac{\partial M}{\partial\dot\vartheta}$ обозначено

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial\alpha}\right)_0 &= l_\alpha; & \left(\frac{\partial M}{\partial\delta}\right)_0 &= m_\delta J; \\ \left(\frac{\partial M}{\partial\alpha}\right)_0 &= -m_\alpha J; & \left(\frac{\partial M}{\partial\dot\vartheta}\right) &= -m_{\dot\vartheta} J; \end{aligned}\right\} \quad (2.59)$$

где

$$\dot\vartheta = \frac{d\vartheta}{dt}.$$

Переходя от (1.16) и (1.17) к уравнениям для приращений и учитывая, что $\theta = \vartheta - \alpha$, получим:

$$\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \frac{d\Delta\alpha}{dt} + \frac{\Delta\alpha}{T_v}; \quad (2.60)$$

$$\frac{d^2\Delta\vartheta}{dt^2} + m_{\dot\vartheta}\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = m_\delta\Delta\delta - m_\alpha\Delta\alpha, \quad (2.61)$$

где

$$T_v = \frac{mv}{R_0\cos\alpha_0 + l_\alpha}.$$

При этом учитывалось, что

$$R_0\sin\alpha_0 + L_0 - G_0\cos\theta_0 = 0 \quad (2.62)$$

ввиду установившегося характера предшествовавшего режима

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 = 0.$$

Рассматривая изменение угла руля $\Delta\delta$ как входную величину x, а изменения углов тангажа $\Delta\vartheta$ и атаки $\Delta\alpha$ как выходные величины y_1 и y_2, после перехода к изображениям можно уравнения (2.61) записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} pY_1 &= pY_2 + \frac{1}{T_v}Y_2; \\ p^2Y_1 + m_{\dot\vartheta}\,pY_1 &= m_\delta X - m_\alpha Y_2. \end{aligned}\right\} \quad (2.63)$$

Решая эти уравнения относительно Y_1 и Y_2, получим (рис. 2.10,*б*)

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= W_1X; \\ Y_2 &= W_2X, \end{aligned}\right\} \quad (2.64)$$

где

$$W_1 = \frac{m_\delta(1 + pT_v)}{p\left[\left(m_{\dot\vartheta} + p\right)(1 + pT_v) + m_\alpha T_v\right]} \quad (2.65)$$

и

$$W_2 = \frac{m_\delta T_v}{\left(p + m_{\dot\vartheta}\right)(1 + pT_v) + m_\alpha T_v}.$$

Если

$$1 + m_{\dot\vartheta}T_v < 2\sqrt{m_{\dot\vartheta}T_v + m_\alpha T_v^2},$$

то два полюса функций $W_1(p)$ и $W_2(p)$ — комплексные и лежат в левой полуплоскости. Функция $W_1(p)$ имеет третий полюс, равный нулю. Таким образом, звено управления углом тангажа является нейтральным, а звено управления углом атаки — устойчивым.

§ 2.6. ОБЩЕЕ СВОЙСТВО МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫХ УСТОЙЧИВЫХ ЗВЕНЬЕВ

Важным общим показателем свойств звена является принадлежность нулей передаточной функции к левой полуплоскости p. Рассматривая передаточную функцию, записанную в форме (2.21), можно комплексный коэффициент усиления выразить как

$$W(j\omega) = \frac{k_m}{d_n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{m} (j\omega - q_i)}{\prod_{i=1}^{n} (j\omega - p_i)}. \qquad (2.66)$$

Рассмотрим один сомножитель числителя $j\omega - q_i$. Эта разность представляет собой вектор, начало которого лежит в точке q_i, а конец — на мнимой оси в точке $j\omega$. Фаза этого вектора выражает поворот его относительно вещественной оси против часовой стрелки.

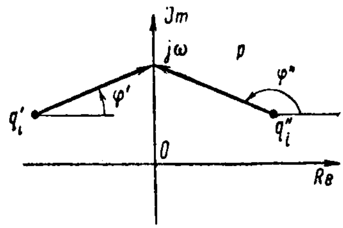


Рис. 2.11

На рис. 2.11 построены два таких вектора для различных положений точки q_i, обозначенных q'_i и q''_i. Из построения видно, что при одном и том же значении модуля комплекса $j\omega - q_i$ его фаза φ меньше в том случае, когда q_i лежит в левой полуплоскости. Поэтому звенья, все нули передаточных функций которых лежат в левой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, q_i < 0$), называются *минимально-фазовыми*.

Звенья, передаточные функции которых имеют хотя бы один нуль, лежащий в правой полуплоскости ($\mathrm{Re}\, q_i > 0$), называются *неминимально-фазовыми*.

Для минимально-фазовых устойчивых звеньев между амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками существует однозначная зависимость и, следовательно, амплитудно-частотная характеристика однозначно определяет передаточную функцию системы.

Это очень важное для синтеза линейных систем обстоятельство вытекает из известного в теории функций комплексного переменного преобразования Гильберта, заключающегося в следующем.

Если известна аналитическая функция комплексного переменного $F(p)$, все полюсы которой лежат в левой полуплоскости p, то между мнимой и вещественной составляющими этой функции от мнимого аргумента $F(j\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega)$ существует следующая зависимость:

$$F_1(\omega) = -\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_2(v)}{v-\omega}\,dv \tag{2.67}$$

и

$$F_2(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{F_1(v)}{v-\omega}\,dv. \tag{2.68}$$

Преобразование Гильберта дает возможность по частотной характеристике вещественной части функции комплексного переменного найти частотную характеристику мнимой части и, наоборот, по характеристике мнимой части найти вещественную характеристику.

Пусть $W(j\omega)$ — комплексный коэффициент усиления минимально-фазовой устойчивой системы. Тогда аналитическая функция

$$F(j\omega) = \ln W(j\omega) = \ln W(\omega) + j\varphi(\omega) = F_1(\omega) + jF_2(\omega) \tag{2.69}$$

удовлетворяет требованиям преобразования Гильберта, так как условие минимальной фазы $W(j\omega)$ обеспечивает отсутствие полюсов функции $F(p)$ в правой полуплоскости p. Тогда, зная логарифмическую амплитудно-частотную характеристику

$$L(\omega) = 20\lg W(\omega) = 8{,}7\ln W(\omega) = 8{,}7F_1(\omega), \tag{2.70}$$

по формуле (2.68) можно найти фазочастотную характеристику

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln W(v)}{v-\omega}\,dv = \frac{1}{8{,}7\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{L(v)}{v-\omega}\,dv. \tag{2.71}$$

Вводя переменную $u = \ln\frac{v}{\omega}$, можно интеграл (2.71) записать как

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d[\ln W(v)]}{du}\ln\operatorname{cth}\left|\frac{u}{2}\right|du. \tag{2.72}$$

В ряде случаев для определения $\varphi(\omega)$ по $L(\omega)$ удобно пользоваться последним выражением.

Итак, если известна амплитудно-частотная характеристика звена и известно, что звено устойчивое и минимально-фазовое, то этого достаточно для того, чтобы найти все его частотные характеристики и, следовательно, полностью характеризовать поведение системы при любых сигналах, поступающих на вход.

Пример 2.9. Пусть известно, что коэффициент усиления устойчивого минимально-фазового звена не зависит от частоты

$$W(\omega) = \text{const} = k.$$

Найти $\varphi(\omega)$.

Подставим $W(\omega) = k$ в уравнение (2.71)

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln k}{v-\omega}\,dv.$$

Так как вычисление $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{dv}{v-\omega}$ при интегрировании вдоль вещественной оси дает нуль, то $\varphi(\omega) = 0$.

Таким образом, единственным минимально-фазовым звеном, для которого коэффициент усиления не зависит от частоты, является звено с передаточной функцией $W(p) = k$.

Пример 2.10. Пусть известно, что минимально-фазовое устойчивое звено имеет амплитудно-частотную характеристику

$$W(\omega) = \sqrt{1+(\omega T)^2}.$$

Необходимо найти $\varphi(\omega)$.

Тогда

$$F_1(\omega) = \ln W(\omega) = \frac{1}{2}\ln\left[1+(\omega T)^2\right] \tag{2.73}$$

и

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left[1+(vT)^2\right]}{v-\omega}\,dv. \tag{2.74}$$

Вычисление этого определенного интеграла при интегрировании вдоль вещественной оси дает $2\pi \operatorname{arctg}\omega T$. Следовательно,

$$\varphi = \operatorname{arctg}\omega T. \tag{2.75}$$

Этот пример соответствует звену с передаточной функцией $W(p) = 1 + pT$.

Пример 2.11. Найти $\varphi(\omega)$ минимально-фазового устойчивого звена, если

$$W(\omega) = \left[1+(\omega T)^2\right]^a. \tag{2.76}$$

Тогда

$$F_1(\omega) = \ln W(\omega) = a\ln\left[1+(\omega T)^2\right] \tag{2.77}$$

и

$$\varphi(\omega) = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln\left[1+(vT)^2\right]}{v-\omega}\,dv = 2a\operatorname{arctg}\omega T. \tag{2.78}$$

Это соответствует звену с передаточной функцией

$$W(p) = [1+pT]^{2a}. \tag{2.79}$$

Величина a может быть как положительной, так и отрицательной.

§ 2.7. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО СИГНАЛА ЛИНЕЙНЫМ ЗВЕНОМ

Зная характеристики звена, можно найти сигнал на его выходе при любом сигнале на входе. Действительно, как показано в § 2.2, любой сигнал может быть представлен в виде совокупности элементарных сигналов типа синусоиды, единичного скачка или единичного импульса. Для каждого же из этих простых сигналов, подаваемых на вход звена, может быть найден выходной сигнал. Применяя для линейных систем принцип наложения, можно рассматривать выходной сигнал как совокупность составляющих, получающихся при рассмотрении множества простых сигналов на входе звена.

Так, если входной сигнал задан частотным спектром $X(j\omega)$, то частотный спектр сигнала на выходе находится с помощью комплексного коэффициента усиления звена

$$Y(j\omega) = W(j\omega) X(j\omega). \tag{2.80}$$

Если входной сигнал задан изображением $X(p)$, то изображение сигнала на выходе находится с помощью передаточной функции

$$Y(p) = W(p) X(p). \tag{2.81}$$

Если входной сигнал задан функцией времени $x(t)$, то сигнал на выходе звена может быть найден с помощью переходной функции или весовой.

Разлагая $x(t)$ на совокупность единичных скачков $1_0(t-\tau)$ по формуле (2.1) и находя реакцию звена на каждый из скачков, получаем

$$y(t) = x(0)\,h(t) + \int_0^t h(t-\tau)\,\frac{dx(\tau)}{d\tau}\,d\tau. \tag{2.82}$$

Аналогично, разлагая $x(t)$ на совокупность единичных импульсов $\delta(t-\tau)$ по формуле (2.2) и находя реакцию звена на каждый из импульсов, получаем

$$y(t) = h(0)\,x(t) + \int_0^t w(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau. \tag{2.83}$$

Таким образом, рассмотренные характеристики звеньев дают полную возможность рассчитать сигнал на выходе звена, если известен сигнал на его входе при нулевых начальных условиях.

Если начальные условия ненулевые, то расчет несколько усложняется. В этом случае при расчете сигнала операторным методом следует исходить из формулы (2.15).

Соответствующим выбором начала отсчета времени при расчете процессов, вызванных приращением x относительно начального значения, можно свести к нулю $x^{l-r}(0)$.

Однако начальные значения $y^{l-r}(0)$ необходимо учитывать. В этом случае из формулы (2.15) получаем

$$Y(p) = \frac{K(p)}{D(p)} X + \frac{1}{D(p)} Y_{\text{н}}(p), \tag{2.84}$$

где

$$Y_{\text{н}}(p) = \sum_{l=1}^{n} d_l \sum_{r=1}^{l} p^{r-1} y^{l-r}(0). \tag{2.85}$$

Будем считать, что изображение типового воздействия $X(p)$ — дробно-рациональная функция

$$X(p) = \frac{N(p)}{M(p)}, \tag{2.86}$$

где $N(p)$ и $M(p)$ — полиномы от p.

Тогда

$$Y(p) = W(p) X(p) + \frac{Y_{\text{н}}(p)}{D(p)} = \frac{R(p)}{D(p)\cdot M(p)}, \tag{2.87}$$

где

$$R(p) = K(p) N(p) + Y_{\text{н}}(p) M(p). \tag{2.88}$$

При нулевых начальных условиях $Y_{\text{н}}(p) = 0$ и выражение (2.84) переходит в (2.81).

Заметим, что согласно (2.87) ненулевые начальные условия изменяют лишь числитель изображения выходного сигнала. Корни же знаменателя (полюсы) этого изображения при любых начальных условиях определяются из уравнений:

$$D(p) = 0, \tag{2.89}$$

$$M(p) = 0. \tag{2.90}$$

Для определения оригинала $y(t)$ можно воспользоваться разложением (2.84) на элементарные дроби, соответствующие n корням уравнения (2.89) и s корням уравнения (2.90).

Если все корни (2.89) и (2.90) различны, то

$$y(t) = \sum_{l=1}^{n} \frac{R(p_l)}{D'(p_l) M(p_l)} e^{p_l t} + \sum_{k=1}^{s} \frac{K(p_k)\cdot N(p_k)}{D(p_k) M'(p_k)} e^{p_k t}, \tag{2.91}$$

где p_l — корни (2.89),

p_k — корни (2.90).

Компоненты первой суммы в (2.91) с точностью до коэффициентов определяются корнями уравнения (2.89) и для устойчивых звеньев с течением времени затухают. Эта составляющая называется *переходной* (или свободной) *составляющей процесса*

$$y_{\text{п}}(t) = \sum_{l=1}^{n} \frac{R(p_l)}{D'(p_l) M(p_l)} e^{p_l t}. \tag{2.92}$$

В частности, при нулевых начальных условиях

$$y_п(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K(p_i)N(p_i)}{D'(p_i)M(p_i)} e^{p_i t}. \tag{2.93}$$

Заметим, что поскольку суммирование в (2.92) производится с весовыми коэффициентами, зависящими от коэффициентов характеристического уравнения, числителя передаточной функции звена $K(p)$, начальных условий $Y_н(p)$ и параметров воздействия $N(p)$ и $M(p)$ (2.91), то протекание переходного процесса в целом существенно зависит от всех этих факторов.

Сравнительную оценку переходных процессов целесообразно вести для единых (стандартных) типовых воздействий при стандартных (обычно нулевых) начальных условиях.

Компоненты второй суммы в (2.91) с теми же оговорками определяются корнями уравнения (2.90) — полюсами изображения рассматриваемого воздействия. Эта составляющая называется вынужденной составляющей процесса

$$y_в(t) = \sum_{k=1}^{s} \frac{K(p_k)N(p_k)}{D(p_k)M'(p_k)} e^{p_k t}. \tag{2.94}$$

Заметим, что вынужденная составляющая зависит от входного воздействия и параметров передаточной функции системы, но не зависит от начальных условий $Y_н(p)$.

По истечении времени, достаточного для того, чтобы переходная составляющая (2.92) успела затухнуть с требуемой точностью, считают процесс установившимся.

При этом $y(t)$ в установившемся процессе определяется вынужденной составляющей и не зависит от начальных условий.

При наличии кратных корней уравнения (2.89) или (2.90) разложение на простые дроби следует вести с учетом кратности.

Глава III

ТИПОВЫЕ ЗВЕНЬЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 3.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ТИПОВЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Для исследования процессов в реальных системах пользуются идеализированными схемами, которые точно описываются математически и приближенно характеризуют реальные звенья систем в заданном диапазоне частот сигналов.

Так же, как при рассмотрении электрических цепей вводятся понятия r, L и C, хотя реальные реостат, конденсатор и катушка индуктивности только в определенных пределах частот соответствуют этим идеальным понятиям, в теории автоматического управления вводится понятие *типовых звеньев,* передаточная функция которых только в определенном частотном диапазоне соответствует реальным звеньям системы управления.

Рассматривая характеристики звеньев вне зависимости от их назначения, физического принципа действия, мощности и скорости передаваемых сигналов, можно выделить ряд типовых звеньев, описываемых обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями первого и второго порядка:

а) простейшие: пропорциональные, интегрирующие и дифференцирующие звенья;

б) звенья первого порядка: инерционные, инерционно-дифференцирующие, форсирующие и инерционно-форсирующие;

в) колебательные звенья второго порядка.

Все типовые звенья имеют передаточную функцию, которая представляет собой рациональную дробь

$$W(p) = \frac{K(p)}{D(p)},$$

причем нули и полюсы функции $W(p)$, соответствующие уравнениям $K(p) = 0$ и $D(p) = 0$, лежат в левой полуплоскости p или на ее границе, совпадающей с мнимой осью.

Более сложные линейные звенья могут быть сведены к соединению типовых звеньев.

При отнесении реального звена к какому-либо типовому следует оговаривать диапазон частот, при котором рассматриваются характеристики. Выход за пределы этого диапазона может привести к необходимости учета дополнительных параметров и усложнению математического описания звена.

Ниже рассматриваются характеристики типовых звеньев и приводятся примеры этих звеньев.

Неустойчивые и неминимально-фазовые звенья так же, как и звенья, описываемые трансцендентной или иррациональной передаточной функцией, относятся к нетиповым и будут рассмотрены в главе IV.

§ 3.2. ПРОСТЕЙШИЕ ЗВЕНЬЯ

Пропорциональное звено. Самым простым является звено, выходная величина которого прямо пропорциональна входной величине. Уравнение такого звена

$$y = kx, \tag{3.1}$$

где k — коэффициент усиления звена.

Примерами такого звена (рис. 3.1) являются: делитель напряжения (*а*), усилитель постоянного тока (*б*), рычажная передача (*в*), редукторная передача (*г*) и др.

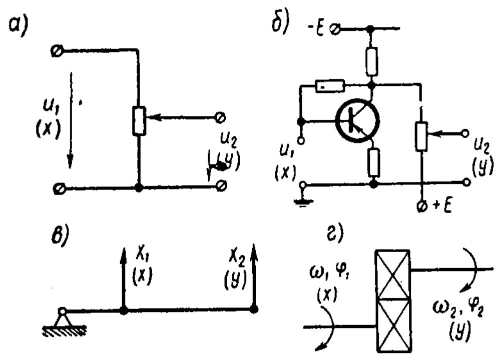


Рис. 3.1

Предполагается, что передача сигнала от входа к выходу производится мгновенно без какой-либо инерции. Поэтому пропорциональные звенья называются *безынерционными*.

Если на вход пропорционального звена подать синусоидальный сигнал

$$x = X_m \sin \omega t,$$

то на выходе появится сигнал

$$y = Y_m \sin \omega t,$$

где

$$Y_m = kX_m.$$

В комплексной форме

$$\dot{Y} = k\dot{X} \quad \text{или} \quad Y(j\omega) = kX(j\omega) \tag{3.2}$$

и комплексный коэффициент усиления

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = k. \tag{3.3}$$

Годограф комплексного коэффициента усиления $W(j\omega)$ при $0 < \omega < \infty$ имеет вид точки, сдвинутой на расстояние k от нуля по вещественной оси (рис. 3.2, *а*).

Принятое описание связи между входом и выходом соответствует идеальному звену, а для реального звена справедливо только при частотах, меньших определенной максимальной величины $\omega_м$.

При более высоких частотах принятое математическое описание звена перестает быть справедливым и коэффициент усиления, за счет малых неучтенных параметров, снижается до нуля. Для делителя напряжения (см. рис. 3.1, *а*) таким малым параметром может являться емкость выходных проводов; для усилителя (см. рис. 3.1, *б*) — распределенные емкости и индуктивности цепи; для механической передачи (см. рис. 3.1, *в* и *г*) — упругость рычагов и валов. Поэтому при возрастании ω до бесконечности коэффициент усиления любого реального звена снижается до нуля и годограф коэффициента усиления при $\omega_м < \omega < \infty$ носит характер графика, показанного на рис. 3.2, *а* пунктиром. Однако в системах автоматического управления обычно рассматривается диапазон сравнительно низких частот, для которых $\omega < \omega_м$ и все рассмотренные устройства могут быть отнесены к категории пропорциональных (безынерционных) звеньев, а годограф коэффициента усиления имеет вид точки k.

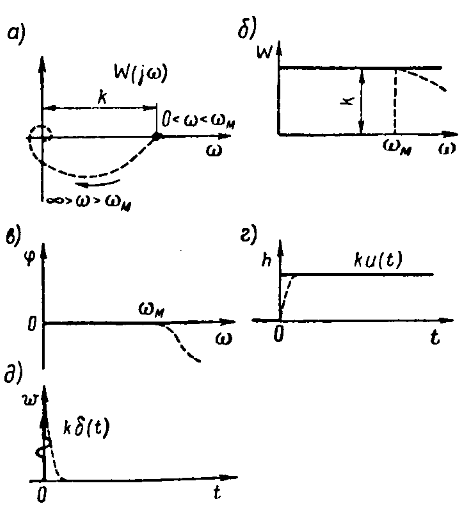


Рис. 3.2

Соответствующие амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики показаны на рис. 3.2, *б* и *в*.

В дальнейшем под *пропорциональным* будем понимать такое идеальное звено, в котором постоянство коэффициента усиления может быть принято во всем диапазоне частот $0 < \omega < \infty$.

Переходя от коэффициента усиления к передаточной функции

$$W(p) = k, \tag{3.4}$$

а затем к переходной и весовой функциям, получаем

$$h(t) = k1_0(t) \tag{3.5}$$

и

$$w(t) = k\delta(t). \tag{3.6}$$

Графическое изображение переходной и весовой функций пропорционального звена показано на рис. 3.2, *г* и *д*. Обе эти функции соответствуют идеальному пропорциональному звену. Реальные звенья, схемы которых изображены на рис. 3.1, имеют характеристики, только приближенно описываемые этими графиками. Отклонение реальных характеристик от идеальных на графиках показано пунктиром (см. рис. 3.2).

В ряде систем автоматического управления применяются усилители переменного тока с модуляцией и демодуляцией или

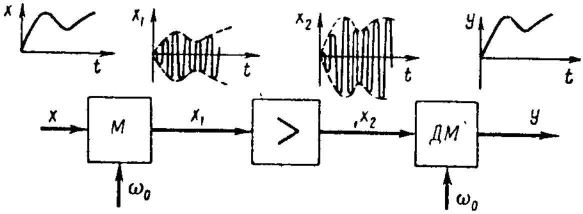


Рис. 3.3

фазовым детектированием, в которых несущая частота модуляции значительно выше, чем наибольшая частота входного сигнала. Такие схемы дают возможность получать стабильную работу при больших коэффициентах усиления. Блок-схема такого усилителя с модулятором *М* и демодулятором *ДМ* показана на рис. 3.3.

При частотах сигнала много меньших, чем несущая частота ω_0, такие усилители могут быть отнесены к категории пропорциональных, и к ним применимы все характеристики, приведенные на рис. 3.2 для идеальных пропорциональных звеньев.

Интегрирующее звено. Существует ряд звеньев, в которых выходная величина пропорциональна или равна интегралу по времени от входной величины

$$y = k\int_0^t x(t)\,dt + y_0, \tag{3.7}$$

где k — некоторый коэффициент пропорциональности.

Такие звенья называются *интегрирующими*.

Пример 3.1. Примерами реальных элементов, эквивалентные схемы которых сводятся к интегрирующему звену, являются: электрическая емкость (рис. 3.4,*а*), индуктивность (*б*), вращающийся вал (*в*), гидравлический резервуар (*г*), гидравлический усилитель (рис. 3.5,*а*).

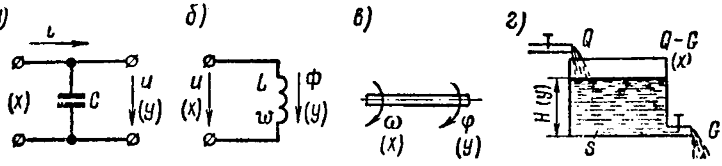


Рис. 3.4

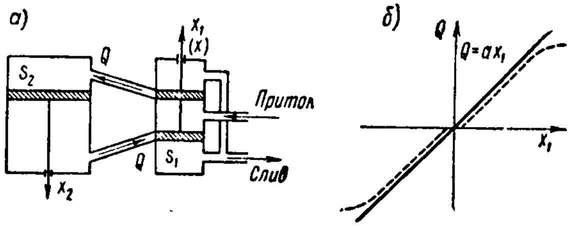


Рис. 3.5

Действительно, напряжение на ємкости

$$u = \frac{1}{C}\int_0^t i dt + u_0; \tag{3.8}$$

магнитный поток в индуктивности

$$\Phi = \frac{1}{w}\int_0^t u dt + \Phi_0; \tag{3.9}$$

угол поворота вала

$$\varphi = \int_0^t \omega dt + \varphi_0; \tag{3.10}$$

уровень воды в гидравлическом резервуаре

$$H = \frac{1}{S}\int_0^t (Q - G)\, dt + H_0. \tag{3.11}$$

В выражениях (3.8) — (3.11) приняты следующие обозначения: i — ток в емкости C, u — напряжение на катушке с числом витков w, ω — угловая скорость вращения вала, а $Q - G$ — результирующий приток воды в резервуаре с поверхностью S.

Интегрирующим звеном может быть приближенно описан и гидравлический усилитель. Перемещение поршня золотника x_1 приводит к изменению притока и слива жидкости Q в рабочем цилиндре и соответственно — к перемещению рабочего поршня x_2 относительно начального положения x_{20}.

Зависимость между x_1 и Q при постоянстве давлений в цилиндрах системы представлена графиком, показанным на рис. 3.5,б пунктиром. Приближенно этот график может быть заменен прямой $Q = ax_1$, изображенной на рисунке сплошной линией.

Из условия несжимаемости жидкости получаем

$$Q = S_2 \frac{dx_2}{dt} = ax_1, \tag{3.12}$$

где S_2 — площадь рабочего поршня.

И, следовательно,

$$x_2 = \frac{1}{S_2}\int_0^t Q_1\,dt + x_{20} \approx \frac{a}{S_2}\int_0^t x_1 dt + x_{20}. \tag{3.13}$$

Если на вход интегрирующего звена подать синусоидальный сигнал $x = X_m \sin \omega t$, то из уравнения (3.7) непосредственно следует, что

$$y = -\frac{k}{\omega} X_m \cos \omega t \tag{3.14}$$

или

$$\dot{Y} = \frac{k}{j\omega}\dot{X} \text{ и } Y(j\omega) = \frac{k}{j\omega} X(j\omega). \tag{3.15}$$

Комплексный коэффициент усиления интегрирующего звена

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{k}{j\omega} = \frac{k}{\omega} e^{-j\frac{\pi}{2}}. \tag{3.16}$$

Частотный годограф (*а*) и частотные характеристики (*б*) интегрирующего звена показаны на рис. 3.6.

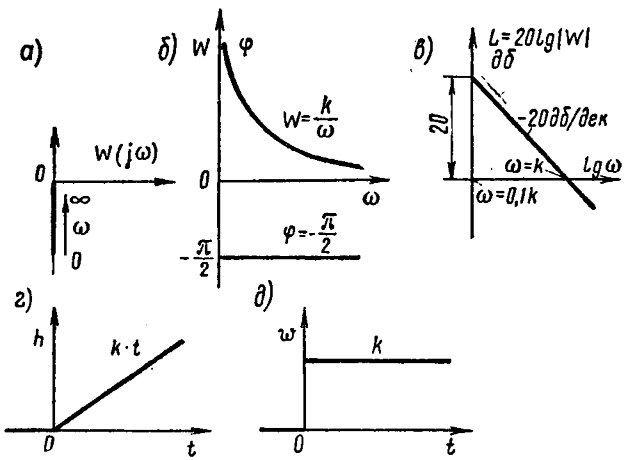


Рис. 3.6

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика $L = 20 \lg |W|$ в функции $\lg \omega$ имеет вид прямой с наклоном -20 *дб/дек*, т. е. при изменении частоты в 10 раз L уменьшается на 20 *дб* (рис. 3.6,*в*). График $L(\omega)$ для интегрирующего звена пересекает ось абсцисс при $\omega = k$.

Переходя от коэффициента усиления к передаточной функции

$$W(p)=\frac{k}{p}, \tag{3.17}$$

а затем — к переходной и весовой функциям, получаем

$$h(t)=kt1_0(t) \tag{3.18}$$

и

$$w(t)=k1_0(t) \tag{3.19}$$

(рис. 3.6, *г* и *д*).

Дифференцирующее звено. Не существует такого реального элемента, в котором на выходе точно воспроизводилась бы производная от любого входного сигнала. Однако при составлении структурной схемы системы ее можно так разделить на звенья, что введение понятия *дифференцирующего звена* будет вполне обосновано (см. рис. 1.17).

В этом случае выходная величина y зависит от входной величины x как производная

$$y=k\frac{dx}{dt}, \tag{3.20}$$

где k — коэффициент пропорциональности.

Пример 3.2. Примерами таких звеньев могут служить электрическая емкость, индуктивность, электрический тахометр (рис. 3.7).

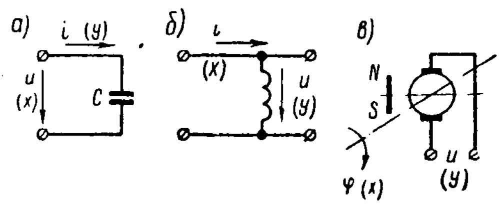


Рис. 3.7

Ток в емкости

$$i=C\frac{du}{dt}, \tag{3.21}$$

напряжение на индуктивности

$$u=L\frac{di}{dt} \tag{3.22}$$

и напряжение на зажимах тахометрического генератора постоянного тока

$$u=a\omega=a\frac{d\varphi}{dt} \tag{3.23}$$

пропорциональны производным от напряжения, тока и угла поворота вала.

Комплексный коэффициент усиления

$$W(j\omega)=\frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}=jk\omega=k\omega e^{j\frac{\pi}{2}}. \qquad (3.24)$$

Все частотные характеристики звена показаны на рис. 3.8, *а, б, в*.

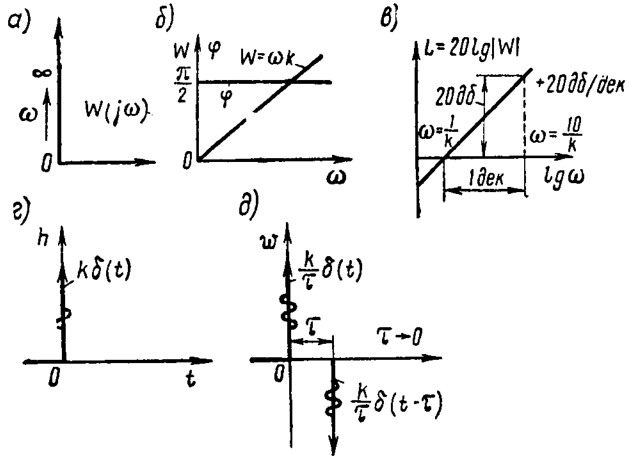


Рис. 3.8

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика имеет положительный наклон в 20 *дб/дек*.

Передаточная функция дифференцирующего звена

$$W(p)=pk, \qquad (3.25)$$

а соответственно, переходная и весовая функции

$$h(t)=k\delta(t) \qquad (3.26)$$

и

$$w(t)=k\delta'(t) \qquad (3.27)$$

(рис. 3.8, *г* и *д*). Производная от δ-функции или δ-функция второго порядка δ' на рис. 3.8, *д* изображена в виде двух импульсов второго порядка, интервал между которыми τ стремится к нулю.

§ 3.3. ЗВЕНЬЯ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Инерционное звено. Одним из самых распространенных звеньев системы автоматического управления является *инерционное звено*. Оно описывается уравнением

$$y+T\frac{dy}{dt}=kx, \qquad (3.28)$$

где k и T — соответственно коэффициент усиления и постоянная времени звена.

Пример 3.3. При линеаризации уравнений примерами инерционных звеньев могут служить многие объекты, рассмотренные в гл. I, (рис. 3.9). исполнительные механизмы, электронные и магнитные усилители, а также четырехполюсники, содержащие индуктивности или емкости (рис. 3.10).

В примерах 2.5, 2.6 и 2.7 показано, что генератор и двигатель могут быть представлены в виде инерционных звеньев.

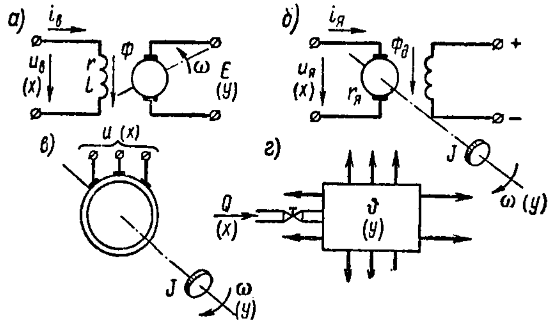


Рис. 3.9

Совершенно аналогично из уравнения (1.8) для печи

$$g\Delta\vartheta + C\frac{d\Delta\vartheta}{dt} = \Delta Q. \qquad (3.29)$$

Полагая $\Delta Q = x$, $\Delta\vartheta = y$, $\frac{1}{g} = k$ и $\frac{C}{g} = T$, получаем уравнение (3.28).

Рассматривая схемы четырехполюсников, показанные на рис. 3.10, легко убедиться, что для них также справедливо уравнение (3.28). Для них $k = 1$, $T = rC$ или $T = \frac{L}{r}$, а $x = u_1$ и $y = u_2$.

Перейдем в выражении (3.28) от мгновенных значений к их частотным спектрам или к гармоническим сигналам

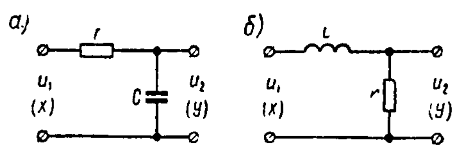


Рис. 3.10

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{k}{1 + j\omega T} \quad (3.30).$$

Частотные характеристики для этой функции показаны на рис. 3.11, *а*, *б*, *в*. Здесь

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \qquad (3.31)$$

а

$$\varphi(\omega) = -\operatorname{arc\,tg}\omega T. \qquad (3.32)$$

Наряду с характеристикой $W(j\omega)$ иногда бывает удобно пользоваться инверсной характеристикой $\frac{1}{W(j\omega)} = \frac{1}{k} + j\omega\frac{T}{k}$. Для инерционного звена такая характеристика показана на рис. 3.11,*б*. Если характеристика $W(j\omega)$ имеет вид типичной круговой диаграммы, лежащей в четвертом квадранте и опирающейся на диаметр $0 \to k$, то инверсная характеристика имеет вид прямой, уходящей из точки $\frac{1}{k}$ в бесконечность параллельно мнимой оси.

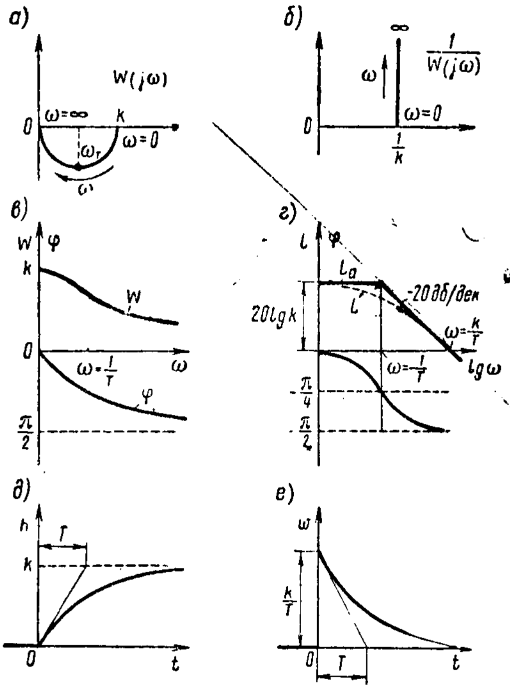


Рис. 3.11

Для построения логарифмической амплитудно-частотной характеристики выразим ее через

$$L(\omega) = 20 \lg |W| = 20 \lg k - 10 \lg [1 + (\omega T)^2]. \qquad (3.33)$$

Эта зависимость показана на рис. 3.11, *г* пунктиром и обозначена L.

При построении логарифмических характеристик пользуются также их асимптотическими приближениями. Для инерционного звена асимптотическое приближение получается путем замены точной характеристики ее двумя асимптотами при $0 < \omega T \leqslant 1$ и при $\omega T \geqslant 1$. Первая асимптота получается путем отбрасывания $(\omega T)^2$ в выражении (3.33), а вторая — путем отбрасывания единицы.

Таким образом, асимптотическая характеристика описывается двумя уравнениями:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k \text{ при } 0 < \omega T \leqslant 1, \\ 20 \lg k - 20 \lg \omega T \text{ при } \omega T \geqslant 1. \end{cases} \quad (3.34)$$

На рис. 3.11, *г* характеристика L_a показана сплошной линией (параллельной оси абсцисс при $0 < \omega T < 1$ и имеющей наклон 20 *дб/дек* при $\omega T > 1$).

Разность между точной характеристикой $L(\omega T)$ и асимптотической $L_a(\omega T)$ представляет собой поправку к асимптотической характеристике

$$\delta(\omega T) = L(\omega T) - L_a(\omega T). \quad (3.35)$$

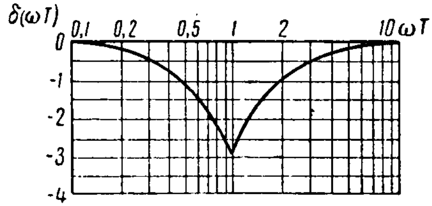


Рис. 3.12

На рис. 3.12 построена эта зависимость. Наибольшая погрешность имеет место при $\omega T = 1$. В этой точке

$$\delta(\omega T) = -10 \lg 2 \cong -3 \text{ } дб.$$

При частотах, отличающихся от $\frac{1}{T}$ более чем в десять раз, эта погрешность становится пренебрежимо малой.

Передаточная функция инерционного звена согласно (3.30)

$$W(p) = \frac{k}{1 + pT}. \quad (3.36)$$

Соответственно переходная функция

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{k}{1 + pT} \cdot \frac{1}{p}\right] = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) \cdot 1_0(t). \quad (3.37)$$

Весовая функция

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1_0(t). \quad (3.38)$$

Графики переходной и весовой функций инерционного звена показаны на рис. 3.11, *д* и *е*.

Пример 3.4. Инерционные звенья могут описывать процессы не только в системах с постоянными параметрами, но и в схемах с модуляцией. Так, например, инерционным звеном может быть описан резонансный усилитель, блок-схема которого показана на рис. 3.13.

Найдем переходную функцию системы как сигнал на выходе $y(t)$ при сигнале на входе $x(t) = 1_0(t)$.

Сигнал после модулятора M

$$x_1(t) = 1_0(t) \sin \omega_0 t,$$

а напряжение на выходе усилителя

$$u_2(t) = k 1_0(t) \sin \omega_0 t.$$

Рассмотрение переходного процесса при включении этого напряжения в цепь r, L, C приводится в курсе электротехники. Если контур настроен в резонанс, т. е. $\frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0$ и $r \ll \sqrt{\frac{L}{C}}$, то напряжение на сопротивлении r

$$x_2 = k(1 - e^{-\beta t})\,1_0(t)\sin\omega_0 t. \qquad (3.39)$$

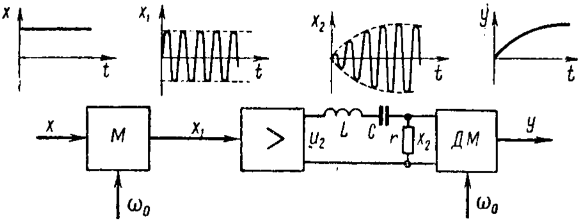


Рис. 3.13

Это выражение можно получить, рассматривая решение как сумму свободной и вынужденной составляющих:

$$x_{2п} = e^{-\beta t}(A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t);$$

$$x_{2в} = k\sin\omega_0 t$$

Здесь $\beta = \frac{L}{2r}$, а $\omega_1 \approx \omega_0$.

Произвольные постоянные A и B находятся из условий: $x_2(0) = 0$ и $\frac{dx_2}{dt}(0)$.

Напряжение y на выходе демодулятора *ДМ* после выпрямления x_2 дает переходную функцию инерционного звена

$$h(t) = k(1 - e^{-\beta t})\,1_0(t). \qquad (3.40)$$

При этом предполагается, что составляющие с частотами $\omega > \omega_0$ сглаживаются фильтром демодулятора.

Таким образом, в диапазоне частот при $\omega \ll \omega_0$ резонансный усилитель может рассматриваться как инерционное звено.

Форсирующее звено. Звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$y = k\left(x + T\frac{dx}{dt}\right), \qquad (3.41)$$

называется *форсирующим звеном*.

Такое звено получается в результате различных параллельных соединений пропорционального и дифференцирующего или инерционного звеньев (см. гл. V).

Для этого звена получаем:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = k(1 + j\omega T); \qquad (3.42)$$

$$W(\omega) = k\sqrt{1 + (\omega T)^2}; \qquad (3.43)$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega T; \tag{3.44}$$

$$L(\omega) = 20 \lg k + 10 \lg [1 + (\omega T)^2]; \tag{3.45}$$

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } 0 < \omega T \leqslant 1; \\ 20 \lg k + 20 \lg \omega T & \text{при } \omega T \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.46}$$

Частотные характеристики форсирующего звена показаны на рис. 3.14. Как видно из графика, прямая амплитудно-фазовая характеристика форсирующего звена аналогична инверсной характеристике инерционного звена, а инверсная его характеристика соответствует прямой характеристике инерционного звена.

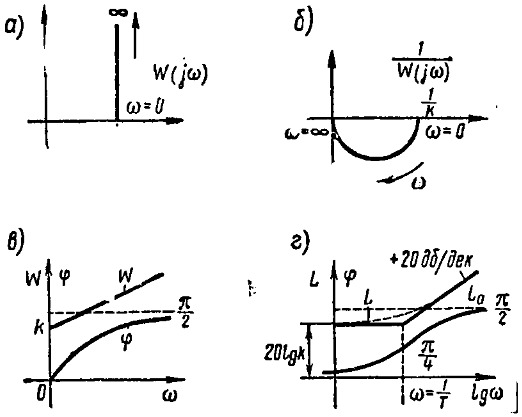


Рис. 3.14

Это соответственно отражается и на амплитудных и фазовых характеристиках.

Передаточная функция форсирующего звена

$$W(p) = k(1 + pT) \tag{3.47}$$

и может быть представлена в виде суммы передаточных функций пропорционального и дифференцирующего звеньев (см. § 3.2).

Переходная и весовая функции форсирующего звена имеют вид суммы соответствующих функций простейших звеньев:

$$h(t) = k1_0(t) + kT\delta(t); \tag{3.48}$$

$$w(t) = k\delta(t) + kT\delta'(t). \tag{3.49}$$

Инерционно-дифференцирующее звено. Звено, описываемое дифференциальным уравнением

$$y + T\frac{dy}{dt} = k\frac{dx}{dt}, \tag{3.50}$$

называется *реальным дифференцирующим*, или *инерционно-дифференцирующим звеном*.

Примерами такого звена являются механическая система с гибкой гидравлической связью и четырехполюсники, содержащие соответствующим образом включенные активные и реактивные сопротивления (рис. 3.15).

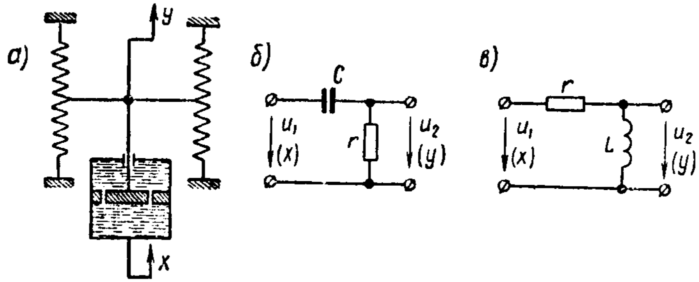


Рис. 3.15

Переходя в выражении (3.50) от мгновенных значений к частотным спектрам, получаем

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{kj\omega}{1 + j\omega T} = \frac{\frac{k}{T}}{1 + \frac{1}{j\omega T}}. \tag{3.51}$$

Частотные характеристики для этой функции показаны на рис. 3.16, *а*, *б*, *в*, *г*:

$$W(\omega) = \frac{k\omega}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}; \tag{3.52}$$

$$\varphi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \omega T; \tag{3.53}$$

$$\frac{1}{W(j\omega)} = \frac{T}{k} - j\frac{1}{k\omega}; \tag{3.54}$$

$$L(\omega) = 20 \lg |W| = 20 \lg k\omega - 10 \lg [1 + (\omega T)^2]. \tag{3.55}$$

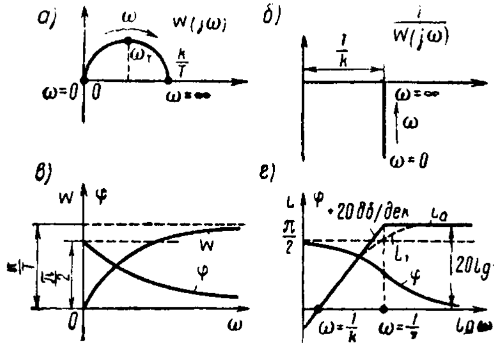


Рис. 3.16

Асимптотические характеристики состоят из двух полупрямых:

$$L_a(\omega) = \begin{cases} 20\lg k\omega & \text{при } \omega T \leqslant 1; \\ 20\lg \dfrac{k}{T} & \text{при } \omega T \geqslant 1. \end{cases} \qquad (3.56)$$

Так же, как и в инерционных звеньях, поправка к асимптотической характеристике имеет вид кривой, построенной на рис. 3.12 с соответствующим знаком.

Передаточная функция инерционно-дифференцирующего звена согласно (3.51)

$$W(p) = \frac{kp}{1 + pT}. \qquad (3.57)$$

Производя обратное преобразование Лапласа, получаем

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{kp}{1+pT} \cdot \frac{1}{p}\right] = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1_0(t). \qquad (3.58)$$

После дифференцирования выражения (3.58) имеем

$$w(t) = \frac{k}{T}\,\delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} \cdot 1_0(t). \qquad (3.59)$$

Если экспериментально получены частотные характеристики инерционного или инерционно-дифференцирующего звена, то по этим характеристикам непосредственно могут быть найдены значения k и T.

Из рис. 3.11,*а* и 3.16,*а* видно, что фазовый сдвиг, равный углу $\frac{\pi}{4}$, между сигналами входа и выхода имеет место при $\omega = \omega_T = \frac{1}{T}$, когда $\omega T = 1$. Из этого условия определяется T. Коэффициент k находится по диаметру окружности частотной характеристики.

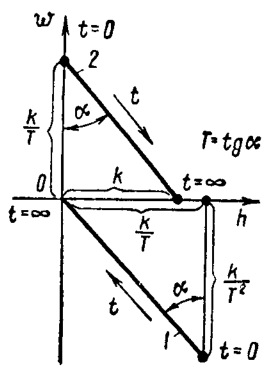


Рис. 3.17

Значительно чаще бывает необходимо найти параметры звена по переходной характеристике, полученной экспериментально. В этом случае целесообразно путем численного или графического дифференцирования найти $w = \frac{dh}{dt}$ и построить кривую переходного процесса в координатах h, w. Как следует из уравнений (3.28) и (3.50), для обоих звеньев это будет прямая, проходящая через начало координат для инерционно-дифференцирующего звена (*1* на рис. 3.17) и через точку $h = k$ — для инерционного звена (*2* на рис. 3.17).

Тангенс угла наклона прямых дает T. Величина k для инерционного звена находится по значению h при $t \to \infty$, а для инерционно-дифференцирующего — по начальному значению $h_0 = \frac{k}{T}$. Возможность описать реальное звено рассматриваемым уравнением определяется степенью соответствия требуемой характеристики и полученной экспериментальной кривой.

Инерционно-форсирующее звено. Инерционно-форсирующим (или упругим) называется звено, описываемое дифференциальным уравнением первого порядка в наиболее общем виде

$$y + T\frac{dy}{dt} = k\left(x + T_0\frac{dx}{dt}\right). \tag{3.60}$$

Существенным параметром инерционно-форсирующего звена является коэффициент $\tau = \frac{T_0}{T}$. Если $\tau < 1$, то звено по своим свойствам приближается к интегрирующему и инерционному звеньям. Если же $\tau > 1$, то звено — ближе к дифференцирующему и инерционно-дифференцирующему звеньям.

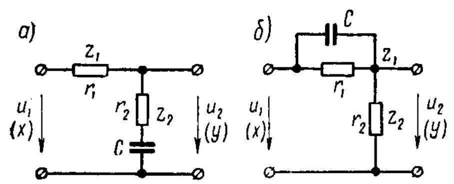


Рис. 3.18

Комплексный коэффициент усиления инерционно-форсирующего звена

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{k(1 + j\omega T_0)}{1 + j\omega T}, \tag{3.61}$$

а передаточная функция

$$W(p) = k\frac{(1 + pT_0)}{(1 + pT)}. \tag{3.62}$$

Примеры электрических схем инерционно-форсирующего звена показаны на рис. 3.18.

Пример 3.5. Рассматривая коэффициент усиления схем, показанных на рис. 3.18, как коэффициент передачи делителя напряжения

$$W = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}, \tag{3.63}$$

получаем:

для схемы (*а*)

$$\left.\begin{aligned} &Z_1 = r_1, \quad Z_2 = r_2 + \frac{1}{j\omega C} = \frac{1 + j\omega C r_2}{j\omega C} \\ &\text{и} \\ &W(j\omega) = \frac{1 + j\omega C r_2}{1 + j\omega C(r_1 + r_2)} = \frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T}, \end{aligned}\right\} \tag{3.64}$$

где

$$T_0 = Cr_2, \quad T = C(r_1 + r_2) \quad \text{и} \quad k = 1;$$

для схемы (*б*)

$$\left.\begin{aligned} & Z_1 = \frac{r_1}{1 + j\omega C r_1}, \qquad Z_2 = r_2 \\ & \text{и} \\ & W(j\omega) = \frac{r_2(1 + j\omega C r_1)}{(r_1 + r_2)\left(1 + j\omega C \dfrac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}\right)} = k\frac{1 + j\omega T_0}{1 + j\omega T}, \end{aligned}\right\} \qquad (3.65)$$

где

$$T_0 = Cr_1, \qquad T = C\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}, \qquad k = \frac{r_2}{r_1 + r_2}$$

и

$$\tau = \frac{r_1 + r_2}{r_2} > 1.$$

Схема (*а*) иногда называется *упругим интегрирующим* звеном, а схема (*б*) — *упругим дифференцирующим*.

На рис. 3.19 построены частотные характеристики при $\tau < 1$ (*а, в, д, ж*) и $\tau > 1$ (*б, г, е, з*). Характеристики построены для нормированных значений

$$W_0(j\Omega) = \frac{1}{k} W(j\Omega)$$

в зависимости от относительной безразмерной частоты $\Omega = \omega T$. Здесь

$$W_0(j\Omega) = \frac{1 + j\Omega\tau}{1 + j\Omega}; \qquad (3.66)$$

$$W_0(\Omega) = \sqrt{\frac{1 + (\Omega\tau)^2}{1 + \Omega^2}}; \qquad (3.67)$$

$$\varphi(\Omega) = \operatorname{arctg} \Omega\tau - \operatorname{arctg} \Omega. \qquad (3.68)$$

Решив уравнение $\frac{d\varphi}{d\Omega} = 0$, находим, что максимальный фазовый сдвиг

$$\varphi_M = \arcsin \frac{\tau - 1}{\tau + 1} \qquad (3.69)$$

имеет место при

$$\Omega_M = \frac{1}{\sqrt{\tau}}. \qquad (3.70)$$

Логарифмические характеристики выражаются уравнением

$$L_0(\Omega) = 20 \lg |W_0| = 10 \lg [1 + (\Omega\tau)^2] - 10 \lg [1 + \Omega^2]. \qquad (3.71)$$

Асимптотические характеристики в зависимости от величины τ выражаются различно:

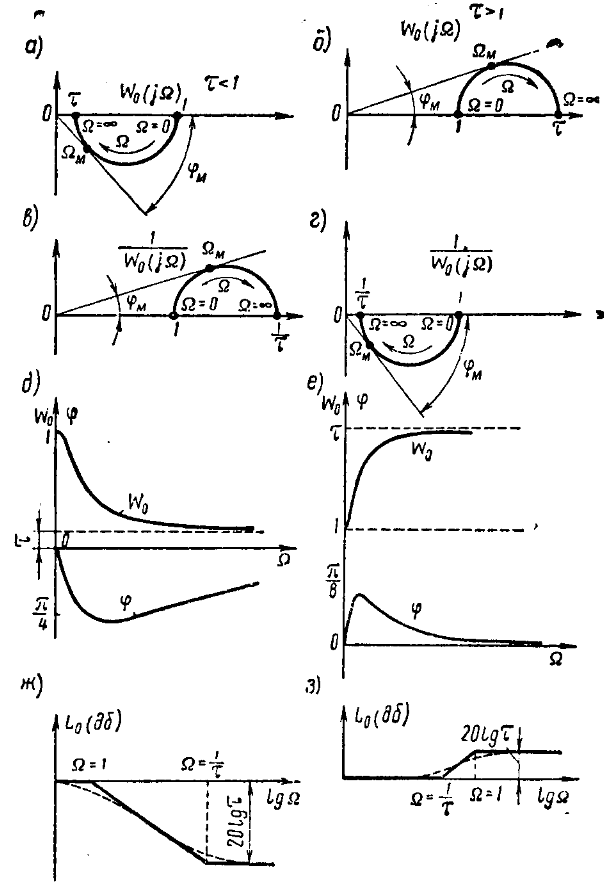


Рис. 3.19

при $\tau < 1$

$$L_{0а} = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \Omega \leqslant 1, \\ -20 \lg \Omega \quad \text{при} \quad 1 \leqslant \Omega \leqslant \frac{1}{\tau}, \\ -20 \lg \tau \quad \text{при} \quad \Omega \geqslant \frac{1}{\tau}; \end{cases} \tag{3.72}$$

при $\tau > 1$

$$L_{0а} = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad \Omega \leqslant \frac{1}{\tau}, \\ 20 \lg \Omega\tau \quad \text{при} \quad \frac{1}{\tau} \leqslant \Omega \leqslant 1, \\ 20 \lg \tau \quad \text{при} \quad \Omega \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.73}$$

Переходная функция определяется из уравнения (3.62) как

$$h(t) = L^{-1}\left[\frac{k(1+pT_0)}{1+pT}\cdot\frac{1}{p}\right] = k\left[1+(\tau-1)e^{-\frac{t}{T}}\right]1_0(t) \quad (3.74)$$

и, соответственно,

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k}{T}(1-\tau)e^{-\frac{t}{T}}\cdot 1_0(t) + k\tau\delta(t). \quad (3.75)$$

Переходные и весовые функции для инерционно-форсирующих звеньев показаны на рис. 3.20 [при $\tau < 1$ (*а* и *в*); при $\tau > 1$ (*б* и *г*)].

§ 3.4. КОЛЕБАТЕЛЬНОЕ ЗВЕНО

Колебательное звено описывается уравнением второго порядка

$$y + 2\zeta T\frac{dy}{dt} + T^2\frac{d^2y}{dt^2} = kx \quad (3.76)$$

при степени затухания $\zeta < 1$, что соответствует комплексным корням характеристического уравнения

$$1 + 2\zeta pT + (pT)^2 = 0. \quad (3.77)$$

Постоянная времени T колебательного звена связана с его резонансной частотой ω_0 соотношением

$$T = \frac{1}{\omega_0} \quad (3.78)$$

и в 2π раз меньше периода резонансных колебаний

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}. \quad (3.79)$$

Иногда уравнение (3.76) записывают в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\zeta\omega_0\frac{dy}{dt} + y\omega_0^2 = k_1x, \quad (3.80)$$

где

$$k_1 = k\omega_0^2.$$

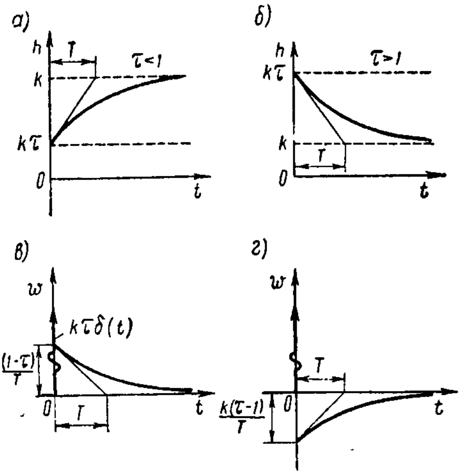


Рис. 3.20

Пример 3.6. Примерами колебательного звена могут служить упругая механическая система с существенным влиянием массы, электрический колебательный контур (рис. 3.21), летательный аппарат при рассмотрении в качестве выходной величины изменения его угла атаки и в качестве входной величины угла $\Delta\delta$ (см. пример 2.8).

Действительно, для упругой механической системы, показанной на рис. 3.21,*а*, уравнение сил, действующих на тело с массой M, имеет вид

$$a(x-y) = M\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt}, \quad (3.81)$$

где a и b — коэффициенты пружины и успокоителя. Для колебательного контура, изображенного на рис, 3.21,*б*,

$$u_1 = u_2 + rC\frac{du_2}{dt} + LC\frac{d^2u_2}{dt^2}. \tag{3.82}$$

Уравнение (3.81) при $\zeta = \dfrac{b}{2\sqrt{aM}} < 1$ соответствует колебательному звену с параметрами $k = 1$, $T^2 = \dfrac{M}{a}$, $2\zeta T = \dfrac{b}{a}$; уравнение (3.82) при

$$\frac{r}{2}\sqrt{\frac{L}{C}} < 1$$

соответствует колебательному звену с параметрами

$$T^2 = LC, \quad 2\zeta T = rC, \quad k = 1.$$

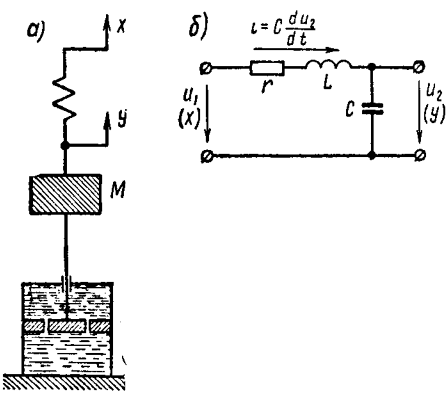


Рис. 3.21

Переходя в уравнении (3.76) к гармоническим сигналам, получим комплексный коэффициент усиления колебательного звена

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{k}{1 + 2\zeta j\omega T + (j\omega T)^2}. \tag{3.83}$$

Вводя безразмерную частоту $\Omega = \omega T$, можно $W(j\Omega)$ выразить следующим образом:

$$W(j\Omega) = kW_0(j\Omega) = \frac{k}{1 + 2\zeta j\Omega + (j\Omega)^2}. \tag{3.84}$$

На рис. 3.22, *а*, *б*, *в*, *г* показаны частотные характеристики колебательного звена. Как видно из рис. 3.22,*а*, годограф частотной характеристики проходит через два квадранта *IV* и *III* и пересекает мнимую ось при $\Omega = 1$, когда в выражении (3.84) $1 + (j\Omega)^2 = 0$. При этом

$$W(j) = \frac{k}{2j\zeta}.$$

С уменьшением ζ петля, охватываемая годографом, увеличивается (см. пунктир), и при $\zeta = 0$ характеристика вырождается в две полупрямые: I — от $W(j\Omega) = k$ до $W(j\Omega) \to \infty$ при $0 < \Omega < 1$ и II — от $W(j\Omega) = -\infty$ до $W(j\Omega) = 0$ при $1 < \Omega < \infty$. Инверсная характеристика $[W(j\Omega)]^{-1}$ проходит через два квадранта *I* и *II* и уходит в бесконечность параллельно вещественной оси при $\Omega \to \infty$.

Если экспериментально получен частотный годограф реального звена, близкого к колебательному, то параметры соответствующего колебательного звена могут быть найдены по

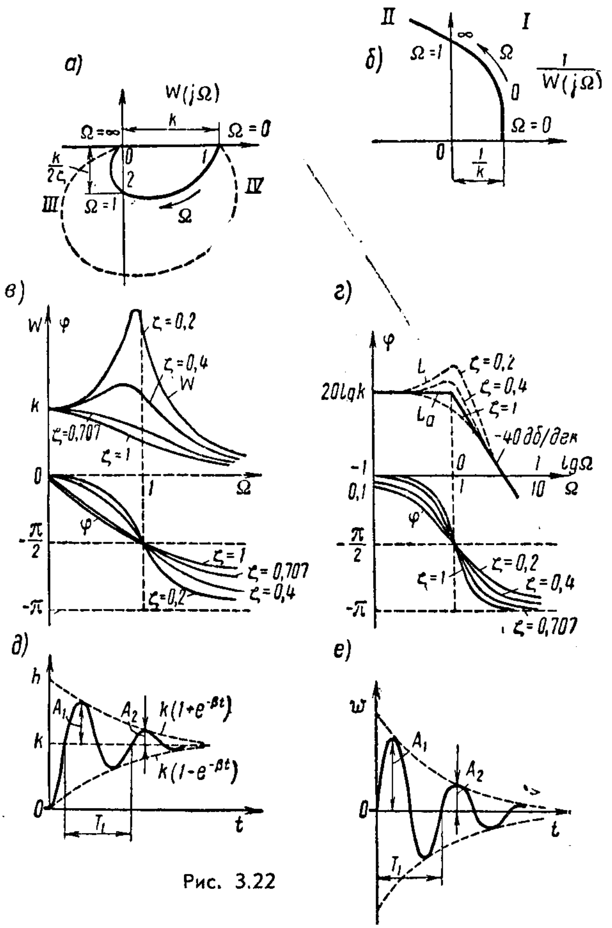


Рис. 3.22

точкам характеристики, лежащим на действительной и мнимой осях (точки *1* и *2* на рис. 3.22,*а*). По точке *1* находится k, а по точке *2* находятся $\omega_0 = \frac{1}{T}$ и ζ.

Амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики выражаются уравнениями:

$$W(\Omega) = \frac{k}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2}}; \tag{3.85}$$

$$\varphi(\Omega) = -\operatorname{arctg} \frac{2\zeta\Omega}{1-\Omega^2}. \tag{3.86}$$

При $\Omega = 1$ эти характеристики соответственно проходят через точки $W = \frac{k}{2\zeta}$ и $\varphi = -\frac{\pi}{2}$. При $\zeta < \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}707$ кривая $W(\Omega)$ имеет максимум

$$W_{\text{М}} = \frac{k}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \tag{3.87}$$

при

$$\Omega_{\text{М}} = \sqrt{1-2\zeta^2}. \tag{3.88}$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика колебательного звена

$$L(\Omega) = 20 \lg k - 10 \lg [(1-\Omega^2)^2 + 4\zeta^2\Omega^2]. \tag{3.89}$$

Вблизи точки резонанса ($\omega T = \Omega = 1$) эта характеристика сильно зависит от степени затухания ζ, однако вдали от резонансной частоты характеристики практически не зависят от ζ.

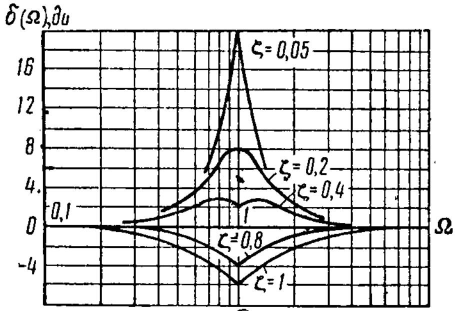


Рис. 3.23

Для колебательных звеньев пользуются асимптотическими характеристиками

$$L_{\text{а}}(\Omega) = \begin{cases} 20 \lg k & \text{при } \Omega \leqslant 1; \\ 20 \lg k - 40 \lg \Omega & \text{при } \Omega \geqslant 1. \end{cases} \tag{3.90}$$

Поправка к асимптотической характеристике

$$\delta(\Omega) = L(\Omega) - L_{\text{а}}(\Omega) \tag{3.91}$$

зависит от степени затухания ζ. Графики поправок для разных ζ показаны на рис. 3.23.

Передаточная функция колебательного звена согласно (3.83)

$$W(p) = \frac{k}{1 + 2\zeta pT + (pT)^2}. \tag{3.92}$$

Корнями характеристического уравнения $1+2\zeta pT+(pT)^2=0$ будут

$$p_{1,2}=\frac{-\zeta\pm\sqrt{1-\zeta^2}}{T}=-\beta\pm j\omega_1, \qquad (3.93)$$

где

$$\beta=\frac{\zeta}{T}=\omega_0\zeta \text{ — коэффициент затухания;}$$

$$\omega_1=\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}=\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{T} \text{ — собственная частота колебаний звена.}$$

Переходная функция

$$h(t)=L^{-1}\left[\frac{k}{1+2\zeta pT+(pT)^2}\cdot\frac{1}{p}\right]=$$

$$=k1_0(t)\left[1-e^{-\beta t}\left(\cos\omega_1 t+\frac{\beta}{\omega_1}\sin\omega_1 t\right)\right]. \qquad (3.94)$$

Весовая функция

$$w(t)=\frac{dh}{dt}=\frac{k\omega_0^2}{\omega_1}1_0(t)e^{-\beta t}\sin\omega_1 t. \qquad (3.95)$$

Графики переходной и весовой функций колебательного звена показаны на рис. 3.22, *д* и *е*. По экспериментальным переходным характеристикам реального звена можно найти параметры соответствующего колебательного звена. По графику

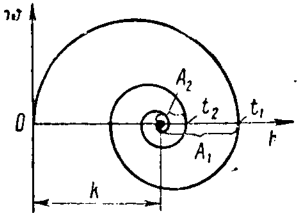


Рис. 3.2‹

$h(t)$ (см. рис. 3.22, *д*) определяются k, A_1, A_2 и T_1 и вычисляются все параметры звена:

$$\omega_1=\frac{2\pi}{T_1}; \qquad (3.96)$$

$$\beta T_1=\ln\frac{A_1}{A_2}; \qquad (3.97)$$

$$\omega_0=\sqrt{\omega_1^2+\beta^2}=\frac{1}{T}; \qquad (3.98)$$

$$\zeta=\beta T. \qquad (3.99)$$

Те же величины можно найти по изображению переходного процесса на фазовой плоскости $w(h)$ (рис. 3.24), для которого $T_1=t_2-t_1$.

Глава IV

ОСОБЫЕ ЗВЕНЬЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 4.1. ОСОБЕННОСТИ ХАРАКТЕРИСТИК НЕКОТОРЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

Кроме рассмотренных в предыдущей главе типовых линейных звеньев, в системах автоматического управления встречаются звенья, которые по характеристикам существенно отличаются от типовых. К числу таковых относятся: *неминимально-фазовые звенья,* передаточные функции которых дробно-рациональны и имеют нули в правой полуплоскости: *неустойчивые звенья,* имеющие полюсы в правой полуплоскости; *звенья с распределенными параметрами*, которые могут быть разделены на *иррациональные звенья*, описываемые иррациональными передаточными функциями, и *трансцендентные*, описываемые трансцендентными передаточными функциями. В звеньях с распределенными параметрами количество особенностей передаточных функций может стремиться к бесконечности и анализ динамических свойств системы требует рассмотрения вспомогательных вопросов. Это связано с тем, что звено описывается уже не обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями, а уравнениями в частных производных.

Рассмотрим звенья каждой из всех перечисленных групп и примеры реальных элементов, соответствующих им.

§ 4.2. УСТОЙЧИВЫЕ НЕМИНИМАЛЬНО-ФАЗОВЫЕ ЗВЕНЬЯ

В ряде устройств, например при дифференциальных или мостовых соединениях, встречаются звенья, описываемые дифференциальными уравнениями, имеющими отрицательные коэффициенты в правой части уравнения и соответственно нули в правой полуплоскости. При этом фазовый сдвиг между входным и выходным сигналами может превышать $\frac{\pi}{2}$.

Дифференциальное уравнение устойчивого неминимально-фазового звена первого порядка имеет вид

$$y + T\frac{dy}{dt} = k\left(x - T_0\frac{dx}{dt}\right). \tag{4.1}$$

Комплексный коэффициент усиления такого звена

$$W(j\omega)=\frac{k(1-j\omega T_0)}{1+j\omega T},\qquad(4.2)$$

а передаточная функция

$$W(p)=k\,\frac{1-pT_0}{1+pT}.\qquad(4.3)$$

Пример 4.1. Примерами таких звеньев могут служить мостовые схемы, изображенные на рис. 4.1 В случае (*а*) уравнение имеет вид

$$y+rC\,\frac{dy}{dt}=x-r_0C\,\frac{dx}{dt};\qquad(4.4)$$

а в случае (*б*)

$$ry+r_1r_2C\,\frac{dy}{dt}=r_0x-r_1r_2C\,\frac{dx}{dt}.\qquad(4.5)$$

Здесь $r=r_1+r_2$, а $r_0=r_2-r_1$. В обоих случаях имеется в виду, что $r_2>r_1$.

Для схемы (*а*) $k=1$, $T_0=r_0C$, $T=rC$, $\tau=\frac{T_0}{T}<1$.

Для схемы (*б*) $k=\frac{r_0}{r}<1$, $T_0=\frac{r_1r_2}{r_1-r_2}C$, $T=\frac{r_1r_2}{r_2+r_1}C$,

$$\tau=\frac{T_0}{T}>1.$$

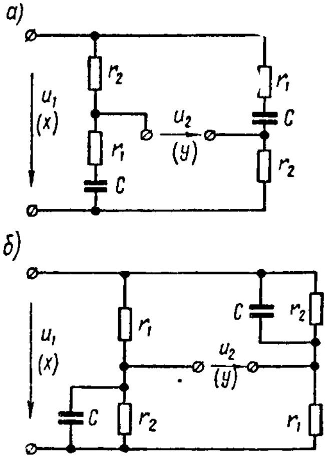


Рис. 4.1

На рис. 4.2. построены частотные характеристики рассматриваемого звена. Построение выполнено для нормированных характеристик $W_0=\frac{1}{k}W$ и $\Omega=\omega T$ при $\tau<1$ и $\tau>1$.

Как видно из построения, при $\tau<1$ и при $\tau>1$ частотные годографы лежат в третьем и четвертом квадрантах, имея вид полуокружностей. Соответственно инверсные характеристики представляют собой полуокружности, лежащие в первом и втором квадрантах.

При различном расположении годографов $W(j\Omega)$ для инерционно-форсирующего (см. рис. 3.19) и неминимально-фазового рассматриваемого звена их амплитудно-частотные характеристики аналогичны. Действительно, в рассматриваемом случае

$$W_0(\Omega)=\frac{\sqrt{1+(\Omega\tau)^2}}{\sqrt{1+\Omega^2}},\qquad(4.6)$$

что полностью совпадает с формулой (3.67).

Соответственно аналогичны и логарифмические амплитудно-частотные характеристики (см. рис. 3.19 и 4.2, *ж* и *д*).

Для фазочастотных характеристик

$$\varphi = -\operatorname{arctg}\Omega\tau - \operatorname{arctg}\Omega, \tag{4.7}$$

что существенно отличается от (3.68).

Таким образом, *при совпадении амплитудно-частотных характеристик минимально-фазовых и неминимально-фазовых звеньев их фазочастотные характеристики не совпадают.*

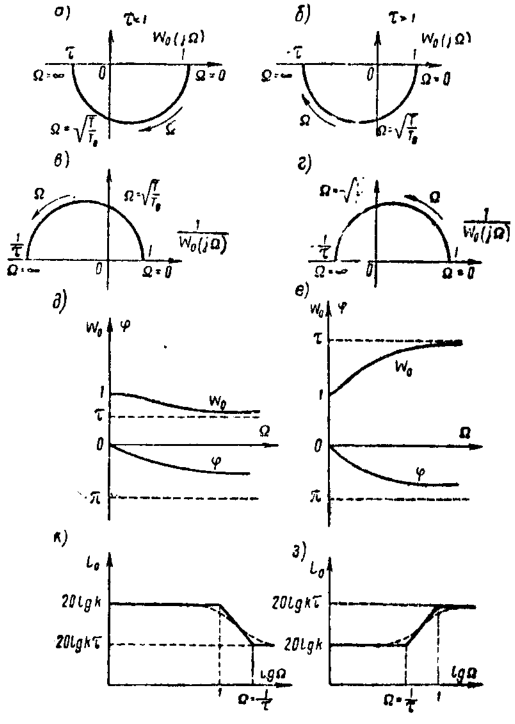


Рис. 4.2

Это очень важное обстоятельство необходимо всегда иметь в виду при определении фазочастотной характеристики по известной амплитудно-частотной (см. § 2.6).

По передаточной функции (4.3) может быть найдена переходная функция (рис. 4.3,*а*)

$$h(t) = k\left[1 - (1+\tau)e^{-\frac{t}{T}}\right]1_0(t) \tag{4.8}$$

и весовая функция (рис. 4.3,*б*)

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = -k\tau\delta(t) + \frac{(1+\tau)}{T}e^{-\frac{t}{T}}1_0(t). \tag{4.9}$$

Из рисунка видно, что $h(t)$ в зависимости от времени меняет знак, однако в отличие от аналогичных характеристик минимально-фазовых звеньев величина τ не оказывает столь существенного влияния на ход кривых $h(t)$ и $w(t)$.

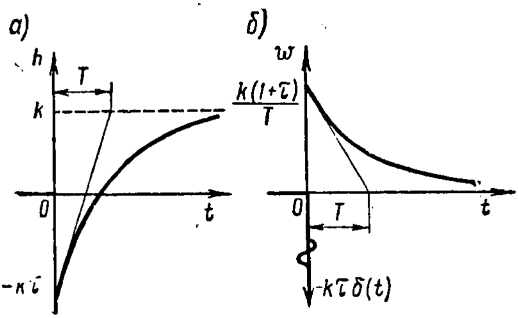


Рис. 4.3

§ 4.3. НЕУСТОЙЧИВЫЕ ЗВЕНЬЯ

Наиболее общая форма уравнения неустойчивого звена первого порядка может быть записана как

$$y - T\frac{dy}{dt} = k\left(x + T_0\frac{dx}{dt}\right). \qquad (4.10)$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{k(1 + pT_0)}{1 - pT}. \qquad (4.11)$$

Уравнения (4.10) и (4.11) отличаются от (3.60) и (3.62) только знаком при T. Все виды звеньев первого порядка можно описать одним и тем же уравнением (3.60), если считать, что при $T > 0$ и $T_0 > 0$ звено — минимально-фазовое типовое; при $T > 0$, но $T_0 < 0$ звено — неминимально-фазовое устойчивое; при $T < 0$ вне зависимости от знака T_0 звено — неустойчивое.

На рис. 4.4 показаны примеры нулей и полюсов передаточных функций звеньев первого порядка при различных знаках T и T_0 в уравнении (3.60).

Наиболее распространенным примером неустойчивого звена является квазиинерционное звено, для которого $T_0 = 0$. В этом случае, в зависимости от выбора положительных направлений x и y получаем

$$y - T\frac{dy}{dt} = kx, \qquad (4.12)$$

или

$$-y + T\frac{dy}{dt} = kx. \qquad (4.13)$$

Пример 4.2. Примером неустойчивого звена может служить асинхронный двигатель в режиме работы, соответствующем точкам *5* и *6* на характеристике (рис. 1.8,*б*), для которых $a > 0$ (см пример 2.7).

Выбирая для этого случая положительное направление отсчета ΔU таким, чтобы иметь $b > 0$, из (2.49) получаем уравнение неустойчивого звена (4.13), где

$$T = \frac{J}{a}, \quad k = \frac{b}{a}.$$

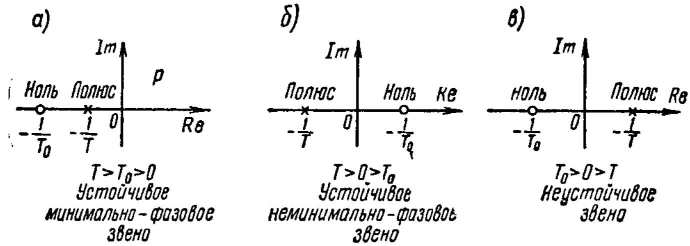


Рис. 4.4

Комплексный коэффициент усиления неустойчивого квазиинерционного звена

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega T - 1}, \tag{4.14}$$

а передаточная функция

$$W(p) = \frac{k}{pT - 1}. \tag{4.15}$$

Годографы амплитудно-фазовой характеристики неустойчивого квазиинерционного звена показаны на рис. 4.5,*а* и *б*. Как видно из построения, прямой и инверсный годографы комплексного коэффициента усиления представляют собой зеркальные отображения относительно мнимой оси годографов, полученных для инерционного звена (см. рис. 3.11).

Амплитудно-частотная характеристика имеет то же выражение, что и для типового инерционного звена

$$W(\omega) = \frac{k}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}. \tag{4.16}$$

Таким образом, графики $W(\omega)$ и $L(\lg \omega)$ рассматриваемого неустойчивого звена ничем не отличаются от аналогичных графиков типового инерционного звена.

Фазочастотная характеристика

$$\varphi(\omega) = -\pi + \operatorname{arctg} \omega T. \tag{4.17}$$

Эта зависимость (рис. 4.5,*в* и *г*) представляет собой зеркальное отображение фазочастотной характеристики инерционного звена относительно прямой $\varphi = -\frac{\pi}{2}$, соответствующей мнимой оси.

Из рассмотрения полученных частотных характеристик можно сделать вывод, что *неустойчивые звенья могут иметь точно такие же амплитудно-частотные характеристики, как и устойчивые звенья, однако при этом фазочастотные характеристики существенно различаются.*

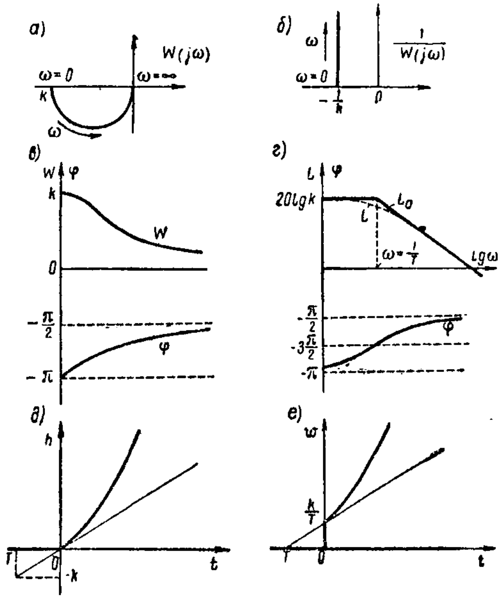


Рис. 4.5

По передаточной функции (4.15) может быть найдена переходная функция (рис. 4.5,*д*)

$$h(t) = k\left[e^{\frac{t}{T}} - 1\right]\cdot 1_0(t) \tag{4.18}$$

и весовая функция (рис. 4.5,*е*)

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k}{T}e^{\frac{t}{T}}\cdot 1_0(t). \tag{4.19}$$

Для линейных неустойчивых звеньев не существует установившегося режима, и с течением времени при любой входной величине выходная величина стремится в бесконечность.

§ 4.4. ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ ЗВЕНЬЯ

Звено с распределенными параметрами, описываемое одномерным уравнением теплопроводности Фурье

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = a\frac{\partial v}{\partial t}, \tag{4.20}$$

где $v = v(r, t)$, — величина, зависящая от пространственной координаты r и времени t, имеет иррациональную передаточную функцию, вид которой существенно зависит от граничных условий, учитывающих входной сигнал и место снятия выходного сигнала.

Рассматривая величину v как синусоидально изменяющуюся с частотой ω, т. е. $v = \operatorname{Im} V(j\omega t)$, фазор которой

$$V(j\omega t) = \dot{V}_m e^{j\omega t}, \tag{4.21}$$

уравнение (4.20) можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{d^2 \dot{V}_m}{dr^2} - j\omega a \dot{V}_m = 0. \tag{4.22}$$

Это однородное дифференциальное уравнение, имеющее корни характеристического уравнения ($\gamma^2 - j\omega a = 0$)

$$\gamma_{1,2} = \pm\sqrt{j\omega a}. \tag{4.23}$$

Решение уравнения (4.22) имеет вид

$$\dot{V}_m = \dot{A} e^{-r\sqrt{j\omega a}} + \dot{B} e^{r\sqrt{j\omega a}}, \tag{4.24}$$

где $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — коэффициенты, зависящие от граничных условий.

Если граничным условием является $\dot{V}_m = 0$ при $r \to \infty$, то $\dot{B} = 0$ и

$$\dot{V}_m = \dot{A} e^{-r\sqrt{j\omega a}}. \tag{4.25}$$

Наиболее характерны три случая приложения входных и снятия выходных воздействий:

$$\text{а)} \left.\begin{aligned} &\dot{X}_m = \dot{V}_m \quad \text{при} \quad r = 0; \\ &\dot{Y}_m = \dot{V}_m \quad \text{при} \quad r = l, \end{aligned}\right\} \tag{4.26}$$

что соответствует граничным условиям первого рода;

$$\text{б)} \left.\begin{aligned} &\dot{X}_m = -b\frac{d\dot{V}_m}{dr} \quad \text{при} \quad r = 0; \\ &\dot{Y}_m = \dot{V}_m \quad \text{при} \quad r = 0 \quad \text{или} \quad r = l, \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

что соответствует граничным условиям второго рода;

$$\text{в)} \left.\begin{aligned} &\dot{X}_m = -b\frac{d\dot{V}_m}{dr} + \alpha\dot{V}_m \quad \text{при} \quad r = 0; \\ &\dot{Y}_m = \dot{V}_m \quad \text{при} \quad r = 0 \quad \text{или} \quad r = l, \end{aligned}\right\} \tag{4.28}$$

что соответствует граничным условиям третьего рода.

Комплексный коэффициент усиления звена $W(j\omega)$ определяется как $\frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m}$ с учетом уравнения (4.25). При этом постоянная A сокращается и для трех рассмотренных случаев получаем:

в случае (*а*)

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = e^{-l\sqrt{j\omega a}}; \qquad (4.29)$$

в случае (*б*)

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{1}{b\sqrt{j\omega a}}, \qquad (4.30)$$

или

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{1}{b\sqrt{j\omega a}} e^{-l\sqrt{j\omega a}}; \qquad (4.31)$$

в случае (*в*)

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{1}{a + b\sqrt{j\omega a}}, \qquad (4.32)$$

или

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = \frac{1}{a + b\sqrt{j\omega a}} e^{-l\sqrt{j\omega a}}. \qquad (4.33)$$

Во всех случаях комплексный коэффициент усиления выражается иррациональной функцией $j\omega$.

Примерами иррациональных звеньев могут служить различные диффузионные и тепловые объекты (рис. 4.6, *а*) и в частности рассмотренный в гл. I объект радиационного нагрева (см. § 1.3,*д* рис. 1.12); объекты индукционного нагрева; телефонный кабель (рис. 4.6, *б*) с распределенными сопротивлением и емкостью.

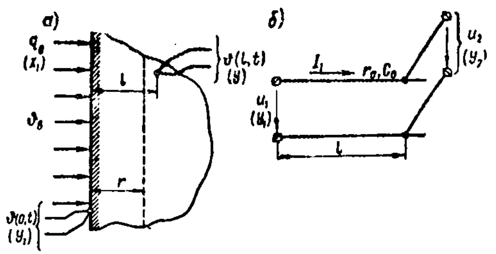


Рис. 4.6

Пример. 4.3. Пусть тело неограниченной толщины (см. рис. 4.6) нагревается потоком излучения при отсутствии теплоотдачи с поверхности ($q_п = 0$). Тогда уравнение (1.13) принимает вид

$$q_0 = -\lambda \frac{\partial\vartheta}{\partial r}(0, t) \qquad (4.34)$$

при условии, что [согласно уравнению (1.11)]

$$\frac{\partial^2\vartheta}{\partial r^2} = \frac{c}{\lambda}\cdot\frac{\partial\vartheta}{\partial t}. \qquad (4.35)$$

Эти уравнения совпадают соответственно с (4.27) и (4.20) при

$$\dot{Q}_{0m} = \dot{X}_m,\ \dot{\theta}_m(0) = \dot{V}_m(0) = \dot{Y}_m,\ \lambda = b,\ \frac{c}{\lambda} = a.$$

Следовательно, для радиационной печи

$$W_1(j\omega) = \frac{\dot{\theta}_m(0)}{\dot{\theta}_{0m}} = \frac{1}{\lambda\sqrt{j\omega a}}. \tag{4.36}$$

Если с поверхности тела по закону Ньютона отводится тепло, т. е.

$$q_п = \alpha\,[\vartheta(0,t) - \vartheta_в], \tag{4.36, a}$$

где α — коэффициент теплообмена между поверхностью материала и воздухом, и температура воздуха $\vartheta_в$ принимается равной нулю, то комплексный коэффициент усиления выражается уравнением

$$W_2(j\omega) = \frac{\dot{\theta}_m(0)}{\dot{Q}_{0m}} = \frac{1}{\alpha + \lambda\sqrt{j\omega a}}. \tag{4.37}$$

Если в качестве входной величины рассматривать температуру поверхности тела $\dot{X}_m = \dot{\theta}_m(0)$, а выходной — температуру на глубине l, т. е. $\dot{Y}_m = \dot{\theta}_m(l)$, то

$$W_3(j\omega) = \frac{\dot{\theta}_m(l)}{\dot{\theta}_m(0)} = e^{-l\sqrt{j\omega a}}. \tag{4.38}$$

Обозначая $\frac{1}{\lambda\sqrt{a}} = k_1$, $\frac{1}{\alpha} = k$, $\left(\frac{\lambda}{\alpha}\right)^2 a = T$, $l^2 a = T_0$, можно выражения (4.36) ÷ (4.38) записать следующим образом:

$$W_1(j\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{j\omega}}, \tag{4.39}$$

$$W_2(j\omega) = \frac{k}{1+\sqrt{j\omega T}}, \tag{4.40}$$

$$W_3(j\omega) = e^{-\sqrt{j\omega T_0}}, \tag{4.41}$$

что соответствует выражениям (4.30), (4.32) и (4.29).

Передаточными функциями, соответствующими выражениям (4.30), (4.32) и (4.29) при $k_1 = \frac{1}{b\sqrt{a}}$, $k = \frac{1}{\alpha}$, $T = \frac{ab^2}{\alpha^2}$ и $T_0 = al^2$, будут:

$$W(p) = \frac{k_1}{\sqrt{p}}, \tag{4.42}$$

$$W(p) = \frac{k}{1+\sqrt{pT}}, \tag{4.43}$$

$$W(p) = e^{-\sqrt{pT_0}}. \tag{4.44}$$

Выражения (4.42) и (4.43) отличаются от передаточных функций интегрирующего и инерционного звеньев только квадратным корнем. По аналогии с интегрирующими и инерционными такие звенья можно назвать *полуинтегрирующими* и *полуинерционными*. Третье выражение не только иррационально, но и трансцендентно; звенья такого типа будут рассмотрены вместе с трансцендентными несколько дальше. Переходные процессы в системах со звеньями такого типа рассмотрены в [Л. 32].

Рассмотрим характеристики иррациональных звеньев, описываемых уравнениями (4.42) и (4.43).

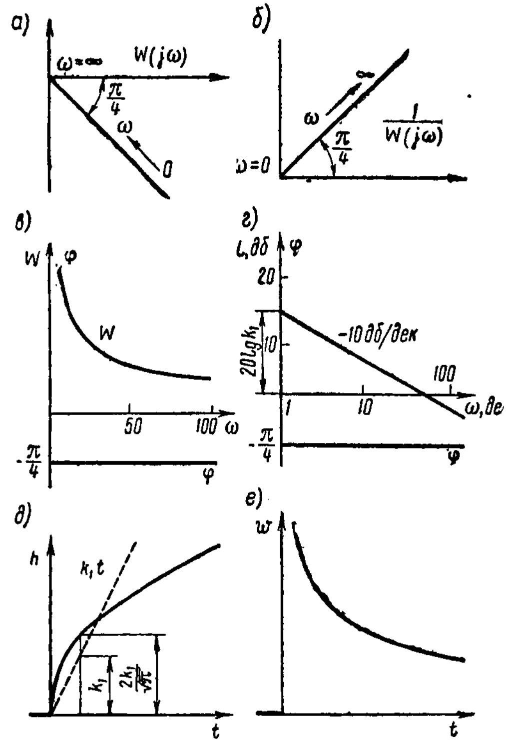


Рис. 4.7

П о л у и н т е г р и р у ю щ е е з в е н о. Частотные характеристики полуинтегрирующего звена, построенные по уравнению (4.39), показаны на рис. 4.7. Частотный годограф (*а*) имеет вид прямой линии, лежащей в четвертом квадранте и идущей под углом $-\frac{\pi}{4}$, т. е. под углом в два раза меньшим, чем для интегрирующего звена. Соответственно инверсная характеристика (*б*) лежит в первом квадранте и идет под углом $+\frac{\pi}{4}$.

Амплитуда и фаза комплексного коэффициента усиления

$$W(\omega) = \frac{k_1}{\sqrt{\omega}} \qquad (4.45)$$

и
$$\varphi(\omega) = -\frac{\pi}{4}. \qquad (4.46)$$

Соответственно логарифмическая амплитудно-частотная характеристика
$$L(\omega) = 20 \lg W(\omega) = 20 \lg k_1 - 10 \lg \omega. \qquad (4.47)$$

Графики амплитудно-частотных и фазочастотных характеристик показаны на рис. 4.7, *в* и *г*. Как видно из построения, наклон логарифмической амплитудно-частотной характеристики в два раза меньше, чем для интегрирующего звена и составляет 10 *дб/дек*.

Зная передаточную функцию (4.42), по таблицам преобразования Лапласа (см. приложение П.5) можно найти переходную и весовую функции (рис. 4.7, *д* и *е*):
$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{k_1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{p}\right\} = 2k_1 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \cdot 1_0(t) \qquad (4.48)$$
и
$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{k_1}{\sqrt{\pi t}} \cdot 1_0(t). \qquad (4.49)$$

Если в интегрирующем звене за время $t = 1$ величина h вырастает до величины k_1 (пунктир на рис. 4.7, *д*), то в полуинтегрирующем звене вначале процесс протекает быстрее и за время $t = 1$ величина h достигает значения $\frac{2}{\sqrt{\pi}} k_1 \cong 1{,}13 k_1$. С течением времени в полуинтегрирующем звене так же, как и в интегрирующем, $h \to \infty$, т. е. нет самовыравнивания.

Полуинерционное звено. Частотные характеристики полуинерционного звена, построенные по уравнению (4.40), показаны на рис. 4.8, *а*, *б*, *в* и *г*. Здесь
$$W(j\omega) = \frac{k}{1 + \sqrt{j\omega T}} = \frac{k}{1 + e^{j\frac{\pi}{4}}\sqrt{\omega T}} =$$
$$= \frac{k\sqrt{2}}{(\sqrt{2} + \sqrt{\omega T}) + j\sqrt{\omega T}}. \qquad (4.50)$$

Годограф полуинерционного звена (*а*) в отличие от годографа инерционного звена представляет собой не половину, а четверть окружности с центром в точке O, опирающуюся на хорду длиной k. Касательные к годографу в точках $\omega = 0$ и $\omega = \infty$ образуют с вещественной осью углы $\frac{\pi}{4}$ и пересекаются под углом $\frac{\pi}{2}$.

Инверсная характеристика (*б*) представляет собой полупрямую, выходящую из точки $\frac{1}{k}$ при $\omega = 0$ под углом $\frac{\pi}{4}$ к вещественной оси.

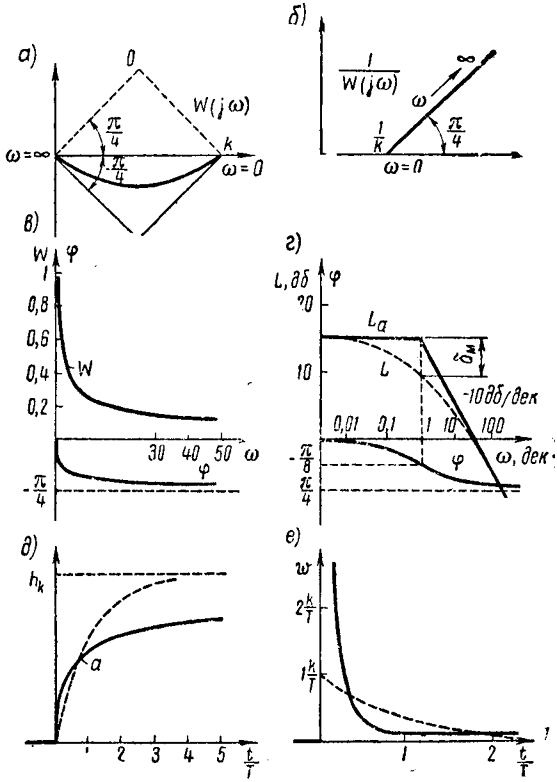


Рис. 4.8

Модуль и фаза комплексного коэффициента усиления соответственно будут:

$$\left.\begin{aligned} W(\omega) &= \frac{k\sqrt{2}}{\sqrt{[\sqrt{2}+\sqrt{\omega T}]^2+\omega T}} = \frac{k}{\sqrt{1+\sqrt{2\omega T}+\omega T}};\\ \varphi(\omega) &= -\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\omega T}}{\sqrt{2}+\sqrt{\omega T}}. \end{aligned}\right\} \tag{4.51}$$

При $\omega \to \infty \quad \varphi = -\operatorname{arctg} 1 = -\frac{\pi}{4}$.

Соответственно логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

$$L(\omega) = 20 \lg k - 10 \lg [1 + \sqrt{2\omega T} + \omega T]. \tag{4.52}$$

Асимптотическая характеристика для этого случая может быть выражена двумя полупрямыми:

$$L_a(\omega)=\begin{cases}20\lg k & \text{при } \omega T\leqslant 1,\\ 20\lg k-10\lg\omega T & \text{при } \omega T\geqslant 1\end{cases}$$

и при $\omega T>1$ имеет наклон — 10 *дб/дек*.

Наибольшее расхождение точной и асимптотической характеристик в точке излома при $\omega T=1$

$$\delta_м=L\left(\frac{1}{T}\right)-L_a\left(\frac{1}{T}\right)=-10\lg(2+\sqrt{2})\approx-5{,}3\ дб.$$

Таким образом, для полуинерционного звена фазовый сдвиг и наклон логарифмической частотной характеристики в два раза меньше, чем для инерционного звена. При этом максимальная погрешность при переходе к асимптотической характеристике получается заметно выше (5,3 *дб* вместо 3 *дб*).

Переход от передаточной функции (4.43) к переходной функции производится с помощью имеющегося в справочниках обратного преобразования Лапласа (см. приложение П. 5)

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{k}{1+\sqrt{pT}}\cdot\frac{1}{p}\right\}=k\left[1-e^{\frac{t}{T}}\operatorname{erfc}\sqrt{\frac{t}{T}}\right]1_0(t),\quad(4.53)$$

где

$$\operatorname{erfc}(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^\infty e^{-u^2}du=1-\operatorname{erf}(x)$$

— табулированный интеграл вероятности.

Весовая функция

$$w(t)=\frac{dh}{dt}=\frac{k}{T}\left[\sqrt{\frac{T}{\pi t}}-e^{\frac{t}{T}}\operatorname{erfc}\sqrt{\frac{t}{T}}\right]1_0(t).\quad(4.54)$$

Обе эти функции построены на рис. 4.8, *д* и *е*. Там же пунктиром показаны аналогичные характеристики для инерционного звена.

Как видно из графика, полуинерционное звено является звеном с самовыравниванием, однако в отличие от инерционного звена при той же постоянной времени T переходный процесс полуинерционного звена вначале идет быстро, а затем — более медленно приближается к установившемуся режиму. Значение выходной величины, которое достигается в полуинерционном и инерционном звеньях за одинаковое время, соответствует $h=0{,}5k$ при $t=0{,}7T$ (см. точку пересечения a на рис. 4.8, *д*).

§ 4.5. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ЗВЕНЬЯ

Звено с распределенными параметрами, описываемое одномерным телеграфным уравнением Даламбера

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = a\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \qquad (4.55)$$

где $v = v(r, t)$ — величина, зависящая от пространственной координаты r и времени t, имеет трансцендентную передаточную функцию, которая зависит от граничных условий и места снятия выходного сигнала.

Рассматривая зависящий от пространственной координаты фазор

$$V(j\omega t) = \dot{V}_m \cdot e^{j\omega t}, \qquad (4.56)$$

можно уравнение (4.55) привести к виду

$$\frac{d^2\dot{V}_m}{dr^2} + \omega^2 a\dot{V}_m = 0. \qquad (4.57)$$

Корни характеристического уравнения $\gamma^2 + a\omega^2 = 0$ — мнимые

$$\gamma_{1,2} = \pm j\omega\sqrt{a} = \pm j\omega\alpha, \qquad (4.58)$$

где $\alpha = \sqrt{a}$.

Решение уравнения (4.57) можно записать как

$$\dot{V}_m = \dot{A}e^{-j\omega\alpha r} + \dot{B}e^{j\omega\alpha r}, \qquad (4.59)$$

где $\dot{A}$ и $\dot{B}$ — коэффициенты, зависящие от граничных условий. Первое слагаемое выражает волну, движущуюся в сторону возрастания r, второе — обратную волну, движущуюся в сторону убывания r.

Звено запаздывания. Ограничимся рассмотрением таких объектов, в которых имеется только одна волна, движущаяся в сторону возрастания r. Тогда $\dot{B} = 0$ и

$$\dot{V}_m = \dot{A}e^{-j\omega\alpha r}. \qquad (4.60)$$

Наиболее распространенным случаем является приложение входного воздействия при $r = 0$, т. е. $\dot{X}_m = \dot{V}_m(0)$, и снятие выходного сигнала при $r = l$, т. е. $\dot{Y}_m = \dot{V}_m(l)$. В таком случае $\dot{X}_m = \dot{A}$, $\dot{Y}_m = \dot{A}e^{-j\omega\alpha l}$ и

$$W(j\omega) = \frac{\dot{Y}_m}{\dot{X}_m} = e^{-j\omega\tau}, \qquad (4.61)$$

где $\tau = \alpha l$ — время запаздывания.

Если $x = X_m \sin\omega t$ или $X(j\omega t) = \dot{X}_m e^{j\omega t}$, то $Y(j\omega t) = \dot{X}e^{j\omega(t-\tau)}$ или $y(t) = X_m \sin\omega(t - \tau)$, т. е. выходная величина воспроизводит входной сигнал с отставанием во времени на время запаздывания τ. Это послужило основанием для названия звеньев такого типа звеньями запаздывания.

Примеры звеньев запаздывания можно встретить в самых различных технологических конвейерных установках, в системах магнитной записи и воспроизведения, в гидравлических системах и в электрических цепях без потерь с распределенными индуктивностью L_0 и емкостью C_0.

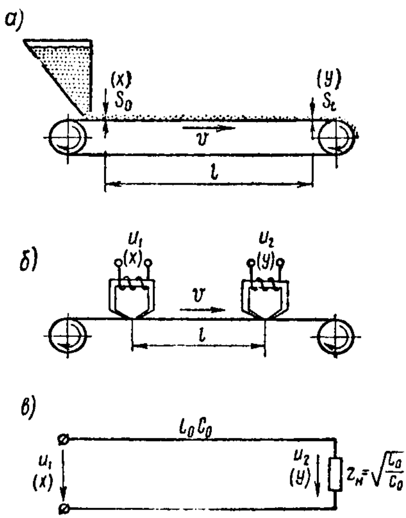


Рис. 4.9

Некоторые примеры реальных звеньев запаздывания показаны на рис. 4.9. При загрузке сыпучего материала на конвейер (*а*), движущийся со скоростью v, толщина слоя S_l, находящегося на расстоянии l, отстает от толщины слоя S_0, находящегося в начале, на время $\tau = \frac{l}{v}$. Напряжение на зажимах считывающей головки (*б*) магнитной системы u_2 воспроизводит напряжение записывающей системы u_1 с запаздыванием $\tau = \frac{l}{v}$. Напряжение u_2 в конце линии без потерь (*в*) нагруженной на согласованное сопротивление $z_н = z_с = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}}$, воспроизводит напряжение в начале линии u_1 с запаздыванием $\tau = l\sqrt{L_0C_0}$.

Частотные характеристики комплексного коэффициента усиления, рассчитанные по формуле (4.61), показаны на рис. 4.10, *а*, *б* и *в*. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат (*а*). Окружность пересекает вещественную ось в точке $+1$ при $\omega = \frac{2\pi n}{\tau}$ и в точке -1 при $\omega = \frac{\pi(2n+1)}{\tau}$.

Амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики (*б*) и (*в*) определяются следующими соотношениями:

$$|W| = 1, \quad L = 0, \quad \varphi = -\omega\tau.$$

Передаточная функция звена запаздывания

$$W(p) = e^{-p\tau}. \tag{4.62}$$

Звено запаздывания является неминимально-фазовым устойчивым звеном. Оно имеет бесконечное множество полюсов, лежащих в левой полуплоскости, с модулем, стремящимся к бесконечности, и бесконечное множество нулей, лежащих в правой полуплоскости, с модулем, также стремящимся к бесконечности. Действительно, уравнение $e^{-p\tau}=0$ имеет

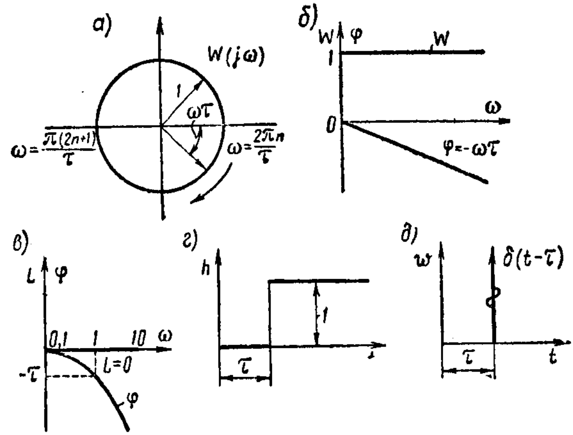


Рис. 4.10

решение $p_i=\rho e^{j\varphi}$, если $\rho\to\infty$ и $-\frac{\pi}{2}<\varphi<+\frac{\pi}{2}$, а уравнение $e^{p\tau}=0$ — если $\rho\to\infty$ и $\frac{\pi}{2}<\varphi<3\frac{\pi}{2}$ (см. рис. 4.11).

Переходная и весовая функции (рис. 4.10, *г* и *д*) находятся по передаточной функции:

$$h(t)=L^{-1}\left\{\frac{e^{-p\tau}}{p}\right\}=1_0(t-\tau); \qquad (4.63)$$

$$w(t)=\frac{dh}{dt}=\delta(t-\tau). \qquad (4.64)$$

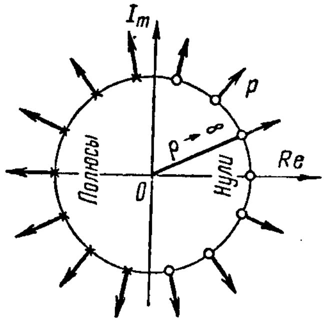


Рис. 4.11

Из всех звеньев, рассматриваемых в настоящей главе, звено запаздывания имеет наибольшее практическое значение. Особую роль оно играет при рассмотрении импульсных систем.

Звено затухания (или полузапаздывания). Несколько более сложно выражаются характеристики иррационального звена, описываемого показательной передаточной функцией [уравнение (4.44)]. Такое звено может быть условно названо звеном *затухания*, так как в отличие от звена запаздывания в нем сигнал на выходе всегда меньше сигнала на входе. Оно также не является минимально-фазовым, поскольку функция имеет нули в правой полуплоскости при $p \to \infty$.

Частотные характеристики звена могут быть получены из выражения (4.41)

$$W(j\omega) = e^{-\sqrt{j\omega T_0}} = e^{-\sqrt{\frac{\omega T_0}{2}}} \cdot e^{-j\sqrt{\frac{\omega T_0}{2}}} \qquad (4.65)$$

На рис. 4.12, *а*, *б*, *в* построены эти характеристики. Комплексный коэффициент усиления при изменении аргумента на $\frac{\pi}{2}$

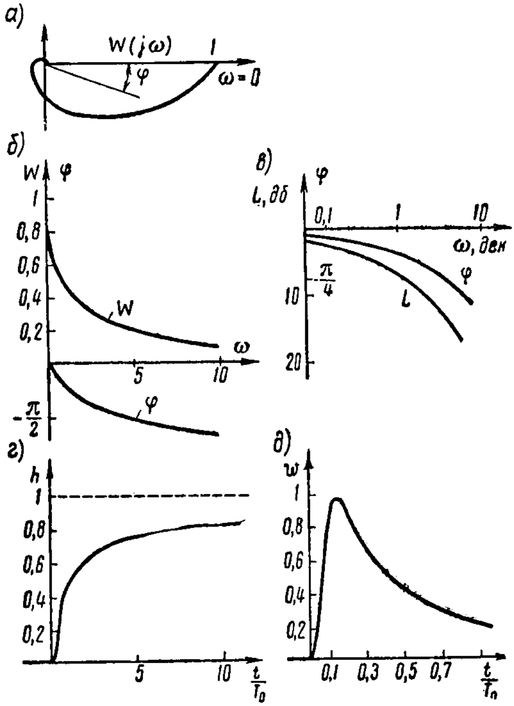


Рис. 4.12

уменьшается по модулю в $e^{\frac{\pi}{2}} = 4{,}8$ раз. Зависимость амплитуды и фазы от частоты получается непосредственно из (4.65)

$$W(\omega) = e^{-\sqrt{\frac{\omega T_0}{2}}}; \qquad (4.66)$$

$$\varphi(\omega) = -\sqrt{\frac{\omega T_0}{2}}. \qquad (4.67)$$

Соответственно логарифмическая амплитудно-частотная характеристика

$$L = 20 \lg W(\omega) = -20 \lg e \sqrt{\frac{\omega T_0}{2}} \cong -8{,}7 \sqrt{\frac{\omega T_0}{2}} \quad (4.68)$$

Зная передаточную функцию (4.44), путем табличного перехода от Лапласового изображения к оригиналу (см. приложение П.5), получаем переходную функцию

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{e^{-\sqrt{pT_0}}}{p}\right\} = \operatorname{erfc} \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_0}{t}} \quad (4.69)$$

и весовую

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_0}{\pi t^3}}\, e^{-\frac{T_0}{4t}}. \quad (4.70)$$

Графики этих функций показаны на рис. 4.12, *г* и *д*.

Аналогично, но несколько сложнее могут быть найдены характеристики звеньев при иных граничных условиях, когда в уравнениях (4.24) и (4.59) нельзя ограничиться одной первой слагающей. Такие звенья соответствуют, например, нагреву пластин ограниченной толщины.

Глава V

СОЕДИНЕНИЕ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

§ 5.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СОЕДИНЕНИЯ ЗВЕНЬЕВ

Зная математическое описание всех элементов системы управления, можно составить структурную схему соединения различных звеньев, подобно тому как это было сделано для объектов управления.

