

**МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР**

**КУЙБЫШЕВСКИЙ ордена ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
АВИАЦИОННЫЙ ИНСТИТУТ имени С. П. КОРОЛЕВА**

А. Д. БОЙКОВ, Л. В. САФОНОВА

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ
МЕТОДЫ РАСЧЕТА
ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ**

**Учебное пособие по курсу
„Теория автоматического управления“**

В книге рассмотрены инженерные методы анализа и синтеза дискретных систем автоматического управления с использованием вычислительной техники, изложены ортогональные методы расчета, основанные на спектральном представлении сигналов и динамических характеристик.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, изучающих теорию автоматического управления, а также может быть использовано специалистами, занимающимися вопросами исследования и проектирования систем управления.

Изложенный в книге материал оригинален, базируется на работах авторов и использует методы операционного исчисления, функционального анализа, теории специальных функций и дискретных систем автоматического управления.

Ответственный редактор С. Ф. Ледев

Предисловие

В последнее время в связи с развитием вычислительной техники, особенно цифровых вычислительных машин, дискретные системы автоматического управления (ДСАУ) находят все большее применение в различных областях управления и регулирования: системы передачи в радиосвязи, телевидении, радиоуправлении, системы управления подвижными объектами, следящие системы импульсных радиолокационных станций и т. д. Использование импульсных и цифровых элементов в ДСАУ позволяет производить разделение по времени работы отдельных блоков системы и дает возможность использовать последние для выполнения нескольких функций. Информация, передаваемая ДСАУ в виде импульсов, может быть легко закодирована и передана в виде цифрового кода, что обеспечивает почти безошибочную передачу информации даже при наличии помех. Искажает информацию только ошибка квантования, поэтому гибкость и универсальность цифровых вычислительных машин обуславливает улучшение характеристик ДСАУ.

В большинстве случаев цифровые вычислительные машины включены в контур управления и используются в качестве вычислителя и управляющего элемента. Это обстоятельство определяет основное направление в развитии современных методов исследования дискретных систем управления, которые должны быть хорошо приспособлены для реализации на цифровых вычислительных машинах. Поэтому построение методов анализа и синтеза ДСАУ, основанных на единстве математического языка и общности идеологии на всех этапах исследования и построения последних, является важным условием, позволяющим ослабить требования к быстродействию и объему запоминающего устройства вычислительной машины.

Не менее важным фактором является создание алгоритмов и

получение информации в виде, удобном для практического использования.

Математическая модель ДСАУ в общем случае представляет собой матричное разностное уравнение с постоянными или переменными коэффициентами соответственно для стационарных и нестационарных систем.

Отображение разностных уравнений в область комплексного переменного с помощью дискретного преобразования Лапласа (D -преобразования), z -преобразования, p -преобразования и других дискретных преобразований позволяет ввести понятия динамических характеристик, аналогичные указанным понятиям в теории непрерывных САУ [56], [66], [71], [78], [112], [114] и на их основе построить алгоритмы анализа и синтеза дискретных систем [61], [75], [77], [78], [92], [107], [108].

В работах В. В. Солодовникова и его учеников при решении задач анализа и синтеза непрерывных систем автоматического управления (САУ) используются ортогональные разложения. На их основе разработан спектральный метод, который в совокупности с аппаратом интегральных преобразований и классической проблемой моментов дает возможность построить методику детерминированного и статистического анализа и синтеза широкого класса САУ, легко поддающуюся формализации и удобную для программирования на цифровых вычислительных машинах.

В книге рассматриваются задачи анализа и синтеза ДСАУ, основанные на использовании спектрального метода и аппарата теории ортогональных функций дискретного аргумента, определенных на равноотстоящих точках. В силу ряда замечательных свойств дискретных ортогональных разложений рассматриваемые методы дают возможность существенно сократить объем и повысить точность вычислений. Действующие сигналы и динамические характеристики ДСАУ представляются в удобном для расчетов и исследований аналитическом виде. Принцип разложения динамических характеристик и сигналов исследуемой системы развивается в достаточно универсальный метод решения задачи анализа и синтеза как по аналитическим, так и по экспериментальным данным.

$$(x, y) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b x_k(t) y_k(t) dt.$$

В частности,

$$(x, x) = \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b x_k^2(t) dt = \lim_{k \rightarrow \infty} \|x_k\|^2.$$

Вследствие непрерывности нормы

$$(x, x) = \|x\|^2.$$

Можно показать, что функционал (x, y) удовлетворяет всем условиям, определяющим скалярное произведение (коммутативно, дистрибутивно). Пространство \overline{L}^2 , в котором норма порождается скалярным произведением, называется сепарабельным гильбертовым пространством.

Изложенное выше позволяет ввести понятие ортогональных систем элементов дискретного переменного.

Конечная или счетная система элементов дискретного переменного h_p гильбертова пространства \overline{L}^2 называется ортогональной, если $h_p \perp h_q$ при $p \neq q$. Если, кроме того, $\|h_p\| < 1$ при всех p , то система называется ортонормированной.

Ортогональная система элементов дискретного переменного называется полной, если в \overline{L}^2 не существует элемента, отличного от Θ и ортогонального всем элементам системы.

Если функция дискретного переменного $f(n) \in \overline{L}^2$, то для того, чтобы ортогональные подпространства K образовывали разложение $f(n)$, необходимо и достаточно, чтобы система подпространств K была полной.

Полная ортонормированная система элементов дискретного аргумента называется ортонормированным базисом гильбертова пространства \overline{L}^2 .

2. Общие свойства ортогональных многочленов дискретного переменного [36], [37], [40], [41]

Рассмотрим систему элементов в пространстве \overline{L}^2 , представленную многочленами $U_m(n)$ степени m .

Многочлены $U_m(n)$ называются ортогональными относительно n_0, n_1, \dots, n_{N-1} , если

$$\sum_{i=0}^N U_m(n_i) U_\mu(n_i) = 0 \quad \text{при } m \neq \mu. \quad (1.1.1)$$

Наибольший интерес при исследовании дискретных систем автоматического управления (ДСАУ) представляют многочлены, оп-

ределенные на системе равноотстоящих точек $n = a + h\xi$, $\xi = 0, 1, 2, \dots, N - 1$.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением только таких многочленов.

ОБЩЕЕ ВЫРАЖЕНИЕ ОРТОГОНАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА

Пусть $F_{m-1}(n)$ — произвольный многочлен степени $m-1$ и $F_{m-1}(n) \in \bar{L}^2$. Разложим $F_{m-1}(n)$ в ряд по ортогональному базису $U_m(n)$.

Неопределенная сумма произведения имеет вид [40]

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} [F_{m-1}(n) U_m(n)] = & F_{m-1}(n) \Delta^{-1} U_m(n) - \Delta F_{m-1}(n) \Delta^{-2} U_m(n+h) + \\ & + \Delta^2 F_{m-1}(n) \Delta^{-3} U_m(n+2h) + \dots + (-1)^{m-1} \Delta^{m-1} \times \\ & \times F_{m-1}(n) \Delta^{-m} U_m(n+mh-h). \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Произвольные постоянные в правой части выражения (1.1.2) выберем таким образом, чтобы

$$[\Delta^{-k} U_m(n+kh-h)]_{n=a} = 0, \quad k \leq m,$$

тогда получим

$$\{\Delta^{-1} [F_{m-1}(n) U_m(n)]\}_{n=a} = 0.$$

Для того, чтобы сумма (1.1.2) стремилась к нулю при $x=a = -Nh = v$, необходимо, чтобы выражения $(n-a)$ и $(n-v)$ были множителями $\Delta^{-1} U_m(n)$, поскольку $\Delta^v F_{m-1}(b) \neq 0$, $v = 1, 2, \dots, m-1$.

Таким образом,

$$\Delta^{-1} U_m(n) = (n-a) \lambda(n).$$

Применяя к этому выражению формулу неопределенной суммы произведения, имеем

$$\Delta^{-2} U_m(n) = \sum_{v=0}^{m+1} (-1)^v \frac{1}{h^v + 1} \left(\frac{n-a+vh}{v+2} \right) \Delta^v \lambda(n).$$

Посредством последовательного суммирования, умножая $\Delta^{-m} U_m(n)$ на $(n-a)_{m,h}$, получим $\Delta^{-m} U_m(n) = \binom{n-a}{m}_h \psi(n)$ и, соответственно, для множителя $(n-v)$

$$\Delta^{-m} U_m(n) = A \binom{n-a}{m}_h \binom{n-b}{m}_h,$$

где A — произвольная постоянная.

Следовательно, общее выражение для ортогональных многочленов относительно $n = a + \xi h$, $\xi = 0, 1, 2, \dots, N-1$, $v = a + Nh$ имеет вид

$$U_m(n) = A \Delta^n \left[\binom{n-a}{m}_h \binom{n-b}{m}_h \right]. \quad (1.1.3)$$

Применим формулу m -ой разности к выражению (1.1.3). Получим общее выражение для ортогональных многочленов в виде

$$U_m(n) = Ah^m \sum_{i=0}^{m+1} \binom{m}{i} \binom{n-b}{m-i}_h \binom{n-a+ih}{i}_h. \quad (1.1.4)$$

Можно представить выражение (1.1.3) в виде разложения в ряд Ньютона по обобщенным биномиальным коэффициентам $\binom{n-b}{i}_h$.

Поскольку

$$\Delta^{-m} U_m(n) = A \sum_{i=0}^{2m+1} \binom{n-b}{i}_h \frac{1}{h^i} \Delta^i \left[\binom{n-a}{m}_h \binom{n-b}{m}_h \right]_{n=b},$$

$$\Delta^i \left[\binom{n-a}{m}_h \binom{n-b}{m}_h \right] = \sum_{\nu=0}^{i+1} h^\nu \binom{i}{\nu} \binom{n-b}{m-\nu}_h \binom{n-a+\nu h}{m-i+\nu}_h,$$

при $n = a$ получим

$$\Delta^{-m} U_m(n) = A \sum_{i=0}^{2m+1} \binom{i}{m} \binom{b-a+mh}{2m-i}_h \binom{n-b}{i}_h.$$

Определяя $m - \nu$ разность последнего выражения при $i = m + \nu$, имеем

$$U_m(n) = Ah^m \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m+\nu}{m} \binom{b-a+mh}{m-\nu}_h \binom{n-b}{m+\nu}_h.$$

Можно показать, что $U_m(n) = 0$ при $m \geq N$.

Учитывая, что $\xi = \frac{n-a}{h}$, получим

$$U_m(a + \xi h) = Ah^{2m} \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m+\nu}{m} \binom{m-N}{m-\nu} \binom{\xi}{\nu}. \quad (1.1.5)$$

При этом

$$\sum_{\xi=0}^N U_m(n) U_\mu(n) = 0 \quad \text{при } m \neq \mu.$$

Определим величину последнего выражения при $m \neq \mu$, то есть сумму вида

$$\sum_{\xi=0}^N [U_m(n)]^2.$$

Неопределенная сумма произведения $U_m(n) U_m(n)$ определяется выражением

$$\Delta^{-1} [U_m(n) U_m(n)] = U_m(n) \Delta^{-1} U_m(n) - \Delta U_m(n) \Delta^{-2} U_m(n+h) + \\ + \dots + (-1)^m \Delta^m U_m(n) \Delta^{-m-1} U_m(n+mh).$$

Подставляя в вышеприведенное равенство $n = a$ и $n = a$ и выбирая произвольные постоянные так, чтобы

$$\Delta^{-k} U_m(n+kh-h) = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, m,$$

получим

$$\Delta^{-m} U_m(n) = A \binom{n-a}{m}_h \binom{n-b}{m}_h. \quad (1.1.6)$$

Для суммы произведения из формулы (1.1.6) имеем

$$\begin{aligned} \Delta^{-m-1} U_m(n) = & \frac{A}{h} \left[\binom{h-a}{m}_h \binom{n-b}{m+1}_h - \binom{n-a}{m-1}_h \binom{n-b+h}{m+2}_h + \right. \\ & \left. + \binom{n-a}{m-2}_h \left(\binom{n-b+2h}{m+3}_h + \dots + (-1)^m \binom{n-b+mh}{2m+1}_h \right) \right]. \end{aligned}$$

Делая замену переменных на $n + mh$, получим

$$\Delta^{-m-1} U_m(n + mh) = \frac{A}{h} \left[\sum_{\nu=0}^{m+1} (-1)^\nu \binom{n-a+mh}{m-\nu}_h \binom{n-b+\nu h+mh}{m+1+\nu}_h \right].$$

Отсюда с учетом $\nu - a = Nh$ имеем

$$[\Delta^{-m-1} U_m(n + mh)]_{n=b} = 0,$$

$$\begin{aligned} [\Delta^{-m-1} U_m(n + mh)]_{n=a} &= Ah^{2m} \sum_{\nu=0}^{m+1} (-1)^\nu \binom{m}{m-\nu} \binom{m+\nu-N}{m+\nu+1} = \\ &= (-1)^{m-1} Ah^{2m} \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m}{\nu} \binom{N}{m+\nu+1} = (-1)^{m+1} Ah^{2m} \binom{N+m}{2m+1}. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

Из выражения (1.1.3) при $x = a$ получаем

$$\Delta^m U_m(a) = Ah^{2m} \binom{2m}{h}. \quad (1.1.8)$$

Итак, окончательно имеем

$$\sum_{\xi=0}^N [U_m(n)]^2 = A^2 h^{4m} \binom{2m}{m} \binom{N+m}{2m+1}. \quad (1.1.9)$$

СИММЕТРИЯ

Делая в выражении (1.1.3) замену переменных на $a + \nu - h - n$, получим

$$U_m(a + \nu - h - n) = Ah^m \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m}{\nu} \binom{b-h+\nu h-n}{\nu}_h \binom{a-h-n}{m-\nu}_h.$$

Преобразуем последнее выражение к виду

$$U_m(a + \nu - h - n) = (-1)^m Ah^m \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m}{\nu} \binom{n-a+mh-\nu h}{m-\nu}_h \binom{n-b}{\nu}_h. \quad (1.1.10)$$

Обозначая в равенстве (1.1.10) $m - \nu = \mu$ и сравнивая его с равенством (1.1.3), замечаем, что

$$U_m(a + \nu - h - n) = (-1)^m U_m(n).$$

РЕКУРРЕНТНАЯ ФОРМУЛА

Разложим функцию $nU(n)$ в ряд по ортогональным многочленам. Учитывая свойство ортогональности, получим

$$nU(n) = B_{m, m-1} U_{m-1}(n) + B_{m, m} U_m(n) + B_{m, m+1} U_{m+1}(n). \quad (1.1.11)$$

Определим коэффициенты $B_{m, m-1}$, $B_{m, m}$ и $B_{m, m+1}$.

Умножая равенство (1.1.11) на $U_{m+1}(n)$ и суммируя на отрезке $[a, b]$, имеем

$$\sum_{n=a}^b n U_m(n) U_{m+1}(n) = B_{m, m+1} \sum_{n=a}^b [U_{m+1}(n)]^2. \quad (1.1.12)$$

Сумма в правой части известна, поэтому, применяя формулу неопределенной суммы произведения, преобразуем равенство (1.1.12) к виду

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} [n U_m(n) U_{m+1}(n)] &= [n U_m(n)] \Delta^{-1} U_{m+1}(n) - \Delta [n U_m(n)] \Delta^{-2} \times \\ &\times U_{m+1}(n+h) + \dots + (-1)^{m+1} \Delta^{m+1} [n U_m(n)] \Delta^{-m-2} \times \\ &\times U_{m+1}(n+mh+h). \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Произвольные постоянные в последнем выражении распределим так, чтобы

$$\Delta^{-k} U_m(n+kh-h) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, m$$

при $n = a$, $n = b$.

Таким образом, все члены выражения (1.1.13), кроме последнего, равны нулю. Для последнего слагаемого получим

$$\begin{aligned} [\Delta^{-m-2} U_{m+1}(n+mh+h)]_{n=a} &= (-1)^m A_{m+1} h^{2m+2} \binom{N+m+1}{2m+3}, \\ [\Delta^{-m-2} U_{m+1}(n+mh+h)]_{n=b} &= 0. \end{aligned}$$

Согласно формуле (1.1.9)

$$\Delta^m U_m(a) = A_m h^{2m} \binom{2m}{m}.$$

При $n = a$ получим

$$\Delta^{m+1} [n U_m(n)] = h(m+1) \Delta^m U_m(n) = A_m h^{2m+1} (m+1) \binom{2m}{m}.$$

Тогда выражение (1.1.12) имеет вид

$$\sum_{n=a}^b n U_m(n) U_{m+1}(n) = A_m A_{m+1} h^{4m+3} (m+1) \binom{2m}{m} \binom{N+m+1}{2m+3} \quad (1.1.14)$$

и, с учетом равенств

$$\sum_{\xi=0}^N [U_m(n)]^2 = A^2 h^{4m} \binom{2m}{m} \binom{N+m}{2m+1},$$

$$\sum_{n=a}^b [U_{m+1}(n)]^2 = A_{m+1}^2 h^{4m+4} \binom{2m+2}{m+1} \binom{N+m+1}{2m+3}, \quad (1.1.15)$$

получим значение коэффициента $B_{m, m+1}$

$$B_{m, m+1} = \frac{A_m}{h A_{m+1}} \frac{(m+1)^2}{2(2m+1)}. \quad (1.1.16)$$

Заменяя в уравнении (1.1.14) m на $m-1$, а в уравнении (1.1.15) на $m-2$, получим

$$\sum_{n=a}^b [nU_{m-1}(n)U_m(n)] = A_{m-1} A_m h^{4m-1} m \binom{2m-2}{m-1} \binom{N+m}{2m+1},$$

$$\sum_{n=a}^b [U_{m-1}(n)^2] = A_{m-1}^2 h^{4m-4} \binom{2m-2}{m-1} \binom{N+m-1}{m-1}.$$

Из равенства (1.1.11) и последних двух выражений определяем

$$B_{m, m-1} = \frac{A_m h^2}{A_{m-1}} \frac{(N^2 - m^2)}{2(2m+1)}. \quad (1.1.17)$$

Для определения величины $B_{m, m}$ подставим в уравнение (1.1.11) значения $n = b-h$ и $n = a$. Получим

$$(b-h)U_m(b-h) = B_{m, m-1}U_{m-1}(b-h) + B_{m, m}U_m(b-h) + B_{m, m+1}U_{m+1}(b-h), \quad (1.1.18)$$

$$aU_m(a) = B_{m, m-1}U_{m-1}(a) + B_{m, m}U_m(a) + B_{m, m+1}U_{m+1}(a). \quad (1.1.19)$$

Учитывая свойство симметрии многочленов $U_m(n)$

$$U_m(a) = (-1)^m U_m(b-h),$$

из выражений (1.1.18) и (1.1.19) получим

$$(b+a-h)U_m(b-h) = 2B_{m, m}U_m(b-h).$$

Откуда

$$B_{m, m} = \frac{1}{2} (b+a-h).$$

Таким образом, для дискретных ортогональных многочленов имеет место рекуррентная формула:

$$\left(n - \frac{b+a-h}{2}\right)U_m(n) = \frac{A_m h^2}{A_{m-1}} \frac{N^2 - m^2}{2(2m+1)} U_{m-1}(n) + \frac{A_m}{hA_{m+1}} \frac{(m+1)^2}{2(2m+1)} U_{m+1}(n). \quad (1.1.20)$$

«ЦЕНТРАЛЬНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ»

Если в выражении

$$U_m(a+b-h-n) = (-1)^m U_m(n),$$

$$n = \frac{1}{2} (a+b-h),$$

получим

$$U_{2m+1}\left(\frac{a+b-h}{2}\right) = 0. \quad (1.1.21)$$

Определим значение $U_{2m}(n)$. Для этого подставим в уравнение (1.1.11) $m = 2k+1$ и $n = a + \frac{Nh-h}{2}$, тогда согласно равен-

ству (1.1.21), получим

$$B_{2k+1, 2k} U_{2k} \left(a + \frac{Nh-h}{2} \right) = B_{2k+1, 2k+2} U_{2k+2} \left(a + \frac{Nh-h}{2} \right).$$

Обозначая

$$\frac{U_{2k} \left(a + \frac{Nh-h}{2} \right)}{h^{4k} A_{2k}} = F(k),$$

получим

$$F_{k+1} = \frac{N^2 - (2n+1)^2}{4(n+1)^2} F(k). \quad (1.1.22)$$

Решение разностного однородного уравнения следующее:

$$F(k) = \omega \prod_{i=0}^k \frac{-[N^2 - (2i+1)^2]}{4(i+1)^2} = \omega \prod_{i=0}^k \frac{-\left(\frac{N+1}{2} + i\right) \left(\frac{N-1}{2} - i\right)}{(i+1)(i+1)}.$$

Отсюда получаем

$$F(k) = \omega (-1)^k \binom{\frac{N}{2} - \frac{1}{2} + k}{k} \binom{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}}{k}.$$

Так как $F(0) = 1$, то $\omega = 1$, и искомое «центральное значение» равно

$$U_{2k} \left(a + \frac{Nh-h}{2} \right) = A_{2k} h^{4k} (-1)^k \binom{\frac{2k}{k}}{k} \binom{\frac{N}{2} - \frac{1}{2} + k}{2k}$$

или

$$U_{2k} \left(a + \frac{Nh-h}{2} \right) = A_{2k} h^{2k} (-1)^k \binom{\frac{N}{2} - \frac{1}{2} + k}{k} \binom{\frac{N}{2} - \frac{1}{2}}{k}. \quad (1.1.23)$$

РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Ортогональные многочлены дискретного аргумента удовлетворяют разностному уравнению вида [5]

$$(n-a+2h)(n-b+2h)\Delta^2 U_m(n) + [2n-a-b+3h-m(m+1)h]h\Delta U_m(n) - m(m+1)h^2 U_m(n) = 0. \quad (1.1.24)$$

ТЕОРЕМА О НУЛЯХ МНОГОЧЛЕНОВ

Корни ортогональных многочленов дискретного аргумента $U_m(n)$ действительные, простые и расположены внутри отрезка $[a, b-h]$. Каким бы ни было ξ внутри отрезка $[a+\xi h, a+\xi h+h]$, всегда расположен только один нуль многочлена $U_m(n)$.

КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ ФОРМУЛЫ РОДРИГА

Для дискретных ортогональных многочленов имеет место конечно-разностный аналог формулы Родрига [5]

$$P_k(n) = \frac{1}{\rho(n)} \Delta^n [\rho(n-k) \chi(n) X(n-1) \dots X(n-k+1)], \quad n=0, 1, 2, \dots, \quad (1.1.25)$$

где $\rho(n)$ — функция дискретного аргумента n , состоящая из комбинаций гамма-функций,

$X(n)$ — многочлен степени q ,
 $\rho(n)$ и $X(n)$ — независимы от k .

Покажем, что для рассматриваемого нами класса многочленов $U_m(n)$ степень многочлена $X(n)$ не должна превышать значения $q = 2$.

Предположим, что $q \leq 2$. Из формулы (1.1.25) при $k = 1$ получим

$$P_1(n) = \rho_1(n)^{-1} \Delta [\rho_1(n-1)] X(n).$$

Откуда

$$\frac{\rho(n-1)}{\rho(n)} = \frac{X(n+1) P_1(n)}{X(n)}. \quad (1.1.26)$$

Преобразуем правую часть выражения (1.1.26) к виду

$$\frac{\rho(n-1)}{\rho(n)} = \prod_{f=1}^q \frac{n + \alpha_f}{n + \beta_f},$$

где α_f и β_f — корни числителя и знаменателя в формуле (1.1.26).
 Решение этого уравнения равно

$$\rho(n) = \prod_{f=1}^q \frac{\Gamma(n + \beta_f + 1)}{\Gamma(n + \alpha_f + 1)}.$$

Подставляя полученное значение $\rho(n)$ в формулу (1.1.25), имеем

$$P_k(n) = \prod_{f=1}^q \frac{\Gamma(n + \alpha_f + 1)}{\Gamma(n + \beta_f + 1)} \Delta^k \left\{ \prod_{l=1}^q \frac{\Gamma(n + \beta_l + 1)}{\Gamma(n + \alpha_l + 1)} \right\}. \quad (1.1.27)$$

Следовательно,

$$P_1(n) = X(n+1) - \prod_{f=1}^q (n + \alpha_f), \quad (1.1.28)$$

$$P_2(n) = X(n+1) \Delta^2 X + P_1(n) \Delta X + X(n+1) \Delta P_1 + P_1(n) P_1(n+1). \quad (1.1.29)$$

Из равенства (1.1.29) видно, что многочлен $P_2(n)$ может иметь вторую степень лишь в случае, когда $q = 2$, поэтому значение $q > 2$ выводит из класса рассматриваемых многочленов.

Рассмотрим случай, когда $q = 2$. Из формулы (1.1.27) получим многочлены

$$P_k(n) = \frac{\Gamma(n + \alpha_1 + 1) \Gamma(n + \alpha_2 + 1)}{\Gamma(n + \beta_1 + 1) \Gamma(n + \beta_2 + 1)} \Delta^k \left[\frac{\Gamma(n + \beta_1 + 1) \Gamma(n + \beta_2 + 1)}{\Gamma(n + \alpha_1 + 1) \Gamma(n + \alpha_2 - k + 1)} \right],$$

или после преобразования

$$P_k(n) = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} (-1)^p \times \\ \times \frac{\Gamma(n + \beta_1 + 1 + k + p) \Gamma(n + \beta_2 + 1 + k - p) \Gamma(n + \alpha_1 + 1) \Gamma(n + \alpha_2 + 1)}{\Gamma(n + \beta_1 + 1) \Gamma(n + \beta_2 + 1) \Gamma(n + \alpha_1 + 1 - p) \Gamma(n + \alpha_2 + 1 - p)}.$$

Используя свойство гамма-функций

$$\Gamma(z-p) = (-1)^p \frac{\Gamma(z) \Gamma(1-z)}{\Gamma(p+1-z)},$$

p — целое число, получим

$$P_k(n) = \frac{\Gamma(n + \beta_1 + 1 + k) \Gamma(n + \beta_2 + 1 + k)}{\Gamma(n + \beta_1 + 1) \Gamma(n + \beta_2 + 1)} \times \quad (1.1.30)$$

$$\times \sum_{\rho=0}^k \binom{k}{\rho} \frac{\Gamma(-n - \beta_1 - n) \Gamma(-n - \beta_2 - k) \Gamma(-n - \alpha_1 + \rho) \Gamma(-n - \alpha_2 + \rho)}{\Gamma(-n - \beta_1 - k + \rho) \Gamma(-n - \beta_2 - n + \rho) \Gamma(-n - \alpha_1) \Gamma(-n - \alpha_2)}.$$

Вводя обозначения гипергеометрических функций, получим

$$P_k(n) = \frac{\Gamma(n + \beta_1 + 1 + k) \Gamma(n + \beta_2 + 1 + k)}{\Gamma(n + \beta_1 + 1) \Gamma(n + \beta_2 + 1)} \times$$

$$\times {}_3F_2(-k, n - \alpha_1, -n - \alpha_2, -n - \beta_1 - k, -n - \beta_2 - k; 1). \quad (1.1.31)$$

Если в формуле (1.1.31) $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ и $\alpha_2 = \beta_2 = -N$, то $\rho(n) = 1$, и полученные многочлены являются ортогональными многочленами Чебышева дискретного аргумента.

Пусть $q = 1$. Из уравнения (1.1.26) получаем

$$\frac{\rho(n)}{\rho(n-1)} = C \frac{n + \beta}{n + \alpha}, \quad (1.1.32)$$

$$\frac{\rho(n)}{\rho(n-1)} = C(n + \gamma). \quad (1.1.33)$$

Из формулы (1.1.32) имеем

$$\rho(n) = C^n \frac{\Gamma(n + \beta + 1)}{\Gamma(n + \alpha + 1)},$$

$$P_k(n) = \frac{\Gamma(n + \beta + k + 1)}{\Gamma(n + \beta + 1)} {}_2F_1\left(-k, -n - \alpha; -n - \beta - k; \frac{1}{C}\right).$$

После преобразования получим

$$P_k(n) = (-1)^k \frac{\Gamma(\alpha - \beta)}{\Gamma(\alpha - \beta - k)} \times$$

$$\times {}_2F_1\left(-k, -n - \alpha; \beta - \alpha + 1; 1 - \frac{1}{C}\right). \quad (1.1.34)$$

Последняя формула представляет собой многочлены Кравчука. С учетом формулы (1.1.33) получим многочлены

$$P_k(n) = \frac{\Gamma(n + \gamma + k + 1)}{\Gamma(n + \gamma + 1)} {}_1F_1\left(-k; -n - k - \gamma; -\frac{1}{C}\right).$$

Это многочлены Шарлье.

При $q = 0$ аналогично можно показать, что получаем также многочлены Шарлье.

Изложенное выше систематизировано в таблице 1.1.1.

Ниже приведем определения, свойства ортогональности, таблицы коэффициентов и общий вид конкретных многочленов дискретного аргумента.

q	F	Многочлены
> 2	—	—
2	${}_3F_2, {}_2F_2$	Особые случаи, Чебышева, Бейтмена
1	${}_1F_1$	Кравчука, Мейкснера, Шарлье
0	${}_1F_1$	Шарлье

МНОГОЧЛЕНЫ ЧЕБЫШЕВА ДИСКРЕТНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Определение, функция веса и свойство ортогональности:

$$t_k(n) = k_n! \Delta^k \left[\binom{n}{k} \binom{n-N}{k} \right], \quad k=0, 1, \dots, N-1, \quad (1.1.35)$$

$$\rho(n) = 1.$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} t_q(n) t_p(n) = 0 \quad \text{при } q \neq p,$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} t_q(n) t_p(n) = \frac{N(N^2-1^2)(N^2-2^2) \dots (N^2-k^2) \delta_{qp}}{2k+1} \quad \text{при } q=p, \quad (1.1.36)$$

$$q, p=0, 1, 2, \dots, N-1.$$

Рекуррентная формула:

$$(m+1) P_{m+1}(n) - (2m+1) n P_m(n) + m P_{m-1}(n) = 0,$$

$$n = a + \xi h, \quad h = \frac{a + hN}{n} = \frac{a+b}{n}.$$

Для многочленов Чебышева $a = -1$, $b = 1$.

Коэффициенты многочленов Чебышева для $N = 20$, $k = 1, 2, \dots$ и общий вид многочленов приведены в [39].

МНОГОЧЛЕНЫ КРАВЧУКА

Определение, функция веса, свойство ортогональности:

$$K_k(n) = \frac{(-1)^k n! (N-n)!}{k! n^k q^{N-n}} \Delta^k \left[\frac{p^n q^{N-n+k}}{(n-k)! (N-n)!} \right], \quad (1.1.37)$$

$k = a, 1, \dots, N$, N — положительное целое,

$$\rho(n) = \binom{N}{n} p^n q^{N-n}, \quad p > 0, \quad q > 0, \quad p + q = 1,$$

$$\sum_{n=0}^N \rho(n) k_j(n) k_i(n) = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i. \\ \binom{N}{k} p^k q^k \delta_{ji} & \text{при } j = i = k. \end{cases} \quad (1.1.38)$$

Коэффициенты многочленов Кравчука и их общий вид приведены в [39].

Определение, функция веса, свойство ортогональности:

$$C_k(n; a) = \frac{n!}{a^n} \Delta^k \left[\frac{a^{n-k}}{(n-k)!} \right], \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.1.39)$$

$$\rho(n) = e^{-a} \frac{a^n}{n!}, \quad a > 0,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) C_j(n; a) C_l(n; a) = \begin{cases} 0, & j \neq l, \\ a^{-j} j! \delta_{jl}, & j = l. \end{cases} \quad (1.1.40)$$

Для многочленов Шарлье можно записать явное выражение

$$C_k(n, a) = \sum_{\nu=0}^k \frac{1}{a^\nu} \frac{(-1)^\nu k!}{(k-\nu)! \nu!} n(n-1) \dots (n-\nu+1). \quad (1.1.41)$$

Выражение (1.1.41) преобразуем к виду

$$C_k(n; a) = 1 - \alpha_{1k}(a) n + \alpha_{2k}(a) n^2 - \alpha_{3k}(a) n^3 + \dots + \\ + (-1)^k \frac{1}{a^k} n^k = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k}(a) n^\nu, \quad (1.1.42)$$

где

$$\alpha_{\nu k}(a) = \sum_{m=\nu}^k \frac{(-1)^m k!}{a^m (k-m)! m!} \sigma_{k-m} (-1)^{k-m}, \quad (1.1.43)$$

$$\sigma_0 = 1,$$

$$\sigma_1 = \frac{\nu(\nu+1)}{2},$$

$$\sigma_2 = 1 \cdot 2 + \dots + 1 \cdot \nu + 2 \cdot 3 + \dots + 2 \cdot \nu + \dots + (\nu-1) \nu.$$

.....

$$\sigma_{k-\nu} = 1 \cdot 2 \dots (k-\nu) + 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (k-\nu+1) + 1 \cdot 3 \dots (k-\nu+1) + \\ + \dots + \nu(\nu+1) \dots (k-1), \\ \sigma_\nu = \nu! \quad (1.1.44)$$

Коэффициенты многочленов Шарлье и их общий вид представлены в [38].

МНОГОЧЛЕНЫ МЕЙКСНЕРА

Дискретные многочлены Мейкснера определяются через гипергеометрическую функцию

$$m_k(n; \beta, c) = (\beta+n)_k {}_2F_1 \left(-k, -n, 1-\beta-k-n, \frac{1}{c} \right) = \\ = (\beta)_k {}_2F_1 \left(-k, -n; \beta; 1 - \frac{1}{c} \right).$$

Определение, функция веса, свойство ортогональности:

$$m_k(n; \beta, c) = \frac{n!}{(\beta)_n} c^{-n-k} \Delta^k \left[\frac{c^n (\beta)_n}{(n-k)!} \right], \quad (1.1.45)$$

$$\rho(n) = \frac{c^n (\beta)_n}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) m_q(n, \beta, c) m_q(n, \beta, c) = q(\beta)_q c^{-q} (1-c)^{-\beta} \sigma_{q, 1}, \quad (1.1.46)$$

$$\beta > 0, \quad 0 < c < 1.$$

Явное выражение имеет вид

$$\begin{aligned} m_k(n; \beta, c) &= 1 + \alpha_{1k}(\beta, c) n + \alpha_{2k}(\beta, c) n^2 + \dots + \alpha_{kk}(\beta, c) n^k = \\ &= (\beta)_k \left[\sum_{\nu=0}^k \frac{k! (-1)^\nu}{(k-\nu)! \nu!} A^\nu \frac{(-n)(-n+1) \dots (-n+\nu-1)}{(\beta)_\nu} \right] = \\ &= \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k}(\beta, c) n^\nu, \end{aligned} \quad (1.1.47)$$

где

$$A = 1 - \frac{1}{c},$$

$$\alpha_{\nu k}(\beta, c) = (\beta)_k \sum_{m=\nu}^k \frac{(-1)^k k!}{(k-\nu)! \nu!} A^\nu \frac{\sigma_{k-\nu} (-1)^{k-\nu}}{(\beta)_\nu}. \quad (1.1.48)$$

При $\beta = 1$, $(\beta)_n = n!$ получим

$$\begin{aligned} m_k(n; 1, c) &= c^{-n-k} \Delta \left[c^{n+k} (n+1)(n+2) \dots (n+k) - \right. \\ &= \frac{k}{1!} c^{n+k-1} n(n+1) \dots (n+k-1) + \frac{k(k-2)}{2!} c^{n+k-2} \times \\ &\times (n-1)n \dots (n+k-2) + \dots + (-1)^k c^n (n-k+1)(n-k+2) \dots n \left. \right], \\ &1 < n < M = 20, \quad c = 0,25; \quad 0,5; \quad 0,75. \end{aligned}$$

Общий вид многочленов и их коэффициенты представлены в [38].

МНОГОЧЛЕНЫ ГАНА

Ортогональные многочлены Гана можно определить, пользуясь функцией Клаузена

$$P_m(n; \beta, \gamma, \delta) = \frac{(\beta)_m (\gamma)_m}{m!} {}_3F_2(-m, -n; \beta + \gamma + \delta + m; \beta, \gamma, 1).$$

Определение, функция веса:

$$\begin{aligned} P_m(n, \beta, \gamma, \delta) &= \frac{1}{m!} \frac{n! (\beta)_n}{(\beta)_n (\gamma)_n} \Delta^m \left[\frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{(n-m)! (\delta)_{n-m}} \right], \\ \rho(n) &= \frac{(\beta)_n (\gamma)_n}{n! (\delta)_n}. \end{aligned} \quad (1.1.49)$$

Явное выражение

$$P_k(n; \beta, \gamma, \delta) = \left[1 + \frac{(-k)(-n)(\beta + \gamma - \delta + k)}{(\beta)(\gamma)} + \dots \right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(-k)_2 (-n) (-n+1) (\beta + \gamma - \delta + k)_2}{(3)_2 (\gamma)_2 (1)_2} + \dots + \\
& + \frac{(-k)_k (-n) (-n+1) \dots (-n+k-1) (\beta + \gamma - \delta + k)_k}{(\beta)_k (\gamma)_k (1)_k} \Big] \frac{(\beta)_k (\gamma)_k}{k!} = \\
& = \frac{(\beta)_k (\gamma)_k}{k!} \sum_{l=0}^k \frac{(-k)_l (-n) \dots (-n+l-1) (\beta + \gamma - \delta + k)_l}{(\beta)_l (\gamma)_l (1)_l} = \\
& = \frac{(\beta)_k (\gamma)_k}{k!} \sum_{l=0}^k \alpha_{lk} (\beta, \gamma, \delta) n^l, \quad (1.1.50)
\end{aligned}$$

$$\alpha_{lk} (\beta, \gamma, \delta) = \sum_{m=0}^n \frac{(\beta)_k (\gamma)_k}{k!} \frac{(-k)_l (\beta + \gamma - \delta + k)_l}{(\beta)_l (\gamma)_l (1)_l} \sigma_{k-l}. \quad (1.1.51)$$

При

$$\begin{aligned}
\beta &= 2, & (\beta)_n &= 2 \cdot 3 \dots (n+1) = (n+1)!, \\
\gamma &= 1, & (\gamma)_n &= 1 \cdot 2 \dots n = n!, \\
\delta &= 1, & (\delta)_n &= 1 \cdot 2 \dots n = n!, \\
& & (\delta)_{n-k} &= (n-k)!
\end{aligned}$$

многочлены имеют вид

$$\begin{aligned}
P_k(n; 2, 1, 1) &= P_k(n; 1, 2, 1) = \frac{1}{k!} \frac{1}{(n+1)} \Delta^k \left[\frac{n! (n+1)!}{(n-k)! (n-k)!} \dots \right. \\
&= \frac{1}{k!} \frac{1}{(n+1)} \left[\frac{(n+k)! (n+k+1)!}{n! n!} - \frac{k}{1!} \frac{(n+k-1)! (n+k)!}{(n-1)! (n-1)!} + \dots + \right. \\
& \quad \left. + (-1)^k \frac{n! (n+1)!}{(n-k)! (n-k)!} \right].
\end{aligned}$$

Если $\beta=1, \gamma=1, \delta=1$, то

$$\begin{aligned}
P_k(n; 1, 1, 1) &= \frac{1}{k!} \Delta \left[\frac{n! n!}{(n-k)! (n-k)!} \right] \\
&= \frac{1}{k!} \left\{ \left| \frac{(n+k)!}{n!} \right|^2 - \frac{k}{1!} \left| \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} \right|^2 + \dots + (-1)^k \frac{(n!)^2}{[(n-k)!]^2} \right\}.
\end{aligned}$$

Значения коэффициентов многочленов Гана и их общий вид представлены в [38].

ДИСКРЕТНЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение:

$$\varphi_1(n) = b_1 [(n+1) z_1^n - n z_1^{n-1}],$$

$$\varphi_2(n) = b_2 [(n+1) z_1^n - n z_1^{n-1}],$$

...

$$\varphi_{2k-1}(n) = b_{2k-1} \prod_{i=1}^{k-1} z_i^2 \sum_{i=1}^k [A_i (n-1) z_i^{n-2} + A'_i z_i^{n-1}],$$

$$\varphi_{2k}(n) = b_{2k} \prod_{i=1}^{k-1} z_i^2 \sum_{i=1}^k [A_i(n-1)z_i^{n-2} + A'_i z_i^{n-1}], \quad (1.1.52)$$

где

$$b_{2k-1} = \left\{ \frac{T}{2} (1 - |z_k|^2) [1 + (z_k + z_k^*) + |z_k|^2] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$b_{2k} = \left\{ \frac{T}{2} (1 - |z_k|^2) [1 - (z_k + z_k^*) + |z_k|^2] \right\}^{\frac{1}{2}},$$

$$z_k = e^{s_k T} = e^{-\alpha_k T + i\beta_k T},$$

$$z_k^* = e^{s_k^* T} = e^{-\alpha_k T - i\beta_k T},$$

$$A_m = \left[(z^2 - z) \frac{\prod_{i=1}^{k-1} z_i^2 \left(z - \frac{1}{z_i}\right)^2}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k (z - z_i)^2} \right]_{z=z_m},$$

$$A_m = \left[\frac{d}{dz} \frac{(z^2 - z) \prod_{i=1}^{k-1} z_i^2 \left(z - \frac{1}{z_i}\right)^2}{\prod_{\substack{i=1 \\ i \neq m}}^k (z - z_i)^2} \right]_{z=z_m}, \quad z_i = e^{-\alpha_i T}. \quad (1.1.53)$$

Для целей исследования ДСАУ спектральным методом целесообразно определить экспоненциальные многочлены дискретного аргумента в виде

$$\varphi_{2k-1}(n) = \bar{A}_{2k-1} \sum_{i=1}^k [\tilde{A}_i n e^{-\alpha_i n} + \tilde{A}'_i e^{-\alpha_i n}],$$

$$\varphi_{2k}(n) = \bar{A}_{2k} \sum_{i=1}^k [\tilde{A}_i n e^{-\alpha_i n} + \tilde{A}'_i e^{-\alpha_i n}], \quad (1.1.54)$$

где

$$\tilde{A}_i = \frac{A_i}{e^{-2\alpha_i}}, \quad \tilde{A}'_i = \frac{A'_i}{e^{-\alpha_i}} - \frac{A_i}{e^{-2\alpha_i}}. \quad (1.1.55)$$

При рассмотрении методов анализа и синтеза ДСАУ необходимо отображение рассматриваемых многочленов в область комплексного переменного z . Оно имеет следующий вид:

$$\varphi_{2k-1}^*(z) = b_{2k-1} \frac{z^2 - z}{(z - z_k)(z - z_k^*)} \prod_{i=1}^{k-1} z_i z_i^* \frac{\left(z - \frac{1}{z_i}\right)\left(z - \frac{1}{z_i^*}\right)}{(z - z_i)(z - z_i^*)}, \quad (1.1.56)$$

$$\varphi_{2k}^*(z) = b_{2k} \frac{z^2 - z}{(z - z_k)(z - z_k^*)} \prod_{i=1}^{k-1} z_i z_i^* \frac{\left(z - \frac{1}{z_i}\right)\left(z - \frac{1}{z_i^*}\right)}{(z - z_i)(z - z_i^*)}. \quad (1.1.57)$$

Определение, функция веса, свойство ортогональности:

$$e^{-\lambda n} l_k(n) = \Delta^n \left\{ e^{-\lambda n} \binom{n}{k} \right\}, \quad (1.1.58)$$

$$\sum_{p=0}^{\infty} e^{\lambda p} l_k(p) l_m(p) = \begin{cases} 0, & k \neq m, \\ e^{-k\lambda} (1 - e^{-\lambda})^{-1}, & k = m, \end{cases} \quad (1.1.59)$$

$k, m = 0, 1, 2, \dots$

Рекуррентная формула:

$$(k+1) l_{k+1}(n) - \{(k+1)e^{-\lambda} + k + (e^{-\lambda} - 1)n\} l_k(n) + k e^{-\lambda} l_{k-1}(n) = 0.$$

Разностное уравнение:

$$e^{-\lambda}(n+2) \Delta^2 l_k(n) - \{(1 - e^{-\lambda})n + (k-2)e^{-\lambda} - (k-1)\} \Delta l_k(n) + k(1 - e^{-\lambda}) l_k(n) = 0.$$

Явное выражение при $\lambda = \frac{1}{2}$:

$$l_1(n) = \alpha_{11} e^{-n/2},$$

$$l_2(n) = \alpha_{12} e^{-n/2} + \alpha_{22} \cdot n \cdot e^{-n/2},$$

$$l_3(n) = \alpha_{13} e^{-n/2} + \alpha_{23} n e^{-n/2} + \alpha_{33} n^2 e^{-n/2},$$

$$\dots$$

$$l_k(n) = \alpha_{1k} e^{-n/2} + \alpha_{2k} n \cdot e^{-n/2} + \dots + \alpha_{kk} k n^{k-1} e^{-n/2}, \quad (1.1.60)$$

где

$$\alpha_{11} = \sqrt{1 - e^{-1}},$$

$$\alpha_{12} = \sqrt{e^{-1}(1 - e^{-1})},$$

$$\alpha_{22} = -(e - 1) \sqrt{e^{-1}(1 - e^{-1})},$$

$$\dots$$

Таким образом, из вышеизложенного следует общая формула для ортогональных многочленов дискретного аргумента

$$U_m(n) = \sum_{g=0}^m \alpha_{gm}(n)^{g^2} \exp(-\gamma gn), \quad (1.1.61)$$

в которой значения коэффициента $\alpha_{gm}(n)^{g^2}$ для соответствующего ортогонального базиса определяются формулами (1.1.43), (1.1.48), (1.1.51), (1.1.60).

3. Представление дискретных сигналов ортогональными многочленами

Рассмотрим функцию $f(n)$ дискретного аргумента n такую, что $f(n) \in \bar{L}^2$. Представим ее в виде разложения в ряд по ортогональным дискретным многочленам.

Пусть $f(n)$ — многочлен степени $m < N$. Вышеуказанное разложение имеет вид

$$f(n) = \sum_{i=0}^m c_i u_i(n), \quad (1.1.62)$$

где c_i — постоянные коэффициенты разложения.

Ряд $\sum_{i=0}^m c_i u_i(n)$ называется дискретным ортогональным рядом.

Конечная или бесконечная последовательность функций $\{u_m(n)\} \in \overline{L^2}$, которые удовлетворяют определению ортогональности (1.1.1), называется дискретной ортогональной системой или дискретным ортогональным базисом.

Если дискретный ортогональный базис является ортонормальным, то есть

$$\sum_{i=0}^N u_m(n_i) u_\mu(n_i) = \begin{cases} 0, & m \neq \mu, \\ 1, & m = \mu, \end{cases}$$

то значения коэффициентов C_i равны

$$c_i = \sum_{n=0}^b f(n) u_i(n), \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

Величины c_i , вычисляемые по этой формуле, называются коэффициентами Фурье $f(n)$ по системе $\{u_i(n)\}$ [108].

Совокупность коэффициентов c_i образует спектр функции $f(n)$ по выбранному дискретному ортогональному базису и называется обобщенным спектром функции $f(n)$, а преобразование (1.1.62) — дискретным спектральным преобразованием.

Определим скалярное произведение равенства (1.1.62) на $u_k(n)$ и просуммируем в пределах от $n = a$ до $n = b$ (от $\xi = 0$ до $\xi = N$). Получим

$$c_m \sum_{\xi=0}^N [u_m(n)]^2 = \sum_{\xi=0}^N f(n) u_m(n). \quad (1.1.63)$$

Задача ортогональной аппроксимации функции $f(n)$ сводится к определению коэффициентов разложения c_m [59].

В общем случае ряд (1.1.62) является бесконечным. Однако согласно приведенным свойствам дискретных ортогональных многочленов можно утверждать, что при значениях $n = a + \xi h$ ряд (1.1.62), содержащий $N-1$ членов, дает такое же приближение, что и бесконечный ряд, поскольку каждый член разложения, в котором $m \geq N$, стремится к нулю. При значениях n , отличных от $n = a + \xi h$, необходимо учитывать ошибку аппроксимаций функции $f(n)$ конечным рядом.

Правая часть выражения (1.1.62) может быть представлена в виде

$$\sum_{\xi=0}^N f(\xi) u_m(\xi) = \sum_{n=0}^b f(n) u_m(n).$$

Учитывая равенство (1.1.5), имеем

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^b f(n) u_m(n) &= Ah^{2m} \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m+\nu}{m} \binom{m-N}{m} \times \\ &\times \sum_{\xi=0}^N \binom{\xi}{\nu} f(a+\xi h). \end{aligned} \quad (1.1.64)$$

Последняя сумма в выражении (1.1.64) определяется биномиальным моментом B_ν порядка ν [42].

Следовательно,

$$\sum_{n=a}^b u_m(n) f(n) = Ah^{2m} \sum_{\nu=0}^{m+1} \binom{m+\nu}{m} \binom{m-N}{m-\nu} B_\nu. \quad (1.1.65)$$

В этом случае при большом N значения биномиальных моментов B_ν быстро возрастают с увеличением порядка моментов ν , а их коэффициенты остаются малыми величинами. Для устранения подобной вероятности возникновения ошибок вычислений введем понятие биномиального момента среднего значения J_ν .

$$J_\nu = \frac{\sum_{\xi=0}^N \binom{\xi}{\nu} f(a+\xi h)}{\sum_{\xi=0}^N \binom{\xi}{\nu}}.$$

Заметим, что порядок величины биномиального момента среднего значения не изменяется с изменением ν и N . Таким образом

$$J_\nu = \frac{B_\nu}{\binom{N}{\nu+1}}. \quad (1.1.66)$$

Подставляя величину J_ν из равенства (1.1.66) в уравнение (1.1.65), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{n=a}^b u_m(n) f(n) &= Ah^{2m} \binom{m+\nu}{m} \binom{m-N}{m-\nu} \binom{N}{\nu+1} J_\nu = \\ &= (-1)^m Ah^{2m} (m+1) \binom{N}{m+1} \sum_{\nu=0}^{m+1} (-1)^\nu \binom{m+\nu}{m} \binom{m}{\nu} \frac{J_\nu}{\nu+1}. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\beta_{m\nu} = (-1)^{m+\nu} \binom{m+\nu}{m} \binom{m}{\nu} \frac{1}{\nu+1},$$

$$\sum_{\nu=0}^{m+1} \beta_{m\nu} J_\nu = \theta_m.$$

Таблица 1.1.2.

№ п.п.	0	1	2	3	4	5
1	-1	1				
2	-1	-3	2			
3	-1	6	-10	5		
4	-1	-10	30	-35	14	
5	-1	15	-70	140	126	42
6	-1	-21	140	-420	630	-462
7	-1	28	-252	1050	-2310	2772
8	-1	-36	420	-2310	6930	-12012
9	-1	45	-660	4620	-18018	42042
10	-1	-55	990	-8580	42042	-126126

№ п.п.	6	7	8	9	10
1					
2					
3					
4					
5					
6	132				
7	-1716	429			
8	12012	-6435	1430		
9	-60060	51480	-24310	4862	
10	240240	-291720	218790	-92378	16796

Составляя таблицы коэффициентов $\beta_{m\nu}$ для различных функций $f(n)$, можно быстро вычислять ортогональные моменты степени m функции $f(n)$ по алгоритму

$$\sum_{n=0}^b u_m(n) f(n) = Ah^{2m} (m+1) \binom{N}{m-1} \Theta_m.$$

Для примера в табл. 1.1.2 приведены значения коэффициентов $\beta_{m\nu}$ для парабол десятой степени [42].

Учитывая уравнения (1.1.5) и (1.1.9), получаем значение коэффициентов разложения (1.1.62) в виде

$$c_m = \frac{(2m+1) \Theta_m}{Ah^{2m} \binom{N+m}{m}} = \alpha_m \Theta_m. \quad (1.1.67)$$

ПРОБЛЕМА НАИЛУЧШЕЙ АППРОКСИМАЦИИ

Пусть $f(n) \in \overline{L^2}$, где $n = a + \xi h$; $\xi = 0, 1, 2, \dots, N$; $Nh = b$;
 $\{U_m(n)\}$ — ортонормированная система элементов в L^2 .

Определим полином $y(n)$, аппроксимирующий функцию $f(n)$, так, чтобы выполнялось условие минимума величины

$$\|f(n) - y(n)\| = \sqrt{\sum_{n=0}^b [f(n) - y(n)]^2}, \quad (1.1.68)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^b \left[f(n) - \sum_{i=0}^N \varepsilon_i u_i(n) \right]^2 &= \sum_{n=0}^b \left[f^2(n) - 2 \sum_{i=0}^N f(n) \varepsilon_i u_i(n) + \right. \\ &\left. + \sum_{i=0}^N \varepsilon_i^2 \right] = \sum_{n=a}^b f^2(n) - 2 \sum_{i=0}^N c_i \varepsilon_i + \sum_{i=0}^N \varepsilon_i^2. \end{aligned} \quad (1.1.69)$$

Выражение (1.1.69) преобразуем к виду

$$\sum_{n=a}^b f^2(n) = \sum_{i=0}^N (c_i - \varepsilon_i)^2 - \sum_{i=0}^N c_i^2. \quad (1.1.70)$$

Из равенства (1.1.70) следует, что условие минимума величины (1.1.68) будет выполнено только при $\varepsilon_k = c_k$.

Итак, если функция $f(n)$ разлагается в дискретный ортогональный ряд по системе элементов $\{u_m(n)\}$, то наилучшая аппроксимация возможна только в случае, если постоянные c_i являются коэффициентами Фурье по системе $\{u_m(n)\}$.

Из выражения (1.1.70) получим дискретный аналог неравенства Бесселя:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^N c_i^2 &\leq \sum_{n=a}^b f^2(n), \\ \sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 &\leq \sum_{n=a}^b f^2(n). \end{aligned}$$

Это определяет сходимость суммы коэффициентов разложения:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} c_i = 0, \quad f(n) \in \bar{L}^2.$$

Если $\sum_{i=0}^{\infty} c_i^2 < \infty$, то $\sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(n)$ сильно сходится, так как при $p > q$

$$\|y_p(n) - y_q(n)\| = \sqrt{\sum_{i=q+1}^p c_i^2},$$

$$y_q(n) = \sum_{i=0}^q c_i u_i(n).$$

Пусть $\{\varphi_i(n)\}$, $i = 1, 2, \dots, q$ — произвольная система функций.

Если $\sum_{i=0}^q c_i \varphi_i(n)$ — наилучшее приближение функции $f(n)$ в смысле минимума среднеквадратической ошибки, то разность

$$f(n) - \sum_{i=0}^q c_i \varphi_i(n) = h(n)$$

должна быть ортогональной ко всем $\varphi_i(n)$.

Система элементов $\{u_m(n)\} \in \overline{L^2}$, заданная на отрезке $[a, \theta]$, называется дискретной ортогональной на этом отрезке с весом $\rho(n)$, если

$$\sum_{i=0}^N \rho(n) u_m(n_i) u_\mu(n_i) = 0 \quad \text{при } m \neq \mu. \quad (1.1.71)$$

При аппроксимации функции $f(n)$ по системе многочленов, ортогональных с весом, как и выше, можно показать, что для того, чтобы функция

$$y(n) = \sum_{i=0}^N c_i u_i(n)$$

приближала функцию $f(n)$ наилучшим образом, необходимо и достаточно, чтобы c_i были коэффициентами Фурье функции $f(n)$ по системе $\{u_m(n)\}$, то есть чтобы

$$c_i = \sum_{n=a}^b u_i(n) f(n) \rho(n). \quad (1.1.72)$$

Для этого преобразуем формулу (1.1.69) с учетом функции веса $\rho(n)$ к виду

$$E_m = \sum_{n=a}^b \left| f(n) \sqrt{\rho(n)} - \sum_{i=0}^N c_i \sqrt{\rho(n)} u_i(n) \right|^2.$$

Отсюда

$$c_i = \frac{\sum_{n=a}^b \sqrt{\rho(n)} f(n) \sqrt{\rho(n)} u_i(n)}{\sum_{n=a}^b [\sqrt{\rho(n)} u_i(n)]^2} = \frac{\sum_{n=a}^b \rho(n) f(n) u_i(n)}{\sum_{n=a}^b \rho(n) u_i^2(n)}.$$

Таким образом, коэффициенты c_i , дающие минимум сумме E_m , являются коэффициентами Фурье функции $f(n) \sqrt{\rho(n)}$ по системе многочленов $\{u_m(n) \sqrt{\rho(n)}\}$. Критерий оценки точности аппроксимации имеет вид

$$E_m = \sum_{n=a}^b [f(n) - y(n)]^2 \rho(n). \quad (1.1.73)$$

С другой стороны, как указывалось выше, в пространстве $\overline{L^2}$ норма определяется выражением

$$\|a\| = \|\overline{a}\| = \sqrt{\sum_{n=a}^b [f(n) - y(n)]^2}. \quad (1.1.74)$$

Если это среднее квадратическое отклонение \overline{a} мало, то разность $[f(n) - y(n)]$ тоже мала при $n = a + \xi h$.

Пусть α — заданное положительное число. Обозначим $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_k$ максимальную систему непересекающихся отрезков из $[a, \omega]$ таких, что

$$|f(n) - y(n)| \geq \alpha$$

при

$$n \in \sigma_i,$$

ω — сумма длин этих отрезков.

Если $\bar{a} < \delta$, то

$$\delta^2 \geq \sum_{n=a}^b [f(n) - y(n)]^2 \geq \sum_{\sigma} [f(n) - y(n)]^2 \geq \alpha^2 \omega.$$

Отсюда $\omega < \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^2$, то есть ω — сколь угодно малое целое число, если δ достаточно мало.

Таким образом, за исключением множества точек σ сколь угодно малой линейной меры ω , выполнено неравенство

$$|f(n) - y(n)| < \alpha.$$

Вышесказанное позволяет сделать вывод о том, что основные положения о выборе ортогонального базиса при решении задач в области непрерывного аргумента [7], [59], [60], [107] остаются в силе при выборе дискретного ортогонального базиса. Система $\{u_m(n)\}$ при решении конкретных задач выбирается из условий обеспечения наилучшего приближения функции на различных участках интервала, на котором она определена. Кроме этого $\{u_m(n)\}$ должны выбираться так, чтобы получить желаемую степень аппроксимации при минимальном числе слагаемых m .

§ 1.2. МЕТОД РАСЧЕТА ВЫХОДНЫХ РЕАКЦИИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ КЛАССИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ

Рассмотрим замкнутую ДСАУ, математическая модель которой является разностным неоднородным уравнением

$$\bar{a}_i \Delta^i x(n) + \bar{a}_{i-1} \Delta^{i-1} x(n) + \dots + \bar{a}_0 x(n) = \bar{b}_r \Delta^r y_0(n) + \bar{b}_{r-1} \Delta^{r-1} y_0(n) + \dots + \bar{b}_0 y_0(n), \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (1.2.1)$$

Введем следующее обозначение:

$$y(n) = \bar{b}_m \Delta^m y_0(n) + \bar{b}_{m-1} \Delta^{m-1} y_0(n) + \dots + \bar{b}_0 y_0(n).$$

Тогда уравнение (1.2.1) преобразуется к виду

$$\bar{a}_i \Delta^i x(n) + \bar{a}_{i-1} \Delta^{i-1} x(n) + \dots + \bar{a}_0 x(n) = y(n).$$

Последнюю зависимость, используя известные выражения, связывающие разности со значением функции в точках $0, 1, 2, \dots$, можно представить следующим образом:

$$a_l x(n-i) + a_{l-1} x(n-i+1) + \dots + a_0 x(n) = y(n), \quad (1.2.2)$$

где коэффициенты a_μ и a_μ разностных уравнений (1.2.1) и (1.2.2) связаны между собой соотношениями [52], [78]

$$a_{n-k} = \sum_{\nu=0}^k \bar{a}_{n-\nu} (-1)^{k-\nu} \binom{n-\nu}{k-\nu},$$

$$\bar{a}_{n-k} = \sum_{\nu=0}^k a_{n-\nu} \binom{n-\nu}{k-\nu}.$$

При решении разностных уравнений в задачах анализа дискретных систем широко используется дискретное преобразование Лапласа

$$X(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-qn}. \quad (1.2.3)$$

Рассмотрим уравнение

$$a_0 x(n) + a_1 x(n+1) + \dots + a_l x(n+i) = y(n) \quad (1.2.4)$$

с граничными условиями

$$x(0) = x_0, \quad x_1(1) = x_1, \quad \dots, \quad x_1(i-1) = x_{i-1}. \quad (1.2.5)$$

Преобразуем по Лапласу обе части уравнения (1.2.4) с учетом граничных условий (1.2.5). На основании теоремы сдвига можно записать

$$D \{x(n+k)\} = e^{kq} X(q) - \sum_{r=0}^{k-1} x(r) e^{-(r-k)q}.$$

Тогда операторное уравнение, соответствующее исходному разностному уравнению, принимает вид

$$(a_0 + a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \dots + a_l e^{lq}) X(q) = Y(q) + (a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \dots + a_i e^{iq}) x_0 + (a_2 e^q + a_3 e^{2q} + \dots + a_i e^{(i-1)q}) x_1 + \dots + a_i e^q x_{i-1}. \quad (1.2.6)$$

Введем следующие обозначения:

$$a_0 + a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \dots + a_l e^{lq} = N(q),$$

$$a_1 e^q + a_2 e^{2q} + \dots + a_i e^{iq} = H_1(q),$$

$$a_2 e^q + a_3 e^{2q} + \dots + a_i e^{(i-1)q} = H_2(q),$$

$$\dots$$

$$a_i e^q = H_l(q). \quad (1.2.7)$$

С учетом обозначений (1.2.7) уравнение (1.2.6) имеет вид

$$N(q) X(q) = Y(q) + H_1(q) x_0 + H_2(q) x_1 + \dots + H_l(q) x_{l-1}.$$

Откуда легко получить изображение выходного сигнала в виде

$$X(q) = \frac{Y(q)}{N(q)} + \sum_{k=1}^l \frac{H_k(q)}{N(q)} x_{k-1}. \quad (1.2.8)$$

Дальнейшая задача состоит в определении оригинала решетчатой функции $x(n)$ по найденному изображению (1.2.8).

Применим дискретное спектральное преобразование для иско- мой реакции системы. Получим

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(n), \quad (1.2.9)$$

где $\varphi_i(n)$ — выбранный дискретный ортогональный базис, $i=0, 1, 2, \dots$

Совокупность коэффициентов $\{c_i\}$, определяющих разложение реакций ДСАУ, называется обобщенным спектром сигнала.

Если выходной сигнал ДСАУ $x(n) \in \bar{L}_2$, а дискретная ортого- нальная система $\{\varphi_i(n)\}$, $i=0, 1, 2, \dots$ является замкнутой в \bar{L}^2 , то ряд (1.2.9), как показано выше, сходится в среднем квадратич- еском к функции $x(n)$.

Задача анализа ДСАУ сводится к вычислению обобщенного спектра выходного сигнала по изображению переходной характе- ристики системы (1.2.8). Общее выражение для коэффициентов c_i , согласно формуле (1.1.72), имеет вид

$$c_i = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) \varphi_i(n). \quad (1.2.10)$$

Преобразуя это выражение с учетом разложения

$$\varphi_i(n) = \sum_{v=0}^i \alpha_{v,i} F_v(n), \quad (1.2.11)$$

получим

$$c_i = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) \sum_{v=0}^i \alpha_{v,i} F_v(n).$$

Поскольку в последнем выражении обе суммы сходятся абсолютно на полубесконечном интервале, имеем

$$c_i = \sum_{v=0}^i \alpha_{v,i} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) F_v(n) = \sum_{v=0}^i \alpha_{v,i} \mu_v, \quad (1.2.12)$$

где $\mu_v = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) F_v(n)$ — моменты функции $x(n)$ относитель- но последовательности функций $\{\rho(n) F_v(n)\}_{v=0}^i$, которые будем называть моментными функциями.

Таким образом, необходимо определить моментную функцию иско- мой величины по заданному изображению переходной харак- теристики ДСАУ.

Рассмотрим решение поставленной задачи в случае, когда дис- кретным ортогональным базисом являются классические дискрет- ные ортогональные системы элементов $\{u_m(n)\} \in \bar{L}^2$ [17], [18].

1. Дискретный ортогональный базис — многочлены Шарлье

Пусть выходная реакция дискретной линейной системы удовлетворяет условию:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) |x(n)|^2 < \infty.$$

Кроме того, известно дискретное преобразование Лапласа (или Z-преобразование) для функции

$$X^*(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) e^{-qn}. \quad (1.2.13)$$

Будем находить функцию $x(n)$ в виде

$$x(n) = \sum_{i=0}^m c_i C_i(n, a).$$

Запишем выражение для коэффициентов ортогонального разложения $x(n)$:

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) C_k(n, a) = \\ &= \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k x(n) \rho(n) \alpha_{\nu k}(a) n^{\nu} = \\ &= \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k}(a) \mu_{\nu}^* \end{aligned}$$

где

$$\mu_{\nu}^* = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) n^{\nu}.$$

Согласно преобразованию (1.2.13), справедливо равенство

$$\mu_{\nu}^* = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) n^{\nu} = \left. \frac{d^{\nu} X^*(q)}{dq^{\nu}} \right|_{q=0}. \quad (1.2.14)$$

Окончательное выражение для коэффициентов разложения $\{c_i\}$ имеет вид

$$c_k = \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k}(a) \left. \frac{d^{\nu} X^*(q)}{dq^{\nu}} \right|_{q=0}. \quad (1.2.15)$$

В том случае, если известно операторное выражение $X(q)$, а не $X^*(q)$, то искомая функция $x(n)$ определяется следующим образом:

$$x(n) = \sum_{i=0}^m c_i C_i(n, a) \rho(n), \quad (1.2.16)$$

где

$$c_k = \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k}(a) \left. \frac{d^{\nu} X(q)}{dq^{\nu}} \right|_{q=0}.$$

2. Дискретный ортогональный базис — многочлены Мейкснера

Выходной сигнал системы будем определять в виде

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i m_i(n, \beta, c), \quad (1.2.17)$$

где элементы обобщенного спектра определяются из равенства

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) m_k(n, \beta, c) = \\ &= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{v=0}^k x(n) \rho(n) c_{kv}(\beta, c) n^v = \\ &= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{v=0}^k c_{kv}(\beta, c) \mu_v^*, \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

в котором

$$\mu_v^* = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) n^v.$$

Учитывая, что

$$\mu_v^* = \left. \frac{d^v X^*(q)}{dq^v} \right|_{q=0},$$

окончательно получим:

$$c_k = \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{v=0}^k c_{kv}(\beta, c) \left. \frac{d^v X^*(q)}{dq^v} \right|_{q=0}. \quad (1.2.19)$$

3. Дискретный ортогональный базис — многочлены Гана

Если для построения выходных реакций, импульсных переходных функций, переходных ошибок используется дискретное преобразование Лапласа, то в ряде случаев оригинал удобно представить в виде ряда, составленного из ортогональных полиномов Гана. Функцию $x(n)$ представим в виде

$$x(n) = \sum_{i=0}^q \frac{c_i}{r_i} P_i[n, \beta, \gamma, \delta]. \quad (1.2.20)$$

Для определения элементов ортогонального спектра выходного сигнала, очевидно, необходимо воспользоваться формулой

$$c_v = \sum_{v=0}^k c_{kv}[\beta, \gamma, \delta] \mu_v^*, \quad (1.2.21)$$

где

$$\mu_v^* = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \rho(n) n^v = \left. \frac{d^v X^*(q)}{dq^v} \right|_{q=0}. \quad (1.2.22)$$

Частным случаем предлагаемых разложений служит следующее представление:

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \varphi_i(n) \rho(n), \quad (1.2.23)$$

где коэффициенты c_i ($i = 0, 1, 2, \dots$) определяются формулами:
а) для многочленов Шарлье

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) C_k(n, a) = \frac{1}{a^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k x(n) c_{k\nu}(a) n^\nu = \\ &= \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{\nu=0}^k c_{k\nu}(a) \mu_\nu, \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

б) для многочленов Мейкснера

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) m_k(n, \beta, c) = \\ &= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k x(n) c_{k\nu}(\beta, c) n^\nu = \\ &= \frac{1}{k! (\beta)_k (1-c)^{-\beta}} \sum_{\nu=0}^k c_{k\nu}(\beta, c) \mu_\nu, \end{aligned} \quad (1.2.25)$$

в) для многочленов Гана

$$c_k = \sum_{\nu=0}^k c_{k\nu}(\beta, \gamma, \nu) \mu_\nu, \quad (1.2.26)$$

в которых

$$\mu_\nu = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) n^\nu = (-1)^\nu \left. \frac{d^\nu}{dq^\nu} X(q) \right|_{q=0}. \quad (1.2.27)$$

4. Дискретный ортогональный базис — многочлены Чебышева, Кравчука

Рассмотрим ортогональные многочлены дискретного аргумента, определенные на конечном интервале (многочлены Чебышева, Кравчука). Для решения задачи по изложенной выше методике при помощи этих многочленов необходимо интервал их существования N выбирать равным или больше времени переходного процесса исследуемой ДСАУ.

Предварительно определим дискретное преобразование Лапласа от периодической функции дискретного аргумента.

Пусть имеем функцию с периодом N , то есть

$$x(nT + N) = x(nT).$$

Для упрощения записи формул в дальнейшем примем $T=1$. По определению дискретного преобразования Лапласа в области комплексной переменной q имеем

$$X(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-qn}.$$

Суммируя последнее равенство по отрезкам времени длиной N , получим

$$X(q) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=kN}^{(k+1)N} x_k(n) e^{-qn} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^N x(m+kN) e^{-q(m+kN)}.$$

Учитывая периодичность функции $x(nT)$, определяем

$$X(q) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-qkN} \sum_{m=0}^N x(n) e^{-qm} = \frac{\bar{X}(q)}{1 - e^{-qN}}.$$

Отсюда

$$\bar{X}(q) = X(q) (1 - e^{-qN}),$$

где $\bar{X}(q)$ — дискретное преобразование Лапласа периодической функции $x(n)$, определенное на отрезке $[0, N]$.

Пользуясь вышеизложенным, выходной сигнал ДСАУ определяем в виде разложения

$$x(n) = \sum_{i=0}^m \frac{c_i}{r_{ri}} t_i(n) \cdot e\gamma_0^n$$

— для многочленов Чебышева,

$$x(n) = \sum_{i=0}^m \frac{c_i}{r_{ki}} K_i(n) \cdot e\gamma_0^n$$

— для многочленов Кравчука.

Обобщенный спектр выходного сигнала в этом случае определяется по формуле

$$c_i = \sum_{v=0}^k (-1)^v a_{iv} \mu^v, \quad (1.2.28)$$

где

$$\mu^v = \sum_{n=0}^{N-1} n^v x(n) = \left. \frac{d^v X(q)}{dq^v} \right|_{q=\gamma_0},$$

$$\mu^v = \sum_{n=0}^N n^v x(n) = \left. \frac{d^v \bar{X}(q)}{dq^v} \right|_{q=\gamma_0} \quad (1.2.29)$$

В случае, если известна функция $X(q)$, получим

$$x(n) = \rho(n) \sum_{i=0}^k \frac{d^i X(q)}{dq^i} \Big|_{q=0} \Psi_{ik}(n). \quad (1.2.34)$$

6. Анализ многомерных дискретных систем автоматического управления

Задача анализа многомерных ДСАУ состоит в определении переходных процессов систем при воздействии на них управляющих и различных возмущающих сигналов. При этом система обычно задается динамическими характеристиками: матрицей импульсной переходной функции или системой разностных уравнений (матрицей передаточной функции).

Уравнение связи входных и выходных величин многомерной ДСАУ в матричной форме представляет собой дискретный аналог свертки

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k(m) y(n-m). \quad (1.2.35)$$

где

$x(n) = \| x_1(n), x_2(n), \dots, x_l(n) \|'$ — матрица реакции системы,

$y(n-m) = \| y_1(n-m), y_2(n-m), \dots, y_r(n-m) \|'$

— матрица управляющих и возмущающих воздействий,

$k(m) = \| k_{ji}(m) \|_{r \times l}$ — матрица импульсной переходной функции, l и r — число выходных и входных величин соответственно.

Используя матричное дискретное преобразование Лапласа

$$W(q) = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) e^{-qn},$$

$$k(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} W(q) e^{qn} dq,$$

где $W(q)$ — матрица передаточной функции многомерной ДСАУ, выражение (1.2.35) отображаем в область комплексного переменного. В результате этого получим

$$X(q) = W(q) Y(q), \quad (1.2.36)$$

где $X(q) = \| X_1(q), \dots, X_l(q) \|'$ — матрица-столбец переходной характеристики, элементы которой связаны с элементами матрицы $x(n)$ преобразованием

$$x_1(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) e^{-qn},$$

• • • • •

$$x_l(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x_l(n) e^{-qn}.$$

Элементы матриц

$$W(q) = \|W_{ji}(q)\|_{r \times l},$$

$$Y(q) = \|y_1(q), \dots, y_r(q)\|'$$

определяются через элементы матриц $y(n-m)$ и $k(m)$ соответствующими выражениями

$$W_{ji}(q) = \sum_{m=0}^{\infty} k_{ji}(m) e^{-qm},$$

$$Y_1(q) = \sum_{n-m=0}^{\infty} y_1(n-m) e^{-q(n-m)},$$

.....

$$Y_r(q) = \sum_{n-m=0}^{\infty} y_r(n-m) e^{-q(n-m)}.$$

Из уравнения (1.2.36) следует, что матрица выходных величин представляет собой оригинал переходной характеристики многомерной ДСАУ в комплексной области $D\{x(n)\} = P(q)$ и задача заключается в его восстановлении.

Пусть элементы матрицы выходных величин $x_{ji}(n)$ удовлетворяют условию сходимости

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x_{ji}(n)|^2 \delta(n) < \infty, \quad x_{ji}(n) \in \bar{L}^2. \quad (1.2.37)$$

Кроме того

$$\sum_{n=0}^{\infty} \delta(n) < \infty,$$

где $\delta(n)$ — функция веса выбранной ортогональной системы элементов дискретного аргумента, то есть системы функций вида

$$(\varphi_i(n) \varphi_j(n)) = \sum_k \varphi_i(n_k) \varphi_j(n_k) \delta(n_k) = 0 \quad \text{при } i \neq j,$$

где $\varphi_i(n)$ — элементы матрицы $\varphi(n)$ указанной выше дискретной ортогональной системы.

Будем определять элементы искомой матрицы выходных сигналов в виде разложения по элементам матрицы ортогональных многочленов дискретного аргумента $\varphi_i(n)$.

$$x(n) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(n), \quad (1.2.38)$$

где $c_j = \|c_{j1}, c_{j2}, \dots, c_{jl}\|'$ — матрица дискретного обобщенного спектра выходных величин.

Элементы матрицы дискретных обобщенных спектров согласно равенствам (1.2.14), (1.2.18), (1.2.22), (1.2.27) связаны с элементами матрицы $P(q)$ выражениями вида

$$c_{ji} = \sum_{\varepsilon=0}^i \alpha_{\varepsilon j i} \mu_{\varepsilon}. \quad (1.2.39)$$

Таким образом, для анализа многомерных ДСАУ спектральным методом моментов определяются значения элементов матрицы переходной характеристики системы в комплексной области при $q=0$, по формулам (1.2.39) находятся элементы матрицы дискретных обобщенных спектров выходных величин и затем по формуле (1.2.38) — матрица переходного процесса исследуемой многомерной ДСАУ.

Введем в рассмотрение матрицу, элементы которой определяются через элементы матрицы $\varphi(n)$ по следующей рекуррентной формуле:

$$\begin{aligned} \psi_{j,i}(n) &= \psi_{j,i-1}(n) + \alpha_{ji} \varphi_j(n), \\ \psi_{i,i}(n) &= \alpha_{ii} \varphi_i(n), \quad 0 \leq j \leq i-1, \end{aligned}$$

где α_{ji} — коэффициенты элементов матрицы выбранных дискретных ортогональных многочленов $\varphi_i(n)$.

Многочлены ψ_{ji} удовлетворяют условию:

$$\sum_k \psi_{ji}(n_k) \omega(n_k) e^{-\varepsilon n_k} = \begin{cases} 0, & \varepsilon \neq j, \\ 1, & \varepsilon = j, \end{cases}$$

$$j \leq i, \quad \varepsilon \geq 0.$$

Используя эти многочлены, уравнение (1.2.38) можно записать в форме интегро-интерполяционного многочлена в моментах

$$x(n) = \sum_{i=0}^q M_i \psi_i(n), \quad M_i = \|\mu_{1i}, \mu_{2i}, \dots, \mu_{qi}\|. \quad (1.2.40)$$

— матрица моментов выходных величин многомерной ДСАУ.

Выражение (1.2.40) позволяет решить задачу определения переходного процесса многомерной ДСАУ непосредственно по моментам выходных величин, не определяя элементов обобщенного спектра, то есть алгоритм вычислений несколько упрощается по своей структуре и состоит в следующем:

1. По значениям комплексного аргумента $q=0$ определяется матрица переходной характеристики многомерной ДСАУ в комплексной области P_{ε} .

2. Находится матрица моментов выходных величин

$$M_{\varepsilon} = P_{\varepsilon}.$$

3. Из выражения (1.2.40) вычисляется переходный процесс многомерной ДСАУ.

В следующем параграфе рассмотрим анализ многомерных

ДСАУ при помощи ортогональных систем полиномов и функций Лагерра и экспоненциальных многочленов дискретного аргумента.

§ 1.3. АЛГОРИТМЫ АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПОМОЩЬЮ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ И ПОЛИНОМОВ ЛАГЕРРА ДИСКРЕТНОГО АРГУМЕНТА

Пусть в качестве ортогонального базиса используются дискретные ортогональные экспоненциальные функции, которые определяются формулами (1.1.54 и 1.1.55) [17]

$$\varphi_{2k-1}(n) = \sum_{i=1}^k [A_i n e^{-\alpha_i n} + A'_i e^{-\alpha_i n}],$$

где A_i и A'_i — const,
 α_i — действительные полюса.

Для коэффициентов преобразования (1.2.9) будем иметь

$$\begin{aligned} c_{2k-1} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \sum_{i=1}^k [A_i \cdot n e^{-\alpha_i n} + A'_i e^{-\alpha_i n}] = \\ &= \sum_{i=1}^k A_i \sum_{n=0}^{\infty} n x(n) e^{-\alpha_i n} + \sum_{i=1}^k A'_i \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-\alpha_i n} = \\ &= \sum_{i=1}^k A_i \mu_i^1 + \sum_{i=1}^k A'_i \mu_i^0, \end{aligned} \quad (1.3.1)$$

где

$$\mu_i^1 = \sum_{n=0}^{\infty} n x(n) e^{-\alpha_i n}, \quad \mu_i^0 = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-\alpha_i n}. \quad (1.3.2)$$

Из выражения (1.3.1) следует, что для определения элементов обобщенного спектра сигнала $x(n)$ необходимо знать моменты функции $x(n)$ вида (1.3.2).

В задачах анализа дискретное преобразование Лапласа для выходного сигнала может быть определено из разностного матричного уравнения. Тогда, вычисляя k -ую производную от обеих частей выражения

$$X(q) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-qn}, \quad (1.3.3)$$

где $q = s$, где s — масштабный коэффициент функции веса, соответствующий применяемому дискретному ортогональному базису, получим

$$\left[\frac{d^k}{dq^k} X(q) \right]_{q=c} = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} n^k x(n) e^{-cn}. \quad (1.3.4)$$

Таким образом, с учетом выражения (1.3.4) необходимые моменты (1.3.2) определяются по формулам

$$\mu_i' = \left. \frac{d X(q)}{dq} \right|_{q=\alpha_i}, \quad \mu_i^0 = X(q) \Big|_{q=\alpha_i}.$$

Реакция многомерной ДСАУ в этом случае определяется по формуле

$$x_{ij}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i=1}^k A_i \left. \frac{dX(q)}{dq} \right|_{q=\alpha_i} + \sum_{i=1}^k A_i' X(q) \Big|_{q=\alpha_i} \right) \psi_k(n). \quad (1.3.5)$$

Рассмотрим определение элементов искомой матрицы выходных сигналов в виде разложения по ортогональным полиномам и функциям Лагерра дискретного аргумента [27]

$$x(n) = \sum_{i=0}^m c_i l_i(n), \quad (1.3.6)$$

где $c_i = \| c_{i1}, \dots, c_{ji} \|$ — матрица дискретного обобщенного спектра (ДОС) выходных величин, $l_i(n) = \| l_{1i}(n), l_{2i}(n), \dots, l_{ji}(n) \|'$ — матрица дискретных ортогональных полиномов (функций) Лагерра. Элементы матрицы $l_i(n)$ определяются формулой (1.1.60).

