

Д. В. ВАСИЛЬЕВ, В. Г. ЧУИЧ

СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

(примеры расчета)

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования СССР в качестве учебного пособия для студентов технических вузов



ИЗДАТЕЛЬСТВО
«ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МОСКВА — 1967

Системы автоматического управления (примеры расчета).
Д. В. Васильев, В. Г. Чунч. «Высшая школа», 1967, стр. 1—419.

Книга содержит числовые примеры расчета автоматизированных систем, сгруппированные по основным разделам теории автоматического управления. Примеры приведены с подробными решениями, необходимыми междисциплинарными указаниями и пояснениями.

Рассмотрены вопросы составления и преобразования функциональных и структурных схем, составления операторных уравнений и определения передаточных функций звеньев и систем, устойчивости и точности работы систем автоматического управления. Разобраны на конкретных примерах методы учета влияния нелинейностей, а также способы и практические приемы математического моделирования систем автоматического управления.

Книга предназначена в качестве учебного пособия по курсам теории автоматического управления и регулирования, следящим системам, основам технической кибернетики и др., читаемым в высших технических учебных заведениях, в частности, для студентов заочного и вечернего обучения. Она может быть также использована инженерно-техническими работниками при самостоятельном изучении и углублении основ теории автоматического управления.

Таблиц 62, рисунков 230, библиографий 35.

Рецензенты:

1. Кафедра автоматики и телемеханики МЭИ
2. Профессор Блажкин А. Г. (Ленинградский механический институт)

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга «Системы автоматического управления» (примеры расчета) представляет собой учебное пособие по примерам расчета для ряда курсов по теории автоматического управления, теории следящих систем, основам теории технической кибернетики и др., читаемым во многих высших технических учебных заведениях, в частности политехнических, электротехнических и радиотехнических вузах.

В связи с этим материал книги рассмотрен в соответствии с основными разделами курса по теории автоматического управления. Таким образом, при изучении данного раздела имеется возможность закреплять и конкретизировать материал курса проработкой и решением примеров данного учебного пособия как под руководством преподавателя, так и в порядке самостоятельных занятий. Большинство типовых примеров даются с решениями, что должно помочь усвоению методики подхода к расчету и исследованию в данной области, а также позволит преподавателю на базе имеющихся примеров составлять различные варианты примеров для самостоятельной работы студентов, в частности, контрольных работ.

Подобного рода методика изложения материала, по мнению авторов, позволит пользоваться учебным пособием в вечерних и заочных вузах, для которых учебной литературы в настоящее время явно недостаточно. Эта книга может оказаться полезной и для инженеров и научных работников при решении ими практических задач.

В соответствии с принятой методикой вопросы расчета систем излагаются в виде отдельных этапов в соответствующих главах (составление функциональных и структурных схем, статический расчет системы, передаточные функции, частотные характеристики и т. п.).

Для уяснения выполнения расчета системы в целом в гл. VIII приводится пример полного расчета системы по методу логарифмиче-

ских частотных характеристик, получившему наибольшее распространение в инженерной практике.

Учебное пособие написано на базе вышедшей в 1959 г. книги тех же авторов «Расчет систем автоматического управления», Машгиз. Однако содержание книги подверглось существенной методической обработке и значительно расширено новыми материалами (гл. I, Функциональные схемы систем автоматического управления; гл. IX, Учет влияния нелинейностей в системах автоматического управления; гл. X, Моделирование систем автоматического управления).

Остальные главы также пополнены некоторыми новыми примерами в соответствии с назначением книги как учебного пособия.

Авторы будут благодарны за все замечания и пожелания, которые следует направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная, 29/14, издательство «Высшая школа».

Глава I. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 1.1. Основные функциональные элементы систем автоматического управления

Современные системы автоматического управления представляют собой сложные комплексы взаимодействующих технических устройств и элементов, работа которых основана на различных физических принципах (механических, электрических, гидравлических, пневматических и др.). Различно также их конструктивное выполнение и технические характеристики.

При изучении курса теории автоматического управления основное внимание уделяется не техническим свойствам отдельных элементов, а функциям, которые они, выполняя в системе управления, и характеру связей между ними. Наглядное представление об этом дают *функциональные схемы систем автоматического управления* *.

Несмотря на многообразие отдельных систем автоматического управления и входящих в них элементов, последние могут быть сведены к нескольким основным типам, различающимся по их назначению (функции) и взаимодействию в системе управления. Соответственно этому можно говорить о типовой или обобщенной функциональной схеме системы автоматического управления. В общем виде такая схема представлена на рис. 1.1. Схема отражает то обстоятельство, что сложная современная автоматическая система должна выполнять одновременно две задачи: 1) обеспечивать с требуемой точностью изменение выходной величины системы в соответствии с поступающей извне входной величиной, играющей роль команды или программы. При этом необходимо преодолевать инерцию объекта управления и других элементов системы, а также компенсировать искажения, возникающие вследствие неточного знания характеристик отдельных элементов и неустойчивости их параметров. Иногда это называют *управлением в узком смысле* или *слежением*; 2) при задан-

* Их не следует смешивать с блок-схемами, характеризующими систему по составу входящих в нее отдельных конструктивных блоков (блок питания, распределительный щит и т. д.).

ном значении входной величины (заданной программе) система должна, по-возможности, нейтрализовать действие внешних возмущений, стремящихся отклонить выходную величину системы от предписываемого ей в данный момент значения. В этом смысле говорят о задаче *регулирования* или *стабилизации*.

В действительности обе эти задачи решаются совместно и об их разделении можно говорить лишь условно. Однако в отдельных конкретных системах автоматического управления одна

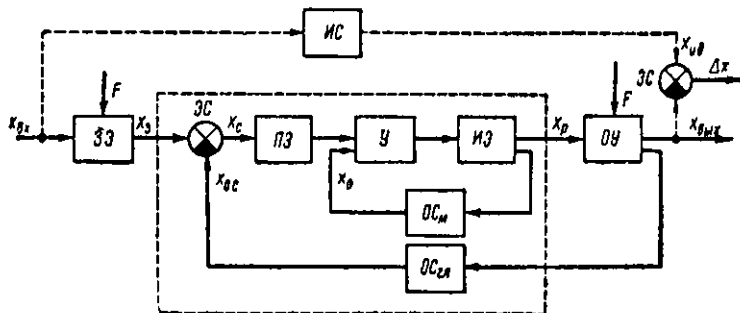


Рис. 1.1. Общая функциональная схема системы автоматического управления

из указанных функций может быть выражена более сильно, чем другая. В этих случаях функциональная схема системы может иметь более простой частный вид.

Как видно из схемы (рис. 1.1), на объект управления ОУ (называемый также объектом регулирования ОР), находящийся под влиянием внешнего возмущающего воздействия F , поступает регулирующее воздействие x_p , являющееся выходной величиной управляющей части системы (регулятора), которая представляет собой совокупность обведенных пунктиром элементов, специально введенных для получения замкнутой системы автоматического управления (регулирования).

Замыкание контура управления производится подачей в регулятор по цепи главной обратной связи $ОС_{гл}$ управляемой величины, которая в общем случае может отличаться от выходной величины объекта управления, если последняя недоступна для прямого контроля (например, измерение тока якоря электродвигателя вместо непосредственного контролирования вращающего момента, противо-э. д. с. вместо скорости вращения якоря и т. д.). В этом случае ошибка системы может быть определена разностью между действительной выходной величиной $x_{вых}$ и ее «идеальным» значением $x_{ид}$, представляющим собой выход некоторой воображаемой «идеальной» системы ИС, осуществляющей точное заданное преобразование входной величины.

Необходимость введения задающего элемента $\mathcal{ЗЭ}$ объясняется тем, что задающее воздействие, непосредственно поступающее на элемент сравнения $\mathcal{ЭС}$, может отличаться от входной величины по двум причинам: 1) эти воздействия могут быть связаны друг с другом определенной функциональной зависимостью * или просто различаться масштабом величин; 2) задающее воздействие часто содержит в себе, наряду с полезным входным сигналом, и случайные возмущения или помеху (шум).

Возмущающие воздействия могут поступать на любой элемент системы управления. Учет их зависит от конкретной постановки задачи. При этом отнесение их к внешним или внутренним возмущениям является весьма условным. Так, например, колебания напряжения источников питания в электрических системах в одних случаях могут рассматриваться как внешние возмущения, а в других — вызывать флуктуации внутренних параметров системы.

Сигнал ошибки x_c , представляющий собой разность задающего воздействия x_z и сигнала главной обратной связи x_{oc} , в общем случае не должен отождествляться с ошибкой Δx , даже если выходная величина совпадает с управляемой, а задающее воздействие — с входной величиной. Так, в статической системе при отсутствии возмущающих воздействий и неизменных параметрах системы установившаяся ошибка равна нулю, при этом сигнал ошибки должен иметь отличную от нуля величину, необходимую для поддержания заданного значения выходной величины системы.

Усилительный элемент $\mathcal{У}$ и исполнительный элемент $\mathcal{ИЭ}$ входят в основной контур системы.

Преобразующий элемент $\mathcal{ПЭ}$ и элемент местной обратной связи $\mathcal{ОС}_м$ вводятся в систему для придания ей лучших динамических свойств, т. е. для коррекции системы, в связи с чем их называют соответственно последовательным и параллельным корректирующими элементами. Их наличие не является обязательным. Однако в этом случае могут быть осуществлены лишь простейшие системы автоматического управления с крайне низкими качественными показателями.

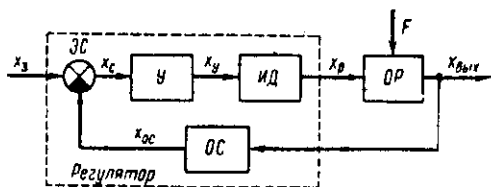


Рис. 1.2. Функциональная схема простейшей системы автоматического регулирования

* Как, например, в следящих системах счетно-решающих устройств, обрабатывающих такие функции входной величины x , как $\sin x$, $\cos x$, x^2 и т. д.

На рис. 1.2 и 1.3 изображены соответственно функциональные схемы простейшей замкнутой системы автоматического регулирования и простейшей следящей системы. Особенностью этих схем является то, что все изображенные на них элементы являются необходимыми. Отсутствие какого-либо из них делает невозможным существование замкнутой системы автоматического управления. В обеих системах предполагается возможность

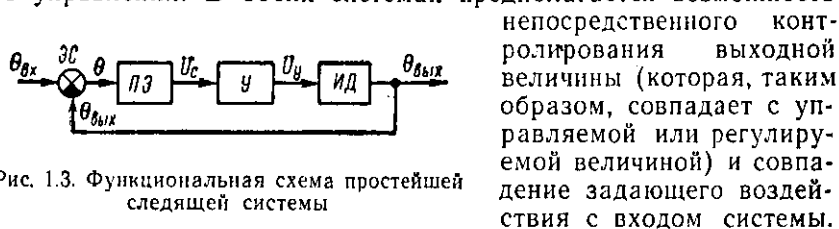


Рис. 1.3. Функциональная схема простейшей следящей системы

непосредственного контроля выходной величины (которая, таким образом, совпадает с управляемой или регулируемой величиной) и совпадение задающего воздействия с входом системы. На практике это имеет место тогда, когда существует твердая уверенность в том, что указанные пары величин связаны между собой жесткой зависимостью (обычно пропорциональной).

Особенностью следящих систем, предназначенных для обработки (отслеживания) механических перемещений, является, как правило, высокая точность передачи сигнала по цепи главной обратной связи $ОС_{гл}$ от выхода системы к элементу сравнения ЭС. При этом в установившемся режиме выходная величина $\theta_{вых}$ должна с очень малой (по сравнению с переходным режимом) погрешностью совпадать с входной величиной $\theta_{вх}$ *. Вследствие этого элемент главной обратной связи производит передачу сигнала к элементу сравнения с коэффициентом, равным единице, и может быть заменен на функциональной схеме одной линией (рис. 1.3). При этом ошибка следящей системы $\theta = \theta_{вх} - \theta_{вых}$.

Встречающиеся на практике системы автоматического управления могут быть представлены функциональными схемами, занимающими промежуточное положение между общей схемой, изображенной на рис. 1.1, и простейшими схемами, приведенными на рис. 1.2 и 1.3.

Умение разделять системы автоматического управления на основные функциональные элементы и составлять функциональные схемы в общем виде способствует ясности представлений о физических процессах, происходящих в системе, и имеет большое значение для дальнейшего исследования и расчета основных режимов работы системы.

* Это оказывается возможным в связи с тем, что, будучи астатическими, следящие системы содержат интегрирующее звено-исполнительный двигатель ИД, осуществляющее длительное запоминание отработанного входного сигнала.

§ 1.2. Примеры составления функциональных схем по принципиальным схемам

Пример 1.1. Составление функциональной схемы системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока.

Принципиальная схема системы регулирования изображена на рис. 1.4. Система работает следующим образом. Напряжение обратной связи $U_{о.с.}$, пропорциональное регулируемой величине — напряжению генератора U_r , сопоставляется с напряжением

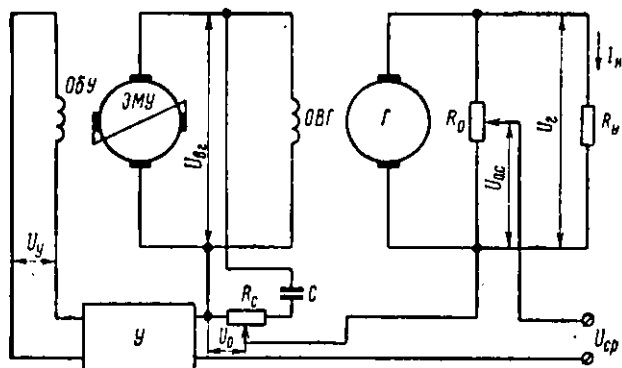


Рис. 1.4. Упрощенная принципиальная схема системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока

сравнения $U_{ср.}$. Разность $U_{ср.} - U_{о.с.}$ поступает на вход электронного усилителя Y , питающего обмотку управления $ОБУ$ электромашиного усилителя с поперечным полем $ЭМУ$, являющегося возбудителем генератора $Г$. Для повышения динамической устойчивости системы в ней предусмотрена стабилизирующая местная обратная связь по напряжению $ЭМУ$, осуществляемая при помощи конденсатора C и делителя напряжения R_C . Величина главной обратной связи устанавливается делителем R_0 .

При разделении системы автоматического регулирования на функциональные элементы выделим, прежде всего, генератор, который будем рассматривать как объект регулирования $ОР$. На него действует напряжение возбуждения $U_{в.г.}$, являющееся регулирующим воздействием, и возмущающее воздействие — ток нагрузки I_n .

Регулируемая величина U_r преобразуется в напряжение $U_{о.с.}$ элементом главной обратной связи $ОС_{г.л.}$ и сравнивается с напряжением $U_{ср.}$ при помощи элемента сравнения $ЭС$, который в данном случае является электрическим соединением, поскольку

в рассматриваемой системе регулирования сравниваются электрические величины $U_{ср}$ и $U_{о.с.}$.

В качестве усилительного элемента принят электронный усилитель $У$, а ЭМУ в данном случае является исполнительным элементом ИЭ*.

Стабилизирующий контур CR_c представим как элемент местной обратной связи OC_m , входной величиной которого является напряжение ЭМУ (напряжение на обмотке возбуждения генератора ОБГ), а выходной — напряжение U_o , представляющее собой сигнал местной обратной связи, подаваемый на вход усилителя и вычитаемый из основного сигнала $U_{ср} - U_{о.с.}$.

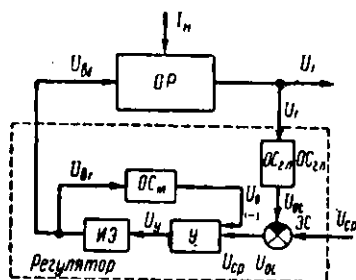


Рис. 1.5. Функциональная схема системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока

При указанном разделении системы регулирования напряжения генератора на элементы функциональная схема будет иметь вид, изображенный на рис. 1.5.

При указанном разделении системы регулирования напряжения генератора на элементы функциональная схема будет иметь вид, изображенный на рис. 1.5.

Пример 1.2. Составление функциональной схемы простейшей следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем АД.

Принципиальная схема следящей системы изображена на рис. 1.6. Система работает следующим образом. Положение входной и выходной осей системы сравнивается при помощи механического дифференциала $Др$, с которым связан движок потенциометра $П$. Напряжение U_c , снимаемое с потенциометра, усиливается однокаскадным ламповым усилителем $У$, собранным на двойном триоде $Л$. Выходное напряжение усилителя U_y подается на управляющую обмотку $ОбУ$ асинхронного двухфазного двигателя с полым ротором, обмотка возбуждения $ОВ$ которого питается переменным напряжением от той же сети, к которой подключен потенциометр. Конденсатор $С$, включенный параллельно вторичной обмотке выходного трансформатора, служит для фазирования напряжения U_y с напряжением на обмотке возбуждения двигателя.

Приняв механический дифференциал за элемент сравнения $ЭС$, а потенциометр — за преобразующий элемент $ПЭ$, получим функциональную схему следящей системы, изображенную на рис. 1.7. На схеме асинхронный двигатель объединен вместе с редуктором в один элемент — исполнительный двигатель $ИД$.

* Такое разделение весьма условно: с равным правом можно рассматривать электронный усилитель вместе с ЭМУ как усилительный элемент, а исполнительным элементом считать цепь возбуждения генератора $ОВГ$, приняв якорь последнего за объект регулирования.

Пример 1.3. Составление функциональной схемы следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем АД и тахогенератором АТГ.

Работа системы может быть пояснена при помощи принципиальной схемы, изображенной на рис. 1.8. Входная и выходная

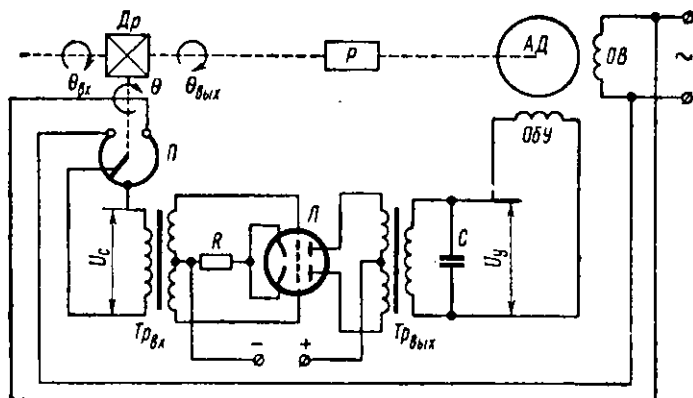


Рис. 1.6. Принципиальная схема простейшей следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем:

P — редуктор, $Tr_{вх}$ и $Tr_{вых}$ — входной и выходной трансформаторы

оси следящей системы связаны соответственно с движками задающего Π_1 и обрабатывающего Π_2 потенциометров. Разность снимаемых с них напряжений, пропорциональная ошибке $\Theta = \Theta_{вх} - \Theta_{вых}$, суммируется алгебраически с напряжением U_0 отрицательной обратной связи от асинхронного тахогенератора и поступает на вход лампового усилителя, состоящего из двух каскадов. Первый каскад — фазоинверсный, собранный на лампе L_1 , осуществляет предварительное усиление и управляет двухтактным оконечным каскадом (лампы L_2, L_3), работающим через выходной трансформатор $Tr_{вых}$ на обмотку управления асинхронного двигателя. Конденсатор C в обмотке возбуждения двигателя осуществляет сдвиг фазы питающего напряжения на 90° по отношению к напряжению на обмотке управления.

Рассматриваемая следящая система относится к числу дистанционных систем, в которых сравнение сигналов управления и обработки производится путем суммирования электрических величин.

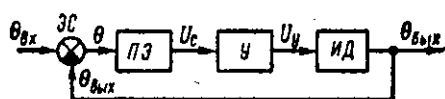


Рис. 1.7. Функциональная схема следящей системы

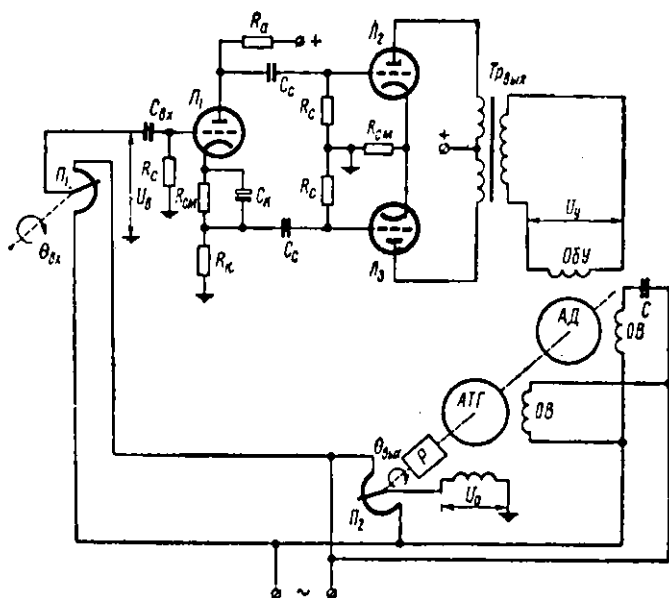


Рис. 1.8. Принципиальная схема следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем и тахогенератором

Функциональная схема следящей системы представлена на рис. 1.9, а. Наличие в схеме двух преобразующих элементов объясняется тем, что в данной системе сравниваются не непосредственно углы поворота входной и выходной осей,

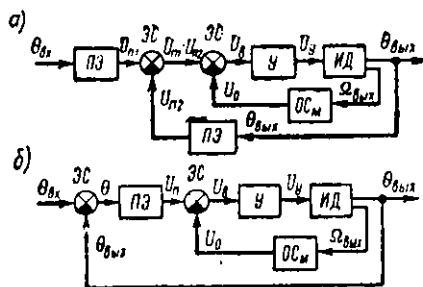


Рис. 1.9. Функциональные схемы следящей системы:

а — исходная; б — преобразованная

разующего скорость вращения $\Omega_{\text{вых}}$ выходной оси системы в напряжение U_0 .

Схема, изображенная на рис. 1.9, а, может быть преобразована в эквивалентную ей функциональную схему с одним преобразующим элементом (рис. 1.9, б), в которой входные сигналы

сравниваются непосредственно. Действительно, напряжения $U_{п1}$ и $U_{п2}$ можно представить в виде:

$$U_{п1} = k_{п1} \Theta_{вх} \text{ и } U_{п2} = k_{п2} \Theta_{вых},$$

где $k_{п1}$ и $k_{п2}$ — передаточные коэффициенты потенциометров.

Разность напряжений потенциометров, подаваемая на второй элемент сравнения,

$$U_{п} = U_{п1} - U_{п2} = k_{п1} \Theta_{вх} - k_{п2} \Theta_{вых},$$

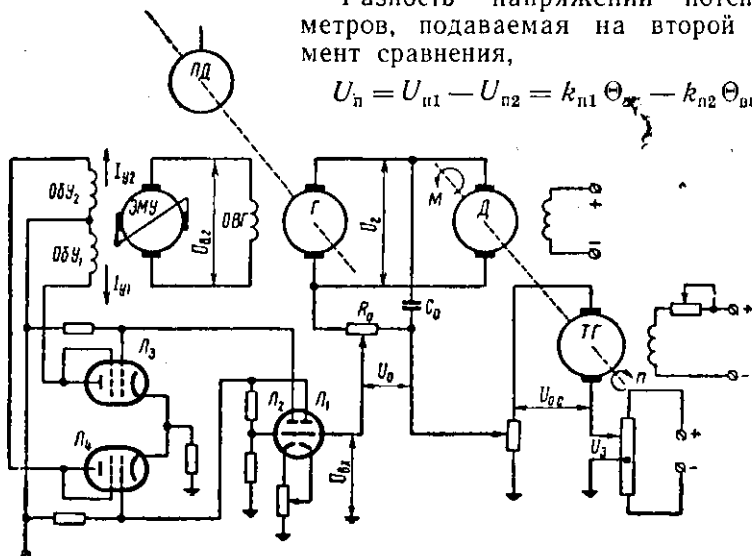


Рис. 1.10. Принципиальная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока

при отсутствии рассогласования должна равняться нулю, откуда следует, что

$$k_{п1} \Theta_{вх} = k_{п2} \Theta_{вых};$$

при этом должно $\Theta_{вх} = \Theta_{вых}$, следовательно $k_{п1} = k_{п2} = k_{п}$.

Подставив $k_{п}$ в выражение для $U_{п}$, получим

$$U_{п} = k_{п} (\Theta_{вх} - \Theta_{вых}) = k_{п} \Theta,$$

что соответствует функциональной схеме, приведенной на рис. 1.9, б.

Пример 1.4. Составление функциональной схемы системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока Д.

Принципиальная схема системы регулирования показана на рис. 1.10. Из рассмотрения схемы видно, что скорость вращения двигателя преобразуется с помощью тахогенератора ТГ в напряжение обратной связи $U_{о.с.}$, сравниваемое с задающим напря-

жением U_a , изменяя которое можно задавать различную скорость двигателя. Разность $U_a - U_{oc}$ суммируется с напряжением U_0 местной отрицательной обратной связи, получаемым для повышения динамических свойств системы регулирования в стабилизирующем контуре R_0C_0 , и подается на вход лампового усилителя постоянного тока, состоящего из двух каскадов. Первый каскад — фазоинверсный (лампы L_1, L_2), второй — оконечный каскад на лампах L_3 и L_4 , в анодные цепи которых включены обмотки управления ЭМУ так, чтобы м. д. с. этих обмоток были направлены навстречу друг другу. При отсутствии сигнала на входе усилителя токи I_{y1} и I_{y2} равны между собой, и результирующая м. д. с. управления ЭМУ равна нулю. Электромагнитный усилитель нагружен на

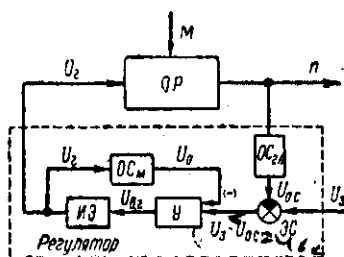


Рис. 1.11. Функциональная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя

обмотку возбуждения генератора *ОВГ*, работающего на двигателе постоянного тока с независимым возбуждением по схеме генератор — двигатель.

Будем считать двигатель объектом регулирования *ОР*. Напряжение генератора U_r представляет собой регулирующее воздействие, а момент нагрузки M на валу двигателя — возмущающее воздействие.

В качестве исполнительного элемента *ИЭ* примем генератор, вращаемый с постоянной скоростью приводным двигателем *ПД*, а ламповый усилитель объединим вместе с ЭМУ в один усилительный элемент *У*.

Добавив элементы главной $ОС_{гл}$ и местной $ОС_{м}$ обратных связей, а также элемент сравнения ЭС, получим функциональную схему системы автоматического регулирования, изображенную на рис. 1.11.

Пример 1.5. Составление функциональной схемы следящей системы с корректирующим контуром переменного тока.

Электрическая схема следящей системы дана на рис. 1.12 [Л. 18]. Система работает следующим образом. Напряжение переменного тока, амплитуда которого пропорциональна величине рассогласования (ошибке), а фаза определяется знаком ошибки, поступает на управляющую сетку пентода 6Ж8 через Т-образный контур.

Последний состоит из конденсаторов C_4, C_5 и сопротивлений R_4, R_5, R_7 и служит для повышения динамических качеств следящей системы. Конденсаторы C_1, C_2, C_3 включены для улучшения частотной характеристики Т-образного контура. Сигнал

ошибки усиливается далее двумя последующими каскадами, собранными на двух половинах двойного триода 6Н9С, и поступает на фазоинверсный усилительный каскад на двойном триоде 6Н8С с катодным выходом, к которому подключены управляющие сетки оконечного каскада. Со вторичной обмотки выходного трансформатора напряжение подается на управляющую обмотку асинхронного двухфазного двигателя. Одновременно часть этого напряжения через делитель R_{12} , R_{13} поступает в

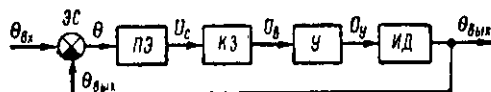


Рис. 1.13. Функциональная схема следящей системы

виде отрицательной обратной связи на входной каскад усилителя. Обмотка возбуждения двигателя подключена к сети переменного тока через конденсатор C_{15} , обеспечивающий

сдвиг фазы тока в обмотке возбуждения на 90° по отношению к току в управляющей обмотке двигателя.

Сельсинная схема измерения рассогласования состоит из сельсин-датчика $СД$ и сельсина-трансформатора $СТ$, выполняющих функции элемента сравнения $ЭС$ и преобразующего элемента $ПЭ$.

Т-образный контур является корректирующим звеном $КЗ$, включенным последовательно в замкнутую цепь следящей системы.

Отрицательная обратная связь в усилителе охватывает безынерционные звенья и не влияет на динамику системы, отражаясь только на величине коэффициента усиления. Поэтому ее можно не выделять на функциональной схеме, а учесть при определении численных значений параметров системы.

С учетом сделанных замечаний функциональная схема следящей системы будет иметь вид, представленный на рис. 1.13.

Пример 1.6. Составление функциональной схемы системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока с тиратронами.

Работа системы регулирования, принципиальная схема которой показана на рис. 1.14, протекает следующим образом. Требуемая скорость двигателя задается потенциометром $П_1$, который питается постоянным напряжением через стабилизатор $СТВ_1$. Разность напряжений, снимаемых с потенциометра $П_1$ и потенциометра $П_2$, питаемого напряжением от тахогенератора $ТГ$, поступает через сопротивление R_c на управляющие сетки пентодов 6Ж7, образующих входной каскад усилителя (лампы $Л_1$ и $Л_2$).

Конденсатор C_1 , включенный между анодом и сеткой лампы $Л_1$, образует совместно с сопротивлением R_c дифференцирующий RC -контур в цепи местной обратной связи, вводимой для

стабилизации системы регулирования. Результирующий сигнал усиливается лампой Π_2 , анодное напряжение которой подается на сетку триода Π_3 , образующего совместно с конденсатором C_2 фазовращающий мост. Напряжение, снимаемое с диагонали моста, поступает на сетки тиратронов T_1 и T_2 , работающих по схеме двухполупериодного управляемого выпрямителя, в цепь нагрузки которого включен якорь двигателя $\mathcal{D}$.

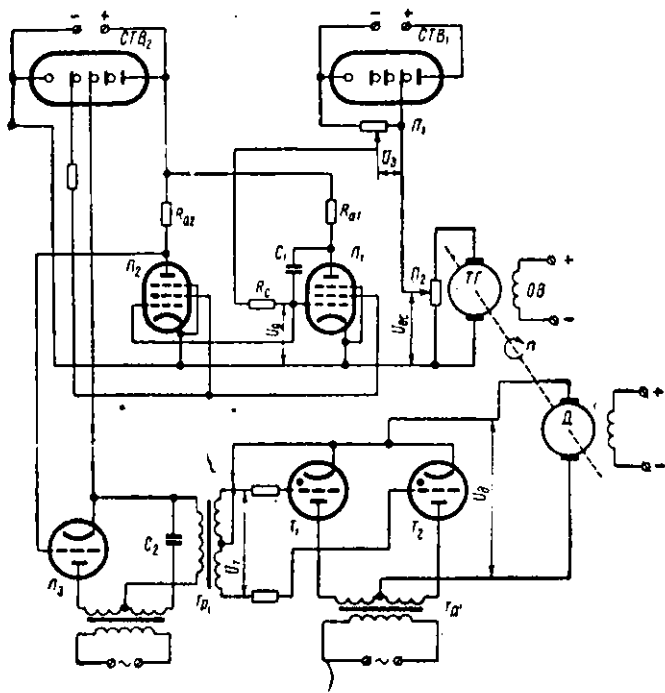


Рис. 1.14. Принципиальная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока с тиратронами

При изменении скорости вращения двигателя (например, вследствие переменной нагрузки) меняется напряжение на зажимах якоря тахогенератора и, соответственно, — на потенциометре Π_2 . В результате возникает разбаланс на входе усилителя, напряжение разбаланса совместно с демпфирующим сигналом местной обратной связи усиливается и, воздействуя на лампу Π_3 , сдвигает фазу напряжения, поступающего на сетки тиратронов, изменяя угол отсечки анодного тока каждого тиратрона. В результате изменяется среднее значение тока в якоре двигателя,

благодаря чему скорость двигателя восстанавливается до значения, близкого к заданному.

При разделении системы автоматического регулирования на функциональные элементы следует принять во внимание способ включения стабилизирующего RC -контура в схему усилителя. Как видно из принципиальной схемы, сетки ламп $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ соединены между собой параллельно и отделены от входа системы (движка потенциометра $\mathcal{П}_1$) сопротивлением R_c . Напряжение U_g , усиливаемое лампой $\mathcal{L}_2$, является результатом действия как

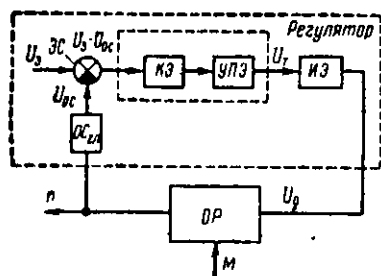


Рис. 1.15. Функциональная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя с тиратронами

входного сигнала системы U_3 — $U_{г.с.}$ так и стабилизирующей обратной связи, поступающей с анода лампы $\mathcal{L}_1$. Поэтому весь входной каскад усилителя, состоящий из триодов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$, вместе с RC -контуром местной обратной связи, целесообразно рассматривать как активный корректирующий элемент $КЭ$, включенный последовательно в главную цепь системы регулирования. С ним можно объединить усилительно-преобразовательный элемент $УПЭ$ — фазовращающий элемент, что вызовет лишь изменение вели-

чины передаточного коэффициента корректирующего элемента, которое всегда может быть учтено при подстановке численных значений параметров системы.

Если принять двигатель за объект регулирования $ОР$, то тиратронный усилитель мощности можно считать исполнительным элементом $ИЭ$, входной величиной которого служит напряжение с изменяющейся фазой U_t на сетках тиратронов, а выходной — среднее значение выпрямленного напряжения на зажимах якоря двигателя U_d , представляющее собой регулирующее воздействие.

Функциональная схема системы регулирования будет иметь вид, изображенный на рис. 1.15.

Пример 1.7. Составление функциональной схемы следящей системы шлифовального станка с полупроводниковым усилителем.

Упрощенная электрическая схема следящей системы изображена на рис. 1.16. Система работает следующим образом. Программирующее устройство $ПрУ$ воспроизводит в виде угла поворота входной оси следящей системы заданный закон перемещения шлифовального круга $ШК$ в плоскости, перпендикулярной к обрабатываемой поверхности $ОП$. Шлифовальный круг имеет постоянную скорость подачи вдоль указанной поверхности. По-

дача осуществляется специальным приводом, не показанным на схеме.

Выходной осью системы служит ходовой винт $XВ$, передающий движение суппорту $С$. Благодаря применению в конструкции станка специального шарикового винта люфт в паре винт-гайка весьма мал, и перемещение шлифовального круга с достаточной точностью соответствует повороту выходной оси следящей системы.

Разность углов поворота входной и выходной осей с помощью дифференциала $Др$ реализуется в угол поворота ротора вращающегося трансформатора $ВТ$. Напряжение, снимаемое с одной из обмоток $ВТ$, при малых углах поворота ротора пропорционально ошибке $\Theta = \Theta_{вх} - \Theta_{вых}$. Это напряжение подается на обмотку 1 входного трансформатора $Тр_1$ полупроводникового усилителя, состоящего из каскада усиления переменного тока, фазочувствительного выпрямительно-усилительного каскада и оконечного каскада усиления постоянного тока. Между фазочувствительным и оконечным каскадами включено корректирующее звено C_1R_8 . На сопротивления R_5 и R_5 фазочувствительного каскада через корректирующий контур, состоящий из сопротивлений R_{12} и R_{13} и конденсаторов C_2 и C_3 , подается напряжение якоря ЭМУ. На обмотку 2 трансформатора $Тр_1$, одинаковую с обмоткой 1, от асинхронного тахогенератора подается напряжение отрицательной обратной связи по скорости вращения выходной оси, регулируемое при помощи делителя R_{14} .

Сопротивление R_{15} , шунтирующее компенсационную обмотку $КО$ ЭМУ, подобрано так, чтобы скомпенсировать не только размагничивающее действие продольной реакции якоря, но и в значительной мере падение напряжения на сопротивлении якорной обмотки ЭМУ. Благодаря этому уменьшаются отклонения скорости двигателя с изменением нагрузки, что существенно при малых скоростях.

При разделении следящей системы на функциональные элементы нужно выделить участки схемы, охватываемые местными обратными связями, и последовательные корректирующие звенья в прямой цепи системы. Каскад усиления переменного тока полупроводникового усилителя выделим в качестве первого усилительного элемента схемы $У_1$. Фазочувствительный каскад представляет собой усилительно-преобразовательный элемент $УПЭ$, так как, помимо усиления сигнала, в его функции входит преобразование переменного напряжения в постоянное. Он отделен последовательным корректирующим звеном $КЗ$ от второго усилительного элемента $У_2$, объединяющего оконечный каскад усиления постоянного тока полупроводникового усилителя и ЭМУ. Последним элементом в прямой цепи системы является исполнительный двигатель $ИД$ вместе с понижающим редуктором.