При рассмотрении различных соединений звеньев необходимо учитывать влияние рассматриваемого соединения на передаточные функции звеньев. Так, например, если выход некоторого

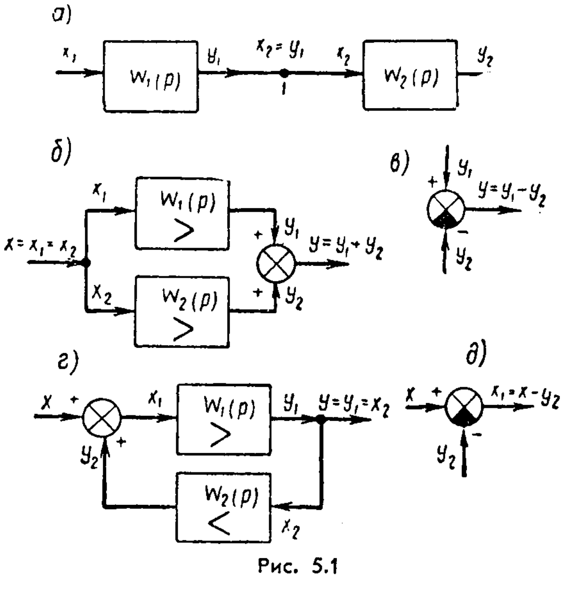


Рис. 5.1

четырехполюсника подключается к входу усилителя, имеющего некоторое сопротивление *r*, то это сопротивление должно быть введено в схему четырехполюсника и учитываться при определении его передаточной функции. Для того чтобы соединение звеньев не влияло на передаточные функции, необходимо, чтобы входное сопротивление последующего звена или мощность выходного сигнала предыдущего можно было считать бесконечно большой величиной.

В дальнейшем, при рассмотрении соединения линейных звеньев предполагается, что звенья являются *направленными* (т. е. преобразуют сигнал в одном направлении) и что выполняется условие независимости передаточных функций отдельных звеньев от их соединения (т. е. передаточные функции звеньев определены с учетом этих соединений).

Соединения звеньев бывают трех видов: *последовательное* (рис. 5.1, *а*), *параллельное согласное* (рис. 5.1, *б* и *в*) и *параллельное встречное* (рис. 5.1, *г* и *д*). Рассмотрим каждый из видов соединения звеньев и особенности характеристик этих соединений.

§ 5.2. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕНЬЕВ

При последовательном соединении звеньев выходная величина одного звена является входной величиной другого. Если последовательно соединяются звенья i и k, то

$$y_i = x_k. \tag{5.1}$$

При последовательном соединении n звеньев (рис. 5.2) с передаточными функциями $W_1, W_2, \ldots, W_n$ уравнения соединений имеют вид

$$x_{i+1} = y_i \text{ или } X_{i+1}(p) = Y_i(p). \tag{5.2}$$

Так как для каждого звена

$$Y_i(p) = W_i(p) X_i(p), \tag{5.3}$$

то

$$X_{i+1}(p) = W_i(p) X_i(p). \tag{5.4}$$

Составив такие уравнения для всех звеньев и исключив из них все промежуточные переменные, кроме входной величины

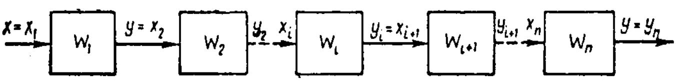


Рис. 5.2

$X(p) = X_1(p)$ и выходной величины $Y(p) = Y_n(p)$, получаем

$$Y(p) = W_1(p) \cdot W_2(p) \ldots W_n(p) \cdot X(p). \tag{5.5}$$

Таким образом, *передаточная функция системы последовательно соединенных звеньев*

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \prod_{i=1}^{r} W_i(p), \tag{5.6}$$

т. е. *равна произведению передаточных функций отдельных звеньев.* При этом модули комплексных коэффициентов перемножаются, а аргументы складываются. При последовательном соединении звеньев логарифмические амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики отдельных звеньев складываются.

При последовательном соединении минимально-фазовых звеньев полученная система также будет минимально-фазовой, т. е. ее передаточная функция не имеет ни нулей, ни полюсов в правой полуплоскости. Действительно, если каждый из сомножителей произведения (5.6) не имеет ни нулей, ни полюсов в правой полуплоскости p, то тоже можно сказать и о их произведении.

Аналогично можно показать, что если хотя бы одно из последовательно соединенных звеньев неминимально-фазовое или неустойчивое, то и вся система будет неминимально-фазовой или неустойчивой.

Пример 5.1. Последовательное соединение интегрирующего и инерционного звеньев (инерционно-интегрирующее звено).

Если последовательно соединяются два звена с передаточными функциями $W_1(p) = \frac{1}{p}$ и $W_2(p) = \frac{k}{1+pT}$, то передаточная функция соединения

$$W = W_1 W_2 = \frac{k}{p(1+pT)}. \tag{5.7}$$

Этой системе соответствует двигатель постоянного тока с инерционной нагрузкой на валу, если входной величиной считать напряжение питания якоря, а выходной — угол поворота вала (см. § 2.3).

Комплексный коэффициент усиления системы

$$W(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)}, \tag{5.8}$$

при $0 < \omega < \infty$ он описывает годограф, показанный на рис. 5.3, *а*.

Построение этого годографа производится путем умножения соответствующих комплексных значений, найденных для каждой заданной частоты по годографам интегрирующего (см. рис. 3.6, *а*) и инерционного (см. рис. 3.11, *а*) звеньев.

Преобразовав выражение (5.8) и выделив действительную и мнимую части, получим

$$W(j\omega) = -\frac{kT}{1+(\omega T)^2} - j\frac{\frac{k}{\omega}}{1+(\omega T)^2}. \tag{5.9}$$

Из этого выражения видно, что при $\omega \to 0$ комплекс $W(j\omega)$ уходит в бесконечность, перемещаясь по вертикальной прямой, проходящей через точку $-kT$. Эта прямая является асимптотой для рассматриваемого годографа.

Аналогично может быть построен и инверсный годограф (рис. 5.3, *б*).

Логарифмическая амплитудно-частотная и фазочастотная характеристики (рис. 5.3, *в*) получаются путем суммирования соответствующих кривых, показанных на рис. 3.6, *б* и *в* и 3.11, *в* и *г*.

Переходная и весовая функции последовательного соединения находятся по его передаточной функции и не могут быть получены простым суммированием характеристик отдельных звеньев:

$$h(t) = L^{-1}\left\{\frac{k}{p(1+pT)}\cdot\frac{1}{p}\right\} = k\left[t - T\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)\right] 1_0(t); \tag{5.10}$$

$$w(t) = \frac{dh}{dt} = k\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right) 1_0(t). \tag{5.11}$$

Эти характеристики показаны на рис. 5.3, *г* и *д*. Пунктиром показаны асимптоты $h_a(t) = k(t - T)$ и $w_a = k$.

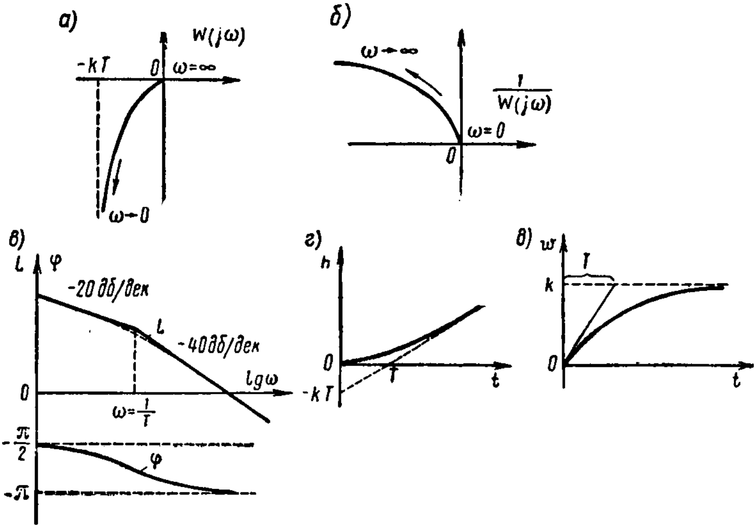


Рис. 5..

При последовательном соединении дифференцирующего и инерционного звеньев получается инерционно-дифференцирующее звено, а соединение форсирующего и инерционного звеньев дает инерционно-форсирующее звено (см. § 3.3 и 3.4).

Пример 5.2. Последовательное соединение двух инерционных звеньев. Передаточная функция двух последовательно соединенных звеньев с передаточными функциями $W_1 = \frac{k_1}{1+pT_1}$ и $W_2 = \frac{k_2}{1+pT_2}$ имеет вид

$$W(p) = W_1 \cdot W_2 = \frac{k_1 k_2}{(1+pT_1)(1+pT_2)}. \tag{5.12}$$

Комплексный коэффициент усиления

$$W(j\omega) = \frac{k}{(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)}, \tag{5.13}$$

где $k = k_1 k_2$.

Полученные уравнения совпадают с уравнением колебательного звена для $\zeta \geqslant 1$.

Частотные характеристики такого соединения звеньев показаны на рис. 5.4. Годограф комплексного коэффициента усиления (*а*) имеет такой же вид, как и для колебательного звена, однако точка пересечения его с мнимой осью лежит ближе к началу координат.

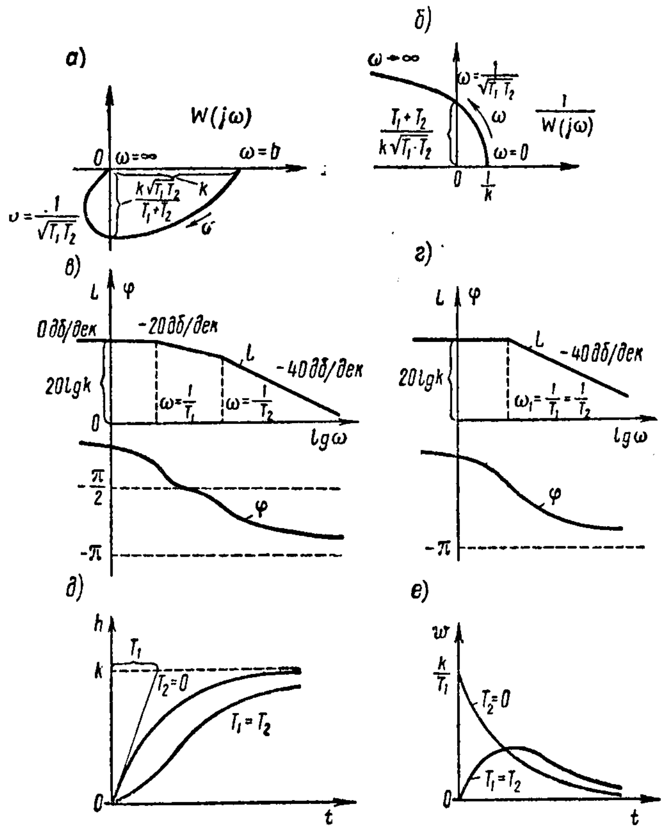


Рис. 5.4

Инверсный годограф (*б*) тоже имеет такой же вид, как и для колебательного звена. Логарифмические амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики получены простым суммированием ординат характеристик составляющих звеньев для двух случаев: $T_2 < T_1$ (*в*) и $T_2 = T_1$ (*г*).

По передаточной функции (5.12) находятся переходная и весовая функции:

$$h(t) = k\left[1 - \frac{T_1 e^{-\frac{t}{T_1}} - T_2 e^{-\frac{t}{T_2}}}{T_1 - T_2}\right] 1_0(t); \tag{5.14}$$

$$w(t) = \frac{k}{T_1 - T_2}\left(e^{-\frac{t}{T_1}} - e^{-\frac{t}{T_2}}\right) 1_0(t). \tag{5.15}$$

При $T_1 = T_2$ или $\zeta = 1$ решение получаем путем предельного устремления $T_2 \to T_1$ и раскрытия неопределенности типа $\frac{0}{0}$. В этом случае

$$h(t) = k\left[1 - \left(1 + \frac{t}{T_1}\right)e^{-\frac{t}{T_1}}\right]1_0(t) \tag{5.16}$$

и

$$w(t) = \frac{k}{T_1^2}te^{-\frac{t}{T_1}}1_0(t). \tag{5.17}$$

Если $T_2 \to 0$, то система вырождается в одно инерционное звено с постоянной времени T_1 (см. § 3.3).

При $0 < T_2 < T_1$ переходные и весовые функции лежат в промежуточной области между кривыми, полученными для $T_2 = 0$ и $T_2 = T_1$ (рис. 5.4, *д* и *е*).

§ 5.3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ МИНИМАЛЬНО-ФАЗОВОЙ СИСТЕМЫ ПО ЕЕ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

Если известна частотная характеристика некоторой системы, полученная для всего диапазона частот от 0 до ∞, то по ней может быть найдена эквивалентная схема минимально-фазовой системы, имеющей ту же характеристику, что и заданная.

Найдем эквивалентную схему последовательного соединения интегрирующих, инерционных и форсирующих звеньев. Комплексный коэффициент усиления такого соединения

$$W(j\omega) = \frac{k}{(j\omega)^{n_0}}\prod_{i=1}^{m}(1 + j\omega T_i)^{n_i}. \tag{5.18}$$

Здесь n_0 — число интегрирующих звеньев и $\sum_{i=1}^{m}|n_i|$ — общее число инерционных и форсирующих звеньев. Число одинаковых звеньев n_i.

При $n_i > 0$ — звенья форсирующие, а при $n_i < 0$ — инерционные.

Для того чтобы эквивалентная схема соответствовала типовым, легко реализуемым звеньям, необходимо, чтобы n_i было целым числом.

Если постоянные времени T_i отличаются одна от другой больше, чем на одну декаду, то на общей характеристике $L(\omega) = 20\lg|W(j\omega)|$ могут быть выделены участки, где асимптотическая логарифмическая характеристика, полученная для интервала частот $\frac{1}{T_i} < \omega < \frac{1}{T_{i+1}}$, хорошо совгадает с точной характеристикой. Так для всей характеристики $L(\omega)$ может быть построена асимптотическая характеристика, имеющая вид ломаной линии с изменением наклона $20n_i \frac{дб}{дек}$. При $n_i > 0$ оно положительно и наклон $L(\omega)$ растет с частотой, а при $n_i < 0$ с ростом частоты наклон $L(\omega)$ убывает.

Для уравнения (5.18) аналитические выражения точных амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик имеют вид

$$L(\omega) = 20 \lg k - n_0 20 \lg \omega + \sum_{i=1}^{m} n_i 10 \lg [1 + (\omega T_i)^2] \quad (5.19)$$

и

$$\varphi(\omega) = -n_0 \frac{\pi}{2} + \sum_{i=1}^{m} n_i \operatorname{arctg} \omega T_i. \quad (5.20)$$

Точки излома асимптотической характеристики дают возможность определить T_i, а разность углов наклона характеристик определяет степени n_i.

Пример 5.4. Дана характеристика системы $L(\omega)$, показанная на рис. 5.5, *а*. Плавная кривая $L(\omega)$ может быть приближенно аппроксимирована ломаной линией с наклоном на различных участках $-20 \frac{дб}{дек}$, $+20 \frac{дб}{дек}$, $-40 \frac{дб}{дек}$, $0 \frac{дб}{дек}$, $-80 \frac{дб}{дек}$. Требуется найти минимально-фазовую схему замещения и построить фазочастотную характеристику.

Асимптотическую ломаную характеристику можно представить состоящей из ряда составляющих, соответствующих асимптотическим характеристикам типовых звеньев. Для рассматриваемого случая это одно интегрирующее звено $\left(\text{прямая } 0 \text{ с наклоном } -20 \frac{дб}{дек}\right)$, два одинаковых форсирующих звена с постоянными времени T_1 $\left(\text{ломаная } 1 \text{ с наклоном } 0, +40 \frac{дб}{дек}\right)$, три одинаковых инерционных звена с постоянными времени T_2 $\left(\text{ломаная } 2 \text{ с наклоном } 0, -60 \frac{дб}{дек}\right)$, два одинаковых форсирующих звена с постоянными времени T_3 $\left(\text{ломаная } 3 \text{ с наклоном } 0, +40 \frac{дб}{дек}\right)$ и четыре одинаковых инерционных звена с постоянными времени T_4 $\left(\text{ломаная } 4 \text{ с наклоном } 0, -80 \frac{дб}{дек}\right)$.

Схема замещения имеет вид последовательного соединения звеньев с передаточными функциями:

$$W_0 = \frac{k}{p}, \quad W_1 = (1 + pT_1)^2 \quad W_2 = \frac{1}{(1 + pT_2)^3},$$
$$W_3 = (1 + pT_3)^2 \quad \text{и} \quad W_4 = \frac{1}{(1 + pT_4)^4},$$

что соответствует $n_0 = 1$, $n_1 = 2$, $n_2 = -3$, $n_3 = 2$, $n_4 = -4$ и $m = 4$ в формулах (5.18) и (5.19). Схема замещения показана на рис. 5.6.

По найденным параметрам схемы замещения могут быть по формуле (5.20) построены фазочастотные характеристики (см. рис. 5.5, *б*). Определение схемы замещения производилось по асимптотическим характеристикам, предполагающим погрешность в точках излома $\delta_i = n_i 3$ *дб*. Если

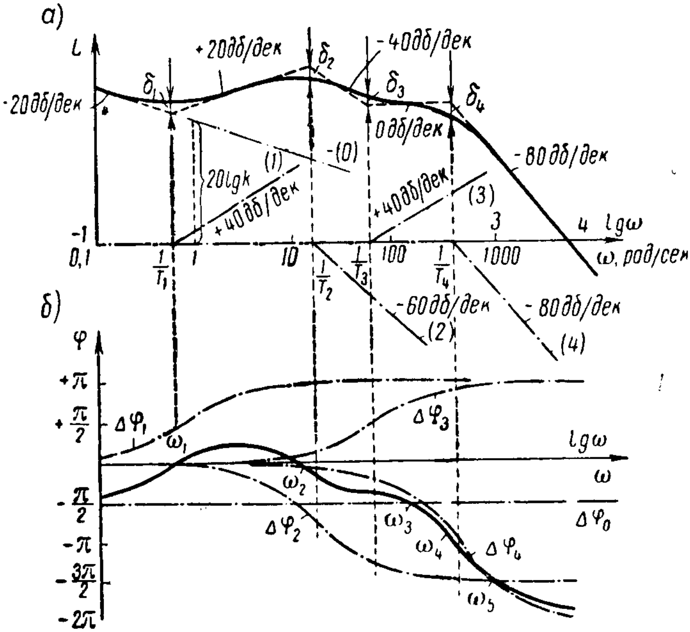


Рис. 5.5

значения погрешностей, принятых при аппроксимации (δ_1, δ_2, δ_3 и δ_4 на рис. 5.5, *а*), отвечают этому условию, то кривая $\varphi(\omega)$ точно соответствует исходной кривой $L(\omega)$.

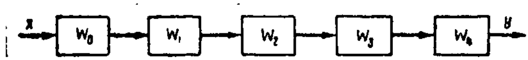


Рис. 5.6

Годограф $W(j\omega)$ для этого случая показан на рис. 5.7.

В ряде практических случаев бывает необходимо найти частотную зависимость $\varphi(\omega)$ по $L(\omega)$ без построения просто реализуемой схемы замещения. В этих случаях исходную кривую $L(\omega)$ можно аппроксимировать произвольной ломаной линией с участками, имеющими наклон $n_i 20 \frac{дб}{дек}$, причем значение n_i может быть любым числом, как целым, так и дробным. Вычисление $\varphi(\omega)$ и в этом случае производится по формуле (5.20.) Если в местах излома характеристики $L(\omega)$ имеется резкий пик, а изменение наклона вблизи излома $-40\,\frac{дб}{дек}$, то для аппроксимации $L(\omega)$ в этой области удобно пользоваться характеристикой колебательного звена (см. § 3.4).

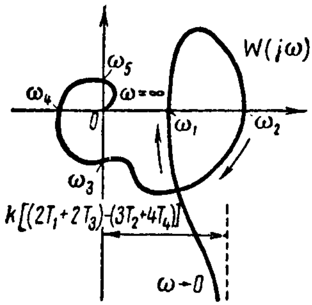


Рис. 5.7

Если логарифмическая характеристика имеет вид ломаной, то для минимально-фазовых систем характеристика $\varphi(\omega)$ может быть получена точно без предположения о сглаживании характеристик вблизи точек излома. Для этой цели необходимо найти фазочастотные характеристики, точно соответствующие логарифмической амплитудно-частотной характеристике, имеющей вид ломаной линии.

Рассмотрим логарифмическую характеристику, описываемую уравнением (3.54), при $k = 1$ (сплошная линия на рис. 5.8, *а*):

$$L_0(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < \omega T \leqslant 1, \\ 20 \lg \omega T & \text{при } \omega T \geqslant 1. \end{cases} \tag{5.21}$$

Минимально-фазовое звено, имеющее такую характеристику' называется *асимптотическим форсирующим звеном.* Найдем

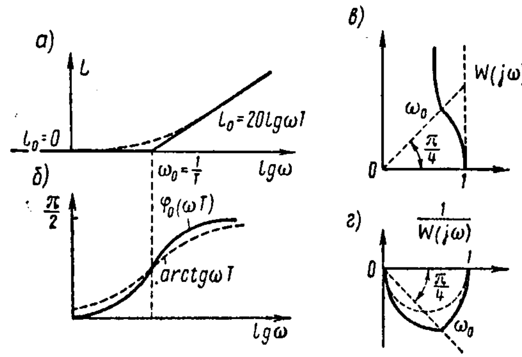


Рис. 5.8

по формуле (2.71) фазочастотную характеристику минимально-фазового звена, соответствующую амплитудно-частотной характеристике (5.21)

$$\varphi(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\ln vT}{vT - \omega T}\, dvT = \frac{1}{\pi}\int\limits_1^\infty \frac{\ln x}{x - \omega T}\, dx = \varphi_0(\omega T). \tag{5.22}$$

Этот определенный интеграл табулирован, и функция $\varphi_0(\omega T)$ приведена в приложении П.6.

На рис. 5.8, *б* и 5.9 приведена эта функция. Если сравнить $\varphi_0(\omega T)$ с кривой $\operatorname{arctg} \omega T$, то можно заметить, что эти функции похожи: они изменяются в том же диапазоне и проходят через точку $\varphi = \frac{\pi}{4}$ при $\omega T = 1$. Однако кривая $\varphi_0(\omega T)$ вблизи частоты $\omega = \frac{1}{T}$ идет значительно круче, чем кривая $\operatorname{arctg} \omega T$.

Если по кривым $L(\omega)$ и $\varphi_0(\omega T)$ построить частотный годограф, то он будет заметно отличаться от годографа форсирующего звена. На рис. 5.8, *в* и *г* показаны точные (пунктир)

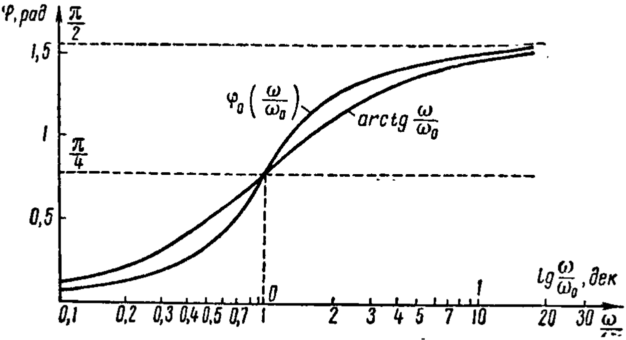


Рис. 5.9

и асимптотические (сплошная линия) характеристики форсирующего звена. Наиболее существенно различие кривых вблизи частоты $\omega = \frac{1}{T}$.

Функция $\varphi_0(\omega T)$ широко применяется для нахождения фазочастотной характеристики минимально-фазовой системы по ломаной логарифмической характеристике.

На рис. 5.10 показано разложение логарифмической характеристики на полубесконечные прямые, соответствующие асимптотическим характеристикам форсирующего или инерционного звеньев с произвольным углом наклона и получающиеся умножением соответствующей характеристики на n_i.

Там же показано построение $\varphi(\omega)$ как суммы произведений $n_i \varphi_0(\omega_i T)$, найденных для каждой из полубесконечных прямых.

Описанный метод нахождения фазочастотных характеристик по амплитудным впервые был применен Боде для синтеза усилителей с обратной связью [Л. 24].

Как видно из сравнения кривых $\varphi_0(\omega T)$ и $\operatorname{arctg} \omega T$, методы разложения логарифмических характеристик на точные (см.

рис. 5.5) или на асимптотические (см. рис. 5.10) характеристики инерционных или форсирующих звеньев весьма похожи и приводят к относительно мало различающимся результатам.

Первый метод более прост, он дает возможность по амплитудно-частотной характеристике найти эквивалентную схему,

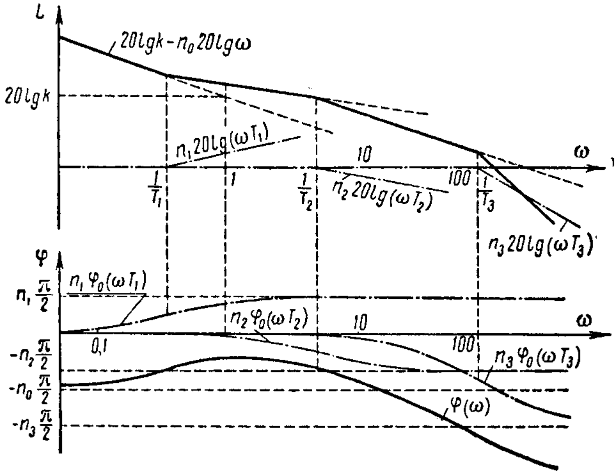


Рис. 5.10

состоящую из типовых звеньев, соединенных последовательно и оценить получающуюся при этом погрешность аппроксимации.

§ 5.4. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ СОГЛАСНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕНЬЕВ

При параллельном согласном соединении на входы всех звеньев подается одна и та же величина, а выходные величины суммируются (с соответствующими знаками). Если параллельно соединяется n звеньев, то входная величина

$$x = x_1 = x_2 = \ldots = x_n, \tag{5.23}$$

а выходная величина

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{5.24}$$

Переходя к изображениям для передаточной функции параллельного согласного соединения звеньев, получим

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{Y_i(p)}{X_i(p)} = \sum_{i=1}^{n} W_i(p). \tag{5.25}$$

Соответственно, переходная функция

$$h(t) = \sum_{i=1}^{n} h_i(t) \tag{5.26}$$

и весовая функция

$$w(t) = \sum_{i=1}^{n} w_i(t). \tag{5.27}$$

Схема параллельного согласного соединения n звеньев показана на рис. 5.11.

При согласном параллельном соединении звеньев передаточные переходные и весовые функции складываются.

Для комплексных коэффициентов усиления сложение комплексов требует представления их не в виде модуля и аргумента, а в виде вещественной и мнимой частей. Если

$$W_i(j\omega) = P_i(\omega) + jQ_i(\omega), \tag{5.28}$$

то, соответственно,

$$W(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} W_i(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} P_i(\omega) + j\sum_{i=1}^{n} Q_i(\omega). \tag{5.29}$$

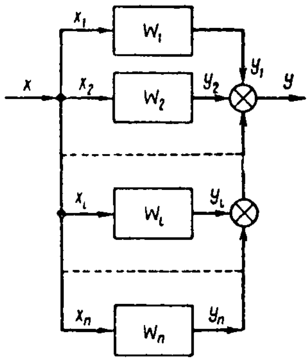


Рис. 5.11

При параллельном соединении устойчивых звеньев результирующее звено также оказывается устойчивым. Это вытекает из того, что общий знаменатель суммы дробей не может иметь иных корней, кроме корней слагаемых, и, следовательно, отсутствие полюсов слагаемых в правой полуплоскости исключает возможность появления таковых в сумме.

Иначе обстоит дело с условием минимально-фазовости. Сумма минимально-фазовых передаточных функций может иметь нули в правой полуплоскости и, следовательно, параллельное согласное соединение ряда минимально-фазовых звеньев может дать неминимально-фазовую систему. Наоборот, при параллельном соединении неминимально-фазовых устойчивых звеньев может получиться минимально-фазовая устойчивая система.

Пример 5.5. Определим частотную характеристику согласного параллельного соединения двух инерционных звеньев, включаемых с одинаковыми знаками (рис. 5.12, *а*)

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{1 + j\omega T_1} + \frac{k_2}{1 + j\omega T_2}. \tag{5.30}$$

В зависимости от соотношения T_1 и T_2 годограф комплексного коэффициента имеет различный вид. Если $T_1 \gg T_2$, то частоты, при которых комплексный коэффициент усиления пробегает окружности слагаемых годографов, оказываются различными; суммарный годограф имеет вид двух полуокружностей радиусов k_1 и k_2 (рис. 5.12, *б*, кривая *1* и *2*). При частотах, изменяющихся от 0 примерно до $\frac{10}{T_1}$, конец вектора комплексного коэффициента усиления описывает полуокружность *1* диаметром k_1. При частотах, изменяющихся от $\frac{10}{T_1}$ до $\frac{0,1}{T_2}$, конец этого вектора совершает небольшое перемещение вблизи точки *А*, а при изменении частоты от $\frac{0,1}{T_2}$ до ∞ он описывает полуокружность *2* диаметром k_2.

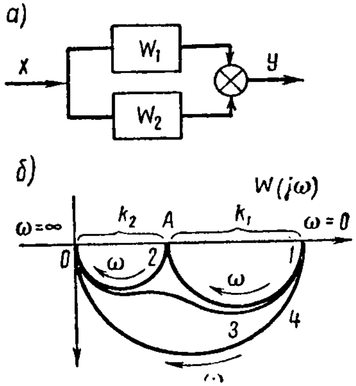


Рис. 5.12

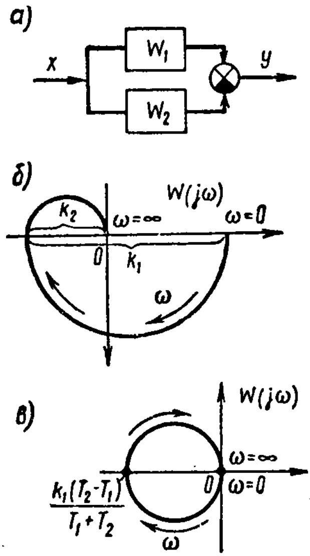


Рис. 5.13

Если постоянные времени T_1 и T_2 мало отличаются, то вектор описывает некоторую плавную кривую *3* (см. рис. 5.12, *б*).

Если же $T_1 = T_2$, то годограф имеет вид полуокружности диаметром $k_1 + k_2$ (кривая *4*).

Пример 5.6. Найдем частотную характеристику согласного параллельного включения двух инерционных звеньев, включаемых с разными знаками (рис. 5.13, *а*),

$$W(j\omega) = \frac{k_1}{1 + j\omega T_1} - \frac{k_2}{1 + j\omega T_2} = \frac{(k_1 - k_2) + j\omega(k_1 T_2 - k_2 T_1)}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}. \tag{5.31}$$

Если $k_1 > k_2$ и $k_1 T_2 < k_2 T_1$, то эта система — неминимально-фазовая и имеет нуль в правой полуплоскости. Годограф комплексного коэффициента усиления для этого случая показан на рис. 5.13, *б*.

Если $k_1 = k_2$, то

$$W(j\omega) = \frac{j\omega(k_1 T_2 - k_2 T_1)}{1 + j\omega(T_1 + T_2) + (j\omega)^2 T_1 T_2}. \tag{5.32}$$

Для этого случая годограф принимает вид полной окружности (рис. 5.13, *в*), имеющей диаметр $k_1 \frac{T_1 - T_2}{T_1 + T_2}$ и при частоте $\omega = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$ проходящей через точку $k_1 \frac{T_2 - T_1}{T_1 + T_2}$.

Пример 5.7. Найдем частотную характеристику согласного параллельного соединения пропорционального звена ($W = 1$) и звена запаздывания [$W_2(j\omega) = e^{-j\omega\tau}$], включаемых с одинаковыми знаками,

$$W(j\omega) = (1 + e^{-j\omega\tau}) = 2e^{-j\frac{\omega\tau}{2}} \cos\frac{\omega\tau}{2}. \qquad (5.33)$$

Годограф для этого соединения показан на рис. 5.14. Как видно из построения, такое соединение представляет собой фильтр, не пропускающий все частоты $\omega = \frac{\pi(2n+1)}{\tau}$, для которых коэффициент усиления равен нулю.

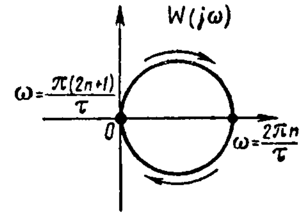


Рис. 5.14

Примерами параллельного соединения более простых звеньев являются форсирующее звено, состоящее из пропорционального и дифференцирующего звеньев, и инерционно-форсирующее звено, которое можно получить, соединяя параллельно инерционное и инерционно-дифференцирующее звенья или инерционное и пропорциональное.

§ 5.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОЙ СХЕМЫ СИСТЕМЫ ПО ЕЕ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ

То обстоятельство, что при параллельном соединении звеньев их переходные функции складываются, дает возможность по переходной функции системы легко найти ее передаточную функцию и соответствующую эквивалентную схему в виде параллельного соединения звеньев. Пусть экспериментально получена переходная функция линейной системы $h(t)$ (см. например $y(t) = h(t)$ на рис. 2.4, *б*). Эту характеристику легко аппроксимировать ломаной

$$h(t) = k_0(t)\,1_0(t) + a_0 t\,1_0(t) + a_1(t - t_1)\,1_0(t - t_1) + \\ + a_2(t - t_2)\,1_0(t - t_2) + \ldots + a_n(t - t_n)\,1_0(t - t_n). \qquad (5.34)$$

Переходя от оригинала к изображению, получаем

$$H(p) = \frac{k_0}{p} + \frac{a_0}{p^2} + \frac{a_1}{p^2} e^{-pt_1} + \frac{a_2}{p^2} e^{-pt_2} + \ldots + \frac{a_n}{p^2} e^{-pt_n}. \qquad (5.35)$$

Отсюда можно найти передаточную функцию системы

$$W(p) = pH(p) = k_0 + \frac{a_0}{p} + \frac{a_1}{p} e^{-pt_1} + \\ + \frac{a_2}{p} e^{-pt_2} + \ldots + \frac{a_n}{p} e^{-pt_n}. \qquad (5.36)$$

Это выражение соответствует параллельному соединению одного пропорционального звена k_0 и цепочки параллельно включенных ветвей, состоящих из последовательно включенных интегрирующих звеньев и звеньев запаздывания на время t_i.

Передаточная функция каждой ветви

$$W_i(p) = \frac{a_i}{p} e^{-pt_i}. \tag{5.37}$$

На рис. 5.15 изображена эквивалентная схема, соответствующая переходной функции $h(t) = y(t)$, приведенной в примере 2.2 (см. рис. 2.4, *б*).

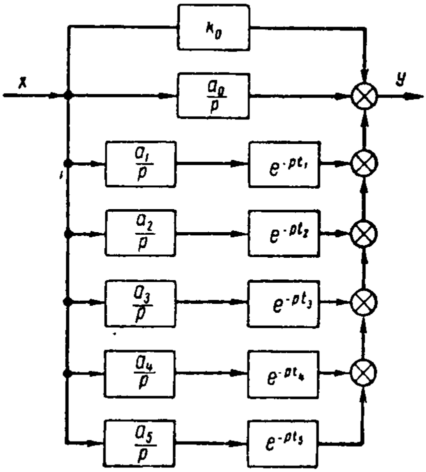


Рис. 5.15

§ 5.6. ПАРАЛЛЕЛЬНОЕ ВСТРЕЧНОЕ СОЕДИНЕНИЕ ЗВЕНЬЕВ

Параллельным встречным соединением двух звеньев называется такое соединение, при котором выходной сигнал первого звена подается на вход второго, а выходной сигнал второго звена с соответствующим знаком суммируется с общим входным сигналом и подается на вход первого звена. Общим выходным сигналом является выход первого звена (см. рис. 5,1, *г* и *д*).

Звено, в котором направление передачи сигнала совпадает с направлением передачи общего сигнала (первое звено), называется *звеном прямой связи*, а звено, в котором направление передачи сигнала противоположно направлению передачи общего сигнала (второе звено), называется *звеном обратной связи.*

Если знак сигнала обратной связи положителен, т. е. если он суммируется с общим сигналом (см. рис. 5.1, *г*), то обратная связь называется *положительной.* Если знак сигнала обратной связи отрицателен, т. е. если он вычитается из общего сигнала (см. рис. 5.1, *д*), то обратная связь называется *отрицательной.*

Параллельное встречное соединение представляет собой такое сочетание последовательного и параллельного соединения, при котором звенья прямой и обратной связи соединены между собой последовательно в виде замкнутого кольца, а внешний сигнал подается параллельно к общей точке первого и второго звена. Уравнения параллельного встречного соединения имеют вид:

1) уравнения входа:

а) для положительной обратной связи

$$x_1 = x + y_2, \tag{5.38}$$

б) для отрицательной обратной связи

$$x_1 = x - y_2 \tag{5.39}$$

Эти уравнения называются *уравнениями замыкания*;

2) уравнение выхода

$$y = y_1 = x_2. \tag{5.40}$$

В теории колебаний обычно рассматривают цепи с положительной обратной связью и пользуются уравнением (5.38).

В теории регулирования и управления большей частью рассматривают цепи с отрицательной обратной связью и пользуются уравнением (5.39). Это уравнение принимается за основу в дальнейшем. Рассматривая совместно уравнения (5.39) и (5.40) и имея в виду, что

$$Y(p) = W(p)\,X(p),\quad Y_1(p) = W_1(p)\,X_1(p) \quad \text{и} \quad Y_2(p) = W_2(p)\,X_2(p),$$

получаем

$$X_1(p) = \frac{Y(p)}{W_1(p)} = X(p) - W_2(p)\,Y(p),$$

откуда

$$Y(p) = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)\,W_2(p)}\,X(p) \tag{5.41}$$

или

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 + W_1(p)\cdot W_2(p)}. \tag{5.42}$$

Для звеньев с дробно-рациональной передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{K_1(p)}{D_1(p)} \quad \text{и} \quad W_2(p) = \frac{K_2(p)}{D_2(p)}$$

уравнение (5.42) может быть записано как

$$W(p) = \frac{K_1(p)\,D_2(p)}{K_1(p)\,K_2(p) + D_1(p)\,D_2(p)}. \tag{5.43}$$

Из рассмотрения этого уравнения можно сделать вывод, что нули $W(p)$ совпадают с нулями $W_1(p)$ и полюсами $W_2(p)$, однако полюсы функции $W(p)$ отличаются от полюсов $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Таким образом, устойчивые звенья при параллельном встречном соединении могут образовать неустойчивую систему. Наоборот, соединение звеньев, среди которых имеются неустойчивые, может оказаться устойчивым. При гармонических сигналах комплексный коэффициент усиления

$$W(j\omega) = \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_1(j\omega)\cdot W_2(j\omega)}. \tag{5.44}$$

Если цепь обратной связи представляет собой пропорциональное звено $[W_2(p) = k_2]$, то обратная связь называется *жесткой, или пропорциональной*.

Если цепь обратной связи представляет собой дифференцирующее звено $\left(W_2 = pT \text{ или } W_2 = \frac{pT}{1+pT}\right)$, то обратная связь называется *гибкой, или дифференцирующей.*

Если цепь обратной связи представляет собой интегрирующее звено $\left(W_2 = \frac{1}{pT}\right)$, то обратная связь называется *интегрирующей.*

Некоторые из типовых звеньев могут быть сведены к встречному параллельному соединению более простых звеньев.

Пример 5.8. Интегрирующее звено, охваченное жесткой обратной связью.

Передаточная функция такого звена

$$W_1 = \frac{k_1}{p}, \ W_2 = k_2.$$

Подставляя W_1 и W_2 в формулу (5.42), получаем

$$W(p) = \frac{k_1}{k_1k_2 + p} = \frac{k}{1+pT},$$

где

$$T = \frac{1}{k_1k_2}, \text{ а } k = \frac{1}{k_2}.$$

Таким образом, встречно-параллельное соединение интегрирующего и пропорционального звеньев образует инерционное звено (см. § 3.3).

Пример 5.9. Пропорциональное звено с интегрирующей обратной связью.

Передаточная функция такого звена

$$W_1 = k_1, \ W_2 = \frac{k_2}{p}.$$

Подставляя в (5.42), получаем

$$W(p) = \frac{k_1p}{k_1k_2 + p} = \frac{kp}{1+pT},$$

где

$$k = \frac{1}{k_2} \text{ и } T = \frac{1}{k_1k_2}.$$

Таким образом, инерционно-дифференцирующее звено (см. § 3.3) может быть получено путем встречно-параллельного соединения пропорционального и интегрирующего звеньев.

Пример 5.10. Инерционно-интегрирующее звено, охваченное жесткой обратной связью.

Передаточная функция этого звена

$$W_1 = \frac{k_1}{p(1+pT_2)}, \ W_1 = k_2.$$

Подставляя в (5.42), получаем

$$W(p) = \frac{k_1}{k_1k_2 + p + p^2T_1} = \frac{k}{1 + 2\zeta Tp + p^2T^2}, \tag{5.44}$$

где

$$k = \frac{1}{k_2} \quad T = \sqrt{\frac{T_1}{k_1k_2}}, \ \zeta = \frac{1}{2\sqrt{k_1k_2T_1}}.$$

Таким образом, колебательное звено (§ 3.4) может быть получено путем охвата жесткой обратной связью инерционно-интегрирующего звена.

Пример 5.11. Усилитель с высоким коэффициентом усиления, охваченный обратной связью.

Если в выражении (5.42) принять $W_1(p) = k_1 W_0(p)$ и устремить $k_1 \to \infty$, то

$$W(p) = \frac{1}{W_2(p)}. \tag{5.45}$$

Таким образом, при очень высоком коэффициенте усиления звена прямой связи передаточная функция встречно-параллельного соединения не зависит от частотной характеристики цепи прямой связи и представляет собой инверсную передаточную функцию звена обратной связи. Так, например, включая в цепь обратной связи интегрирующее звено, можно получить систему, эквивалентную дифференцирующему звену, или, включая в цепь обратной связи инерционное звено, можно получить систему, аналогичную форсирующему звену.

На основании рассмотренных в настоящей главе примеров, можно сделать вывод, что все рассмотренные ранее в гл. III типовые звенья могут быть сведены к различным соединениям двух простейших элементарных звеньев: пропорционального и интегрирующего.

Схемы замещения различных типовых звеньев приведены в табл. 5.1.

§ 5.7. МОДЕЛИ ТИПОВЫХ ЛИНЕЙНЫХ ЗВЕНЬЕВ

При исследовании различных процессов в системах автоматического управления широкое распространение получили модели типовых звеньев, из которых набираются более сложные структуры.

Основой моделей типовых звеньев являются решающие усилители постоянного тока, передаточная функция которых соответствует пропорциональному звену с коэффициентом усиления много больше единицы (он обычно достигается тысяч и десятков тысяч).

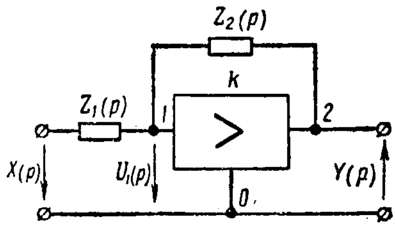
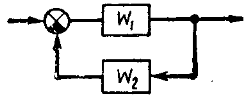
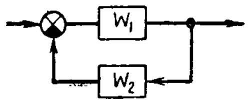
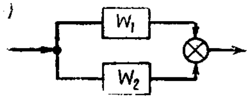
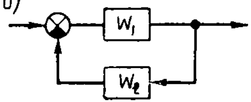


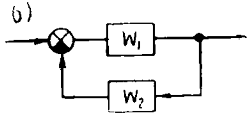
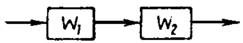
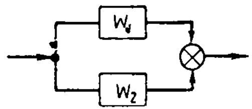
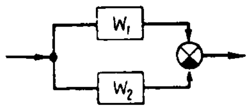
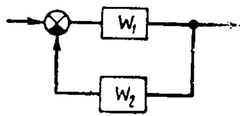
Рис. 5.16

Принципиальная схема модели звена, выполненной с помощью решающего усилителя, показана на рис. 5.16. Усилитель предполагается идеальным: его входное сопротивление между зажимами *1—0* бесконечно велико, а выходное напряжение $Y(p) = kU_1(p)$ не зависит от нагрузки. Последнее означает, что внутреннее сопротивление усилителя между зажимами *2—0* принимается равным нулю.

Таблица 5.1

Типовое звено		Схема замещения	W_1	W_2	Примечание
название	передаточная функция				
Пропорциональное	k				
Интегрирующее	$\frac{k}{p}$				
Дифференцирующее	kp		$W_1 \to \infty$	$W_2 = \frac{1}{kp}$	
Инерционное	$\frac{k}{1+pT}$		$W_1 = \frac{k_1}{p}$	$W_2 = k_2$	$k = \frac{1}{k_2}$ $T = \frac{1}{k_1 k_2}$
Форсирующее	$k(1+pT)$		$W_1 = k_1$	$W_2 = k_2 p$	$k = k_1$ $T = \frac{k_2}{k_1}$
		б) 	$W_1 \to \infty$	$W_2 = \frac{k_2}{(1+pT_2)}$	$k = \frac{1}{k_2}$ $T = T_2$
Инерционно-дифференцирующее	$\frac{kp}{1+pT}$	а) 	$W_1 = k_1 p$	$W_2 = \frac{1}{1+pT_2}$	$k = k_1$ $T = T_2$

Продолжение табл. 5.1

Типовое звено: название	Типовое звено: передаточная функция	Схема замечания	W_1	W_2	Примечание
Инерционно-интегрирующее	$\dfrac{k}{p(1+pT)}$	б) 	$W_1 = k_1$	$W_2 = \dfrac{k_2}{p}$	$k = \dfrac{1}{k_2}$ $T = \dfrac{1}{k_1 k_2}$
			$W_1 = \dfrac{k_1}{p}$	$W_2 = \dfrac{k_2 p}{1+pT_2}$	$k = k_1 k_2$ $T = T_2$
Упругое дифференцирующее	$\dfrac{k(1+pT_0)}{(1+pT)}$		$W_1 = k_1$	$W_2 = \dfrac{k_2}{1+pT_2}$	$k = k_1$ $T = T_2$ $T_0 = \dfrac{k_2}{k_1} + T_2$
Упругое интегрирующее	$\dfrac{k(1+pT_0)}{(1+pT)}$		$W_1 = k_1$	$W_2 = \dfrac{k_2 p}{1+pT_2}$	$k = k_1$ $T = T_2$ $T_0 = T_2 - \dfrac{k_2}{k_1}$
Колебательное	$\dfrac{k}{1+2\zeta Tp+(pT)^2}$		$W_1 = \dfrac{k_1}{p(1+pT_1)}$	$W_2 = k_2$	$k = \dfrac{1}{k_2}$ $T = \sqrt{\dfrac{T_1}{k_1 k_2}}$ $\zeta = \dfrac{1}{2\sqrt{k_1 k_2 T_1}}$

Применяя принцип наложения, можно записать

$$U_1(p) = X(p)\frac{Z_2(p)}{Z_1(p)+Z_2(p)} - Y(p)\frac{Z_1(p)}{Z_1(p)+Z_2(p)}. \tag{5.46}$$

Для усилителя

$$Y(p) = kU_1(p). \tag{5.47}$$

Решая эти уравнения относительно $Y(p)$, получаем

$$Y(p) = \frac{kZ_2(p)}{(1+k)Z_1(p)+Z_2(p)}X(p), \tag{5.48}$$

откуда передаточная функция

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{kZ_2(p)}{(1+k)Z_1(p)+Z_2(p)}. \tag{5.49}$$

Если $k \gg 1$, что имеет место в решающих усилителях, то уравнение (5.48) можно упростить, полагая $k \to \infty$. Тогда

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}. \tag{5.50}$$

На основании полученного уравнения, путем выбора различных значений $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ могут быть получены модели различных звеньев.

Пример 5.12. Применяя в качестве сопротивлений $Z_1(p)$ и $Z_2(p)$ активные сопротивления r_1 и r_2, получим пропорциональное звено. Выбирая $Z_1(p) = r_1$, а $Z_2(p) = \frac{1}{pC}$, можно получить интегрирующее звено с передаточной функцией $W_1 = \frac{1}{pT}$, где $T = r_1C$. Включая в качестве сопротивления $Z_2(p)$ параллельное соединение емкости C и сопротивления r_2, получим инерционное звено с передаточной функцией

$$W_2(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_2}+pC\right)r_1} = \frac{\frac{r_2}{r_1}}{1+pCr_2}. \tag{5.51}$$

Для получения колебательного звена можно в качестве $Z_2(p)$ включать параллельное соединение индуктивности L_2, сопротивления r_2 и емкости C, а в качестве $Z_1(p)$ — индуктивность L_1. Тогда

$$W(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{r_2}+pC+\frac{1}{pL_2}\right)pL_1} = \frac{\frac{L_2}{L_1}}{1+p\frac{L_2}{L_1}+p^2CL_2}. \tag{5.52}$$

Таким образом, можно получить модели всех типовых звеньев линейных систем автоматического управления. Соединяя эти модели, можно исследовать систему автоматического управления любой сложности.

Пример 5.13. С помощью решающих усилителей могут быть построены модели не только типовых, но и особых звеньев. Так, например, если в качестве сопротивления $Z_2(p)$ включить модель длинной линии, представляющую собой цепочечную схему, состоящую из сопротивлений и емкостей, то при достаточно большом количестве элементов цепочечной схемы ее входное сопротивление в операторной форме

$$Z_2(p) \cong \sqrt{\frac{r_0}{pC_0}},$$

где r_0 и C_0 — сопротивление и емкость элементов.

Если при этом $Z_1 = r_1$, то передаточная функция модели

$$W_1(p) = \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)} = \sqrt{\frac{r_0}{pC_0 r_1^2}}. \tag{5.53}$$

Эта модель соответствует полуинтегрирующему звену. Если, например нужно моделировать радиационный нагрев массивного тела, на поверхности которого связь между плотностью теплового потока q и температурой ϑ

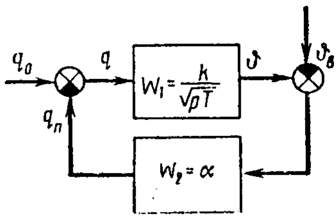


Рис. 5.17

описывается полуинтегрирующим звеном, а плотность теплового потока представляет собой разность плотности падающего потока и тепловых потерь с единицы поверхности [см. уравнение (4.36,*а*)]

$$q_п = \alpha(\vartheta - \vartheta_в), \tag{5.54}$$

то модель объекта может быть построена из двух звеньев: пропорционального — с коэффициентом усиления α и полуинтегрирующего — с передаточной функцией, выраженной уравнением (5.53). Плотность падающего теплового потока q_0 и температура окружающего воздуха $\vartheta_в$ задаются в соответствующем масштабе входными сигналами, подаваемыми на решающие усилители.

Структурная схема такой модели показана на рис. 5.17.

Глава VI

УРАВНЕНИЯ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 6.1. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ПРОСТЕЙШИХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

В гл. I были рассмотрены примеры функциональных схем простейших систем автоматического регулирования. Для этих систем могут быть составлены *структурные схемы,* соответствующие уравнениям, описывающим процессы в каждом из функциональных элементов.

Поскольку для линейных систем каждый функциональный элемент может быть охарактеризован его передаточной функцией, то на структурной схеме ему может соответствовать одно или несколько линейных звеньев, включенных параллельно или последовательно в зависимости от того, в каком виде представлено выражение передаточной функции звена.

Если передаточная функция элемента представлена в виде выражения (2.21), то его можно заменить последовательным соединением инерционных, колебательных и форсирующих звеньев в зависимости от значений нулей и полюсов числителя и знаменателя передаточной функции.

Если передаточная функция элемента представлена в виде выражения (2.22), то его можно заменить параллельным соединением инерционных и колебательных звеньев, причем число последних равно числу пар сопряженных комплексных полюсов.

Зная передаточные функции каждого из звеньев структурной схемы, по известным правилам соединения звеньев легко найти зависимость между управляемой величиной и всеми внешними воздействиями системы регулирования.

Рассмотрим структурные схемы и передаточные функции для примеров систем регулирования, рассмотренных в § 1.6.

Поплавковый регулятор уровня. Если принять, что в определенном диапазоне работы запорной иглы регулятора уровня скорость притока бензина Q в карбюратор (см. рис. 1.23, *а*) пропорциональна перемещению иглы u, которое, в свою очередь, пропорционально перемещению поплавка ε по отношению к заданному уровню H_0, то регулятор уровня можно представить в виде соединения интегрирующего и пропорционального звеньев, соответствующих объекту (W_1) и исполнительному устройству (W_2) на функциональной схеме (см. рис. 1.23, *б*). Передаточная функция для поплавковой камеры как гидравлического резервуара определена в примере 2.3. Внешнее возмущение G вычитается из скорости притока бензина в карбюратор.

Структурная схема для рассматриваемой системы показана на рис. 6.1, где

$$W_1 = \frac{k_1}{p} \text{ и } W_2 = k_2.$$

Изменение расхода бензина в поплавковой камере $f = \Delta G$ и изменение уровня бензина $y = \Delta H$ выражается на основании формулы (5.42) зависимостью

$$Y(p) = -\frac{W_1}{1 + W_1 W_2} F(p). \quad (6.1)$$

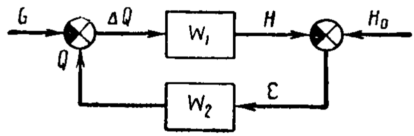


Рис. 6.1

Передаточная функция системы относительно возмущения

$$W(p) = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{-k_1}{k_1 k_2 + p}. \quad (6.1,a)$$

Система автоматической стабилизации напряжения на зажимах генератора постоянного тока (см. рис. 1.24). В системе управления генератором постоянного тока колебания тока нагрузки генератора $i_н$, скоростей вращения валов генераторов $\Delta\omega_1$ и $\Delta\omega_2$ и напряжения питания магнитного усилителя ΔU_m являются внешними возмущениями, влияние которых по существу дела и вызывает необходимость создания регулятора.

Для выяснения влияния различных возмущений на работу системы полезно построить ее структурную схему с указанием места приложения возмущений. Эта структурная схема может быть построена на основании рассмотрения передаточных функций трех основных элементов функциональной схемы (см. рис. 1.24, *б*): генератора (рис. 6.2, *а*), измерительного устройства (рис. 6.2, *б*) и усилителя (рис. 6.2, *в*).

Уравнение (2.44) связывает напряжение на нагрузке генератора и внешние управляющие и возмущающие воздействия. Записав его в виде

$$Y = W_1(X + b_1 F_1) + b_2 F_2 - b_3 F_3, \quad (6.2)$$

где

$$W_1 = \frac{k_1}{1 + pT_1}, \quad (6.3)$$

можно на структурной схеме изобразить управляемый объект и воздействия на него так, как это показано на рис. 6.2, *г*.

Здесь изображения приращений $\Delta i_в$, $\Delta u_н$, $\Delta\omega_1$, $\Delta\omega_2$ и $\Delta i_н$ обозначены соответственно через X, Y, F_1, F_2 и F_3. Введение внешних воздействий, в соответствии с уравнением (6.2), производится в узлах *1* и *2*.

Измерительное устройство и цепь сравнения управляемой величины с заданной уставкой u_0/k_2 на структурной схеме

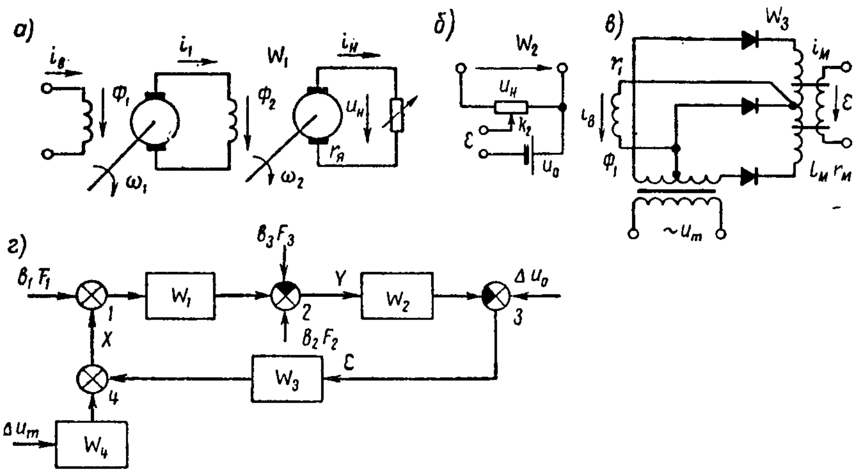


Рис. 6.2

показаны звеном W_2 и суммирующим узлом *3*. Так как уравнение цепи сравнения (см. рис. 6.2, *б*)

$$\varepsilon = u_0 - k_2 u_н,$$

то передаточная функция

$$W_2 = -\frac{\Delta\varepsilon}{\Delta u_н} = k_2. \tag{6.4}$$

Магнитный усилитель (см. рис. 6.2, *в*) представляет собой систему переменного тока с модуляцией и демодуляцией. Полное рассмотрение преобразования сигнала магнитным усилителем достаточно сложно. Если частотный спектр входного сигнала тока $i_м$ магнитного усилителя лежит ниже частоты питания, то при рассмотрении переходного процесса определяющими будут постоянные времени обмотки возбуждения магнитного усилителя и обмотки возбуждения генератора, служащей нагрузкой магнитного усилителя.

В этом случае справедливы следующие приближенные уравнения:

$$\varepsilon = r_м i_м + L_м \frac{di_м}{dt}; \tag{6.5}$$

$$e_м = r_1 i_в + w_1 \frac{d\Phi_1}{dt}. \tag{6.6}$$

Здесь $L_м$ — эквивалентная индуктивность обмотки возбуждения магнитного усилителя; $r_м$ и $i_м$ — сопротивление и ток цепи возбуждения магнитного усилителя; $e_м$ и ε — соответственно напряжения холостого хода выходной цепи магнитного усилителя и цепи сравнения.

Если

$$e_м = e_м(u_m,\ i_м), \tag{6.7}$$

где u_m — напряжение питания магнитного усилителя (амплитуда), то для приращений переменных в линеаризованных областях можно записать:

$$\Delta e_м = \left(\frac{\partial e_м}{\partial u_m}\right)_0 \Delta u_m + \left(\frac{\partial e_м}{\partial i_м}\right)_0 \Delta i_м; \tag{6.8}$$

$$\Delta e_м = r_1 \Delta i_в + w_1 \left(\frac{\partial \phi_1}{\partial i_в}\right)_0 \frac{d\Delta i_в}{dt}. \tag{6.9}$$

Переходя от оригиналов к изображениям, из (6.9) и (6.5) получаем:

$$\Delta I_в(p) = \frac{\Delta E_м(p)}{r_1 + w_1\left(\frac{d\phi_1}{\partial i_в}\right)_0 p}; \tag{6.10}$$

$$\Delta I_м(p) = \frac{\Delta E(p)}{r_м + L_м p}. \tag{6.11}$$

Решая совместно уравнения (6.8), (6.10) и (6.11), получаем для изображений приращений

$$\Delta I_в(p) = \left(\frac{\partial e_м}{\partial u_m}\right)_0 \frac{\Delta U_m(p)}{r_1 + w_1\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial i_в}\right) p} +$$

$$+ \left(\frac{\partial e_м}{\partial i_м}\right)_0 \frac{\Delta E(p)}{(r_м + L_м p)\left[r_1 + w_1\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial i_в}\right)_0 p\right]}$$

или

$$X = W_3 \Delta E + W_4 \Delta U_m, \tag{6.12}$$

где

$$\left.\begin{aligned} W_3 &= \frac{k_3}{(1+pT_2)(1+pT_3)}; \\ W_4 &= \frac{k_4}{1+pT_2}. \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

Здесь

$$k_3 = \frac{1}{r_1 r_м}\left(\frac{\partial e_м}{\partial i_м}\right)_0, \quad k_4 = \frac{1}{r_1}\left(\frac{\partial e_м}{\partial u_m}\right)_0;$$

$$T_2 = \frac{w_1}{r_1}\left(\frac{\partial \phi_1}{\partial i_в}\right)_0 \quad и \quad T_3 = \frac{L_м}{r_м}.$$

Дополнительная помеха, обусловленная колебаниями напряжения сети Δu_m, показана на структурной схеме, изображенной на рис. 6.2, *г*, в виде воздействия в суммирующем узле *4*.

Рассматривая изменение падения напряжения в цепи якоря генератора под влиянием изменения тока нагрузки генератора $r_я \Delta i_н$ как внешнее воздействие $b_3 f_3$, а изменение напряжения на его зажимах $\Delta u_н = y$ — как регулируемую величину согласно (5.42), можно записать

$$Y(p) = \frac{-1}{1 + W_р} b_3 F_3(p), \qquad (6.14)$$

где $W_р = W_1 W_2 W_3$ — передаточная функция разомкнутой системы.

По формулам (6.3), (6.4) и (6.13)

$$W_р = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}, \qquad (6.15)$$

где $k = k_1 k_2 k_3$.

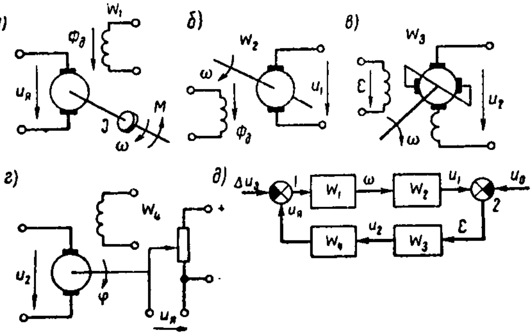


Рис. 6.3

Подставляя (6.15) в (6.14), получаем

$$Y(p) = -\frac{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}{k + (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)} b_3 F_3(p). \qquad (6.16)$$

Передаточная функция замкнутой системы относительно внешнего возмущения, которым является падение напряжения в цепи якоря, из (6.14) определяется как

$$W_в = -\frac{1}{1 + W_р} = \frac{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}{k + (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}. \qquad (6.17)$$

Аналогично можно найти передаточные функции относительно любого другого внешнего возмущения и изменения уставки.

Регулятор скорости электрического двигателя постоянного тока. В системе регулирования скорости электрического двигателя, показанной на рис. 1.25, объектом управления служит двигатель постоянного тока с инерционной нагрузкой (рис. 6.3, *а*), уравнения которого при принятых выше допущениях соответствуют инерционному звену (см. пример 2.6).

При произвольно изменяющемся моменте на валу M и постоянстве потока возбуждения $ф_д$ система уравнений (1.5) приобретает вид

$$\omega + \frac{r_я J}{a_1 c_1 ф_д^2}\frac{d\omega}{dt} = \frac{u_я}{c_1 ф_д} - \frac{r_я M}{a_1 c_1 ф_д^2}, \tag{6.18}$$

где $M = M_{тр} + M_н$ и, следовательно, действие момента на валу аналогично уменьшению напряжения якоря на величину эквивалентного напряжения

$$\Delta u_э = \frac{r_я}{a_1 ф_д} M. \tag{6.19}$$

Рассматриваемому двигателю соответствует звено с передаточной функцией

$$W_1 = \frac{k_1}{1 + pT_1}. \tag{6.20}$$

Здесь

$$k_1 = \frac{1}{c_1 ф_д}, \quad \text{а} \quad T_1 = \frac{r_я J}{a_1 c_1 ф_д^2}.$$

Вторым звеном с передаточной функцией

$$W_2 = \frac{U_1}{\Omega} = k_2 \tag{6.21}$$

будет тахометрический генератор (рис. 6.3, *б*).

Третье звено — это электромашинный усилитель (рис. 6.3, *в*), передаточная функция которого такая же, как и для каскадного соединения двух различных генераторов постоянного тока, т. е.

$$W_3 = \frac{U_2(p)}{\mathrm{E}(p)} = \frac{k_3}{(1 + pT_2)(1 + pT_3)}, \tag{6.22}$$

где $\mathrm{E} = U_0 - U_1$.

Последним звеном является двигатель делителя напряжения (рис. 6.3, *г*), представляющий собой исполнительное устройство. Напряжение на выходе этого звена пропорционально углу поворота вала двигателя, управляемого со стороны якоря. Как показано в примерах 2.6 и 5.1, в этом случае получается инерционно-интегрирующее звено и его передаточная функция

$$W_4 = \frac{k_4}{p(1 + pT_4)}. \tag{6.23}$$

Структурная схема системы регулирования показана соединением звеньев W_1, W_2, W_3 и W_4 на рис. 6.3, *д*.

Учет изменения скорости вращения вала электромашинного усилителя или напряжения питания обмоток возбуждения двигателей соответствует появлению дополнительных внешних воздействий. Расчет этих воздействий производится так же, как и в предыдущем примере.

Здесь в качестве внешнего воздействия рассмотрим изменение момента на валу двигателя и соответствующее ему эквивалентное изменение напряжения на якоре, определяемое по формуле (6.19)

$$f = \Delta u_э = \frac{r_я}{a_1 ф_д} M.$$

Тогда изображение изменения регулируемой величины $y = \omega$ согласно структурной схеме (рис. 6.3, *д*)

$$Y(p) = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4} F(p) =$$

$$= \frac{k_1 (1 + pT_2)(1 + pT_3)(1 + pT_4) pF(p)}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)(1 + pT_4) p + k} = W_з F(p). \quad (6.24)$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$W_з = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2 W_3 W_4}, \quad (6.25)$$

где W_1, W_2, W_3 и W_4 выражены с помощью формул (6.20) ÷ ÷ (6.23), произведение $k_1\ k_2\ k_3\ k_4$ обозначено через k.

Для системы регулирования скорости, показанной на рис. 1.26, структурная схема несколько сложнее из-за наличия контура коррекции с добавочным сопротивлением $r_д$.

В этом случае уравнения (1.5) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} u_2 &= i_я (r_я + r_д) + c_1 \omega ф_д; \\ a_1 i_я ф_д &= J \frac{d\omega}{dt} + M. \end{aligned}\right\} \quad (6.26)$$

Отсюда получаем

$$\omega + T_1 \frac{d\omega}{dt} = k_1 (u_2 - \Delta u_э) \quad (6.27)$$

и

$$i_я r_д = \frac{\alpha T_1}{k_1} \frac{d\omega}{dt} + \alpha \Delta u_э, \quad (6.28)$$

где

$$T_1 = \frac{(r_я + r_д) J}{a_1 c_1 ф_д^2}; \quad k_1 = \frac{1}{c_1 ф_д};$$

$$\Delta u_э = \frac{r_я + r_д}{a_1 ф_д} M; \quad \alpha = \frac{r_д}{r_я + r_д}.$$

В узле сравнения из напряжения уставки u_0 теперь вычитается два напряжения: $u_1 = k_2 \omega$ и $i_я r_д$, причем напряжение $i_я r_д$ согласно (6.28) слагается из двух составляющих, одна из которых пропорциональна производной регулируемой величины $\frac{d\omega}{dt}$, а вторая — внешнему воздействию $\Delta u_э$.

Структурная схема рассматриваемой системы регулирования согласно уравнениям (6.27), (6.28), (6.21) и (6.22) изображена на рис. 6.4. Здесь

$$W_1 = \frac{k_1}{1 + pT_1}; \ W_2 = k_2;$$

$$W_3 = \frac{k_3}{(1 + pT_2)(1 + pT_3)}; \ W_4 = \frac{\alpha T_1}{k_1} p.$$

Если в качестве управляющего воздействия x принять напряжение уставки u_0, в качестве внешнего возмущения f — напряжение, эквивалентное изменению момента на валу двигателя $\Delta u_э$, а в качестве регулируемой величины y — скорость вращения вала ω, то передаточные функции относительно

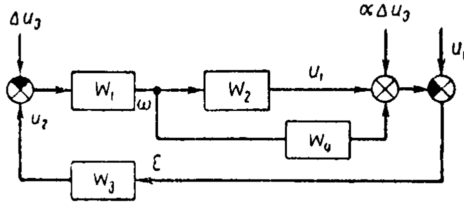


Рис. 6.4

управляющего воздействия и возмущения по структурной схеме 6.4 могут быть записаны в следующем виде:

$$W_у = \frac{Y}{X} = \frac{W_3 W_1}{1 + W_3 W_1 (W_2 + W_4)}; \tag{6.29}$$

$$W_в = \frac{Y}{F} = \frac{W_1(-1 + \alpha W_3)}{1 + W_1 W_3 (W_2 + W_4)}. \tag{6.30}$$

Если в системе регулирования применяется безынерционный усилитель, то можно подобрать параметры таким образом, чтобы $\alpha W_3 = 1$. Тогда передаточная функция относительно внешнего возмущения $W_в$ равна нулю, и система нечувствительна к внешнему возмущению или, иными словами, инвариантна относительно этого возмущения.

С л е д я щ а я с и с т е м а. Следящая система, показанная на рис. 1.27, *а*, состоит из элементов, аналогичных рассмотренным в приведенных выше примерах. По функциональной схеме (см. рис. 1.27, *б*), зная уравнения каждого из участков схемы, можно построить структурную схему (рис. 6.5). Здесь

$$W_1 = \frac{k_1}{1 + pT_1}. \tag{6.31}$$

При большом активном сопротивлении в цепи якоря r в левой части уравнения (6.27) можно пренебречь первым членом и тогда уравнение (6.31) вырождается в уравнение

$$W_1 = \frac{k_1}{p}, \tag{6.32}$$

которое соответствует интегрирующему звену.

Напряжение делителя u_1 пропорционально интегралу скорости вращения вала двигателя ω и, следовательно, передаточная функция

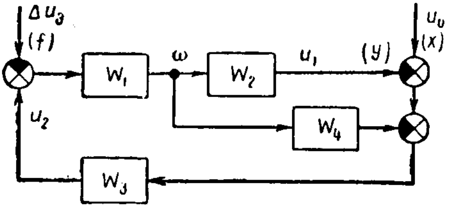


Рис. 6.5

$$W_2 = \frac{k_2}{p}. \tag{6.33}$$

Усилитель следящей системы в зависимости от его схемы может приближенно описываться уравнениями пропорционального звена (электронный усилитель), инерционного звена (магнитный усилитель) или двух инерционных звеньев (электромашинный усилитель). Таким образом, в общем случае можно принять

$$W_3 = \frac{k_3}{(1 + pT_2)(1 + pT_3)}. \tag{6.34}$$

Для корректирующей цепи тахометра передаточная функция соответствует пропорциональному звену, т. е.

$$W_4 = k_4. \tag{6.35}$$

Принимая в качестве возмущающего воздействия $f = \Delta u_э$ а в качестве управляющего воздействия — изменение уставки $x = \Delta u_0$ и рассматривая положение отрабатывающей оси, характеризуемое напряжением u_1, в качестве регулируемой величины y по структурной схеме можно определить передаточные функции относительно x и f:

$$W_y = \frac{Y}{X} = \frac{W_2 \dfrac{W_1 W_3}{1 + W_1 W_3 W_4}}{1 + W_2 \dfrac{W_1 W_3}{1 + W_1 W_3 W_4}} = \frac{W_1 W_2 W_3}{1 + W_1 W_3 (W_4 + W_2)}; \tag{6.36}$$

$$W_в = \frac{Y}{F} = -\frac{W_1 W_2}{1 + W_1 W_3 (W_2 + W_4)}. \tag{6.37}$$

Подставляя в (6.36) и (6.37) значения W_1, W_2, W_3 и W_4, из выражений (6.31) и (6.33)÷(6.35) получаем:

$$W_y = \frac{k_1 k_2 k_3}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k_1 k_3 (k_2 + k_4 p)}; \tag{6.38}$$

$$W_в = -\frac{k_1 k_2 (1 + pT_2)(1 + pT_3)}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k_1 k_3 (k_2 + k_4 p)}. \tag{6.39}$$

Знаменатели выражений (6.38) и (6.39) совпадают. Приравнивая нулю знаменатель передаточной функции относительно любого внешнего воздействия, получаем характеристическое уравнение замкнутой системы. В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$A(p) = p(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k_1k_3(k_2 + k_4p). \quad (6.40)$$

Все рассмотренные примеры могут быть сведены к одной общей структурной схеме, показанной на рис. 6.6. Здесь f — внешнее воздействие, или помеха, y — регулируемая величина, x — уставка регулируемой величины, ε — рассогласование, W_a и W_b — передаточные функции соответствующих участков замкнутой системы между местами приложения помехи и уставки.

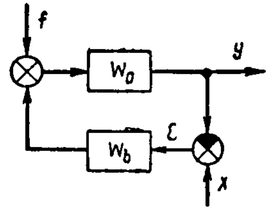


Рис. 6.6

Для следящих систем и программных регуляторов x представляет собой некоторую функцию времени.

Для расчета поведения системы при различных внешних воздействиях определяются передаточные функции, выражающие зависимость регулируемой величины и рассогласования ε от помехи f или от уставки x:

$$W_{\text{в}} = W_{yf} = \frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{W_a}{1 + W_aW_b} = \frac{W_a}{1 + W_{\text{р}}}, \quad (6.41)$$

$$W_{\text{у}} = W_{yx} = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_aW_b}{1 + W_aW_b} = \frac{W_{\text{р}}}{1 + W_{\text{р}}}, \quad (6.42)$$

$$W_{\varepsilon} = W_{\varepsilon x} = \frac{\mathrm{E}(p)}{X(p)} = \frac{1}{1 + W_aW_b} = \frac{1}{1 + W_{\text{р}}}. \quad (6.43)$$

Здесь $W_{\text{р}} = W_aW_b$ представляет собой передаточную функцию разомкнутой системы.

Знaя передаточные функции, можно по известным внешним воздействиям рассчитать изменения y или ε.

§ 6.2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СТРУКТУРНЫХ СХЕМ

Различные структурные схемы могут обладать одинаковыми передаточными функциями, т. е. быть динамически эквивалентными. Поэтому очень важно установить общие правила, с помощью которых одна схема может быть преобразована в другую с сохранением динамических характеристик системы. Теория преобразования структурных схем была разработана Б. Н. Петровым [Л. 15].

Рассмотрим три элемента структурной схемы: узел разветвления, суммирующий узел и звено, преобразующее сигнал.

Для различных схем соединения введем понятие *направления ветвления*, указывающее направление разделения сигнала на составляющие или направление его *передачи по нескольким ветвям* (разветвления). Направление ветвления может или соответствовать, или быть противоположным направлению передачи сигнала. В суммирующем узле направление ветвления противоположно направлению передачи сигнала, а в узле разветвления — совпадает с направлением передачи сигнала. На рис. 6.7

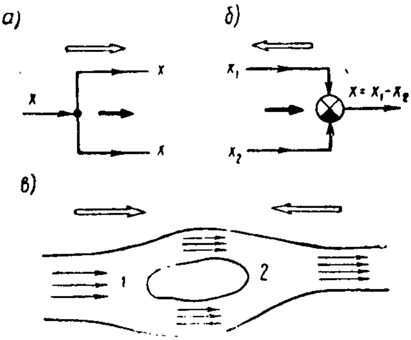


Рис. 6.7

показаны узел разветвления *(а)* и суммирующий узел *(б)*, двумя различными стрелками показаны направление передачи сигнала (зачерненная стрелка) и направление ветвления (незачерненная стрелка).

Направление ветвления является понятием, применимым как при передаче сигналов, так и при передаче вещества. Наглядным примером рассмотрения направления ветвления при передаче вещества может служить обтекание потоком жидкости тела с двух сторон (рис. 6.7, *в*). Здесь направление ветвления выше обтекаемого тела (область *1*) направлено по течению жидкости, а ниже обтекаемого тела (область *2*) — против течения жидкости.

Рассмотрим два вида преобразования схем:

а) перемещение суммирующего узла через узел разветвления;

б) перемещение звена через узел.

Правила преобразования схем при каждом из этих видов перемещения существенно зависят от того, совпадает ли направление перемещения с направлением ветвления или они противоположны.

Перемещение суммирующего узла через узел разветвления. Пусть направление перемещения суммирующего узла совпадает с направлением ветвления (рис. 6.8, *а*). Тогда перемещение суммирующего узла за узел разветвления изменит сигнал в узле разветвления и, следовательно, изменит сигнал во всех остальных ветвях, отходящих от узла. Для того чтобы скомпенсировать это изменение, необходимо в отходящей ветви добавить такой же суммирующий узел, как и перемещаемый узел (рис. 6.8, *б*).

Условие эквивалентности схем, показанных на рис. *(а)* и *(б)*, определяется уравнением

$$x_3 = x_1 + x_2, \tag{6.44}$$

справедливым для обеих схем.

Таким образом, можно сформулировать *первое правило преобразования. При перемещении суммирующего узла через узел*

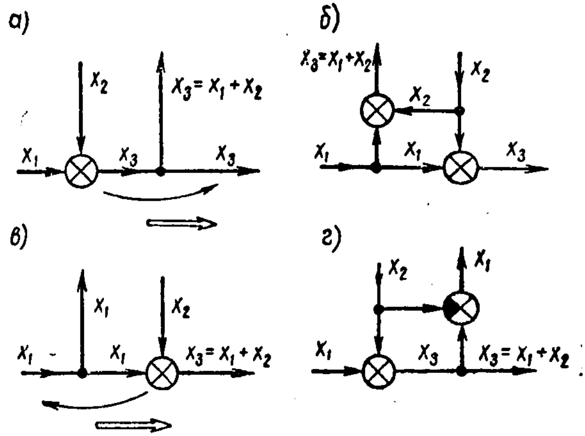


Рис. 6.8

разветвления по направлению ветвления необходимо в отходящих от разветвления ветвях добавить такие же, как и перемещаемый узел, суммирующие узлы (см. рис. 6.8, *а* и *б*).

Если направление перемещения суммирующего узла противоположно направлению ветвления (рис. 6.8, *в*), то условия преобразования несколько изменяются. В этом случае для компенсации влияния переноса узла необходимо не добавлять к ответвляемым величинам слагаемые в узле, а вычитать их (рис. 6.8, *г*).

При этом для эквивалентности схем *(в)* и *(г)* и сохранения значений величин, подводимых к схеме и отводимых от нее, необходимо, чтобы от величины, отводимой от узла разветвления, отнималась такая же величина (x_2), как и та, которая была добавлена в перенесенном суммирующем узле.

Второе правило преобразования (для этого случая) формулируется следующим образом. *При перемещении суммирующего узла через узел разветвления против направления ветвления необходимо в отходящих от разветвления ветвях добавить сумми-*

рующие узлы, отличающиеся от перемещаемого знаками прибавляемых величин (см. рис. 6.8, *в* и *г*).

Перемещение звена через узел. При перемещении звена через узел также определяющее значение имеет направление ветвления. Рассмотрим перемещение звена по направлению ветвления. Если перемещение звена W_1 производится через узел разветвления величины y_1 (рис. 6.9, *а*), то

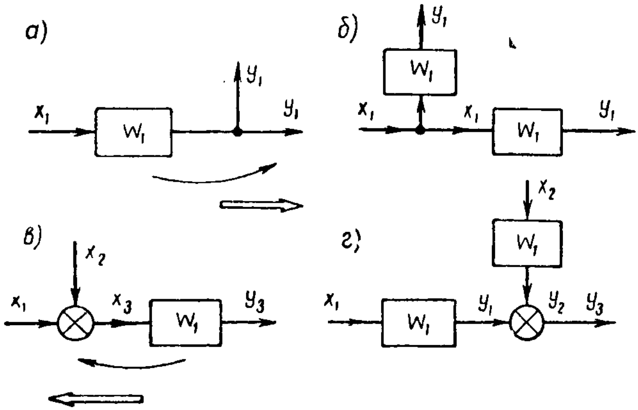


Рис. 6.9

условием сохранения значений величин, отводимых от схемы, является выполнение условия

$$Y_1 = W_1 X_1. \tag{6.45}$$

Очевидно, что для соблюдения этого условия необходимо во всех отходящих от узла ветвях добавить звено с передаточной функцией W_1. Из рассмотрения схем *(а)* и *(б)*, показанных на рис. 6.9, видно, что они эквивалентны по отношению к внешним соединениям.

Если перемещение звена производится через суммирующий узел по направлению ветвления, то можно прийти к аналогичным выводам. В этом случае уравнение

$$Y_3 = (X_1 + X_2) W_1 = Y_2 + Y_3 \tag{6.46}$$

выполняется, если во всех ветвях, отходящих от узла, добавляются звенья с передаточной функцией W_1. Условие эквивалентности таких схем иллюстрируется схемами *(в)* и *(г)*, показанными на рис. 6.9.

Третье правило преобразования формулируется так. *При перемещении звена через узел по направлению ветвления необходимо в подсоединенные к узлу ветви добавить звенья с передаточной функцией перемещаемого звена* (см. рис. 6.9).

Если направление перемещения звена противоположно направлению ветвления, то условия преобразования изменяются. В этом случае для компенсации влияния звена, перенесенного в общую ветвь (на сигналы в отходящих от узла ветвях), необходимо в эти ветви включить звенья с обратными передаточными функциями.

Условие эквивалентности вытекает из уравнения (6.45) для перемещения звена через узел разветвления (рис. 6.10, *а* и *б*) и из уравнения (6.46) для перемещения звена через суммирующий узел (рис. 6.10, *в* и *г*).

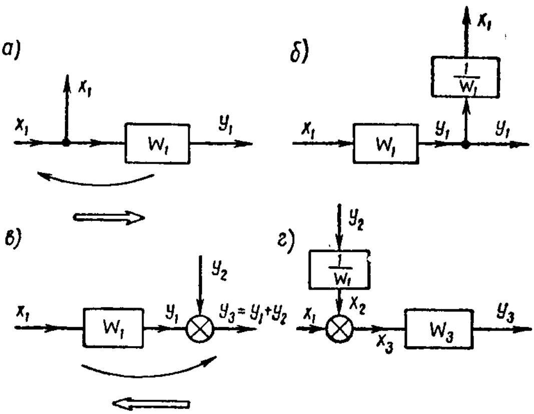


Рис. 6.10

Четвертое правило преобразования может быть сформулировано так. *При перемещении звена через узел против направления ветвления необходимо в подсоединенные к узлу ветви добавить звенья с передаточной функцией, обратной передаточной функции перемещаемого звена* (см. рис. 16.10).

Применение четырех приведенных правил дает возможность производить самые различные преобразования структурных схем. При этом следует иметь в виду, что перемещение звена или узла из одной ветви в другую может производиться только при согласных направлениях передачи сигнала в этих ветвях.

Рассмотрим некоторые примеры применения указанных правил.

Пример 6.1. Найти соотношения между передаточными функциями схем, показанных на рис. 6.11 *а* и *б*, при которых эти схемы эквивалентны. Преобразуем схему (*б*), переместив суммирующий узел *1* по направлению ветвления через узел разветвления *2*. При этом, по первому правилу преобразования структурных схем, в двух ветвях, отходящих от узла *2*, возникнут суммирующие узлы *1*, как показано на схеме (*в*). Затем переместим звено через вновь образовавшийся узел разветвления *3* по направлению ветвления; при этом в двух ветвях появятся звенья согласно третьему правилу преобразования структурных схем Это преобразование показано на схеме (*г*). Если теперь сравнить схемы (*а*) и (*г*), то, очевидно, условием их эквивалентности будет

$$W_a = W_1,\ W_b = \frac{W_2}{1 + W_2W_4},\ W_c = W_3 \text{ и } W_d = -W_4. \qquad (6.47)$$

Тот же результат может быть получен путем преобразования схемы (*а*) с помощью второго и четвертого правил (перемещение суммирующего узла *а* через узел *б*).

Пример 6.2. Воспользовавшись результатами примера 6.1, найти передаточную функцию схем, показанных на рис. 6.11. Для этой цели преобразуем схему (*а*), переместив звено W_b против направления ветвления. По четвертому

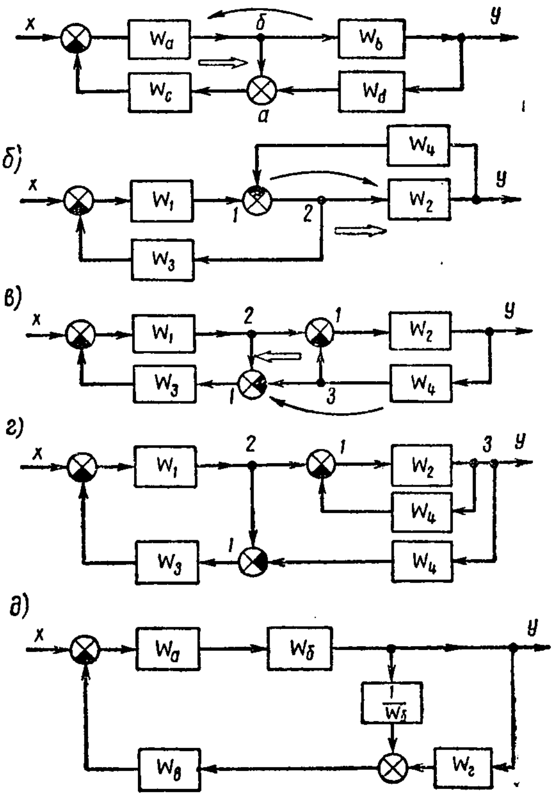


Рис. 6.11

правилу в отходящей от узла ветви добавляется инверсное звено [см. схему (*д*)]; на этой схеме W_b, W_c и W_d соответственно обозначены $W_б$, $W_в$ и $W_г$. Передаточная функция полученной цепи, представляющей собой смешанное соединение звеньев, может быть найдена по формуле соединения звеньев (гл. V)

$$W = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_aW_b}{1 + W_aW_bW_c\left(W_d + \frac{1}{W_b}\right)} =$$

$$= \frac{W_aW_b}{1 + W_aW_bW_cW_d + W_aW_c}. \qquad (6.48)$$

Подставив значения, полученные в выражении (6.47) для схемы (*а*), получаем

$$W = \frac{W_1 W_2}{1 + W_2 W_4 + W_1 W_3}. \qquad (6.49)$$

Эти же выражения могут быть получены и без преобразования структурных схем путем составления алгебраических уравнений для звеньев суммирующих узлов и решения их.

Преобразование схем соответствует преобразованию системы алгебраических уравнений, описывающих систему.

Пример 6.3. Пользуясь правилами преобразования, упростить структурную схему, показанную на рис. 6.12, *а*, сведя все возмущения в один узел.

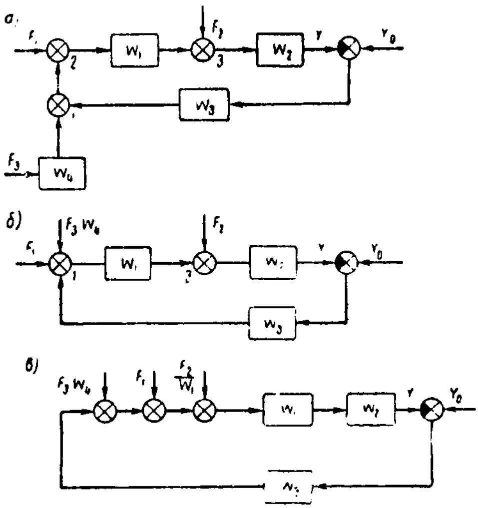


Рис. 6.12

Эта схема соответствует системе регулирования напряжения (см. рис. 6.2). Объединив узлы *1* и *2*, получим схему, показанную на рис. 6.12, *б*. Затем, переместив звено W_1 через узел *3*, получим схему (*в*), в которой действует одно общее эквивалентное возмущение

$$F_э = F_3 W_4 + F_1 + \frac{F_2}{W_1}. \qquad (6.50)$$

Полученная схема соответствует общей схеме, показанной на рис. 6.6.

Из рассмотренного примера видно, что в зависимости от постановки задачи совокупность воздействий в различных узлах схемы всегда путем преобразований может быть сведена к одному воздействию, приведенному к определенной (в принципе к любой) точке схемы.

§ 6.3. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ РЕГУЛИРОВАНИЯ ДВУСВЯЗНЫХ ОБЪЕКТОВ

До сих пор были рассмотрены системы управления простыми односвязными объектами, в которых имеется одна управляющая входная и одна управляемая выходная величины. Управление многосвязными объектами с несколькими входными и выходными величинами значительно сложнее.

Рассмотрим объект с двумя входными x_1 и x_2 и двумя выходными величинами y_1 и y_2, связанными между собой линейными уравнениями (2.16) или (2.42). Примером такого объекта может служить система сообщающихся резервуаров, рассмотренная в примере 2.4.

Уравнения двусвязного объекта в операторной форме имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} Y_1(p) &= W_{11}X_1(p) + W_{21}X_2(p); \\ Y_2(p) &= W_{12}X_1(p) + W_{22}X_2(p). \end{aligned}\right\} \qquad (6.51)$$

Схематически рассматриваемый двусвязный объект показан на рис. 6.13, *а*, а его эквивалентная схема, соответствующая уравнению (6.51), изображена на рис. 6.13, *б*.

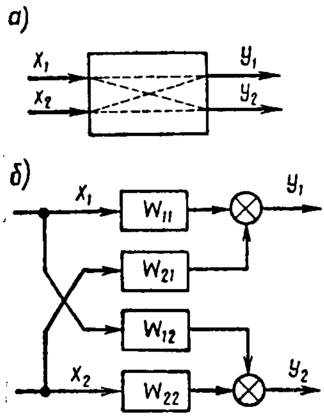


Рис. 6.13

Примерами объектов с несколькими управляемыми и управляющими величинами, кроме уже рассмотренной гидравлической системы, являются системы кондиционирования воздуха (температура и влажность), турбина (скорость вращения и давление), дистилляционная колонна (температура и уровень) и др.

Для поддержания неизменными таких величин применяются многосвязные системы регулирования по отклонению. Так, в двусвязных системах управляемые величины Y_1 и Y_2 сравниваются с заданными уставками Y_{10} и Y_{20} и их разности ε_1 и ε_2 подаются через систему регулирования (звенья W_{p11}, W_{p12}, W_{p21} и W_{p22}) на вход объекта (x_1 и x_2).

Схема такого регулирования применительно к гидравлической системе показана на рис. 6.14, *а*, а ее структурная схема— на рис. 6.14, *б*. Если, например, в этой схеме необходимо определить влияние изменения уставки первой регулируемой величины y_{10} на вторую величину y_2 или на ее рассогласование ε_2, то необходимо рассчитать передаточную функцию, связывающую эти величины,

$$W_{102}(p) = \frac{E_2(p)}{\Delta Y_{10}(p)}. \qquad (6.52)$$

При равенстве этой величины нулю — изменение уставки первого регулятора не изменяет второй регулируемой величины — *регулирование называется автономным.*

Для расчета величины W_{102} желательно найти среди восьми звеньев, составляющих систему регулирования, звенья, включаемые последовательно или параллельно, и по формулам соединения звеньев, приведенным в гл. V, заменить эти схемы эквивалентными.

Однако рассмотрение схемы, показанной на рис. 6.14, *б*, или ее иного изображения (рис. 6.14, *в*), более удобного для расчета, не дает возможности усмотреть в этих схемах один из известных видов соединений звеньев.

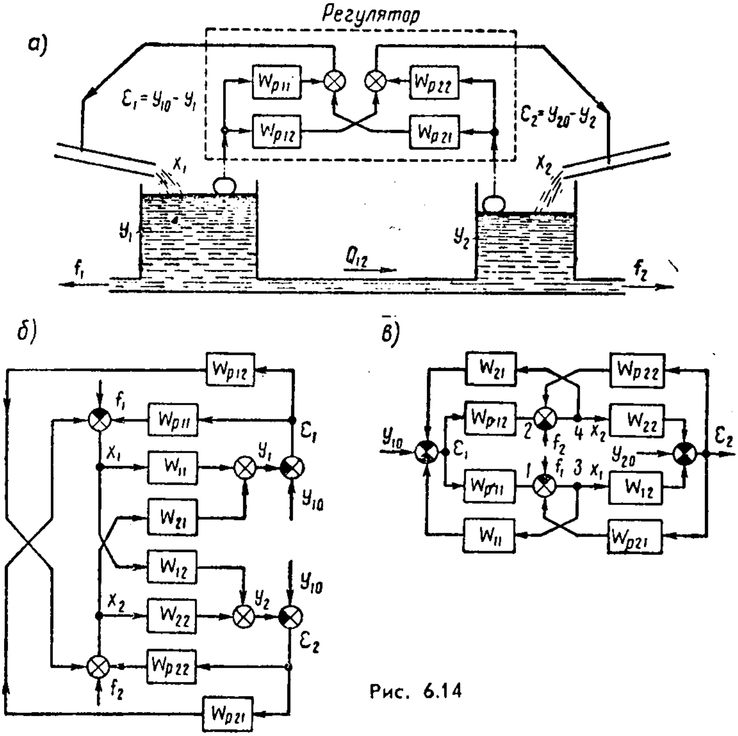


Рис. 6.14

Преобразование структурной схемы позволяет упростить схему, показанную на рис. 6.14, *в*, и свести ее к совокупности параллельных и последовательных соединений звеньев.

Ограничимся рассмотрением случая, когда изменения расходов f_1 и f_2 отсутствуют. Для того чтобы упростить схему, показанную на рис. 6.14, *в*, переместим суммирующие узлы *1* и *2* через узлы разветвления *3* и *4* (правило первое). Полученная при этом преобразованная схема показана на рис. 6.15, *а*. Эту схему можно далее преобразовать, если переместить все восемь звеньев по направлению ветвления (правило третье) через узлы *1, 2, 3, 4, 5, 6, 7* и *8* так, как показано стрелками на рис. 6.15, *а*.

При таком преобразовании в каждой ветви окажется по два последовательно включенных звена, которые можно заменить одним звеном с передаточной функцией, равной произведению двух передаточных функций звеньев, переместившихся в эту ветвь. Получившаяся в результате преобразования структурная схема показана на рис. 6.15, *б*. На этой схеме легко заметить известные параллельные соединения звеньев.

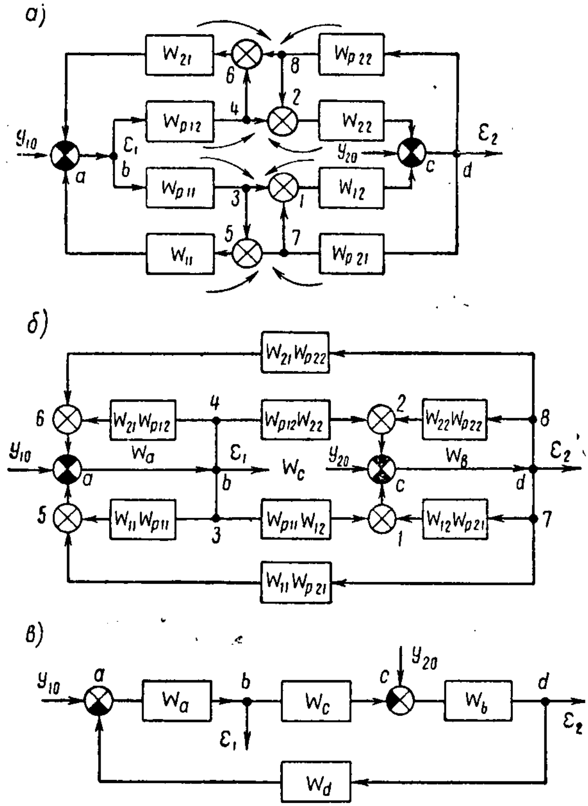


Рис. 6.15

Заменив каждое параллельное соединение звеньев одним звеном с эквивалентной передаточной функцией, можно всю схему свести к соединению четырех звеньев, показанному на рис. 6.15, *в*, где

$$\left.\begin{aligned} W_a &= \frac{1}{1 + W_{11}W_{p11} + W_{21}W_{p12}}; \\ W_b &= \frac{1}{1 + W_{22}W_{p22} + W_{12}W_{p21}}; \\ W_c &= W_{p12}W_{22} + W_{12}W_{p11}; \\ W_d &= W_{21}W_{p22} + W_{11}W_{p21}. \end{aligned}\right\} \qquad (6.53)$$

Зная передаточные функции каждого из этих четырех звеньев, можно найти передаточные функции

$$
\left.
\begin{aligned}
W_{101} &= \frac{E_1(p)}{Y_{10}(p)} = \frac{W_a}{1 - W_a W_b W_c W_d}\,;\\
W_{102} &= \frac{E_2(p)}{Y_{10}(p)} = \frac{W_a W_c W_b}{W_a W_b W_c W_d - 1}\\
&\text{и, соответственно,}\\
W_{202} &= \frac{E_2(p)}{Y_{20}(p)} = \frac{W_b}{1 - W_a W_b W_c W_d}\,;\\
W_{201} &= \frac{E_1(p)}{Y_{20}(p)} = \frac{W_b W_d W_a}{W_a W_b W_c W_d - 1}\,.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6.54)
$$

Условие автономности выполняется, если $W_c = W_d = 0$ и передаточные функции регулятора удовлетворяют условию

$$
\left.
\begin{aligned}
W_{p12} &= -W_{p11}\frac{W_{12}}{W_{22}}\,;\\
W_{p21} &= -W_{p22}\frac{W_{21}}{W_{11}}.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6.55)
$$

В этом случае

$$
\left.
\begin{aligned}
W_{101} &= \frac{E_1(p)}{Y_{10}(p)} = W_a\,;\\
W_{202} &= \frac{E_2(p)}{Y_{20}(p)} = W_b.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (6.56)
$$

При этом изменение уставки одной из регулируемых величин (y_{10}) не приводит к изменению второй регулируемой величины (y_2) так же, как если бы обе системы регулирования были бы полностью независимы или, иными словами, автономны. Общая теория автономного регулирования была разработана проф. Н. Н. Вознесенским в 1934 году применительно к регулированию котельных установок.

Пример 6.4. Найти условие автономного регулирования в схеме автоматического управления уровнями двух сообщающихся резервуаров, передаточные функции которых приведены в примере 2.4:

$$
W_{11}(p) = \frac{b_0 + S_2 p}{p\,[b_0(S_1 + S_2) + S_1 S_2 p]}\,; \qquad W_{22}(p) = \frac{b_0 + S_1 p}{p\,[b_0(S_1 + S_2) + S_1 S_2 p]}
$$

и

$$
W_{12}(p) = W_{21}(p) = \frac{b_0}{p\,[b_0(S_1 + S_2) + S_1 S_2 p]}\,.
$$

Для получения автономности необходимо выполнение условия (6.55). Подставляя в уравнения (6.55) значения $W_{11}(p)$, $W_{22}(p)$ и $W_{12}(p) = W_{21}(p)$, находим

$$
W_{p12} = -W_{p11}\frac{1}{1 + pT_1} \quad \text{и} \quad W_{p21} = -W_{p22}\frac{1}{1 + pT_1}\,,
$$

где

$$
T_1 = \frac{S_1}{b_0}, \quad \text{а} \quad T_2 = \frac{S_2}{b_0}\,.
$$

Полученные соотношения показывают, что при автономном регулировании всякое воздействие на приток жидкости в первый резервуар должно сопровождаться обратным воздействием на приток жидкости во второй резервуар с определенной инерционностью, зависящей от канала между резервуарами (b_0). Такое обратное воздействие компенсирует дополнительный приток жидкости во второй резервуар, обусловленный поднятием уровня жидкости в первом резервуаре. Инерционность воздействия на приток жидкости во второй резервуар должна точно соответствовать инерционности процесса поднятия уровня в этом резервуаре за счет связи его с первым резервуаром.

§ 6.4. ПЕРЕДАТОЧНАЯ ФУНКЦИЯ МЕЖДУ ПРОИЗВОЛЬНЫМИ УЗЛАМИ СХЕМЫ

На основании рассмотрения алгебраических уравнений, описывающих структурную схему линейной системы, Мейсоном в 1953 году было предложено правило вычисления передаточной функции между двумя заданными узлами [Л. 29]. Это правило может быть выражено следующей формулой:

$$W_{mn}=\frac{\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{r} W_{\text{пр.}\,k}\right)\prod\limits_{l=1}^{s}(1+W_{\text{рк}\,l})\right]^*}{\left[\prod\limits_{l=1}^{s}(1+W_{\text{рк}\,l})\right]^*}. \tag{6.57}$$

Здесь $\sum\limits_{k=1}^{r} W_{\text{пр.}\,k}$ — сумма r передаточных функций различных прямых путей из узла m в узел n; $W_{\text{рк}\,l}$ — передаточная функция разомкнутого контура, взятая со знаком, соответствующим отрицательной обратной связи; произведение $\prod$ включает все s замкнутых контуров системы; знаком * обозначено исключение из скобки всех членов, содержащих произведения передаточных функций одних и тех же звеньев (включая звенья с передаточной функцией, равной единице).

Пример 6.5. Рассчитать передаточную функцию $W(p)=\dfrac{Y(p)}{X(p)}$ в схеме, изображенной на рис. 6.11,*а*. Для этой схемы в формуле (6.57) имеем один ($r=1$) прямой путь с передаточной функцией W_aW_b и два ($s=2$) замкнутых контура с передаточными функциями $W_aW_bW_dW_c$ и W_aW_c для разомкнутых цепей контуров отрицательной обратной связи. Подставив эти значения в формулу (6.57), получаем

$$W(p)=\frac{[W_aW_b(1+W_aW_c)(1+W_aW_bW_dW_c)]^*}{[(1+W_aW_c)(1+W_aW_bW_dW_c)]^*}. \tag{6.58}$$

После раскрытия скобок и исключения всех членов, содержащих произведение передаточных функций общих ветвей, получаем

$$W(p)=\frac{W_aW_b}{1+W_aW_c+W_aW_bW_dW_c}, \tag{6.59}$$

что совпадает с результатом, полученным в примере 6.2 [формула (6.48)].

Пример 6.6. Найти передаточную функцию

$$W_{102} = \frac{E_2}{Y_{10}}$$

в схеме, представленной на рис. 6.14,*в*. Для этой схемы имеется два ($r = 2$) прямых пути с передаточными функциями $-W_{p12}W_{22}$ и $-W_{p11}W_{12}$ и шесть ($s = 6$) контуров с передаточными функциями $W_{p12}W_{21}$, $W_{22}W_{p22}$, $W_{p11}W_{11}$, $W_{12}W_{p21}$, $-W_{p12}W_{22}W_{p21}W_{11}$ и $-W_{p11}W_{12}W_{p22}W_{21}$. Подставив эти значения в формулу (6.57) и исключив члены, содержащие произведение передаточных функций контуров и ветвей, имеющих общую ветвь, получаем

$$W_{102} = \frac{-(W_{p12}W_{22} + W_{p11}W_{12})}{1 + W_{p12}W_{21} + W_{22}W_{p22} + W_{p11}W_{11} + W_{12}W_{p21} + (W_{p12}W_{p21} - W_{p11}W_{p22})(W_{21}W_{12} - W_{11}W_{22})}. \qquad (6.60)$$

Здесь при исключении произведений передаточных функций контуров и ветвей, имеющих общую ветвь, учитывались ветви с передаточной функцией, равной единице (ветви, отходящие от суммирующих узлов на рис. 6.14,*в*).

Выражение (6.60) совпадает с решением, получаемым на основании формул (6.53) и (6.54).

Глава VII

УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

§ 7.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

При рассмотрении объектов управления указывалось, что их состояние равновесия может быть устойчивым, неустойчивым и нейтральным (например, § 2.4). То же можно сказать и о системах автоматического регулирования.

Неустойчивый объект может входить в устойчивую систему автоматического регулирования. В этом случае речь идет о системах с искусственной устойчивостью. Однако неустойчивые линейные системы автоматического регулирования сами по себе без дополнительных устройств искусственной устойчивости не могут быть применены на практике. Поэтому первым условием работоспособности линейной системы автоматического регулирования является ее устойчивость.

В гл. II было показано, что необходимым и достаточным условием устойчивости линейного звена является отрицательное значение вещественной части всех полюсов передаточной функции этого звена.

Для разомкнутой системы регулирования согласно (2.20)

$$W_{\text{р}}(p)=\frac{K(p)}{D(p)}, \tag{7.1}$$

где $K(p)$ и $D(p)$ — алгебраические полиномы от p (2.13). Условием устойчивости разомкнутой системы является отрицательный знак вещественной части корней характеристического уравнения

$$D(p)=0. \tag{7.2}$$

Для суждения об устойчивости замкнутой системы в качестве передаточной функции можно рассматривать любую из функций, связывающих сигналы на входе и выходе системы [(6.41), (6.42) или (6.43)].

Рассмотрим в качестве передаточной функции замкнутой системы передаточную функцию по регулируемой величине (6.42)

$$W_{\text{з}}(p)=\frac{Y(p)}{X(p)}=\frac{W_{\text{р}}(p)}{1+W_{\text{р}}(p)}. \tag{7.3}$$

Подставив выражение $W_р(p)$ из (7.1), получим

$$W_з(p) = \frac{K(p)}{D(p) + K(p)}. \tag{7.4}$$

Выражение любой другой передаточной функции замкнутой системы [например, (6.41), (6.43)] отличается от (7.4) только числителем. Знаменатель для всех функций замкнутой системы остается тем же. Вводя общее обозначение передаточной функции замкнутой системы

$$W_з(p) = \frac{B(p)}{A(p)}, \tag{7.5}$$

во всех случаях для знаменателя замкнутой системы будем иметь

$$A(p) = D(p) + K(p). \tag{7.6}$$

Условием устойчивости замкнутой системы является отрицательный знак вещественной части всех корней характеристического уравнения

$$A(p) = 0. \tag{7.7}$$

Это условие устойчивости, доказанное для линейных систем, было распространено на линеаризованные уравнения нелинейных систем А. М. Ляпуновым в 1892 г.

Исследование устойчивости сводится, таким образом, к определению знаков вещественной части корней характеристического уравнения, т. е. к вопросу распределения корней относительно мнимой оси в комплексной плоскости p.

Уравнения степени не выше 4-й могут быть решены, так как для них существуют аналитические выражения, определяющие их корни. Для уравнений более высокой степени (степени 5-й и выше) таких выражений нет. Но для суждения об устойчивости нет необходимости знать значение корней, достаточно лишь иметь суждение о знаке их вещественной части.

Существенным является поэтому выяснение правил, которые позволили бы, минуя вычисление самих корней, ответить на вопрос: как распределены корни в комплексной плоскости относительно мнимой оси. *Правила, позволяющие определить расположение корней относительно мнимой оси, называются критериями устойчивости.*

Существует несколько критериев устойчивости. Все они математически эквивалентны, так как решают вопрос — лежат ли все корни характеристического уравнения в левой полуплоскости или нет. Практическое использование того или иного критерия для конкретной задачи решается характером самой задачи.

В настоящее время при решении вопроса об устойчивости используются следующие критерии: *алгебраические* — а) Рауса, б) Гурвица; *частотные* — а) Михайлова, б) Найквиста.

§ 7.2. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Задача нахождения соотношений между коэффициентами характеристического уравнения линейной системы, обеспечивающих ее устойчивость, давно привлекала внимание инженеров и математиков. Еще в 1860 г. И. А. Вышнеградский, исследуя систему регулирования паровой машины, сформулировал условия, связывающие коэффициенты характеристического уравнения третьей степени, при которых система устойчива. Эта же задача привлекла внимание Дж. Максвелла и А. Стодола. К решению задачи для произвольной степени уравнения были привлечены математики Раус и Гурвиц. Ими были получены решения задачи устойчивости в несколько различных видах.

Раус опубликовал свое решение в 1875 г. в виде получившей известность таблицы Рауса. Гурвицем был опубликован критерий устойчивости в 1895 г. в виде системы определителей. Оба эти критерия приводят к одним и тем же алгебраическим неравенствам и по существу отличаются только общей формой получения их. Поэтому эти критерии часто объединяют, называя *критерием Рауса—Гурвица.*

Опуская доказательство каждого из этих критериев, приведем их математическую формулировку и покажем примеры их применения.