Рассмотрим функции Лагерра при $\lambda = 1$

$$l_k(n) = \sum_{j=0}^k \alpha_{jk} n^j e^{-\frac{n}{2}},$$

где λ — масштабный коэффициент веса,

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= \sqrt{1 - e^{-1}}, \\ \alpha_{01} &= \sqrt{e^{-1} (1 - e^{-1})}, \\ \alpha_{11} &= (e - 1) \sqrt{e^{-1} (1 - e^{-1})}, \\ &\dots \end{aligned}$$

Подставляя формулы (1.1.60) в выражение для элементов матрицы c_i (1.2.10), получим

$$\begin{aligned} c_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \varphi_0(n) = \alpha_{00} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-\frac{n}{2}} \sqrt{1 - e^{-1}} \mu_0, \\ c_1 &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \varphi_1(n) = \alpha_{01} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-\frac{n}{2}} + \alpha_{11} \sum_{n=0}^{\infty} n x(n) e^{-\frac{n}{2}} = \\ &= \sqrt{e^{-1} (1 - e^{-1})} [\mu_0 - (e - 1) \mu_1], \\ &\dots \end{aligned}$$

$$c_k = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) \varphi_k(n) = \alpha_{0k} \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-\frac{n}{2}} + \alpha_{1k} \sum_{n=0}^{\infty} nx(n) e^{-\frac{n}{2}} + \dots + \alpha_{kk} \sum_{n=0}^{\infty} n^k x(n) e^{-\frac{n}{2}} = \alpha_{0k} \mu_0 + \alpha_{1k} \mu_1 + \dots + \alpha_{kk} \mu_k. \quad (1.3.7)$$

Для данного ортогонального базиса, с учетом выражения (1.3.4) моменты μ_i определяются формулами

$$\mu_0 = X(q) \Big|_{q=\frac{1}{2}}, \quad \mu_1 = \frac{dX(q)}{dq} \Big|_{q=\frac{1}{2}}, \dots, \quad \mu_k = \frac{d^k X(q)}{dq^k} \Big|_{q=\frac{1}{2}}. \quad (1.3.8)$$

Таким образом, на основании формул (1.3.7) и (1.3.8) для общего случая можно получить

$$c_{ji} = \sum_{\varepsilon=0}^i \alpha_{\varepsilon ij} \mu_{\varepsilon j}, \quad (1.3.9)$$

где $\alpha_{\varepsilon ij}$ — коэффициенты элементов матрицы дискретных ортогональных полиномов (функций) Лагерра, определяемые формулами (1.1.61),

$\mu_{\varepsilon j} = \sum_{n=0}^{\infty} x_j(n) g_{\varepsilon i}(n)$ — элементы моментов матрицы

$$M_{\varepsilon} = || \mu_{\varepsilon 1}, \mu_{\varepsilon 2}, \dots, \mu_{\varepsilon j} ||',$$

$g_{\varepsilon i}(n)$ — элементы моментной функции соответствующего ортогонального базиса.

Элементы моментных функций определяются следующими выражениями: для функций Лагерра с функцией веса $\lambda = 1$

$$g_{\varepsilon i}(n) = n^{\varepsilon} e^{-\frac{mn}{2}}, \quad (1.3.10)$$

с функцией веса $\lambda(n) = \frac{1}{m} e^{mn}$

$$g_{\varepsilon i}(n) = n^m, \quad m = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.3.11)$$

для полиномов Лагерра

$$g_{\varepsilon i}(n) = n^m e^{-mn}, \quad m = 0, 1, 2, \dots. \quad (1.3.12)$$

Используя последние зависимости, можно записать рабочие формулы для определения элементов моментной матрицы M_{ε} :

$$(-1)^{\varepsilon} \mu_{\varepsilon j} = (-1)^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} x_j(n) n^{\varepsilon} e^{-\frac{mn}{2}} = \left[\frac{d^{\varepsilon}}{dq^{\varepsilon}} P(q) \right]_{q=\frac{\lambda}{2}} \quad (1.3.13)$$

— для ортогональных функций Лагерра с весом $\lambda = 1$ и моментной функцией, определяемой выражением (1.3.10),

$$(-1)^{\varepsilon} \mu_{\varepsilon j} = (-1)^{\varepsilon} \sum_{n=0}^{\infty} x_j(n) n^{\varepsilon} = \left[\frac{d^{\varepsilon}}{dq^{\varepsilon}} P(q) \right]_{q=0} \quad (1.3.14)$$

— для моментных функций (1.3.11) и функции веса $\lambda(n) = \frac{1}{m} e^{mn}$,

$$(-1)^\varepsilon \mu_{\varepsilon j} = (-1)^\varepsilon \sum_{n=0}^{\infty} x_j(n) n^\varepsilon e^{-mn} = \left[\frac{d^\varepsilon}{dq^\varepsilon} P(q) \right]_{q=\lambda} \quad (1.3.15)$$

— для полиномов Лагерра дискретного аргумента с моментной функцией (1.3.12).

В выражениях (1.3.13) — (1.3.15) переходная характеристика обозначена через $P(q)$.

Таким образом, для расчета выходных реакций многомерных ДСАУ методом обобщенных спектров необходимо выполнить следующее:

1. В зависимости от выбранного дискретного ортогонального базиса (дискретный аналог полиномов или функций Лагерра) по формулам (1.3.13) — (1.3.15), соответствующим данному базису, вычисляются значения моментной матрицы M_ε .

2. По формуле (1.3.9) рассчитывается матрица ДОС.

3. По формуле (1.3.6) строится матрица выходных величин исследуемой многомерной ДСАУ.

§ 1.4. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ [28]

Реакция нелинейной ДСАУ на управляющие и возмущающие воздействия $y(n)$ определяется дискретным аналогом ряда Вольтера [33], [61]

$$x(n) = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) y(n-m_1) \times \\ \times y(n-m_2) \dots y(n-m_p), \quad (1.4.1)$$

где $k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) = k_p(m_1) k_p(m_2) \dots k_p(m_p)$ — многомерная сепарабельная импульсная переходная функция ДСАУ.

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} |k_p(m_1, m_2, \dots, m_p)| < a_p.$$

При решении конкретной задачи ряд (1.4.1) ограничен и имеет следующий вид:

$$x(n) = \sum_{p=0}^l \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) y(n-m_1) \times \\ \times y(n-m_2) \dots y(n-m_p). \quad (1.4.2)$$

Применим к выражению (1.4.2) многомерное дискретное преобразование Лапласа

$$F(q_1, q_2, \dots, q_p) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} f(n_1, n_2, \dots, n_p) e^{-q_1 n_1} \dots e^{-q_p n_p},$$

$$f(n_1, n_2, \dots, n_p) = \frac{1}{(2\pi j)^p} \int_{\gamma_1-j\pi}^{\gamma_1+j\pi} \int_{\gamma_2-j\pi}^{\gamma_2+j\pi} \dots \int_{\gamma_p-j\pi}^{\gamma_p+j\pi} F(q_1, q_2, \dots, q_p) \times$$

$$\times e^{q_1 n_1} e^{q_2 n_2} \dots e^{q_p n_p} dq_1 dq_2 \dots dq_p. \quad (1.4.3)$$

Получим

$$x(n) = D_1^{-1} \{W(q_1) Y(q_1)\} \Big|_{n_1=n} + D_2^{-1} \{W(q_1 q_2) Y(q_1) Y(q_2)\} \Big|_{n_1=n_2=n} +$$

$$+ \dots + D_p^{-1} \{W(q_1, q_2, \dots, q_p) Y(q_1) Y(q_2) \dots Y(q_p)\} \Big|_{n_1=\dots=n_p=n},$$

где

$$(1.4.4)$$

$$W(q_1, q_2, \dots, q_p) = \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) \times$$

$$\times e^{-q_1 m_1} e^{-q_2 m_2} \dots e^{-q_p m_p},$$

$$Y(q_p) = \sum_{n_p=0}^{\infty} y(n_p) e^{-q_p n_p}.$$

Многомерное дискретное преобразование Лапласа функции $x(n_1, n_2, \dots, n_p)$ можно определить по заданной системе разностных уравнений, описывающих исследуемую ДСАУ (§ 1.2).

Выходную величину ДСАУ будем определять в виде разложения по ортогональной системе элементов $\{U_m(n)\}$. При этом исконая функция $x(n) \in \bar{L}^2$, то есть

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} |x(n_1, n_2, \dots, n_p)|^2 \rho(n_1) \rho(n_2) \dots \rho(n_p) < \infty. \quad (1.4.5)$$

Спектральное преобразование выходной величины имеет вид

$$x(n_1, n_2, \dots, n_p) = \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_p=0}^{\infty} \frac{c_{i_1 i_2 \dots i_p}}{r_{i_1 i_2 \dots i_p}} \times$$

$$\times u_{i_1}(n_1) u_{i_2}(n_2) \dots u_{i_p}(n_p), \quad (1.4.6)$$

где

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} x(n_1, n_2, \dots, n_p) \rho(n_1) \rho(n_2) \dots \rho(n_p) \times$$

$$\times u_{i_1}(n_1) u_{i_2}(n_2) \dots u_{i_p}(n_p). \quad (1.4.7)$$

Подставляя в выражение (1.4.7) значение дискретного ортогонального базиса, определяемого формулой (1.1.61), получим

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} x(n_1, n_2, \dots, n_p) \rho(n_1) \rho(n_2) \dots \rho(n_p) \times$$

$$\begin{aligned} & \times \sum_{g_1=0}^{i_1} \alpha_{g_1 i_1} (n_1)^{g_1 \delta} \exp(-\gamma g_1 n_1) \dots \sum_{g_p=0}^{i_p} \alpha_{g_p i_p} (n_p)^{g_p \delta} \exp(-\gamma g_p n_p) = \\ & = \sum_{g_1=0}^{i_1} \dots \sum_{g_p=0}^{i_p} \prod_{j=1}^p \alpha_{g_j i_j} \mu_{g_1 g_2 \dots g_p}^* \end{aligned} \quad (1.4.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_{g_1 g_2 \dots g_p}^* & = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} x(n_1, n_2, \dots, n_p) \rho(n_1) \dots \rho(n_p) \times \\ & \times n_1^{g_1 \delta} n_2^{g_2 \delta} \dots n_p^{g_p \delta} \exp(-\gamma(g_1 n_1 + g_2 n_2 + \dots + g_p n_p)) \end{aligned} \quad (1.4.9)$$

— многомерный момент функции.

Из выражений (1.4.4) и (1.4.9) определяем

$$\begin{aligned} \mu_{g_1 g_2 \dots g_p}^* & = (-1)^{\delta(g_1 + g_2 + \dots + g_p)} \times \\ & \times \left. \frac{\partial^{\delta(g_1 + g_2 + \dots + g_p)}}{\partial q_1^{\delta g_1} \partial q_2^{\delta g_2} \dots \partial q_p^{\delta g_p}} W^*(q_1, q_2, \dots, q_p) \right|_{\substack{q_1 = \delta g_1 \\ q_2 = \delta g_2 \\ \dots \\ q_p = \delta g_p}} \end{aligned} \quad (1.4.10)$$

В случае, если известно многомерное дискретное преобразование Лапласа функции $x(n_1, n_2, \dots, n_p)$, взятой без веса

$$W(q_1, q_2, \dots, q_p) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} x(n_1, n_2, \dots, n_p) e^{-q_1 n_1} e^{-q_2 n_2} \dots e^{-q_p n_p},$$

введем в рассмотрение функцию

$$f(n_1, n_2, \dots, n_p) = \frac{x(n_1, n_2, \dots, n_p)}{\rho(n_1) \rho(n_2) \dots \rho(n_p)} e^{-\gamma_0' n_1} e^{-\gamma_0^2 n_2} \dots e^{-\gamma_0^p n_p}. \quad (1.4.11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} & W(q_1 + \gamma_0', q_2 + \gamma_0^2, \dots, q_p + \gamma_0^p) = \\ & = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} e^{-q_1 n_1} e^{-q_2 n_2} \dots e^{-q_p n_p} e^{-\gamma_0' n_1} e^{-\gamma_0^2 n_2} \dots e^{-\gamma_0^p n_p} \times \\ & \quad \times x(n_1, n_2, \dots, n_p) = \\ & = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} e^{-q_1 n_1} e^{-q_2 n_2} \dots e^{-q_p n_p} f(n_1, n_2, \dots, n_p) \rho(n_1) \dots \rho(n_p). \end{aligned}$$

При этом многомерный момент функции $f(n_1, n_2, \dots, n_p)$ определяется зависимостью

$$\begin{aligned} \mu_{k_1 k_2 \dots k_p} & = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} f(n_1, n_2, \dots, n_p) \rho(n_1) \dots \rho(n_p) \times \\ & \quad \times e^{-z_1 n_1} e^{-z_2 n_2} \dots e^{-z_p n_p} n_1^{k_1} n_2^{k_2} \dots n_p^{k_p} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{k_1+k_2+\dots+k_p} \frac{\partial^{k_1+k_2+\dots+k_p}}{\partial q_1^{k_1} \partial q_2^{k_2} \dots \partial q_p^{k_p}} \times \\
&\times W(q_1 + \gamma_0', q_2 + \gamma_0^2, \dots, q_p + \gamma_0^p) \Big|_{\substack{q_1=\alpha_1 \\ q_2=\alpha_2 \\ \dots \\ q_p=\alpha_p}} \quad (1.4.12)
\end{aligned}$$

Искомая функция определяется из уравнения (1.4.11) по найденным при произвольном весе $f(n_1, n_2, \dots, n_p)$.

§ 1.5. РАСЧЕТ ВЫХОДНЫХ РЕАКЦИЙ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ОРТОГОНАЛЬНЫМ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

Нестационарная ДСАУ в зависимости от структурной схемы может быть представлена разностными уравнениями с переменными коэффициентами вида [78].

$$\begin{aligned}
&A_n(iT) \Delta^n x(iT) + A_{n-1}(iT) \Delta^{n-1} x(iT) + \dots + A_0(iT) x(iT) = \\
&= B_k(iT) \Delta^k y(iT) + B_{k-1}(iT) \Delta^{k-1} y(iT) + \dots + B_0(iT) y(iT) \quad (1.5.1)
\end{aligned}$$

— для нестационарной цифровой системы,

$$\begin{aligned}
&A_n(iT, \sigma T) \Delta^n x(iT + \sigma T) + A_{n-1}(iT, \sigma T) \Delta^{n-1} x(iT + \sigma T) + \\
&+ \dots + A_0(iT, \sigma T) x(iT + \sigma T) = B_k(iT, \sigma T) \Delta^k y(iT + \sigma T) + \\
&+ B_{k-1}(iT, \sigma T) \Delta^{k-1} y(iT + \sigma T) + \dots + B_0(iT, \sigma T) y(iT + \sigma T) \quad (1.5.2)
\end{aligned}$$

— для импульсной системы с переменными параметрами, где $y(iT + \sigma T)$ и $x(iT + \sigma T)$ — соответственно входной и выходной сигналы нестационарной ДСАУ, $0 \leq \sigma \leq 1$.

Рассмотрим метод расчета выходной реакции системы в случае, если переменные коэффициенты уравнений (1.5.1) и (1.5.2) могут быть представлены разложением в степенной ряд. Не нарушая общности рассуждений, рассмотрим решение задачи анализа на примере нестационарной цифровой системы автоматического управления, описываемой уравнением (1.5.1), в котором для упрощения записи период квантования примем равным $T = 1$. Тогда задача сводится к решению разностного уравнения

$$\begin{aligned}
&A_n(i) \Delta^n x(i) + A_{n-1}(i) \Delta^{n-1} x(i) + \dots + A_0(i) x(i) = \\
&= B_k(i) \Delta^k y(i) + B_{k-1}(i) \Delta^{k-1} y(i) + \dots + B_0(i) y(i). \quad (1.5.3)
\end{aligned}$$

Коэффициенты этого уравнения определяются выражениями

$$A_p(i) = A_{p, N} i^N + A_{p, N-1} i^{N-1} + \dots + A_{p, 1} i + A_{p, 0}, \quad (1.5.4)$$

$$B_q(i) = B_{q, M} i^M + B_{q, M-1} i^{M-1} + \dots + B_{q, 1} i + B_{q, 0}, \quad (1.5.5)$$

$$\rho = 1, 2, \dots, n, \quad q = 1, 2, \dots, k.$$

С учетом равенств (1.5.4) и (1.5.5) уравнение (1.5.3) приводится к виду

$$\begin{aligned} & (A_{n, N} i^N + A_{n, N-1} i^{N-1} + \dots + A_{n, 0}) \Delta^n x_i(i) + (A_{n-1, N} i^N + \\ & + A_{n-1, N-1} i^{N-1} + \dots + A_{n-1, 0}) \Delta^{n-1} x(i) + \dots + \\ & + (A_{0, N} i^N + A_{0, N-1} i^{N-1} + \dots + A_{0, 0}) x_i = (B_{k, M} i^M + B_{k, M-1} i^{M-1} + \\ & + \dots + B_{k, 0}) \Delta^k y(i) + (B_{k-1, M} i^M + B_{k-1, M-1} i^{M-1} + \dots + B_{k-1, 0}) \times \\ & \times \Delta^{k-1} y(i) + \dots + (B_{0, M} i^M + B_{0, M-1} i^{M-1} + \dots + B_{0, 0}) y_i. \quad (1.5.6) \end{aligned}$$

Рассмотрим решение этого уравнения в области комплексного переменного q . Применяя дискретное преобразование Лапласа и теорему об умножении оригинала на i^N , после группировки членов уравнение (1.5.6) преобразуется к форме

$$\begin{aligned} & (A_{n, 0} q^n + A_{n-1, 0} q^{n-1} + \dots + A_{0, 0}) X(q) - \\ & - \frac{d}{dq} [(A_{n, 1} q^n + A_{n-1, 1} q^{n-1} + \dots + A_{0, 1}) X(q)] + \dots + \\ & + (-1)^N \frac{d^N}{dq^N} [A_{n, N} q^n + A_{n-1, N} q^{n-1} + \dots + A_{0, N}] X(q) = \\ & = (B_{k, 0} q^k + B_{k-1, 0} q^{k-1} + \dots + B_{0, 0}) Y(q) - \\ & - \frac{d}{dq} [(B_{k, 1} q^k + B_{k-1, 1} q^{k-1} + \dots + B_{0, 1}) Y(q)] + \dots + (-1)^M \times \\ & \times \frac{d^M}{dq^M} [B_{k, M} q^k + B_{k-1, M} q^{k-1} + \dots + B_{0, M}] Y(q). \quad (1.5.7) \end{aligned}$$

Пользуясь формулой Ньютона-Лейбница для определения j -ой производной произведения двух функций и обозначая

$$A_l^{(j)}(q) = \frac{d^j}{dq^j} (A_{n, l} q^n + A_{n-1, l} q^{n-1} + \dots + A_{0, l}),$$

$$B_l^{(j)}(q) = \frac{d^j}{dq^j} (B_{k, l} q^k + B_{k-1, l} q^{k-1} + \dots + B_{0, l}),$$

из уравнения (1.5.7) получаем

$$\begin{aligned} & \left[A_0(q) - A_1^{(1)}(q) + A_2^{(2)}(q) + \dots + (-1)^N A_N^{(N)}(q) \right] X(q) + \\ & + \left[-A_1(q) + 2A_2^{(1)}(q) - 3A_3^{(2)}(q) + \dots + (-1)^N C_N^{N-1} A_N^{(N-1)}(q) \right] \times \\ & \times X^{(1)}(q) + \left[A_2(q) - 3A_3^{(1)}(q) + 6A_4^{(2)}(q) + \dots + (-1)^N \times \right. \\ & \times C_N^{N-2} A_N^{(N-2)}(q) \left. \right] X^{(2)}(q) + \dots + [(-1)^N A_N(q)] X^{(N)}(q) = \\ & = \left[B_0(q) - B_1^{(1)}(q) + B_2^{(2)}(q) + \dots + (-1)^M B_M^{(M)} \right] Y(q) + \\ & + \left[-B_1(q) + 2B_2^{(1)}(q) - 3B_3^{(2)}(q) + \dots + (-1)^M C_M^{M-1} B_M^{(M-1)}(q) \right] \times \end{aligned}$$

линейных алгебраических уравнений, решением которых является обобщенный спектр искомого выходного дискретного сигнала.

Таким образом, анализ нестационарной ДСАУ сводится к следующему:

1. По формуле (1.5.15) находятся правые части уравнений (1.5.14).

2. Из решения системы (1.5.14) определяются коэффициенты c_1, c_2, \dots, c_n .

3. Вычисляются дискретные значения выходной величины по формуле (1.5.12).

Аналогично решается задача анализа импульсной нестационарной системы автоматического управления. Однако решение несколько усложняется, так как в уравнении (1.5.2) коэффициенты являются функцией двух переменных. Методика решения остается прежней.

Рассмотрим многомерную нестационарную ДСАУ с r входами и l выходами. Математическая модель такой ДСАУ представляется системой l уравнений вида (1.5.1).

В комплексной области матрица выходных величин определяется выражением

$$X(q, n) = W(q, n) Y_l^T(q), \quad (1.5.16)$$

где

$$Y_l(q) = \sum_{n=0}^{\infty} Y(n) e^{-qn}$$

— D — преобразование матрицы входных сигналов

$$Y(n) = \| y_1(n), y_2(n), \dots, y_r(n) \|^T,$$

$$W(q, n) = \| W_{ij}(q, n) \|_{r \times l}$$

— многомерная параметрическая передаточная функция исследуемой нестационарной ДСАУ,

$W_{ij}(q, n)$ — многочлен, определяемый D —преобразованием левых частей исходных уравнений.

При этом под D —преобразованием матрицы понимаем матрицу D —преобразований ее элементов.

Восстановление матрицы выходных сигналов $x(n)$ по известной матрице переходной характеристики классическими методами (метод вычетов, частотный и другие) является трудоемкой задачей, кроме этого полученное решение сложно реализовать на физических элементах. Будем определять элементы искомого матрицы выходных сигналов в виде разложения

$$x_j(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{jk}(n) \Phi_{jk}(n), \quad (1.5.17)$$

где $c_{jk}(n)$ — элементы матрицы нестационарного дискретного обобщенного спектра (ДОС) выходных сигналов многомерной ДСАУ

соответственно для случаев, определяемых формулами (1.5.20) и (1.5.21).

Таким образом, для анализа нестационарной ДСАУ необходимо:

1. Вычислить матрицу моментов параметрической передаточной функции системы $M^w(n)$ по формулам (1.5.20) или (1.5.21).

2. Вычислить матрицу входных моментов M^Y для рассматриваемого воздействия, пользуясь выражениями (1.5.22) или (1.5.23).

3. Вычислить моментную переходную матрицу многомерной ДСАУ $M(n)$ по формуле (1.5.19).

4. По формуле (1.5.18) определить матрицу ДОС многомерной ДСАУ.

5. Построить матрицу выходных сигналов по разложению (1.5.17).

Отметим, что для различных входных воздействий решение задачи проводится по указанным выше пунктам, начиная со 2-го. Матрица $M^w(n)$ для данной нестационарной многомерной ДСАУ вычисляется один раз и в последующих расчетах остается постоянной.

Для конкретности рассмотрим вычисление выходных сигналов нестационарной многомерной ДСАУ, когда дискретным ортогональным базисом являются многочлены Лагерра дискретного аргумента. В этом случае коэффициенты α_{ji} в формуле (1.5.18) определяются зависимостями

$$\begin{aligned} \alpha_{00} &= | \overline{1 - e^{-1}} , \\ \alpha_{01} &= \sqrt{e^{-1} \overline{(1 - e^{-1})}} , \\ \alpha_{11} &= (e - 1) \sqrt{e^{-1} \overline{(1 - e^{-1})}} , \\ &\dots \end{aligned}$$

а элементы матрицы выходных сигналов имеют вид

$$x_j(n) = \sum_{k=0}^m c_{jk} l_{ik}(n).$$

Для многочленов Шарлье дискретного переменного элементы выходной матрицы определяются разложением

$$x(n) = \sum_{i=0}^m c_i(n) C_{im}(n, a),$$

где

$$c_i(n) = \frac{1}{a^{-1} i!} \sum_{v=0}^i \alpha_{v,k} \mu_v(n).$$

Коэффициенты $\alpha_{v,k}$ определяются формулой (1.1.43), элементы матрицы $\mu_v(n)$ вычисляются по формуле (1.5.19).

Аналогичные выражения можно получить для выходной матрицы нестационарной многомерной ДСАУ, используя дискретные ортогональные многочлены Гана, Мейкснера и другие.

§ 1.6. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ
 ДЛЯ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ
 ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим динамическую систему, которая описывается разностным уравнением

$$a_i(n)x(n+i) + a_{i-1}(n)x(n+i-1) + \dots + a_0(n)x(n) = y(n), \quad (1.6.1)$$

где $y(n) = b_r(n)y_0(n+r) + b_{r-1}(n)y_0(n+r-1) + \dots + b_0(n)y_0(n)$,

n — дискретный действительный аргумент,

$$x(0) = x_0, \quad x(1) = x_1, \dots, \quad x(n-1) = x_{n-1}$$

— начальные условия.

Пусть

$$a_{l_1}(n) = \alpha_{l_1} + \beta_{l_1}(n), \quad l_1 = 0, 1, \dots, i \quad (1.6.2)$$

Запишем формулу дискретного преобразования Лапласа от произведения двух функций. Если $F_1(q)$ и $F_2(q)$ — D — преобразования функций $f_1(n)$ и $f_2(n)$, то

$$D\{f_1(n)f_2(n)\} = F(q) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} F_1(\lambda) F_2(q-\lambda) d\lambda,$$

$$\sigma_c, \sigma_{c_1} + \sigma_{c_2} < \sigma, \sigma_{c_1} < c < \sigma - \sigma_{c_2}.$$

С учетом равенства (1.6.2) разностное уравнение (1.6.1) приводится к виду

$$\sum_{\nu=0}^i \alpha_{\nu} x(n+\nu) + \sum_{\nu=0}^i \beta_{\nu}(n) x(n+\nu) = y(n). \quad (1.6.3)$$

Применяя к зависимости (1.6.3) преобразование и учитывая теорему о смещении независимого переменного в области оригиналов

$$D\{x(n+k)\} = e^{qk} \left[X(q) - \sum_{r=0}^k e^{-qr} x(r) \right], \quad n+k=r,$$

получим

$$\sum_{\nu=0}^i \alpha_{\nu} e^{\nu q} \left[X(q) - \sum_{r=0}^{\nu} e^{-qr} x(r) \right] + \frac{1}{2\pi j} \times$$

$$\times \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \left\{ \sum_{\nu=0}^i B_{\nu}(q-\lambda) e^{\nu \lambda} \left[X(\lambda) - \sum_{r=0}^{\nu} e^{-\lambda r} x(r) \right] \right\} d\lambda = Y(q), \quad (1.6.4)$$

где

$$X(q) = D\{x(n)\},$$

$$B(q) = D\{\beta(n)\},$$

$$Y(q) = D\left\{ \sum_{k=0}^r b_k(n) y(n+k) \right\}.$$

Вводя обозначения

$$\sum_{v=0}^i \sum_{r=0}^v \alpha_v e^{-qr} x(r) = Y_1(q),$$

$$\frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \left\{ \sum_{v=0}^i B_v(q-\lambda) e^{v\lambda} \left[\sum_{r=0}^v e^{-\lambda r} x(r) \right] \right\} d\lambda = Y_2(q),$$

из уравнения (1.6.4) получим следующую рабочую зависимость:

$$\sum_{v=0}^i \alpha_v e^{vq} X(q) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \sum_{v=0}^i B_v(q-\lambda) e^{v\lambda} X(\lambda) d\lambda =$$

$$= Y(q) + Y_1(q) + Y_2(q).$$

Откуда

$$X(q) = \frac{Y(q) + Y_1(q) + Y_2(q)}{\sum_{v=0}^i \alpha_v e^{vq}} - \frac{\left(\sum_{v=0}^i \alpha_v e^{vq} \right)^{-1}}{2\pi j} \times$$

$$\times \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} \sum_{v=0}^i B_v(q-\lambda) e^{v\lambda} X(\lambda) d\lambda.$$

Обозначая

$$\frac{Y(q) + Y_1(q) + Y_2(q)}{\sum_{v=0}^i \alpha_v e^{vq}} = G_1(q), \quad \frac{\left[\sum_{v=0}^i B_v(q-\lambda) e^{v\lambda} \right]}{\sum_{v=0}^i \alpha_v e^{vq}} = G_2(q, \lambda),$$

получим следующее интегральное уравнение 2-го рода в области комплексного аргумента:

$$X(q) = G_1(q) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} G_2(q, \lambda) X(\lambda) d\lambda. \quad (1.6.5)$$

Если на функцию $G_1(q)$ и ядро уравнения (1.6.5) наложить ограничения, определяющие реальные системы, интегральное уравнение (1.6.5) можно решить методом последовательных приближений.

Нулевое приближение зададим непрерывной функцией. Тогда из уравнения (1.6.5) получим

$$X_1(q) = G_1(q) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} G_2(q, \lambda) X_0(\lambda) d\lambda. \quad (1.6.6)$$

Продолжая такой процесс, можно получить последовательность функций $X_2(q)$, $X_3(q)$, ...

При сделанных предположениях относительно $G_1(\lambda)$ и $G_2(q, \lambda)$ последовательность $[X_n(q)]$ сходится при $n \rightarrow \infty$ к решению $X(q)$ интегрального уравнения (1.6.5). Рациональный выбор функций $X_0(q)$ (нулевого приближения) приводит к быстрой сходимости последовательности $[X_n(q)]$ к решению интегрального уравнения (1.6.5).

На практике в качестве нулевого приближения часто выбирают функцию

$$X_0(q) = G_1(q),$$

а $(k+1)$ приближение определяется с помощью зависимости

$$X_{k+1}(q) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} G_2(q, \lambda) X_k(\lambda) d\lambda.$$

Общее решение уравнения (1.6.5) определяется выражением

$$X(q) = X_0(q) + X_1(q) + \dots + X_k(q) + \dots \quad (1.6.7)$$

Оригинал функции $X(q)$ будем определять спектральным методом моментов по методике, изложенной в двух предыдущих параграфах. Выходной сигнал нестационарной ДСАУ представим в виде ряда

$$x(n) = \sum_{k=0}^l \sum_{i=0}^m c_{ki} \varphi_{ki}(n), \quad (1.6.8)$$

где $\{c_{ki}\}$ — ДОС выходного сигнала исследуемой ДСАУ, определяемые по формулам § 1.2.

$\varphi_{ki}(n)$ — элементы ортогонального дискретного базиса,
 l — количество членов разложения (1.6.7).

В этом случае величины моментов выходной величины определяются следующим образом:

$$\mu_{ki}(n) = \left. \frac{d^i X_k(q)}{dq^i} \right|_{q=0}.$$

Ниже рассмотрим случай, когда коэффициенты a_l и b_l разностного уравнения (1.6.1) могут быть представлены в виде полиномов степени k , суммы экспонент, являются периодическими.

1. Решение разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами

Коэффициенты линейного разностного уравнения (1.6.1) представим в виде

$$\begin{aligned} a_l &= \sum_{k=0}^g A_{lk} n^k, \quad l = 0, 1, \dots, i, \\ b_l &= \sum_{k=0}^{g_1} B_{lk} n^k, \quad l = 0, 1, \dots, r, \end{aligned} \quad (1.6.9)$$

Учитывая формулы (1.6.9), запишем уравнение (1.6.1) в виде

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^i A_{i0} x(n+l) + n \sum_{i=0}^i A_{i1} x(n+l) + \dots + n^g \sum_{i=0}^i A_{ig} x(n+l) = \\ = \sum_{i=0}^r B_{i0} y_0(n+l) + \dots + n^{g_1} \sum_{i=0}^r B_{i g_1} y_0(n+l). \end{aligned} \quad (1.6.10)$$

Согласно теореме смещения в области оригиналов и теореме умножения на n^k будем иметь

$$D \left\{ n^k \sum_{i=0}^i A_{ik} x(n+l) \right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} \left\{ X(q) \sum_{i=0}^i A_{ik} e^{ql} \right\}. \quad (1.6.11)$$

Обозначим

$$D_k(q) = \sum_{i=0}^i A_{ik} e^{ql}, \quad k=0, 1, \dots, g,$$

$$H_k(q) = \sum_{i=0}^r B_{ik} e^{ql}, \quad k=0, 1, \dots, g_1.$$

Тогда формула (1.6.11) принимает вид

$$\begin{aligned} D \left\{ n^k \sum_{i=0}^i A_{ik} x(n+l) \right\} = (-1)^k \left[D_k^{(k)}(q) X(q) + C_k^1 D_k^{(k-1)}(q) X(q) + \right. \\ \left. + \dots + C_k^{k-1} D_k^1(q) X^{(k-1)}(q) + D_k^0(q) X^{(k)}(q) \right], \\ C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)}. \end{aligned} \quad (1.6.12)$$

Применим к обеим частям уравнения (1.6.10) дискретное преобразование Лапласа. Учитывая выражение (1.6.12), получим

$$\begin{aligned} D_0(q) X(q) - D_1'(q) X(q) - D_1(q) X'(q) + D_2''(q) X(q) + \\ + C_1^2 D_2'(q) X'(q) + D_2(q) X''(q) + \dots + (-1)^k \left[D_k^{(k)}(q) X(q) + \right. \\ \left. + C_k^1 D_k^{(k-1)}(q) X'(q) + \dots + C_k^{k-1} D_k^1(q) X^{(k-1)}(q) + D_k(q) X^{(k)}(q) \right] + \\ + \dots + (-1)^g \left[D_g^{(g)}(q) X(q) + \dots + D_g(q) X^g(q) \right] = H_0(q) Y(q) + \\ + \dots + (-1)^k \left[H_k^{(k)}(q) Y(q) + C_k^1 H_k^{(k-1)}(q) Y^1(q) + \right. \\ \left. + \dots + H_k(q) Y^{(k)}(q) \right] + \dots + (-1)^{g_1} \left[H_{g_1}^{(g_1)}(q) Y(q) + \right. \\ \left. + \dots + H_{g_1}(q) Y^{g_1}(q) \right]. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Уравнение (1.6.13) преобразуем к виду

$$E_0(q) X(q) + \dots + E_k(q) \frac{d^k X(q)}{dq^k} + \dots + E_g(q) \frac{d^g X(q)}{dq^g} =$$

$$= G_0(q) Y_0(q) + \dots + G_k(q) \frac{d^k Y_0(q)}{dq^k} + G_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} Y_0'(q)}{dq^{g_1}}, \quad (1.6.14)$$

где

$$E_k(q) = \sum_{l=k}^g (-1)^l C_l^{l-k} D_l^{(l-k)}, \quad k = 0, 1, \dots, g,$$

$$G_k(q) = \sum_{l=k}^{g_1} (-1)^l C_l^{l-k} H_l^{(l-k)}, \quad k = 0, 1, \dots, g_1. \quad (1.6.15)$$

Вводя обозначение

$$Y(q) = G_0(q) Y_0(q) + \dots + G_k(q) \frac{d^k Y_0(q)}{dq^k} + \dots + G_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} Y_0(q)}{dq^{g_1}}, \quad (1.6.16)$$

уравнение (1.6.14) можно представить следующим образом:

$$E_0(q) X(q) + \dots + E_k(q) \frac{d^k X(q)}{dq^k} + \dots + E_g(q) \frac{d^g X(q)}{dq^g} = Y(q). \quad (1.6.17)$$

Применяя к последнему уравнению метод последовательных приближений, получим

$$X(q) = X_0(q) + X_1(q) + \dots + X_k(q) + \dots \quad (1.6.18)$$

Отсюда

$$x(n) = \sum_{k=0}^l x_k(n).$$

2. Решение разностного уравнения с периодическими коэффициентами

Коэффициенты уравнения (1.6.1) имеют вид

$$a_l = \sum_{k=0}^g A_{lk} \cos(k\omega_0 n - \varphi_k), \quad l = 0, 1, 2, \dots, l,$$

$$b_l = \sum_{k=0}^{g_1} B_{lk} \cos(k\omega_0 n - \psi_k), \quad l = 0, 1, 2, \dots, r. \quad (1.6.19)$$

Учитывая, что

$$\cos(k\omega_0 n - \varphi_k) = \frac{e^{j(k\omega_0 n - \varphi_k)} + e^{j(k\omega_0 n - \varphi_k)}}{2}, \quad (1.6.20)$$

выражения (1.6.19) можно представить в виде

$$a_l = \sum_{k=-g}^g G_{lk} e^{jk\omega_0 n}, \quad l = 0, 1, \dots, l,$$

$$b_l = \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_{lk} e^{jk\omega_0 n}, \quad l=0, 1, \dots, r, \quad (1.6.21)$$

где

$$G_{l_0} = A_{l_0} \cos \varphi_0, \quad G_{lk} = \frac{A_{lk}}{2} e^{-j\varphi_k}, \quad G_{l(-k)} = \frac{A_{lk}}{2} e^{j\varphi_k}, \\ k=1, 2, \dots, g, \quad (1.6.22)$$

$$H_{l_0} = B_{l_0} \cos \psi_0, \quad H_{lk} = \frac{B_{lk}}{2} e^{-j\psi_k}, \quad H_{l(-k)} = \frac{B_{lk}}{2} e^{j\psi_k}, \\ k=1, 2, \dots, g_1, \quad (1.6.23)$$

Заметим, что

$$G_{l(-k)} = \bar{G}_{lk}, \quad H_{l(-k)} = \bar{H}_{lk}.$$

Учитывая формулы (1.6.21), уравнение (1.6.1) преобразуем к виду

$$x(n+i) \sum_{k=-g}^g G_{ik} e^{jk\omega_0 n} + x(n+i-1) \sum_{k=-g}^g G_{i-1,k} e^{jk\omega_0 n} + \dots + \\ + x(n) \sum_{k=-g}^g G_{0k} e^{jk\omega_0 n} = y(n+r) \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_{rk} e^{jk\omega_0 n} + \dots + \\ + y(n) \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_{0k} e^{jk\omega_0 n}. \quad (1.6.24)$$

Используя теорему смещения в области оригиналов и теорему сдвига в области изображений, получим

$$D \{x(n+i) \sum_{k=-g}^g G_{ik} e^{jk\omega_0 n}\} = G_{ik}^1 e^{i(g-jk\omega_0)} X(q-jk\omega_0). \quad (1.6.25)$$

Применим дискретное преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (1.6.24). Принимая во внимание равенство (1.6.25), получим

$$\sum_{k=-g}^g G_{ik} e^{i(g-jk\omega_0)} X(q-jk\omega_0) + \sum_{k=-g}^g G_{i-1,k} e^{(i-1)(g-jk\omega_0)} \times \\ \times X(q-jk\omega_0) + \dots + \sum_{k=-g}^g G_{0k} X(q-jk\omega_0) = \\ = \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_{rk} e^{r(g-jk\omega_0)} Y_0(q-jk\omega_0) + \dots + \sum_{k=-g_1}^{g_1} H_{0k} Y_0(q-jk\omega_0). \quad (1.6.26)$$

Уравнение (1.6.26) представим в виде

$$d_0(q) X(q) + d_1(q) X(q-j\omega_0) + \dots + d_{g_1}(q) X(q-jg_1\omega_0) + \\ + d_1(q) X(q+j\omega_0) + \dots + d_{-g}(q) X(q+jg\omega_0) = h_0(q) Y_0(q) + \\ + h_1(q) Y_0(q-j\omega_0) + \dots + h_{g_1}(q) Y_0(q-jg_1\omega_0) + h_{-1}(q) Y_0(q+j\omega_0) + \\ + \dots + h_{-g_1}(q) Y_0(q+jg_1\omega_0), \quad (1.6.27)$$

где

$$d_0(q) = \sum_{l=0}^i G_{l_0} e^{lq}, \quad d_k(q) = \sum_{l=0}^i G_{lk} e^{l(q-jk\omega_0)},$$

$$d_{-k}(q) = \sum_{l=0}^i G_{l(-k)} e^{l(q+jk\omega_0)}, \quad k = 1, 2, \dots, g,$$

$$h_0(q) = \sum_{l=0}^r H_{l0} e^{lq}, \quad h_k(q) = \sum_{l=0}^r H_{lk} e^{l(q-jk\omega_0)},$$

$$h_{-k}(q) = \sum_{l=0}^r H_{l(-k)} e^{l(q+jk\omega_0)}, \quad k = 1, 2, \dots, g_1. \quad (1.6.28)$$

Правую часть уравнения (1.6.27) обозначим

$$\begin{aligned} & h_0(q) Y_0(q) + h_1(q) Y_0(q - j\omega_0) + \dots + h_{g_1}(q) Y_0(q - jg_1\omega_0) + \\ & + h_1(q) Y_0(q + j\omega_0) + \dots + h_{-g_1}(q) Y_0(q + jg_1\omega_0) = \\ & = \Phi_0(q) + \Phi_1(q) + \Phi_{-1}(q), \end{aligned} \quad (1.6.29)$$

где

$$\Phi_0(q) = h_0(q) Y_0(q), \quad \Phi_1(q) = \sum_{k=1}^{g_1} h_k(q) Y_0(q - jk\omega_0),$$

$$\Phi_{-1}(q) = \sum_{k=1}^{g_1} h_{-k}(q) Y_0(q + jk\omega_0). \quad (1.6.30)$$

Таким образом, определение $X(q)$ сводится к решению разностного уравнения в области q :

$$\sum_{k=-g}^g d_k(q) X(q - jk\omega_0) = \Phi_0(q) + \Phi_1(q) + \Phi_{-1}(q). \quad (1.6.31)$$

Последнее уравнение можно решить методом последовательных приближений, для чего положим

$$\begin{aligned} X_0(q) &= X_{0j}^*(q - j\omega_0) = X_{0j}^*(q + j\omega_0) = \dots = X_0(q - jg\omega_0) = \\ &= X_0(q + jg\omega_0) \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

Нулевое приближение легко найти из равенства

$$X_0(q) = \frac{\Phi_0(q) + \Phi_{+1}(q) + \Phi_{-1}(q)}{\sum_{k=-g}^g d_k(q)}, \quad (1.6.33)$$

$(k+1)$ -ое приближение находится из формулы

$$\begin{aligned} d_0(q) X_{k+1}(q) + \sum_{\substack{k=-g \\ k \neq 0}}^g d_k(q) X_k(q - jk\omega_0) &= \Phi_0(q) + \\ &+ \Phi_{+1}(q) + \Phi_{-1}(q). \end{aligned} \quad (1.6.34)$$

Откуда

$$\begin{aligned} X_{k+1}(q) &= \frac{1}{d_0(q)} \left[\Phi_0(q) + \Phi_{+1}(q) + \Phi_{-1}(q) - \right. \\ &\left. - \sum_{k=-g, k \neq 0}^g d_k(q) X_k(q - jk\omega_0) \right]. \end{aligned} \quad (1.6.35)$$

3. Решение разностного уравнения с экспоненциальными коэффициентами

Коэффициенты разностного уравнения представим в виде суммы экспонент

$$a_l(n) = \sum_{k=0}^g A_{lk} e^{-kn}, \quad l=0, 1, \dots, i,$$

$$b_l(n) = \sum_{k=0}^{g_1} B_{lk} e^{-kn}, \quad l=0, 1, \dots, r. \quad (1.6.36)$$

Не уменьшая общности рассуждений, рассмотрим случай нулевых начальных условий.