Элементы местных обратных связей $ОС_1$ и $ОС_2$ отражают наличие в следящей системе отрицательных обратных связей по напряжению ЭМУ и по скорости вращения выходной оси.

Соответственно трем обратным связям (одной — главной и двум местным) на функциональной схеме необходимо иметь три элемента сравнения ЭС, из которых первый осуществляет механическое суммирование величин $\Theta_{вх}$ и $\Theta_{вых}$, а два других — электрическое суммирование сигналов прямой цепи и местных обратных связей. Вращающийся трансформатор представляет собой преобразующий элемент ПЭ.

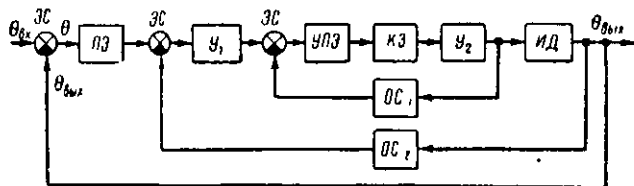


Рис. 1.17. Функциональная схема следящей системы профилировального станка с полупроводниковым усилителем

С учетом сделанных замечаний можно изобразить функциональную схему рассматриваемой следящей системы в виде, представленном на рис. 1.17.

Пример 1.8. Составление функциональной схемы следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А завода им. Я. М. Свердлова.

Упрощенная принципиальная схема следящей системы изображена на рис. 1.18. Работа схемы протекает следующим образом. Индуктивное следящее устройство ИСУ (копировальный прибор) преобразует механическое отклонение копировального пальца КП от нулевого положения, соответствующего определенной степени растяжения пружины, в напряжение сигнала ошибки U_c , подаваемое на вход электронного усилителя через выходной трансформатор $Tr_{вх}$.

Копировальный прибор жестко связан с фрезой Φ , благодаря чему напряжение U_c характеризует отклонение профиля поверхности обрабатываемого изделия $И$ от заданного шаблоном $Ш$, т. е. ошибку следящей системы Θ , причем амплитуда этого напряжения определяет величину ошибки, а фаза — ее знак.

Входной каскад усилителя, собранный на двойном триоде $Л_1$ и работающий в режиме фазочувствительного выпрямителя, помимо усиления напряжения U_c , формирует сигнал управления системой. Выходное напряжение этого каскада, кроме составляющей, пропорциональной ошибке, содержит также составляющие, пропорциональные производной $p\Theta$ и интегралу от ошибки

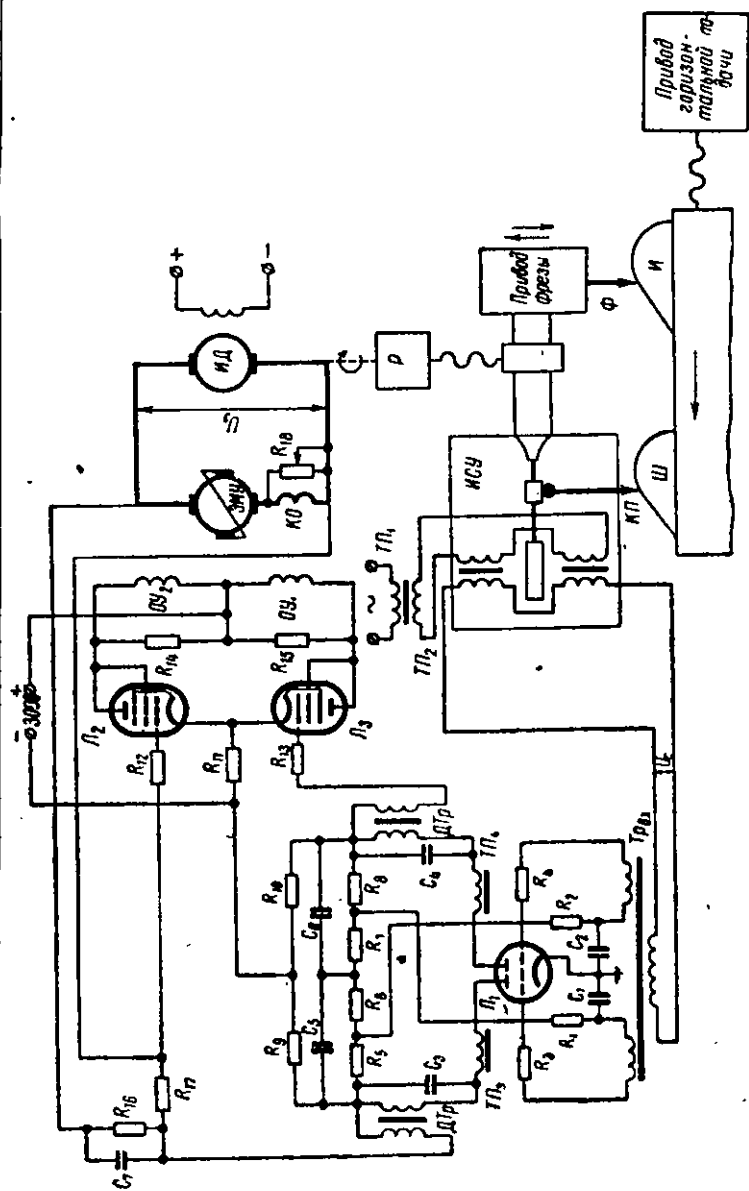


Рис. 1.18. Упрощенная принципиальная схема следящей системы копировально-фрезерного станка 641А
завода им. Я. М. Свердлова

по времени $\frac{\Theta}{p}$. Сигнал, пропорциональный $p\Theta$, получается с помощью дифференцирующего трансформатора $ДТр$, первичные обмотки которого включены в анодные цепи триода $\mathcal{L}_1$, а вторичные — в сеточные цепи оконечного каскада на лампах $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$. Сигнал, пропорциональный интегралу от ошибки, вырабатывается во входном каскаде при помощи контуров R_1C_1 и R_2C_2 , образующих совместно с триодом $\mathcal{L}_1$ активное интегрирующее звено. Конденсаторы C_3 и C_6 служат для отфильтровывания переменной составляющей сигнала.

Выходной каскад электронного усилителя представляет собой усилитель постоянного тока. В анодные цепи ламп $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ включены обмотки управления OU_1 и OU_2 электромашинного усилителя с поперечным полем ЭМУ, работающего на исполнительный двигатель ИД постоянного тока с независимым возбуждением. Обмотки OU_1 и OU_2 включены таким образом, что развиваемые ими м. д. с. направлены встречно. При отсутствии сигнала на входе усилителя (при нулевой ошибке) токи, протекающие в управляющих обмотках ЭМУ, равны между собой, а результирующая м. д. с. управления равна нулю.

В следящей системе имеется местная отрицательная обратная связь по напряжению ЭМУ, осуществляемая с помощью контура, состоящего из сопротивлений R_{16} , R_{17} и конденсатора C_7 . Переменное сопротивление R_{18} , шунтирующее компенсационную обмотку КО, позволяет изменять степень компенсации ЭМУ.

Следящая система копировально-фрезерного станка 6441А подробно описана в [Л. 25].

Индуктивное следящее устройство будет представлено на функциональной схеме преобразующим элементом ПЭ, входной величиной которого является ошибка Θ , а выходной — напряжение сигнала ошибки U_c .

Следующим узлом принципиальной схемы является входной каскад лампового усилителя. При составлении функциональной схемы важно отразить обе его функции — усиление сигнала ошибки и выработку дополнительных управляющих сигналов, пропорциональных производной и интегралу от ошибки. Это можно сделать, представив входной каскад усилителя двумя последовательно включенными элементами: усилительным $У_1$ и корректирующим КЗ.

Оконечный каскад электронного усилителя целесообразно объединить в один усилительный элемент $У_2$ вместе с ЭМУ. Этот элемент охватывается местной отрицательной обратной связью ОС_м по напряжению ЭМУ, в соответствии с чем необходимо выделить элемент обратной связи и второй элемент сравнения ЭС.

В качестве последнего элемента на функциональной схеме выделим исполнительный двигатель ИД вместе с механическим редуктором P , который, помимо понижения скорости, преобра-

зует вращательное движение вала двигателя в поступательное перемещение суппорта с фрезой и копировальным прибором, представляющее собой выходную величину системы $\Theta_{\text{вых}}$. Поэтому в последнее звено войдет также и винтовая передача, изображенная на принципиальной схеме отдельно от редуктора.

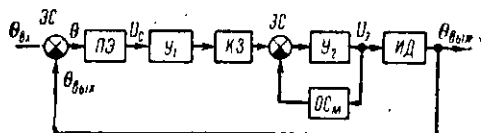


Рис. 1.19. Функциональная схема следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А

Функциональная схема следящей системы копировально - фрезерного станка 6441А будет иметь вид, изображенный на рис. 1.19.

Пример 1.9. Составление функциональной

схемы системы автоматического управления продольным движением самолета с автопилотом АП-28.

В упрощенном виде принципиальная схема системы управления изображена на рис. 1.20. Самолет, представляющий собой аэродинамический объект управления, должен занимать во время полета определенное положение в вертикальной плоскости симметрии, характеризуемое углом тангажа θ . Действие внешних возмущений (ветровой момент, изменение центра тяжести и др.) создает момент $M_{\text{в}}$ относительно центра масс самолета, стремящийся изменить заданную величину θ . Назначение автопилота (вынесенного на схеме для наглядности за контуры самолета) состоит в том, чтобы на основе информации, получаемой от гироскопических приборов и других устройств, вырабатывать управляющие сигналы, в соответствии с которыми рулевая машина *РМ* поворачивает руль высоты на угол δ , который создает восстанавливающий момент, приводящий угол тангажа к заданной величине.

На отдельные входные обмотки магнитного усилителя *МУ*, представляющего собой первый каскад общего усилителя рулевого тракта, поступают сигналы, преобразованные при помощи потенциометров в электрические напряжения постоянного тока: $U_{\text{э}}$ — сигнал ошибки системы управления, пропорциональный угловому отклонению корпуса самолета от некоторого опорного положения $\theta_{\text{оп}}$, определяемого гировертикалью *ГВ*; $U_{\text{з}}$ — задающий сигнал, поступающий от рукоятки управления *РУ* или программного механизма, позволяющий изменять заданное угловое положение самолета; $U_{\dot{\theta}}$ — сигнал, пропорциональный угловой скорости тангажа $\dot{\theta}$, поступающий от датчика угловой скорости *ДУС*; U_{δ} — сигнал, пропорциональный углу поворота руля, высоты от нулевого положения, идущий от датчика положения рулей *ДПР*. Указанные сигналы суммируются алгебраически в магнитном усилителе в виде ампер-витков подмагничивания, мо-

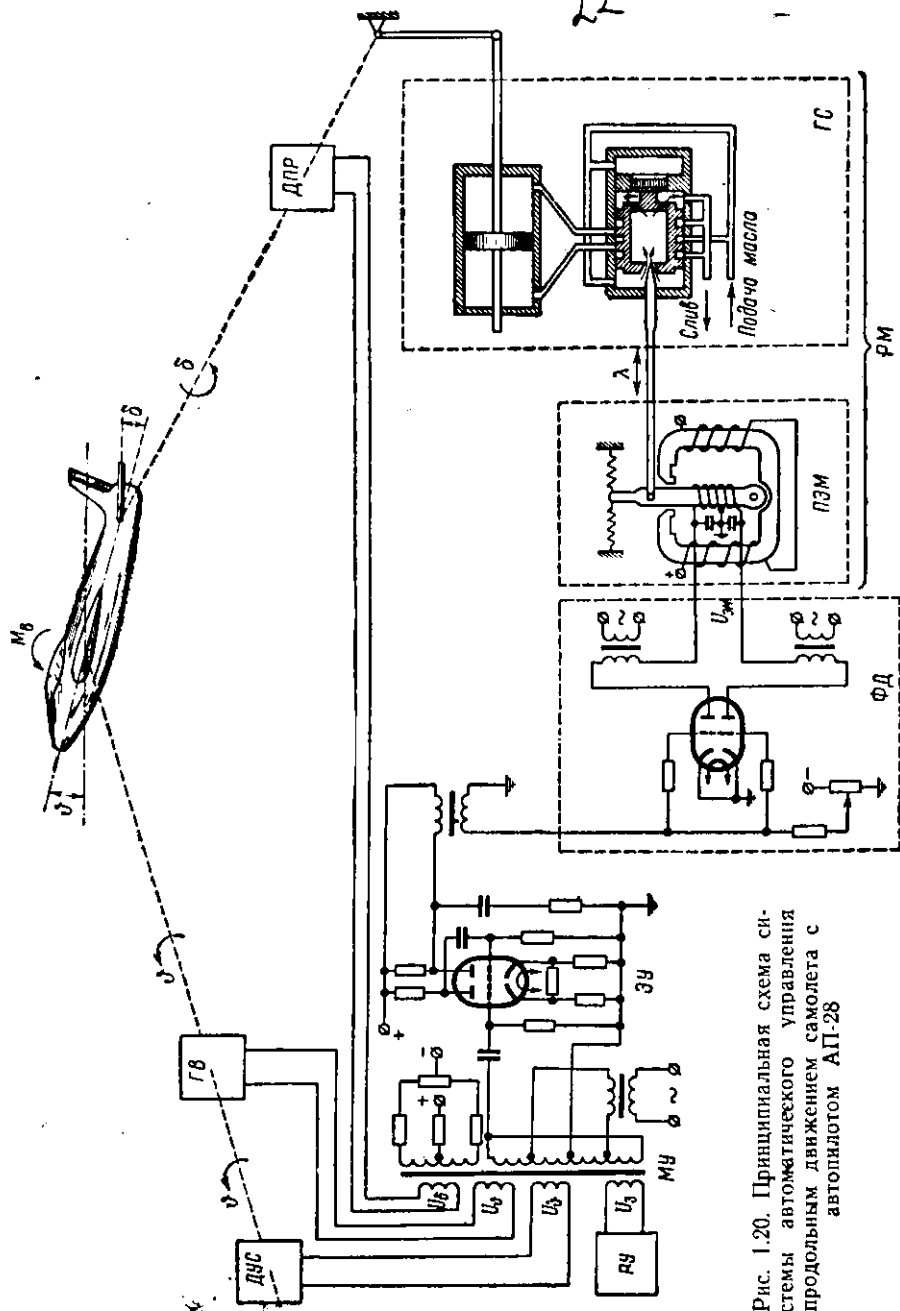


Рис. 1.20. Принципиальная схема системы автоматического управления продольным движением самолета с автопилотом АП-28

дулируются частотой 400 гц и поступают на вход резонансного электронного усилителя ЭУ, амплитуда выходного напряжения которого пропорциональна величине суммарного сигнала, а сдвиг фазы (0 или 180° по отношению к сети 400 гц, питающей рабочие обмотки магнитного усилителя) определяет его знак. Усиленное напряжение с выхода электронного усилителя поступает на сетки фазового дискриминатора ФД, в анодные цепи которого включены управляющие обмотки пропорционального электромагнита ПЭМ рулевой машины. Среднее значение и полярность выпрямленного напряжения $U_{\text{эм}}$ на зажимах этих обмоток определяются соответственно амплитудой и фазой переменного напряжения на сетках фазового дискриминатора. В свою очередь, поляризованный пропорциональный электромагнит поворачивает свой якорь на угол, пропорциональный среднему значению тока в его управляющих обмотках, причем направление поворота зависит от полярности $U_{\text{эм}}$. С якорем пропорционального электромагнита связана игла следящего золотника гидравлического сервомотора ГС рулевой машины. Золотник, повторяя перемещение λ иглы, управляет движением поршня сервомотора и, уменьшая нагрузку на пропорциональный электромагнит, увеличивает чувствительность автопилота. Перемещение поршня гидравлического сервомотора преобразуется в пропорциональный ему поворот руля высоты. Более подробно устройство и работа автопилота АП-28 разобраны в [Л. 8].

При разделении рассматриваемой системы управления продольным движением самолета на отдельные функциональные элементы и определении связей между ними будем исходить из общей функциональной схемы системы автоматического управления, приведенной на рис. 1.1.

Объектом управления ОУ является самолет, угол тангажа которого представляет собой управляемую или выходную величину системы. В данном случае оба эти понятия сливаются в одно, так как выходная величина системы — угловое положение корпуса самолета, если его определять в не связанной с самолетом системе координат каким-либо внешним способом (например, фотографированием при помощи кино-пулемета с земли), одновременно является как раз той величиной, которая непосредственно сравнивается при помощи гировертикали с некоторым опорным положением в пространстве, т. е. управляемой величиной системы. При этом, если пренебречь возможными деформациями корпуса самолета, то следует считать, что выходная величина системы «передается» к элементу сравнения — гировертикали без каких-либо преобразований. Следовательно, элемент главной обратной связи должен иметь передаточный коэффициент, равный единице, а сама обратная связь может быть изображена на функциональной схеме в виде линии, соединяющей выход системы с элементом сравнения.

Регулирующим воздействием в данной системе считается угол δ поворота руля высоты, так как создаваемый им восстанавливающий аэродинамический момент также зависит от параметров самолета и режима полета и может быть отнесен к величинам, характеризующим свойства объекта управления.

Сложнее выглядит вход системы управления. Особенностью рассматриваемой системы является то, что входная величина, определяющая требуемое в каждый данный момент значение угла тангажа, в общем случае представляется в виде двух составляющих: неизменного опорного значения $\theta_{оп}$, определяемого положением гировертикали, и заданного значения θ_3 , вводимого пилотом или программным механизмом для изменения требуемого значения угла тангажа, относительно которого должно стабилизироваться угловое положение самолета в вертикальной плоскости. При этом в отличие от $\theta_{оп}$ вторая составляющая θ_3 не непосредственно сравнивается с действительным значением угла тангажа, а сначала преобразуется с помощью потенциометрического датчика в пропорциональное электрическое напряжение U_3 , которое затем уже сравнивается с другими сигналами на входе магнитного усилителя. Это находит отражение на функциональной схеме (рис. 1.21, а) в виде двух различных входных величин. Первая из них $\theta_{оп}$ поступает на элемент сравнения ЭС₁. С ней сравнивается действительное значение θ и их разность $\Delta\theta_{оп} = \theta_{оп} - \theta$ при помощи потенциометрического преобразующего элемента ПЭ₁ (образующего вместе с ЭС₁ чувствительный элемент ЧЭ — гировертикаль) преобразуется в электрический сигнал $U_\theta = k_1 \Delta\theta_{оп}$, поступающий на второй элемент сравнения ЭС₂ (вход магнитного усилителя), где суммируется с напряжением $U_a = k_2 \theta_3$, получаемым на выходе второго преобразующего элемента ПЭ₂, представляющего собой потенциометрический датчик ручного управления (здесь k_1, k_2 — передаточные коэффициенты соответствующих потенциометрических датчиков).

«Идеальная» система управления, очевидно, может быть представлена воображаемым элементом сравнения ЭС₄, осуществляющим точное суммирование обеих составляющих входной величины.

Ввиду того что гировертикаль и датчик ручного управления обладают собственными погрешностями (что отражено на схеме случайными возмущениями f_1 и f_2), ошибка системы управления

$$\Delta\theta = \theta_{ид} - \theta,$$

где $\theta_{ид} = \theta_{оп} + \theta_3$ — «идеальная» выходная величина системы, θ — действительная выходная величина (измеряемая, например, фотографированием, как указывалось ранее).

В том же элементе сравнения ЭС₂ из суммы сигналов $U_3 + U_\theta$ вычитается сигнал U_ϕ , пропорциональный угловой скорости $\dot{\theta}$

тангажа. Этот сигнал вырабатывается в датчике угловой скорости, представляющем собой элемент местной обратной связи $ОС_{м2}$. Наличие в системе еще одной местной обратной связи $ОС_{м1}$, вырабатывающей сигнал, пропорциональный углу поворота руля, обуславливает появление на функциональной схеме еще одного элемента сравнения $ЭС_3$.

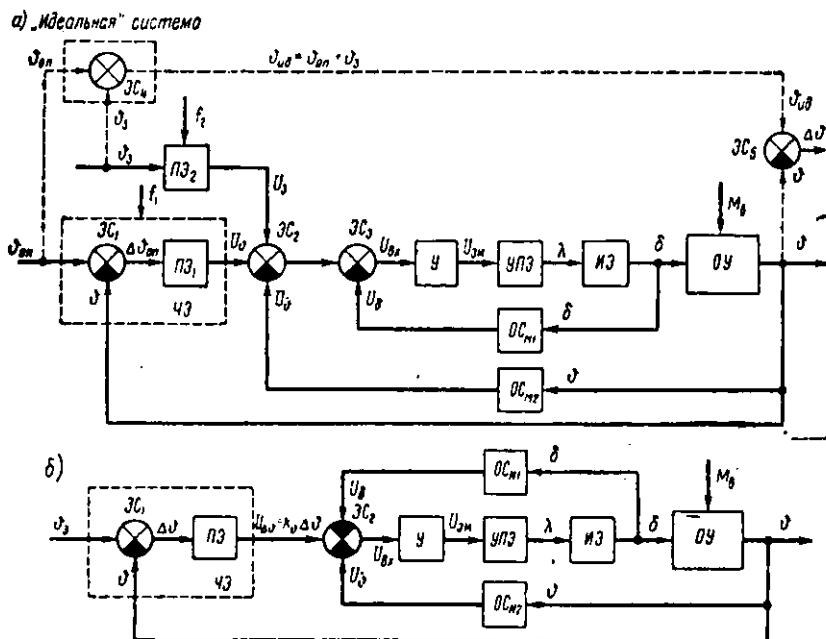


Рис. 1.21. Функциональные схемы системы автоматического управления продольным движением самолета:

а — исходная; б — преобразованная упрощенная

Строго говоря, следовало бы каждое из поступающих на вход магнитного усилителя напряжений преобразовать в соответствующие ампер-витки, так как фактически именно они, а не напряжения, суммируются в магнитном усилителе (поскольку имеется четыре отдельные управляющие обмотки). Однако это значительно усложнило бы функциональную схему, так как потребовалось бы ввести еще четыре преобразующих элемента до суммирования. При расчете четыре управляющие обмотки магнитного усилителя могут быть заменены одной эквивалентной. Поэтому целесообразно представить на функциональной схеме суммирование сигналов в виде электрических напряжений.

Безынерционный электронный усилитель и фазовый дискриминатор можно объединить с магнитным усилителем в общий

усилительный элемент $У$ (усилитель рулевого тракта), считая входом его эквивалентное входное напряжение $U_{вх}$ магнитного усилителя, а выходом — напряжение $U_{вых}$ на зажимах управляющих обмоток пропорционального электромагнита, представляющего собой усилительно-преобразовательный элемент $УПЭ$, преобразующий электрический сигнал в механическое перемещение λ иглы следящего золотника гидравлического сервомотора рулевой машины.

Пропорциональный электромагнит целесообразно выделить в качестве отдельного элемента еще и потому, что он обладает значительной инерцией, и при исследовании динамики системы в этом случае будет легче осуществить переход от функциональной схемы к структурной.

Следящий золотник, практически без запаздывания повторяющий перемещение иглы, удобно объединить вместе с гидравлическим сервомотором и выделить в качестве исполнительного элемента $ИЭ$.

Изображенная на рис. 1.21, а функциональная схема системы управления продольным движением самолета хорошо отражает физическую сторону процессов, происходящих в системе. Однако она неудобна для расчетов ввиду своей сложности.

Приняв ряд допущений (обычно оправдываемых с точки зрения практики) и проведя некоторые преобразования, можно получить более простую и удобную в расчетном отношении эквивалентную функциональную схему.

Если считать погрешности гировертикали f_1 и датчика ручного управления f_2 достаточно малыми, то можно пренебречь ими ($f_1 = f_2 = 0$). Тогда отпадает надобность в сравнении с «идеальной» системой.

Далее, рассматривая горизонтальный полет самолета с постоянной скоростью, положим $\vartheta_{оп} = 0$, т. е. будем отсчитывать углы тангажа от горизонтали. Тогда будут иметь место равенства:

$$\vartheta_3 = \vartheta_{нд} \text{ и } \Delta\vartheta_{оп} = -\vartheta.$$

С учетом этого приведенные ранее значения сигналов U_3 и U_ϑ могут быть записаны в виде:

$$U_3 = k_2 \vartheta_3 \text{ и } U_\vartheta = k_1 \Delta\vartheta_{оп} = -k_1 \vartheta,$$

а их сумма

$$U_{3\vartheta} = U_3 + U_\vartheta = k_2 \vartheta_3 - k_1 \vartheta.$$

Сделав передаточные коэффициенты потенциометрических преобразующих элементов $ПЭ_1$ и $ПЭ_2$ равными $k_1 = k_2 = k_\vartheta$, будем иметь

$$U_{3\vartheta} = k_\vartheta (\vartheta_3 - \vartheta) = k_\vartheta (\vartheta_{нд} - \vartheta) = k_\vartheta \Delta\vartheta,$$

где $\Delta\vartheta$ — ошибка системы управления.

Преобразованная таким образом функциональная схема системы приведена на рис. 1.21, б. На схеме в эквивалентном чувствительном элементе получается с помощью элемента сравнения ЭС₁ ошибка системы $\Delta\theta$, как разность заданного θ_z и действительного θ значений угла тангажа, преобразуемая одним преобразовательным элементом ПЭ в сигнал ошибки $U_{\Delta\theta}$, из которого затем в элементе сравнения ЭС₂ вычитаются сигналы местных обратных связей U_{θ} и $U_{\dot{\theta}}$.

Схема, изображенная на рис. 1.21, б, более удобна для математического анализа и расчета.



Глава II. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 2.1. Основные правила составления и преобразования структурных схем

При исследовании и расчете систем автоматического управления исходят из математического описания происходящих в них физических процессов. Обычно это описание бывает представлено в виде системы дифференциальных уравнений, выражающих связи между переменными величинами и их производными. Такой подход, когда уравнения описывают поведение исследуемой системы в целом, является наиболее общим в математическом плане и применимым во всех случаях.

Вместе с тем для большого класса систем автоматического управления (линейных систем) широко применяется и другой способ, связанный с использованием операторного метода. При этом способе исследуемая система разделяется на части — звенья направленного действия, обладающие свойством передачи сигнала только в одном направлении: от входа к выходу. Совокупность этих звеньев совместно с линиями связи между ними, характеризующими их взаимодействие, образует структурную схему системы управления.

Между функциональными и структурными схемами есть определенная общность — те и другие отражают процесс передачи и переработки информации в замкнутом контуре системы управления. Однако между ними существует и четкое различие: функциональные схемы характеризуют систему по составу входящих в нее элементов, рассматриваемых с точки зрения их назначения, т. е. выполняемых ими функций (см. § 1.1); структурные схемы, состоящие из звеньев направленного действия, описывают математически динамические свойства системы. Исходя из структуры системы и вида входящих в нее функциональных элементов, можно произвести разделение систем на звенья направленного действия в общем виде так, чтобы для каждого из них можно было наиболее просто определить передаточную функцию звена как отношение операторных изображений выходной величины звена к входной и соединить отдельные звенья между собой линиями связи.

Передаточная функция каждого звена направленного действия представляет собой записанное в операторной форме и разрешенное относительно изображения выходной величины дифференциальное уравнение данного звена. Таким образом, задача составления дифференциальных уравнений системы автоматического управления в целом сводится к составлению уравнений отдельных звеньев. Получаемый при этом выигрыш в части трудоемкости становится более очевидным, так как на практике в подавляющем большинстве случаев структурные схемы систем

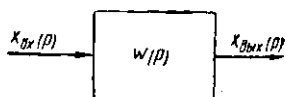


Рис. 2.1. Система направленного действия

автоматического управления представляют собой различные комбинации небольшого числа так называемых типовых звеньев направленного действия, передаточные функции и динамические свойства которых могут быть определены раз и навсегда.

Весьма важным преимуществом структурных схем является их физическая наглядность, дающая более ясное представление о процессах, происходящих в исследуемой системе, по сравнению с общей формой записи дифференциальных уравнений.

В свете сказанного понятна необходимость в умении разделять системы автоматического управления на звенья направленного действия и составлять структурные схемы в общем виде, основываясь на принципиальных и функциональных схемах систем управления.

После того как составлена структурная схема и получены передаточные функции входящих в нее звеньев, необходимо определить передаточную функцию всей системы. При этом, если для разделения систем управления на звенья направленного действия нельзя дать какого-то единого рецепта, а приходится каждый раз руководствоваться в значительной мере соображениями общего порядка и интуицией, приобретаемыми в процессе накопления опыта и выполнения специальных упражнений, то для определения передаточной функции системы по ее структурной схеме можно воспользоваться специальными правилами преобразования структурных схем, основные из которых приводятся ниже.

Читателю, не имеющему достаточного навыка в использовании структурных схем, рекомендуется не просто пользоваться полученными в данном параграфе формулами, а внимательно разобрать сам процесс их вывода, являющийся примером преобразования структурных схем в наиболее общем виде. Кроме того, в сложных случаях может оказаться выгоднее не пытаться применить окончательные формулы преобразования, а идти путем, намеченным при их выводе.

Рассмотрим разомкнутую систему, обладающую свойством направленного действия (рис. 2.1). Это может быть как одно звено, так и любая их комбинация.

По определению передаточной функции

$$W(p) = \frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}, \quad (2.1)$$

откуда следует основное свойство направленной системы

$$X_{\text{вых}}(p) = W(p) X_{\text{вх}}(p), \quad (2.2)$$

т. е. операторное изображение выходной величины равняется передаточной функции системы, умноженной на изображение входной величины.

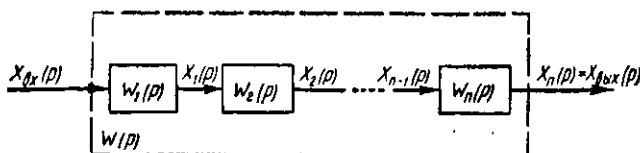


Рис. 2.2. Последовательное включение звеньев направленного действия

Рассмотрим основные случаи включения звеньев направленного действия.

1. Последовательное включение (одноконтурная разомкнутая система). Структурная схема приведена на рис. 2.2.

На основании формулы (2.2) для каждого из n звеньев можно записать:

$$\begin{aligned} X_1(p) &= W_1(p) X_{\text{вх}}(p), \\ X_2(p) &= W_2(p) X_1(p), \\ &\dots \dots \dots \\ X_i(p) &= W_i(p) X_{i-1}(p), \\ &\dots \dots \dots \\ X_n(p) &= W_n(p) X_{n-1}(p). \end{aligned}$$

Исключая все промежуточные величины, т. е. подставляя предыдущие в последующие, получим выражение для последнего члена:

$$X_n(p) = W_n(p) X_{n-1}(p) = W_n(p) W_{n-1}(p) X_{n-2}(p) = \dots$$

Учитывая, что выход последнего n -го звена является одновременно выходной величиной системы, т. е.

$$X_n(p) = X_{\text{вых}}(p),$$

получим

$$X_{\text{вых}}(p) = W_1(p) W_2(p) \cdots W_i(p) \cdots W_{n-1}(p) W_n(p) X_{\text{вх}}(p).$$

Так как отношение

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)}$$

по определению есть передаточная функция всей системы $W(p)$, то окончательно будем иметь

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \prod_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.3)$$

Итак, передаточная функция последовательно включенных звеньев направленного действия равняется произведению передаточных функций отдельных звеньев.

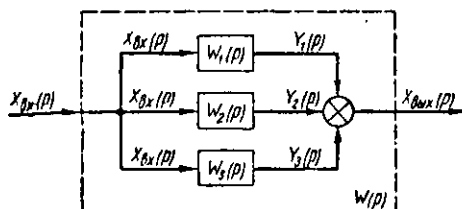


Рис. 23. Параллельное согласное включение звеньев направленного действия

2. Параллельное согласное включение. Параллельным согласным включением звеньев направленного действия считается такое, при котором входная величина системы подается параллельно на входы всех звеньев, а их выходные величины алгебраически суммируются на выходе системы.

На рис. 2.3 изображен частный случай параллельного согласного включения трех звеньев направленного действия.

На основании формулы (2.2) для каждого из n параллельно включенных звеньев можно записать:

$$Y_1(p) = W_1(p) X_{\text{вх}}(p),$$

$$Y_2(p) = W_2(p) X_{\text{вх}}(p),$$

$$\dots$$

$$Y_i(p) = W_i(p) X_{\text{вх}}(p),$$

$$\dots$$

$$Y_n(p) = W_n(p) X_{\text{вх}}(p).$$

Суммируя написанные равенства и принимая во внимание, что по определению параллельного согласного включения звеньев направленного действия сумма левых частей является выходной величиной системы, получим

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}}(p) &= Y_1(p) + Y_2(p) + \cdots + Y_i(p) + \cdots + Y_n(p) = \\ &= [W_1(p) + W_2(p) + \cdots + W_i(p) + \cdots + W_n(p)] X_{\text{вх}}(p). \end{aligned}$$

Согласно определению передаточной функции (2.1), из последнего выражения будем иметь

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \sum_{i=1}^n W_i(p). \quad (2.4)$$

Таким образом, передаточная функция параллельных согласных включенных звеньев направленного действия равняется алгебраической сумме передаточных функций отдельных звеньев.

3. Параллельное встречное включение (обратная связь). Рассмотрим сначала основной случай — отрицательную обратную связь.

На рис. 2.4 изображена структурная схема замкнутой системы автоматического управления в наиболее общем виде, где $G(p)$ и $Z(p)$ — передаточные функции соответственно прямой цепи системы и цепи обратной связи. Сигнал обратной связи $X_{\text{о.с.}}(p)$ вычитается из входного сигнала $X_{\text{вх}}(p)$ (в случае положительной обратной связи они не вычитаются, а складываются). Передаточные функции $G(p)$ и $Z(p)$ могут соответствовать как простым звеньям направленного действия, так и их любым комбинациям.

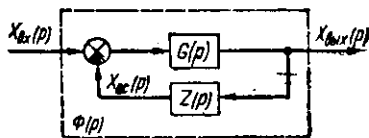


Рис. 2.4. Параллельное встречное включение звеньев направленного действия (обратная связь)

Для схемы, изображенной на рис. 2.4,

$$\begin{aligned} X_{\text{вых}}(p) &= G(p) [X_{\text{вх}}(p) - X_{\text{о.с.}}(p)], \\ X_{\text{о.с.}}(p) &= Z(p) X_{\text{вых}}(p). \end{aligned}$$

Исключив из них промежуточную величину $X_{\text{о.с.}}$, получим передаточную функцию замкнутой системы

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \Phi(p) = \frac{G(p)}{1 + W(p)}, \quad (2.5)$$

где

$$W(p) = G(p) Z(p) \quad (2.6)$$

есть *передаточная функция разомкнутой системы*. Смысл последнего названия становится понятным, если мысленно разомкнуть контур управления в любом месте и, «выпрямив» его, рассматривать прохождение сигнала, поданного в месте размыкания, по цепочке последовательно включенных звеньев направленного действия.

Итак, передаточная функция замкнутой системы автоматического управления равняется отношению передаточной функции

прямой цепи к увеличенной на единицу передаточной функции разомкнутой системы.

Следует отметить, что этот вывод, равно как и формула (2.5), справедливы только для изображенного на рис. 2.4 случая, когда внешнее воздействие поступает на вход системы управления. Поэтому $\Phi(p)$ иногда называют *передаточной функцией замкнутой системы по входному воздействию*.

В действительности, кроме управляющего входного воздействия, всякая реальная система подвержена различным возмущающим воздействиям (колебания нагрузки, нестабильность характеристик элементов, помехи и т. д.), которые могут поступать в систему в любом месте. Для учета их влияния нужно уметь при помощи

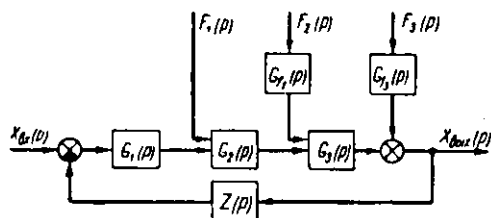


Рис. 2.5. Структурная схема системы автоматического управления

структурной схемы устанавливать зависимости между этими возмущениями и изменениями управляемой (выходной) величины системы.

Рассмотрим структурную схему системы автоматического управления, изображенную на рис. 2.5. Прямая цепь системы состоит из последовательно включенных звеньев направленного действия с передаточными функциями $G_1(p)$, $G_2(p)$, $G_3(p)$. На входы двух последних звеньев поступают возмущающие воздействия $F_1(p)$ и $F_2(p)$, суммирующиеся с соответствующими выходными величинами предыдущих звеньев. Кроме того, возмущение $F_3(p)$ действует непосредственно на выходную величину системы, что обозначено на схеме специальным элементом суммирования. При этом принципиально важно, что место приложения возмущения $F_3(p)$ охвачено обратной связью, т. е. на звено с передаточной функцией $Z(p)$ поступает выходная величина системы уже с учетом действия $F_3(p)$. В противном случае никакого эффекта регулирования не было бы, так как управляемая величина системы, искаженная влиянием возмущающего воздействия, не корректировалась бы обратной связью.