Критерий Рауса. Пусть дано характеристическое уравнение системы

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \qquad (78.)$$

Составим табл. 7.1, *н ваемую таблицей Рауса.*

Таблица 7.1

	$c_{11} = a_n$	$c_{21} = a_{n-2}$	$c_{31} = a_{n-4}$	$c_{41} = a_{n-6}$
	$c_{12} = a_{n-1}$	$c_{22} = a_{n-3}$	$c_{32} = a_{n-5}$	$c_{42} = a_{n-7}$
$\lambda_3 = \dfrac{c_{11}}{c_{12}}$	$c_{13} = c_{21} - \lambda_3 c_{22}$	$c_{23} = c_{31} - \lambda_3 c_{32}$	$c_{33} = c_{41} - \lambda_3 c_{42}$	$c_{43} = c_{51} - \lambda_3 c_{52}$
$\lambda_4 = \dfrac{c_{12}}{c_{13}}$	$c_{14} = c_{22} - \lambda_4 c_{23}$	$c_{24} = c_{32} - \lambda_4 c_{33}$	$c_{34} = c_{42} - \lambda_4 c_{43}$	$c_{44} = c_{52} - \lambda_4 c_{53}$
$\lambda_5 = \dfrac{c_{13}}{c_{14}}$	$c_{15} = c_{23} - \lambda_5 c_{24}$	$c_{25} = c_{33} - \lambda_5 c_{34}$	$c_{35} = c_{43} - \lambda_5 c_{44}$	$c_{45} = c_{53} - \lambda_5 c_{54}$

Правило составления таблицы легко усмотреть из ее построения. Любой из коэффициентов таблицы Рауса c_{kl} при

$|\, i \geqslant 3|$ (k обозначает номер столбца, а i — номер строки таблицы) можно найти по формуле

$$c_{ki} = c_{k+1,\, i-2} - \lambda_i c_{k+1,\, i-1}, \tag{7.9}$$

где

$$\lambda_i = \frac{c_{1,\, i-2}}{c_{1,\, i-1}} \quad \text{при} \quad i \geqslant 3.$$

Число строк таблицы Рауса равно степени уравнения плюс единица, т. е. $(n+1)$. Коэффициентам с отрицательными индексами соответствуют нули.

Критерий устойчивости Рауса формулируется следующим образом. *Для того чтобы система была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты первого столбца таблицы Рауса были положительны, т. е.*

$$c_{11} > 0; \quad c_{12} > 0; \quad c_{13} > 0; \quad c_{14} > 0, \ldots, c_{1,\, n+1} > 0. \tag{7.10}$$

При составлении таблицы Рауса для численно заданных коэффициентов уравнения можно в целях упрощения вычислений умножать или делить строки таблицы на положительную величину. Это не меняет результат.

Если не все коэффициенты первого столбца положительны, т. е. система неустойчива, то число корней уравнения, лежащих в правой полуплоскости, равно числу перемен знаков в первом столбце таблицы.

Пример 7.1. Пусть

$$A(p) = p^6 + 6p^5 + 21p^4 + 44p^3 + 62p^2 + 52p + 100 = 0.$$

Требуется определить количество корней, лежащих в правой полуплоскости.

Составим таблицу Рауса (табл. 7.2). Как видно из таблицы, в первом столбце имеют место две перемены знака: с плюса на минус и с минуса на плюс. Следовательно, рассматриваемое характеристическое уравнение имеет два корня в правой полуплоскости и соответствует неустойчивой системе.

Критерий Гурвица. Пусть дано характеристическое уравнение системы (7.7). Составим таблицу коэффициентов, называемую *таблицей Гурвица.*

$$\begin{array}{ccccccc}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & a_n & a_{n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & a_{n-1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & a_4 & a_2 & a_0
\end{array}$$

Правило составления таблицы видно из ее построения. Первая строка образуется из коэффициентов уравнения с инде-

Таблица 7.2

	$a_6 = 1$	$a_4 = 21$	$a_2 = 62$	$a_0 = 100$
	$a_5 = 6$	$a_3 = 44$	$a_1 = 52$	0
$\lambda_3 = \frac{1}{6} = 0,167$	$21 - 0,167 \cdot 44 = 13,65$	$62 - 0,167 \cdot 52 = 53,3$	$100 - 0,167 \cdot 0 = 100$	0
$\lambda_4 = \frac{6}{13,65} = 0,44$	$44 - 0,44 \cdot 53,3 = 20,6$	$52 - 0,44 \cdot 100 = 8$	$0 - 0,44 \cdot 0 = 0$	$0 - 0,44 \cdot 0 = 0$
$\lambda_5 = \frac{13,65}{20,6} = 0,662$	$53,3 - 0,662 \cdot 8 = 48,0$	$100 - 0,662 \cdot 0 = 100$	0	0
$\lambda_6 = \frac{20,6}{48,0} = 0,43$	$8 - 0,43 \cdot 100 = -35,0$	0	0	0
$\lambda_7 = \frac{48,0}{-35,0} = -1,37$	$100 + 1,37 \cdot 0 = 100$	0	0	0

ксами $n-1$, $n-3$, $n-5$ и т. д. Вторая строка — из коэффициентов уравнения с индексами n, $n-2$, $n-4$ и т. д. Каждая последующая строка образуется коэффициентами уравнения с индексами на единицу больше индексов коэффициентов предшествующей строки; при этом коэффициенты с индексами меньше нуля и больше n заменяются нулями. Таблица содержит n строк, где n — степень уравнения.

Из таблицы Гурвица составляются определители k-го порядка Δ_k отчеркиванием в таблице k строк и k столбцов

$$\Delta_1 = a_{n-1}; \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ a_n & a_{n-2} \end{vmatrix};$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.} \tag{7.11}$$

Эти определители называются *определителями Гурвица*.

Критерий устойчивости Гурвица формулируется следующим образом. *Система устойчива*, если $a_n > 0$ и все определители Гурвица больше нуля, т. е. $\Delta_k > 0$, где $1 \leqslant k \leqslant n$.

Рассмотрим более подробно случаи, когда $n = 1, \ldots, 4$:

1) $n = 1$,

$$a_1 p + a_0 = 0. \tag{7.12}$$

Условия устойчивости:

$$a_1 > 0; \quad \Delta_1 = a_0 > 0;$$

2) $n = 2$,

$$a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Условия устойчивости:

$$\left.\begin{aligned} & a_2 > 0; \\ & \Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & 0 \\ a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_1 a_0 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{7.13}$$

Последнее условие, при наличии предшествующего, эквивалентно условию $a_0 > 0$.

Таким образом, условия устойчивости для уравнения второй степени сводятся к требованиям:

$$a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0; \tag{7.14}$$

3) $n = 3$,

$$a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$$

Условия устойчивости:

$a_3 > 0$;

$\Delta_1 = a_2 > 0$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_2 a_1 - a_3 a_0 > 0; \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_2 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_2 > 0.$$

Последнее условие, при наличии предшествующего, эквивалентно условию $a_0 > 0$.

Условие $\Delta_2 > 0$ при $a_3 > 0$; $a_0 > 0$; $a_2 > 0$ возможно лишь при $a_1 > 0$.

Таким образом, условия устойчивости для уравнения третьей степени сводятся к требованиям:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \tag{7.15}$$

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0; \tag{7.16}$$

4) $n = 4, \qquad a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0 = 0.$

Условия устойчивости:

$$a_4 > 0; \qquad \Delta_1 = a_3 > 0;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_1 (a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_3^2 a_0 > 0;$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{vmatrix} = a_0 \Delta_3 > 0.$$

Последнее условие, при наличии предшествующего, эквивалентно условию $a_0 > 0$.

Условие $\Delta_3 > 0$ при $a_0 > 0$ возможно только при $a_1 > 0$ и $\Delta_2 > 0$. Условие $\Delta_2 > 0$ при $a_4 > 0$, $a_1 > 0$ и $a_3 > 0$ возможно при $a_2 > 0$.

Таким образом, условия устойчивости для уравнения четвертой степени сводятся к требованиям:

$$a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \quad a_4 > 0; \tag{7.17}$$

$$a_1 (a_3 a_2 - a_4 a_1) - a_3^2 a_0 > 0. \tag{7.18}$$

Из сказанного следует, что *условия устойчивости для уравнений первой и второй степени сводятся к требованию положительности коэффициентов характеристического уравнения.*

Для уравнений третьей и четвертой степени, помимо положительности коэффициентов характеристического уравнения, необходимо соблюдение неравенств (7.16) и (7.18).

При $n \geqslant 5$ число подобных дополнительных неравенств возрастает, поэтому критерий устойчивости Гурвица рационально использовать при $n \leqslant 4$.

Из структуры построения определителей Гурвица следует, что

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1}. \tag{7.19}$$

Согласно критерию устойчивости Гурвица, система устойчива, если все определители Гурвица больше нуля и, в частности, $\Delta_n > 0$.

Система находится на границе устойчивости, когда

$$\Delta_n = a_0 \Delta_{n-1} = 0. \tag{7.20}$$

Это равенство возможно в двух случаях: 1) $a_0 = 0$ и 2) $\Delta_{n-1}=0$.

В первом случае говорят, что система находится на границе апериодической устойчивости (один из корней характеристического уравнения равен нулю).

Во втором случае говорят, что система находится на границе колебательной устойчивости (два сопряженных корня характеристического уравнения находятся на мнимой оси).

В большинстве случаев $a_0 \neq 0$ и, следовательно, если система находится на границе устойчивости, то это граница колебательной устойчивости.

Пример 7.2. Пусть дано характеристическое уравнение

$$(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k = 0. \tag{7.21}$$

Это уравнение соответствует системе регулирования, содержащей три инерционных звена с постоянными времени T_1, T_2, и T_3 и общим коэффициентом усиления k. Необходимо найти предельное значение k, при котором система перестает быть устойчивой, т. е. $k_{\text{пр}}$ как функцию T_i; $i = 1, 2, 3$.

Перепишем уравнение в виде

$$T_1T_2T_3p^3 + (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3)\,p^2 + (T_1 + T_2 + T_3)\,p + 1 + k = 0.$$

Согласно критерию устойчивости Гурвица, система устойчива, если выполняются неравенства (7.15) и (7.16), т. е. если все коэффициенты уравнения положительны и выполняется неравенство

$$(T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)(T_1 + T_2 + T_3) > (1 + k)\,T_1T_2T_3. \tag{7.22}$$

Положительный знак коэффициентов вытекает из условия задачи. Неравенство (7.22) может быть переписано в виде

$$(1 + \tau_2 + \tau_3)\left(1 + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}\right) > 1 + k, \tag{7.23}$$

где

$$\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}; \qquad \tau_3 = \frac{T_3}{T_1}.$$

Из полученного неравенства видно, что оно нарушается при

$$k \geqslant k_{\text{пр}} = (1 + \tau_2 + \tau_3)\left(1 + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}\right) - 1. \tag{7.24}$$

Из (7.24) следует, что предельный коэффициент усиления $k_{\text{пр}}$ системы определяется не абсолютной величиной постоянных времени звеньев, а их относительным значением и $k_{\text{пр}}$ тем больше, чем больше величины τ_2 и τ_3, т. е. чем более резко отличаются постоянные времени друг от друга. В частном случае, когда $\tau_2 = \tau_3 = 1$, т. е. $T_1 = T_2 = T_3 = T$, значение $k_{\text{пр}}$ минимально и равно всего лишь 8.

§ 7.3. ЧАСТОТНЫЕ КРИТЕРИИ УСТОЙЧИВОСТИ

Принцип аргумента. В основе частотных критериев устойчивости лежит известный в теории функций комплексного переменного принцип аргумента.

Пусть дано алгебраическое уравнение с действительными коэффициентами

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0. \qquad (7.25)$$

Многочлен $A(p)$ можно представить в виде

$$A(p) = a_n (p - p_1)(p - p_2) \ldots (p - p_n), \qquad (7.26)$$

где p_i — корни уравнения $A(p) = 0$.

Положим $p = j\omega$, тогда

$$A(j\omega) = a_n (j\omega - p_1)(j\omega - p_2) \ldots (j\omega - p_n). \qquad (7.27)$$

Рассмотрим геометрическое представление комплексного числа $(j\omega - p_i)$ на комплексной плоскости p. Начало вектора, изображающего это комплексное число, лежит в точке p_i, а конец — на мнимой оси в точке $j\omega$ (рис. 7.1).

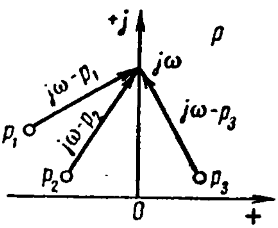


Рис. 7.1

Найдем аргумент комплексного числа

$$\arg A(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \arg (j\omega - p_i). \qquad (7.28)$$

При изменении аргумента $A(j\omega)$ с изменением ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$

$$\Delta \arg A(j\omega) = \sum_{i=1}^{n} \underset{-\infty<\omega<+\infty}{\Delta \arg (j\omega - p_i)}. \qquad (7.29)$$

Согласно (7.29), для подсчета изменения аргумента необходимо подсчитать сумму изменений аргументов выражений вида $(j\omega - p_i)$. Это изменение аргумента зависит от того, в какой (правой или в левой) полуплоскости лежит корень p_i. Рассмотрим эти два случая.

Корень p_i лежит в левой полуплоскости (рис. 7.2,*а*). При изменении ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$ конец вектора $(j\omega - p_i)$ скользит вдоль мнимой оси снизу вверх, поворачиваясь против часовой стрелки на 180°, и, следовательно, изменение аргумента при этом

$$\underset{-\infty<\omega<+\infty}{\Delta \arg (j\omega - p_i)} = +\pi. \qquad (7.30)$$

Корень p_l лежит в правой полуплоскости (рис. 7.2,*б*). В этом случае, рассуждая аналогично, получим

$$\Delta \underset{-\infty<\omega<+\infty}{\arg} (j\omega - p_l) = -\pi. \tag{7.31}$$

Допустим, что уравнение $A(p) = 0$ имеет m корней в правой полуплоскости и l корней в левой полуплоскости. При этом $l + m = n$. Тогда, на основании (7.27), (7.30) и (7.31),

$$\Delta \arg A(j\omega) = \pi(l - m) = (n - 2m)\pi. \tag{7.32}$$

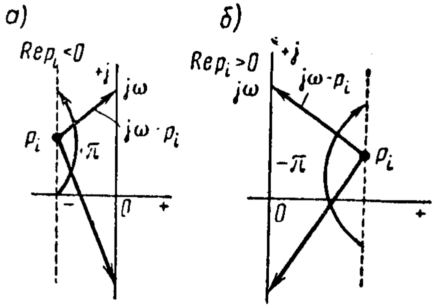


Рис. 7.2

Уравнение (7.32) представляет собой выражение принципа аргумента, который формулируется следующим образом. *Изменение аргумента $A(j\omega)$ при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ равно разности между числом корней l (уравнения $A(p) = 0$), лежащих в левой полуплоскости, и числом корней m, лежащих в правой полуплоскости, умноженной на π.*

Критерий Михайлова. Критерий устойчивости А. В. Михайлова, сформулированный им в 1938 г [Л. 13], является по существу геометрической интерпретацией принципа аргумента. Пусть дано характеристическое уравнение системы (7.7)

$$A(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \tag{7.33}$$

Полином $A(p)$ в этом случае *называется характеристическим полиномом*. Для того чтобы система была устойчива, необходимо, чтобы все корни характеристического уравнения лежали в левой полуплоскости, т. е. чтобы $m = 0$. В этом случае согласно (7.32) должно удовлетворяться уравнение

$$\Delta \underset{-\infty<\omega<+\infty}{\arg} A(j\omega) = n\pi. \tag{7.34}$$

Из условия (7.34) следует, что все корни уравнения $A(p) = 0$ лежат в левой полуплоскости.

Геометрическое место конца вектора $A(j\omega)$ при $-\infty < \omega < +\infty$ называется *годографом вектора* $A(j\omega)$, или *годографом Михайлова*. Согласно (7.33), уравнение годографа Михайлова

$$A(j\omega) = a_n (j\omega)^n + \dots + a_0 = U(\omega) + jV(\omega), \tag{7.35}$$

где действительная и мнимая части комплекса $A(j\omega)$ соответственно будут:

$$U(\omega) = a_0 - a_2\omega^2 + a_4\omega^4 + \ldots; \qquad (7.36)$$

$$V(\omega) = a_1\omega - a_3\omega^3 + a_5\omega^5 - \ldots. \qquad (7.37)$$

Из (7.36) и (7.37) следует, что действительная часть $A(j\omega)$ является четной функцией ω

$$U(-\omega) = U(+\omega), \qquad (7.38)$$

а мнимая часть $A(j\omega)$ является нечетной функцией ω

$$V(-\omega) = -V(\omega). \qquad (7.39)$$

Следовательно,

$$A(-j\omega) = U(\omega) - jV(\omega), \qquad (7.40)$$

т. е. $A(j\omega)$ и $A(-j\omega)$ являются сопряженными комплексными величинами и, таким образом,

$$\underset{-\infty<\omega<0}{\Delta \arg} A(j\omega) = \underset{0<\omega<+\infty}{\Delta \arg} A(j\omega). \qquad (7.41)$$

Учитывая (7.41), уравнение (7.34) можно записать в виде

$$\underset{0<\omega<+\infty}{\Delta \arg} A(j\omega) = n\frac{\pi}{2}. \qquad (7.42)$$

Из (7.42) следует формулировка критерия устойчивости Михайлова. *Система автоматического регулирования устойчива, если при изменении ω от 0 до $+\infty$ вектор $A(j\omega)$ поворачивается на угол $n\frac{\pi}{2}$, где n — степень характеристического уравнения* $A(p) = 0$; или, иначе, *если годограф $A(j\omega)$ с ростом ω от 0 до $+\infty$, начинаясь на действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов.*

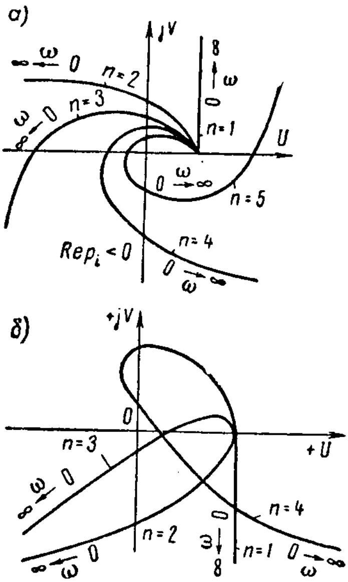


Рис. 7.3

На рис. 7.3,*а* показаны годографы $A(j\omega)$ устойчивых систем для разных значений n. Все они охватывают соответствующее число квадрантов в положительном направлении.

На рис. 7.3,*б* показаны годографы неустойчивых систем. Все они не удовлетворяют условию обхода n квадрантов в положительном направлении.

Годограф $A(j\omega)$ можно построить по уравнениям (7.36) и (7.37), задаваясь значениями ω и вычисляя U и V.

Годограф можно также построить геометрически исходя из выражения (7.35). Вектор $A(j\omega)$ при этом представляет собой замыкающую многоугольника, стороны которого равны соответственно $a_k\omega^k$ и образуют между собой угол в 90°. На рис. 7.4 это построение показано для одной точки $\omega = \omega_1$, когда

$$A(j\omega_1) = a_3(j\omega_1)^3 + a_2(j\omega_1)^2 + a_1(j\omega_1) + a_0. \qquad (7.48)$$

Задаваясь значениями ω в пределах нуль — бесконечность, строят подобным образом весь годограф.

Согласно уравнению (7.6), характеристический полином замкнутой системы можно представить в виде суммы $K(p)$ и $D(p)$. Годографы $D(j\omega)$ и $K(j\omega)$ могут быть представлены в виде произведения более простых годографов, которые обычно известны и для типовых звеньев имеют простой вид. Отсюда следует, что для построения годографа $A(j\omega)$ необходимо построить годограф $D(j\omega)$, построить годограф $K(j\omega)$, сложить векторы $D(j\omega)$ и $K(j\omega)$ для каждого значения ω.

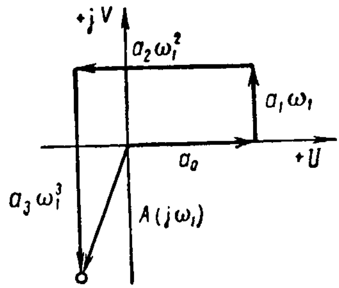


Рис. 7.4

В случае, когда $K(j\omega) = k$, т. е. не зависит от частоты ω, построение упрощается. Последние две операции заменяются простым смещением годографа $D(j\omega)$ вправо вдоль вещественной оси на величину k или, что то же самое, смещением мнимой оси влево на величину k.

Пример 7.3. Определить предельный коэффициент усиления $k_{пр}$ системы автоматической стабилизации напряжения генератора, структурная схема которого показана на рис. 6.2.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W_р(p) = \frac{k}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)} = \frac{k}{D(p)},$$

где $k = k_1k_2k_3$.

Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$A(p) = D(p) + k = (1 + pT_1)\cdot(1 + pT_2)\cdot(1 + pT_3) + k = 0.$$

Для решения задачи следует построить годограф Михайлова

$$\underset{0<\omega<+\infty}{A(j\omega)} = \underset{0<\omega<+\infty}{D(j\omega)} + k.$$

Для этого построим вначале годограф

$$D(j\omega) = (1 + j\omega T_1)\cdot(1 + j\omega T_2)\cdot(1 + j\omega T_3) = U_1(\omega) + jV_1(\omega).$$

Пусть $T_1 = 2{,}0$ *сек*, $T_2 = 0{,}5$ *сек*, $T_3 = 0{,}1$ *сек*.

Тогда

$$\left.\begin{aligned} U_1(\omega) &= 1 - (T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1)\,\omega^2 = 1 - 1{,}25\omega^2, \\ V_1(\omega) &= \omega\,(T_1 + T_2 + T_3 - T_1T_2T_3\omega^2) = \omega\,(2{,}6 - 0{,}1\omega^2) \end{aligned}\right\} \qquad (7.44)$$

и годограф $D(j\omega)$ имеет вид, показанный на рис. 7.5.

Для того чтобы получить годограф $A(j\omega)$, достаточно мнимую ось сместить влево на величину k. Из рис. 7.5 следует, что система будет на границе устойчивости, если k будет равно $k_{пр}$, при котором годограф $A(j\omega)$ пройдет через начало координат. Величина $k_{пр}$, как это видно из рис. 7.5, может быть определена из уравнений:

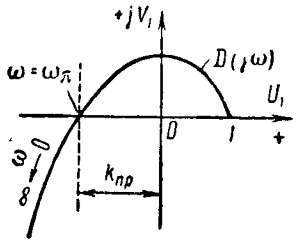


Рис. 7.5

$$V_1(\omega_\pi) = 0, \quad -U_1(\omega_\pi) = k_{пр}, \qquad (7.44')$$

где ω_π — частота пересечения, т. е. частота, соответствующая точке пересечения годографа $D(j\omega)$ с действительной осью.

Решая уравнения (7.44) и (7.44′), для $\omega = \omega_\pi$ получим:

$$\left.\begin{aligned} \omega_\pi &= \sqrt{\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}} = \sqrt{\frac{2,6}{0,1}} = 5,1\,\frac{1}{сек}; \\ k_{пр} &= (T_1T_2+T_2T_3+T_1T_3)\omega_\pi^2 - 1 = 1,25\,\frac{2,6}{0,1} - 1 = 31,5. \end{aligned}\right\} \qquad (7.45)$$

Легко заметить, что при подстановке выражений ω_π, τ_2, τ_3 формулы (7.45) и (7.24) совпадают.

Критерий Найквиста. Для исследования устойчивости усилителей с обратной связью Найквист в 1932 г. предложил критерий устойчивости, основанный на исследовании частотных характеристик системы. Этот критерий был по-новому обоснован, обобщен и применен в теории автоматического регулирования А. В. Михайловым в 1938 г. Для исследования устойчивости замкнутой системы регулирования согласно этому критерию необходимо знать частотный годограф разомкнутой системы. Эту характеристику можно получить как аналитически, так и экспериментально. Последнее обстоятельство выгодно отличает рассматриваемый критерий устойчивости от ранее изложенных.

Критерий устойчивости Найквиста имеет ясный физический смысл. Он связывает стационарные частотные свойства разомкнутой системы с нестационарными свойствами замкнутой системы.

Критерий устойчивости, основанный на построении частотного годографа разомкнутой системы. Пусть передаточная функция разомкнутой системы регулирования $W_р(p) = \frac{K(p)}{D(p)}$. Образуем функцию

$$F(p) = 1 + W_р(p) = \frac{D(p)+K(p)}{D(p)}. \qquad (7.46)$$

Числитель этой функции представляет собой характеристический полином замкнутой системы, знаменатель — характеристический полином разомкнутой системы. Пусть степень $D(p)$

равна n и степень $K(p)$ равна r. Из физических соображений следует, что

$$r < n. \tag{7.47}$$

В противном случае, при $r > n$ из передаточной функции $W(p)$ можно выделить слагаемые с p выше нулевой степени, что соответствует дифференцирующим звеньям, которые, как было указано в гл. III, не могут быть реализованы на практике.

Учитывая неравенство (7.47), можно утверждать, что степень полинома $D(p)+K(p)$ также равна n.

Рассмотрим три случая состояния разомкнутой системы: устойчива, неустойчива и нейтральна.

1-й случай — система в разомкнутом состоянии устойчива.

Тогда согласно критерию устойчивости Михайлова изменение аргумента характеристического полинома разомкнутой системы

$$\Delta \arg_{0<\omega<\infty} D(j\omega) = n\frac{\pi}{2}.$$

Если потребовать, чтобы система в замкнутом состоянии была устойчива, то должно удовлетворяться равенство

$$\Delta \arg_{0<\omega<\infty} [D(j\omega)+K(j\omega)] = n\frac{\pi}{2}.$$

Из (7.46) при этом следует, что

$$\Delta \arg_{0<\omega<\infty} F(j\omega) = \Delta \arg_{0<\omega<\infty} [D(j\omega)+K(j\omega)] - \Delta \arg_{0<\omega<\infty} D(j\omega) = 0 \tag{7.48}$$

Таким образом, система автоматического регулирования устойчива, если изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞, равно нулю.

На рис. 7.6, *а* показаны два годографа $F(j\omega)=1+W_р(j\omega)$; I соответствует устойчивой системе: он не охватывает точку (0, 0), II — неустойчивой: он охватывает точку (0, 0). Так

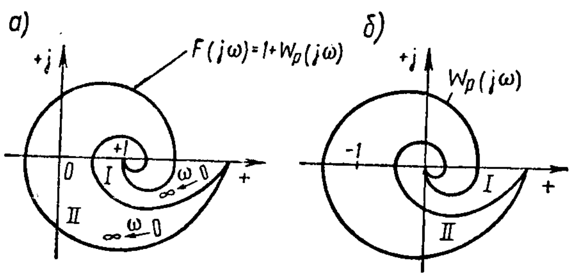


Рис. 7.6

как $F(j\omega)$ отличается от $W_р(j\omega)$ на $+1$, то сказанное можно сформулировать непосредственно для характеристики $W_р(j\omega)$ (см. рис. 7.6, *б*).

Замкнутая система устойчива, если годограф разомкнутой системы $W_р(j\omega)$ *не охватывает точку* $(-1, j0)$.

Пример 7.4. Применим критерий Найквиста для определения предельного коэффициента системы регулирования, рассмотренной в примере 7.3, для которой

$$W_р(p) = \frac{k}{(1+pT_1)\cdot(1+pT_2)\cdot(1+pT_3)}.$$

Частотные годографы для этой системы при разных значениях k показаны на рис. 7.7. Согласно критерию Найквиста, при $k = k_I$ система устойчива, при $k = k_{II}$ – неустойчива.

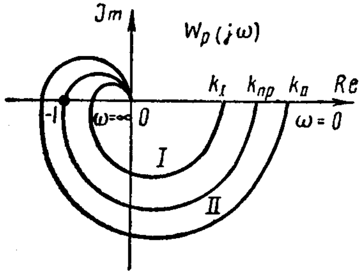


Рис. 7.7

Для определения значения $k_{пр}$ необходимо найти значение k, при котором годограф проходит через точку $(-1, j0)$, т. е. решить уравнение

$$W_р(j\omega_\pi) = \frac{k_{пр}}{(1+j\omega_\pi T_1)(1+j\omega_\pi T_2)(1+j\omega_\pi T_3)} = -1$$

или

$$(1+j\omega_\pi T_1)(1+j\omega_\pi T_2)(1+j\omega_\pi T_3) = -k_{пр}.$$

Составив уравнения для мнимых и действительных частей этого уравнения, находим ω_π и $k_{пр}$:

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{T_1+T_2+T_3}{T_1T_2T_3}};$$

$$k_{пр} = (T_1+T_2+T_3)\left(\frac{1}{T_1}+\frac{1}{T_2}+\frac{1}{T_3}\right)-1.$$

Полученное решение совпадает с формулами (7.45) и (7.24), найденными с помощью критериев Михайлова и Гурвица.

2-й случай — система в разомкнутом состоянии неустойчива.

При рассмотрении многоконтурных и одноконтурных систем, содержащих неустойчивые звенья, разомкнутая система может оказаться неустойчивой.

Пусть система в разомкнутом состоянии неустойчива, при этом характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет m корней в правой полуплоскости. Тогда согласно принципу аргумента (7.32)

$$\underset{-\infty<\omega<+\infty}{\Delta \arg} D(j\omega) = (n-2m)\,\pi$$

или, учитывая симметрию характеристик для $+\omega$ и $-\omega$,

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} D(j\omega) = (n-2m)\,\frac{\pi}{2}.$$

Если потребовать, чтобы система в замкнутом состоянии была устойчива, то должно выполняться равенство

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg}\,[D(j\omega)+K(j\omega)] = n\,\frac{\pi}{2}.$$

При этом [согласно (7.46)]

$$\underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} F(j\omega) = \Delta \arg\,[D(j\omega)+K(j\omega)] - \underset{0<\omega<\infty}{\Delta \arg} D(j\omega) =$$

$$= n\frac{\pi}{2} - (n-2m)\frac{\pi}{2} = \frac{m}{2}\,2\pi. \qquad (7.50)$$

Таким образом, *система автоматического регулирования устойчива, если при изменении* ω *от нуля до бесконечности годограф разомкнутой системы* $W_p(j\omega)$ *охватывает* $\frac{m}{2}$ *раз точку* $(-1;\ j0)$ *в положительном направлении, где* m *— число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.*

Кратность охвата может быть наглядно определена числом оборотов, совершенных вектором, проведенным из точки $(-1; j0)$ в текущую точку годографа.

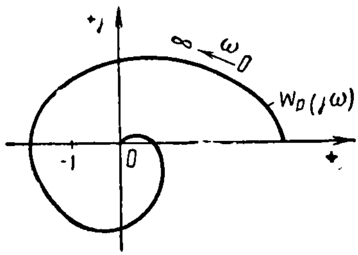


Рис. 7.8

На рис. 7.8 показан годограф устойчивой системы в замкнутом состоянии, которая в разомкнутом состоянии неустойчива, а число корней ее $m=2$. Годограф охватывает в положительном направлении точку $(-1,\ j0)$ один раз $\left(\frac{m}{2}=1\right)$ и, следовательно, согласно (7.50) система в замкнутом состоянии устойчива.

Пример 7.5. Применим критерий Найквиста для определения предельного коэффициента усиления простейшей системы стабилизации неустойчивого объекта.

Пусть

$$W_p(p) = \frac{k}{(pT_1-1)(1+pT_2)}.$$

Частотные годографы для этой системы при различных значениях k и $\tau = \frac{T_1}{T_2}$ показаны на рис. 7.9, *а*.

Для данной системы $n=2$ и $m=1$ и, следовательно, для того чтобы система была устойчива, при изменении ω от нуля до ∞ точка -1 должна охватываться годографом в положительном направлении 0,5 раза или один раз при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$. Этому условию удовлетворяет только годограф *III*, который при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ (см. пунктир для $-\infty<\omega<0$) охватывает точку *—1* в положительном направлении один раз, а при $0<\omega<\infty$ — соответственно «половину раза».

Годограф *I* охватывает точку *—1* только в отрицательном направлении, а годограф II не охватывает эту точку.

Таким образом, условием устойчивости является $k > k_{\text{пр}} = 1$ при $T_1 > T_2$.

Пример 7.6. Рассмотрим ту же задачу, что и в примере 7.5, но при

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{k}{(pT_1 - 1)(1 + pT_2)(1 + pT_3)}.$$

В этом случае выполнение условий $k > 1$ и $T_1 > T_2$ не всегда обеспечит устойчивость системы. Рассмотрев годограф для этого случая, показанный на рис. 7.9, *б*, можно заметить, что дополнительное условие устойчивости заключается в том, что при частоте пересечения ω_π годограф должен пересекать действительную ось правее точки -1.

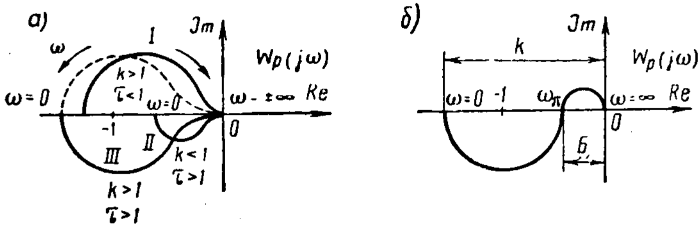


Рис. 7.9

Математическая формулировка этого условия получается путем нахождения частоты пересечения ω_π, при которой мнимая часть числителя $W_{\text{р}}(j\omega)$ равна нулю. В данном случае это выполняется при

$$\operatorname{Im} D(j\omega) = j\omega_\pi\,[(T_1 - T_2 - T_3) - \omega_\pi^2\, T_1 T_2 T_3] = 0,$$

откуда

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{T_1 - T_2 - T_3}{T_1 T_2 T_3}}. \tag{7.51}$$

Соответственно отрезок оси, отсекаемый годографом,

$$Б = \frac{k}{\omega_\pi^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 - T_2 T_3) - 1}$$

должен быть меньше единицы. Таким образом, в этом случае условием устойчивости является неравенство

$$1 < k < \omega_\pi^2 (T_1 T_2 + T_1 T_3 - T_2 T_3) - 1. \tag{7.52}$$

3-й случай — система в разомкнутом состоянии нейтральна. В этом случае передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W_{\text{р}}(p) = \frac{K(p)}{p^\nu D_1(p)}, \tag{7.53}$$

где ν — число интегрирующих звеньев в системе,

$K(p)$ и $D_1(p)$ — полиномы от p, причем $D_1(p)$ не имеет нулей в правой полуплоскости и на мнимой оси.

Из (7.53) следует, что $W_{\text{р}}(j\omega)$ при $\omega \to 0$ стремится к ∞, и поэтому по виду годографа $W_{\text{р}}(j\omega)$, имеющему разрыв при $\omega = 0$, трудно судить, охватывает ли он точку $(-1, j0)$, и решать вопрос об устойчивости системы. В этом случае требуется специальное исследование годографа вблизи точки, соответствующей $\omega = 0$.

Путем предельного перехода этот случай можно получить из рассмотрения первого или второго случая. Решим задачу путем применения выводов, сделанных для системы, устойчивой в разомкнутом состоянии. Рассмотрим случай, когда $\nu = 1$.

Тогда

$$W_p(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{j\omega D_1(j\omega)}. \tag{7.54}$$

При $j\omega = 0$ значение W_p по (7.54) обращается в ∞, поэтому для сохранения формулировки критерия, справедливой для устойчивых в разомкнутом состоянии систем, при построении

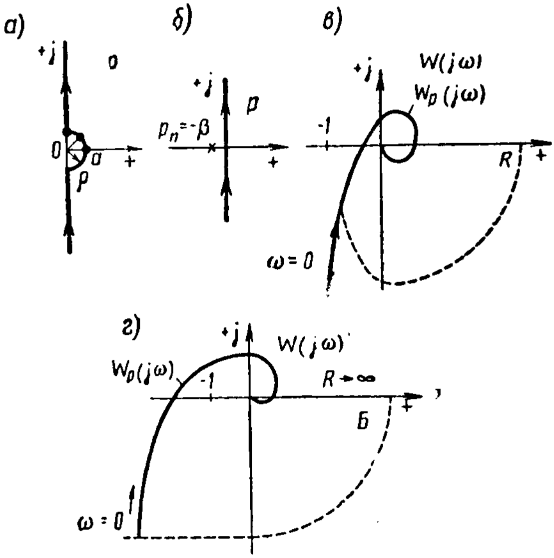


Рис. 7.10

годографа либо, обходя мнимую ось от $-\infty$ до $+\infty$, огибают точку (0, 0) справа по полуокружности бесконечно малого радиуса $\rho \to 0$ (рис. 7.10, *а*), либо рассматривают нулевой корень, как предел отрицательного вещественного корня (рис. 7.10, *б*) $p_n = -\beta$ при $\beta \to 0$.

Воспользуемся вторым вариантом предельного перехода от устойчивой разомкнутой системы к нейтральной. В этом случае вместо функции $W_p(j\omega)$ воспользуемся функцией $W'_p(j\omega)$, которая переходит в $W_p(j\omega)$ при $\beta \to 0$,

$$W'_p(j\omega) = \frac{K(j\omega)}{(j\omega + \beta) D_1(j\omega)}. \tag{7.55}$$

При

$$\lim_{\omega \to 0} W'_p(j\omega) = \frac{b_0}{\beta d_0} = R, \tag{7.56}$$

где b_0 и d_0 — значения полиномов $K(j\omega)$ и $D_1(j\omega)$ при $\omega = 0$,

R — значение $W'_p(j\omega)$ при $\omega = 0$.

При малых частотах годограф $W'_p(j\omega)$ отличается от годографа $W_p(j\omega)$, принимая вид пунктирной кривой, показанной на рис. 7.10, *в*. По мере стремления β к нулю $R \to \infty$ и годограф $W'_p(j\omega)$ отличается от годографа $W_p(j\omega)$ только четвертью окружности бесконечно большого радиуса, дополняемой при $\omega \to 0$. Будем называть такую часть окружности «дополнением в бесконечности».

Для $\nu = 1$ — это четверть окружности бесконечно большого радиуса, для $\nu = 2$ — это уже половина окружности, а для произвольного значения ν дополнение годографа в бесконечности представляет собой дугу, состоящую из ν четвертей окружности бесконечно большого радиуса, начинающуюся при частоте $\omega = 0$ на действительной оси и с увеличением частоты описывающей угол $\frac{\nu}{2}$ в отрицательном направлении вокруг начала координат.

Таким образом, система с одним интегрирующим звеном, годограф которой с его дополнением в бесконечности показан на рис. 7.10, *в*, не охватывает точку $(-1, j0)$, является устойчивой.

На рис. 7.10, *г* показан годограф, соответствующий неустойчивой системе, так как он охватывает точку $(-1, j0)$.

Из сказанного следует, что *система автоматического регулирования, нейтральная в разомкнутом состоянии, устойчива, если годограф разомкнутой системы с его дополнением в бесконечности не охватывает точку* $(-1, j0)$.

Пример 7.7. Применим критерий Найквиста для определения предельного коэффициента усиления системы регулирования с передаточной функцией разомкнутой системы

$$W_p(p) = \frac{k}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Частотные годографы для этой системы при различных значениях k показаны на рис. 7.11. Кривая I соответствует неустойчивой системе ($k > k_{пр}$), а кривая II — устойчивой ($k < k_{пр}$). Величина $k_{пр}$ определяется по коэффициенту усиления при частоте пересечения

$$\omega_\pi = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}},$$

и, следовательно,

$$k_{пр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}. \tag{7.57}$$

Для практических применений удобно использовать несколько иную формулировку критерия устойчивости Найквиста, объединяющую все три рассмотренных случая. Если переход годографа $W_р(j\omega)$ из верхней полуплоскости в нижнюю при возрастании ω называть положительным, а переход из нижней в верхнюю — отрицательным, то критерий Найквиста можно формулировать следующим образом. *Система автоматического регулирования устойчива тогда, когда*

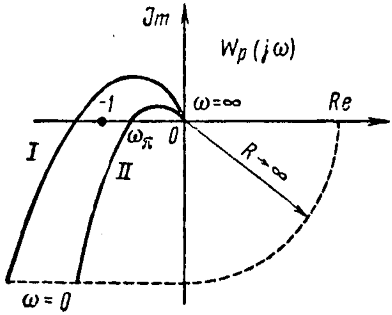


Рис. 7.11

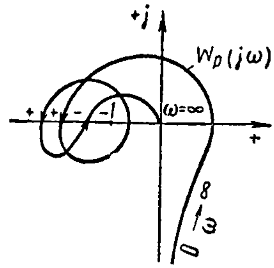


Рис. 7.12

разность между числами положительных и отрицательных переходов отрезка действительной оси $(-\infty, \ -1)$ *годографом разомкнутой системы равна* $\frac{m}{2}$, *где* m — *число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.*

В частном случае, когда $m=0$, что соответствует устойчивой или нейтральной разомкнутой системе, система устойчива, если разность между числами положительных и отрицательных переходов отрезка $(-\infty, -1)$ годографом $W(j\omega)$ равна нулю.

На рис. 7.12 показан годограф $W_р(j\omega)$ не устойчивой в разомкнутом состоянии системы, для которой $m=2$. Годограф имеет два положительных перехода и один — отрицательный, следовательно, разность между числами переходов равна $2-1=1$. Согласно приведенной выше формулировке критерия устойчивости, рассматриваемая система, не устойчивая в разомкнутом состоянии ($m=2$), устойчива в замкнутом состоянии.

Критерий устойчивости, основанный на построении инверсного частотного годографа разомкнутой системы. В расчетной практике часто пользуются критерием устойчивости, основанным на построении инверсного частотного годографа,

$$W_р^{-1}(j\omega) = \frac{1}{W_р(j\omega)} = \frac{D(j\omega)}{K(j\omega)}. \tag{7.58}$$

В этом случае вычисления, особенно для сложных систем, существенно упрощаются, ибо степень $D(j\omega)$ обычно больше степени $K(j\omega)$,

$$W_p^{-1}(j\omega) = \frac{1}{W_p(\omega)} e^{-j\varphi(\omega)} \tag{7.59}$$

и, следовательно, всем точкам, лежащим внутри (вне) окружности единичного радиуса на плоскости $W_p(j\omega)$, соответствуют точки, лежащие вне (внутри) окружности единичного радиуса на плоскости $W_p^{-1}(j\omega)$ (рис. 7.13). В частности, точкам пересечения на плоскости $W_p(j\omega)$ с отрезком действительной оси $(-\infty, -1)$ соответствуют точки пересечения на плоскости $W_p^{-1}(j\omega)$ с отрезком $(0, -1)$, а знак перехода в этих точках — обратный.

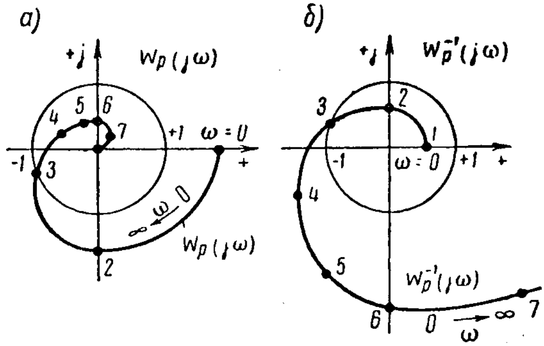


Рис. 7.13

Поэтому критерий устойчивости, основанный на использовании инверсной характеристики, может быть сформулирован следующим образом. *Система автоматического регулирования устойчива, если разность между числами отрицательных и положительных переходов инверсным частотным годографом разомкнутой системы отрезка действительной оси* $(0, -1)$ *равна* $\frac{m}{2}$, *где* m *— число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.*

При $m = 0$, что соответствует устойчивой или нейтральной разомкнутой системе, система устойчива, если разность между числами отрицательных и положительных переходов отрезка $(0, -1)$ годографом $W_p^{-1}(j\omega)$ равна нулю.

Пример 7.8. Пусть

$$W_p(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)}.$$

На рис. 7.14 построены годографы $W_р(j\omega)$ и $W_р^{-1}(j\omega) = \frac{1}{W_р(j\omega)}$. Первый не пересекает отрезок $(-\infty, -1)$ и, следовательно, система при данном значении k в замкнутом состоянии устойчива.

Требуется по годографам определить предельное значение коэффициента усиления $k_{пр}$. Аналогично примеру 7.4 по годографу $W_р(j\omega)$ находим

$$k_{пр} = \frac{1}{A} k.$$

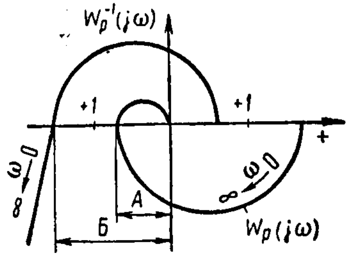


Рис. 7.14

Тот же результат получается из исследования инверсного годографа $W_р^{-1}(j\omega)$. Он отсекает отрезок $Б = \frac{1}{A}$. При увеличении коэффициента усиления годограф сжимается, а при возрастании k в $Б$ раз годограф $W^{-1}(j\omega)$ проходит через точку $(-1, j0)$. Система при этом находится на границе устойчивости. Отсюда

$$k_{пр} = kБ = k\frac{1}{A}. \tag{7.60}$$

Суждение об устойчивости по логарифмическим характеристикам системы. Критерий устойчивости Найквиста может быть сформулирован применительно к логарифмическим характеристикам системы в разомкнутом состоянии. Точкам пересечения годографа $W_р(j\omega)$ с отрезком действительной оси $(-\infty, -1)$ соответствуют точки, для которых $L(\omega) = 20\lg|W_р(j\omega)| > 0$ и $\varphi(\omega) = \arg W_р(j\omega) = -\pi, -3\pi, -5\pi, \ldots$. Точки логарифмической фазовой характеристики $\varphi(\omega)$, для которых $L(\omega) > 0$ и в которых она пересекает (при возрастании ω) прямые $-\pi$, -3π, -5π снизу вверх, условимся называть положительными переходами, а сверху вниз — отрицательными переходами логарифмической характеристики (рис. 7.15, *а*). Тогда критерий устойчивости может быть сформулирован следующим образом. *Система автоматического регулирования устойчива, если разность между числами положительных и отрицательных переходов логарифмической характеристики равна $\frac{m}{2}$, где m — число корней характеристического уравнения разомкнутой системы, лежащих в правой полуплоскости.*

При $m = 0$ (система устойчива или нейтральна в разомкнутом состоянии) формулировка принимает следующий вид: *система устойчива, если разность между числами положительных и отрицательных переходов логарифмической характеристики равна нулю.*

На рис. 7.15, *б, в, г* показаны характеристики системы, устойчивой в разомкнутом состоянии $(m = 0)$. Из логарифмических характеристик следует, так же как и из частотного годографа, что система в замкнутом состоянии устойчива.

Применяя частотные методы, можно сделать ряд общих выводов относительно устойчивости систем, состоящих из интегрирующих, инерционных (устойчивых и неустойчивых) и колебательных звеньев. Так, например, при наличии двух интегрирующих звеньев частотный годограф оказывается повернут по

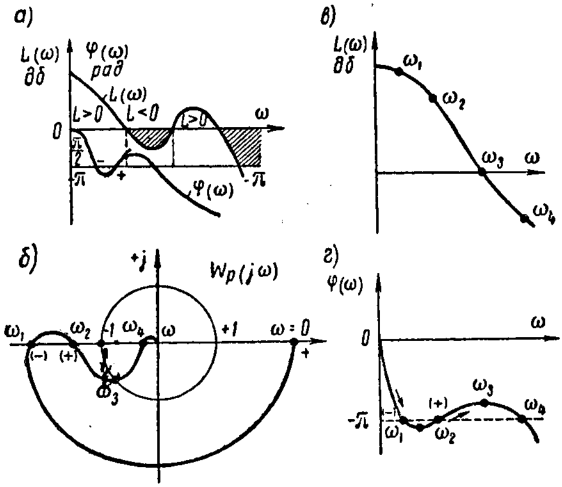


Рис. 7.15

часовой стрелке относительно вещественной оси на угол больший, чем π, и, следовательно, система всегда неустойчива.

Системы, неустойчивые при любых значениях параметров, называются структурно неустойчивыми.

Можно аналогично показать, что наличие двух неустойчивых инерционных звеньев или одного интегрирующего и одного неустойчивого инерционного достаточно для того, чтобы система была структурно неустойчивой.

Вопросы структурной устойчивости разработаны М. А. Айзерманом [Л. 2].

Введение дифференцирующих и форсирующих звеньев деформирует годограф, поворачивая его против часовой стрелки, и может обеспечить устойчивость системы при определенных значениях параметров. Коррекция систем с помощью дополнительных звеньев рассматривается в гл. XI.

§ 7.4. РАСПРОСТРАНЕНИЕ КРИТЕРИЯ НАЙКВИСТА НА ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ И ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ СИСТЕМЫ

Критерий устойчивости Найквиста, доказанный для систем, описываемых рациональными передаточными функциями, может быть применен и к системам, нейтральным или устойчивым в разомкнутом состоянии, описываемым иррациональными, показательными и трансцендентными передаточными функциями, которые при разложении в ряд сводятся к дробно-рациональным функциям со степенями числителя и знаменателя, стремящимися к бесконечности. Не приводя доказательство критерия Найквиста для каждого из случаев, остановимся на применении его к различным из указанных задач.

Устойчивость систем с иррациональными звеньями. Рассмотрим пользование критерием Найквиста для систем, содержащих звенья с иррациональными передаточными функциями, на конкретном примере.

Пример 7.9. Система регулирования объекта радиационного нагрева с передаточной функцией

$$W_1 = \frac{k_1}{\sqrt{p}}$$

имеет регулятор с передаточной функцией

$$W_2 = \frac{k_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)}.$$

Требуется найти предельное значение коэффициента усиления разомкнутой системы $k = k_1 k_2$, при котором система становится неустойчивой

Сведение нейтральной системы к устойчивой достигается введением малого параметра β и заменой W_1 передаточной функцией

$$W_1' = \frac{k_1}{\sqrt{p} + \beta}$$

при $\beta \to 0$. Построение годографа для $\beta \to 0$ дает дополнение его в бесконечности.

Годограф

$$W_p(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) = \frac{k}{\sqrt{j\omega}(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)} \quad (7.61)$$

построен на рис. 7.16. Пунктиром показано его добавление в бесконечности.

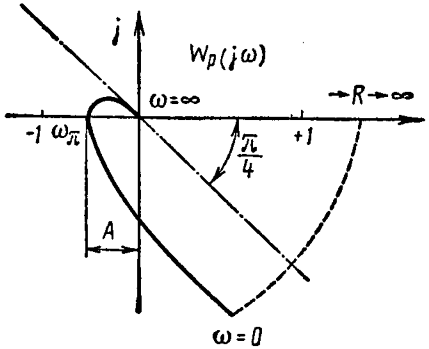


Рис. 7.16

Предельное значение коэффициента усиления $k = k_{пр}$ и частота пересечения ω_π находятся из уравнений:

$$W_p(j\omega_\pi) = -1 \quad (7.62)$$

или

$$\sqrt{j\omega_\pi}(1 + j\omega_\pi T_1)(1 + j\omega_\pi T_2) = -k_{пр}. \quad (7.62')$$

Подставив $\sqrt{j} = \frac{1 + j}{\sqrt{2}}$ и выделив уравнения для мнимых и действительных частей

$$\sqrt{\omega_\pi}\,[1 - \omega_\pi(T_1 + T_2) - \omega_\pi^2 T_1 T_2] = -\sqrt{2}\,k_{пр}$$

и
$$1+\omega_\pi(T_1+T_2)-\omega_\pi^2 T_1 T_2=0,$$

находим

$$\omega_\pi=\frac{T_1+T_2+\sqrt{T_1^2+6T_1T_2+T_2^2}}{2T_1T_2} \tag{7.63}$$

и

$$k_{\text{пр}}=\sqrt{2}\,\omega_\pi^{-3/2}(T_1+T_2). \tag{7.64}$$

Решение уравнений (7.62) для любого вида функции W_2 может быть наглядно выполнено графически. Если $W_\text{р}(j\omega_\pi)$ представить в виде

$$W_\text{р}(j\omega_\pi)=\frac{k_{\text{пр}}}{\sqrt{j\omega_\pi}}W_0(j\omega_\pi), \tag{7.65}$$

где $W_0=\frac{W}{k}$, то уравнение (7.62) можно записать как

$$W_0(j\omega_\pi)=-\frac{\sqrt{j\omega_\pi}}{k_{\text{пр}}}. \tag{7.66}$$

Значения ω_π и $k_{\text{пр}}$ могут быть найдены по точкам пересечения годографа $W_0(j\omega_\pi)$ и прямой, проходящей под углом $\arg(-\sqrt{j})=-\frac{3\pi}{4}$ по отношению к вещественной оси (рис. 7.17).

Отрезок этой прямой A_1 равен $\frac{\sqrt{\omega_\pi}}{k_{\text{пр}}}$ и, следовательно,

$$k_{\text{пр}}=\frac{\sqrt{\omega_\pi}}{A_1}. \tag{7.67}$$

Устойчивость систем с запаздыванием. Возможность применения критерия Найквиста к рассмотрению систем с запаздыванием была обоснована Я. З. Цыпкиным в 1947 г.

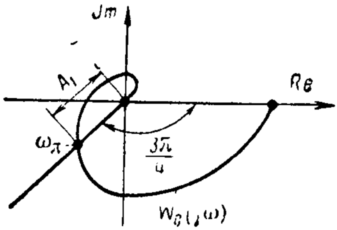


Рис. 7.17

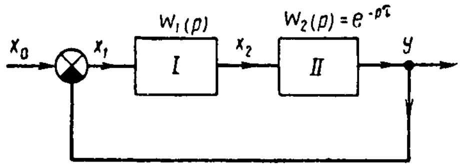


Рис. 7.18

Пусть дана система автоматического регулирования с запаздывающим звеном (рис. 7.18). Передаточная функция $W_1(p)$ звена I выражается дробно-рациональной функцией от p, передаточная функция $W_2(p)$ соответствует запаздывающему звену II со временем запаздывания τ и имеет вид $e^{-p\tau}$.

Передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W_\text{р}(p)=W_1(p)\,e^{-p\tau}. \tag{7.68}$$

Система без запаздывающего звена ($\tau \to 0$) называется *предельной системой*. Ее передаточная функция в разомкнутом состоянии

$$W_1(p). \tag{7.69}$$

Частотные характеристики системы с запаздыванием и без него определяются соответственно выражениями:

$$W_p(j\omega) = W_1(j\omega) e^{-j\omega\tau} \tag{7.70}$$

и

$$W_1(j\omega).$$

Из рассмотрения (7.70) видно, что для построения частотного годографа системы с запаздыванием следует построить годограф системы без запаздывания (предельной системы) и каждый вектор этого годографа повернуть по часовой стрелке

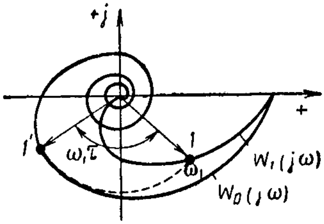


Рис. 7.19

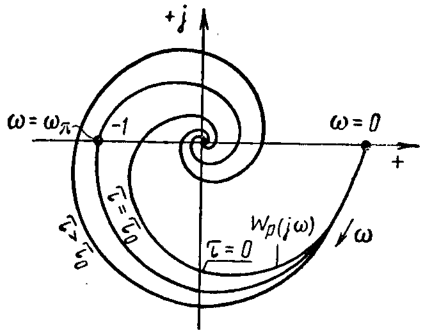


Рис. 7.20

на угол $\omega\tau$. При возрастании ω значение $\omega\tau$ возрастает (точки $1-1'$ на рис. 7.19). Поскольку при больших значениях ω модуль $W_1(j\omega)$ обычно мал, то годограф системы с запаздыванием закручивается вокруг нуля.

Допустим, что предельная система устойчива. Тогда, согласно критерию устойчивости Найквиста для устойчивых в разомкнутом состоянии систем, годограф не должен охватывать точку -1, $j0$ (рис. 7.20). Будем теперь увеличивать τ от нуля и следить за деформацией годографа $W_p(j\omega)$.

Может получиться, что для некоторого значения $\tau = \tau_0$ при $\omega = \omega_\pi$ годограф пройдет через точку -1, $j0$. Причем, при $\tau < \tau_0$ годограф $W_p(j\omega)$ не охватывает точку $(-1, j0)$, а при $\tau > \tau_0$ он охватывает ее. Это соответствует тому, что при $\tau = \tau_0$ система находится на границе устойчивости.

При дальнейшем увеличении τ точка -1, $j0$ окажется внутри годографа и, следовательно, система станет неустойчивой.

Если дальше увеличивать τ, то это может привести к тому, что характеристика $W_p(j\omega)$, деформируясь, снова не будет охватывать точку -1, $j0$ и система вновь станет устойчивой. Дальнейшее увеличение τ может опять привести к неустойчивости. Значения τ, при которых $W_p(j\omega)$ проходит через точку -1, $j0$, называются *предельными*. Эти предельные значения τ_0 и частоты ω_π определяются из уравнения

$$W_p(j\omega_\pi) = W_1(j\omega_\pi)e^{-j\tau_0\omega_\pi} = -1, \qquad (7.71)$$

которое эквивалентно уравнениям:

$$\text{mod}\, W_p(j\omega_\pi) = \text{mod}\, W_1(j\omega_\pi) = 1; \qquad (7.72)$$

$$\arg W_p(j\omega_\pi) = \arg W_1(j\omega_\pi) - \omega_\pi\tau_0 = -\pi(2m+1). \qquad (7.73)$$

Из (7.73) следует, что предельные значения τ_0 можно найти из условия

$$\tau_0 = \frac{\pi - \varphi}{\omega_\pi} + \frac{2m\pi}{\omega_\pi} = \frac{\gamma}{\omega_\pi} + \frac{2m\pi}{\omega_\pi}, \qquad (7.74)$$

где $\varphi = -\arg W_1(j\omega_\pi)$,

γ — угол между вектором $W_p(j\omega_\pi)$ и отрицательным направлением действительной оси.

Уравнение (7.71) наглядно может быть решено графически. Для этого на плоскости $W(j\omega)$ проведем окружность единичного радиуса (рис. 7.21).

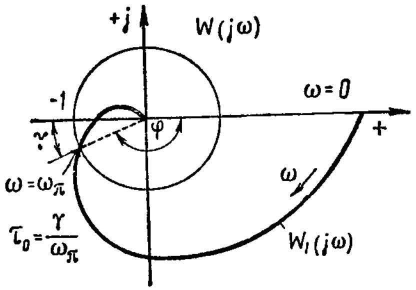


Рис. 7.21

Точки пересечения годографа $W_1(j\omega)$ с этой окружностью определят частоты пересечения ω_π, а отношения углов γ к значениям ω_π — предельные времена запаздывания. Таких точек может быть несколько.

Для систем с запаздыванием часто основное значение имеет минимальное предельное время запаздывания τ_{01}. Условие устойчивости для этих систем может быть записано в виде $\tau < \tau_{01}$.

Заметим, что если годограф $W_1(j\omega)$ целиком лежит в окружности единичного радиуса, т. е. нет точек пересечения, то система устойчива при любом значении τ.

Пример 7.10. Система регулирования состоит из инерционного звена с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{k_1}{1 + pT_1}$$

и звена запаздывания с передаточной функцией

$$W_2(p) = e^{-p\tau}.$$

Требуется определить предельное время запаздывания τ, при котором система устойчива, если $k_1 > 1$.

Уравнение (7.72) для этого случая имеет вид

$$k_1^2 = 1 + \omega_\pi^2 T_1^2,$$

откуда

$$\omega_\pi^2 = \frac{k_1^2 - 1}{T_1^2}. \qquad (7.75)$$

Зная ω_π, можно найти

$$\varphi = -\arg W_1(j\omega_\pi) = \operatorname{arc\,tg}(\omega_\pi T_1) \qquad (7.76)$$

и по формуле (7.74) определить предельное значение времени запаздывания. Годограф $W_1(j\omega)$ для данного случая показан на рис. 7.22, где

$$\tau_0 = \frac{\pi - \varphi}{\omega_\pi} = \frac{\pi - \operatorname{arctg}\omega_\pi T_1}{\omega_\pi}. \qquad (7.77)$$

При $\tau < \tau_0$ система устойчива. При $\tau > \tau_0$ система неустойчива.

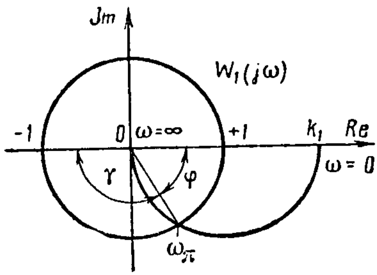


Рис. 7.22

Пример 7.11. Система состоит из инерционного и инерционно-дифференцирующего звеньев, передаточная функция которых

$$W_1(p) = \frac{kpT_2}{(1 + pT_1)(1 + pT_2)},$$

и звена запаздывания с передаточной функцией

$$W_2(p) = e^{-p\tau}.$$

Требуется определить значения времени запаздывания, при которых система устойчива.

Уравнение (7.72) для этого случая имеет вид

$$k_1^2 = \left(\frac{T_1 + T_2}{T_2}\right)^2 + \left(\omega_\pi T_1 - \frac{1}{\omega_\pi T_2}\right)^2$$

или

$$\omega_\pi T_1 - \frac{1}{\omega_\pi T_2} = \pm\sqrt{k_1^2 - \left(\frac{T_1 + T_2}{T_2}\right)^2} = \pm a,$$

откуда

$$\omega_{\pi_1} = \frac{+a + \sqrt{a^2 + 4\frac{T_1}{T_2}}}{2T_1},$$

$$\omega_{\pi 2} = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 4\frac{T_1}{T_2}}}{2T_1}; \qquad (7.78)$$

при этом

$$\omega_{\pi 1} > \omega_{\pi 2}.$$

Таким образом, для рассматриваемого случая существуют две частоты пересечения $\omega_{\pi 1}$ и $\omega_{\pi 2}$, которым соответствуют два различных угла φ:

$$\varphi_1 = \operatorname{arctg}\frac{\omega_{\pi 1}^2 T_1 T_2 - 1}{\omega_{\pi 1}(T_1 + T_2)};$$

$$\varphi_2 = \operatorname{arctg}\frac{\omega_{\pi 2}^2 T_1 T_2 - 1}{\omega_{\pi 2}(T_1 + T_2)}. \qquad (7.79)$$

Из построения, выполненного на рис. 7.23, видно, что $\varphi_1 > 0$, а $\varphi_2 < 0$ и, следовательно, $\gamma_1 = \pi - \varphi_1 < \gamma_2 = \pi - \varphi_2$.

Рассматривая последовательно увеличение τ от нуля до бесконечности, для данной системы на основании уравнения (7.74) можно сделать вывод,

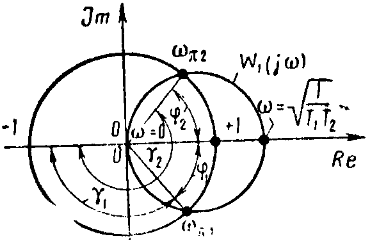


Рис. 7.23

что при $\tau < \frac{\gamma_1}{\omega_{\pi 1}} = \tau_{01}$ система устойчива; при $\tau_{01} < \tau < \frac{\gamma_2}{\omega_{\pi 2}} = \tau_{02}$ система неустойчива.

Дальнейшее повышение τ приводит систему в устойчивое состояние. При $\tau_{02} < \tau < \tau_{\pi 1} + \frac{2\pi}{\omega_{\pi 1}}$ система устойчива.

Далее при $\tau_{01} + \frac{2\pi}{\omega_{\pi}} < \tau < \tau_{02} + \frac{2\pi}{\omega_{\pi 2}}$ система неустойчива и т. д. Области устойчивого и неустойчивого состояния в зависимости от времени запаздывания показаны на рис. 7.24.

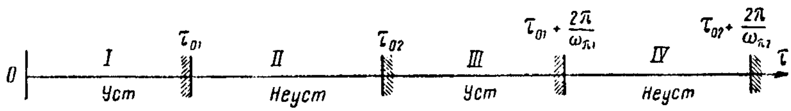


Рис. 7.24

§ 7.5. СРАВНЕНИЕ КРИТЕРИЕВ УСТОЙЧИВОСТИ

Выше были рассмотрены критерии устойчивости систем автоматического регулирования. Укажем, когда наиболее целесообразно применять тот или иной критерий.

Критерий устойчивости Гурвица целесообразно применять, когда характеристическое уравнение имеет степень не выше четырех $(n \leqslant 4)$.

Критерий устойчивости Рауса дает быстрый ответ при численно заданных коэффициентах; им целесообразно пользоваться, когда $n > 4$.

Критерий устойчивости Михайлова целесообразно применять при исследовании сложных многоконтурных систем, когда необходимо выяснить влияние изменения структуры системы и средств стабилизации на ее устойчивость.

Критерий устойчивости Найквиста, в его инверсной или обычной форме, целесообразно применять при исследовании сложных систем. Этот критерий оказывается единственно применимым, когда часть или все характеристики отдельных элементов системы заданы экспериментально. Он применим при анализе систем, описываемых аналитическими функциями, отличными от дробно-рациональных, например иррациональными, показательными, трансцендентными и др. Им удобно пользоваться при анализе систем с запаздыванием.

Глава VIII

ВЛИЯНИЕ ПАРАМЕТРОВ СИСТЕМЫ НА ЕЕ УСТОЙЧИВОСТЬ

§ 8.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Все приведенные в гл. VII критерии устойчивости дают возможность при заданных параметрах системы делать заключение о том, устойчива она или нет. С помощью этих критериев возможно проследить влияние некоторых параметров на устойчивость системы, определить предельные значения коэффициента усиления системы и времени запаздывания.

Для исследования влияния различных параметров системы на ее устойчивость разработаны специальные методы, позволяющие облегчить исследование.

Рассмотрение влияния параметров на устойчивость системы может производиться двумя основными методами: а) путем анализа перемещения корней характеристического уравнения в плоскости корней и б) путем анализа числа корней характеристического уравнения, лежащих в правой полуплоскости, в пространстве параметров системы.

Первый метод получил название *метода корневых годографов,* а второй — *метода D-разбиения пространства параметров.* Метод корневых годографов был предложен Теодорчиком в 1948 г., разработан Удерманом (Москва) в 1949 г. [Л. 19] и Эвансом (США) в 1950 г. Метод D-разбиения был предложен и разработан в 1948 г. Неймарком (г. Горький) [Л. 14].

§ 8.2. МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

Корневым годографом называется геометрическое место корней характеристического уравнения при изменении одного из параметров системы от нуля до бесконечности.

Пусть характеристическое уравнение системы n-го порядка представлено в виде

$$A(p) = P(p) + vQ(p) = 0, \tag{8.1}$$

где

v — переменный параметр системы,

$P(p)$ и $Q(p)$ — полиномы от p.

Тогда для нахождения корневого годографа необходимо найти перемещение всех n корней характеристического уравнения при $0 < v < \infty$.

Не ограничивая общность рассмотрения задачи, можно всегда выбрать так единицу измерения параметра v, чтобы коэффициенты при высших степенях p в выражениях $P(p)$ и $Q(p)$ обращались в единицу, т. е. чтобы

$$P(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n, \tag{8.2}$$

а

$$Q(p) = p^r + b_1 p^{r-1} + \ldots + b_r. \tag{8.3}$$

Тогда, найдя корни уравнений $P(p) = 0$, обозначаемые $z_1, z_2, \ldots, z_n$, и $Q(p) = 0$, обозначаемые $q_1, q_2, \ldots, q_r$, можно уравнение (8.1) записать как

$$\prod_n (p - z_i) + v \prod_r (p - q_i) = 0 \tag{8.4}$$

или для $v \neq 0$

$$\frac{1}{v} \prod_n (p - z_i) + \prod_r (p - q_i) = 0. \tag{8.5}$$

При этом соответствующим выбором переменного параметра v всегда можно соблюсти условие $n \geqslant r$.

Если корни уравнения (8.1) или, соответственно, (8.4) и (8.5) обозначить через p_i, то из рассмотрения уравнений (8.4) и (8.5) можно утверждать, что при $v = 0$ корни p_i совпадают с корнями z_i, а при $v = \infty$ корни p_i совпадают с q_i или уходят в бесконечность.

Так как все комплексные корни характеристического уравнения в плоскости корней симметричны относительно действительной оси, то на основании изложенного можно сформулировать следующее правило построения корневого годографа.

Правило 1. *Корневой годограф симметричен относительно действительной оси и состоит из n ветвей, выходящих из n нулей уравнения $P(p) = 0$ при $v = 0$, из них r ветвей заканчиваются в r нулях уравнения $Q(p) = 0$, а $n - r$ ветвей уходят в бесконечность при $v \to \infty$.*

Остановимся на $n - r$ асимптотических кривых корневого годографа при $r < n$ для $v \to \infty$. Для этого представим уравнение (8.4) в следующем виде:

$$-v = \frac{\prod_n (p - z_i)}{\prod_r (p - q_i)} = \frac{P(p)}{Q(p)}. \tag{8.6}$$

Числитель и знаменатель уравнения (8.6) имеют вид полиномов (8.2) и (8.3), причем $a_1 = -\sum_n z_l$, а $b_1 = -\sum_r q_l$. Производя деление числителя на знаменатель, получим

$$-v = p^{n-r} + c_1 p^{n-r-1} + c_2 p^{n-r-2} + \ldots, \tag{8.7}$$

где

$$c_1 = a_1 - b_1 = \sum_r q_l - \sum_n z_l. \tag{8.8}$$

Выражение (8.7) представляет собой в общем случае сумму бесконечного ряда членов с уменьшающимися до $-\infty$ степенями переменной p.

При $|p| \to \infty$, что соответствует асимптотическим кривым, существенную роль играют только первые два члена ряда, поэтому ограничимся рассмотрением коэффициентов только при этих членах.

При $|p| \to \infty$ выражение (8.7) вырождается в уравнение $n-r$ лучевой симметричной звезды. Действительно, параметрическое уравнение $n-r$ лучевой симметричной звезды с центром в точке с координатой x_0 имеет вид

$$-v = (p - x_0)^{n-r}, \tag{8.9}$$

где v изменяется от нуля до бесконечности.

При $n - r = 1$ эта звезда представляет собой полупрямую, уходящую по действительной оси в отрицательном направлении из точки x_0 в бесконечность (рис. 8.1,*а*). При $n - r = 2$ звезда имеет два луча, уходящих из точки x_0 в направлениях $+j$ и $-j$ в бесконечность (рис. 8.1,*б*). Соответственно, по мере увеличения $n - r$ количество лучей звезды возрастает (рис. 8.1, *в*, *г*, *д* и *е*).

Записав равенство модулей и аргументов для уравнения (8.9), получаем

$$\operatorname{mod}(p - x_0) = \sqrt[n-r]{v} \tag{8.10}$$

и

$$\arg(p - x_0) = \frac{\pi(2k+1)}{n-r}. \tag{8.11}$$

При этом имеется в виду, что $-1 = e^{-j\pi(2k+1)}$, где k — любое целое число.

Из уравнения (8.11) следует, что угол между двумя соседними лучами звезды равен $\frac{2\pi}{n-r}$, а угол между действительной осью и ближайшим (к ней) лучом равен $\frac{\pi}{n-r}$.

Уравнение (8.9) можно записать, воспользовавшись формулой бинома Ньютона, в более близкой к уравнению (8.7) форме

$$-v = p^{n-r} - (n-r)\,p^{n-r-1}x_0 + \\ + \frac{(n-r)\cdot(n-r-1)}{2!}\,p^{n-r-2}x_0^2 + \dots . \qquad (8.12)$$

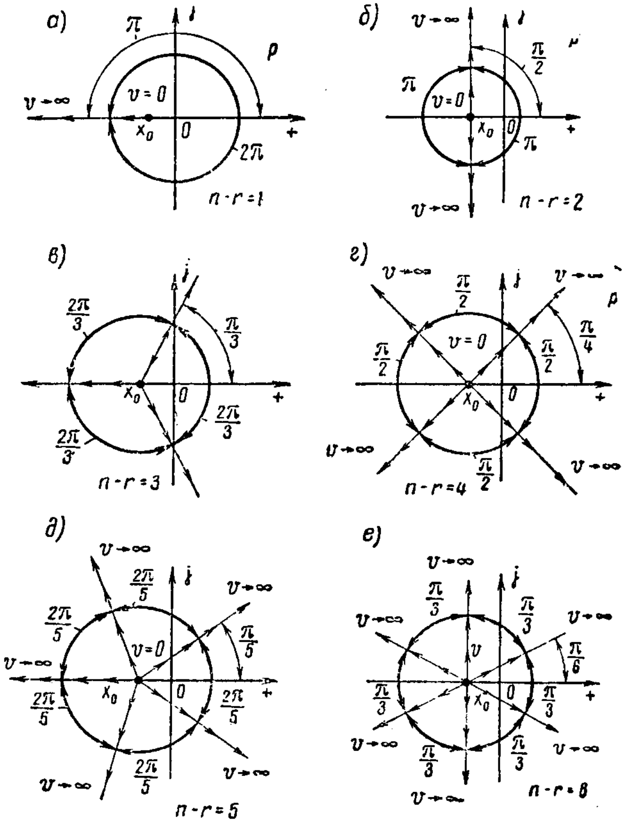


Рис. 8.1

Сравнивая уравнения (8.12) и (8.7), можно установить, что при $|p|\to\infty$ и, соответственно, $v\to\infty$, когда можно ограничиться только первыми двумя членами, уравнения совпадают, если $c_1 = -(n-r)\,x_0$.

Выразив c_1 через z_i и q_i по формуле (8.8) и решив полученное уравнение относительно x_0, находим

$$x_0 = \frac{\sum\limits_n z_i - \sum\limits_r q_i}{n-r}. \qquad (8.13)$$

Выражение (8.13) является формулой для определения центра тяжести системы тел с весами $+1$ и -1.

Таким образом, для построения асимптотического корневого годографа можно сформулировать следующее правило.

Правило 2. *Асимптотический корневой годограф для $v \to \infty$ представляет собой симметричную $n-r$ лучевую звезду с центром в точке, соответствующей центру тяжести корней уравнений $P(p)=0$ и $Q(p)=0$, если корням уравнения $P(p)=0$ приписать вес $+1$, а корням уравнения $Q(p)=0$ — вес -1. Лучи звезды образуют между собой углы, равные $\frac{2\pi}{n-r}$, а ближайший к действительной оси луч повернут по отношению к ней на угол $\frac{\pi}{n-r}$.*

Сформулированные правила дают возможность определить участки начала и конца ветвей корневого годографа при $v \to 0$ и $v \to \infty$. При промежуточных значениях параметра перемещение корней с изменением v происходит либо по действительной оси, либо в комплексной плоскости.

Для построения годографа важно знать направление перемещения корней и точки отделения их от действительной оси. Для этого уравнение (8.6) представляют в виде

$$\frac{P(p)}{Q(p)} = f(p) = -v \qquad (8.14)$$

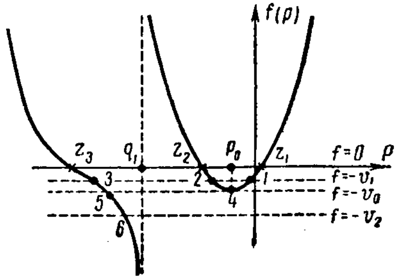


Рис. 8.2

и, полагая p вещественным, строят $f(p)$. Точки пересечения этой кривой с прямой $-v$ дают значения корней при заданном значении v. Точки экстремума, в которых $\frac{df(p)}{dp}=0$ или $Q(p)\frac{dP(p)}{dp} - P(p)\frac{dQ(p)}{dp} = 0$, определяют точки отделения корней от действительной оси и переход в область комплексных значений.

Пример функции $f(p)$ показан на рис. 8.2. Здесь при $v=0$ все три корня характеристического уравнения лежат на действительной оси в точках z_1, z_2 и z_3. По мере увеличения v перемещение этих корней определяется точками пересечения кривой $f(p)$ и прямой $f=-v$. Так, при $v=v_1$ корни характеристического уравнения выражаются абсциссой точек *1*, *2* и *3*. Из построения очевидно, что корни *2* и *3* перемещаются вправо, а корень *1* — влево. При $v=v_0$ корни *1* и *2* в точке *4* встречаются, при этом они равны друг другу $p_1 = p_2 = p_0$ и дальнейшее увеличение v отделяет эти корни от действительной оси. При $v > v_0$ на действительной оси остается только один корень p_3 (точка *6*), который с возрастанием v приближается к точке q_1, достигая ее при $v \to \infty$.

На основании аналогичных построений можно сформулировать следующее правило построения корневого годографа.

Правило 3. *Перемещение корней по вещественной оси может быть определено по точкам пересечения вспомогательной функции* $f(p) = \frac{P(p)}{Q(p)}$ *и прямой* $f = -v$. *Отделение корневого годографа от вещественной оси происходит в точке, где* $\frac{df}{dp} = 0$.

Значение параметра v, при котором система из устойчивой переходит в неустойчивую, определяется по точкам пересечения корневого годографа и мнимой оси плоскости p.

На основании приведенных правил могут быть построены корневые годографы для различных случаев изменения параметров систем регулирования.

Пример 8.1. Построить корневой годограф для системы регулирования с передаточной функцией

$$W(p) = \frac{k}{p(1 + pT_1)(1 + pT_2)}$$

при изменении k от нуля до бесконечности, если $T = 0{,}1$ *сек* и $T_2 = 0{,}02$ *сек*.

Уравнение (8.1) для этого случая имеет вид

$$A(p) = p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right) + \frac{k}{T_1 T_2} = 0.$$

Соответственно,

$$P(p) = p\left(p + \frac{1}{T_1}\right)\left(p + \frac{1}{T_2}\right),$$

$$Q(p) = 1,$$

$$v = \frac{k}{T_1 T_2}.$$

Таким образом,

$$n = 3,\ r = 0,\ z_1 = 0,\ z_2 = -\frac{1}{T_1} = -10\ \frac{1}{сек},\ z_3 = -\frac{1}{T_2} = -50\ \frac{1}{сек}.$$

Так как $n - r = 3$, то асимптотический корневой годограф имеет вид трехлучевой звезды (см. рис. 8.1, *в*) с центром в точке, определяемой по формуле (8.1 3),

$$x_0 = \frac{-10 - 50}{3} = -20\ \frac{1}{сек}.$$

Для нахождения перемещения корней и точки отделения построим график $f(p) = p(p+10)(p+50)$, показанный на рис. 8,3, а.

Точка отделения определяется из условия

$$\frac{df}{dp} = 0$$

или

$$3p^2 + 120p + 500 = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$p_0 = -20 + \sqrt{400 - \frac{500}{3}} \cong -5 \frac{1}{сек}.$$

Здесь из двух точек экстремума функции $f(p)$ выбрана точка, соответствующая $f(p) = -v < 0$.

В точке отделения значение

$$v_0 = -p_0(p_0+10)(p_0+50) = 1125 \frac{1}{сек^3}.$$

Значение v в точках пересечения годографа с мнимой осью $v_{\text{пр}}$ определяется из уравнения $A(j\omega) = 0$

$$v_{\text{пр}} = \frac{k_{\text{пр}}}{T_1 T_2} = \frac{T_1 + T_2}{T_1^2 T_2^2} = 30\,000 \frac{1}{сек^3},$$

для которого

$$p = \pm j\omega_0 = \pm j\sqrt{z_2 z_3} \cong \pm j\,22{,}4 \frac{1}{сек}.$$

Годограф, построенный на основании трех асимптот, трех корней при $v = 0$, точки отделения при $v = v_0$ и точек пересечения с мнимой осью при $v = v_{\text{пр}}$, изображен на рис. 8.3, *б*.

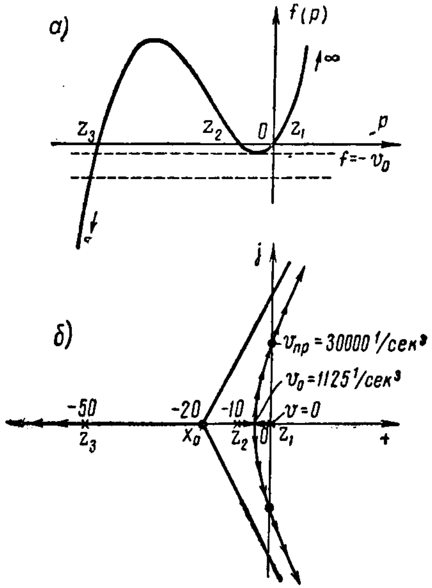


Рис. 8.3

Пример 8.2. Построить корневой годограф для той же системы, но при изменении T_2 от нуля до бесконечности, если $T_1 = 0{,}1$ *сек*, а $k = 1{,}6 \frac{1}{сек}$.

Уравнение (8.1) для этого случая имеет вид

$$A(p) = p^2\left(p + \frac{1}{T_1}\right) + \frac{1}{T_2}\left(p^2 + p\frac{1}{T_1} + \frac{k}{T_1}\right) = 0.$$

Соответственно,

$$P(p) = p^2\left(p + \frac{1}{T_1}\right)$$

и

$$Q(p) = p^2 + p\frac{1}{T_1} + \frac{k}{T_1} = (p - q_1)(p - q_2),$$

$$v = \frac{1}{T_2}.$$

Таким образом,

$$n = 3,\ r = 2,\ z_1 = z_2 = 0,\ z_3 = -\frac{1}{T_1} = -10\,\frac{1}{сек},$$

$$q_1 q_2 = \frac{k}{T_1} = 16\,\frac{1}{сек},\quad q_1 + q_2 = \frac{-1}{T_1} = -10\,\frac{1}{сек},$$

откуда $q_1 = -2\,\frac{1}{сек}$ и $q_2 = -8\,\frac{1}{сек}$.

Так как $n - r = 1$, то асимптотический корневой годограф имеет вид луча, уходящего в $-\infty$ из точки z_3. Для нахождения перемещения корней и точки отделения построим график

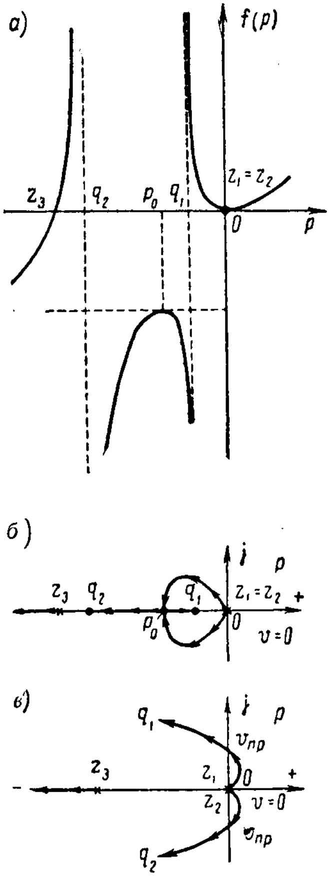


Рис. 8.4

$$f(p) = \frac{p^2(p + 10)}{(p + 2)(p + 8)},$$

показанный на рис. 8.4, *а*.

Из графика видно, что точка отделения находится в начале координат, откуда два корня сразу переходят в комплексную область. Для данных параметров системы при некотором значении $v = v_0$ эти корни встречаются на действительной оси в точке p_0 и при дальнейшем увеличении v перемещаются по вещественной оси в направлении полюсов функции $f(p)$ (в точках q_1 и q_2). Точка встречи p_0 этих полюсов определяется из уравнения $\frac{df}{dp} = 0$ и лежит между точками q_1 и q_2.

Значение v в точках пересечения годографа с мнимой осью $v_{пр}$ определяется из уравнения $A(j\omega) = 0$

$$v_{пр} = \frac{1}{T_{2пр}} = k - \frac{1}{T_1}.$$

Для данных параметров системы $v_{пр} = k - \frac{1}{T_1} = -8{,}2 < 0$ и, следовательно, при любых положительных значениях v система остается устойчивой и годограф лежит в левой полуплоскости (рис. 8.4, *б*).

Если в этом примере k больше, чем $\frac{1}{T_1}$, то годограф в определенном диапазоне изменения v перейдет в правую полуплоскость и при $v = v_{пр} = k - \frac{1}{T_1}$ будет пересекать мнимую ось. Для этого случая годограф показан ни рис. 8.4, *в*. При этом корни уравнения $Q(p)$ оказываются комплексными, и при $v \to \infty$ обе ветви годографа заканчиваются в точках q_1 и q_2, не лежащих на действительной оси. Для этого случая функция $f(p)$ в отличие от графика, изображенного на рис. 8.4, *а*, не имеет *u*-образной ветви в нижней полуплоскости.

Пусть дано характеристическое уравнение n-й степени

$$A(p) = p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_0 = 0.$$

При заданном значении коэффициентов уравнения в общем случае оно имеет m корней в правой полуплоскости, и, следовательно, $(n - m)$ корней в левой полуплоскости. При изменении коэффициентов уравнения корни его перемещаются в плоскости корней, описывая корневые годографы. При некотором значении коэффициентов один из корней попадает в начало координат или пара корней попадет на мнимую ось и поэтому значение этих коэффициентов удовлетворяет уравнению

$$A(j\omega) = (j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0. \qquad (8.15)$$

Уравнению (8.15) в $n - 1$-мерном пространстве коэффициентов, по осям которого отложены a_0, a_2, ..., a_{n-1}, соответствует точка при данном значении ω и гиперповерхность — при изменении ω в пределах от $-\infty$ до $+\infty$.

Если перемещаться в пространстве коэффициентов, т. е. если менять коэффициенты уравнения, то при некотором их значении мы пересечем гиперповерхность $A(j\omega) = 0$ и, следовательно, пара (или один корень) будет переходить из правой (левой) полуплоскости корней в левую (правую) полуплоскость корней.

Рассмотрим более подробно случай, когда $n = 3$ и характеристическое уравнение имеет вид

$$A(p) = p^3 + a_2p^2 + a_1p + a_0 = 0.$$

Каждому значению коэффициентов a_0, a_1 и a_2 в трехмерном пространстве коэффициентов (рис. 8.5) соответствует

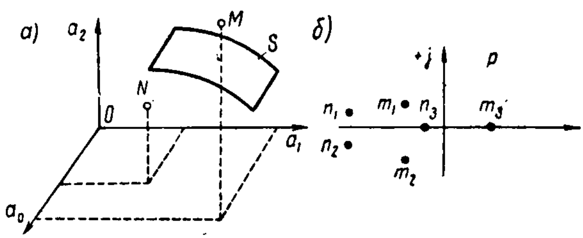


Рис. 8.5

точка. Этому значению коэффициентов уравнения соответствует определенное расположение корней уравнения в плоскости корней (рис. 8.5, *б*). Точке M соответствуют корни m_1, m_2 и m_3, точке N — корни n_1, n_2 и n_3. При некоторых значениях коэффициентов один или пара корней окажутся на мнимой оси, т. е. корни будут иметь вид 0 или $\pm j\omega_1$ и, следовательно, соответствующая точка в пространстве коэффициентов будет удовлетворять уравнению

$$A(j\omega_1) = (j\omega_1)^3 + a_2(j\omega_1)^2 + a_1(j\omega_1) + a_0 = 0.$$

Этому уравнению при $-\infty < \omega_1 < +\infty$ соответствует поверхность S, часть которой показана на рис. 8.5, *а*. При изменении коэффициентов корни характеристического уравнения тоже изменяются и попадают на мнимую ось только тогда, когда точка в пространстве коэффициентов попадает на поверхность S. При пересечении точкой поверхности корни переходят из одной полуплоскости корней в другую. Отсюда следует, что поверхность S разделяет пространство коэффициентов на области, каждой точке которых соответствует характеристическое уравнение 3-й степени, имеющее определенное число корней в правой и левой части плоскости корней. Обозначим эти области через $D(m)$, где m — число корней уравнения в правой полуплоскости. Для уравнения 3-й степени можно наметить в пространстве коэффициентов четыре области: $D(3)$, $D(2)$, $D(1)$, $D(0)$. Последняя область является областью устойчивости. Такое *разбиение пространства на области с различным значением m называется D-разбиением.*

Для уравнений более высокой степени ($n > 3$) вместо обычного трехмерного пространства приходится рассматривать многомерное пространство и гиперповерхности, разбивающие это пространство на области.

Это значительно усложняет задачу, и рассмотрение теряет наглядность. Если изменяются не все коэффициенты, а часть их, например, два a_1 и a_2, а $a_0 = \text{const}$, то вместо поверхности получаем кривую, которая является сечением поверхности S плоскостью $a_0 = \text{const}$.

Переход через границу D-разбиения соответствует, как указывалось, переходу корней уравнения через мнимую ось. Поэтому уравнение границы D-разбиения, в соответствии с ранее сказанным, имеет вид уравнения (8.15) и, следовательно, может быть получено из характеристического уравнения $A(p) = 0$ заменой p на $j\omega$. По полученным в параметрической форме уравнениям можно построить границу D-разбиения, задаваясь значениями ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Аналогичным способом можно построить D-разбиение в пространстве не коэффициентов уравнения, а параметров системы, от которых зависят коэффициенты характеристического уравнения, например, в координатах T_1, T_2, k и т. д.

§ 8.4. РАЗБИЕНИЕ ПО ОДНОМУ (КОМПЛЕКСНОМУ) ПАРАМЕТРУ

В некоторых случаях необходимо выяснить влияние какого-либо параметра v на устойчивость системы. Предположим также, как и при построении корневого годографа, что этот параметр входит линейно в характеристическое уравнение, которому можно придать вид (8.1)

$$A(p) = P(p) + vQ(p) = 0. \qquad (8.16)$$

Границы D-разбиения согласно (8.15) определяются уравнением

$$A(j\omega) = P(j\omega) + vQ(j\omega) = 0. \qquad (8.17)$$

Отсюда

$$v = -\frac{P(j\omega)}{Q(j\omega)} = X + jY. \qquad (8.18)$$

$$-\infty < \omega < +\infty$$

При построении границы D-разбиения достаточно построить ее для положительных значений $\omega (0 < \omega < +\infty)$ и затем дополнить зеркальным отображением построенного участка относительно действительной оси. Практически обычно интересует D-разбиение не всей комплексной плоскости v, а лишь ее действительной оси, которой отвечают действительные значения v.

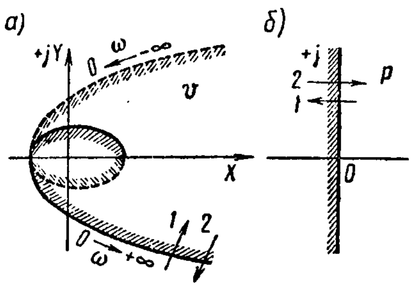


Рис. 8.6

На рис. 8.6 показан вид границы D-разбиения в плоскости $v = x + jy$. При изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$ в плоскости p мнимая ось проходит снизу вверх, при этом левая полуплоскость остается слева. Будем штриховать мнимую ось слева (рис. 8.6, *б*). Такому движению по мнимой оси соответствует движение по границе D-разбиения в плоскости v (рис. 8.6, *а*), которую будем также штриховать слева по обходу при изменении ω от $-\infty$ до $+\infty$.

Если в плоскости v пересекать границу D-разбиения по направлению штриховки (стрелка *1*, рис. 8.6, *а*), то в плоскости корней один корень переходит из правой полуплоскости в левую. Если же в плоскости v пересекать границу D-разбиения против штриховки (стрелка *2*, рис. 8.6, *а*), то в плоскости корней один корень переходит из левой полуплоскости в правую.

Направление штриховки и число штриховок определяют направление перехода корней через мнимую ось и их число. Поэтому для разметки областей $D(m)$ достаточно знать распределение корней относительно мнимой оси при каком-либо произвольном значении параметра. Переходя в плоскости v от этого значения параметра v к любому другому, по числу пересечений границы D-разбиения и направлению штриховки, можно определить значение m в любой точке. Напомним, что областью устойчивости будет область $D(0)$ и претендентом на эту область (отрезок) — область (отрезок), к которой направлена штриховка.

Обычно в линейных задачах изменяемый параметр является вещественным (коэффициент усиления, постоянная времени) и практический интерес имеет область D-разбиения, прилегающая к оси X. Рассмотрение всей области комплексного параметра представляет интерес для нелинейных задач, где может быть использован полученный результат.

Пример 8.2. Пусть дано характеристическое уравнение

$$(1+pT_1)(1+pT_2)(1+pT_3)+k=0, \tag{8.19}$$

где T_1, T_2, T_3 — заданные постоянные времени; k — общий коэффициент усиления, т. е. система состоит из трех инерционных звеньев. Требуется определить значения k, при которых система устойчива.

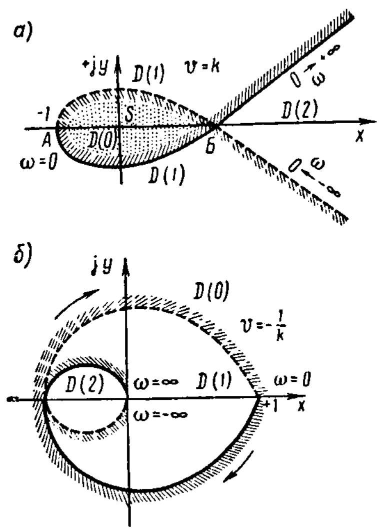


Рис. 8.7

Для решения задачи построим границу D-разбиения в плоскости комплексного параметра k и будем интересоваться лишь разбиением действительной оси, т. е. действительными значениями k.

Из (8.19) следует, что граница D-разбиения соответствует уравнению

$$v=k=-(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)(1+j\omega T_3)=x+jy. \tag{8.20}$$

Граница D-разбиения согласно (8.20) представлена на рис. 8.7, *а*. Претендентом на область устойчивости является область S, к которой направлена штриховка границы D-разбиения. Можно показать, что эта область является не только претендентом, но и самой областью устойчивости. Действительно, точка (0, 0), т. е. $k=0$, лежащая в области S, принадлежит области устойчивости $D(0)$, ибо при $k=0$ характеристическое уравнение (8.19) превращается в уравнение

$$(1+pT_1)\cdot(1+pT_2)\cdot(1+pT_3)=0,$$

все три корня $\left(p_1=-\dfrac{1}{T_1};\ p_2=-\dfrac{1}{T_2};\ p_3=-\dfrac{1}{T_3}\right)$ которого лежат в левой полуплоскости. Таким образом, система устойчива, если действительные значения k изменяются в пределах, определяемых отрезком $AБ$. Предельное значение k определяется точкой $Б$. Система устойчива и при отрицательных значениях k, если $k \geqslant -1$*.

* Отрицательным значениям k соответствует положительная обратная связь.

Для нахождения $k_{\text{пр}}$ (точка $Б$) следует определить значение ω, при котором

$$\bar{y}(\omega) = 0. \tag{8.21}$$

Пусть корень этого уравнения, отличен от нуля ($\omega = \omega_0$), тогда

$$k_{\text{пр}} = x(\omega_0). \tag{8.22}$$

Опуская вычисления, из (8.20) получим

$$\omega_0^2 = \frac{T_1 + T_2 + T_3}{T_1 T_2 T_3};$$

$$k_{\text{пр}} = x(\omega_0) = (1 + \tau_2 + \tau_3)\left(1 + \frac{1}{\tau_2} + \frac{1}{\tau_3}\right) - 1, \tag{8.23}$$

где $\tau_2 = \frac{T_2}{T_1}$; $\tau_3 = \frac{T_3}{T_1}$. Это решение совпадает с результатом, полученным в примерах 7.2 и 7.3.

На рис. 8.7, *а* показаны области $D(0)$; $D(1)$; $D(2)$. Область $D(3)$ в данном случае отсутствует; это значит, что при положительных значениях T_1, T_2 и любом значении k невозможно, чтобы все три корня уравнения (8.19) находились в правой полуплоскости.

Если в качестве переменного параметра выбрать не k, а $-\frac{1}{k}$, то для построения границы D-разбиения можно воспользоваться нормированным частотным годографом разомкнутой системы. Действительно, обозначив

$$v = W_0 = -\frac{1}{k} = \frac{1}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} = X + jY, \tag{8.24}$$

для границы D-разбиения получим годограф, аналогичный рис. 7.7 при $k = 1$. Этот график показан на рис. 8.7, *б*. Выполнив штриховку слева от границы D-разбиения и произведя разметку областей, можно установить, что система устойчива только в случае, если точка $-\frac{1}{k}$ лежит вне замкнутого контура, показанного на рис. 8.7, *б*.

§ 8.5. D-РАЗБИЕНИЕ ПО ДВУМ ПАРАМЕТРАМ

В ряде случаев необходимо выяснить влияние на устойчивость системы не одного параметра, а двух. Предположим, что эти параметры линейно входят в характеристическое уравнение и ему можно придать вид

$$\tau P(p) + \nu Q(p) + R(p) = 0, \tag{8.25}$$

где $P(p)$, $Q(p)$, $R(p)$ — полиномы от p;
τ и ν — варьируемые параметры.

Граница D-разбиения в плоскости τ и ν согласно (8.15) определяется уравнением

$$\tau P(j\omega) + \nu Q(j\omega) + R(j\omega) = 0. \tag{8.26}$$

Обозначим

$$\left.\begin{aligned} P(j\omega) &= P_1(\omega) + jP_2(\omega), \\ Q(j\omega) &= Q_1(\omega) + jQ_2(\omega), \\ R(j\omega) &= R_1(\omega) + jR_2(\omega), \end{aligned}\right\} \tag{8.27}$$

тогда уравнение (8.26) можно разбить на два уравнения, приравняв раздельно вещественную и мнимую части нулю:

$$\tau P_1(\omega) + \nu Q_1(\omega) + R_1(\omega) = 0, \tag{8.28}$$

$$\tau P_2(\omega) + \nu Q_2(\omega) + R_2(\omega) = 0. \tag{8.29}$$

Решая систему уравнений (8.28) и (8.29) относительно τ и ν, получим

$$\tau = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \tag{8.30}$$

$$\nu = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{8.31}$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} P_1(\omega), & Q_1(\omega) \\ P_2(\omega), & Q_2(\omega) \end{vmatrix}; \tag{8.32}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -R_1(\omega), & Q_1(\omega) \\ -R_2(\omega), & Q_2(\omega) \end{vmatrix}; \tag{8.33}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} P_1(\omega), & -R_1(\omega) \\ P_2(\omega), & -R_2(\omega) \end{vmatrix}. \tag{8.34}$$

При $\Delta \neq 0$ для каждого значения ω по уравнениям (8.30)÷(8.34) можно определить величины τ и ν и, таким образом, в плоскости τ и ν построить границу D-разбиения.

Из (8.30)÷(8.34) видно, что Δ, Δ_1 и Δ_2 являются нечетными функциями ω, ибо вещественные части $P(j\omega)$, $Q(j\omega)$ и $R(j\omega)$ — четные функции ω, а мнимые — нечетные функции. Отсюда следует согласно (8.30) и (8.31), что τ и ν являются четными функциями ω.

Рассмотрим случай, когда при некотором значении ω определитель Δ равен нулю ($\Delta = 0$). Тогда, если при этом значении ω определители Δ_1 и Δ_2 не равны нулю, то точка границы D-разбиения в плоскости τ и ν уходит в бесконечность. Если же при этом значении ω определители Δ_1 и Δ_2 также будут равны нулю*, то τ и ν согласно (8.30) и (8.31) будут неопределенными. Это соответствует тому, что уравнения (8.28) и (8.29) становятся эквивалентными и определяют собой прямую в плоскости τ и ν, т. е. для рассматриваемого значения ω (при котором $\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0$) получим в плоскости τ и ν не точку, а прямую, называемую *особой прямой*.

В большинстве практических задач особые прямые отвечают значению $\omega = 0$ и $\omega = \infty$. В этом случае коэффициенты, соответствующие свободному и старшему членам характеристического уравнения, зависят от τ и ν, и для получения уравнений этих особых прямых необходимо указанные коэффициенты при-

* Легко показать, что если $\Delta_1 = 0$, то и $\Delta_2 = 0$.

равнять нулю. Первый коэффициент (свободный член) дает особую прямую для $\omega=0$, второй — для $\omega=\infty$.

Рассмотренное выше решение системы уравнений (8.28) и (8.29) может быть проведено графически. На рис. 8.8 показаны прямые *1* и *2* для заданного значения ω, соответствующие уравнениям (8.28) и (8.29) для трех случаев:

1) $\Delta \neq 0$ и $\Delta_1=0$,
2) $\Delta=0$ и $\Delta_1 \neq 0$,
3) $\Delta=0$ и $\Delta_1=0$.

В первом случае точка пересечения прямых *1* и *2* определяет значения τ и ν для заданного значения ω; во втором случае прямые *1* и *2* параллельны и определяют значения τ и ν,

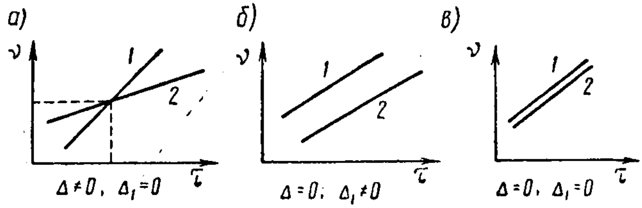


Рис. 8.8

равные бесконечности; в третьем случае прямые *1* и *2* сливаются друг с другом, и, таким образом, для заданного значения ω получается прямая, а не одна точка.

Правила штриховки границы D-разбиения. Граница D-разбиения штрихуется слева при обходе в сторону возрастающих ω, если главный определитель $\Delta>0$, и справа, если $\Delta<0$. Так как граница D-разбиения для положительных и отрицательных значений ω совпадает (величины τ и ν — четные функции ω, а Δ — нечетная функция), то она штрихуется дважды с одной и той же стороны (рис. 8.9).

При $\omega=0$ всегда $\Delta=0$, и через точку, соответствующую $\omega=0$ (и $\omega=\infty$), чаще всего, как указывалось, проходят особые прямые. Штриховка этих особых прямых ординарная и производится так, чтобы вблизи точки сопряжения прямой и кривой заштрихованные и незаштрихованные стороны прямой и кривой были направлены друг к другу (рис. 8.9, *а*, *б*, *в*).

В тех случаях, когда при $\omega \neq 0$ $\Delta_1=0$, а Δ проходит через нуль и меняет знак (это сравнительно редкий случай), появляется особая прямая; она штрихуется в этом случае по сформулированному выше правилу, но двойной штриховкой (рис. 8.9, *г*).

Если же при $\omega \neq 0$ $\Delta_1=0$, а Δ, проходя через нуль, не меняет знака, то особая прямая не штрихуется и выбрасывается из рассмотрения (рис. 8.9, *д*).

При построении границы D-разбиения по двум параметрам следует правильно ориентировать оси. Для проведенной выше записи уравнений τ следует откладывать по оси абсцисс,

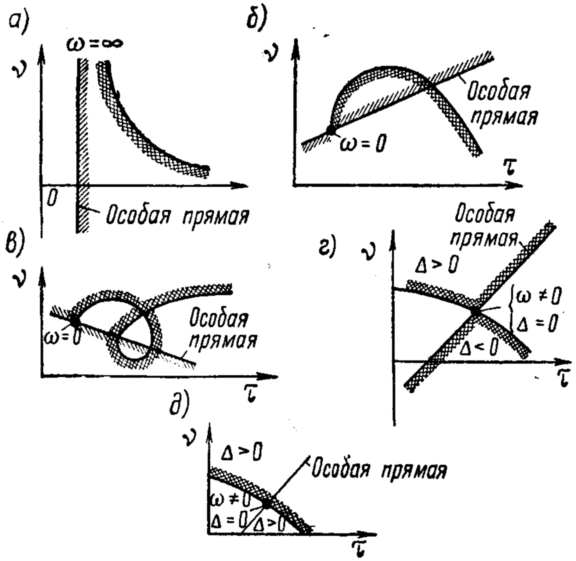


Рис. 8.9

ν — по оси ординат. В случае перемены местами осей τ и ν соответственно изменяется ориентация штриховки относительно правой и левой сторон.

Пример 8.4. Пусть дано характеристическое уравнение

$$A(p) = (1 + pT_1)(1 + pT_2)(1 + pT_3) + k = 0, \tag{8.35}$$

в котором два параметра — постоянная времени $T_1 = \tau$ и коэффициент усиления $k = \nu$ — могут варьироваться. Требуется определить влияние изменения указанных параметров на устойчивость системы.

Перепишем уравнение, выделив параметры $\tau = T_1$ и $\nu = k$

$$\tau[T_2T_3p^3 + (T_2 + T_3)p^2 + p] + \nu + T_2T_3p^2 + (T_2 + T_3)p + 1 = 0. \tag{8.36}$$

Подставим в уравнение (8.36) $j\omega$ вместо p. Согласно принятым в (8.26) и (8.27) обозначениям, получим

$$P(j\omega) = [T_2T_3(j\omega)^3 + (T_2 + T_3)(j\omega)^2 + j\omega];$$

$$Q(j\omega) = 1;$$

$$R(j\omega) = T_2T_3(j\omega)^2 + (T_2 + T_3)j\omega + 1.$$

Используя уравнения (8.30) ÷ (8.34), найдем

$$\tau = \frac{T_2 + T_3}{T_2T_3\omega^2 - 1}; \tag{8.37}$$

$$\nu = T_2T_3\omega^2 - 1 + \frac{(T_2 + T_3)^2\omega^2}{T_2T_3\omega^2 - 1}; \tag{8.38}$$

$$\Delta = (T_2T_3\omega^2 - 1)\,\omega. \tag{8.39}$$

Граница D-разбиения определяется уравнениями (8.37) и (8.38). Для облегчения построения на рис. 8.10, *а* и *б* приведены кривые $\tau(\omega)$ и $\nu(\omega)$. По ним построена граница D-разбиения (рис. 8.10, *в*). Она заштрихована по указанным правилам. При $0 < \omega < \sqrt{\frac{1}{T_3 T_2}}$ определитель $\Delta < 0$, при $\omega > \sqrt{\frac{1}{T_2 T_3}}$ определитель $\Delta > 0$.

Особые прямые получаются приравниванием нулю коэффициентов уравнения (8.36), соответствующих свободному и старшему членам:

$$\tau T_2 T_3 = 0; \tag{8.40}$$

$$\nu + 1 = 0. \tag{8.41}$$

Прямые (8.40) и (8.41), соответствующие $\omega = \infty$ и $\omega = 0$, нанесены на рис. 8.10, *в* и заштрихованы по правилам штриховки.

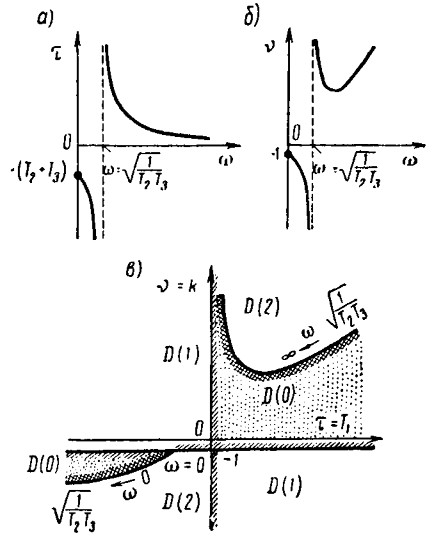


Рис. 8.10

Для разметки областей в плоскости (τ, ν) рассмотрим полупрямую $\nu = 0$ при $\tau > 0$, т. е. положительную часть оси абсцисс Уравнение (8.35) принимает при этом вид

$$A(p) = (1 + p\tau)(1 + pT_2)(1 + pT_3) = 0.$$

Следовательно, оно имеет три отрицательных действительных корня. Таким образом, положительная часть оси абсцисс принадлежит области устойчивости $D(0)$. Переходя из этой области в другие через границу D-разбиения, размечаем остальные области. Из рис. 8.10, *в* видно, что имеются две области устойчивости (они заштрихованы).