Полагаем, что входное воздействие $y_0(n)$ и выходной сигнал ДСАУ $x(n)$ преобразуемы по Лапласу. Обозначим

$$D\{x(n)\} = X(q), \quad D\{y_0(n)\} = Y_0(q). \quad (1.6.37)$$

Принимая во внимание теорему смещения в области оригиналов и теорему сдвига в области изображений, получим

$$D\{A_{lk} e^{-nk} x(n+m)\} = A_{lk} e^{m(q+k)} X(q+k), \\ D\{B_{lk} e^{-nk} y_0(n+m)\} = B_{lk} e^{m(q+k)} Y_0(q+k). \quad (1.6.38)$$

Уравнение (1.6.1) с учетом равенств (1.6.36) представим в виде

$$x(n+i) \sum_{k=0}^g A_{ik} e^{-kn} + x(n+i-1) \sum_{k=0}^g A_{i-1,k} e^{-kn} + \dots + \\ + x(n) \sum_{k=0}^g A_{0k} e^{-kn} = y_0(n+r) \sum_{k=0}^{g_1} B_{rk} e^{-kn} + \\ + y_0(n+r-1) \sum_{k=0}^{g_1} B_{r-1,k} e^{-kn} + \dots + y_0(n) \sum_{k=0}^{g_1} B_{0k} e^{-kn}. \quad (1.6.39)$$

Преобразуем по Лапласу обе части уравнения (1.6.39). Учитывая равенства (1.6.38), будем иметь

$$\sum_{k=0}^g A_{ik} e^{i(q+k)} X(q+k) + \sum_{k=0}^g A_{i-1,k} e^{(i-1)(q+k)} X(q+k) + \\ + \dots + \sum_{k=0}^g A_{0k} X(q+k) = \sum_{k=0}^{g_1} B_{rk} e^{r(q+k)} Y_0(q+k) + \\ + \sum_{k=0}^{g_1} B_{r-1,k} e^{(r-1)(q+k)} Y_0(q+k) + \dots + \sum_{k=0}^{g_1} B_{0k} Y_0(q+k). \quad (1.6.40)$$

Уравнение (1.6.40) представим следующим образом:

$$\alpha_0(q) X(q) + \alpha_1(q) X(q+1) + \dots + \alpha_g(q) X(q+g) = \\ = l_0(q) Y_0(q) + l_1(q) Y_0(q+1) + \dots + l_{g_1}(q) Y_0(q+g), \quad (1.6.41)$$

$$\alpha_k(q) = \sum_{v=0}^l A_{v,k} e^{v(q+k)}, \quad k=0, 1, \dots, g,$$

$$l_k = (q) \sum_{\nu=0}^r B_{\nu k} e^{\nu(q+k)}, \quad k = 0, 1, \dots, g_1. \quad (1.6.42)$$

Если входное воздействие $y_0(n)$ задано, то правая часть уравнения (1.6.41)

$$l_0(q) Y_0(q) + l_1(q) Y_0(q+1) + \dots + l_{g_1}(q) Y_0(q+g_1) = Y(q) \quad (1.6.43)$$

представляет собой известную функцию переменного q .

Итак, получим следующее разностное уравнение в области комплексного аргумента:

$$\alpha_0(q) X(q) + \alpha_1(q) X(q+1) + \dots + \alpha_g(q) X(q+g) = Y(q). \quad (1.6.44)$$

Это уравнение можно решить методом последовательных приближений, при этом нулевое приближение находится из условия

$$X_0(q) = X_0(q+1) = \dots = X_0(q+g). \quad (1.6.45)$$

Тогда

$$X_0(q) = \frac{Y_0(q)}{\alpha_0(q) + \alpha_1(q) + \dots + \alpha_g(q)}. \quad (1.6.46)$$

Последующие приближения можно найти из формулы

$$\alpha_0(q) X_{k+1}(q) + \alpha_1(q) X_k(q+1) + \alpha_2(q) X_k(q+2) + \dots + \alpha_g(q) X_k(q+g) = Y(q). \quad (1.6.47)$$

Откуда

$$X_{k+1}(q) = \frac{1}{\alpha_0(q)} \left[Y(q) - \sum_{\nu=1}^g \alpha_\nu(q) X_k(q+\nu) \right]. \quad (1.6.48)$$

Переходя в область времени, имеем

$$x(n) = x_0(n) + x_1(n) + \dots + x_k(n) + \dots \quad (1.6.49)$$

Изложенный метод определения выходных реакций нестационарных ДСАУ не требует нахождения корней характеристического уравнения, легко поддается алгоритмизации и, таким образом, удобен для случая, когда используются цифровые вычислительные машины. Выходной сигнал можно всегда найти с достаточной степенью точности, что достигается простым увеличением количества членов разложения. Это не вызывает сколько-нибудь существенных трудностей для реализации метода, так как для всех дискретных ортогональных систем существуют удобные рекуррентные формулы, позволяющие найти необходимое количество функций выбранного дискретного ортогонального базиса.

В заключение отметим, что выходной сигнал нестационарной ДСАУ можно представить в виде интегроинтерполяционных многочленов в моментах

$$x(n) = \sum_{k=0}^{\infty} X^{(k)}(q) \Big|_{q=0} \psi_{k,n}(e^{-\lambda}) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu_k(n) \psi_{k,n}(e^{-\lambda}). \quad (1.6.50)$$

§ 1.7. СТРУКТУРНЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Изложенные выше методы детерминированного анализа линейных ДСАУ предполагают, что известно разностное уравнение замкнутой системы. При исследовании сложных систем, состоящих из множества элементов, динамические свойства которых задаются соответствующими разностными уравнениями или передаточными функциями, необходимо решить задачу определения зависимостей, связывающих элементы дискретных обобщенных спектров импульсных переходных функций наиболее часто встречающихся соединений: последовательного, с обратной связью, параллельного.

Рассмотрим эти вопросы более подробно, при этом коэффициенты ортогонального разложения импульсных переходных функций звеньев сложной динамической системы будем называть элементами дискретной обобщенной спектральной характеристики (ДОСХ), поскольку они полностью характеризуют динамические свойства звена.

В дальнейшем будем рассматривать соединения приведенных дискретных фильтров, ДОСХ которых определяются в зависимости от вида соединений непрерывных звеньев в каждом из них по методике, изложенной в работах [9], [108] для непрерывных динамических систем.

1. Последовательное соединение элементов

В первую очередь рассмотрим наиболее важное с практической точки зрения соединение — последовательное соединение двух приведенных дискретных фильтров.

Последовательное соединение двух фильтров, характеризующее импульсной переходной функцией $\kappa(n)$, полностью определяется ее обобщенной спектральной характеристикой $\{C_m\}$. Фильтр с импульсной переходной функцией $\kappa_1(n)$ характеризуется обобщенной спектральной характеристикой $\{C_m'\}$, а фильтр с импульсной переходной функцией $\kappa_2(n)$ — $\{C_m''\}$.

Предварительно докажем дискретный аналог равенства Парсеваля.

Пусть $x_1(n)$ и $x_2(n)$ — дискретные функции, преобразуемые по Лапласу, и пусть $D\{x_1(n)\} = X_1(q)$, $D\{x_2(n)\} = X_2(q)$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) x_2(n) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0 - j\pi}^{\sigma_0 + j\pi} X_1(q) X_2(-q) dq, \quad (1.7.1)$$

где $\sigma_0 > \max(\sigma_1, \sigma_2)$ и σ_1, σ_2 — абсциссы абсолютной сходимости функций $x_1(n)$ и $x_2(n)$.

Используя формулу обращения, получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_1(n) x_2(n) = \sum_{n=0}^{\infty} x_2(n) \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} X_1(q) e^{nq} dq =$$

$$= \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} X_1(q) \left(\sum_{n=0}^{\infty} X_2(n) e^{nq} \right) dq = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma_0-j\pi}^{\sigma_0+j\pi} X_1(q) X_2(-q) dq,$$

что и требовалось доказать.

Представим

$$k(n) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(n), \quad k_1(n) = \sum_{j=0}^{\infty} c'_j u_j(n),$$

$$k_2(n) = \sum_{l=0}^{\infty} c''_l u_l(n). \quad (1.7.2)$$

При последовательном соединении дискретных фильтров $k_1(n)$ и $k_2(n)$ имеем следующую зависимость:

$$k(n) = \sum_{n=0}^{\infty} k_1(n) k_2(m-n). \quad (1.7.3)$$

С учетом разложений (1.7.2) имеем

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(n) = \sum_{j=0}^{\infty} c'_j u_j(n) \sum_{l=0}^{\infty} c''_l u_l(n).$$

Преобразуя последнее равенство по Лапласу, получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m u_m(q) = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c'_j c''_l u_j(q) u_l(q). \quad (1.7.4)$$

Интегрируя выражение (1.7.4) в бесконечных пределах после умножения на $u_m(-q)$ и применяя дискретный аналог равенства Парсеваля (1.7.1), определим

$$c_m = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c'_j c''_l e_{jl}^{-m} \quad (1.7.5)$$

$$c_{jl}^{-m} = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\infty}^{+\infty} u_m(-q) u_j(q) u_l(q) dq. \quad (1.7.6)$$

Можно показать [108], что $c_{ji}^{-m} = 0$ при j и (или) $i > m$.

При решении конкретных задач число элементов ДОСХ конечно. В этом случае

$$c_m = \sum_{j=0}^r \sum_{l=0}^r c'_j c''_l c_{jl}^{-m}. \quad (1.7.7)$$

Анализируя формулы (1.7.5), (1.7.6) и (1.7.7.), можно сделать важный вывод о том, что l элементов ДОСХ исследуемого соединения дискретных фильтров определяются l элементами ДОСХ последовательно соединенных дискретных звеньев и не зависят от элементов ДОСХ, имеющих индекс больше l .

2. Соединение элементов обратной связью

Для соединения дискретных фильтров обратной связью (рис. 1.7.1) справедливо равенство в области дискретного преобразования Лапласа

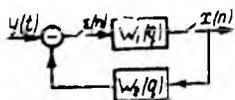


Рис. 1.7.1. Структурная схема соединения элементов с обратной связью.

Обозначим

$$W_{1-2}(q) = W_1(q) W_2(q).$$

Тогда, согласно зависимости (1.7.5), (1.7.6) и (1.7.7), получим

$$c_m^3 + \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^r c_j^3 c_i^{1-2} c_{ji}^{-m} = c_m^p \quad (1.7.10)$$

или

$$c_m^3 + \sum_{j=0}^r \sum_{i=0}^r c_i^3 c_i^p c_{ji}^{-m} = c_m^p, \quad (1.7.11)$$

где $\{c_R^3\}$ — элементы ДОСХ замкнутой ДСАУ,
 $\{c_R^p\}$ — элементы ДОСХ разомкнутой ДСАУ,
 $\{c_R^{1-2}\}$ — элементы ДОСХ последовательного соединения двух дискретных фильтров.

3. Параллельное соединение элементов

При параллельном соединении

$$k(n) = k_1(n) + k_2(n).$$

Отсюда, учитывая п. 2, следует

$$c_m = c_j' + c_i'' \quad (1.7.12)$$

4. Структурный анализ по моментам

Приведем решение той же задачи на основе понятия моментов. Этот случай является важным тогда, когда объект управления характеризуется его импульсной переходной функцией, которая определяется через моменты входного и выходного сигналов.

Рассмотрим ДСАУ с единичной обратной связью. Представляя в выражении (1.7.9) при $W_2(q) = 1$ ядро дискретного преобразования Ланласа в виде ряда Маклорена, получим

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} k(n) \left[1 + \sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v \frac{n^v}{v!} q^v \right] + \sum_{n=0}^{\infty} k(n) \left[1 + \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{n^r}{r!} q^r \right] \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} k_1(n) \left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^m}{m!} q^m \right] = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} k_1(n) \left[1 + \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{n^l}{l!} q^l \right]. \end{aligned} \quad (1.7.13)$$

Путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях в обеих частях равенства (1.7.13), получим

$$\mu_0' = \mu_0 (1 + \mu_0'),$$

$$\mu_1' = \mu_1 (1 + \mu_0') + \mu_0 \mu_1',$$

$$\mu_2' = \mu_2 (1 + \mu_0') + 2\mu_1 \mu_1' + \mu_0 \mu_2',$$

$$\mu_3' = \mu_3 (1 + \mu_0') + 3\mu_2 \mu_1' + 3\mu_1 \mu_2' + \mu_0 \mu_3',$$

$$\mu_4' = \mu_4 (1 + \mu_0') + 4\mu_3 \mu_1' + 6\mu_2 \mu_2' + 4\mu_1 \mu_3' + \mu_0 \mu_4',$$

$$\mu_5' = \mu_5 (1 + \mu_0') + 5\mu_4 \mu_1' + 10\mu_3 \mu_2' + 10\mu_2 \mu_3' + 5\mu_1 \mu_4' + \mu_0 \mu_5',$$

$$\mu_6' = \mu_6 (1 + \mu_0') + 6\mu_5 \mu_1' + 15\mu_4 \mu_2' + 20\mu_3 \mu_3' + 15\mu_2 \mu_4' + 6\mu_1 \mu_5' + \mu_0 \mu_6',$$

$$\dots$$

где

$$\mu_m = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) n^m, \quad \mu_m' = \sum_{n=0}^{\infty} k_1(n) n^m,$$

$k(n)$ — импульсная переходная функция замкнутой ДСАУ,
 $k_1(n)$ — импульсная переходная функция разомкнутой ДСАУ.

Отсюда можно получить зависимости для определения моментов разомкнутой ДСАУ по моментам замкнутой ДСАУ

$$\mu_0' = \frac{\mu_0}{1 - \mu_0}, \quad \mu_0 \neq 1,$$

$$\mu_1' = \frac{\mu_1 (1 + \mu_0')}{1 - \mu_0},$$

$$\mu_2' = \frac{\mu_2 (1 + \mu_0') + 2\mu_1' \mu_1}{1 - \mu_0},$$

$$\mu_3' = \frac{\mu_3 (1 + \mu_0') + 3\mu_2 \mu_1' + 3\mu_1 \mu_2'}{1 - \mu_0},$$

$$\begin{aligned} \mu_4' &= \frac{\mu_4(1+\mu_0') + 4\mu_3\mu_1' + 6\mu_2\mu_2' + 4\mu_1\mu_3'}{1-\mu_0}, \\ \mu_5' &= \frac{\mu_5(1+\mu_0') + 5\mu_4\mu_1' + 10\mu_3\mu_2' + 10\mu_2\mu_3' + 5\mu_1\mu_4'}{1-\mu_0}, \\ \mu_6' &= \frac{\mu_6(1+\mu_0') + 6\mu_5\mu_1' + 15\mu_4\mu_2' + 20\mu_3\mu_3' + 15\mu_2\mu_4' + 6\mu_1\mu_5'}{1-\mu_0}, \end{aligned} \quad (1.7.14)$$

и моментов замкнутой ДСАУ по моментам разомкнутой ДСАУ

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{\mu_0'}{1+\mu_0'}, \\ \mu_1 &= \frac{\mu_1'(1-\mu_0')}{1+\mu_0'}, \\ \mu_2 &= \frac{\mu_2'(1-\mu_0) - 2\mu_1'\mu_1}{1+\mu_0'}, \\ \mu_3 &= \frac{\mu_3'(1-\mu_0) - 3\mu_2\mu_1' - 3\mu_1\mu_2'}{1+\mu_0'}, \\ \mu_4 &= \frac{\mu_4'(1-\mu_0) - 4\mu_3\mu_1' - 6\mu_2\mu_2' - 4\mu_1\mu_3'}{1+\mu_0'}, \\ \mu_5 &= \frac{\mu_5'(1-\mu_0) - 5\mu_4\mu_1' - 10\mu_3\mu_2' - 10\mu_2\mu_3' - 5\mu_1\mu_4'}{1+\mu_0'}, \\ \mu_6 &= \frac{\mu_6'(1-\mu_0) - 6\mu_5\mu_1' - 15\mu_4\mu_2' - 20\mu_3\mu_3' - 15\mu_2\mu_4' - 6\mu_1\mu_5'}{1+\mu_0'}, \end{aligned} \quad (1.7.15)$$

Аналогичным образом могут быть получены зависимости, связывающие моменты импульсных функций разомкнутой и замкнутой ДСАУ при неединичной обратной связи.

Для последовательного соединения элементов зависимость между моментами импульсных переходных функций следующая:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \mu_0' \mu_0'', \\ \mu_1 &= \mu_0'' \mu_1' + \mu_1'' \mu_0', \\ \mu_2 &= \mu_0'' \mu_2' + 2\mu_1'' \mu_1' + \mu_2'' \mu_0', \end{aligned} \quad (1.7.16)$$

где

$$\mu_m = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) n^m, \quad \mu_m' = \sum_{n=0}^{\infty} k_1(n) n^m, \quad \mu_m'' = \sum_{n=0}^{\infty} k_2(n) n^m.$$

Глава II

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, ЗАДАННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИ

§ 2.1. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Анализ ДСАУ, на которые действуют случайные сигналы, сводится к определению корреляционной функции и спектральной плотности выходного сигнала. Для таких ДСАУ с постоянными параметрами имеем

$$R_x(iT, \sigma_1 T, \sigma_2 T) = \sum_{m_1=0}^{\infty} k(m_1 T + \sigma_1 T) \sum_{m_2=0}^{\infty} k(m_2 T + \sigma_2 T) \times \\ \times R_y(iT - m_2 T + m_1 T), \quad (2.1.1)$$

где $k(mT + \sigma T)$ — импульсная переходная функция исследуемой ДСАУ,

$R_y(iT - m_2 T + m_1 T)$ — корреляционная функция входной величины.

$$y(iT) = f(iT) + g(iT).$$

$f(iT)$ — полезный входной дискретный сигнал,

$g(iT)$ — помеха, квантованная по времени с периодом T , равным периоду полезного сигнала; $M_g(iT) = 0$ — стационарная случайная функция с нулевым математическим ожиданием; $R_x(iT, \sigma_1 T, \sigma_2 T)$ — корреляционная функция выходного сигнала, σ_1 и σ_2 для стационарного выходного сигнала, характеризуемого формулой (2.1.1.), фиксированы.

Двойное суммирование в выражении (2.1.1) вносит значительные трудности в определение статистических характеристик реакции ДСАУ непосредственно из этого уравнения. Применим для решения поставленной выше задачи спектральный метод моментов [25].

Выбрав ортогональный дискретный базис $\varphi_i(mT + \sigma T)$, им-

пульсную переходную функцию ДСАУ можно представить в виде

$$k(mT + \sigma T) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(mT + \sigma T).$$

Обозначив $mT + \sigma T = n$, получим

$$k(n) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(n), \quad n > 0. \quad (2.1.2)$$

Для автокорреляционной функции выходного сигнала разложение по многочленам $\varphi_i(mT + \sigma T)$ имеет вид

$$\begin{aligned} R_x(l) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \varphi_j(l), \quad l > 0, \\ R_x(l) &= \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(-l), \quad l < 0. \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

Введем в рассмотрение эквивалентную ДСАУ с передаточной функцией

$$W(q) = W_1(q)W_2(-q)$$

где $W_1(q)$ — передаточная функция импульсного формирующего фильтра,

$W_2(q)$ — передаточная функция рассматриваемой ДСАУ.

Тогда выражение (2.1.1) в комплексной области принимает вид

$$R_x(q) = W(q)W(-q)$$

или с учетом формул (2.1.2) и (2.1.3).

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(q) + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \varphi_j(-q) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_i c_k \varphi_i(q) \varphi_i(-q). \quad (2.1.4)$$

Применяя к выражению (2.1.4) дискретный аналог равенства Парсеваля после умножения левой и правой части на $\varphi_i(q)$, будем иметь

$$\begin{aligned} a_j &= \sum_{l, k} c_l c_k \bar{c}_{jk}^{-l}, \\ \bar{c}_{jk}^{-l} &= \frac{1}{2\pi j} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \varphi_j(q) \varphi_i(-q) \varphi_k(q). \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Выражение (2.1.5) определяет обобщенные спектры корреляционной функции выходного сигнала (а следовательно, и корреляционную функцию), которые являются важной характеристикой при исследовании системы.

Для дискретного сигнала на выходе спектральная плотность

$y_{pq}(n-m)$ — элементы матрицы входных сигналов,
 q — номер входного сигнала.

Для того, чтобы система (2.1.9) была определена, необходимо, чтобы число уравнений было равно числу выходных сигналов. Выходной сигнал объекта равен сумме составляющих от действия каждого входного сигнала $y_{pq}(n)$:

$$x_p(n) = \sum_{q=1}^r x_{pq}(n),$$

$$x_{pq}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k_q(m) y_{pq}(n-m). \quad (2.1.10)$$

Автокорреляционная функция выходного сигнала определяется выражением

$$R_{x_p x_p}(n) = \sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N \sum_{m_1=0}^{\infty} k_u(m_1) \times$$

$$\times \sum_{m_2=0}^{\infty} k_v(m_2) R_{y_{pqu} y_{pqv}}(m-m_2+m_1),$$

$$R_{y_{pqu} y_{pqv}}(m) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=n_0}^{n_0+N} [x_{pu}(n) - m_{x_{pu}}] \times$$

$$\times [x_{pv}(n+m) - m_{x_{pv}}]. \quad (2.1.11)$$

Используя, как и выше, идею формирующихся фильтров для стационарного входного сигнала и дискретное преобразование Лапласа, получим

$$\hat{R}_{x_p x_p}(q) = \sum_{u=1}^N \sum_{v=1}^N W_{pqu}(-q) W_{pqv}(q),$$

$$W_{qj}(q) = D \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} k_{pqj}(m) k'_{pqj}(n-m) \right\}. \quad (2.1.12)$$

Представим в виде разложений по ортогональному дискретному базису следующие величины:

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_{pqj}(m) k'_{pqj}(n-m) = \sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{pq\gamma} \varphi_{\gamma}(n), \quad n > 0,$$

$$R_{x_p x_p}(n) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{pi} \varphi_i(n), \quad n > 0,$$

$$R_{x_p x_p}(n) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{pi} \varphi_i(-m), \quad m < 0. \quad (2.1.13)$$

Тогда выражение (2.1.12) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} b_{pi} \Phi_i(q) + \sum_{i=1}^{\infty} b_{pi} \Phi_i(-q) = \\ & = \sum_{g=1}^N \left[\sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{p q \gamma}^g \Phi_{\gamma}(q) \right] \sum_{g=1}^N \left[\sum_{\gamma=1}^{\infty} c_{p q \gamma}^g \varphi_{\gamma}(-q) \right]. \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

Обозначив $\tilde{c}_{p q \gamma} = \sum_{g=1}^N c_{p q \gamma}^g$, $\gamma = 1, 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^{\infty} b_{pi} \Phi_i(q) + \sum_{i=1}^{\infty} b_{pi} \Phi_i(-q) = \\ & = \sum_{\gamma=1}^N \sum_{g=1}^N \tilde{c}_{p q \gamma} \tilde{c}_{p q g} \Phi_{\gamma}(q) \Phi_g(q). \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

Аналогично методике, изложенной для $r = l = 1$, получим выражение ДОС автокорреляционной функции выходного сигнала

$$\begin{aligned} b_{pi} &= \sum_{\gamma=1}^N \sum_{g=1}^N \tilde{c}_{p q \gamma} \tilde{c}_{p q g} \bar{c}_{i \gamma}^g, \\ \bar{c}_{i \gamma}^g &= \frac{1}{2\pi j} \int_{c_0 - j\infty}^{c_0 + j\infty} \Phi_i(q) \Phi_{\gamma}(q) \Phi_g(-q). \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

Учитывая, что $\bar{c}_{i \gamma}^g = 0$ при i и (или) $g > \gamma$, выражение (2.1.16) можно использовать для определения автокорреляционной функции $x_p(n)$ ДСАУ в установленном режиме.

Чрезвычайно трудной является задача определения функций распределения на выходе указанного класса систем, если известными являются соответствующий закон распределения на входе и динамические характеристики исследуемой системы. Этот вопрос просто решается только для нормальных случайных функций, поскольку многомерный закон распределения нормального случайного процесса полностью определяется моментами не выше второго порядка [107].

Один из методов определения произвольного закона распределения на выходе линейной ДСАУ состоит в следующем. Произвольный, то есть отличный от нормального, многомерный закон распределения представляется в виде многомерного дискретного ортогонального ряда, основанного на нормальном законе распределения. В качестве базиса обычно выбираются дискретные орто-

гональные функции Эрмита. Известно, что для определения коэффициентов разложения необходимо знать моменты высокого порядка исследуемого случайного процесса.

Рассмотрим вопрос определения моментов высокого порядка (МВП) выходных сигналов ДСАУ.

Выражение для момента p -го порядка имеет вид [95]

$$\begin{aligned} \mu_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) &= M \{x_l(n_1) x_l(n_2) \dots x_l(n_p)\} = \\ &= \sum_{n_1=-\infty}^{\infty} \sum_{n_2=-\infty}^{\infty} \dots \sum_{n_p=-\infty}^{\infty} f(x_{l_1}, n_1, x_{l_2}, n_2, \dots, x_{l_p}, n_p) x_{l_1} x_{l_2} \dots x_{l_p}. \end{aligned} \quad (2.1.17)$$

Для центрального момента p -го порядка получим

$$\begin{aligned} \beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) &= M \{[x_l(n_1) - \mu_{lx_l}(n_1)] \dots [x_l(n_p) - \mu_{lx_l}(n_p)]\} = \\ &= M \{\overset{\circ}{x}_l(n_1) \dots \overset{\circ}{x}_l(n_p)\}, \end{aligned} \quad (2.1.18)$$

где $\overset{\circ}{x}_l(n)$ — центрированная случайная функция.

Согласно дискретному аналогу свертки

$$\overset{\circ}{x}_l(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k_r(n-m) \overset{\circ}{y}_l(m)$$

преобразуем выражение (2.1.18). Получим

$$\begin{aligned} &M \{x_l(n_1) x_l(n_2) \dots \overset{\circ}{x}_l(n_p)\} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_r(n_1-m_1) k_r(n_2-m_2) \dots k_r(n_p-m_p) \times \\ &\quad \times M \{\overset{\circ}{y}_l(m_1) \overset{\circ}{y}_l(m_2) \dots \overset{\circ}{y}_l(m_p)\} = \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \sum_{m_2=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_r(n_1-m_1) k_r(n_2-m_2) \dots k_r(n_p-m_p) \times \\ &\quad \times \beta_{py}(n_1, \dots, n_p). \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

Основные трудности вычисления моментов $\beta_{px}(n_1, n_2, \dots, n_p)$ по формуле (2.1.19) связаны с определением величины p -го момента r -го входного сигнала $\beta_{py}(n_1, n_2, \dots, n_p)$.

Применим для определения $\beta_{py}(n_1, n_2, \dots, n_p)$ численно-аналитический метод, основанный на понятии дискретных обобщенных спектров.

Согласно системе разностных уравнений (2.1.7) для моментов времени n_1, n_2, \dots, n_p получим

$$\begin{aligned} &\sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N \dots \sum_{k_p=0}^N a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_p} \Delta^{k_1} \overset{\circ}{x}_l(n_1) \Delta^{k_2} \overset{\circ}{x}_l(n_2) \dots \Delta^{k_p} \overset{\circ}{x}_l(n_p) = \\ &= \sum_{i_1=0}^M \sum_{i_2=0}^M \dots \sum_{i_p=0}^M b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_p} \Delta^{i_1} \overset{\circ}{y}_l(n_1) \Delta^{i_2} \times \end{aligned}$$

$$\times \overset{\circ}{y}_2(n_2) \dots \Delta^r \overset{\circ}{y}_r(n_p). \quad (2.1.20)$$

Осредняя обе части равенства (2.1.20) по совокупности и меняя порядок осреднения и взятие разностей, имеем

$$\sum_{k_1=0}^N \sum_{k_2=0}^N \dots \sum_{k_p=0}^N a_{k_1} a_{k_2} \dots a_{k_p} \Delta^{k_1} \beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) \Delta^{k_2} \beta_{px_l}(n_1, \dots, n_p) \times \\ \times \dots \times \Delta^{k_p} \beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) = \sum_{j_1=0}^M \sum_{j_2=0}^M \dots \sum_{j_p=0}^M b_{j_1} b_{j_2} \dots b_{j_p} \Delta^{j_1} \beta_{py} \times \\ \times (n_1, \dots, n_p) \Delta^{j_2} \beta_{py}(n_1, \dots, n_p) \dots \Delta^{j_p} \beta_{py}(n_1, n_2, \dots, n_p). \quad (2.1.21)$$

Используя многомерное дискретное преобразование Лапласа (1.4.3) и теорему о взятии K -ой разности в области оригиналов, получим

$$B_{px_l}(q_1, q_2, \dots, q_p) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} \beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) e^{-qn_1} \dots e^{-qn_p}, \\ B_{py}(q_1, q_2, \dots, q_p) = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} \beta_{py}(n_1, n_2, \dots, n_p) e^{-qn_1} \dots e^{-qn_p}, \\ D\{\Delta^k \beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) \dots \Delta^k \beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p)\} = \\ = (e^q - 1)^{k_1} \dots (e^q - 1)^{k_p} B_{px_l}(q_1, q_2, \dots, q_p). \quad (2.1.22)$$

С учетом зависимостей (2.1.22) и (1.4.3) преобразуем выражение (2.1.21) в области изображений к виду

$$B_{px_l}(q_1, q_2, \dots, q_p) = \frac{\sum_{j_1=0}^M \dots \sum_{j_p=0}^M b_{j_1} \dots b_{j_p} \prod_{r=1}^p (e^q - 1)^{j_r}}{\sum_{k_1=0}^N \dots \sum_{k_p=0}^N a_{k_1} \dots a_{k_p} \prod_{\tau=0}^p (e^q - 1)^{k_\tau}} \times \\ \times B_{py}(q_1, q_2, \dots, q_p). \quad (2.1.23)$$

Если многомерная функция $\beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) \in \bar{L}^2$, то есть

$$\sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} |\beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p)|^2 < \infty,$$

то, применяя дискретное спектральное преобразование (1.1.62), искомую функцию можно представить в виде разложения по дискретной ортогональной системе элементов

$$\beta_{px_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) = \sum_{i_1=1}^{\infty} \dots \sum_{i_p=1}^{\infty} c_{i_1 i_2 \dots i_p} \Phi_{i_1}(n_1) \times \\ \times \Phi_{i_2}(n_2) \dots \Phi_{i_p}(n_p), \quad (2.1.24)$$

где

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \dots \sum_{n_p=0}^{\infty} \beta_{p x_l}(n_1, n_2, \dots, n_p) \varphi_{i_1}(n_1) \times \\ \times \varphi_{i_2}(n_2) \dots \varphi_{i_p}(n_p). \quad (2.1.25)$$

Выбирая конкретный ортогональный дискретный базис и учитывая представления (1.1.61), дискретный обобщенный спектр p -го момента для l -го выходного сигнала стационарной ДСАУ определяется следующей зависимостью:

$$c_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} \alpha_{i_1 m_1} \alpha_{i_2 m_2} \dots \alpha_{i_p m_p} A B_{p y}(q_1, q_2, \dots, q_p) \left. \begin{array}{l} q_1=0, \\ \dots, \\ q_p=0 \end{array} \right| \quad (2.1.26)$$

$$A = \frac{\sum_{i_1=0}^M \dots \sum_{i_p=0}^M b_{i_1} \dots b_{i_p} \prod_{r=1}^p (e^q - 1)^{j_r}}{\sum_{k_1=0}^N \dots \sum_{k_p=0}^N a_{k_1} \dots a_{k_p} \prod_{\tau=1}^p (e^q - 1)^{k_{\tau}}}. \quad (2.1.27)$$

Алгоритм (2.1.26) хорошо приспособлен для реализации на цифровых вычислительных машинах.

§ 2.2. АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ СЛУЧАЙНЫХ ОШИБОК СТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, РАБОТАЮЩИХ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

При поступлении на вход ДСАУ стационарных случайных процессов представляет интерес метод вычисления случайных ошибок в установившемся режиме ее работы.

Назовем дискретной ортогональной спектральной характеристикой (ДОСХ) ДСАУ совокупность коэффициентов разложения $\{c_k\}$ по ортогональному дискретному базису ее импульсной переходной функции. На основании этого понятия можно построить метод анализа ДСАУ, отличающийся эффективностью и удобством для алгоритмизации вычисления случайных ошибок сложных динамических ДСАУ с использованием ЦВМ.

Пусть на вход ДСАУ поступает сигнал

$$y(n) = f(n) + \varphi(n),$$

где $f(n)$ — полезный стационарный случайный сигнал,

$\varphi(n)$ — помеха, стационарная случайная функция дискретных моментов времени,

$f(n)$ и $\varphi(n)$ — приложены к одной точке ДСАУ.

Допустим, что

$$S_{f\varphi}(\omega) = S_{\varphi f}(\omega) = 0.$$

Выражения для спектральных плотностей полезного входного сигнала и помехи через передаточные функции формирующих фильтров имеют вид

$$\begin{aligned} S_{ff}(\omega) &= S_{fo} |W_f(j\omega)|^2, \\ S_{\varphi\varphi}(\omega) &= S_{\varphi o} |W_\varphi(j\omega)|^2. \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Среднеквадратическая ошибка определяется выражением

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{S_{fo}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_f(j\omega)|^2 |W_s(j\omega)|^2 d\omega + \\ &+ \frac{S_{\varphi o}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\varphi(j\omega)|^2 |W(j\omega)|^2 d\omega \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

или в области времени

$$\sigma^2 = \frac{S_{fo}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_1^2(n) + \frac{S_{\varphi o}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_2^2(n), \quad (2.2.3)$$

где

$$\begin{aligned} k_1(n) &= D^{-1} \{W_f(q) W_s(q)\}, \\ k_2(n) &= D^{-1} \{W_\varphi(q) W(q)\}. \end{aligned}$$

Представим импульсные переходные функции рассматриваемых ДСАУ

$$k_1(n) \text{ и } k_2(n) \quad (k_1(n) \in \bar{L}^2 \text{ и } k_2(n) \in \bar{L}^2)$$

в виде конечного числа членов ортогонального спектрального преобразования по выбранному дискретному базису.

Получим

$$\begin{aligned} k_1(n) &= \sum_{k=0}^l c_k \varphi_k(n), \\ k_2(n) &= \sum_{k=0}^l c_k' \varphi_k(n), \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

где ДОСХ $\{c_k\}$ определяются производными функции $W_f(q) \times W_s(q)$, а $\{c_k'\}$ — производными функции $W_\varphi(q) W(q)$.

С учетом разложений (2.2.4) из выражения (2.2.3) имеем

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{S_{fo}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^l c_k \varphi_k(n) \right|^2 + \frac{S_{\varphi o}}{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \left| \sum_{k=0}^l c_k' \varphi_k(n) \right|^2 = \\ &= \frac{S_{fo}}{2\pi} \sum_{k=0}^l c_k^2 + \frac{S_{\varphi o}}{2\pi} \sum_{k=0}^l (c_k')^2. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Алгоритм (2.2.5) дает возможность вычислять значение σ^2 , когда применение классических методов становится громоздким. Применение дискретного обобщенного спектра во многих практических случаях приводит к упрощению задачи, к уменьшению объема вычислительных работ.

§ 2.3. ПРИМЕНЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ОБОБЩЕННЫХ СПЕКТРОВ ДЛЯ АНАЛИЗА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

При прохождении через нелинейные ДСАУ дискретного случайного сигнала связь корреляционных функций входного и выходного сигналов может быть представлена в виде

$$\begin{aligned}
 R_x(n'T, n''T) = & \sum_{p_1=0}^l \sum_{m_1'=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{p_1}'=0}^{\infty} k_{p_1}(n_1'T + i_1'T, n_2'T + \\
 & + i_2'T, \dots, n_{p_1}'T + i_{p_1}'T) \cdot \sum_{p_2=0}^l \sum_{m_1''=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{p_2}''=0}^{\infty} k_{p_2}(n_1''T + i_1''T, n_2''T + \\
 & + i_2''T, \dots, n_{p_2}''T + i_{p_2}''T) R_y(n'T, n''T, i'T, i''T), \quad (2.3.1) \\
 & m = nT + iT,
 \end{aligned}$$

где $R_x(nT)$ и $R_y(nT)$ — автокорреляционные функции выходной и входной величин соответственно.

Задача анализа случайного дискретного процесса в нелинейной ДСАУ состоит в определении статистических характеристик выходного дискретного сигнала $R_x(nT)$ и $S_x(\omega)$, связанных между собой двусторонним дискретным преобразованием Лапласа

$$S_x(\omega) = T \sum_{t=-\infty}^{\infty} R_x(nT) e^{-j\omega T t}.$$

Поскольку непосредственное решение уравнения (2.3.1) во временной области представляет большие трудности, рассмотрим метод определения автокорреляционной функции и спектральной плотности выходного сигнала, основанный на применении дискретных обобщенных спектров [28].

Так как постановка задачи предполагает известными динамические характеристики нелинейной ДСАУ, то используя многочлены $\varphi(n)$, которые удовлетворяют равенству

$$\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_p(n) \varphi_q(n) \delta(n) = \begin{cases} 0, & p \neq q, \\ 1, & p = q, \end{cases}$$

где $\{\varphi_k(n)\}$ — дискретный ортогональный базис обозначения (2.3.1), многомерное сепарабельное ядро рассматриваемой нелинейной ДСАУ можно представить в виде разложения

$$k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) = \sum_{k_p=0}^M c_{k_p} \varphi_{k_p}(m_1, m_2, \dots, m_p), \quad (2.3.2)$$

в котором

$$\varphi(m_1, m_2, \dots, m_p) = \varphi(m_1) \varphi(m_2) \dots \varphi(m_p)$$

— многомерная ортогональная сепарабельная функция дискретного аргумента.