Из структурной схемы (рис. 2.5) видно, что возмущающие воздействия $F_2(p)$, $F_3(p)$ поступают на входы звеньев прямой цепи системы не непосредственно, а через дополнительные звенья с передаточными функциями $G_{f2}(p)$, $G_{f3}(p)$, которые отражают характер зависимости данной величины системы от конкретного возмущающего воздействия.

В силу линейности рассматриваемой системы управления к ней применим принцип наложения, дающий возможность опре-

делить общую реакцию системы (изменение выходной величины) как сумму частных реакций от каждого из внешних воздействий в отдельности.

Положим $X_{\text{вх}}(p) = 0$, $F_2(p) = 0$, $F_3(p) = 0$ и определим зависимость $X_{\text{вых}}(p)$ от $F_1(p)$.

На входе звена $G_2(p)$ действует сумма сигналов $F_1(p) + G_1(p)[0 - Z(p)X_{\text{вых}}(p)]$, которые, пройдя через звенья $G_2(p)$, $G_3(p)$, дадут на выходе

$$X_{\text{вых}}(p) = G_2(p)G_3(p)[F_1(p) - G_1(p)Z(p)X_{\text{вых}}(p)].$$

Разрешив последнее равенство относительно $X_{\text{вых}}(p)$, будем иметь

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{G_2(p)G_3(p)}{1 + W(p)} F_1(p), \quad (2.7)$$

где $W(p) = G_1(p)G_2(p)G_3(p)Z(p)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Полученный результат можно обобщить в виде следующего правила: операторное изображение выходной величины системы равняется дроби, числитель которой есть произведение изображения внешнего воздействия на передаточные функции звеньев, включенных последовательно между точкой приложения воздействия и выходом системы, а знаменатель — увеличенная на единицу передаточная функция разомкнутой системы.

Аналогичным путем получим выражения и для остальных внешних воздействий:

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{G_{f_2}(p)G_3(p)}{1 + W(p)} F_2(p), \quad (2.8)$$

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{G_{f_3}(p)}{1 + W(p)} F_3(p); \quad (2.9)$$

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)}{1 + W(p)} X_{\text{вх}}(p). \quad (2.10)$$

При одновременном воздействии всех возмущений результирующее значение $X_{\text{вых}}(p)$ определится как сумма полученных частных значений, что может быть записано следующим образом:

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{G_1(p)G_2(p)G_3(p)X_{\text{вх}}(p) + G_2(p)G_3(p)F_1(p)}{1 + W(p)} + \frac{G_{f_2}(p)G_3(p)F_2(p) + G_{f_3}(p)F_3(p)}{1 + W(p)}. \quad (2.11)$$

Из выражения (2.5) можно получить (как частный случай) формулы, характерные для следящих систем. Особенностью последних, как отмечалось в § 1.1, является передача выходной

величины $\Theta_{\text{вых}}$ к элементу сравнения, т. е. на вход системы, с коэффициентом передачи, равным единице. Кроме того, основным видом внешних воздействий в следящих системах обычно считают входное (управляющее) воздействие $\Theta_{\text{вх}}$, отрабатываемое системой с некоторой ошибкой (расогласованием)



Рис. 2.6. Структурная схема следящей системы

$$\Theta = \Theta_{\text{вх}} - \Theta_{\text{вых}}$$

С учетом сказанного, положив в (2.6) $Z(p) = 1$, будем иметь

$$W(p) = G(p),$$

после чего, заменив в (2.5) обозначения входной и выходной величин, получим

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)}. \quad (2.12)$$

Соответствующая структурная схема следящей системы приведена на рис. 2.6.

В силу линейности преобразований Лапласа, операторные изображения ошибки, входной и выходной величины связаны между собой так же, как и их оригиналы, т. е.

$$\Theta(p) = \Theta_{\text{вх}}(p) - \Theta_{\text{вых}}(p). \quad (2.13)$$

Определив $\Theta_{\text{вых}}(p)$ из (2.13) и подставив в (2.12), получим после несложных преобразований

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (2.14)$$

Выражения (2.12) и (2.14) называются соответственно передаточными функциями следящей системы по выходной величине и по ошибке.

Во всех рассмотренных случаях передаточные функции замкнутых систем управления определялись через передаточную функцию разомкнутой системы $W(p)$. Последняя обычно может быть представлена в виде

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (2.15)$$

где $A(p)$, $B(p)$ — полиномы от p .

Подставив (2.15) в выражения (2.12) и (2.14), можно получить полезные для расчетов следящих систем формулы:

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{A(p) + B(p)} \quad (2.16)$$

и

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)}. \quad (2.17)$$

Выше рассматривалась отрицательная обратная связь. Читателям предлагается в порядке упражнений самостоятельно убедиться, что в случае положительной обратной связи в знаменателе формул (2.5), (2.7) — (2.12), (2.14) знак плюс перед $W(p)$ изменяется на минус.

Преобразование многоконтурных структурных схем с перекрещивающимися связями производят по способу переключения (перенесения) связей, сущность которого поясняется на примере 2.7.

§ 2.2. Примеры составления структурных схем и определения передаточных функций систем в общем виде

Пример 2.1. Составление структурной схемы и определение передаточных функций системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока.

Принципиальная схема системы регулирования приведена на рис. 1.4.

Будем обходить основной контур системы регулирования, начиная с электронного усилителя, в направлении передачи воздействия.

В качестве первого звена направленного действия примем участок контура от входа электронного усилителя до поперечной цепи якоря ЭМУ. Запоздывание передачи воздействий в этом звене будет определяться отставанием изменения тока в обмотке управления ЭМУ от изменения напряжения на обмотке. За выходную величину этого звена можно принять э. д. с. e_q в поперечной цепи якоря ЭМУ, пропорциональную току в обмотке управления. Тогда передаточная функция первого звена

$$W_y(p) = \frac{E_q(p)}{U_{вх}(p)},$$

где $E_q(p)$ и $U_{вх}(p)$ — соответственно операторные изображения э. д. с. поперечной цепи якоря ЭМУ и напряжения на входе электронного усилителя.

Вторым звеном направленного действия будем считать часть контура системы регулирования, динамические процессы в котором характеризуются изменением тока в поперечной цепи якоря ЭМУ под действием э. д. с. e_q , являющейся для данного звена входной величиной. В качестве выходной величины звена примем э. д. с. e_d продольной цепи якоря ЭМУ. Передаточная функция второго звена

$$W_q(p) = \frac{E_d(p)}{E_q(p)}.$$

В качестве последнего звена направленного действия в прямой цепи системы регулирования примем звено с передаточной функцией

$$W_v(p) = \frac{E_r(p)}{E_d(p)},$$

где $E_r(p)$ — операторное изображение э. д. с. якоря генератора.

В цепи главной обратной связи, замыкающей основной контур системы автоматического регулирования, будем иметь одно безынерционное звено — делитель напряжения R_0 . В более общем случае передаточная функция звена главной обратной связи

$$Z_{o.c}(p) = \frac{U_{o.c}(p)}{U_r(p)},$$

где $U_{o.c}(p)$ — изображение напряжения обратной связи;
 $U_r(p)$ — изображение регулируемой величины (напряжения генератора).

Основной контур системы регулирования оказался разделенным на четыре звена направленного действия, из которых три входят в прямую цепь системы и одно — в цепь обратной связи.

Остается выделить звено направленного действия в цепи местной обратной связи, образуемой стабилизирующим RC -контуром.

Входной величиной этого звена является напряжение $U_{в.г}$ на обмотке возбуждения генератора, несколько отличающееся от e_d за счет падения напряжения в якоре ЭМУ, однако это отличие может быть учтено введением соответствующего коэффициента в передаточную функцию звена местной обратной связи:

$$Z_o(p) = \frac{U_o(p)}{E_d(p)},$$

где $U_o(p)$ — изображение напряжения местной обратной связи, подаваемого на вход электронного усилителя.

Структурная схема системы регулирования, составленная из рассмотренных звеньев направленного действия, приведена на рис. 2.7, а, где $U_{ср}(p)$ — напряжение сравнения, с помощью которого производится настройка системы на требуемое значение регулируемого напряжения; $F(p)$ — возмущающее воздействие (например, изменение нагрузки генератора); $G_f(p)$ — передаточная функция возмущающего воздействия, определяющая характер зависимости регулируемой величины от данного возмущения (если, в частном случае, возмущающим воздействием служит ток нагрузки, то $G_f(p)$ является постоянной величиной, равной сопротивлению якоря генератора).

Для определения передаточной функции разомкнутой системы необходимо преобразовать полученную многоконтурную структурную схему с помощью основных правил, приведенных в § 2.1. С этой целью выделим пунктиром на схеме участок прямой цепи системы, охваченный местной обратной связью, и, используя свойство параллельного встречного включения звеньев направленного действия [см. формулу (2.5)], заменим его эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{W_y(p) W_q(p)}{1 + W_y(p) W_q(p) Z_o(p)},$$

после чего структурная схема примет более простой вид (рис. 2.7, б).

Передаточная функция разомкнутой системы, составленная из последовательно включенных звеньев направленного действия, примет вид

$$W(p) = W_1(p) W_v(p) Z_{o.c}(p).$$

Имея $W(p)$, можно получить передаточную функцию замкнутой системы для возмущающего воздействия

$$\frac{U_r(p)}{F(p)} = \frac{G_f(p)}{1 + W(p)}$$

и передаточную функцию замкнутой системы для управляющего воздействия

$$\frac{U_{cp}(p)}{U_c(p)} = \frac{W_1(p) \cdot W_v(p)}{1 + W(p)}.$$

Пример 2.2. Составление структурной схемы следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем (рис. 1.6).

Первым звеном направленного действия можно считать преобразующий элемент — потенциометр Π , входной величиной которого служит ошибка Θ , а выходной — сигнал ошибки U_c , поступающий на вход усилителя. Так как это звено можно считать безынерционным, то его передаточная функция вырождается в передаточный коэффициент

$$k_c = \frac{U_c}{\Theta}.$$

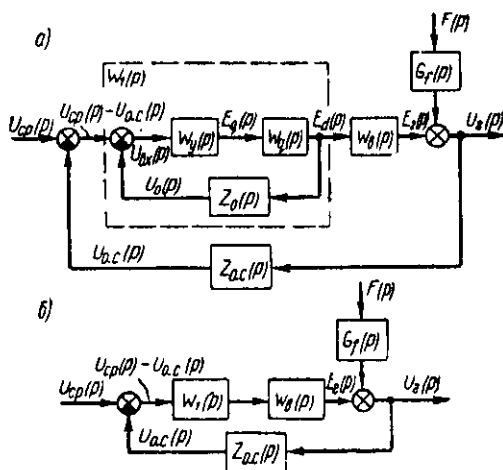


Рис. 2.7. Структурные схемы системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока:

а — первоначальная; б — преобразованная

Вторым, также безынерционным, звеном направленного действия будем считать ламповый усилитель с передаточным коэффициентом

$$k_y = \frac{U_y}{U_c},$$

где U_y — напряжение на управляющей обмотке двигателя.

В качестве третьего звена направленного действия примем асинхронный двигатель вместе с редуктором. Входной величиной этого звена является напряжение U_y . В качестве выходной величины принимают: 1) угол поворота выходной оси $\Theta_{\text{вых}}$, являющийся выходной величиной следящей системы, или 2) угловую скорость вращения выходной оси $\Omega_{\text{вых}}$, а затем добавляют

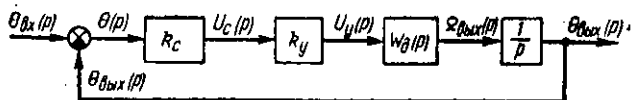


Рис. 2.8. Структурная схема следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем

отдельное интегрирующее звено направленного действия, с помощью которого скорость вращения выходной оси преобразуется в угол поворота последней.

Выберем второй вариант и запишем передаточную функцию третьего звена

$$W_d(p) = \frac{\Omega_{\text{вых}}(p)}{U_y(p)},$$

а передаточную функцию последнего (интегрирующего) звена

$$W_n(p) = \frac{1}{p}.$$

При таком разделении следящей системы на звенья направленного действия ее структурная схема примет вид, изображенный на рис. 2.8.

Передаточная функция разомкнутой системы, состоящей из последовательно включенных звеньев направленного действия, на основании выражения (2.3) примет вид

$$W(p) = \frac{k_c k_y W_d(p)}{p}.$$

Передаточная функция для выходной величины следящей системы определяется по формуле (2.12)

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{k_c k_y W_d(p)}{k_c k_y W_d(p) + p}.$$

Передаточная функция для ошибки на основании формулы (2.14)

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{p}{k_c k_y W_d(p) + p}.$$

Пример 2.3. Составление структурной схемы следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем и тахогенератором (рис. 1.8).

Принимая во внимание возможность замены потенциометров Π_1 и Π_2 эквивалентными им сравнивающим и преобразующим элементами (см. пример 1.3), примем в качестве первого звена направленного действия в структурной схеме следящей системы безынерционное звено с передаточным коэффициентом k_c , характеризующее преобразование ошибки Θ в напряжение сигнала ошибки U_c .

Вторым звеном направленного действия будем считать безынерционный ламповый усилитель с передаточным коэффициентом (коэффициентом усиления по напряжению) k_y . Выходное напряжение усилителя U_y является входной величиной третьего звена направленного действия, характеризующего динамические свойства исполнительного двигателя с редуктором. Передаточная функция этого звена

$$W_d(p) = \frac{\Omega_{\text{вых}}(p)}{U_y(p)},$$

где $\Omega_{\text{вых}}(p)$ — угловая скорость вращения выходной оси системы.

Последнее в прямой цепи системы звено — интегрирующее, преобразующее скорость вращения в угол поворота выходной оси.

Стабилизирующее напряжение U_0 , подаваемое на вход усилителя от тахогенератора, представляет собой выходную величину звена местной обратной связи с передаточной функцией

$$Z_0(p) = \frac{U_0(p)}{\Omega_{\text{вых}}(p)}.$$

Структурная схема следящей системы представлена на рис. 2.9. Заметим, что при таком разделении системы на звенья направленного действия передаточная функция звена местной обратной связи является постоянной величиной, так как напряжение тахогенератора пропорционально скорости вращения выходной оси системы. В том случае, если не выделять, как это часто делают, интегрирующее звено на структурной схеме, а объединить его с предыдущим звеном направленного действия $W_d(p)$, то входной величиной звена местной обратной связи пришлось бы считать не $\Omega_{\text{вых}}(p)$, а $\Theta_{\text{вых}}(p)$. При этом, очевид-

но, вместо передаточной функции $W_d(p)$ имели бы передаточную функцию

$$W'_d(p) = \frac{W_d(p)}{p},$$

а вместо $Z_0(p)$ — функцию

$$Z'_0(p) = pZ_0(p).$$

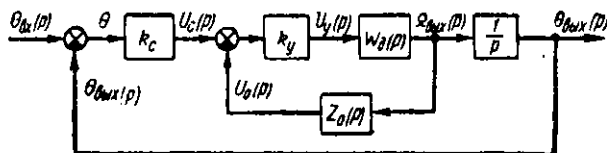


Рис. 2.9. Структурная схема следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем и тахогенератором

Два средних звена в прямой цепи следящей системы, охваченные местной обратной связью, можно заменить на основании формулы (2.5) эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{k_y W_d(p)}{1 + k_y W_d(p) Z_0(p)},$$

после чего передаточная функция разомкнутой системы находится по формуле (2.3)

$$W(p) = k_c W_1(p) \frac{1}{p} = \frac{k_c k_y W_d(p)}{p [1 + k_y W_d(p) Z_0(p)]}.$$

Передаточная функция замкнутой системы для выходной величины, в соответствии с формулой (2.12),

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{W(p)}} = \frac{k_c k_y W_d(p)}{k_c k_y W_d(p) + p [1 + k_y W_d(p) Z_0(p)]}.$$

Передаточная функция замкнутой системы для ошибки на основании выражения (2.14)

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{p [1 + k_y W_d(p) Z_0(p)]}{k_c k_y W_d(p) + p [1 + k_y W_d(p) Z_0(p)]}.$$

Пример 2.4. Составление структурной схемы системы автоматического регулирования скорости вращения двигателя постоянного тока (рис. 1.10) и определение в общем виде выражения для операторного изображения регулируемой величины при одновременном изменении настройки системы (задающего напряжения) и момента нагрузки на валу двигателя.

В качестве первых двух звеньев направленного действия прямой цепи системы регулирования, аналогично примеру 2.1, возьмем звенья с передаточными функциями $W_y(p)$ и $W_q(p)$, учитывающими процессы изменения токов в обмотках управления и в поперечной обмотке якоря ЭМУ. Третье звено отражает характер изменения тока в цепи возбуждения генератора, однако за выходную величину звена примем не напряжение, а э. д. с. якоря генератора e_r , являющуюся более удобной в качестве входной

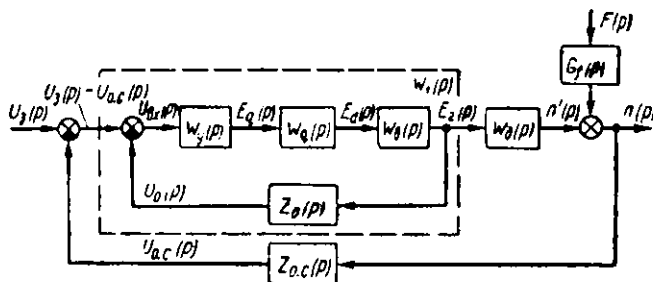


Рис. 2.10. Структурная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока

величины следующего звена, преобразующего e_r в скорость вращения вала двигателя n . Передаточные функции этих двух звеньев могут быть записаны как

$$W_n(p) = \frac{E_r(p)}{E_d(p)} \text{ и } W_d(p) = \frac{n'(p)}{E_r(p)}.$$

Здесь $n'(p)$ — скорость вращения вала двигателя (регулируемой величины) при отсутствии возмущающего воздействия.

Цепь главной обратной связи замыкается через звено направленного действия с передаточной функцией $Z_{0.c}(p)$. Входной величиной звена является скорость вращения якоря двигателя n , а выходной — напряжение тахогенератора, пропорциональное n . Следовательно, в данном случае $Z_{0.c}(p)$ — постоянная величина.

Звено местной обратной связи, образуемой стабилизирующим RC -контуром, имеет передаточную функцию

$$Z_0(p) = \frac{U_0(p)}{E_r(p)},$$

где $U_0(p)$ — напряжение местной обратной связи.

Структурная схема системы автоматического регулирования изображена на рис. 2.10.

Пользуясь формулой (2.5), найдем передаточную функцию эквивалентного звена

$$W_1(p) = \frac{W_y(p) W_q(p) W_n(p)}{1 + W_y(p) W_q(p) W_n(p) Z_0(p)},$$

тогда передаточная функция разомкнутой системы [см. (2.3)]

$$W(p) = W_1(p) W_d(p) Z_{0.c}(p).$$

Так как рассматривается линеаризованная система, для которой справедлив принцип наложения, то операторное изображение регулируемой величины при одновременном изменении настройки и момента нагрузки на валу двигателя найдем по формуле (2.11) как сумму двух слагаемых, каждое из которых характеризует поведение системы регулирования под влиянием только одного из указанных воздействий:

$$n(p) = \frac{W_1(p) W_d(p) U_z(p) + G_f(p) F(p)}{1 + W(p)}.$$

Пример 2.5. Составление структурной схемы следящей системы с корректирующим контуром переменного тока и определение в общем виде операторных изображений выходной величины и ошибки.

Принципиальная схема следящей системы изображена на рис. 1.12. Начнем ее разделение на звенья направленного действия со входа системы.

Сельсинное устройство измерения угла рассогласования, состоящее из сельсина-датчика и сельсина-трансформатора и преобразующее ошибку следящей системы Θ в сигнал ошибки U_c , может быть выделено в качестве первого звена направленного действия. Поскольку это звено практически безынерционно, то его передаточная функция представляет собой передаточный коэффициент k_c .

Сигнал ошибки поступает на вход последовательного корректирующего звена, образуемого Т-образным контуром. Так как входное сопротивление первого каскада усилителя (триод 6Ж8) очень велико, то корректирующий Т-образный контур можно считать звеном направленного действия с передаточной функцией.

$$W_k(p) = \frac{U_b(p)}{U_c(p)},$$

где $U_b(p)$ — изображение напряжения на входе лампового усилителя.

Усилитель будем считать также безынерционным звеном направленного действия с передаточным коэффициентом k_y . Выходное напряжение усилителя U_y подается на управляющую обмотку асинхронного двухфазного двигателя. Местная отрицательная обратная связь, охватывающая усилитель, сказывается лишь на величине k_y и может быть учтена при расчете усилителя.

Четвертым звеном направленного действия с передаточной функцией $W_d(p)$ можно выделить двигатель с редуктором. Выходная величина этого звена — угловая скорость вращения выходной оси $\Omega_{\text{вых}}(p)$ — преобразуется в угол поворота последней $\Theta_{\text{вых}}(p)$ при помощи интегрирующего звена с передаточной функцией $\frac{1}{p}$.

Структурная схема следящей системы (рис. 2.11) не содержит параллельных звеньев, поэтому передаточная функция

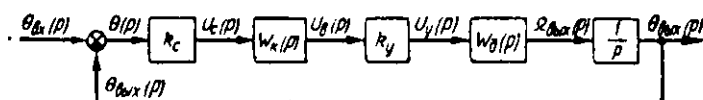


Рис. 2.11. Структурная схема следящей системы с корректирующим контуром переменного тока

разомкнутой системы равна произведению передаточных функций всех звеньев направленного действия, т. е.

$$W(p) = \frac{k_c k_y W_k(p) W_d(p)}{p}.$$

Изображение выходной величины [см. (2.12)]

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{k_c k_y W_k(p) W_d(p)}{k_c k_y W_k(p) W_d(p) + p} \Theta_{\text{вх}}(p).$$

Изображение ошибки [см. (2.14)]

$$\Theta(p) = \frac{p}{k_c k_y W_k(p) W_d(p) + p} \Theta_{\text{вх}}(p).$$

Пример 2.6. Составление структурной схемы системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока (рис. 1.14) и определение в общем виде операторного изображения регулируемой величины при меняющихся значениях задающего напряжения и момента нагрузки на валу двигателя.

В соответствии с указаниями к составлению функциональной схемы системы регулирования (см. пример 1.6) будем рассматривать участок прямой цепи системы от сеток пентодов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ до сеток тиратронов как одно последовательное активное корректирующее звено направленного действия, включающее, кроме входного каскада усилителя с RC -контуром в цепи местной обратной связи, также и фазовращающий мост с лампой $\mathcal{L}_3$ и конденсатором C_2 . Передаточная функция этого звена

$$W_k(p) = \frac{U_T(p)}{U_a(p) - U_{o.c}(p)},$$

где $U_T(p)$ — напряжение на сетках тиратронов.

Считая тиратронный усилитель мощности безынерционным, получим второе звено направленного действия с передаточным коэффициентом k_y . Выходной величиной звена служит напряжение $U_d(p)$ на зажимах якоря двигателя.

Следует заметить, что основное усиление напряжения происходит в первом каскаде усилителя и учитывается передаточной функцией $W_k(p)$. Подобное разделение на звенья направленного действия весьма условно: с равным правом два первых звена можно объединить в одно с передаточной функцией, $W'_k(p) = k_y W_k(p)$.

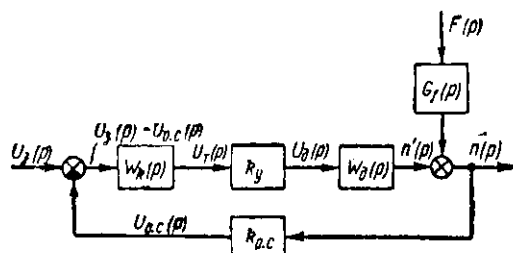


Рис. 2.12. Структурная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока с тиратронами

Двигатель представим звеном направленного действия с передаточной функцией

$$W_d(p) = \frac{n'(p)}{U_d(p)},$$

где $n'(p)$ — регулируемая величина при отсутствии возмущающего воздействия (изменения момента нагрузки на валу двигателя).

Звено обратной связи характеризует преобразование регулируемой величины — скорости вращения двигателя n — в напряжение обратной связи $U_{o.c.}$, получаемое от тахогенератора. Так как зависимость $U_{o.c.}$ от n линейная, то передаточная функция звена обратной связи представляет собой постоянную величину — передаточный коэффициент $k_{o.c.}$.

Звено с передаточной функцией $G_f(p)$ характеризует влияние возмущающего воздействия $F(p)$.

Структурная схема системы регулирования приведена на рис. 2.12.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_y k_{o.c.} W_k(p) W_d(p).$$

Изображение регулируемой величины при одновременном изменении настройки системы и возмущающего воздействия [на основании (2.11)]

$$n(p) = \frac{k_y W_K(p) W_d(p) U_3(p) + G_f(p) F(p)}{1 + W(p)}.$$

Пример 2.7. Преобразование структурной схемы (рис. 2.13, а) системы автоматического управления и определение в общем виде передаточной функции замкнутой системы.

Структурная схема имеет перекрещивающиеся параллельные связи, поэтому преобразование ее к виду, удобному для составления передаточной функции, будем производить с помощью способа переключения связей.

Местную обратную связь, поступающую через звено Z_1 , на вход звена W_4 , перенесем на вход звена W_3 . Чтобы результат не изменился, добавим в цепь этой связи последовательно звено $\frac{1}{W_3}$. Обратную связь с передаточной функцией, равной единице,

подаваемую на вход звена Z_2 с выхода звена W_4 , заменим связью с передаточной функцией $\frac{1}{W_5}$ с выхода звена W_5 . Параллельные, согласно включенные звенья с передаточными функциями 1 и W_2 заменим одним звеном $1 + W_2$. После этого структурная схема примет вид, изображенный на рис. 2.13, б.

Следующим шагом будет замена двух параллельных, согласно включенных звеньев Z_3 и $\frac{1}{W_5}$ в цепи обратной связи эквивалентным звеном с передаточной функцией $Z_3 + \frac{1}{W_5}$. Теперь мы имеем две параллельные цепи обратной связи (рис. 2.13, в), которые можно заменить эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$Z_9 = \frac{Z_1}{W_3} + \frac{Z_2}{W_5} + Z_2 Z_3.$$

Заменяя участок прямой цепи системы, охваченный местной обратной связью Z_9 , эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_9 = \frac{W_3 W_4 W_5}{1 + W_3 W_4 W_5 Z_9},$$

получим окончательно одноконтурную структурную схему (рис. 2.13, г), передаточная функция разомкнутой системы которой

$$W = W_1 (1 + W_2) W_9 W_6 Z_0.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{W_1(1+W_2)W_3W_6}{1+W}$$

Подставляя в последнее выражение полученные ранее значения W , W_3 , Z_3 , получим окончательно

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{W_1(1+W_2)W_3W_4W_5W_6}{1+W_1(1+W_2)W_3W_4W_5W_6Z_0+W_4W_5Z_1+W_3W_4Z_2+W_5W_4Z_3Z_2}$$

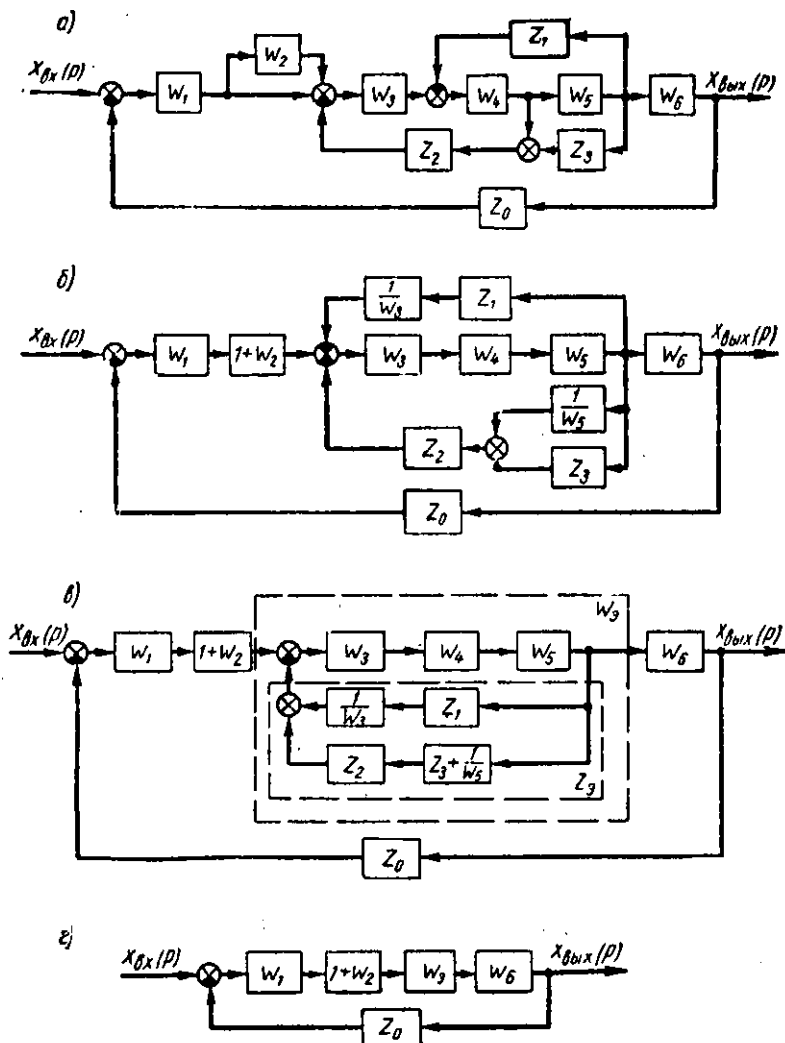


Рис. 2.13. Преобразование структурной схемы системы автоматического управления

Пример 2.8. Составление структурной схемы следящей системы профилишлифовального станка с полупроводниковым усилителем (рис. 1.16) и определение в общем виде передаточных функций для выходной величины и ошибки.

Первым звеном направленного действия в прямой цепи системы будем считать вращающийся трансформатор. Это безынерционное звено с передаточным коэффициентом k_c . Его выходная величина — напряжение сигнала ошибки U_c алгебраически суммируется в трансформаторе Tr_1 с напряжением жесткой отрицательной обратной связи U_{02} от тахогенератора. Разность $U_c - U_{02}$ служит входной величиной следующего безынерционного звена с передаточным коэффициентом k_{y1} , представляющим собой каскад усиления переменного тока полупроводникового усилителя. Выходной величиной этого звена будем считать напряжение U_{y1} на вторичной обмотке трансформатора Tr_2 . Из этого напряжения вычитается напряжение гибкой обратной связи U_{01} , получаемое на сопротивлении $R'_5 + R''_5$ (см. рис. 1.16) при помощи корректирующего контура (C_2, C_3, R_{12}, R_{13}). Разность $U_{y1} - U_{01}$ является входной величиной фазочувствительного каскада, образующего третье безынерционное звено направленного действия с передаточным коэффициентом k_{y2} .

Выходное напряжение фазочувствительного усилительно-преобразовательного каскада U'_{y2} поступает на вход корректирующего звена $C_1 R_8$ с передаточной функцией

$$W_k(p) = \frac{U_{y2}(p)}{U'_{y2}(p)},$$

где $U_{y2}(p)$ — изображение выходного напряжения корректирующего контура, являющееся одновременно входной величиной следующего звена направленного действия, объединяющего оконечный каскад полупроводникового усилителя и ЭМУ.

Передаточная функция этого последнего усилительного звена

$$W_{y3}(p) = \frac{E_d(p)}{U'_{y2}(p)},$$

где $E_d(p)$ — изображение продольной э. д. с. якоря ЭМУ.

Электродвижущая сила E_d служит входной величиной звена с передаточной функцией $W_d(p)$, представляющего исполнительный двигатель вместе с редуктором и преобразующего E_d в угловую скорость вращения выходной оси следящей системы $\Omega_{\text{вых}}$. Преобразование $\Omega_{\text{вых}}$ в угол поворота выходной оси $\Theta_{\text{вых}}$ осуществляется включением интегрирующего звена с передаточной функцией, равной $\frac{1}{p}$.

В цепи жесткой обратной связи по скорости будем иметь безынерционное звено с передаточным коэффициентом $k_{o.c.}$, который может изменяться при помощи делителя R_{14} .

Гибкая обратная связь в следящей системе осуществляется путем включения корректирующего звена с передаточной функцией $Z_0(p)$, определяемой параметрами контура C_2, C_3, R_{12}, R_{13} .

Как видно из принципиальной схемы следящей системы, входной величиной звена гибкой обратной связи должно быть напряжение на зажимах якоря ЭМУ, отличающееся от э. д. с. E_d на величину падения напряжения в якоря ЭМУ. Однако в

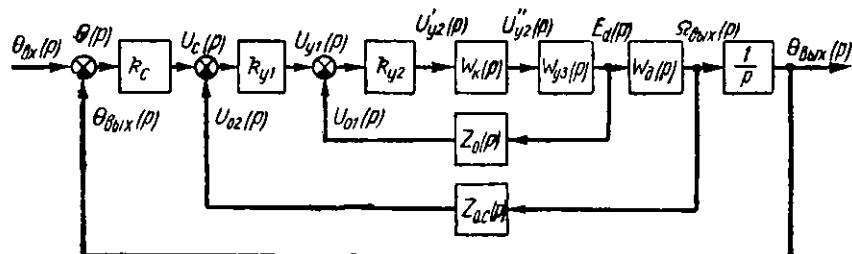


Рис. 2.14. Структурная схема следящей системы профилешлифовального станка с полупроводниковым усилителем

рассматриваемой системе степень компенсации продольной реакции якоря ЭМУ подобрана таким образом, что внешняя характеристика ЭМУ близка к горизонтальной прямой (см. пример 1.7), т. е. напряжение на зажимах якоря ЭМУ мало чем отличается от э. д. с. E_d . Поэтому входной величиной звена гибкой обратной связи можно приближенно считать $E_d(p)$.

В соответствии с изложенным, структурная схема следящей системы профилешлифовального станка будет иметь вид, изображенный на рис. 2.14.

Для составления передаточной функции разомкнутой системы заменим участок прямой цепи, охваченный гибкой обратной связью, эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{E_d(p)}{U_{y1}(p)} = \frac{k_{y2} W_k(p) W_{y3}(p)}{1 + k_{y2} W_k(p) W_{y3}(p) Z_0(p)}. \quad (2.18)$$

Вторым эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_2(p) = \frac{\Omega_{\text{вых}}(p)}{U_c(p)}$$

заменяем участок прямой цепи системы, охваченный жесткой обратной связью с передаточным коэффициентом $k_{o.c.}$, включающий звено $W_1(p)$. При этом будем иметь

$$W_2(p) = \frac{k_{y1} W_1(p) W_d(p)}{1 + k_{y1} W_1(p) W_d(p) k_{o.c}}. \quad (2.19)$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c W_2(p) \frac{1}{p}. \quad (2.20)$$

Подставив в выражение (2.19) значение $W_1(p)$ из (2.18), получим

$$W_2(p) = \frac{k_{y1} k_{y2} W_K(p) W_{ys}(p) W_d(p)}{1 + k_{y2} W_K(p) W_{ys}(p) [Z_0(p) + k_{y1} k_{o.c} W_d(p)]}, \quad (2.21)$$

после чего из формулы (2.20) будем иметь

$$W(p) = \frac{k_c k_{y1} k_{y2} W_K(p) W_{ys}(p) W_d(p)}{\{1 + k_{y2} W_K(p) W_{ys}(p) [Z_0(p) + k_{y1} k_{o.c} W_d(p)]\} p}. \quad (2.22)$$

Обозначим числитель выражения (2.22) через $A(p)$, знаменатель — через $B(p)$, а $A(p) + B(p)$ — через $H(p)$. Тогда, воспользовавшись формулами (2.16) и (2.17), получим

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{H(p)}$$

$$\frac{\Delta \Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{B(p)}{H(p)}.$$

Пример 2.9. Составление структурной схемы следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А завода имени Я. М. Свердлова (рис. 1.18) и определение в общем виде передаточных функций для выходной величины и ошибки.

Двумя первыми звеньями направленного действия будем считать безынерционные звенья с передаточными коэффициентами k_c и k_{y1} , соответствующие копировальному прибору и первому каскаду лампового усилителя. Формирование дополнительных управляющих сигналов, пропорциональных первой производной и интегралу от ошибки, отразим на структурной схеме включением последовательного корректирующего звена с передаточной функцией $W_K(p)$.

Следующее звено направленного действия с передаточной функцией $W_{y2}(p)$ будет характеризовать динамические свойства ЭМУ, с которым целесообразно объединить также и окончательный каскад лампового усилителя.