При малых значениях коэффициента усиления (k, равное ν, мало) система устойчива при любом значении $T_1 = \tau$.

При больших значениях k система устойчива лишь при достаточно малых либо при достаточно больших значениях $T_1 = \tau$.

Глава IX

КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ И ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ЕГО ИССЛЕДОВАНИЯ

§ 9.1. ПОКАЗАТЕЛИ КАЧЕСТВА

Устойчивость системы автоматического управления — необходимое, но далеко не достаточное условие рациональности ее применения. Очевидно, что устойчивая система при отработке различных воздействий может оказаться недостаточно точной, переходные процессы управления могут затухать чересчур медленно (недостаточное быстродействие), не будет обеспечена требуемая плавность изменения выхода, т. е. система не сможет достаточно хорошо осуществить автоматическое управление.

Комплекс требований, определяющих поведение системы в установившемся и переходном процессах отработки заданного воздействия, объединяется *понятием качества процесса управления* (качества системы). Требования этого комплекса выдвигаются практикой.

Задача анализа (исследования) процессов управления — установить, какое влияние оказывает структура системы и значение ее параметров на процесс управления и показатели его качества, а также выяснить, насколько та или иная система удовлетворяет предъявленным к ней требованиям.

Выбор структуры и параметров системы управления, в соответствии с требованиями качества, относится к задаче синтеза.

Рассмотрим процессы управления в устойчивых системах, ограничившись условиями, при которых можно предположить, что наиболее часто встречающиеся или наиболее тяжелые для системы воздействия могут быть наперед заданы в виде определенной (детерминированной) функции времени. Назначенные с учетом специфики работы системы детерминированные воздействия называются *типовыми*.

В подавляющем большинстве практических задач исследование системы ограничивают стандартными случаями, рассмотренными в гл. II: отработкой единичного импульса, единичного скачка, единичного сигнала постоянной скорости или гармонического сигнала.

Для этих элементарных случаев разработаны прямые показатели качества переходных процессов.

При исследовании систем программного управления бывает необходимо находить реакцию системы на произвольный сигнал, который может быть представлен степенным рядом (2.3) или (2.4).

Рассмотрим структурную схему, изображенную на рис. 9.1. На систему автоматического управления с передаточной функцией $W_з$, состоящую из объекта управления W_0, устройства

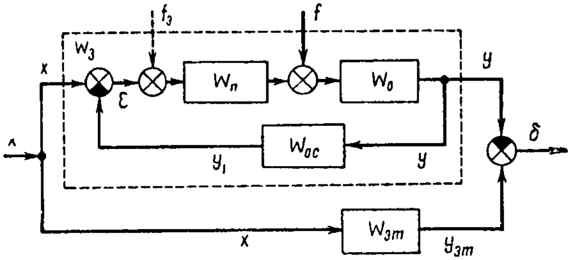


Рис. 9.1

управления в прямом тракте $W_п$ и устройства управления в цепи обратной связи $W_{о.с}$, действуют управляющий сигнал x и возмущение f.

Качество процессов отработки типовых сигналов x и f порознь оценивают либо непосредственно по управляемой переменной системы — ее выходу y, либо по ошибке системы $\delta(t)$, представляющей собою разность между выходом исследуемой системы и выходом некоторой идеальной эталонной линейной системы $W_{эт}$,

$$\delta = y_{эт} - y. \tag{9.1}$$

Согласно рис. 9.1, изображение

$$\Delta(p) = W_{эт}X - W_з X - W_f F = \left[W_{эт} - \frac{W_п W_0}{1 + W_п W_0 W_{о.с}}\right] \times$$
$$\times X - \frac{W_0}{1 + W_п W_0 W_{о.с}} F = W_\delta X - W_f F. \tag{9.2}$$

Эталонная передаточная функция должна соответствовать заданному линейному динамическому преобразованию входного сигнала $x(t)$ в требуемый сигнал $y(t)$ замкнутой системы. Так, для системы автоматического регулирования в идеальном случае y должно быть равно x, откуда $W_{эт}(p) = 1$; в системе копирования с изменением масштаба $y = kx$, откуда $W_{эт} = k$; в интеграторе требуется, чтобы $y = \frac{1}{T_0}\int_0^t x\,dt$, и, следовательно, $W_{эт} = \frac{1}{T_0 p}$. Если же исследуется реакция системы на возмущение, то обычно $W_{эт} = 0$, поскольку требуется, чтобы $y = \varepsilon = 0$ при любых изменениях $x(t) = f(t)$.

Далеко не во всех случаях целесообразно предъявлять к системе такие предельно идеализированные жесткие требования. Безынерционную систему с передаточной функцией $W_з(p)=1$ не только нельзя физически реализовать, поскольку в ней должны возникать сигналы неограниченно большой мощности, но это и нецелесообразно, так как такая система не может осуществить фильтрацию помех.

Рациональный выбор эталона сравнения $W_{эт}=W_{опт}$ с учетом задач управления и реальных возможностей аппаратуры относится к теории оптимальных систем, основы которой будут изложены во второй части курса при рассмотрении случайных воздействий.

Разность между управляющим сигналом x и выходом системы y_1 представляет собой рассогласование

$$\varepsilon(t)=x(t)-y_1(t). \tag{9.3}$$

Согласно рис. 9.1,

$$\mathrm{E}(p)=[1-W_з]X-W_fF=\left(1-\frac{W_пW_0}{1+W_пW_0W_{о.с}}\right)\times$$
$$\times X-\frac{W_0}{1+W_пW_0W_{о.с}}F=W_\varepsilon X-W_fF. \tag{9.4}$$

На рис. 9.2, *а* показан пример процесса отработки системой автоматического регулирования управляющего воздействия $x(t)$. Соответствующие графики ошибки $\delta(t)$ и рассогласования $\varepsilon(t)$ для $W_{о.с}=1$, следовательно, $y=y_1$ приведены на рис. 9.2, *б*. В качестве $y_{эт}$ выбрана некоторая гладкая кривая.

Рассмотрим прямые показатели качества этого процесса применительно к рассогласованию системы. Различают следующие показатели:

1) установившееся рассогласование, определяющее точность системы,

$$\varepsilon_{уст}(t)=\lim_{t\to\infty}\varepsilon(t). \tag{9.5}$$

В рассматриваемом частном случае $\varepsilon_{уст}=\mathrm{const}$;

2) время регулирования $t_р$, которое служит основной характеристикой быстродействия системы и определяется из условия малости переходной составляющей,

$$|\varepsilon(t)-\varepsilon_{уст}|\leqslant\delta_р \text{ при } t\geqslant t_р, \tag{9.6}$$

где $\delta_р$ — заранее заданное значение, определяемое точностью системы;

3) максимальное перерегулирование $\varepsilon_м$, которое совместно с показателями 4) и 5) характеризует плавность протекания переходных процессов (демпфирование системы). Оно определяется как наибольший выброс управляемого процесса $y(t)$

относительно установившегося $y_{уст}(t)$ (рис. 9.2, *б*). Зачастую вводят относительную (безразмерную) характеристику перерегулирования

$$\sigma = \frac{\varepsilon_м}{y_0} 100\%,$$

где y_0 — некоторое базовое значение.

4) время максимального перерегулирования $t_м$, при котором

$$\varepsilon(t_м) = \varepsilon_м; \tag{9.7}$$

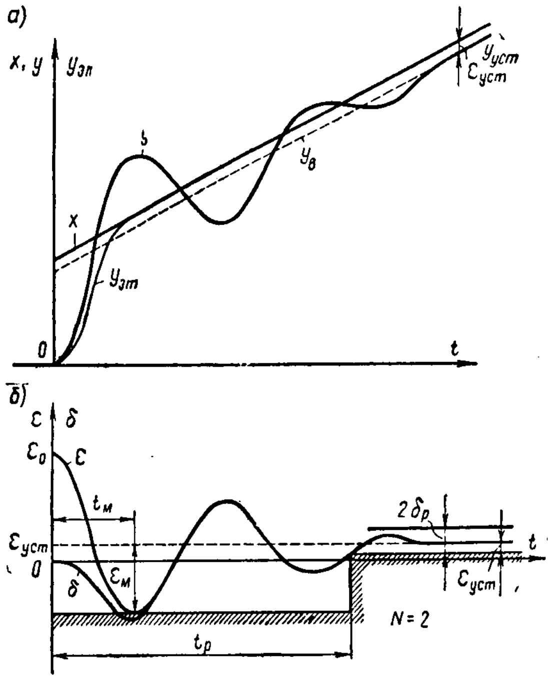


Рис. 9.2

5) число перерегулирований N в интервале $0 < t \leqslant t_р$, определяемое как число выбросов, для которых

$$\varepsilon_{уст} - \varepsilon_м > \delta_р > 0. \tag{9.8}$$

Из рис. 9.2, *б* видно, что первые три показателя определяют зону, ограничивающую рассогласование системы в ходе процесса управления. Граница этой зоны выделена на рисунке штрихованными прямыми.

С помощью аналогичных показателей можно оценить качество системы по ее выходу $y(t)$ или ошибке $\delta(t)$.

Если при исследовании качества системы автоматического регулирования принято в качестве эталона $W_{эт} = 1$ и $W_{о.с} = 1$, то

$$\varepsilon(t) = \delta(t) \tag{9.9}$$

— ошибка системы равна ее рассогласованию и структурная схема, изображенная на рис. 9.1, может быть представлена в виде схемы, показанной на рис. 9.3. Поэтому часто ошибка отождествляется с рассогласованием. На рис. 9.3 $W_р(p) = W_п(p)\,W_0(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы ($W_{о.с}(p) = 1$); $f_э$ — эквивалентное возмущение, приведенное ко входу прямого тракта. Из рис. 9.1 согласно правилам преобразования структурных схем, изложенным в гл. VI, следует, что

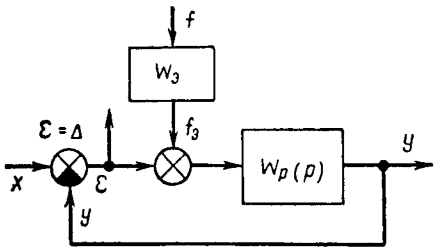


Рис. 9.3

$$F_э(p) = W_э(p)\,F(p) = \frac{1}{W_п(p)}\,F(p) \tag{9.10}$$

и

$$W_э(p) = \frac{1}{W_п(p)}.$$

Для того чтобы непосредственно применить оценку процесса управления по прямым показателям качества, необходимо построить или экспериментально зарегистрировать этот оцениваемый процесс.

Методы, позволяющие непосредственно осуществить построение исследуемого процесса, называются прямыми методами анализа качества. Как показано в гл. VI, процессы управления в замкнутой системе при заданном воздействии описываются неоднородными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, поэтому прямые методы анализа качества совпадают с методами решения уравнений этого типа.

При *классическом способе решения* сталкиваются с достаточно трудоемкими операциями решения характеристического уравнения замкнутой системы, вычислением произвольных постоянных, соответствующих заданным начальным условиям, и вариацией произвольными постоянными.

Операторный метод существенно уменьшает трудоемкость решения, сводя его к определению оригинала правой части операторного уравнения (9.4). Наличие подробных таблиц соответствия (см. приложение П.4) значительно облегчает расчеты, однако и здесь сохраняется самая трудоемкая операция — решение характеристического уравнения замкнутой системы $A(p)=0$.

Процесс управления в заведомо устойчивой линейной системе можно построить, пользуясь *частотным методом*, основанным на обратном преобразовании Фурье. В этом случае построение ведется при помощи тех же расчетных или экспериментально найденных частотных характеристик, которые обеспечивают исследование устойчивости. Решения характеристического уравнения не требуется. Инженерные графо-аналитические способы расчета до минимума снижают трудоемкость этого метода (§ 9.5).

При наличии электронных аналоговых моделирующих устройств построение процессов управления полностью механизируется. *Моделирование системы управления* можно осуществить непосредственно по ее структурной схеме (см. § 5.7).

Все перечисленные прямые методы позволяют лишь определить процесс управления при заданном воздействии и заданных параметрах системы. Связь между параметрами системы и качеством процессов управления при таком подходе может быть установлена только для простейших систем с дифференциальным уравнением второго порядка. Это значит, что основная задача исследования качества переходных процессов не может быть полностью решена с помощью прямых методов и требует применения специально разработанных в теории автоматического управления косвенных методов анализа. Изложение этих методов дается в гл. X.

По истечении времени, достаточного для затухания переходных процессов ($t > t_р$), система автоматического управления работает в установившемся режиме и ее поведение определяется вынужденной составляющей решения дифференциального уравнения.

Мерой динамической точности системы служит погрешность отработки внешнего воздействия в установившемся режиме — вынужденная составляющая ошибки $\delta_в(t)$. При этом возможны различные оценки ошибки. Наибольшее распространение получили:

максимальная ошибка

$$\delta_м = |\delta_в(t)|_м \tag{9.11}$$

и среднеквадратичная ошибка

$$\delta_{ср.кв} = \lim_{T\to\infty}\sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T[\delta_в(t)]^2dt} = \sqrt{\overline{\delta^2}}. \tag{9.12}$$

Анализ вынужденного режима может быть проведен с помощью прямых методов исследования качества.

§ 9.2. КАЧЕСТВО РЕГУЛИРОВАНИЯ ПРИ СТАНДАРТНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

Переходная функция и статическая ошибка. Общераспространенность оценки качества системы по ее переходной функции объясняется в основном простотой и наглядностью эксперимента для получения этой характеристики как на модели системы, так и в реальных условиях. Следует, однако, отметить, что в реальных условиях абсолютную величину воздействия приходится выбирать достаточно малой, чтобы в процессе его отработки система не вышла за границы области, в которой линеаризованные уравнения с заданной точностью соответствуют математическому описанию физической (нелинейной) системы. При низком уровне полезного воздействия различные помехи могут совершенно исказить результат эксперимента. В этих случаях прибегают к испытаниям модели системы, к косвенному определению переходной функции по частотным характеристикам или же к специальной методике определения $h(t)$ по результатам статистической обработки многочисленных экспериментов.

Многообразие переходных функций автоматических систем можно разбить на три типа: колебательные с перерегулированием, колебательные без перерегулирования и монотонные.

Рассмотрим применение показателей качества к оценке переходной функции системы.

Пример 9.1. Оценить качество процесса отработки единичного скачкообразного управляющего воздействия следящей системой, структурная схема которой изображена на рис. 9.4.

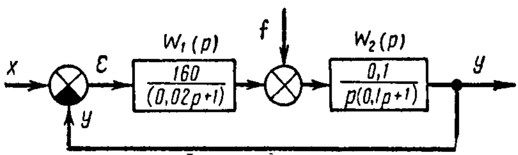


Рис. 9.4

Реакция системы на управляющее воздействие $X(p)$ изображается как

$$Y(p) = H_x(p) = \frac{K(p)}{A(p)}\cdot X(p) = \frac{k}{p(1+pT_1)(1+pT_2)+k}\cdot X(p),$$

где

$$K(p) = k = 16,\ T_1 = 0,1\ сек,\ T_2 = 0,02\ сек$$

и

$$X(p) = \frac{1}{p}.$$

Корни характеристического уравнения $A(p) = 0 = p^3 + 60p^2 + 500p + 8000$ вычислены по формуле Кардана

$$p_1 = -53,4;\ p_2 = -3,29 + j11,8;\ p_3 = -3,29 - j11,8$$

и, следовательно,

$$H_x(p) = \frac{8000}{p(p+53{,}4)(p+3{,}29-j11{,}8)(p+3{,}29+j11{,}8)}.$$

Разлагая $H_x(p)$ на простейшие дроби и переходя от изображений к оригиналам, получаем

$$h_x(t) = 1 - 0{,}0545e^{-53{,}4t} + 1{,}08e^{-3{,}29t}\sin(11{,}8t + 1{,}064).$$

Оценивая переходную функцию для $\delta_p = 0{,}05$, как показано на рис. 9.5 находим

$$h_{уст} = 1;\ t_p = 0{,}85\ сек;\ \Delta h_м = 0{,}39;$$
$$t_м = 0{,}26\ сек;\ N = 2.$$

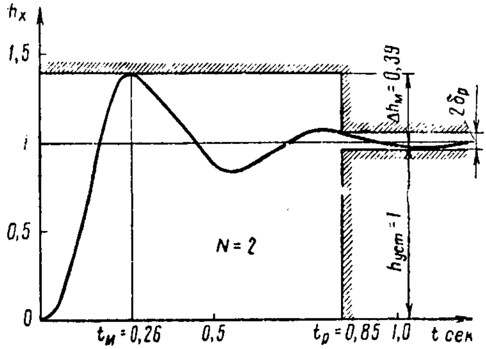


Рис. 9.5

Точность системы автоматического регулирования при отработке ступенчатого сигнала $A_0 1_0(t)$ оценивается статической ошибкой системы $\Delta_{ст}$.

Статическая ошибка по управляющему воздействию. Согласно (9.2), ошибка по управляющему воздействию

$$\delta_x(t) = L^{-1}\left\{W_\delta(p)\frac{A_0}{p}\right\},$$

и по теореме о предельном значении (см. приложение П.4) статическая ошибка

$$\Delta_{x_{ст}} = \lim_{t\to\infty}\delta_x(t) = \lim_{p\to 0}\left[pW_\delta(p)\frac{A_0}{p}\right] = W_\delta(0)A_0. \qquad (9.13)$$

Очевидно, $\Delta_{x_{ст}} = 0$ при условии, что в (9.13)

$$W_\delta(0) = \lim_{p\to 0}[W_{эт}(p) - W_з(p)] = 0. \qquad (9.14)$$

Системы, обладающие этим свойством, называются астатическими по управляющему воздействию.

Если же $W_\delta(0) \neq 0$, то *систему называют статической,* имея при этом в виду, что согласно (9.13) установившееся значение ее выхода при отработке постоянного управляющего сигнала отличается от требуемого (эталонного) значения тем больше, чем больше уровень входного сигнала.

В системах автоматического регулирования, для которых справедливо условие (9.9),

$$\Delta_{x_{\text{ст}}} = \varepsilon_{\text{ст}} = [1 - W_{\text{з}}(0)]A_0 = \frac{1}{1+k} A_0, \tag{9.15}$$

где k — коэффициент усиления разомкнутой системы.

Статическая ошибка по возмущению. При исследовании точности по возмущению из (9.2) и (9.10) следует, что

$$\delta_f(t) = L^{-1}\left\{W_{\text{з}}(p)\cdot\frac{1}{W_{\text{п}}(p)}\cdot\frac{A_0}{p}\right\}, \tag{9.16}$$

где $W_{\text{п}}(p) = \frac{K_{\text{п}}(p)}{D_{\text{п}}(p)}$ — передаточная функция участка системы между управляющим входом и входом исследуемого возмущения.

Статическая ошибка

$$\Delta_{f_{\text{ст}}} = \lim_{t\to\infty}\delta_f(t) = \lim_{p\to 0}\left[pW_{\text{з}}(p)\frac{1}{W_{\text{п}}(p)}\cdot\frac{A_0}{p}\right] = \frac{W_{\text{з}}(0)}{W_{\text{п}}(0)} A_0. \tag{9.17}$$

Для системы, астатической по возмущению, требуется, чтобы

$$\frac{W_{\text{з}}(0)}{W_{\text{п}}(0)} = \lim_{p\to 0}\frac{W_{\text{з}}(p)}{W_{\text{п}}(p)} = 0. \tag{9.18}$$

Для того чтобы система реагировала на постоянный управляющий сигнал, необходимо, чтобы $W_{\text{з}}(0) \neq 0$, откуда условие (9.18) эквивалентно требованию

$$\lim_{p\to 0}\frac{1}{W_{\text{п}}(p)} = 0. \tag{9.18,а}$$

Если условие (9.18) не выполняется, то *систему называют статической по возмущению* и статическую ошибку вычисляют по формуле

$$\Delta_{f_{\text{ст}}} = W_{\text{з}}(0)\frac{1}{k_{\text{п}}} A_0, \tag{9.19}$$

где $k_{\text{п}} = W_{\text{п}}(0)$.

Как видно из структурной схемы, изображенной на рис. 9.1, участок $W_{\text{п}}$ представляет собой обратную связь по рассматриваемому возмущению (участок от выхода системы до ввода возмущения), поэтому из (9.19) следует, что точность статической системы тем выше, чем больше коэффициент усиления цепи обратной связи (коэффициент усиления пропорционального регулятора). Однако возможность увеличения коэффициента усиления в контуре статической системы для повышения ее точности по управляющему входу и возмущениям ограничена условием качества переходных процессов и, в пределе, условием устойчивости

$$k = k_0 \cdot k_{\text{п}} < k_{\text{пр}}. \tag{9.20}$$

Это приводит к необходимости коррекции систем автоматического управления, т. е. к такому изменению структуры и параметров, при котором можно получить одновременно и высокую точность, и требуемое качество протекания переходных процессов (см. гл. II, XI).

Приведем расчет статической точности на примерах систем регулирования, уравнения которых рассмотрены в гл. VI.

Пример 9.2. Поплавковый регулятор уровня. Согласно структурной схеме, представленной на рис. 6.1, и уравнению (см. рис. 6.1, *а*),

$$\Delta_{f_{\text{ст}}} = -y_{\infty} = -\lim_{p\to 0} pY(p) = -\frac{1}{k_2}\Delta G.$$

Наклон статической характеристики системы $y(G)$ определяется отношением

$$\frac{\Delta_{f_{\text{ст}}}}{\Delta G} = -\frac{1}{k_2},$$

абсолютное значение которого характеризует статизм системы при нагрузке. Чем больше коэффициент усиления цепи обратной связи, тем меньше статизм.

Пример 9.3. Следящая система. По структурной схеме, изображенной на рис. 6.5, и формуле (6.37) для возмущения (нагрузки) $f = f_0 1_0(t)$, действующего в узле *1*,

$$Y(p) = W_{\text{в}} \cdot F(p)$$

и для $W_{\text{в}}$, выражаемой (6.39),

$$\Delta_{f_{\text{ст}}} = \frac{f_0}{k_3}.$$

Таким образом, рассматриваемая следящая система является статической по отношению к моменту нагрузки на валу, вызывающему возмущение в узле *1*.

По отношению к управляющему воздействию $x = u_0$, действующему в узле *2*, следящая система является астатической. Действительно, в этом случае величина рассогласования ε_1, при скачкообразном изменении задания $x = x_0 1_0(t)$,

$$E_1(p) = W_{\varepsilon}(p)X(p) = (1 - W_y)X(p).$$

Из уравнения (6.38) следует, что в этом случае $W_{\varepsilon}(0) = 0$ и выполняется условие астатизма (9.14). Установившееся значение рассогласования равно нулю, что соответствует точной отработке постоянного управляющего сигнала.

Импульсная переходная функция. Качество систем, подверженных импульсному (ударному) воздействию, а также систем, выход которых должен воспроизводить интеграл от входного сигнала, естественно оценивать по реакции системы на импульс. Системы управления с таким режимом работы широко распространены в практике (см. гл. XII—XIV), кроме того, импульсное воздействие зачастую удобно при экспериментальном определении качества реальных систем и их моделей.

Для определения качества по импульсной переходной функции $w(t)$ могут быть применены те же оценки, что и для определения рассогласования системы.

Заметим, что для устойчивых замкнутых систем (§ 2.4) статическое отклонение весовой функции

$$w_{\text{уст}} = \lim_{t \to \infty} w(t) = 0. \tag{9.21}$$

Нарушение этого условия характеризует интегрирующую (нейтральную) систему, для которой

$$A(p) = pA_1(p), \tag{9.22}$$

и уравнение (2.34) может быть записано в форме

$$w(t) = \frac{B(0)}{A_1(0)} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{B(p_i)}{p_i A_1'(p_i)} e^{p_i t}, \tag{9.23}$$

откуда следует, что весовая функция нейтральной системы (интегратора) характеризует ее качество так же, как переходная функция — качество устойчивой системы.

Пример 9.4. Определить реакцию на единичный управляющий импульс (весовую функцию) для следящей системы, рассмотренной в примере 9.1, и для привода постоянной скорости (электромеханического интегратора), структурная схема которого представлена на рис. 9.6.

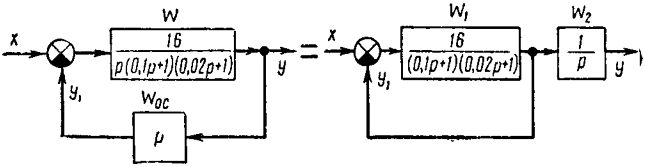


Рис. 9.6

Поскольку переходная функция следящей системы по управляющему входу уже определена в примере 9.1, найдем весовую функцию как производную переходной функции

$$w_x(t) = \frac{dh_x}{dt} = 2{,}9e^{-53{,}4t} + 13{,}2e^{-3{,}29t} \sin(11{,}8t - 0{,}23).$$

Из графика $w_x(t)$, представленного на рис. 9.7, *а*, следует

$$t_p = 0{,}98 \text{ сек (при } \delta_p = 0{,}5); \quad \Delta w_м = w_м = 8;$$

$$t_м = 0{,}13 \text{ и } N = 2.$$

Очевидно, что $w_x(\infty) = 0$.

Для электромеханического интегратора согласно структурной схеме, изображенной на рис. 9.6,

$$W_з(p) = \frac{16}{p[(0{,}1p + 1)(0{,}02p + 1) + 16]} = \frac{8000}{p(p^2 + 60p + 8500)}.$$

Корни характеристического уравнения

$$p_1 = -30 + j87{,}2; \quad p_2 = -30 - j87{,}2,$$

откуда

$$W_з(p) = \frac{8000}{p[(p + 30)^2 + (87{,}2)^2]},$$

и после перехода от изображения к оригиналу

$$w_3(t) = 0{,}941 + 0{,}993 e^{-30t} \sin (87{,}2t - 1{,}24).$$

Из графика $w(t)$, представленного на рис. 9.7, *б*, следует

$$t_р = 0{,}105 \text{ *сек*}; \ \Delta w = 0{,}38; \ t_м = 0{,}029 \text{ *сек*} \text{ и } N = 2.$$

В этой нейтральной системе $w_{уст} = \frac{16}{17} = 0{,}941$.

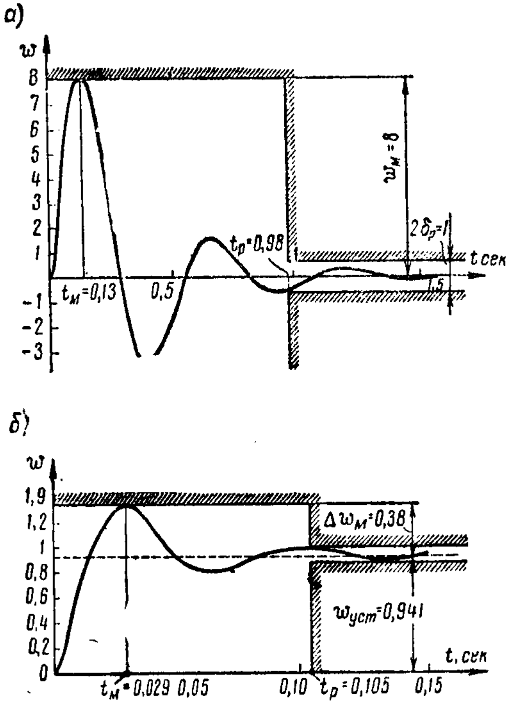


Рис. 9.7

Кинетическая ошибка. Точность астатических систем определяют по установившейся погрешности при отработке сигнала постоянной скорости, т. е. при воздействии

$$x(t) = A_1 t 1_0(t),$$

откуда

$$X(p) = \frac{1}{p^2} A_1. \tag{9.24}$$

Установившаяся погрешность при этих условиях называется кинетической ошибкой $\Delta_{кин}$.

Кинетическая ошибка по управляющему воздействию $\Delta_{x кин}$ служит основной характеристикой точности многих автоматических систем, в частности следящего привода.

Из (9.2) и (9.24) следует, что

$$\delta(t) = L^{-1}\left\{W_{\delta}(p)\frac{A_1}{p^2}\right\}. \tag{9.25}$$

По теореме о предельном значении (приложение П.4) кинетическая ошибка

$$\Delta_{x\,\text{кин}} = \lim_{t\to\infty}\delta(t) = \lim_{p\to 0}\left[pW_{\delta}(p)\frac{A_1}{p^2}\right] = \lim_{p\to 0}\frac{W_{\delta}(p)}{p}A_1.$$

Поскольку рассматривается астатическая система, то $W_{\delta}(p)\to 0$ при $p\to 0$ по меньшей степени так же, как p. Раскрыв для этого случая неопределенность по правилу Лопиталя, получим

$$\Delta_{x\,\text{кин}} = W'_{\delta}(0)\,A_1, \tag{9.26}$$

где

$$W'_{\delta}(0) = \frac{d}{dp}W_{\delta}(p)\Big|_{p=0}.$$

Рассмотрим астатическую систему автоматического регулирования при $W_{\text{эт}} = 1$ и $W_p(p) = \frac{K(p)}{D(p)}$, где

$$K(p) = k_m p^m + k_{m-1}p^{m-1} + \ldots + k_1 p + k_0$$

и

$$D(p) = d_n p^n + d_{n-1}p^{n-1} + \ldots + d_1 p + d_0$$

— полиномы от p, причем $m \leqslant n$.

Передаточная функция

$$W_{\delta}(p) = W_{\varepsilon}(p) = 1 - W_{з}(p) = \frac{D(p)}{K(p)+D(p)}$$

соответствует условию (9.14), если по крайней мере $d_0 = 0$, откуда $D(p) = pD_1(p)$; $D_1(0)\neq 0$.

Очевидно, что

$$W'_{\varepsilon}(0) = \frac{D_1(0)}{K_0} = \frac{d_1}{k_0} = \frac{1}{k_{\text{ас}}},$$

где $k_{\text{ас}} = \frac{k}{T_{\text{п}}}$ *сек*$^{-1}$ — *коэффициент усиления разомкнутой астатической системы, или ее добротность.* Из (9.26) в этом случае следует, что

$$\Delta_{\text{кин}} = \frac{1}{k_{\text{ас}}}A_1, \tag{9.27}$$

т. е. что кинетическая ошибка астатической системы регулирования пропорциональна скорости равномерной заводки и обратно пропорциональна добротности системы. При современных требованиях к точности следящего привода добротность достигает несколько тысяч. Очевидно, что реализация таких систем без корректирующих устройств невозможна.

Кинетическая ошибка по возмущению определяется аналогично, с заменой $W_\delta(p)$ на $W_з(p)\cdot\frac{1}{W_п(p)}$.

Динамическая ошибка. *Погрешность системы в установившемся режиме отработки произвольного типового воздействия называют динамической ошибкой системы.* В большинстве случаев при этом рассматривают моногармоническое воздействие (синусную заводку)

$$x(t) = A_1 \sin \omega_1 t \cdot 1_0(t).$$

Как показано в гл. II, установившийся режим (вынужденные колебания) на выходе динамической линейной системы с постоянными параметрами может быть полностью охарактеризован комплексной величиной

$$Y(j\omega_1) = W(j\omega_1) A_1,$$

где $W(j\omega_1)$ — комплексный коэффициент усиления системы при частоте ω_1.

Из (9.2) следует, что динамическая ошибка от управляющего воздействия

$$\Delta_{x\cdot дин}(j\omega_1) = W_\delta(j\omega_1) A_1 = \Delta_{x\ дин}(\omega_1) e^{j\varphi_\delta(\omega_1)}, \tag{9.28}$$

где модуль

$$\Delta_{x\ дин}(\omega_1) = |\Delta_{x\ дин}(j\omega)| = |W_\delta(j\omega_1)| A_1 = \Delta_{xm}(\omega_1) \tag{9.29}$$

равен амплитудному значению динамической ошибки системы или амплитудной погрешности, а аргумент

$$\varphi_\delta(j\omega_1) = \arg \Delta(j\omega_1) = \arg W_\delta(j\omega_1) \tag{9.30}$$

— сдвигу фаз между динамической ошибкой и колебаниями на входе системы.

В функции времени

$$\delta_{x\ дин}(t) = \Delta_{xm}(\omega_1) \sin[\omega_1 t + \varphi_\delta(\omega_1)]. \tag{9.31}$$

Динамическая ошибка от возмущения f определяется аналогично, с заменой $W_\delta(j\omega_1)$ на $\frac{W_з(j\omega_f)}{W_п(j\omega_f)}$, откуда

$$\mathrm{E}_{f\ дин}(j\omega_f) = \frac{W_з(j\omega_f)}{W_п(j\omega_f)} A_f, \tag{9.32}$$

где A_f — амплитуда синусоидального возмущения f;

$$\Delta_{f\ дин}(\omega_f) = \left|\frac{W_з(j\omega_f)}{W_п(j\omega_f)}\right| A_f = \Delta_{fm}(\omega_f); \tag{9.33}$$

$$\varphi_\delta(\omega_f) = \arg W_з(j\omega_f) - \arg W_п(j\omega_f) \tag{9.34}$$

и

$$\delta_{f\ дин}(t) = \Delta_{fm}(\omega_f) \sin[\omega_f t + \varphi_\delta(\omega_f)]. \tag{9.35}$$

Поскольку рассматриваются синусоидальные колебания, то среднеквадратичная ошибка или ее эффективное значение

$$\Delta_{\text{ср. кв}} = \Delta = \frac{\sqrt{2}}{2}\Delta_m. \tag{9.36}$$

Остановимся на оценке динамической точности системы автоматического регулирования, для которой $W_\delta(j\omega) = W_\varepsilon(j\omega)$. Структурная схема этой системы представлена на рис. 9.8.

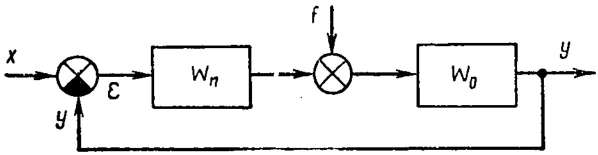


Рис. 9.8

Аналитический расчет модуля и фазы $W_\varepsilon(j\omega)$ для заданной частоты довольно трудоемок и не всегда возможен, поскольку частотные характеристики объекта W_0 часто даются в виде экспериментальных кривых.

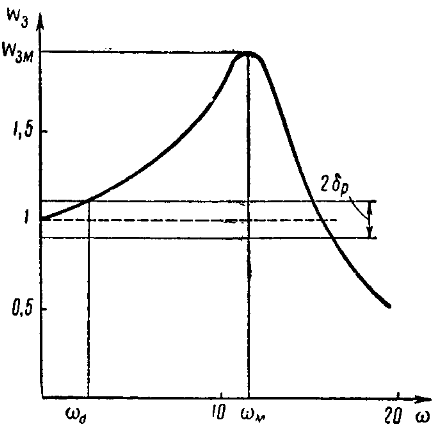


Рис. 9.9

Точное графо-аналитическое решение задачи обеспечивается применением специальной номограммы (см. рис. 10.10), позволяющей строить график модуля и фазы $W_x(j\omega)$ по графику (логарифмическому годографу) $W_p(j\omega)$.

В рабочем диапазоне частот системы

$$|W_p(j\omega)| \gg 1 \quad \text{при } 0 < \omega < \omega_d, \tag{9.37}$$

где ω_d — граничная частота равномерного пропускания замкнутой системы, определяемая из условия допустимых амплитудных искажений (рис. 9.9) как меньший положительный корень уравнения

$$\frac{|1 - W_з(\omega)|}{W_з(0)} = \delta_p, \tag{9.38}$$

в котором δ_p задается заранее. Обычно $\delta_p = 0{,}05 \div 0{,}1$.

Неравенство (9.37) позволяет дать простую приближенную оценку динамической точности замкнутой системы по частотной характеристике разомкнутой системы. Действительно, в этом случае

$$|W_\delta(j\omega)| = \frac{1}{|1 + W_p(j\omega)|} \approx \frac{1}{|W_p(j\omega)|}. \qquad (9.39)$$

Подставляя в (9.29), получаем

$$\Delta_{xm} \approx \frac{A_1}{|W_p(\omega_1)|}, \qquad (9.40)$$

где $|W_p(\omega_1)|$ — модуль комплексного коэффициента усиления разомкнутой системы при частоте управляющего воздействия ω_1. Переходя к логарифмической характеристике, получим

$$20 \lg \Delta_{xm} \approx 20 \lg A_1 - L(\omega_1). \qquad (9.41)$$

Динамическая ошибка от возмущения (нагрузки) f определяется аналогично, при этом в рабочем диапазоне частот $0 < \omega_f < \omega_d$

$$\Delta_{fm} \approx \frac{A_f}{|W_p(\omega_f)|}. \qquad (9.42)$$

Из (9.40) и (9.42) следует, что динамическая точность системы регулирования при отработке воздействий, частота которых соответствует рабочему диапазону частот системы, тем выше, чем больше комплексный коэффициент усиления обратной связи системы на частоте этого воздействия.

Пример 9.5. Определить динамическую точность следящей системы примера 9.1 при гармоническом воздействии по заданию (управляющему входу) x.

Передаточная функция для рассогласования замкнутой системы

$$W_\varepsilon(p) = \frac{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)(T_2 p + 1) + k}.$$

Динамическая ошибка по заданию x

$$\Delta_{xm} = |W_x(j\omega_1)| A_1 = \left| \frac{j\omega_1 (j\omega_1 T_1 + 1)(j\omega_1 T_2 + 1)}{j\omega_1 (j\omega_1 T_1 + 1)(j\omega_1 T_2 + 1) + k} \right| A_1.$$

График точной зависимости $\frac{\Delta_{xm}}{A_1}$ от ω_1 при $T_1 = 0{,}1$ *сек*, $T_2 = 0{,}02$ *сек* и $k = 20$ построен на рис. 9.10, *а* — кривая *1*. Приближенная оценка Δ_{xm} дается формулой (9.40)

$$\Delta_{xm} \approx \frac{A_1}{|W_p(j\omega)|} = \frac{A_1}{\dfrac{k}{\omega_1 \sqrt{[(T_1\omega_1)^2 + 1][(T_2\omega_1)^2 + 1]}}},$$

по которой для заданных параметров построена кривая *2*.

Наконец, грубая оценка по асимптотической характеристике дает

$$\Delta_{xm}(\omega_1) = \frac{A_1\omega_1}{k}; \quad 0 < \omega_1 < \frac{1}{T_1};$$

$$\Delta_{xm}(\omega_1) = \frac{A_1\omega_1^2 T_1}{k}; \quad \frac{1}{T_1} < \omega_1 < \frac{1}{T_2};$$

$$\Delta_{xm}(\omega_1) = \frac{A_1\omega_1^3 T_1 T_2}{k}; \quad \frac{1}{T_2} < \omega_1.$$

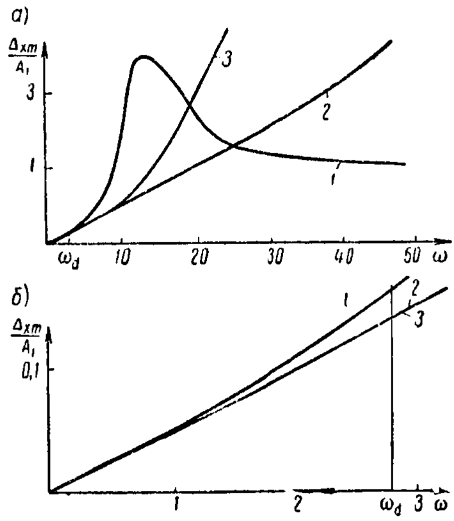


Рис. 9.10

По этим приближенным соотношениям построена кривая 3. Совпадение результатов с точностью до $\Delta = 0{,}1$ имеет место при $0 < \omega_1 < \omega_d = 2{,}8 \frac{1}{сек}$ (см. рис. 9.10, *б*).

§ 9.3. ВЫНУЖДЕННАЯ СОСТАВЛЯЮЩАЯ ОШИБКИ

При более сложных видах внешних воздействий бывает важно определить вынужденную составляющую ошибки, характеризующую поведение системы, когда переходная составляющая, выражающая свободный процесс (2.93), затухнет.

Если изображение внешнего воздействия выражается дробно-рациональной функцией от p, не имеющей кратных корней, то вынужденная составляющая ошибки может быть найдена по формуле (2.94). При наличии кратных корней это выражение несколько усложняется и пользование им так же, как и формулой (2.94), требует громоздких вычислений.

Расчет вынужденной составляющей может быть значительно упрощен, если внешнее воздействие выражается степенным рядом (2.3). Ниже излагается метод расчета вынужденной составляющей ошибки для этого случая, получивший название *метода коэффициентов ошибки*.

Если воздействие $x(t)$ аппроксимируется полиномом

$$x(t)=\left[A_0+A_1t+\ldots+\frac{A_l}{l!}t^l\right]1_0(t), \tag{9.43}$$

то его изображение

$$X(p)=A_0\frac{1}{p}+A_1\frac{1}{p^2}+\ldots+A_l\frac{1}{p^{l+1}}=\frac{N(p)}{p^{l+1}}, \tag{9.44}$$

где

$$N(p)=\sum_{k=0}^{l}A_kp^{l-k}$$

содержит только один кратный полюс $p=0$.

Изображение ошибки

$$\Delta(p)=W(p)\sum_{0}^{l}A_k\frac{1}{p^{k+1}}=W(p)\frac{N(p)}{p^{l+1}}, \tag{9.45}$$

где $W(p)$ — передаточная функция ошибки по рассматриваемому воздействию.

Если исследуется уставка, то $W(p)=W_\delta(p)$, а если исследуется возмущение, то $W(p)=\dfrac{W_з(p)}{W_п(p)}$.

Изображение вынужденной составляющей ошибки устойчивой системы дается разложением (9.45) на простейшие дроби, соответствующие нулевому полюсу кратности $l+1$. Разлагая на простейшие дроби, воспользуемся методом неопределенных коэффициентов

$$\frac{W(p)}{p^{l+1}}=\frac{C_0}{p^{l+1}}+\frac{C_1}{p^l}+\ldots+\frac{C_l}{p}+S(p). \tag{9.46}$$

Здесь $C_0, C_1, \ldots, C_l$ — неопределенные коэффициенты разложения, а $S(p)$ — составляющая разложения, обусловленная полюсами $W(p)$. При этом предполагается, что $W(p)$ не имеет полюсов в точке $p=0$ и $W(0)\neq\infty$.

Для определения коэффициентов C представим уравнение (9.46) в следующем виде:

$$W(p)=C_0+C_1p+\ldots+C_lp^l+S(p)p^{l+1}. \tag{9.47}$$

Последовательно дифференцируя по p и подставляя $p=0$, находим

$$C_0=W(0);\ C_1=\left[\frac{dW}{dp}\right]_{p=0};\ C_2=\frac{1}{2}\left[\frac{d^2W}{dp^2}\right]_{p=0};\ldots;$$

$$C_k=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^kW}{dp^k}\right]_{p=0};\ldots;C_l=\frac{1}{l!}\left[\frac{d^lW}{dp^l}\right]_{p=0}. \tag{9.48}$$

Таким образом, изображение ошибки $\Delta(p)$ может быть представлено в виде двух составляющих: переходной или свободной

$$\Delta_{п}(p) = S(p)\,N(p), \tag{9.49}$$

которая затухает при $t \to \infty$, и вынужденной

$$\Delta_{в}(p) = [C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \ldots + C_l p^l]\,X(p), \tag{9.50}$$

где

$$C_k = \frac{1}{k!} \cdot \left.\frac{d^k W(p)}{dp^k}\right|_{p=0}, \quad k = 0, 1, 2 \ldots.$$

Каждому слагаемому $C_k p^k X(p)$ при $t > 0$ соответствует компонента вынужденной составляющей ошибки

$$C_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} = C_k x^{(k)}(t).$$

Поэтому вынужденную составляющую ошибки можно записать в виде суммы

$$\delta_{в}(t) = C_0 x(t) + C_1 \frac{dx(t)}{dt} + \ldots + C_l \frac{d^l x(t)}{dt^l}$$

или

$$\delta_{в}(t) = \sum_{k=0}^{l} C_k x^{(k)}(t). \tag{9.51}$$

Выражение (9.51) представляет собой формулу метода коэффициентов ошибки.

Определять коэффициенты C_k по формулам (9.48) довольно затруднительно. Проще их можно найти, разложив передаточную функцию $W(p)$ по степеням p,

$$W(p) = \frac{b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m}{a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n} =$$

$$= C_0 + C_1 p + C_2 p^2 + \ldots = \sum_{0}^{\infty} C_k p^k. \tag{9.52}$$

Для определения коэффициентов C_k умножим правую и левую части тождества на знаменатель дроби и, приравнивая коэффициенты при равных степенях p, получим

$$\left.\begin{aligned}
&b_0 = C_0 a_0,\\
&b_1 = C_1 a_0 + C_0 a_1,\\
&b_2 = C_2 a_0 + C_1 a_1 + C_0 a_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&b_m = C_m a_0 + C_{m-1} a_1 + \ldots + C_0 a_m,\\
&0 = C_{m+1} a_0 + C_m a_1 + \ldots + C_0 a_{m+1},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \tag{9.53}$$

откуда следует рекуррентная формула

$$C_k = \frac{1}{a_0}\left\{ b_k - \sum_{r=1}^{k} C_{k-r} a_r \right\}, \tag{9.54}$$

причем

$$b_k \equiv 0 \quad \text{при} \quad k > m; \quad a_r \equiv 0 \quad \text{при} \quad r > n.$$

Пример 9.6. Определить вынужденную погрешность следящей системы, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии

$$W_\text{р}(p) = \frac{k_\text{ас}}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)},$$

где

$$k_\text{ас} = 100 \frac{1}{сек}; \qquad T_1 = 0{,}1 \; сек; \qquad T_2 = 0{,}01 \; сек;$$

при управляющем воздействии

$$x_1(t) = 20 + 2t - 0{,}5t^2 \; рад.$$

Согласно структурной схеме, представленной на рис. 9.11, и уравнению (9.9), находим

$$\Delta(p) = \text{Е}(p) = W_\varepsilon(p) X,$$

где

$$W_\varepsilon(p) = \frac{p(1+T_1 p)(1+T_2 p)}{p(1+T_1 p)(1+T_2 p) + k_\text{ас}} = \frac{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p}{T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_\text{ас}}.$$

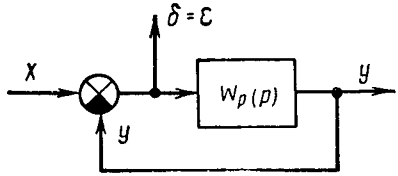


Рис. 9.11

Для решения достаточно определить три первых коэффициента ошибки, которые и вычисляем по формуле (9.54):

$$C_0 = \frac{b_0}{a_0} = 0, \qquad C_1 = \frac{b_1 - C_0 a_1}{a_0} = \frac{1}{k_\text{ас}} = 0{,}01 \; сек;$$

$$C_2 = \frac{b_2 - C_1 a_1 + C_0 a_2}{a_0} = \frac{1}{k_\text{ас}}\left(T_1 + T_2 - \frac{1}{k_\text{ас}}\right) = 0{,}001 \; сек^2.$$

Производные управляющего воздействия:

$$x_1'(t) = 2 - t \; \frac{рад}{сек};$$

$$x_1''(t) = -1 \; \frac{рад}{сек^2}.$$

Вынужденная погрешность по управляющему воздействию

$$\varepsilon_\text{в}(t) = \delta_\text{в}(t) = C_0 x_1(t) + C_1 x_1'(t) + C_2 x_1''(t) =$$
$$= 0{,}01(2 - t) - 0{,}001 = 0{,}019 - 0{,}01t \; рад.$$

Вынужденная составляющая выхода системы

$$y_\text{в}(t) = x_1 - \varepsilon_\text{в} = 19{,}981 + 2{,}01t - 0{,}5t^2 \; рад.$$

Из рассмотренного примера видно, что:

а) вынужденная погрешность следящей системы по управляющему воздействию не зависит от постоянной составляющей сигнала ($A_0 = 20$ *рад*), поскольку $C_0 = 0$;

б) составляющая сигнала, пропорциональная времени ($A_1 t = 2t$ *рад* — равномерная заводка), вызывает постоянную вынужденную ошибку, обратно пропорциональную добротности следящей системы, поскольку $C_1 = \frac{1}{k_{ac}}$;

в) составляющая сигнала, пропорциональная квадрату времени $\left(\frac{A_0}{2} t^2 = 0{,}5t^2 \text{ рад — заводка с ускорением}\right)$, вызывает безгранично нарастающую по модулю вынужденную ошибку. Рассмотренная следящая система не успевает отрабатывать ускоренно растущий сигнал управления.

Графики управляющего воздействия x и вынужденной ошибки $\varepsilon_в$ приведены на рис. 9.12. Полную картину рассогласования системы в ходе отработки воздействия $x(t)$ можно получить лишь с учетом переходной (свободной) составляющей ошибки.

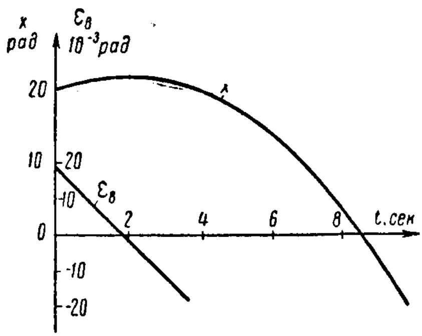


Рис. 9.12

§ 9.4. ПОРЯДОК АСТАТИЗМА СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При одном и том же типовом воздействии точность установившегося движения системы автоматического управления определяется коэффициентами разложения передаточной функции ошибки от этого воздействия в степенной ряд — коэффициентами ошибки. Это обстоятельство может быть положено в основу классификации систем по точности установившегося движения.

Основным классификационным признаком при этом служит *порядок астатизма* ν.

Системой с нулевым порядком астатизма по данному воздействию x — статической системой, называется такая система, вынужденная (систематическая) погрешность которой при отработке постоянного воздействия $x = A_0 =$ const пропорциональна величине этого воздействия. Из уравнения (9. 51) следует, что это может иметь место только при $C_0 \neq 0$.

Системой с астатизмом первого порядка — астатической системой управления, соответственно, называется такая система, вынужденная погрешность которой при отработке постоянного воздействия равна нулю, а при отработке воздействия, линейно изменяющегося со временем (равномерной заводки) $x(t) = A_0 + A_1(t)$, *постоянна и пропорциональна скорости изменения этого воздействия A_1.* Из уравнения (9.51) следует, что это может иметь место только при $C_0=0$; $C_1 \neq 0$.

Системой с астатизмом ν-го порядка называется система управления, вынужденная систематическая погрешность которой при отработке воздействия, выражаемого в виде полинома степени ν по t

$$x(t) = A_0 + A_1(t) + \ldots + \frac{A_\nu}{\nu!} t^\nu,$$

постоянна и пропорциональна значению A_ν. При отработке сигнала, выражаемого полиномом меньшей степени, вынужденная погрешность такой системы равна нулю. Из (9.51) следует, что при этом должно быть

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_{\nu-1} = 0; \quad C_\nu \neq 0.$$

Таким образом, порядок астатизма системы равен номеру первого, не равного нулю коэффициента ошибки по рассматриваемому воздействию.

Рассмотрим структурные условия, обеспечивающие астатизм замкнутой системы регулирования по отклонению при отработке управляющего воздействия и возмущений. На рис. 9.13 представлена типовая структура системы автоматического регулирования. Применительно к реальным системам W_1 соответствует регулятору, на входе которого сравниваются управляющий сигнал (уставка) x и выход системы регулирования y. Объект регулирования W_2 подвержен действию возмущений f, которые приведены к его входу. Передаточная функция разомкнутой системы регулирования

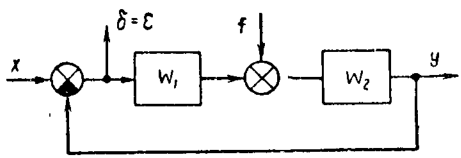


Рис. 9.13

$$W_p(p) = W_1(p) W_2(p) = \frac{K_1(p) \cdot K_2(p)}{D_1(p) \cdot D_2(p)} = \frac{K(p)}{D(p)}, \quad (9.55)$$

где

$$K(p) = k_m p^m + k_{m-1} p^{m-1} + \ldots + k_1 p + k_0,$$

$$D(p) = d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \ldots + d_1 p + d_0.$$

Из физических соображений $n \geqslant m$ и $k_0 \neq 0$ при $d_0 \neq 0$.

С и с т е м а н е с о д е р ж и т и н т е г р и р у ю щ и х з в е н ь е в (с т а т и ч е с к а я с и с т е м а). Если система вообще не содержит интегрирующих звеньев, то $d_0 \neq 0$, и без ограничения общности можно положить, что

$$d_0 = d_{01} \cdot d_{02} = d_{01} = d_{02} = 1.$$

Тогда $k_0 = k_{01} \cdot k_{02} = k$ — коэффициент усиления разомкнутой системы.

Согласно (9.4), изображение ошибки

$$\Delta(p) = \mathrm{E}(p) = W_\varepsilon(p) X(p) - W_з(p) \cdot \frac{1}{W_1(p)} X(p) = \\ = \mathrm{E}_1(p) + \mathrm{E}_f(p). \tag{9.56}$$

При постоянных воздействиях $x(t) = x_0 = \text{const}$ и $f(t) = f_0 = \text{const}$ установившаяся статическая ошибка согласно (9.51) определяется коэффициентом C_0. Передаточная функция ошибки от управляющего воздействия

$$W_\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + \frac{K(p)}{D(p)}} = \frac{D(p)}{K(p) + D(p)} = \\ = \frac{d_n p^n + d_{n-1} p^{n-1} + \ldots + d_1 p + 1}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}, \tag{9.57}$$

где $a_i = k_i + d_i$; в частности, $a_0 = 1 + k_0 = 1 + k$.

Из (9.53) получим, что

$$C_{0x} = \frac{1}{1+k} \quad \text{и} \quad \Delta_{ст} = \frac{1}{1+k} x_0. \tag{9.58}$$

Передаточная функция ошибки от возмущения

$$W_f(p) = \frac{\frac{K(p)}{D(p)}}{1 + \frac{K(p)}{D(p)}} \cdot \frac{D_1(p)}{K_1(p)} = \frac{K_2(p) D_1(p)}{K(p) + D(p)} \tag{9.59}$$

или

$$W_f(p) = \frac{b_r p^r + b_{r-1} p^{r-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0}. \tag{9.60}$$

Очевидно, что $b_0 = k_{20}$ — коэффициент усиления объекта.

Из (9.53) находим, что

$$C_{0f} = \frac{k_{20}}{1+k} \quad \text{и} \quad \Delta_{ст\, f} = -\frac{1}{1+k} k_{20} f_0. \tag{9.61}$$

Полная статическая ошибка замкнутой системы

$$\Delta_{ст\, з} = \Delta_{ст\, x} + \Delta_{ст\, f} = \frac{1}{1+k} [x_0 - k_{20} f_0]. \tag{9.62}$$

Статизмом или остаточной неравномерностью характеристики регулирования $\delta_р$ *называют отношение статической ошибки к номинальному значению выхода системы, выраженное в процентах.*

Из (9.57) и (9.60)

$$\delta_{xз} = C_{0x} \frac{x_0}{y_0} 100\%; \quad \delta_{fз} = C_{0f} \frac{f_0}{y_0} 100\%. \tag{9.63}$$

Разомкнем систему на входе регулятора. Непосредственно видно, что при тех же воздействиях статическая ошибка разомкнутой системы

$$\Delta = \Delta_{ст.\, р} = x_0 - k_{20} f_0. \tag{9.64}$$

Отношение статических ошибок (статизма) замкнутой и разомкнутой системы

$$\frac{\Delta_{\text{ст. з}}}{\Delta_{\text{ст. р}}} = \frac{\delta_{з}}{\delta_{р}} = \frac{1}{1+k}. \tag{9.65}$$

Следовательно, *включение статического (пропорционального) регулятора уменьшает статизм в* $\frac{1}{1+k}$ *раз, где* k *— коэффициент усиления разомкнутой системы.*

Предельная статическая точность $\delta_{з\,\min}$ определяется условием устойчивости $k < k_{\text{пр}}$.

Система содержит ν интегрирующих звеньев (астатическая система регулирования). Если система содержит ν интегрирующих звеньев, то $d_0 = d_1 = \ldots$ $\ldots = d_{\nu-1} = 0$; $d_\nu = d_{\nu_1} \cdot d_{\nu_2} \neq 0$, причем $\nu = \nu_1 + \nu_2$, где ν_1 — число интегрирующих звеньев в $W_1(p)$, а ν_2 — число интегрирующих звеньев в $W_2(p)$. Можно считать, что $d_\nu = d_{\nu_1} = d_{\nu_2} = 1$ и $k_0 = k_{10} \cdot k_{20} = k \neq 0$.

Согласно (9.57), передаточная функция ошибки от управляющего воздействия в этом случае

$$W_\delta = W_\varepsilon(p) = \frac{d_n p^n + \ldots + d_{\nu+1} p^{\nu+1} + p^\nu}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0} =$$

$$= \frac{d_n p^{n-\nu} + \ldots + d_{\nu+1} p + 1}{a_n p^n + \ldots + a_1 p + a_0} p^\nu, \tag{9.66}$$

где

$$a_0 = k_0 = k; \quad a_1 = k_1; \ldots a_{\nu-1} = k_{\nu-1}; \quad a_\nu = k_\nu + 1.$$

Согласно (9.51),

$$C_0 = C_1 = \ldots = C_{\nu-1} = 0; \quad C_\nu = \frac{1}{k}. \tag{9.67}$$

Следовательно, порядок астатизма системы по управляющему воздействию равен числу интегрирующих звеньев, входящих в ее контур.

Значение постоянной ошибки от воздействия, содержащего старшую степень t^ν (при $\nu = 1$ она называется кинетической ошибкой $\Delta_{\text{кин}}$), обратно пропорционально коэффициенту усиления разомкнутой системы ν-го порядка астатизма.

Согласно (9.59), передаточная функция ошибки по возмущению

$$W_f(p) = \frac{K_2(p) \cdot D_1(p)}{K(p) + D(p)}.$$

Рассмотрим выражение, стоящее в числителе. По условию $W_1(p)$ содержит ν_1 интегрирующих звеньев, следовательно, полином $D_1(p)$ содержит множитель p^{ν_1}. Поскольку $k_0 = k_{10} \times \times k_{20} \neq 0$, то в этом случае

$$W_f(p) = \frac{b_r p^{r-\nu_1} + b_{r-1} p^{r-(\nu_1+1)} + \cdots + b_{\nu_1}}{a_n p^n + a_n p^{n-1} + \cdots + a_1 p + a_0} p^{\nu_1} \tag{9.68}$$

где $b_{\nu_1} = k_{20} d_{\nu_1} = k_{20}$; $a_0 = k_{20} \cdot k_{10} = k$.

Согласно (9.51),

$$C_0 = C_1 = C_2 = \cdots = C_{\nu_1 - 1} = 0; \; C_{\nu_1} = \frac{k_{20}}{k} = \frac{1}{k_{10}}. \tag{9.69}$$

Следовательно, порядок астатизма системы по возмущению (нагрузке), приложенному ко входу объекта W_2, равен числу интегрирующих звеньев в регуляторе W_1 и не зависит от числа интегрирующих звеньев объекта.

Значение постоянной ошибки по возмущению, содержащему старшую степень t^{ν_1}, обратно пропорционально коэффициенту усиления k_{10} регулятора ν_1-го порядка астатизма $[сек^{-\nu_1}]$.

Проведенное исследование позволяет сформулировать общий структурный признак для определения порядка астатизма замкнутой системы (рис. 9.13).

Порядок астатизма системы по отношению к воздействию x равен числу интегрирующих звеньев, включенных в обратную связь между этим воздействием (вход) и точкой измерения ошибки (выход), и не зависит от числа интегрирующих звеньев, включенных в прямой тракт. По отношению к управляющему воздействию весь контур системы представляет собой обратную связь.

Заметим, что осуществление замкнутых систем с высоким порядком астатизма достаточно затруднительно, поскольку система автоматического регулирования, содержащая только два интегрирующих звена, структурно неустойчива и не может быть реализована без специальных корректирующих устройств.

§ 9.5. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Найдем переходный процесс в системе с передаточной функцией $W(p)$ при подаче на вход единичного скачка. Передаточная функция $W(p)$ не имеет полюсов в правой половине и на мнимой оси плоскости p.

Из этого следует, что импульсная переходная (весовая) функция устойчивой системы $w(t)$ удовлетворяет условию абсолютной интегрируемости и может быть вычислена с помощью обратного преобразования Фурье (см. приложение П. 1), которое в этом случае принимает вид

$$w(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}W(j\omega)(\cos\omega t+j\sin\omega t)\,d\omega.$$

В том случае, когда действительная часть $W(j\omega)$ — четная функция ω, а мнимая — нечетная, получим

$$w(t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\,W(j\omega)\cos\omega t\,d\omega-\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\,W(j\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

При отрицательных значениях времени оригинал тождественно равен нулю. Так как $\sin\omega t$ — нечетная функция времени, то

$$w(-t)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\,W(j\omega)\cos\omega t\,d\omega+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\,W(j\omega)\sin\omega t\,d\omega=0$$

и

$$\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\,W(j\omega)\cos\omega t\,d\omega=-\int_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\,W(j\omega)\sin\omega t\,d\omega.$$

Откуда в окончательном виде оригинал $w(t)$ определяется соотношением

$$w(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\,W(j\omega)\cos\omega t\,d\omega \qquad (9.70)$$

или эквивалентным соотношением

$$w(t)=-\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Im}\,W(j\omega)\sin\omega t\,d\omega. \qquad (9.71)$$

Пусть изображение переходной функции задано в виде $H(p)=\frac{1}{p}W(p)$.

Тогда оригинал $h(t)$ можно вычислить, интегрируя (9.70),

$$h(t)=\int_{0}^{t}\left[\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}W(j\omega)\cos\omega t\,d\omega\right]dt$$

или, изменив порядок интегрирования и вычислив интеграл по времени,

$$h(t)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty}\mathrm{Re}\,W(j\omega)\frac{\sin\omega t}{\omega}\,d\omega. \qquad (9.72)$$

Пусть дана система автоматического регулирования, передаточная функция которой в разомкнутом состоянии равна $W_p(p)$. Тогда изображение выхода системы $y(t)$ определяется уравнением

$$Y = \frac{W_p(p)}{1 + W_p(p)} X = W_з(p) X,$$

а изображение ошибки системы

$$\Delta(p) = \frac{1}{1 + W_p(p)} X = W_\delta(p) X.$$

Согласно (9.70), имеем соответственно

$$y(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{Re}\,[W_з(j\omega) X(j\omega)] \cos \omega t\, d\omega; \qquad (9.73)$$

$$\delta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \mathrm{Re}\,[W_\delta(j\omega) X(j\omega)] \cos \omega t\, d\omega. \qquad (9.74)$$

Величины $\mathrm{Re}\,[W_з(j\omega) X(j\omega)]$ и $\mathrm{Re}\,[W_\delta(j\omega) X(j\omega)]$ называют *обобщенными вещественными частотными характеристиками системы.*

Если $X = \frac{1}{p}$, то удобнее воспользоваться (9.72) и тогда получим

$$y(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\mathrm{Re}\, W_з(j\omega)}{\omega} \sin \omega t\, dt =$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_з(\omega)}{\omega} \sin \omega t\, d\omega, \qquad (9.75)$$

где

$$P_з(\omega) = \mathrm{Re}\, W_з(j\omega).$$

Точно так же

$$\delta(t) = h_\delta(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{P_\delta(\omega)}{\omega} \sin \omega t\, d\omega, \qquad (9.76)$$

где

$$P_\delta(\omega) = \mathrm{Re}\, W_\delta(j\omega).$$

Из (9.75) и (9.76) следует, что переходная функция выхода системы $h(t)$ и переходная функция ошибки $h_\delta(t)$ определяются соответственно *собственными вещественными частотными характеристиками системы* $P_з(\omega)$ и $P_\delta(\omega)$*.

* В дальнейшем изложении в термине «собственные вещественные частотные характеристики» слово «собственные» будем опускать и для общности опускать индекс при $P(\omega)$.

Построение переходных функций по типовым характеристикам. В тех случаях, когда вещественная частотная характеристика задана экспериментальным графиком или таблицей, а также, когда аналитическое вычисление интегралов (9.75) или (9.76) представляет значительные трудности, прибегают к графическому вычислению. Для этого вещественную частотную характеристику разбивают на типовые, трапецеидальные или треугольные характеристики, для которых переходные процессы табулированы. Этот метод разработан В. В. Солодовниковым [Л.18] и А. А. Вороновым [Л.4].

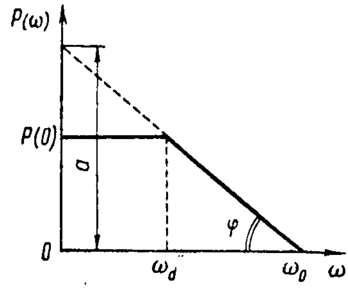


Рис. 9.14

Допустим, что система имеет вещественную характеристику, имеющую вид трапеции (рис. 9.14). Будем называть ω_0 *частотой пропускания*, ω_d — *частотой равномерного пропускания*.

Введем коэффициент

$$\lambda = \frac{\omega_d}{\omega_0}, \text{ при этом } 0 \leqslant \lambda \leqslant 1.$$

Переходная функция

$$h(t) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t \, d\omega =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\omega_d} \frac{P_0}{\omega} \sin \omega t \, d\omega + \frac{2}{\pi}\int\limits_{\omega_d}^{\omega_0} \frac{a - b\omega}{\omega} \sin \omega t \, d\omega, \qquad (9.77)$$

где величины a и b определяются следующими соотношениями:

$$a = P(0)\frac{\omega_0}{\omega_0 - \omega_d} = P(0)\frac{1}{1-\lambda};$$

$$b = P(0)\frac{1}{\omega_0 - \omega_d} = \frac{P(0)}{\omega_0} \cdot \frac{1}{1-\lambda}.$$

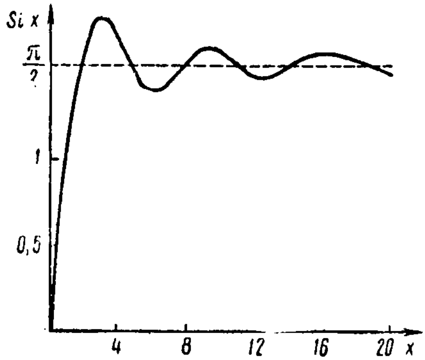
Проведя интегрирование в (9.77), получим для $P(0) = 1$ (единичная трапеция)

$$h_\lambda(\tau) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1-\lambda}\left[\operatorname{si}\tau - \lambda \operatorname{si}\lambda\tau + \frac{\cos\tau - \cos\lambda\tau}{\tau}\right], \qquad (9.78)$$

где $\operatorname{si}\tau = \int\limits_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx$ — табулированная функция интегрального синуса, график которой приведен на рис. 9.15 и $\tau = \omega_0 t$.

Из (9.78) следует, что переходная функция $h_\lambda(\tau)$ есть функция безразмерного времени τ и коэффициента λ. Функция эта табулирована (см. приложение П.7).

Рассмотрим функцию $h_\lambda(\tau)$ для двух предельных случаев. При $\lambda = 0$ вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ и соответствующая переходная функция $h_0(\tau)$ имеют вид, показанный на рис. 9.16. Переходный процесс имеет в этом случае монотонный характер.



x	$Si\ x$	x	$Si\ x$
0	0	2π	1,4182
0,1	0,09994	7,0	1,4546
0,25	0,2491	8,0	1,5742
0,5	0,4931	9,0	1,6650
0,75	0,7270	13,0	1,4994
1,0	0,9461	15,0	1,6182
π/2	1,3699	20,0	1,5482
2,0	1,6054	25,0	1,5315
2,3	1,7785	35,0	1,5963
3,0	1,8487	55,0	1,5707
π	1,8519	60,0	1,5867
3,5	1,8331	75,0	1,5586
4,0	1,7582	80,0	1,5723
1,5π	1,6089	85,0	1,5824
5,0	1,5499	100	1,5622
6,0	1,4247	110	1,5799
		130	1,5737

Рис. 9.15

При $\lambda = 1$ вещественная частотная характеристика имеет вид прямоугольника, а соответствующая ей переходная функция имеет колебательный характер (рис. 9.17).

Время регулирования (установления с точностью $\delta_p = 0,05$) для трапецеидальных вещественных частотных характеристик лежит в пределах

$$\frac{\pi}{\omega_0} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_0} \tag{9.79}$$

и может быть оценено по рис. 9.18.

Перерегулирование σ может быть оценено по рис. 9.19.

Пример 9.7. Рассмотрим построение переходной функции по трапецеидальной вещественной частотной характеристике.

Пусть $P(0) = 5$; $\omega_0 = 100 \frac{1}{сек}$; $\omega_d = 60 \frac{1}{сек}$.

Находим коэффициент $\lambda = \frac{\omega_d}{\omega_0} = 0,6$. Пользуясь таблицей $h_\lambda(\tau)$ в приложении П.7, находим значения $h_{0,6}(\tau)$.

Далее, переходим к размерному времени t, используя соотношение $t = \frac{\tau}{\omega_0}$, и, наконец, находим переходную функцию

$$h(t) = P(0) \cdot h_\lambda(t). \tag{9.80}$$

Результаты приведены в табл. 9.1.

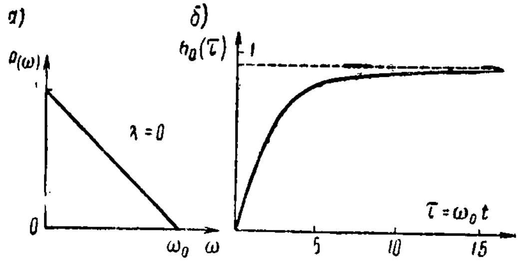


Рис. 9.16

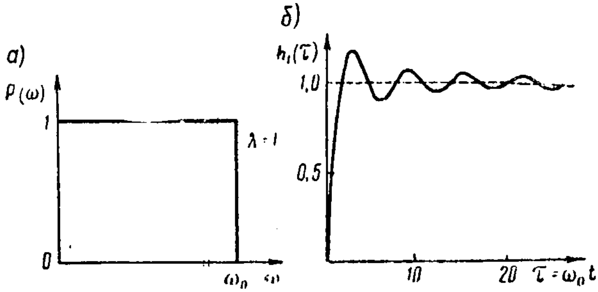


Рис. 9.17

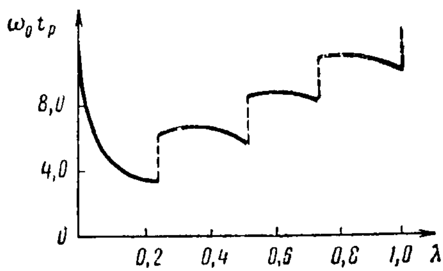


Рис. 9.18

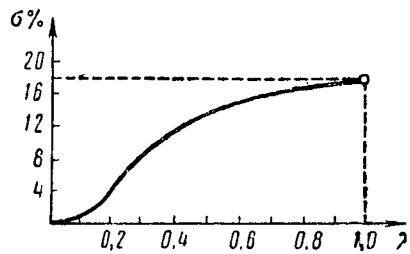


Рис. 9.19

Таблица 9.1

τ	0	0,5	1	2	3
$h_{0,6}(\tau)$	0	0,255	0,490	0,878	1,1
t, *сек*	0	$\frac{0,5}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{2}{100}$	$\frac{3}{100}$
$h(t)$	0	$5\times0,255$	$5\times0,490$	$5\times0,878$	$5\times1,1$

Пример 9.8. Рассмотрим построение переходного процесса по вещественной частотной характеристике.

Пусть вещественная частотная характеристика имеет вид, показанный на рис. 9.20, *а*. Аппроксимируем ее ломаной линией и разобьем на три трапеции (рис. 9.20, *б*). Трапеции характеризуются следующими величинами:

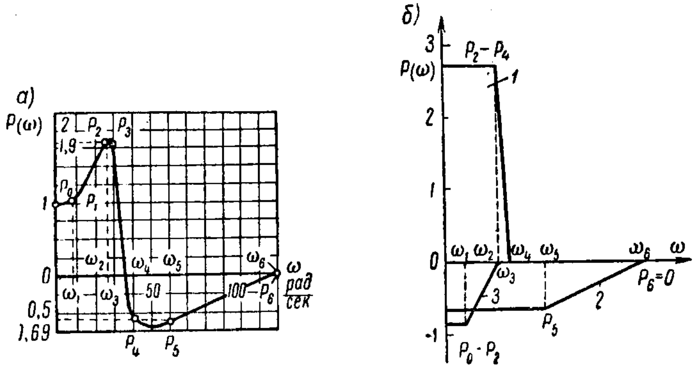


Рис. 9.20

1-я трапеция — $P(0) = P_2 - P_4$, $\omega_0 = \omega_4$; $\omega_d = \omega_3$;

2-я трапеция — $P(0) = P_4$; $\omega_0 = \omega_6$; $\omega_d = \omega_5$;

3-я трапеция — $P(0) = P_0 - P_2$; $\omega_0 = \omega_2$; $\omega_d = \omega_1$.

Пользуясь таблицами $h_\lambda(\tau)$, найдем для каждой трапеции переходный процесс $h_1(t)$, $h_2(t)$ и $h_3(t)$ (рис. 9.21). Суммируя их, получим искомый переходный процесс $h(t) = h_1 + h_2 + h_3$.

По вещественной частотной характеристике можно построить и реакцию системы на единичный импульс — импульсную переходную (или весовую) функцию системы. Согласно (9.70) и (9.75),

$$w(t) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty P(\omega)\cos\omega t\, d\omega. \tag{9.81}$$

Если $P(\omega)$ имеет вид трапеции (рис. 9.22), из формулы (9.81) следует, что

$$w(t)=\frac{2}{\pi}P(0)\,\Omega\cdot\frac{\sin\Omega t}{\Omega t}\cdot\frac{\sin\omega_1 t}{\omega_1 t}, \tag{9.82}$$

где

$$\Omega=\frac{\omega_0+\omega_d}{2},$$

$$\omega_1=\frac{\omega_0-\omega_d}{2}.$$

Из (9.82) видно, что функция $w(t)$ определяется значением функции вида $\frac{\sin x}{x}$.

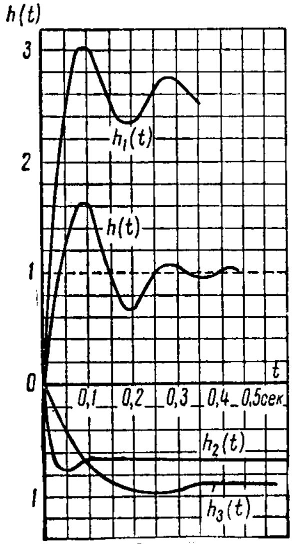


Рис. 9.21

В случае, если вещественная частотная характеристика представлена в виде суммы n трапеций, то

$$w(t)=\frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{n}P_i(0)\,\Omega_i\frac{\sin\Omega_i t}{\Omega_i t}\cdot\frac{\sin\omega_i t}{\omega_i t}. \tag{9.83}$$

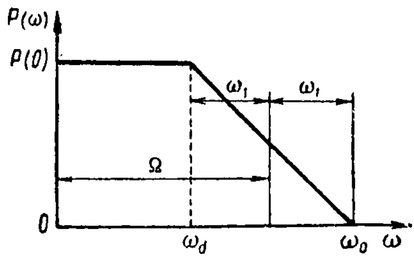


Рис. 9.22

Построение вещественной частотной характеристики замкнутой системы $P_з(\omega)$ по частотным характеристикам разомкнутой системы. Вещественную частотную характеристику замкнутой системы можно построить по годографу частотной характеристики разомкнутой системы. Метод построения вытекает из соотношения

$$P(\omega)=\mathrm{Re}\,W_з(j\omega)=\mathrm{Re}\,\frac{W_р(j\omega)}{1+W_р(j\omega)}, \tag{9.84}$$

которое имеет простой геометрический смысл.

На рис. 9.23 изображен годограф частотной характеристики разомкнутой системы

$$W_р(j\omega)=x(\omega)+jy(\omega).$$

Для некоторой частоты $\omega=\omega_1$ числитель (9.84) соответствует вектору $\overrightarrow{об}$, а знаменатель — вектору $\overrightarrow{аб}$. Поэтому

$$P(\omega)=\mathrm{Re}\frac{\overrightarrow{об}}{\overrightarrow{аб}}=\mathrm{Re}\,\frac{об}{аб}e^{j(\theta_1-\theta_2)}=\frac{об}{аб}\cos\theta=\frac{вб}{аб}, \qquad (9.85)$$

где $вб$ — проекция вектора $\overrightarrow{об}$ на вектор $\overrightarrow{аб}$.

Наиболее удобен способ построения $P_з(\omega)$ по сетке линий постоянного значения вещественной частотной характеристики замкнутой системы (P — номограмме), заранее проведенной в комплексной плоскости $W_р(j\omega)$.

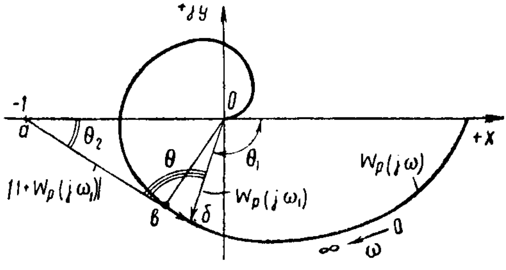


Рис. 9.23

Линии этой сетки отвечают условию $P(\omega)=\mathrm{const}=c$, где c — параметр семейства кривых.

Согласно (9.84), для этих линий

$$P(\omega)=\mathrm{Re}\frac{x+jy}{1+x+jy}=c$$

или

$$\frac{x(1+x)+y^2}{(1+x)^2+y^2}=c. \qquad (9.86)$$

Определим точки пересечения кривых (9.86) с вещественной осью. Подставив условие $y=0$ в (9.86), получим уравнение

$$x(1+x)=c(1+x)^2,$$

из которого следует, что $x_1=-1$; $x_2=\frac{c}{1-c}$. Таким образом, все кривые имеют общую точку касания $(-1+j0)$. Это окружности, центры которых расположены в точках $x_0=$ $=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{c}{1-c}-1\right)$, как показано на рис. 9.24. Значению параметра $P(\omega)=c=0$ соответствует окружность, опирающаяся на отрезок $(-1,0)$ вещественной оси; значению $P(\omega)=c=1$ — вертикальная прямая $x=-1$. Разбиение плоскости $W_р(j\omega)$ на области характерных значений $P(\omega)$ показано на рис. 9.25. Задаваясь значениями параметра c и вычисляя x_0, нетрудно построить P-номограмму, представленную на рис. 9.26.

Если заданы логарифмические амплитудные и фазовые характеристики $L_p(\omega)$ и $\varphi_p(\omega)$ системы в разомкнутом со-

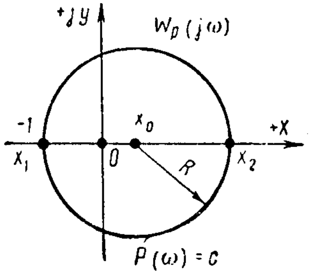


Рис. 9.24

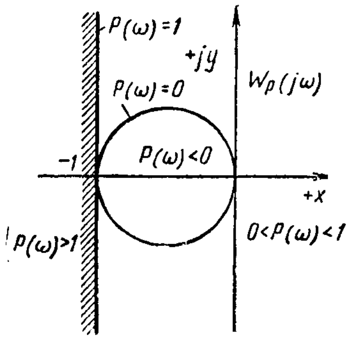


Рис. 9.25

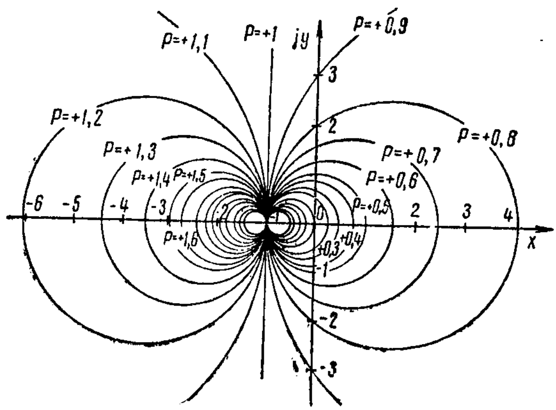


Рис. 9.26

стоянии, то, построив характеристику в координатах φ_p, L_p и пользуясь номограммами $P_з(\omega) = \mathrm{const}$ в плоскости φ, L (рис. 9.27), строят вещественную частотную характеристику замкнутой системы $P_з(\omega)$ и по ней указанным выше путем — переходную функцию системы.

Сравнивая частотный метод построения переходного процесса (примеры 9.7 и 9.8) с методом операторным (или классическим), основанным на определении корней характеристического уравнения (пример 9.1), можно сделать вывод, что частотный метод следует рекомендовать при порядке харак-

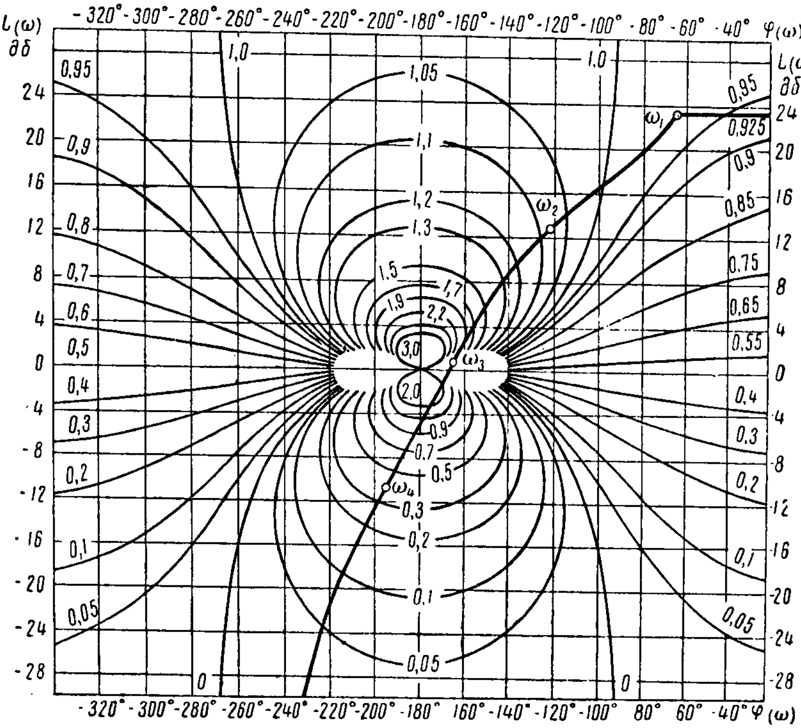


Рис. 9.27

теристического уравнения выше третьего. Для систем до третьего порядка включительно переходный процесс достаточно просто рассчитывается на основе определения корней характеристического уравнения.

При наличии аналоговых вычислительных машин получение решения упрощается.

Глава X

КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

§ 10.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КОСВЕННЫХ МЕТОДОВ ИССЛЕДОВАНИЯ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Основные показатели качества переходного процесса управления — быстрота ликвидации начальных отклонений (быстродействие системы) и плавность протекания процесса (отсутствие, или достаточная малость перерегулирования) далеко не всегда могут быть определены прямыми методами. Следует, однако, отметить, что массовое применение аналоговых моделирующих устройств все больше расширяет возможности прямого метода исследования качества и совместно с рациональной методикой организации моделирования и оценки его результатов придает ему новую практическую ценность.

Главная задача исследования качества — установить, какое влияние оказывает структура, каково влияние параметров системы на быстроту и плавность протекания переходных процессов. В случае линейных систем с постоянными параметрами эта задача успешно решается косвенными методами. Косвенные методы разработаны в теории автоматического управления сравнительно недавно (главным образом в период 1945—1960 гг.) и делятся на три группы.

Частотные методы. Основное преимущество частотных методов — возможность использования не только расчетных, но и экспериментальных характеристик разомкнутой системы для определения качества этой системы после замыкания цепи обратной связи. К этому добавляется простота и наглядность оценки изменений в характеристиках, вызываемых изменением структуры и параметров системы.

Наиболее плодотворным для оценки переходных процессов в замкнутой системе и, соответственно, для перехода к задаче ее синтеза оказывается исследование амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы и связи ее параметров с частотными характеристиками разомкнутой системы.

Интегральные методы. Наиболее сжатое и четкое представление о каком-либо процессе, очевидно, достигается в том случае, когда этот процесс можно охарактеризовать одним числом, значение которого достаточно полно отражает протекание процесса на заданном интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$. В математике оценки этого типа называются функционалами и, в частности, могут быть заданы в виде определенного интеграла

$$J = \int_0^T F[f(t)]\,dt,$$

численное значение которого для заданной зависимости F определяется всем ходом процесса $f(t)$ при $0 \leqslant t \leqslant T$.

Задача минимизации таких оценок, решаемая в общем случае вариационными методами, позволяет осуществить синтез оптимальных (наилучших в заданном смысле) систем [Л. 28].

Количественное (численное) представление показателя качества дает возможность автоматически решать эту задачу и создавать самооптимизирующиеся системы с заданным алгоритмом (программой) автоматической настройки. Сказанное определяет актуальность и перспективное значение таких оценок в теории автоматического управления.

Корневые методы. Под общим названием корневых методов объединяют различные способы оценки качества переходных процессов по расположению нулей и полюсов передаточной функции замкнутой системы в комплексной плоскости корней $p = \sigma + j\omega$. Максимальные возможности при этом дает исследование корневого годографа. Трудоемкость построения корневых годографов сложных систем (гл. VIII) ограничивает применение этих методов в инженерной практике, если для этой работы не привлекаются специальные приспособления (шаблоны, потенциальные аналоги и автоматические корнеискатели). При помощи корневых методов в теории автоматического управления осуществлено детальное исследование качества линейных систем, описываемых дифференциальным уравнением третьего порядка.

§ 10.2. ЧАСТОТНЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Показатель колебательности. На основании формулы (3.94) нормированную переходную функцию колебательного звена можно записать в виде

$$\frac{h(\tau)}{k} =$$

$$= \left[1 - e^{-\zeta\tau}\left(\cos\sqrt{1-\zeta^2}\,\tau + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin\sqrt{1-\zeta^2}\,\tau\right)\right]1_0(t), \quad (10.1)$$

где $\tau = \omega_0 t$.

Из (10.1) следует, что прямые качественные показатели колебательного звена однозначно определяются двумя параметрами: коэффициентом затухания ζ и резонансной частотой ω_0.

Определим показатель колебательности M как относительное значение максимума амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы

$$M = \frac{[W_з(\omega)]_м}{W_з(0)}. \tag{10.2}$$

Согласно (3.87) и (3.88), для колебательного звена

$$M = \frac{W(\omega_м)}{W(0)} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}; \; \zeta \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}, \tag{10.3}$$

где $\omega_м = \omega_0 \sqrt{1-2\zeta^2}$.

Выражения (10.1) и (10.3) позволяют установить зависимость показателей качества переходного процесса этого звена $\Delta h_м$, $t_м$, $t_р$ и N от показателя колебательности M его

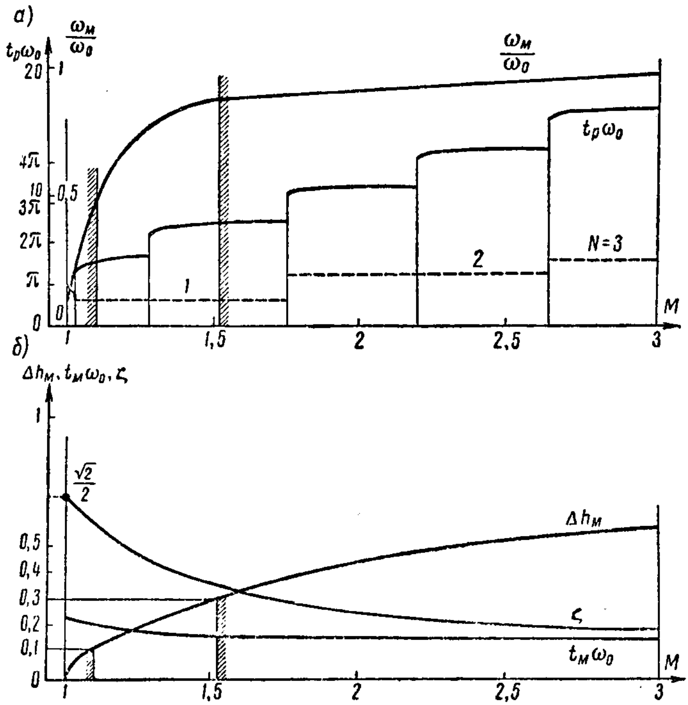


Рис. 10.1

амплитудно-частотной характеристики. Эта зависимость представлена графиками рис. 10.1.

Система с передаточной функцией колебательного звена

$$W_з(p) = \frac{\omega_0^2}{p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2} \tag{10.4}$$

получается при замыкании последовательного соединения инерционного и интегрирующего звеньев единичной отрицательной обратной связью и, следовательно,

$$W_р = \frac{k_{ac}}{p(pT+1)}, \tag{10.5}$$

а

$$W_з = \frac{\frac{k_{ac}}{T}}{p^2 + \frac{1}{pT} + \frac{k_{ac}}{T}}. \tag{10.6}$$

Соотношения (10.4) и (10.6) позволяют установить связь между параметрами этой системы в разомкнутом и замкнутом состоянии

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k_{ac}}{T}} \text{ и } \zeta = \frac{1}{2\sqrt{k_{ac}T}}, \tag{10.7}$$

а также между показателем колебательности замкнутой системы и запасом по фазе разомкнутой системы на частоте среза

$$\gamma_c = 180° + \varphi_р(\omega_c). \tag{10.8}$$

Эта зависимость представлена графиком на рис. 10.2

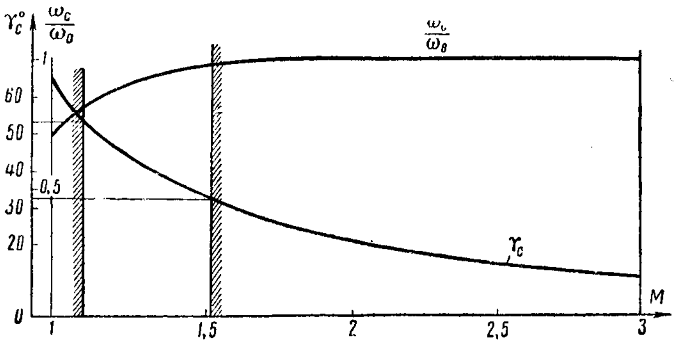


Рис. 10.2

На рис. 10.3 приведены примеры асимптотической логарифмической амплитудно-частотной характеристики разомкнутой системы с передаточной функцией (10.5) при различных значениях добротности и соответствующие им переходные функции замкнутой системы.

Очевидно, что увеличение добротности k_{ac} приводит к росту частоты колебаний в системе и к увеличению перерегулирования. Увеличение показателя колебательности M сопровождается уменьшением запаса по фазе γ_c. Считают, что для удовлетворительного качества переходного процесса должно быть

$$\left.\begin{aligned} &\Delta h = 0{,}1 \div 0{,}3.\\ &\text{При этом согласно рис. 10.1 следует обеспечить}\\ &M = 1{,}1 \div 1{,}5,\\ &\text{что по рис. 10.2 соответствует}\\ &\gamma_c = 30^\circ \div 50^\circ. \end{aligned}\right\} \quad (10.9)$$

Если амплитудно-частотная характеристика исследуемой системы, независимо от сложности этой системы, близка

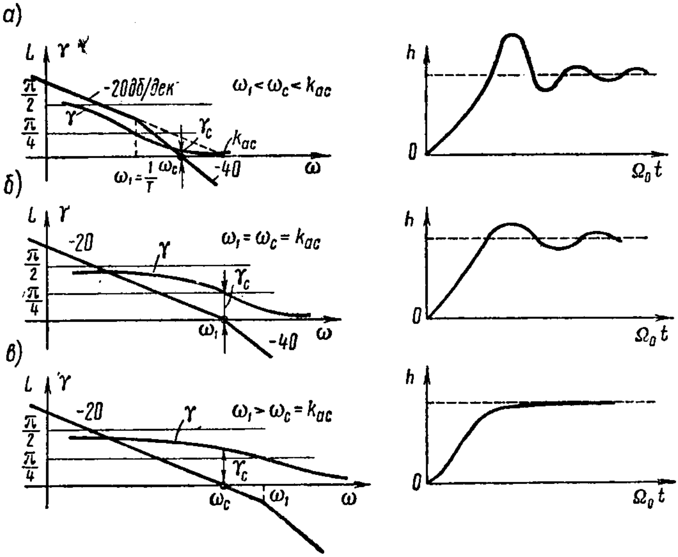


Рис. 10.3

к амплитудно-частотной характеристике колебательного звена с показателем колебательности M и частотой резонансного пика $\omega_м$, то и переходные процессы в системе будут близки к переходным процессам в таком колебательном звене. Эта гипотеза позволяет оценивать переходные функции многих сложных систем автоматического управления по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы (показатель колебательности M) и по частотной характеристике разомкнутой системы (запас по фазе γ_c). Следует отметить, что в большинстве случаев качество переходных процессов целесообразно характеризовать именно показателями M, $\omega_м$, ω_c, ω_0 и γ_c.

Построение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы по годографу частотной характеристики разомкнутой системы. Чтобы определить показатель колебательности M и частоту максимума $\omega_м$, нужно построить или оценить амплитудно-частотную характеристику замкнутой системы. Это может быть выполнено с помощью тех же расчетных или экспериментальных частотных характеристик разомкнутой системы, которые служат при исследовании ее устойчивости.

Связь между частотными характеристиками системы в разомкнутом и замкнутом состоянии определяется формулой

$$W_з(j\omega) = \frac{W_р(j\omega)}{1 + W_р(j\omega)}, \tag{10.10}$$

из которой следует, что в плоскости годографа частотной характеристики разомкнутой системы $W_р(j\omega)$ можно заранее построить сетку линий равного значения модуля частотной характеристики замкнутой системы.

По точкам пересечения годографа (отметки частоты ω должны быть нанесены на кривой) с линиями сетки $W_з = \text{const} = c$ легко построить график $W_з = f(\omega)$ или непосредственно оценить качество замкнутой системы, определив M и $\omega_м$.

Рассмотрим построение кривых $W_з = c$ в плоскости $W_р(j\omega) = P + jQ$. Из (10.10) следует, что

$$W_з = \frac{|W_р(j\omega)|}{|1 + W_р(j\omega)|} = \frac{|P + jQ|}{|(1 + P) + jQ|} = c. \tag{10.11}$$

Возводя в квадрат, получим

$$\frac{P^2 + Q^2}{(1 + P)^2 + Q^2} = c^2,$$

откуда

$$P^2 - 2P\frac{c^2}{1 - c^2} + Q^2 = \frac{c^2}{1 - c^2}. \tag{10.12}$$

После элементарных преобразований равенство (10.12) приводится к виду

$$\left(P - \frac{c^2}{1 - c^2}\right)^2 + Q^2 = \left(\frac{c}{1 - c^2}\right)^2. \tag{10.13}$$

Это уравнение семейства окружностей, центры которых расположены по вещественной оси, на расстоянии

$$P_0 = \frac{c^2}{1 - c^2} \tag{10.14}$$

от начала координат.

Точки пересечения каждой окружности с вещественной осью

$$P_1 = -\frac{c}{1 + c} \quad \text{и} \quad P_2 = \frac{c}{1 - c}, \tag{10.15}$$

а радиус

$$R = \left| \frac{c}{1 - c^2} \right|, \quad (10.16)$$

где $c = W_з = \text{const}$ — параметр семейства.

Диаграмма, построенная согласно (10.13)÷(10.16), приведена на рис. 10.4.

Значению $W_з = \infty$ соответствует точка $(-1 + j0)$, а значению $W_з = 0$ — начало координат. При $W_з = 1$ получим вертикальную прямую $P_1 = -\frac{1}{2}$. Окружности, соответствующие $W_з < 1$, располагаются справа, а $W_з > 1$ — слева от этой прямой.

Аналогично диаграмме, изображенной на рис. 10.4 (диаграмме Холла), можно построить сетку линий равной фазы

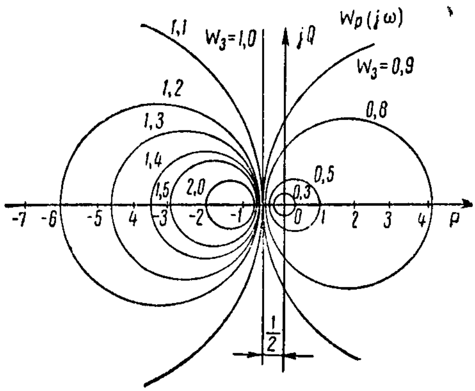


Рис. 10.4

комплексного коэффициента усиления замкнутой системы

$$\varphi_з = \arg W_з(j\omega) = \text{const} = c.$$

Эта диаграмма приведена на рис. 10.5.

Если максимум амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы ограничен заданным показателем колебательности (10.2)

$$W_{зм} \leqslant MW_з(0) = M_п, \quad (10.17)$$

то годограф частотной характеристики разомкнутой системы $W_р(j\omega)$ при $M_п \geqslant 1$ не может попасть внутрь круга с параметром $W_з = c = M_п$ (см. рис. 10.4). Следовательно, кривая $W_р(j\omega)$ может лишь касаться окружности $W_з = M_п$ в одной или нескольких точках. Это условие обеспечивается применением в системе автоматического управления специальных корректирующих устройств, которые изменяют фильтрующие свойства разомкнутой системы и деформируют годограф ее частотной характеристики.

Постановка и решение задачи коррекции системы, которая подробно рассматривается далее в гл. XI, сильно упрощаются, если от ограничения (10.17), наложенного на характеристику замкнутой системы, перейти к ограничению, наложенному на модуль $W_р$ и запас по фазе γ комплексного коэффициента усиления разомкнутой системы.

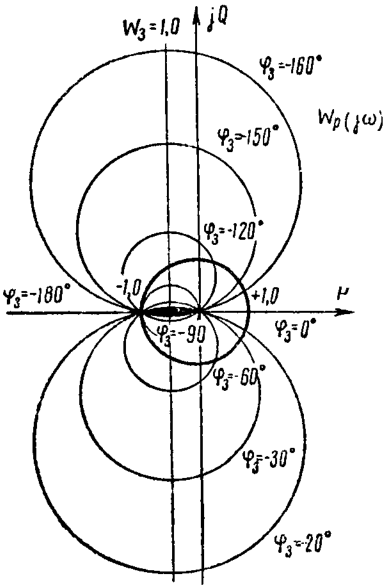


Рис. 10.5

На рис. 10.6, *а* изображена одна из окружностей диаграммы, представленной на рис. 10.4. Для того чтобы получить уравнение этой граничной окружности $W_з = c = M_п$ в полярных координатах $W_р$, γ, подставим $W_р = P^2 + Q^2$ и $P = -W_р \cos\gamma$ в равенство (10.12), тогда

$$W_р^2 + 2W_р \cos\gamma \frac{M_п^2}{1-M_п^2} = \frac{M_п^2}{1-M_п^2}$$

или

$$2W_р \cos\gamma = \left(1 + W_р^2 \frac{M_п^2 - 1}{M_п^2}\right).$$

Окончательно уравнение граничной окружности в полярных координатах

$$\cos\gamma = \frac{1}{2W_р}\left[1 + \frac{W_р^2}{M_п^2}(M_п^2 - 1)\right]. \tag{10.18}$$

Как следует из (10.18) и рис. 10.6, *а*, для обеспечения показателя колебательности замкнутой системы не выше заданного достаточно, чтобы в интервале

$$|P_2| = \frac{M_п}{M_п - 1} \geqslant W_р(\omega) \geqslant \frac{M_п}{M_п + 1} = |P_1|$$

запас по фазе удовлетворял неравенству

$$\gamma \geqslant \arccos\frac{1}{2W_р}\left(1 + W_р^2 \frac{M_п^2 - 1}{M_п^2}\right). \tag{10.19}$$

Из рис. 10.6, *а* видно, что деформировать годограф $W_р(j\omega)$ при коррекции необходимо так, чтобы в области резонансного пика $W_з(\omega_м) = \max$ (или в интервале средних частот) запас системы по фазе γ удовлетворял неравенству

$$\gamma \geqslant \gamma_м.$$

Поскольку изменение фильтрующих свойств системы достигается применением специальных корректирующих устройств, усложняющих систему, стараются добиться нужного качества

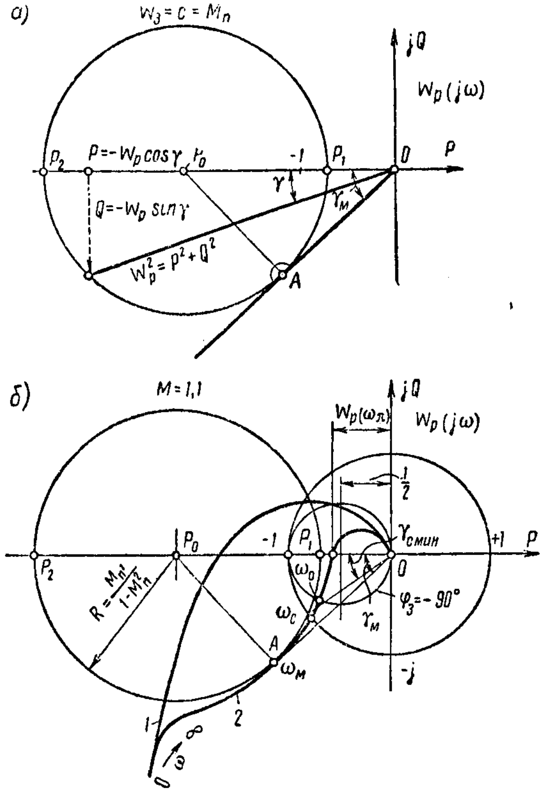


Рис. 10.6

при наименьшем фазовом опережении, вносимом корректирующими схемами. Это требование выполняется, когда годограф $W_p(j\omega)$ касается граничной окружности в одной лишь точке A. В этом случае

$$\gamma(\omega_м) = \gamma_м$$

и, как следует из рис. 10.6, *а* и формул (10.14) — (10.16),

$$\sin\gamma_м = \frac{R}{|P_0|} = \frac{1}{c} = \frac{1}{M_п},$$

т. е.

$$\gamma_{\text{м}} = \arcsin \frac{1}{M_{\text{п}}}\,; \quad M_{\text{п}} \geqslant 1. \tag{10.20}$$

На рис. 10.6, *б* приведены годографы нескорректированной системы *1* и той же системы после коррекции, удовлетворяющей требованию минимального фазового опережения (кривая *2*).

З а п а с р а з о м к н у т о й с и с т е м ы п о ф а з е и у с и л е н и ю. В большинстве практических задач удовлетворительное качество системы достигается при выполнении более простых (необходимых) требований, вытекающих из условия (10.19), а именно при обеспечении требуемого запаса по фазе на частоте среза $\gamma_{\text{с}}$ и запаса по усилению $L_{\text{зап}}$. Рассмотрим, пользуясь рис. 10.6, *б*, что собою представляют эти параметры.

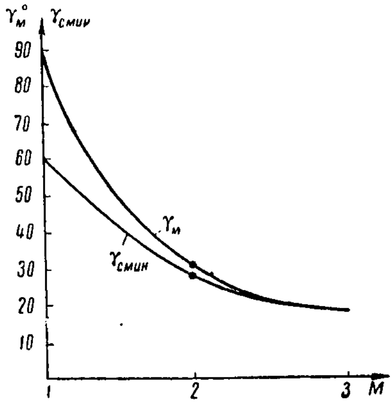


Рис. 10.7

1. Запас по фазе $\gamma_{\text{с}}$ на частоте среза $\omega = \omega_{\text{с}}$ при $W_{\text{р}} = 1$. Из (10.18) следует, что минимальный запас по фазе на частоте среза

$$\gamma_{\text{с.мин}} = \arccos\left(1 - \frac{1}{2M_{\text{п}}^2}\right) = \arcsin \frac{1}{M_{\text{п}}} \sqrt{1 - \frac{1}{4M_{\text{п}}^2}}\,. \tag{10.21}$$

На рис. 10.7 построены графики $\gamma_{\text{м}}(M_{\text{п}})$ и $\gamma_{\text{с.мин}}(M_{\text{п}})$ согласно (10.20) и (10.21).

Очевидно, что при условии (10.20) $\omega_{\text{м}} < \omega_{\text{с}}$ и $\gamma_{\text{м}} > \gamma_{\text{с.мин}}$. Чем больше $M_{\text{п}}$, тем меньше разница между $\gamma_{\text{м}}$ и $\gamma_{\text{с.мин}}$.

2. Запас по усилению (запас по модулю), под которым мы будем понимать логарифм отношения предельного коэффициента усиления системы по условию устойчивости к ее коэффициенту усиления в исследуемом случае. Согласно критерию Найквиста, это отношение обратно пропорционально длине отрезка, отсекаемого годографом $W_{\text{р}}(j\omega)$ на отрицательной вещественной полуоси при $\omega = \omega_{\pi}$,

$$\frac{k_{\text{пр}}}{k} = \frac{1}{W_{\text{р}}(\omega_{\pi})}\,,$$

где ω_{π} — частота пересечения, определяемая условием

$$Q(\omega_{\pi}) = 0 \text{ при } P(\omega_{\pi}) < 0.$$

Таким образом, запас по модулю, выраженный в децибеллах,

$$L_{\text{зап}} = 20 \lg \frac{1}{W_{\text{р}}(\omega_{\pi})}\,. \tag{10.22}$$

Из (10.18) и рис. 10.6, *б* следует, что минимальное значение запаса по усилению при заданном $M_п$

$$L_{зап.\,мин} = 20 \lg \frac{1}{|P_1|} = 20 \lg \frac{M_п + 1}{M_п}. \qquad (10.23)$$

Запас по усилению реальных систем обычно выше минимально необходимого значения (10.23) и выбирается в пределах

$$L_{зап} = 8 \div 12 \ дб.$$

Резонансная частота незатухающих колебаний замкнутой системы ω_0 определяется из условия $\varphi_з = -90°$, что соответствует точке пересечения годографа $W_р(j\omega)$ с окружностью, диаметром которой служит отрезок $[-1{,}0]$ вещественной оси (см. рис. 10.6, *б*). Из этого рисунка, а также из рис. 10.1 и 10.2 следует, что при $M > 1$ частоты $\omega_м < \omega_с < \omega_0$, как правило, довольно близки друг к другу и сближаются при увеличении M. Частота свободных затухающих колебаний замкнутой системы ω_t также заключена между $\omega_м$ и ω_0. Например, для колебательного звена

$$\frac{\omega_м}{\omega_0} = \sqrt{1 - 2\zeta^2} < \sqrt{1 - \zeta^2} = \frac{\omega_t}{\omega_0}.$$

Поэтому при приближенных оценках считают, что

$$\omega_t \approx \omega_с \qquad (10.24)$$

— *частота затухающих колебаний замкнутой системы в переходном процессе приближенно равна частоте среза разомкнутой системы.*

Построение амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы по годографу инверсной частотной характеристики разомкнутой системы. Во многих случаях при исследовании устойчивости и качества удобно пользоваться не прямой, а инверсной частотной характеристикой разомкнутой системы $W_р^{-1}(j\omega)$.

Из выражения (10.10) следует, что

$$W_з(j\omega) = \frac{1}{1 + \frac{1}{W_р(j\omega)}} = \frac{1}{1 + W_р^{-1}(j\omega)}. \qquad (10.25)$$

Из этого равенства видно, что строить амплитудно-частотную характеристику замкнутой системы по годографу инверсной частотной характеристики разомкнутой системы $W_р^{-1}(j\omega)$ проще, чем по годографу $W_р(j\omega)$.