Таким образом, выражение (2.3.1) приводится к форме

$$\begin{aligned} R_x(n'T, n''T) &= \sum_{p_1=0}^l \sum_{p_2=0}^l \sum_{m'_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m'_{p_1}=0}^{\infty} \sum_{m''_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m''_{p_2}=0}^{\infty} \sum_{k'_{p_1}=0}^M \sum_{k''_{p_2}=0}^M c_{k'_{p_1}} \times \\ &\times c_{k''_{p_2}} \cdot \varphi_{k'_{p_1}}(m'_1, m'_2, \dots, m'_{p_1}) \varphi_{k''_{p_2}}(m''_1, m''_2, \dots, m''_{p_2}) R_y(m', m'') = \\ &= \sum_{p_1=0}^l \sum_{p_2=0}^l \sum_{k'_{p_1}=0}^M \sum_{k''_{p_2}=0}^M c_{k'_{p_1}} c_{k''_{p_2}} \cdot \sum_{m'_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m'_{p_1}=0}^{\infty} \sum_{m''_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m''_{p_2}=0}^{\infty} \times \\ &\times \varphi_{k'_{p_1}}(m'_1, m'_2, \dots, m'_{p_1}) \varphi_{k''_{p_2}}(m''_1, m''_2, \dots, m''_{p_2}) R_y(m', m''). \quad (2.3.3) \end{aligned}$$

Обозначив в последнем равенстве

$$\begin{aligned} A_{p_2 p_1} &= \sum_{m'_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m'_{p_1}=0}^{\infty} \sum_{m''_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m''_{p_2}=0}^{\infty} \varphi_{k'_{p_1}}(m'_1, m'_2, \dots, m'_{p_1}) \times \\ &\times \varphi_{k''_{p_2}}(m''_1, m''_2, \dots, m''_{p_2}) R_y(m', m''), \quad (2.3.4) \end{aligned}$$

окончательно получим

$$R_x(n'T, n''T) = \sum_{p_1=0}^l \sum_{p_2=0}^l \sum_{k'_{p_1}=0}^M \sum_{k''_{p_2}=0}^M c_{k'_{p_1}} c_{k''_{p_2}} A_{p_1 p_2}. \quad (2.3.5)$$

В последней формуле дискретная ортогональная спектральная характеристика (ДОСХ) нелинейной ДСАУ определяется равенством

$$\begin{aligned} c_{k_p} &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) \varphi_{k_p}(m_1, m_2, \dots, m_p) \times \\ &\times \delta(m_1) \delta(m_2) \dots \delta(m_p). \quad (2.3.6) \end{aligned}$$

Для конкретности задачи рассмотрим методику расчета автокорреляционной функции выходного сигнала, основанную на при-

менении дискретных экспоненциальных многочленов. Общее выражение для них имеет вид

$$\varphi_k(m) = \sum_{j=0}^i \alpha_{ji} e^{-jm}. \quad (2.3.7)$$

Подставляя выражение (2.3.7) в равенство (2.3.6), получим

$$\begin{aligned} c_{kp} &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) \sum_{j_1=0}^{i_1} \alpha_{j_1 i_1} e^{-j_1 m_1} \times \\ &\times \sum_{j_2=0}^{i_2} \alpha_{j_2 i_2} e^{-j_2 m_2} \cdots \sum_{j_p=0}^{i_p} \alpha_{j_p i_p} e^{-j_p m_p} \cdot e^{-c_1 m_1} e^{-c_2 m_2} \cdots e^{-c_p m_p} = \\ &= \sum_{j_1=0}^{i_1} \sum_{j_2=0}^{i_2} \cdots \sum_{j_p=0}^{i_p} \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \cdots \alpha_{j_p i_p} \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) \times \\ &\times e^{-(j_1+c_1)m_1} e^{-(j_2+c_2)m_2} \cdots e^{-(j_p+c_p)m_p}. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Преобразуя по Лапласу разностное уравнение, описывающее рассматриваемую ДСАУ, аналогично методике, изложенной выше, определим функцию $W_p(q_1, q_2, \dots, q_p)$. Согласно (1.4.3) имеем

$$\begin{aligned} W_p(q_1, q_2, \dots, q_p) &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \cdots \sum_{m_p=0}^{\infty} k_p(m_1, m_2, \dots, m_p) \times \\ &\times e^{-q_1 m_1} e^{-q_2 m_2} \cdots e^{-q_p m_p}. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

С учетом равенства (2.3.9) выражение (2.3.8) приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned} c_{kp} &= \sum_{j_1=0}^{i_1} \sum_{j_2=0}^{i_2} \cdots \sum_{j_p=0}^{i_p} \alpha_{j_1 i_1} \alpha_{j_2 i_2} \cdots \alpha_{j_p i_p} \times \\ &\times W_p(q_1, q_2, \dots, q_p) \Bigg|_{\substack{q_1=j_1+c_1 \\ q_2=j_2+c_2 \\ \vdots \\ q_p=j_p+c_p}} = \sum_{j_1=0}^{i_1} \sum_{j_2=0}^{i_2} \cdots \sum_{j_p=0}^{i_p} \alpha_{j_1 i_1} \times \\ &\times \alpha_{j_2 i_2} \cdots \alpha_{j_p i_p} \mu_{j_1 j_2 \dots j_p} \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

где $\mu_{j_1 j_2 \dots j_p}$ — обобщенный многомерный момент функции $k_p(m_1, m_2, \dots, m_p)$, определяемый формулой

$$\mu_{j_1 j_2 \dots j_p} = W_p \Bigg|_{\substack{q_1=j_1+c_1 \\ q_2=j_2+c_2 \\ \vdots \\ q_p=c_p+j_p}} \quad (2.3.11)$$

Таким образом, определение автокорреляционной функции выходного сигнала $R_x(n'T, n''T)$ сводится к следующему: по форму-

ле (2.3.11) определяется многомерный обобщенный момент порядка $(j_1 + j_2 + \dots + j_p)$, затем из выражения (2.3.10) находится ДОСХ нелинейной ДСАУ. Далее определяется множитель A_{p_1, p_2} по формуле (2.3.4) и строится функция $R_x(n'T, n''T)$.

Пусть на вход нелинейной ДСАУ действует сигнал вида

$$y(n) = m(n) + g(n),$$

где $m(n)$ — полезный входной сигнал,

$g(n)$ — помеха, стационарные случайные функции времени.

Среднеквадратическая ошибка (СКО) нелинейной ДСАУ определяется выражением

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}^2 &= \overline{[m(n) - x(n)]^2} = \\ &= \left[m(n) - \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_v=0}^{\infty} k_v(m_1, m_2, \dots, m_v) y(n-m_1) \dots y(n-m_v) \right]^2 = \\ &= \bar{m}^2 - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_v=0}^{\infty} k_v(m_1, m_2, \dots, m_v) \times \\ &\quad \overline{y(n-m_1) \dots y(n-m_v) m(n)} + \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_{v_2}=0}^{\infty} \times \\ &\quad \times \sum_{m'_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m'_{v_2}=0}^{\infty} k_{v_1}(m_1, m_2, \dots, m_{v_1}) \cdot k_{v_2}(m_1, m_2, \dots, m_{v_2}) \times \\ &\quad \overline{y(n-m_1) \dots y(n-m_{v_1}) y(n-m'_{v_1}) \dots y(n-m'_{v_2})}. \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Обозначим

$$\alpha_{ym}^v(m_1, m_2, \dots, m_v) = \overline{y(n-m_1) \dots y(n-m_v) m(n)}, \quad (2.3.13)$$

$$\begin{aligned} \alpha_{yy}^{2v}(m_1, m_2, \dots, m_{v_1}, m'_{v_1}, \dots, m'_{v_2}) = \\ = \overline{y(n-m_1) \dots y(n-m_{v_1}) y(n-m'_{v_1}) \dots y(n-m'_{v_2})} \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

— моменты высокого порядка.

Если $y(n)$ и $m(n)$ — нормальные процессы с нулевым средним, то высшие моменты представляются следующими зависимостями через моменты второго порядка:

$$\alpha_{yy}^{2v}(n_1 n_2 \dots n_v) = \overline{y(n_1) \dots y(n_v)} = \sum \Pi R(n_i, n_j),$$

где $R(n_i, n_j) = \alpha_{yy}^2(m_i, m_j)$, а запись $\sum \Pi$ означает, что последовательность (n_1, n_2, \dots, n_p) разбивается на произвольные пары, произведение Π берется по всем различным парам этого разбиения, а сумма \sum берется по всем разбиениям. Нечетные моменты высокого порядка равны нулю.

$$G_{i_1 i_2 \dots i_v} = \sum_{m_1'=0}^{\infty} \sum_{m_2'=0}^{\infty} \dots \sum_{m_v'=0}^{\infty} \varphi_{i_1'}(m_1) \varphi_{i_2'}(m_2) \dots \varphi_{i_v'}(m_v') \times$$

$$\times y(n-m_1) \dots y(n-m_{v_1}) y(n-m_1') \dots y(n-m_{v_2}') \quad (2.3.19)$$

Таким образом, формула (2.3.17) может непосредственно использоваться для вычисления СКО дискретной замкнутой нелинейной системы.

Последовательность расчета следующая:

1. Находятся передаточные функции элементов нелинейной системы.

2. Определяется передаточная функция замкнутой нелинейной системы.

3. Спектральным методом моментов вычисляются коэффициенты дискретного ортогонального разложения многомерных ядер нелинейной системы $\{c_{i_1 i_2 \dots i_k}\}$ по формуле (2.3.10) и коэффициенты дискретного ортогонального разложения моментов высокого порядка $\{Q_{i_1 i_2 \dots i_v}\}$ и $\{G_{i_1 i_2 \dots i_v}'\}$ по формулам (2.3.18) и (2.3.19).

4. Рассчитывается значение СКО по формуле (2.3.17).

В заключение рассмотрим метод расчета ошибки системы с учетом случайного изменения ее параметров.

Дискретная замкнутая нелинейная система характеризуется многомерными передаточными функциями вида

$$W_1(q_1) = F_1(q_1, p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon),$$

$$W_2(q_1, q_2) = F_2(q_1, q_2, p_1, \dots, p_\varepsilon),$$

$$\dots$$

$$W_v(q_1, q_2, \dots, q_v) = F_v(q_1, q_2, \dots, q_v, p_1, \dots, p_\varepsilon),$$

где $p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon$ — параметры системы.

Воздействие на систему различных факторов, таких как температура, давление, влажность, радиация и других, а также технологический разброс параметров приводят к изменению эталонных значений параметров. В результате действия указанных выше факторов параметры нелинейной системы получают приращения, то есть

$$p_1 = p_{10} + \tilde{p}_1,$$

$$p_2 = p_{20} + \tilde{p}_2,$$

$$\dots$$

$$p_\varepsilon = p_{\varepsilon 0} + \tilde{p}_\varepsilon.$$

Случайные разбросы параметров оказывают существенное влияние на точность ее работы. Поэтому при анализе ДСАУ необходимо учитывать указанные выше косвенные возмущения. В рассматриваемом случае необходимо учитывать работу целого клас-

са однотипных систем, а затем проводить осреднение по совокупности экспериментальных данных, отражающих характер разброса случайных параметров и их статистических характеристик.

Итак, пусть на систему действуют прямые воздействия, а именно $y(n) = m(n) + g(n)$. Кроме того, исследуемая ДСАУ подвержена влиянию косвенных возмущений. Параметры системы $p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon$ имеют случайный разброс. В результате обработки экспериментальных данных определяем дифференциальный закон распределения системы случайных величин

$$f_p(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon).$$

Запишем выражение для СКО в виде

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2} = \overline{m^2} - 2 \sum_{v=1}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \sum_{i_2=0}^{\infty} \dots \sum_{i_v=0}^{\infty} c_{i_1 i_2 \dots i_v}(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon) Q_{i_1 i_2 \dots i_v} + \\ + \sum_{v_1=1}^{\infty} \sum_{v_2=1}^{\infty} \sum_{i_1=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{v_1}=0}^{\infty} \sum_{i_1'=0}^{\infty} \dots \sum_{i_{v_2}'=0}^{\infty} c_{i_1 i_2 \dots i_v}(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon) \times \\ \times c_{i_1' i_2' \dots i_{v_2}'}(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon) G_{i_1 i_2 \dots i_{v_2}}, \end{aligned}$$

где $c_{i_1 i_2 \dots i_v}(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon)$ — члены, определяющие динамические свойства анализируемой системы,

$Q = G$ — элементы, имеющие постоянные значения при данных входных воздействиях, их можно вычислить заранее.

Таким образом, для СКО имеем

$$\overline{\varepsilon^2} = E(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon, Q, G),$$

то есть получено выражение для дисперсии ошибки с учетом только входных возмущений, но без учета случайных изменений параметров.

Пусть параметры $p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon$ отличаются от эталонных. В этом случае ошибка системы с учетом случайного изменения ее параметров определяется формулой

$$\begin{aligned} D = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} E(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon, Q, G) \times \\ \times f_p(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon) dp_1 dp_2 \dots dp_\varepsilon. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Формула (2.3.20) значительно упрощается, если случайные параметры $p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon$ независимы. В этом случае имеем

$$f_p(p_1, p_2, \dots, p_\varepsilon) = \prod_{i=1}^{\varepsilon} F_i(p_i).$$

**§ 2.4. РАСЧЕТ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК
ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ**

Для нестационарных ДСАУ в случае, когда на входе действует стационарный случайный сигнал, корреляционная функция на выходе имеет вид [22]

$$R_{xx}(i, \sigma, l) = \sum_{\nu=-\infty}^l k(i, \sigma, \nu) \sum_{\mu=-\infty}^l k(l, \sigma, \mu) R_{yy}(i, l), \quad (2.4.1)$$

где

$$R_{xx}(i, \sigma, l) = \| R_{xxj}(i, \sigma, l) \|', \quad R_{yy}(i, l) = \| R_{yyj}(i, l) \|'$$

— автокорреляционные матрицы-столбцы выходных и входных сигналов соответственно,

$$k(n, \sigma, r) = \| k_{je}(n, \sigma, r) \|_{p \times q}$$

— импульсная переходная матрица ДСАУ с p входами и q выходами.

Матрица дисперсии выходных сигналов определяется зависимостью

$$D_x(n, \sigma) = R_{xx}(n, \sigma) = \sum_{\nu=-\infty}^l k(\sigma, n - \nu) \sum_{\mu=-\infty}^l k(\sigma, n - \mu) R_{yy}(\nu - \mu).$$

Для решения задачи статистического анализа нестационарных ДСАУ применим спектральный метод представления временных матриц. Под дискретной ортогональной спектральной характеристикой (ДОСХ) матрицы сигналов будем понимать матрицу ДОСХ ее элементов.

Представим импульсную переходную матрицу в виде разложения

$$k(n, \sigma, r) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(n) \varphi_i(r)$$

или в реальных расчетах

$$k(n, \sigma, r) = \sum_{i=0}^s c_i(n) \varphi_i(r), \quad (2.4.2)$$

где $c_i(n)$ — матрица ДОСХ импульсной переходной матрицы, $\varphi_i(r)$ — многомерный дискретный ортогональный базис.

Число членов разложения (2.4.2) s выбирается в зависимости от статистической структуры исследуемой системы, выбранного ортогонального дискретного базиса и заданной точности решения задачи.

С учетом выражения (2.4.2) дискретный аналог свертки для входной и выходной матриц можно преобразовать следующим образом:

$$x(n, \sigma, r) = \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{k=0}^s c_k(n) \varphi_k(r) y(n-r, \sigma) = \\ = \sum_{k=0}^s c_k(n) \sum_{r=0}^{\infty} \varphi_k(r) y(n-r, \sigma) = \sum_{k=0}^s c_k(n) y_k(n, \sigma), \quad (2.4.3)$$

где $x(n, \sigma, r)$ и $y(n-r, \sigma)$ — матрицы выходных и входных величин соответственно.

Для автокорреляционной матрицы выходного сигнала с учетом зависимости (2.4.3) получим

$$R_{xx}(i, \sigma, l) = \sum_{v=-\infty}^i \sum_{g_1=0}^s c_{g_1}(i) \varphi_{g_1}(v) \times \\ \times \sum_{\mu=-\infty}^l \sum_{g_2=0}^s c_{g_2}(l) \varphi_{g_2}(\mu) R_{yy}(v, \mu) = \\ = \sum_{g_1=0}^s c_{g_1}(i) \sum_{g_2=0}^s c_{g_2}(l) \sum_{v=-\infty}^i \varphi_{g_1}(v) \sum_{\mu=-\infty}^l \varphi_{g_2}(\mu) R_{yy}(v, \mu) = \\ = \sum_{g_1=0}^s \sum_{g_2=0}^s c_{g_1}(i) c_{g_2}(l) R. \quad (2.4.4)$$

Дисперсия выходной матрицы определяется формулой

$$D_x(n, \sigma) = \sum_{g_1=0}^s \sum_{g_2=0}^s c_{g_1}(n) c_{g_2}(n) D, \\ D = \sum_{v=-\infty}^i \varphi_{g_1}(v) \sum_{\mu=-\infty}^l \varphi_{g_2}(\mu) R(v-\mu).$$

Для стационарного дискретного входного сигнала имеем

$$R = \sum_{v=-\infty}^i \varphi_{g_1}(v) \sum_{\mu=-\infty}^l \varphi_{g_2}(\mu) R_{yy}(l-i-\mu+v). \quad (2.4.5)$$

Используя дискретное преобразование Лапласа для статистических характеристик дискретного воздействия, выражение (2.4.5) можно преобразовать к виду

$$R = \sum_{v=-\infty}^i \sum_{\mu=-\infty}^l \varphi_{g_1}(v) \varphi_{g_2}(\mu) \frac{1}{2\pi j} \int S_{yy}(\omega) e^{j\omega T(n-\mu+v)} d\omega d\mu dv, \quad (2.4.6) \\ n = l - i - 1,$$

где $S_{yy}(\omega)$ — матрица спектральной плотности входного воздействия.

На основании формул (2.4.5) и (2.4.6) преобразуем выражение (2.4.4). Получим

$$R_{xx}(i, \sigma, l) = \sum_{g_1=0}^s \sum_{g_2=0}^s c_{g_1}(i) c_{g_2}(l) \frac{1}{2\pi j} \int \sum_{v=-\infty}^i \varphi_{g_1}(v) e^{j\omega T v} dv \times$$

$$\times \sum_{\mu=-\infty}^l \varphi_{g_2}(\nu) e^{j\omega T \mu} d\mu \cdot S_{yy}(\omega) e^{j\omega T n} d\omega = \sum_{g_1=0}^s \sum_{g_2=0}^s c_{g_1}(i) c_{g_2}(l) S,$$

где

$$S = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\nu=-\infty}^l \sum_{\nu=-\infty}^l \varphi_{g_1}(\nu) e^{j\omega T \nu} d\nu \sum_{\mu=-\infty}^l \varphi_{g_2}(\nu) e^{j\omega T \mu} d\mu S_{yy}(\omega) e^{j\omega T n} d\omega.$$

§ 2.5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИИ ДЛЯ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Случайные процессы в нестационарных ДСАУ могут быть описаны разностным уравнением вида

$$\begin{aligned} a_i(n) m_x(n+i) + a_{i-1}(n) m_x(n+i-1) + \dots + a_0(n) m_x(n) = \\ = b_r(n) m_{y_0}(n+r) + b_{r-1}(n) m_{y_0}(n+r-1) + \\ + \dots + b_0(n) m_{y_0}(n). \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Преобразуя уравнение (2.5.1) по Лапласу согласно методике, изложенной в § 1.2, получим

$$M_x(q) = \frac{Y(q)}{\sum_{\nu=0}^i \alpha_{\nu} e^{\nu q}} + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\pi}^{c+j\pi} G_2(q, \lambda) M_x(\lambda) d\lambda, \quad (2.5.2)$$

где

$$G_2(q, \lambda) = \frac{\sum_{\nu=0}^i B_{\nu}(q-\lambda)}{\sum_{\nu=0}^i \alpha_{\nu} e^{\nu q}}, \quad a_{l_1}(n) = \alpha_{l_1} + \beta_{l_1}(n).$$

Определение математического ожидания нестационарной ДСАУ сводится к решению интегрального уравнения (2.5.2).

Определение корреляционной функции выходного сигнала выполняется в два этапа. Вначале находится взаимная корреляционная функция $R_{xy}(n, m)$, а затем корреляционная функция $R_x(n, m)$.

Получим уравнение для определения взаимной корреляционной функции $R_{xy}(n, m)$. Вычитая из уравнения

$$\begin{aligned} a_i(n) x(n+i) + a_{i-1}(n) x(n+i-1) + \dots + a_0(n) x(n) = \\ = b_r(n) y_0(n+r) + b_{r-1}(n) y_0(n+r-1) + \dots + b_0(n) y_0(n) \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

уравнение (2.5.1) получим для центрированных функций

$$\begin{aligned} d_i(n) \Delta^i x_0(n) + \dots + d_0(n) x_0(n) = l_j(n) \Delta^j y_0(n) + \\ + \dots + l_0(n) y_0(n). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Заметим, что при $z_k(n) = \Delta^k x(n)$ и $z_l = \Delta^l x(n)$

$$R_{z_k z_l} = \Delta_n^k \Delta_m^l R_x(n, m). \quad (2.5.5)$$

Умножим обе части уравнения (2.5.4) на $y_0(m)$ и возьмем математическое ожидание от обеих частей уравнения. Учитывая выражение (2.5.5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^g d_i(n) \Delta_n^i R_{xy}(n, m) + \dots + d_0(n) R_{xy}(m, n) = \\ = l_j \Delta_n^j R_{yy_0}(n, m) + \dots + l_0(n) R_{yy_0}(n, m). \end{aligned} \quad (2.5.6)$$

Аналогичным образом можно получить

$$\begin{aligned} d_i(n) \Delta_n^i R_x(n, m) + \dots + d_0(n) R_x(n, m) = \\ = l_j(n) \Delta_n^j R_{yx}(n, m) + \dots + l_0(n) R_{yx}(n, m) \end{aligned} \quad (2.5.7)$$

Применяя изложенный в § 1.6 метод к операторным уравнениям, соответствующим разностным уравнениям (2.5.1), (2.5.6) и (2.5.7), получим решение задачи статистического анализа.

Рассмотрим решение поставленной задачи в случае, если коэффициенты уравнения (2.5.1), а следовательно, (2.5.6) и (2.5.7) являются детерминированными функциями времени и представляются в виде конечной суммы экспоненциальных функций

$$\begin{aligned} a_l(n) = \sum_{k=0}^g D_k^l e^{-kn}, \quad l=0, 1, 2, \dots, l, \\ b_l(n) = \sum_{k=0}^g E_k^l e^{-kn}, \quad l=0, 1, 2, \dots, j. \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

Полагаем, что математические ожидания $m_y(n)$ и $m_x(n)$ преобразуемы по Лапласу. Применим к обеим частям уравнения (2.5.1) дискретное преобразование Лапласа. Используя теорему об изображении разности и теорему смещения [114], получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^g D_k^i (e^{q+k} - 1)^i M_x(q+k) + \dots + \sum_{k=0}^g D_k^0 M_x(q+k) = \\ = \sum_{k=0}^{g_1} E_k^j (e^{g+k} - 1)^j M_y(q+k) + \dots + \sum_{k=0}^{g_1} D_k^0 M_y(q+k), \end{aligned} \quad (2.5.9)$$

где

$$M_x(q) = D\{m_x(n)\}, \quad M_y(q) = D\{m_y(n)\}.$$

Обозначив

$$\begin{aligned} r_h(q) = \sum_{l=0}^i D_k^l (e^{q+k} - 1)^l, \quad k=0, 1, \dots, g, \\ h_k(q) = \sum_{l=0}^j E_k^l (e^{q+k} - 1)^l, \quad k=0, 1, \dots, g_1, \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

преобразуем уравнение (2.5.9) к виду

$$r_g(q) M_x(q+g) + r_{g-1}(q) M_x(q+g-1) + \dots + r_0(q) M_x(q) - \Phi(q), \quad (2.5.11)$$

где $\Phi(q)$ представляет собой правую часть уравнения (2.5.9)

$$\Phi(q) = h_{g_1}(q) M_y(q+g_1) + \dots + h_0(q) M_y(q). \quad (2.5.12)$$

Математическое ожидание $M_y(n)$ задано, поэтому $\Phi(q)$ — известная функция.

Уравнение (2.5.11) можно решить методом последовательных приближений, при этом $M_x(q)$ находится в виде

$$M_x(q) = M_{x_0}(q) + M_{x_1}(q) + \dots + M_{x_k}(q) + \dots \quad (2.5.13)$$

Переходя в область времени методом, изложенным в § 2.4, получим

$$m_x(n) = m_{x_0}(n) + m_{x_1}(n) + \dots + m_{x_k}(n) + \dots \quad (2.5.14)$$

Определим корреляционную функцию выходного сигнала $R_x(n, m)$. Применяя дискретное преобразование Лапласа к обеим частям уравнения (2.5.7), получим

$$r_g(q) R_x(q+g, m) + \dots + r_0(q) R_x(q, m) = h_{g_1}(q) R_{y,x}(q+g_1, m) + \dots + h_0(q) R_{y,x}(q, m), \quad (2.5.15)$$

где коэффициенты $r_l(q)$ и $h_l(q)$ определяются равенствами (2.5.10).

Таким образом, имеем

$$\sum_{v=0}^g r_v(q) R_x(q+v, m) = \sum_{v=0}^{g_1} h_v(q) R_{y,x}(q+v, m). \quad (2.5.16)$$

Неизвестную взаимную корреляционную функцию можно определить, применив изложенную методику к разностному уравнению (2.5.6). Применение метода последовательных приближений к уравнению (2.5.16) даст решение поставленной задачи.

При этом нулевое приближение для соответствующих характеристик находится из условий

$$\begin{aligned} M_{x_0}(q) &= M_{x_0}(q+1) = \dots = M_{x_0}(q+g), \\ R_{x_0}(q) &= R_{x_0}(q+1) = \dots = R_{x_0}(q+g), \\ R_{xy_0}(q) &= R_{xy_0}(q+1) = \dots = R_{xy_0}(q+g). \end{aligned} \quad (2.5.17)$$

Тогда

$$\begin{aligned} M_{x_0}(q) &= \frac{\Phi(q)}{r_g(q) + r_{g-1}(q) + \dots + r_0(q)}, \\ R_{x_0}(q) &= \frac{\Phi(q, m)}{\sum_{v=0}^g r_v(q)}, \quad R_{xy_0}(q) = \frac{\Phi(q, m)}{\sum_{v=0}^g \sum_{l=0}^l L_{k_v}^l (e^{q+k} - 1)^l}. \end{aligned} \quad (2.5.18)$$

Последующие приближения можно найти из формул

$$M_{x, k+1}(q) = \frac{1}{r_0(q)} \left[\Phi(q) - \sum_{v=1}^g r_v(q) M_{x, k}(q+v) \right],$$

$$R_{x, k+1}(q) = \frac{1}{r_0(q)} \left[\Phi(q, m) - \sum_{\nu=1}^g r_\nu(q) R_{x, k}(q + \nu) \right],$$

$$R_{xy, k+1}(q) = \frac{1}{r_0(q)} \left[\Phi(q, m) - \sum_{\nu=1}^g r_\nu(q) R_{xy, k}(q + \nu) \right]. \quad (2.5.19)$$

Рассмотрим определение автокорреляционной функции $R_{xy}(n, m)$ выходного сигнала $x(n)$, когда коэффициенты уравнения (2.5.7) удовлетворяют условию

$$d_l(n) = \sum_{k=0}^g D_k^l n^k, \quad l=0, 1, \dots, i,$$

$$l_l(n) = \sum_{k=0}^{g_1} D_k^l n^k, \quad l=0, 1, \dots, j. \quad (2.5.20)$$

Учитывая условие (2.5.20), преобразуем уравнение (2.5.7) к виду

$$n^g \sum_{l=0}^i D_g^l \Delta_n^l R_{xy}(n, m) + \dots + n \sum_{l=0}^i D_1^l \Delta_n^l R_{xy}(n, m) +$$

$$+ \sum_{l=0}^i D_0^l \Delta_n^l R_{xy}(n, m) - n^{g_1} \sum_{l=0}^j E_{g_1}^l \Delta_n^l R_{yy}(n, m) + \dots +$$

$$+ \sum_{l=0}^j E_0^l \Delta_n^l R_{yy}(n, m). \quad (2.5.21)$$

Применим к обеим частям уравнения (2.5.21) дискретное преобразование Лапласа. Учитывая, что

$$D \left\{ n^k \sum_{l=0}^i \Delta_n^l R_{xy}(n, m) \right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} [P_k(q) R_{xy}(q, m)],$$

$$D \left\{ n^k \sum_{l=0}^j \Delta_n^l R_{yy}(n, m) \right\} = (-1)^k \frac{d^k}{dq^k} [t_k(q) R_{yy}(q, m)], \quad (2.5.22)$$

где

$$P_k(q) = \sum_{l=0}^i D_k^l (e^q - 1)^l, \quad k=0, 1, \dots, g,$$

$$t_k(q) = \sum_{l=0}^j E_k^l (e^q - 1)^l, \quad k=0, 1, \dots, g_1,$$

получим

$$(-1)^g \left[\frac{dP_g(q)}{dq^g} R_{xy}(q, m) + C_g^1 \frac{d^{g-1} P_g(q)}{dq^{g-1}} \cdot \frac{dR_{xy}(q, m)}{dq} + \dots + \right.$$

$$+ P_g(q) \frac{d^g R_{xy}(q, m)}{dq^g} + \dots + (-1)^k \left[\frac{d^k P_k(q)}{dq^k} R_{xy}(q, m) + \right.$$

$$\left. + C_k^1 \frac{d^{k-1} P_k(q)}{dq^{k-1}} \cdot \frac{dR_{xy}(q, m)}{dq} + \dots + P_k(q) \frac{d^k R_{xy}(q, m)}{dq^k} \right] + \dots -$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{dP_1(q)}{dq} R_{xy}(q, m) - P_1(q) \frac{dR_{xy}(q, m)}{dq} + P_0(q) R_{xy}(q, m) = \\
& = (-1)^{g_1} \left[\frac{d^{g_1} t_{g_1}(q)}{dq^{g_1}} R_{yy}(q, m) + C_{g_1} \frac{d^{g_1-1} t_{g_1-1}(q)}{dq^{g_1-1}} \cdot \frac{dR_{yy}(q, m)}{dq} + \right. \\
& \quad \left. + \dots + t_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} R_{yy}(q, m)}{dq^{g_1}} + \dots - \frac{dt_1(q)}{dq} \times \right. \\
& \quad \left. \times R_{yy}(q, m) - t_1(q) \frac{dR_{yy}(q, m)}{dq} + t_0(q) R_{yy}(q, m) \right]. \quad (2.5.23)
\end{aligned}$$

Уравнение (2.5.23) представим следующим образом:

$$\begin{aligned}
P_g(q) \frac{d^g R_{xy}(q, m)}{dq^g} + \dots + P_1(q) \frac{dR_{xy}(q, m)}{dq} + P_0(q) R_{xy}(q, m) = \\
= T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} R_{yy}(q, m)}{dq^{g_1}} + \dots + \\
+ T_1(q) \frac{dR_{yy}(q, m)}{dq} + T_0(q) R_{yy}(q, m), \quad (2.5.24)
\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
P_k(q) &= \sum_{l=k}^g (-1)^l C_l^{l-k} \frac{d^{l-k} P_l(q)}{dq^{l-k}}, \quad k=0, 1, \dots, g, \\
T_k(q) &= \sum_{l=k}^{g_1} (-1)^l C_l^{l-k} \frac{d^{l-k} t_l(q)}{dq^{l-k}}, \quad k=0, 1, \dots, g_1. \quad (2.5.25)
\end{aligned}$$

Обозначим правую часть уравнения (2.5.24)

$$T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} R_{yy}(q, m)}{dq^{g_1}} + \dots + T_0(q) R_{yy}(q, m) = V(q, m). \quad (2.5.26)$$

Определим, далее, корреляционную функцию $R_x(n, m)$. Коэффициенты уравнения (2.5.7), определяющего корреляционную функцию $R_x(n, m)$, удовлетворяют условию (2.5.20). Выполнив преобразования, аналогичные рассмотренным выше, получим следующее уравнение для изображения корреляционной функции $R_x(n, m)$:

$$P_g(q) \frac{d^g R_x(q, m)}{dq^g} + \dots + P_0(q) R_x(q, m) = V_1(q, m), \quad (2.5.27)$$

где

$$V_1(q, m) = T_{g_1}(q) \frac{d^{g_1} R_{yx}(q, m)}{dq^{g_1}} + \dots + T_0(q) R_{yx}(q, m). \quad (2.5.28)$$

Коэффициенты $P_k(q)$ и $T_k(q)$ определяются формулами (2.5.25). Таким образом, математическое ожидание и автокорреляционная функция находятся из решения следующих уравнений:

$$\sum_{v=0}^g E_v(q) \frac{d^v}{dq^v} M_x(q) = M_y(q),$$

$$\sum_{v=0}^g P_v(q) \frac{d^v}{dq^v} R_{xy}(q, m) = V(q, m),$$

$$\sum_{v=0}^g P_v(q) \frac{d^v}{dq^v} R_x(q, m) = V_1(q, m), \quad (2.5.29)$$

которые, как и выше, решаются методом последовательных приближений по формулам, аналогичным формулам (2.5.17), (2.5.18) и (2.5.19).

В случае, если коэффициенты уравнений (2.5.1), (2.5.6) и (2.5.7) представляются в виде

$$a_l = \sum_{k=0}^g A_{lk} \cos(k\omega_0 n - \varphi_k), \quad l = 0, 1, 2, \dots, i,$$

$$b_l = \sum_{k=0}^{g_1} B_{lk} \cos(k\omega_0 n - \varphi_k), \quad l = 0, 1, 2, \dots, r, \quad (2.5.30)$$

производя преобразования, подобные предыдущим, получим для определения математического ожидания, корреляционной функции выходного сигнала и взаимокорреляционной функции выходного и входного сигналов зависимости, аналогичные уравнениям (2.5.29), в которых коэффициенты определяются следующими выражениями:

$$P_0(q) = \sum_{l=0}^i A_{l_0} \cos \varphi_0 e^{lq},$$

$$P_k(q) = \sum_{l=0}^i \frac{A_{lk}}{2} e^{-j\varphi_k} e^{l(q-jk\omega_0)},$$

$$P_{-k}(q) = \sum_{l=0}^i \frac{A_{lk}}{2} e^{j\varphi_k} e^{l(q+jk\omega_0)}, \quad k = 1, 2, \dots, g, \quad (2.5.31)$$

$$T_0(q) = \sum_{l=0}^r B_{l_0} \cos \psi_0 e^{lq},$$

$$T_k(q) = \sum_{l=0}^r \frac{B_{lk}}{2} e^{-j\psi_k} e^{l(q-jk\omega_0)},$$

$$T_{-k}(q) = \sum_{l=0}^r \frac{B_{lk}}{2} e^{j\psi_k} e^{l(q+jk\omega_0)}, \quad k = 1, 2, \dots, g_1. \quad (2.5.32)$$

Таким образом, решая полученные уравнения, определяем статистические характеристики выходной величины в комплексной области. Применяя метод обращения к каждому слагаемому полученных решений, основанный на дискретном спектральном преобразовании, по методике, изложенной в § 2.4, вычисляем искомые величины.

Глава III

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ И СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

§ 3.1. ОРТОГОНАЛЬНЫЙ МЕТОД МОМЕНТОВ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Задача детерминированного анализа дискретных объектов управления (ДОУ) по экспериментальным данным заключается в определении динамических характеристик ДОУ по известным входным и выходным сигналам и сводится к решению дискретного аналога системы уравнений Вольтерра первого рода в свертках [29]

$$x(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k(m) y(n-m), \quad (3.1.1)$$

где $x(n) = \| x_1(n), x_2(n), \dots, x_l(n), \dots, x_l(n) \|'$ — матрица-столбец выходных сигналов,
 $y(n-m) = \| y_1(n-m), \dots, y_r(n-m), \dots, y_r(n-m) \|'$ — матрица-столбец входных сигналов,

$k(n)$ — импульсная переходная матрица ДОУ,

r и l — соответственно число входных и выходных сигналов ДОУ.

Можно показать [26], что задача детерминированного анализа линейных многомерных дискретных объектов с несколькими входами и несколькими выходами сводится к задаче детерминированного анализа объектов с несколькими входами и одним выходом. Тогда, согласно матричному уравнению (3.1.1), запишем для r -го выходного сигнала

$$x_p(n) = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} k_{\varepsilon}(m) y_{p\varepsilon}(n-m), \quad p = 1, 2, \dots, r, \quad (3.1.2)$$

где $k_{\varepsilon}(m)$ — элементы импульсной переходной матрицы,

ε — номер входного сигнала,

p — номер эксперимента.

Для того, чтобы система (3.1.2) была определена, необходимо, чтобы число экспериментов было равно или больше числа входных

сигналов. Выходной сигнал объекта $x_p(n)$ равен сумме составляющих от действия каждого входного сигнала

$$x_p(n) = \sum_{\varepsilon=1}^r x_{p\varepsilon}(n), \quad p = 1, 2, \dots, r, \quad (3.1.3)$$

где

$$x_{p\varepsilon}(n) = \sum_{m=0}^{\infty} k_{\varepsilon}(m) y_{p\varepsilon}(n-m).$$

Элементы импульсной переходной матрицы будем находить в виде [24]

$$k_{\varepsilon}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(n), \quad c_i = \sum_{n=0}^{\infty} k_{\varepsilon}(n) u_i(n), \quad (3.1.4)$$

где $u_h(n)$ — дискретная ортогональная система элементов.

В качестве дискретного ортогонального базиса могут быть использованы системы дискретных ортогональных многочленов Шарлье, Мейкснера, Гана, дискретных экспоненциальных ортогональных функций, функций Лагерра и другие (§ 1.1).

Выбор базиса зависит от конкретной задачи и производится с учетом минимума и простоты вычислений и способа реализации полученных динамических характеристик объекта управления.

Из формулы (3.1.4) видно, что динамика линейного многомерного дискретного объекта управления полностью определяется элементами дискретной ортогональной спектральной характеристики (ДОСХ) ДОУ. Следовательно, задача анализа ДОУ по экспериментальным данным сводится к определению элементов ДОСХ объекта [17].

Согласно § 1.2 для элементов ДОСХ ДОУ получим следующие зависимости:

а) для многочленов Шарлье

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{n=0}^{\infty} k(n) c_k(n, a) = \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k k(n) \alpha_{\nu k}(a) n^{\nu} = \\ &= \frac{1}{a^{-k} k!} \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k}(a) \mu_{\nu}, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

где

$$\mu_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) n^{\nu},$$

б) для многочленов Мейкснера

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} k(n) m_k(n, \beta, c) = \\ &= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\nu=0}^k k(n) \alpha_{\nu k}(\beta, c) n^{\nu} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{k! (\beta)_k c^{-k} (1-c)^{-\beta}} \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu,k}(\beta, c) \mu_{\nu}, \quad (3.1.6)$$

где

$$\mu_k = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) n^{\nu}, \quad (3.1.7)$$

в) для многочленов Гана

$$c_n = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu,k}(\beta, \gamma, \delta) \mu_{\nu}, \quad (3.1.8)$$

где

$$\mu_{\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) n^{\nu}. \quad (3.1.9)$$

Аналогичные зависимости можно получить и для других ортогональных базисов.

На основании формул (3.1.5) ÷ (3.1.9) замечаем, что процесс определения элементов ДОСХ сводится к вычислению элементов моментной импульсной переходной матрицы

$$\mu_{\Theta}^{k_{\Theta}(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} k_{\Theta}(n) n^{\Theta}, \quad \Theta = 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.10)$$

Вычисление $\mu_{\Theta}^{k_{\Theta}(n)}$ производится по известным в результате эксперимента моментам входных и выходных сигналов: $\mu_{\Theta}^{y_{p_{\Theta}}(n)}$ и $\mu_{\Theta}^{x_p(n)}$.