Исполнительный двигатель совместно с редуктором и винтовой передачей представим в виде звена с передаточной функцией $W_d(p)$. Входной величиной этого звена является э. д. с. якоря ЭМУ $E_d(p)$, а выходной — скорость перемещения фрезы $V_{\text{вых}}(p)$. В этом случае последним звеном направленного дейст-

вия в прямой цепи системы будет интегрирующее звено с передаточной функцией $\frac{1}{p}$, преобразующее скорость $V_{\text{вых}}$ в перемещение фрезы $S_{\text{вых}}(p)$.

Перейдем к рассмотрению обратных связей в следящей системе. Из принципиальной схемы (рис. 1.18) видно, что окончательный каскад электронного усилителя и ЭМУ охвачены местной отрицательной обратной связью. Электрический контур, состоящий из конденсатора C_7 и сопротивлений R_{16} и R_{17} , с помощью

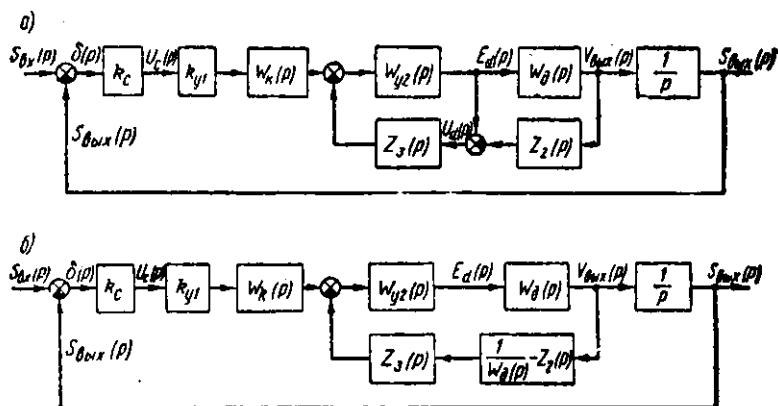


Рис. 2.15. Структурные схемы следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А завода им. Я. М. Свердлова:

а — первоначальная; б — преобразованная

которого формируется сигнал обратной связи, может быть представлен на структурной схеме звеном направленного действия в цепи местной обратной связи с передаточной функцией $Z_3(p)$. Входной величиной этого звена должно быть напряжение на зажимах якоря ЭМУ $U_d(p)$. Однако при выполненном разделении прямой цепи системы на звенья направленного действия будем иметь на структурной схеме не напряжение, а э. д. с. якоря ЭМУ $E_d(p)$, отличающуюся от $U_d(p)$ на величину падения напряжения в якоре ЭМУ, пропорциональную току двигателя. Но в линеаризованной следящей системе ток двигателя пропорционален ускорению, т. е. первой производной от $V_{\text{вых}}$. Поэтому в структурной схеме можно получить операторное изображение напряжения ЭМУ, если вычесть из э. д. с. $E_d(p)$ величину, получаемую на выходе звена с передаточной функцией $Z_2(p)$, на выход которого поступает скорость перемещения фрезы $V_{\text{вых}}(p)$.

С учетом сделанных замечаний структурная схема следящей системы будет иметь вид, изображенный на рис. 2.15, а.

Полученная структурная схема неудобна для составления передаточной функции, поэтому преобразуем ее, воспользовавшись способом переключения связей.

Перенесем начало обратной связи (с передаточной функцией, равной единице), поступающей на вход звена $Z_3(p)$, с выхода звена $W_{y2}(p)$ на выход звена $W_d(p)$. Это равносильно включению в цепь этой связи звена с передаточной функцией $W_d(p)$. Чтобы результат не изменился, добавим в нее последовательное звено с передаточной функцией, равной $\frac{1}{W_d(p)}$ (см. пример 2.7).

Полученные таким образом две параллельные связи заменим их алгебраической суммой $\frac{1}{W_d(p)} - Z_2(p)$, после чего структурная схема следящей системы примет вид, представленный на рис. 2.15, б.

Заменим участок системы, охваченный местной обратной связью, в соответствии с формулой (2.5), эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{W_{y2}(p) W_d(p)}{1 + W_{y2}(p) W_d(p) Z_3(p) \left[\frac{1}{W_d(p)} - Z_2(p) \right]},$$

после чего найдем передаточную функцию разомкнутой системы [по формуле (2.3)]

$$W(p) = k_c k_{y1} W_K(p) W_1(p) \frac{1}{p}.$$

или

$$W(p) = \frac{k_c k_{y1} W_K(p) W_{y2}(p) W_d(p)}{1 + W_{y2}(p) Z_3(p) [1 - W_d(p) Z_2(p)]} \cdot \frac{1}{p}.$$

По формулам (2.16) и (2.17) получим в общем виде передаточные функции следящей системы соответственно для выходной величины и ошибки

$$\frac{S_{вых}(p)}{S_{вх}(p)} = \frac{A(p)}{H(p)}$$

и

$$\frac{\delta(p)}{S_{вх}(p)} = \frac{B(p)}{H(p)},$$

где $A(p)$ — числитель передаточной функции разомкнутой системы;

$B(p)$ — ее знаменатель;

$$H(p) = A(p) + B(p).$$

Пример 2.10. Составление и преобразование структурной схемы системы автоматического управления продольным движением самолета.

Упрощенная принципиальная схема системы управления приведена на рис. 1.20.

При рассмотрении системы будем исходить из ее функциональной схемы, полученной в примере 1.9 в преобразованном упрощенном варианте (рис. 1.21, б).

Гировертикаль автопилота практически без запаздывания определяет мгновенное отклонение $\Delta\theta$ угла тапгажа от заданного значения θ_a и преобразует его в пропорциональное напряжение $U_{\Delta\theta}$. Следовательно, преобразующий элемент функциональной схемы может быть представлен на структурной схеме безынерционным звеном направленного действия с передаточным коэффициентом k_θ .

В качестве следующего звена прямой цепи системы выделим магнитный усилитель, с которым можно объединить безынерционный электронный усилитель и фазовый дискриминатор. Их общая передаточная функция

$$W_y(p) = \frac{U_{\text{эм}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)},$$

где $U_{\text{эм}}(p)$ — операторное изображение напряжения на зажимах подмагничивающей обмотки пропорционального электромагнита; $U_{\text{вх}}(p)$ — изображение эквивалентного входного напряжения магнитного усилителя (напряжение, которое в установившемся режиме создает управляющие ампер-витки, равные алгебраической сумме ампер-витков, развиваемых всеми четырьмя обмотками управления магнитного усилителя).

Пропорциональный электромагнит, обладающий значительной индуктивностью и механической инерцией, необходимо выделить в отдельное звено направленного действия с передаточной функцией

$$W_{\text{эм}}(p) = \frac{\lambda(p)}{U_{\text{эм}}(p)}.$$

Перемещение λ иглы следящего золотника, являющееся выходной величиной пропорционального электромагнита, практически мгновенно отрабатывается в виде перемещения самого следящего золотника, играющего роль гидравлического усилителя.

Ввиду его безынерционности он может не выделяться на структурной схеме отдельно, а войти в общую передаточную функцию гидравлического сервомотора рулевой машины

$$W_{\text{г.с}}(p) = \frac{\delta(p)}{\lambda(p)},$$

выходная величина которой $\delta(p)$ представляет собой операторное изображение угла поворота руля высоты, являющегося, в свою очередь, входной величиной последующего звена — самолета

как аэродинамического объекта управления с передаточной функцией $W_c(p)$.

В качестве выходной величины последнего целесообразно принять операторное изображение угловой скорости тангажа $\dot{\theta}(p)$, которое должно быть выделено на структурной схеме как входная величина цепи местной обратной связи с передаточной функцией

$$Z_o(p) = \frac{U_{\dot{\theta}}(p)}{\dot{\theta}(p)},$$

где $U_{\dot{\theta}}(p)$ — изображение напряжения, вырабатываемого гироскопическим датчиком угловой скорости.

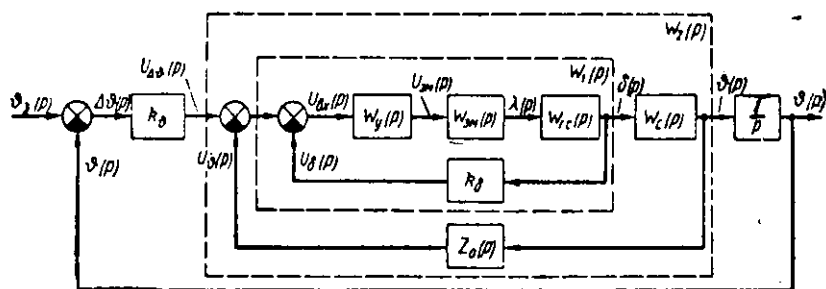


Рис. 2.16. Структурная схема системы автоматического управления продольным движением самолета

Переход к выходной величине — углу тангажа $\theta(p)$ — должен быть осуществлен через интегрирующее звено с передаточной функцией $\frac{1}{p}$.

Напряжение U_{δ} , снимаемое с потенциометрического датчика положения руля высоты и поступающее на вход магнитного усилителя, представляет собой сигнал местной отрицательной обратной связи, пропорциональный величине δ . На структурной схеме это должно быть отражено в виде звена местной обратной связи с передаточной функцией, вырождающейся в передаточный коэффициент звена (ввиду безынерционности последнего)

$$k_{\delta} = \frac{U_{\delta}(p)}{\delta(p)}.$$

Структурная схема системы автоматического управления продольным движением самолета будет иметь вид, изображенный на рис. 2.16.

В силу свойства коммутативности порядок подключения местных обратных связей на входе усилительного звена $W_y(p)$

не имеет принципиального значения. Однако в практическом отношении их выгодно располагать так, как указано на схеме, во избежание образования перекрещивающихся связей, затрудняющих дальнейшее преобразование структурной схемы.

Перейдем к определению передаточной функции системы управления. На основании формул (2.5) и (2.6), заменим часть звеньев прямой цепи системы, охватываемых отрицательной местной обратной связью с передаточным коэффициентом k_δ , эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{W_y(p) W_{\Sigma}(p) W_{r.c}(p)}{1 + W_y(p) W_{\Sigma}(p) W_{r.c}(p) k_\delta}.$$

Затем, применяя эти же формулы к последовательности звеньев $W_1(p)$ и $W_c(p)$, охватываемых местной отрицательной обратной связью с передаточной функцией $Z_0(p)$, получим второе более общее эквивалентное звено с передаточной функцией

$$W_2(p) = \frac{\Phi(p)}{U_{\Delta\delta}(p)} = \frac{W_1(p) W_c(p)}{1 + W_1(p) W_c(p) Z_0(p)}.$$

Таким образом получена одноконтурная эквивалентная структурная схема, для которой передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_\theta W_2(p) \frac{1}{p} = \frac{k_\theta W_1(p) W_c(p)}{1 + W_1(p) W_c(p) Z_0(p)} \cdot \frac{1}{p}.$$

Подставив в последнее выражение значение $W_1(p)$, получим в окончательном виде

$$W(p) = \frac{k_\theta W_y(p) W_{\Sigma}(p) W_{r.c}(p) W_c(p)}{1 + W_y(p) W_{\Sigma}(p) W_{r.c}(p) [k_\delta + W_c(p) Z_0(p)]} \cdot \frac{1}{p}.$$

Передаточная функция замкнутой системы управления определяется как отношение

$$\frac{\Phi(p)}{\Phi_\Delta(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$



Глава III. ТОЧНОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

§ 3.1. Основные расчетные соотношения

Установившимся называют режим работы системы управления после затухания переходных процессов. При этом переменные величины системы или остаются неизменными, или находятся в так называемом вынужденном движении, характер которого определяется видом внешнего воздействия. Математически в линейных системах этому соответствует обращение в нуль экспоненциальных составляющих решения дифференциальных уравнений, описывающих поведение системы, что имеет место при $t \rightarrow \infty$.

Практически можно считать режим установившимся, когда экспоненциальные составляющие, характеризующие свободное движение системы, станут настолько малыми, что общее решение уравнения лишь незначительно (обычно на 2—5% от максимального значения соответствующей функции) будет отличаться от его частного решения, определяющего вынужденное движение системы.

Точность системы автоматического управления в установившемся режиме характеризуется ошибками системы при различных воздействиях — постоянном возмущающем, а также управляющих (входных), изменяющихся по определенным законам.

Необходимые расчетные соотношения могут быть найдены из общих операторных выражений, полученных в § 2.1.

На основании формулы (2.11) операторное изображение выходной величины системы управления $X_{\text{вых}}(p)$ может быть представлено в виде суммы двух составляющих

$$X_{\text{вых}}(p) = X_{\text{вых0}}(p) + \Delta X(p),$$

из которых

$$X_{\text{вых0}}(p) = \frac{G(p)}{1 + W(p)} X_{\text{вх0}}(p) \quad \Bigg\}$$

соответствует заданному значению выходной величины, а

$$\Delta X(p) = \frac{G_f(p)}{1 + W(p)} F(p) \quad (3.1)$$

определяет ошибку, т. е. отклонение выходной величины от ее заданного значения под влиянием возмущающего воздействия $F(p)$.

В последних выражениях $G(p)$ — передаточная функция прямой цепи системы, а $G_f(p)$ — передаточная функция объекта управления (в общем случае — звеньев, расположенных между точкой приложения возмущающего воздействия и выходом системы).

Разомкнутую систему управления (в частности, объект управления) можно считать частным случаем замкнутой с передаточной функцией цепи обратной связи, равной нулю, т. е. $Z(p) = 0$. В этом случае на основании формулы (2.6) также и $W(p) = 0$.

Обозначив через

$$\Delta X_f(p) = G_f(p) F(p), \quad (3.2)$$

получим ошибку системы управления [из (3.1)]

$$\Delta X(p) = \frac{\Delta X_f(p)}{1 + W(p)}. \quad (3.3)$$

Формула (3.3), связывающая операторные изображения ошибок в разомкнутой и замкнутой системах управления, справедлива как для переходных, так и для установившихся режимов. Однако для последних оригиналы могут быть найдены сравнительно просто при помощи теоремы операционного исчисления о предельном значении функции. Эта теорема утверждает, что если $x(t)$ есть оригинал операторного изображения $X(p)$, т. е.

$$x(t) \doteq X(p),$$

и если $pX(p)$ — аналитическая функция комплексного переменного p на мнимой оси и в правой полуплоскости, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{p \rightarrow 0} pX(p).$$

Передаточная функция разомкнутой системы в общем случае

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_{m-1} p + b_m}{(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) p^v}, \quad (3.4)$$

где v — степень астатизма системы, причем в реальных системах $m \leq n$.

Из (3.4) видно, что все члены полиномов, содержащие p в числителе и знаменателе дроби (т. е. все, кроме b_m и a_n), при $p \rightarrow 0$ обращаются в нуль. Следовательно, при исследовании предельного перехода, связанного с применением теоремы о пре-

дельном значении функции, вместо формулы (3.4) можно рассматривать более простое выражение

$$W(p) = \frac{b_m}{a_n} \cdot \frac{1}{p^v}. \quad (3.5)$$

Выясним, как сказывается наличие отрицательной обратной связи, т. е. переход к замкнутой системе управления, на величине ошибки от возмущающего воздействия по сравнению с разомкнутой системой.

Пусть на объект управления действует некоторое постоянное (или медленно изменяющееся по сравнению с временем протекания переходных процессов) возмущение. Если разомкнутая система устойчива (объект управления статический), то на ее выходе будет постоянная ошибка ΔX_f , операторное изображение которой, определяемое выражением (3.2) *,

$$\Delta X_f(p) = \frac{\Delta X_f}{p}.$$

По формуле (3.3) будем иметь

$$\Delta X(p) = \frac{1}{1 + W(p)} \cdot \frac{\Delta X_f}{p}.$$

Установившееся значение ошибки замкнутой системы управления ΔX может быть найдено при помощи теоремы о предельном значении функции

$$\Delta X = \lim_{p \rightarrow 0} p \Delta X(p) = \Delta X_f \lim_{p \rightarrow 0} \frac{1}{1 + W(p)}. \quad (3.6)$$

В статической системе управления, не содержащей интегрирующих звеньев, степень астатизма $v=0$.

Обозначив $\frac{b_m}{a_n} = K$, получим из (3.5)

$$W(p) = K, \quad (3.7)$$

т. е. передаточная функция в установившемся режиме вырождается в безразмерный коэффициент усиления системы управления, физический смысл которого можно пояснить следующим образом. Если мысленно разрезать в каком-либо месте замкнутый контур системы управления и в точке разреза подать некоторый сигнал, то последний, пройдя через систему в направлении передачи воздействия, появится на другом конце разреза увеличенным в K раз.

* В установившемся режиме передаточная функция $G_f(p)$ статического объекта управления может быть выражена в виде постоянного множителя — передаточного коэффициента. В случае астатического (неустойчивого) объекта управления понятие установившейся ошибки лишается смысла, так как под действием постоянного возмущения отклонение выходной величины от ее заданного значения будет неограниченно возрастать во времени.

Подставив значение $W(p)$ из (3.7) в (3.6) и вычислив предел, получим

$$\Delta X = \frac{\Delta X_f}{1+K}, \quad (3.8)$$

или в относительных единицах

$$\gamma = \frac{\delta}{1+K}, \quad (3.9)$$

где

$$\delta = \frac{\Delta X_f}{X_{\text{вых } 0}} \quad \text{и} \quad \gamma = \frac{\Delta X}{X_{\text{вых } 0}}$$

— относительные установившиеся ошибки разомкнутой и замкнутой систем управления соответственно.

Следовательно, в статической системе управления установившаяся ошибка, вызванная постоянным возмущающим воздействием, уменьшается по сравнению с разомкнутой системой в $1+K$ раз.

При этом в $1+K$ раз уменьшится также и передаточный коэффициент замкнутой системы, в чем легко убедиться, подставив $W(p)=K$ в формулу (2.5). Это уменьшение должно быть скомпенсировано либо введением в прямую цепь системы дополнительных усилительных звеньев, либо соответствующим увеличением входного сигнала.

В астатической системе управления $\gamma \neq 0$.

Подставив значение $W(p)$ из (3.5) в (3.6), получим

$$\Delta X = \Delta X_f \lim_{p \rightarrow 0} \frac{p^\nu}{p^\nu + \frac{b_m}{a_n}} = 0.$$

Следовательно, в астатической системе управления установившаяся ошибка, вызванная постоянным возмущающим воздействием, равняется нулю. Полученный вывод справедлив для идеализированной системы, в которой не учитываются такие факторы, как зона нечувствительности, сухое трение, люфт и другие нелинейности.

В реальных системах учёт влияния этих факторов производится из условия компенсации соответствующего постоянного возмущения за счет увеличения статической (установившейся) ошибки системы. Так, статическая ошибка следящей системы при заданном статическом моменте $M_{\text{ст}}$ на валу исполнительного двигателя определяется из условия

$$M_{\text{ст}} = M_{\text{тр}},$$

где $M_{\text{тр}}$ — момент трогания двигателя, развиваемый последним в заторможенном состоянии при определенной величине ошибки $\Theta = \Theta_{\text{ст}}$.

Считая $M_{\text{тр}}$ пропорциональным напряжению, подаваемому на двигатель, можно записать

$$M_{\text{тр}} = c_u U = c_u k_y k_c \Theta_{\text{ст}},$$

где c_u — коэффициент усиления усилителя по напряжению;
 k_y — передаточный коэффициент двигателя по моменту;
 k_c — передаточный коэффициент чувствительного элемента.
 Приравнявая $M_{\text{ст}}$ и $M_{\text{тр}}$, получим

$$\Theta_{\text{ст}} = \frac{M_{\text{ст}}}{k_c k_y c_u}. \quad (3.10)$$

Следящие системы обычно являются астатическими системами с астатизмом первого порядка, работающими при переменном управляющем воздействии. Для таких систем в установившемся режиме наиболее характерным является изменение входной величины по линейному закону с постоянной скоростью

$$\Theta_{\text{вх}}(t) = \Omega t,$$

чему соответствует операторное изображение

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{\Omega}{p^2}.$$

На основании формулы (2.14) будем иметь

$$\Theta(p) = \frac{1}{1 + W(p)} \cdot \frac{\Omega}{p^2}. \quad (3.11)$$

Установившуюся ошибку следящей системы при входном сигнале, изменяющемся с постоянной скоростью, называют *скоростной ошибкой* Θ_v . Ее можно определить с помощью теоремы о предельном значении функции. Принимая $v=1$ и обозначая $D_v = \frac{b_m}{a_n}$, будем иметь из (3.5)

$$W(p) = \frac{D_v}{p}. \quad (3.12)$$

Подставляя значение $W(p)$ из (3.12) в (3.11) и переходя к пределу, получим

$$\Theta_v = \lim_{p \rightarrow 0} p \Theta(p) = \lim_{p \rightarrow 0} p \cdot \frac{1}{1 + \frac{D_v}{p}} \cdot \frac{\Omega}{p^2},$$

откуда следует

$$\Theta_v = \frac{\Omega}{D_v}. \quad (3.13)$$

Постоянная величина

$$D_v = \frac{\Omega}{\Theta_v}$$

называется *добротностью следящей системы по скорости* и имеет размерность сек^{-1} . Она показывает величину установившейся скорости выходной оси следящей системы, развиваемой на единицу скоростной ошибки.

В следящей системе с астатизмом второго порядка ($\gamma=2$) скоростная ошибка равняется нулю, вследствие чего установившуюся ошибку Θ_a здесь определяют при изменении входной величины по квадратичному закону с постоянным ускорением

$$\Theta_{вх}(t) = \frac{\varepsilon}{2} t^2.$$

При этом

$$\Theta_a = \frac{\varepsilon}{D_a}, \quad (3.14)$$

где D_a — *добротность следящей системы по ускорению*, имеющая размерность сек^{-2} .

Величины D_v и D_a зависят от параметров системы управления. В одноконтурных системах без местных обратных связей они определяются как произведения передаточных коэффициентов звеньев системы. В более сложных системах для определения установившихся ошибок удобнее пользоваться не готовыми формулами, а теоремой о предельном значении функции, применяя ее к операторному изображению ошибки следящей системы в каждом конкретном случае.

Определение амплитудных и фазовых ошибок следящих систем при обработке гармонических управляющих воздействий вида

$$\Theta_{вх}(t) = A \sin(bt + \varphi)$$

сводится к построению частотных характеристик замкнутых систем (см. главу V).

Полученные выше формулы (3.8), (3.9), (3.13), (3.14), строго говоря, справедливы при неизменных значениях величин K , D_v , D_a . В тех случаях, когда параметры системы управления в процессе работы могут изменяться в широких пределах, расчет установившихся режимов по этим формулам может в отдельных случаях дать существенное отклонение от действительности. Вместе с тем, более подробное исследование зависимости установившихся ошибок от изменения тех или иных параметров системы управления может позволить в ряде случаев произвести более точные расчеты и настройку системы с тем, чтобы добиться снижения максимальных установившихся ошибок.

В свете сказанного рассмотрим вопрос об оптимальной настройке статических систем автоматического регулирования в

установившемся режиме. Представим коэффициент усиления K системы регулирования, входящий в формулу (3.9), в виде

$$K = \mu\beta,$$

где μ и β — соответственно передаточный коэффициент прямой цепи системы и коэффициент обратной связи.

Цепь обратной связи может быть выполнена достаточно стабильной. В то же время прямая цепь системы, включающая в себя объект регулирования, обычно содержит элементы, подверженные влиянию различных возмущающих воздействий, которые приводят к тем или иным изменениям коэффициента μ , а следовательно, и коэффициента K . Поэтому, если коэффициент усиления системы регулирования определен расчетным путем через средние значения параметров системы, то выражением (3.9) можно пользоваться только для определения ошибок, обусловленных такими внешними воздействиями, которые не изменяют существенно коэффициентов μ и K (считаем $\beta = \text{const}$). К подобным воздействиям можно, например, отнести изменение нагрузки (если оно не влияет на внутренние параметры системы), внешние помехи в усилителе и некоторые другие.

Вместе с тем подавляющее большинство возмущающих воздействий вызывает изменение параметров системы, вследствие чего K не остается постоянным. Примерами таких воздействий могут служить: изменение сопротивления нагрузки в системах регулирования тока генератора, изменение скорости вращения якоря и сопротивления обмоток ЭМУ, нелинейность характеристик (насыщение, гистерезис), непостоянство питающего напряжения и т. п. В этих случаях в формулу (3.9) необходимо подставлять действительное значение коэффициента, отличающееся от его расчетного значения

$$K_0 = \mu_0 \beta.$$

Однако, если управляющее воздействие является точным, то относительная ошибка системы регулирования, определяемая формулой (3.9), численно равна относительному изменению передаточного коэффициента замкнутой системы, которое можно выразить через изменение коэффициента μ , численно равное ошибке δ незамкнутой системы. В результате получим формулу

$$\gamma = \frac{\delta}{1 \pm (1 - \delta) K_0}, \quad (3.15)$$

в которую входит расчетное значение коэффициента усиления системы [Л. 34]. В последнем выражении верхний знак в знаменателе относится к системам с отрицательной обратной связью, а нижний — с положительной.

Из формулы (3.15) следует, что при одинаковом по величине отклонении передаточного коэффициента прямой цепи системы

от его расчетного значения μ_0 величина ошибки системы регулирования будет зависеть от знака этого отклонения. В случае отрицательной обратной связи при $\delta > 0$, что соответствует уменьшению μ , величина $|\gamma|$ будет больше, чем при $\delta < 0$, соответствующем увеличению μ . Это объясняется тем, что при увеличении μ возрастают регулирующие свойства замкнутой системы вследствие увеличения коэффициента усиления K . В случае положительной обратной связи, наоборот, $|\gamma|$ будет больше при $\delta < 0$, чем при $\delta > 0$.

Если при настройке статической системы регулирования установить не расчетное значение μ_0 , а некоторое оптимальное значение μ_{opt} , разделив полный диапазон Δm возможных изменений коэффициента μ в отношении σ : $(1-\sigma)$, то максимальная ошибка системы будет наименьшей [Л. 34].

Величина σ определяется из формулы

$$\sigma = \frac{1}{2\delta_m K_0} \left[\delta_m K_0 \pm (1 \pm K_0) \mp \sqrt{(\delta_m K_0)^2 + (1 \pm K_0)^2} \right], \quad (3.16)$$

где

$$\delta_m = \frac{\Delta m}{\mu_0}.$$

В последнем выражении все верхние знаки относятся к отрицательной обратной связи, а нижние — к положительной.

Зная σ , можно найти требуемое значение

$$\mu_{opt} = \mu_0 + (\rho - \sigma) \Delta m, \quad (3.17)$$

где ρ — множитель, показывающий, как делится полный диапазон Δm изменений коэффициента μ по отношению к расчетному значению μ_0 .

В зависимости от соотношения численных значений ρ и σ величина μ_{opt} может быть больше или меньше μ_0 .

В тех случаях, когда речь идет о том, какое значение μ следует принять за расчетное при известных пределах его изменения с тем, чтобы возможная ошибка была наименьшей (например, при расчете масштаба управляющего воздействия), из формулы (3.17) определяется μ_0 при данной величине μ_{opt} , в качестве которой берется одно из значений μ внутри диапазона Δm .

§ 3.2. Примеры расчета статических параметров отдельных элементов

Пример 3.1. Определение передаточных коэффициентов двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

Двигатель имеет следующие номинальные данные: $P_n = 9 \text{ кВт}$; $U_n = 220 \text{ в}$; $I_{н.н} = 46 \text{ а}$; $n_n = 780 \text{ об/мин}$; $R_{я.н} = 0,218 \text{ ом}$.

Необходимо определить передаточные коэффициенты двигателя: по скорости — $k_{дв}$ и по моменту — c_u .

Передаточный коэффициент двигателя по скорости $k_{дв} = \frac{1}{c_e}$ представляет собой коэффициент пропорциональности между э. д. с. двигателя и угловой скоростью вращения якоря, номинальное значение которой

$$\Omega_n = n_n \frac{\pi}{30} = 780 \frac{\pi}{30} = 81,5 \text{ рад/сек.}$$

Скоростной коэффициент

$$c_e = \frac{U_n - R_{я.н} I_{я.н}}{\Omega_n} = \frac{220 - 0,218 \cdot 46}{81,5} = 2,57 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек.}}$$

Передаточный коэффициент двигателя по скорости

$$k_{дв} = \frac{1}{2,57} = 0,39 \frac{\text{рад/сек}}{\text{в.}}$$

Передаточный коэффициент двигателя по моменту

$$c_u = \frac{c_m}{R_{я.н}},$$

где c_m — коэффициент пропорциональности между током якоря и вращающим моментом $M_{вр}$ двигателя.

Так как

$$M_{вр.н} = 975 \frac{P_n}{n_n} = 975 \frac{9}{780} = 11,25 \text{ кгм},$$

то

$$c_m = \frac{M_{вр.н}}{I_{я.н}} = \frac{11,25}{46} = 0,244 \frac{\text{кгм}}{\text{а.}},$$

$$c_u = \frac{0,244}{0,218} = 1,12 \frac{\text{кгм}}{\text{в.}}$$

Произведение $c_e c_u$ представляет собой коэффициент внутреннего скоростного трения в двигателе, определяющий наклон его механической характеристики

$$k_\tau = c_e c_u = 2,57 \cdot 1,12 = 2,88 \frac{\text{кгм}}{\text{рад/сек.}}$$

Определение одного из передаточных коэффициентов двигателя через другой в некоторых пособиях рекомендуется производить с помощью зависимости $c_e = 9,81 c_m$. В этом случае используется в расчете не момент на валу, а электромагнитный момент двигателя.

Пример 3.2. Определение общего передаточного коэффициента по скорости двигателя постоянного тока с редуктором.

Двигатель постоянного тока с независимым возбуждением имеет следующие номинальные данные: $P_n = 0,3 \text{ кВт}$, $U_n = 220 \text{ в}$; $I_{я.н} = 2,1 \text{ а}$; $n_n = 960 \text{ об/мин}$; $R_{я.н} = 4,75 \text{ ом}$. Передаточное число понижающего редуктора $j_p = 72$.

Аналогично примеру 3.1, имеем

$$\begin{aligned}\Omega_n &= 960 \frac{\pi}{30} = 100 \text{ рад/сек}; \\ c_e &= \frac{220 - 4,75 \cdot 2,1}{100} = 2,1 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}; \\ k_{дв} &= \frac{1}{c_e j_p} = \frac{1}{2,1 \cdot 72} = 6,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад/сек}}{\text{в}}.\end{aligned}$$

Пример 3.3. Определение передаточного коэффициента усилительного элемента системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока.

Принципиальная схема системы регулирования изображена на рис. 1.10. Параметры системы следующие: крутизна характеристики лампового усилителя на одно плечо

$$S = \frac{\Delta I_{y1}}{\Delta U_{вх}} = 100 \frac{\text{ма}}{\text{в}};$$

сопротивление якоря ЭМУ вместе с сопротивлением компенсационной обмотки и добавочных полюсов $R_{я} = 2 \text{ ом}$; сопротивление обмотки возбуждения генератора $R_{в.г} = 8 \text{ ом}$; наклон характеристики холостого хода ЭМУ в ее линейной части

$$m_a = \frac{\Delta U_{г}}{\Delta I_{y1}} = 3,3 \frac{\text{в}}{\text{ма}}.$$

ЭМУ считается скомпенсированным.

Передаточный коэффициент усилительного элемента системы регулирования найдем как произведение передаточных коэффициентов его отдельных участков

$$k_y = \frac{\Delta U_{г}}{\Delta U_{вх}} = 2Sm_a \frac{R_{в.г}}{R_{я} + R_{в.г}} = 2 \cdot 100 \cdot 3,3 \cdot \frac{8}{2 + 8} = 528.$$

Пример 3.4. Определение передаточных коэффициентов по скорости и моменту асинхронного двухфазного двигателя по его механическим характеристикам (рис. 3.1).

В отличие от механических характеристик двигателя постоянного тока с независимым возбуждением, механические характеристики асинхронного двухфазного двигателя непрямолинейны. Однако в области невысоких скоростей (примерно до 55% синхронной скорости), являющейся рабочей областью для таких двигателей, механические характеристики достаточно точно аппроксимируются отрезками прямых. Поэтому передаточные ко-

Эффективность двигателя можно определить с помощью треугольника ABC на рис. 3.1, где стороны треугольника представляют собой приращения скорости и момента. Приращение напряжения U_y на управляющей обмотке двигателя определится как разность напряжений, при которых снимались соответствующие характеристики.

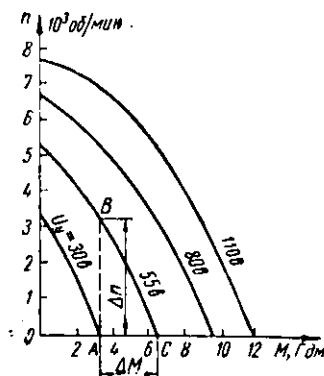


Рис. 3.1. Механические характеристики асинхронного двухфазного двигателя

Из рис. 3.1 имеем

$$\Delta\Omega = \frac{\pi \cdot \Delta n}{30} = \frac{\pi \cdot 3300}{30} =$$

$$= 346 \text{ рад/сек};$$

$$\Delta U_y = 55 - 30 = 25 \text{ в};$$

$$\Delta M = 3,2 \text{ Гдм}.$$

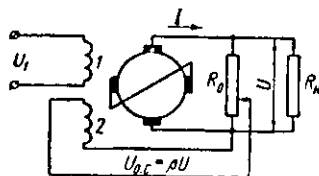


Рис. 3.2. Электромашинный усилитель с отрицательной обратной связью по напряжению

Передаточный коэффициент по скорости

$$k_{дв} = \frac{1}{c_e} = \frac{\Delta\Omega}{\Delta U_y} = \frac{346}{25} = 13,8 \frac{\text{рад/сек}}{\text{в}}.$$

Передаточный коэффициент по моменту

$$c_u = \frac{\Delta M}{\Delta U_y} = \frac{3,2}{25} = 0,128 \text{ Гдм/в}.$$

По механическим характеристикам двигателя можно также определить коэффициент внутреннего скоростного трения

$$k_T = c_e c_u = \frac{\Delta M}{\Delta\Omega} = \frac{3,2}{346} = 9,25 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Гдм}}{\text{рад/сек}}.$$

Пример 3.5. Определение коэффициента обратной связи электромашинного усилителя.

Электромашинный усилитель, нагруженный на постоянное сопротивление R_n , охвачен отрицательной обратной связью по напряжению для уменьшения остаточного намагничивания и улучшения передаточной характеристики ЭМУ (рис. 3.2). Необходимо определить величину коэффициента обратной связи β , устанавливаемую делителем R_0 , при которой остаточное намаг-

ничивание уменьшается в 8 раз по сравнению с ЭМУ без обратной связи.

Параметры схемы следующие: номинальное напряжение $U_n = 220$ в; номинальный ток нагрузки $I_n = 12,3$ а; сопротивления и числа витков обмоток управления 1 и 2 соответственно: $R_1 = 68$ ом, $\omega_1 = 400$; $R_2 = 90$ ом, $\omega_2 = 360$; сопротивление цепи якоря ЭМУ $R_a = 1,75$ ом; сопротивление делителя напряжения $R_0 = 200$ ом; номинальное задающее напряжение на обмотке управления 1 при отсутствии обратной связи $U'_{1n} = 6,5$ в. ЭМУ считается скомпенсированным.

ЭМУ с обратной связью можно рассматривать как замкнутую систему управления. Отрицательная обратная связь в усилителе уменьшает влияние возмущающих факторов (в том числе остаточное намагничивание ЭМУ) в $1+K$ раз, где K — коэффициент усиления системы. В данном случае необходимо иметь $K=8-1=7$.

Коэффициент усиления системы равен произведению передаточных коэффициентов отдельных участков замкнутого контура

$$K = \frac{1}{R_2} \omega_2 \nu \alpha \beta,$$

причем

$$\nu = \frac{E}{F_{рез}},$$

где E — э. д. с. якоря;

$F_{рез}$ — результирующая м. д. с. возбуждения, равная разности м. д. с. обмоток управления 1 и 2, т. е. $F_{рез} = F_1 - F_2$.

Током через сопротивление делителя R_0 пренебрегаем ввиду его малой величины.

Коэффициент ν определяется наклоном характеристики холостого хода ЭМУ.

При отсутствии обратной связи

$$F_2 = 0 \text{ и } F_{рез} = F_1.$$

В этом случае величину ν можно найти как отношение э. д. с. якоря к м. д. с. обмотки 1 в номинальном режиме:

$$\nu = \frac{E_n}{F_{1n}} = \frac{(U_n + R_a I_n) R_1}{U'_{1n} \omega_1} = \frac{(220 + 1,75 \cdot 12,3) 68}{6,5 \cdot 400} = 6,32 \frac{в}{а \cdot в*}.$$

Коэффициент

$$\alpha = \frac{U_n}{U_n + R_a I_n} = \frac{220}{220 + 1,75 \cdot 12,3} = 0,91.$$

* а-в — ампер-витки.