Построим сетку линий постоянного значения $W_з(\omega) = c = \text{const}$ в плоскости $W_р^{-1} = X + jY$.

Согласно (10.25),

$$c = \frac{1}{|1 + X + jY|}, \text{ или } c^2 = \frac{1}{(1+X)^2 + Y^2},$$

откуда уравнение линий сетки

$$\frac{1}{c^2} = (1 + X)^2 + Y^2, \qquad (10.26)$$

где c — параметр семейства.

Выражение (10.26) показывает, что линии постоянных значений амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы в плоскости инверсной частотной характеристики разомкнутой системы представляют собой концентрические окружности с центром в точке $(-1 + j0)$.

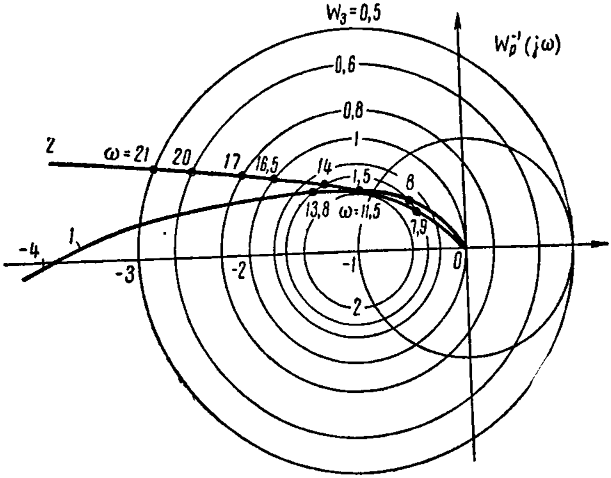


Рис. 10.8

Значение $W_з = \text{const}$ на каждой окружности определяется как величина, обратная радиусу этой окружности $R = \frac{1}{W_з}$.

На рис. 10.8 построена круговая диаграмма, соответствующая выражению (10.26). Максимальное значение $W_з(\omega) = M_п$ определяется как индекс окружности, которой касается годограф инверсной частотной характеристики разомкнутой системы $W_р^{-1}(j\omega)$.

В качестве примера на рис. 10.8 приведен годограф инверсной частотной характеристики следящей системы (кривая *1*) с передаточной функцией

$$W_р(p) = \frac{16}{p(0,1p + 1)(0,02p + 1)},$$

переходные процессы которой рассчитаны в примере 9.1. Показатель колебательности этой системы ($M = 1{,}94$) слишком высок, что (как видно из рис. 10.9*б*, кривая *1*) приводит к чрезмерному перерегулированию $\varepsilon_м = 0{,}39$ и слабому затуханию $N = 2$. Для сравнения на рис. 10.9 приведена также переходная функция колебательного звена с теми же M и $\omega_м$ — кривая *2*, для которого $W_р$ выражается уравнением (10.5) и годограф имеет вид кривой *2* (на рис. 10.8). Кривые практически совпадают.

Диаграмма, представленная на рис. 10.8, оказывается особенно полезной при синтезе корректирующих обратных связей в следящих системах. Подробно эта задача рассматривается в гл. XI.

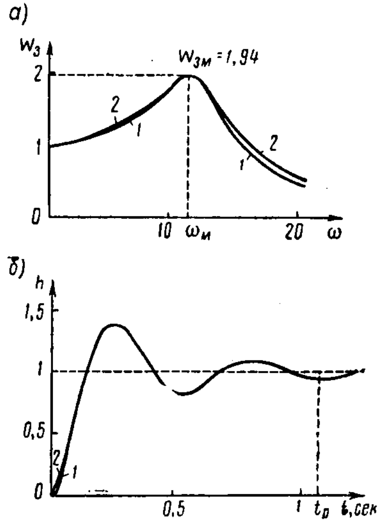


Рис. 10.9

Оценка качества по логарифмическим частотным характеристикам. Типовые характеристики. Разомкнутую систему, как правило, представляют в виде последовательного соединения звеньев. Частотные характеристики некоторых из них могут быть заданы экспериментальной таблицей или графиком, а остальные — формулами. Для построения годографов $W_р(j\omega)$ или $W^{-1}_р(j\omega)$ при этом приходится перемножать модули векторов при совпадающем значении частоты. При переходе от полярных координат

$$W_р(j\omega) = W_р(\omega)\, e^{j\varphi_р(\omega)}$$

к прямоугольным логарифмическим

$$\ln W_р(j\omega) = \ln W_р(\omega) + j\varphi_р(\omega)$$

умножение заменяется сложением, что значительно упрощает построение. Кроме того, переход от характеристики $W_р(j\omega)$ к характеристике $W^{-1}_р(j\omega)$ в этих координатах осуществляется простым изменением знаков осей координат. Это особенно удобно, когда требуется исследовать качество не только по выходу замкнутой системы, но и по ее рассогласованию ε, поскольку

$$W_{\varepsilon}(j\omega) = \frac{1}{1 + W_{\text{р}}(j\omega)} = \frac{W_{\text{р}}^{-1}(j\omega)}{1 + W_{\text{р}}^{-1}(j\omega)}$$

также зависит от $W_{\text{р}}^{-1}(j\omega)$, как $W_{\text{з}}(j\omega)$ от $W_{\text{р}}(j\omega)$.

Ось значений модуля логарифмической диаграммы обычно располагают вертикально (диаграмма Никольса), как показано на рис. 10.10. Основную, равномерную шкалу на этой оси наносят в децибеллах — $L_{\text{р}} = 20 \lg W_{\text{р}}$. Для удобства может быть нанесен и логарифмический масштаб $W_{\text{р}} = |W_{\text{р}}(j\omega)|$. По горизонтальной оси диаграммы откладывается значение фазового сдвига разомкнутой системы $\varphi_{\text{р}}$ в градусах или ее запаса по фазе $\gamma_{\text{р}}$.

Сетки линий равного значения модуля $W_{\text{з}}$ и фазы $\varphi_{\text{з}}$ замкнутой системы, нанесенные на номограмме, позволяют строить частотные характеристики замкнутой системы по частотным характеристикам разомкнутой.

Для примера, на номограмму рис. 10.10 нанесен годограф конкретной разомкнутой системы с отмеченными на нем значениями параметра ω. Изменение коэффициента усиления приводит к вертикальному сдвигу кривой относительно координатной сетки.

Удобство определения запасов по фазе и усилению видно из рисунка.

При исследовании минимально-фазовых систем, которые в разомкнутом состоянии могут быть представлены последовательным соединением элементарных звеньев, применение частотных методов особенно упрощается. Фазочастотная характеристика таких систем однозначно определяется их амплитудно-частотной характеристикой, а асимптотическая логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ) состоит из отрезков, наклон которых кратен $20 \frac{\partial б}{\partial ек}$.

Согласно условию (10.9), приемлемое качество переходного процесса достигается, если запас по фазе на частоте среза $\gamma_c \geqslant 30°$. При этом, в соответствии с условием (2.71) для минимально-фазовых систем, участок асимптотической ЛАЧХ разомкнутой системы, содержащий частоту среза ω_c, должен иметь наклон $\left(-20 \frac{\partial б}{\partial ек}\right)$. Чем больше длина этого участка, тем (при прочих равных условиях) больше запас по фазе разомкнутой системы и меньше показатель колебательности замкнутой системы M. Это положение в частности иллюстрируется рис. 10.3.

Возможные конфигурации среднечастотной части характеристики таких систем практически ограничены типовыми характеристиками, соответствующими передаточной функции разомкнутой системы вида

$$W_p(p) = \frac{k(T_0 p + 1)^l}{p(T_1 p + 1)^r (T_2 p + 1)^l}; \quad l = 1, 2; \; r = 1, 2. \quad (10.27)$$

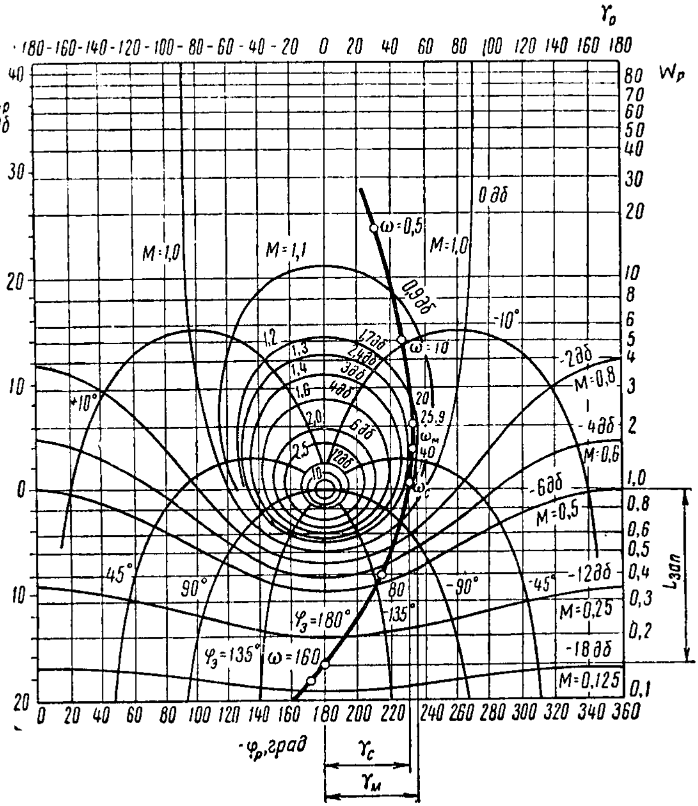


Рис. 10.10

Параметры типовой частотной характеристики приведены на рис. 10.11, *а*. Сравнительно небольшое число вариантов, подлежащих исследованию, позволило просчитать и построить набор номограмм, которые связывают параметры типовых характеристик разомкнутой системы с показателями амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы — рис. 10.11, *б* и ее переходной функции — рис. 10.11, *в*. Приведенные в приложении (таблица П.9) номограммы позволяют весьма упростить исследование качества систем этого типа.

В качестве примера определения показателей переходного процесса по номограммам рассмотрим систему, логарифмический годограф частотной характеристики которой приведен на рис. 10.10. Ее передаточная функция

$$W_p(p) \approx \frac{400(0,1p+1)}{p(p+1)(0,0066p+1)^2}.$$

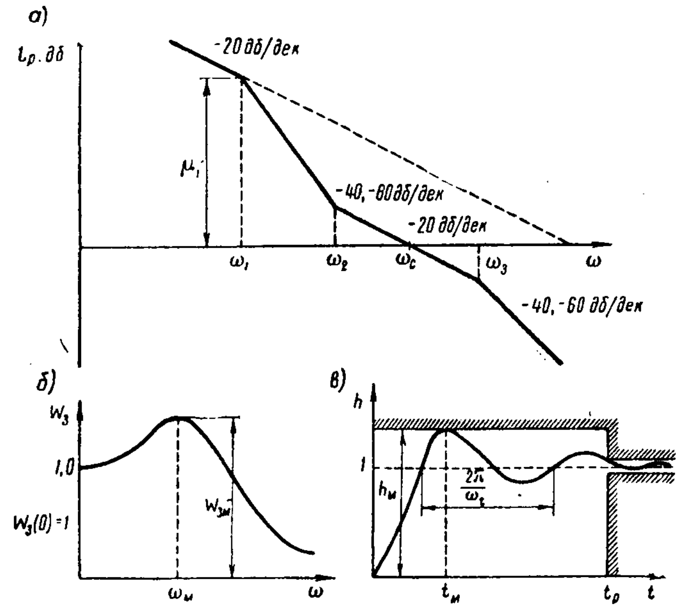


Рис. 10.11

Параметры типовой логарифмической характеристики изображены на рис. 10.11.

$\mu_1 = 52{,}4$ *дб*; $\omega_1 = 1$ 1/*сек*; $\omega_2 = 10$ 1/*сек*; $\omega_c \approx 40$ 1/*сек*; $\omega_3 = 152$ 1/*сек*. Соответственно наклоны участков —20 *дб/дек* при $\omega < \omega_1$; —40 *дб/дек* при $\omega_1 < \omega < \omega_2$; —20 *дб/дек* при $\omega_2 < \omega < \omega_3$; —60 *дб/дек* при $\omega_3 < \omega$; при этом $\omega_3/\omega_c \approx 4$.

Согласно номограмме, изображенной на рис. П.9.13, для $\omega_1/\omega_c = 0{,}025$ и $\mu_1 = 52{,}4$ *дб*, интерполируя определяем: $h_М \approx 1{,}4$; $W_{3М} = 1{,}3$; $\frac{\omega_c t_p}{10} = 0{,}6$ и $t_p = 0{,}15$ *сек*; $\frac{\omega_0 t_М}{10} = 0{,}27$ и $t_М = 0{,}068$ *сек*; $\frac{\omega_t}{\omega_c} = \frac{\omega_М}{\omega_c} = 0{,}95$; $\omega_t = \omega_М = 38$ 1/*сек*.

§ 10.3. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим в порядке возрастающей сложности интегральные оценки, характеризующие переходную составляющую процесса управления, определение которой иллюстрируется рис. 10.12,

$$y_п(t) = -y_{св}(t) = y_в(t) - y(t) = \varepsilon_{св}(t) \qquad (10.28)$$

за весь теоретический интервал ее существования $0 < t < \infty$.

Естественно, что вычисление интегральных оценок должно быть обеспечено заданием структуры и параметров системы (дифференциальное уравнение, структурная схема или передаточная функция), воздействия на входе (функция времени или ее изображение по Лапласу) и начальных условий. Решение дифференциального уравнения при этом не требуется.

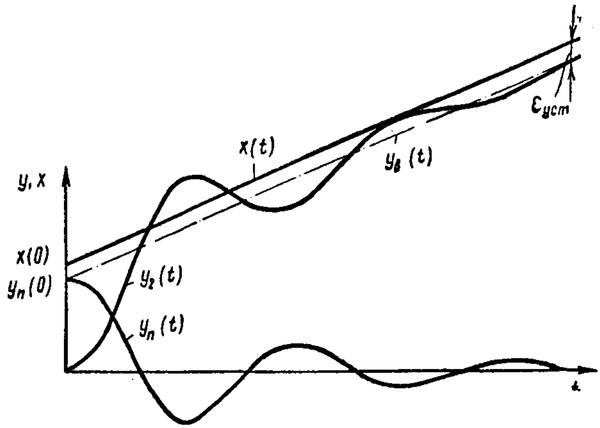


Рис. 10.12

Линейные интегральные оценки. Линейной интегральной оценкой переходной составляющей $y_п$ называется определенный интеграл вида

$$S = \int_0^\infty \varphi(t)\, y_п(t)\, dt, \qquad (10.29)$$

где $\varphi(t)$ — заранее заданная функция времени — функция веса (которую не следует смешивать с $w(t)$ — весовой функцией системы).

Практическое распространение получили линейные интегральные оценки

$$S_{\alpha l} = \int_0^\infty e^{-\alpha t} t^l y_п(t)\, dt$$

преимущественно вида

$$S_{0l}=\int_0^\infty t^l y_п(t)\,dt \tag{10.30}$$

с функцией веса $\varphi(t)=t^l$.

Простейшая из этих оценок

$$S_{00}=\int_0^\infty y_п(t)\,dt \tag{10.31}$$

равна площади переходного процесса, заштрихованной на рис. 10.13 с учетом знака $y_п$. Для монотонных процессов (рис. 10.13, *а*) эта оценка может служить характеристикой качества системы.

Оценка

$$S_{01}=\int_0^\infty t y_п(t)\,dt \tag{10.32}$$

равна моменту площади S_{00} относительно начала координат. Отношение

$$T_ц=\frac{S_{01}}{S_{00}}$$

определяет положение центра тяжести фигуры, заштрихованной на рис. 10.13, и может служить характеристикой быстродействия системы при монотонных процессах управления (см. рис. 10.13, *а*).

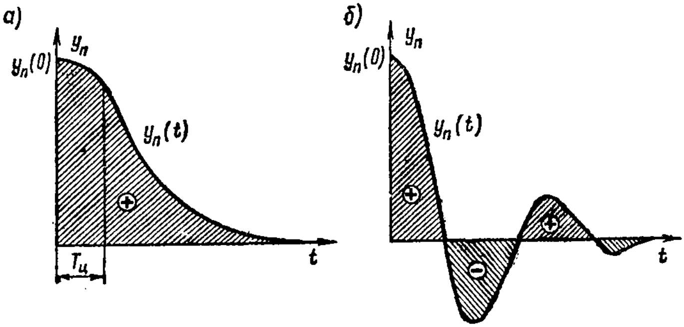


Рис. 10.13

Старшие оценки (10.30) определяют моменты l-го порядка функции $y_п(t)$, где $l=2, 3\ldots$

Линейные интегральные оценки весьма просто вычислить. Дифференцируя изображение $y_п(t)$ по комплексному параметру p, получим

$$\frac{d^l}{dp^l}Y_п(p)=\frac{d^l}{dp^l}\int_0^\infty y_п(t)\,e^{-pt}dt=\int_0^\infty(-1)^l t^l y_п(t)\,e^{-pt}dt=$$
$$=(-1)^l L\{t^l y_п(t)\},$$

где $Y_п(p)$ — изображение $y_п(t)$.

В соответствии с теоремой о предельном значении

$$S_{0l} = \int_0^\infty t^l y_п(t)\,dt = (-1)^l \lim_{p\to 0} \frac{d^l}{dp^l} Y_п(p). \qquad (10.33)$$

Равенство (10.33) аналогично равенству (9.80) метода коэффициентов ошибки. Следует, однако, учесть, что передаточная функция, связывающая переходную составляющую и вход системы, вообще говоря, не совпадает с передаточной функцией системы. Согласно (10.33), оценка

$$S_{00} = \lim_{p\to 0} Y_п(p) = Y_п(0). \qquad (10.34)$$

Применение линейных интегральных оценок практически ограничено, поскольку они приемлемы только для монотонных процессов. Из рис. 10.13, *б* ясно, что для колебательного процесса значение S_{00} и других линейных оценок может быть малым при плохом затухании и больших перерегулированиях. К сожалению, установить заранее монотонность процессов в исследуемой системе довольно трудно, что еще более ограничивает непосредственное применение этих оценок. От этого недостатка свободны квадратичные интегральные оценки.

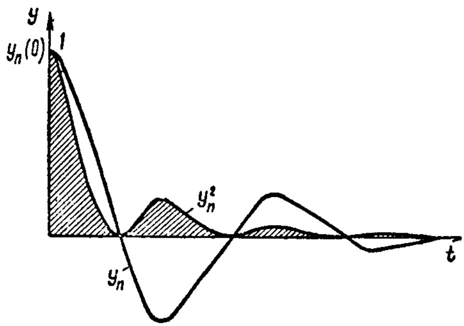


Рис. 10.14

Квадратичные интегральные оценки. Квадратичные интегральные оценки вида

$$J = \int_0^\infty [y_п^{(l)}(t)]^2 dt$$

предложены акад. Л. И. Мандельштамом и Н. Д. Папалекси для широкого круга задач теории колебаний в 1909 г. К задачам приборостроения оценка этого вида применена А. А. Харкевичем в 1937 г. В теории автоматического управления квадратичные оценки применены и развиты А. А. Красовским (1946 г.) и А. А. Фельдбаумом (1948 г.).

Простейшая квадратичная интегральная оценка

$$J_0 = \int_0^\infty y_п^2(t)\,dt \qquad (10.35)$$

характеризует протекание переходного процесса так, как это представлено на рис. 10.14. Ее численное значение, равное площади, заштрихованной на этом рисунке, учитывает абсолютное значение отклонения $y_п$, что позволяет применять оценку J_0 также и к колебательным системам.

Интеграл проще всего определяется с помощью теоремы Релея (см. приложение П.2, формулу П.2.5), из которой

$$J_0 = \int_0^\infty y_п(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |Y_п(j\omega)|^2 d\omega, \tag{10.36}$$

где $|Y_п(j\omega)|$ — амплитудный спектр переходной составляющей на выходе системы управления.

В большинстве случаев изображение $Y_п(p)$ — дробно-рациональная функция

$$Y_п(p) = \frac{B(p)}{C(p)} = \frac{b_m p^m + b_{m-1}p^{m-1} + \ldots + b_1 p + b_0}{c_n p^n + c_{n-1}p^{n-1} + \ldots + c_1 p + c_0} \tag{10.37}$$

и формула (10.36) принимает вид

$$J_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{B(j\omega)B(-j\omega)}{C(j\omega)C(-j\omega)}\,d\omega. \tag{10.38}$$

Интегралы вида (10.38) в функции коэффициентов b_k и c_k вычислены впервые Мак-Леном для $m = n - 1$ и $n = 1, 2, 3, \ldots, 7$. Существуют таблицы до $n = 10$ [Л. 27], что с запасом удовлетворяет запросы практики. Таблица до $n = 6$ приведена в приложении П.6.

В частности, при оценке реакции устойчивой системы управления на импульс

$$y_п(t) = w_з(t);\ Y_п(p) = W_з(p) \quad \text{и} \quad |Y_п(j\omega)|^2 = $$
$$= W_з(j\omega)W_з(-j\omega) = W_з^2(\omega).$$

Если же исследуется переходная функция системы, то

$$y_п(t) = h_{уст} - h(t);\ Y_п(p) = \frac{W_з(0) - W_з(p)}{p}$$

и

$$|Y_п(j\omega)|^2 = \frac{[W_з(0) - W_з(j\omega)][W_з(0) - W_з(-j\omega)]}{-\omega^2} = \frac{B(j\omega)B(-j\omega)}{C(j\omega)C(-j\omega)}.$$

Пример 10.1. Определить квадратичную интегральную оценку J_0 для переходной функции системы с

$$W_з(p) = \frac{1}{p^3 + Ap^2 + Bp + 1}$$

и вычислить значения параметров A и B, минимизирующие J_0. Поскольку $W_з(0) = 1$, то

$$Y(p) = \left[1 - \frac{1}{p^3 + Ap^2 + Bp + 1}\right]\frac{1}{p} = \frac{p^2 + Ap + B}{p^3 + Ap^2 + Bp + 1}.$$

Из приложения П.8 для $n = 3$

$$J_0 = \frac{b_2^2 c_0 c_1 + (b_1^2 - 2b_0 b_2) c_0 c_3 + b_0^2 c_2 c_3}{2c_0 c_3 (c_1 c_2 - c_0 c_3)}.$$

В рассматриваемом случае

$$b_0 = c_1 = B;\ b_1 = c_2 = A;\ b_2 = c_3 = c_0 = 1,$$

откуда

$$J_0 = \frac{B + (A^2 - 2B) + B^2A}{2(AB-1)} = \frac{B(AB-1) + A^2}{2(AB-1)} = \frac{B}{2} + \frac{A^2}{2(AB-1)}.$$

Определим частные производные:

$$\frac{\partial J_0}{\partial A} = \frac{2A(AB-1) - A^2B}{2(AB-1)^2};$$

$$\frac{\partial J_0}{\partial B} = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{A^3}{(AB-1)^2}\right]$$

и, приравняв их к нулю, получим $A = 1$, $B = 2$, при этом, $J_{0\,\text{мин}} = 1{,}5$.

Переходный процесс, соответствующий минимуму J_0, в исследуемой системе получается колебательным, причем значение показателя колебательности $M = 1{,}34$ указывает на значительное перерегулирование. Это не удивительно, поскольку оценка J_0 не характеризует плавность протекания процессов управления.

На рис. 10.15 показаны три различных процесса, соответствующих равному значению интегральной квадратичной оценки J_0. Очевидно, что процесс *1* мало пригоден для практики, процесс *2* — удовлетворителен, а процесс *3* соответствует хорошему качеству системы.

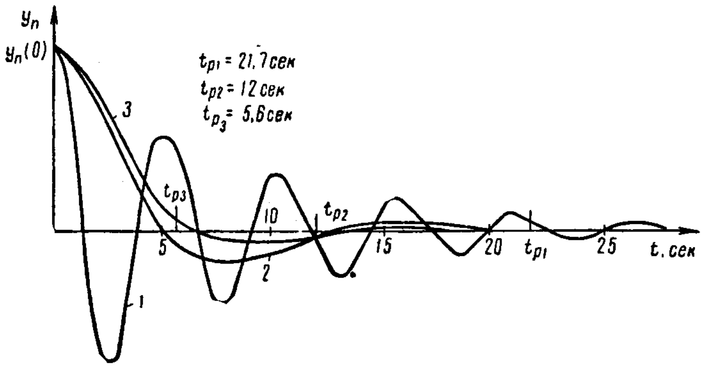


Рис. 10.15

Наименьшее, нулевое значение оценки J_0 согласно (10.35) достигается при $y_\text{п}(t) = 0$ во всех точках, кроме $t = 0$. Такой процесс не может быть принят в качестве эталона сравнения поскольку чрезмерное быстродействие в линейной системе приводит к недопустимым и практически нереализуемым перенапряжениям и перегрузкам.

От перечисленных выше недостатков свободна квадратичная интегральная оценка

$$J_1 = \int_0^\infty \left[y_\text{п}^2(t) + \tau_1^2 \dot{y}^2(t)\right] dt. \tag{10.39}$$

Учет скорости протекания процесса $\dot{y}(t) = \frac{dy_п(t)}{dt}$ с весом τ_1 придает этой оценке качественно новые свойства.

Интеграл (10.39) может быть представлен в виде

$$J_1 = \int_0^\infty [y_п(t) + \tau_1 \dot{y}(t)]^2 dt - 2\tau_1 \int_0^\infty y_п(t)\, \dot{y}(t)\, dt =$$

$$= \int_0^\infty [y_п(t) + \tau_1 \dot{y}(t)]^2 dt - 2\tau_1 \int_0^\infty y_п(t)\, dy_п(t).$$

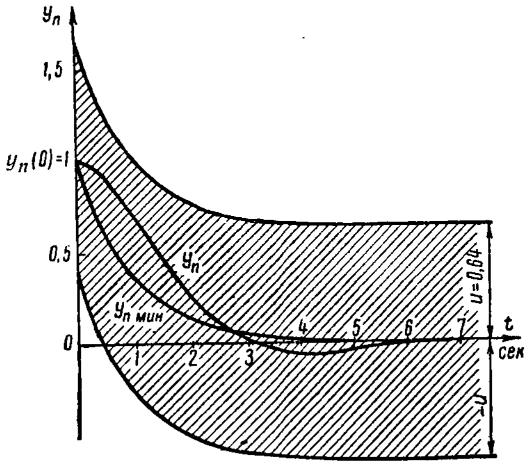


Рис. 10.16

Так как по определению $y_п(\infty) = 0$, то

$$J_1 = \int_0^\infty [y_п(t) + \tau_1 \dot{y}(t)]^2 dt + \tau_1 y_п^2(0),$$

откуда следует, что

$$J_{1\,мин} = \tau_1 y_п^2(0) \tag{10.40}$$

соответствует процесс, определяемый уравнением

$$\tau_1 \frac{dy_п}{dt} + y_п = 0, \tag{10.40,a}$$

при начальном условии $y_п(0)$.

Поэтому оптимальным по минимуму оценки J_1 процессом служит получающаяся в результате решения уравнения (10.40,a) экспонента рис. 10.16

$$y_{п.\,мин}(t) = y_п(0)\, e^{-\frac{t}{\tau_1}} \tag{10.41}$$

Задавая численное значение весового коэффициента, ограничивают быстродействие оптимальной (эталонной) системы и обеспечивают плавность протекания оптимального процесса. Обычно задают $\frac{1}{6} t_р < \tau_1 < \frac{1}{3} t_р$, где $t_р$ — требуемое время установления.

Как показал А. А. Фельдбаум [Л. 21], интеграл J_1 и старшие квадратичные интегральные оценки J_k обладают чрезвычайно важным свойством: если экстремальное (минимальное) значение оценки $J_{k\,мин}$ ($k = 1, 2, 3, \ldots$) отличается от значения J_k, вычисленного для исследуемой системы на величину

$$\varepsilon_k = J_k - J_{k\,мин} > 0,$$

то переходный процесс этой системы $y_п(t)$ в любой момент времени отличается от экстремали $y_{п.\,о}(t)$ меньше, чем на

$$u = \sqrt{w_k \varepsilon_k}, \tag{10.42}$$

где величина w_k может быть заранее вычислена для любого интеграла J_k. Это положение иллюстрируется рис. 10.16. В частности, для J_1

$$w_1 = \frac{1}{\tau_1}$$

и

$$|y_п(t) - y_{п.\,мин}(t)| < u = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\tau_1}}. \tag{10.43}$$

С ростом порядка дифференциального уравнения исследуемой системы значение разности ε_1, достигаемой даже при наилучшем выборе ее параметров, увеличивается и ширина полосы $\pm u$ растет. При этом теряется возможность с достаточной точностью судить о близости переходного процесса системы к заданной экстремали. Увеличение точности суждения обеспечивается применением одной из старших квадратичных интегральных оценок

$$J_k = \int_0^\infty \{y_п^2(t) + \tau_1^2 \dot{y}^2(t) + \ldots + \tau_k^2 [y^{(k)}(t)]^2\}\, dt, \tag{10.44}$$

экстремалью которой служит решение линейного дифференциального уравнения

$$a_k y^{(k)}(t) + a_{k-1} y^{(k-1)}(t) + \ldots + a_1 \dot{y}(t) + a_0 y(t) = 0 \tag{10.45}$$

при $a_0 = 1$ и заданных начальных условиях. Обычно принимают

$$y(0) = y_п(0); \quad \dot{y}(0) = \ddot{y}(0) = \ldots = y^{(k-1)}(0) = 0. \tag{10.46}$$

Для определения зависимости между коэффициентами веса в формуле (10.44) и коэффициентами уравнения (10.45) записывают тождество

$$\int_0^\infty [y_п^2(t) + \tau_1^2 \dot{y}^2(t) + \ldots + \tau_k^2 (y^{(k)}(t))^2]\, dt =$$

$$= \int_0^\infty (y + a_1 \dot{y} + \ldots + a_k y^{(k)})^2\, dt + C.$$

Раскрыв квадрат суммы под интегралом в правой части и интегрируя удвоенные произведения по частям с учетом начальных условий (10.46), получим

$$\left.\begin{aligned} &C = a_1 y_п^2(0);\\ &\tau_1^2 = a_1^2 - 2a_0 a_2;\\ &\tau_2^4 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + a_0 a_4;\\ &\tau_3^6 = a_3^2 - 2a_2 a_4 + 2a_1 a_5 - 2a_0 a_6;\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &\tau_k^{2k} = a_k^2. \end{aligned}\right\} \qquad (10.47)$$

Оценка J_k вычисляется как сумма

$$J_k = J_0 + \sum_{i=1}^{k} \tau_i^2 J_{0i},$$

компоненты которой

$$J_{0i} = \int_0^\infty [y^{(i)}(t)]^2\, dt$$

определяются по изображению $L\{y^{(i)}(t)\}$ точно так же, как оценка J_0 (см. приложение П.8).

Пример 10.2. Вычислить квадратичную интегральную оценку J_0 и J_1 для переходной функции системы с передаточной функцией

$$W_з(p) = \frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1}.$$

Определить значение ζ, при котором J_1 минимально. Сравнить полученный переходный процесс с экстремалью.

Изображение

$$L\{y_п(t)\} = Y_п(p) = \frac{1}{p}\left[1 - \frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1}\right] = \frac{p + 2\zeta}{p^2 + 2\zeta p + 1},$$

$$L\{\dot{y}_п(t)\} = pY_п(p) - Y_п(0) = -\frac{1}{p^2 + 2\zeta p + 1}.$$

Согласно приложению П.8 для $n = 2$,

$$J_0 = \frac{b_1^2 c_0 + b_0^2 c_2}{2c_0 c_1 c_2}.$$

Значения коэффициентов

для $Y_п(p)$

$$b_1 = c_2 = c_0 = 1,$$
$$b_0 = c_1 = 2\zeta,$$

откуда

$$J_0 = \frac{1+4\zeta^2}{4\zeta},$$

для $pY_п(p) - Y_п(0)$

$$b_1 = 0, \qquad b_0 = c_2 = c_0 = 1, \qquad c_1 = 2\zeta,$$

откуда

$$J_{01} = \frac{1}{4\zeta} \quad \text{и} \quad J_1 = \frac{1+4\zeta^2}{4\zeta} + \tau_1^2 \frac{1}{4\zeta} = \frac{(1+\tau_1^2) + 4\zeta^2}{4\zeta}.$$

Из уравнения

$$\frac{\partial J_1}{\partial \zeta} = \frac{4\zeta^2 - (1+\tau_1^2)}{4\zeta^2} = 0$$

получим

$$\zeta = \frac{1}{2}\sqrt{1+\tau_1^2}.$$

При этом

$$J_1 = \sqrt{1+\tau_1^2}.$$

Поскольку при $y_п(0) = 1$ согласно (10.40) $J_{1\,мин} = \tau_1$, то

$$\varepsilon_1 = \sqrt{1+\tau_1^2} - \tau_1.$$

Как и следовало ожидать, ε_1 уменьшается с ростом τ_1. В частности, при

$$\tau_1 = 1; \quad \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varepsilon_1 = \sqrt{2} - 1 = 0{,}414; \quad u = \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\tau_1}} = 0{,}64.$$

Переходный процесс и экстремаль для этого случая показаны на рис. 10.16.

Интегральная квадратичная оценка отклонения от эталона. Рассмотрев квадратичные интегральные оценки J_k, мы установили, что образцовым переходным процессом (экстремалью) для этих оценок служит решение линейного дифференциального уравнения (10.45). Оптимизация системы по этим оценкам осуществляется поиском относительного минимума J_k в пространстве варьируемых параметров системы. Результат такой оптимизации оценивается по разности полученного относительного минимума и абсолютного $J_{k\,мин}$.

Расширение класса процессов, применяемых в качестве образцовых (эталонных), и более четкая постановка задачи оптимизации системы достигается при применении интегральной квадратичной оценки $J_{эт}$ отклонения от заданной (эталонной) функции $y_{эт}$.

Оценка $J_{эт}$ определяется равенством

$$J_{эт} = \int_0^\infty \delta^2(t)\,dt = \int_0^\infty [y_{эт}(t) - y(t)]^2\,dt \qquad (10.48)$$

и представляет собой площадь, ограниченную кривой квадратичного отклонения δ^2 процесса управления в исследуемой системе $y_п$ от рационально назначенного наилучшего процесса $y_{эт}$ рис. 10.17. Необходимым условием сходимости оценки $J_{эт}$ служит равенство

$$\lim_{t \to \infty} | y_{эт}(t) - y(t) | = 0.$$

Вычисление $J_{эт}$ по изображению $\Delta(p) = Y_{эт}(p) - Y(p)$ производится точно так же, как вычисление J_0 по изображению $Y_п(p)$, в частности, по таблице интегралов, приведенной в приложении П.8.

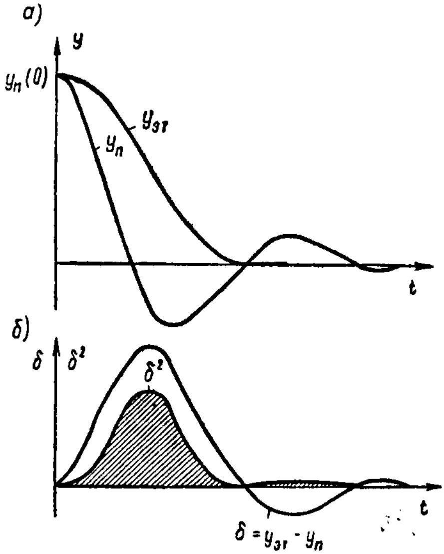


Рис. 10.17

Пример 10.3. Определить оптимальный, по критерию $J_{эт}$, коэффициент затухания ζ в системе второго порядка с передаточной функцией

$$W_з(p) = \frac{2\zeta p + 1}{p^2 + 2\zeta p + 1},$$

приняв в качестве эталона переходную функцию инерционного звена

$$h_э = y_э(t) = 1 - e^{-t}.$$

Определим

$$\Delta(p) = \frac{1}{p(p+1)} - \frac{1}{p} \times \frac{2\zeta p + 1}{p^2 + 2\zeta p + 1} =$$

$$= \frac{(1 - 2\zeta)p - 1}{p^3 + (2\zeta + 1)p^2 + (2\zeta + 1)p + 1} = \frac{(1 - a)p - 1}{p^3 + (a+1)p^2 + (a+1)p + 1},$$

где

$$a = 2\zeta.$$

С помощью приложения П.8 найдем

$$J_{эт} = \frac{a^2 - a + 2}{2a(a+2)}.$$

Из условия

$$\frac{\partial J_{эт}}{\partial a} = \frac{3a^2 - 4a - 4}{2a^2(a+2)^2} = 0$$

вычисляем $a=2$ и $\zeta=1$. При этом $J_{\text{эт. мин}}=0{,}25$. Полученный процесс $h(t)$ и эталонный $h_{\text{эт}}(t)$ приведены на рис. 10.18.

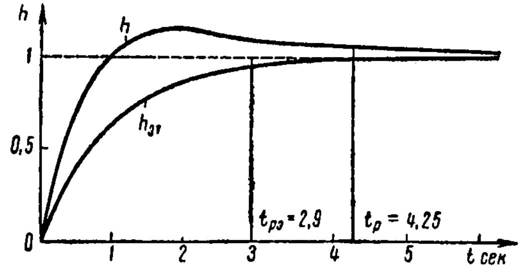


Рис. 10.18

§ 10.4. КОРНЕВЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Достаточно простые и объективные оценки качества с помощью корневых методов удалось в настоящее время получить только для систем с передаточной функцией

$$W_з(p)=\frac{k}{A(p)},$$

когда исследование качества сводится к оценке процесса по распределению корней характеристического уравнения замкнутой системы

$$A(p)=D(p)+k=0.$$

О п р е д е л е н и е о б л а с т и р а с п о л о ж е н и я к о р н е й х а р а к т е р и с т и ч е с к о г о у р а в н е н и я. Произведение корней $p_i=\sigma+j\omega_i$ характеристического уравнения замкнутой системы

$$a_np^n+a_{n-1}p^{n-1}+\ldots+a_1p+a_0=a_n\prod_{i=1}^{n}(p-p_i)=0 \quad (10.49)$$

имеет вид

$$p_1p_2\ldots p_n=(-1)^n\frac{a_0}{a_n},$$

поэтому наиболее простая для вычисления оценка

$$\omega_0=\left|\sqrt[n]{p_1p_2\ldots p_n}\right|=\left|\sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}\right| \quad (10.50)$$

представляет среднее геометрическое значение модулей корней и может служить относительной мерой быстродействия системы, что следует из теоремы подобия преобразования Лапласа. Приведение характеристического уравнения (5.49) к нормированному виду

$$q^n + A_{n-1}q^{n-1} + \ldots + A_1 q + 1 = 0 \qquad (10.51)$$

соответствует изменению масштаба плоскости корней

$$p = \omega_0 q$$

и переходу к безразмерному времени протекания процессов в системе

$$\tau = \omega_0 t. \qquad (10.52)$$

Для колебательной системы второго порядка параметр ω_0 равен собственной частоте незатухающих колебаний.

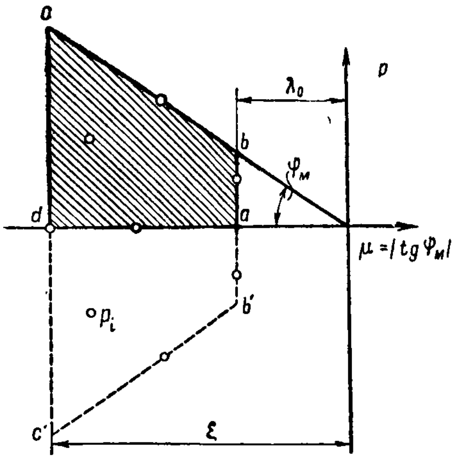


Рис. 10.19

Область расположения корней p_i характеристического уравнения может быть определена тремя показателями: степенью устойчивости $\lambda_0 = |\operatorname{Re} p_i|_{мин}$, максимальным удалением корня от мнимой оси $\xi = |\operatorname{Re} p_i|_м$ и колебательностью $\mu = |\operatorname{tg} \psi_i|_м$, где $\operatorname{tg}\psi_i = \frac{\sigma_i}{\omega_i}$.

В плоскости нормированного уравнения (10.51) этим параметрам соответствуют

$$\lambda_q = \lambda_0/\omega_0; \quad \xi_q = \xi/\omega_0 \quad \text{и}$$

$$\mu_q = \mu. \qquad (10.53)$$

Геометрический смысл параметров λ_0, ξ и μ ясен из рис. 10.19. Если они заданы, то корни замкнутой системы находятся в области $abcdc'b'$. В силу симметрии можно рассматривать только верхнюю половину этой области — заштрихованный четырехугольник $abcd$, границы которого задаются уравнениями:

$$ab; \quad p = -\lambda_0 + j\omega; \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \lambda_0\mu; \qquad (10.54)$$

$$bc; \quad p = \sigma(1 + j\mu); \quad -\xi \leqslant \sigma \leqslant -\lambda_0; \qquad (10.55)$$

$$cd; \quad p = -\xi + j\omega; \quad 0 \leqslant \omega \leqslant \xi\mu. \qquad (10.56)$$

Для того чтобы вычислить параметр λ_0, сместим мнимую ось плоскости p влево так, чтобы она совпала с границей ab. При этом исследуемая система окажется на границе устойчивости. Характеристическое уравнение (10.49) в преобразованных координатах, с учетом (10.54), примет вид

$$a_n(p_* - \lambda_0)^n + a_{n-1}(p_* - \lambda_0)^{n-1} + \ldots + a_1(p_* - \lambda_0) + a_0 = 0 \qquad (10.57)$$

или

$$\alpha_n p_*^n + \alpha_{n-1} p_*^{n-1} + \ldots + \alpha_1 p_* + \alpha_0 = 0, \qquad (10.58)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — функции λ_0 и коэффициентов $a_0, \ldots, a_n$. Установить, соответствует ли уравнение (10.58) границе области устойчивости, можно с помощью любого из критериев, рассмотренных в гл. VII.

При этом можно поставить две задачи: прямую — определить параметры λ_0, μ и ξ по заданным коэффициентам характеристического уравнения или первичным параметрам самой системы; и обратную — определить коэффициенты характеристического уравнения или же первичные параметры системы, при которых область расположения корней характеристического уравнения будет определяться заданными значениями λ_0, ξ и μ.

Решение прямой задачи оказывается достаточно трудоемким.

Практическую ценность представляют собой оценки λ_0 для одноконтурной системы, не содержащей колебательных звеньев, структурная схема которой приведена на рис. 10.20.

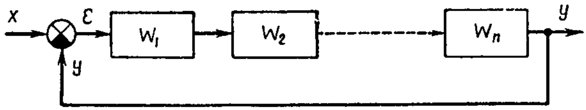


Рис. 10.20

1. Если рассматриваемая система содержит только инерционные звенья с постоянными времени $T_1 > T_2 > T_3 \ldots$, то $\lambda_0 < \frac{1}{T_2}$. Это утверждение следует из корневого годографа такой системы, изображенного на рис. 10.21,*а*. Оно справедливо и при наличии одного интегрирующего звена, которое можно рассматривать как предел инерционного звена с постоянной времени T_1 при $\frac{1}{T_1} \to 0$. В этом случае наибольшей постоянной времени инерционных звеньев является T_2.

2. Если рассматриваемая система содержит еще и форсирующее звено $W_ф = T_0 p + 1$, то $\lambda_0 < \frac{1}{T_3}$, что следует из корневого годографа, изображенного на рис. 10.21,*б*. Наличие одного интегрирующего звена и в этом случае может рассматриваться как $\frac{1}{T_1} \to 0$.

Решение обратной задачи возможно в общем виде, что обеспечивается методами построения областей устойчивости в пространстве параметров системы, рассмотренными в гл. VIII.

Проведем исследование системы третьего порядка с помощью метода D-разбиения.

Воспользуемся нормированным уравнением вида (10.51), поскольку результаты его исследования могут быть применены к системе с любым значением ω_0 с помощью соотношений (10.52) и (10.53).

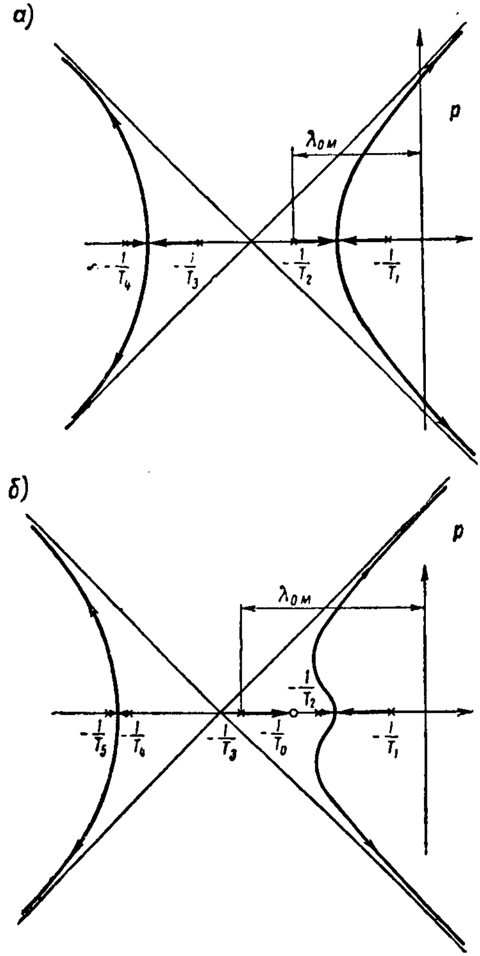


Рис. 10.21

Первоначально нормированное характеристическое уравнение системы третьего порядка

$$q^3 + Aq^2 + Bq + 1 = 0 \tag{10.59}$$

было рассмотрено И. А. Вышнеградским (1876 г.), причем в области устойчивости он выделил три области качественно различного распределения корней I, II и III, приведенного на рис. 10.22,*б*. Конфигурация и границы этих областей даны на рис. 10.22,*а*, на котором показаны также переходные процессы, характерные для каждого расположения корней уравнения (10.59).

Проведем количественное исследование области устойчивости плоскости (A, B), для чего построим на ней линии равных значений параметров λ_q, ξ_q и μ. Поскольку исследование ведется в области устойчивости, положим

$$q = \sigma + j\Omega = -\alpha + j\Omega; \quad \alpha > 0. \tag{10.60}$$

Подставив (10.60) в (10.59), получим обобщенное уравнение метода D-разбиения

$$A\left[(\alpha^2 - \Omega^2) - 2j\Omega\alpha\right] + B(-\alpha + j\Omega) + \\ + 1 - \alpha^3 + 3\Omega^2\alpha + j\Omega(3\alpha^2 - \Omega^2) = 0. \tag{10.61}$$

Комплексное уравнение (10.61) эквивалентно системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned} (\alpha^2 - \Omega^2) A - \alpha B &= -1 + \alpha^3 - 3\Omega^2\alpha, \\ -2\Omega\,\alpha A + \Omega B &= \Omega(\Omega^2 - 3\alpha^2). \end{aligned}\right\} \tag{10.62}$$

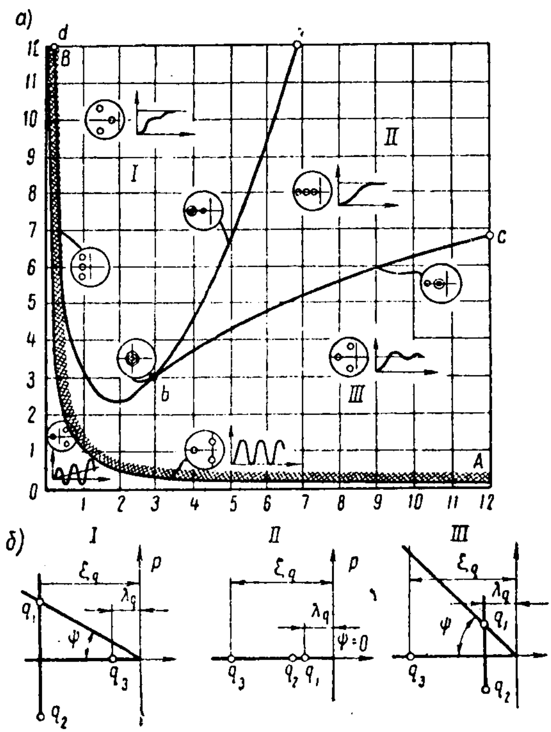


Рис. 10.22

Для комплексных корней $\mu \neq 0$ и $\Omega \neq 0$, поэтому, разрешив систему относительно A и B, получим

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\alpha + \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2}, \\ B &= \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \Omega^2} + \alpha^2 + \Omega^2. \end{aligned}\right\} \tag{10.63}$$

Для вещественных корней $\mu = 0$; $\Omega = 0$. В этом случае из первого уравнения (10.62) следует, что

$$\alpha^2 A - \alpha B + 1 - \alpha^3 = 0. \tag{10.64}$$

Граница области устойчивости (гипербола Вышнеградского) соответствует условию $\alpha = 0$. Действительно, при этом из (10.63) получим $A = \frac{1}{\Omega^2}$; $B = \Omega^2$, откуда $AB = 1$.

Границу области апериодичности получим как частный (предельный) случай для $\mu = 0$ при построении линий равной колебательности $\mu = \mathrm{const}$. Подставляя в (10.63) условие

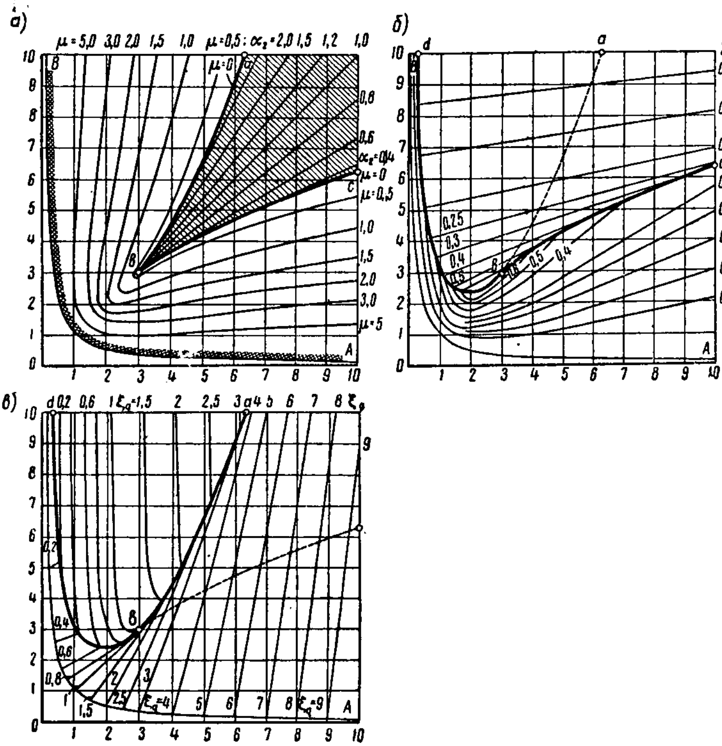


Рис. 10.23

$\Omega = \mu\alpha$, найдем параметрическое уравнение семейства линий

$$\left.\begin{aligned} A &= 2\alpha + \frac{1}{\alpha^2 C}, \\ B &= \frac{2}{\alpha C} + \alpha^2 C, \end{aligned}\right\} \tag{10.65}$$

где

$$C = 1 + \mu^2,$$

которые и построены на рис. 10.23,*а*. В частности, при $\mu = 0$, $C = 1$ получим границу области апериодичности (кривая *abc* на рис. 10.22 и 10.23). Если исключить из (10.65) α при $C = 1$, то уравнение будет записано в форме, полученной И. А. Вышнеградским,

$$A^2B^2 - 4(A^3 + B^3) + 18AB - 27 = 0. \tag{10.66}$$

Для областей комплексных корней I и III линии равных значений λ_q и ξ_q соответствуют одному и тому же условию $\alpha = \text{const}$. Для того чтобы различить эти семейства, следует рассмотреть случай, когда вещественная часть комплексных корней равна вещественному корню, что соответствует переходу от области I к области III (см. рис. 10.22,*б*). При этом $\lambda_q = \xi_q$.

Из уравнения (10.59) следует, что $1 = -q_1 q_2 q_3$. Поскольку комплексные корни — сопряженные: $q_1 = -\alpha + j\Omega$; $q_2 = -\alpha - j\Omega$, то вещественный корень

$$q_3 = -\frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2}. \tag{10.67}$$

Условие $\lambda_q = \xi_q$ определяет, что $q_3 = -\alpha$, откуда

$$\alpha = \frac{1}{\alpha^2 + \Omega^2}. \tag{10.68}$$

При этом из (10.63) следует, что

$$A = 3\alpha; \quad B = \frac{1}{\alpha} + 2\alpha^2$$

или

$$2A^3 - 9AB + 27 = 0, \tag{10.69}$$

что соответствует кривой *cd* на рис. 10.22,*а* и 10.23, *б*. Выше этой границы степень устойчивости λ_q определяется вещественным корнем и линии равных значений λ_q должны строиться по уравнению (10.64); ниже этой кривой λ_q определяется комплексными корнями и линии равных значений λ_q строятся по уравнениям (10.63).

Проведя разграничение, подставим условие $\alpha = C = \text{const}$ в уравнение (10.63) и (10.64), что определяет параметрическое уравнение семейства кривых

$$\left.\begin{aligned} A &= 2C + \frac{1}{C^2 + \Omega^2}, \\ B &= \frac{2C}{C^2 + \Omega^2} + C^2 + \Omega^2 \end{aligned}\right\} \tag{10.70}$$

и уравнение семейства прямых

$$C^2 A - CB + 1 - C^3 = 0. \tag{10.71}$$

Семейство линий равных значений λ_q построено на рис. 10.23,*б*, а равных значений ξ — на рис. 10.23,*в*.

При трех вещественных корнях значение среднего корня определяется из условия

$$-q_2 = \alpha_2 = \frac{1}{q_1 q_3} = \frac{1}{\bar{\lambda}_0}. \tag{10.72}$$

Заполним область $\mu = 0$, представленную на рис. 10.23,*а*, сеткой прямых равного значения этого корня $\alpha^2 = C$.

Диаграммы, представленные на рис. 10.22 и 10.23, позволяют просто решить все вопросы анализа и синтеза систем третьего порядка, а также строить переходные процессы, если числитель передаточной функции замкнутой системы не зависит от p,

$$W_з(p) = \frac{k}{A(p)}.$$

Наличие нулей числителя не исключает анализ и синтез системы этим методом, но делает его более сложным [Л. 11], поскольку приходится порознь исследовать компоненты переходного процесса, выражаемого уравнением (2.28,*б*).

Оценка переходных процессов по показателям λ_0, ξ и μ. Зная параметры зоны расположения корней, можно сравнить качество близких по типу систем при сходных воздействиях. Так, например, чем больше степень устойчивости λ_0, тем быстрее в этих условиях затухает переходный процесс. Чем больше колебательность μ, тем больше максимальное перерегулирование $\varepsilon_м$ и число перерегулирований N. Чем больше отношение $\frac{\xi}{\lambda_0}$, тем меньше влияние малых постоянных времени и больше возможность вместо исходной системы рассматривать упрощенные системы более низкого порядка.

Конкретные оценки разработаны только для узкого класса систем, в узком классе начальных условий. Доказательство справедливости этих оценок дано А. А. Фельдбаумом и, ввиду сложности, приводиться здесь не будет.

Рассмотрим процесс, описываемый дифференциальным уравнением

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_0 y = 0, \qquad (10.73)$$

при начальных условиях

$$y(0) = 1;\ y^{(k)}(0) = 0;\ k = 1,\ 2 \ldots (n-1).$$

Если все корни характеристического уравнения замкнутой системы

$$a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (10.74)$$

вещественны и отрицательны, то для переходного процесса $y(t)$ справедливо неравенство

$$u(t) \leqslant y(t) \leqslant v(t), \qquad (10.75)$$

где миноранта

$$u(t) = e^{-\lambda_0 t} = e^{-\tau}, \qquad (10.76)$$

а мажоранта

$$v(t)=e^{-\lambda_0 t}\left[1+\lambda_0 t+\frac{(\lambda_0 t)^2}{2}+\ldots+\frac{(\lambda_0 t)^{n-1}}{(n-1)!}\right]=$$

$$=e^{-\tau}\left[1+\tau+\frac{\tau^2}{2}+\ldots+\frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!}\right]. \qquad (10.77)$$

При этом $\tau=\lambda_0 t$.

Миноранта $u(t)$ определяется только значением λ_0, а мажоранта зависит и от порядка дифференциального уравнения системы (10.73).

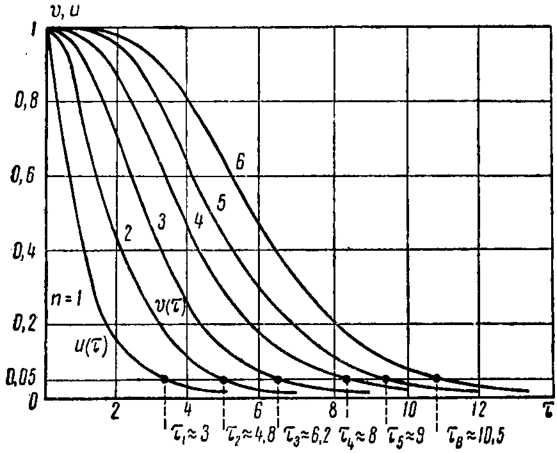


Рис. 10.24

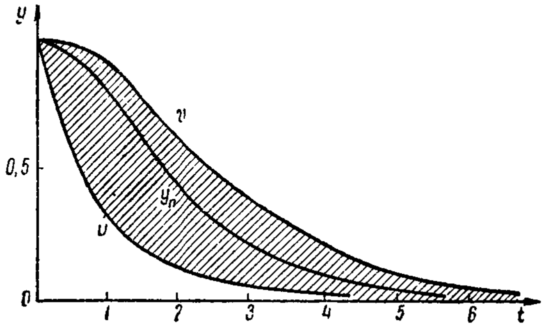


Рис. 10.25

Эти кривые могут быть заранее построены в относительном времени $\tau=\lambda_0 t$, что и выполнено на рис. 10.24. Оценка (10.75) иллюстрируется рис. 10.25, перерегулирование в такой системе при начальных условиях (10.73) невозможно. Для систем высокого порядка $n>3$ расстояние между минорантой и мажорантой велико (см. рис. 10.24). Это снижает точность оценки (10.75). Оценку можно уточнить, учитывая параметр ξ, однако, при этом выражения для миноранты и мажоранты значительно усложняются и, что самое существенное, теряется

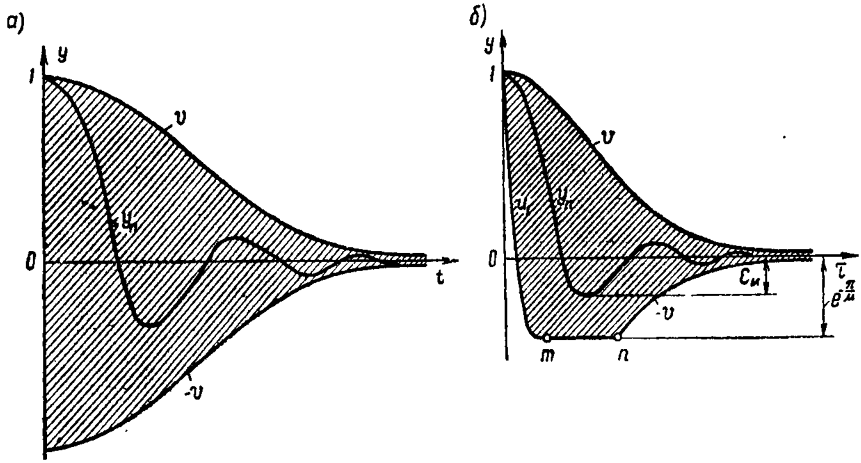


Рис. 10.26

возможность заблаговременного построения этих кривых в нормированном виде. Поэтому уточненные оценки не нашли широкого применения.

Если среди корней уравнения (10.74) имеется одна и только одна пара комплексных корней, то оценка (10.75) принимает вид

$$-v(t) \leqslant y(t) \leqslant v(t), \tag{10.78}$$

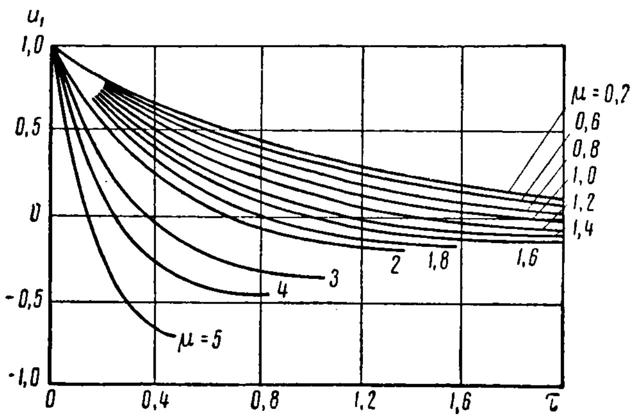


Рис. 10.27

что иллюстрируется рис. 10.26,*а*. В начальном интервале процесса и зоне максимального перерегулирования эту оценку можно уточнить, как показано на рис. 10.26,*б*, поскольку

$$\sigma_{м} = \frac{\Delta y_{м}}{y(0)} \leqslant e^{-\frac{\pi}{\mu}}, \qquad (10.79)$$

а начальная часть процесса ограничивается минорантой

$$u_1(\tau) = e^{-\tau}[1 - a(1 - e^{-b\tau})], \qquad (10.80)$$

где $a = \frac{e^{b\tau_0}}{b}$; $2b = e^{b\tau_0} - 1$, а τ_0 выбирается так, чтобы кривая $u_1(\tau)$ сопрягалась с горизонтальной прямой $x = -e^{-\frac{\pi}{\mu}}$ без излома, что соответствует точке *m* на рис. 10.26,*б*. Нормированные миноранты $u_1(\tau)$ приведены на рис. 10.27.

Глава XI

СИНТЕЗ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 11.1. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЗАДАЧ СИНТЕЗА

Постановка задачи. Под синтезом систем автоматического управления понимается задача выбора и расчета параметров специальных корректирующих устройств, обеспечивающих заданные статические и динамические характеристики системы автоматического управления. При этом предполагается, что основные функциональные элементы (исполнительное, усилительное и измерительное устройства) уже выбраны в соответствии с техническим заданием и представляют собой неизменяемую часть системы. Общая задача синтеза предполагает выбор и расчет как специальных корректирующих устройств, так и неизменяемой части системы, и излагается в специальных курсах [Л. 3].

Несколько особо выглядит задача синтеза систем автоматического управления, применяемых для автоматизации производственных процессов. Особенностью таких систем является:

а) четкое разделение системы на две части: объект регулирования и регулятор; причем инерционностью отдельных функциональных частей регулятора можно пренебречь по сравнению с инерционностью самого объекта регулирования;

б) использование типовых регуляторов.

Поэтому общая задача синтеза для подобных систем сводится к выбору типового регулятора, обеспечивающего требуемый закон регулирования, и настройке его параметров в соответствии с динамическими характеристиками объекта.

На рис. 11.1 показаны наиболее распространенные структурные схемы включения корректирующих устройств.

При наиболее простой последовательной коррекции (рис. 11.1, *а*) корректирующее устройство включается непосредственно в контур регулирования. Передаточная функция разомкнутой скорректированной системы

$$W_{\text{ск}}(p) = W_{\text{нс}}(p)\, W_{\text{к.пс}}(p), \qquad (11.1)$$

где $W_{\text{нс}}(p)$ — передаточная функция разомкнутой нескорректированной системы,

$W_{\text{к}}(p)$ — передаточная функция корректирующего устройства.

При параллельной схеме корректирующее устройство включается в цепь специальной обратной связи (рис. 11.1, *б*). Передаточная функция такой системы в разомкнутом виде

$$W_{\text{ск}}(p) = \frac{W_0(p)\,W_{\text{н}}(p)}{1 + W_0(p)W_{\text{к.пр}}(p)}, \tag{11.2}$$

где $W_0(p)$ — передаточная функция части системы, охваченной корректирующей связью,

$W_{\text{н}}(p)$ — передаточная функция части системы, не охваченной корректирующей связью.

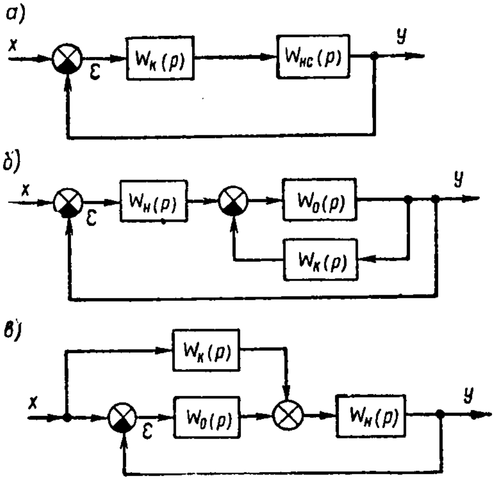


Рис. 11.1

Формально всегда можно подобрать параллельную коррекцию таким образом, чтобы получить тот же результат, что и при последовательной коррекции, и наоборот.

Приравнивая правые части уравнений (11.1) и (11.2) и учитывая, что $W_0(p)\,W_{\text{н}}(p) = W_{\text{нс}}(p)$, получим соотношения для передаточных функций корректирующих устройств при параллельной и последовательной схеме коррекции двух идентичных систем:

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{к.пс}}(p) &= \frac{1}{1 + W_0(p)W_{\text{к.пр}}(p)}, \\ W_{\text{к.пр}}(p) &= \frac{1 - W_{\text{к.пс}}(p)}{W_0(p)\,W_{\text{к.пс}}(p)}, \end{aligned}\right\} \tag{11.3}$$

а дополнительными индексами пр и пс обозначены передаточные функции параллельных и последовательных корректирующих устройств.

В действительности выбор той или другой схемы коррекции зависит от особенностей технических и эксплуатационных характеристик применяемых функциональных элементов.

Следует отметить, что применение параллельной коррекции повышает стабильность характеристик системы. Это непосредственно вытекает из выражения (11.2) для комплексного коэффициента усиления разомкнутой скорректированной системы.

В диапазоне частот, когда $|W_0(j\omega)W_к(j\omega)| \gg 1$, передаточная функция

$$W_{ск}(j\omega) \approx \frac{W_н(j\omega)}{W_к(j\omega)} \qquad (11.4)$$

и характеристики системы в целом практически не зависят от характеристик основных функциональных звеньев, охваченных корректирующей обратной связью.

На третьей структурной схеме (рис. 11.1, *в*) показана коррекция по возмущению. Корректирующее устройство включается в этом случае в дополнительную прямую связь, по которой измеряемый возмущающий сигнал x вводится в систему. Коррекция по возмущению по принципу действия существенно отличается от рассмотренных выше. Из структурной схемы видно, что такая схема коррекции не может влиять на свободные колебания и устойчивость замкнутой системы; она улучшает качество системы за счет уменьшения динамических ошибок по компенсируемому возмущающему воздействию.

Покажем, как связано изображение динамической ошибки системы с передаточными функциями отдельных звеньев при коррекции по возмущению. Применяя принцип суперпозиции, справедливый для линейных систем, можно записать выражение для изображения рассогласования

$$\mathrm{E}(p) = \frac{1}{1 + W_0(p)W_н(p)} X(p) - \frac{W_к(p)W_н(p)}{1 + W_0(p)W_н(p)} X(p) =$$
$$= \frac{1 - W_к(p)W_н(p)}{1 + W_0(p)W_н(p)} X(p). \qquad (11.5)$$

Из полученного уравнения следует неожиданный вывод: выбрав передаточную функцию корректирующего устройства из условия

$$W_к(p) = \frac{1}{W_н(p)}, \qquad (11.6)$$

можно устранить динамическую ошибку системы независимо от вида воздействия X.

Применение этого метода коррекции связано с техническими трудностями, не позволяющими полностью устранить динамические ошибки в системе. Объясняется это, в частности тем, что передаточная функция $W_н(p)$, как правило, представляет собой интегрирующее, инерционное, колебательное звено или их комбинацию. Отсюда следует, что передаточная функция корректирующего звена должна соответствовать дифференцирующим звеньям, практическая реализация которых затруднительна.

Из проведенной классификации разных принципов коррекции систем автоматического регулирования отнюдь не следует, что они взаимно исключают друг друга. Возможны комбинации различных принципов коррекции, так, например, в системах с коррекцией по возмущению требуемый запас устойчивости достигается с помощью последовательной или параллельной коррекции.

Методы синтеза. Как выбрать схему и рассчитать параметры корректирующего устройства?

В настоящее время разработано большое число в основном приближенных методов синтеза корректирующих устройств. Наибольшее распространение в инженерной практике получили *графо-аналитические методы синтеза,* основанные на построении инверсных и логарифмических частотных характеристик разомкнутой системы. При этом широко используются косвенные оценки качества переходного процесса (не требующие решения системы дифференциальных уравнений), такие как запас по фазе, запас по модулю, колебательность, частота среза, которые можно непосредственно определить по частотным характеристикам (см. гл. X).

К другой группе относятся *аналитические методы синтеза.* Для них находится выражение, аналитически связывающее показатель качества системы с параметрами корректирующего устройства, и ищутся значения параметров, соответствующих экстремальному значению функции. К этим методам относится синтез системы по интегральным критериям качества переходного процесса, а также — по критерию среднеквадратичной ошибки.

Применение современных средств вычислительной техники и, в первую очередь, аналоговых машин, снимает трудности, связанные с непосредственным решением дифференциальных уравнений и построением переходных процессов. В связи с этим, наблюдается тенденция решать задачу синтеза не приближенными методами, а путем направленного перебора решений исходной системы дифференциальных уравнений при вариации интересующих исследователя параметров корректирующего устройства. Этот метод синтеза системы автоматического управления сводится к задаче поиска, причем основные трудности здесь связаны с разработкой такой программы или алгоритма, с помощью которого можно было бы наискорейшим способом найти самые выгодные параметры настройки системы.

Применяемые для этой цели алгоритмы будут изложены во второй части курса.

В настоящей главе излагаются методы синтеза, использующие частотные характеристики системы.

§ 11.2. СИНТЕЗ ПАРАЛЛЕЛЬНОЙ КОРРЕКЦИИ ПО ИНВЕРСНЫМ ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Построение инверсных частотных характеристик. Выбор схемы и расчет параметров корректирующей обратной связи, с точки зрения физической наглядности и простоты построения (по сравнению с прямыми частотными характеристиками), удобно производить с помощью инверсных частотных характеристик.

Инверсный комплексный коэффициент усиления системы, разомкнутой в главной обратной связи (см. рис. 11.1, *б*), согласно (11.2) имеет вид

$$W_{\text{ск}}^{-1}(j\omega) = \frac{1}{W_{\text{ск}}(j\omega)} = \frac{1}{W_0(j\omega)W_{\text{н}}(j\omega)} + \frac{W_{\text{к}}(j\omega)}{W_{\text{н}}(j\omega)}. \qquad (11.7)$$

Первое слагаемое этого уравнения представляет собой инверсную амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой нескорректированной системы. Второе слагаемое представляет собой отношение комплексного коэффициента усиления корректирующего устройства к комплексному коэффициенту звена, не охваченного обратной связью. Таким образом,

$$W_{\text{ск}}^{-1}(j\omega) = W_{\text{нс}}^{-1}(j\omega) + \Delta W^{-1}(j\omega), \qquad (11.8)$$

где

$$W_{\text{нс}}^{-1}(j\omega) = \frac{1}{W_0(j\omega)W_{\text{к}}(j\omega)}, \qquad (11.9)$$

$$\Delta W^{-1} = \frac{W_{\text{к}}(j\omega)}{W_{\text{н}}(j\omega)}. \qquad (11.10)$$

Если система в замкнутом состоянии неустойчива, то инверсная амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой (устойчивой) системы не охватывает в комплексной плоскости точки с координатами $[-1; +j0]$ (см. критерий устойчивости Найквиста).

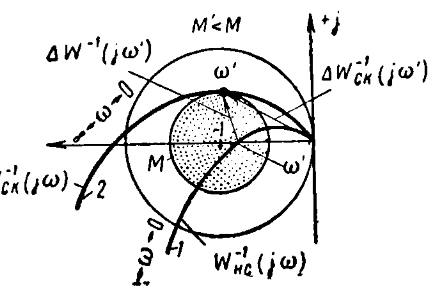


Рис. 11.2

На рис. 11.2 (кривая *1*) показан инверсный годограф $W_{\text{нс}}^{-1}(j\omega)$ разомкнутой нескорректированной системы. Задача расчета корректирующей обратной связи при заданной $W_{\text{нс}}^{-1}(j\omega)$ сводится к отысканию $\Delta W^{-1}(j\omega)$, обеспечивающей необходимую деформацию инверсного годографа разомкнутой системы.

Система должна быть не только устойчивой, но и удовлетворять определенным требованиям с точки зрения качества переходного процесса. В § 10.2 было показано, что при удовлетворительном качестве системы величина показателя колебательности $M = |W_з(j\omega)|_м$ должна лежать в пределах 1,1 ÷ 1,5. При этом геометрическим местом точек постоянной колебательности в плоскости $W_{нс}^{-1}(j\omega)$ является окружность с центром в точке $[-1; +j0]$ и с радиусом $R = \frac{1}{M}$ (см. рис. 10.8).

Для того чтобы система имела заданную колебательность, инверсная частотная характеристика скорректированной системы должна охватывать точку $[-1; +j0]$ и касаться окружности радиуса $R = \frac{1}{M}$.

Допустим, что требуется получить систему с $M = 1{,}5$ (на рис. 11.2 заштрихована окружность постоянной колебательности $M = 1{,}5$). Добавляя для каждого значения частоты к характеристике $W_{нс}^{-1}(j\omega)$ вектор $\Delta W^{-1}(j\omega)$, получим характеристику, удовлетворяющую заданным требованиям качества (кривая *2*).

В качестве приближенной оценки качества системы может быть задана частота среза $\omega_с$ и запас по фазе $\gamma_с$, в этом случае задается контрольная точка, через которую должна проходить $W_{ск}^{-1}(j\omega)$. Неизвестные параметры параллельной коррекции могут быть определены из вектора $\Delta W^{-1}(j\omega_с)$, полученного в результате графического построения. Так, например,

$$\Delta W^{-1}(j\omega_с) = W_{ск}^{-1}(j\omega_с) - W_{нс}^{-1}(j\omega_с).$$

Для иллюстрации рассмотрим несколько примеров расчета параметров параллельной коррекции по инверсным частотным характеристикам.

Р а с ч е т п а р а м е т р о в ж е с т к о й о б р а т н о й с в я з и п о с к о р о с т и. Рассмотрим следящую систему, функциональная схема которой показана на рис. 11.3, *а*. Ей соответствует структурная схема, изображенная на рис. 11.1, *б*.

Корректирующая обратная связь осуществляется здесь с помощью тахогенератора ТГ, напряжение с которого через делитель подается на вход усилительного устройства *УУ*.

Комплексные коэффициенты усиления отдельных звеньев в схеме, изображенной на рис. 11.1, *б*,

$$\left.\begin{aligned} W_и(j\omega) &= k_и, \\ W_к(j\omega) &= k_{тг} j\omega, \\ W_0(j\omega) &= \frac{k_0}{j\omega(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.11)$$

где $k_и$ — коэффициент усиления безынерционной измерительной схемы с учетом передаточного числа редуктора,
$k_{тг}$ — крутизна характеристики тахогенератора с учетом делителя напряжения,
k_0, T_1 и T_2 — параметры охваченных звеньев.

По формуле (11.10)

$$\Delta W^{-1}(j\omega) = \frac{k_{тг}(j\omega)}{k_и}. \qquad (11.12)$$

Характеристика $\Delta W^{-1}(j\omega)$ для этой схемы коррекции представляет собой прямую линию, совпадающую с мнимой осью.

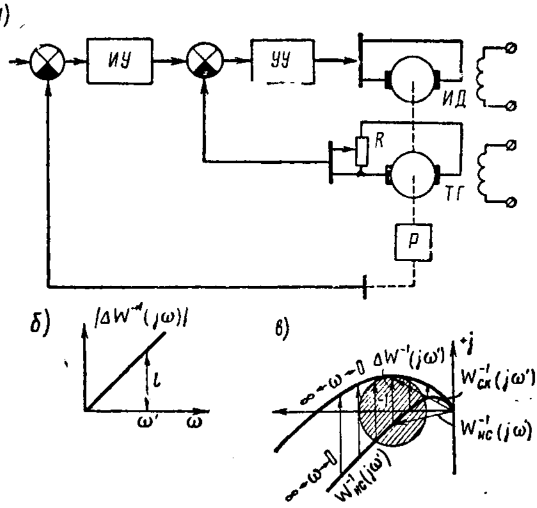


Рис. 11.3

Величина $|\Delta W^{-1}(j\omega)| = l$ пропорциональна частоте ω (см. рис. 11.3, *б*).

Графическое построение $W^{-1}_{ск}(j\omega)$ произведено на рис. 11.3, *в*. Зададимся для частоты ω' величиной вектора $\Delta W^{-1}(j\omega')$ таким образом, чтобы конец вектора $W^{-1}_{нс}(j\omega') + \Delta W^{-1}(j\omega')$, соответствующего этой частоте, был бы выше или касался окружности заданной колебательности. Тогда согласно (11.12)

$$l = \frac{k_{тг}\omega'}{k_и}$$

и, следовательно, искомый коэффициент корректирующей обратной связи

$$k_{тг} = \frac{l \cdot k_и}{\omega'}. \qquad (11.13)$$

На рис. 11.3, *в* видно, что жесткая обратная связь по скорости эффективна, когда инверсная частотная характеристика нескорректированной системы располагается вдоль отрицательной вещественной оси. В этом случае вектор $\Delta W^{-1}(j\omega)$ деформирует ее в нужном направлении.

Расчет параметров гибкой обратной связи по скорости (см. рис. 11, 4,*а*). Эта схема коррекции отличается от предыдущей тем, что в цепи корректирующей

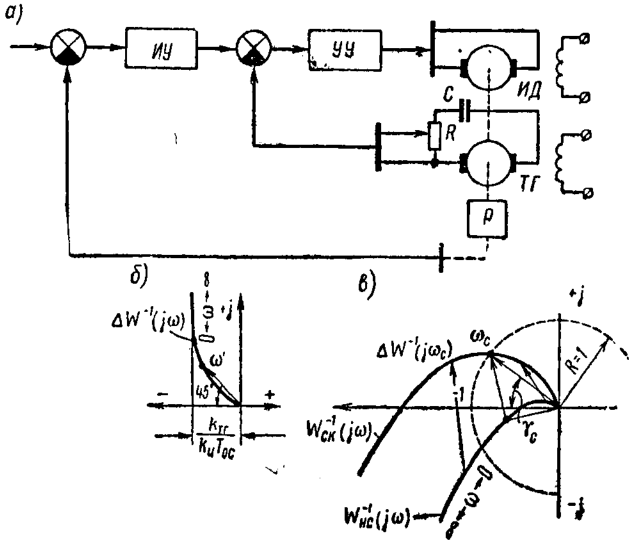


Рис. 11.4

обратной связи имеется дифференцирующий контур *RC*. В отличие от (11.11), для этой схемы

$$W_{к}(j\omega) = \frac{(j\omega)^2 k_{тг} T_{oc}}{1 + j\omega T_{oc}}, \qquad (11.14)$$

где $T_{oc} = RC$ — постоянная времени дифференцирующего контура в цепи обратной связи.

Для этого случая

$$\Delta W^{-1}(j\omega) = -\frac{\omega^2 k_{тг} T_{oc}}{(1 + j\omega T_{oc})\, k_{и}}. \qquad (11.15)$$

Характеристика $\Delta W^{-1}(j\omega)$ показана на рис. 11, 4,*б*.

Неизвестными, подлежащими определению параметрами, являются T_{oc} и $k_{тг}$. Из выражения (11.15) видно, что фаза комплекса $\Delta W^{-1}(j\omega)$ зависит от T_{oc}, а модуль — от величины $k_{тг}$.

Предположим, что заданы величины ω_c и γ_c, характеризующие качество скорректированной системы (рис. 11.4, *в*). Соединим конец вектора $W_{ск}^{-1}(j\omega_c)$ с инверсной характеристикой

$W_{\text{нс}}(j\omega)$ в точке, частота которой равна заданной частоте среза. Зная модуль

$$|\Delta W^{-1}(j\omega_c)| = \frac{\omega_c^2 k_{\text{тг}} T_{\text{ос}}}{\sqrt{1+\omega_c^2 T_{\text{ос}}^2}\cdot k_{\text{и}}}$$

и аргумент $\arg \Delta W^{-1}(j\omega_c) = -180^\circ - \operatorname{arctg} \omega_c T_{\text{ос}}$ вектора $\Delta W^{-1}(j\omega_c)$, можно рассчитать искомые значения параметров $T_{\text{ос}}$ и $k_{\text{тг}}$.

Из рис. 11.4, *в* видно, что если при частоте, равной желаемой частоте среза, точка на $W_{\text{нс}}^{-1}(j\omega)$ лежит слева от вертикали, проведенной через конец вектора $W_{\text{ск}}(j\omega_c)$, то гибкая

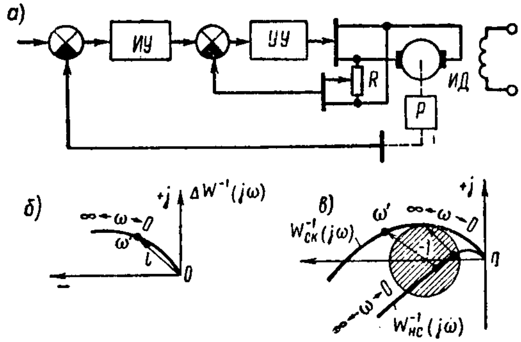


Рис. 11.5

обратная связь по скорости неэффективна, так как она не обеспечивает требуемой деформации частотной характеристики нескорректированной системы.

Расчет параметров жесткой обратной связи с выхода усилительного устройства (рис. 11.5, *а*). Напряжение с выхода усилительного устройства через делитель поступает на вход усилителя. Параметром, подлежащим определению, является коэффициент обратной связи $k_{\text{ос}}$.

Исполнительный двигатель в данной схеме оказывается не охваченным обратной связью, и комплексный коэффициент его входит в выражение для $\Delta W^{-1}(j\omega)$.

В данном случае для схемы, представленной на рис. 11.1, *а*,

$$\left.\begin{aligned} W_{\text{к}}(j\omega) &= k_{\text{ос}}, \\ W_{\text{н}}(j\omega) &= \frac{k_{\text{и}} k_{\text{д}}}{j\omega(1+j\omega T_{\text{м}})}, \\ W_0(j\omega) &= \frac{k_{\text{у}}}{1+j\omega T_{\text{у}}}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.16)$$

где $k_д$ — коэффициент двигателя, характеризующий отношение скорости его вращения к напряжению на якоре,

$T_м$ — электромеханическая постоянная времени двигателя,

$k_у$ и $T_у$ — коэффициент усиления и постоянная времени усилителя.

Электрической постоянной времени цепи якоря двигателя пренебрегаем, тогда

$$\Delta W^{-1}(j\omega) = \frac{k_{oc} j\omega (1 + j\omega T_м)}{k_д k_и}. \qquad (11.17)$$

Вид частотной характеристики $\Delta W^{-1}(j\omega)$ показан на рис. 11.5, *б*. Фаза вектора $\Delta W^{-l}(j\omega)$ определяется электромеханической постоянной времени двигателя и от коэффициента k_{oc} не зависит.

Для выбранной точки с частотой ω' на характеристике $W_{нс}^{-1}(j\omega')$ (рис. 11.5,*в*) определяем

$$\arg \Delta W^{-1}(j\omega') = \operatorname{arctg} \omega' T_м + \frac{\pi}{2}.$$

Задаваясь модулем $|\Delta W^{-1}(j\omega')| = l$ (исходя из заданной колебательности), можно определить численное значение

$$k_{oc} = \frac{l k_д k_и}{\omega' \sqrt{1 + (\omega')^2 T_м^2}}. \qquad (11.18)$$

Задаваясь другими значениями ω, необходимо построить $W_{ск}^{-1}(j\omega)$ и убедиться, что полученная кривая не пересекается с окружностью заданной колебательности M (см. рис. 11.5,*в*).

Чем больше постоянная времени $T_м$, тем сложнее осуществить коррекцию системы, так как при этом меньше угол между вектором $\Delta W^{-1}(j\omega^{-1})$ и отрицательной вещественной осью [см. (11.18)].

Расчет параметров гибкой обратной связи с выхода усилительного устройства (рис. 11.6,*а*). Данная схема отличается от предыдущей тем, что в цепь обратной связи включен дифференцирующий контур.

Параметрами коррекции, подлежащими определению, являются коэффициент обратной связи k_{oc} и постоянная времени $T_{oc} = RC$.

Для этой схемы, в отличие от (11.16),

$$W_к(j\omega) = \frac{k_{oc} j\omega T_{oc}}{1 + j\omega T_{oc}}. \qquad (11.19)$$

Выражение для

$$\Delta W^{-1}(j\omega) = -\frac{\omega^2 k_{oc} T_{oc}(1 + j\omega T_м)}{(1 + j\omega T_{oc}) k_и k_д}. \qquad (11.20)$$

Частотная характеристика $\Delta W^{-1}(j\omega)$ показана на рис. 11.6,*б*. В зависимости от соотношения постоянных времени T_{oc} и $T_м$ характеристика будет проходить выше или ниже отрицательной вещественной оси.

Если инверсная характеристика $W^{-1}_{нс}(j\omega)$ нескорректированной системы имеет форму, представленную на рис. 11.6,*в*, то можно положить $T_{oc} = T_м$, тогда вектор $\Delta W^{-1}(j\omega)$, по модулю

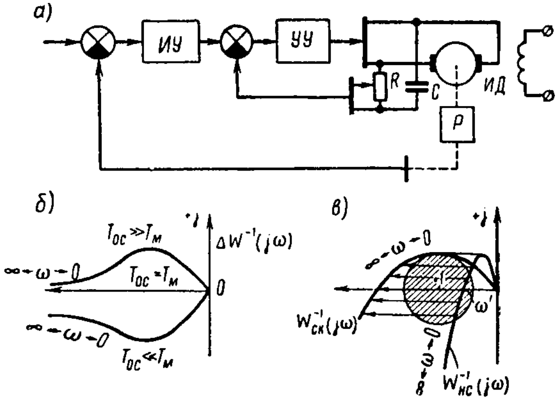


Рис. 11.6

пропорциональный квадрату частоты, будет направлен горизонтально вдоль отрицательной вещественной полуоси. Задавшись для какой-либо частоты ω' величиной вектора $|\Delta W^{-1}(j\omega')| = l$, найдем

$$k_{oc} = \frac{l k_и k_д}{(\omega')^2 T_{oc}}. \qquad (11.21)$$

Для частотной характеристики $\Delta W^{-1}_{н.с}(j\omega)$, изображенной на рис. 11.5,*в*, необходимо выбрать $T_{oc} > T_м$, тогда направление вектора $\Delta W^{-1}(j\omega)$ будет обеспечивать необходимую деформацию частотной характеристики $W^{-1}(j\omega)$, поднимая ее. Для выбранной частоты, задавшись T_{oc}, определяем фазу вектора $\Delta W^{-1}(j\omega)$. Исходя из величины модуля вектора l, находим k_{oc}.

Из рассмотренных примеров определения параметров параллельной коррекции по инверсным частотным характеристикам можно сделать следующие общие замечания:

1) выбор той или другой схемы обратной связи в сильной степени зависит от вида инверсной частотной характеристики нескорректированной системы;

2) при использовании жестких обратных связей добротность системы снижается, что приводит к увеличению установившейся ошибки в режиме равномерно нарастающего сигнала,

В случае жесткой обратной связи добротность скорректированной системы (см. § 9.2)

$$D_{ск} = \frac{1}{1 + k_0 k_к} D_{н.с}, \tag{11.22}$$

где $k_к = k_{тг}$ для примера, изображенного на рис. 11.3, $k_к = k_{ос}$ для примера, представленного на рис. 11.5, k_0 — коэффициент усиления звеньев, охваченных обратной связью, $D_{н.с} = k_н k_0$ — добротность нескорректированной системы ($k_н$ — коэффициент усиления звеньев, не охваченных обратной связью).

В случае применения гибких корректирующих обратных связей

$$D_{ск} = D_{н.с}. \tag{11.23}$$

§ 11.3. СИНТЕЗ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ ПО ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

Выбор желаемой ЛАЧХ. Асимптотические логарифмические амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики, как указывалось в гл. III, строятся очень просто и поэтому широко используются при инженерных расчетах. По этим характеристикам можно не только проверить устойчивость, но и произвести оценку качества системы. При решении задачи синтеза корректирующего устройства одна из основных задач сводится к формированию желаемых логарифмических амплитудных и фазовых характеристик скорректированной системы.

Для минимально-фазовых систем можно ограничиться построением лишь одной логарифмической амплитудно-частотной характеристики, которая в дальнейшем будет называться просто *характеристикой системы*.

Построение желаемой характеристики нельзя полностью формализовать, однако существуют некоторые общие рекомендации.

1. Характеристика нескорректированной системы и желаемая характеристика скорректированной системы должны, в возможно более широком диапазоне частот, совпадать друг с другом. В противном случае, реализация корректирующих устройств резко усложняется, особенно, если речь идет об увеличении частоты среза и повышении коэффициента усиления в области высоких частот.

2. В низко-частотной области наклон характеристики должен составлять $-20\nu \frac{дб}{дек}$ (где ν — порядок астатизма системы).

Низко-частотная асимптома при частоте $\omega = 1$ имеет ординату $20 \lg k$, где k — коэффициент усиления всей системы.

Если задана динамическая ошибка системы Δ_1 в режиме низко-частотных гармонических колебаний управляющего воздействия при частоте ω_1, то можно рассчитать контрольную точку, выше которой должна проходить желаемая характеристика.

Как показано в § 9.2, динамическая ошибка системы в области низких частот

$$\Delta_{\text{дин}} \approx |W_{\text{р}}^{-1}(j\omega_1)| A_1, \qquad (11.24)$$

где A_1 — амплитуда входного управляющего воздействия $x = A_1 \sin \omega_1 t$.

$|W_{\text{р}}(j\omega_1)|$ — модуль комплексного коэффициента усиления разомкнутой системы.

Из уравнения (11.24) получаем

$$L(\omega_1) = 20 \lg \frac{A_1}{\Delta_{\text{дин}}}. \qquad (11.25)$$

Проведение желаемой характеристики на $3 \partial б$ выше точки с координатами $L(\omega_1)$, ω_1 обеспечивает динамическую ошибку не больше заданной.

В случае, если максимальная скорость $\dot{x}_{1m}$ и ускорение $\ddot{x}_{1m}$ ограничены условием $\dot{x}_{1m} \leqslant v$ и $\ddot{x}_{1m} \leqslant a$, предельные значения амплитуды и частоты гармонических колебаний определяются из выражений:

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \frac{v^2}{a}, \\ \omega_1 &= \frac{a}{v}, \end{aligned}\right\} \qquad (11.26)$$

а координаты контрольной точки соответственно равны

$$\left.\begin{aligned} L(\omega_1) &= 20 \lg \frac{v^2}{a\Delta_{\text{дин}}}, \\ \omega_1 &= \frac{a}{v}. \end{aligned}\right\} \qquad (11.27)$$

3. При частоте среза, равной $\omega_{\text{с}}$, т. е. когда

$$20 \lg |W_{\text{р}}(\omega_{\text{с}})| = 0,$$

наклон желаемой ЛАЧХ целесообразно выбрать $-20 \frac{\partial б}{дек}$, что обеспечивает, как правило, необходимый запас по фазе (см. § 10.2).

Требуемая частота среза может быть приближенно оценена по формуле

$$\omega_{\text{с}} \geqslant \frac{k\pi}{t_{\text{р}}}, \qquad (11.28)$$

где $t_{\text{р}}$ — заданное время переходного процесса,

k — коэффициент, определяемый из графика (рис. 11.7) по заданной величине перерегулирования $\varepsilon_{\text{м}}$.

Соотношение (11.28) получено в результате графического построения переходных процессов, соответствующих типовым вещественным частотным характеристикам.

4. Выбор желаемой характеристики скорректированной системы в целом или отдельных ее сопрягающих частот можно производить, пользуясь номограммами, приведенными в приложении П.9, в соответствии с заданными значениями ε_m, $t_р$, $t_м$, ω_t, M (см. рис. 10.11).

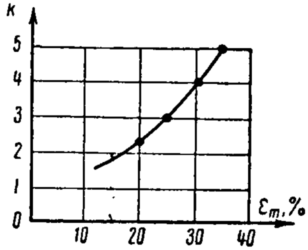


Рис. 11.7

Синтез последовательного корректирующего устройства по логарифмическим характеристикам. При последовательной коррекции (см. рис. 11.1,*а*) амплитудные и фазовые характеристики скорректированной системы будут согласно (11.1) выражаться следующими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} L_{ск}(\omega) &= L_{н.с}(\omega) + L_к(\omega), \\ \varphi_{ск}(\omega) &= \varphi_{н.с}(\omega) + \varphi_к(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{11.29}$$

Из (11.29) следует, что характеристики корректирующего устройства определяются путем вычитания из логарифмических характеристик желаемой скорректированной системы логарифмических характеристик нескорректированной системы

$$\left.\begin{aligned} L_к(\omega) &= L_{ск}(\omega) - L_{н.с}(\omega), \\ \varphi_к(\omega) &= \varphi_{ск}(\omega) - \varphi_{н.с}(\omega). \end{aligned}\right\} \tag{11.30}$$

По найденным логарифмическим частотным характеристикам необходимо подобрать электрическую схему коррекции и рассчитать численные значения ее параметров.

В качестве иллюстрации на рис. 11.8,*а* показана характеристика $L_{н.с}(\omega)$ системы, состоящей из трех инерционных звеньев с постоянными времени

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1}, \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2}, \quad T_3 = \frac{1}{\omega_3}.$$

Для нее характеристика скорректированной системы $L_{ск}(\omega)$ построена исходя из требуемого запаса по фазе $\gamma_с$.

Полученную в результате вычитания (11.30) характеристику корректирующего контура (рис. 11.8,*б*) можно представить как сумму двух составляющих. Одна составляющая $L'_к(\omega)$ соответствует безынерционному усилительному звену с коэффициентом усиления $20 \lg k_к$, а другая — $L''_к(\omega)$ — некоторому электрическому контуру, параметры которого, соответствующие упругому звену (см. гл. III), могут быть вычислены по сопрягающим частотам ω' и ω''.

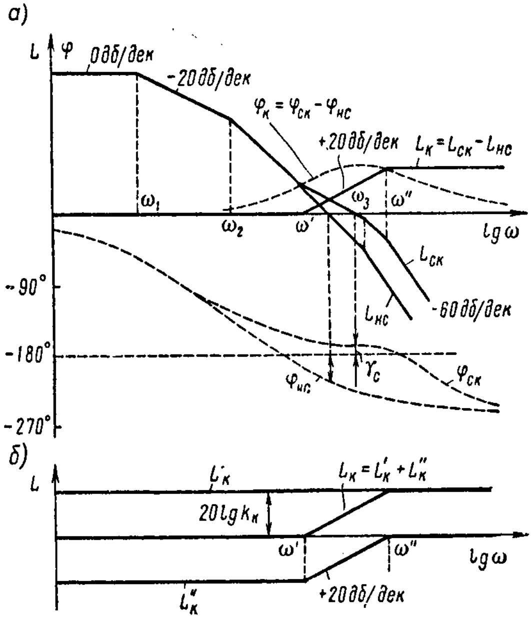


Рис. 11.8

Пример 11.1. Дана система автоматического регулирования, состоящая из инерционного и интегрирующего звеньев. Численные значения параметров: $T_м = 0{,}25$ *сек*, $k = 200$.

Необходимо синтезировать систему с частотой среза, равной не менее $40 \dfrac{1}{сек}$, и запасом по фазе, равным 30°. Общий коэффициент усиления разомкнутой системы должен быть сохранен тем же.

На рис. 11.9,*а* построена $L_{н.с}(\omega)$ заданной системы, для которой $\omega_с = 30 \dfrac{1}{сек}$, $\gamma_с = 6°$. Запас по фазе является явно недостаточным. Желаемую характеристику $L_{ск}(\omega)$ проводим таким образом, чтобы она в области низких частот $\omega < \omega_1$ совпадала бы с $L_{н.с}(\omega)$; в области средних частот имела бы наклон $-20 \dfrac{дб}{дек}$ и проходила бы через частоту среза, равную

$$\omega_с = 40 \frac{1}{сек};$$

в области высоких частот $\omega > \omega_2$ располагалась бы параллельно $L_{н.с}(\omega)$.

Сопрягающие частоты излома характеристики $L_{ск}(\omega)$ могут быть определены следующим образом: $\omega_1 = 20 \dfrac{1}{сек}$ определяется непосредственно из построения $L_{ск}(\omega)$, ω_2 — из выражения для фазочастотной характеристики при частоте среза;

$$30° - 180° = -150° = -90° - \operatorname{arctg} 40 \cdot 0,25 + \operatorname{arctg} 40 \cdot \frac{1}{20} - \operatorname{arctg} 40 \frac{1}{\omega_2}.$$

Из этого уравнения находим $\omega_2 = 52 \frac{1}{сек}$.

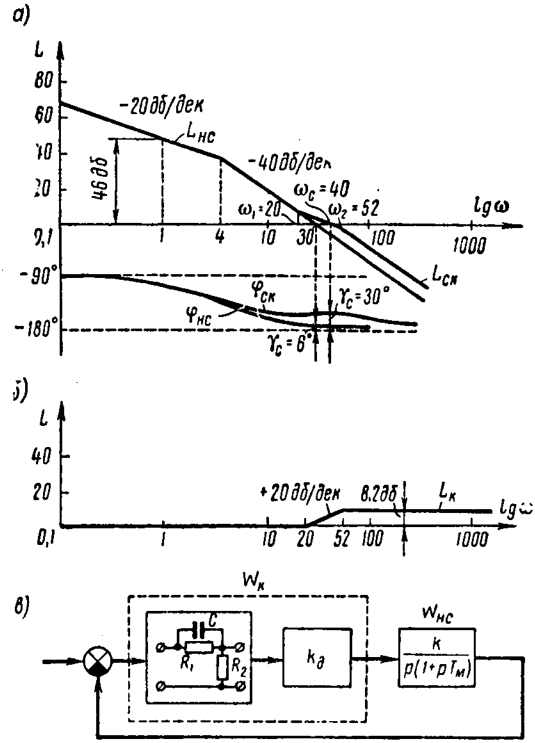


Рис. 11.9

Характеристика корректирующего устройства приведена на рис. 11.9,*б* и соответствует последовательному соединению упругого дифференцирующего контура и дополнительного усилителя (рис. 11.9,*в*). Передаточная функция этого устройства

$$W_к(p) = \frac{k_д(1 + pT_1)}{1 + pT_2}.$$

Численные значения параметров определяются по характеристике в соответствии с формулой (3.65):

$$T_1 = R_1C = \frac{1}{\omega_1} = 0,05 \text{ сек}; \qquad T_2 = \frac{R_1CR_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{\omega_2} = 0,019 \text{ сек},$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = k_д = 2,6 \qquad (20 \lg 2,6 = 8,2 \text{ дб}).$$

Пример 11.2. Дана нескорректированная система автоматического регулирования с передаточной функцией

$$W_{\text{н.с}}(p) = \frac{2}{p(1 + 0{,}25p)(1 + 0{,}0625p)}.$$

Необходимо увеличить коэффициент усиления разомкнутой системы в 20 раз (26 *дб*), не нарушая существенно качества переходного процесса системы. Допустимое снижение запаса по фазе составляет 5°.

Из построенной на рис. 11.10, *а* характеристики $L_{\text{н.с}}(\omega)$ видно, что запас по фазе нескорректированной системы при частоте среза $\omega = 2\,\frac{1}{сек}$ составляет $\gamma_1 = 56°$.

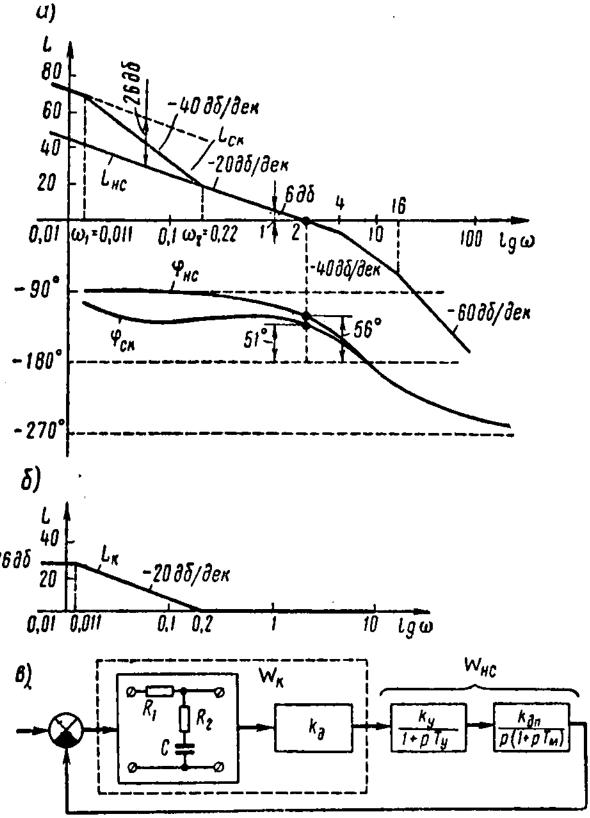


Рис. 11.10

Желаемая характеристика в области низких частот должна быть поднята на 26 *дб*, а в области средних и высоких частот должна совпадать с $L_{\text{н.с}}(\omega)$.

Фаза скорректированной системы может быть записана в виде (рис. 11.10, *а*)

$$\varphi_{\text{ск}}(\omega) = -90° - \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_1} + \operatorname{arctg}\frac{\omega}{\omega_2} - \operatorname{arctg}\omega\cdot 0{,}25 - \operatorname{arctg}\omega\cdot 0{,}0625.$$

Подставив в это уравнение $\omega = \omega_c = 2\,\frac{1}{сек}$ и учитывая, что ω_1 и ω_2 связаны соотношением $\omega_1 = \frac{\omega_2}{20}$, а также $\varphi_{ск}(\omega_c) = -180 + 51 = -129°$, получим

$$-6° = -\mathrm{arctg}\, 2\,\frac{20}{\omega_2} + \mathrm{arctg}\,\frac{2}{\omega_2}.$$

Из этого уравнения определим $\omega_2 = 0{,}22\,\frac{1}{сек}$, $\omega_1 = 0{,}011\,\frac{1}{сек}$.

Характеристика $L_к(\omega) = L_{ск}(\omega) - L_{н.с}(\omega)$ построена на рис. 11.10,*б*.

Корректирующее устройство можно представить в виде последовательного соединения упругого интегрирующего контура (см. гл. III) и дополнительного усилителя (рис. 11.10, *в*).

Передаточная функция корректирующего устройства

$$W_к(p) = \frac{k_д(1 + pT_2)}{1 + pT_1}.$$

Численные значения параметров определяются по характеристике $L_к(\omega)$ согласно уравнениям (3.64):

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} = R_2C\,\frac{R_1 + R_2}{R_2} = 90\ сек;$$

$$T_2 = \frac{1}{\omega_2} = R_2C = 4{,}5\ сек;$$

$$k_д = \frac{T_1}{T_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = 20.$$

С и н т е з п а р а л л е л ь н о г о к о р р е к т и р у ю щ е г о у с т р о й с т в а п о ЛАЧХ. Эту задачу не удается решить так же просто, как в случае последовательной коррекции. Исходным для построения $L_к(\omega)$ является уравнение (11.2).

В диапазоне частот, когда $|W_к(j\omega)\,W_0(j\omega)| \ll 1$, уравнение (11.2) примет вид

$$W_{ск}(j\omega) \approx W_н(j\omega)\,W_0(j\omega) = W_{н.с}(j\omega) \qquad (11.31)$$

или для логарифмических частотных характеристик

$$\left.\begin{aligned} L_{ск}(\omega) &\approx L_{н.с}(\omega),\\ \varphi_{ск}(\omega) &\approx \varphi_{н.с}(\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (11.32)$$

В диапазоне частот, где имеет место неравенство $|W_к(j\omega) \times W_0(j\omega)| \gg 1$, получим

$$W_{ск}(j\omega) \approx \frac{W_{н.с}(j\omega)}{W_к(j\omega)\,W_0(j\omega)} = \frac{W_н(j\omega)}{W_к(j\omega)}, \qquad (11.33)$$

откуда

$$\left.\begin{aligned} L_{ск}(\omega) &\approx L_{н.с}(\omega) - L_к(\omega) - L_0(\omega),\\ \varphi_{ск}(\omega) &\approx \varphi_{н.с}(\omega) - \varphi_к(\omega) - \varphi_0(\omega). \end{aligned}\right\} \qquad (11.34)$$

Таким образом, $L_{ск}(\omega)$ при параллельной коррекции можно приближенно представить для каждой области частот двумя приближенными выражениями:

$$\left.\begin{aligned} L'_{ск}(\omega) &\approx L_{ск}(\omega) \text{ при } |W_к(j\omega)\,W_0(j\omega)| \ll 1,\\ L''_{ск}(\omega) &\approx L_{н.с}(\omega) - L_к(\omega) - L_0(\omega) \text{ при } |W_к(j\omega)\,W_0(j\omega)| \gg 1. \end{aligned}\right\} \qquad (11.35)$$

Следовательно, условием для выбора $L_к(\omega)$ является уравнение

$$L_к(\omega) = L_{н.с}(\omega) - L_{ск}(\omega) - L_0(\omega), \tag{11.36}$$

когда $L_к(\omega) + L_0(\omega) \gg 0$.

Сопрягающие частоты, при которых переходят с одной характеристики на другую, определяются из уравнения

$$|W_0(j\omega) W_к(j\omega)| = 1$$

или

$$L_0(\omega) + L_к(\omega) = 0. \tag{11.37}$$

Графически эта частота определяется в точках пересечения результирующей характеристики $L_0(\omega) + L_к(\omega)$ с осью 0 *дб*. Рассматривая $L_{ск}(\omega)$ в виде двух сопряженных характеристик, можно наметить следующую последовательность синтеза параметров параллельного корректирующего устройства:

а) строится ЛАЧХ нескорректированной системы по известным параметрам основных функциональных звеньев;

б) строится желаемая ЛАЧХ скорректированной системы $L_{ск}(\omega)$ в соответствии с рекомендациями, изложенными в настоящей главе;

в) путем вычисления $L_{ск}(\omega)$ из характеристики $L_{н.с}(\omega)$ находится суммарная характеристика $L_к(\omega) + L_0(\omega)$;

г) с учетом требований к системе, а также технической осуществимости, определяется структурная схема скорректированной системы, т. е. место съема и место ввода параллельной коррекции, после чего строится логарифмическая характеристика охваченных звеньев $L_0(\omega)$;

д) вычитая из характеристики $L_к(\omega) + L_0(\omega)$ (в диапазоне частот, когда $L_к(\omega) + L_0(\omega) > 0$) характеристику $L_0(\omega)$, находим логарифмическую частотную характеристику искомого корректирующего звена, включенного в цепь корректирующей обратной связи;

е) по виду $L_к(\omega)$ выбирается электрическая схема и рассчитываются параметры корректирующего устройства.