Рассмотрим метод вычисления $\mu_{\Theta}^{k_{\Theta}(n)}$. Из уравнения (3.1.8) согласно дискретному преобразованию Лапласа имеем

$$X_p(q) = \sum_{\varepsilon=1}^r k_{\varepsilon}(q) Y_{p_{\varepsilon}}(y), \quad p = 1, 2, \dots, r. \quad (3.1.11)$$

Раскрывая выражение (3.1.11), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_p(n) e^{-qn} = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{n=0}^{\infty} k_{\varepsilon}(m) e^{-qn} \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{n=0}^{\infty} y_{p_{\varepsilon}}(n-m) n^{-qn}. \quad (3.1.12)$$

Так как функцию e^{-qn} можно разложить в ряд Маклорена, то есть

$$e^{-qn} = 1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{n^{\nu}}{\nu!} q^{\nu},$$

выражение (3.1.12) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} x_p(n) \left[1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^{\nu} \frac{n^{\nu}}{\nu!} q^{\nu} \right] = \\ & = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon=1}^r k_{\varepsilon}(m) \left[1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n^k}{k!} q^k \right] \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\varepsilon=1}^r y_{p_{\varepsilon}}(n-m) \times \end{aligned}$$

$$\times \left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^m}{m!} q^m \right]. \quad (3.1.13)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях q в выражении (3.1.13) с учетом того, что ряд

$$\sum_{r_1=0}^{\infty} \frac{q^{r_1}}{r_1!} \sum_{n=0}^{\infty} |f(n)/n^{r_1}|$$

сходится абсолютно, получим

$$\begin{aligned} \mu_0^x(n) &= \sum_{\varepsilon=1}^r \mu_{\varepsilon 0}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 0}^{y_{p\varepsilon}(n)}, \\ \mu_1^x(n) &= \sum_{\varepsilon=1}^r \left[\mu_{\varepsilon 0}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 1}^{y_{p\varepsilon}(n)} + \mu_{\varepsilon 1}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 0}^{y_{p\varepsilon}(n)} \right], \\ \mu_2^x(n) &= \sum_{\varepsilon=1}^r \left[\mu_{\varepsilon 0}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 2}^{y_{p\varepsilon}(n)} + 2\mu_{\varepsilon 1}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 1}^{y_{p\varepsilon}(n)} + \mu_{\varepsilon 2}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 0}^{y_{p\varepsilon}(n)} \right], \\ \mu_3^x(n) &= \sum_{\varepsilon=1}^r \left[\mu_{\varepsilon 0}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 3}^{y_{p\varepsilon}(n)} + 3\mu_{\varepsilon 1}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 2}^{y_{p\varepsilon}(n)} + 3\mu_{\varepsilon 2}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \right. \\ &\quad \left. \times \mu_{\varepsilon 1}^{y_{p\varepsilon}(n)} + \mu_{\varepsilon 3}^{k_{\varepsilon}(n)} \cdot \mu_{\varepsilon 0}^{y_{p\varepsilon}(n)} \right], \end{aligned} \quad (3.1.14)$$

где

$$\begin{aligned} \mu_k^x(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_p(n) n^k, \\ \mu_k^y(n) &= \sum_{n=0}^{\infty} y_{p\varepsilon}(n) n^k, \quad p=1, 2, \dots, r. \end{aligned} \quad (3.1.15)$$

Представим выражение (3.1.14) в более удобной форме

$$\begin{aligned} \sum_{\varepsilon=1}^r a_{p0}^{\varepsilon} \mu_0^{\varepsilon} &= d_{p0}, \\ \sum_{\varepsilon=1}^r \left[a_{p1}^{\varepsilon} \mu_0^{\varepsilon} + a_{p0}^{\varepsilon} \mu_1^{\varepsilon} \right] &= d_{p1}, \\ \sum_{\varepsilon=1}^r \left[a_{p2}^{\varepsilon} \mu_0^{\varepsilon} + 2a_{p1}^{\varepsilon} \mu_1^{\varepsilon} + a_{p0}^{\varepsilon} \mu_2^{\varepsilon} \right] &= d_{p2}, \\ \sum_{\varepsilon=1}^r \left[a_{p3}^{\varepsilon} \mu_0^{\varepsilon} + 3a_{p2}^{\varepsilon} \mu_1^{\varepsilon} + 3a_{p1}^{\varepsilon} \mu_2^{\varepsilon} + a_{p0}^{\varepsilon} \mu_3^{\varepsilon} \right] &= d_{p3}, \end{aligned} \quad (3.1.16)$$

где

$$a_{pk}^{\varepsilon} = \mu_k^{y_{p\varepsilon}(n)}, \quad d_{pk} = \mu_k^x(n), \quad \mu_k^{\varepsilon} = \mu_k^{k_{\varepsilon}(n)}.$$

Рассмотрим последовательность расчета моментов импульсной переходной функции для случая $\epsilon = 1$.

Из системы (3.1.16) определим моменты импульсной переходной функции

$$\mu_0 = \frac{d_0}{a_0}, \quad \mu_1 = \frac{d_1 - a_1 \mu_0}{a_0}, \quad \mu_2 = \frac{d_2 - \mu_0 \cdot a_2 - 2\mu_1 \cdot a_1}{a_0},$$

.....

$$\mu_j = \frac{\left[\frac{d_j}{j!} - \sum_{m=0}^{j-1} \frac{\mu_m a_{j-m}}{m!(j-m)!} \right] j!}{a_0}. \quad (3.1.17)$$

Таким образом, если имеется экспериментальная запись входного и выходного сигналов ДОУ, то для определения его импульсной переходной функции необходимо:

1. Найти моменты входного и выходного сигналов по формулам (3.1.15) при

$$\epsilon = p = 1.$$

2. Определить моменты импульсной переходной функции по формулам (3.1.17).

3. Найти коэффициенты ортогонального разложения (элементы ДОСХ) импульсной переходной функции, а следовательно, полностью определить динамику объекта управления, то есть найти его математическую, а если требуется, и физическую модель в виде

$$k(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \mu_i(n). \quad (3.1.18)$$

В связи с тем, что для вывода зависимостей, определяющих моменты импульсной переходной матрицы, используется дискретное преобразование Лапласа, требующее определения соответствующих функций на полубесконечном интервале, встает задача выбора интервала записи входного и выходного сигналов. В рассматриваемом случае целесообразно, как и в непрерывном варианте [108], ввести в рассмотрение функции

$$x_1(n) = x_1^*(n) e^{-cn}, \quad y_1(n) = y_1^*(n) e^{-cn}, \quad k_1(n) = k(n) e^{-cn}. \quad (3.1.19)$$

Введением функций (3.1.19) можно добиться выполнения следующих неравенств:

$$|x_1(n)| \leq A e^{-an}, \quad |y_1(n)| \leq B e^{-bn}, \quad A \text{ и } B > 0, \\ a \text{ и } b \geq 0. \quad (3.1.20)$$

Причем множитель c следует выбирать таким образом, чтобы функции $x_1(n)$ и $y_1(n)$ практически отличались от нуля лишь на интервале эффективной длительности импульсной переходной функции, то есть на интервале $T_{эф}$.

Рассмотрим определение динамических характеристик ДОУ при

$\varepsilon=1$, если дискретным ортогональным базисом являются функции и полиномы Лагерра дискретного аргумента.

Импульсную переходную функцию будем определять в виде

$$k(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i l_i(n). \quad (3.1.21)$$

Функции и полиномы Лагерра дискретного аргумента определяются выражением

$$l_i(n) = \alpha_{i1} e^{-\frac{n}{2}} + \alpha_{i2} n e^{-\frac{n}{2}} + \dots + \alpha_{ii} n^{i-1} e^{-\frac{n}{2}}. \quad (3.1.22)$$

В разложении (3.1.21) элементы ДОСХ определяются зависимостями

$$c_i = \sum_{n=0}^{\infty} k(n) l_i(n) \rho(n), \quad (3.1.23)$$

где

$$\rho(n) = e^{-\frac{gs}{2}n} \quad (3.1.24)$$

— для функций Лагерра,

$$\rho(n) = e^{-sn} \quad (3.1.25)$$

— для полиномов Лагерра.

Подставляя формулу (3.1.22) в равенство (3.1.23), получим систему уравнений, определяющих ДОСХ объекта в следующем виде:

$$\begin{aligned} c_0 &= \mu_0, & c_1 &= \mu_0 - g\mu_1, & c_2 &= \mu_0 - 2g\mu_1 + \frac{1}{2!} g^2\mu_2, \\ c_3 &= \mu_0 - 3g\mu_1 + \frac{3}{2!} g^2\mu_2 - \frac{1}{3!} g^3\mu_3, \\ c_4 &= \mu_0 - 4g\mu_1 + \frac{6}{2!} g^2\mu_2 - \frac{4}{3!} g^3\mu_3 + \frac{1}{4!} g^4\mu_4, \\ &\dots \dots \dots \\ c_M &= \sum_{i=0}^M \frac{(-1)^{M-i} M!}{[(M-i)! i!]} g^{M-i} \mu_{(M-i)}, \end{aligned} \quad (3.1.26)$$

где g — масштабный коэффициент веса,

$g = s$ для дискретных многочленов Лагерра,

$g = \frac{s}{2}$ для дискретных функций Лагерра,

M — количество членов в разложении (3.1.21).

Теперь рассмотрим метод расчета моментов импульсных переходных функций, по которым определяются ДОСХ ДООУ, для общего случая

$$\varepsilon = r. \quad (3.1.27)$$

Тогда согласно зависимостям (3.1.16) для одного эксперимента имеем

$$\begin{aligned}
& a_0' \mu_0' + a_0^2 \mu_0^2 + \dots + a_0^j \mu_0^j + \dots + a_0^r \mu_0^r = d_0, \\
& a_1' \mu_0' + a_0' \mu_1' + a_1^2 \mu_0^2 + \dots + a_1^j \mu_0^j + a_0^j \mu_1^j + \dots + a_1^r \mu_0^r + a_0^r \mu_1^r = d_1, \\
& a_2' \mu_0' + 2a_1' \mu_1' + a_0' \mu_2' + a_2^2 \mu_0^2 + 2a_1^2 \mu_1^2 + a_0^2 \mu_2^2 + \dots + a_2^j \mu_0^j + \\
& \quad + 2a_1^j \mu_1^j + a_0^j \mu_2^j + \dots + a_2^r \mu_0^r + a_1^r \mu_1^r + a_0^r \mu_2^r = d_2, \\
& a_3' \mu_0' + 3a_2' \mu_1' + 3a_1' \mu_2' + a_0' \mu_3' + a_3^2 \mu_0^2 + 3a_2^2 \mu_1^2 + 3a_1^2 \mu_2^2 + \\
& \quad + a_0^2 \mu_3^2 + \dots + a_3^j \mu_0^j + 3a_2^j \mu_1^j + 3a_1^j \mu_2^j + a_0^j \mu_3^j + \dots + \\
& \quad + a_3^r \mu_0^r + 3a_2^r \mu_1^r + 3a_1^r \mu_2^r + a_0^r \mu_3^r = d_3, \\
& a_4' \mu_0' + 4a_3^1 \mu_1^1 + 6a_2' \mu_2^1 + 4a_1' \mu_3' + a_0' \mu_4' + a_4^2 \mu_0^2 + 4a_3^2 \mu_1^2 + 6a_2^2 \mu_2^2 + \\
& \quad + 4a_1^2 \mu_3^2 + a_0^2 \mu_4^2 + \dots + a_4^j \mu_0^j + 4a_3^j \mu_1^j + 6a_2^j \mu_2^j + 4a_1^j \mu_3^j + \\
& \quad + a_0^j \mu_4^j + \dots + a_4^r \mu_0^r + 4a_3^r \mu_1^r + 6a_2^r \mu_2^r + 4a_1^r \mu_3^r + a_0^r \mu_4^r = d_4, \\
& \dots \\
& a_5' \mu_0' + 5a_4' \mu_1' + 10a_3' \mu_2' + 10a_2' \mu_3' + 5a_1' \mu_4' + a_0' \mu_5' + a_5^2 \mu_0^2 + 5a_4^2 \mu_1^2 + \\
& \quad + 10a_3^2 \mu_2^2 + 10a_2^2 \mu_3^2 + 5a_1^2 \mu_4^2 + a_0^2 \mu_5^2 + \dots + a_5^j \mu_0^j + 5a_4^j \mu_1^j + \\
& \quad + 10a_3^j \mu_2^j + 10a_2^j \mu_3^j + 5a_1^j \mu_4^j + a_0^j \mu_5^j + \dots + a_5^r \mu_0^r + 5a_4^r \mu_1^r + \\
& \quad + 10a_3^r \mu_2^r + 10a_2^r \mu_3^r + 5a_1^r \mu_4^r + a_0^r \mu_5^r = d_5, \\
& \dots \\
& \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!} \mu_m' a_{n-m}' + \mu_n' a_0' + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!} \mu_m^2 a_{n-m}^2 + \\
& \quad + \mu_n^2 a_0^2 + \dots + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!} \mu_m^j a_{n-m}^j + \mu_n^j a_0^j + \dots + \\
& \quad + \sum_{m=0}^{n-1} \frac{n!}{m!(n-m)!} \mu_m^r a_{n-m}^r + \mu_n^r a_0^r = d_n, \tag{3.1.28}
\end{aligned}$$

Из рассмотрения системы уравнений (3.1.28) следует, что для получения решения этой системы необходимо провести минимум столько экспериментов, сколько каналов содержит исследуемый дискретный объект, то есть необходимо выполнить условие

$$p = r.$$

В противном случае система уравнений (3.1.28) неопределена. По результатам p экспериментов из первого равенства системы (3.1.28) с учетом обозначений (3.1.10), (3.1.15), (3.1.16) получим

$$a_{10}^1 \mu_0^1 + a_{10}^2 \mu_0^2 + \dots + a_{10}^j \mu_0^j + \dots + a_{10}^r \mu_0^r = d_{10},$$

$$a_{20}^1 \mu_0^1 + a_{20}^2 \mu_0^2 + \dots + a_{20}^j \mu_0^j + \dots + a_{20}^r \mu_0^r = d_{20},$$

.....

требующий вычисления моментов μ_θ . Можно доказать, что с увеличением индекса θ погрешности вычисления моментов импульсной переходной функции быстро растут. Это связано с тем, что обычно сигналы $x(n)$ и $y(n)$ снимаются с некоторыми ошибками, треугольная система алгебраических уравнений (3.1.17) приводит к тому, что ошибки определения моментов матрицы $k(n)$ значительно превосходят ошибки расчета моментов сигналов $x(n)$ и $y(n)$ [85].

С наибольшей точностью вычисляются моменты импульсной переходной функции нулевого порядка. Поэтому рассмотрим модифицированный метод определения импульсной переходной функции управляемого объекта.

Как и прежде, будем находить элементы импульсной переходной матрицы дискретного объекта управления в виде дискретного ортогонального ряда [32]

$$k_\varepsilon(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{\varepsilon i} u_{\varepsilon i}(n), \quad (3.2.2)$$

где $u_i(n)$ — дискретные ортогональные многочлены, определенные на полубесконечном интервале.

Представим равенство (3.1.12) в виде

$$\sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{n=0}^{\infty} k_\varepsilon(n) e^{-qn} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} x_p(n) e^{-qn}}{\sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{n=0}^{\infty} y_{p\varepsilon}(n) e^{-qn}}. \quad (3.2.3)$$

Введем следующие обозначения:

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_\varepsilon(n) e^{-qj^n} = \mu_j^\varepsilon, \quad (3.2.4)$$

где q — действительное число,

$$j = 1, 2, \dots$$

Преобразуем обе части равенства (3.2.2) по Лапласу

$$\sum_{n=0}^{\infty} k_\varepsilon(n) e^{-qn} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(n) e^{-qn} \quad (3.2.5)$$

Общее выражение для дискретных ортогональных многочленов имеет вид

$$u_k(n) = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k} n^\nu, \quad (3.2.6)$$

где конкретные зависимости для постоянных $\alpha_{\nu k}$, указанных выше ортогональных систем приведены в § 1.1.

Применив к формуле (3.2.6) дискретное преобразование Лапласа, получим

$$u_k(q) = \sum_{\nu=0}^k \alpha_{\nu k} \frac{e^q}{(e^q - 1)^{\nu+1}} R_\nu(e^q), \quad (3.2.7)$$

где

$$R_\nu(e^q) = \nu! \begin{vmatrix} 1 & 1-e^q & 0 & \dots & 0 \\ \frac{1}{2!} & 1 & 1-e^q & \dots & 0 \\ \frac{1}{3!} & \frac{1}{2!} & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{1}{\nu!} & \frac{1}{(\nu-1)!} & \frac{2}{(\nu-2)!} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (3.2.8)$$

В качестве примера запишем шесть ортогональных дискретных функций в области времени

$$\begin{aligned} u_0(n) &= \alpha_{00}, \\ u_1(n) &= \alpha_{01} + \alpha_{11} \cdot n, \\ u_2(n) &= \alpha_{02} + \alpha_{12} \cdot n + \alpha_{22} n^2, \\ u_3(n) &= \alpha_{03} + \alpha_{13} \cdot n + \alpha_{23} n^2 + \alpha_{33} \cdot n^3, \\ u_4(n) &= \alpha_{04} + \alpha_{14} \cdot n + \alpha_{24} \cdot n^2 + \alpha_{34} \cdot n^3 + \alpha_{44} \cdot n^4, \\ u_5(n) &= \alpha_{05} + \alpha_{15} \cdot n + \alpha_{25} \cdot n^2 + \alpha_{35} n^3 + \alpha_{45} \cdot n^4 + \alpha_{55} \cdot n^5, \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

и соответствующие функции в комплексной области

$$\begin{aligned} u_0(q) &= \frac{\alpha_{00} e^q}{e^q - 1}, \quad u_1(q) = \frac{\alpha_{01} e^q}{e^q - 1} + \frac{\alpha_{11} e^q}{(e^q - 1)^2}, \\ u_2(q) &= \frac{\alpha_{02} e^q}{e^q - 1} + \frac{\alpha_{12} e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{\alpha_{22} e^q}{(e^q - 1)^3} (e^q + 1), \\ u_3(q) &= \frac{\alpha_{03} e^q}{e^q - 1} + \frac{\alpha_{13} e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{\alpha_{23} e^q}{(e^q - 1)^3} (e^q + 1) + \frac{\alpha_{33}}{(e^q - 1)^4} (e^{2q} + 4e^q + 1) \\ u_4(q) &= \frac{\alpha_{04} e^q}{e^q - 1} + \frac{\alpha_{14} e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{\alpha_{24} e^q}{(e^q - 1)^3} (e^q + 1) + \frac{\alpha_{34}}{(e^q - 1)^4} (e^{2q} + 4e^q + 1) + \\ &\quad + \frac{\alpha_{44}}{(e^q - 1)^5} (e^{3q} + 11e^{2q} + 11e^q + 1), \\ u_5(q) &= \frac{\alpha_{05} e^q}{(e^q - 1)} + \frac{\alpha_{15} e^q}{(e^q - 1)^2} + \frac{\alpha_{25} e^q}{(e^q - 1)^3} (e^q + 1) + \\ &\quad + \frac{\alpha_{35}}{(e^q - 1)^4} (e^{2q} + 4e^q + 1) + \frac{\alpha_{45}}{(e^q - 1)^5} (e^{3q} + 11e^{2q} + 11e^q + 1) + \\ &\quad + \frac{\alpha_{55}}{(e^q - 1)^6} (e^{4q} + 26e^{3q} + 66e^{2q} + 26e^q + 1). \end{aligned} \quad (3.2.10)$$

Для дискретных функций Лагерра преобразования по Лапласу имеют вид

$$l_1(q) = \alpha_{11} \frac{e^q}{e^q - e^{-1/2}}, \quad l_2(q) = \alpha_{12} \frac{e^q}{e^q - e^{-1/2}} + \alpha_{22} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^2},$$

$$l_3(q) = \alpha_{13} \frac{e^q}{e^q - e^{-1/2}} + \alpha_{23} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^2} + \alpha_{33} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^3} (e^q + e^{-1/2}),$$

$$l_3(q) = \alpha_{14} \frac{e^q}{e^q - e^{-1/2}} + \alpha_{24} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^2} + \alpha_{34} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^3} \times$$

$$\times (e^q + e^{-1/2}) + \alpha_{44} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^4} (e^{2q} + 4e^q e^{-1/2} + e^{-1}),$$

.....

$$l_k(q) = \alpha_{1k} \frac{e^q}{e^q - e^{-1/2}} + \alpha_{2k} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^2} + \alpha_{3k} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^3} \times$$

$$\times (e^q + e^{-1/2}) + \dots + \alpha_{kk} \frac{e^q e^{-1/2}}{(e^q - e^{-1/2})^{k+1}} R_k \left(e^{q - \frac{1}{2}} \right). \quad (3.2.11)$$

Таким образом, уравнение (3.2.2) с учетом последних зависимостей можно представить в виде

$$k_c(q) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{ci} u_{ci}(q). \quad (3.2.12)$$

Придавая в последней формуле комплексному аргументу действительные значения $q = q_1, q_2, q_3, \dots$, получим следующую систему алгебраических уравнений:

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{ci} u_{ci}(q_j) = \mu_j^{\varepsilon}, \quad j = 1, 2, \dots, \nu, \quad (3.2.13)$$

решая которую можно найти неизвестные коэффициенты разложения $\{c_{ci}\}$ по нулевым моментам.

Подобный алгоритм в силу экспоненциального характера ядра дискретного преобразования Лапласа можно получить, если в качестве дискретного ортогонального базиса применить многочлены, составленные из системы линейно-независимых функций $\{e^{-cn}\}$. Таким ортогональным базисом могут быть дискретные многочлены Чебышева и Кравчука (§ 1.2), определенные на интервале $[0, N]$, если в этих многочленах произвести замену переменной $x = Ne^{-n}$.

Рассмотрим вопрос определения динамических характеристик ДДУ ортогональным методом моментов, когда ортогональным дискретным базисом являются многочлены Чебышева и Кравчука.

Предварительно определим, какое разложение дискретного преобразования Лапласа соответствует разложению $k(n)$ в ряд

$$k_c(n) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{ck}}{r_k} u_k(n), \quad (3.2.14)$$

$$c_{ck} = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) k_c(n) u_k(n), \quad (3.2.15)$$

$$r_k = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) |u_k(n)|^2, \quad (3.2.16)$$

где $\rho(n)$ — функция веса дискретного ортогонального базиса. Для этого разложим функцию e^{-qn} по выбранному базису. Получим

$$e^{-qn} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k(q)}{r_k} u_k(n), \quad (3.2.17)$$

$$c_k(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) e^{-qn} u_k(n). \quad (3.2.18)$$

Учитывая зависимости (3.2.14), (3.2.17) и свойство ортогональности дискретного базиса, из определения дискретного преобразования Лапласа импульсной переходной матрицы будем иметь

$$k_\varepsilon(q) = \sum_{n=0}^{\infty} \rho(n) k_\varepsilon(n) e^{-qn} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_{\varepsilon k}}{r_k} c_k(q). \quad (3.2.19)$$

Ряд (3.2.19) сходится в правой части основной полосы плоскости q . Равенство (3.2.18) преобразуем к виду

$$c_k(q) = (-1)^k \gamma_k q(q-1)(q-2) \dots (q-k+1) \alpha_k(q-k+1),$$

где $\alpha_k(q-k+1)$ определяется из явного выражения многочленов.

Следовательно, интерполяционный ряд (3.2.19) можно привести к следующему виду:

$$k_\varepsilon(q) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \gamma_k \frac{c_{\varepsilon k}}{r_k} q(q-1)(q-2) \dots (q-k+1) \times \\ \times \alpha_k(q-k+1). \quad (3.2.20)$$

Можно показать, что ряд (3.2.20) также сходится.

Таким образом, для определения неизвестных элементов ДОСХ $\{c_{\varepsilon k}\}$ по моментам входных и выходных сигналов ДОУ необходимо в интерполяционном ряде (3.2.20) принять $q = 0, 1, 2, \dots$ и выразить $\{c_{\varepsilon k}\}$ через значения $k_\varepsilon(q)$ в этих точках. Учитывая связь между моментами функций и их дискретными преобразованиями Лапласа, значения $k_\varepsilon(q)$ в точках $q = 0, 1, 2, \dots$ представляют собой моменты нулевого порядка динамических характеристик ДОУ, которые определяются из системы алгебраических уравнений (3.1.29) по моментам нулевого порядка входных и выходных сигналов.

§ 3.3. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ В ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОМ ВИДЕ. АПРИОРНЫЙ МЕТОД МОМЕНТОВ

Рассмотрим дискретные объекты управления (ДОУ), описываемые системой разностных уравнений вида

$$\sum_{k=0}^m h_k \Delta^k x_p(n) = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{k=0}^{m_\varepsilon} b_{k\varepsilon} \Delta^k y_\varepsilon(n), \quad p = 1, 2, \dots, r.$$

Преобразуя эти уравнения по Лапласу, получим передаточную матрицу

$$K(q) = \| K_1(q), K_2(q), \dots, K_\varepsilon(q), \dots, K_r(q) \|',$$

элементы которой представляют собой дробно-рациональные функции

$$K_\varepsilon(q) = \sum_{n=0}^{\infty} k_\varepsilon(n) e^{-qn} = \frac{P_\varepsilon(n)}{G(q)}, \quad (3.3.1)$$

где

$$P_\varepsilon(q) = \sum_{k=0}^{m_\varepsilon} b_k q^k, \quad G(q) = \sum_{k=0}^{\lambda} h_k q^k. \quad (3.3.2)$$

Предварительно рассмотрим решение задачи при $\varepsilon = 1$.

Тогда с учетом равенства (3.1.13) получим

$$\begin{aligned} K(q) = K(\sigma + j\omega) &= \frac{x(\sigma + j\omega)}{y(\sigma + j\omega)} = \\ &= \frac{\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \sum_{\nu=0}^{\infty} (-1)^\nu \frac{n^\nu}{\nu!} (j\omega)^\nu \right] x(n) e^{-\sigma n}}{\sum_{n=0}^{\infty} \left[1 + \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{n^m}{m!} (j\omega)^m \right] y(n) e^{-\sigma n}}. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Ряд

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(j\omega)^\nu}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} n^\nu |x(n) e^{-\sigma n}| \quad (3.3.4)$$

сходится абсолютно, поэтому из выражения (3.3.3) при $\nu = m$ получим

$$K(\sigma + j\omega) = \frac{\sum_{\nu=0}^{\infty} (j\omega)^\nu \gamma_\nu}{\sum_{\nu=0}^{\infty} (j\omega)^\nu \beta_\nu}, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3.5)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-\sigma n}, \quad \gamma_1 = - \sum_{n=0}^{\infty} n x(n) e^{-\sigma n}, \dots, \\ \gamma_\nu &= \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} n^\nu x(n) e^{-\sigma n}, \quad \beta_0 = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-\sigma n}, \\ \beta_1 &= - \sum_{n=0}^{\infty} n y(n) e^{-\sigma n}, \dots, \quad \beta_\nu = \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \sum_{n=0}^{\infty} n^\nu y(n) e^{-\sigma n}. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $j\omega$ в выражении (3.3.3) с учетом равенств (3.3.5) и (3.3.6), получим соотношения, определяющие коэффициенты многочлена $P(q)$, в виде

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \gamma_0 - \sum_{i=1}^{\nu} b_i \sigma^i, & b_1 &= \gamma_1 - \sum_{i=2}^{\nu} i b_i \sigma^{i-1}, \\
 &\dots & & \dots \\
 b_k &= \gamma_k - \sum_{i=k+1}^{\nu} \frac{i(i-1) \cdots (i-k+1)}{k} b_i \sigma^{i-k}, \\
 &\dots & & \dots \\
 b_{\nu} &= \gamma_{\nu}, & \sigma &= 0, 1, 2, \dots
 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Аналогичные соотношения можно получить для коэффициентов полинома $G(q)$

$$h_i = f(\beta_i).$$

Рассмотрим определение динамических характеристик ДОУ, когда структура и вид разностных уравнений, описывающих исследуемые ДОУ, априори известны.

Пусть передаточная функция ДОУ имеет вид

$$K(q) = \frac{N(q)}{M(q)}, \tag{3.3.8}$$

где

$$\begin{aligned}
 N(q) &= b_m q^m + b_{m-1} q^{m-1} + \dots + b_1 q + 1, \\
 M(q) &= a_{\lambda} q^{\lambda} + a_{\lambda-1} q^{\lambda-1} + \dots + a_1 q + 1, \quad \lambda \gg m.
 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Порядок многочленов $N(q)$ и $M(q)$ известен. В результате проведенного эксперимента необходимо определить величины коэффициентов многочленов (3.3.9). В данном случае задача решается априорным методом моментов, который заключается в следующем [26].

Обозначим

$$\begin{aligned}
 \mu_j &= \sum_{n=0}^{\infty} k(n) e^{-q_j n}, & \alpha_j &= \sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-q_j n}, \\
 \psi_j &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-q_j n}.
 \end{aligned} \tag{3.3.10}$$

Используя связь моментов входных и выходных сигналов с моментами импульсной переходной функции

$$\sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-q_j n} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-q_j n} \sum_{n=0}^{\infty} \kappa(n) e^{-q_j n}, \tag{3.3.11}$$

и равенства (3.3.8), (3.3.9), получим систему алгебраических уравнений

$$\frac{\psi_j}{\alpha_j} \sum_{k=0}^{\lambda} a_k q_j^k - \sum_{k=0}^m b_k q_j^k = 0, \quad j = 1, 2, \dots, m + \lambda + 2, \tag{3.3.12}$$

которая определяет искомые коэффициенты a_k и b_k .

Обобщим приведенный выше метод расчета для

$$\varepsilon = r.$$

При этом для реализации алгоритма (3.3.12) необходимо предварительно определить элементы моментной импульсной переходной матрицы

$$\mu_j^\varepsilon = \frac{\psi_j^\varepsilon}{x_j^\varepsilon} \quad (3.3.13)$$

по формулам (3.1.14), (3.1.29), (3.1.30).

Для реализации алгоритма (3.3.7) моменты составляющих выходного сигнала $x_{p\varepsilon}$ (3.1.3), определяющие соотношения (3.3.6), находятся из уравнений (3.1.17) по моментам входных сигналов и элементам импульсной переходной матрицы (3.3.13).

§ 3.4. ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ МЕТОДОМ ОБОБЩЕННЫХ СПЕКТРОВ

Выше решалась задача определения динамических характеристик ДОУ ортогональным методом моментов, основанном на связи дискретного преобразования Лапласа с определением моментов функции. Однако в ряде случаев возможно решение этой задачи методом обобщенных спектров, то есть определение ДОСХ дискретного объекта по дискретным обобщенным спектрам (ДОС) входных и выходных сигналов [35].

При таком подходе решение можно провести следующим образом. Представим элементы импульсной переходной матрицы, а также элементы входной и выходной матрицы в виде следующих разложений:

$$y_{p\varepsilon}(n) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{p\varepsilon k} u_k(n), \quad x_p(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{pi} u_i(n),$$

$$k_\varepsilon(n) = \sum_{j=0}^{\infty} c_{\varepsilon j} u_j(n). \quad (3.4.1)$$

Тогда, используя выражения (3.4.1), дискретный аналог уравнения свертки для ДОУ

$$x_p(n) = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} y_{p\varepsilon}(n-m) k_\varepsilon(n)$$

приводится к равенству

$$\sum_{i=1}^{\infty} c_{pi} u_i(n) = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} c_{p\varepsilon k} u_k(n-m) \sum_{j=0}^{\infty} c_{\varepsilon j} u_j(n). \quad (3.4.2)$$

Преобразуем по Лапласу выражение (3.4.2)

$$\sum_{i=0}^{\infty} c_{pi} u_i(q) = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{p\varepsilon k} c_{\varepsilon j} u_k(q) u_j(q). \quad (3.4.3)$$

Умножим обе части равенства (3.4.3) на $u_i(-q)$ и просуммируем в бесконечных пределах. На основании дискретного аналога равенства Парсеваля получим

$$c_{pi} = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{p\varepsilon k} c_{\varepsilon j} c_{\varepsilon j k}^i, \\ c_{\varepsilon j k}^i = \frac{1}{2\pi j} \sum_{q=-\infty}^{\infty} u_k(q) u_j(q) u_i(-q). \quad (3.4.4)$$

Так как в расчетах число элементов ДОСХ является конечной величиной, то выражение (3.4.4) для реальных расчетов дискретных объектов управления имеет вид

$$c_{pi} = \sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{k=0}^l \sum_{j=0}^l c_{p\varepsilon k} c_{pj} c_{\varepsilon j k}^i. \quad (3.4.5)$$

Величина $c_{\varepsilon j k}^i = 0$ при k и (или) $j > i_0$.

Из формулы (3.4.5) следует важный для определения динамических характеристик вывод о том, что l элементов дискретных обобщенных спектров входной и выходной матрицы однозначно определяют l элементов ДОСХ импульсной переходной матрицы дискретного объекта управления, и последние не зависят от элементов дискретных обобщенных спектров, индекс которых больше l .

Таким образом, задача определения динамических характеристик дискретных объектов управления данным методом заключается в решении треугольной системы алгебраических уравнений (3.4.5). Получая аналогичные системы алгебраических уравнений для различных отрезков входного и выходного сигналов, имеем необходимое число алгебраических уравнений, решая которые можно найти ДОСХ всех каналов ДОУ.

§ 3.5. МЕТОД ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО АНАЛИЗА НЕСТАЦИОНАРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

При проведении практических исследований нередко встречаются случаи, когда предположение о квазистационарности управляемого дискретного объекта не является обоснованным, так как за время проведения эксперимента его динамические характеристики существенно изменяются. В рассматриваемом случае определять динамические характеристики объекта необходимо в предположении, что анализируемый объект является существенно нестационарен [11].

Пусть ДДУ описывается системой разностных уравнений вида (1.2.4). Процесс изменения коэффициентов $a_i(n)$ и $b_j(n)$ неизвестен. Рассмотрим случай, когда $r = p = 1$.

Из системы (1.2.4) получим

$$\sum_{i=0}^N a_i(n) \Delta^i x(n) = \sum_{j=0}^M b_j(n) \Delta^j y(n). \quad (3.5.1)$$

Предположим, что на исследуемом интервале времени процесс изменения коэффициентов $a_i(n)$ и $b_j(n)$ можно аппроксимировать степенным рядом. Тогда

$$a_i(n) = \sum_{\varepsilon=0}^Q a_{i\varepsilon} n^\varepsilon, \quad i=0, 1, \dots, N, \quad (3.5.2)$$

$$b_j(n) = \sum_{\nu=0}^Q b_{j\nu} n^\nu, \quad j=0, 1, \dots, M. \quad (3.5.3)$$

С учетом разложений (3.5.2) и (3.5.3) из уравнения (3.5.1) получим

$$\sum_{i=0}^N \sum_{\varepsilon=0}^Q a_{i\varepsilon} n^\varepsilon \Delta^i x(n) = \sum_{j=0}^M \sum_{\nu=0}^Q b_{j\nu} n^\nu \Delta^j y(n). \quad (3.5.4)$$

Преобразуем уравнение (3.5.4) по Лапласу. После группировки членов по порядкам разностей получим

$$\begin{aligned} & (a_{N0} q^N + a_{N-1,0} q^{N-1} + \dots + a_{0,0}) X(q) - \\ & - \Delta [(a_{N,1} q^N + a_{N-1,1} q^{N-1} + \dots + a_{0,1}) X(q)] + \\ & + \dots + (-1)^Q \Delta^Q [a_{N,Q} q^N + a_{N-1,Q} q^{N-1} + \dots + a_{0,Q}) X(q)] = \\ & = (b_{M,0} q^M + b_{M-1,0} q^{M-1} + \dots + b_{0,0}) Y(q) - \\ & - \Delta [(b_{M,1} q^M + b_{M-1,1} q^{M-1} + \dots + b_{0,1}) Y(q)] + \\ & + \dots + (-1)^G \Delta^G [b_{M,G} q^M + b_{M-1,G} q^{M-1} + \dots + b_{0,G}) Y(q)]. \quad (3.5.5) \end{aligned}$$

Для k -ой производной произведения двух функций на основании формулы Ньютона-Лейбница имеем

$$\begin{aligned} D^k [(a_{N,k} q^N + a_{N-1,k} q^{N-1} + \dots + a_{0,k}) X(q)] &= D^k [A_k(q) X(q)] = \\ &= A_k(q) X^k(q) + k A_k'(q) X^{(k-1)}(q) + \dots + \\ &+ C_k^m A_k^m(q) X^{k-m}(q) + \dots + A_k^k(q) X(q), \quad (3.5.6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^k [(b_{M,k} q^M + b_{M-1,k} q^{M-1} + \dots + b_{0,k}) Y(q)] &= \\ = D^k [B_k(q) Y(q)] &= B_k(q) Y^k(q) + k B_k'(q) Y^{(k-1)}(q) + \\ + \dots + C_k^m B_k^m(q) Y^{(k-m)}(q) &+ \dots + B_k^k(q) Y(q), \quad (3.5.7) \end{aligned}$$

где $D = \frac{d}{dq}$.

Следовательно, из уравнения (3.5.5), учитывая, что

$$D^k X(q) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} x(n) e^{-qn} n^k = \mu_k^x, \quad (3.5.8)$$

$$D^k Y(q) = (-1)^k \sum_{n=0}^{\infty} y(n) e^{-qn} n^k = \mu_k^y, \quad (3.5.9)$$

получим

$$\begin{aligned} & E_{10}(q) \mu_0^x - E_{11}(q) \mu_1^x + \dots + (-1)^Q E_{1Q}(q) \mu_Q^x = \\ & = F_{10}(q) \mu_0^y - F_{11}(q) \mu_1^y + \dots + (-1)^G F_{1G}(q) \mu_G^y, \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

где

$$\begin{aligned} E_{10}(q) &= E_0(q) + E_1'(q) + E_2^2(q) + \dots + (-1)^Q E_Q^Q(q), \\ E_{11}(q) &= E_1(q) + 2E_2'(q) + 3E_3^2(q) + \dots + (-1)^Q C_N^{N-1} E_N^{(N-1)}(q), \\ &\dots \dots \dots \\ E_{1Q}(q) &= (-1)^Q E_Q^Q(q), \\ E_i^k(q) &= D^k (a_{N,i} q^N + a_{N-1,i} q^{N-1} + \dots + a_{0,i}). \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Аналогично имеем

$$\begin{aligned} F_{10}(q) &= F_0(q) + F_1'(q) + F_2^2(q) + \dots + (-1)^G F_G^G(q), \\ F_{11}(q) &= F_1(q) + 2F_2'(q) - 3F_3^2(q) + \dots + (-1)^G C_M^{M-1} F_M^{(M-1)}(q), \\ &\dots \dots \dots \\ F_{1G}(q) &= (-1)^G F_G^G(q), \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

где

$$F_j^k(q) = D^k (b_{M,j} q^M + b_{M-1,j} q^{M-1} + \dots + b_{0,j}).$$

Задаваясь значениями $q=0, 1, 2, \dots$, из равенства (3.5.10) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} & E_{10}(1) \mu_{10}^x - E_{11}(1) \mu_{11}^x + \dots + (-1)^Q E_{1Q}(1) \mu_{1Q}^x = \\ & = F_{10}(1) \mu_{10}^y - F_{11}(1) \mu_{11}^y + \dots + (-1)^G F_{1G}(1) \mu_{1G}^y, \\ & E_{10}(2) \mu_{10}^x - E_{11}(2) \mu_{11}^x + \dots + (-1)^Q E_{1Q}(2) \mu_{1Q}^x = \\ & = F_{10}(2) \mu_{10}^y - F_{11}(2) \mu_{11}^y + \dots + (-1)^G F_{1G}(2) \mu_{1G}^y \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

Решением системы (3.5.13) является искомый спектр процесса изменения коэффициентов разностного уравнения (3.5.1) на исследуемом интервале времени.

Если исследуемый ДОУ имеет r входов, по методике, изложенной выше, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
 & E_{10}(q) \mu_{10}^x - E_{11}(q) \mu_{11}^x + \dots + (-1)^Q E_{1Q} \mu_{1Q}^x = \\
 & = F'_{10}(q) \mu_{10}^{y_{1\varepsilon}} + F^2_{10} \mu_{10}^{y_{2\varepsilon}} + \dots + F^g_{10} \mu_{10}^{y_{p\varepsilon}} + F'_{11}(q) \mu_{11}^{y_{1p}} + F^2_{11} \mu_{11}^{y_{2\varepsilon}} + \\
 & + \dots + F^\varepsilon_{11} \mu_{11}^{y_{p\varepsilon}} + \dots + (-1)^r F'_{1r} \mu_{1r}^{y_{1\varepsilon}} + (-1)^r F_{1r} \mu_{1r}^{y_{2\varepsilon}} + \\
 & + \dots + (-1)^2 F_{1r} \mu_{1r}^{y_{p\varepsilon}}, \quad p = 1, 2, \dots, r, \quad (3.5.14)
 \end{aligned}$$

решая которую можно найти параметры полиномов, характеризующих процесс изменения коэффициентов разностных уравнений, описывающих динамику всех каналов ДОУ

§ 3.6. АЛГОРИТМ СТАТИСТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ СПЕКТРАЛЬНЫМ МЕТОДОМ МОМЕНТОВ

В ряде случаев при исследовании ДОУ необходимо определить динамические характеристики объекта управления в установившемся режиме по статистическим характеристикам его входных и выходных сигналов [8].