Коэффициент обратной связи

$$\beta = \frac{KR_2}{\omega_2 \nu u} = \frac{1 \cdot 90}{360 \cdot 6,32 \cdot 0,91} = 0,304.$$

Так как передаточный коэффициент усилителя при включении обратной связи также уменьшается в $1+K$ раз, то соответственно и напряжение U_1 на обмотке 1 необходимо увеличить во столько же раз, т. е.

$$U_{1н} = (1+K)U'_{1н} = (1+7)6,5 = 52 \text{ в.}$$

Для проверки рассмотрим номинальный режим ЭМУ с обратной связью.

Магнитодвижущая сила, развиваемая обмоткой 1,

$$F_1 = \frac{U_{1н} \omega_1}{R_1} = \frac{52 \cdot 400}{68} = 306 \text{ а-в.}$$

Магнитодвижущая сила обмотки 2

$$F_2 = \frac{\beta U_{1н} \omega_2}{R_2} = \frac{0,304 \cdot 220 \cdot 360}{90} = 267,8 \text{ а-в.}$$

Результирующая м. д. с.

$$F_{рез} = 306 - 267,8 = 38,2 \text{ а-в.}$$

чему соответствует напряжение на зажимах якоря ЭМУ

$$U = \nu F_{рез} - R_{я} I_n = 6,32 \cdot 38,2 - 1,75 \cdot 12,3 = 220 \text{ в.}$$

т. е. номинальное напряжение.

§ 3.3. Примеры расчета установившихся ошибок и статических параметров систем автоматического управления

Пример 3.6. Определение установившейся погрешности системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока (рис. 1.4) при изменении тока нагрузки генератора от нуля до номинального значения.

Система регулирования имеет следующие параметры: коэффициент усиления электронного усилителя $k_{y1}=46$; коэффициент усиления скомпенсированного ЭМУ по напряжению $k_{y2}=7,8$; наклон характеристики холостого хода генератора, равный отношению приращения э. д. с. якоря к приращению тока возбуждения, $m_r=117 \text{ в/а}$; сопротивление обмотки возбуждения генератора $R_{в.г}=65 \text{ ом}$; коэффициент обратной связи, выражающий отношение напряжения $U_{о.с.}$ снимаемого с делителя R_0 , ко всему напряжению на зажимах якоря генератора, $\beta=0,62$; падение напряжения в сопротивлении якоря при номинальной нагрузке составляет 11% напряжения на зажимах якоря.

Установившаяся ошибка статической системы автоматического регулирования на основании формулы (3.9)

$$\gamma = \frac{\delta}{1 + K},$$

где δ — ошибка разомкнутой системы (без обратной связи);
 K — коэффициент усиления системы, равный произведению передаточных коэффициентов всех элементов главного контура системы регулирования.

В установившемся режиме ток в стабилизирующем RC -контуре (рис. 1.4) равен нулю, поэтому местную обратную связь, образуемую этим контуром, можно не принимать во внимание. В этом случае коэффициент усиления системы регулирования

$$K = k_{y1} k_{y2} k_r \alpha \beta.$$

Передаточный коэффициент генератора по напряжению

$$k_r = \frac{E_r}{U_{в.г.}} = \frac{E_r}{R_{в.г.} I_{в.}} = \frac{m_r}{R_{в.г.}} = \frac{117}{65} = 1,8.$$

Величина α определяется по отношению падения напряжения в якоре генератора к напряжению на его зажимах, которое в свою очередь равно отношению сопротивления якоря к сопротивлению номинальной нагрузки

$$\frac{R_{я}}{R_{н}} = 0,11.$$

Тогда

$$\alpha = \frac{U_r}{E_r} = \frac{R_{н}}{R_{н} + R_{я}} = \frac{1}{1 + \frac{R_{я}}{R_{н}}} = \frac{1}{1 + 0,11} = 0,9.$$

Относительная ошибка разомкнутой системы, вызванная увеличением тока нагрузки от нуля до номинального, равна падению напряжения в якоре генератора, отнесенному к э. д. с. якоря

$$\delta = \frac{E - U_{н}}{E} = \frac{R_{я} I_{н}}{E}.$$

Так как $E = I_{н}(R_{н} + R_{я})$, то

$$\delta = \frac{R_{я}}{R_{н} + R_{я}} = 1 - \frac{R_{н}}{R_{н} + R_{я}} = 1 - \alpha.$$

Подставляя численные величины, будем иметь

$$K = 46 \cdot 7,8 \cdot 1,8 \cdot 0,9 \cdot 0,62 = 360;$$

$$\delta \% = (1 - \alpha) 100 = (1 - 0,9) 100 = 10\%;$$

$$\gamma \% = \frac{\delta \%}{1 + K} = \frac{10}{1 + 360} = 0,028\%.$$

Пример 3.7. Определение установившейся ошибки следящей системы. Принципиальная схема системы приведена на рис. 1.6. Входная (задающая) ось вращается с постоянной угловой скоростью $\Omega = 40 \text{ град/сек}$. На валу исполнительного двигателя действует статический момент нагрузки $M_{ст} = 552 \text{ Гсм}$.

Параметры системы: коэффициент усиления электронного усилителя $k_y = 297$; постоянные исполнительного двигателя по скорости и моменту соответственно — $c_e = 0,814 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$ и $c_u = 18,6 \text{ Гсм/в}$; передаточное число редуктора $j_p = 209$; рассогласование входной и выходной осей в 1° вызывает изменение напряжения на входе усилителя на 1 в .

Установившаяся ошибка равняется сумме статической ошибки, вызванной действием $M_{ст}$ и скоростной ошибки, обусловленной заданной скоростью изменения входного сигнала.

Статическая ошибка

$$\Theta_{ст} = \frac{M_{ст}}{k_c k_y c_u} = \frac{552}{1 \cdot 297 \cdot 18,6} = 0,1^\circ,$$

где $k_c = 1 \text{ в/град}$ — общий передаточный коэффициент дифференциала и потенциометра.

Скоростная ошибка, представляющая собой установившуюся ошибку при линейном изменении входной величины и $M_{ст} = 0$,

$$\Theta_v = \frac{\Omega}{D_v} [\text{см (3.13)}].$$

Так как система не содержит местных обратных связей, то D_v совпадает с передаточным коэффициентом разомкнутой системы D , равным произведению передаточных коэффициентов отдельных звеньев системы:

$$D_v = D = k_c k_y \frac{1}{c_e} \cdot \frac{1}{j_p}.$$

Поскольку $c_e = \frac{0,814}{57,3} = 0,0142 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$, то

$$D = 1 \cdot 297 \cdot \frac{1}{0,0142} \cdot \frac{1}{209} = 100 \frac{1}{\text{сек}},$$

$$\Theta_v = \frac{40}{100} = 0,4^\circ.$$

Результирующая установившаяся ошибка определится суммой $\Theta_{ст}$ и Θ_v , т. е.

$$\Theta_{уст} = \Theta_{ст} + \Theta_v = 0,1^\circ + 0,4^\circ = 0,5^\circ.$$

Пример 3.8. Определение статической ошибки следящей системы. Статическая ошибка следящей системы, рассмотренной в примере 3.7, обусловлена совместным действием постоянного

момента нагрузки на выходном валу (после редуктора) $M_{ст} = 1,27 \text{ кгм}$ и несимметрией плеч электронного усилителя, дающей после приведения ко входу усилителя сигнал $\Delta U_c = 40 \text{ мв}$. Будем считать, что составляющие ошибки имеют одинаковый знак.

Статическая ошибка следящей системы складывается из двух составляющих, обусловленных действием $M_{ст}$ и ΔU_c . Каждая из этих составляющих должна равняться такой величине ошибки, при которой достигается компенсация соответствующего внешнего воздействия. Следовательно, в рассматриваемом случае

$$\Theta_{ст} = \frac{M_{ст}}{k_c k_y c_{\mu} j_p} + \frac{\Delta U_c}{k_c} = \frac{1,27 \cdot 10^5}{1 \cdot 297 \cdot 18,6 \cdot 209} + \frac{40 \cdot 10^{-3}}{1} = 0,15^\circ.$$

Пример 3.9. Определение добротности следящей системы и максимально возможной скорости вращения входной оси.

Следящая система (рис. 1.8) имеет следующие значения параметров: передаточные коэффициенты потенциометров $k_c = 86 \text{ в/рад}$; коэффициент усиления лампового усилителя $k_y = 1200$; постоянная асинхронного двухфазного двигателя по скорости $c_e = 0,26 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; передаточное число редуктора $j_p = 264$;

передаточный коэффициент тахогенератора $k_{тг} = 2,6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; допустимая скоростная ошибка $\Theta_v = 0,36^\circ$.

Следящая система содержит местную отрицательную обратную связь по скорости вращения выходной оси, поэтому добротность не равна передаточному коэффициенту основного контура следящей системы, а меньше его за счет сигнала, подаваемого на вход усилителя от тахогенератора.

Воспользуемся структурной схемой следящей системы (рис. 2.9). Так как мы рассматриваем установившийся режим, то операторные передаточные функции двигателя с редуктором и звена местной обратной связи можно заменить их передаточными коэффициентами, положив

$$W_d(p) = \frac{1}{c_e j_p} \text{ и } Z_0(p) = j_p k_{тг}.$$

Множитель j_p в последнем выражении добавлен потому, что на структурной схеме редуктор не выделен в отдельное звено направленного действия и на вход звена $Z_0(p)$ поступает скорость вращения не вала двигателя (и, соответственно, не тахогенератора, сидящего с двигателем на одном валу), а выходной оси системы. Целесообразно обозначить $k_{тг} = k_0 c_e$, где k_0 — безразмерный множитель.

Заменяя на структурной схеме часть звеньев, охваченных местной обратной связью, эквивалентным звеном с передаточным коэффициентом

$$W_1 = \frac{k_y \frac{1}{c_e j p}}{1 + k_y \frac{1}{c_e j p} \cdot j p k_0 c_e}$$

(см. пример 2.3) и применяя правила преобразования структурных схем, получим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = k_c W_1 \frac{1}{p} = \frac{D}{(1 + k_y k_0) p},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j p}.$$

Как видно, введение обозначения $k_{тг} = k_0 c_e$ оправдалось сокращением множителей $c_e j p$ в знаменателе передаточной функции.

Операторное выражение ошибки следящей системы

$$\Theta(p) = \frac{1}{1 + W(p)} \Theta_{вх}(p).$$

При $\Theta_{вх}(t) = \Omega t$ входная величина

$$\Theta_{вх}(p) = \frac{\Omega}{p^2}.$$

Подставляя в выражение для $\Theta(p)$ значения передаточной функции и входной величины, получим

$$\Theta(p) = \frac{(1 + k_y k_0) p}{(1 + k_y k_0) p + D} \cdot \frac{\Omega}{p^2}.$$

Скоростную ошибку следящей системы на основании теоремы о предельном значении функции определим как

$$\Theta_v = \lim_{t \rightarrow \infty} \Theta(t) = \lim_{p \rightarrow 0} p \Theta(p) = \frac{(1 + k_y k_0) \Omega}{D}.$$

Добротность следящей системы по скорости

$$D_v = \frac{\Omega}{\Theta_v}.$$

Сравнивая два последних выражения, получаем, что

$$D_v = \frac{D}{1 + k_y k_0}.$$

Подставив численные значения параметров, найдем

$$D = \frac{86 \cdot 1200}{0,26 \cdot 264} = 1500 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Так как

$$k_0 = \frac{k_{\tau\tau}}{c_\tau} = \frac{2,6 \cdot 10^{-3}}{0,26} = 0,01,$$

то

$$D_v = \frac{1500}{1 + 1200 \cdot 0,01} = 115 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Максимально возможная скорость вращения входной оси, при которой ошибка не превысит $0,36^\circ$,

$$\Omega = D_v \Theta_v = 115 \cdot 0,36 = 41,5 \text{ град/сек.}$$

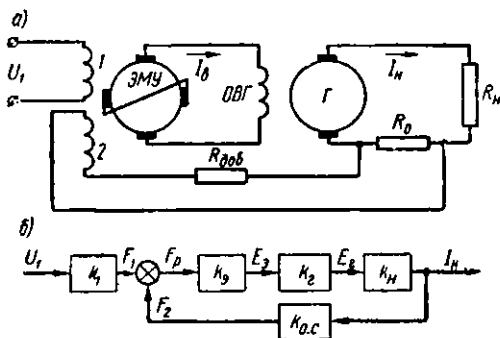


Рис. 3.3. Система автоматического регулирования тока нагрузки генератора:

а — принципиальная схема; б — структурная схема

ответственно $R_2 = 0,12 \text{ ом}$ и $\omega_2 = 12$; сопротивление нагрузки $R_H = 0,336 \text{ ом}$; сопротивление обратной связи в цепи нагрузки $R_0 = 0,004 \text{ ом}$; добавочное сопротивление в цепи обратной связи $R_{доб} = 0,22 \text{ ом}$, сопротивление цепи якоря генератора $R_r = 0,02 \text{ ом}$; угловой коэффициент характеристики холостого хода генератора $m_r = \frac{\Delta E_r}{\Delta I_r} = 17,6 \text{ в/а}$; сопротивление обмотки возбуждения генератора $R_B = 8,2 \text{ ом}$; сопротивление продольной цепи якоря ЭМУ $R_3 = 1,6 \text{ ом}$; угловой коэффициент характеристики холостого хода ЭМУ $v = \frac{\Delta E_3}{\Delta F_p} = 20 \text{ в/а-в}$. ЭМУ считается скомпенсированным.

Структурная схема системы автоматического регулирования тока нагрузки генератора в установившемся режиме изображена на рис. 3.3, б.

Рассматриваемая система является статической, не содержащей местных обратных связей. Ее коэффициент усиления равен произведению передаточных коэффициентов звеньев, входящих в замкнутый контур системы,

Пример 3.10. Определение коэффициента усиления системы автоматического регулирования тока нагрузки генератора постоянно-го тока (рис. 3.3, а).

Параметры системы: сопротивление и число витков задающей обмотки ЭМУ (обмотка 1) соответственно $R_1 = 216 \text{ ом}$ и $\omega_1 = 450$; сопротивление и число витков обмотки обратной связи ЭМУ (обмотка 2) со-

$$K = k_{\Sigma} k_r k_n k_{o.c.}$$

Следовательно, задача сводится к определению передаточных коэффициентов отдельных звеньев структурной схемы.

Передаточный коэффициент генератора k_r представляет собой отношение э. д. с. генератора и ЭМУ, в то время как обычно задается коэффициент m_r , равный отношению э. д. с. к току возбуждения генератора. Но ток возбуждения генератора можно найти, поделив э. д. с. ЭМУ на сопротивление цепи возбуждения генератора. Поэтому

$$k_r = \frac{m_r}{R_b + R_s} = \frac{17,6}{8,2 + 1,6} = 1,8.$$

Передаточный коэффициент звена нагрузки

$$k_n = \frac{1}{R_n + R_r + R_0} = \frac{1}{0,336 + 0,02 + 0,004} = 2,78 \text{ а'в.}$$

Передаточный коэффициент звена обратной связи равен отношению м. д. с. F_2 к току нагрузки. Ток нагрузки создает на сопротивлении R_0 падение напряжения, равнос $I_n R_0$, которое будучи разделенным на сумму сопротивлений R_2 и R_d вызовет ток в обмотке 2 ЭМУ. Умножив последний на число витков обмотки 2, получим м. д. с. F_2 . Следовательно,

$$k_{o.c.} = \frac{R_1 w_2}{R_2 + R_d} = \frac{0,004 \cdot 12}{0,12 + 0,22} = 0,141 \text{ а-в/а.}$$

Передаточный коэффициент ЭМУ при разделении структурной схемы на звенья направленного действия (рис. 3.3, б) будет

$$k_s = v.$$

Таким образом, коэффициент усиления системы регулирования $K = 20 \cdot 1,8 \cdot 2,78 \cdot 0,141 = 14,1$.

Пример 3.11. Определение величины задающего напряжения и добавочного сопротивления в цепи обратной связи системы автоматического регулирования тока нагрузки генератора.

Система регулирования рассмотрена в примере 3.10. Требуемые значения задающего напряжения U_1 и добавочного сопротивления $R_{доб}$ в цепи обратной связи должны быть определены при условии, что установившаяся ошибка не должна превосходить 2% от заданного значения тока нагрузки $I_{н.о} = 500 \text{ а}$. Известно, что в такой же системе без обратной связи максимальное отклонение тока нагрузки от его заданного значения под действием внешней э. д. с., вносимой в контур нагрузки извне, составляет $\Delta I_n = 100 \text{ а}$. Сопротивление нагрузки постоянно.

В статической системе регулирования относительная установившаяся ошибка

$$\gamma = \frac{\delta}{1 + K},$$

где δ — относительная ошибка системы без обратной связи;
 K — коэффициент усиления системы регулирования.

В данном случае

$$\delta\% = \frac{\Delta I_{н.о}}{I_{н.о}} \cdot 100 = \frac{100}{500} \cdot 100 = 20\%.$$

Подставив полученное значение δ в предыдущее выражение, найдем требуемый коэффициент усиления системы

$$K = \frac{\delta - \gamma}{\gamma} = \frac{20 - 2}{2} = 9.$$

Так как $K = k_3 k_r k_n k_{o.c.}$, то необходимый коэффициент обратной связи

$$k_{o.c.} = \frac{K}{k_3 k_r k_n} = \frac{9}{20 \cdot 1,8 \cdot 2,78} = 0,09 \text{ а-в/а}.$$

С другой стороны,

$$k_{o.c.} = \frac{R_0 \omega_2}{R_2 + R_{доб}},$$

откуда находим

$$R_{доб} = \frac{R_0 \omega_2}{k_{o.c.}} - R_2 = \frac{0,004 \cdot 12}{0,09} - 0,12 = 0,414 \text{ ом}.$$

Заданное значение тока нагрузки при отсутствии внешних возмущений

$$I_{н.о} = \frac{k_1 k_3 k_r k_n}{1 + K} U_1,$$

откуда можно определить требуемое значение задающего напряжения U_1 , вычислив предварительно передаточный коэффициент

$$k_1 = \frac{F_1}{U_1} = \frac{\omega_1}{R_1} = \frac{450}{216} = 2,08 \text{ а-в/в}.$$

Тогда

$$U_1 = \frac{1 + K}{k_1 k_3 k_r k_n} I_{н.о} = \frac{1 + 9}{2,08 \cdot 20 \cdot 1,8 \cdot 2,78} \cdot 500 = 24 \text{ в}.$$

Пример 3.12. Определение необходимого коэффициента усиления лампового усилителя следящей системы с корректирующим контуром переменного тока (рис. 1.12). Установившаяся ошибка в режиме слежения с постоянной угловой скоростью $\Omega = 40 \text{ град/сек}$ не должна превышать значения $\Theta_v = 0,5^\circ$. На выходе следящей системы действует внешнее скоростное трение, создающее момент сопротивления, удельное значение которого, отнесенное к единице скорости вращения выходной оси, равно $6,29 \frac{\text{кгм}}{\text{рад/сек}}$.

Параметры системы: передаточный коэффициент сельсинного преобразующего устройства $k_c = 1,25 \text{ в/град}$; постоянные асинхронного двухфазного двигателя по скорости и моменту соответственно — $c_e = 0,81 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$ и $c_u = 0,9 \text{ Гдм/в}$; передаточное число редуктора $j_p = 240$; затухание, вносимое корректирующим Т-образным контуром на несущей частоте, характеризуется передаточным коэффициентом контура $k_k = 0,045$.

Воспользуемся структурной схемой, полученной в примере 2.5 (рис. 2.11). В данном случае будем иметь

$$W_k(p) = k_k \text{ и } W_d(p) = k_{дв}.$$

Из-за наличия внешнего скоростного трения передаточный коэффициент $k_{дв}$ двигателя вместе с редуктором не будет равняться $1/c_e j_p$, как в других примерах, в которых предполагалось отсутствие внешних моментов нагрузки. Для нахождения $k_{дв}$ подставим в уравнение двигателя в установившемся режиме

$$c_u U_y = M_c + c_e c_u \Omega_{дв}$$

(где U_y — напряжение на управляющей обмотке двигателя) значение момента сопротивления

$$M_c = k'_T \Omega_{дв},$$

здесь k'_T — коэффициент внешнего скоростного трения, приведенный к валу двигателя.

После преобразований будем иметь

$$\Omega_{дв} = \frac{c_u}{k'_T + c_e c_u} U_y,$$

откуда, принимая во внимание, что $\Omega_{дв} = j_p \Omega$, получим

$$k_{дв} = \frac{\Omega}{U_y} = \frac{1}{\frac{c_e j_p}{1 + \frac{k'_T}{k_T}}},$$

где $k_T = c_e c_u = 0,81 \cdot 0,9 = 0,73 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$ — коэффициент внутреннего скоростного трения в двигателе.

Коэффициент внешнего скоростного трения на выходной оси следящей системы

$$k'_{T, \text{вых}} = 6,29 \frac{\text{Гдм}}{\text{рад/сек}}.$$

Будучи приведенным к валу двигателя, этот же коэффициент

$$k'_T = \frac{k'_{T, \text{вых}}}{j_p^2} = \frac{6,29}{240^2} \cdot 10^4 = 1,09 \frac{\text{Гдм}}{\text{рад/сек}}.$$

Справедливость подобного приведения легко показать, выразив k'_T и $k'_{T.ВМХ}$ через отношения моментов скоростного трения и угловых скоростей на валу двигателя и на выходной оси системы:

$$k'_T = \frac{M_{СК.ДВ}}{\Omega_{ДВ}} \text{ и } k'_{T.ВМХ} = \frac{M_{СК.ВМХ}}{\Omega_{ВМХ}},$$

откуда следует

$$\frac{k'_{T.ВМХ}}{k'_T} = \frac{M_{СК.ВМХ} \Omega_{ДВ}}{M_{СК.ДВ} \Omega_{ВМХ}} = i_p i_p = i_p^2.$$

Подставляя численные значения величин в полученную выше формулу для $k_{ДВ}$, будем иметь

$$k_{ДВ} = \frac{1}{1 + \frac{0,81 \cdot 240}{1,09}} = 2,07 \cdot 10^{-3} \frac{\text{рад/сек}}{\text{а}}.$$

Требуемая добротность следящей системы

$$D_v = \frac{\Omega}{\Theta_v} = \frac{40}{0,5} = 80 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Система не содержит местных обратных связей, поэтому

$$D_v = D,$$

где $D = k_c k_k k_y k_{ДВ}$ — передаточный коэффициент по замкнутому контуру следящей системы.

$$k_c = 1,25 \text{ в/град} = 1,25 \cdot 57,3 = 71,7 \text{ в/рад}.$$

Необходимый коэффициент усиления лампового усилителя

$$k_y = \frac{D}{k_c k_k k_{ДВ}} = \frac{80}{71,7 \cdot 0,045 \cdot 2,07 \cdot 10^{-3}} = 12\,000.$$

Пример 3.13. Определение максимальной установившейся ошибки системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока с отрицательной обратной связью по напряжению ЭМУ при переменных параметрах системы.

Принципиальная схема системы регулирования изображена на рис. 3.4, а.

Система имеет следующие параметры: сопротивление и число витков задающей обмотки 1 ЭМУ соответственно — $R_1 = 640 \text{ ом}$ и $\omega_1 = 320$; то же для обмотки местной обратной связи 2 — $R_2 = 2200 \text{ ом}$ и $\omega_2 = 275$; сопротивление якорей ЭМУ и генератора соответственно — $R_a = 1,8 \text{ ом}$ и $R_r = 0,0075 \text{ ом}$; сопротивление обмотки возбуждения генератора $R_b = 6,8 \text{ ом}$; сопротивление нагрузки $R_n = 0,15 \text{ ом}$; угловые коэффициенты характеристик

холостого хода ЭМУ и генератора соответственно — $m_n = 10\,600$ в/а и $m_r = 32$ в/а; коэффициент главной обратной связи $\beta = 0,81$.

Система регулирования подвергается следующим возмущающим воздействиям:

1) скорости вращения якорей ЭМУ и генератора могут изменяться на $\pm 10\%$ номинальной скорости;

2) сопротивление обмотки возбуждения генератора вследствие нагрева может увеличиваться на $1,2$ ом;

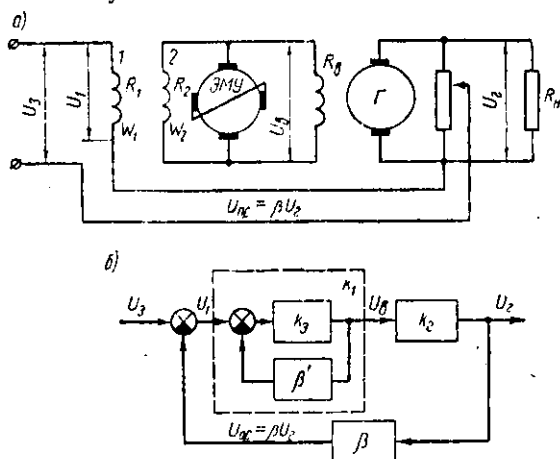


Рис. 3.4. Система автоматического регулирования напряжения генератора:

а — принципиальная схема; б — структурная схема

3) сопротивление нагрузки в процессе работы может уменьшаться на $0,11$ ом и увеличиваться на $0,05$ ом.

Составим структурную схему системы автоматического регулирования (рис. 3.4, б) и определим расчетный коэффициент усиления системы при отсутствии возмущающих воздействий.

Используя формулу (2.5), заменим участок прямой цепи системы, охваченный местной отрицательной обратной связью с коэффициентом β' , эквивалентным звеном с передаточным коэффициентом

$$k_1 = \frac{k_3}{1 + k_3 \beta'}.$$

Передаточный коэффициент ЭМУ без учета местной обратной связи

$$k_3 = \frac{U_B}{U_1} = \frac{m_3}{R_1 \left(1 + \frac{R_3}{R_B}\right)} = \frac{10\,600}{640 \left(1 + \frac{1,8}{6,8}\right)} = 13,1.$$

Коэффициент местной обратной связи

$$\beta' = \frac{R_1 w_2}{R_2 w_1} = \frac{640 \cdot 275}{2200 \cdot 320} = 0,25.$$

Затем можно вычислить

$$k_1 = \frac{13,1}{1 + 13,1 \cdot 0,25} = 3,06.$$

Передаточный коэффициент генератора

$$k_r = \frac{U_r}{U_n} = \frac{m_r}{R_n \left(1 + \frac{R_r}{R_n}\right)} = \frac{32}{6,8 \left(1 + \frac{0,0075}{0,15}\right)} = 4,48.$$

Передаточный коэффициент прямой цепи системы

$$\mu_0 = k_1 k_r = 3,06 \cdot 4,48 = 13,7.$$

Коэффициент усиления разомкнутой системы

$$K_0 = \mu_0 \beta = 13,7 \cdot 0,81 = 11,1.$$

Под влиянием возмущающих воздействий передаточный коэффициент прямой цепи системы μ будет отклоняться от своего расчетного значения μ_0 .

Рассмотрим сначала те возмущения, которые вызывают уменьшение μ . Учитывая, что коэффициент m_s пропорционален квадрату скорости вращения якоря, а m_r — первой степени, получим:

$$k'_s = \frac{0,9^2 \cdot 10\,600}{640 \left(1 + \frac{1,8}{6,8 + 1,2}\right)} = 10,95;$$

$$k'_r = \frac{0,9 \cdot 32}{(6,8 + 1,2) \left(1 + \frac{0,0075}{0,15 - 0,11}\right)} = 3,03.$$

Измененное значение

$$k'_1 = \frac{10,95}{1 + 10,95 \cdot 0,25} = 2,93,$$

а соответствующее значение μ будет

$$\mu' = k'_1 k'_r = 2,93 \cdot 3,03 = 8,9.$$

Максимальное относительное уменьшение μ

$$\delta_+ = \frac{\mu_0 - \mu'}{\mu_0} = \frac{13,7 - 8,9}{13,7} = 0,35.$$

Аналогичным путем определим максимальное относительное увеличение μ :

$$k_s^* = \frac{1,1^2 \cdot 10\,600}{640 \left(1 + \frac{1,8}{6,8}\right)} = 15,85;$$

$$k_r^* = \frac{1,1 \cdot 32}{6,8 \left(1 + \frac{0,0075}{0,15 + 0,05}\right)} = 5;$$

$$k_i^* = \frac{15,85}{1 + 15,85 \cdot 0,25} = 3,2;$$

$$\mu'' = k_i^* k_r^* = 3,2 \cdot 5 = 16,0;$$

$$\delta_- = \frac{\mu_0 - \mu''}{\mu_0} = \frac{13,7 - 16,0}{13,7} = -0,168.$$

Определим ошибки системы регулирования соответственно при уменьшении и увеличении μ по формуле (3.15)

$$\gamma_+ = \frac{0,35}{1 + (1 - 0,35) \cdot 11,1} = 0,0426;$$

$$\gamma_- = \frac{-0,168}{1 + [1 - (-0,168)] \cdot 11,1} = -0,012.$$

Максимальная установившаяся ошибка системы регулирования составляет 4,26%.

Пример 3.14. Расчет оптимальной настройки системы автоматического регулирования напряжения генератора.

В системе регулирования, рассмотренной в примере 3.13, необходимо определить оптимальное значение передаточного коэффициента прямой цепи системы μ_{opt} , на которое нужно настроить систему, чтобы максимально возможная установившаяся ошибка была наименьшей.

Максимальный предел изменения μ

$$\Delta_m = \mu'' - \mu' = 16,0 - 8,9 = 7,1,$$

или в относительных единицах

$$\delta_m = \frac{\Delta_m}{\mu_0} = \delta_+ - \delta_- = 0,350 - (-0,168) = 0,518.$$

Соотношение между δ_+ и δ_m

$$\rho = \frac{\delta_+}{\delta_m} = \frac{0,350}{0,518} = 0,675.$$

По формуле (3.16) найдем

$$\sigma = \frac{1}{2 \cdot 0,518 \cdot 11,1} \left[0,518 \cdot 11,1 + (1 + 11,1) - \sqrt{(0,518 \cdot 11,1)^2 + (1 + 11,1)^2} \right] = 0,387.$$

После чего из выражения (3.17) получим

$$\mu_{opt} = 13,7 + (0,675 - 0,387) \cdot 7,1 = 15,74.$$

При такой настройке системы относительные изменения коэффициента μ в сторону его увеличения и уменьшения, определенные относительно расчетного значения μ_0 , будут соответственно равны:

$$\delta_+ = \sigma \delta_m \text{ и } \delta_- = -(1 - \sigma) \delta_m.$$

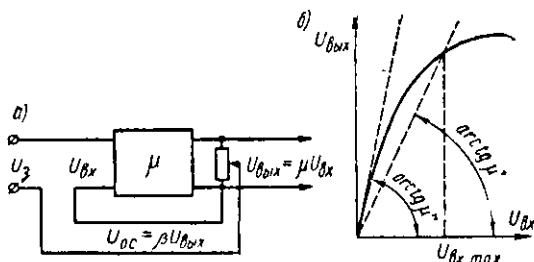


Рис. 3.5. Усилитель с отрицательной обратной связью:

а — схема; б — передаточная характеристика

Подставляя эти значения в формулу (3.15), получим установившиеся ошибки системы регулирования при оптимальной настройке системы

$$\gamma_+ = \frac{\sigma \delta_m}{1 + (1 - \sigma \delta_m) K_0} = \frac{0,387 \cdot 0,518}{1 + (1 - 0,387 \cdot 0,518) \cdot 11,1} = 0,0203;$$

$$\gamma_- = \frac{-(1 - \sigma) \delta_m}{1 + [1 + (1 - \sigma) \delta_m] K_0} = \frac{-(1 - 0,387) \cdot 0,517}{1 + [1 + (1 - 0,387) \cdot 0,517] \cdot 11,1} = -0,0203.$$

Максимальная установившаяся ошибка системы автоматического регулирования уменьшилась с 4,26 до 2,03%.

Практически осуществить требуемую настройку системы можно, например, изменением масштаба задающего напряжения U_z , перенастройкой регулятора скорости вращения приводного двигателя ЭМУ и генератора и т. п.

Пример 3.15. Расчет оптимальной настройки усилителя с обратной связью при переменном коэффициенте усиления.

Усилитель с отрицательной обратной связью (рис. 3.5, а), вследствие нелинейности передаточной характеристики (рис. 3.5, б) $U_{вых} = \mu(U_{вх})$, имеет переменный коэффициент усиления μ , изменяющийся в зависимости от величины входного напряжения от $\mu' = 200$ до $\mu'' = 400$ при постоянном коэффициенте обратной связи $\beta = 0,1$.

Нужно определить, какое значение μ следует принять для расчета масштаба задающего напряжения U_3 , чтобы максимальная ошибка преобразования сигнала была наименьшей.

Усилитель с отрицательной обратной связью можно рассматривать как статическую систему регулирования.

Из выражения (3.17) определяем расчетное значение μ_0 при известном μ_{opt} , в качестве которого можно принять любое из значений μ в интервале от μ' до μ'' .

Нетрудно видеть, что если принять за расчетное одно из крайних значений, то максимально возможная ошибка не будет наименьшей.

Например, приняв $\mu_0 = \mu'' = 400$, будем иметь: $K_0 = \mu_0 \beta = 400 \cdot 0,1 = 40$; $\Delta_m = \mu'' - \mu' = 400 - 200 = 200$; $\delta_m = \frac{\Delta_m}{\mu_0} = \frac{200}{400} = 0,5$; $\delta_+ = \frac{\mu_0 - \mu'}{\mu_0} = \frac{400 - 200}{400} = 0,5$; $\rho = \frac{\delta_+}{\delta_m} = \frac{0,5}{0,5} = 1$.

На основании формулы (3.15)

$$\gamma_+ = \frac{0,5}{1 + (1 - 0,5) 40} = 0,0238.$$

Так как

$\delta_- = \mu_0 - \mu'' = 400 - 400 = 0$, то $\gamma_- = 0$. Максимальная ошибка составляет 2,38%.

Для нахождения наимыгоднейшего расчетного значения μ_0 воспользуемся формулой (3.16):

$$\sigma = \frac{1}{2 \cdot 0,5 \cdot 40} \left[0,5 \cdot 40 + (1 + 40) - \sqrt{(0,5 \cdot 40)^2 + (1 + 40)^2} \right] = 0,385.$$

Положив в формуле (3.17) $\mu_{opt} = \mu'' = 400$ и подставив значения Δ_m , ρ и σ , найдем требуемое расчетное значение $\mu_0 = 400 - (1 - 0,385) 200 = 277$.

При этом ошибки системы регулирования [на основании выражения (3.15)] будут:

$$\gamma_+ = \frac{0,385 \cdot 0,5}{1 + (1 - 0,385 \cdot 0,5) 40} = 0,00578;$$

$$\gamma_- = \frac{-(1 - 0,385) 0,5}{1 + [1 + (1 - 0,385) 0,5] 40} = -0,00578.$$

Таким образом, если масштаб задающего напряжения U_3 , подаваемого на вход усилителя, рассчитывать не по крайней характеристике, а по некоторой средней, соответствующей $\mu = \mu_0 = 277$, то максимально возможная ошибка воспроизведения сигнала уменьшится с 2,38 до 0,578%.

Пример 3.16. Определение оптимального значения передаточного коэффициента прямой цели системы автоматического регулирования напряжения генератора.

Читателям предлагается для системы регулирования, рассмотренной в примере 3.13, самостоятельно определить значение μ_{opt} , при котором максимальная установившаяся ошибка системы будет наименьшей.

Параметры системы регулирования: $R_1=500 \text{ ом}$; $\omega_1=200$; $R_2=2000 \text{ ом}$; $\omega_2=160$; $R_3=2,4 \text{ ом}$; $R_r=0,008 \text{ ом}$; $R_b=8 \text{ ом}$; $R_u=0,2 \text{ ом}$; $m_s=13\,000 \text{ в/а}$; $m_r=25 \text{ в/а}$; $\beta=0,75$.

Возмущающие воздействия в системе:

- 1) изменение скорости вращения приводного двигателя ЭМУ и генератора на $\pm 10\%$ номинальной;
- 2) увеличение сопротивления обмотки возбуждения генератора на 2 ом ;
- 3) уменьшение сопротивления нагрузки на $0,16 \text{ ом}$ и увеличение на $0,05 \text{ ом}$.

Ответ: $\mu_{opt}=14,23$. Максимальная установившаяся ошибка уменьшается с $6,16$ до $2,59\%$.



Глава IV. УРАВНЕНИЯ И ПЕРЕДАТОЧНЫЕ ФУНКЦИИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 4.1. Методика составления операторных уравнений и определения передаточных функций

Достоверность динамических расчетов систем автоматического управления прежде всего определяется тем, насколько близко к действительности принятое математическое описание происходящих в системе физических процессов.

В связи с интенсивным развитием и внедрением в инженерную практику средств вычислительной техники, центр тяжести расчетно-исследовательской деятельности специалистов по автоматическому управлению за последние годы все больше смещается из области анализа и синтеза математически заданных систем в направлении поиска новых принципов их построения и уточнения математических зависимостей, определяющих поведение исследуемой или проектируемой системы управления.