На рис. 11.11, *а* построены ЛАЧХ, поясняющие синтез параллельной коррекции изложенным выше методом. Исходная система состоит из трех инерционных звеньев. Обратной связью охватываются два инерционных звена с наибольшими постоянными времени

$$T_1 = \frac{1}{\omega_1} \quad \text{и} \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2}.$$

В этом примере желаемая характеристика $L_{ск}$ (ломаная AB), вопреки общей рекомендации, выбирается с наклоном — 40 *дб/дек* при $\omega_с$. Расчет показывает, что при этом может быть получен необходимый запас по фазе $\gamma_с$ (см. кривую $\varphi_{ск}$).

Найденная $L_к(\omega)$ представляет собой горизонтальную прямую с ординатой $20 \lg k_{ос}$, где $k_{ос}$ — коэффициент усиления по цепи жесткой обратной связи, по величине меньшей единицы.

Структурная схема скорректированной системы приведена на рис. 11.11, *б*.

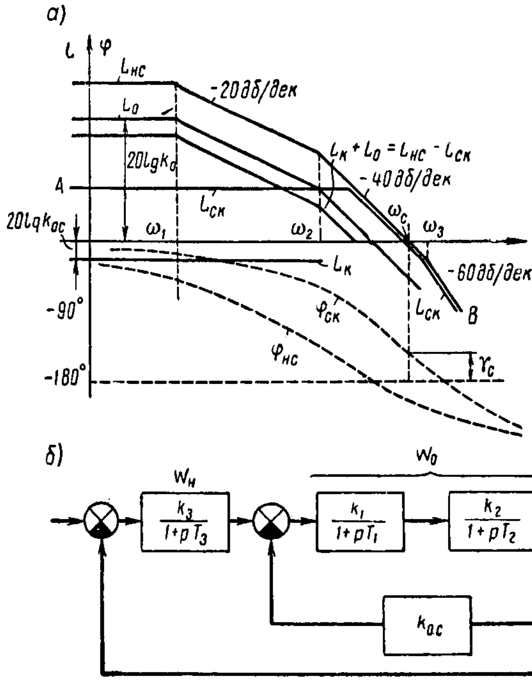


Рис. 11.11

Пример 11.3. Определить параметры параллельного корректирующего устройства следящей системы, структурная схема которой представлена на рис. 11.12, *а*. Здесь

$$k_и = 855 \frac{в}{рад}; \quad k_у = 26; \quad k_{д\,n} = 0{,}0092 \frac{рад}{сек \cdot в};$$

$$T_у = 0{,}02 \text{ } сек; \quad T_м = 1{,}53 \text{ } сек.$$

Путем введения параллельной коррекции необходимо обеспечить время переходного процесса не более 0,8 *сек* и величину перерегулирования не более 50%. Общий коэффициент усиления системы должен быть сохранен тем же,

$$D = k_у k_и k_{д\,n} = 200 \text{ } 1/сек.$$

Характеристика нескорректированной системы $L_{н.с}(\omega)$ и $\varphi_{н.с}(\omega)$ построены на рис. 11.13.

Желаемая характеристика $L_{ск}(\omega)$ строится таким образом, чтобы в области низких и высоких частот она совпадала с $L_{н.с}(\omega)$ (для сохранения величины D). В области частоты среза она располагается ниже $L_{н.с}(\omega)$ с наклоном $-20 \frac{дб}{дек}$ Пользуясь номограммами П. 9 (см. таблицу для значений)

$$\frac{\omega_1}{\omega_c} \approx 0{,}02; \quad \frac{\omega_2}{\omega_c} \approx 2; \quad \mu = 63 \ дб,$$

находим параметры, характеризующие качество следящей системы,

$$M = 1{,}4; \quad \omega_м = 0{,}8\ \omega_c; \quad \omega_c = 5{,}6 \frac{1}{сек}; \quad t_p \omega_c = 0{,}55;$$

$$t_y \omega_c = 0{,}3; \quad \omega_t = 0{,}92\omega_c; \quad h_M = 1{,}45.$$

Эти параметры удовлетворяют предъявляемым к системе требованиям.

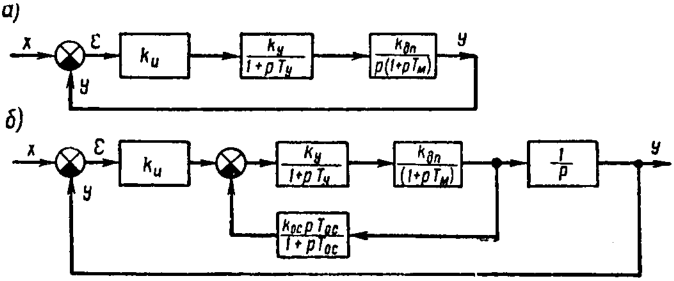


Рис. 11.12

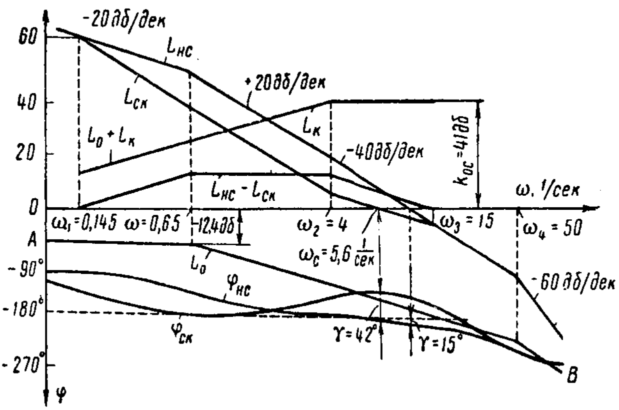


Рис. 11.13

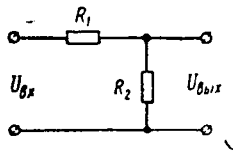
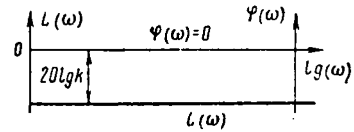
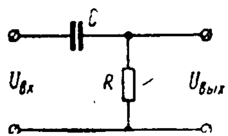
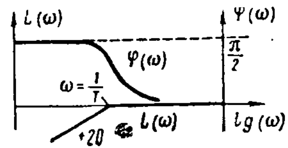
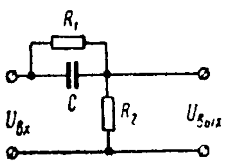
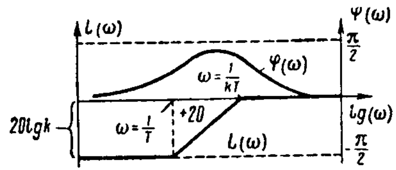
На рис. 11.13 построена характеристика $L_0(\omega) + L_к(\omega)$, полученная в результате вычитания $L_{н.с}(\omega) - L_{ск}(\omega)$.

В качестве звеньев, охваченных обратной связью по скорости, выбираем усилитель и двигатель с общей передаточной функцией (рис. 11.12, *б*)

$$W_0(p) = \frac{0{,}23}{(1 + p\,0{,}02)(1 + p\,1{,}5)}.$$

Таблица 11.1

Основные пассивные четырехполюсники постоянного тока, применяемые для коррекции

Схема	Комплексный коэффициент усиления	ЛАЧХ и ФЧХ
	$W(j\omega) = k$ $k = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$	
	$W(j\omega) = \dfrac{j\omega T}{1 + j\omega T}$ $T = RC$	
	$W(j\omega) = \dfrac{k(1 + j\omega T)}{1 + j\omega Tk}$ $T = CR_1,$ $k = \dfrac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$	

Продолжение таблицы 11.1

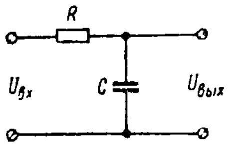
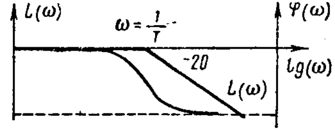
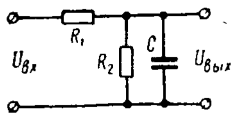
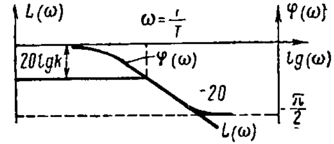
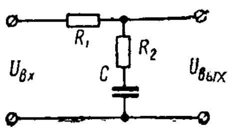
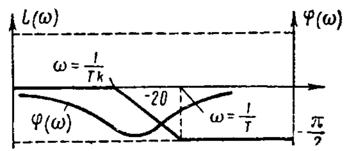
Схема	Комплексный коэффициент усиления	ЛАЧХ и ФЧХ
	$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}$ $T = RC$	
	$W(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \ll 1$ $T = C\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$	
	$W(j\omega) = \frac{1 + j\omega T}{1 + j\omega T k}$ $T = R_2 C,$ $k = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$	

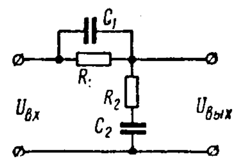
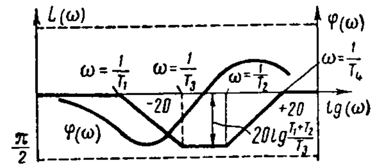
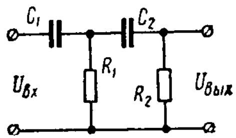
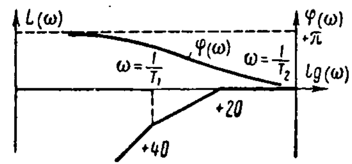
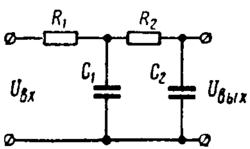
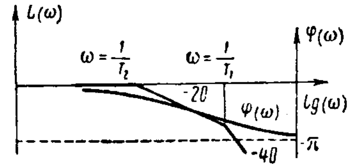
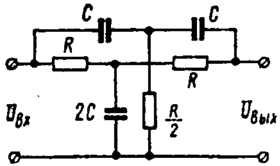
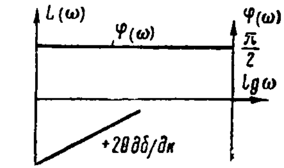
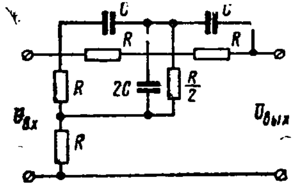
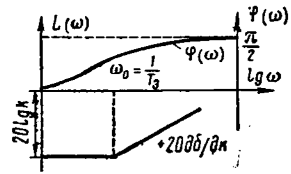
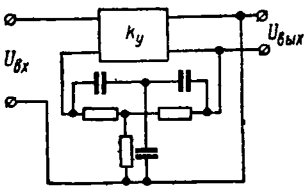
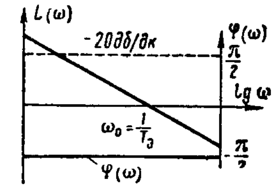
Схема	Комплексный коэффициент усиления	ЛАЧХ и ФЧХ
	$W(j\omega) =$ $= \dfrac{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}{(1 + j\omega T_3)(1 + j\omega T_4)}$ $T_1 = R_1C_1;\ T_2 =$ $= R_2C_2;\ T_3T_4 = T_1 \cdot T_2$ $T_3 + T_4 =$ $= T_1 + T_2\left(1 + \dfrac{R_1}{R_2}\right)$	
	$W(j\omega) =$ $= \dfrac{-T_1T_2\omega^2}{1+(T_1+T_2+R_1C_2)\,j\omega+} \rightarrow$ $\rightarrow \overline{+T_1T_2(j\omega)^2}$ $T_1 = R_1C_1,\ T_2 = R_2C_2$	
	$W(j\omega) =$ $= \dfrac{1}{1+(T_1+T_2+R_1C_2)\,j\omega+} \rightarrow$ $\rightarrow \overline{+T_1T_2\omega^2}$ $T_2 = R_1C_1,\ T_1 = R_2C_2$	

Таблица 11.2

Корректирующие цепи переменного тока

Схема	Комплексный коэффициент усиления	ЛАЧХ и ЛФЧХ
	$W(j\omega) = j\omega T_э$ $T_э = \frac{1}{2\omega_н} = \frac{RC}{2}$	
	$W(j\omega) = k(1 + j\omega T'_э)$ $T'_э = \frac{1}{2\omega_н} \frac{R_1}{R_2}$ $k = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$	
	$W(j\omega) = \frac{k_у}{1 + jk_у\omega T_э}$ при $k_у \to \infty$ $W(j\omega) \approx \frac{1}{j\omega T_э}$ $T_э = \frac{1}{2\omega_н} = \frac{RC}{2}$	

Характеристика L_0 — ломаная линия AB, соответствующая этой передаточной функции, имеет в области низких частот $\omega \leqslant 0{,}65$ усиление — 12,4 *дб*.

Характеристика корректирующего устройства

$$L_к(\omega) = L_{н.\,с}(\omega) - L_{ск}(\omega) - L_0(\omega)$$

состоит из участка с наклоном $+20\,\frac{дб}{дек}$ и горизонтального участка с усилением 41 *дб*. По виду $L_к(\omega)$ выбираем схему коррекции — гибкую обратную связь по скорости (см. рис. 11.3, *б*): $k_{ос} = 105\,\frac{в \cdot сек}{рад}$ [41 *дб*]

$$T_{ос} = \frac{1}{\omega_2} = 0{,}25 \text{ сек}.$$

Структурная схема скорректированной системы представлена на рис.. 11.12, *б*

Для коррекции систем автоматического регулирования чаще всего применяются пассивные четырехполюсники, работающие на постоянном токе. В табл. 11.1 приведены их основные типовые электрические схемы, комплексные коэффициенты усиления и характеристики. Пользуясь этой таблицей, можно подобрать необходимую электрическую схему и рассчитать ее параметры по виду характеристики корректирующего устройства, найденной в результате синтеза последовательной или параллельной коррекции.

В системах автоматического регулирования переменного тока, работающих целиком на несущей частоте, применение четырехполюсников постоянного тока обычно нецелесообразно, так как это связано с дополнительным включением модулятора и демодулятора.

Коррекция систем переменного тока может быть осуществлена с помощью четырехполюсников, работающих на несущей частоте. Наиболее применимой схемой является двойной Т-образный мост, различные схемы включения которого показаны в табл. 11.2. Следует иметь в виду, что значения комплексных коэффициентов усиления и характеристики, приведенные в таблице, являются приближенными и справедливыми только в области частот $\omega \ll \omega_н$, где $\omega_н$ — несущая частота.

Глава XII

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ, СПЕКТРЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

§ 12.1. ПРИМЕРЫ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Импульсные системы автоматического регулирования (их называют также иногда *системами прерывистого регулирования*) представляют собой особый класс систем, которые в ряде случаев могут быть описаны с помощью линейных уравнений. В этих системах определение рассогласования (ошибки) между заданной и регулируемой величинами производится не непрерывно, а лишь в дискретные моменты времени, называемые *моментами съема,* разделенные, как правило, одинаковыми интервалами времени. Внутри этих интервалов управление движением системы регулирования производится в соответствии с ранее измеренными дискретными значениями рассогласования. Теория импульсных систем автоматического регулирования разрабатывалась Я. З. Цыпкиным [Л. 23].

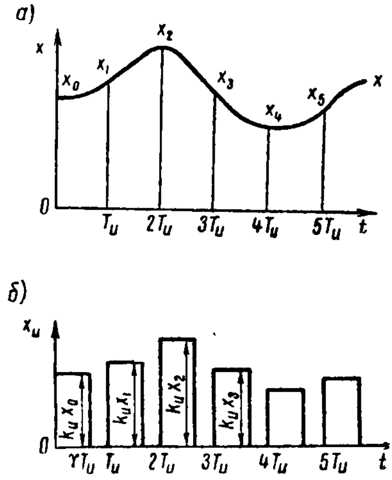


Рис. 12.1

Представление сигнала с помощью дискретных его значений x_0, x_1, x_2, ..., x_l, как это показано на рис. 12.1,*а*, называют иногда *квантованием по времени.* В импульсных системах автоматического регулирования квантованный по времени сигнал рассогласования модулирует последовательность управляющих импульсов. При этом форма импульсов может быть произвольной и, в принципе, может быть использован любой из известных видов модуляции: амплитудная, широтная, фазовая, частотная. Здесь будут рассмотрены широко применяемые системы с амплитудной модуляцией. Именно эти системы, как это будет показано ниже, могут быть описаны линейными уравнениями*. При этом, если среди элементов системы автоматического регулирования имеются нелинейные элементы, то должен быть использован прием линеаризации и рассматриваться малые приращения величин. Далее рассматриваются импульсные системы автоматического регулирования, содержащие только линейные элементы.

На рис. 12.1, *б* показаны прямоугольные импульсы, модулированные по амплитуде дискретной последовательностью x_0, x_1, x_2, ..., x_l. Здесь период следования импульсов обозначен через $T_и$, длительность импульсов $\gamma T_и$, коэффициент заполнения γ, коэффициент модуляции $k_и$.

Квантование сигналов по времени сопровождается в общем случае потерей информации, так как дискретные значения не передают характера изменения сигналов между моментами съема. Различные непрерывные сигналы могут дать одинаковые последовательности дискретных значений, как это показано на рис. 12.2. Для того чтобы полней передавать характер изменения сигнала с помощью дискретных значений, частоту квантования $\omega_и = 2\pi/T_и$ следует брать по возможности больше.

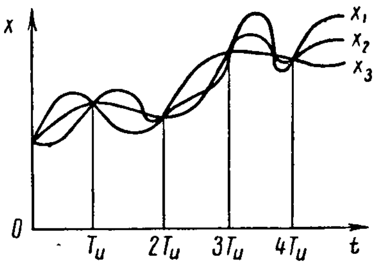


Рис. 12.2

Принцип импульсного регулирования получил применение в системах автоматического регулирования с цифровыми вычислительными устройствами, в многоканальных системах автоматического регулирования, в радиолокационных устройствах и в некоторых других системах.

В большинстве случаев применение сигналов, квантованных по времени, является вынужденным. В системах автоматического регулирования с цифровыми вычислительными устройствами это связано с тем, что большинство цифровых вычислительных устройств выдают решение периодически. В многоканальных системах автоматического регулирования один регулятор обслуживает несколько объектов, это также приводит к импульсному

* Системы с широтной модуляцией при очень малой ширине импульсов эквивалентны системам с амплитудной модуляцией, так как действие очень короткого импульса определяется его площадью (см. гл. II). Встречаются также системы автоматического регулирования, в которых модуляция управляющих импульсов производится не мгновенными, а текущими значениями сигнала рассогласования, меняющимися за время действия импульса, в результате чего форма импульсов в процессе модуляции меняется. Такие системы автоматического регулирования являются по сути дела *системами с переменными параметрами* (переменным коэффициентом усиления) и в данной книге не рассматриваются.

характеру измерения и управления в каждой системе. В радиолокационных системах входные и выходные сигналы — импульсные, а потому и сами системы являются импульсными.

Заметим, что в отдельных случаях (см. § 14) импульсное регулирование обладает определенными преимуществами по сравнению с непрерывным регулированием и поэтому может быть применено специально.

Рассмотрим некоторые примеры импульсных систем автоматического регулирования.

Цифровая следящая система. Функциональная схема ее показана на рис. 12.3. Цифровая следящая система служит для пропорционального преобразования в определенном масштабе входного цифрового сигнала $x_ц$ в угол поворота

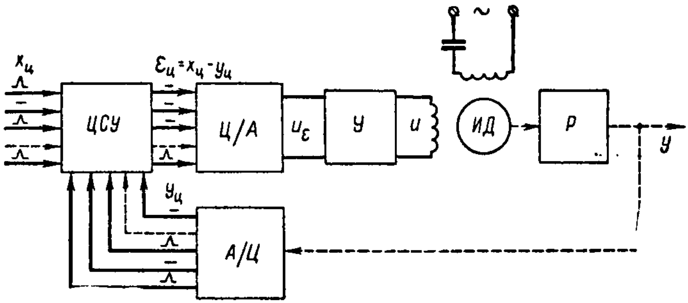


Рис. 12.3

выходного вала y. Входной сигнал в виде параллельного импульсного кода периодически поступает в цифровое сравнивающее устройство ЦСУ. Сюда же в те же моменты времени поступает параллельный цифровой код $y_ц$, являющийся результатом цифрового измерения угла поворота y. Измерение осуществляется аналого-цифровым преобразователем *А/Ц*, построенным, например, с помощью кодового диска. ЦСУ производит вычитание числа $y_ц$ из числа $x_ц$ и выдает результат — цифровое рассогласование $\varepsilon_ц$ с некоторым запаздыванием τ по сравнению с моментом поступления $x_ц$ и $y_ц$. Величина τ определяется временем, необходимым для выполнения вычитания в ЦСУ; часто τ значительно меньше, чем $T_и$, и им можно пренебречь.

Параллельный код цифрового рассогласования $\varepsilon_ц$ поступает в цифро-аналоговый преобразователь *Ц/А*, в котором имеется регистр, хранящий $\varepsilon_ц$ в течение периода $T_и$. Непосредственно перед поступлением очередного числа $\varepsilon_ц$ во всех разрядах регистра устанавливаются нули. На выходе *Ц/А* получается аналоговая величина — напряжение переменного тока u_ε, которое далее усиливается в усилителе *У*. Напряжение управления u поступает на исполнительный двигатель *ИД* (асинхронный двухфазный двигатель). Последний через редуктор *Р* вращает выходную ось так, чтобы уменьшить рассогласование $\varepsilon_ц$. В результате выходная величина y «следит» за входной величиной $x_ц$.

На рис. 12.4, *а* показаны временные диаграммы, характеризующие переходный процесс в цифровой следящей системе при отработке скачкообразного воздействия $x_ц(t)$. Для сравнения на временной диаграмме $y(t)$ нанесен пунктиром процесс в непрерывной следящей системе с такими же параметрами,

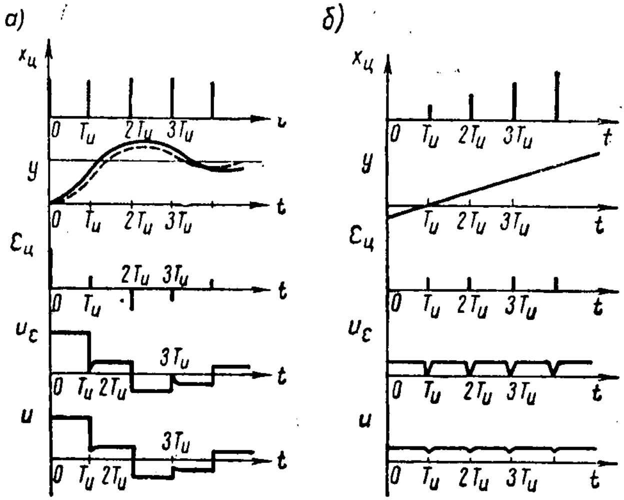


Рис. 12.4

но с непрерывной передачей сигналов $x_ц$, $y_ц$ и $\varepsilon_ц$. При уменьшении $T_и$ в импульсной системе разница между процессами обеих систем делается меньше; в пределе при $T_и \to 0$ импульсная система превращается в непрерывную.

На рис. 12.4, *б* показаны временные диаграммы, соответствующие установившемуся режиму при отработке линейно меняющегося сигнала $x_ц$. При этом, как и в обычных следящих системах, y и $y_ц$ меняются также линейно, а рассогласование $\varepsilon_ц$ — постоянно. Напряжение u_ε постоянно, за исключением коротких импульсов, соответствующих установке на нуль регистра в *Ц/А*. В напряжении u эти импульсы уже в значительной степени сглажены.

Цифровые следящие системы применяются для преобразования результатов вычисления управляющих цифровых вычислительных машин в перемещения рабочих органов управляемых объектов. Часто цифровая вычислительная машина не только вырабатывает сигнал $x_ц$, но и вычисляет разность $x_ц - y_ц$, поэтому не приходится применять отдельное *ЦСУ*. При этом, поскольку на цифровую вычислительную машину возлагают решение целого ряда задач, период $T_и$ может получаться довольно большим ($T_и = 0{,}1 \div 1$ *сек*). Запаздывание τ может иметь порядок 1 *мсек*.

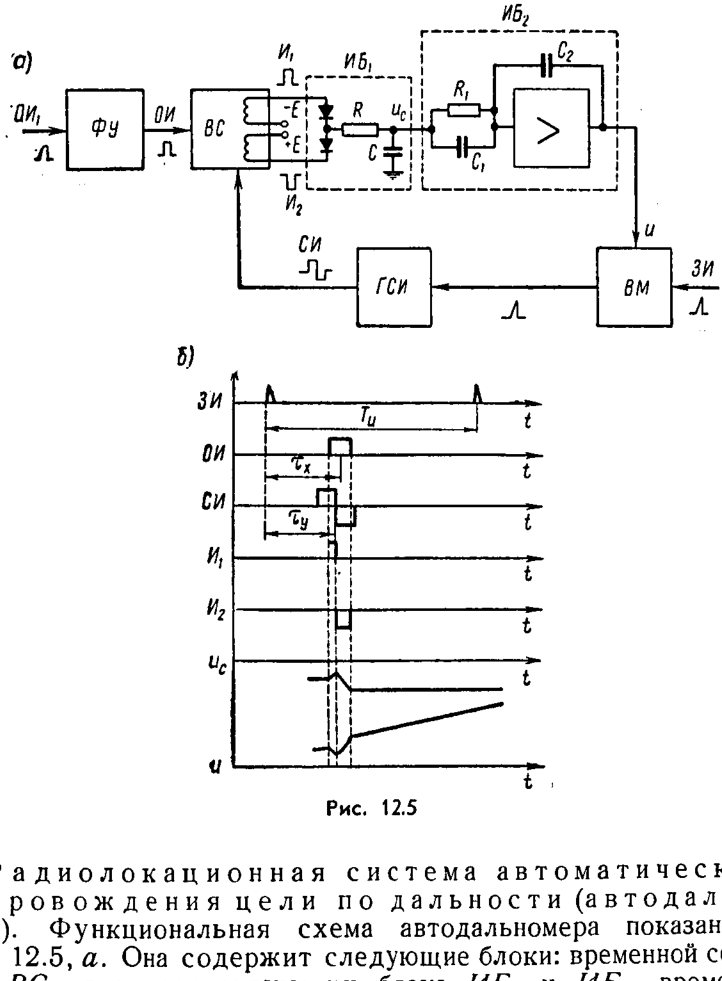


Рис. 12.5

Радиолокационная система автоматического сопровождения цели по дальности (автодальномер). Функциональная схема автодальномера показана на рис. 12.5, *а*. Она содержит следующие блоки: временной селектор *ВС*, два интегрирующих блока $ИБ_1$ и $ИБ_2$, временной модулятор *ВМ* и генератор селекторных импульсов *ГСИ*. На рис. 12.5, *б* приведены временные диаграммы, поясняющие работу автодальномера в течение одного периода $T_и$.

Зондирующий импульс *ЗИ* (посылаемый к цели) подается на временной модулятор *ВМ*, где он задерживается на время, зависящее от управляющего напряжения u. В качестве временного модулятора может быть применена, например, фантастронная схема. Задержанный *ЗИ* запускает генератор селекторных импульсов *ГСИ*, построенный, например, на блокинг-генераторах. *ГСИ* вырабатывает два селекторных импульса *СИ* разных полярностей, следующих один за другим. Время сдвига границы селекторных импульсов относительно *ЗИ* — $\tau_у$ пропорционально u. Селекторные импульсы вместе с отраженным от цели импульсом *ОИ* поступают на временной селектор *ВС*. *ОИ* предварительно проходит через формирующее устройство *ФУ* (например, усилитель с насыщением). Время сдвига середины *ОИ* относительно *ЗИ* — τ_x пропорционально расстоянию до цели.

ВС содержит две схемы совпадения. На выходе *ВС* получаются два импульса $И_1$ и $И_2$ с одинаковыми амплитудами и разными полярностями, которые представляют собой части *ОИ*, совпадающие с первым и вторым селекторными импульсами. Разность длительностей $И_1$ и $И_2$ пропорциональна рассогласованию $\tau_\varepsilon = \tau_x - \tau_у$. $И_1$ и $И_2$ подаются на первый интегрирующий блок $ИБ_1$, который включает в себя две ключевые схемы на диодах и интегрирующую RC-цепочку с большой постоянной времени. Можно считать, что напряжение u_C на конденсаторе C изменяется при действии $И_1$ или $И_2$ по линейному закону. В результате приращение напряжения u_C после окончания $И_1$ и $И_2$ пропорционально (с обратным знаком) разности длительностей $И_1$ и $И_2$, т. е. пропорционально рассогласованию τ_ε. Напряжение на выходе $ИБ_1$ пропорционально сумме рассогласований τ_ε во все предыдущие моменты съема; таким образом, $ИБ_1$ представляет собой сумматор дискретных значений (дискретный интегратор).

Напряжение u_C подается на второй интегрирующий блок $ИБ_2$, в качестве которого применен операционный усилитель с передаточной функцией

$$W(p) = -\frac{1 + pT_1}{pT_2},$$

где $T_1 = R_1C_1$, $T_2 = R_1C_2$. Сопротивление R_1 выбирается достаточно большим, так что входная цепь операционного усилителя не нагружает RC-цепочку. Если записать передаточную функцию операционного усилителя в виде

$$W(p) = -\left(\frac{T_1}{T_2} + \frac{1}{pT_2}\right),$$

то видно, что напряжение u на его выходе имеет две составляющие: одну — пропорциональную u_C, вторую — пропорциональную интегралу от u_C. После окончания $И_1$ и $И_2$ напряжение u изменяется по линейному закону. При этом, если, как это показано на рис. 12.5,*б*, $\tau_x > \tau_y$ ($\tau_\varepsilon > 0$), то u возрастает, в результате чего τ_y к следующему моменту съема увеличивается, стремясь к τ_x. Если $\tau_\varepsilon < 0$, то u и τ_y уменьшаются.

Таким образом, автодальномер представляет собой импульсную систему автоматического регулирования временного сдвига τ_y (и пропорционального ему напряжения u). Входной величиной является временной сдвиг τ_x, пропорциональный расстоянию до цели. Благодаря наличию двух интегрирующих блоков, сопровождение целей, движущихся с постоянной скоростью, выполняется без ошибок. Частота посылки зондирующих импульсов обычно равна 100—1000 *гц* ($T_и = 1-10$ *мсек*).

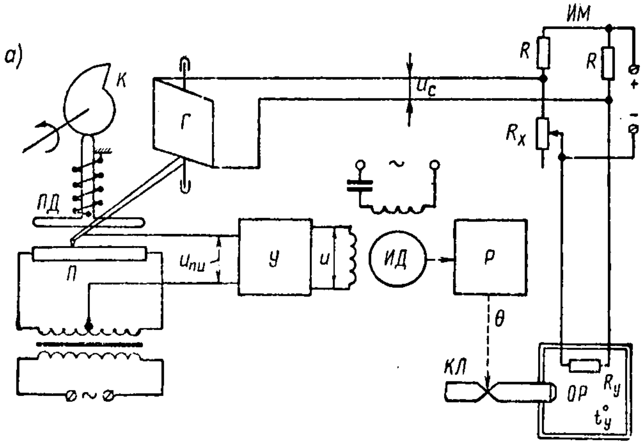
Система автоматического регулирования температуры с падающей дужкой. На функциональной схеме системы автоматического регулирования температуры (рис. 12.6,*а*) приняты следующие обозначения: *ОР* — объект регулирования (печь), *ИМ* — измерительный мост, *Г* — гальванометр с падающей дужкой *ПД*, приводимой в движение кулачком *К*, *ИД* — исполнительный двигатель, *Р* — редуктор, *КЛ* — клапан, регулирующий подачу топлива в печь.

Температура в печи измеряется с помощью термосопротивления R_y. Оно вместе с сопротивлением уставки R_x включено в измерительный мост *ИМ*.

Напряжение разбаланса моста u_ε подается на гальванометр *Г* с падающей дужкой *ПД*. Падающая дужка приводится в периодическое движение специальным синхронным двигателем (не показанным на рисунке) через кулачок *К* и рычажную передачу. Она периодически прижимает на время $\gamma T_и$ стрелку гальванометра к потенциометру *П*. На вход усилителя *У* поступают прямоугольные импульсы напряжения $u_{пи}$ постоянной длительности $\gamma T_и$. Амплитуда импульсов пропорциональна значениям рассогласования, взятым в моменты падения дужки (моменты съема). Импульсы $u_{пи}$ усиливаются и поступают на исполнительный двигатель *ИД* (асинхронный двухфазный двигатель). Последний через редуктор *Р* поворачивает на угол θ клапан *КЛ*, увеличивая или уменьшая подачу топлива в печь.

В гальванометре с падающей дужкой получается значительное усиление мощности, при этом прерывистый характер контакта между стрелкой гальванометра и потенциометром исключает погрешность трения. Период $T_и$ обычно измеряется минутами, так как тепловой объект обладает большой инерционностью. Регуляторы с падающей дужкой были одними из первых регуляторов импульсного типа.

На рис. 12.6,*б* показаны временные диаграммы, иллюстрирующие характер изменения сигналов в системе.



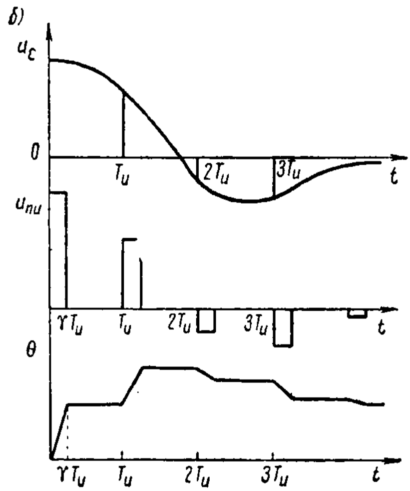


Рис. 12.6

§ 12.2. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА ИМПУЛЬСНОЙ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

На рис. 12.7,*а* изображена структурная схема импульсной системы автоматического регулирования, включающая в себя, помимо сравнивающего звена, импульсное звено *ИЗ* и непрерывную часть *НЧ* с передаточной функцией $W_н(p)$. Внутри импульсного звена показана форма управляющих импульсов. В общем случае она произвольна и характеризуется функцией $s(t)$, равной нулю вне интервала $0 < t \leqslant T_и$. Во всех практических случаях функция $s(t)$ имеет конечную высоту, она может быть всегда нормирована за счет включения коэффициента модуляции $k_и$ в коэффициент усиления *НЧ*, и поэтому $s_{макс} = 1$ (рис. 12.7,*б*)

Сигнал рассогласования $\varepsilon(t)$ подвергается квантованию по времени и его дискретные значения модулируют по амплитуде импульсы в *ИЗ*. Если считать, что $\varepsilon(t)=0$ при $t<0$, то импульсный сигнал для $0 \leqslant t < \infty$

$$\varepsilon_и(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon(lT_и)\, s(t - lT_и). \qquad (12.1)$$

При исследовании удобно заменить импульсное звено, на выходе которого получаются модулированные импульсы произвольной формы, последовательным соединением простейшего импульсного звена с модулированными единичными импульсами на выходе и формирующего звена. Формирующее звено должно иметь реакцию на единичный импульс (весовую функцию), тождественную форме действующих в системе импульсов,

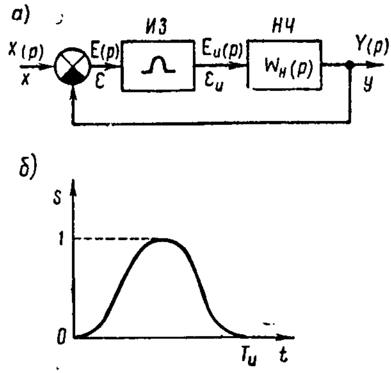


Рис. 12.7

$$w_ф(t) = s(t). \qquad (12.2)$$

Для этого передаточная функция формирующего звена должна быть равна изображению функции $s(t)$, так как изображением единичного импульса является 1, т. е.

$$W_ф(p) = S(p). \qquad (12.3)$$

На рис. 12.8 показана эквивалентная схема импульсной системы автоматического регулирования с простейшим импульсным звеном. Единичный импульс внутри импульсного звена *ИЗ*

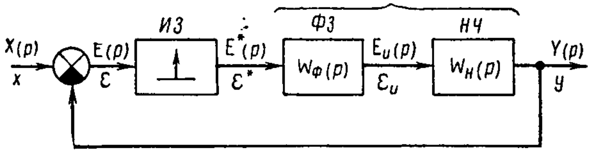


Рис. 12.8

условно показан стрелкой единичной высоты. Формирующее звено и непрерывная часть соединены последовательно и образуют приведенную непрерывную часть *ПНЧ* с передаточной функцией

$$W_{пн}(p) = W_ф(p) \cdot W_н(p). \qquad (12.4)$$

Последовательность модулированных импульсов на выходе простейшего импульсного звена $\varepsilon^*(t)$ показана на рис. 12.9. Она может быть описана следующим образом:

$$\varepsilon^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \varepsilon(lT_и)\,\delta(t - lT_и). \tag{12.5}$$

Формирующее звено преобразует эту последовательность в последовательность действительных импульсов $\varepsilon_и(t)$ [см. (12.1)], действующих на непрерывную часть системы.

Простейшее импульсное звено является типичным для линейных импульсных систем. Его наличие отличает структурные схемы импульсных систем от непрерывных.

Важной особенностью импульсных систем является *недопустимость перемещения импульсного звена через непрерывное звено в структурных схемах или невыполнение принципа коммутативности при наличии импульсного звена.*

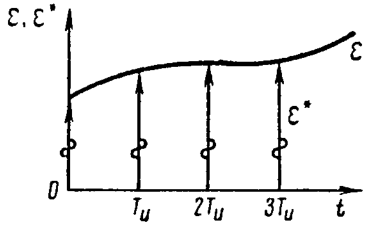


Рис. 12.9

В непрерывных системах, при последовательном соединении линейных звеньев с передаточными функциями W_1 и W_2, эти звенья можно менять местами и при этом преобразование сигнала определяется той же передаточной функцией

$$W(p) = W_1(p)\cdot W_2(p) = W_2(p)\,W_1(p).$$

В импульсных системах такая перемена мест импульсного и непрерывного звеньев приводит к изменению свойств цепи (исключение составляет безынерционное звено). Так, в схеме (см. рис. 12.8) перенесение звена $W_ф$ в цепь перед импульсным звеном *ИЗ* приведет к существенному изменению характеристик системы. Этот вопрос подробнее рассматривается в конце гл. XIV.

Пример 12.1. Рассмотрим эквивалентную схему цифровой следящей системы из § 12.1. Будем пренебрегать для простоты нелинейными явлениями, имеющими место при аналого-цифровом преобразовании и связанными с округлением величин при их цифровом представлении. Обычно погрешность округления мала и оказывает малое влияние на поведение системы. Управляющие импульсы в системе, как это было показано на рис. 12.4, имеют прямоугольную форму с коэффициентом заполнения, равным единице. Прямоугольный импульс единичной высоты и длительности $T_и$ можно представить как сумму $1_0(t)$ и $1_0(t - T_и)$, как это показано на рис. 12.10. Тогда изображение $S(p)$ и передаточная функция $W_ф(p)$ равны

$$W_ф(p) = S(p) = \frac{1 - e^{-pT_и}}{p}. \tag{12.6}$$

Комплексный коэффициент усиления формирующего звена

$$W_ф(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T_и}}{j\omega} = T_и \frac{\sin\frac{\omega T_и}{2}}{\frac{\omega T_и}{2}} e^{-j\omega \frac{T_и}{2}} \qquad (12.7)$$

На рис. 12.11 изображены частотные характеристики формирующего звена с прямоугольными импульсами длительности $T_и$. Формирующее звено

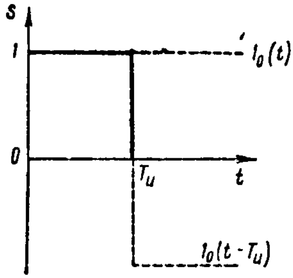


Рис. 12.10

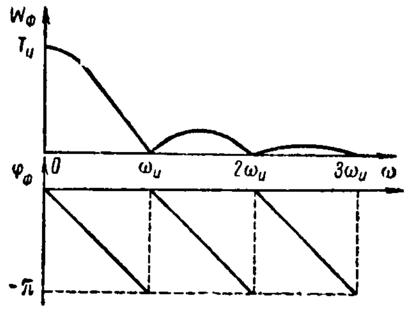


Рис. 12.11

ослабляет высокочастотные составляющие сигнала $\varepsilon^*(t)$. На низких частотах, при $\omega T_и \ll 1$, формирующее звено близко по своим свойствам к запаздывающему звену с временем запаздывания $\frac{T_и}{2}$

$$W_ф(j\omega) \approx T_и e^{-j\omega \frac{T_и}{2}}. \qquad (12.8)$$

Это обстоятельство подтверждается рис. 12.12, где изображены сигналы $\varepsilon(t)$ и $\varepsilon_и(t)$ и видно, что второй сигнал отстает от первого.

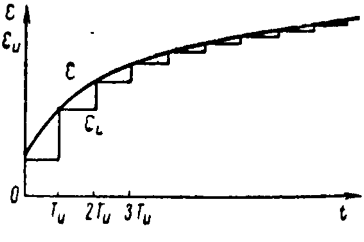


Рис. 12.12

Приведенная непрерывная часть цифровой следящей системы, если учитывать только электромеханическую постоянную времени двигателя T, будет иметь передаточную функцию

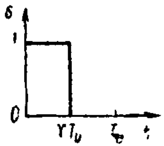
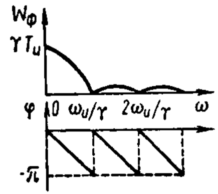
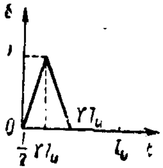
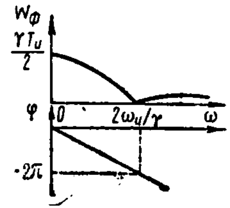
$$W_{пн}(p) = \frac{1 - e^{-pT_и}}{p} \frac{k}{p(1+pT)}, \qquad (12.9)$$

где k — коэффициент усиления непрерывной части, и комплексный коэффициент усиления

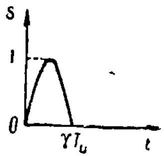
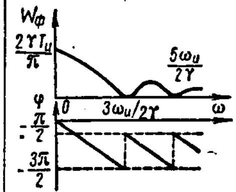
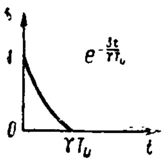
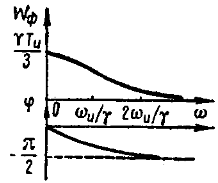
$$W_{пн}(j\omega) = \frac{-k\left(1 - e^{-j\omega T_и}\right)}{\omega^2(1 + j\omega T)}. \qquad (12.10)$$

В табл. 12.1 приведены передаточные функции и частотные характеристики для некоторых типов импульсов. В четвертой строке таблицы взят экспоненциальный импульс бесконечной длительности, который практически (с точностью до 5%) затухает к моменту времени $\gamma T_и$. Во всех случаях формирующее

Таблица 12.1

Форма импульса	$W_ф(p)$	$W_ф(j\omega)$	Частотные характеристики	$W_ф(j\omega)$ при $\omega\gamma T_и \ll 1$
Прямоугольный 	$\frac{1-e^{-p\gamma T_и}}{p}$	$\gamma T_и \frac{\sin\frac{\omega\gamma T_и}{2}}{\frac{\omega\gamma T_и}{2}} e^{-j\omega\frac{\gamma T_и}{2}}$		$\gamma T_и e^{-j\omega\frac{\gamma T_и}{2}}$
Треугольный 	$\frac{2}{\gamma T_и}\frac{\left(1-e^{-p\frac{\gamma T_и}{2}}\right)^2}{p^2}$	$\frac{\gamma T_и}{2}\frac{\left(1-\cos\frac{\omega\gamma T_и}{2}\right)^2}{\left(\frac{\omega\gamma T_и}{2}\right)^2}\times$ $\times e^{-j\omega\frac{\gamma T_и}{2}}$		$\frac{\gamma T_и}{2} e^{-j\omega\frac{\gamma T_и}{2}}$

Продолжение табл. 12.1

Форма импульса	$W_{\Phi}(p)$	$W_{\Phi}(j\omega)$	Частотные характеристики	$W_{\Phi}(j\omega)$ при $\omega\gamma T_и \ll 1$
Синусоидальный 	$T_и \dfrac{\dfrac{\pi}{\gamma}}{p^2T_и^2+\left(\dfrac{\pi}{\gamma}\right)^2}(1+e^{-p\gamma T_и})$	$\dfrac{2\gamma T_и}{\pi}\,\dfrac{\cos\dfrac{\omega\gamma T_и}{2}}{1-\left(\dfrac{2}{\pi}\,\dfrac{\omega\gamma T_и}{2}\right)^2}\times$ $\times e^{-j\omega\frac{\gamma T_и}{2}}$		$\dfrac{2\gamma T_и}{\pi}\,e^{-j\omega\frac{\gamma T_и}{2}}$
Экспоненциальный 	$\dfrac{T_и}{pT_и+\dfrac{3}{\gamma}}$	$\dfrac{\gamma T_и}{3}\,\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\omega\gamma T_и}{3}\right)^2}}\times$ $\times e^{-j\,\mathrm{arctg}\frac{\omega\gamma T_и}{3}}$		$\dfrac{\gamma T_и}{3}\,e^{-j\omega\frac{\gamma T_и}{3}}$

звено вносит ослабление высокочастотных составляющих, на низких же частотах имеет место запаздывание, составляющее часть от $\gamma T_и$.

§ 12.3. СПЕКТРЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

Применение преобразований Фурье и Лапласа для дискретных сигналов. Рассмотрим спектр и изображение дискретного сигнала $x^*(t)$, получающегося на выходе простейшего импульсного звена, на входе которого действует сигнал $x(t)$ (рис. 12.13). Будем считать, что все сигналы равны нулю при $t < 0$; все выражения для сигналов справедливы при $t \geqslant 0$. Сигнал $x^*(t)$ равен, как уже отмечалось, сумме промодулированных и смещенных единичных импульсов

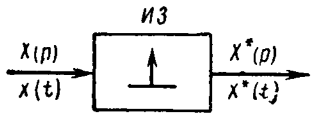


Рис. 12.13

$$x^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,\delta(t - lT_и).$$

Преобразование Фурье, т. е. спектр для одного импульса $\delta(t - lT_и)$ равен $e^{-j\omega lT_и}$, поэтому спектр

$$X^*(j\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)e^{-j\omega lT_и}. \qquad (12.11)$$

Изображение сигнала $x^*(t)$ по Лапласу

$$X^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,e^{-plT_и}. \qquad (12.12)$$

Примечательным в выражениях (12.11) и (12.12) является то, что спектр и изображение сигнала $x^*(t)$ определяются дискретными значениями $x(lT_и)$. В литературе преобразование (12.12) называют часто *дискретным преобразованием Лапласа* [Л. 23].

Если произвести замену $e^{pT_и} = z$, то выражение (12.12) примет вид

$$X(z) = \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,z^{-l}, \qquad (12.13)$$

в результате чего получится формула так называемого *z-преобразования для дискретных значений сигнала x*. Это обозначение и термин также можно встретить в литературе [Л. 26].

Важной особенностью спектра дискретного сигнала является его периодичность по оси частот с периодом $\omega_и = \frac{2\pi}{T_и}$, что вытекает из (12.11), поскольку

$$e^{-j(\omega + r\omega_и) lT_и} = e^{-j\omega lT_и} \cdot e^{-jrl2\pi} = e^{-j\omega lT_и}.$$

Поэтому спектры дискретных сигналов можно рассматривать в полосе частот $-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}$; для других частот картина будет периодически повторяться. Эта полоса может быть сужена вдвое $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}$, если учесть общее для всех спектров свойство, согласно которому значение спектра для отрицательной частоты может быть получено из значения спектра для той же (по абсолютной величине) положительной частоты путем сопряжения.

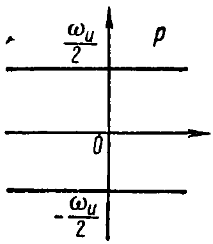


Рис. 12.14

Изображение $X^*(p)$ также периодично в плоскости p вдоль мнимой оси с периодом $\omega_и$. Поэтому при рассмотрении изображений $X^*(p)$ можно ограничиться горизонтальной полосой с шириной $\omega_и$, симметрично расположенной относительно действительной оси (рис. 12.14),

$$-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}. \qquad (12.14)$$

Рассмотрим несколько примеров изображений для простых дискретных сигналов.

Пример 12.2. Дискретный сигнал $x^*(t)$ представляет собой один единичный импульс

$$x^*(t) = \delta(t),$$

такой импульс получается при подаче на вход импульсного звена любого $x(t)$, равного единице при $t = 0$ и равного нулю при $t \geqslant T_и$ (рис. 12.15,*а*) Его изображение

$$X^*(p) = 1. \qquad (12.15)$$

Пример 12.3. Сигнал $x(t)$ представляет собой единичную функцию $1_0(t)$, $x^*(t)$ — дискретную единичную функцию (рис. 12.15,*б*)

$$x^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \delta(t - lT_и). \qquad (12.16)$$

Изображение $X^*(p)$ по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии с первым членом, равным единице, и знаменателем $e^{-pT_и}$ равно

$$X^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{-plT_и} = \frac{1}{1 - e^{-pT_и}} = \frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и} - 1}. \qquad (12.17)$$

Пример 12.4. Сигнал $x(t)$ представляет собой экспоненту $e^{\alpha t}$, $x^*(t)$ — дискретную экспоненту (рис. 12.15,*в*)

$$x^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{\alpha l T_{\text{и}}} \delta(t - lT_{\text{и}}). \tag{12.18}$$

Изображение, аналогично предыдущему,

$$X^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} e^{\alpha l T_{\text{и}}} \cdot e^{-plT_{\text{и}}} =$$

$$= \sum_{l=0}^{\infty} e^{-(p-\alpha) lT_{\text{и}}} = \frac{1}{1 - e^{-(p-\alpha)T_{\text{и}}}} =$$

$$= \frac{e^{pT_{\text{и}}}}{e^{pT_{\text{и}}} - e^{\alpha T_{\text{и}}}}. \tag{12.19}$$

В частном случае при $\alpha = j\omega$ (гармонический сигнал, мнимая часть которого показана на рис. 12. 15, *г*)

$$X^*(p) = \frac{e^{pT_{\text{и}}}}{e^{pT_{\text{и}}} - e^{j\omega T_{\text{и}}}}. \tag{12.20}$$

В табл. 12.2 даны изображения $X^*(p)$ для $x^*(t)$, получающихся при подаче на вход импульсного звена сигналов $x(t)$, описываемых некоторыми часто встречающимися функциями. Там же приведены изображения $X(p)$.

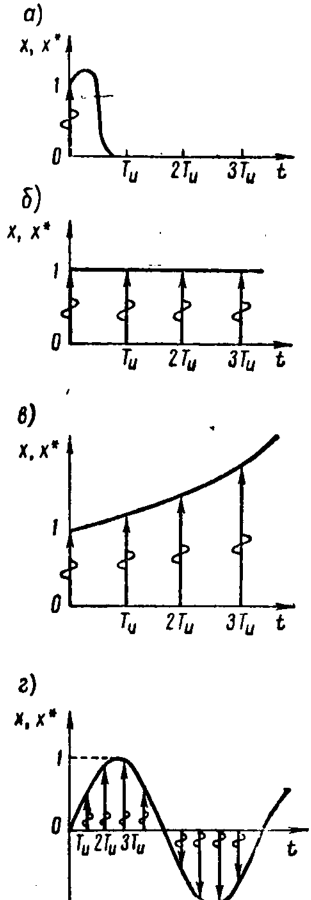


Рис. 12.15

Связь между спектрами и изображениями дискретных и непрерывных сигналов. Найдем связь между спектрами дискретного сигнала $x^*(t)$ на выходе импульсного звена и сигнала $x(t)$ на его входе. Для этого рассмотрим периодическую функцию, образованную повторяющимися через $T_{\text{и}}$ во всем интервале времени $-\infty < t < \infty$ единичными импульсами (рис. 12.16). Эта функция может быть представлена рядом Фурье в комплексной форме

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_{\text{и}}) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_r e^{jr\omega_{\text{и}} t}, \tag{12.21}$$

где

$$\omega_{\text{и}} = \frac{2\pi}{T_{\text{и}}}, \tag{12.22}$$

Таблица. 12.2

№ п/п	$x(t)$ при $t \geqslant 0$	$X(p)$	$X^*(p)$
1	$1_0(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и}-1}$
2	t	$\frac{1}{p^2}$	$T_и \frac{e^{pT_и}}{\left(e^{pT_и}-1\right)^2}$
3	$\frac{1}{2} t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T_и^2}{2} \frac{e^{pT_и}\left(e^{pT_и}+1\right)}{\left(e^{pT_и}-1\right)^3}$
4	$\frac{1}{3!} t^3$	$\frac{1}{p^4}$	$\frac{T_и^3}{2} \frac{e^{pT_и}\left(e^{pT_и}+1\right)}{\left(e^{pT_и}-1\right)^4} + \frac{T_и^3}{6} \frac{e^{pT_и}\left(e^{pT_и}+2\right)}{\left(e^{pT_и}-1\right)^3}$
5	$\frac{1}{n!} t^n$	$\frac{1}{p^n}$	$\frac{T_и^n e^{pT_и}}{\left(e^{pT_и}-1\right)^{n+1}} R_n^*(p)$, где $R_n^*(p) = \begin{vmatrix} 1 & 1-e^{pT_и} & 0 & \vdots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1-e^{pT_и} & \vdots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \vdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \\ \frac{1}{n!} & \frac{1}{(n-1)!} & \frac{1}{(n-2)!} & \vdots & 1 \end{vmatrix}$
6	$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и}-e^{\alpha T_и}}$
7	$te^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(p+\alpha)^2}$	$T_и \frac{e^{-\alpha T_и} \cdot e^{pT_и}}{\left(e^{pT_и}-e^{-\alpha T_и}\right)^2}$
8	$\frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha}$	$\frac{1}{p(p+\alpha)}$	$\frac{\left(1-e^{-\alpha T_и}\right) e^{pT_и}}{\alpha\left(e^{pT_и}-1\right)\left(e^{pT_и}-e^{\alpha T_и}\right)}$

№ п/п	$x(t)$ при $t > 0$	$X(p)$	$X^*(p)$
9	$\frac{t}{\alpha} - \frac{1-e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$	$\frac{1}{p^2(p+\alpha)}$	$\frac{T_и}{\alpha} \frac{e^{pT_и}}{\left(e^{pT_и}-1\right)^2} - \frac{\left(1-e^{-\alpha T_и}\right)e^{pT_и}}{\alpha^2\left(e^{pT_и}-1\right)\left(e^{pT_и}-e^{-\alpha T_и}\right)}$
10	$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$\frac{\sin \beta T_и e^{pT_и}}{e^{2pT_и} - 2\cos\beta T_и e^{pT_и} + 1}$
11	$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2+\beta^2}$	$\frac{e^{pT_и}\left(e^{pT_и} - \cos\beta T_и\right)}{e^{2pT_и} - 2\cos\beta T_и e^{pT_и} + 1}$
12	$e^{-\alpha t}\sin\beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{e^{-\alpha T_и}\sin\beta T_и e^{-pT_и}}{e^{2pT_и} - 2e^{-\alpha T_и}\cos\beta T_и e^{pT_и} + e^{-2\alpha T_и}}$
13	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\frac{e^{pT_и}\left(e^{pT_и} - e^{-\alpha T_и}\cos\beta T_и\right)}{e^{2pT_и} - 2e^{-\alpha T_и}\cos\beta T_и e^{pT_и} + e^{-2\alpha T_и}}$

и коэффициенты разложения, определяемые по формуле

$$C_r = \frac{1}{T_и}\int_{-\frac{T_и}{2}}^{\frac{T_и}{2}} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_и)\right] e^{-jr\omega_и}\, dt, \tag{12.23}$$

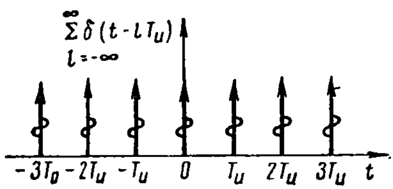


Рис. 12.16

равны $\frac{1}{T_и}$ для любого r. Поэтому

$$\sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_и) = \frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_и t}. \tag{12.24}$$

Дискретный сигнал $x^*(t)$ может быть записан в виде

$$x^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,\delta(t - lT_и) = x(t) \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - lT_и), \quad (12.25)$$

поскольку $x(t) = 0$ при $t < 0$ и $\delta(t - lT_и) = 0$ при $t \neq lT_и$.

После подстановки (12.24) получаем

$$x^*(t) = x(t)\frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_и t}. \quad (12.26)$$

Спектр сигнала $x^*(t)$ выражается следующим образом:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_и}\int_0^{\infty}\Big[x(t)\sum_{r=-\infty}^{\infty} e^{jr\omega_и t}\Big]e^{-j\omega t}\,dt =$$

$$= \frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\int_0^{\infty} x(t)\,e^{-j(\omega - r\omega_и)t}\,dt.$$

Интеграл, стоящий под знаком суммы,

$$\int_0^{\infty} x(t)\,e^{-j(\omega - r\omega_и)t}\,dt = X[j(\omega - r\omega_и)], \quad (12.27)$$

поэтому

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - r\omega_и)],$$

или, заменяя $-r$ на r и изменяя порядок суммирования, получаем

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + r\omega_и)]. \quad (12.28)$$

Составляющие ряда при $r \neq 0$ называются *транспонированными составляющими*.

Можно показать, что (строго говоря) этот результат справедлив для функций $x(t)$, равных нулю, при $t = 0$. Если же $x(0) \neq 0$, то сумма, стоящая в правой части, должна быть дополнена членом $\frac{1}{2}x(0)$, т. е.

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X[j(\omega + r\omega_и)] + \frac{1}{2}x(0). \quad (12.29)$$

Аналогичные выражения для изображений имеют вид: при $x(0) = 0$

$$X^*(p) = \frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} X(p + jr\omega_и), \quad (12.30)$$

при $x(0) \neq 0$

$$X^*(p) = \frac{1}{T_и} \sum_{r=-\infty}^{\infty} X(p + jr\omega_и) + \frac{1}{2} x(0). \qquad (12.31)$$

Основное значение формул, связывающих спектры и изображения дискретных и непрерывных сигналов состоит не столько в том, что они дают дополнительный путь для вычисления $X^*(j\omega)$ и $X^*(p)$, сколько в наглядном истолковании явлений, происходящих в импульсных системах. На рис. 12. 17 показаны действительные и мнимые составляющие спектров $\frac{1}{T_и} X(j\omega)$ и $X^*(j\omega)$, причем последние получены путем суммирования транспонированных на $r\omega_и$ $(-\infty < r < \infty)$ составляющих спектра $\frac{1}{T_и} X(j\omega)$. В результате спектр $X^*(j\omega)$ оказывается периодическим по оси частот с периодом $\omega_и$, что было отмечено выше. Спектр $X^*(j\omega)$ отличается от $\frac{1}{T_и} X(j\omega)$ не только на высоких частотах, но, в общем случае, и на низких частотах в интервале $-\frac{\omega_и}{2} < \omega \ll \frac{\omega_и}{2}$ из-за добавления высокочастотных «хвостов» транспонированных составляющих. Последнее обстоятельство связано с так называемым *стробоскопическим эффектом* и может стать более понятным, если рассмотреть две гармонические составляющие сигнала $x(t)(-\infty < t < \infty)$:

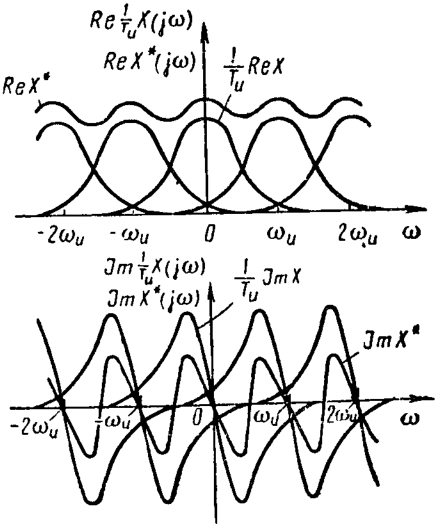


Рис. 12.17

$$x_1(t) = e^{j(\omega t + \varphi)} \quad \text{и} \quad x_2(t) = e^{j[(\omega + r\omega_и)t + \varphi]},$$

где r — целое число.

В моменты съема $t = lT_и$ обе составляющие имеют одинаковые значения (рис. 12.18):

$$x_1(lT_и) = e^{j(\omega l T_и + \varphi)},$$

$$x_2(lT_и) = e^{j[(\omega + r\omega_и) l T_и + \varphi]} = e^{j(\omega l T_и + \varphi)} e^{jrl2\pi} = e^{j(\omega l T_и + \varphi)} = x_1(lT_и).$$

Следовательно, $x_1(t)$ и $x_2(t)$ дадут одинаковые дискретные составляющие на выходе импульсного звена, в результате чего низкочастотная и высокочастотная составляющие сигнала $x(t)$ окажут одинаковое влияние на поведение импульсной системы.

Как было замечено ранее и как это следует также из (12.31), изображение дискретного сигнала $X^*(p)$ периодично в плоскости p вдоль мнимой оси. Поэтому, если $X^*(p)$ имеет особые точки (полюсы), то они периодически повторяются в вертикальном направлении (рис. 12.19) и число их бесконечно.

Рассмотрим число полюсов изображения $X^*(p)$ в горизонтальной полосе $-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$. Согласно (12.31), полюсами $X^*(p)$ являются, прежде всего, полюсы $X(p)$ из этой же полосы (за счет слагаемого при $r = 0$). Все остальные полюсы $X(p)$ из других частей плоскости p также попадают в эту

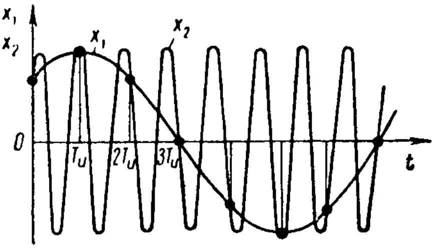


Рис. 12.18

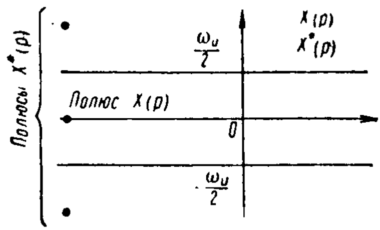


Рис. 12.19

полосу (за счет остальных слагаемых). Таким образом, общее число полюсов в рассматриваемой полосе, с учетом их кратности, равно полному числу полюсов изображения $X(p)$.

Исключение может составить случай, когда два или большее число полюсов $X(p)$ лежат на прямой, параллельной мнимой оси, и отличаются своими мнимыми частями на $jk\omega_и$, где k—целое число. В $X^*(p)$ эти полюсы могут взаимно скомпенсироваться при суммировании транспонированных составляющих в (12.31). Например, непрерывному сигналу $x(t) = \sin\omega_и t$ соответствует изображение $X(p) = \frac{\omega_и}{p^2 + \omega_и^2}$, которое имеет два полюса— $j\omega_и$ и $-j\omega_и$. Дискретные значения сигнала в моменты съема $x(lT_и) = \sin\omega_и lT_и$ равны нулю, поэтому $X^*(p) = 0$, и, следовательно, $X^*(p)$ не имеет полюсов.

Восстановление непрерывного сигнала из дискретного. Из-за искажения $X^*(j\omega)$ на низких частотах высокочастотными «хвостами» в общем случае невозможно восстановить исходный сигнал $x(t)$ из $x^*(t)$, даже если поставить фильтр низких частот, обрезающий периодический спектр $X^*(j\omega)$ на высоких частотах. Это связано с тем, что для модуляции последовательности импульсов используются лишь дискретные значения сигнала x, характер же изменения сигнала между моментами съема не учитывается, в результате чего часть информации о сигнале теряется.

Можно, однако, указать условия, при выполнении которых потери информации не происходит. Если спектр сигнала $x(t)$

ограничен частотой $\omega_{гр}$ и частота импульсного элемента взята достаточно большой, так что

$$\omega_и \gg 2\omega_{гр}, \tag{12.32}$$

то, как это видно из рис. 12.20, транспонированные составляющие спектра $X^*(j\omega)$ не перекрываются, в результате чего в диапазоне частот $-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ спектры $X^*(j\omega)$ и $\frac{1}{T_и}X(j\omega)$ совпадают. Если поставить идеальный фильтр низких частот с единичным коэффициентом усиления и равномерным пропусканием в полосе $-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}$, то на его выходе будет получен восстановленный сигнал $\frac{1}{T_и}x(t)$.

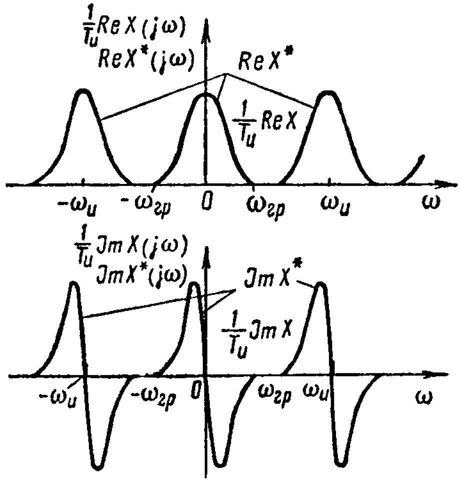


Рис. 12.20

Этот результат сформулирован в известной *импульсной теореме — теореме Котельникова.*

Можно получить формулу, которая в случае выполнения условий импульсной теоремы ($\omega_и \gg 2\omega_{гр}$), позволяет вычислить $x(t)$ по дискретным значениям $x(lT_и)$. Применяя обратное преобразование Фурье, напишем

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{12.33}$$

Поскольку $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_{гр}$, причем $\omega_{гр} \leqslant \frac{\omega_и}{2}$, то пределы в интеграле можно заменить

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\omega_и}{2}}^{\frac{\omega_и}{2}} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega. \tag{12.34}$$

Спектр $X(j\omega)$ совпадает со спектром $T_и X^*(j\omega)$ в интервале интегрирования

$$-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}:$$

$$X(j\omega) = T_и X^*(j\omega) = T_и \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\, e^{-j\omega l T_и}, \tag{12.35}$$

поэтому

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\omega_и}{2}}^{\frac{\omega_и}{2}} T_и\left[\sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,e^{-j\omega lT_и}\right]e^{j\omega t}\,d\omega=$$

$$=\frac{T_и}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\int\limits_{-\frac{\omega_и}{2}}^{\frac{\omega_и}{2}} e^{j\omega(t-lT_и)}\,d\omega. \qquad (12.36)$$

Интеграл внутри знака суммы

$$\int\limits_{-\frac{\omega_и}{2}}^{\frac{\omega_и}{2}} e^{j\omega(t-lT_и)}\,d\omega=\frac{e^{j\omega(t-lT_и)}\Big|_{-\frac{\omega_и}{2}}^{\frac{\omega_и}{2}}}{j(t-lT_и)}=\frac{2\sin\left[\frac{\omega_и}{2}(t-lT_и)\right]}{t-lT_и}. \qquad (12.37)$$

Отсюда окончательно получаем

$$x(t)=\frac{T_и}{\pi}\sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,\frac{\sin\left[\frac{\omega_и}{2}(t-lT_и)\right]}{t-lT_и}. \qquad (12.38)$$

Изображения дискретных сигналов при дробно-рациональных $X(p)$ и при наличии запаздывания. Возвращаясь к связи между спектрами и изображениями непрерывных и дискретных сигналов $x(t)$ и $x^*(t)$, рассмотрим случай, когда изображение непрерывной функции $x(t)$ на входе импульсного звена является дробно-рациональной функцией p

$$X(p)=\frac{B(p)}{A(p)}, \qquad (12.39)$$

при этом порядок знаменателя n больше порядка числителя m и полином в знаменателе $A(p)$ не имеет кратных корней. Если корни этого полинома P_ν известны, то $X(p)$ может быть представлено в виде суммы простых дробей

$$X(p)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{B(p_\nu)}{\dot A(p_\nu)}\,\frac{1}{p-p_\nu}, \qquad (12.40)$$

где $\dot A(p)=\frac{dA(p)}{dp}$.

Это соответствует тому, что сигнал $x(t)$ может быть представлен в виде линейной комбинации экспоненциальных сигналов.

Пользуясь результатом, полученным в примере 12.4, имеем

$$X^*(p)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{B(p_\nu)}{\dot A(p_\nu)}\,\frac{e^{pT_\text{и}}}{e^{pT_\text{и}}-e^{p_\nu T_\text{и}}}. \tag{12.41}$$

Аналогичная формула может быть получена для кратных корней $A(p)$; здесь она не приводится ввиду громоздкости. При рассмотрении конкретных случаев можно избавиться от кратных корней, например, путем малых добавок к корням. После этого можно найти изображение $X^*(p)$ по формуле (12.41) и далее совершить предельный переход, устремляя добавки к нулю. Возможны и другие способы получения $X^*(p)$ при кратных корнях; один из них будет рассмотрен в примере 13.2 (§ 13.2).

Из выражения (12.41) следует, что для дробно-рациональных $X(p)$ изображение $X^*(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию относительно $e^{pT_\text{и}}$, которая в дальнейшем будет обозначаться как

$$X^*(p)=\frac{B^*(p)}{A^*(p)}, \tag{12.42}$$

где

$$A^*(p)=a_ne^{npT_\text{и}}+a_{n-1}e^{(n-1)pT_\text{и}}+\ldots+a_0, \tag{12.43}$$

$$B^*(p)=b_me^{mpT_\text{и}}+b\,e^{(m-1)pT_\text{и}}_{m-1}+\ldots+b_0. \tag{12.44}$$

Степень n полиномов $A^*(p)$ и $A(p)$ одинакова.

Пример 12.5. Изображение непрерывного сигнала

$$X(p)=\frac{k}{p(1+pT)},$$

что соответствует $X(t)=k(1-e^{-\frac{t}{T}})$. Найдем $X^*(p)$.

Корни знаменателя $p_1=0$, $p_2=-\frac{1}{T}$.

Пользуясь (12.41), можно написать

$$X^*(p)=k\left(\frac{e^{pT_\text{и}}}{e^{pT_\text{и}}-1}-\frac{e^{pT_\text{и}}}{e^{pT_\text{и}}-e^{-\frac{T_\text{и}}{T}}}\right)=$$

$$=\frac{k(1-e^{-\frac{T_\text{и}}{T}})e^{pT_\text{и}}}{(e^{pT_\text{и}}-1)(e^{pT_\text{и}}-e^{-\frac{T_\text{и}}{T}})}. \tag{12.45}$$

Рассмотрим изображение дискретного сигнала $x^*_\tau(t)$, получающегося при подаче на вход импульсного звена запаздывающего сигнала $x(t-\tau)\cdot 1_0(t-\tau)$ (рис. 12.21). Запаздывание τ заключено в интервале $(k-1)T_\text{и}<\tau\leqslant kT_\text{и}$.

В этом случае

$$x_\tau^*(t) = \sum_{l=k}^{\infty} x(lT_и - \tau)\,\delta(t - lT_и), \qquad (12.46)$$

$$X_\tau^*(p) = \sum_{l=k}^{\infty} x(lT_и - \tau)\,e^{-plT_и}, \qquad (12.47)$$

так как съемы попрежнему происходят в моменты $lT_и$.

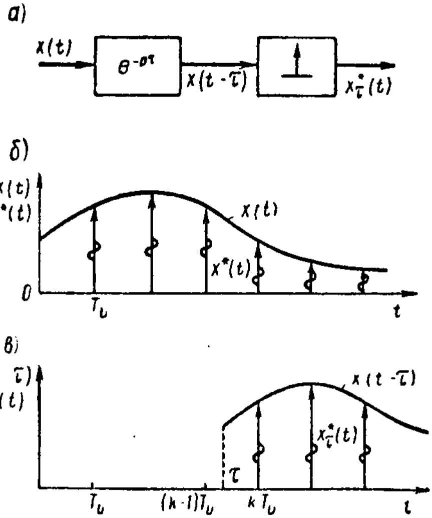


Рис. 12.21

Если запаздывание равно целому числу периодов $\tau = kT_и$, то

$$X_\tau^*(p) = \sum_{l=k}^{\infty} x[(l-k)T_и]\,e^{-plT_и}.$$

Заменяя $(l-k)$ через l, получаем

$$X_\tau^*(p) = e^{-kpT_и}\sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,e^{-plT_и} = e^{-kpT_и}X^*(p). \qquad (12.48)$$

Пример 12.6. Сигнал $x(t)$ представляет собой экспоненту $e^{\alpha t}$, имеющую изображение

$$X(p) = \frac{1}{p-\alpha}.$$

Запаздывающий сигнал $x(t-\tau)\,1_0(t-\tau)$ имеет изображение

$$X_\tau(p) = \frac{1}{p-\alpha}\,e^{-p\tau},$$

Изображение $X_\tau^*(p) = \sum_{l=k}^{\infty} e^{\alpha(lT_и-\tau)}e^{-plT_и}$ согласно (12.47).

Последнее выражение представляет собой сумму геометрической прогрессии с первым членом $e^{\alpha(kT_и-\tau)}e^{-pkT_и}$ и знаменателем $e^{\alpha T_и}e^{-pT_и}$

$$X_\tau^*(p) = \frac{e^{\alpha(kT_и-\tau)}}{e^{kpT_и}}\cdot\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и}-e^{\alpha T_и}} = \frac{e^{\alpha(kT_и-\tau)}}{e^{kpT_и}}X^*(p), \qquad (12.49)$$

где $X^*(p)$ — изображение дискретного экспоненциального сигнала без запаздывания (12.19).

При $\tau = kT_и$

$$X_\tau^*(p) = e^{-kpT_и}X^*(p),$$

что соответствует (12.48).

Пример 12.7. Незадержанный сигнал представляет собой линейную комбинацию экспоненциальных сигналов, и его изображение является дробно-рациональной функцией

$$X(p) = \frac{B(p)}{A(p)} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B(p_\nu)}{\dot{A}(p_\nu)} \frac{1}{p - p_\nu}.$$

Изображение задержанного сигнала

$$X_\tau(p) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B(p_\nu)}{\dot{A}(p_\nu)} \frac{1}{p - p_\nu} e^{-p\tau}.$$

Изображение дискретного задержанного сигнала с учетом (12.49)

$$X_\tau^*(p) = \frac{1}{e^{kpT_и}} \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B(p_\nu)}{\dot{A}(p_\nu)} e^{p_\nu(kT_и - \tau)} \frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и} - e^{p_\nu T_и}}. \qquad (12.50)$$

Отсюда видно, что изображение дискретного запаздывающего сигнала в этом случае представляет собой дробно-рациональную функцию от $e^{pT_и}$, причем ее знаменатель отличается от знаменателя изображения дискретного сигнала без запаздывания (12.41) лишь множителем $e^{kpT_и}$

$$X_\tau^*(p) = \frac{B_\tau^*(p)}{e^{kpT_и} A^*(p)}. \qquad (12.51)$$

Таблицы для изображений дискретных сигналов $x_\tau^*(t)$, полученных после запаздывающего звена, помещены, например в [Л. 17].

§ 12.4. ФОРМУЛЫ ОБРАЩЕНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СИГНАЛОВ

При исследовании импульсных систем автоматического регулирования может быть поставлена обратная задача нахождения оригинала x^* дискретного сигнала по его изображению X^*. Поскольку сигнал $x^*(t)$ существует лишь в дискретные моменты времени (моменты съема), то задача сводится к определению дискретных значений $x(lT_и)(l = 0, 1, 2, \ldots)$, которые равняются площадям импульсов сигнала $x^*(t)$ в соответствующие моменты съема. При достаточно большой частоте квантования дискретные значения $x(lT_и)$ могут давать достаточно полную характеристику непрерывного сигнала $x(t)$. При выполнении условий импульсной теоремы $x(t)$ может быть целиком восстановлен по дискретным значениям $x(lT_и)$.

Пусть все особые точки изображения $X^*(p)$ в полосе шириной $\omega_и$ лежат левее отрезка L прямой, параллельной мнимой оси (рис. 12.22,*a*). Умножим обе части выражения

$$X^*(p) = \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и) e^{-plT_и}$$

на $e^{pmT_и}$ (m — целое число) и проинтегрируем их вдоль отрезка L от $c-j\frac{\omega_и}{2}$ до $c+j\frac{\omega_и}{2}$

$$\int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} X^*(p)\,e^{pmT_и}dp = \int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} \left[\sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и)\,e^{-plT_и}\right] e^{pmT_и}dp =$$

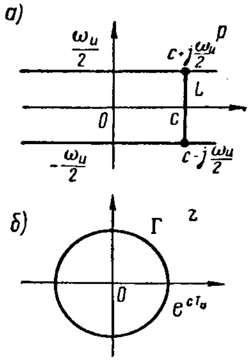


Рис. 12.22

$$= \sum_{l=0}^{\infty} x(lT_и) \int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} e^{-p(l-m)T_и}dp. \qquad (12.52)$$

Перестановка операций интегрирования и суммирования законна, так как все особые точки $X^*(p)$ лежат левее отрезка интегрирования. Рассмотрим интеграл, стоящий под знаком суммы. Если $l \neq m$, то

$$\int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} e^{-p(l-m)T_и}\,dp =$$

$$= -\frac{e^{-p(l-m)T_и}\Big|_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}}}{(l-m)T_и} = \frac{e^{-c(l-m)T_и}}{(l-m)\,T_и} \times$$

$$\times \left[e^{j(l-m)\pi} - e^{-j(l-m)\pi}\right] = 0.$$

Если $l = m$, то

$$\int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} dp = j\omega_и.$$

Поэтому из (12.52) получаем

$$\int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} X^*(p)\,e^{pmT_и}dp = x(mT_и)j\omega_и$$

или, заменяя m на l и $\omega_и$ на $\frac{2\pi}{T_и}$, имеем

$$x(lT_и) = \frac{T_и}{2\pi j} \int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} X^*(p)\, e^{plT_и} dp. \tag{12.53}$$

Эта формула аналогична обычной формуле обращения для непрерывных сигналов в преобразовании Лапласа.

Она может быть записана иным образом. Заменим переменные

$$z = e^{pT_и},$$
$$X^*(p) = X^*\left(\frac{1}{T_и} \ln z\right) = X(z),$$
$$dz = T_и e^{pT_и} dp.$$

Тогда интеграл (12.53) преобразуется к виду

$$x(lT_и) = \frac{1}{2\pi j} \oint\limits_{\Gamma} X(z)\, z^{l-1} dz. \tag{12.54}$$

Путь интегрирования L в плоскости p преобразуется в окружность радиуса $e^{cT_и}$ в плоскости z (рис. 12.22, *б*), а левая часть полосы $\operatorname{Re} p \leqslant c$; $-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ — во внутренность круга Г. Полюсы p_ν функции $X^*(p)$, лежащие в левой половине полосы, преобразуются в полюсы z_ν функции $X(z)$, лежащие внутри круга Г.

На основании теоремы о вычетах имеем

$$\oint_\Gamma X(z)\, z^{l-1} dz = 2\pi j \sum_\nu \operatorname{Res}_{z_\nu} [X(z)\, z^{l-1}], \tag{12.55}$$

где $\operatorname{Res}_{z_\nu} [X(z)\, z^{l-1}]$ — вычет функции $X(z)\, z^{l-1}$ в полюсе z_ν. Переходя в последнем выражении обратно к переменной p и подставляя в (12.49), получаем

$$x(lT_и) = \sum_\nu \operatorname{Res}_{e^{p_\nu T_и}} [X^*(p)\, e^{p(l-1)T_и}]. \tag{12.56}$$

В частном случае, когда $X^*(p)$ — дробно-рациональная функция $e^{pT_и}$,

$$X^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)} = \frac{b_m e^{mpT_и} + b_{m-1} e^{(m-1)pT_и} + \ldots + b_0}{a_n e^{npT_и} + a_{n-1} e^{(n-1)pT_и} + \ldots + a_0},$$

причем $m < n$ и корни знаменателя $A^*(p)$ — простые, формула (12.56) принимает вид

$$x(lT_и) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B^*(p_\nu)}{\dot{A}^*(p_\nu)} e^{p_\nu (l-1)T_и} = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B^*(p_\nu)}{e^{p_\nu T_и} \dot{A}^*(p_\nu)} e^{p_\nu l T_и}. \tag{12.57}$$

Здесь

$$\dot{A}^*(p) = \frac{dA^*(p)}{d(e^{pT_и})},$$

p_ν — корни знаменателя $A^*(p)$ в полуполосе $\operatorname{Re} p \leqslant c$, $-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ (их число равно n).

Выражение 12.57 является аналогом известной формулы разложения для непрерывных функций. Подобная, но более громоздкая формула может быть получена для кратных корней $A^*(p)$.

Формулы обращения (12.53) и (12.57) позволяют найти лишь дискретные значения сигнала x на входе импульсного звена; значения этого сигнала в интервалах между моментами съема могут быть получены по найденным $x(lT_и)$ лишь в случае выполнения условия импульсной теоремы. Таким образом, если, например, с помощью формулы обращения получен результат

$$x(lT_и) = lT_и,$$

то было бы неправильным написать, что

$$x(t) = t,$$

поскольку линейный закон изменения дискретных значений может быть получен не только при линейном сигнале $x(t)$, но и при других сигналах.

Это замечание следует учитывать также при обратном использовании табл. 12.2, когда по известному изображению $X^*(p)$ отыскивается оригинал. В функции $x(t)$, найденной в первом столбце, следует подставлять $t = lT_и$.

Глава XIII

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ. КОМПЛЕКСНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ УСИЛЕНИЯ. ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 13.1. ПРОХОЖДЕНИЕ СИГНАЛОВ ЧЕРЕЗ ИМПУЛЬСНУЮ СИСТЕМУ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Рассмотрим прохождение сигнала $\varepsilon(t)$ через импульсную систему автоматического регулирования, изображенную на рис. 12.8. Найдем спектр выходной величины y, при этом будем считать (для простоты), что $\varepsilon(0)=0$ и в системе имеют место нулевые начальные условия

$$Y(j\omega)=W_{\text{пн}}(j\omega)\,\mathrm{E}^*(j\omega), \tag{13.1}$$

где согласно (12.28)

$$\mathrm{E}^*(j\omega)=\frac{1}{T_{\text{и}}}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}\left[j(\omega+r\omega_{\text{и}})\right]. \tag{13.2}$$

Если выделить в выражении для $Y(j\omega)$ слагаемое, соответствующее $r=0$, то

$$Y(j\omega)=\frac{1}{T_{\text{и}}}W_{\text{пн}}(j\omega)\,\mathrm{E}(j\omega)+\\+\frac{1}{T_{\text{и}}}W_{\text{пн}}(j\omega)\sum_{\substack{r=-\infty\\ r\neq 0}}^{\infty}\mathrm{E}\left[j(\omega+r\omega_{\text{и}})\right]. \tag{13.3}$$

В этом выражении первое слагаемое представляет собой спектр выходного сигнала, который имел бы место в непрерывной системе с частотной характеристикой $\frac{1}{T_{\text{и}}}W_{\text{пн}}(j\omega)$. Второе слагаемое, содержащее сумму транспонированных спектральных составляющих $\mathrm{E}\left[j(\omega-r\omega_{\text{и}})\right]$, отображает влияние импульсного звена. На рис. 13.1 пояснено, как согласно (13.3) изменяется спектр сигнала $\mathrm{E}(j\omega)$ при прохождении через импульсную систему. При этом для наглядности взят случай, когда выполняются условия импульсной теоремы: спектр ограничен частотой $\omega_{\text{гр}}$ и $\omega_{\text{и}}\gg 2\omega_{\text{гр}}$. Наличие импульсного элемента приводит к появлению в спектре выходного сигнала высокочастотных составляющих, которых не было в спектре сигнала $E(j\omega)$. В результате этого в общем случае невозможно связать с помощью комплексного коэффициента усиления спектры сигналов $E(j\omega)$ и $Y(j\omega)$ в импульсной системе, подобно тому как это делается в непрерывных системах [это видно из (13.3)].

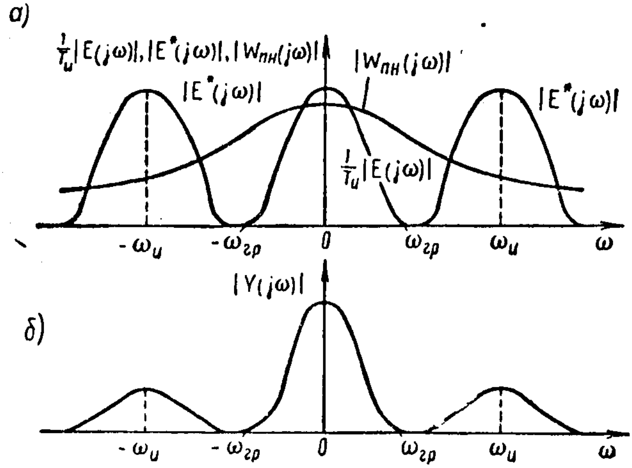


Рис. 13.1

Можно, однако, указать случай, когда такая связь существует (рис. 13.2). На этом рисунке показаны спектр сигнала $E(j\omega)$, ограниченный частотой $\omega_{гр}$, и частотная характеристика $W_{пн}$, ограниченная частотой $\omega_{гр1}$, причем $\omega_и \gg \omega_{гр} + \omega_{гр1}$.

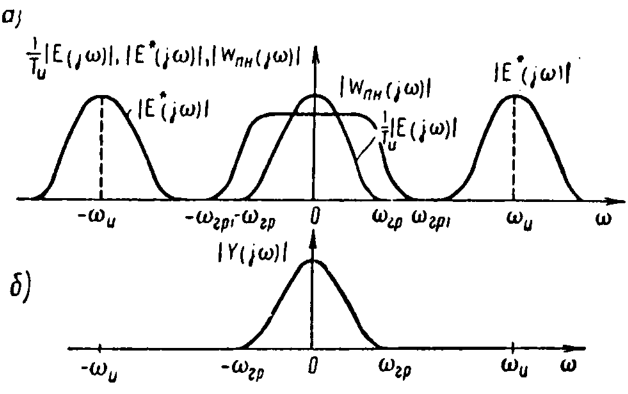


Рис. 13.2

В результате в выражении (13.3) для спектра сохраняется лишь первое слагаемое

$$Y(j\omega)=\frac{1}{T_и} W_{пн}(j\omega)\,\mathrm{E}(j\omega), \qquad (13.4)$$

и импульсная система делается эквивалентной непрерывной системе с комплексным коэффициентом усиления в разомкнутом состоянии $\frac{1}{T_и} W_{пн}(j\omega)$. Таким образом, при увеличении частоты квантования $\omega_и$ свойства импульсной системы автоматического регулирования приближаются $\left(\text{с точностью до множителя } \frac{1}{T_и}\right)$ к свойствам ее приведенной непрерывной части; если же выполнено условие

$$\omega_и \gg \omega_{гр}+\omega_{гр_1}, \qquad (13.5)$$

то их свойства делаются тождественными. На практике часто считают, что это имеет место, если наибольшая постоянная времени непрерывной части системы значительно превышает период работы импульсного звена $T_и$.

Нужно отметить, однако, что некоторое влияние на свойства системы импульсное звено оказывает и при выполнении условия (13.5), поскольку частотная характеристика приведенной непрерывной части зависит от частотной характеристики формирующего звена $W_{пн}(j\omega)=W_ф(j\omega)\,W_н(j\omega)$. Так, например, в цифровой следящей системе (см. § 12.1, пример 12.1) влияние импульсов прямоугольной формы и длительности $T_и$ при выполнении условия (13.5) может быть учтено в области низких частот ($\omega T_и \ll 1$) путем включения звена запаздывания с комплексным коэффициентом усиления

$$W_ф(j\omega)=T_и e^{-j\omega\frac{T_и}{2}}.$$

Выражение для изображения выходной величины в общем случае аналогично (13.1) и (13.2),

$$Y(p)=W_{пн}(p)\,\mathrm{E}^*(p)=\frac{1}{T_и} W_{пн}(p)\sum_{r=-\infty}^{\infty}\mathrm{E}(p+jr\omega_и). \qquad (13.6)$$

§ 13.2. КОМПЛЕКСНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ УСИЛЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ РАЗОМКНУТЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Комплексные коэффициенты усиления разомкнутых импульсных систем. В § 13.1. было установлено, что в общем случае отсутствует пропорциональная связь между спектрами и изображениями сигнала $\varepsilon(t)$ импульсной системы автоматического регулирования и ее выходного сигнала $y(t)$. Оказывается, однако, что такая связь существует между спектрами и изображениями дискретных сигналов $\varepsilon^*(t)$

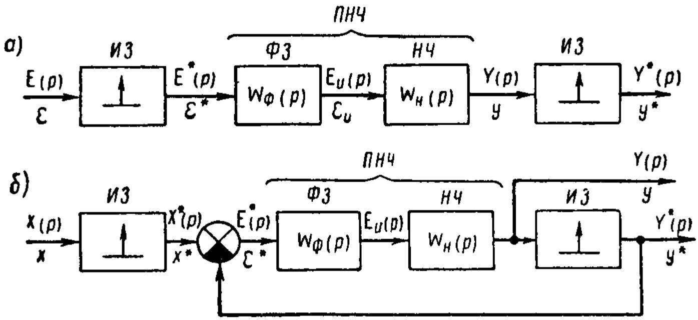


Рис. 13.3

и $y^*(t)$. Последний сигнал получается из $y(t)$ при пропускании его через простейшее импульсное звено, как это показано на рис. 13.3, *а*.

Целесообразность отыскания такой связи следует из возможности представления эквивалентной схемы импульсной системы автоматического регулирования, приведенной на рис. 12.8, в виде, показанном на рис. 13.3, *б*. Такое преобразование схем вытекает из очевидного соотношения

$$\varepsilon^* = (x - y)^* = x^* - y^*. \qquad (13.7)$$

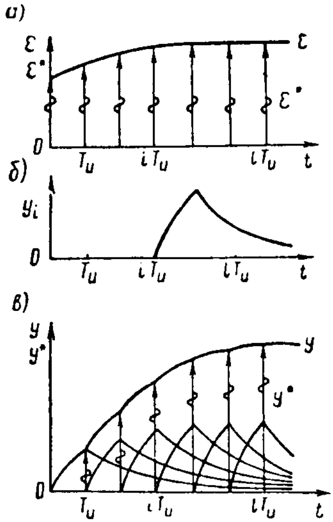


Рис. 13.4

Для нахождения этой связи рассмотрим сигналы $y(t)$ и $y^*(t)$. Сигнал $y(t)$ при нулевых начальных условиях складывается из реакций приведенной непрерывной части системы на импульсы $\varepsilon^*(t)$ (рис. 13.4, *а*). Реакция системы на импульс, действующий в i-й момент съема и имеющий площадь $\varepsilon(iT_и)$, показана на рис. 13.4, *б*

$$y_i(t) = \varepsilon(iT_и)\, w_{пн}(t - iT_и), \quad t \gg iT_и, \qquad (13.8)$$

где $w_{пн}(t)$ — весовая функция приведенной непрерывной части.

Полный выходной сигнал системы $y(t)$, получаемый путем суммирования составляющих $y_i(t)$, показан на рис. 13.4, *в*;

для $lT_и \leqslant t < (l+1)T_и$

$$y(t) = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon(iT_и)\, w_{пн}(t - iT_и), \tag{13.9}$$

где l — целая часть $\frac{t}{T_и}$.

Дискретное значение $y(lT_и)$ получается из (13.9) при подстановке $t = lT_и$

$$y(lT_и) = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon(iT_и)\, w_{пн}[(l-i)T_и]. \tag{13.10}$$

Весовая функция $w_{пн}(t)$, являясь реакцией приведенной непрерывной части на единичный импульс $\delta(t)$, представляет собой, по существу, реакцию непрерывной части на один импульс $s(t)$, в который трансформируется единичный импульс при прохождении через формирующее звено.

Сигнал $y^*(t)$ получается из $y(t)$ путем квантования по времени

$$y^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} y(lT_и)\, \delta(t - lT_и) \tag{13.11}$$

или после подстановки выражения (13.10)

$$y^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{l} \varepsilon(iT_и)\, w_{пн}[(l-i)T_и] \right\} \delta(t - lT_и). \tag{13.12}$$

Поскольку весовая функция $w_{пн}(t)$ при $t < 0$ тождественно равна нулю, то вместо l в верхнем пределе внутренней суммы можно поставить ∞

$$y^*(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(iT_и)\, w_{пн}[(l-i)T_и] \right\} \delta(t - lT_и). \tag{13.13}$$

Изменяя порядок суммирования, получаем

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(iT_и) \left\{ \sum_{l=0}^{\infty} w_{пн}[(l-i)T_и]\, \delta(t - lT_и) \right\}. \tag{13.14}$$

Полагая $l - i = k$, можно написать

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(iT_и) \left\{ \sum_{k=-i}^{\infty} w_{пн}(kT_и)\, \delta[t - (i+k)T_и] \right\} \tag{13.15}$$

или, учитывая, что $w_{пн}(t) = 0$ при $t < 0$,

$$y^*(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(iT_и) \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} w_{пн}(kT_и)\, \delta[t - (i+k)T_и] \right\}. \tag{13.16}$$

Найдем спектр сигнала $y^*(t)$ с помощью преобразования Фурье. Спектр сигнала $\delta[t-(i+k)T_и] = e^{-j\omega(i+k)T_и}$, поэтому

$$Y^*(j\omega) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(iT_и)\left\{\sum_{k=0}^{\infty} w_{пн}(kT_и)\, e^{-j\omega(i+k)T_и}\right\} =$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(iT_и)\, e^{-j\omega iT_и} \sum_{k=0}^{\infty} w_{пн}(kT_и)\, e^{-jk\omega T_и}. \qquad (13.17)$$

Первый сомножитель в (13.17) представляет собой спектр $\mathrm{E}^*(j\omega)$, следовательно, можно написать

$$Y^*(j\omega) = W^*_р(j\omega)\,\mathrm{E}^*(j\omega), \qquad (13.18)$$

где коэффициент пропорциональности $W^*_р(j\omega)$, показывающий связь между спектрами $Y^*(j\omega)$ и $\mathrm{E}^*(j\omega)$, называется *комплексным коэффициентом усиления разомкнутой импульсной системы автоматического регулирования*. Этот коэффициент

$$W^*_р(j\omega) = \sum_{k=0}^{\infty} w_{пн}(kT_и)\, e^{-j\omega kT_и}$$

или, если заменить k на l,

$$W^*_р(j\omega) = \sum_{l=0}^{\infty} w_{пн}(lT_и)\, e^{-j\omega lT_и}. \qquad (13.19)$$

Отсюда видно, что комплексный коэффициент усиления $W^*_р(j\omega)$ является спектром сигнала $w^*_{пн}(t)$, который можно представить как результат пропускания сигнала, равного весовой функции приведенной непрерывной части $w_{пн}(t)$, через простейшее импульсное звено. Поэтому $W^*_р(j\omega)$ на основании (12.29) может быть выражена через спектр $W_{пн}(j\omega)$, являющийся комплексным коэффициентом усиления приведенной непрерывной части,

$$W^*_р(j\omega) = \frac{1}{T_и} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{пн}[j(\omega + r\omega_и)] + \frac{1}{2} w_{пн}(0). \qquad (13.20)$$

Если степень знаменателя передаточной функции непрерывной части меньше степени ее числителя, то весовая функция $w_{пн}(t)$, являющаяся реакцией непрерывной части на один импульс $s(t)$ при конечной высоте последнего (оба условия практически всегда имеют место), имеет нулевое значение при $t = 0$, поэтому в дальнейшем будет использоваться упрощенное выражение для $W^*_р(j\omega)$ [см. (12.28)]

$$W^*_р(j\omega) = \frac{1}{T_и} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{пн}[j(\omega + r\omega_и)]. \qquad (13.21)$$

Иногда для упрощения анализа импульсной системы регулирования не учитывают малые параметры в передаточной функции приведенной непрерывной части, в результате чего весовая функция приведенной непрерывной части может оказаться не равной нулю при $t=0$. Чтобы исправить положение, вводят малое запаздывание, и весовую функцию приведенной непрерывной части записывают в виде

$$w_{пн}(t) = w_{пн1}(t-\tau), \tag{13.22}$$

где $w_{пн1}(t)$ — весовая функция с разрывом при $t=0$ ($w_{пн1}(0)\neq 0$);
τ — очень малое запаздывание ($\tau\approx 0$).

Обе весовые функции $w_{пн}(t)$ и $w_{пн1}(t)$ отличаются друг от друга только при $t=0$, поэтому

$$w^*_{пн}(t) = w^*_{пн1}(t) - w_{пн1}(0)\,\delta(t). \tag{13.23}$$

Тогда

$$W^*_{пн}(j\omega) = W^*_{пн1}(j\omega) - w_{пн1}(0) =$$

$$=\left\{\frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{пн1}[j(\omega+r\omega_и)] + \frac{1}{2}w_{пн1}(0)\right\} - w_{пн1}(0) =$$

$$=\frac{1}{T_и}\sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{пн1}[j(\omega+r\omega_и)] - \frac{1}{2}w_{пн1}(0), \tag{13.24}$$

где $W_{пн1}(j\omega)$ — упрощенный комплексный коэффициент усиления приведенной непрерывной части с весовой функцией $w_{пн1}(t)$, не равной 0 при $t=0$.

Комплексный коэффициент усиления $W^*_р(j\omega)$, будучи спектром функции $w^*_{пн}(t)$, обладает всеми свойствами спектров дискретных сигналов, в частности он периодичен по оси частот с периодом $\omega_и$ и его значения для отрицательных частот могут быть получены из значений для положительных частот путем сопряжения. Поэтому амплитудно-фазовые характеристики импульсных систем регулирования рассматриваются лишь в диапазоне частот $-\frac{\omega_и}{2}<\omega\leqslant\frac{\omega_и}{2}$ или даже $0\leqslant\omega\leqslant\frac{\omega_и}{2}$.

Ряд, стоящий в выражении (13.21) для $W^*_р(j\omega)$, сходится тем быстрее, чем сильнее убывает комплексный коэффициент усиления $W_{пн}(j\omega)$ с ростом ω.

В случае быстрого убывания число слагаемых в сумме может быть принято равным двум наибольшим по модулю (для наименьших абсолютных значений частоты), тогда

$$W^*_р(j\omega)\approx\frac{1}{T_и}\left\{W_{пн}(j\omega) + W_{пн}[j(\omega-\omega_и)]\right\}. \tag{13.25}$$

На рис. 13.5 показано графическое построение амплитудно-фазовой характеристики $W^*_р(j\omega)$ на основании последней формулы для двух частот: $\omega=\omega_1$ и $\omega=\frac{\omega_и}{2}$. Вектор, соединяющий начало координат с точкой годографа $\frac{1}{T_и}W_{пн}(j\omega)$, где $\omega=\omega_1$, складывается с вектором, сопряженным вектору, взятому для $\omega=\omega_и-\omega_1$.

$W_р^*(j\omega)$ для частоты $\omega=\frac{\omega_и}{2}$ получается путем сложения вектора $\frac{1}{T_и}W_{пн}\left(j\frac{\omega_и}{2}\right)$ с ему же сопряженным вектором, в результате чего точка амплитудно-фазовой характеристики оказывается на действительной оси.

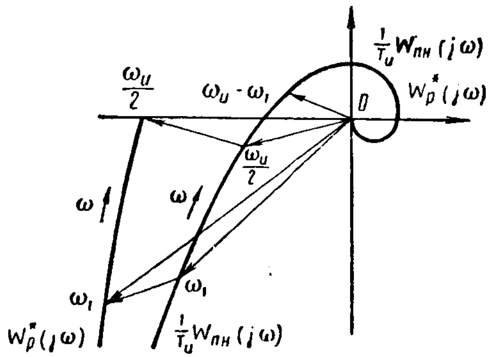


Рис. 13.5

Последний вывод не является следствием того, что вместо точной формулы (13.21) взята приближенная формула (13.25). Действительно, согласно (13.19) при $\omega=\frac{\omega_и}{2}$

$$W_р^*\left(j\frac{\omega_и}{2}\right)=\sum_{l=0}^{\infty}w_{пн}(lT_и)\,e^{-j\frac{\omega_и}{2}lT_и}=$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}w_{пн}(lT_и)\,e^{-j\pi l}=\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\,w_{пн}(lT_и), \qquad (13.26)$$

т. е. $W_р^*\left(j\frac{\omega_и}{2}\right)$ — действительное число.

Если приведенная непрерывная часть имеет ограниченную полосу пропускания $\omega_{гр1}$, причем $\omega_{гр1}\leqslant\frac{\omega_и}{2}$ (т. е. полоса уже половины частоты импульсного звена), то все слагаемые в сумме (13.21), кроме одного (при $r=0$), будут равны 0 и поэтому в полосе частот $-\frac{\omega_и}{2}<\omega\leqslant\frac{\omega_и}{2}$

$$W_р^*(j\omega)=\frac{1}{T_и}W_{пн}(j\omega). \qquad (13.27)$$

Передаточные функции разомкнутых импульсных систем. Рассмотрим изображения сигналов в импульсных системах. Выполнив преобразование Лапласа над сигналом $y^*(t)$ подобно тому, как это было сделано для спектров (13.17), получим

$$Y^*(p) = W^*_{\text{р}}(p)\, \mathrm{E}^*(p), \tag{13.28}$$

$$W^*_{\text{р}}(p) = \sum_{l=0}^{\infty} w_{\text{пн}}(lT_{\text{и}})\, e^{-plT_{\text{и}}}, \tag{13.29}$$

где $W^*_{\text{р}}(p)$ — передаточная функция разомкнутой импульсной системы. Она является изображением сигнала $w^*_{\text{пн}}(t)$ и поэтому для нее могут быть написаны выражения, аналогичные (13.20), (13.21) и (13.24):

при $w_{\text{пн}}(0) \neq 0$

$$W^*_{\text{р}}(p) = \frac{1}{T_{\text{и}}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{\text{пн}}(p + jr\omega_{\text{и}}) + \frac{1}{2} w_{\text{пн}}(0), \tag{13.30}$$

при $w_{\text{пн}}(0) = 0$

$$W^*_{\text{р}}(p) = \frac{1}{T_{\text{и}}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{\text{пн}}(p + jr\omega_{\text{и}}), \tag{13.31}$$

при $w_{\text{пн}}(t) = w_{\text{пн}1}(t - \tau)$, $w_{\text{пн}1}(0) \neq 0$, $\tau \approx 0$

$$W^*_{\text{р}}(p) = \frac{1}{T_{\text{и}}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} W_{\text{пн}1}(p + jr\omega_{\text{и}}) - \frac{1}{2} w_{\text{пн}1}(0). \tag{13.32}$$

Для получения передаточной функции $W^*_{\text{р}}(p)$ по $W_{\text{пн}}(p)$ и $w_{\text{пн}}(t)$ в конкретных случаях можно пользоваться табл. 12.2.

Передаточная функция $W^*_{\text{р}}(p)$ периодична по мнимой оси в плоскости p и поэтому может рассматриваться в полосе шириной $\omega_{\text{и}}$ вокруг действительной оси $-\frac{\omega_{\text{и}}}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_{\text{и}}}{2}$ (см. рис. 12.14).

Если $W_{\text{пн}}(p)$ — дробно-рациональная функция

$$W_{\text{пн}}(p) = \frac{K(p)}{D(p)},$$

что имеет место, когда $W_{\text{ф}}(p) = 1$ (управляющий импульс описывается δ функцией) и $W_{\text{пн}}(p) = W_{\text{н}}(p)$, то для нахождения $W^*_{\text{р}}(p)$ можно воспользоваться формулой (12.41), тогда

$$W^*_{\text{р}}(p) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{K(p_\nu)}{\dot D(p_\nu)} \frac{e^{pT_{\text{и}}}}{e^{pT_{\text{и}}} - e^{p_\nu T_{\text{и}}}}, \tag{13.33}$$

где p_ν — простые корни полинома $D(p)$.

Из (13.33) видно, что передаточная функция $W_p^*(p)$ в этом случае является дробно-рациональной функцией $e^{pT_и}$. Формулой (13.33) можно пользоваться и для нахождения комплексного коэффициента усиления

$$W_p^*(j\omega)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{K(p_\nu)}{\dot{D}(p_\nu)}\frac{e^{j\omega T_и}}{e^{j\omega T_и}-e^{p_\nu T_и}}. \tag{13.34}$$

Можно показать [Л.23], что передаточная функция $W_p^*(p)$ будет являться дробно-рациональной функцией относительно $e^{pT_и}$ при $W_н(p)=\frac{K_н(p)}{D_н(p)}$ и при $W_ф(p)\neq 1$, т. е. при произвольной форме управляющих импульсов. При этом порядок передаточной функции $W_p^*(p)=\frac{K^*(p)}{D^*(p)}$ (степень ее знаменателя $D^*(p)$), независимо от формы управляющих импульсов, равен порядку непрерывной части системы (степени n знаменателя $D_н(p)$ передаточной функции непрерывной части системы). Исключение может возникнуть, если среди полюсов $W_н(p)$ имеются полюса, различающиеся лишь мнимыми частями на $jk\omega_и$ (k — целое число). При этом порядок передаточной функции $W_p^*(p)$ может оказаться меньше n. Практически такие случаи встречаются чрезвычайно редко.

Если высота управляющих импульсов конечна, а степень знаменателя передаточной функции непрерывной части больше степени ее числителя (и то и другое практически всегда имеют место), то степень числителя $K^*(p)$ передаточной функции $W_p^*(p)$ на единицу меньше степени ее знаменателя $D^*(p)$, т. е. равна $n-1$.

Включение запаздывающего звена в непрерывную часть импульсной системы приводит к смещению весовой функции приведенной непрерывной части на время запаздывания τ: $(k-1)T_и<\tau\leqslant kT_и$.

На основании (13.29) и (12.51) передаточная функция разомкнутой импульсной системы с запаздыванием

$$W_{p\tau}^*(p)=\frac{K_\tau^*(p)}{e^{kpT_и}D^*(p)}, \tag{13.35}$$

где $D^*(p)$ — знаменатель передаточной функции системы без запаздывания,

$K_\tau^*(p)$ — полином от $e^{pT_и}$, относительно которого можно показать, что он при тех же условиях, которые отмечались для полинома $K^*(p)$ (т. е. практически всегда), имеет степень n.

На основании (13.29) и (12.44) при запаздывании на целое число периодов $\tau = kT_и$ передаточная функция

$$W^*_{p\tau}(p) = e^{-kpT_и} W^*_р(p) = \frac{K^*(p)}{e^{kpT_и} D^*(p)}, \qquad (13.36)$$

где $W^*_р(p)$ — передаточная функция системы без запаздывания.

Таким образом, импульсные системы автоматического регулирования с сосредоточенными параметрами и с запаздывающими звеньями в непрерывной части описываются передаточными функциями $W^*_р(p)$ или $W^*_{p\tau}(p)$, которые являются дробно-рациональными функциями относительно $e^{pT_и}$; при этом степень знаменателя передаточной функции $W^*_р(p)$ или $W^*_{p\tau}(p)$ практически всегда больше степени ее числителя.