При этом приходится решать дискретный аналог уравнения Фредгольма первого рода с разностным ядром. Рассмотрим решение этого уравнения спектральным методом моментов [34].

Дискретный аналог уравнения Фредгольма первого рода для $\varepsilon = 1$ имеет вид

$$R_{xy}(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} k(n) R_{yy}(n-m), \quad (3.6.1)$$

$R_{xy}(n)$ — взаимнокорреляционная функция входного и выходного сигналов $y(n)$ и $x(n)$ соответственно,

$R_{yy}(n)$ — автокорреляционная функция входного сигнала,

$k(n)$ — искомая импульсная переходная функция дискретной системы автоматического управления.

Импульсная переходная функция $k(n)$ определяется в виде разложения в ряд по ортогональному базису дискретного переменного $u_i(n)$ и может быть представлена так:

$$k(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(n). \quad (3.6.2)$$

Как и выше, задача сводится к определению элементов ДОСХ исследуемого дискретного объекта.

Таким образом, для решения этого уравнения необходимо применить двустороннее дискретное преобразование Лапласа. В комплексной области уравнение (3.6.1) имеет вид [114]

$$R_{xy}(q) = k(q) R_{yy}(q). \quad (3.6.3)$$

Это выражение можно представить следующим образом:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy}(n) e^{-qn} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k(n) e^{-qn} \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{yy}(n) e^{-qn}. \quad (3.6.4)$$

Из выражения (3.6.4), пользуясь разложением ядра дискретного преобразования Лапласа e^{-qn} в ряд Маклорена

$$e^{-qn} = 1 + \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{n^k}{k!} q^k$$

и приравнявая члены при одинаковых степенях q , можно получить зависимость моментов импульсной переходной функции от моментов взаимной и автокорреляционной функции входного и выходного сигналов

$$\mu_0 = \frac{D_0}{B_0}, \quad \mu_1 = \frac{D_1}{B_0}, \quad \mu_2 = \frac{D_2 - B_2 \mu_0}{B_0}, \quad \mu_3 = \frac{D_3 - 3B_2 \mu_1}{B_0}, \dots \quad (3.6.5)$$

В выражении (3.6.5) обозначено

$$\begin{aligned} \mu_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k k(n), & B_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k R_{yy}(n), \\ D_k &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k R_{xy}(n), \end{aligned} \quad (3.6.6)$$

где μ_k , B_k и D_k — представляют собой вышеуказанные моменты.

Уравнения (3.6.5) имеют простой вид, так как

$$B_1 = B_3 = B_5 = \dots = 0$$

вследствие четности автокорреляционной функции.

Решение задачи классическим методом моментов возможно при условии, что взаимная и автокорреляционная функции $R_{xy}(n)$ и $R_{yy}(n)$ быстро стремятся к нулю и не имеют постоянной или периодической составляющих.

Далее рассмотрим, как определяются моменты взаимокорреляционной функции B_k и моменты автокорреляционной функции D_k . Запишем выражения для двухстороннего дискретного преобразования Лапласа соответствующих корреляционных функций

$$R_{xy}(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy}(n) e^{-qn}, \quad (3.6.7)$$

$$R_{yy}(q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{yy}(n) e^{-qn}. \quad (3.6.8)$$

Возьмем k -ю производную от обеих частей выражения (3.6.7).

$$[D^k R_{xy}(q)]_{q=c} = D^k \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy}(n) e^{-qn} \right]_{q=0}, \quad (3.6.9)$$

где

$$D = \frac{a}{dq},$$

c — масштабный коэффициент функции веса, соответствующей применяемому дискретному ортогональному базису.

Производя в правой части выражения (3.6.9) операцию взятия производной под знаком суммирования, имеем

$$[D^k R_{xy}(q)]_{q=c} = (-1)^k \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^k R_{xy}(n) e^{-cn}. \quad (3.6.10)$$

Следовательно,

$$[D^k R_{xy}(q)]_{q=c} = (-1)^k D_k. \quad (3.6.11)$$

В этом выражении e^{-cn} — функция веса выбранного базиса.

Аналогично определяется момент автокорреляционной функции входного сигнала системы автоматического управления из выражения (3.6.8)

$$[D^k R_{yy}(y)]_{q=c} = (-1)^k B_k. \quad (3.6.12)$$

Таким образом, решение задачи сводится к определению по формулам (3.6.11) и (3.6.12) моментов взаимной и автокорреляционных функций сигналов $x(n)$ и $y(n)$, затем по формулам (3.6.5) определяются моменты импульсной переходной функции системы μ_k . По найденным моментам μ_k находятся ДОСХ $\{c_i\}$ объекта по зависимостям, соответствующим выбранному дискретному ортогональному базису. Например, для функций и полиномов Лагерра дискретного аргумента элементы ДОСХ определяются по формулам

$$\begin{aligned} c_0 &= \mu_0, & c_1 &= \mu_0 - g\mu_1, & c_2 &= \mu_0 - 2g\mu_1 + \frac{1}{2!} g^2 \mu_2, \\ c_3 &= \mu_0 - 3g\mu_1 + \frac{3}{2!} g^2 \mu_2 - \frac{1}{3!} g^3 \mu_3, \\ c_4 &= \mu_0 - 4g\mu_1 + \frac{6}{2!} g^2 \mu_2 - \frac{4}{3!} g^3 \mu_3 + \frac{1}{4!} g^4 \mu_4, \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

где g — масштабный коэффициент веса для функций и полиномов Лагерра (3.1.24), (3.1.25).

Разностное уравнение, описывающее динамику ДОО по заданным автокорреляционной функции входного сигнала и взаимнокорреляционной функции входного и выходного сигналов дискретного эргодического стационарного случайного процесса, в комплексной области имеем вид

$$\sum_{i=0}^p f_i q_i R_{yy}(q) = \sum_{i=0}^g m_i q^i R_{xy}(q), \quad (3.6.14)$$

где f_i и m_i — соответственно коэффициенты правой и левой части разностного уравнения.

Коэффициенты выражения (3.6.14) связаны с моментами автокорреляционной функции (3.6.12) соотношениями

$$m_q = \frac{(-1)^q}{q!} B_q, \dots, m_k = \frac{(-1)^k}{k!} B_k - \\ = \sum_{i=k+1}^r \frac{i!}{(i-k)! k!} m_i \left(\frac{q}{k}\right)^{i-k}, \dots, m_0 = B_0 - \sum_{i=1}^q m_i \left(\frac{q}{2}\right)^i. \quad (3.6.15)$$

Подобными выражениями определяется зависимость коэффициентов f_i от моментов взаимокорреляционной функции (3.6.11).
Обобщим изложенную методику для случая

$$\varepsilon = r.$$

Уравнение (3.6.1) преобразуется к виду

$$\sum_{\varepsilon=1}^r \sum_{m=-\infty}^{\infty} R_{y_{\varepsilon} y_p} (n-m) k_{\varepsilon} (m) = R_{xy_p} (n), \quad (3.6.16)$$

где $R_{y_{\varepsilon} y_p} (n)$ — элементы матрицы взаимной и автокорреляционной функции входных сигналов y_g для соответствующих индексов,

$R_{xy_p} (n)$ — элементы матрицы взаимокорреляционной функции входных y_g и выходного x сигналов,

$k_{\varepsilon} (m)$ — элементы импульсной переходной матрицы многомерной дискретной системы автоматического управления,

ε — номер входного сигнала многомерной системы,

p — номер реализации в системе (3.6.16).

Уравнения (3.6.16) целесообразно решать в области комплексного переменного. Для этого, применяя двустороннее дискретное преобразование Лапласа, получим

$$R_{yy} (q) K (q) = R_{xy} (q), \quad (3.6.17)$$

где элементы матриц имеют вид

$$K_{\varepsilon} (q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} k_{\varepsilon} (n) e^{-qn}, \quad R_{y_{\varepsilon} y_p} (q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{y_{\varepsilon} y_p} e^{-qn},$$

$$R_{xy_p} (q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xy_p} (n) e^{-qn}, \quad \varepsilon = 1, 2, \dots, r,$$

r — число входных сигналов многомерных ДДУ.

Из выражения (3.6.17) следует

$$K_{\varepsilon} (q) = \frac{P_{\varepsilon} (q)}{P (q)}, \quad (3.6.18)$$

где

$$P_{\varepsilon}(q) = \begin{vmatrix} R_{y_1 y_1}(q) & R_{y_2 y_1}(q) & \dots & R_{y_{\varepsilon} y_1}(q) & \dots & R_{y_r y_1}(q) \\ R_{y_1 y_2}(q) & R_{y_2 y_2}(q) & \dots & R_{y_{\varepsilon} y_2}(q) & \dots & R_{y_r y_2}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{y_1 y_{\varepsilon}}(q) & R_{y_2 y_{\varepsilon}}(q) & \dots & R_{y_{\varepsilon} y_{\varepsilon}}(q) & \dots & R_{y_r y_{\varepsilon}}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{y_1 y_r}(q) & R_{y_2 y_r}(q) & \dots & R_{y_{\varepsilon} y_r}(q) & \dots & R_{y_r y_r}(q) \end{vmatrix}$$

$$P(q) = \begin{vmatrix} R_{y_1 y_1}(q) & R_{y_2 y_1}(q) & \dots & R_{x y_1}(q) & \dots & R_{y_r y_1}(q) \\ R_{y_1 y_2}(q) & R_{y_2 y_2}(q) & \dots & R_{x y_2}(q) & \dots & R_{y_r y_2}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{y_1 y_{\varepsilon}}(q) & R_{y_2 y_{\varepsilon}}(q) & \dots & R_{x y_{\varepsilon}}(q) & \dots & R_{y_r y_{\varepsilon}}(q) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{y_1 y_r}(q) & R_{y_2 y_r}(q) & \dots & R_{x y_r}(q) & \dots & R_{y_r y_r}(q) \end{vmatrix}$$

Переход во временную область осуществляется ортогональным методом моментов.

Введем следующие обозначения:

$$\mu_{\theta}^{\varepsilon} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\varepsilon} k_{\varepsilon}(n) \rho(n) \quad (3.6.19)$$

— θ -й момент элементов импульсной переходной матрицы,

$$A_{\rho\theta} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\theta} R_{x y_{\rho}}(n) \rho(n) \quad (3.6.20)$$

— θ -й момент элементов матрицы взаимнокорреляционной функции входных и выходных сигналов,

$$B_{\rho\theta}^{\varepsilon} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^{\theta} R_{y_{\varepsilon} y_{\rho}}(n) \rho(n) \quad (3.6.21)$$

— θ -й момент взаимной и автокорреляционной функции, соответствующий индексам входных сигналов,

$\rho(n)$ — функция веса выбранного базиса.

Моменты указанных выше величин и соответствующие производные этих величин в области q связаны между собой соотношениями [23].

$$\begin{aligned} (-1)^{\theta} \mu_{\theta}^{\varepsilon} &= D^{\theta} k_{\varepsilon}(q) \Big|_{q=g}, & (-1)^{\theta} A_{\rho\theta} &= D^{\theta} R_{x y_{\rho}}(q) \Big|_{q=g}, \\ (-1)^{\theta} B_{\rho\theta}^{\varepsilon} &= D^{\theta} R_{y_{\varepsilon} y_{\rho}}(q) \Big|_{q=g}, \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

g — масштабный коэффициент веса для применяемых ортогональных многочленов дискретного аргумента.

Таким образом, используя введенные понятия, решение проводится следующим образом. По записям корреляционных функций входных и выходных сигналов определяются моменты элементов матрицы взаимной и автокорреляционных функций по выражениям (3.6.20) и (3.6.21). Далее, подставляя найденные значения A_p^m и B_{qp}^m в выражение числителя и знаменателя матричного уравнения (3.6.18), можно определить элементы матрицы $K_\epsilon(q)$.

Беря производные по Θ -ую включительно от найденных выражений $K_\epsilon(q)$ и используя формулу (3.6.19), определяются моменты элементов импульсной переходной матрицы.

Чтобы определить элементы импульсной переходной матрицы в виде разложения по ортогональным многочленам дискретного аргумента, то есть в виде

$$k_\epsilon(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{\epsilon i} u_i(n),$$

необходимо найти для конкретного базиса зависимость элементов ДОСХ от определенных выше моментов $\mu_{\epsilon i}^k$.

§ 3.7. СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДИСКРЕТНЫХ ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ ПО ОБОБЩЕННЫМ СПЕКТРАМ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ СИГНАЛОВ

Определение динамических характеристик дискретных объектов управления (ДОУ) по статистическим данным можно провести во временной области, то есть по обобщенным спектрам входных и выходных сигналов. Для этого корреляционные функции $R_{xy}(n)$ и $R_{yy}(n)$ представляются в виде разложения в ряд по ортогональной дискретной системе элементов.

Рассмотрим методику разложения указанных выше величин на примере автокорреляционной функции $R_{yy}(n)$. Разложение взаимокорреляционной функции $R_{xy}(n)$ производится аналогичным образом.

Для эргодического стационарного дискретного случайного процесса автокорреляционная функция входного сигнала описывается равенством [78]

$$R_{yy}(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{N=0}^{\infty} y(n) y(n-m). \quad (3.7.1)$$

Представим $R_{yy}(n)$ в виде разложения в ряд по ортогональным многочленам $u_i(n)$ дискретного аргумента

$$R_{yy}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i u_i(n). \quad (3.7.2)$$

В выражении (3.7.2) коэффициенты разложения a_i представляют собой спектр данной автокорреляционной функции и определяются из равенства

$$a_i = \sum_{n=0}^{\infty} R_{yy}(n) u_i(n). \quad (3.7.3)$$

Подставляя значение $R_{yy}(n)$ из выражения (3.7.1) в равенство (3.7.3), получим

$$\begin{aligned} a_i &= \sum_{N=0}^{\infty} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{\infty} y(n) y(n-m) u_i(n) = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N y(n) \sum_{N=0}^{\infty} y(n-m) u_i(n) = \\ &= \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N y(n) G(n). \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

В выражении (3.7.4) обозначено

$$G(n) = \sum_{n=0}^{\infty} y(n-m) u_i(n). \quad (3.7.5)$$

Таким образом, по выражению (3.7.4) с учетом равенства (3.7.5) легко реализовать блок-схему вычислителя спектров данных сигналов.

Итак, применяя вышеуказанную методику, корреляционные функции представляем в виде

$$\begin{aligned} R_{xy}(n) &= \sum_{j=1}^i b_j u_j(n), \quad n > 0, \\ R_{xy}(n) &= \sum_{j=1}^i d_j u_j(-n), \quad n < 0, \\ R_{yy}(n) &= \sum_{j=1}^i a_j u_j(n), \quad n > 0, \\ R_{yy}(n) &= \sum_{j=1}^i a_j u_j(-n), \quad n < 0, \end{aligned} \quad (3.7.6)$$

где

$$u_j(n) = u_0^j + u_1^j n + \dots + u_j^j n^j. \quad (3.7.7)$$

С другой стороны корреляционные функции $R_{yy}(n)$ и $R_{xy}(n)$ можно записать в виде степенных рядов

$$R_{xy}(n) = R_{xy0} + R_{xy1} \cdot n + R_{xy2} \frac{n^2}{2!} + \dots + R_{xyi} \frac{n^i}{i!}, \quad n > 0,$$

$$R_{xy}(n) = R'_{xy0} - R'_{xy1} \cdot n + R'_{xy2} \frac{n^2}{2!} + \dots + (-1)^i R'_{xyi} \frac{n^i}{i!}, \quad n < 0,$$

$$R_{yy}(n) = R_{yy0} + R_{yy1} \cdot n + R_{yy2} \frac{n^2}{2!} + \dots + R_{yyi} \frac{n^i}{i!}, \quad n > 0.$$

$$R_{yy}(n) = R_{yy0} + R_{yy1} \cdot n + R_{yy2} \frac{n^2}{2!} + \dots + (-1)^i R_{yyi} \frac{n^i}{i!}, \quad n < 0. \quad (3.7.8)$$

Коэффициенты выражения (3.7.8) однозначно связаны с коэффициентами равенств (3.7.6). Так коэффициенты $\{R_{yyi}\}$ определяются через спектры $\{a_j\}$ по следующим соотношениям:

$$R_{yy0} = a_0 u_0^0 + a_1 u_0^1 + \dots + a_i u_0^i,$$

$$R_{yy1} = a_1 u_1^1 + a_2 u_1^2 + \dots + a_i u_1^i,$$

$$R_{yy2} = 2! [a_2 u_2^1 + a_3 u_2^2 + \dots + a_i u_2^i],$$

$$\dots$$

$$R_{yyi} = i! a_i u_i^i. \quad (3.7.9)$$

Аналогичными соотношениями связаны коэффициенты $\{R_{xyj}\}$ со спектрами $\{b_j\}$ и коэффициенты $\{R'_{xyj}\}$ с $\{d_i\}$.

Импульсную переходную функцию $\kappa(n)$ определяем в виде ряда

$$k(n) = k_0 + k_1 n + k_2 \frac{n^2}{2!} + \dots + k_i \frac{n^i}{i!} + \dots \quad (3.7.10)$$

Теперь, когда величины $R_{xy}(n)$, $R_{yy}(n)$, $\kappa(n)$ представлены в виде разложений в степенные ряды, подставим эти разложения в выражение, связывающее корреляционные функции сигналов и импульсную переходную функцию ДОУ. В результате этого для физически реализуемой системы с учетом свойства четности автокорреляционной функции получим

$$R_{xy0} + R_{xy1} \cdot n + R_{xy2} \frac{n^2}{2!} + \dots + R_{xyi} \frac{n^i}{i!} + R'_{xy0} - R'_{xy1} \cdot n +$$

$$+ R_{xy2} \frac{n^2}{2!} + \dots + (-1)^i R_{xyi} \frac{n^i}{i!} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} 2 \left(R_{yy0} + R_{yy2} \cdot \frac{m^2}{2!} + \dots + R_{yyi} \frac{m^i}{i!} \right) \times$$

$$\times \left[k_0 + k_1(n-m) + k_2 \cdot \frac{(n-m)^2}{2!} + \dots \right]. \quad (3.7.11)$$

Из выражения (3.7.11) определяются коэффициенты разложения импульсной переходной функции $\{\kappa_j\}$. Приравнявая члены при одинаковых степенях n и делая соответствующие преобразования, получим

$$k_0 = \frac{R_{xy0} - R'_{xy0}}{2R_{yy0}}, \quad k_1 = \frac{R_{xy1} + R'_{xy1}}{2R_{yy0}},$$

$$k_2 = \frac{R_{xy2} + R'_{xy2} - 2R_{xx2} \cdot k_0}{2R_{yy0}}, \dots \quad (3.7.12)$$

По полученным составляющим $\{k_i\}$ определяется импульсная переходная функция ДОУ по формуле (3.7.10).

=====

**АЛГОРИТМЫ ДЕТЕРМИНИРОВАННОГО
И СТАТИСТИЧЕСКОГО СИНТЕЗА ДИСКРЕТНЫХ
СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ
ПО АНАЛИТИЧЕСКИМ И ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ
ДАНЫМ**

**§ 4.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА
СРЕДНЕ-КВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ДИНАМИЧЕСКИХ
ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО
УПРАВЛЕНИЯ ПО АНАЛИТИЧЕСКИМ ДАНЫМ**

Всякая дискретная система автоматического управления (ДСАУ) осуществляет преобразование совокупности входных сигналов в совокупность выходных сигналов в соответствии с заданным алгоритмом. Задача выбора динамических характеристик системы не представляет особых трудностей, если входные сигналы детерминированы. Однако на практике кроме полезной составляющей $g(n)$ входные сигналы содержат случайные помехи $m(n)$. В этом случае задача определения динамических характеристик системы значительно усложняется, поскольку требует выполнения преобразования входных сигналов в выходные с заданной степенью точности при малых случайных воздействиях.

Задача выбора оператора преобразования указанных выше величин из условия получения экстремальных значений заданных критериев называется задачей синтеза оптимальных динамических характеристик дискретной системы. Широкое распространение, вследствие своей простоты, получил метод оптимизации, основанный на критерии минимума среднеквадратической ошибки. Впервые [106] задача синтеза в смысле минимума среднеквадратической ошибки поставлена и решена А. Н. Колмогоровым, как задача интерполяции и экстраполяции стационарных случайных последовательностей. Затем Н. Винер распространил эту теорию на непрерывные случайные процессы и дал решение задачи определения оптимальной импульсной функции системы, находящейся под влиянием стационарных случайных воздействий.

Ниже будут приведены допущения, которые приняты при формулировке задачи определения оптимальных динамических характеристик дискретных систем. Эти допущения в точности совпадают с допущениями, на которых основана теория Н. Винера. Поэтому рассматриваемую задачу определения оптимальной дискретной системы будем называть дискретным аналогом задачи Н. Винера.

Пусть на вход ДСАУ поступает сигнал вида

$$y(n) + g(n) + m(n), \quad (4.1.1)$$

где

$g(n)$ — полезный случайный сигнал,

$m(n)$ — случайный сигнал помехи.

Предположим, что обе составляющие входного сигнала являются стационарными случайными функциями с нулевым математическим ожиданием и корреляционными функциями

$$R_{gg}(n), R_{mm}(n), R_{gm}(n) \text{ и } R_{mg}(n).$$

Искомую дискретную оптимальную систему будем определять в классе линейных систем. Кроме этого необходимо выполнение условия физической осуществимости, то есть $k(n) = 0$ при $n < 0$, где $k(n)$ — импульсная переходная функция оптимизируемой ДСАУ.

Работа оптимального самонастраивающегося фильтра заключается в том, что в процессе функционирования системы измеряются значения входных и выходных сигналов и по ним вычисляются характеристики корректирующего фильтра, соответствующие минимуму оптимизирующего функционала.

В процессе работы ДСАУ известна только сумма полезного входного сигнала и помехи, а для определения оптимальных характеристик необходимо знание одной из составляющих $g(n)$ или $m(n)$.

Рассмотрим решение задачи в случае, если возможно в некоторые моменты времени отключать полезный сигнал и производить запись помехи.

Разность

$$\varepsilon(n) = x(n) - f(n) \quad (4.1.2)$$

будем называть ошибкой преобразования. В выражении (4.1.2) обозначено:

$x(n)$ — желаемый выходной сигнал ДСАУ,

$f(n)$ — фактический выходной сигнал ДСАУ.

Математическое ожидание ошибки преобразования:

$$M[\varepsilon(n)] = 0, \quad \sigma^2 = R_{\varepsilon\varepsilon}(0) \rightarrow \min, \quad (4.1.3)$$

где σ^2 — дисперсия ошибки воспроизведения входного сигнала.

Из выражения (4.1.3) получим

$$\sigma^2 = R_{ff}(0) + R_{gg}(0) + R_{mm}(0) - R_{fg}(0) - R_{gf}(0) + R_{fm}(0) + R_{mf}(0) + R_{gm}(0) + R_{mg}(0). \quad (4.1.4)$$

Для определения характеристик оптимальной дискретной системы требуется минимизировать функционал (4.1.4). Учитывая в выражении (4.1.4) только члены, зависящие от характеристик корректирующего фильтра, условие оптимизации примет вид

$$\overline{\sigma^2} = R_{ff}(a) - R_{fg}(a) + R_{fm}(a). \quad (4.1.5)$$

Будем представлять импульсную переходную функцию корректирующего дискретного фильтра в виде ортогонального ряда. В работе [108] показано, что для объектов высокого порядка (до 8-16) достаточно точное представление функции веса достигается 7-9 членами ортогонального ряда. Вместе с тем было показано, что эти семь — девять членов целиком определяют динамическую систему и дают возможность провести ее полный анализ.

Поэтому логичной является задача определения оптимальной ДОСХ, то есть таких коэффициентов $\{C_k\}$, которые обеспечили бы выполнение заданного критерия качества.

Представление импульсной переходной функции в виде ортогонального ряда является полезным с той точки зрения, что такое представление позволит использовать прямые методы вариационного исчисления, с помощью которых задача оптимизации решается значительно проще, чем использование, предположим, метода последовательных приближений в функциональном пространстве. При использовании понятия ДОСХ автоматически решается задача реализации найденного оператора. В качестве дискретного базиса при рассмотрении вопросов построения аналитических самонастраивающихся моделей и систем выбираются функции, определенные на интервале $[0, \infty]$ и имеющие дискретное преобразование Лапласа. Эти функции легко физически реализуются с помощью РС — элементов и ЦВМ.

Использование же функциональных пространств ставит в качестве самостоятельной и достаточно серьезной задачи задачу реализации найденного оператора. Синтез аналитических самонастраивающихся дискретных систем в первую очередь требует решения этой задачи.

Таким образом, импульсная переходная функция дискретного корректирующего фильтра определяется в виде

$$k_{\phi}(n) = \sum_{i=1}^N c_i u_i(n). \quad (4.1.6)$$

Элементы ортогонального дискретного базиса должны удовлетворять условию

$$\{u_i(n)\} \in \bar{L}^2, \quad \sum_{i=0}^{\infty} |u_i(n)| < \infty. \quad (4.1.7)$$

Требуется определить величины c_i таким образом, чтобы дисперсия (4.1.3) ошибки воспроизведения полезного сигнала $g(n)$ на выходе системы была минимальной при данной структуре фильтра (4.1.6).

Согласно дискретному аналогу выражения свертки имеем

$$f(n) = \sum_{i=1}^r c_i \sum_{n=0}^{\infty} u_i(n) y(k-n). \quad (4.1.8)$$

Таким образом, на основании представлений (4.1.6) и (4.1.8) для минимизируемого выражения (4.1.5) получим

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^2 &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{ff}(n-k) u_i(n) u_j(n) - \\ &- 2 \sum_{i=1}^N c_i \sum_{n=0}^{\infty} R_{ff}(n) u_i(n) + 2 \sum_{i=1}^N c_i \sum_{n=0}^{\infty} R_{fg}(n) u_i(n) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j F_{ij} - 2 \sum_{i=1}^N c_i F_i, \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

где

$$F_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{ff}(n-k) u_i(n) u_j(n), \quad (4.1.10)$$

$$F_i = \sum_{n=0}^{\infty} [R_{ff}(n) - R_{fg}(n)] u_i(n). \quad (4.1.11)$$

Находя разности от выражения (4.1.9), получим систему уравнений относительно искомого ДОСХ корректирующего дискретного фильтра, которая имеет вид

$$\sum_{j=1}^N F_{ij} c_j = F_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.1.12)$$

В процессе работы системы, пользуясь записью сигнала помехи $m(n)$, определяется величина $F_{ij}(n)$.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Обозначая

$$s_i(n) = \sum_{n=0}^k y(n) u_i(k-n), \quad (4.1.13)$$

покажем, что

$$F_{ij}(n) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k s_i(n) s_j(n). \quad (4.1.14)$$

Поскольку $|y(n)| < A$, то можно записать

$$|y(k-n) y(k-u) u_i(n) u_j(n)| \leq A^2 |u_i(n) u_j(n)|. \quad (4.1.15)$$

На основании выражения (4.1.15) и указанных выше ограничений получим [78]

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N \left[\sum_{n=0}^{\infty} y(k-n) u_i(n) \sum_{n=0}^{\infty} y(k-u) u_j(n) \right] = \\ \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N y(k-n) y(k-u) \right] u_i(n) u_j(n) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^N y(k-n) y(k-u) \right] u_i(n) u_j(n) = \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} R_{yy}(n-u) u_i(n) u_j(n) = \\
&= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=0}^{2N+1} s_i(n) s_j(n). \tag{4.1.16}
\end{aligned}$$

Выражение (4.1.14) доказано.

Таким образом, дискретный автоматический фильтр будет реализовывать следующий алгоритм:

$$\sum_{j=1}^N F_{ij}(n) c_j = F_i(n), \tag{4.1.17}$$

поскольку аналогично доказанному выше можно показать, что

$$F_i(n) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k y(n) s_i(n) - \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k m_1(n) s_i(n), \tag{4.1.18}$$

где величина $m_1(n)$ является заранее записанной реализацией шума $m(n)$.

В общем случае система уравнений (4.1.12) имеет единственное решение, при этом при $k \rightarrow \infty$ $F_{ij}(n) \rightarrow F_{ij}$ и $F_i(n) \rightarrow F_i$ и, следовательно, решение системы (4.1.12) стремится к решению системы при эталонном значении F_{ij} и F_i .

Так как решение системы (4.1.17) при фиксированном k может сильно отличаться от оптимальных значений c_i , то на фильтр вместо коэффициентов $c_i(k)$ можно подавать коэффициенты $\bar{c}_i(k)$, определяемые равенствами

$$\begin{aligned}
\bar{c}_i(k) &= c_i(k) & \text{при } c_{\alpha} \leq c_i(k) \leq c_{\beta}, \\
\bar{c}_i(k) &= c_{\alpha} & \text{при } c_i(k) < c_{\alpha}, \\
\bar{c}_i(k) &= c_{\beta} & \text{при } c_i(k) > c_{\beta},
\end{aligned} \tag{4.1.19}$$

где

c_{α} и c_{β} — установленные заранее верхняя и нижняя границы изменения коэффициентов разложения (4.1.6).

Структурная схема фильтра для $N=2$ изображена на рис. 4.1.1.

В заключение заметим, что в случае, если полезная и случайная составляющие входного сигнала дискретной системы некоррелированы, вычисление выражения (4.1.18) не требует записи реализации помехи. В этом случае для F_i получим алгоритм вида

$$F_i(n) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^k y(n) s_i(n) - \sum_{n=0}^k R_{mm}(n) u_i(n). \quad (4.1.20)$$

Для выражения (4.1.20) также верны условия ограничения ДОСХ (4.1.19).

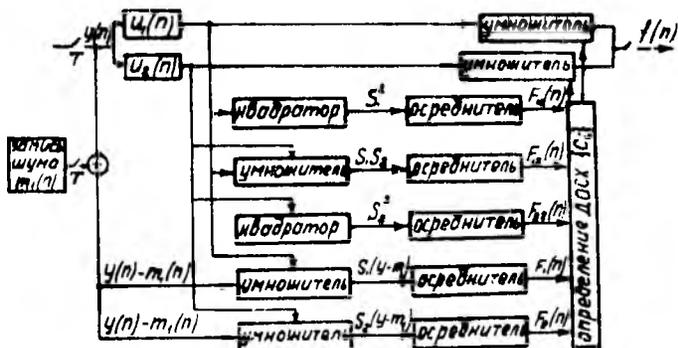


Рис. 4.1.1. Структурная схема оптимизирующего фильтра при $N = 2$.

§ 4.2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА ОПТИМАЛЬНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫМ ДАННЫМ

Предположим, что свойства шума $m(n)$ (4.1.1) неизвестны, а статистические свойства полезного сигнала определяются выражением

$$g(n) = g_1(n) + g_2(n), \quad (4.2.1)$$

в котором

$g_1(n)$ — регулярная составляющая, величина которой либо постоянна, либо медленно меняющаяся на интервале настройки функция времени, такая, что ее можно считать постоянной;

$g_2(n)$ — случайная составляющая полезного сигнала, которая является стационарной, эргодичной, с нулевым математическим ожиданием.

Занись одной из реализаций случайной составляющей $g_2'(n)$ известна. Допустим, что шум стационарен, эргодичен, с нулевым математическим ожиданием.

Задача оптимизации в этом случае формулируется так. Найти минимум функционала

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} R_{mm}(n-u) k(n) k(u) \quad (4.2.2)$$

при следующих ограничениях:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} k(n), \quad \mu_1 = \sum_{n=0}^{\infty} nk(n), \dots, \\ \mu_r &= (-1)^{r+1} \sum_{n=0}^{\infty} n^r k(n). \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Импульсную переходную функцию корректирующего дискретного фильтра будем определять в виде (4.1.6).

Предполагая, что оптимальный оператор дискретной системы с достаточной степенью точности определяется координатами выбранного базиса, имеем

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} R_{mm}(n-u) u_i(n) u_j(n). \quad (4.2.4)$$

Обозначая

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{u=0}^{\infty} R_{mm}(n-u) u_i(n) u_j(n) &= F_{ij}, \\ \mu_0' &= \sum_{n=0}^{\infty} u_i(n), \quad \mu_1' = \sum_{n=0}^{\infty} nu_i(n), \dots, \\ \mu_r' &= (-1)^r \sum_{n=0}^{\infty} n^r u_i(n), \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

получим следующую формулировку задачи:
найти минимум функционала

$$\bar{\varepsilon}^2 = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j F_{ij}, \quad (4.2.6)$$

если граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} M_1 &= \mu_0 - 1 + \sum_{i=1}^N c_i \mu_0', \quad M_2 = -\mu_1 + \sum_{i=1}^N c_i \mu_1', \dots, \\ M_r &= -\mu_r + \sum_{i=1}^N c_i \mu_r'. \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Заметим, что искомые элементы ДОСХ $\{c_i\}$ являются независимыми. Для отыскания экстремума функционала (4.2.6) применим метод множителей Лагранжа при ограничениях (4.2.7). Получим функцию Лагранжа в виде

$$\Phi = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N c_i c_j F_{ij} + \lambda_1 M_1 + \lambda_2 M_2 + \dots + \lambda_r M_r. \quad (4.2.9)$$

Таким образом $(N+r)$ неизвестных $\{c_i\}$ и λ_r находятся из r уравнений, полученных из системы (4.2.7), и N уравнений, полученных из условия минимизации функционала (4.2.9) и имеют вид

$$\mu_0 - 1 + \sum_{i=1}^N c_i \mu_0' = 0, \quad -\mu_1 + \sum_{i=1}^N c_i \mu_1' = 0, \dots,$$

$$-\mu_r + \sum_{i=1}^N c_i \mu_r' = 0,$$

$$2 \sum_{i=1}^N c_i F_{ij} + \lambda_1 \mu_1' + \lambda_2 \mu_2' + \dots + \lambda_r \mu_r' = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.2.10)$$

Повторяя рассуждения, приведенные в § 4.1, найдем, что на практике параметры корректирующего фильтра $\{c_i\}$ будут решением системы

$$2 \sum_{j=1}^N c_j F_{ij}(n, \sigma) + \lambda_1 \mu_1' + \lambda_2 \mu_2' + \dots + \lambda_r \mu_r' = 0, \\ i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.2.11)$$

где

$$F_{ij}(n, \sigma) = \frac{1}{k} \sum_{n=0}^N s_i(n, \sigma) s_j(n, \sigma), \quad (4.2.12)$$

$$s_i(n, \sigma) = \sum_{n=0}^N y(n, \sigma) u_i(k-m). \quad (4.2.13)$$

Анализируя систему уравнений (4.2.10), можно заметить, что для определения оптимальных значений $\{c_i\}$ необходимо определять $F_{ij}(n, \sigma)$. Так как входной сигнал имеет постоянную составляющую $g(n)$, то для вычисления $F_{ij}(n, \sigma)$ необходимо с помощью ЦВМ проводить центрирование случайного процесса $y(n)$.

Таким образом, в результате реализации алгоритма (4.2.10) оптимальная модель корректирующего фильтра определяется равенством

$$k_{\Phi}(n) = \sum_{i=1}^N c_i u_i(n).$$

Можно показать [62], что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\varepsilon_n^2} = \overline{\varepsilon^2}.$$

На основе утверждения о том, что система (4.2.10) позволяет найти оптимальные значения ДОСХ динамической модели в выбранном дискретном ортогональном базисе, можно сделать вывод, что среднеквадратическая ошибка на выходе фильтра, определяемого коэффициентами $\{c_i\}$ и при $k > M$ (M — интервал времени, через который значения $F_{ij}(n, \sigma)$ достаточно мало отличаются от значений F_{ij}) будет близка к величине среднеквадратической ошибки на выходе оптимального фильтра, а динамическая ошибка

воспроизведения регулярной составляющей $g(n)$ не будет превышать наперед заданной величины ε_{gmax} .

Так как возможности аналогового фильтра ограничены, а также при $k < M$, при решении системы уравнений (4.2.10) могут иметь место значительные ошибки. На фильтр, реализующий оптимальный оператор, необходимо в этих случаях подавать значения $c_i(n)$ в соответствии с равенствами (4.1.19).

§ 4.3. МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПТИМАЛЬНОЙ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОЙ ОШИБКИ ДИСКРЕТНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕТОДОМ НАЙСКОРЕЙШЕГО СПУСКА

Известно [83], что методы теории оптимальных процессов приводят вариационные проблемы к решению некоторых других задач, таких как решение разностных уравнений при наличии краевых условий и условий в промежуточных точках отрезков суммирования. Последние задачи оказываются достаточно простыми лишь в отдельных случаях. Обычно же нужное решение может быть найдено лишь в процессе численных расчетов последовательными приближениями.

Одним из таких численных методов решения оптимальных задач является метод наискорейшего спуска, который состоит в последовательном улучшении некоторого произвольно заданного оператора. Основное в методе наискорейшего спуска заключается в установлении признаков наиболее подходящего исправления параметров динамических характеристик системы предыдущего приближения.

Пусть динамические характеристики искомого дискретного фильтра определяются импульсной переходной функцией $k_{\phi}(n) \in \bar{L}^2$. При этом

$$\sum_{n=0}^{\infty} |k_{\phi}(n)| < \infty, \quad k_{\phi}(n) = 0 \quad \text{при} \quad n \leq 0,$$

то есть удовлетворяет условию физической реализации.

Будем определять $k_{\phi}(n)$ в виде ортогонального разложения по дискретному базису

$$k_{\phi}(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i u_i(n), \quad (4.3.1)$$

где дискретный базис $\{u_i(n)\}$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=0}^{\infty} |u_i(n)| < \infty, \quad i = 1, 2, \dots \quad (4.3.2)$$

Таким образом, задача оптимизации исследуемой ДСАУ сводится к определению ее дискретной ортогональной спектральной характеристики (ДОСХ) [10].

Пусть на вход дискретной системы поступает сигнал

$$y(n) = g(n) + m(n), \quad (4.3.3)$$

где $g(n)$ — полезный сигнал, который требуется воспроизвести; $m(n)$ — «почти» стационарная, эргодическая на рассматриваемом интервале времени помеха.

Для корреляционных функций процессов $g(n)$ и $m(n)$ справедливо условие

$$\sum_{n=0}^{\infty} |R(n)| < \infty,$$

кроме того,

$$|m(n)| < A_1, \quad |g(n)| < A_2$$

для всех n .

В соответствии с постановкой задачи необходимо найти оптимальные динамические характеристики корректирующего фильтра, доставляющие минимум функционалу

$$\bar{\varepsilon}^2 = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N [g(n) - f(n)]^2, \quad (4.3.4)$$

где $f(n)$ — реальный сигнал на выходе дискретной системы.

Применяя дискретное преобразование Лапласа к выражению (4.3.1), перейдем в комплексную область. Далее, используя дискретный аналог равенства Парсеваля, получим

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N y(n) f(n) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-j\pi}^{+j\pi} Y(j\omega) F^*(j\omega) \right] d\omega = \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-j\pi}^{+j\pi} Y^*(j\omega) F(j\omega) d\omega \right], \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

а для ошибки воспроизведения входного сигнала $g(n)$ с учетом разложения (4.3.1) в области q будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2 &= \int_{-j\pi}^{+j\pi} \left[G(j\omega) - \sum_{i=1}^N c_i u_i(j\omega) Y(j\omega) \right] \times \\ &\times \left[G^*(j\omega) - \sum_{i=1}^N c_i u_i^*(j\omega) Y^*(j\omega) \right] d\omega. \end{aligned} \quad (4.3.6)$$

Определяя экстремум выражения (4.3.6), получим следующие зависимости:

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dc_i} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[-u_i(j\omega) Y(j\omega) G^*(j\omega) - u_i^*(j\omega) Y^*(j\omega) \times \right. \\ & \times G(j\omega) + u_i(j\omega) Y(j\omega) \sum_{k=1}^N c_k u_k^*(j\omega) Y^*(j\omega) + \\ & \left. + u_i^*(j\omega) Y^*(j\omega) \sum_{k=1}^N c_k u_k(j\omega) Y(j\omega) \right] d\omega \quad (4.3.7) \end{aligned}$$

или согласно выражению (4.3.5), и обозначая

$$v_i(n) = \sum_{n=0}^N y(n) u_i(k-n), \quad (4.3.8)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dc_i} = & \int_{-\infty}^{\infty} \left[-u_i(j\omega) R_{y_g}(j\omega) - u_i^*(j\omega) R_{y_g}(j\omega) + \right. \\ & + v_i(j\omega) F^*(j\omega) + v_i^*(j\omega) F(j\omega) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} v_i(j\omega) F^*(j\omega) d\omega - \\ & \left. - 2 \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_g}(j\omega) u_i(j\omega) \right] d\omega \quad (4.3.9) \end{aligned}$$

Рассмотрим решение задачи в случае, когда необходимо выделить полезный сигнал $g(n)$ с известными статистическими свойствами. При этом статистические свойства помехи изменяются в широких пределах.