Любое физическое явление неизмеримо богаче его математического отображения, по необходимости являющегося всегда ограниченным. Однако из этого неверно было бы сделать вывод о том, что всегда следует стремиться к большей полноте и сложности уравнений, характеризующих исследуемый процесс. Для практических целей весьма важной является возможность выделить из общей совокупности явлений какую-то часть, характеризующую основные черты поведения системы управления без загромождения их второстепенными факторами, сильно осложняющими исследование физического процесса.

Математическое описание динамики систем автоматического управления обычно производится путем составления системы дифференциальных (иногда интегро-дифференциальных) уравнений. Строго говоря, любая реальная динамическая система является нелинейной. Однако большинство непрерывных систем управления могут быть линеаризованы, т. е. заменены приближенно эквивалентными системами, переходные процессы в которых описываются обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Такие системы управления принято называть *линейными*.

Линеаризация исходных систем основывается на методе малых отклонений. Сущность этого метода заключается в том, что динамические свойства системы управления исследуются не во всем возможном диапазоне изменения переменных систем, а вблизи их некоторых значений, соответствующих характерным режимам работы (например, установившимся режимам).

Составление и линеаризация уравнений обычно производится по отдельным звеньям. Разлагая в ряд Тейлора непрерывную аналитическую функцию, связывающую переменные звеньев и их производные, и отбрасывая члены второго и высших порядков малости, получим линейное уравнение звена. Однако в расчетной практике, как правило, не прибегают к разложению функций в ряд, а пользуются заранее линеаризованными характеристиками звеньев, которые чаще всего задаются не в аналитической форме, а в виде графиков, таблиц, паспортных данных и т. д.

Полученные дифференциальные уравнения линейных звеньев направленного действия обычно выражают в операторной форме и представляют в виде передаточных функций (см. § 2.1). Структурная схема, для всех звеньев которой передаточные функции определены, представляет собой наглядную форму записи дифференциальных уравнений исследуемой системы управления в операторной форме.

Составление уравнений и определение передаточных функций объектов управления, вообще говоря, выходит за рамки теории автоматического управления и должно производиться на основе физических законов, характеризующих эксплуатационные режимы этих объектов (например, законы аэродинамики для летательных аппаратов). Однако нужно уметь правильно представлять и преобразовывать уравнения объектов управления к наиболее удобному для расчетов виду.

Специалисту по автоматическому управлению необходимо также уметь определять и преобразовывать передаточные функции тех звеньев, которые входят в управляющую часть системы (чувствительные элементы, усилители, исполнительные двигатели, корректирующие звенья и т. д.).

При всем многообразии технических средств автоматики подавляющее большинство звеньев, составляющих структурные схемы систем автоматического управления, может быть сведено к нескольким, так называемым типовым звеньям направленного действия.

Передаточные функции наиболее часто встречающихся из них приводятся ниже.

1. *Безынерционное звено* (пропорциональное, усилительное):

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = k.$$

Передаточная функция безынерционного звена вырождается в передаточный коэффициент k , представляющий собой постоянное вещественное число.

2. *Апериодическое звено* (инерционное первого порядка):

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \frac{k}{Tp + 1},$$

где k — передаточный коэффициент;

T — постоянная времени звена ($T > 0$).

3. *Колебательное звено* (инерционное второго порядка):

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1},$$

где k — передаточный коэффициент;

T — постоянная времени звена ($T > 0$);

ζ — безразмерный коэффициент затухания ($\zeta > 0$).

К указанному виду легко приводится любая передаточная функция, у которой числитель есть постоянное число, а знаменатель — квадратный трехчлен (относительно p) с положительными коэффициентами. Действительно, пусть передаточная функция некоторого звена имеет вид

$$W(p) = \frac{m}{ap^2 + bp + c}.$$

Поделив числитель и знаменатель на c и приравняв выражения

$$W(p) = \frac{\frac{m}{c}}{\frac{a}{c}p^2 + \frac{b}{c}p + 1} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1},$$

получим, из условия равенства коэффициентов при соответствующих степенях p , систему уравнений:

$$\frac{m}{c} = k; \quad \frac{a}{c} = T^2; \quad \frac{b}{c} = 2\zeta T,$$

решая которую, будем иметь

$$T = \sqrt{\frac{a}{c}}; \quad \zeta = \frac{b}{2\sqrt{ac}}; \quad k = \frac{m}{c}.$$

При $\zeta > 1$ квадратное уравнение

$$T^2 p^2 + 2\zeta Tp + 1 = 0$$

будет иметь два отрицательных вещественных корня, и колебательное звено может быть заменено двумя последовательно включенными апериодическими звеньями.

4. Интегрирующее звено:

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \frac{k_{\text{и}}}{p}$$



5. Дифференцирующее звено:

для идеального дифференцирующего звена (чисто дифференцирующего)

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \tau p;$$

для реального дифференцирующего звена

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = W(p) = \frac{\tau p}{1 + \tau p},$$

$$\tau(1 + \tau p)$$

где τ — постоянная времени звена.

Составление операторных уравнений систем автоматического управления сводится к определению их передаточных функций путем преобразования структурных схем в соответствии с правилами, изложенными в § 2.1.

§ 4.2. Примеры определения передаточных функций отдельных элементов

Пример 4.1. Определение передаточной функции генератора постоянного тока с независимым возбуждением.

Сопротивление и индуктивность обмотки возбуждения генератора соответственно равны: $R_{\text{в}} = 65,5 \text{ ом}$ и $L_{\text{в}} = 27,5 \text{ гн}$; угловой коэффициент характеристики холостого хода генератора в ее линейной части

$$m_{\text{г}} = \frac{E_{\text{г}}}{I_{\text{в}}} = 108 \text{ в/а},$$

где $E_{\text{г}}$ — э. д. с. генератора.

Подставив в операторное уравнение цепи возбуждения генератора

$$U_{\text{в}} = L_{\text{в}} p I_{\text{в}} + R_{\text{в}} I_{\text{в}}$$

значение тока возбуждения $I_{\text{в}} = \frac{E_{\text{г}}}{m_{\text{г}}}$, получим после преобразований

$$W_{\text{г}}(p) = \frac{E_{\text{г}}(p)}{U_{\text{в}}(p)} = \frac{k_{\text{г}}}{1 + T_{\text{в}} p},$$

где $k_{\text{г}} = \frac{m_{\text{г}}}{R_{\text{в}}}$; $T_{\text{в}} = \frac{L_{\text{в}}}{R_{\text{в}}}$;

$U_{\text{в}}$ — напряжение на обмотке возбуждения.

Полученное выражение представляет собой передаточную функцию аperiodического звена направленного действия с передаточным коэффициентом k_r и постоянной времени T_v . Подставляя численные значения, получим:

$$k_r = \frac{108}{65,5} = 1,65;$$

$$T_v = \frac{27,5}{65,5} = 0,42 \text{ сек};$$

$$W_r(p) = \frac{E_r(p)}{U_a(p)} = \frac{1,65}{1 + 0,42p}.$$

Пример 4.2. Определение передаточной функции электромашинного усилителя с поперечным полем.

Параметры ЭМУ имеют следующие значения: сопротивление, индуктивность и число витков обмотки управления соответственно $R_y = 2000 \text{ ом}$, $L_y = 80 \text{ гн}$, $w_y = 3200$; сопротивление и индуктивность поперечной цепи якоря ЭМУ — $R_q = 1,23 \text{ ом}$, $L_q = 0,16 \text{ гн}$; угловой коэффициент характеристики холостого хода ЭМУ, определяемый как отношение э. д. с. якоря по продольной оси к м. д. с., создаваемой обмоткой управления, $m_a = 4,2 \frac{\text{в}}{\text{а-с}}$. ЭМУ считается скомпенсированным.

Передаточная функция ЭМУ

$$W_s = \frac{E_d(p)}{U_y(p)},$$

где $E_d(p)$ и $U_y(p)$ — соответственно операторные изображения э. д. с. якоря по продольной оси и напряжения на управляющей обмотке.

Операторные уравнения для цепи обмотки управления и поперечной цепи якоря ЭМУ:

$$L_y p I_y + R_y I_y = U_y; \quad (4.1)$$

$$L_q p I_q + R_q I_q = E_q, \quad (4.2)$$

где I_y и I_q — соответственно токи в обмотке управления и в поперечной цепи якоря.

Электродвижущая сила, действующая по поперечной оси якоря, в пределах линейного участка кривой намагничивания машины пропорциональна м. д. с. F_y , развиваемой обмоткой управления:

$$E_q = v_1 F_y = v_1 w_y I_y. \quad (4.3)$$

Электродвижущая сила якоря по продольной оси пропорциональна поперечной м. д. с. якоря F_q , создаваемой током I_q :

$$E_d = v_2 F_q = v_2 w_a I_q. \quad (4.4)$$

В выражениях (4.3) и (4.4) w_a — число активных витков якоря ЭМУ; v_1 и v_2 — коэффициенты пропорциональности.

Подставив значения I_y и I_q из формул (4.3) и (4.4) соответственно в (4.1) и (4.2), получим передаточные функции двух каскадов усиления ЭМУ:

$$\frac{E_q}{U_y} = \frac{k_1}{1 + T_1 p}; \quad (4.5)$$

$$\frac{E_d}{E_q} = \frac{k_2}{1 + T_2 p}, \quad (4.6)$$

где $k_1 = \frac{v_1 w_y}{R_y}$ и $k_2 = \frac{v_2 w_a}{R_q}$ — передаточные коэффициенты соответственных каскадов усиления;

$T_1 = \frac{L_y}{R_y}$ и $T_2 = \frac{L_q}{R_q}$ — постоянные времени цепи обмотки управления и поперечной цепи якоря ЭМУ.

Таким образом, ЭМУ с поперечным полем может быть представлен в виде двух последовательных аperiodических звеньев направленного действия.

Исключив из выражений (4.5) и (4.6) E_q , получим передаточную функцию ЭМУ

$$W_3(p) = \frac{E_d}{U_y} = \frac{k_3}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

или

$$W_3(p) = \frac{E_d}{U_y} = \frac{k_3}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1},$$

где $k_3 = k_1 k_2$ — передаточный коэффициент (коэффициент усиления по напряжению) ЭМУ.

Для определения k_3 нет необходимости знать раздельно k_1 и k_2 , которые обычно неизвестны, а достаточно иметь угловой коэффициент характеристики холостого хода ЭМУ m_3 и параметры обмотки управления.

В установившемся режиме

$$m_3 = \frac{E_d}{F_y} = \frac{k_3 U_y}{F_y}, \text{ но } F_y = \frac{w_y U_y}{R_y},$$

следовательно,

$$m_3 = \frac{k_3 R_y}{w_y},$$

откуда

$$k_3 = \frac{w_y m_3}{R_y}.$$

Подставляя численные значения, будем иметь:

$$k_s = \frac{3200 \cdot 4,2}{2000} = 6,7;$$

$$T_1 = \frac{80}{2000} = 0,04 \text{ сек}, \quad T_2 = \frac{0,16}{1,23} = 0,13 \text{ сек};$$

$$W_s = \frac{E_d}{U_y} = \frac{6,7}{(1+0,04p)(1+0,13p)}$$

или

$$W_s(p) = \frac{E_d}{U_y} = \frac{6,7}{0,0052p^2 + 0,17p + 1}.$$

✓ **Пример 4.3.** Определение передаточной функции асинхронного двухфазного двигателя.

Передаточные коэффициенты двигателя по скорости и моменту соответственно равны: $\frac{1}{c_p} = 7,19 \frac{\text{рад/сек}}{\text{в}}$; $c_u = 1,2 \text{ Г} \cdot \text{см/в}$. Момент инерции ротора $J = 75 \cdot 10^{-4} \text{ Г} \cdot \text{см} \cdot \text{сек}^2$.

Уравнение двигателя

$$c_u U = M_c + c_e c_u \Omega$$

представляет собой уравнение моментов, в котором $c_u U$ — вращающий момент двигателя, уравниваемый внешним моментом сопротивления M_c и внутренним скоростным трением $c_e c_u \Omega$. Последнее обусловлено влиянием э. д. с. двигателя, пропорциональной угловой скорости Ω вращения ротора.

В общем случае внешний момент сопротивления складывается из динамического момента $M_{\text{дин}} = Jp\Omega$, момента внешнего скоростного трения $M_{\text{ск}} = k'_t \Omega$ и статического момента $M_{\text{ст}} = \text{const}$, т. е.

$$M_c = Jp\Omega + k'_t \Omega \pm M_{\text{ст}}.$$

В данном случае внешнее скоростное трение отсутствует. Величина статического момента, обусловленного наличием сухого трения, не зависит от скорости вращения ротора, но знак его меняется с изменением направления вращения. Поэтому $M_{\text{ст}}$, представляющий собой нелинейную разрывную функцию от Ω , не может быть учтен при составлении линейаризованного уравнения двигателя. Его влияние должно быть учтено при рассмотрении установившегося режима.

Полагая, в соответствии со сказанным, $k'_t = 0$ и $M_{\text{ст}} = 0$ и подставляя значение $M_c = Jp\Omega$ в исходное уравнение двигателя, будем иметь

$$c_u U = Jp\Omega + c_e c_u \Omega,$$

откуда получим передаточную функцию двигателя по скорости

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{c_e}}{1 + T_m p},$$

где $T_m = \frac{J}{c_e c_u}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя.

Так как $\Omega(p) = p\Theta_{дв}(p)$, где $\Theta_{дв}(p)$ — угол поворота вала двигателя, то передаточная функция двигателя по углу

$$\frac{\Theta_{дв}(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{c_e}}{(1 + T_m p) p}.$$

Подставляя численные значения величин, получим:

$$T_m = \frac{75 \cdot 10^{-4} \cdot 7,19}{1,2} = 0,045 \text{ сек};$$

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{7,19}{1 + 0,045p};$$

$$\frac{\Theta_{дв}(p)}{U(p)} = \frac{7,19}{(1 + 0,045p) p}.$$

✓ **Пример 4.4.** Определение передаточной функции асинхронного двухфазного двигателя с учетом момента инерции нагрузки и внешнего скоростного трения.

Вал двигателя через редуктор с передаточным числом $j_p = 362$ связан с механизмом, момент инерции которого $J_m = 0,0126 \text{ кг} \cdot \text{м} \cdot \text{сек}^2$. Внешнее скоростное трение характеризуется моментом сопротивления, равным $0,288 \text{ кг} \cdot \text{м}$ на 1 рад/сек скорости вращения вала нагрузки. Остальные параметры двигателя те же, что в примере 4.3.

Момент сопротивления на валу двигателя складывается из суммы динамического момента, обусловленного инерционностью ротора и нагрузки, и из момента внешнего скоростного трения. Приводя соответствующие моменты к валу двигателя, получим

$$M_c = \left(J + \frac{J_m}{j_p^2} \right) p \Omega + \frac{k_{т.н}}{j_p^2} \Omega.$$

Подставляя значение M_c в уравнение двигателя

$$c_u U = M_c + c_e c_u \Omega,$$

получим после преобразований передаточную функцию двигателя вместе с редуктором

$$\frac{\Omega_n(p)}{U(p)} = \frac{k_{дв}}{1 + T_m p},$$

где $k_{дв} = \frac{1}{c_e j_p} \frac{1}{1 + \frac{k_{т.н}}{j_p^2}}$ — передаточный коэффициент;

$T'_м = \frac{J + \frac{J_m}{j_p^2}}{k_t + \frac{k_{т.н}}{j_p^2}}$ — постоянная времени;

$k_t = c_e c_m$ — коэффициент внутреннего скоростного трения;

Ω_n — угловая скорость вала нагрузки.

Подставляя численные значения величин, будем иметь:

$$k_t = \frac{1,2}{7,19} = 0,167 \frac{\Gamma \cdot \text{см}}{\text{рад/сек}};$$

$$k_{дв} = \frac{\frac{7,19}{362}}{1 + \frac{0,288 \cdot 10^5}{362^2 \cdot 0,167}} = 0,00856 \frac{\text{рад/сек}}{\text{а}};$$

$$T'_м = \frac{75 \cdot 10^{-4} + \frac{0,0126 \cdot 10^5}{362^2}}{0,167 + \frac{0,288 \cdot 10^5}{362^2}} = 0,0443 \text{ сек};$$

$$\frac{\Omega_n(p)}{U(p)} = \frac{0,00856}{1 + 0,0443p}.$$

Пример 4.5. Определение передаточной функции двигателя постоянного тока с независимым возбуждением.

Параметры двигателя: постоянные двигателя по скорости и моменту соответственно — $c_e = 0,276 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$ и $c_m = 0,024 \text{ кгм/а}$; индуктивность и сопротивление цепи якоря $L_a = 0,024 \text{ гн}$ и $R_a = 3,2 \text{ ом}$; маховой момент якоря двигателя $GD^2 = 0,00495 \text{ кгм}^2$.

Передаточную функцию двигателя найдем из уравнений э. д. с.

$$U = L_a pI + R_a I + E_{дв}$$

и моментов

$$M_{вр} = M_c.$$

где U — напряжение, подведенное к якорю двигателя;

I — ток в якорю;

$E_{дв}$ — э. д. с. якоря двигателя;

$M_{вр}$ и M_c — соответственно вращающий момент и момент сопротивления на валу двигателя.

Электродвижущая сила двигателя пропорциональна скорости вращения якоря

$$E_{дв} = c_e \Omega,$$

а вращающий момент — току якоря

$$M_{вр} = c_m I.$$

Будем считать, что двигатель нагружен только динамическим моментом, обусловленным механической инерцией якоря, т. е.

$$M_c = Jp\Omega.$$

Подставив значение $E_{дв}$, $M_{вр}$ и M_c в приведенные выше уравнения и исключив из последних ток I , будем иметь

$$\frac{JL_{я}}{c_e c_m} p^2 \Omega + \frac{JR_{я}}{c_e c_m} p\Omega + \Omega = \frac{1}{c_e} U.$$

Умножив числитель и знаменатель коэффициента при $p^2\Omega$ в последнем уравнении на $R_{я}$, получим передаточную функцию двигателя по скорости

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{\frac{1}{c_e}}{T_{э} T_m p^2 + T_m p + 1},$$

где $T_{э} = \frac{L_{я}}{R_{я}}$ и $T_m = \frac{J \cdot R_{я}}{c_e c_m}$ — соответственно электромагнитная и электромеханическая постоянные времени двигателя.

Подставляя численные значения величин, получим:

$$T_{э} = \frac{0,024}{3,2} = 0,0075 \text{ сек};$$

$$J = \frac{0,00495 \cdot 10^8}{4 \cdot 9,81} = 12,6 \text{ Г см} \cdot \text{сек}^2;$$

$$T_m = \frac{12,6 \cdot 3,2}{0,276 \cdot 0,024 \cdot 10^8} = 0,0608 \text{ сек};$$

$$\frac{1}{c_e} = \frac{1}{0,276} = 3,62 \frac{\text{рад/сек}}{\text{в}};$$

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{3,62}{0,000456p^2 + 0,0608p + 1}.$$

В двигателях малой и средней мощности электромагнитные переходные процессы обычно затухают значительно быстрее механических вследствие малой величины $T_{э}$. Пренебрегая величиной $T_{э}$, получим упрощенную передаточную функцию двига-

теля, часто применяющуюся при расчете систем автоматического управления,

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{1}{T_m p + 1},$$

или в численном выражении

$$\frac{\Omega(p)}{U(p)} = \frac{3,62}{0,0608p + 1}.$$

Пример 4.6. Определение передаточной функции дифференцирующего трансформатора, нагруженного на обмотку управления электромашинного усилителя с поперечным полем.

Параметры трансформатора следующие: число витков, сопротивление и индуктивность первичной обмотки соответственно — $w_1=420$; $R_1=24$ ом, $L_1=1,15$ гн; то же вторичной обмотки — $w_2=2680$, $R_2=720$ ом, $L_2=47$ гн; индуктивность и сопротивление нагрузки — $L_n=110$ гн, $R_n=2200$ ом.

Передаточную функцию дифференцирующего трансформатора в данном случае удобнее определить как отношение тока нагрузки трансформатора к напряжению на его первичной обмотке.

Операторные уравнения для первичной и вторичной цепей трансформатора:

$$U_1 = L_1 p I_1 + R_1 I_1 + M p I_2, \quad (4.7)$$

$$0 = L'_2 p I_2 + R'_2 I_2 + M p I_1, \quad (4.8)$$

где U_1 — напряжение на зажимах первичной обмотки;

I_1 ; I_2 — соответственно токи в первичной и вторичной цепях трансформатора;

M — коэффициент взаимной индукции;

$$L'_2 = L_2 + L_n \text{ и } R'_2 = R_2 + R_n.$$

Влияние вторичного тока на первичную цепь в дифференцирующем трансформаторе обычно незначительно, поэтому последним членом в уравнении (4.7) можно пренебречь.

Исключив из уравнений (4.7) и (4.8) ток I_1 , получим

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{M p}{(L_1 p + R_1)(L'_2 p + R'_2)},$$

или, поделив числитель и знаменатель на $R_1 R'_2$,

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{\frac{M}{R_1 R'_2} p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)},$$

где

$$T_1 = \frac{L_1}{R_1} \text{ и } T_2 = \frac{L_2'}{R_2'}.$$

При относительно небольшом рассеянии между обмотками трансформатора можно считать

$$M^2 = L_1 L_2 \text{ и } \frac{L_2}{L_1} = \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 = k_1^2,$$

где k_1 — коэффициент трансформации.

Из двух последних зависимостей следует, что $M = k_1 L_1$, после чего передаточная функция дифференцирующего трансформатора

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{1}{R_2'} \frac{k_1 T_1 p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}. \quad (4.9)$$

Знак минус в последнем выражении не имеет практического значения, так как направление тока I_2 всегда можно изменить на обратное, поменяв между собой зажимы первичной или вторичной обмоток трансформатора.

Таким образом, дифференцирующий трансформатор может быть представлен в виде последовательно включенных звеньев направленного действия: одного чисто дифференцирующего и двух апериодических с постоянными времени T_1 и T_2 .

Если дифференцирующий трансформатор работает на нагрузку с большим активным сопротивлением, например, на вход лампового усилителя, то постоянная времени T_2 мала, и ею можно пренебречь, положив $T_2 = 0$. При этом передаточная функция

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{1}{R_2'} \cdot \frac{k_1 T_1 p}{1 + T_1 p},$$

т. е. дифференцирующий трансформатор может быть представлен также одним чисто дифференцирующим и одним апериодическим звеном.

Численные значения параметров $k_1 = \frac{2680}{420} = 6,4$; $R_2' = 720 + 2200 = 2920 \text{ ом}$; $L_2' = 47 + 110 = 157 \text{ гн}$; $T_1 = \frac{1,15}{24} = 0,048 \text{ сек}$ и $T_2 = \frac{157}{2920} = 0,0538 \text{ сек}$ подставим в формулу (4.9), тогда

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{1}{2920} \frac{6,4 \cdot 0,048 p}{(1 + 0,048 p)(1 + 0,0538 p)},$$

или

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{0,105 \cdot 10^{-3} p}{0,00258 p^2 + 0,102 p + 1}.$$

Пример 4.7. Определение передаточной функции дифференцирующего трансформатора типа ТС 144/10, нагруженного на активное сопротивление $R_n = 113 \text{ ом}$.

Параметры трансформатора: число витков, сопротивление и индуктивность первичной обмотки соответственно — $w_1 = 2620$, $R_1 = 48 \text{ ом}$, $L_1 = 12,5 \text{ гн}$; то же вторичной обмотки — $w_2 = 1970$, $R_2 = 27 \text{ ом}$, $L_2 = 7 \text{ гн}$; длительно допустимый ток первичной обмотки — $1,4 \text{ а}$, длительно допустимый ток вторичной обмотки — $1,8 \text{ а}$.

Обозначив $R'_2 = R_2 + R_n$, напомним уравнения трансформатора для первичной и вторичной цепей:

$$U_1 = L_1 p I_1 + R_1 I_1 + M p I_2; \quad (4.10)$$

$$0 = L_2 p I_2 + R'_2 I_2 + M p I_1. \quad (4.11)$$

В рассматриваемом случае ток вторичной обмотки I_2 может иметь большие значения, поэтому пренебрегать членом $M p I_2$ в уравнении (4.10), как это было сделано в примере 4.6, не следует*.

Передаточную функцию дифференцирующего трансформатора определим как отношение операторных изображений вторичного и первичного напряжений $\frac{U_2(p)}{U_1(p)}$.

Решим уравнение (4.10) относительно I_1 и подставим в (4.11). Принимая во внимание, что $U_2 = R_n I_2$, после преобразований будем иметь

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{\frac{R_n M}{R_1 R'_2} p}{\frac{L_1 L_2 - M^2}{R_1 R'_2} p^2 + \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L_2}{R'_2} \right) p + 1}. \quad (4.12)$$

Считая, что рассеяние между обмотками трансформатора мало, примем $M^2 = L_1 L_2$ и $M = k_1 L_1$, где $k_1 = \frac{w_2}{w_1}$ — коэффициент трансформации (см. пример 4.6).

Обозначив далее $\alpha = \frac{R_n}{R'_2}$, $T_1 = \frac{L_1}{R_1}$ и $T_2 = \frac{L_2}{R'_2}$, из выражения (4.12) получим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{\alpha k_1 T_1 p}{(1 + T p)}, \quad (4.13)$$

где $T = T_1 + T_2$.

* Как будет видно в дальнейшем, сохранение члена $M p I_2$ в случае чисто активной нагрузки не только не усложняет, но даже упрощает окончательный вид передаточной функции дифференцирующего трансформатора.

Таким образом, дифференцирующий трансформатор можно представить в виде последовательно включенных чисто дифференцирующего звена и апериодического звена с постоянной времени, равной сумме постоянных времени первичной и вторичной цепей трансформатора.

Численные значения параметров $R'_2 = 27 + 113 = 140 \text{ ом}$; $k_1 = \frac{1970}{2620} = 0,752$; $T_1 = \frac{12,5}{48} = 0,26 \text{ сек}$; $T_2 = \frac{7}{140} = 0,05 \text{ сек}$; $\alpha = \frac{113}{140} = 0,807$; $T = 0,26 + 0,05 = 0,31 \text{ сек}$ подставим в формулу (4.13), тогда

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{0,807 \cdot 0,752 \cdot 0,26p}{1 + 0,31p} = - \frac{0,158p}{1 + 0,31p}.$$

Знак минус в передаточной функции дифференцирующего трансформатора так же, как и в предыдущем примере, не имеет практического значения, поскольку полярность выходного напряжения U_2 зависит от порядка включения обмоток трансформатора.

Заметим, что если нагрузка дифференцирующего трансформатора обладает индуктивностью L_H (следовательно, полная индуктивность вторичной цепи — $L'_2 = L_2 + L_H$), то передаточная функция трансформатора, которую в этом случае целесообразно определить как отношение $\frac{I_2(p)}{U_1(p)}$, будет равна передаточной функции трех последовательных звеньев направленного действия: чисто дифференцирующего и двух апериодических.

Действительно, повторив сделанные выше выводы, получим

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{\frac{M}{R_1 R'_2} p}{\frac{L_1 L'_2 - M^2}{R_1 R'_2} p^2 + \left(\frac{L_1}{R_1} + \frac{L'_2}{R'_2} \right) p + 1}, \quad (4.14)$$

которая отличается от (4.12) отсутствием множителя R_H в числителе. В знаменатель вместо L_2 входит L'_2 .

Коэффициент при члене, содержащем p^2 в знаменателе, может быть записан как

$$\frac{L_1 L_2 - M^2 + L_1 L_H}{R_1 R'_2}.$$

Если теперь принять $M^2 = L_1 L_2$, то выражение (4.14) примет вид

$$\frac{I_2(p)}{U_1(p)} = - \frac{1}{R'_2} \cdot \frac{k_1 T_1 p}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2) p + 1}, \quad (4.15)$$

где

$$T_1 = \frac{L_1}{R_1}; \quad T_2 = \frac{L_2'}{R_2'};$$

$$T_n = \frac{L_n}{R_2}; \quad k_1 = \frac{w_2}{w_1}.$$

Можно показать, что корни ρ_1 и ρ_2 характеристического уравнения

$$T_1 T_n \rho^2 + (T_1 + T_2) \rho + 1 = 0 \quad (4.16)$$

будут вещественными и, следовательно, знаменатель формулы (4.15) можно записать в виде

$$(1 + T_1' \rho)(1 + T_2' \rho),$$

где

$$T_1' = -\frac{1}{\rho_1}; \quad T_2' = -\frac{1}{\rho_2}.$$

Корни уравнения (4.16) будут вещественны при условии

$$(T_1 + T_2)^2 > 4T_1 T_n. \quad (4.17)$$

Заменим в формуле (4.17) T_n на T_2 . При этом выражение (4.17) легко преобразуется в условие

$$(T_1 - T_2)^2 > 0,$$

выполняемое при любых значениях T_1 и T_2 . Тем более будет удовлетворяться условие (4.17), поскольку $T_2 > T_n$.

Таким образом, дифференцирующий трансформатор может быть представлен последовательным включением чисто дифференцирующего звена и двух апериодических с постоянными времени T_1 и T_2 .

Пример 4.8. Определение передаточных функций пассивных дифференцирующих контуров (рис. 4.1). Примем $R_1 = 400$ ком, $R_2 = 133$ ком, $C = 0,1$ мкф.

Рассмотрим контур, изображенный на рис. 4.1, а. Электрические процессы в контуре описываются уравнениями:

$$U_1 = R_1 I_1 + R_2 I_2, \quad (4.18)$$

$$R_1 I_1 = \frac{I_C}{Cp}, \quad (4.19)$$

$$I_2 = I_1 + I_C. \quad (4.20)$$

Определим из уравнения (4.19) ток I_C и подставим в (4.20), откуда получим

$$I_1 = \frac{1}{1 + R_1 Cp} I_2.$$

Подставив значение I_1 в выражение (4.18) и принимая во внимание, что $U_2 = R_2 I_2$, будем иметь

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{R_2 + R_2 R_1 C p}{R_1 + R_2 + R_2 R_1 C p}. \quad (4.21)$$

Разделив числитель и знаменатель формулы (4.21) на $R_1 + R_2$ и обозначив

$$k_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}; \quad \tau = R_1 C; \quad T = k_0 \tau,$$

получим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{k_0 + T p}{1 + T p},$$

или

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = k_0 \frac{1 + \tau p}{1 + T p}.$$

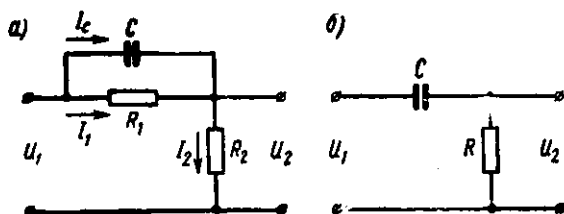


Рис. 4.1. Пассивные дифференцирующие контуры

Из полученных выражений видно, что выходное напряжение корректирующего контура (рис. 4.1, а) содержит составляющие, пропорциональные входному сигналу и его первой производной. Контур обладает запаздыванием, обусловленным наличием в знаменателе члена Tp , причем $T < \tau$, так как $k_0 < 1$.

При малых значениях T иногда пренебрегают собственным запаздыванием контура и считают, что

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} \approx k_0 (1 + \tau p).$$

Подставляя численные значения параметров контура

$$k_0 = \frac{133}{400 + 133} = 0,25, \quad \tau = 400 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 = 0,04 \text{ сек};$$

$$T = 0,25 \cdot 0,04 = 0,01 \text{ сек},$$

получим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = 0,25 \frac{1 + 0,04p}{1 + 0,01p}.$$

Если принять $R_1 = \infty$, то получим контур, изображенный на рис. 4.1, б, передаточную функцию которого определим из выражения (4.21), поделив его числитель и знаменатель на R_1 и полагив $R_1 = \infty$, $R_2 = R$. В результате будем иметь

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{T_0 p}{1 + T_0 p},$$

т. е. передаточную функцию реального дифференцирующего звена направленного действия, где $T_0 = RC$.

Из полученного выражения видно, что выходное напряжение контура, изображенного на рис. 4.1, б, пропорционально только первой производной от входного напряжения.

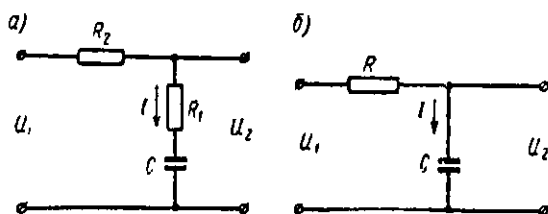


Рис. 4.2. Пассивные интегрирующие контуры

Учитывая численные значения параметров, получим

$$T_0 = 133 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 = 0,0133 \text{ сек};$$

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{0,0133p}{1 + 0,0133p}.$$

Пример 4.9. Определение передаточных функций пассивных интегрирующих контуров (рис. 4.2).

Для рис. 4.2, а примем $R_1 = 160 \text{ ком}$; $R_2 = 800 \text{ ком}$; $C = 5 \text{ мкф}$. Ток в контуре

$$I = \frac{U_1}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cp}}. \quad (4.22)$$

Выходное напряжение контура

$$U_2(p) = \left(R_1 + \frac{1}{Cp}\right) I. \quad (4.23)$$

Исключив из уравнений (4.22) и (4.23) ток I , получим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 + R_1 Cp}{1 + (R_1 + R_2) Cp}. \quad (4.24)$$

Умножив и разделив коэффициент при p в знаменателе на R_1 , обозначим

$$\alpha = \frac{R_1 + R_2}{R_1}; \quad \tau = R_1 C; \quad T_1 = \alpha \tau.$$

В результате получим передаточную функцию контура

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 + \tau p}{1 + T_1 p}. \quad (4.25)$$

Из полученного выражения видно, что выходное напряжение контура, обладающего запаздыванием из-за наличия в знаменателе члена $T_1 p$, содержит составляющие, пропорциональные входному напряжению и его первой производной. Однако в отличие от дифференцирующего контура, рассмотренного в примере 4.8, здесь всегда имеет место $\tau < T_1$, так как $\alpha > 1$.

В ограниченном интервале времени можно считать $T_1 p \gg 1$. В этом случае, пренебрегая единицей в знаменателе формулы (4.25), будем иметь

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{T_1 p},$$

откуда следует, что выходное напряжение контура в ограниченном интервале времени, зависящем от величины T_1 , содержит составляющие, пропорциональные входному напряжению и его интегралу. Поэтому такой контур носит название *интегрирующего контура*.

Подстановка численных значений параметров контура $\alpha = \frac{160 + 800}{160} = 6$, $\tau = 160 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 0,8 \text{ сек}$. $T_1 = 6 \cdot 0,8 = 4,8 \text{ сек}$ дает

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 + 0,8p}{1 + 4,8p}.$$

Корректирующий контур, изображенный на рис. 4.2, б, можно получить, приняв в рассмотренном выше контуре (рис. 4.2, а) $R_1 = 0$ и $R_2 = R$. При этом из уравнения (4.24) получим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{1 + T p},$$

где $T = RC$.

Полученное выражение представляет собой передаточную функцию апериодического звена направленного действия с передаточным коэффициентом, равным единице.

С учетом численных значений параметров контура имеем:

$$T = 800 \cdot 10^{-3} \cdot 5 = 4 \text{ сек}.$$

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1}{1 + 4p}.$$

Пример 4.10. Определение передаточной функции пассивного интегро-дифференцирующего контура (рис. 4.3).

Примем следующие значения параметров: $R_1=22,8 \text{ ком}$; $R_2=33 \text{ ком}$; $R_3=1 \text{ Мом}$; $R_4=667 \text{ ком}$; $C_1=20 \text{ мкф}$, $C_2=0,1 \text{ мкф}$.

Рассматриваемый контур носит название пассивного интегро-дифференцирующего, поскольку содержит в себе элементы как дифференцирующего, так и интегрирующего контуров (см. примеры 4.8 и 4.9).

Передаточная функция контура [Л. 14]

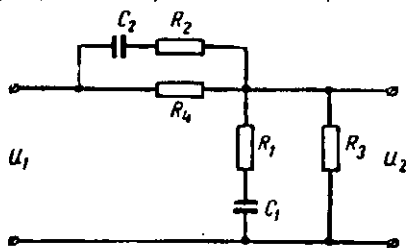


Рис. 4.3. Пассивный интегро-дифференцирующий контур

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{(T_1 p + 1)(T_{24} p + 1)}{\left(T_1 T_{24} + \frac{R_4}{R_3} T_{13} T_2\right) p^2 + \left[T_1 + T_{24} + \frac{R_4}{R_3} (T_{13} + T_2)\right] p + 1 + \frac{R_4}{R_3}}, \quad (4.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} T_1 &= C_1 R_1; & T_{24} &= C_2 (R_2 + R_4); \\ T_{13} &= C_1 (R_1 + R_3); & T_2 &= C_2 R_2. \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Формула (4.26) может быть представлена в виде

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = k_0 \frac{(1 + T_a p)(1 + T_b p)}{(1 + T_a p)(1 + T_b p)}, \quad (4.28)$$

где

$$k_0 = \frac{R_3}{R_4 + R_3},$$

что является более удобным при расчете систем автоматического управления частотными методами.