Исходя из понятия передаточной функции, можно дать дополнительное истолкование смысла комплексного коэффициента усиления импульсной системы регулирования. Рассмотрим прохождение через разомкнутую систему, изображенную на рис. 13.3 *а*, гармонического сигнала с фазором $\varepsilon(t) = Ae^{j\omega t}$. Соответствующий дискретный сигнал $\varepsilon^*(t)$ имеет изображение согласно (12.20)

$$\mathrm{E}^*(p) = A\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и} - e^{j\omega T_и}}.$$

Изображение выходного сигнала $y^*(t)$ записывается через передаточную функцию

$$Y^*(p) = W^*_р(p)\,\mathrm{E}^*(p) = W^*_р(p)\,A\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и} - e^{j\omega T_и}}. \qquad (13.37)$$

Дискретные значения выходного сигнала могут быть получены по $Y^*(p)$ согласно (12.56)

$$y(lT_и) = \sum_\nu \mathrm{Res}_{e^{p_\nu T_и}} \left[Y^*(p)\, e^{p(l-1)T_и}\right] =$$

$$= \sum_\nu \mathrm{Res}_{e^{p_\nu T_и}} \left[W^*_р(p)\,A\frac{1}{e^{pT_и} - e^{j\omega T_и}}\, e^{plT_и}\right]. \qquad (13.38)$$

Выделяя из-под знака суммы слагаемое, соответствующее полюсу входного воздействия $p = j\omega$ (считаем для простоты, что $W^*_р(p)$ не имеет полюсов в этой точке), получаем

$$y(lT_и) = W^*_р(j\omega)\,Ae^{j\omega lT_и} +$$

$$+ \sum_{\substack{\nu \\ p_\nu \neq j\omega}} \mathrm{Res}_{e^{p_\nu T_и}} \left[W^*_р(p)\,A\frac{1}{e^{pT_и} - e^{j\omega T_и}}\, e^{plT_и}\right]. \qquad (13.39)$$

Второе слагаемое в последнем выражении представляет собой переходную составляющую. Она стремится к нулю, если разомкнутая импульсная система устойчива (условия устойчивости импульсных систем регулирования будут рассмотрены в гл. XIV). Поэтому установившаяся (или вынужденная) составляющая для дискретных значений выходного сигнала в этом случае представляет собой дискретную гармоническую функцию

$$y_{\text{в}}(lT_{\text{и}}) = W^*_{\text{р}}(j\omega)\,Ae^{j\omega lT_{\text{и}}}. \qquad (13.40)$$

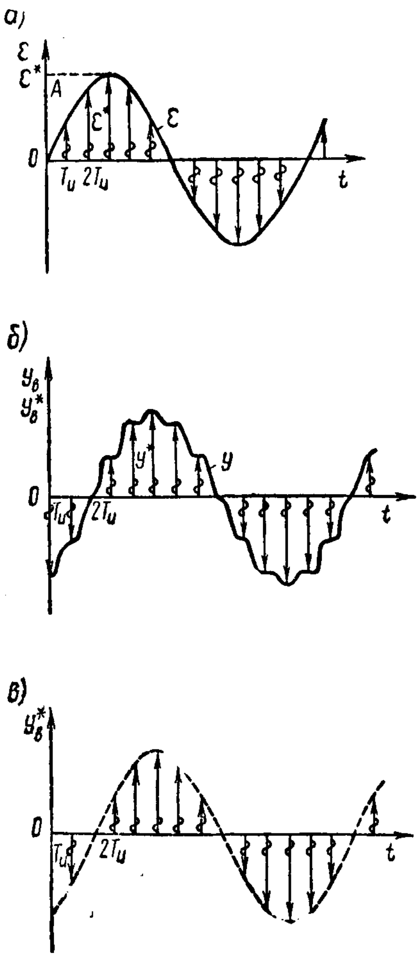


Рис. 13.6

На рис. 13.6, *а* и *б* показаны мнимые составляющие фазоров входного $\varepsilon(t)$ и установившегося выходного $y_{\text{в}}(t)$ сигналов, а также соответствующих им сигналов $\varepsilon^*(t)$ и $y^*_{\text{в}}(t)$.

Хотя выходной сигнал $y_{\text{в}}(t)$ и не является гармоническим, через его дискретные значения в моменты съема можно провести гармоническую огибающую (рис. 13.6, *в*), соотношение амплитуды и фазы которой с амплитудой и фазой входного сигнала определяется комплексным коэффициентом усиления $W^*_{\text{р}}(j\omega)$.

П о л ю с ы п е р е д а т о ч н ы х ф у н к ц и й р а з о м к н у т ы х и м п у л ь с н ы х с и с т е м а в т о м а т и ч е с к о г о р е г у л и р о в а н и я. Рассмотрим полюсы передаточной функции $W^*_{\text{р}}(p)$ разомкнутой импульсной системы автоматического регулирования в полосе $-\frac{\omega_{\text{и}}}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_{\text{и}}}{2}$ (см. рис. 12.14). Как это следует из (13.30) и как это было показано в § 12.3 для изображений сигналов, число полюсов $W^*_{\text{р}}(p)$ в этой полосе равно общему числу полюсов передаточной функции $W^*_{\text{р}}(p)$, при этом полюсы двух этих передаточных функций либо совпадают (для тех полюсов $W_{\text{пн}}(p)$, которые лежат в рассматриваемой полосе), либо отличаются на целое число $j\omega_{и}$ (для полюсов $W_{пи}(p)$, лежащих вне рассматриваемой полосы)*.

Полюсы передаточной функции приведенной непрерывной части $W_{пн}(p) = W_{ф}(p) W_{н}(p)$ в свою очередь являются полюсами передаточной функции непрерывной части системы $W_{н}(p)$. Это следует из того, что передаточная функция формирующего элемента $W_{ф}(p)$, которая согласно (12.3) равна изображению функции $s(t)$, описывающей форму управляющих импульсов, не имеет полюсов при конечной высоте и длительности последних. Таким образом, полюса $W^{*}_{р}(p)$ в рассматриваемой полосе с точностью до $jr\omega_{и}$ (r — целое число) совпадают с полюсами $W_{н}(p)$.

Если знаменатель передаточной функции $W_{н}(p)$ может быть представлен в виде произведения

$$D_{н}(p) = \prod_{\nu=1}^{n} (p - p_{\nu}), \tag{13.40}$$

где p_{ν} — полюсы $W_{н}(p)$, то каждому сомножителю $(p - p_{\nu})$ соответствует сомножитель

$$e^{pT_{и}} - e^{(p_{\nu} - jr\omega_{и})T_{и}} = e^{pT_{и}} - e^{p_{\nu}T_{и} - jr2\pi} \tag{13.41}$$

в знаменателе $D^{*}(p)$ передаточной функции $W^{*}_{р}(p)$.

Инерционному звену, включенному последовательно в непрерывную часть системы, соответствует множитель

$$e^{pT_{и}} - e^{-\frac{T_{и}}{T}}, \tag{13.42}$$

где T — постоянная времени инерционного звена.

Интегрирующему звену соответствует множитель

$$e^{pT_{и}} - 1. \tag{13.43}$$

Последовательному соединению из ν интегрирующих звеньев соответствуют множитель

$$(e^{pT_{и}} - 1)^{\nu}. \tag{13.44}$$

Колебательному звену соответствует произведение двух сомножителей первого порядка

$$\left[e^{pT_{и}} - e^{-\xi\omega_0 T_{и} + j(\omega_0 T_{и}\sqrt{1-\xi^2} - r2\pi)}\right] \times$$
$$\times \left[e^{pT_{и}} - e^{-\xi\omega_0 T_{и} - j(\omega_0 T_{и}\sqrt{1-\xi^2} - r2\pi)}\right] =$$
$$= e^{2pT_{и}} - 2e^{-\xi\omega_0 T_{и}} \cos \omega_0 T_{и} \sqrt{1-\xi^2}\, e^{pT_{и}} + e^{-2\xi\omega_0 T_{и}}, \tag{13.45}$$

где ξ — степень затухания,

ω_0 — резонансная частота колебательного звена.

---

* Исключение может составить случай, отмеченный в § 12.3, который практически встречается очень редко.

Звену с запаздыванием τ при $(k-1)T_и < \tau \leqslant kT_и$ соответствует, как было показано, множитель $e^{kpT_и}$ в $D^*(p)$.

Приведенные соответствия позволяют контролировать правильность знаменателя передаточной функции $W^*_р$ для случаев, когда известны корни полинома $D_н(p)$.

Примеры передаточных функций и комплексных коэффициентов усиления разомкнутых импульсных систем.

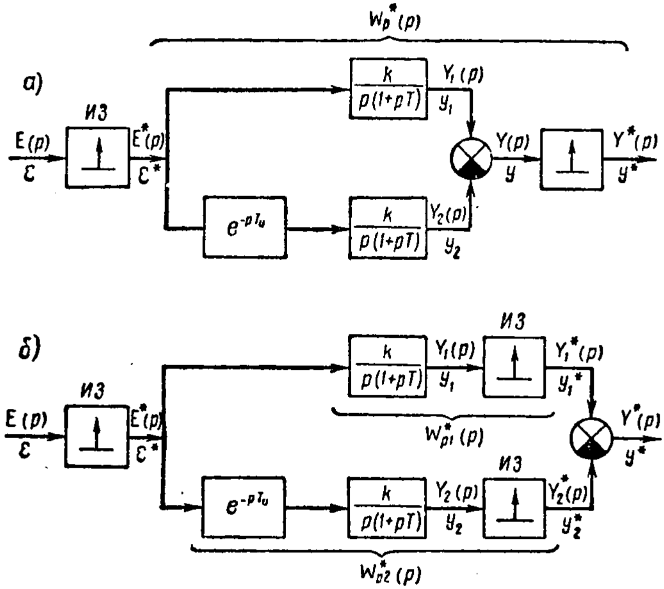


Рис. 13.7

Пример 13.1. Найдем передаточную функцию $W^*_р(p)$ для импульсной системы с прямоугольными импульсами при коэффициенте заполнения, равном единице, и с непрерывной частью, содержащей инерционное звено

$$W_н(p) = \frac{k}{1+pT}.$$

Передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W_{пн}(p) = W_ф(p)\,W_н(p) = \frac{\left(1-e^{-pT_и}\right)}{p}\frac{k}{(1+pT)}. \tag{13.46}$$

Разомкнутая импульсная система может быть изображена эквивалентной схемой на рис. 13.7, *а*, а после очевидного преобразования — на рис. 13.7, *б*. Передаточная функция

$$W^*_р(p) = W^*_{р_1}(p) - W^*_{р_2}(p) = W^*_{р_1}(p) - e^{-pT_и}W^*_{р_1}(p) =$$
$$= \left(1-e^{-pT_и}\right)W^*_{р_1}(p). \tag{13.47}$$

Передаточная функция $W^*_{p_1}(p)$ может быть найдена по (13.33) для

$$W_{пн_1}(p) = \frac{k}{p(1+pT)}.$$

При этом можно воспользоваться результатом (12.45), полученным в примере 12.5, для изображения $X(p) = \frac{k}{p(1+pT)}$. Тогда

$$W^*_{p_1}(p) = \frac{k\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right) e^{pT_и}}{\left(e^{pT_и} - 1\right)\left(e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}.$$

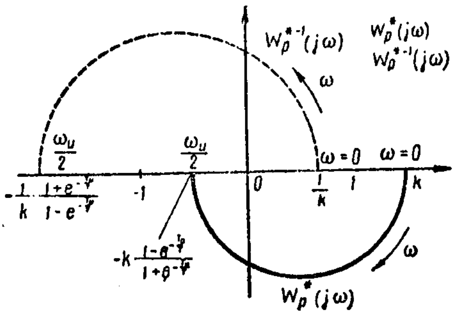


Рис. 13.8

Подставляя $W^*_{p_1}(p)$ в (13.47), получаем

$$W^*_p(p) = \frac{e^{pT_и} - 1}{e^{pT_и}} W^*_{p_1}(p) = \frac{k\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}{e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{13.48}$$

Комплексный коэффициент усиления системы

$$W^*_p(j\omega) = \frac{k\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}{e^{j\omega T_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{13.49}$$

Для построения годографа $W^*_p(j\omega)$ рассмотрим инверсный комплексный коэффициент усиления

$$W^{*-1}_p(j\omega) = \frac{1}{k\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}\left(e^{j\omega T_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}\right). \tag{13.50}$$

Его годографом в интервале $0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ является полуокружность, расположенная в верхней полуплоскости и показанная на рис. 13.8 пунктиром.

Годограф $W^*_p(j\omega)$, получаемый путем инверсии $W^{*-1}_p(j\omega)$, представляет собой также полуокружность, но расположенную в нижней полуплоскости и опирающуюся на действительную ось в точках:

$$\left.\begin{aligned} &k \text{ при } \omega = 0, \\ &-k\frac{1-e^{-\frac{T_и}{T}}}{1+e^{-\frac{T_и}{T}}} \text{ при } \omega = \frac{\omega_и}{2}. \end{aligned}\right\} \tag{13.51}$$

Этот годограф изображен на рис. 13.8 сплошной линией.

Пример 13.2. Найдем передаточную функцию $W_р^*(p)$ для цифровой следящей системы, описанной в § 12.1. Передаточная функция приведенной непрерывной части была найдена для нее в примере 12.1 [см. (12.9)]

$$W_{пн}(p) = W_ф(p)\,W_н(p) = \frac{1-e^{-pT_и}}{p}\cdot\frac{k}{p(1+pT)}.$$

Подобно тому, как это сделано в предыдущем примере, представим $W_р^*(p)$ в виде

$$W_р^*(p) = \left(1-e^{-pT_и}\right)W_{р_1}^*(p),$$

где $W_{р_1}^*(p)$ соответствует передаточной функции

$$W_{пн1}(p) = \frac{k}{p^2(1+pT)}.$$

В отличие от предыдущего примера, здесь нельзя прямо воспользоваться формулой (13.33), поскольку она справедлива для простых корней а в рассматриваемом случае знаменатель $W_{пн1}(p)$ имеет двойной нулевой корень. Выполним разложение $W_{пн1}$ на простые дроби

$$W_{пн1}(p) = \frac{C_1}{p} + \frac{C_2}{p^2} + \frac{C_3}{1+pT} = \frac{(C_1T+C_3)p^2 + (C_1+C_2T)p + C_2}{p^2(1+pT)},$$

откуда, определив коэффициенты $C_1 = -kT$, $C_2 = k$, $C_3 = kT^2$, получим

$$W_{пн1}(p) = k\left(-\frac{T}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{T^2}{1+pT}\right). \tag{13.52}$$

Обращаясь теперь к табл. 12.2 и находя изображения дискретных сигналов, соответствующих слагаемым в 13.52, получаем

$$W_{р_1}^*(p) = k\left[-\frac{Te^{pT_и}}{e^{pT_и}-1} + \frac{T_и e^{pT_и}}{\left(e^{pT_и}-1\right)^2} + \frac{Te^{pT_и}}{e^{pT_и}-e^{-\frac{T_и}{T}}}\right]. \tag{13.53}$$

Отсюда

$$W_р^*(p) = \frac{e^{pT_и}-1}{e^{pT_и}}\,k\left[\frac{-Te^{pT_и}}{e^{pT_и}-1} + \frac{T_и e^{pT_и}}{(e^{pT_и}-1)^2} + \frac{Te^{pT_и}}{e^{pT_и}-e^{-\frac{T_и}{T}}}\right] =$$

$$= k\left[-T + \frac{T_и}{e^{pT_и}-1} + \frac{T\left(e^{pT_и}-1\right)}{e^{pT_и}-e^{-\frac{T_и}{T}}}\right] =$$

$$= k\frac{\left[T_{и} - T\left(1 - e^{-\frac{T_{и}}{T}}\right)\right]e^{pT_{и}} + T\left(1 - e^{-\frac{T_{и}}{T}}\right) - T_{и}e^{-\frac{T_{и}}{T}}}{\left(e^{pT_{и}} - 1\right)\left(e^{pT_{и}} - e^{-\frac{T_{и}}{T}}\right)} \tag{13.54}$$

или

$$W_{р}^{*}(p) = k\frac{\left[T_{и} - T\left(1 - e^{-\frac{T_{и}}{T}}\right)\right]e^{pT_{и}} + T\left(1 - e^{-\frac{T_{и}}{T}}\right) - T_{и}e^{-\frac{T_{и}}{T}}}{e^{2pT_{и}} - \left(1 + e^{-\frac{T_{и}}{T}}\right)e^{pT_{и}} + e^{-\frac{T_{и}}{T}}}. \tag{13.55}$$

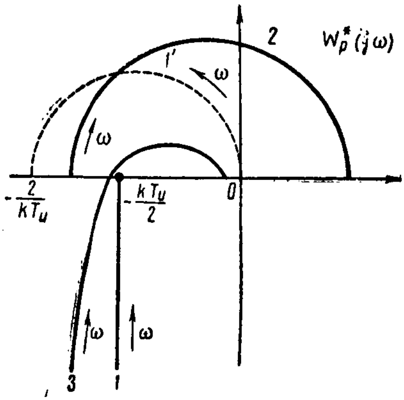


Рис. 13.9

Комплексный коэффициент получаем, подставляя $p = j\omega$ в (13.54), при этом его удобно выразить следующим образом:

$$W_{р}^{*}(j\omega) = k\left[-T + \frac{T_{и}}{e^{j\omega T_{и}} - 1} + \frac{T\left(e^{j\omega T_{и}} - 1\right)}{e^{j\omega T_{и}} - e^{-\frac{T_{и}}{T}}}\right] =$$

$$= \frac{kT_{и}}{e^{j\omega T_{и}} - 1} - \frac{kT\left(1 - e^{-\frac{T_{и}}{T}}\right)}{e^{j\omega T_{и}} - e^{-\frac{T_{и}}{T}}}. \tag{13.56}$$

Годографом для первого слагаемого (рис. 13.9) является прямая *1*, параллельная мнимой оси и расположенная в нижней полуплоскости; она заканчивается при $\omega = \frac{\omega_{и}}{2}$ на действительной оси в точке $-\frac{kT_{и}}{2}$. Это следует из того, что годографом инверсной составляющей $\frac{1}{kT_{и}}\left(e^{j\omega T_{и}} - 1\right)$ является полуокружность, имеющая центр на действительной оси и проходящая через начало координат (показана пунктирной кривой *1'* на рис. 13.9).

Годографом для второго слагаемого является, как это показано в предыдущем примере, полуокружность *2*, расположенная в верхней полуплоскости и опирающаяся на действительную ось в точках:

$$\left.\begin{aligned} & -kT \quad \text{при} \quad \omega = 0, \\ & kT \frac{1 - e^{-\frac{T_и}{T}}}{1 + e^{-\frac{T_и}{T}}} \quad \text{при} \quad \omega = \frac{\omega_и}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (13.57)$$

Общий годограф комплексного коэффициента усиления $W_р^*(j\omega)$, получающийся путем векторного сложения годографов *1* и *2*, изображен на том же рисунке кривой *3*.

При $T = 0$ передаточная функция непрерывной части системы

$$W_н(p) = \frac{k}{p}, \qquad (13.58)$$

передаточная функция приведенной непрерывной части

$$W_{пн}(p) = \frac{k(1 - e^{-pT_и})}{p^2}.$$

Передаточная функция разомкнутой импульсной системы в этом случае получается из (13.55) подстановкой $T = 0$

$$W_р^*(p) = k\frac{T_и e^{pT_и}}{e^{2pT_и} - e^{pT_и}} = \frac{kT_и}{e^{pT_и} - 1}. \qquad (13.59)$$

Комплексный коэффициент усиления

$$W_р^*(j\omega) = \frac{kT_и}{e^{j\omega T_и} - 1}. \qquad (13.60)$$

Годограф комплексного коэффициента усиления при этом соответствует кривой *1* на рис. 13.9.

§ 13.3. КОМПЛЕКСНЫЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ УСИЛЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ ЗАМКНУТЫХ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ

Полученные результаты для комплексных коэффициентов усиления и передаточных функций разомкнутых импульсных систем имеют самостоятельное значение и могут использоваться в различных конкретных случаях при анализе разомкнутых систем. Здесь будут рассмотрены замкнутые импульсные системы автоматического регулирования. Основные характеристики замкнутых систем (комплексные коэффициенты усиления и передаточные функции) могут быть выражены через соответствующие характеристики разомкнутых систем.

Структурная схема замкнутой импульсной системы регулирования, показанная на рис. 13.3, *б*, может быть приведена к виду, представленному на рис. 13.10. Эта схема повторяет структурную схему для непрерывных систем автоматического регулирования. Поэтому комплексный коэффициент усиления замкнутой импульсной системы, определяемый как отношение спектров дискретных сигналов $y^*(t)$ и $x^*(t)$ на ее выходе и входе, выражается через $W^*_р(j\omega)$ так же, как это имело место в случае непрерывных систем,

$$W^*_з(j\omega) = \frac{Y^*(j\omega)}{X^*(j\omega)} = \frac{W^*_р(j\omega)}{1 + W^*_р(j\omega)}. \qquad (13.61)$$

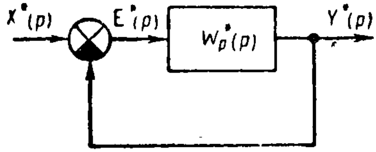


Рис. 13.10

Передаточная функция замкнутой системы получается при замене в (13.61) $j\omega$ на p

$$W^*_з(p) = \frac{W^*_р(p)}{1 + W^*_р(p)}. \qquad (13.62)$$

Подставив $W^*_р(p) = \frac{K^*(p)}{D^*(p)}$, получим

$$W^*_з(p) = \frac{K^*(p)}{K^*(p) + D^*(p)} = \frac{K^*(p)}{A^*(p)}, \qquad (13.63)$$

где $A^*(p)$ — характеристический полином замкнутой системы

$$A^*(p) = K^*(p) + D^*(p). \qquad (13.64)$$

Основные результаты, полученные для комплексных коэффициентов усиления и передаточных функций разомкнутых систем, автоматически распространяются на аналогичные характеристики замкнутых систем. Отметим некоторые из них.

Если приведенная непрерывная часть импульсной системы имеет полосу пропускания, ограниченную частотой $\omega_{гр1}$, и выполняется неравенство $\omega_{гр1} \leqslant \frac{\omega_и}{2}$, то на основании (13.27) и (13.63)

$$W^*_з(j\omega) = \frac{\frac{1}{T_и} W_{пи}(j\omega)}{1 + \frac{1}{T_и} W_{пи}(j\omega)} \qquad (13.65)$$

в полосе частот $-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}$.

Практически равенство (13.65) имеет место, если наибольшая постоянная времени системы много больше $T_и$.

Если при этом спектр входного сигнала ограничен частотой $\omega_{гр}$, которая также меньше $\frac{\omega_и}{2}$, то замкнутая импульсная система ведет себя так же, как замкнутая непрерывная система с комплексным коэффициентом усиления разомкнутой системы $\frac{1}{T_и} W_{пн}(j\omega)$.

Если условие $\omega_{гр} \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ не выполняется, то начинают сказываться стробоскопические свойства импульсной системы, определяемые периодичностью комплексного коэффициента усиления $W_з^*(j\omega)$. При этом поведение импульсной системы регулирования существенно отличается от поведения аналогичной непрерывной системы.

Условие идентичности импульсной системы автоматического регулирования и непрерывной системы с комплексным коэффициентом усиления в разомкнутом состоянии $\frac{1}{T_и} W_{пн}(j\omega)$ может быть сформулировано на основании (13.5) в более общем виде

$$\omega_и \gg \omega_{гр} + \omega_{гр1}, \qquad (13.66)$$

где $\omega_{гр}$ — граничная частота спектра входного сигнала,

$\omega_{гр1}$ — граничная частота полосы пропускания приведенной непрерывной части.

Передаточные функции замкнутых импульсных систем автоматического регулирования периодичны в плоскости комплексного переменного p в направлении мнимой оси и поэтому рассматриваются в полосе $-\frac{\omega_и}{2} < \mathrm{Im}\, p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ (см. рис. 12.14).

Передаточные функции замкнутых импульсных систем регулирования являются дробно-рациональными функциями относительно $e^{pT_и}$. При этом порядок характеристического полинома $A^*(p)$ равен порядку непрерывной части системы n, если последняя не содержит запаздывающих звеньев и полюсов, отличающихся на $jk\omega_и$.

В системах с запаздыванием τ при $(k-1)T_и < \tau \leqslant kT_и$ порядок $A^*(p)$ равен $n + k$.

Порядок числителя передаточной функции $W_з^*(p)$ в системах без запаздывания равен $n-1$, в системах с запаздыванием — n.

Пример 13.3. Определим передаточную функцию $W_з^*(p)$ системы, рассмотренной в примере 13.1. При подстановке (13.48) в (13.62) получим

$$W_з^*(p) = \frac{k\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}{e^{pT_и} + k - (k+1)\, e^{-\frac{T_и}{T}}}. \qquad (13.69)$$

Пример 13.4. Определим передаточную функцию $W_з^*(p)$ цифровой следящей системы, рассмотренной в примере 13.2. Находим ее, подставляя (13.55) в (13.62),

$$W_з^*(p) =$$

$$= \frac{k\left[T_и - T\left(1-e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right]e^{pT_и} + k\left[T\left(1-e^{-\frac{T_и}{T}}\right) - T_и e^{-\frac{T_и}{T}}\right]}{e^{2pT_и} + \left\{k\left[T_и - T\left(1-e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right] - \left(1+e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right\}e^{pT_и} + k\left[T\left(1-e^{-\frac{T_и}{T}}\right) - T_и e^{-\frac{T_и}{T}}\right] + e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{13.70}$$

При $T=0$

$$W_з^*(p) = \frac{kT_и}{e^{pT_и} - 1 + kT_и}. \tag{13.71}$$

Изучение характера изменения рассогласования в импульсной системе автоматического регулирования можно выполнить, пользуясь передаточной функцией для рассогласования,

$$W_ε^*(p) = \frac{E^*(p)}{X^*(p)} = \frac{W_з^*(p)}{W_р^*(p)} = \frac{1}{1+W_р^*} = \frac{D^*(p)}{K^*(p)+D^*(p)}. \tag{13.72}$$

Пример 13.5. Определим передаточную функцию для рассогласования $W_ε^*(p)$ системы, рассмотренной в примере 13.1. Она получается при подстановке (13.48) в (13.72)

$$W_ε^*(p) = \frac{e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}}{e^{pT_и} + k - (k+1)e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{13.73}$$

Пример 13.6. Определим передаточную функцию $W_ε^*(p)$ цифровой следящей системы (см. пример 13.2). На основании (13.54)

$$W_ε^*(p) = \frac{\left(e^{pT_и}-1\right)\left(e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}{e^{2pT_и} + \left\{k\left[T_и - T\left(1-e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right] - \left(1+e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right\}e^{pT_и} + k\left[T\left(1-e^{-\frac{T_и}{T}}\right) - T_и e^{-\frac{T_и}{T}}\right] + e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{13.74}$$

При $T=0$

$$W_ε^*(p) = \frac{e^{pT_и} - 1}{e^{pT_и} - 1 + kT_и}. \tag{13.75}$$

Иногда небезынтересно знать характер изменения некоторой промежуточной величины y_1 в непрерывной части системы (рис. 13.11). Вводя в этом случае фиктивное импульсное звено на интересующем нас выходе (на рисунке показано пунктиром), можно написать

$$W_{з1}^*(p) = \frac{Y_1^*(p)}{X^*(p)} = \frac{W_{р1}^*(p)E^*(p)}{X^*(p)} = \frac{W_{р1}^*(p)}{1+W_р^*(p)}, \tag{13.76}$$

где $W^*_{p1}(p)$ — передаточная функция разомкнутой импульсной системы, соответствующей участку с передаточной функцией $W_{пн1}(p)$ между сравнивающим звеном и интересующим нас выходом. $W^*_{p1}(p)$ может быть получена по $W_{пн1}(p)$ или $w_{пн1}(t)$ с помощью формул (13.29) или (13.30).

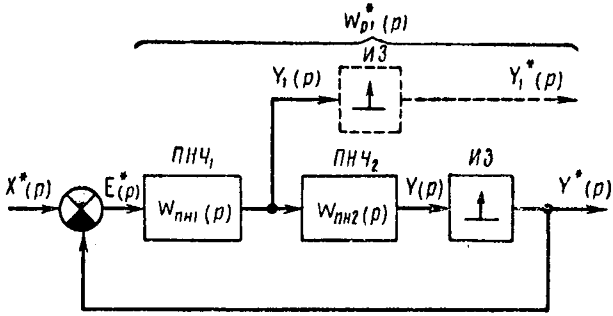


Рис. 13.11

Рассматривая структурные схемы импульсных систем автоматического регулирования (см. рис. 12.7), мы предположили, что импульсное звено включено непосредственно после звена сравнения. На самом деле, между ними может быть включено звено с передаточной функцией $W_{н1}(p)$ (рис. 13.12, *а*). Просто

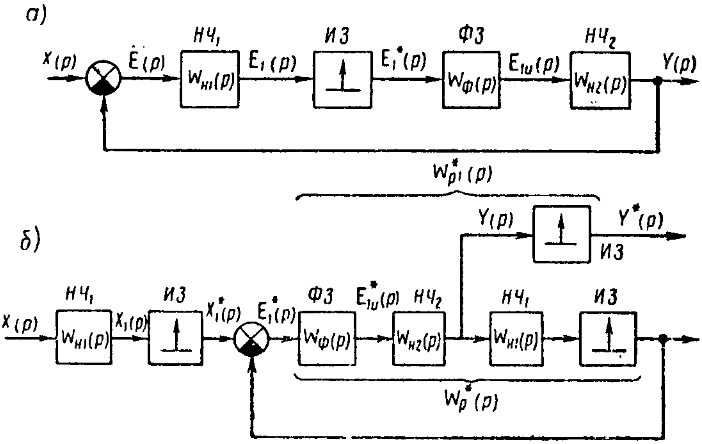


Рис. 13.12

поменять местами $НЧ_1$ и *ИЗ* в общем случае нельзя. С помощью эквивалентных преобразований структурную схему, изображенную на рис. 13.12, *а*, можно привести к виду, показанному на рис. 13.12, *б*. Тогда изображение выходной величины $Y^*(p)$ может быть получено на основании выражений:

$$
\left.
\begin{aligned}
Y^*(p) &= W^*_{з1}(p)\, X^*_1(p), \\
W^*_{з1}(p) &= \frac{W^*_{р1}(p)}{1 + W^*_{р}(p)}, \\
X_1(p) &= W_{н1}(p)\, X(p).
\end{aligned}
\right\} \qquad (13.77)
$$

Передаточная функция $W^*_р(p)$ соответствует непрерывной части с передаточной функцией $W_{н1}(p)\, W_{н2}(p)$.

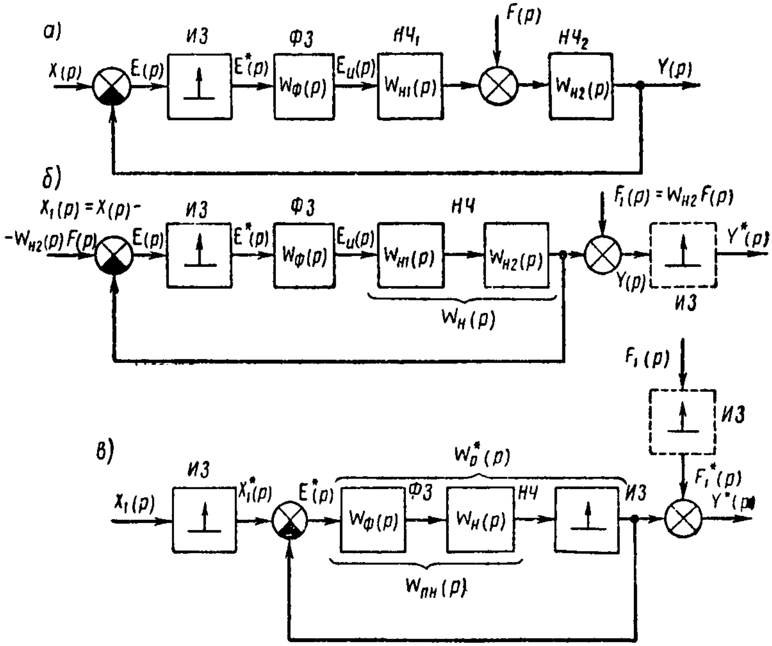


Рис. 13.13

Если на импульсную систему автоматического регулирования действует сигнал помехи $f(t)$ (изображение $F(p)$ на рис. 13.13, *а*), то структурную схему системы удобно привести к виду, изображенному на рис. 13.13, *б* и далее на рис. 13.13, *в*. В этом случае изображение выходной величины

$$
Y^*(p) = \frac{W^*_р(p)}{1 + W^*_р(p)} \left[X^*(p) - F^*_1(p)\right] + F^*_1(p), \qquad (13.78)
$$

где $F^*_1(p)$ — изображение дискретного сигнала, получающегося при квантовании по времени сигнала $f_{п1}(t)$, который, в свою очередь, получается при прохождении сигнала помехи $f(t)$ через звено с передаточной функцией $W_{н2}(p)$

$$
f_1(t) = L^{-1}\left[F(p)\, W_{н2}(p)\right]. \qquad (13.79)
$$

Глава XIV

ИМПУЛЬСНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ. УСТОЙЧИВОСТЬ, ПЕРЕХОДНЫЕ И УСТАНОВИВШИЕСЯ ПРОЦЕССЫ

§ 14.1. УСТОЙЧИВОСТЬ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Условия устойчивости импульсных систем. Изображение сигнала на выходе импульсной системы автоматического регулирования $Y^*(p)$ при действии на ее входе произвольного сигнала с изображением $X^*(p)$ записывается следующим образом:

$$Y^*(p) = W_з^*(p)\,X^*(p) = \frac{K^*(p)}{A^*(p)}\,X^*(p).$$

Дискретные значения выходного сигнала могут быть получены по изображению $Y^*(p)$ согласно (12.56) в виде суммы вычетов произведения $Y^*(p)e^{p(l-1)T_и}$ относительно его полюсов

$$y(lT_и) = \sum_\nu \operatorname{Res}_{e^{p_\nu T_и}} \left[Y^*(p)\,e^{p(l-1)T_и}\right] =$$

$$= \sum_\nu \operatorname{Res}_{e^{p_\nu T_и}} \left[W_з^*(p)\,X^*(p)\,e^{p(l-1)T_и}\right]. \qquad (14.1)$$

Выходной сигнал может быть представлен в виде суммы вынужденной и переходной составляющих

$$y(lT_и) = y_в(lT_и) + y_п(lT_и). \qquad (14.2)$$

Вынужденная составляющая представляет собой сумму вычетов из (14.1) относительно полюсов изображения входного сигнала $X^*(p)$ в полосе $-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$; переходная составляющая — сумму вычетов относительно полюсов передаточной функции $W_з^*(p)$ в той же полосе. Полюсы передаточной функции, являющейся, как показано в § 13.2, дробно-рациональной функцией от $e^{pT_и}$, определяются уравнением

$$A^*(p) = a_n\,e^{npT_и} + a_{n-1}\,e^{(n-1)\,pT_и} + \ldots + a_0 = 0, \qquad (14.3)$$

которое называется *характеристическим уравнением замкнутой системы* и имеет n корней в рассматриваемой полосе. Если эти корни простые, то переходная составляющая может быть записана в виде суммы экспонент (12.57)

$$y_{\text{п}}(lT_{\text{и}}) = \sum_{\nu=1}^{n} g_{\nu} e^{p_{\nu} l T_{\text{и}}}, \tag{14.4}$$

где p_{ν} — корни характеристического уравнения,
g_{ν} — коэффициенты.

Если все корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, т. е. расположены в левой половине полосы $-\frac{\omega_{\text{и}}}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_{\text{и}}}{2}$, то при $l \to \infty$ все слагаемые в (14.4) будут стремиться к нулю, переходная составляющая будет затухать и процесс $y(lT_{\text{и}})$ будет стремиться к вынужденной составляющей. Такая импульсная система автоматического регулирования называется *устойчивой*. Если хотя бы один корень характеристического уравнения расположен в правой половине полосы, то соответствующее ему слагаемое в (14.4) будет неограниченно возрастать по абсолютной величине. Такая система называется *неустойчивой*. Если один или несколько корней характеристического уравнения расположены на мнимой оси, то импульсная система *нейтральна*.

Таким образом, необходимым и достаточным условием устойчивости импульсных систем автоматического регулирования является расположение всех корней характеристического уравнения замкнутой системы в левой половине полосы $-\frac{\omega_{\text{и}}}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_{\text{и}}}{2}$ комплексной плоскости p.

Левое расположение корней характеристического уравнения (14.3) обеспечивает устойчивость импульсной системы регулирования лишь для дискретных моментов съема и не исключает возможности ее неустойчивого поведения между этими моментами. Скрытые колебания могут возникнуть в импульсной системе, в частности, если приведенная непрерывная часть имеет передаточную функцию с полюсами в правой полуплоскости, причем мнимая часть этих полюсов кратна половине частоты импульсного элемента с $\omega_{\text{и}}$. Замкнутая система в этом случае может иметь левое расположение всех корней характеристического уравнения (14.3), однако в приведенной непрерывной части могут возникнуть расходящиеся колебания, которые при соответствующей фазе не будут ощущаться системой из-за квантования по времени (рис. 14.1).

Скрытые колебания возникают в импульсных системах автоматического регулирования редко. Для их возникновения необходимо, чтобы $\omega_{\text{и}}$ имела тот же порядок, что и собственные частоты звеньев в непрерывной части системы. Практически $\omega_и$ бывает много больше этих частот.

Попытки суждения об устойчивости импульсных систем автоматического регулирования путем прямого вычисления корней характеристического уравнения наталкиваются на те же трудности, что и в случае непрерывных систем. Поэтому целесообразно распространить на импульсные системы критерии устойчивости, полученные для непрерывных систем.

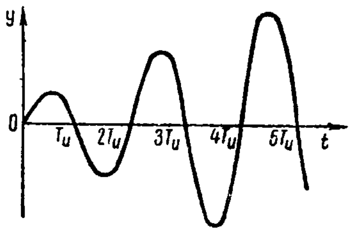


Рис. 14.1

Критерий устойчивости Гурвица для импульсных систем. Рассмотрим применение алгебраического критерия устойчивости Гурвица для анализа импульсных систем. Для этого в характеристическом уравнении замкнутой импульсной системы

$$A^*(p) = a_n e^{npT_и} + a_{n-1} e^{(n-1)pT_и} + \dots + a_0 = 0$$

сделаем подстановку $e^{pT_и} = z$. Тогда

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0 = 0. \qquad (14.5)$$

Эта подстановка отображает полуполосу $\operatorname{Re} p < 0$, $-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ плоскости p внутрь круга единичного радиуса $|z| \leqslant 1$ плоскости z; при этом отрезок мнимой оси от $-\frac{\omega_и}{2}$ до $\frac{\omega_и}{2}$ преобразуется в окружность единичного радиуса (рис. 14.2,*а* и *б*).

Произведем в $A(z)$ замену переменных:

$$z = \frac{1+v}{1-v}, \qquad (14.6)$$

$$v = \frac{z-1}{z+1}, \qquad (14.7)$$

$$v = \frac{e^{pT_и} - 1}{e^{pT_и} + 1}. \qquad (14.8)$$

При этом окружность единичного радиуса в плоскости z преобразуется в мнимую ось на плоскости v. Таким образом, указанный отрезок мнимой оси на плоскости p преобразуется во всю мнимую ось на плоскости v (рис. 14.2,*в*)

$$v = \frac{e^{j\omega T_и} - 1}{e^{j\omega T_и} + 1} = j \operatorname{tg} \frac{\omega T_и}{2}. \qquad (14.9)$$

При этом внутренности единичного круга в плоскости z $\left(\text{и левой полуполосе } \operatorname{Re} p<0,\ -\frac{\omega_и}{2}<\operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2} \text{ на плоскости } p\right)$ соответствует левая полуплоскость v.

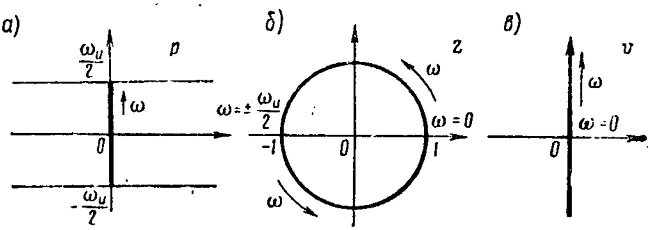


Рис. 14.2

Характеристическое уравнение системы принимает вид

$$a_n\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1+v}{1-v}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

или

$$a_n(1+v)^n + a_{n-1}(1+v)^{n-1}(1-v) + \ldots + a_0(1-v)^n = 0, \quad (14.10)$$

или

$$a_n' v^n + a_{n-1}' v^{n-1} + \ldots + a_0' = 0,$$

где a_i' — новые коэффициенты уравнения.

Для характеристического уравнения (14.10) можно использовать критерий Гурвица и судить об устойчивости импульсной системы по знакам определителей Гурвица (см. гл. VII), полученных из коэффициентов a_i'.

Пример 14.1. Рассмотрим характеристическое уравнение цифровой следящей системы, которое можно получить из (13.70) (см. пример 13.4)

$$e^{2pT_и} + a_1 e^{pT_и} + a_0 = 0, \quad (14.11)$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= k\left[T_и - T\left(1-e^{\frac{-T_и}{T}}\right)\right] - \left(1+e^{\frac{-T_и}{T}}\right); \\ a_0 &= k\left[T\left(1-e^{\frac{-T_и}{T}}\right) - T_и e^{\frac{-T_и}{T}}\right] + e^{\frac{-T_и}{T}}; \end{aligned}\right\} \quad (14.12)$$

или, подставляя $z = e^{pT_и}$, будем иметь

$$z^2 + a_1 z + a_0 = 0. \quad (14.13)$$

Подставляя $z = \frac{1+v}{1-v}$, получим после группирования членов с одинаковыми степенями

$$(1 - a_1 + a_0)v^2 + 2(1 - a_0)v + 1 + a_1 + a_0 = 0. \quad (14.14)$$

Согласно критерию Гурвица, необходимым и достаточным условием для устойчивости систем второго порядка является положительность коэффициентов характеристического уравнения

$$\left.\begin{aligned} &1 + a_1 + a_0 > 0; \\ &1 - a_0 > 0; \\ &1 - a_1 + a_0 > 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.15}$$

Подставляя в (14.15) a_1 и a_0 из (14.12), получаем условия устойчивости:

$$kT_{\text{и}}\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right) > 0, \tag{14.16}$$

$$k < \frac{1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}}{T\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right) - T_{\text{и}} e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}} = k_{\text{пр1}}, \tag{14.17}$$

$$k < \frac{2\left(1 + e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{T_{\text{и}}\left(1 + e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right) - 2T\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)} = k_{\text{пр2}}. \tag{14.18}$$

Первое из неравенств может быть переписано

$$k > 0. \tag{14.19}$$

Второе и третье неравенства говорят о том, что коэффициент усиления непрерывной части k должен быть меньше меньшего из двух предельных значений $k_{\text{пр1}}$ и $k_{\text{пр2}}$. Эти значения могут быть выражены следующим образом:

$$k_{\text{пр1}} = \frac{1}{T_{\text{и}}} \frac{\frac{T_{\text{и}}}{T}\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{1 - \left(1 + \frac{T_{\text{и}}}{T}\right) e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}}, \tag{14.20}$$

$$k_{\text{пр2}} = \frac{1}{T_{\text{и}}} \frac{2\frac{T_{\text{и}}}{T}\left(1 + e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{\frac{T_{\text{и}}}{T}\left(1 + e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right) - 2\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}. \tag{14.21}$$

Графики безразмерных величин $k_{\text{пр1}} T_{\text{и}}$ и $k_{\text{пр2}} T_{\text{и}}$, зависящих от безразмерного отношения $\frac{T_{\text{и}}}{T}$, представлены на рис. 14.3 [Л.23]. Из графиков видно, что при малых $\frac{T_{\text{и}}}{T}$ меньшим является $k_{\text{пр1}}$, при больших $\frac{T_{\text{и}}}{T}$ — $k_{\text{пр2}}$. При $0 < \frac{T_{\text{и}}}{T} \leqslant 0{,}5$ $k_{\text{пр1}} T_{\text{и}} \approx 2$ и поэтому для этих $\frac{T_{\text{и}}}{T}$ предельным значением коэффициента усиления системы является

$$k_{\text{пр}} \approx \frac{2}{T_{\text{и}}} = \frac{1}{\pi} \omega_{\text{и}}. \tag{14.22}$$

Таким образом, в достаточно широком диапазоне предельный коэффициент усиления следящей системы пропорционален частоте импульсного звена.

При $\omega_и \to \infty$ система становится непрерывной и $k_{пр} \to \infty$, как это и должно быть в непрерывной системе второго порядка.

В частном случае, при $T = 0$ $k_{пр1}$ обращается в ∞ и условие устойчивости принимает вид

$$0 < k < k_{пр2} = \frac{2}{T_и} = \frac{1}{\pi}\omega_и. \qquad (14.23)$$

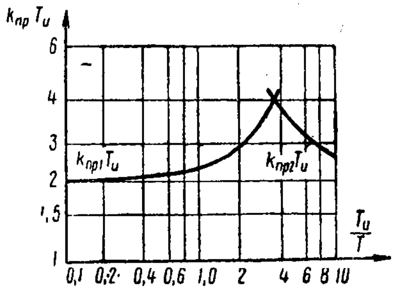


Рис. 14.3

В табл. 14.1 приведены условия устойчивости импульсных систем автоматического регулирования, выраженные через коэффициенты характеристического уравнения замкнутой системы (14.3), согласно критерию Гурвица.

Критерий Михайлова для импульсных систем. Для рассмотрения критерия Михайлова определим изменение аргумента характеристического вектора замкнутой систе-

Таблица 14.1

Степень характеристического уравнения n	Условия устойчивости
1	$a_1 + a_0 > 0$, $a_1 - a_0 > 0$.
2	$a_2 + a_1 + a_0 > 0$, $a_2 - a_1 + a_0 > 0$, $a_2 - a_0 > 0$.
3	$a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0$, $a_3 - a_2 + a_1 - a_0 > 0$, $a_3(a_3 - a_1) - a_0(a_0 - a_2) > 0$, $3(a_3 + a_0) - a_2 - a_0 > 0$.
4	$a_4 + a_3 + a_2 + a_1 + a_0 > 0$, $a_4 - a_3 + a_2 - a_1 + a_0 > 0$, $(a_4 - a_0)^2(a_4 - a_2 + a_0) + (a_3 - a_1)(a_4 a_1 - a_3 a_0) > 0$, $2(a_4 - a_0) - a_3 + a_1 > 0$, $2(a_4 - a_0) + a_3 - a_1 > 0$.

мы $A^*(j\omega)$ при изменении ω от $-\frac{\omega_и}{2}$ до $+\frac{\omega_и}{2}$. Это удобно сделать, подставив $z = e^{pT_и}$ в характеристический полином замкнутой системы

$$A(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

и разложив его на сомножители

$$A(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2)\ldots(z - z_n), \tag{14.24}$$

где z_i — корни уравнения $A(z) = 0$, соответствующие корням p_i характеристического уравнения $A^*(p) = 0$.

Далее следует положить $z = e^{j\omega T_и}$ и найти изменение аргумента одного из сомножителей, входящих в состав $A(z)$,

$$\Delta \arg \left(e^{j\omega T_и} - z_i\right),$$

$$-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}.$$

При этом нужно рассмотреть два случая: корень характеристического уравнения z_i лежит внутри круга единичного

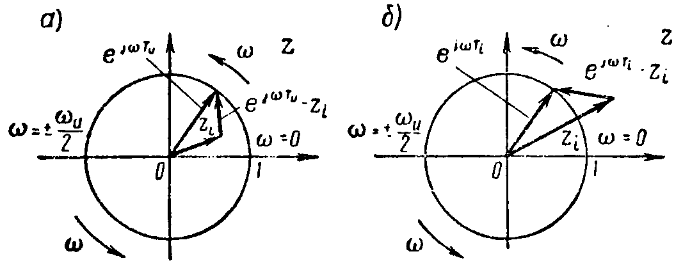


Рис. 14.4

радиуса в плоскости z и корень z_i лежит вне этого круга. Первый случай соответствует расположению соответствующего корня p_i в левой половине полосы $-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$ на плоскости p, второй — расположению его в правой половине полосы. На рис. 14.4,*а* и *б* показаны соответственно оба случая.

Концы векторов $z = e^{j\omega T_и}$ и $e^{j\omega T_и} - z_i$ скользят по окружности единичного радиуса против часовой стрелки при изменении ω от $-\frac{\omega_и}{2}$ до $\frac{\omega_и}{2}$. В первом случае изменение аргумента

$$\Delta \arg \left(e^{j\omega T_и} - z_i\right) = 2\pi,$$

$$-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}.$$

во втором случае —

$$\Delta \arg \left(e^{j\omega T_и} - z_i\right) = 0,$$

$$-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}.$$

Если предположить, что характеристическое уравнение системы $A^*(p) = 0$ имеет k корней в левой половине полосы $-\frac{\omega_и}{2} < \operatorname{Im} p \leqslant \frac{\omega_и}{2}$, то общее изменение аргумента характеристического вектора (сумма изменений аргументов сомножителей для всех корней)

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = \Delta \arg A\left(e^{j\omega T_и}\right) = 2k\pi, \qquad (14.25)$$

$$-\frac{\omega_и}{2} < \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}.$$

Учитывая, что

$$\operatorname{Re} e^{j\omega T_и} = \operatorname{Re} e^{-j\omega T_и},$$

$$\operatorname{Im} e^{j\omega T_и} = -\operatorname{Im} e^{-j\omega T_и}, \qquad (14.26)$$

откуда следует сопряженность комплексных векторов $A^*(j\omega)$ и $A^*(-j\omega)$, результат (14.25) может быть записан для половинного диапазона ω

$$\Delta \arg A^*(j\omega) = k\pi,$$

$$0 \leqslant \omega \leqslant \frac{\omega_и}{2}. \qquad (14.27)$$

Для устойчивой импульсной системы автоматического регулирования число корней в левой половине полосы равно n, поэтому критерий Михайлова можно сформулировать следующим образом. *Для того чтобы импульсная система автоматического регулирования была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы при изменении ω от 0 до $\frac{\omega_и}{2}$ характеристический вектор $A^*(j\omega)$ поворачивался на угол $n\pi$, где n — степень характеристического уравнения, или, иначе, чтобы годограф $A^*(j\omega)$ с ростом ω от 0 до $\frac{\omega_и}{2}$ обходил последовательно в положительном направлении $2n$ квадрантов.*

На рис. 14.5 показаны годографы характеристического вектора $A^*(j\omega)$ для устойчивых (*а* и *в*) и неустойчивых (*б* и *г*) систем первого и второго порядков. Эти годографы отличаются от соответствующих годографов непрерывных систем тем, что не только начинаются, но и оканчиваются на действительной оси при $\omega = \frac{\omega_и}{2}$. В отличие от непрерывных систем, импульсные системы не только второго, но даже и первого порядка могут быть неустойчивыми при положительных коэффициентах характеристического уравнения, что видно также из табл. 14.1.

Критерий Найквиста для импульсных систем. Критерий Найквиста может быть выведен путем рассмотрения изменения аргумента вектора $1+W_p^*(j\omega)$, таким же образом,

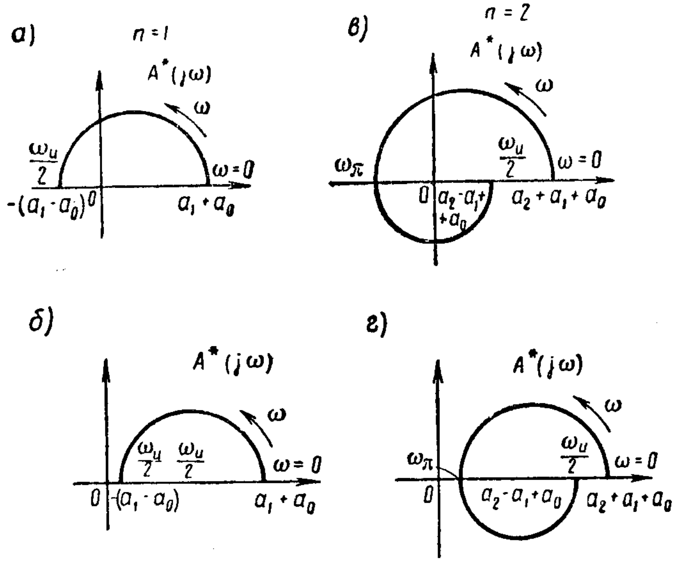


Рис. 14.5

как это было сделано для непрерывных систем (см. § 7.3). Не повторяя вывода, приведем формулировку критерия Найквиста для прямых амплитудно-фазовых характеристик разомкнутых импульсных систем для двух случаев: разомкнутая система устойчива и разомкнутая система нейтральна.

В первом случае *для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы при изменении* ω *от* 0 *до* $\frac{\omega_и}{2}$ *амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы* $W_p^*(j\omega)$ *не охватывала точку* -1, $j0$, *или, иначе, чтобы при изменении* ω *от* 0 *до* $\frac{\omega_и}{2}$ *разность между числом положительных и отрицательных переходов амплитудно-фазовой характеристики* $W_p^*(j\omega)$ *через отрезок* $(-\infty, -1)$ *действительной оси была равна нулю* (*рис. 14.6, а*).

Об устойчивости разомкнутой импульсной системы можно судить по устойчивости ее непрерывной части, так как полюсы передаточной функции разомкнутой системы совпадают с точностью до их мнимой части с полюсами передаточной функции непрерывной части (см. § 13.2). Если непрерывная часть устойчива, нейтральна или неустойчива, то и разомкнутая импульсная система соответственно устойчива, нейтральна или неустойчива.

Исключение может составить случай, когда приведенная непрерывная часть неустойчива и два или большее число полюсов $W_{н}(p)$, лежащих в правой полуплоскости переменного p, отличаются друг от друга лишь мнимыми частями, причем разница равна $jk\omega_{и}$, где k — целое число.

Такие случаи, как было отмечено выше, редки.

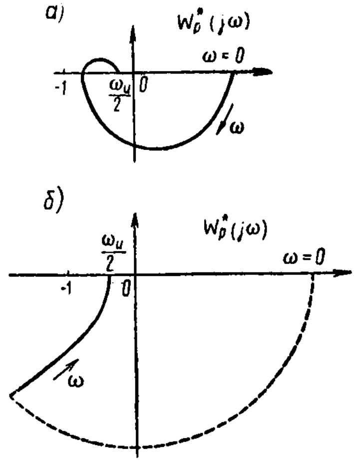


Рис. 14.6

Если приведенная непрерывная часть (и, следовательно, разомкнутая импульсная система) нейтральна и содержит ν последовательно включенных интегрирующих звеньев (нулевой полюс ν-й кратности), то согласно (13.44) передаточная функция и комплексный коэффициент усиления имеют вид

$$W_{р}^{*}(p)=\frac{K^{*}(p)}{(e^{pT_{и}}-1)^{\nu}D_{1}^{*}(p)}, \tag{14.28}$$

$$W_{р}^{*}(j\omega)=\frac{K^{*}(j\omega)}{(e^{j\omega T_{и}}-1)^{\nu}D_{1}^{*}(j\omega)}. \tag{14.29}$$

Амплитудно-фазовая характеристика $W_{р}^{*}(j\omega)$ при малых ω начинается в бесконечности (рис. 14.6, *б*). Если при малых ω рассматривать $W_{р}^{*}(j\omega)$ как

$$W_{р}^{*}(j\omega)=\lim_{\beta\to 0}\frac{K^{*}(j\omega)}{(e^{j\omega T_{и}}-1+\beta)^{\nu}D_{1}^{*}(j\omega)}, \tag{14.30}$$

то можно показать, подобно тому, как это было сделано для непрерывных систем, что приведенная выше формулировка критерия Найквиста может использоваться для нейтральных разомкнутых импульсных систем при условии, что амплитудно-фазовая характеристика дополнена окружностью бесконечно большого радиуса, начинающейся на вещественной оси (см. рис. 14.6, *б*).

Пример 14.2. Проанализируем устойчивость системы, рассмотренной в примере 13.1, которая в разомкнутом состоянии имеет комплексный коэффициент усиления

$$W_{\text{р}}^{*}(j\omega)=\frac{k\left(1-e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{e^{j\omega T_{\text{и}}}-e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}}.$$

Годограф $W_{\text{р}}^{*}(j\omega)$ был изображен на рис. 13.8. Для того чтобы при $k>0$ замкнутая система была устойчива согласно критерию Найквиста необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство, получаемое из (13.51)

$$k<\frac{1+e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}}{1-e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}}=k_{\text{пр}}. \qquad (14.31)$$

На рис. 14.7 изображен график изменения $k_{\text{пр}}$ в зависимости от безразмерной величины $\frac{T_{\text{и}}}{T}$. При $T_{\text{и}}\to 0$ система превращается в непрерывную и $k_{\text{пр}}$ делается бесконечно большим, что естественно. При увеличении $T_{\text{и}}$ предельный коэффициент усиления уменьшается.

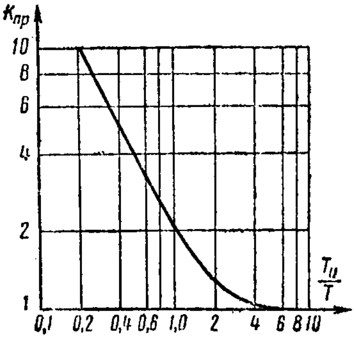


Рис. 14.7

Пример 14.3. Рассмотрим устойчивость цифровой следящей системы, которая имеет комплексный коэффициент усиления (см. пример 13.2)

$$W_{\text{р}}^{*}(j\omega)=\frac{kT_{\text{и}}}{e^{j\omega T_{\text{и}}}-1}.$$

Его годограф был показан на рис. 13.9 (кривая *I*).

Единственным условием устойчивости при $k>0$ является

$$W_{\text{р}}^{*}\left(j\frac{\omega_{\text{и}}}{2}\right)=-\frac{kT_{\text{и}}}{2}>-1,$$

откуда

$$k<\frac{2}{T_{\text{и}}}=\frac{1}{\pi}\omega_{\text{и}},$$

что совпадает с (14.23).

Примеры данного параграфа показывают, что уменьшение частоты работы импульсного элемента (увеличение $T_{\text{и}}$) обычно сопровождается уменьшением предельного коэффициента усиления и ухудшением динамических свойств импульсной системы. Поэтому при проектировании импульсных систем автоматического регулирования стремятся выбрать $T_{\text{и}}$ так, чтобы он был намного меньше основной постоянной времени непрерывной части системы. При этом, как было отмечено в § 13.3, для входных сигналов с ограниченным спектром импульсная система ведет себя практически как непрерывная система, имеющая $W_р(p) = \frac{1}{T_и} W_{пн}(p)$.

Можно, однако, указать случай, когда наибольший коэффициент усиления в импульсной системе регулирования получается при $T_и$, отличном от нуля. Так получается, если амплитудно-фазовая характеристика приведенной непрерывной части системы имеет вид, показанный на рис. 14.8. Амплитудно-фазовая характеристика $\frac{1}{T_и} W_{пн}(j\omega)$ проходит через первый и четвертый квадранты, сохраняя в них достаточно большие значения. Характеристиками такого рода обладают системы, непрерывная часть которых включает в себя запаздывающие звенья.

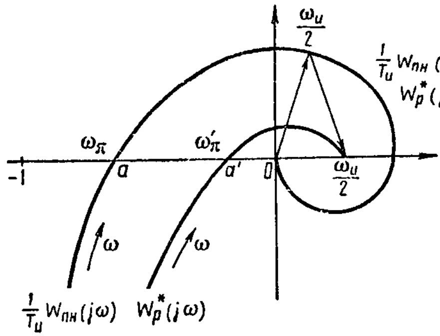


Рис. 14.8

На рис. 14.8 показана также амплитудно-фазовая характеристика $W^*_р(j\omega)$, которая построена по формуле (13.25). Если в импульсной системе рассматриваемого типа выбрать $T_и$ так, чтобы частотная отметка $\frac{\omega_и}{2}$ оказалась в первом квадранте, как показано на рисунке, то можно получить $W^*_р(j\omega)$, пересекающую действительную ось правее, чем $\frac{1}{T_и} W_{пн}(j\omega)$. При этом импульсная система будет иметь предельный коэффициент усиления больше, чем коэффициент соответствующей непрерывной системы.

В заключение заметим, что сравнительная оценка применимости критериев устойчивости, данная для непрерывных систем в § 7.5, справедлива и для импульсных систем.

§ 14.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНОВ ИЗМЕНЕНИЯ СИГНАЛОВ В ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

М е т о д ы н а х о ж д е н и я д и с к р е т н ы х з н а ч е н и й с и г н а л о в в и м п у л ь с н ы х с и с т е м а х. Изображение выходного сигнала в импульсной системе автоматического регулирования записывается с помощью передаточной функции замкнутой системы следующим образом:

$$Y^*(p) = W^*_з(p)\, X^*(p).$$

Здесь под $X^*(p)$ понимается изображение некоторого обобщенного дискретного сигнала, который в общем случае образуется из сигналов уставки и помехи, причем оба сигнала могут быть предварительно пропущены через линейные звенья (см. рис. 13.12, 13.13 и формулы (13.77), (13.78) и (13.79). В частном случае он может совпадать с сигналом уставки.

Формулы обращения для перехода от изображения $Y^*(p)$ к дискретным значениям выходного сигнала $y(lT_и)$, которые обычно дают довольно полное представление о сигнале в целом, были получены ранее [см. (12.53), (12.56), (12.57)]:

$$y(lT_и) = \frac{T_и}{2\pi j} \int\limits_{c-j\frac{\omega_и}{2}}^{c+j\frac{\omega_и}{2}} Y^*(p)\, e^{plT_и} dp, \tag{14.32}$$

$$y(lT_и) = \sum_{\nu} \operatorname{Res}_{e^{p_\nu T_и}} \left[Y^*(p)\, e^{p(l-1)T_и}\right], \tag{14.33}$$

$$y(lT_и) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{B^*(p_\nu)}{e^{p_\nu T_и} \dot{A}^*(p_\nu)}\, e^{p_\nu l T_и}, \tag{14.34}$$

где p_ν — корни $A^*(p)$.

Последняя формула справедлива для дробно-рациональных функций $e^{pT_и}$

$$Y^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)}.$$

Непосредственное применение этих формул не всегда достаточно просто. Вычисление интеграла в первой формуле может быть выполнено приближенным путем, например, с помощью графо-аналитических методов, аналогичных методу трапецеидальных характеристик (см. § 9.5). Определение $y(lT_и)$ по второй и третьей формулам сопряжено с необходимостью отыскания полюсов $Y^*(p)$ или корней полинома $A^*(p)$ (относительно $e^{pT_и}$). Все эти способы довольно трудоемки для импульсных систем высокого порядка. Поэтому рассмотрим некоторые методы нахождения процессов изменения дискретных значений сигналов в импульсных системах, дающие более простые решения.

Первый метод основан на использовании разностных уравнений, связанных с передаточными функциями. Если передаточная функция замкнутой импульсной системы автоматического регулирования, равная отношению изображений $Y^*(p)$ и $X^*(p)$ при нулевых начальных условиях, имеет вид (13.63)

$$W_з^*(p) = \frac{Y^*(p)}{X^*(p)} = \frac{k_m e^{mpT_и} + k_{m-1} e^{(m-1)pT_и} + \ldots + k_0}{a_n e^{npT_и} + a_{n-1} e^{(n-1)pT_и} + \ldots + a_0},$$

то ее можно переписать как

$$W_з^*(p)=\frac{Y^*(p)}{X^*(p)}=\frac{k_m e^{-(n-m)pT_и}+k_{n-1}e^{-(n-m+1)pT_и}+\ldots+k_0e^{-npT_и}}{a_n+a_{n-1}e^{-pT_и}+\ldots+a_0e^{-npT_и}}$$

и далее написать следующие равенства:

$$(a_n+a_{n-1}e^{-pT_и}+\ldots+a_0e^{-npT_и})Y^*(p)=$$
$$=[k_m e^{-(n-m)pT_и}+k_{m-1}e^{-(n-m+1)pT_и}+\ldots+k_0e^{-npT_и}]X^*(p);$$
$$a_nY^*(p)+a_{n-1}e^{-pT_и}Y^*(p)+\ldots+a_0e^{-npT_и}Y^*(p)=$$
$$=k_m e^{-(n-m)pT_и}X^*(p)+k_{m-1}e^{-(n-m+1)pT_и}X^*(p)+\ldots+$$
$$+k_0e^{-npT_и}X^*(p).$$

Отсюда согласно теореме запаздывания получается соотношение для дискретных сигналов $y^*(t)$ и $x^*(t)$, а затем для дискретных значений сигналов y и x,

$$a_ny^*(t)+a_{n-1}y^*(t-T_и)+\ldots+a_0y^*(t-nT_и)=$$
$$=k_mx^*[t-(n-m)T_и]+k_{m-1}x^*[t-(n-m+1)T_и]+\ldots+$$
$$+k_0x^*(t-nT_и),$$
$$a_ny(l_1T_и)+a_{n-1}y[(l_1-1)T_и]+\ldots+a_0y[(l_1-n)T_и]=$$
$$=k_mx[(l_1-n+m)T_и]+k_{m-1}x[(l_1-n+m-1)T_и]+\ldots+$$
$$+k_0x[(l_1-n)T_и]$$

или после замены l_1-n на l

$$a_ny[(l+n)T_и]+a_{n-1}y[(l+n-1)T_и]+\ldots+a_0y(lT_и)=$$
$$=k_mx[(l+m)T_и]+k_{m-1}x[(l+m-1)T_и]+\ldots+k_0x(lT_и). \quad (14.35)$$

Это соотношение называют разностным уравнением замкнутой импульсной системы автоматического регулирования (оно может быть выражено через конечные разности функций y и x, образованные из дискретных значений, взятых в моменты съема; отсюда и название — разностное уравнение). Разностное уравнение может быть составлено и для разомкнутой импульсной системы.

Для составления разностных уравнений можно использовать следующее простое правило. Нужно записать соотношение типа (13.63) для рассматриваемой системы в одну строчку, раскрыть скобки и заменить в левой части полученного равенства $Y^*(p)$ на $y(lT_и)$, $e^{pT_и}Y^*(p)$ — на $y[(l+1)T_и],\ldots,e^{npT_и}Y^*(p)$ — на $y[(l+n)T_и]$.

Аналогичные замены нужно сделать в правой части равенства для $X^*(p)$, $e^{pT_и}X^*(p),\ldots,e^{mpT_и}X^*(p)$.

Если же дано разностное уравнение, то передаточную функцию импульсной системы можно получить по обратному правилу.

Переписав (14.35) в виде

$$y[(l+n)T_и] = \frac{1}{a_n}\{k_m x[(l+m)T_и] + \ldots + k_0 x(lT_и) - \\ - a_{n-1}y[(l+n-1)T_и] - \ldots - a_0 y(lT_и)\}, \qquad (14.36)$$

разностное уравнение можно рассматривать как рекуррентное соотношение, которое позволяет отыскивать дискретные значения выходного сигнала импульсной системы автоматического регулирования в $(l+n)$-й момент съема по значениям сигналов на входе и выходе в предшествующие моменты съема, начиная с l-го. Значение входного сигнала x при $t=(l+n)T_и$ не входит в рекуррентное соотношение, потому что степень числителя передаточной функции меньше степени ее знаменателя.

Пример 14.4. Рассмотрим цифровую следящую систему, передаточная функция которой $W_з^*(p)$ была получена в примере 13.4 (13.70)

$$W_з^*(p) = \frac{k_1 e^{pT_и} + k_0}{e^{2pT_и} + a_1 e^{pT_и} + a_0},$$

где a_i и k_i заданы выражениями:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= k\left[T_и - T\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right] - \left(1 + e^{-\frac{T_и}{T}}\right),\\ a_0 &= k\left[T\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right) - T_и e^{-\frac{T_и}{T}}\right] + e^{-\frac{T_и}{T}},\\ k_1 &= k\left[T_и - T\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right],\\ k_0 &= k\left[T\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right) - T_и e^{-\frac{T_и}{T}}\right].\end{aligned}\right\} \qquad (14.37)$$

Разностное уравнение для этой системы имеет вид

$$y[(l+2)T_и] + a_1 y[(l+1)T_и] + a_0 y(lT_и) = \\ = k_1 x[(l+1)T_и] + k_0 x(lT_и), \qquad (14.38)$$

откуда следует, что

$$y[(l+2)T_и] = k_1 x[(l+1)T_и] + k_0 x(lT_и) - a_1 y[(l+1)T_и] - a_0 y(lT_и). \qquad (14.39)$$

Рекуррентное соотношение (14.39) позволяет вычислять дискретные значения выходного сигнала по его значениям и значениям входного сигнала в два предшествующих момента съема. Оно справедливо как при положительных, так и при отрицательных значениях l. При расчете следует начинать с $l=-2$. При этом определяется $y(0)$, равное нулю, так как входной и выходной сигналы обычно равны нулю при отрицательных t. Следующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &y(T_и) = k_1 x(0),\\ &y(2T_и) = k_1 x(T_и) + k_0 x(0) - a_1 y(T_и),\\ &y(3T_и) = k_1 x(2T_и) + k_0 x(T_и) - a_1 y(2T_и) - a_0 y(T_и)]\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}\right\} \qquad (14.40)$$

Число слагаемых при суммировании для получения $y(lT_и)$ постоянно и в рассмотренном примере (начиная с $l=1$) равно четырем. При исследовании систем более высоких порядков оно увеличивается (для непрерывной части n-го порядка — $2n$ слагаемых).

Для вычисления процессов в импульсных системах автоматического регулирования *вторым методом* можно воспользоваться соотношением (13.10), полученным на основании принципа суперпозиции. Подставив в него $\varepsilon(iT_и)=x(iT_и)-y(iT_и)$, получим рекуррентное соотношение

$$y(lT_и)=\sum_{i=0}^{l} x(iT_и)\,w_{пн}[(l-i)T_и]-$$
$$-\sum_{i=0}^{l} y(iT_и)\,w_{пн}[(l-i)T_и]. \qquad (14.41)$$

Начинать расчеты следует с $l=0$. При этом, поскольку $w_{пн}(0)=0$, $y(0)$ также равно нулю. Последующие значения:

$$\left.\begin{aligned} &y(T_и)=x(0)\,w_{пн}(T_и),\\ &y(2T_и)=x(0)w_{пн}(2T_и)+x(T_и)\,w_{пн}(T_и)-y(T_и)\,w_{пн}(T_и),\\ &y(3T_и)=x(0)w_{пн}(3T_и)+x(T_и)w_{пн}(2T_и)+x(2T_и)w_{пн}(T_и)-\\ &\qquad\qquad -y(T_и)\,w_{пн}(2T_и)-y(2T_и)\,w_{пн}(T_и)\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{aligned}\right\} \qquad (14.42)$$

и т. д.

Число слагаемых, которые необходимо суммировать для получения $y(lT_и)$, равно $2l-1$; оно возрастает с ростом l, что затрудняет вычисления. Правда, практически максимальное число слагаемых ограничено при затухающих весовых функциях $w_{пн}(t)$.

Для тех случаев, когда изображение $Y^*(p)$ представляет собой дробно-рациональную функцию от $e^{pT_и}$ (что имеет место, если изображение входного сигнала $X^*(p)$ есть дробно-рациональная функция), можно рекомендовать *третий метод* нахождения дискретных значений $y(lT_и)$, основанный на разложении $Y^*(p)$ в ряд по степеням $e^{-pT_и}$. Поскольку на основании (12.12)

$$Y^*(p)=\sum_{l=0}^{\infty} y(lT_и)\,e^{-plT_и},$$

то дискретные значения $y(lT_и)$ представляют собой коэффициенты ряда по степеням $e^{-pT_и}$. Разложение в ряд можно производить, записав числитель и знаменатель $Y^*(p)$ в порядке убывания степеней $e^{pT_и}$,

$$Y^*(p) = \frac{B^*(p)}{A^*(p)} = \frac{b_m e^{mpT_и} + b_{m-1} e^{(m-1)pT_и} + \ldots + b_0}{a_n e^{npT_и} + a_{n-1} e^{(n-1)pT_и} + \ldots + a_0},$$

по формулам (9.53) или непосредственно, выполняя деление числителя на знаменатель, по правилам деления полиномов.

В результате деления в общем случае получается бесконечный ряд, коэффициенты которого представляют собой искомые дискретные значения выходного сигнала.

Все рассмотренные методы применимы для анализа процессов в замкнутых и разомкнутых импульсных системах автоматического управления. Во втором случае соотношение (14.41) упрощается, так как исчезают слагаемые в правой части, содержащие значения выходного сигнала.

Переходная функция и весовая функция импульсных систем. Динамические свойства импульсных систем (как замкнутых, так и разомкнутых) можно характеризовать с помощью переходной функции $h(t)$ и весовой функции $w(t)$, имеющих тот же смысл, что и в случае непрерывных систем. Наиболее просто можно определить их дискретные значения $h(lT_и)$ и $w(lT_и)$. Если рассматривать эквивалентную схему импульсной системы, изображенную на рис. 14.9,*а*, то $h(lT_и)$ могут быть найдены по реакции системы на дискретную единичную функцию $1_0^*(t)$ на входе (рис. 14.9,*б*). Дискретные значения весовой функции $w(lT_и)$ определяются реакцией системы на единичный импульс на ее входе (рис. 14.9,*в*).

В случае разомкнутых импульсных систем $h(t)$ и $w(t)$ являются соответственно переходной и весовой функциями приведенной непрерывной части — $h_{пн}(t)$ и $w_{пн}(t)$.

Зная весовую функцию импульсной системы, можно найти дискретные значения сигнала на выходе системы при произвольных воздействиях на ее входе. Формула может быть получена на основе принципа суперпозиции аналогично тому, как это было сделано в § 13.2 при выводе (13.9),

$$y(t) = \sum_{i=0}^{l} x(iT_и)\, w(t - iT_и) \tag{14.43}$$

или для дискретных моментов съема

$$y(lT_и) = \sum_{i=0}^{l} x(iT_и)\, w[(l-i)T_и] =$$

$$= \sum_{i=0}^{l} x[(l-i)T_и]\, w(iT_и). \tag{14.44}$$

Второе равенство (14.44) получено путем замены $l-i$ на i в первом и изменения порядка суммирования.

Этот способ нахождения дискретных значений сигналов может применяться наряду со способами, рассмотренными в настоящем параграфе ранее.

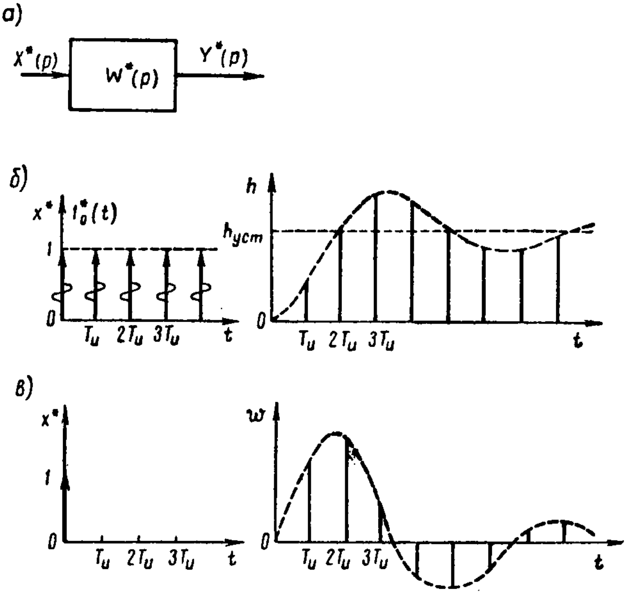


Рис. 14.9

Подчеркнем аналогию между выражениями (14.44) и (2.83) для непрерывных систем; в (2.83) выходной сигнал определяется путем интегрирования, а в (14.44), поскольку для управления применены квантованные по времени сигналы, — путем суммирования.

Если подставить $x(iT_и)=1$ в (14.44), то можно получить переходную функцию в дискретные моменты времени $h(lT_и)$, выраженную через весовую функцию,

$$h(lT_и)=\sum_{i=0}^{l} w[(l-i)T_и]=\sum_{i=0}^{l} w(iT_и). \qquad (14.45)$$

Обратная зависимость

$$w(lT_и)=\sum_{i=0}^{l} w(iT_и)-\sum_{i=0}^{l-1} w(iT_и)=$$

$$=h(lT_и)-h[(l-1)T_и]=\nabla h(lT_и). \qquad (14.46)$$

где $\nabla h(lT_и)$ — так называемая *нисходящая разность первого порядка дискретных значений переходной функции* h.

Формулы (14.45) и (14.46) аналогичны формуле (2.33) для непрерывных систем, связывающей переходную и весовую функции.

Изображения дискретных сигналов $h^*(t)$ и $w^*(t)$, образованных из переходной и весовой функций импульсной системы, связаны между собой выражением

$$H^*(p) = W^*(p)\,\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и} - 1}. \qquad (14.47)$$

Дискретные значения $h(lT_и)$ и $w(lT_и)$ можно находить, пользуясь способами, рассмотренными выше в данном параграфе. Кроме того, зная передаточные функции, можно их определить по формуле разложения (12.57).

Если передаточная функция $W^*(p) = \frac{K^*(p)}{A^*(p)}$, то

$$h(lT_и) = \sum_{\nu=1}^{n+1} \frac{K^*(p_\nu)e^{p_\nu T_и}}{\frac{d}{d(e^{pT_и})}[A^*(p)(e^{pT_и} - 1)]|_{p=p_\nu}}\, e^{p_\nu (l-1)T_и}, \qquad (14.48)$$

где p_ν — корни полинома $A^*(p)(e^{pT_и} - 1)$ ($A^*(p)$ имеет степень n).

Если вынести из-под знака суммы слагаемое, соответствующее известному корню $p = 0$, то

$$h(lT_и) = \frac{K^*(0)}{A^*(0)} + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{K^*(p_\nu)}{(e^{p_\nu T_и} - 1)\dot{A}^*(p_\nu)}\, e^{p_\nu l T_и}, \qquad (14.49)$$

где

$$\dot{A}^*(p) = \frac{dA^*(p)}{d(e^{pT_и})};$$

p_ν — n корней характеристического уравнения импульсной системы $A^*(p) = 0$.

Вынесенное слагаемое представляет собой установившееся значение переходной функции

$$h_{уст} = \frac{K^*(0)}{A^*(0)} = W^*(0). \qquad (14.50)$$

Вторая составляющая, содержащая сумму дискретных экспонент, является переходной составляющей. Она затухает в устойчивых импульсных системах регулирования, когда все корни характеристического уравнения расположены слева от мнимой оси.

Дискретные значения весовой функции по формуле разложения

$$w(lT_и)=\sum_{\nu=1}^{n}\frac{K^*(p_\nu)}{e^{p_\nu T_и}\dot{A}^*(p_\nu)}\,e^{p_\nu lT_и}. \qquad (14.51)$$

В устойчивой импульсной системе $w(lT_и)$ затухает при $l\to\infty$.

Пример 14.5. Найдем дискретные значения переходной функции для цифровой следящей системы с передаточной функцией

$$W_з^*(p)=\frac{kT_и}{e^{pT_и}-1+kT_и},$$

полученной в примере 13.4.

Характеристическое уравнение системы

$$e^{pT_и}-1+kT_и=0,$$

откуда для единственного корня имеем выражение

$$e^{p_1T_и}=1-kT_и. \qquad (14.52)$$

Вычисляя для этого значения $h\,(lT_и)$ по формуле (14.49), получаем

$$h(lT_и)=1+\frac{kT_и}{-kT_и\cdot 1}(1-kT_и)^l=1-(1-kT_и)^l. \qquad (14.53)$$

Установившееся значение $h_{уст}=1$.

Рассмотрим получение дискретных значений весовой функции способом, основанным на разложении изображения $W^*(p)$ в ряд по степеням $e^{-pT_и}$:

$$W^*(p)=\frac{K^*(p)}{A^*(p)}=\frac{k_me^{mpT_и}+k_{m-1}e^{(m-1)pT_и}+\ldots+k_0}{a_ne^{npT_и}+a_{n-1}e^{(n-1)pT_и}+\ldots+a_0}=$$
$$=w\,[(n-m)\,T_и]\,e^{-(n-m)pT_и}+$$
$$+w\,[(n-m+1)\,T_и]\,e^{-(n-m+1)pT_и}+\ldots. \qquad (14.54)$$

Если спроектировать импульсную систему регулирования так, что

$$\left.\begin{aligned}a_{n-1}=a_{n-2}=\ldots=a_0=0,\\ A^*(p)=a_ne^{npT_и},\end{aligned}\right\} \qquad (14.55)$$

то ряд (14.54) получается конечным

$$W^*(p)=\frac{1}{a_n}[k_me^{-(n-m)pT_и}+k_{m-1}e^{-(n-m+1)pT_и}+$$
$$+\ldots+k_0e^{-npT_и}], \qquad (14.56)$$

все остальные члены ряда равны нулю.

Это означает, что весовая функция (ее дискретные значения) затухает за конечное число периодов $T_и$, равное порядку системы n. При этом условии переходные процессы в импульсной системе при произвольных воздействиях затухают для дискретных значений за n периодов $T_и$. Действительно, согласно (14.44)

$$y(lT_и) = \sum_{i=0}^{l} x[(l-i)T_и]\,w(iT_и) = \sum_{i=0}^{\infty} x[(\infty - i)T_и]\,w(iT_и) - \sum_{i=l+1}^{\infty} x[(\infty - i)T_и]\,w(iT_и). \quad (14.57)$$

Первая сумма в (14.57) представляет собой вынужденную составляющую дискретных значений выходного сигнала, вторая — переходную составляющую. Если выполнены условия (14.55), то при $l \geqslant n$ переходная составляющая делается равной нулю и в системе начинается вынужденный процесс.

Подобное явление не встречалось в непрерывных системах автоматического регулирования, где переходные процессы при произвольных воздействиях принципиально затухали лишь при $t \to \infty$.

Выполнение условий конечной длительности (14.55) делает импульсную систему оптимальной в смысле ее быстродействия, так как в любом случае при прочих равных условиях длительность переходных процессов будет больше. Такие системы иногда называют *системами с бесконечной степенью устойчивости*, поскольку при выполнении (14.55) характеристическое уравнение

$$a_0 e^{npT_и} = 0 \quad (14.58)$$

имеет n корней, равных ∞.

Заметим, что получение оптимальных законов управления в импульсных системах может натолкнуться на необходимость использования очень больших управляющих сигналов (особенно при малых $T_и$), которые не смогут быть реализованы из-за ограничений в усилительных устройствах систем.

Пример 14.6. Найдем условия конечной длительности переходных процессов в импульсной системе автоматического регулирования, рассмотренной в примерах 13.1, 13.3. Передаточная функция замкнутой системы

$$W_з^*(p) = \frac{k\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}{e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T}} + k\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}.$$

Отсюда получаем условие конечной длительности

$$k = \frac{e^{-\frac{T_и}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{14.59}$$

При этом

$$W_з^*(p) = e^{-\frac{T_и}{T}} \cdot e^{-pT_и}. \tag{14.60}$$

Весовая функция имеет единственное отличное от нуля дискретное значение при $t = T_и$. Оно показано на рис. 14.10,*а*. Дискретные значения переходной функции, полученные суммированием, согласно (14.45), показаны на рис. 14.10,*б*.

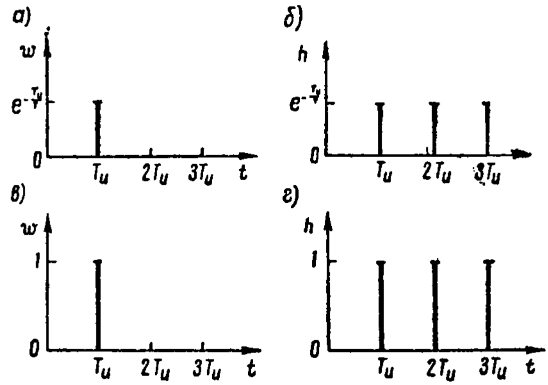


Рис. 14.10

Пример 14.7. Найдем условия конечной длительности переходных процессов в цифровой следящей системе, передаточная функция которой получена в примере 13.4. При $T = 0$

$$W_з^*(p) = \frac{kT_и}{e^{pT_и} - 1 + kT_и},$$

откуда условие конечной длительности

$$kT_и = 1, \; k = \frac{1}{T_и}. \tag{14.61}$$

При выполнении (14.61) передаточная функция

$$W_з^*(p) = e^{-pT_и}. \tag{14.62}$$

Весовая функция $W_з$ имеет лишь одно отличное от нуля дискретное значение при $t = T_и$. На рис. 14.10, *в*, *г* показаны дискретные значения весовой и переходной функций системы.

При $T \neq 0$ для $W_з^*(p)$ справедливо выражение (13.70)

$$W_з^*(p) = \frac{k_1 e^{pT_и} + k_0}{e^{2pT_и} + a_1 e^{pT_и} + a_0},$$

где коэффициенты выражаются согласно (14.37).

Условия конечной длительности принимают вид

$$\left.\begin{aligned} &k\left[T_и - T\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)\right] - \left(1 + e^{-\frac{T_и}{T}}\right) = 0,\\ &k\left[T\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right) - T_и e^{-\frac{T_и}{T}}\right] + e^{-\frac{T_и}{T}} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{14.63}$$

Складывая почленно оба условия, получаем

$$kT_и\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right) - 1 = 0,$$

откуда

$$kT_и = \frac{1}{1 - e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{14.64}$$

При подстановке найденного $kT_и$ во второе условие (14.63) получается

$$kT = \frac{e^{-2\frac{T_и}{T}}}{\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)^2}. \tag{14.65}$$

Деля почленно (14.65) на (14.64), находим уравнение для T

$$\frac{T}{T_и} = \frac{e^{-2\frac{T_и}{T}}}{1 - e^{-\frac{T_и}{T}}}. \tag{14.66}$$

Нетрудно видеть, что уравнение (14.66) имеет единственное конечное решение $T = 0$. Таким образом, в цифровой следящей системе при $T \neq 0$ нельзя реализовать условия конечной длительности.

Рассмотренный пример показывает, что конечная длительность переходных процессов в импульсных системах не всегда может быть достигнута путем простого подбора их параметров. Иногда для этого приходится менять структуру системы, вводя корректирующие звенья, обратные связи и т. д.

Определение закона изменения выходных сигналов импульсных систем в интервалах между моментами съема. Рассмотренные выше методы позволяют определять закон изменения выходных сигналов импульсных систем автоматического регулирования лишь в дискретные моменты времени (моменты съема — 0; $T_и$; $2T_и$; $3T_и$...). Очень часто информация о поведении системы в дискретные моменты времени оказывается достаточной для того, чтобы судить о ее поведении в интервалах между этими моментами. Так бывает, если непрерывная часть системы имеет полосу пропускания, ограниченную частотой $\omega_{гр\,1}$, и частота работы импульсного элемента настолько велика, что $\omega_и \geqslant 2\omega_{гр\,1}$. В этом случае сигнал на выходе импульсной системы удовлетворяет условия импульсной теоремы (см. § 12.2) и поэтому может быть восстановлен из дискретных значений по формуле (12.38).

Практически проведение плавной огибающей через найденные дискретные значения выходного сигнала дает достаточно правильную характеристику поведения системы в интервалах между моментами съема при условии, что импульсный период $T_и$ много меньше основной постоянной времени непрерывной части системы.

Иногда, однако, знание дискретных значений сигналов в импульсных системах не является достаточным для полного представления об их поведении. В этом случае возникает задача определения закона изменения сигналов в интервалах между моментами съема.

Изображение непрерывного сигнала $y(t)$ на выходе импульсной системы автоматического регулирования согласно (13.6) можно получить, зная изображение дискретного сигнала рассогласования $E^*(p)$,

$$Y(p) = W_{пн}(p)\, E^*(p),$$

где $E^*(p)$ можно определить из (13.72), так что

$$Y^*(p) = W_{пн}(p)\frac{X^*(p)}{1 + W_р^*(p)}. \qquad (14.67)$$

Переход к оригиналу $y(t)$ можно осуществить с помощью теоремы умножения изображений

$$y(t) = \int_0^t \varepsilon^*(\tau)\, w_{пн}(t-\tau)\, d\tau. \qquad (14.68)$$

Подставляя

$$\varepsilon^*(\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \varepsilon(iT_и)\,\delta(\tau - iT_и),$$

получаем

$$y(t) = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon(iT_и)\, w_{пн}(t - iT_и), \qquad (14.69)$$

где l — целая часть числа $\frac{t}{T_и}$,

$w_{пн}(t)$ — весовая функция приведенной непрерывной части.

Выражение (14.69) совпадает с (13.9), полученным на основе принципа суперпозиции. Оно дает возможность найти закон изменения y в интервалах между моментами съема, если заранее найдены дискретные значения рассогласования, что можно определить на основе одного из описанных выше методов.

Пример 14.8. Рассмотрим цифровую следящую систему при $T = 0$ (примеры 13.2, 14.5). Весовая функция, соответствующая $w_{пн}(p) = \frac{k}{p}$,

$$w_{пн}(t) = \begin{cases} kt & \text{при } 0 \leqslant t < T_и, \\ kT_и & \text{при } T_и \leqslant t. \end{cases} \qquad (14.70)$$

Ее график изображен на рис. 14.11,*а*. Сигнал $y(t)$ изменяется в интервалах между моментами съема по линейному закону, поэтому дискретные значения $y(lT_и)$ могут быть соединены прямыми линиями. В частности, переходная функция системы, дискретные значения которой были получены в примере 14.5 (14.53), имеет вид, изображенный на рис. 14.11, *б*. Весовая и переходная функции этой системы при выполнении условий конечной длительности показаны на рис. 14.11, *в* и *г* (дискретные значения были показаны на рис. 14.10, *в* и *г*).

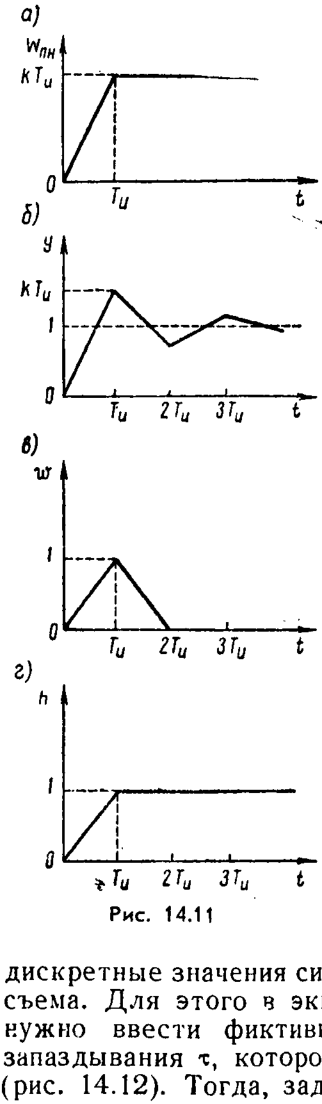


Рис. 14.11

Переход от изображения (14.67) к оригиналу на основании формулы обращения

$$y(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}Y(p)e^{pT}dp=$$

$$=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}W_{пн}(p)\frac{X^*(p)}{1+W^*_р(p)}e^{pt}dp \quad (14.71)$$

сопряжен с большими трудностями, которые связаны с бесконечно большим количеством полюсов подынтегрального выражения. Эти трудности сказываются даже при использовании для вычисления интеграла (14.71) при $p=j\omega$ приближенных графо-аналитических методов типа метода трапецеидальных характеристик, поскольку спектр выходного сигнала

$$Y(j\omega)=W_{пн}(j\omega)\frac{X^*(j\omega)}{1+W^*_р(j\omega)} \quad (14.72)$$

изображается довольно сложными кривыми (см. рис. 13.1, *б*).

Методы, разработанные для определения дискретных значений сигналов в импульсных системах автоматического регулирования в моменты съема, можно распространить и на дискретные значения сигналов в промежутках между моментами съема. Для этого в эквивалентную схему импульсной системы нужно ввести фиктивное запаздывающее звено с временем запаздывания τ, которое можно менять в пределах от 0 до $T_и$ (рис. 14.12). Тогда, задаваясь различными значениями времени запаздывания, можно исследовать сигнал на выходе системы в промежутках между моментами съема. Очевидно, что дискретное значение сигнала в l-й момент съема на выходе после запаздывающего звена равно значению действительного сигнала на выходе системы в момент времени $t = lT_и - \tau$ (рис. 14.13).

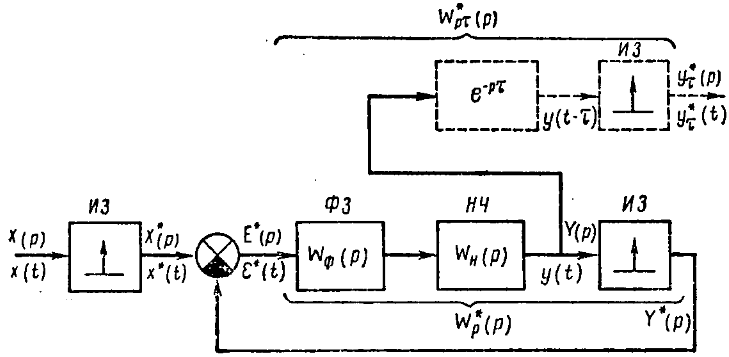


Рис. 14.12

Изображение сигнала на фиктивном выходе после запаздывающего звена

$$Y^*_\tau(p) = \frac{W^*_{p\tau}(p)}{1 + W^*_p(p)} X^*_p = W^*_{з\tau}(p)\, X^*(p), \qquad (14.73)$$

где $W^*_{p\tau}(p)$ — передаточная функция разомкнутой импульсной системы, включающей звено запаздывания. Она может быть получена на основании выражения (13.35) или с помощью таблиц [Л.17].

Переход от изображения к дискретным значениям оригинала $y(lT_и - \tau)$ может быть выполнен с помощью любого из рассмотренных выше методов.

Естественно, что рассмотренные методы анализа поведения между моментами съема могут применяться и для разомкнутых импульсных систем; при этом соответствующие формулы упрощаются.

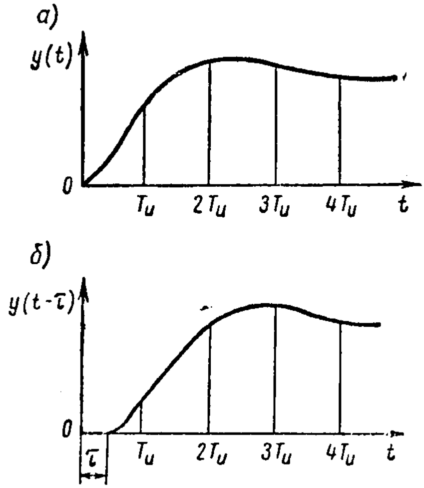


Рис. 14.13

Установившиеся процессы в импульсных системах. Рассмотрим установившиеся значения дискретных значений сигналов в импульсных системах автоматического регулирования при стандартных воздействиях. Прежде всего покажем, что установившееся значение последовательности дискретных значений некоторого сигнала $x(lT_и)$ может быть найдено по изображению $X^*(p)$. Для этого представим $x(lT_и)$ в виде суммы приращений (разностей) для всех моментов съема, начиная с $t=0$,

$$x(lT_и)=x(0)+[x(T_и)-x(0)]+\ldots+$$
$$+\{x(lT_и)-x[(l-1)T_и]\}=\sum_{i=0}^{l}\nabla x(iT_и). \qquad (14.74)$$

Установившееся значение, к которому стремится последовательность $x(lT_и)$, можно получить из (14.74) при $l\to\infty$

$$x_{уст}=\sum_{i=0}^{\infty}\nabla x(iT_и). \qquad (14.75)$$

Сумма всех дискретных значений некоторой величины $f(lT_и)$ может быть получена по изображению

$$F^*(p)=\sum_{l=0}^{\infty}f(lT_и)\,e^{-plT_и},$$

если подставить $p=0$ в $F^*(p)$,

$$F^*(0)=\sum_{l=0}^{\infty}f(lT_и). \qquad (14.76)$$

На этом основании можно написать, что

$$x_{уст}=\lim_{p\to 0}\nabla X^*(p), \qquad (14.77)$$

где $\nabla X^*(p)$ — изображение последовательности разностей импульсов $\nabla x^*(t)=x^*(t)-x^*(t-T_и)$:

$$\nabla X^*(p)=X^*(p)-e^{-pT_и}X^*(p)=(1-e^{pT_и})\,X^*(p). \qquad (14.78)$$

Таким образом,

$$x_{уст}=\lim_{p\to 0}(1-e^{-pT_и})\,X^*(p)=\lim_{p\to 0}\frac{e^{pT_и}-1}{e^{pT_и}}X^*(p). \qquad (14.79)$$

Доказанная теорема является аналогом теоремы о конечном значении для непрерывных величин (см. приложение П.1).

Найдем теперь выражение для установившегося рассогласования импульсной системы автоматического регулирования при действии единичной функции на ее входе — уставке. Для изображений справедливо равенство

$$\text{E}^*(p)=W_{\varepsilon}^*(p)\,1_0^*(p)=W_{\varepsilon}^*(p)\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и}-1}=$$
$$=\frac{1}{1+W_р^*(p)}\cdot\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и}-1}=\frac{D^*(p)}{K^*(p)+D^*(p)}\cdot\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и}-1}, \qquad (14.80)$$

где $\frac{e^{pT_и}}{e^{pT_и}-1}$ — изображение единичного дискретного сигнала $1_0^*(t)$.

Далее получаем установившееся рассогласование

$$\varepsilon_{уст}=\lim_{p\to 0} W_\varepsilon^*(p)=\lim_{p\to 0}\frac{D^*(p)}{K^*(p)+D^*(p)}. \tag{14.81}$$

Система будет астатической по уставке, если $\varepsilon_{уст}=0$, что может иметь место только при наличии у передаточной функции $W_\varepsilon^*(p)$ нуля хотя бы первого порядка в точке $p=0$. Иначе говоря, знаменатель передаточной функции разомкнутой системы должен содержать множитель $e^{pT_и}-1$, т. е.

$$D^*(p)=(e^{pT_и}-1)D_1^*(p). \tag{14.82}$$

В §13.2 было показано, что это имеет место, если непрерывная часть импульсной системы содержит последовательно включенное интегрирующее звено [см. (13.43)].

Если на входе импульсной системы автоматического регулирования действует возмущение, представляющее собой степенную функцию $x=t^n$, то его изображение согласно табл. 12.2

$$X^*(p)=\frac{T_и^n e^{pT_и}}{(e^{pT_и}-1)^{n+1}}R_n^*(p), \tag{14.83}$$

где $R_n^*(p)$ — полином степени $n-1$ относительно $e^{pT_и}$, не имеющий нулевых корней.

В этом случае для рассогласования получаются следующие выражения:

$$\begin{aligned}E^*(p)&=W_{зе}^*(p)\frac{T_и^n e^{pT_и}}{(e^{pT_и}-1)^{n+1}}R_n^*(p)=\\&=\frac{D^*(p)}{K^*(p)+D^*(p)}\frac{T_и^n e^{pT_и}}{(e^{pT_и}-1)^{n+1}}R_n^*(p),\end{aligned} \tag{14.84}$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_{уст}&=\lim_{p\to 0} W_{зе}^*(p)\frac{T_и^n R_n^*(p)}{(e^{pT_и}-1)^n}=\\&=\lim_{p\to 0}\frac{D^*(p)}{K^*(p)+D^*(p)}\frac{T_и^n R_n^*(p)}{(e^{pT_и}-1)^n}.\end{aligned} \tag{14.85}$$

Если $D^*(p)$ содержит в качестве сомножителя $(e^{pT_и}-1)^{n+1}$, то $\varepsilon_{уст}=0$. Такая *система является астатической* системой $n+1$-го порядка по уставке. Она может быть реализована путем последовательного включения в непрерывную часть $n+1$ интегрирующих звеньев.

В статической импульсной системе автоматического регулирования установившееся значение рассогласования при действии на входе системы единичного сигнала

$$\varepsilon_{\text{уст}} = W^*_{з\varepsilon}(0) = \frac{1}{1 + W^*_{\text{р}}(0)}, \tag{14.86}$$

что аналогично (9.15) для непрерывных систем. Постоянные дискретные значения рассогласования при произвольной форме управляющих импульсов $s(t)$ приводят к пульсации выходного сигнала импульсной системы вокруг среднего значения. На рис. 14.14 показаны графики изменения дискретного рассогласования ε^*, управляющих импульсов $\varepsilon_{\text{и}}$ и выходного сигнала y в импульсной системе автоматического регулирования с непрерывной частью, имеющей передаточную функцию $W_{\text{н}}(p) = \frac{k}{1 + pT}$, при действии на входе системы постоянного сигнала. Импульсы, действующие на непрерывную часть, имеют прямоугольную форму с коэффициентом заполнения $\gamma < 1$. Если сделать $\gamma = 1$, сохранив прямоугольную форму импульсов, то пульсаций не будет.

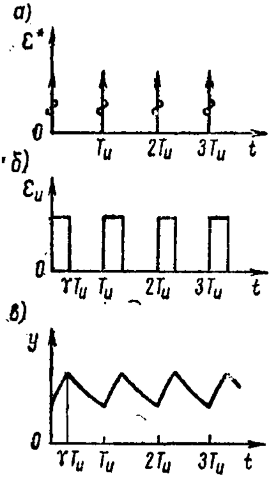


Рис. 14.14

Установившиеся значения сигналов в интервалах между моментами съема можно отыскивать, пользуясь методом, основанным на введении фиктивного запаздывания, который был рассмотрен в данном параграфе.

Дискретные значения динамической ошибки импульсной системы автоматического регулирования при действии на ее входе гармонического сигнала $Ae^{j\omega t}$ могут быть найдены по формуле

$$\varepsilon(lT_{\text{и}}) = \operatorname{Im} W^*_{\varepsilon}(j\omega) A e^{j\omega l T_{\text{и}}}. \tag{14.87}$$

Пример 14.9. Найдем установившееся значение рассогласования при единичном сигнале на входе импульсной системы (из примера 13.1) с передаточной функцией

$$W^*_{\text{р}}(p) = \frac{k\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{e^{pT_{\text{и}}} - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}}.$$

Согласно (14.86),

$$\varepsilon_{\text{уст}} = \frac{1}{1 + k}. \tag{14.88}$$

Пример 14.10. Установившаяся ошибка при единичном сигнале на входе цифровой следящей системы (см. пример 13.2) равна нулю, так как непрерывная часть системы содержит интегрирующее звено. Найдем установившуюся ошибку в этой системе при действии на ее входе линейно возрастающего сигнала $x = vt$. Изображение $X^*(p)$ находим в табл. 12.2

$$X^*(p) = \frac{vT_и e^{pT_и}}{(e^{pT_и} - 1)^2}.$$

Изображение рассогласования

$$\mathrm{E}^*(p) = \frac{(e^{pT_и} - 1)\left(e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)}{k_1 e^{pT_и} + k_0 + (e^{pT_и} - 1)\left(e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T}}\right)} \times$$

$$\times \frac{vT_и e^{pT_и}}{(e^{pT_и} - 1)^2}, \qquad (14.89)$$

где k_1 и k_0 выражаются согласно (14.37).

Установившаяся ошибка

$$\varepsilon_{уст} = vT_и \frac{1 - e^{-\frac{T_и}{T}}}{k_0 + k_1} = \frac{v}{k}. \qquad (14.90)$$

§ 14.3. КОСВЕННЫЕ МЕТОДЫ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА И СИНТЕЗ ИМПУЛЬСНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО РЕГУЛИРОВАНИЯ

Основные определения, касающиеся качества процессов в непрерывных системах автоматического регулирования, которые были даны в гл. IX, справедливы и для импульсных систем. Последние характеризуются теми же пятью показателями качества, относящимися к переходной функции: статическим отклонением $h_{уст}$, временем регулирования $t_р$, максимальным перерегулированием σ, временем максимального перерегулирования t_m, числом перерегулирований N за время регулирования $t_р$. Разница состоит лишь в том, что эти показатели в импульсных системах обычно определяют на основании информации о дискретных значениях переходной функции, поскольку последние могут быть получены относительно просто. Практически в большинстве импульсных систем автоматического регулирования частота работы импульсного элемента $\omega_и$ выбирается достаточно большой, так что системы по своим свойствам близки к непрерывным, при этом дискретные значения сигналов на графиках соединяются плавными кривыми. Поэтому о их качестве можно судить и на основании дискретной информации. Впрочем, могут быть найдены законы изменения сигналов в интервалах между моментами съема, и тогда появляется возможность определять качество импульсной системы на основании полной информации.

Показатели качества могут быть найдены после вычисления переходной функции $h(lT_и)$ одним из способов, указанных в предыдущем параграфе. Эта задача довольно трудоемка и поэтому для импульсных систем, как и для непрерывных систем, разработаны косвенные методы оценки качества: частотные, суммарные (аналогичные интегральным) и корневые. Здесь будут рассмотрены наиболее распространенные в практике частотные методы оценки качества импульсных систем.

Частотные методы оценки качества импульсных систем. Так же, как и в случае непрерывных систем, качество импульсных систем автоматического регулирования можно оценивать с помощью показателя колебательности M, запаса устойчивости по фазе γ_c, запаса устойчивости по усилению $L_{зап}$ *(дб)* и частоты среза ω_c.

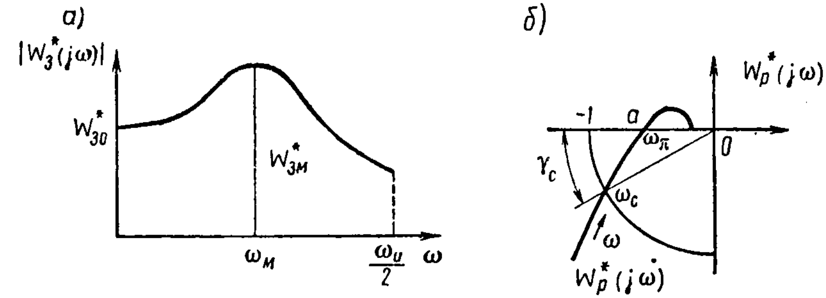


Рис. 14.15

Показатель колебательности определяется по амплитудно-частотной характеристике замкнутой системы (рис. 14.15, *а*)

$$M = \frac{W^*_{з.\,м}}{W^*_{з.\,о}}.$$

Запасы устойчивости определяются на комплексной плоскости $W^*_р(j\omega)$. γ_c показан на рис. 14.15, *б*; $L_{зап}$ определяется по $|W^*_р(j\omega_\pi)|$ [отрезок О*а* на рис. 14.15, *б*]

$$L_{зап} = 20\lg\frac{1}{|W^*_р(j\omega_\pi)|}.$$

Для того чтобы импульсная система автоматического регулирования была качественной, в частности, для того, чтобы максимальное перерегулирование σ в ней было в пределах 0,15—0,3, показатель колебательности и запасы устойчивости должны иметь те же значения, что и в непрерывных системах: $M = 1{,}2-1{,}5$; $\gamma_c = 30°-50°$; $L_{зап} = 8-12$ *дб*. Это особо справедливо для импульсных систем с малым $T_и$, близким по своим свойствам к непрерывным системам.