Включая в структурную схему оптимизируемой дискретной системы генератор случайных воздействий, можно вычислять второе слагаемое выражения (4.3.9)

$$B_i = \int_{-\infty}^{\infty} R_{y_g}(j\omega) u_i(j\omega) d\omega.$$

Итак, окончательно получаем выражение

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dc_i} = 2 \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N v_i(n) f(n) - B_i \right], \quad (4.3.10)$$

которое реализуется структурной схемой, приведенной на рис. 4.3.1, и является блоком подстройки ДОСХ корректирующего фильтра. Сигнал на выходе этого блока будет до тех пор, пока не будет выполнено условие

$$\frac{d\bar{\varepsilon}^2}{dc_i} = 0,$$

то есть условие оптимизации.

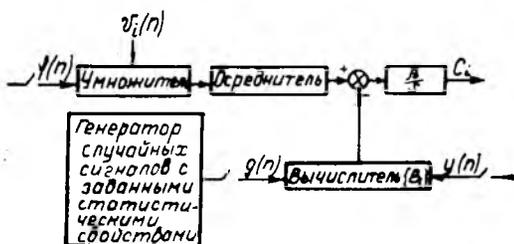


Рис. 4.3.1. Структурная схема фильтра оптимизации методом наискорейшего спуска.

В случае, если входной сигнал и помехи не коррелированы, задача упрощается, поскольку слагаемое $\{B_i\}$ можно вычислить заранее по известным статистическим свойствам полезного входного сигнала.

В заключение заметим, что при использовании спектрального метода оптимизации автоматически решаются вопросы реализации корректирующего дискретного фильтра, поскольку алгоритм (4.3.1) легко реализуется на цифровых вычислительных машинах и на аналоговых элементах.

§ 4.4. АЛГОРИТМ КОРРЕКЦИИ И ОБЩАЯ СТРУКТУРНАЯ СХЕМА ДИСКРЕТНОЙ АНАЛИТИЧЕСКОЙ САМОНАСТРАИВАЮЩЕЙСЯ СИСТЕМЫ

Условия работы ДСАУ часто предъявляют к последним не только требование производить анализ существующих условий работы, но и свой синтез на основании этого анализа из условий получения требуемых или оптимальных динамических характеристик. Таким образом, в этом случае задачи ДСАУ можно сформулировать следующим образом:

1. Определение текущих динамических характеристик системы.
2. Определение оптимальных динамических характеристик по какому-либо критерию оптимизации. В случае ДСАУ стабилизации эта задача упрощается, так как оптимальные характеристики системы подаются извне, по заранее подготовленному алгоритму.
3. Определение динамических характеристик корректирующего фильтра на основании данных, полученных в п. 1 и 2.

Будем называть дискретную систему автоматического управления, отвечающую указанным выше требованиям, дискретной аналитической самонастраивающейся системой управления (ДАСНС).

Изложенное в главе III и настоящей главе позволяет решить задачи первых двух пунктов.

Задача коррекции ДАСНС отличается своей спецификой, поскольку ее можно решать как с помощью дискретных, так и с помощью непрерывных фильтров. В выборе метода коррекции часто приходится решать компромиссную задачу, так как дискретные фильтры гораздо сложнее при реализации, но отличаются простотой расчетов, непрерывные, наоборот, легко реализуемы, но, как правило, точного расчета их сделать не удается, и применяются в основном приближенные методы, погрешность которых необходимо учитывать для каждого конкретного случая.

Рассмотрим метод коррекции ДАСНС с помощью дискретного фильтра ортогональным методом. При этом следует отметить, что динамические характеристики последнего, полученные ортогональным методом, имеют аналитическое выражение вида, который легко реализуется на ЦВМ, а в случае отсутствия вычислительной машины в контуре ДАСНС могут быть легко формализованы на непрерывных элементах. Тем самым описываемый ниже метод со-

вершенствует коррекцию ДАСНС с помощью дискретных фильтров, повышает точность реализации всей ДАСНС, приобретает положительные качества метода коррекции с помощью непрерывных фильтров.

Определение характеристик корректирующего контура ДАСНС использует информацию, полученную в результате определения текущих динамических характеристик системы и решения задачи оптимизации. Поскольку две последние задачи решаются ортогональным методом, то, естественно, и задачу коррекции также решать ортогональным методом, что сохраняет единую методику решения всей задачи самонастройки [30].

Задача коррекции формулируется так: по текущим и оптимальным дискретным ортогональным спектральным характеристикам (ДОСХ) определить ДОСХ корректирующего фильтра, который бы обеспечил требуемый режим работы ДАСНС. Несколько конкретизируем поставленную задачу. Будем рассматривать коррекцию ДАСНС с помощью последовательно включенного дискретного фильтра в прямой цепи, обратную связь для простоты выкладок считаем единичной.

Представим импульсные переходные функции замкнутой и разомкнутой ДАСНС в виде

$$k_z(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^z u_i(n), \quad k_p(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^p u_i(n), \quad (4.4.1)$$

где $u_i(n)$ — ортогональные многочлены дискретного аргумента; $\{c_i^z\}$ и $\{c_i^p\}$ — элементы ДОСХ замкнутой и разомкнутой системы соответственно.

На основании изложенного в § 1.7 для ДОСХ последовательного соединения дискретных фильтров имеем

$$c_k = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i^z c_j^p \bar{c}_{ij}^k, \quad \bar{c}_{ij}^k = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\pi}^{\sigma+j\pi} u_i(q) u_j(q) u_k(-q) dq. \quad (4.4.2)$$

ДОСХ соединения дискретных фильтров с обратной связью определяется следующими зависимостями:

для неединичной обратной связи

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i^z c_j^p \bar{c}_{ij}^k = c_z + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i^{1-oc} c_j^p \bar{c}_{ij}^k, \quad (4.4.3)$$

для единичной обратной связи

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i^z c_j^p \bar{c}_{ij}^k = c_z + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i^z c_j^p \bar{c}_{ij}^k. \quad (4.4.4)$$

Таким образом, по формулам (4.4.2) ÷ (4.4.4) можно определить ДОСХ корректирующего дискретного фильтра $\{c_j^p\}$ для решаемой задачи, то есть решить задачу коррекции ДАСНС.

Для вычисления интеграла (4.4.2) воспользуемся теоремой вычетов. Сделаем замену переменной $l^q = z$.

Тогда

$$\bar{c}_{ij}^k = \frac{1}{2\pi j} \int_L \frac{u_k \left(\frac{1}{z} \right) u_i(z) u_j(z)}{z} dz = \sum \text{Выч} \left[\frac{u_k \left(\frac{1}{z} \right) u_i(z) u_j(z)}{z} \right],$$

причем вычеты берутся по всем особым точкам функций $U_k \left(\frac{1}{z} \right)$ или $\frac{u_i(z) u_j(z)}{z}$.

Отметим, что $\bar{c}_{ij}^k = \bar{c}_{ji}^k$.

Система уравнений (4.4.2) представляет собой алгебраическую линейную бесконечную систему уравнений с бесконечным числом неизвестных c_i' . Если в разложениях (4.4.1) выбрать конечное число членов, то получим

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1' [c_1^2 c_{11}^1 + c_2^2 c_{12}^1 + \dots + c_r^2 c_{1r}^1] + \dots + c_r' [c_1^2 c_{r1}^1 + \dots + c_r^2 c_{rr}^1], \\ c_2 &= c_1' [c_1^2 c_{11}^2 + c_2^2 c_{12}^2 + \dots + c_r^2 c_{1r}^2] + \dots + c_r' [c_1^2 c_{r1}^2 + \dots + c_r^2 c_{rr}^2], \\ c_r &= c_1' [c_1^2 c_{11}^r + c_2^2 c_{12}^r + \dots + c_r^2 c_{1r}^r] + \dots + c_r' [c_1^2 c_{r1}^r + \dots + c_r^2 c_{rr}^r]. \end{aligned}$$

Если в качестве ортонормированной системы функций $\{u_j(n)\}$ выбрана система экспоненциальных функций дискретного аргумента, то коэффициенты a_{ij}^k удовлетворяют условию

$$a_{ij}^k = 0 \text{ при } \max(j, i) > k.$$

В этом случае система (4.4.2) имеет треугольный вид

$$\begin{aligned} c_1 &= c_1' c_1^2 c_{11}^1, \\ c_2 &= c_1' [c_1^2 c_{11}^2 + c_2^2 c_{12}^2] + c_2' [c_1^2 c_{21}^2 + c_2^2 c_{22}^2], \\ c_r &= c_1' [c_1^2 c_{11}^r + \dots + c_r^2 c_{1r}^r] + \dots + c_r' [c_1^2 c_{r1}^r + \dots + c_r^2 c_{rr}^r]. \end{aligned}$$

Структура корректирующего фильтра представлена на рис. 4.4.1.

С учетом вышезложенного на рис. 4.4.2 представлена полная структурная схема ДАСНС, в которой динамические характерис-

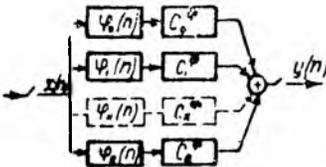


Рис. 4.4.1. Структурная схема корректирующего фильтра.

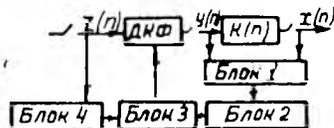


Рис. 4.4.2. Структурная схема ДАСНС.

тики вычисляются по статистическим данным, то есть по взаимной $R_{xy}(n)$ и автокорреляционной $R_{yy}(n)$ функциям входного $y(n)$ и выходного $x(n)$ сигналов.

Блок 1 представляет собой дискретный ортогональный коррелятор, функция которого сводится к определению обобщенных спектров вышеназванных корреляционных функций $\{a_i\}$, $\{b_i\}$ и $\{d_i\}$, то есть имеется в виду представление корреляционных функций в виде разложения в ряд по ортогональным многочленам дискретного аргумента

$$R_{yy}(n) = \sum_{i=0}^l a_i u_i(n), \quad n > 0, \quad n < 0,$$

$$R_{xy}(n) = \sum_{i=0}^l b_i u_i(n), \quad n > 0,$$

$$R_{xy}(n) = \sum_{i=0}^l d_i u_i(n), \quad n < 0. \quad (4.4.5)$$

В этом блоке реализуется следующий алгоритм:

$$a_i = \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{\infty} y(n) G(n), \quad (4.4.6)$$

$$G(n) = \sum_{i=0}^{\infty} y(n-m) u_i(n). \quad (4.4.7)$$

Аналогичные выражения определяют значения $\{b_i\}$ и $\{d_i\}$.

В блоке 2 производится вычисление текущей импульсной переходной функции ДАСНС, которая предварительно представляется в виде ряда

$$k(n) = k_0 + k_1 n + \dots + k_i \frac{n^i}{i!} + \dots \quad (4.4.8)$$

Коэффициенты этого ряда $\{k_i\}$ выражаются через обобщенные спектры корреляционных функций, поэтому блок 2 реализует зависимости

$$\begin{aligned} k_0 &= \frac{f_0(b_i) + f_0'(d_i)}{2\psi_0(a_i)}, & k_1 &= \frac{f_1(b_i) + f_1'(d_i)}{2\psi_0(a_i)}, \\ k_2 &= \frac{f_2(b_i) + f_2'(d_i) - 2\psi_2(a_i) k_0}{2\psi_0(a_i)}, \dots \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Для простоты написания в последнем выражении при обозначении функций опущены фигурные скобки у аргументов.

Функции $f_0(b_i)$, $f_1(b_i)$, ..., $f_0'(d_i)$, $f_1'(d_i)$, ..., $\psi_0(a_i)$, $\psi_1(a_i)$, ... являются сравнительно не сложными и значения их легко вычисляются.

В блоке 4 по заданному критерию оптимальности производится вычисление оптимальных динамических характеристик ДАСНС, предварительно осуществляя анализ входной величины. Математика

тическая модель оптимальной замкнутой ДАСНС определяется в виде

$$k_3(n) = \sum_{i=0}^l c_i^3 u_i(n).$$

Для разомкнутой системы аналогичное выражение имеет следующий вид:

$$k_p(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i^p \varphi_i(n).$$

Информация о ДОСХ текущей и оптимальной импульсных переходных функций ДАСНС поступает в блок 3, реализующий алгоритм

$$\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i^{1'} c_j^{\psi} \bar{c}_{ij}^k = c_3 + \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_i^{1'} c_j^{\psi} \bar{c}_{ij}^m, \quad (4.4.10)$$

по которому определяется ДОСХ дискретного корректирующего фильтра (ДКФ).

В случае ДАСНС стабилизации задача построения ее, как указано выше, несколько упрощается в связи с тем, что программа изменения динамических характеристик такой системы задается заранее, исходя из требований, предъявляемых к ней, и поэтому в общей схеме исключается решение задачи оптимизации. Блок-схема ДАСНС стабилизации представлена на рис. 4.4.3. В этой системе решение задач самонастройки проводится по обобщенным спектрам входного и выходного сигналов

$$y(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{yi} u_i(n), \quad (4.4.11)$$

$$x(n) = \sum_{i=0}^{\infty} c_{xi} u_i(n). \quad (4.4.12)$$

Обобщенные спектры $\{c_{yi}\}$ и $\{c_{xi}\}$ определяются по алгоритму, реализуемому блоком 1.

В блоке 2 путем решения треугольной системы уравнений

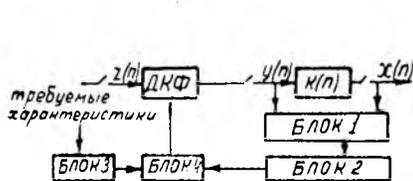


Рис. 4.4.3. Структурная схема ДАСНС стабилизации.

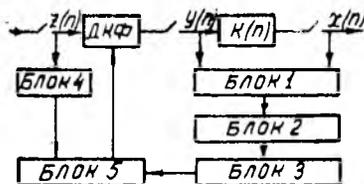


Рис. 4.4.4. Блок-схема ДАСНС, реализующая ортогональный метод моментов.

$$c_{ji} = \sum_{i=0}^l \sum_{j=0}^l c_{xi} c_j^{-yj} \quad (4.4.13)$$

вычисляется текущая ДОСХ системы $\{c_j\}$.

Блок 3 может быть представлен заранее составленной программой, задающей функцию изменения ДОСХ ДАСНС, согласно исполняемому последней задачам.

В блоке 4 вычисляются ДОСХ дискретного корректирующего фильтра по заданным ДОСХ блоком 3 и текущим ДОСХ системы, определяемых в блоке 2. Решение этой задачи проводится по методике, реализующей выражения (4.4.3) или (4.4.4).

Реализовать ДАСНС можно по схеме, в которой общая методика расчета процесса самонастройки основана на ортогональном методе моментов, другими словами, алгоритм самонастройки использует представление входного и выходного сигналов, а также динамических характеристик системы через моменты соответствующих величин. Блок-схема такой ДАСНС представлена на рис. 4.4.4.

В этой системе в блоке 1 по формулам

$$\mu_y^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} y(n) n^{\theta} \rho(n), \quad (4.4.14)$$

$$\mu_x^{\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) n^{\theta} \rho(n) \quad (4.4.15)$$

определяются моменты входного μ_y^{θ} и выходного μ_x^{θ} сигналов. Данные в блоке 1 поступают в блок 2, где по ним производится расчет моментов импульсной переходной функции системы. Далее, в блоке 3 определяются элементы ДОСХ $\{c_i\}$ системы и в дальнейшем схема реализации не отличается от представленной на рис. 4.4.2.

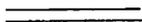
Возможен несколько иной вариант данного метода реализации, отличающийся от рассмотренного тем, что из блока оптимизации 4 информация поступает в виде моментов оптимальной импульсной переходной функции. При этом целесообразно алгоритм вычисления блока 5 построить на результатах, полученных из блока 2 и блока 4, и, получив моменты импульсной переходной функции ДКФ, определить их в блоке вычисления ДОСХ ДКФ по формулам

$$c_{\phi 0} = \mu_{\phi 0}, \quad c_{\phi 1} = \mu_{\phi 0} - g \mu_{\phi 1},$$

$$c_{\phi 2} = \mu_{\phi 0} - 2g \mu_{\phi 1} + \frac{1}{2} g^2 \mu_{\phi 2},$$

$$c_{\phi 3} = \mu_{\phi 0} - 3g \mu_{\phi 1} + \frac{3}{2} g^2 \mu_{\phi 2} - \frac{1}{3} g^3 \mu_{\phi 3}, \quad (4.4.16)$$

Таким образом, применение дискретных ортогональных спектров дает возможность решить задачу построения дискретных аналитических самонастраивающихся систем автоматического управления. Основные задачи, связанные с построением указанных выше систем, решаются в терминах одного математического аппарата — теории ортогональных рядов дискретного переменного, что приводит к единству в полном алгоритме самонастройки и к простоте реализации этого алгоритма.



ЛИТЕРАТУРА

1. Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления. Под ред. В. В. Солодовникова, Машиностроение, М., 1965.
2. Алексич Г. Проблемы сходимости ортогональных рядов, ИИЛ, М., 1963.
3. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею, Физматгиз, М., 1961.
4. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации, Изд-во «Наука», М., 1965.
5. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, Изд-во «Наука», М., 1966.
6. Бесекерский В. А., Попов Е. П. Теория систем автоматического регулирования, Изд-во «Наука», М., 1966.
7. Бойков А. Д. Идентификация линейных многомерных объектов автоматического управления ортогональным методом моментов, Труды Куйбышевского авиационного института, вып. 24, Куйбышев, 1966.
8. Бойков А. Д. Определение динамических характеристик линейных многомерных объектов автоматического управления по корреляционным функциям ортогональным методом моментов, В сб. «Автоматические измерительные и регулирующие устройства», Научные труды вузов Поволжья, вып. 3, Куйбышев, 1967.
9. Бойков А. Д. Инженерные методы анализа линейных систем автоматического управления, Изд-во Куйбышевского авиационного института, Куйбышев, 1968.
10. Бойков А. Д. Применение обобщенных спектров для построения многомерных аналитических самонастраивающихся систем автоматического управления, В сб. «Автоматизация научных исследований морей и океанов», Симпозиум 1969 г., Часть 2, Издание МГИ АН УССР, Севастополь, 1971.
11. Бойков А. Д. Ортогональный метод анализа одного класса многомерных нестационарных систем автоматического управления. В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 2, Труды 1-й Поволжской (республиканской) конференции по автоматическому управлению, Куйбышев, 1970.
12. Бойков А. Д. Восстановление сигналов на входе многомерных динамических измерительных систем, «Автоматизация экспериментальных исследований», Тезисы докладов Всесоюзной научно-технической конференции (8—11 июня 1971 г.), Куйбышев, 1971.
13. Бойков А. Д., Бойкова Т. А. Обращение преобразования Лапласа с помощью функций Хаара, Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 2, Приборостроение, Ульяновск, 1972.

14. *Бойков А. Д., Бойкова Т. А.* Анализ систем автоматического управления с использованием функций Хаара. Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 3, Ульяновск, 1972.
15. *Бойков А. Д., Бойкова Т. А.* Метод численного обращения интегрального преобразования Лапласа по системе функций Уолша, Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 3, Ульяновск, 1972.
16. *Бойков А. Д., Гришанов Г. М.* Методы теории чувствительности в задачах оптимального управления технологическими объектами. Пятое Всесоюзное совещание по проблемам управления (Москва, 1971 г.). Рефераты докладов, часть 1, Изд-во «Наука», М., 1971.
17. *Бойков А. Д., Дмитриев А. Н., Егунов Н. Д., Сафонова Л. В.* Ортогональный метод идентификации дискретных линейных объектов управления по экспериментальным данным, Труды ВНИИЦЕММАШ, вып. 11, Тольятти, 1970.
18. *Бойков А. Д., Егунов Н. Д., Сафонова Л. В.* Детерминированный анализ замкнутых дискретных линейных стационарных систем управления, Труды ВНИИЦЕММАШ, вып. XII, Тольятти, 1971.
19. *Бойков А. Д., Закаблукровский В. Д.* Исследование линейных систем автоматического управления с использованием моделирующих машин. Изд-во Куйбышевского авиационного института, Куйбышев, 1971.
20. *Бойков А. Д., Ледяев С. Ф.* К вопросу изодромного регулирования ТВД, В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 2. Труды 1-й Поволжской (республиканской) конференции по автоматическому управлению, Куйбышев, 1970.
21. *Бойков А. Д., Ледяев С. Ф.* Некоторые особенности разгона ТВД с изодромным регулятором. В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 4, Труды республиканской научной конференции «Автоматическое управление технологическими процессами в различных отраслях народного хозяйства», Куйбышев, 1970.
22. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Расчет статистических характеристик выходных сигналов многомерной дискретной системы управления для нестационарного случая, В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 5, Научные труды вузов Поволжья, Куйбышев, 1971.
23. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Идентификация линейных дискретных систем автоматического управления ортогональным методом моментов по статистическим характеристикам сигналов, Труды Ульяновского политехнического института, т. 6, вып. 3, Ульяновск, 1971.
24. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Применение ортогонального метода моментов к решению задачи идентификации многомерных дискретных систем автоматического управления, Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 3, Ульяновск, 1972.
25. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Определение статистических характеристик реакции линейной дискретной системы автоматического управления по обобщенным спектрам, В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», Вып. 2, Труды 1-й Поволжской (республиканской) конференции по автоматическому управлению, Куйбышев, 1970.
26. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Ортогональный метод определения динамических характеристик многомерных дискретных систем автоматического управления. В сб. «Приборы и устройства автоматического управления и контроля», Пензенский политехнический институт, Пенза, 1970.
27. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Алгоритм расчета выходных реакций многомерных дискретных систем автоматического управления с помощью дискретного аналога полиномов и функций Лаггера, В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 4, Труды республиканской научной конференции «Автоматическое управление технологическими процессами в различных отраслях народного хозяйства», Куйбышев, 1970.
28. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Использование спектрального метода для построения дискретных аналитических самоастрономящихся систем автоматического управления при наличии нелинейностей, В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 1, Труды 1-й Поволжской конференции по автоматическому управлению, Куйбышев, 1970.

29. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* К вопросу определения динамических характеристик дискретных объектов управления на основе понятия моментов, *Материалы 6-й научно-технической конференции, Ульяновский политехнический институт, Ульяновск, 1971.*

30. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Принцип реализации дискретной аналитической самонастраивающейся системы автоматического управления, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 3, Ульяновск, 1972.*

31. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Спектральный метод определения выходных сигналов нестационарной многомерной дискретной системы управления, В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 4, *Труды республиканской научной конференции «Автоматическое управление технологическими процессами в различных отраслях народного хозяйства»*, Куйбышев, 1970.

32. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Решение задачи анализа дискретных систем автоматического управления ортогональным методом, *Материалы 6-й научно-технической конференции, Ульяновский политехнический институт, Ульяновск, 1971.*

33. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Применение дискретных обобщенных спектров для анализа случайных процессов в нелинейных дискретных системах автоматического управления, В сб. «Алгоритмизация и автоматизация процессов и установок», вып. 3, *Труды республиканской научной конференции «Автоматическое управление технологическими процессами в различных отраслях народного хозяйства»*, Куйбышев, 1970.

34. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Спектральный метод вычисления динамических характеристик дискретных систем автоматического управления по статистическим данным, В сб. «Оптимизация систем автоматики, информационно-измерительной и вычислительной техники», Ульяновский политехнический институт, Ульяновск, 1971.

35. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В.* Расчет динамических характеристик дискретных объектов управления по коротким реализациям входного и выходного сигналов, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 6, вып. 3, Ульяновск, 1971.*

36. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В., Шестопалов А. М.*, Статистические характеристики некоторых распределений теории вероятностей и их определение для технических приложений, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 2, Приборостроение, Ульяновск, 1972.*

37. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В., Шестопалов А. М.*, Некоторые типы ортогональных многочленов для исследования дискретных систем, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 2, Приборостроение, Ульяновск, 1972.*

38. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В., Шестопалов А. М.*, Некоторые вопросы исследования дискретных систем управления, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 3, Ульяновск, 1972.*

39. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В., Шестопалов А. М.*, Методы анализа дискретных систем управления и регулирования с применением цифровых вычислительных машин, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 3, Ульяновск, 1972.*

40. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В., Шестопалов А. М.*, К вопросу об анализе дискретных систем и решения разностных уравнений, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 2, Приборостроение, Ульяновск, 1972.*

41. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В., Шестопалов А. М.*, Свойства одного класса ортогональных многочленов и их применение для решения технических задач, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 2, Приборостроение, Ульяновск, 1972.*

42. *Бойков А. Д., Сафонова Л. В., Шестопалов А. М.*, Аппроксимация характеристик нелинейных элементов с помощью ортогональных многочленов, *Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 2, Приборостроение, Ульяновск, 1972.*

43. *Бойков А. Д., Синицын В. П.* Универсальный метод расчета частотных характеристик систем автоматического управления с использованием ЦВМ, «Математическое оснащение ЭВМ», *Тезисы докладов третьей городской конферен-*

ции молодых ученых г. Куйбышева, посвященной 50-летию ВЛКСМ, Областной совет НТО, Куйбышев, 1968.

44. *Бойков А. Д., Уаев А. И.* Идентификация безынерционных нелинейных преобразователей. Корреляционный метод, Материалы первой Поволжской конференции по автоматическому управлению, Книга I «Теория автоматического управления», Татарское книжное издательство, Казань, 1971.

45. *Бойкова Т. А.* Метод применения функций Уолша для анализа систем автоматического управления, Труды Ульяновского политехнического института, т. 8, вып. 3, Ульяновск, 1972.

46. *Бромберг П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования, Изд-во «Наука», М., 1967.

47. *Ван дер Поль Б. и Бреммер Х.* Операционное исчисление на основе двустороннего преобразования Лапласа, НИИ, 1952.

48. *Ван-Трис Г.* Синтез оптимальных нелинейных систем управления, Изд-во «Мир», М., 1964.

49. *Воронов А. А.* Основы теории автоматического управления, ч. III, Оптимальные, многосвязные, адаптированные системы, Изд-во «Энергия», Л., 1970.

50. *Вулих Б. З.* Введение в функциональный анализ, Изд-во «Наука», М., 1967.

51. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц, Наука, М., 1967.

52. *Гельфонд А. О.* Исчисление конечных разностей, Изд-во «Наука», М., 1967.

53. *Геронимус Я. Л.* Теория ортогональных многочленов, ГИТТЛ, М.—Л., 1950.

54. *Дёч Г.* Руководство к практическому применению преобразования Лапласа, Изд-во «Наука», М., 1965.

55. *Джексон Д.* Ряды Фурье и ортогональные полиномы, ИИЛ, М., 1948.

56. *Джури Э.* Импульсные системы автоматического регулирования, Физматгиз, М., 1963.

57. *Диткин В. А., Прудников А. П.* Интегральные преобразования и операционное исчисление, Физматгиз, М., 1961.

58. *Дмитриев А. Н.* Методы определения текущих характеристик сигналов в самонастраивающихся системах управления, Труды семинара по теории и практике самонастраивающихся систем, ДНТП, Л., 1966.

59. *Дмитриев А. Н.* Ортогональные методы определения и коррекции динамических характеристик в самонастраивающихся системах, Труды семинара по теории и практике самонастраивающихся систем, ДНТП, Л., 1966.

60. *Дмитриев А. Н., Бойков А. Д., Егупов Н. Д., Городецкий Ю. М.* Обобщенные спектры и их применение для анализа линейных систем автоматического управления, Труды Куйбышевского авиационного института, вып. 33, Куйбышев, 1968.

61. *Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д.* Методика анализа одного класса дискретных нелинейных систем, Приборостроение, Известия вузов, № 1, 1970.

62. *Дмитриев А. Н., Егупов Н. Д., Бойков А. Д.* Спектральный аппарат для построения аналитических самонастраивающихся систем автоматического управления нелинейными объектами. Решение задачи идентификации и коррекции, Труды ВНИИЦЕММАШ, вып. 10, Тольятти, 1969.

63. *Дмитриев А. Н., Решетов В. В.* Ортогональный метод определения текущих динамических характеристик и построения корректирующих фильтров аналитических самонастраивающихся систем автоматического управления. В сб. «Аналитические самонастраивающиеся системы автоматического управления» под ред. В. В. Солодовникова, Машиностроение, 1965.

64. *Дудников В. Т., Бойков А. Д.* Гидроконформальная следящая система с астатизмом второго порядка и методика выбора ее параметров, В сб. «Автоматизация привода и управления машины», Труды четвертого совещания по автоматизации процессов машиностроения (9—13 июня 1964 г.), Изд-во «Наука», М., 1967.

65. *Зайцев Г. Ф.* Основы теории систем автоматического регулирования и управления, Изд-во КВИРТУ, вып. 1, 2, Киев, 1961, 1963.

66. *Зайцев Г. Ф.* Дискретные системы автоматического регулирования и управления, Киев, Изд-во КВИРТУ, 1964.
67. *Зайцев Г. Ф.* Анализ линейных импульсных систем автоматического регулирования и управления, Изд-во «Техника», Киев, 1967.
68. *Иванов В. А., Чемоданов Б. К., Медведев В. С., Юценко А. С.* Математические основы теории автоматического регулирования, Изд-во «Высшая школа», М., 1971.
69. *Ивахненко А. Г.* Техническая кибернетика. Изд-во технической литературы УССР, Киев, 1962.
70. *Камп де Ферье Ж., Кемпбелл Р., Петьо Г., Фогель Т.* Функции математической физики, Физматгиз, М., 1963.
71. *Катковник В. Я., Полуэктов Р. А.* Многомерные дискретные системы управления, Изд-во «Наука», М., 1966.
72. *Качмаж С., Штейнгауз Г.* Теория ортогональных рядов, Физматгиз, 1958.
73. *Килин Ф. М.* Некоторые проблемы динамических импульсных систем с временными селекторами, Изд-во Академии им. Можайского, Л., 1960.
74. *Контрович М. И.* Операционное исчисление и процессы в электрических цепях. Изд-во «Наука», М., 1964.
75. *Красовский А. А.* О синтезе импульсных корректирующих устройств следящих систем, А и Т, № 6, 1959.
76. *Кривицкий Б. Х.* Автоматические системы радиотехнических устройств, Госэнергоиздат, М., 1962.
77. *Крутько П. Д.* Статистическая динамика импульсных систем, Изд-во «Советское радио», М., 1963.
78. *Кузин Л. Т.* Расчет и проектирование дискретных систем управления, Mashgiz, М., 1962.
79. *Кузин Л. Т.* Некоторые вопросы синтеза импульсных следящих систем при стационарных случайных воздействиях, «Автоматическое управление и вычислительная техника», Сб. трудов под ред. В. В. Солодовникова, вып. 1, Mashgiz, М., 1958.
80. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции, Изд-во «Высшая школа», М., 1965.
81. *Кузовков Н. Т.* Динамика систем автоматического управления, Машиностроение, М., 1968.
82. *Кунцевич В. М.* Импульсные самонастраивающиеся и экстремальные системы автоматического управления, Киев, 1966.
83. *Куришев Н. В., Кожевников Ю. В.,* Оптимальные задачи динамики полета, Казанский авиационный институт, Казань, 1967.
84. *Лаурентьев М. А., Шабат Б. В.* Методы теории функций комплексного переменного, Изд-во «Наука», М., 1965.
85. *Ланцош К.* Практические методы прикладного анализа, Физматгиз, М., 1961.
86. *Лебедев А. А., Карабанов В. А.* Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами, М., Машиностроение, 1965.
87. *Лебедев Н. Н.* Специальные функции и их приложения, ГТТИ, М., 1963.
88. *Маргинов Е. М.* Электронные устройства дискретного действия, Изд-во «Энергия», М., 1969.
89. *Мсеров М. В.,* Системы многосвязного регулирования, Изд-во «Наука», М., 1965.
90. *Морозовский В. Т.* Многосвязные системы автоматического регулирования, Изд-во «Энергия», М., 1970.
91. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций, Гостехиздат, М.—Л., 1949.
92. *Перов В. П.* Статистический синтез импульсных систем, Изд-во «Советское радио», М., 1959.
93. *Попков С. Л., Попков Ю. С.* Непрерывные и дискретные следящие системы, Изд-во «Энергия», М., 1964.
94. *Попов Е. П., Пальтов И. П.* Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем, Физматгиз, М., 1960.

95. Пугачев В. С. Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, М., 1960.

96. Пупков К. А. Статистический расчет нелинейных САУ, Машиностроение, М., 1965.

97. Пухов Г. Е., Жук К. Д. Синтез многосвязных систем управления, Изд-во «Наукова думка», Киев, 1966.

98. Раковчук Г. М. Элементы теории дискретных автоматических систем, Изд-во КВИРТУ, Киев, 1964.

99. Сафонова Л. В. Спектральный метод анализа дискретных систем автоматического управления. Тезисы докладов 8-й научно-технической конференции. Ульяновский политехнический институт, Ульяновск, 1972.

100. Сафонова Л. В. Детерминированный анализ нелинейных дискретных систем автоматического управления, Тезисы докладов 8-й научно-технической конференции, Ульяновский политехнический институт, Ульяновск, 1972.

101. Сегг Г. Ортогональные многочлены, Физматгиз, 1962.

102. Семенов В. В., Солодовников В. В. Спектральный анализ линейных систем с переменными параметрами на конечных нестационарных интервалах времени, А и Т, № 11, 1968.

103. Сигалов Г. Г. Импульсные радиолокационные следящие системы, Изд-во МВИРТУ, Минск, 1962.

104. Советов Н. М., Авербух М. Э. Разностные бесселевы функции и их применение в технике, Саратовское книжное издательство, Саратов, 1968.

105. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами, Физматгиз, М., 1962.

106. Солодовников В. В. Статистическая динамика линейных систем автоматического управления, Физматгиз, М., 1960.

107. Солодовников В. В. (ред.) Техническая кибернетика, Кн. 1, 2, 3, Машиностроение, М., 1967, 1969.

108. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егунов Н. Д. Ортогональный метод анализа и синтеза САУ на основе понятия моментов. В сб. «Автоматическое управление и вычислительная техника», № 8, Машиностроение, М., 1968.

109. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егунов Н. Д. Ортогональный метод анализа нелинейных систем автоматического управления на основе понятия моментов. В сб. «Вычислительная техника для управления производством», Машиностроение, М., 1969.

110. Солодовников В. В., Дмитриев А. Н., Егунов Н. Д. Метод построения самонастраивающихся систем автоматического управления (САУ), использующий понятие ортогональных спектров. В сб. «Вычислительная техника для управления производством», Машиностроение, М., 1969.

111. Солодовников В. В., Усков А. С. Статистический анализ объектов регулирования, ГИТИМЛ, М., 1960.

112. Ту Ю. Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления, Машиностроение, М., 1964.

113. Цирамуа Г. С. Дискретные системы переменной структуры, Изд-во «Знание», М., 1970.

114. Цыпкин Я. З. Теория линейных импульсных систем. Физматгиз, М., 1963.

115. Чинаев П. И. Методы анализа и синтеза многомерных автоматических систем, Изд-во «Техника», Киев, 1969.

116. Шаталов А. С. Структурные методы в теории управления и электроавтоматике, Госэнергоиздат, 1962.

117. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции. Изд-во «Наука», М., 1968.

Оглавление

	Стр.
Предисловие	3
<i>Глава 1. Детерминированный анализ дискретных систем автоматического управления, заданных аналитически</i>	<i>5</i>
§ 1.1. Спектральное представление дискретных сигналов	5
1. Дискретные ортогональные системы элементов [38], [39]	5
2. Общие свойства ортогональных многочленов дискретного переменного	7
3. Представление дискретных сигналов ортогональными многочленами	21
§ 1.2. Метод расчета выходных реакций дискретных систем автоматического управления с помощью классических ортогональных систем	27
1. Дискретный ортогональный базис — многочлены Шарлье	30
2. Дискретный ортогональный базис — многочлены Мейкспера	31
3. Дискретный ортогональный базис — многочлены Гана	31
4. Дискретный ортогональный базис — многочлены Чебышева, Кравчука	32
5. Определение выходного сигнала в виде интегро-интерполяционного многочлена в моментах	34
6. Анализ многомерных дискретных систем автоматического управления	35
§ 1.3. Алгоритмы анализа дискретных систем автоматического управления с помощью экспоненциальных многочленов и полиномов Лагерра дискретного аргумента	38
§ 1.4. Детерминированный анализ нелинейных дискретных систем автоматического управления [28]	41,
§ 1.5. Расчет выходных реакций нестационарных дискретных систем автоматического управления ортогональным методом моментов	44

§ 1.6. Применение метода последовательных приближений для детерминированного анализа нестационарных дискретных систем автоматического управления	51
1. Решение разностного уравнения с полиномиальными коэффициентами	53
2. Решение разностного уравнения с периодическими коэффициентами	55
3. Решение разностного уравнения с экспоненциальными коэффициентами	58
§ 1.7. Структурный анализ дискретных систем автоматического управления	60
1. Последовательное соединение элементов	60
2. Соединение элементов обратной связью	62
3. Параллельное соединение элементов	62
4. Структурный анализ по моментам	63
<i>Глава II. Статистический анализ дискретных систем автоматического управления, заданных аналитически</i>	65
§ 2.1. Алгоритм расчета статистических характеристик линейных стационарных дискретных систем автоматического управления	65
§ 2.2. Алгоритм вычисления случайных ошибок стационарных дискретных систем автоматического управления, работающих в установившемся режиме	72
§ 2.3. Применение дискретных обобщенных спектров для анализа случайных процессов в нелинейных дискретных системах автоматического управления	74
§ 2.4. Расчет статистических характеристик выходных сигналов нестационарных дискретных систем автоматического управления	81
§ 2.5. Применение метода последовательных приближений для статистического анализа нестационарных дискретных систем автоматического управления	83
<i>Глава III. Детерминированный и статистический анализ дискретных объектов управления по экспериментальным данным</i>	89
§ 3.1. Ортогональный метод моментов детерминированного анализа линейных дискретных объектов управления	89
§ 3.2. Модифицированный ортогональный метод детерминированного анализа дискретных объектов управления	96
§ 3.3. Алгоритм расчета динамических характеристик дискретных объектов управления в дробно-рациональном виде. Априорный метод моментов	100
§ 3.4. Детерминированный анализ дискретных объектов управления методом обобщенных спектров	103
§ 3.5. Метод детерминированного анализа нестационарных дискретных объектов управления по экспериментальным данным	104
§ 3.6. Алгоритм статистического анализа дискретных объектов управления спектральным методом моментов	107
§ 3.7. Статистический анализ дискретных объектов управления по обобщенным спектрам входных и выходных сигналов	112

Глава IV. Алгоритмы детерминированного и статистического синтеза дискретных систем автоматического управления по аналитическим и экспериментальным данным	116
§ 4.1. Определение оптимальных по критерию минимума средне-квадратической ошибки динамических характеристик дискретных систем автоматического управления по аналитическим данным	116
§ 4.2. Алгоритм расчета оптимальных динамических характеристик дискретных систем автоматического управления по экспериментальным данным	121
§ 4.3. Метод определения оптимальной по критерию минимума среднеквадратической ошибки дискретной ортогональной спектральной характеристики методом наискорейшего спуска	124
§ 4.4. Алгоритм коррекции и общая структурная схема дискретной аналитической самонастраивающейся системы	127
Литература	134



*Александр Дмитриевич Бойков,
Лариса Владимировна Сафонова*

СПЕКТРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА
ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебное пособие

Редактор И. С. Колышева
Технический редактор П. М. Каленюк
Корректор Е. П. Михайлова

Сдано в набор 20/VI 1972 г. ЕО00322. Подп. в печ.
19/XII 1972 г. Формат бум. 60×90¹/₁₆. Объем 9 печ. л.
Тираж 2000 экз. Цена 75 коп.

Куйбышевский авиационный институт
им. С. П. Королева, 443001, г. Куйбышев, обл.,
ул. Молодогвардейская, 151.
Обл. тип. им. Мяги, г. Куйбышев, ул. Венцека, 60.
Заказ № 6267.