Для определения входящих в формулу (4.28) значений T_a и T_b , в [Л. 14] приводятся следующие формулы при $T_a > T_b$:

$$T_a = \frac{\beta}{2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\beta^2}} \right), \quad (4.29)$$

$$T_b = \frac{\beta}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\beta^2}} \right), \quad (4.30)$$

где

$$\alpha = k_0 \left(T_1 T_{24} + \frac{R_4}{R_3} T_{13} T_2 \right), \quad (4.31)$$

$$\beta = k_0 \left[T_1 + T_{24} + \frac{R_4}{R_3} (T_{13} + T_2) \right]. \quad (4.32)$$

Если (как часто бывает) $\beta^2 > 4\alpha$, то можно считать, что

$$T_b \approx \frac{\alpha}{\beta} \text{ и } T_a \approx \beta - \frac{\alpha}{\beta}. \quad (4.33)$$

Подставив численные значения параметров контура в выражения (4.27), будем иметь:

$$\begin{aligned} T_1 &= 22,8 \cdot 10^{-3} \cdot 20 = 0,455 \text{ сек}; \\ T_{21} &= (33 \cdot 10^{-3} + 667 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,1 = 0,07 \text{ сек}, \\ T_{13} &= (22,8 \cdot 10^{-3} + 1) \cdot 20 = 20,5 \text{ сек}; \\ T_2 &= 33 \cdot 10^{-3} \cdot 0,1 = 0,0033 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Определив

$$k_0 = \frac{1 \cdot 10^3}{667 + 10^3} = 0,6,$$

вычислим α и β [по формулам (4.31) и (4.32)]:

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,6 \left(0,455 \cdot 0,07 + \frac{667 \cdot 10^{-3}}{1} \cdot 20,5 \cdot 0,0033 \right) = 0,046 \text{ сек}^2; \\ \beta &= 0,6 \left[0,455 + 0,07 + \frac{667 \cdot 10^{-3}}{1} (20,5 + 0,0033) \right] = 8,5 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Так как $\beta^2 = 8,5^2 \gg 4\alpha = 4 \cdot 0,046$, то

$$T_b \approx \frac{0,046}{8,5} \approx 0,0054 \text{ сек}, \quad T_a \approx 8,5 - \frac{0,046}{8,5} \approx 8,5 \text{ сек}.$$

Подставив найденные величины в (4.28), получим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = 0,6 \frac{(1 + 0,455p)(1 + 0,07p)}{(1 + 8,5p)(1 + 0,0054p)}.$$

Пример 4.11. Подбор параметров структурной схемы.

В структурной схеме (рис. 4.4, а) необходимо подобрать величины коэффициента жесткой отрицательной обратной связи $k_{0.c}$, постоянной времени T_2 и передаточного коэффициента k_2 так, чтобы в динамическом отношении эта схема была эквивалентна колебательному звену (рис. 4.4, б), при следующих значениях параметров: $k_1 = 7$, $T_1 = 0,52 \text{ сек}$, $k = 46,1 \frac{1}{\text{сек}^2}$; $b = 3,29 \frac{1}{\text{сек}}$; $c = 21,1 \frac{1}{\text{сек}^2}$.

Передаточная функция разомкнутой системы (рис. 4.4, а)

$$W(p) = \frac{k_1 k_2 k_{0.c}}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{\frac{k_1}{1+T_1 p} \cdot \frac{k_2}{1+T_2 p}}{1+W(p)}.$$

Подставив в последнее выражение значение $W(p)$, после преобразования получим

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{\frac{k_1 k_2}{T_1 T_2}}{p^2 + \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}\right)p + \frac{1+k_1 k_2 k_{0.c}}{T_1 T_2}}.$$

Приравнявая соответствующие коэффициенты в последнем выражении и в передаточной функции колебательного звена, получим систему из трех уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1 k_2}{T_1 T_2} &= k; \\ \frac{1+k_1 k_2 k_{0.c}}{T_1 T_2} &= c; \\ \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} &= b. \end{aligned} \right\}$$

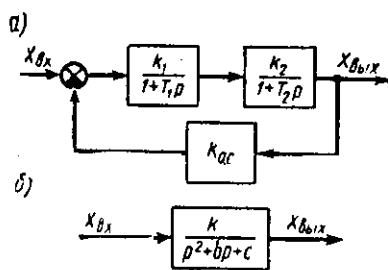


Рис. 4.4. Структурные схемы системы с жесткой обратной связью и эквивалентного колебательного звена

Из третьего уравнения найдем значение постоянной времени

$$T_2 = \frac{1}{b - \frac{1}{T_1}} = \frac{1}{3,29 - \frac{1}{0,52}} = 0,73 \text{ сек},$$

а из первого — значение передаточного коэффициента

$$k_2 = \frac{k T_1 T_2}{k_1} = \frac{46,1 \cdot 0,52 \cdot 0,73}{7} = 2,5,$$

после чего из второго уравнения определим величину коэффициента обратной связи

$$k_{0.c} = \frac{c T_1 T_2 - 1}{k_1 k_2} = \frac{21,1 \cdot 0,52 \cdot 0,73 - 1}{7 \cdot 2,5} = 0,4.$$

Пример 4.12. Определение передаточной функции пассивного корректирующего контура (рис. 4.5).

Примем следующие значения параметров: $R_1 = 1,8 \text{ ком}$; $C_1 = 20 \text{ мкф}$; $R_2 = 1 \text{ ком}$; $C_2 = 8 \text{ мкф}$; $R_3 = 1 \text{ ком}$.

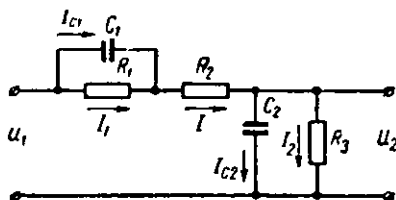


Рис. 4.5. Пассивный корректирующий контур

Для схемы, приведенной на рис. 4.5, имеем следующую систему уравнений:

$$U_1 = R_1 I_1 + R_2 I + R_3 I_2, \quad (4.34)$$

$$R_1 I_1 = \frac{I_{C1}}{C_1 p}, \quad (4.35)$$

$$R_3 I_2 = \frac{I_{C2}}{C_2 p}, \quad (4.36)$$

$$I_1 + I_{C1} = I_2 + I_{C2} = I. \quad (4.37)$$

Определим из уравнений (4.35) и (4.36) I_{C1} и I_{C2} и подставим их значения в формулу (4.37), откуда будем иметь:

$$I = (1 + R_3 C_2 p) I_2 \text{ и } I_1 = \frac{1 + R_3 C_2 p}{1 + R_1 C_1 p} I_2.$$

Подставив найденные значения I и I_1 в уравнение (4.34) и принимая во внимание, что $U_2 = R_3 I_2$, после преобразований получим

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = \frac{1 + T_{11} p}{\frac{R_2}{R_1 + R_2 + R_3} T_{11} T_{23} p^2 + \frac{(R_2 + R_3) T_{11} + (R_1 + R_2) T_{23}}{R_1 + R_2 + R_3} p + 1}, \quad (4.38)$$

где

$$k_{01} = \frac{R_3}{R_1 + R_2 + R_3}; \quad T_{11} = C_1 R_1; \quad T_{23} = C_2 R_3.$$

Приравняв нулю знаменатель выражения (4.38), получим характеристическое уравнение. Если оно имеет вещественные корни p_1 и p_2 , то выражение (4.38) может быть представлено в виде

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = k_{01} \frac{1 + T_{11} p}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}, \quad (4.39)$$

где

$$T_1 = -\frac{1}{p_1}; \quad T_2 = -\frac{1}{p_2}. \quad (4.40)$$

Условие вещественности корней знаменателя формулы (4.38) может быть записано как

$$[T_{11}(R_2 + R_3) + T_{23}(R_1 + R_2)]^2 > 4T_{11}T_{23}R_2(R_1 + R_2 + R_3).$$

Раскрыв скобки, будем иметь

$$T_{11}^2(R_2 + R_3)^2 + 2T_{11}T_{23}(R_1R_2 + R_1R_3 + R_2^2 + R_2R_3) + T_{23}^2(R_1 + R_2)^2 - 4T_{11}T_{23}(R_1R_2 + R_2^2 + R_2R_3) > 0.$$

Прибавив к левой части неравенства разность $4T_{11}T_{23}R_1R_3 - 4T_{11}T_{23}R_1R_3$, равную нулю, получим условие вещественности корней

$$[T_{11}(R_2 + R_3) - T_{23}(R_1 + R_2)]^2 + 4T_{11}T_{23}R_1R_3 > 0,$$

которое всегда выполняется, так как входящие в него параметры контура существенно положительные числа.

Следовательно, передаточная функция рассматриваемого корректирующего контура всегда может быть выражена в виде уравнения (4.39). При этом должны выполняться условия:

$$T_1T_2 = \frac{R_2T_{11}T_{23}}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (4.41)$$

$$T_1 + T_2 = \frac{T_{11}(R_2 + R_3) + T_{23}(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3}, \quad (4.42)$$

которые легко получить, раскрыв знаменатель выражения (4.39) и приравняв соответствующие коэффициенты в выражениях (4.38) и (4.39).

Определение постоянных времени T_1 и T_2 в явной форме через параметры контура, записанные в общем виде, затруднительно. Поэтому обычно прибегают к численному решению характеристического уравнения. Подставив численные значения параметров контура, найдем

$$k_{01} = \frac{1}{1,8 + 1 + 1} = 0,263;$$

$$T_{11} = 20 \cdot 1,8 \cdot 10^{-3} = 0,036 \text{ сек}; \quad T_{23} = 8 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 0,008 \text{ сек}.$$

Характеристическое уравнение, согласно формуле (4.38), получит вид:

$$\frac{1}{1,8 + 1 + 1} 0,036 \cdot 0,008 p^2 + \frac{(1 + 1) 0,036 + (1,8 + 1) 0,008}{1,8 + 1 + 1} p + 1 = 0$$

или

$$p^2 + 328p + 13200 = 0.$$

Корни уравнения будут:

$$p_1 = -47; \quad p_2 = -281.$$

Постоянные времени:

$$T_1 = -\frac{1}{-47} = 0,0213 \text{ сек}; \quad T_2 = -\frac{1}{-281} = 0,00356 \text{ сек}.$$

Передаточная функция корректирующего контура

$$\frac{U_2(p)}{U_1(p)} = 0,263 \frac{1 + 0,036p}{(1 + 0,0213p)(1 + 0,00356p)}.$$

§ 4.3. Примеры определения передаточных функций систем автоматического управления

Пример 4.13. Составление операторного уравнения системы автоматического регулирования напряжения генератора постоянного тока.

Для системы регулирования, принципиальная схема которой изображена на рис. 1.4, найдем операторное изображение отклонения регулируемой величины от заданного значения под действием внешнего возмущения — изменяющегося тока нагрузки.

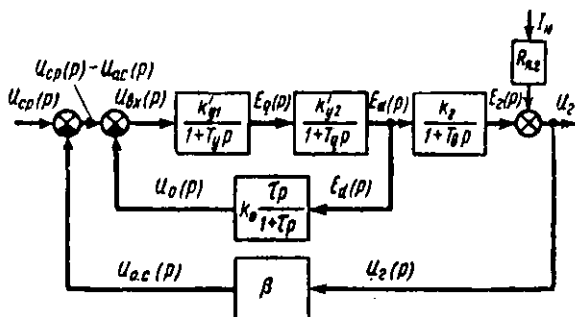


Рис. 4.6. Структурная схема системы автоматического регулирования напряжения генератора

Параметры системы: коэффициент усиления электронного усилителя $k_{y1}=6,1$; передаточный коэффициент ЭМУ по напряжению $k_{y2}=4,1$; передаточный коэффициент генератора по напряжению $k_r = \frac{E_r}{U_{в.г}} = 4$; коэффициент обратной связи $\beta = \frac{U_{о.с}}{U_r} = 0,4$; постоянная времени цепи управляющей обмотки ЭМУ $T_y=0,008$ сек; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_q=0,04$ сек; постоянная времени цепи возбуждения генератора $T_g=0,4$ сек; сопротивление якоря генератора $R_{яг}=0,222$ ом. Параметры стабилизирующего контура: $R_c=10$ ком; $C=0,2$ мкф; $k_0=\alpha k_{01}=0,2$; $\alpha = \frac{R_b}{R_b + R_d}$ (R_b и R_d — сопротивления обмотки возбуждения генератора и продольной цепи якоря ЭМУ); k_{01} — коэффициент, характеризующий положение движка на делителе R_c .

Разделим систему автоматического регулирования на звенья направленного действия (см. пример 2.1) и, принимая во внимание полученные в предыдущем параграфе передаточные функции генератора ЭМУ и пассивного дифференцирующего контура (см. примеры 4.1, 4.2 и 4.8), составим структурную схему системы регулирования (рис. 4.6).

На структурной схеме: передаточный коэффициент k'_{y1} характеризует общее усиление электронного усилителя и первого каскада ЭМУ, k'_{y2} — коэффициент усиления второго каскада ЭМУ (очевидно, что $k'_{y1} k'_{y2} = k_{y1} k_{y2}$), $\tau = R_c C$.

Для составления операторного уравнения системы регулирования (что равносильно определению соответствующей передаточной функции замкнутой системы) необходимо сначала найти передаточную функцию разомкнутой системы $W(p)$. С этой целью заменим участок прямой цепи структурной схемы, охваченный местной обратной связью (см. пример 2.1) эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{\frac{k'_{y1}}{1 + T_y p} \cdot \frac{k'_{y2}}{1 + T_q p}}{1 + \frac{k'_{y1}}{1 + T_y p} \cdot \frac{k'_{y2}}{1 + T_q p} k_0 \frac{\tau p}{1 + \tau p}} \quad (4.43)$$

Обозначив $k_y = k'_{y1} k'_{y2}$, после преобразования получим

$$W_1(p) = \frac{k_y (1 + \tau p)}{\tau T_y T_q p^3 + (\tau T_y + \tau T_q + T_y T_q) p^2 + [T_y + T_q + (1 + k_y k_0) \tau] p + 1} \quad (4.44)$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = W_1(p) \frac{k_r}{1 + T_b p} = \beta.$$

После подстановки значения $W_1(p)$ и ряда преобразований

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (4.45)$$

где

$$\begin{aligned} A(p) &= k_y k_r \beta (1 + \tau p); \\ B(p) &= \tau T_y T_q T_b p^4 + (\tau T_y T_q + \tau T_y T_b + \tau T_q T_b + T_y T_q T_b) p^3 + \\ &+ [\tau T_y + \tau T_q + T_y T_q + T_y T_b + T_q T_b + (1 + k_y k_0) \tau T_b] p^2 + \\ &+ [T_y + T_q + T_b + (1 + k_y k_0) \tau] p + 1. \end{aligned}$$

Номинальное напряжение генератора в операторной форме

$$U_{г.о}(p) = \frac{\mu(p)}{1 + W(p)} U_{ср}(p) - \frac{R_{я.г}}{1 + W(p)} I_o(p), \quad (4.46)$$

где $\mu(p) = W_1(p) \frac{k_r}{1 + T_b p}$ — передаточная функция прямой цепи системы.

В выражении (4.46) первый член представляет собой э. д. с. генератора, а второй — падение напряжения в обмотке якоря

генератора при номинальном токе нагрузки I_0 . При произвольном значении тока нагрузки I_n изображение регулируемой величины — напряжения генератора U_r — будет отличаться от $U_{r.0}$ за счет дополнительного падения напряжения в якоре, обусловленного изменением тока нагрузки на величину ΔI от своего номинального значения:

$$U_r(p) = \frac{\mu(p)}{1+W(p)} U_{cp}(p) - \frac{R_{я.г}}{1+W(p)} I_0(p) - \frac{R_{я.г}}{1+W(p)} \Delta I(p). \quad (4.47)$$

Соответствующее отклонение напряжения генератора от номинального значения можно определить как разность [вычитая уравнение (4.47) из (4.46)]

$$\Delta U_r(p) = U_{r.0}(p) - U_r(p) = \frac{R_{я.г}}{1+W(p)} \Delta I(p). \quad (4.48)$$

Подставив значение $W(p)$ из выражения (4.45) в (4.48), после преобразований получим

$$\Delta U_r(p) = \frac{b_0 p^4 + b_1 p^3 + b_2 p^2 + b_3 p + b_4}{a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4} R_{я.г} \Delta I, \quad (4.49)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 = T_y T_q T_n \tau; \\ a_1 &= b_1 = T_y T_q T_n + T_y T_q \tau + T_y T_n \tau + T_q T_n \tau; \\ a_2 &= b_2 = T_y T_q + T_y T_n + T_q T_n + T_y \tau + T_q \tau + \\ &\quad + (1 + k_y k_0) T_n \tau; \\ a_3 &= T_y + T_q + T_n + (1 + k_y k_0 + K) \tau; \\ b_3 &= T_y + T_q + T_n + (1 + k_y k_0) \tau; \\ b_4 &= 1; \quad a_4 = 1 + K. \end{aligned} \right\} \quad (4.50)$$

Здесь $K = k_y k_r \beta$ — коэффициент усиления системы регулирования.

Выражение (4.49) представляет собой операторное уравнение системы автоматического регулирования напряжения генератора с нулевыми начальными условиями, разрешенное относительно регулируемой величины.

Для получения уравнения в численном виде необходимо задаться законом изменения возмущающего воздействия. Пусть, например, ток нагрузки увеличивается скачком на 45 а. Тогда

$$\Delta I(p) = \frac{45}{p}. \quad (4.51)$$

Подставляя численные значения параметров системы в выражения (4.50), будем иметь:

$$k_y = k_{y1}' k_{y2}' = k_{y1} k_{y2} = 6,1 \cdot 4,1 = 25;$$

$$\begin{aligned}
K &= 25 \cdot 4 \cdot 0,4 \cdot 40; \quad \tau = 10 \cdot 10^{-3} \cdot 0,2 = 0,002 \text{ сек}; \\
a_0 &= b_0 = 0,008 \cdot 0,04 \cdot 0,4 \cdot 0,002 = 0,256 \cdot 10^{-6} \text{ сек}^4; \\
a_1 &= b_1 = 0,008 \cdot 0,04 \cdot 0,4 + 0,008 \cdot 0,04 \cdot 0,002 + 0,008 \cdot 0,4 \cdot 0,002 + \\
&\quad + 0,04 \cdot 0,4 \cdot 0,002 = 0,167 \cdot 10^{-3} \text{ сек}^3; \\
a_2 &= b_2 = 0,008 \cdot 0,04 + 0,008 \cdot 0,4 + 0,04 \cdot 0,4 + 0,008 \cdot 0,002 + \\
&\quad + 0,04 \cdot 0,002 + (1 + 25 \cdot 0,2) 0,4 \cdot 0,002 = 0,0244 \text{ сек}^2; \\
a_3 &= 0,008 + 0,04 + 0,4 + (1 + 25 \cdot 0,2 + 40) 0,002 = 0,54 \text{ сек}; \\
a_4 &= 1 + 40 = 41; \\
b_3 &= 0,008 + 0,04 + 0,4 + (1 + 25 \cdot 0,2) 0,002 = 0,46 \text{ сек}; \\
b_4 &= 1.
\end{aligned}$$

Согласно формуле (4.49),

$$\begin{aligned}
\Delta U_r(p) &= \frac{0,256 \cdot 10^{-6} p^4 + 0,167 \cdot 10^{-3} p^3 + 0,0244 p^2 + 0,46 p + 1}{0,256 \cdot 10^{-6} p^4 + 0,167 \cdot 10^{-3} p^3 + 0,0244 p^2 + 0,54 p + 41} \times \\
&\quad \times 0,222 \frac{45}{p},
\end{aligned}$$

или

$$\Delta U_r(p) = \frac{2,56 \cdot 10^{-6} p^4 + 1,67 \cdot 10^{-3} p^3 + 0,244 p^2 + 4,6 p + 10}{(0,256 \cdot 10^{-6} p^4 + 0,167 \cdot 10^{-3} p^3 + 0,0244 p^2 + 0,54 p + 41) p}.$$

Пример 4.14. Определение операторных изображений выходной величины и ошибки следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем при единичном входном воздействии.

Принципиальная схема следящей системы изображена на рис. 1.6.

Параметры системы: передаточный коэффициент преобразующего устройства (дифференциала вместе с потенциометром) $k_c = 1 \text{ в/град}$; коэффициент усиления лампового усилителя $k_y = 64$; скоростной коэффициент двигателя $c_e = 0,35 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,075 \text{ сек}$; передаточное число редуктора $j_p = 408$.

Разделим следящую систему на звенья направленного действия (см. пример 2.2) в соответствии со структурной схемой, изображенной на рис. 4.7, а.

Используя свойство последовательного включения звеньев направленного действия, преобразуем структурную схему к виду, приведенному на рис. 4.7, б, где принято $D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta(p)} = \frac{D}{(1 + T_m p) p}.$$

Операторные изображения выходной величины и ошибки следящей системы соответственно получим, используя формулы (2.16) и (2.17):

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D}{D + (1 + T_m p) p} \Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{D}{T_m p^2 + p + D} \Theta_{\text{вх}}(p),$$

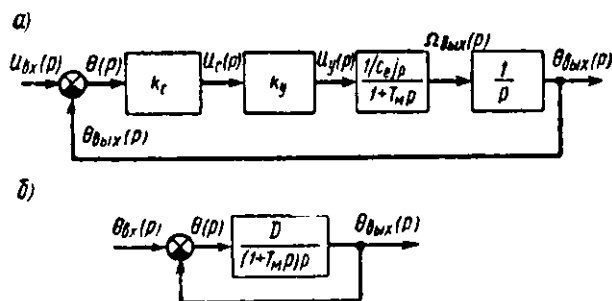


Рис. 4.7. Структурная схема следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем

при

$$\Theta_{\text{вх}}(t) = 1(t) \doteq \frac{1}{p};$$

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D}{(T_m p^2 + p + D) p};$$

$$\Theta(p) = \frac{(1 + T_m p) p}{D + (1 + T_m p) p} \Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{T_m p + 1}{T_m p^2 + p + D} p \Theta_{\text{вх}}(p)$$

или

$$\Theta(p) = \frac{T_m p + 1}{T_m p^2 + p + D}.$$

Подставив численные значения параметров следящей системы, будем иметь:

$$D = \frac{1 \cdot 57,3 \cdot 64}{0,35 \cdot 408} = 25,7 \text{ 1/сек};$$

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{25,7}{(0,075 p^2 + p + 25,7) p};$$

$$\Theta(p) = \frac{0,075 p + 1}{0,075 p^2 + p + 25,7}.$$

Пример 4.15. Определение операторных изображений выходной величины и ошибки следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем при различных входных воздействиях.

Найдем $\Theta_{\text{вых}}(p)$ и $\Theta(p)$ следящей системы, рассмотренной в примере 4.14, при входных воздействиях, изменяющихся по законам: 1) линейной функции $\Theta_{\text{вх}}(t) = \Omega t$, где $\Omega = 40$ град/сек; 2) квадратичной функции $\Theta_{\text{вх}}(t) = \frac{\varepsilon}{2} t^2$, где $\varepsilon = 90$ град/сек²; 3) синусной функции $\Theta_{\text{вх}}(t) = A \sin bt$, где $b = 6,28$ рад/сек и $A = 1$.

В примере 4.14 были получены общие выражения:

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D}{T_m p^2 + p + D} \Theta_{\text{вх}}(p),$$

$$\Theta(p) = \frac{T_m p + 1}{T_m p^2 + p + D} p \Theta_{\text{вх}}(p).$$

При линейной входной функции имеем:

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D\Omega}{(T_m p^2 + p + D) p^2},$$

$$\Theta(p) = \frac{T_m p + 1}{T_m p^2 + p + D} \cdot \frac{\Omega}{p},$$

или в численном виде:

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{25,7 \cdot 40}{(0,075p^2 + p + 25,7) p^2} = \frac{1030}{(0,075p^2 + p + 25,7) p^2}$$

и

$$\Theta(p) = \frac{0,075p + 1}{0,075p^2 + p + 25,7} \cdot \frac{40}{p} = \frac{3p + 40}{(0,075p^2 + p + 25,7) p}.$$

При квадратичной входной функции $\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{\varepsilon}{p^3}$ имеем:

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D\varepsilon}{(T_m p^2 + p + D) p^3},$$

$$\Theta(p) = \frac{T_m p + 1}{T_m p^2 + p + D} \frac{\varepsilon}{p^2},$$

или в численном виде:

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{25,7 \cdot 90}{(0,075p^2 + p + 25,7) p^3} = \frac{2320}{(0,075p^2 + p + 25,7) p^3}$$

и

$$\Theta(p) = \frac{0,075p + 1}{0,075p^2 + p + 25,7} \cdot \frac{90}{p^2} = \frac{6,75p + 90}{(0,075p^2 + p + 25,7) p^2}.$$

При синусной входной функции, которая в операторном виде запишется так:

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{Ab}{p^2 + b^2},$$

имеем:

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{ADb}{(T_m p^2 + p + D)(p^2 + b^2)},$$

$$\Theta(p) = \frac{T_m p + 1}{T_m p^2 + p + D} \cdot \frac{Apb}{p^2 + b^2},$$

или в численном виде:

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{1 \cdot 25,7 \cdot 6,28}{(0,075p^2 + p + 25,7)(p^2 + 6,28^2)} =$$

$$= \frac{161}{(0,075p^2 + p + 25,7)(p^2 + 6,28^2)},$$

$$\Theta(p) = \frac{0,075p + 1}{0,075p^2 + p + 25,7} \cdot \frac{1 \cdot p \cdot 6,28}{p^2 + 6,28^2} =$$

$$= \frac{0,471p^2 + 6,28p}{(0,075p^2 + p + 25,7)(p^2 + 6,28^2)}.$$

Пример 4.16. Определение передаточных функций по выходной величине и ошибке следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем и жесткой отрицательной обратной связью по скорости (рис. 1.8).

Примем следующие значения параметров системы: скоростной коэффициент двигателя $c_e = 0,22 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; коэффициент усиления усилителя $k_y = 1100$, передаточное число редуктора $j_p = 312$; передаточный коэффициент потенциометрического преобразующего устройства $k_c = 1,6 \text{ в/град}$; коэффициент жесткой обратной связи $k_0 = 0,011$; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,1 \text{ сек}$.

Составим структурную схему следящей системы (рис. 4.8). На схеме передаточный коэффициент звена местной обратной

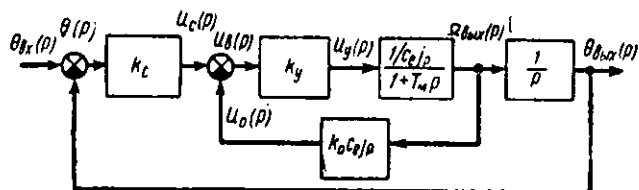


Рис. 4.8. Структурная схема следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем и жесткой обратной связью по скорости

связи, осуществляемой в следящей системе при помощи тахогенератора, представлен произведением $k_0 c_e j_p$. Наличие в последнем множителя j_p вызвано тем, что для простоты изображения на структурной схеме не выделено звено, соответствующее механическому редуктору. Так как c_e — скоростной коэффициент исполнительного двигателя, то безразмерный коэффициент k_0 характеризует соотношение между скоростью вращения ротора исполнительного двигателя и э. д. с. тахогенератора, наводимой в управляющей обмотке (это соотношение может быть различным как по причине разных конструктивных данных машин, так и вследствие применения специальных устройств, например переменного сопротивления в обмотке возбуждения тахогенератора или делителя напряжения в цепи местной обратной связи, не показанных на рис. 1.8). Целесообразность такого обозначения передаточного коэффициента звена местной обратной связи заключается в упрощении передаточной функции и уравнений следящей системы.

Выделим на структурной схеме следящей системы участок прямой цепи, охваченный жесткой обратной связью по скорости, который можно представить одним эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{\frac{1}{k_y \frac{c_e j_p}{1 + T_m p}}}{\frac{1}{1 + k_y \frac{c_e j_p}{1 + T_m p} k_0 c_e j_p}} = \frac{\frac{k_y}{c_e j_p}}{T_m p + 1 + k_y k_0}.$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D}{(T_m p + 1 + k_y k_0) p},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}.$$

Применяя формулы (2.16) и (2.17), получим соответственно передаточные функции следящей системы для выходной величины и ошибки:

$$\begin{aligned} \frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} &= \frac{D}{D + (T_m p + 1 + k_y k_0) p} = \frac{D}{T_m p^2 + (1 + k_y k_0) p + D}, \\ \frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} &= \frac{(T_m p + 1 + k_y k_0) p}{D + (T_m p + 1 + k_y k_0) p} = \frac{T_m p^2 + (1 + k_y k_0) p}{T_m p^2 + (1 + k_y k_0) p + D}. \end{aligned}$$

После подстановки численных величин получим

$$D = \frac{1,6 \cdot 57,3 \cdot 1100}{0,22 \cdot 312} = 1470 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{1470}{0,1p^2 + (1 + 1100 \cdot 0,011)p + 1470} = \frac{1470}{0,1p^2 + 13,1p + 1470};$$

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{0,1p^2 + (1 + 1100 \cdot 0,011)p}{0,1p^2 + (1 + 1100 \cdot 0,011)p + 1470} = \frac{0,1p^2 + 13,1p}{0,1p^2 + 13,1p + 1470}.$$

Пример 4.17. Определение операторных изображений выходной величины и ошибки следящей системы с корректирующим контуром переменного тока при линейном входном сигнале.

Найдем $\Theta_{\text{вых}}(p)$ и $\Theta(p)$ для следящей системы (рис. 1.12) при линейно изменяющемся входном сигнале $\Theta_{\text{вх}}(t) = \Omega t$, где $\Omega = 35 \text{ град/сек}$.

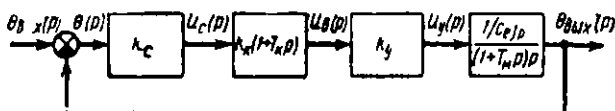


Рис. 4.9. Структурная схема следящей системы с корректирующим контуром переменного тока

Параметры следящей системы: передаточный коэффициент сельсинного преобразующего устройства $k_c = 1 \text{ в/град}$; скоростной коэффициент двигателя $c_e = 0,32 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,07 \text{ сек}$; передаточное число редуктора $i_p = 276$; коэффициент усиления лампового усилителя $k_y = 11\,500$.

Передаточная функция Т-образного корректирующего контура по отношению к сигналу ошибки (огикающей несущей частоты системы) приближенно может быть записана [Л. 14] в виде

$$\frac{U_{\text{в}}(p)}{U_{\text{с}}(p)} = k_k (1 + T_k p),$$

где $k_k = 0,015$; $T_k = 0,04 \text{ сек}$.

Структурная схема следящей системы будет иметь вид, изображенный на рис. 4.9. При этом передаточная функция последнего звена направленного действия объединяет в себе передаточную функцию исполнительного двигателя по скорости и интегрирующее звено, вследствие чего в знаменателе присутствует множитель p .

Обозначив

$$D = \frac{k_c k_k k_y}{c_e i_p},$$

запишем передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D(1 + T_k p)}{(1 + T_m p)p}.$$

Воспользовавшись формулами (2.16) и (2.17), получим соответственно операторные изображения выходной величины и ошибки:

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{вых}}(p) &= \frac{D(1 + T_K p)}{D(1 + T_K p) + (1 + T_M p)p} \Theta_{\text{вх}}(p) = \\ &= \frac{DT_K p + D}{T_M p^2 + (1 + DT_K)p + D} \Theta_{\text{вх}}(p); \\ \Theta(p) &= \frac{(1 + T_M p)p}{D(1 + T_K p) + (1 + T_M p)p} \Theta_{\text{вх}}(p) = \\ &= \frac{T_M p + 1}{T_M p^2 + (1 + DT_K)p + D} p \Theta_{\text{вх}}(p).\end{aligned}$$

Подставив в последние выражения изображение входной функции

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{\Omega}{p^2},$$

получим:

$$\begin{aligned}\Theta_{\text{вых}}(p) &= \frac{DT_K p + D}{T_M p^2 + (1 + DT_K)p + D} \cdot \frac{\Omega}{p^2}; \\ \Theta(p) &= \frac{T_M p + 1}{T_M p^2 + (1 + DT_K)p + D} \cdot \frac{\Omega}{p}.\end{aligned}$$

Подставив численные значения параметров системы, будем иметь:

$$\begin{aligned}D &= \frac{1.57 \cdot 3.0 \cdot 0.015 \cdot 11500}{0.32 \cdot 276} = 112 \frac{1}{\text{сек}}; \\ \Theta_{\text{вых}}(p) &= \frac{112 \cdot 0.04p + 112}{0.07p^2 + (1 + 112 \cdot 0.04)p + 112} \cdot \frac{35}{p^2} = \\ &= \frac{157p + 3920}{(0.07p^2 + 5.48p + 112)p^2}; \\ \Theta(p) &= \frac{0.07p + 1}{0.07p^2 + (1 + 112 \cdot 0.04)p + 112} \cdot \frac{35}{p} = \frac{2.45p + 35}{(0.07p^2 + 5.48p + 112)p}.\end{aligned}$$

Пример 4.18. Определение операторного изображения отклонения регулируемой величины в системе автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока с тиратронным усилителем при изменении нагрузки. ✓

Принципиальная схема системы регулирования изображена на рис. 1.14.

Параметры системы регулирования: динамический коэффициент усиления лампы $\mathcal{L}_1$ $\mu_{\text{дин}} = 50$; общий коэффициент усиления по напряжению от управляющей сетки лампы $\mathcal{L}_2$ до зажи-

мов якоря двигателя $k_y = 700$; скоростной коэффициент двигателя $c_e = 1,59 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; передаточный коэффициент тахогенератора с делителем напряжения $\Pi_2 k_{\text{ТГ}} = 0,955 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,22 \text{ сек}$; сопротивление в сеточной цепи лампы $\mathcal{L}_1 R_c = 100 \text{ ком}$; емкость конденсатора между анодом и сеткой $\mathcal{L}_1 C_1 = 6 \text{ мкф}$; коэффициент внутреннего скоростного трения в двигателе, определяемый наклоном его механической характеристики, $k_T = 0,406 \frac{\text{кг.м}}{\text{рад/сек}}$. Момент нагрузки на валу двигателя изменяется скачком от 0 до $8,5 \text{ кг.м}$.

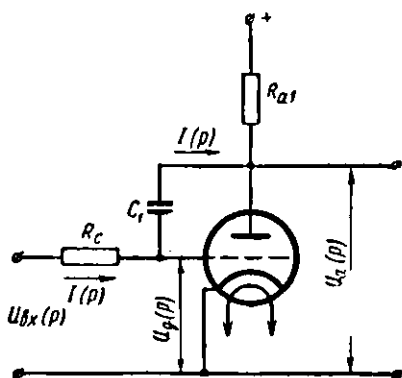


Рис. 4.10. Активное корректирующее звено

$\mathcal{L}_1$ с контуром $R_c C_1$. Входной величиной этого звена будем считать разность $U_{\text{вх}}(p) = U_3(p) - U_{0.c}(p)$, а выходной — напряжение на сетках $U_g(p)$ (сетки ламп $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ включены параллельно).

Поскольку усилительный каскад на лампе $\mathcal{L}_2$, фазо-сдвигающий мост (триод $\mathcal{L}_3$ и конденсатор C_2) и тиратронный усилитель мощности можно считать практически безынерционными, то их удобно объединить в одно усилительное безынерционное звено с передаточным коэффициентом k_y .

Следующим звеном направленного действия будем считать двигатель с передаточной функцией

$$\frac{n'(p)}{U_d(p)} = \frac{1}{c_e + T_m p},$$

где $n'(p)$ — скорость вращения при отсутствии нагрузки;
 $U_d(p)$ — напряжение на зажимах двигателя.

При составлении структурной схемы можно различным образом произвести разделение системы на звенья направленного действия.

Из принципиальной схемы (рис. 1.14) видно, что напряжение U_g , усиливаемое лампой $\mathcal{L}_2$, зависит как от входного сигнала системы $U_3 - U_{0.c}$, так и от сигнала местной обратной связи в лампе $\mathcal{L}_1$, вырабатываемого с помощью цепочки $R_c C_1$. Поэтому целесообразно выделить в качестве первого звена направленного действия активное корректирующее звено, образованное пентодом

Цепь обратной связи будет представлять собой безынерционное звено с передаточным коэффициентом $k_{тг}$, который удобно записать в виде произведения $k_0 c_e$. При заданных значениях параметров системы

$$k_0 = \frac{k_{тг}}{c_e} = \frac{0,955}{1,59} = 0,6.$$

Для определения передаточной функции корректирующего звена рассмотрим отдельно его схему, изображенную упрощенно

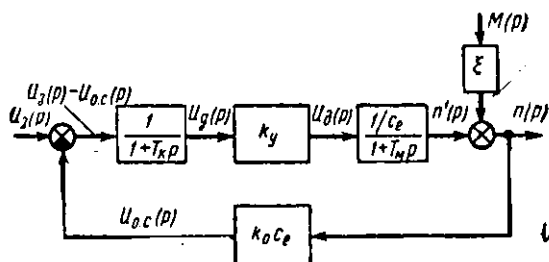


Рис. 4.11. Структурная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя

на рис. 4.10. Считая входные сопротивления пентодов $\mathcal{L}_1$ и $\mathcal{L}_2$ бесконечно большими, будем иметь:

$$\frac{U_{вх}(p) - U_g(p)}{R_c} = \frac{U_g(p) - U_a(p)}{\frac{1}{c_1 p}} = I(p); \quad (4.52)$$

$$U_a(p) = -\mu_{дин} U_g(p), \quad (4.53)$$

где

$$\mu_{дин} = \frac{\mu}{1 + \frac{R_l}{R_a}};$$

μ — статический коэффициент усиления лампы $\mathcal{L}_1$.