Пример 14.11. Цифровая следящая система первого порядка имеет в разомкнутом состоянии передаточную функцию

$$W_{\mathrm{p}}^{*}(p)=\frac{kT_{\mathrm{и}}}{e^{pT_{\mathrm{и}}}-1}.$$

Переходная функция для этой системы была найдена в примерах 14.5 и 14.8 и изображена на рис. 14.11. Из этого рисунка видно, что максимальное перерегулирование в системе просто связано с ее параметрами

$$\sigma=kT_{\mathrm{и}}-1. \tag{14.91}$$

Связь показателя колебательности с параметрами системы можно найти с помощью рис. 14.16, *а*, на котором изображен годограф инверсного ком-

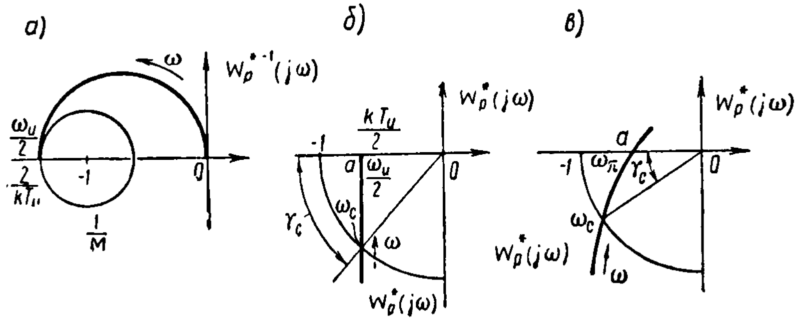


Рис. 14.16

плексного коэффициента усиления разомкнутой системы, показанный ранее на рис. 13.9 (кривая *1'*),

$$W_{\mathrm{p}}^{*-1}(j\omega)=\frac{e^{j\omega T_{\mathrm{и}}}-1}{kT_{\mathrm{и}}}.$$

Здесь же построена окружность равных значений M, которая касается годографа $W_{\mathrm{p}}^{*-1}(j\omega)$ в точке $-\frac{2}{kT_{\mathrm{и}}}$, $j0$.

Эта окружность (см. рис. 10.8) имеет центр в точке -1, $j0$, ее радиус равен $\frac{1}{M}$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{M}=\frac{2}{kT_{\mathrm{и}}}-1,$$

$$M=\frac{kT_{\mathrm{и}}}{2-kT_{\mathrm{и}}}$$

или, с учетом (14.91),

$$M=\frac{1+\sigma}{1-\sigma}. \tag{14.92}$$

Обратное соотношение имеет вид

$$\sigma=\frac{M-1}{M+1}. \tag{14.93}$$

Запасы устойчивости можно найти с помощью годографа $W_{\text{р}}^{*}(j\omega)$, который изображен на рис. 14.16, *б*. Из рисунка следует, что

$$\left.\begin{aligned} \gamma_{\text{с}} &= \arccos\frac{kT_{\text{и}}}{2}, \\ L_{\text{зап}} &= 20\lg\frac{2}{kT_{\text{и}}}. \end{aligned}\right\} \qquad (14.94)$$

На основании полученных формул просто рассчитываются значения $kT_{\text{и}}$ и M, $\gamma_{\text{с}}$ и $L_{\text{зап}}$ для крайних значений σ:

$\sigma = 0{,}15$,	$\sigma = 0{,}30$,
$kT_{\text{и}} = 1{,}15$,	$kT_{\text{и}} = 1{,}30$,
$M = 1{,}35$,	$M = 1{,}86$,
$\gamma_{\text{с}} = 55°$,	$\gamma_{\text{с}} = 50°$,
$L_{\text{зап}} = 4{,}8$ *дб*,	$L_{\text{зап}} = 3{,}8$ *дб*.

Значения $\gamma_{\text{с}}$ и M в этом примере получились завышенными, а $L_{\text{зап}}$ — заниженными по сравнению с приведенными выше рекомендациями. Причиной этого является нетипичная форма годографа рассматриваемой системы, имеющей первый порядок.

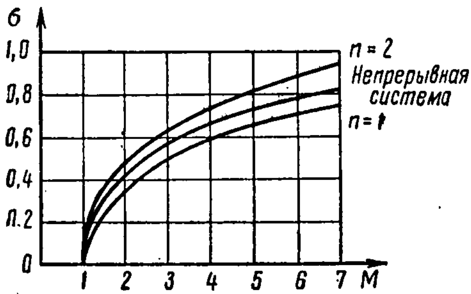


Рис. 14.17

Типичная форма годографа системы более высокого порядка в области средних частот приведена на рис. 14.16, *в*. Для систем с таким годографом, как это видно из рисунка, при тех же значениях M, что и в примере 14.11, запас по фазе будет меньше, а по усилению — больше, чем в следящей системе первого порядка. Значения показателя колебательности для систем высоких порядков должны быть в указанных выше пределах ($M = 1{,}2 \div 1{,}5$), при этом максимальное перерегулирование σ не выйдет за пределы 0,15—0,3. В подтверждение сказанного на рис. 14.17 приведена зависимость σ от M, рассчитанная с учетом закона изменения выходной величины в интервалах между моментами съема для импульсной следящей системы с передаточной функцией непрерывной части

$$W_{\text{н}}(p) = \frac{k}{p(1+pT)},$$

и прямоугольной формой управляющих импульсов с коэффициентом заполнения $\gamma = 1$. Эта зависимость отмечена обозначением $n = 2$. Здесь же для сравнения приведены зависимости для рассмотренной выше импульсной следящей системы первого порядка ($n = 1$) и для непрерывной следящей системы второго порядка [Л.26].

С и н т е з к о р р е к т и р у ю щ и х у с т р о й с т в в и м п у л ь с н ы х с и с т е м а х. Для улучшения качества импульсных систем автоматического регулирования в их непрерывные части можно включать (последовательно или параллельно) корректирующие звенья, с помощью которых можно деформировать частотные характеристики приведенной непрерывной части желательным образом. Поскольку комплексный коэффициент усиления приведенной непрерывной части зависит от $W_ф(j\omega)$, т. е.

$$W_{пн}(j\omega) = W_ф(j\omega)\, W_н(j\omega),$$

то коррекция может осуществляться также с помощью изменения формы управляющих импульсов $s(t)$, в результате чего будет деформироваться годограф $W_ф(j\omega)$ и, следовательно, $W_{пн}(j\omega)$ (формо-импульсная коррекция).

Помимо отмеченных способов коррекции, в импульсных системах можно использовать специфические импульсные корректирующие устройства, которые проще всего реализуются с помощью цифровых вычислительных устройств. При этом они включаются в схему так, как это показано на рис. 14.18,

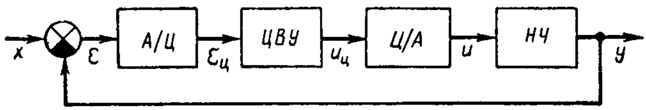


Рис. 14.18

на котором приняты следующие обозначения: *А/Ц* — аналого-цифровой преобразователь, *Ц/А* — цифро-аналоговый преобразователь, *ЦВУ* — цифровое вычислительное устройство, *НЧ* — непрерывная часть.

ЦВУ принимает на свой вход дискретные значения сигнала рассогласования $\dot{\varepsilon}(lT_и)$, производит необходимые вычисления и выдает дискретную последовательность чисел $u_ц(lT_и)$, реализующую тот или иной закон управления в системе. Эти числа преобразуются *Ц/А* в импульсы u, далее импульсы воздействуют на непрерывную часть.

ЦВУ может также производить сравнение выходного и входного сигналов, в этом случае аналого-цифровые преобразователи должны помещаться в цепях этих сигналов.

Программа *ЦВУ* может быть составлена таким образом, чтобы выходной сигнал $u_ц$ представлял собой результат решения линейного разностного уравнения вида

$$u_ц(lT_и) = \sum_{i=0}^{n} k_{n-i}\varepsilon_ц[(l-i)T_и] - \sum_{i=1}^{n} d_{n-i}u_ц[(l-i)T_и], \quad (14.95)$$

где k_i и d_i — постоянные коэффициенты.

В этом случае выходной сигнал представляет собой линейную комбинацию, образованную из дискретных значений входного и выходного сигналов для нескольких моментов съема; эти значения сигнала хранятся в памяти *ЦВУ*.

Если представить себе, что на входе и выходе *ЦВУ* действуют дискретные импульсные сигналы, представляющие собой последовательность модулированных единичных импульсов, причем модулирующие значения подчиняются соотношению (14.95), то можно написать

$$u_ц^*(t) = \sum_{i=0}^{n} k_{n-i} \varepsilon_ц^*(t - iT_и) - \sum_{i=1}^{n} d_{n-i} u_ц^*(t - iT_и). \qquad (14.96)$$

Отсюда можно перейти к уравнению в изображениях

$$U_ц^*(p) = \sum_{i=0}^{n} k_{n-i} \mathrm{E}_ц^*(p)\, e^{-piT_и} - \sum_{i=1}^{n} d_{n-i} U_ц^*(p)\, e^{-piT_и}, \qquad (14.97)$$

а далее — к передаточной функции корректирующего *ЦВУ*

$$W_к^*(p) = \frac{U_ц^*(p)}{\mathrm{E}_ц^*(p)} = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} k_{n-i} e^{-piT_и}}{1 + \sum\limits_{i=1}^{n} d_{n-i} e^{-piT_и}} =$$

$$= \frac{k_n e^{npT_и} + k_{n-1} e^{(n-1)(pT_и)} + \dots + k_0}{e^{npT_и} + d_{n-1} e^{(n-1)(pT_и)} + \dots + d_0}. \qquad (14.98)$$

Степень числителя $W_к^*(p)$ оказалась равной степени знаменателя n, потому что при составлении разностного уравнения в правой части было включено дискретное значение входного сигнала для момента $lT_и$. *ЦВУ* могут передавать входную

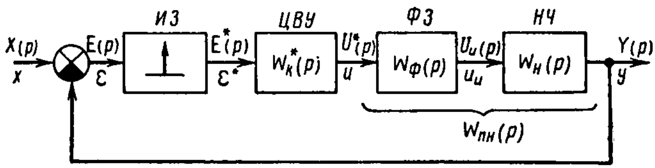


Рис. 14.19

информацию на выход практически одновременно с ее поступлением (с очень небольшим запаздыванием).

Эквивалентная схема импульсной системы автоматического регулирования изображена на рис. 14.19. Преобразователи *А*/*Ц* и *Ц*/*А* выполняют простое пропорциональное преобразование (пренебрегаем ошибками округления). Коэффициенты усиления преобразователей могут быть включены в $W_к^*(p)$ или в $W_{пн}(p)$.

Практически между сравнивающим звеном и *ЦВУ* может оказаться включенным какое-либо непрерывное звено, однако с помощью эквивалентных преобразований (см. § 13.3) в этом случае можно прийти к схеме, показанной на рис. 14.19.

Передаточная функция скорректированной разомкнутой системы, связывающая изображения $E^*(p)$ и $Y^*(p)$, выражается как

$$W^*_{\text{рк}}(p) = W^*_{\text{к}}(p)\, W^*_{\text{р}}(p), \tag{14.99}$$

где $W^*_{\text{р}}(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы до коррекции, которая в свою очередь равна $\frac{Y^*(p)}{U^*(p)}$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W^*_{\text{з}}(p) = \frac{W^*_{\text{рк}}(p)}{1 + W^*_{\text{рк}}(p)}.$$

Если из каких-либо соображений задана желаемая передаточная функция замкнутой системы $W^*_{\text{з}}(p)$, а также передаточная функция $W^*_{\text{р}}(p)$ системы без коррекции, то передаточная функция корректирующего *ЦВУ*

$$W^*_{\text{к}}(p) = \frac{W^*_{\text{рк}}(p)}{W^*_{\text{р}}(p)}, \tag{14.100}$$

где

$$W^*_{\text{рк}}(p) = \frac{W^*_{\text{з}}(p)}{1 - W^*_{\text{з}}(p)}. \tag{14.101}$$

Использование цифровых вычислительных устройств создает большие возможности для коррекции импульсных систем автоматического регулирования. Можно, например, добиться астатизма любого порядка путем включения в знаменатель $D^*(p)$ множителя $e^{pT_{\text{и}}} - 1$ в соответствующей степени. Для получения астатической системы первого порядка передаточная функция должна иметь вид

$$W^*_{\text{к}}(p) = \frac{1}{e^{pT_{\text{и}}} - 1}. \tag{14.102}$$

Соответствующее разностное уравнение имеет вид

$$u[(l+1)T_{\text{и}}] - u(lT_{\text{и}}) = \varepsilon(lT_{\text{и}})$$

или

$$u[(l+1)T_{\text{и}}] = \varepsilon(lT_{\text{и}}) + u(lT_{\text{и}}),$$

т. е.

$$\begin{gathered}
u(0) = 0,\\
u(T_{\text{и}}) = \varepsilon(0),\\
u(2T_{\text{и}}) = \varepsilon(T_{\text{и}}) + u(T_{\text{и}}) = \varepsilon(0) + \varepsilon(T_{\text{и}}),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
u[(l+1)T_{\text{и}}] = \sum_{i=0}^{l} \varepsilon(iT_{\text{и}}).
\end{gathered}$$

Таким образом, в этом случае *ЦВУ* представляет собой сумматор входных дискретных значений (дискретный интегратор) с запаздыванием на один период $T_и$.

Выше отмечалось, что в большинстве импульсных систем автоматического регулирования частота $\omega_и$ выбирается настолько больше основной постоянной времени непрерывной части, что по отношению к входным сигналам с ограниченным спектром (что практически почти всегда имеет место) системы ведут себя как непрерывные. Можно поэтому рекомендовать следующую упрощенную методику подбора $W^*_к(p)$.

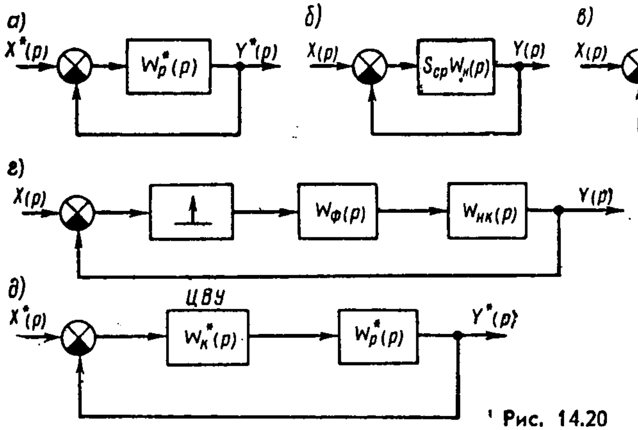


Рис. 14.20

Вначале вместо импульсной системы с передаточной функцией $W^*_р(p)$ (на рис. 14.20,*а*) рассматривают непрерывную систему с передаточной функцией $s_{ср} W_н(p)$ (рис. 14.20,*б*), пренебрегая тем самым влиянием квантования по времени и формой управляющих импульсов и учитывая лишь среднее значение последних в виде постоянного коэффициента $s_{ср}$. На основе методов синтеза непрерывных систем подбирается такая передаточная функция $s_{ср} W_{нк}(p)$ (рис. 14.20,*в*), которая обеспечивает желаемые показатели качества. Затем в эквивалентную схему с передаточной функцией $s_{ср}W_{нк}(p)$ включаются импульсное и формирующее звенья, выдающие импульсы той же формы и с той же частотой, что и в исходной системе (рис. 14.20,*г*).

Для структурной схемы (рис. 14.20,*г*) определяется передаточная функция $W^*_{рк}(p)$, которая затем реализуется в схеме с корректирующим *ЦВУ* (рис. 14.20,*д*). Последнее должно иметь передаточную функцию

$$W^*_к(p) = \frac{W^*_{рк}(p)}{W^*_р(p)}.$$

В отдельных случаях при синтезе корректирующих устройств стремятся получить импульсные системы с конечным временем переходных процессов. Рассмотрим два примера такого типа.

Пример 14.12. Найдем передаточную функцию корректирующего *ЦВУ*, обеспечивающего выполнение условий конечной длительности в цифровой следящей системе второго порядка, в которой не удается реализовать эти условия простым подбором параметров (пример 14.7). Система имеет передаточную функцию

$$W_{\text{р}}^{*}(p)=\frac{k_1 e^{pT_{\text{и}}}+k_0}{\left(e^{pT_{\text{и}}}-1\right)\left(e^{pT_{\text{и}}}-e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)},$$

где k_0 и k_1 задаются формулами (14.37).

Желаемая передаточная функция $W_{\text{з}}^{*}(p)$ при выполнении условий конечной длительности состоит из двух слагаемых

$$W_{\text{з}}^{*}(p)=w_{\text{з}}(T_{\text{и}})\,e^{-pT_{\text{и}}}+w_{\text{з}}(2T_{\text{и}})\,e^{-2pT_{\text{и}}}. \qquad (14.103)$$

Из условия сохранения астатизма системы следует (см. § 14.2), что

$$W_{\varepsilon}^{*}(0)=1-W_{\text{з}}^{*}(0)=0$$

или

$$W_{\text{з}}^{*}(0)=1,$$

откуда

$$w_{\text{з}}(T_{\text{и}})+w_{\text{з}}(2T_{\text{и}})=1. \qquad (14.104)$$

Учитывая это условие, запишем выражение (14.103) в виде

$$W_{\text{з}}^{*}(p)=w_{\text{з}}(T_{\text{и}})\,e^{-pT_{\text{и}}}+\left[1-w_{\text{з}}(T_{\text{и}})\right]e^{-2pT_{\text{и}}}. \qquad (14.105)$$

По формуле (14.101) находим передаточную функцию скорректированной системы в разомкнутом состоянии

$$W_{\text{рк}}^{*}(p)=\frac{w_{\text{з}}(T_{\text{и}})\,e^{pT_{\text{и}}}+1-w_{\text{з}}(T_{\text{и}})}{e^{2pT_{\text{и}}}-w_{\text{з}}(T_{\text{и}})\,e^{pT_{\text{и}}}-1+w_{\text{з}}(T_{\text{и}})}. \qquad (14.106)$$

Отсюда передаточная функция корректирующего *ЦВУ*

$$W_{\text{к}}^{*}(p)=\frac{w_{\text{з}}(T_{\text{и}})\,e^{pT_{\text{и}}}+1-w_{\text{з}}(T_{\text{и}})}{k_0 e^{pT_{\text{и}}}+k_1}\times$$

$$\times\frac{\left(e^{pT_{\text{и}}}-1\right)\left(e^{pT_{\text{и}}}-e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{e^{2pT_{\text{и}}}-w_{\text{з}}(T_{\text{и}})\,e^{pT_{\text{и}}}-1+w_{\text{з}}(T_{\text{и}})}. \qquad (14.107)$$

Выражение (14.107) дает программу для *ЦВУ*, которая обеспечивает оптимальную весовую функцию с любым желаемым $w_{\text{з}}(T_{\text{и}})$. Положим для упрощения, что

$$w_{\text{з}}(T_{\text{и}})=\frac{k_1}{k_1+k_0}=\frac{T_{\text{и}}-T\left(1-e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{T_{\text{и}}\left(1-e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}.$$

Тогда

$$W_{\text{к}}^*(p) = \frac{1}{kT_{\text{и}}\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)} \frac{e^{pT_{\text{и}}} - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}}{e^{pT_{\text{и}}} - a}, \tag{14.108}$$

где

$$a = \frac{T_{\text{и}} e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}} - T\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}{T_{\text{и}}\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)}. \tag{14.109}$$

Программа *ЦВУ* определяется разностным уравнением

$$u_{\text{ц}}(lT_{\text{и}}) - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}} u_{\text{ц}}[(l-1)T_{\text{и}}] =$$

$$= \frac{1}{kT_{\text{и}}\left(1 - e^{-\frac{T_{\text{и}}}{T}}\right)} \left\{\varepsilon_{\text{ц}}(lT_{\text{и}}) - a\varepsilon_{\text{ц}}[(l-1)T_{\text{и}}]\right\}. \tag{14.110}$$

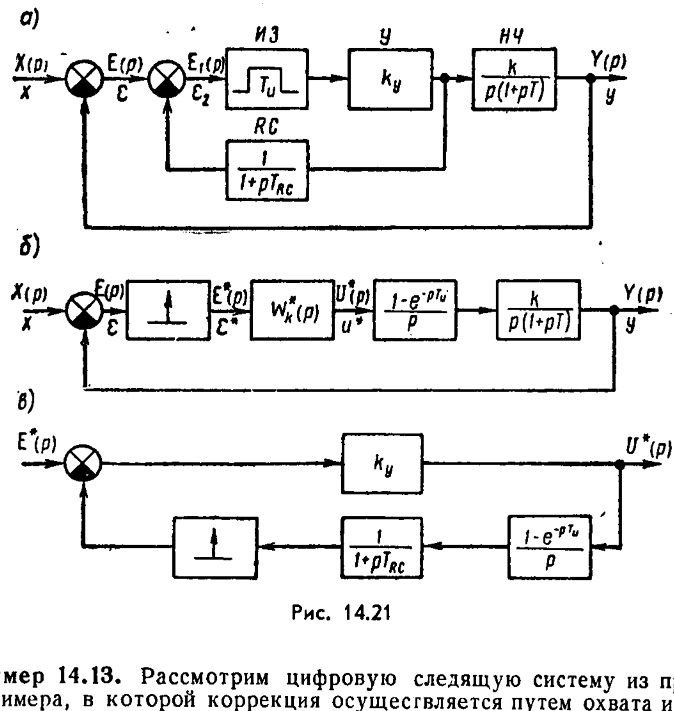


Рис. 14.21

Пример 14.13. Рассмотрим цифровую следящую систему из предыдущего примера, в которой коррекция осуществляется путем охвата импульсного звена с дополнительным усилителем У обратной связью с *RC*-цепью (рис. 14.21, *а*). Эквивалентная схема этой системы показана на рис. 14.21, *б*, где $W^*_к(p)$ — передаточная функция (для дискретных импульсных сигналов) контура, структурная схема которого дана на рис. 14.21,*в*,

$$W^*_к(p) = \frac{k_у}{1 + k_у \dfrac{1 - e^{-\frac{T_и}{T_{RC}}}}{e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T_{RC}}}}} =$$

$$= k_у \frac{e^{pT_и} - e^{-\frac{T_и}{T_{RC}}}}{e^{pT_и} + k_у\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T_{RC}}}\right) - e^{-\frac{T_и}{T_{RC}}}}. \qquad (14.111)$$

Эта передаточная функция подобна (14.108). Если взять и подобрать $k_у$ так, чтобы выполнялось равенство

$$a = e^{-\frac{T_и}{T}} - k_у\left(1 - e^{-\frac{T_и}{T}}\right), \qquad (14.112)$$

то обе передаточные функции станут идентичными.

Рассмотренные способы коррекции импульсных систем автоматического регулирования не исчерпывают всех возможностей в этом отношении. Совсем не рассмотрена, например, коррекция по возмущению. Более подробные сведения о синтезе корректирующих устройств можно найти в [Л. 23].

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. ЧАСТОТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЕТЕРМИНИРОВАННЫХ СИГНАЛОВ

Гармонический сигнал. Простейшим сигналом является гармоническое воздействие, выражаемое функцией

$$x = X_{m0}\cos(\omega_0 t + \psi_0), \qquad (П.1.1)$$

справедливой на всем интервале времени от $-\infty$ до $+\infty$ (рис. П.1.1,*а*). Этот сигнал может быть представлен в виде действительной или мнимой

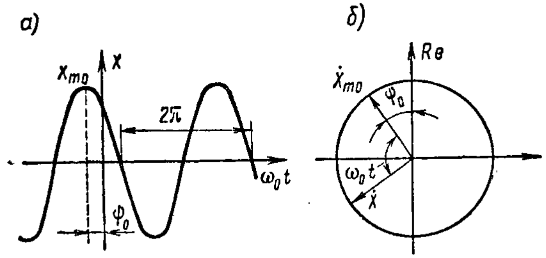


Рис. П.1.1

части некоторого комплекса $X(j\omega_0 t)$, вращающегося с угловой скоростью ω_0 и называемого *фазором*. Если начало отсчета времени выбрано так, что мгновенное значение сигнала равно вещественной части фазора (рис. П.1.1,*б*), то между мгновенным значением сигнала и его фазором существует зависимость

$$x(t) = \mathrm{Re}\, X(j\omega_0 t) = \mathrm{Re}\, \dot{X}_{m0}\, e^{j\omega_0 t}, \qquad (\text{П.1.2})$$

где $\dot{X}_{m0} = X_{m0}\, e^{j\psi_0}$ — комплексная амплитуда сигнала.

Фазор выражается через амплитуду, фазу и частоту гармонического сигнала

$$X(j\omega_0 t) = X_{m0}\, e^{j(\omega_0 t + \psi_0)}. \qquad (\text{П.1.3})$$

Часто в литературе вместо мгновенного значения гармонического сигнала пользуются фазором, имея в виду, что для перехода к мгновенному значению нужно взять вещественную (или мнимую) часть фазора.

Для гармонического сигнала частотный спектр содержит одну линию и его можно называть *моногармоническим* (рис. П.1.2,*а*). Иногда для

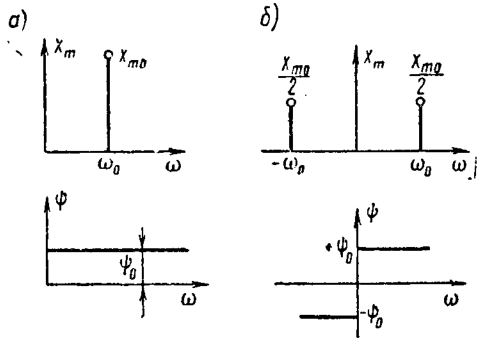


Рис. П.1.2

выражения гармонического сигнала удобно оперировать с двумя частотами — положительной ω_0 и отрицательной $-\omega_0$. В этом случае исходный гармонический сигнал равен сумме двух составляющих:

основной

$$\frac{1}{2} X(j\omega_0 t) = \frac{1}{2} \dot{X}_{m0} e^{j\omega_0 t}$$

и сопряженной

$$\frac{1}{2} \hat{X}(j\omega_0 t) = \frac{1}{2} \hat{X}_{m0} e^{-j\omega_0 t}.$$

Действительно,

$$x(t) = X_{m0} \cos(\omega_0 t + \psi_0) =$$

$$= \frac{1}{2} X_{m0} \left[e^{j(\omega_0 t + \psi_0)} + e^{-j(\omega_0 t + \psi_0)} \right]. \qquad (\text{П.1.4})$$

Таким образом, любой гармонический сигнал может быть представлен в виде суммы двух сопряженных фазоров: $\frac{1}{2} X(j\omega_0 t)$ и $\frac{1}{2} \hat{X}(j\omega_0 t)$. Частотный спектр в этом случае имеет две линии: одну — при ω_0, а вторую — при $-\omega_0$ (см. рис. П.1.2,*б*). Следовательно, один и тот же простейший гармонический сигнал можно характеризовать односторонним (несимметричным) частотным спектром (рис. П.1.2,*а*) и двухсторонним (симметричным) спектром (рис. П.1.2,*б*).

П е р и о д и ч е с к и й   с и г н а л. Любой периодический сигнал, удовлетворяющий условиям Дирихле, может быть разложен в ряд Фурье и представлен в виде совокупности гармонических составляющих. Периодическая функция с периодом T удовлетворяет условию

$$x(t+nT)=x(t).$$

Выразим периодический сигнал в виде симметричного двухстороннего спектра положительных и отрицательных частот. В этом случае

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(jk\omega_0)e^{jk\omega_0 t}, \tag{П.1.5}$$

где

$$X(jk\omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{-jk\omega_0 t}\,d(\omega_0 t) \tag{П.1.6}$$

и

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}.$$

С помощью выражений (П.1.5) и (П.1.6) любой реальный несинусоидальный периодический сигнал может быть представлен в виде дискретного спектра гармонических составляющих.

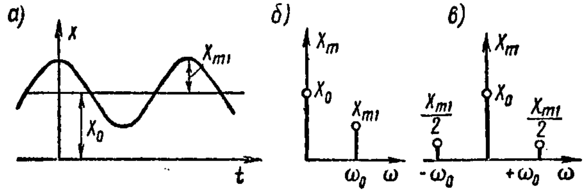


Рис. П.1.3

Пример П.1.1. Пусть $x(t)=X_0+X_{m1}\cos\omega_0 t$. Этот сигнал (рис. П.1.3,*а*) может быть представлен односторонним спектром, состоящим из постоянной составляющей X_0 и первой гармоники X_{m1}. Однако его можно представить и в виде двухстороннего спектра

$$x(t)=X_0+\frac{1}{2}X_{m1}\cos(-\omega_0 t)+\frac{1}{2}X_{m1}\cos(+\omega_0 t).$$

Дискретный спектр для этого случая показан на рис. П.1.3,*в*. Очевидно, что спектральные представления, приведенные на рис. П.1.3,*б* и *в*, тождественны. Спектр фаз для данного случая дает нуль при любых частотах.

Пример П.1.2. Пусть

$$x(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } nT-\frac{\tau}{2}<t<nT+\frac{\tau}{2}, \\ 0 \text{ при } nT+\frac{\tau}{2}<t<(n+1)T-\frac{\tau}{2}, \end{cases}$$

где n — любое целое число.

Тогда, по формуле (П.1.6),

$$X(jk\omega_0)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\frac{\tau\pi}{T}}^{+\frac{\tau\pi}{T}} e^{-jk\omega_0 t}\,d(\omega_0 t)=$$

$$=\frac{1}{2k\pi j}\left(e^{jk\frac{\pi\tau}{T}}-e^{-jk\frac{\pi\tau}{T}}\right)=\frac{\sin k\frac{\pi\tau}{T}}{k\pi}$$

и, следовательно,

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{\sin k\pi a}{k\pi}e^{jk\omega_0 t},$$

где

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T},\quad \frac{\tau}{T}=a.$$

Таким образом, периодический сигнал, показанный на рис. П.1.4, *а*, может быть представлен в виде дискретного симметричного спектра гармонических составляющих, показанного на рис. П.1.4, *в*.

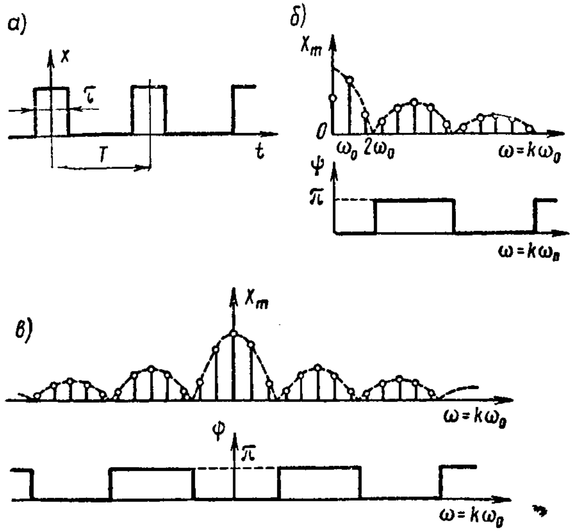


Рис. П.1.4

Выделив постоянную составляющую для $k\to\infty$ и просуммировав гармоники для $k=\pm|k|$, можно перейти к одностороннему спектру

$$x(t)=a+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2\sin k\pi a}{k\pi}\cos k\omega_0 t.$$

изображенному на рис. П.1.4, *б*.

Непериодический сигнал. Заданный аналитически непериодический сигнал также может быть разложен на гармонические составляющие. Такое разложение получается путем предельного устремления периода T сигнала, описываемого уравнениями (П.1.5) и (П.1.6), к бесконечности, а частоты ω_0 — к нулю. В этом случае, ряд Фурье преобразуется в интеграл Фурье

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\, e^{j\omega t}\, d\omega, \tag{П.1.7}$$

где

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-j\omega t} dt. \tag{П.1.8}$$

При этом одним из наиболее жестких условий, вытекающих из условий Дирихле, является абсолютная интегрируемость функции $x(t)$, т. е. $\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\, dt$ должен быть конечен.

С помощью интегралов (П.1.7) и (П.1.8) непериодический сигнал может быть представлен в виде бесконечного множества гармонических составляющих, образующих непрерывный спектр. Интеграл (П.1.8) носит название *прямого преобразования Фурье*, а интеграл (П.1.7) — *обратного преобразования Фурье.*

Если сигнал y связан с сигналом x уравнением

$$y = \frac{dx}{dt}, \tag{П.1.9}$$

то преобразование Фурье (П.1.8) для этого сигнала имеет следующий вид:

$$Y(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{dt}\, e^{-j\omega t}\, dt = j\omega X(j\omega). \tag{П.1.10}$$

Рассмотрим некоторые наиболее часто встречающиеся в теории управления простейшие непериодические сигналы.

Единичный скачок. *Единичным скачком* $1_0(t)$ называется функция, равная нулю при $t \leqslant 0$ и единице — при $t > 0$ (рис. П.1.5, *а*),

$$1_0(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } t > 0. \end{cases} \tag{П.1.11}$$

Единичный скачок может быть получен путем одного из предельных переходов:
или

$$1_0(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{t 1_0(t) - (t - \tau)\, 1_0(t - \tau)}{\tau}, \tag{П.1.12}$$

или

$$1_0(t) = \lim_{\alpha \to \infty} \begin{cases} 0 \text{ при } t \leqslant 0, \\ 1 - e^{-\alpha t} \text{ при } t > 0. \end{cases} \tag{П.1.13}$$

Для $1_0(t)$ не выполняется условие абсолютной интегрируемости, так как $\int_{-\infty}^{\infty} |1_0(t)|\, dt = \infty$. Поэтому преобразование Фурье не может быть применено непосредственно. Однако гармонический спектр единичного скачка может быть получен путем рассмотрения интегрируемой функции $x(t) = e^{-\alpha t}1_0(t)$ и последующего устремления α к нулю.

Для функции $e^{-\alpha t}1_0(t)$ получаем

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t}1_0(t)\, e^{-j\omega t}\, dt = \frac{1}{\alpha + j\omega}. \qquad (\text{П.1.14})$$

Производя предельный переход при $\alpha \to 0$, получаем частотный спектр единичного скачка

$$1_0(j\omega) = \lim_{\alpha \to 0} X(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = 1_0(\omega)\, e^{j\psi(\omega)}. \qquad (\text{П.1.15})$$

На рис. П.1.5, *б* показан спектр амплитуды и фазы единичного скачка.

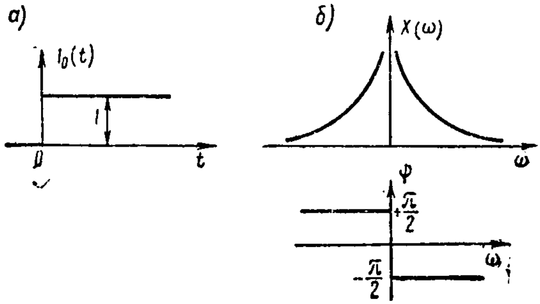


Рис. П.1.5

Единичный импульс. *Единичным импульсом* $\delta(t)$ называется импульс, интеграл которого равен единице, а продолжительность его стремится к нулю. Аналитическое выражение единичного импульса может быть представлено в следующем виде:

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau}\,[1_0(t) - 1_0(t - \tau)]. \qquad (\text{П.1.16})$$

Предельный переход для $\delta(t)$, выражаемый уравнением (П.1.16), показан на рис. (П.1.6, *а*). Там же на рис. П.1.6, *б* показано условное обозначение импульса $\delta(t)$ на временном графике.

Между единичным импульсом и единичным скачком может быть записана следующая зависимость:

$$\delta(t) = \frac{d}{dt}\, 1_0(t). \qquad (\text{П.1.17})$$

Единичный импульс $\delta(t)$ может быть получен путем дифференцирования функции $1_0(t)$, выражаемой предельным переходом (П.1.12) и (П.1.13)

$$\delta(t) = \lim_{\alpha \to \infty} \alpha e^{-\alpha t}\, 1_0(t). \qquad (\text{П.1.18})$$

Зная частотный спектр единичного скачка, частотный спектр единичного импульса $Y(j\omega) = \Delta(j\omega)$ можно получить по формуле (П.1.10)

$$\Delta(j\omega) = 1. \qquad (\text{П.1.19})$$

Частотный спектр единичного импульса показан на рис. П.1.6, *в*. Единичный импульс часто называют *функцией Дирака*.

Интеграл единичного скачка

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} 1_0(t)\,dt = t1_0(t). \qquad (\text{П.1.20})$$

Для определения частотного спектра этой функции можно воспользоваться тем же приемом, которым пользовались для вычисления $X(j\omega)$ по

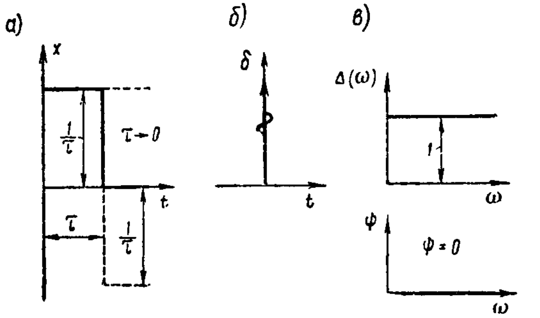


Рис. П.1.6

формуле (П.1.8) при умножении $x(t)$ на $e^{-\alpha t}$ и устремлении α к нулю. Произведя вычисления, получаем

$$X(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2}. \qquad (\text{П.1.21})$$

Производная от единичного импульса. Если требуется найти производную от единичного импульса, то его представление в виде разрывных функций (П.1.16) или (П.1.18) неудобно. В этом случае единичный импульс более целесообразно получить как предел непрерывной кривой треугольной формы, показанной на рис. П.1.7, *а*.

При рассмотрении непрерывной функции

$$x(t) = \frac{t1_0(t) - 2(t-\tau)\,1_0(t-\tau) + (t-2\tau)\,1_0(t-2\tau)}{\tau^2} \qquad (\text{П.1.22})$$

можно заметить, что $x(t) \to \delta(t)$ при $\tau \to 0$. Действительно, для $x(t)$ при любом значении τ и $t > 2\tau$

$$\int_{-\infty}^{t} x(t)\,dt = 1.$$

Устремляя τ к нулю, получаем единичный импульс

$$\delta(t) = \lim_{\tau \to 0} x(t). \qquad (\text{П.1.23})$$

Для получения производной единичного импульса $\delta(t)$ дифференцируем функцию $x(t)$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1_0(t) - 2\cdot 1_0(t-\tau) + 1_0(t-2\tau)}{\tau^2}. \qquad (\text{П.1.24})$$

После устремления τ к нулю получаем производную от δ функции, состоящую из двух импульсов второго порядка (положительного и отрицательного), смещенных один по отношению к другому на стремящийся к нулю промежуток времени τ (рис. П.1.7, *б*):

$$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} = \lim_{\tau\to 0}\frac{dx}{dt}. \qquad (П.1.25)$$

Так как дифференцирование функции времени соответствует умножению на $j\omega$ ее частотного спектра (П.1.10), то частотный спектр производной единичного импульса $\Delta'(j\omega) = j\omega$ и может быть представлен графиком, показанным на рис. П.1.7, *в*.

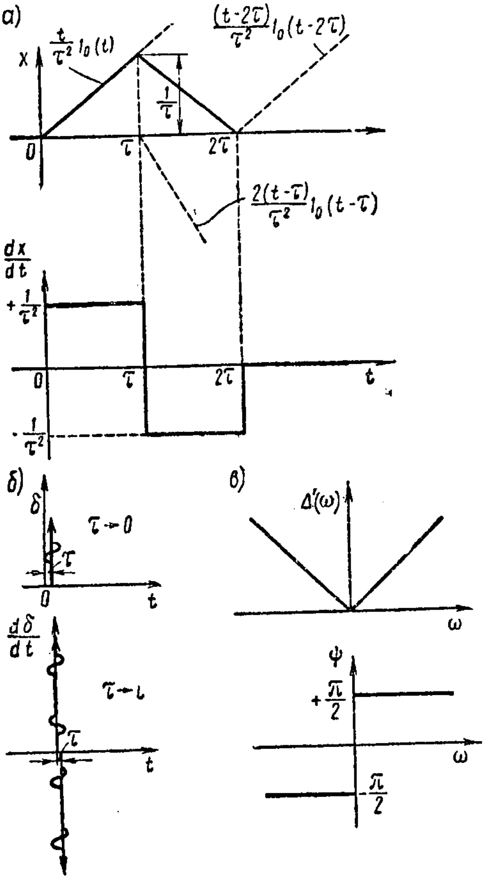


Рис. П.1.7

П.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЭНЕРГИИ В СПЕКТРЕ СИГНАЛА

Рассмотрим, как связана энергия сигнала с его гармоническими составляющими, как по спектру сигнала можно судить об энергии, передаваемой отдельными гармониками.

Для периодического сигнала энергия, передаваемая им в единицу времени, пропорциональна среднему квадратичному значению за период.

Представляя $x(t)$ в виде суммы гармонических составляющих по формуле (П.1.5) и производя интегрирование, получаем

$$\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X(j\omega_0 k)|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\omega_0)\,X(-jk\omega_0). \qquad (П.2.1)$$

Это известное выражение показывает, что мощность несинусоидального тока равна сумме мощностей отдельных гармоник.

При переходе от симметричного спектра к несимметричному, для которого

$$X_{km} = 2\,|X(jk\omega_0)|, \qquad (П.2.2)$$

имеем

$$\frac{1}{T}\int\limits_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} x^2(t)\,dt = X_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{X_{km}^2}{2}, \qquad (П.2.3)$$

где X_0 — постоянная составляющая.

Рассматривая уравнения (П.2.1) и (П.2.3), можно сделать общий вывод: мощность сигнала равна сумме мощностей отдельных гармонических составляющих.

При рассмотрении непериодических сигналов можно сделать аналогичные выводы, однако теперь уже невозможно говорить об усреднении за период, так как период стремится к бесконечности и выводы можно сделать только в отношении энергии сигнала.

По аналогии с выражением (П.2.1) для непериодического сигнала рассмотрим интеграл от квадрата модуля частотного спектра

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2\,d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,X(-j\omega)\,d\omega.$$

Выражая $X(-j\omega)$ с помощью прямого преобразования Фурье (П.1.8), получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,d\omega \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{j\omega t}\,dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt \int\limits_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = 2\pi\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2\,dt. \qquad (П.2.4)$$

При получении последнего выражения был изменен порядок интегрирования по t и по ω и применено обратное преобразование Фурье (П.1.7).

Учитывая четность функции $|X(j\omega)|^2$, можно интегрирование по ω произвести только в диапазоне от 0 до $+\infty$. В этом случае уравнение (П.2.4) принимает вид

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}[x(t)]^2\,dt = \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\infty}|X(j\omega)|^2\,d\omega. \qquad (П.2.5)$$

Эта известная формула, полученная Релеем*, дает возможность зная частотный спектр сигнала, найти его энергию. Из нее непосредственно вытекает общий вывод: *энергия, передаваемая сигналом, распределяется по частотам пропорционально квадрату амплитуды частотного спектра.*

П.3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА

При рассмотрении переходных процессов в системах автоматического управления обычно рассматриваются сигналы, начинающие действовать в определенный момент времени, принимаемый за начало отсчета $t = 0$.

---

* В литературе часто ее называют *формулой Парсеваля*, получившим ее независимо от Релея.

Такие сигналы $x(t)$ удовлетворяют условию $x(t)=0$ при $t<0$. Если для них не удовлетворяется условие абсолютной интегрируемости и

$$\int_0^\infty x(t)\,dt \to \infty,$$

то при соответствующем выборе величины σ_0 умножение на $e^{-\sigma_0 t}$ может обеспечить выполнение условия

$$\int_0^\infty e^{-\sigma_0 t}\,x(t)\,dt \neq \infty,$$

где σ_0 — некоторое положительное число.

В таком случае к функции $x_1(t)=e^{-\sigma_0 t}\,x(t)$ может быть применено прямое преобразование Фурье

$$X_1(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)\,e^{-j\omega t}\,dt=\int_0^\infty x(t)\,e^{-(\sigma_0+j\omega)t}\,dt=X(\sigma_0+j\omega). \qquad (\text{П.3.1})$$

Соответственно обратное преобразование Фурье имеет вид

$$x_1(t)=e^{-\sigma_0 t}\,x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega, \qquad (\text{П.3.2})$$

откуда, с учетом (П.3.1), получаем

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_0+j\omega)\,e^{(\sigma_0+j\omega)t}\,d\omega. \qquad (\text{П.3.3})$$

Если обозначить $\sigma_0+j\omega=p$ и, учитывая постоянство σ_0, подставить $jd\omega=dp$, то уравнения (П.3.1) и (П.3.3) примут следующий вид:

$$X(p)=\int_0^\infty x(t)\,e^{-pt}\,dt; \qquad (\text{П.3.4})$$

$$x(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma_0-j\infty}^{\sigma_0+j\infty} X(p)\,e^{pt}\,dp. \qquad (\text{П.3.5})$$

Выражения (П.3.4) и (П.3.5) являются соответственно прямым и обратным преобразованием Лапласа.

Если затухающие сигналы описываются интегрируемой функцией, для которой можно принять $\sigma_0=0$, то преобразование Лапласа получается из преобразования Фурье простой заменой $j\omega$ на p.

Основные теоремы преобразования Лапласа приведены в П.4.

П. 4. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

№	Содержание теоремы	$f(t)$ при $t \geqslant 0$	$F(p)$
A	Теорема о прямом преобразовании	$\int\limits_0^\infty f(t)\,e^{-pt}\,dt = F(p)$	
B	Теорема об обратном преобразовании	$f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int\limits_{\sigma_0 - j\infty}^{\sigma_0 + j\infty} F(p)\,e^{pt}\,dp$	
1	Теоремы линейности	$af(t)$	$aF(p)$
		a — постоянная или переменная величина, независящая от t и p	
		$f_1(t) \pm f_2(t)$	$F_1(p) \pm F_2(p)$
2	Дифференцирование в вещественной области	$\frac{df(t)}{dt} \equiv f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
3	Интегрирование в вещественной области	$\int f(t)\,dt \equiv f^{(-1)}(t)$	$\frac{F(p)}{p} + \frac{f^{(-1)}(0)}{p}$
4	Теорема подобия	$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$aF(ap)$
		a — не зависит от p и t	

Продолжение таблицы

№	Содержание теоремы	$f(t)$ при $t \geqslant 0$	$F(p)$
5	Теорема об интегральной свертке (умножение изображений)	$\int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\,d\tau$	$F_1(p)\cdot F_2(p)$
6	Смещение в вещественной области	$f(t-a)$; $f(t-a)=0$ при $0<t<a$; $f(t+a)$; $f(t+a)=0$ при $-a<t<0$;	$e^{-ap}F(p)$ $e^{ap}F(p)$
		a — неотрицательное вещественное число	
7	Смещение в комплексной области	$e^{-at} f(t)$ $e^{at} f(t)$	$F(p+a)$ $F(p-a)$
		a — комплексное число с неотрицательной вещественной частью	
8	Дифференцирование по второй независимой переменной	$\frac{\partial}{\partial a} f(t, a)$	$\frac{\partial}{\partial a} F(p, a)$
		a — вторая переменная, не зависящая от t и p	
9	Предельное значение	$\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = \lim\limits_{p\to 0} pF(p)$	
		$pF(p)$ — аналитическая функция на мнимой оси и в правой полуплоскости	
10	Начальное значение	$\lim\limits_{t\to 0} f(t) = \lim\limits_{p\to\infty} pF(p)$	
11	Дифференцирование в комплексной области	$tf(t)$	$-\frac{d}{dp} F(p)$
12	Интегрирование в комплексной области	$\frac{1}{t} f(t)$	$\int_p^\infty F(p)\,dp$

П. 5. ОРИГИНАЛЫ И ИЗОБРАЖЕНИЯ ФУНКЦИЙ ПО ЛАПЛАС.
[Л.25; Л.33]

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
1	$\dfrac{B(p)}{A(p)}$ рациональная правильная дробь с полюсами первого порядка	$\sum\limits_{k=1}^{q} \dfrac{B(p_k)}{A'(p_k)} e^{p_k t}$ p_k — корни уравнения $A(p) = 0$; $A'(p) = \dfrac{dA(p)}{dp}$
2	$1/p$	$1_0(t)$, единичный скачок при $t = 0$. $1_0(t) = \begin{cases} 0; & t \leqslant 0 \\ 1; & t > 0 \end{cases}$
3	1	$\delta_+(t) \equiv \lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{1_0(t) - 1_0(t-a)}{a}$, импульсивная функция первого порядка
4	p	$\delta'_+(t) \equiv \lim\limits_{a\to\infty} \dfrac{1_0(t) - 21_0(t-a) + 1_0(t+a)}{a^2}$, импульсивная функция второго порядка.
5	$1/p^2$	$t\,1_0(t)$
6	$1/p^n$	$\dfrac{1}{(n-1)!} t^{n-1},\ 1_0(t)$, где n — положительное целое число.
7	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha t}\,1_0(t)$*
8	$\dfrac{1}{p^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \sin \beta t$
9	$\dfrac{1}{p^2-\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta} \operatorname{sh} \beta t$
10	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	$\cos \beta t$
11	$\dfrac{p}{p^2-\beta^2}$	$\operatorname{ch} \beta t$
12	$\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t}}{\gamma - \alpha}$
13	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{(a_0-\alpha)e^{-\alpha t} - (a_0-\gamma)e^{-\gamma t}}{\gamma-\alpha}$

* В последующих выражениях $f(t)$ множитель $1_0(t)$ опускается.

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
14	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2}$	$te^{-\alpha t}$
15	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)^2}$	$[(a_0-\alpha)t+1]e^{-\alpha t}$
16	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^n}$	$\dfrac{1}{(n-1)!}t^{n-1}e^{-\alpha t}$ n — целое положительное число.
17	$\dfrac{p^n}{(p+\alpha)^{n+1}}$	$e^{-\alpha t}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{n!(-\alpha)^k}{(n-k)!(k!)^2}t^k$ n — целое положительное число.
18	$\dfrac{1}{p(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{1-(1+\alpha t)e^{-\alpha t}}{\alpha^2}$
19	$\dfrac{p+a_0}{p(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0}{\alpha^2}+\left(\dfrac{\alpha-a_0}{\alpha}t-\dfrac{a_0}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}$
20	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{p(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0}{\alpha^2}+\left(\dfrac{a_1\alpha-a_0-\alpha^2}{\alpha}t+\dfrac{\alpha^2-a_0}{\alpha^2}\right)e^{-\alpha t}$;
21	$\dfrac{p+a_0}{p^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}\sqrt{a_0+\beta^2}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0}$.
22	$\dfrac{1}{p(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{1}{\beta^2}(1-\cos\beta t)$
23	$\dfrac{p+a_0}{p(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{a_0}{\beta^2}-\dfrac{1}{\beta^2}\sqrt{a_0^2+\beta^2}\cos(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0}$.
24	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{p(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{a_0}{\beta^2}-\dfrac{1}{\beta^2}\sqrt{(a_0-\beta^2)^2+a_1^2\beta^2}\cos(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}$.

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
25	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{a_0-\alpha}{\alpha^2+\beta^2}e^{-\alpha t}+\dfrac{1}{\beta}\sqrt{\dfrac{a_0^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\times$ $\times\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0}-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}$.
26	$\dfrac{1}{p^2(p+\alpha)}$	$\dfrac{e^{-\alpha t}+\alpha t-1}{\alpha^2}$
27	$\dfrac{p+a_0}{p^2(p+\alpha)}$	$\dfrac{a_0-\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha t}+\dfrac{a_0}{\alpha}t+\dfrac{\alpha-a_0}{\alpha^2}$
28	$\dfrac{1}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$
29	$\dfrac{p+a_0}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$\dfrac{1}{\beta}\sqrt{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}\,e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}$
30	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{p^2(p+\alpha)}$	$\dfrac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{\alpha^2}e^{-\alpha t}+\dfrac{a_0}{\alpha}t+$ $+\dfrac{a_1\alpha-a_0}{\alpha^2}$
31	$\dfrac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2+\beta^2}$	$e^{-\alpha t}\cos\beta t$
32	$\dfrac{1}{(p+\gamma)(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{1}{(\gamma-\alpha)^2}e^{-\gamma t}+\dfrac{(\gamma-\alpha)t-1}{(\gamma-\alpha)^2}e^{-\alpha t}$
33	$\dfrac{p+a_0}{(p+\gamma)(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0-\gamma}{(\alpha-\gamma)^2}e^{-\gamma t}+\Big[\dfrac{a_0-\alpha}{\gamma-\alpha}t+$ $+\dfrac{\gamma-a_0}{(\gamma-\alpha)^2}\Big]e^{-\alpha t}$
34	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{(p+\gamma)(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\alpha-\gamma)^2}e^{-\gamma t}+\Big[\dfrac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{\gamma-\alpha}t+$ $+\dfrac{\alpha^2-2\alpha\gamma+a_1\gamma-a_0}{(\gamma-\alpha)^2}\Big]e^{\alpha t}$.

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
35	$\dfrac{1}{p(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{1}{\alpha\gamma} + \dfrac{\gamma e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\gamma t}}{\alpha\gamma(\alpha-\gamma)}$
36	$\dfrac{p^2 + a_1 p + a_0}{p(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{a_0}{\alpha\gamma} + \dfrac{\alpha^2 - a_1\alpha + a_0}{\alpha(\alpha-\gamma)} e^{-\alpha t} - {}$ $- \dfrac{\gamma^2 - a_1\gamma + a_0}{\gamma(\alpha-\gamma)} e^{-\gamma t}$
37	$\dfrac{p + a_0}{p(p+\alpha)(p+\gamma)}$	$\dfrac{a_0}{\alpha\gamma} + \dfrac{a_0-\alpha}{\alpha(\alpha-\gamma)} e^{-\alpha t} + \dfrac{a_0-\gamma}{\gamma(\gamma-\alpha)} e^{-\gamma t}$
38	$\dfrac{1}{(p+\alpha)(p+\gamma)(p+\delta)}$	$\dfrac{e^{-\alpha t}}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} + \dfrac{e^{-\gamma t}}{(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)} + {}$ $+ \dfrac{e^{-\delta t}}{(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)}$
39	$\dfrac{p + a_0}{(p+\alpha)(p+\gamma)(p+\delta)}$	$\dfrac{a_0-\alpha}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)} e^{-\alpha t} + \dfrac{a_0-\gamma}{(\alpha-\gamma)(\delta-\gamma)} \times$ $\times e^{-\gamma t} + \dfrac{a_0-\delta}{(\alpha-\delta)(\gamma-\delta)} e^{-\delta t}$
40	$\dfrac{1}{p^2(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{1}{\beta^2} t - \dfrac{1}{\beta^3} \sin \beta t$
41	$\dfrac{1}{p^2(p^2-\beta^2)}$	$\dfrac{1}{\beta^3} \operatorname{sh} \beta t - \dfrac{1}{\beta^2} t$
42	$\dfrac{p + a_0}{p^2(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{a_0}{\beta^2} t + \dfrac{1}{\beta^2} - \dfrac{1}{\beta^3}\sqrt{a_0^2+\beta^2}\,\sin(\beta t + \psi),$ где $\psi \equiv \operatorname{arctg} \dfrac{\beta}{a_0}$.
43	$\dfrac{p^2 + a_1 p + a_0}{(p^2+\beta^2)p^2}$	$\dfrac{a_0}{\beta^2} t + \dfrac{a_1}{\beta^2} - \dfrac{1}{\beta^3} \times$ $\times \sqrt{(a_0-\beta^2)^2 + a_1^2\beta^2}\,\sin(\beta t + \psi),$ где $\psi \equiv \operatorname{arctg} \dfrac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}$.

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
44	$\dfrac{p+a_0}{p(p+\alpha)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{a_0}{\alpha\beta^2}+\dfrac{\alpha-a_0}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}-$ $-\dfrac{1}{\beta^2}\sqrt{\dfrac{a_0^2+\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\cos(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0}-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}$.
45	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{p(p+\alpha)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{a_0}{\alpha\beta^2}-\dfrac{\alpha^2-a_1\alpha-a_0}{\alpha(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}-$ $-\dfrac{1}{\beta^2}\sqrt{\dfrac{(a_0-\beta^2)^2+a_1^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}\cos(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}$.
46	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{(p+\alpha)(p+\gamma)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{(\gamma-a)(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}+$ $+\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\alpha-\gamma)(\gamma^2+\beta^2)}e^{-\gamma t}+$ $+\dfrac{1}{\beta}\sqrt{\dfrac{(a_0-\beta^2)^2+a_1^2\beta^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\beta^2)}}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}-$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma}$.
47	$\dfrac{p^3+a_2p^2+a_1p+a_0}{(p+\alpha)(p+\gamma)(p^2+\beta^2)}$	$\dfrac{-\alpha^3+a_2\alpha^2-a_1\alpha+a_0}{(\gamma-\alpha)(\alpha^2+\beta^2)}e^{-\alpha t}+$ $+\dfrac{-\gamma^3+a_2\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\alpha-\gamma)(\gamma^2+\beta^2)}e^{-\gamma t}+$ $+\dfrac{1}{\beta}\sqrt{\dfrac{(a_0-a_2\beta^2)+\beta^2(a_1-\beta^2)^2}{(\alpha^2+\beta^2)(\gamma^2+\beta^2)}}\times$ $\times\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta(a_1-\beta^2)}{a_0-a_2\beta^2}-$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\alpha}-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma}$.

161

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
48	$\dfrac{p}{(p^2+\beta^2)(p^2+\lambda^2)}$	$\dfrac{\cos\beta t - \cos\lambda t}{\lambda^2-\beta^2}$
49	$\dfrac{p}{[p^2+(\beta+\lambda)^2][p^2+(\beta-\lambda^2)]}$	$\dfrac{1}{2\lambda\beta}\sin\lambda t\sin\beta t$
50	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{(p^2+\beta^2)(p^2+\lambda^2)}$	$\dfrac{\sqrt{(a_0-\beta^2)^2+a_1^2\beta^2}}{\beta(\lambda^2-\beta^2)}\sin(\beta t+\psi_1)+$ $+\dfrac{\sqrt{(a_0-\lambda^2)^2+a_1^2\lambda^2}}{\lambda(\beta^2-\lambda^2)}\sin(\lambda t+\psi_2)$, где $\psi_1\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{a_1\beta}{a_0-\beta^2}$; $\psi_2\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{a_1\lambda}{a_0-\lambda^2}$.
51	$\dfrac{p+a_0}{p(p+\gamma)(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0}{\gamma\alpha^2}+\dfrac{\gamma-a_0}{\gamma(\alpha-\gamma)^2}e^{-\gamma t}+$ $+\left[\dfrac{a_0-\alpha}{\alpha(\alpha-\gamma)}t+\right.$ $\left.+\dfrac{2a_0\alpha-\alpha^2-a_0\gamma}{\alpha^2(\alpha-\gamma)^2}\right]e^{-\alpha t}$
52	$\dfrac{p+a_0}{(p+\gamma)(p+\delta)(p+\alpha)^2}$	$\dfrac{a_0-\gamma}{(\delta-\gamma)(\alpha-\gamma)^2}e^{-\gamma t}+$ $+\dfrac{a_0-\delta}{(\gamma-\delta)(\alpha-\delta)^2}e^{-\delta t}+$ $+\left[\dfrac{a_0-\alpha}{(\gamma-\alpha)(\delta-\alpha)}t+\right.$ $\left.+\dfrac{2a_0\alpha-\alpha^2-a_0(\gamma+\delta)+\gamma\delta}{(\gamma-\alpha)^2(\delta-\alpha)^2}\right]e^{-\alpha t}$
53	$\dfrac{1}{p[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{1}{\beta_0^2}+\dfrac{1}{\beta_0\beta}e^{-\alpha t}\sin(\beta t-\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{-\alpha}$; $\beta_0^2\equiv\alpha^2+\beta^2$.

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
54	$\dfrac{p+a_0}{p[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a^0}{\beta_0^2}+\dfrac{1}{\beta\beta_0}\sqrt{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}\,e^{-\alpha t}\times$ $\times\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{-\alpha}$; $\beta_0^2\equiv\alpha^2+\beta^2$.
55	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{p[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_0}{\beta^2}+\dfrac{1}{\beta\beta_0}\times$ $\times\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0)^2+\beta^2(a_1-2\alpha)^2}\times$ $\times e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta(a_1-2\alpha)}{\alpha^2-\beta^2+a_1\alpha+a_0}-$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{-\alpha}$; $\beta_0^2\equiv\beta^2+\alpha^2$.
56	$\dfrac{1}{(p+\gamma)[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{e^{-\gamma t}}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}+\dfrac{1}{\beta\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}}\times$ $\times e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}$.
57	$\dfrac{p+a_0}{(p+\gamma)[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_0-\gamma}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}e^{-\gamma t}+\dfrac{1}{\beta}\times$ $\times\sqrt{\dfrac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}}\,e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0-\alpha}-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}$.
58	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{(p+\gamma)[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\alpha-\gamma)^2+\beta^2}e^{-\gamma t}+\dfrac{1}{\beta}\times$ $\times\dfrac{\sqrt{(\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0)^2+\beta^2(a_1-2\alpha)^2}}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}\times$ $\times e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi\equiv\operatorname{arctg}\dfrac{\beta(a_1-2\alpha)}{\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0}-$ $-\operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}$.

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
59	$\dfrac{1}{p(p+\gamma)[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{1}{\gamma\beta_0^2} - \dfrac{1}{\gamma[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}e^{-\gamma t} + \dfrac{1}{\beta\beta_0\sqrt{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}}e^{-\alpha t}\sin(\beta t-\psi)$, где $\psi \equiv \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{-\alpha} + \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha}$; $\beta_0^2 \equiv \alpha^2+\beta^2$.
60	$\dfrac{p+a_0}{p(p+\gamma)[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{a_0}{\gamma\beta_0^2} + \dfrac{\gamma-a_0}{\gamma[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}e^{-\gamma t} + \dfrac{1}{\beta\beta_0}\sqrt{\dfrac{(a_0-\alpha)^2+\beta^2}{(\gamma-\alpha)^2+\beta^2}}e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi \equiv \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{a_0-\alpha} - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha} - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{-\alpha}$; $\beta_0^2 \equiv \alpha^2+\beta^2$.
61	$\dfrac{p^2+a_1p+a_0}{(p+\gamma)(p+\delta)[(p+\alpha)^2+\beta^2]}$	$\dfrac{\gamma^2-a_1\gamma+a_0}{(\delta-\gamma)[(\alpha-\gamma)^2+\beta^2]}e^{-\gamma t} + \dfrac{\delta^2-a_1\delta+a_0}{(\gamma-\delta)[(\alpha-\delta)^2+\beta^2]}e^{-\delta t} + \dfrac{1}{\beta}\times \sqrt{\dfrac{(\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0)^2+\beta^2(a_1-2\alpha)^2}{[(\delta-\alpha)^2+\beta^2][(\gamma-\alpha)^2+\beta^2]}}\times e^{-\alpha t}\sin(\beta t+\psi)$, где $\psi \equiv \operatorname{arctg}\dfrac{\beta(a_1-2\alpha)}{\alpha^2-\beta^2-a_1\alpha+a_0} - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\gamma-\alpha} - \operatorname{arctg}\dfrac{\beta}{\delta-\alpha}$.
62	$\dfrac{1}{p\sqrt{p}}$	$2\sqrt{\dfrac{t}{\pi}}$

№	$F(p)$	$f(t)$ при $t \geqslant 0$
63	$\dfrac{1}{p(1+\sqrt{pT})}$	$1-\exp\left(\dfrac{t}{T}\right)\operatorname{erfc}\sqrt{\dfrac{t}{T}}$, где $\operatorname{erfc}(x)=\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_x^{\infty} e^{-u^2}\,du.$
64	$\dfrac{1}{1+\sqrt{pT}}$	$\dfrac{1}{T}\left[\sqrt{\dfrac{T}{\pi t}}-\exp\left(\dfrac{t}{T}\right)\operatorname{erfc}\sqrt{\dfrac{t}{T}}\right]$
65	$\dfrac{e^{-\sqrt{pT}}}{p}$	$\operatorname{erfc}\sqrt{\dfrac{T}{4t}}$
66	$e^{-\sqrt{pT}}$	$\sqrt{\dfrac{T}{4\pi t^3}}\exp\left(-\dfrac{T}{4t}\right)$

П. 6. ЗНАЧЕНИЯ ФАЗЫ φ_0 ДЛЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ АМПЛИТУДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ С ЕДИНИЧНЫМ НАКЛОНОМ (20 *дб* НА ДЕКАДУ) [Л.18]

ω/ω_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,00	0,00000	0,00064	0,00127	0,00191	0,00255	0,00318	0,00382	0,00446	0,00509	0,00573
0,01	0,00637	0,00700	0,00764	0,00828	0,00791	0,00955	0,01019	0,01082	0,01146	0,01210
0,02	0,01273	0,01337	0,01401	0,01464	0,01528	0,01592	0,01655	0,01719	0,01783	0,01846
0,03	0,01910	0,01974	0,02037	0,02101	0,02165	0,02228	0,02292	0,02356	0,02419	0,02483
0,04	0,02547	0,02611	0,02674	0,02738	0,02802	0,02865	0,02929	0,02993	0,03057	0,03120
0,05	0,03184	0,03248	0,03311	0,03375	0,03439	0,03503	0,03566	0,03630	0,03694	0,03757
0,06	0,03821	0,03885	0,03949	0,04012	0,04076	0,04140	0,04204	0,04267	0,04331	0,04395
0,07	0,04459	0,04523	0,04586	0,04650	0,04714	0,04778	0,04841	0,04905	0,04969	0,05033
0,08	0,05097	0,05160	0,05224	0,05288	0,05352	0,05416	0,05479	0,05543	0,05607	0,05671
0,09	0,05735	0,05799	0,05862	0,05926	0,05990	0,06054	0,06118	0,06182	0,06245	0,06309
0,10	0,06373	0,06437	0,06501	0,06565	0,06629	0,06693	0,06757	0,06821	0,06885	0,06949
0,11	0,07013	0,07076	0,07140	0,07204	0,07268	0,07332	0,07396	0,07460	0,07524	0,07588
0,12	0,07652	0,07716	0,07780	0,07844	0,07908	0,07972	0,08036	0,08100	0,08164	0,08228
0,13	0,08292	0,08356	0,08420	0,08484	0,08548	0,08612	0,08676	0,08740	0,08804	0,08868
0,14	0,08932	0,08996	0,09061	0,09125	0,09189	0,09253	0,09317	0,09381	0,09445	0,09509
0,15	0,09574	0,09638	0,09702	0,09766	0,09830	0,09894	0,09959	0,10023	0,10087	0,10151
0,16	0,10215	0,10279	0,10344	0,10408	0,10472	0,10537	0,10601	0,10665	0,10729	0,10794
0,17	0,10858	0,10922	0,10987	0,11051	0,11115	0,11179	0,11244	0,11308	0,11372	0,11437
0,18	0,11501	0,11565	0,11630	0,11694	0,11759	0,11823	0,11888	0,11952	0,12016	0,12081
0,19	0,12145	0,12210	0,12274	0,12339	0,12403	0,12468	0,12532	0,12596	0,12661	0,12725
0,20	0,12790	0,12854	0,12919	0,12984	0,13048	0,13113	0,13178	0,13242	0,13307	0,13371
0,21	0,13436	0,13501	0,13565	0,13630	0,13695	0,13759	0,13824	0,13888	0,13953	0,14018

Продолжение таблицы

ω/ω_0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,22	0,14082	0,14147	0,14212	0,14277	0,14342	0,14406	0,14471	0,14536	0,14601	0,14666
0,23	0,14730	0,14795	0,14860	0,14925	0,14990	0,15055	0,15119	0,15184	0,15249	0,15314
0,24	0,15379	0,15444	0,15509	0,15574	0,15639	0,15704	0,15769	0,15834	0,15899	0,15964
0,25	0,16029	0,16094	0,16159	0,16224	0,16289	0,16354	0,16419	0,16484	0,16549	0,16615
0,26	0,16680	0,16745	0,16810	0,16875	0,16941	0,17006	0,17071	0,17137	0,17202	0,17267
0,27	0,17332	0,17398	0,17463	0,17528	0,17593	0,17659	0,17724	0,17789	0,17855	0,17920
0,28	0,17985	0,18051	0,18116	0,18182	0,18247	0,18313	0,18378	0,18444	0,18509	0,18575
0,29	0,18541	0,18706	0,18772	0,18837	0,18903	0,18968	0,19034	0,19099	0,19165	0,19230
0,30	0,19296	0,19362	0,19428	0,19493	0,19559	0,19625	0,19691	0,19757	0,19823	0,19888
0,31	0,19954	0,20020	0,20086	0,20152	0,20218	0,20283	0,20349	0,20415	0,20481	0,20547
0,32	0,20613	0,20679	0,20745	0,20811	0,20877	0,20943	0,21009	0,21076	0,21142	0,21208
0,33	0,21274	0,21340	0,21406	0,21472	0,21538	0,21605	0,21671	0,21737	0,21803	0,21869
0,34	0,21935	0,22002	0,22068	0,22135	0,22201	0,22268	0,22334	0,22401	0,22467	0,22534
0,35	0,22600	0,22666	0,22733	0,22799	0,22866	0,22932	0,22299	0,23065	0,23132	0,23198
0,36	0,23265	0,23332	0,23398	0,23465	0,23532	0,23599	0,23666	0,23732	0,23799	0,23866
0,37	0,23933	0,24000	0,24067	0,24134	0,24200	0,24267	0,24334	0,24401	0,24468	0,24534
0,38	0,24601	0,24669	0,24736	0,24803	0,24870	0,24937	0,25005	0,25072	0,25139	0,25206
0,39	0,25274	0,25341	0,25408	0,25475	0,25542	0,25610	0,25677	0,25744	0,25811	0,25879
0,40	0,25946	0,26013	0,26081	0,26148	0,26216	0,26284	0,26351	0,26419	0,26486	0,26554
0,41	0,26621	0,26689	0,26757	0,26824	0,26892	0,26960	0,27028	0,27095	0,27163	0,27231
0,42	0,27299	0,27367	0,27435	0,27503	0,27571	0,27639	0,27706	0,27774	0,27842	0,27910
0,43	0,27978	0,28047	0,28115	0,28183	0,28251	0,28319	0,28388	0,28456	0,28524	0,28592
0,44	0,28560	0,28729	0,28797	0,28866	0,28934	0,29003	0,29071	0,29140	0,29208	0,29276

τ \ λ	00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40	0,45
0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,5	0,138	0,165	0,176	0,184	0,192	0,199	0,207	0,215	0,223	0,231
1,0	0,310	0,325	0,340	0,356	0,371	0,386	0,402	0,417	0,432	0,447
1,5	0,449	0,469	0,494	0,516	0,538	0,560	0,594	0,603	0,617	0,646
2,0	0,571	0,560	0,628	0,655	0,682	0,709	0,732	0,761	0,785	0,810
2,5	0,674	0,707	0,739	0,771	0,802	0,833	0,862	0,891	0,917	0,943
3,0	0,755	0,792	0,828	0,863	0,895	0,928	0,958	0,986	1,013	1,038
3,5	0,815	0,853	0,892	0,928	0,963	0,994	1,024	1,050	1,074	1,095
4,0	0,856	0,898	0,937	0,974	1,008	1,039	1,066	1,090	1,110	1,127
4,5	0,883	0,923	0,960	0,998	1,029	1,057	1,084	1,104	1,120	1,129
5,0	0,895	0,939	0,977	1,012	1,042	1,067	1,087	1,102	1,112	1,117
5,5	0,900	0,940	0,986	1,015	1,042	1,063	1,079	1,088	1,092	1,096
6,0	0,903	0,945	0,981	1,013	1,037	1,054	1,065	1,070	1,068	1,062
6,5	0,904	0,943	0,980	1,009	1,029	1,043	1,050	1,049	1,043	1,033
7,0	0,904	0,945	0,978	1,006	1,024	1,034	1,037	1,033	1,023	1,009
7,5	0,907	0,945	0,980	1,005	1,021	1,027	1,027	1,020	1,005	0,989
8,0	0,911	0,951	0,983	1,007	1,020	1,024	1,021	1,011	0,998	0,982
8,5	0,918	0,956	0,989	1,010	1,021	1,024	1,018	1,007	0,993	0,978
9,0	0,925	0,966	0,996	1,016	1,025	1,025	1,017	1,006	0,992	0,978
9,5	0,932	0,972	1,004	1,020	1,028	1,026	1,018	1,006	0,993	0,982
10,0	0,939	0,980	1,009	1,025	1,030	1,027	1,018	1,005	0,994	0,985
10,5	0,946	0,985	1,013	1,028	1,031	1,026	1,016	1,004	0,994	0,989
11,0	0,947	0,988	1,015	1,028	1,030	1,024	1,013	1,002	0,993	0,990
11,5	0,949	0,988	1,016	1,027	1,028	1,021	1,010	0,998	0,991	0,991
12,0	0,950	0,990	1,015	1,025	1,024	1,015	1,004	0,994	0,988	0,990
12,5	0,950	0,989	1,013	1,022	1,019	1,010	0,998	0,990	0,986	0,989
13,0	0,950	0,989	1,012	1,019	1,015	1,004	0,993	0,986	0,984	0,989
13,5	0,950	0,990	1,011	1,016	1,011	1,000	0,990	0,983	0,984	0,989
14,0	0,951	0,990	1,010	1,015	1,008	0,997	0,987	0,983	0,985	0,991
14,5	0,954	0,990	1,011	1,014	1,008	0,996	0,986	0,984	0,987	0,994
15,0	0,956	0,993	1,012	1,014	1,006	0,995	0,987	0,986	0,991	0,998
15,5	0,959	0,995	1,013	1,014	1,006	0,995	0,989	0,989	0,995	1,002
16,0	0,961	0,998	1,015	1,014	1,006	0,995	0,990	0,992	0,999	1,007
16,5	0,964	0,999	1,016	1,015	1,005	0,996	0,992	0,995	1,002	1,009
17,0	0,965	1,001	1,016	1,014	1,005	0,996	0,993	0,998	1,005	1,011
17,5	0,966	1,002	1,016	1,013	1,003	0,995	0,994	0,999	1,007	1,011
18,0	0,966	1,002	1,015	1,012	1,002	0,994	0,994	1,000	1,007	1,010
18,5	0,966	1,001	1,014	1,010	1,000	0,993	0,994	1,001	1,007	1,009
19,0	0,966	1,002	1,013	1,008	0,998	0,992	0,994	1,001	1,006	1,006
19,5	0,967	1,001	1,012	1,006	0,996	0,991	0,994	1,001	1,005	1,004
20,0	0,967	1,001	1,011	1,004	0,995	0,991	0,994	1,001	1,004	1,001
20,5	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,995	1,001	1,003	1,000
21,0	0,968	1,002	1,010	1,003	0,994	0,991	0,996	1,002	1,003	0,999
21,5	0,969	1,003	1,010	1,002	0,994	0,992	0,999	1,004	1,003	0,998
22,0	0,971	1,004	1,011	1,002	0,994	0,994	1,000	1,005	1,004	0,998
22,5	0,973	1,005	1,011	1,002	0,995	0,995	1,002	1,006	1,004	0,998
23,0	0,973	1,006	1,011	1,002	0,995	0,997	1,003	1,006	1,004	0,998
23,5	0,975	1,006	1,011	1,002	0,995	0,998	1,004	1,006	1,003	0,998
24,0	0,975	1,006	1,010	1,001	0,995	0,998	1,005	1,006	1,002	0,998
24,5	0,975	1,006	1,009	1,000	0,995	0,999	1,005	1,005	1,000	0,997
25,0	0,975	1,006	1,008	0,999	0,995	0,999	1,004	1,004	0,999	0,996
25,5	0,975	1,006	1,007	0,998	0,994	0,999	1,004	1,002	0,997	0,996
26,0	0,975	1,006	1,006	0,997	0,994	0,999	1,003	1,001	0,996	0,996

0,50	0,55	0,60	0,65	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,95	1,00
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,240	0,248	0,255	0,259	0,267	0,275	0,282	0,290	0,297	0,304	0,314
0,461	0,476	0,490	0,505	0,519	0,534	0,547	0,561	0,575	0,590	0,602
0,665	0,685	0,706	0,722	0,740	0,758	0,776	0,794	0,813	0,832	0,844
0,831	0,866	0,878	0,899	0,919	0,938	0,957	0,974	0,991	1,008	1,022
0,967	0,985	1,010	1,030	1,050	1,067	1,084	1,090	1,105	1,120	1,133
1,061	1,081	1,100	1,116	1,131	1,143	1,154	1,162	1,169	1,175	1,177
1,115	1,132	1,145	1,158	1,165	1,170	1,174	1,174	1,175	1,176	1,175
1,141	1,151	1,158	1,162	1,163	1,161	1,156	1,150	1,141	1,132	1,119
1,138	1,141	1,141	1,138	1,132	1,127	1,111	1,099	1,085	1,071	1,053
1,117	1,114	1,107	1,097	1,084	1,069	1,053	1,036	1,019	1,003	0,987
1,090	1,076	1,064	1,050	1,032	1,016	0,994	0,979	0,962	0,951	0,932
1,051	1,036	1,020	1,001	0,984	0,956	0,949	0,934	0,922	0,914	0,907
1,018	1,001	0,982	0,965	0,948	0,936	0,920	0,910	0,906	0,904	0,905
0,992	0,975	0,957	0,941	0,927	0,917	0,911	0,909	0,911	0,917	0,926
0,974	0,956	0,944	0,931	0,922	0,919	0,920	0,927	0,934	0,946	0,962
0,966	0,952	0,941	0,934	0,932	0,936	0,944	0,955	0,970	0,986	1,002
0,964	0,954	0,948	0,948	0,951	0,958	0,974	0,990	1,006	1,023	1,041
0,968	0,962	0,961	0,967	0,976	0,990	1,006	1,023	1,038	1,051	1,060
0,975	0,972	0,977	0,987	1,000	1,015	1,033	1,048	1,059	1,065	1,066
0,982	0,984	0,993	1,006	1,020	1,036	1,049	1,059	1,063	1,062	1,056
0,988	0,994	1,005	1,019	1,033	1,046	1,054	1,058	1,055	1,048	1,033
0,993	1,001	1,014	1,027	1,039	1,047	1,048	1,044	1,034	1,021	1,005
0,996	1,006	1,017	1,029	1,037	1,039	1,034	1,024	1,010	0,994	0,977
0,997	1,007	1,018	1,026	1,029	1,025	1,015	1,000	0,984	0,970	0,958
0,997	1,007	1,015	1,019	1,017	1,010	0,995	0,980	0,965	0,955	0,950
0,997	1,006	1,012	1,012	1,005	0,993	0,980	0,965	0,955	0,952	0,955
0,998	1,005	1,008	1,004	0,995	0,982	0,968	0,958	0,954	0,958	0,970
0,999	1,005	1,005	0,998	0,987	0,975	0,965	0,961	0,965	0,976	0,991
1,002	1,005	1,003	0,994	0,983	0,970	0,969	0,971	0,981	0,997	1,010
1,005	1,006	1,002	0,994	0,983	0,977	0,978	0,987	1,001	1,018	1,032
1,008	1,007	1,001	0,992	0,985	0,984	0,991	1,003	1,019	1,032	1,048
1,010	1,008	1,001	0,994	0,990	0,993	1,003	1,018	1,031	1,040	1,039
1,011	1,008	1,001	0,995	0,995	1,001	1,014	1,027	1,035	1,037	1,028
1,012	1,007	1,000	0,996	0,999	1,008	1,020	1,030	1,032	1,026	1,012
1,009	1,005	0,998	0,997	1,002	1,012	1,023	1,027	1,023	1,013	0,994
1,008	1,001	0,997	0,997	1,004	1,014	1,020	1,018	1,008	0,993	0,978
1,005	0,999	0,995	0,997	1,005	1,012	1,014	1,007	0,993	0,978	0,969
1,001	0,995	0,993	0,997	1,004	1,009	1,006	0,995	0,981	0,970	0,967
0,998	0,992	0,992	0,997	1,003	1,005	0,998	0,985	0,973	0,967	0,973
0,995	0,991	0,992	0,998	1,003	1,001	0,991	0,980	0,972	0,975	0,986
0,994	0,991	0,994	0,999	1,002	0,998	0,987	0,978	0,977	0,990	1,001
0,993	0,992	0,996	1,001	1,002	0,996	0,987	0,982	0,989	1,001	1,015
0,994	0,995	0,999	0,995	1,002	0,995	0,988	0,988	0,998	1,013	1,025
0,995	0,997	1,000	1,004	1,002	0,995	0,991	0,997	1,010	1,024	1,029
0,996	1,000	1,005	1,005	1,002	0,996	0,996	1,006	1,018	1,028	1,028
0,997	1,002	1,007	1,007	1,002	0,997	1,001	1,011	1,022	1,025	1,016
0,998	1,003	1,008	1,006	1,001	0,998	1,004	1,015	1,021	1,016	1,002
0,999	1,004	1,007	1,004	1,999	0,999	1,007	1,015	1,016	1,006	0,990
1,000	1,004	1,006	1,002	0,998	0,999	1,007	1,012	1,007	0,995	0,979
1,000	1,004	1,004	0,999	0,996	1,000	1,007	1,008	0,998	0,984	0,975
1,000	1,003	1,002	0,997	0,995	1,000	1,005	1,001	0,989	0,978	0,977
1,000	1,002	0,999	0,995	0,995	1,000	1,002	0,997	0,984	0,978	0,983

П. 8. ТАБЛИЦА ЗНАЧЕНИЙ ИНТЕГРАЛА J_0 ДЛЯ n ОТ 1 ДО 6 [Л.28]

$$J_0 = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{-j\infty}^{j\infty} \frac{b(p)\,b(-p)}{c(p)\,c(-p)}\,dp,$$

где

$$b(p) = b_{n-1}\,p^{n-1} + \cdots + b_0;$$
$$c(p) = c_n p^n + \cdots + c_0.$$

Для

$$n = 1 \quad J_0 = \frac{b_0^{\,2}}{2c_0c_1};$$

$$n = 2 \quad J_0 = \frac{b_1^2 c_0 + b_0^2\,c_2}{2c_0c_1c_2};$$

$$n = 3 \quad J_0 = \frac{b_2^2 c_0 c_1 + (b_1^2 - 2b_0b_2)\,c_0c_3 + b_0^2\,c_2c_3}{2c_0c_3\,(-c_0c_3 + c_1c_2)};$$

$$n = 4 \quad J_0 = \frac{b_3^2(-c_0^2c_3 + c_0c_1c_2) + (b_2^2 - 2b_1b_2)\,c_0c_1c_4 + (b_1^2 - 2b_0b_2)\,c_0c_3c_4}{2c_0c_4\,(-c_0c_3^2 - c_1^2\,c_4 + c_1c_2c_3)} +$$
$$+ \frac{b_0^2\,(-c_1c_4^2 + c_2c_3c_4)}{2c_0c_4\,(-c_0c_3^2 - c_1^2\,c_4 + c_1c_2c_3)};$$

$$n = 5 \quad J_0 = \frac{1}{2\Delta 5}\,[b_4^2\,m_0 + (b_3^2 - 2b_2b_4)\,m_1 +$$
$$+ (b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0b_4)\,m_2 + (b_1^2 - 2b_0b_2)\,m_3 + b_0^2\,m_4];$$

где

$$m_0 = \frac{1}{c_6}\,(c_4m_1 - c_2m_2 + c_0m_3),$$
$$m_1 = -c_0c_1c_5 + c_0c_3^2 + c_1^2c_4 - c_1c_2c_3,$$
$$m_2 = c_0c_3c_5 + c_1^2\,c_6 - c_1c_2c_5,$$
$$m_3 = c_0c_5^{\,2} + c_1c_3c_6 - c_1c_4c_5.$$

$$n = 6 \quad J_0 = \frac{1}{2\Delta 6}\,[b_5^2\,m_0 + (b_4^2 - 2b_3b_5)\,m_1 + (b_3^2 - 2b_2b_4 + 2b_1b_5)\,m_2 +$$
$$+ (b_2^2 - 2b_1b_3 + 2b_0\,b_4)\,m_3 + (b_1^2 - 2b_0b_2)m_4 + b_0^2\,m_5],$$

где

$$m_0 = \frac{1}{c_6}(c_4m_1 - c_2m_2 + c_0m_3),$$
$$m_1 = -c_0c_1c_5 + c_0c_3^2 + c_1^2c_4 - c_1c_2c_3,$$
$$m_2 = c_0c_3c_5 + c_1^2c_6 - c_1c_2c_5,$$
$$m_3 = c_0c_5^2 + c_1c_3c_6 - c_1c_4c_5,$$
$$m_4 = \frac{1}{c_0}(c_2m_3 - c_4m_2 + c_6m_1),$$
$$m_5 = \frac{1}{c_0}\,(c_2m_4 - c_4m_3 + c_6m_2),$$
$$\Delta_6 = c_0\,(c_1m_5 - c_3m_4 + c_5m_3).$$

П.9. НОМОГРАММЫ СВЯЗИ ПАРАМЕТРОВ АМПЛИТУДНЫХ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ С ПОКАЗАТЕЛЯМИ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА РЕГУЛИРОВАНИЯ В ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЕ.

На номограммах обозначено [Л. 31]:

——— $W_{зм}$ и ω_t/ω_c; — — — $h_м$ и $\omega_м/\omega_c$;

—·—·—·$\omega_р t_р$; $\omega_c t_р$; —··—··— $\omega_c t_у$ (см. рис. 10. 12);

μ_1 — усиление системы при частоте ω_1;
$W_{зм}$ — пик амплитудной характеристики замкнутой системы;
$h_м$ — максимальное значение переходной функции;
ω_c — частота среза;
ω_t — круговая частота колебаний основной компоненты переходной функции;
$\omega_м$ — частота, соответствующая $W_{зм}$;
$t_у$ — время достижения переходной функции максимального значения;
$t_р$ — время регулирования (время устранения рассогласования до 5% его начального значения).

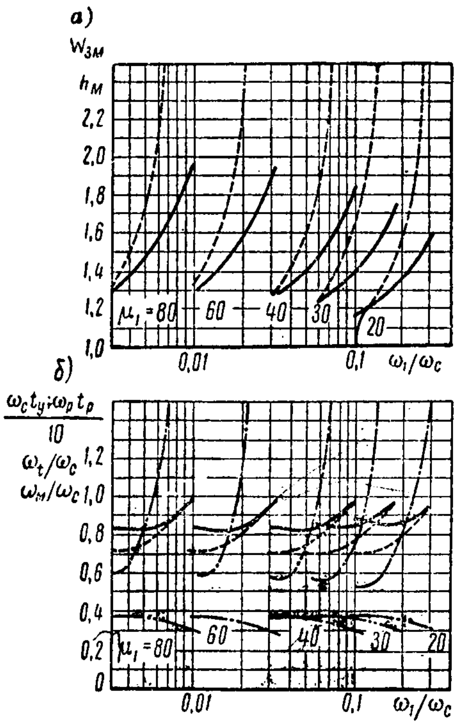


Рис. П.9.1. $\omega_3/\omega_c = 1$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (—40 *дб/дек*)

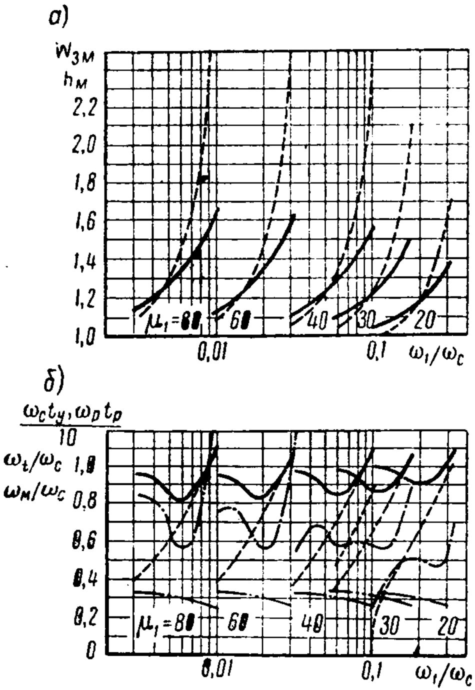


Рис. П.9.2. $\omega_3/\omega_c = 2$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (— 40 *дб/дек*)

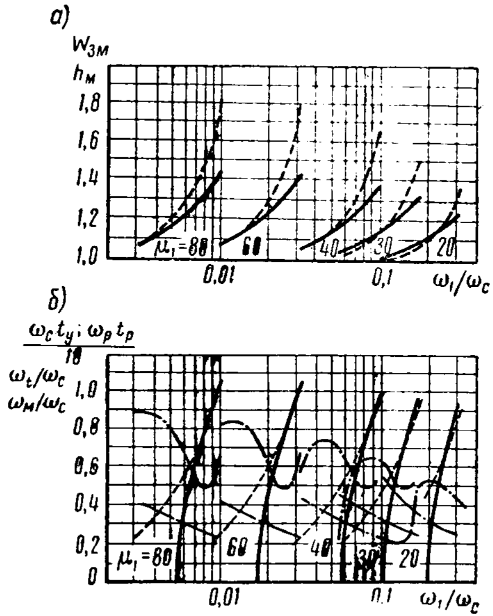


Рис. П.9.3. $\omega_3/\omega_c = 4$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (— 40 *дб/дек*)

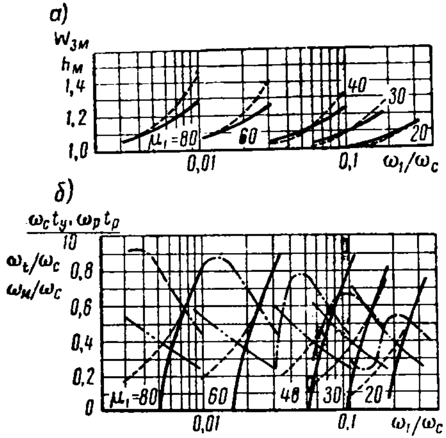


Рис. П.9.4. $\omega_3/\omega_c = 8$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (—40 *дб/дек*)

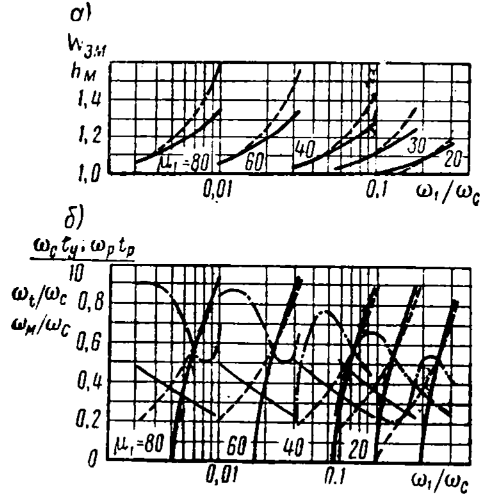


Рис. П.9.5. $\omega_3/\omega_c = \infty$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (—40 *дб/дек*)

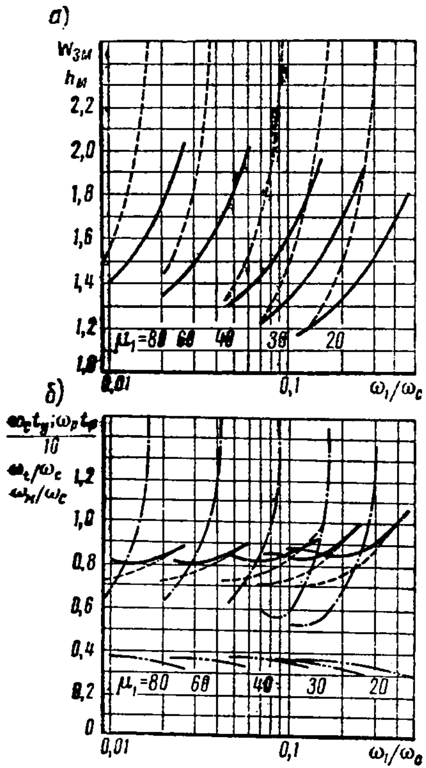


Рис. П.9.6. $\omega_3/\omega_c = 1$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (—60 *дб/дек*); от ω_2 до ∞ (—40 *дб/дек*)

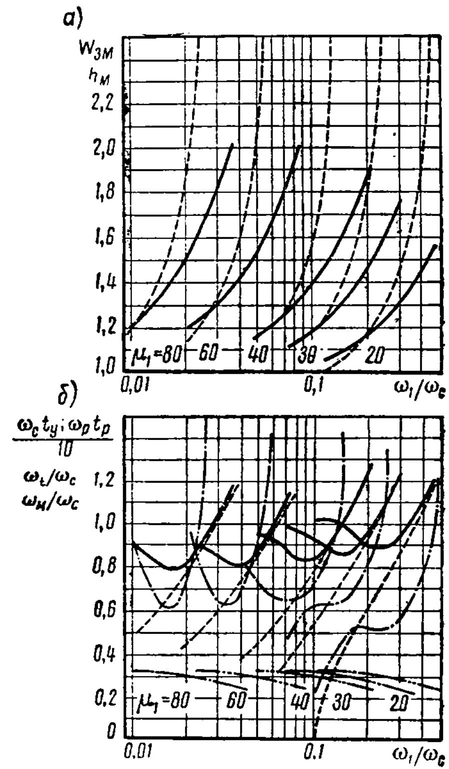


Рис. П.9.7. $\omega_3/\omega_c = 2$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (—60 *дб/дек*); от ω_3 до ∞ (—40 *дб/дек*)

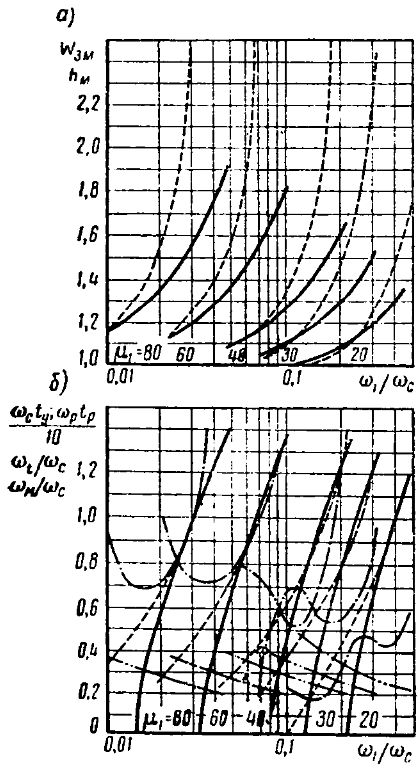


Рис. П.9.8. $\omega_3/\omega_c = 4$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (—60 *дб/дек*); от ω_3 до ∞ (—40 *дб/дек*)

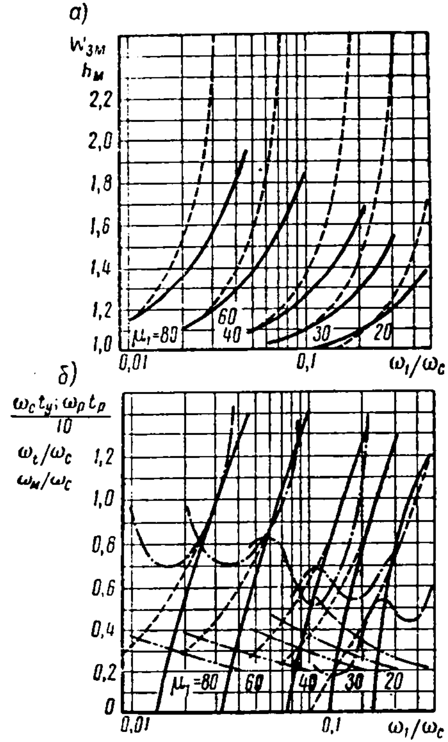


Рис. П.9.9. $\omega_3/\omega_c = 8$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (—60 *дб/дек*); от ω_3 до ∞ (—40 *дб/дек*)

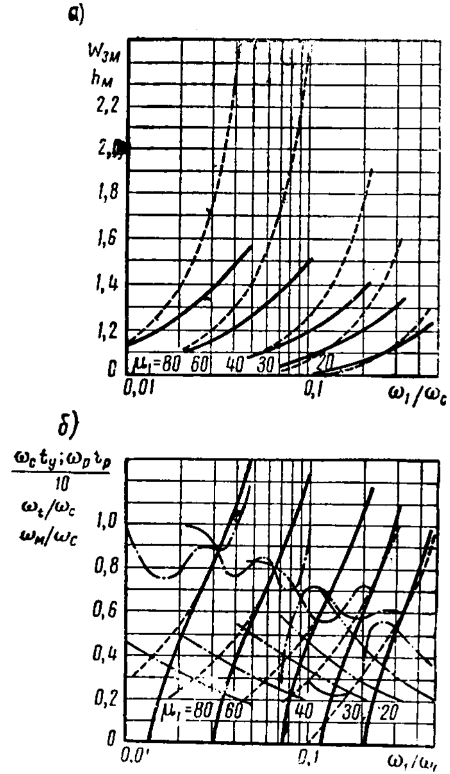


Рис. П.9.10. $\omega_3/\omega_c = \infty$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (— 60 *дб/дек*); от ω_3 до ∞ (— 40 *дб/дек*)

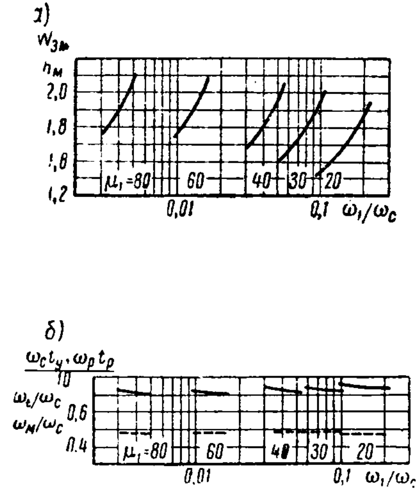


Рис. П.9.11. $\omega_3/\omega_c = 1$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (— 60 *дб/дек*)

$— \frac{\omega_t}{\omega_c}$; $— — — \frac{\omega_c t}{10}$

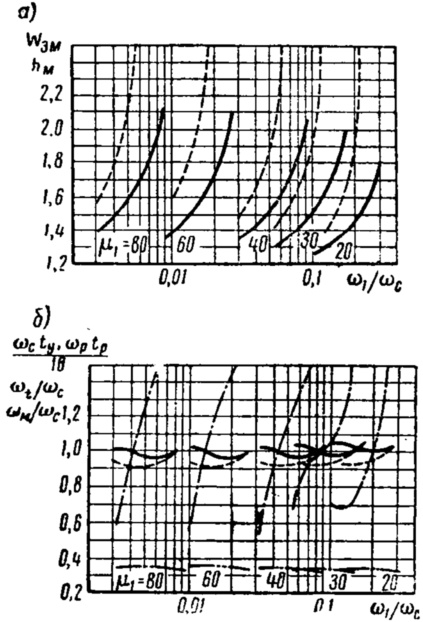


Рис. П.9.12. $\omega_3/\omega_c = 2$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (—40 *дб/дек*); от ω_3 до ∞ (—60 *дб/дек*)

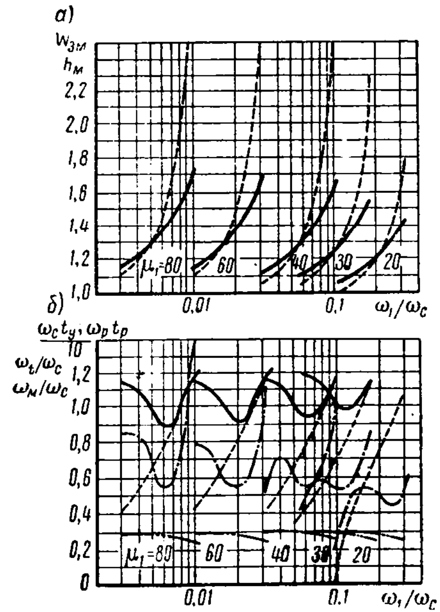


Рис. П.9.13. $\omega_3/\omega_c = 4$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (—40 *дб/дек*); от ω_3 до ∞ (—60 *дб/дек*)

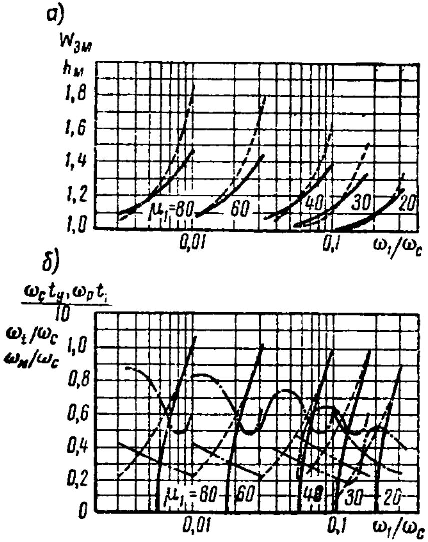


Рис. П.9.14. $\omega_з/\omega_c = 8$; наклоны: от ω_1 до ω_2 (— 40 *дб/дек*); от $\omega_з$ до ∞ (— 60 *дб/дек*)

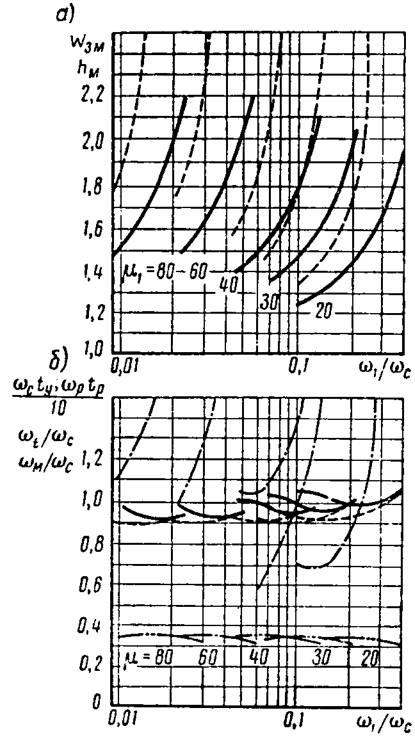


Рис. П.9.15. $\omega_з/\omega_c = 2$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от $\omega_з$ до ∞ (—60 *дб/дек*)

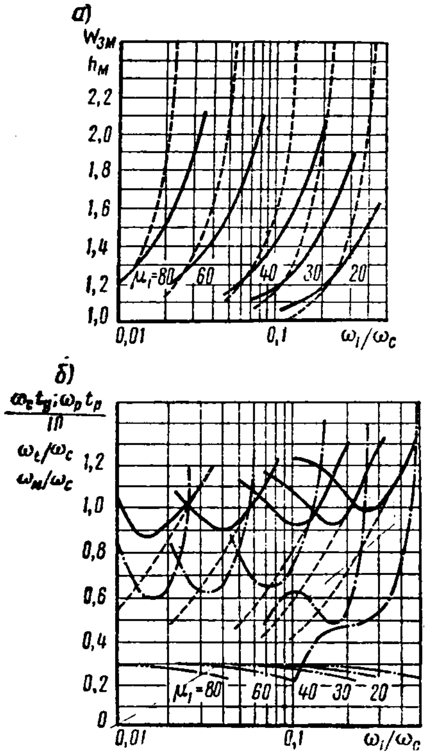


Рис. П.9.16. $\omega_3/\omega_c = 4$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (—60 *дб/дек*)

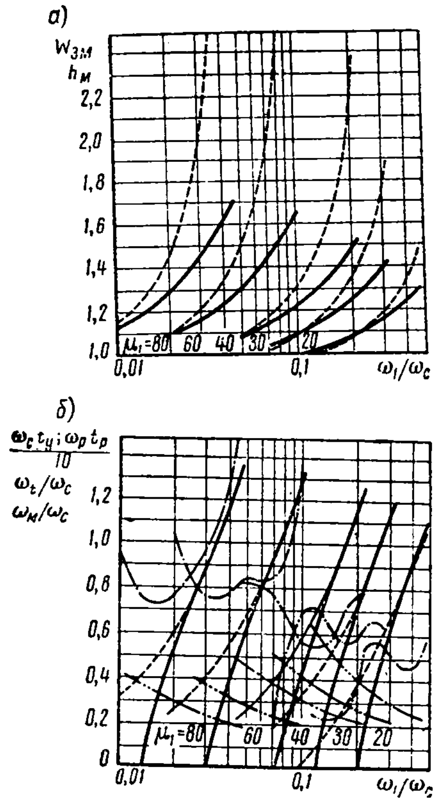


Рис. П.9.17. $\omega_3/\omega_c = 8$; наклоны: от ω_1 до ω_2 и от ω_3 до ∞ (—60 *дб/дек*)

ЛИТЕРАТУРА

1 Автоматизация производства и промышленная электроника. Энциклопедия. Под ред. А. И. Берга и В. А. Трапезникова. М. 1962—1965.

2. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. Гостехиздат, 1966.

3. Бесекерский В. А., Орлов В. Л., Полонская Л. В., Федоров С. В. Проектирование следящих систем малой мощности. Судпромгиз, 1958.

4. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления. «Энергия», ч. I — 1965, ч. II — 1966.

5. Гольдфарб Л. С. Теория автоматического регулирования (конспект лекции). Ч. I и II. МЭИ, 1965.

6. Иващенко Н. Н. Автоматическое регулирование. Машгиз, 1958.

7. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. Госэнергоиздат, 1962.

8. Круг Г. К., Круг Е. К. Электрические корректирующие элементы в схемах автоматического контроля и регулирования. Госэнергоиздат, 1959.

9. Кулебакин В. С. Теория инвариантности автоматически регулируемых и управляемых систем. Труды I Конгресса ИФАК, т. 1. АН СССР, 1961.

10. Лернер А. Я. Введение в теорию автоматического регулирования. Машгиз, 1958.

11. Марьяновский Д. И. Исследование переходных процессов в линейных системах автоматического регулирования «Автоматика и телемеханика», 1966, № 6.

12. Мееров М. В. Системы многосвязного регулирования. Физматгиз, 1965.

13. Михайлов А. В. О новом методе исследования замкнутых регулируемых цепей. «Автоматика и телемеханика», 1938, № 4—5.

14. Неймарк Ю. И. Об определении значений параметров, при которых система автоматического регулирования устойчива. «Автоматика и телемеханика», 1948, № 4.

15. Петров Б. Н. О построении и преобразовании структурных схем. Изв. АН СССР, ОТН, 1945, № 12.

16. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Гостехиздат, 1954.

17. Ротач В. Я. Импульсные системы автоматического регулирования. «Энергия», 1964.

18. Основы автоматического регулирования. Теория. Под ред. В. В. Солодовникова. Машгиз, 1954.

19. Удерман Э. Г. Метод корневого годографа в теории автоматического управления. Госэнергоиздат, 1963.

20. Фатеев А. В. Основы линейной теории автоматического регулирования. Госэнергоиздат, 1959.

21. Фельдбаум А. А. Электрические системы автоматического регулирования. Изд. 2. М., Оборонгиз, 1957,

22 Фельдбаум А. А., Дудыкин А. Д. Мановцев А. П., Миролюбов Н. Н. Теоретические основы связи и управления Физматгиз, 1963

23. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, 1963.

24. Боде Х. Ф. Анализ цепей и расчет усилителей с обратной связью. Изд-во иностранной литературы, 1948.

25 Гарднер М. Ф. и Бернес Дж Л. Переходные процессы в линейных системах. Гостехиздат, 1949.

26. Э. Джури. Импульсные системы автоматического регулирования. Физматгиз, 1963.

27. Дж. К. Ньютон, Л. А. Гулд, Дж. Ф. Кайзер. Теория линейных систем. Аналитические методы расчета. Физматгиз, 1961.

28 Шелдон Ф. Л. Чанг. Синтез оптимальных систем автоматического управления. «Машиностроение», 1964.

29. Л. Робишо, М. Буавер и Ж. Робер. Направление графы и их приложения к электрическим цепям и машинам. «Энергия», 1964.

30. Бессекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования. Физматгиз, 1966.

31. Честнат Г., Майер Р. Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. Госэнергоиздат, 1959.

32. Коломейцева М. Б. и Нетушил А. В. Переходные процессы в системах автоматического регулирования с иррациональной передаточной функцией. «Автоматика и телемеханика», 1966, № 2.

33. Диткин В А. и Кузнецов П. И. Справочник по операционному исчислению. ГТТИ, 1951.

ОГЛАВЛЕНИЕ