Исключив из уравнений (4.52) и (4.53) $U_a(p)$, получим

$$U_g(p) = \frac{1}{1 + T_{кп}} U_{вх}(p), \quad (4.54)$$

здесь $T_{к} = (1 + \mu_{дин}) R_c C_1$ — эквивалентная постоянная времени корректирующего звена, передаточная функция которого, как видно из формулы (4.54), соответствует аperiодическому звену с передаточным коэффициентом, равным единице.

Структурная схема системы автоматического регулирования скорости двигателя будет иметь вид, изображенный на рис. 4.11.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{1}{1 + T_k p} k_y \frac{1}{1 + T_m p} k_0 c_e,$$

или

$$W(p) = \frac{K}{(1 + T_k p)(1 + T_m p)}, \quad (4.55)$$

где $K = k_y k_0$ — коэффициент усиления системы регулирования.

Из структурной схемы и выражения (4.55) видно, что рассматриваемая система является статической системой регулирования, так как не содержит интегрирующих звеньев.

Поскольку требуется определить лишь отклонение регулируемой величины от заданного значения под действием скачкообразного изменения момента нагрузки от 0 до постоянной величины M , то за начало отсчета можно принять скорость холостого хода двигателя и рассматривать операторное уравнение с нулевыми начальными условиями. Для этого нужно положить $U_3(p) = 0$, после чего операторное изображение отклонения регулируемой величины может быть найдено по формуле (2.9):

$$\Delta n(p) = \frac{\xi \Delta M(p)}{1 + W(p)}.$$

Подставив в последнее выражение значение $W(p)$ из уравнения (4.55), после преобразования получим

$$\Delta n(p) = \frac{T_k T_m c^2 + (T_k + T_m)p + 1}{T_k T_m p^2 + (T_k + T_m)p + 1 + K} \xi \Delta M, \quad (4.56)$$

где $\xi = \frac{1}{k_T}$ — коэффициент нагрузки, характеризующий падение скорости двигателя с увеличением момента на валу.

Так как с увеличением момента нагрузки скорость двигателя уменьшается, то $\xi < 0$. Следовательно,

$$\xi = - \frac{1}{0,406} = -2,46 \frac{\text{рад/сек}}{\text{кгм}}.$$

Отклонение скорости на величину

$$\Delta n(p) = n_0(p) - n(p)$$

соответствует приращению момента

$$\Delta M(p) = M_0(p) - M(p),$$

где n_0 и M_0 — значения скорости и момента в режиме холостого хода двигателя.

Так как

$$M_0(p) = 0,$$

то

$$\Delta M(p) = -M(p).$$

При скачкообразном изменении момента от 0 до M

$$M(p) = \frac{M}{p} \text{ и } \Delta M(p) = -\frac{M}{p}.$$

Из уравнения (4.56) имеем

$$\Delta n(p) = -\frac{T_k T_m p^2 + (T_k + T_m) p + 1}{[T_k T_m p^2 + (T_k + T_m) p + 1 + K] p} \xi M. \quad (4.57)$$

Подставив численные значения параметров, получим:

$$K = 700 \cdot 0.6 = 420; T_k = (1 + 50) 100 \cdot 10^{-3} \cdot 6 = 30.6 \text{ сек};$$

$$\Delta n(p) = -\frac{30,6 \cdot 0,22 p^2 + (30,6 + 0,22) p + 1}{[30,6 \cdot 0,22 p^2 + (30,6 + 0,22) p + 1 + 420] p} \left(-2,46 \frac{30^*}{\pi} \right) 8,5.$$

Окончательно

$$\Delta n(p) = \frac{1346 p^2 + 6160 p + 200}{(6,73 p^2 + 30,8 p + 421) p}.$$

Пример 4.19. Определение операторного изображения регулируемой величины системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока при изменении задающего воздействия.

Пусть в системе регулирования, рассмотренной в примере 4.18, задающее напряжение изменяется скачком при $t=0$ от 0 до $U_{3.0}=110$ в и момент нагрузки на валу двигателя отсутствует (двигатель разгоняется вхолостую).

В соответствии с условиями задачи, примем на структурной схеме (рис. 4.11) $M(p)=0$, тогда

$$n(p) = n'(p).$$

Передаточная функция разомкнутой системы определяется тем же выражением, что и в предыдущем примере.

Считая, что до включения задающего напряжения система находилась в покое, т. е. принимая нулевые начальные условия, запишем изображение скорости вращения двигателя

$$n(p) = \frac{\frac{1}{1 + T_k p} k_y \frac{1}{1 + T_m p} c_e}{1 + W(p)} U_3(p),$$

* Множитель $\frac{30}{\pi}$ в последнем выражении добавлен для того, чтобы изменить размерность $\xi \frac{\text{рад/сек}}{\text{кгм}}$ на $\frac{\text{об/мин}}{\text{кгм}}$.

или

$$n(p) = \frac{\frac{k_y}{c_s}}{T_k T_m p^2 + (T_k + T_m) p + 1 + K} U_3(p).$$

Подставив численные значения параметров системы, будем иметь

$$K = 420; \quad T_k = 30,6 \text{ сек}; \quad U_3(p) = \frac{110}{p};$$

$$n(p) = \frac{\frac{700}{1,59 \frac{\pi}{30}}}{30,6 \cdot 22 p^2 + (30,6 + 0,22) p + 1 + 420} \cdot \frac{110}{p} = \\ = \frac{463 \ 000}{(6,73 p^2 + 30,8 p + 421) p}.$$

Пример 4.20. Определение передаточных функций для выходной величины и ошибки следящей системы профилешлифовального станка с полупроводниковым усилителем (рис. 1.16).

Примем следующие значения параметров системы: передаточный коэффициент преобразующего устройства (дифференциала и ВТ) $k_c = 3,6 \text{ в/град}$; передаточные коэффициенты по напряжению каскада усиления переменного тока и фазочувствительного каскада полупроводникового усилителя соответственно $k_{y1} = 32,6$ и $k_{y2} = 4,35$; общий передаточный коэффициент по напряжению оконечного каскада полупроводникового усилителя и ЭМУ $k_{y3} = 9,9$; скоростной коэффициент двигателя $c_s = 0,435 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; передаточное число редуктора $j_p = 233$; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_q = 0,02 \text{ сек}$; электро-механическая и электромагнитная постоянные времени двигателя (с учетом приведенного момента инерции механизма) соответственно $T_m = 0,03 \text{ сек}$ и $T_a = 0,018 \text{ сек}$; коэффициент жесткой обратной связи по скорости вращения выходной оси $k_{o.c} = 3,63 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; выходное сопротивление фазочувствительного каскада $R_{\text{вых}2} = 2 \text{ ком}$; входное сопротивление оконечного каскада полупроводникового усилителя $R_{\text{вх}3} = 6,6 \text{ ком}$. Параметры стабилизирующих связей (рис. 1.16): $R_8 = 20 \text{ ком}$; $C_1 = 1 \text{ мкф}$; $R_{12} = 980 \text{ ом}$; $R_{13} = 1,56 \text{ ком}$; $R_5 = R'_5 + R''_5 = 1 \text{ ком}$; $C_2 = 7 \text{ мкф}$; $C_3 = 32 \text{ мкф}$.

Степень компенсации электромашиного усилителя, изменяемая с помощью переменного сопротивления R_{15} , подбирается таким образом, чтобы можно было скомпенсировать не только продольную реакцию якоря, но и падение напряжения в обмотке якоря ЭМУ, т. е. внешняя характеристика ЭМУ близка к горизонтальной прямой.

При составлении структурной схемы следящей системы прием разделением последней на звенья направленного действия, произведенное в примере 2.8 (см. рис. 2.14). В этом случае следует предварительно определить передаточные функции: электромагнитного усилителя совместно с оконечным каскадом полупроводникового усилителя $W_y(p)$, двигателя с редуктором $W_d(p)$, последовательного корректирующего звена $W_n(p)$ и параллельного корректирующего звена (гибкой обратной связи) $Z_0(p)$, после чего только можно будет составить структурную схему и определить искомые передаточные функции системы.

Пренебрегая постоянной времени цепи управляющих обмоток ЭМУ, напишем передаточную функцию ЭМУ совместно с оконечным каскадом полупроводникового усилителя:

$$W_y(p) = \frac{k_{yz}}{1 + T_q p}.$$

Так как в условии задачи даны электромеханическая и электромагнитная постоянные времени двигателя, то передаточная функция последнего (см. пример 4.5) совместно с редуктором

$$W_d(p) = \frac{\Omega_{\text{вх}}(p)}{E_g(p)} = \frac{1}{T_g T_m p^2 + T_m p + 1}. \quad (4.58)$$

Последовательное корректирующее звено представляет собой пассивный дифференцирующий контур, подобный рассмотренному в примере 4.8 (рис. 4.1, а); однако малое входное сопротивление оконечного каскада $R_{\text{вх}3}$ вынуждает учитывать выходное сопротивление фазочувствительного каскада $R_{\text{вх}2}$, вследствие чего передаточная функция корректирующего звена будет несколько иной. При ее определении рассмотрим схему, изображенную на рис. 4.12, для которой справедливы уравнения:

$$U'_{y2}(p) = (R_{\text{вх}2} + R_{\text{вх}3}) I(p) + R_8 I_1(p);$$

$$R_8 I_1(p) = \frac{I_2(p)}{C_1 p};$$

$$I(p) = I_1(p) + I_2(p).$$

Исключив из этих уравнений $I_1(p)$ и $I_2(p)$ и приняв во внимание, что $U'_{y2}(p) = R_{\text{вх}3} I(p)$, получим

$$\frac{U'_{y2}(p)}{U'_{y2}(p)} = W_k(p) = \frac{R_{\text{вх}2} (1 + R_8 C_1 p)}{R_{\text{вх}2} + R_8 + R_{\text{вх}3} + (R_{\text{вх}2} + R_{\text{вх}3}) R_8 C_1 p},$$

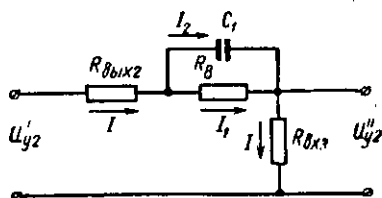


Рис. 4.12. Последовательное корректирующее звено

или, поделив числитель и знаменатель на сумму $R_{\text{вых}2} + R_8 + R_{\text{вх}3}$, будем иметь

$$W_k(p) = \alpha \frac{1 + \tau p}{1 + T_0 p}, \quad (4.59)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{R_{\text{вх}3}}{R_{\text{вых}2} + R_8 + R_{\text{вх}3}}; \quad \tau = R_8 C_1; \\ T_0 &= \beta \tau; \quad \beta = \frac{R_{\text{вых}2} + R_{\text{вх}3}}{R_{\text{вых}2} + R_8 + R_{\text{вх}3}}. \end{aligned} \right\} \quad (4.59')$$

Параллельное корректирующее звено с передаточной функцией $Z_0(p)$ имеет точно такую же структуру, что и корректирующий контур, рассмотренный в примере 4.12 (рис. 4.5). В соответствии с выражением (4.39)

$$Z_0(p) = \frac{U_{01}(p)}{E_3(p)} = k_{01} \frac{1 + T_3 p}{(1 + T_{1p})(1 + T_2 p)}. \quad (4.60)$$

За входную величину звена $Z_0(p)$ принято изображение э. д. с. якоря ЭМУ $E_3(p)$, что вполне оправдано в связи с надлежащей компенсацией ЭМУ (см. пример 2.8).

Для того чтобы при расчете величин, входящих в выражение (4.60), можно было использовать формулы, полученные в примере (4.12), необходимо принять $R_1 = R_{13}$; $R_2 = R_{12}$; $R_3 = R_5$; $C_1 = C_3$; $T_{11} = T_3$,

$$\left. \begin{aligned} k_{01} &= \frac{R_8}{R_{13} + R_{12} + R_5}; \\ T_2 &= T_{11} = C_3 R_{13}; \\ T_{23} &= C_2 R_5. \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

Для определения постоянных времени T_1 и T_2 , как указывалось в примере 4.12, рекомендуется найти в численной форме корни знаменателя выражения (4.38), после чего T_1 и T_2 легко получить из уравнения (4.40).

Передаточный коэффициент звена жесткой обратной связи

$$k_{0.c} = k_0 c_e / p,$$

откуда безразмерный множитель

$$k_0 = \frac{k_{0.c}}{c_e / p} = \frac{3,63}{0,435 \cdot 233} = 0,0358.$$

Структурная схема следящей системы профилешлифовального станка примет вид, изображенный на рис. 4.13.

Заменяя последовательно участки прямой цепи системы, охваченные местными обратными связями, эквивалентными звеньями (см. пример 2.8), после преобразований получим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta(p)} = \frac{A(p)}{B(p)}, \quad (4.62)$$

где

$$A(p) = b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3; \quad (4.63)$$

$$B(p) = c_0 p^7 + c_1 p^6 + c_2 p^5 + c_3 p^4 + c_4 p^3 + c_5 p^2 + c_6 p; \quad (4.64)$$

$$\left. \begin{aligned} b_0 &= D\tau T_1 T_2; & b_1 &= D(\tau T_1 + \tau T_2 + T_1 T_2); \\ b_2 &= D(\tau + T_1 + T_2); & b_3 &= D; \end{aligned} \right\} \quad (4.65)$$

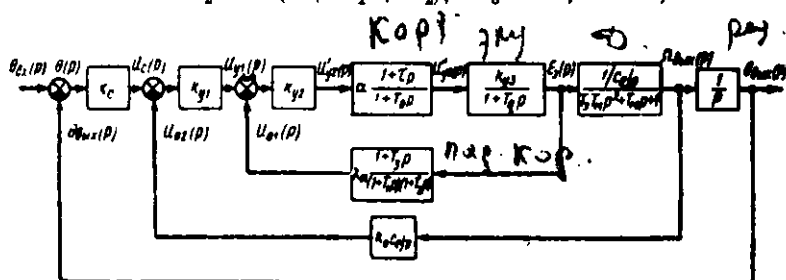


Рис. 4.13. Структурная схема следящей системы профилешлифовального станка с передаточными функциями звеньев

$$\left. \begin{aligned} c_0 &= T_0 T_q T_1 T_2 T_3 T_M; \\ c_1 &= T_0 T_q T_1 T_3 T_M + T_0 T_q T_1 T_3 T_M + T_0 T_q T_2 T_3 T_M + \\ &\quad + T_0 T_1 T_2 T_3 T_M + T_q T_1 T_2 T_3 T_M; \\ c_2 &= T_0 T_q T_1 T_2 + T_0 T_q T_1 T_M + T_0 T_q T_2 T_M + T_0 T_1 T_2 T_M + \\ &\quad + T_q T_1 T_2 T_M + T_0 T_q T_3 T_M + T_0 T_1 T_3 T_M + T_1 T_2 T_3 T_M + \\ &\quad + T_q T_1 T_3 T_M + T_0 T_2 T_3 T_M + T_q T_2 T_3 T_M + \\ &\quad + \alpha k_{y2} k_{y3} k_{01} \tau T_3 T_3 T_M; \\ c_3 &= T_0 T_q T_1 + T_0 T_q T_2 + T_0 T_1 T_2 + T_q T_1 T_2 + \\ &\quad + T_0 T_q T_M + T_0 T_1 T_M + T_q T_1 T_M + T_0 T_2 T_M + T_q T_2 T_M + \\ &\quad + T_1 T_3 T_M + T_0 T_3 T_M + T_q T_3 T_M + T_1 T_3 T_M + T_2 T_3 T_M + \\ &\quad + \alpha k_{y2} k_{y3} k_{01} (\tau T_3 T_M + \tau T_3 T_M + T_3 T_3 T_M) + \\ &\quad + k_y \alpha k_0 \tau T_1 T_2; \end{aligned} \right\} \quad (4.66)$$

$$\begin{aligned}
c_4 &= T_0 T_q + T_0 T_1 + T_q T_1 + T_0 T_2 + T_q T_2 + T_1 T_2 + \\
&+ T_0 T_m + T_q T_m + T_1 T_m + T_2 T_m + T_3 T_m + \\
&+ \alpha k_{y2} k_{y3} k_{01} (\tau T_3 + \tau T_m + T_3 T_m + T_3 T_m) + \\
&+ \alpha k_y k_0 (\tau T_1 + \tau T_2 + T_1 T_2); \\
c_5 &= T_0 + T_q + T_1 + T_2 + T_m + \alpha k_{y2} k_{y3} k_{01} (\tau + T_3 + T_m) + \\
&+ \alpha k_y k_0 (\tau + T_1 + T_2); \\
c_6 &= 1 + \alpha k_{y2} k_{y3} k_{01} + \alpha k_y k_0; \\
k_y &= k_{y1} k_{y2} k_{y3}; \\
D &= k_c k_y \alpha \frac{1}{c_e j_p}.
\end{aligned} \quad (4.67)$$

На основании формул (2.16) и (2.17) можем написать соответственно передаточные функции следящей системы для выходной величины и ошибки:

$$\begin{aligned}
\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} &= \frac{A(p)}{A(p) + B(p)} = \\
&= \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{a_0 p^7 + a_1 p^6 + a_2 p^5 + a_3 p^4 + a_4 p^3 + a_5 p^2 + a_6 p + a_7}; \quad (4.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} &= \frac{B(p)}{A(p) + B(p)} = \\
&= \frac{c_0 p^7 + c_1 p^6 + c_2 p^5 + c_3 p^4 + c_4 p^3 + c_5 p^2 + c_6 p}{a_0 p^7 + a_1 p^6 + a_2 p^5 + a_3 p^4 + a_4 p^3 + a_5 p^2 + a_6 p + a_7}, \quad (4.69)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= c_0, \quad a_1 = c_1, \quad a_2 = c_2, \quad a_3 = c_3, \\
a_4 &= b_0 + c_4, \quad a_5 = b_1 + c_5, \quad a_6 = b_2 + c_6, \quad a_7 = b_3 = D. \quad (4.70)
\end{aligned}$$

Перейдем к определению передаточных функций в численном виде. Для этого нужно предварительно найти ряд величин, не заданных непосредственно в условии задачи.

Определяем параметры последовательного корректирующего звена $W_k(p)$. Из выражения (4.59) следует:

$$\alpha = \frac{6,6}{2 + 20 + 6,6} = 0,23; \quad \tau = 20 \cdot 10^{-3} \cdot 1 = 0,02 \text{ сек};$$

$$\beta = \frac{2 + 6,6}{2 + 20 + 6,6} = 0,3; \quad T_0 = 0,3 \cdot 0,02 = 0,006 \text{ сек}.$$

Для нахождения постоянных времени T_1 и T_2 звена гибкой обратной связи вычислим по формулам (4.61) k_{01} , T_3 и T_{23} :

$$k_{01} = \frac{1}{1,56 + 980 \cdot 10^{-3} + 1} = 0,282;$$

$$T_3 = T_{11} = 32 \cdot 1,56 \cdot 10^{-3} = 0,05 \text{ сек};$$

$$T_{23} = 7 \cdot 1 \cdot 10^{-3} = 0,007 \text{ сек};$$

после чего найдем корни характеристического уравнения, которое получим, приравняв нулю знаменатель формулы (4.38):

$$\frac{980 \cdot 10^{-3}}{1,56 + 980 \cdot 10^{-3} + 1} \cdot 0,05 \cdot 0,007 p^2 + \\ + \frac{(980 \cdot 10^{-3} + 1) 0,05 + (1,56 + 980 \cdot 10^{-3}) \cdot 0,007}{1,56 + 980 \cdot 10^{-3} + 1} p + 1 = 0,$$

или

$$p^2 + 341p + 10320 = 0,$$

откуда

$$p_1 = -33,5 \text{ и } p_2 = -307,5.$$

Постоянные времени звена гибкой обратной связи:

$$T_1 = -\frac{1}{-33,5} = 0,03 \text{ сек и } T_2 = -\frac{1}{-307,5} = 0,00326 \text{ сек.}$$

Из уравнений (4.67) имеем:

$$k_y = 32,6 \cdot 4,35 \cdot 9,9 = 1400;$$

$$D = 3,6 \cdot 57,3 \cdot 1400 \cdot 0,23 \cdot \frac{1}{0,435 \cdot 233} = 658 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Подставив полученные величины в выражения (4.62) — (4.66), определим численные значения коэффициентов передаточной функции разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где

$$A(p) = 12,9 \cdot 10^{-4} p^3 + 2,4 p^2 + 34,9 p + 658; \\ B(p) = 6,37 \cdot 10^{-12} p^7 + 38,7 \cdot 10^{-10} p^6 + 231 \cdot 10^{-8} p^5 + \\ + 269 \cdot 10^{-6} p^4 + 164 \cdot 10^{-4} p^3 + 55,9 \cdot 10^{-2} p^2 + 15,4 p.$$

Передаточные функции следящей системы соответственно для выходной величины и ошибки после подсчета коэффициентов:

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{H(p)}; \\ \frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{B(p)}{H(p)},$$

где

$$H(p) = A(p) + B(p) = 6,37 \cdot 10^{-12} p^7 + 38,7 \cdot 10^{-10} p^6 + \\ + 231 \cdot 10^{-8} p^5 + 269 \cdot 10^{-6} p^4 + 177 \cdot 10^{-4} p^3 + \\ + 296 \cdot 10^{-2} p^2 + 50,3 p + 658.$$

Пример 4.21. Определение передаточных функций для выходной величины и ошибки следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А завода им. Я. М. Свердлова (рис. 1.18).

Параметры системы: передаточный коэффициент копировального прибора $k_c = 10$ в/мм; коэффициент усиления первого каскада лампового усилителя $k_{y1} = 9,6$; общий коэффициент усиления по напряжению оконечного каскада лампового усилителя и ЭМУ $k_{y2} = 100$; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_q = 0,032$ сек; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,11$ сек; скоростной коэффициент двигателя $c_e = 1 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$;

передаточное число редуктора вместе с ходовым винтом $j_p = 26,2$ рад/мм; передаточный коэффициент дифференцирующего звена $k_d = 0,573$ сек; передаточный коэффициент интегрирующего звена $k_i = 1,22$ 1/сек; передаточный коэффициент стабилизирующего контура в цепи гибкой обратной связи $k_0 = 0,081$; постоянная времени стабилизирующего контура $T_0 = 0,2$ сек; сопротивление цепи якоря ЭМУ $R_{я.э} = 5,5$ ом; сопротивление цепи якоря двигателя $R_{я.д} = 1,4$ ом.

Разделение следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А на звенья направленного действия в общем виде было сделано в примере 2.9 (рис. 2.15).

Копировальный прибор и первый каскад лампового усилителя считаем безынерционными звеньями направленного действия с передаточными коэффициентами соответственно k_c и k_{y1} .

Передаточная функция активного корректирующего звена, вырабатывающего дополнительные сигналы управления, пропорциональные первой производной и интегралу от ошибки по времени (см. описание следящей системы в примере 1.8),

$$W_k(p) = 1 + k_d p + k_i \frac{1}{p} = \frac{k_d p^2 + p + k_i}{p}.$$

Передаточная функция ЭМУ совместно с оконечным каскадом лампового усилителя,

$$W_{y2}(p) = \frac{k_{y2}}{1 + T_q p}.$$

Передаточная функция звена, объединяющего двигатель и продольную цепь якоря ЭМУ

$$W_d(p) = \frac{1}{1 + T_m p}.$$

Выходная величина последнего звена — скорость перемещения фрезы $V_{\text{вых}}(p)$ преобразуется в выходную величину системы — перемещение фрезы $S_{\text{вых}}(p)$ с помощью интегрирующего звена с передаточной функцией $\frac{1}{p}$.

Местная обратная связь в следящей системе осуществляется с помощью стабилизирующего RC -контура (аналогичного изображенному на рис. 4.1, а), передаточная функция которого (см. пример 4.8)

$$Z_{03}(p) = \frac{k_0 + T_0 p}{1 + T_0 p}.$$

На вход этого контура подается напряжение якоря ЭМУ U_a , отличающееся от э. д. с. E_a на величину падения напряжения в якоре ЭМУ, т. е. на

$$U_a = E_a - R_{я.э} I,$$

где I — ток в цепи якорей ЭМУ и двигателя.

Пренебрегая статическим моментом нагрузки, получим

$$c_m I(p) = M_{дв} = J p \Omega_{дв}(p),$$

где $M_{дв}$ — вращающий момент двигателя;

$\Omega_{дв}$ — угловая скорость вращения;

J — момент инерции двигателя с учетом приведенной массы поступательно движущихся звеньев кинематической цепи системы (суппорта);

c_m — передаточный коэффициент двигателя по моменту.

Так как

$$\Omega_{дв} = j_p V_{вых},$$

то

$$I(p) = \frac{J j_p}{c_m} p V_{вых}(p),$$

$$U_a(p) = E_a(p) - \frac{R_{я.э} J j_p}{c_m} p V_{вых}(p).$$

Умножив числитель и знаменатель коэффициента при $p V_{вых}(p)$ в последнем выражении на $R_{я} c_e$, где $R_{я} = R_{я.э} + R_{я.д}$, получим

$$U_a(p) = E_a(p) - \frac{R_{я.э}}{R_{я}} c_e j_p T_m p V_{вых}(p),$$

где $T_m = \frac{J R_{я}}{c_e c_m}$ — электромеханическая постоянная времени двигателя.

Следовательно, передаточная функция звена обратной связи, обозначенная на структурной схеме рис. 2.15, а через $Z_{02}(p)$, будет

$$Z_{02}(p) = \frac{R_{я.э}}{R_{я}} c_e j_p T_m p.$$

С учетом сказанного структурную схему следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А можно изобразить в виде, представленном на рис. 4.14, а,

Преобразуем полученную структурную схему. Для этого перенесем начало цепи обратной связи с передаточным коэффициентом, равным единице, со входа на выход звена с передаточной функцией $W_d(p)$. При этом, чтобы не изменить эффект, вносимый связью, нужно включить в ее цепь звено с передаточной функцией

$$\frac{1}{W_d(p)} = \frac{1 + T_m p}{\frac{1}{c_e j p}}.$$

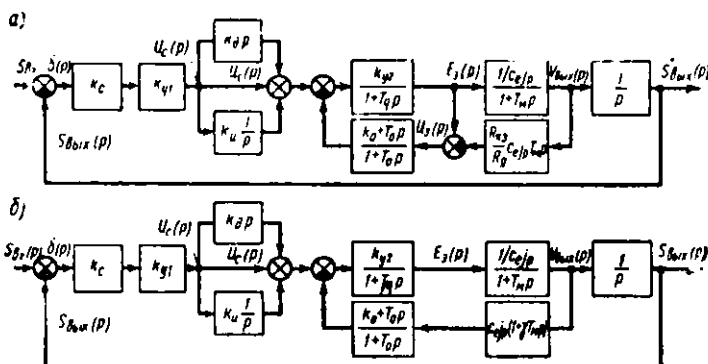


Рис. 4.14. Структурная схема следящей системы копировально-фрезерного станка 6441А с передаточными функциями звеньев

Образовавшиеся две параллельные связи с передаточными функциями $\frac{1}{W_d(p)}$ и $Z_{02}(p)$ на основании выражения (2.4) заменим одним звеном с передаточной функцией, равной алгебраической сумме

$$\frac{1}{W_d(p)} - Z_{02}(p) = \frac{1 + T_m p}{\frac{1}{c_e j p}} - \frac{R_{я.э}}{R_{я}} c_e j p T_m p = c_e j p (1 + \gamma T_m p),$$

где

$$\gamma = \frac{R_{я.д}}{R_{я}},$$

после чего структурная схема примет вид, изображенный на рис. 4.14, б.

Для определения передаточной функции разомкнутой системы заменим участок прямой цепи системы, охваченный местной

обратной связью (рис. 4.14, б), эквивалентным звеном с передаточной функцией

$$W_1(p) = \frac{\frac{k_{y2}}{1 + T_q p} \cdot \frac{1}{\frac{c_e j_p}{1 + T_m p}}}{1 + \frac{k_{y2}}{1 + T_q p} \cdot \frac{c_e j_p}{1 + T_m p} \cdot \frac{k_0 + T_0 p}{1 + T_0 p} c_e j_p (1 + \gamma T_m p)} =$$

$$= \frac{\frac{k_{y2}}{c_e j_p} (1 + T_0 p)}{(1 + T_q p) (1 + T_m p) (1 + T_0 p) + k_{y2} (k_0 + T_0 p) (1 + \gamma T_m p)}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) \approx k_c k_{y1} W_k(p) W_1(p) \frac{1}{p},$$

или, раскрывая $W_k(p)$ и $W_1(p)$, будем иметь

$$W(p) = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{(c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3) p^2} = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= D k_d T_0; \\ b_1 &= D (k_d + T_0); \\ b_2 &= D (1 + k_n T_0); \\ b_3 &= k_n D; \\ c_0 &= T_q T_m T_0; \\ c_1 &= T_q T_m + T_q T_0 + (1 + k_{y2} \gamma) T_m T_0; \\ c_2 &= T_q + T_m + (1 + k_{y2}) T_0 + k_{y2} k_0 \gamma T_m; \\ c_3 &= 1 + k_{y2} k_0; \quad D = \frac{k_c k_{y1} k_{y2}}{c_e j_p}. \end{aligned}$$

Используя формулы (2.16) и (2.17), получим соответственно передаточные функции следящей системы для выходной величины и ошибки:

$$\frac{S_{\text{вых}}(p)}{S_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{A(p) + B(p)} = \frac{b_0 p^3 + b_1 p^2 + b_2 p + b_3}{a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5};$$

$$\frac{\delta(p)}{S_{\text{вх}}(p)} = \frac{B(p)}{A(p) + B(p)} = \frac{c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3}{a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5} p^2,$$

где

$$a_0 = c_0, \quad a_1 = c_1, \quad a_2 = b_0 + c_2, \quad a_3 = b_1 + c_3, \quad a_4 = b_2, \quad a_5 = b_3.$$

Подставив численные значения параметров системы, будем иметь:

$$D = \frac{10 \cdot 9,6 \cdot 100}{1 \cdot 26,2} = 366 \frac{1}{сек};$$

$$\gamma = \frac{1,4}{5,5 + 1,4} = 0,203;$$

$$b_0 = 366 \cdot 0,573 \cdot 0,2 = 42;$$

$$b_1 = 366 \cdot (0,573 + 0,2) = 284;$$

$$b_2 = 366 (1 + 1,22 \cdot 0,2) = 457;$$

$$b_3 = 1,22 \cdot 366 = 448;$$

$$c_0 = 0,032 \cdot 0,11 \cdot 0,2 = 0,000704;$$

$$c_1 = 0,032 \cdot 0,11 + 0,032 \cdot 0,2 + (1 + 100 \cdot 0,203) \cdot 0,11 \cdot 0,2 = 0,478;$$

$$c_2 = 0,032 + 0,11 + (1 + 100) \cdot 0,2 + 100 \cdot 0,081 \cdot 0,203 \cdot 0,11 = 21;$$

$$c_3 = 1 + 100 \cdot 0,081 = 9,1;$$

$$a_0 = c_0 = 0,000704;$$

$$a_1 = c_1 = 0,478;$$

$$a_2 = 42 + 21 = 63;$$

$$a_3 = 284 + 9,1 \approx 293;$$

$$a_4 = b_3 = 457;$$

$$a_5 = b_3 = 448.$$

Подставив численные значения коэффициентов в полученные выше выражения, будем иметь:

передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{42p^3 + 284p^2 + 457p + 448}{(0,000704p^5 + 0,478p^4 + 21p + 9,1)p^2};$$

передаточную функцию следящей системы для выходной величины

$$\frac{S_{вых}(p)}{S_{вх}(p)} = \frac{42p^3 + 284p^2 + 457p + 448}{0,000704p^5 + 0,478p^4 + 63p^3 + 293p^2 + 457p + 448};$$

передаточную функцию следящей системы для ошибки

$$\frac{\delta(p)}{S_{вх}(p)} = \frac{0,000704p^5 + 0,478p^4 + 21p + 9,1}{0,000704p^5 + 0,478p^4 + 63p^3 + 293p^2 + 457p + 448} p^2.$$



Глава V. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 5.1. Виды частотных характеристик, применяемых при анализе и синтезе систем автоматического управления

Частотные характеристики получили исключительно широкое использование при анализе и синтезе систем автоматического управления.

Выражения для частотных характеристик отдельных звеньев и системы легко могут быть получены из соответствующих передаточных функций, написанных в операторной форме, путем замены оператора p на $j\omega$.

Физически частотная характеристика замкнутой или разомкнутой системы имеет место при подаче на вход системы гармонического воздействия при изменении его частоты от нуля до бесконечности и сохранении постоянной амплитуды входного сигнала на всем диапазоне изменения частот. Подобного же рода частотная характеристика свойственна и отдельным звеньям системы. Очевидно, что при экспериментальном получении подобной характеристики диапазон изменения частоты входного гармонического воздействия ограничен определенными техническими возможностями того или иного устройства для подачи гармонических воздействий.

При подаче на вход линейной системы автоматического управления гармонического воздействия

$$X_{\text{вх}} = X_{\text{вх. max}} \sin \omega t$$

характеристика обработки системы по окончании переходного процесса будет также представлять собой периодическую функцию вида

$$X_{\text{вых}} = X_{\text{вых. max}} \sin (\omega t + \varphi),$$

отличающуюся от входной функции по амплитуде и по фазе, но имеющую ту же частоту, что и входная функция. При этом

система будет находиться в режиме вынужденных колебаний. Отношение

$$\frac{X_{\text{вых. макс}}}{X_{\text{вх. макс}}} e^{j\varphi(\omega)} = \Phi(j\omega)$$

представляет собой комплексную частотную функцию, которая называется комплексным коэффициентом усиления системы.

Таким образом, при подаче на вход системы гармонического сигнала, установившаяся гармоническая величина на выходе определяется произведением входной функции на комплексную частотную функцию, которая может быть непосредственно получена из передаточной функции, т. е.

$$X_{\text{вых}} = X_{\text{вх}} \Phi(j\omega).$$

Выражение для $\Phi(j\omega)$ может быть разделено на вещественную и мнимую части:

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)},$$

где $P(\omega)$, $Q(\omega)$, $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ — полиномы от ω .

При определенном значении ω комплексная частотная функция $\Phi(j\omega)$ представляет собой вектор на плоскости комплексного переменного и характеризуется амплитудой A и фазой φ .

При изменении частоты ω амплитуда и фаза векторов $\Phi(j\omega)$ будут изменяться, а их конец будет описывать на плоскости комплексного переменного кривую (геометрическое место концов векторов частотной функции), представляющую собой амплитудно-фазовую характеристику замкнутой системы.

Очевидно, что при изменении частоты будут изменяться также и величины P , Q , A и φ , что позволяет построить частотные характеристики и для этих величин. Соответственно имеются:

$P(\omega)$ — вещественная частотная характеристика замкнутой системы;

$Q(\omega)$ — мнимая частотная характеристика замкнутой системы;

$A_s(\omega)$ — амплитудная частотная характеристика замкнутой системы;

$\varphi_s(\omega)$ — фазовая частотная характеристика замкнутой системы.

Соотношения между характеристиками определяются выражениями:

$$A_s(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}; \quad \varphi_s(\omega) = \arctg \frac{Q(\omega)}{P(\omega)};$$

$$P(\omega) = A_s(\omega) \cos \varphi_s(\omega); \quad Q(\omega) = A_s(\omega) \sin \varphi_s(\omega).$$

Для получения частотных характеристик экспериментальным путем для каждого значения частоты определяют ампли-

туду гармонического воздействия, амплитуду выходной величины, а также фазовый сдвиг между обеими амплитудами.

Кривые зависимости отношения амплитуд и фазового сдвига от частоты воздействующей величины и являются *амплитудной и фазовой частотными характеристиками*. По этим характеристикам могут быть построены и другие характеристики: амплитудно-фазовая, вещественная и др. Подобные характеристики могут быть получены как для замкнутой системы, так и для разомкнутой, а также для отдельных звеньев системы.

Частотные характеристики разомкнутой системы обычно обозначают:

$W(j\omega)$ — амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы (а. ф. х.);

$U(\omega)$ — вещественная частотная характеристика разомкнутой системы;

$V(\omega)$ — мнимая частотная характеристика разомкнутой системы;

$A(\omega)$ — амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы;

$\varphi(\omega)$ — фазовая частотная характеристика разомкнутой системы.

Соотношения между этими характеристиками определяются выражениями, аналогичными выражениям для замкнутых систем.

Кроме амплитудно-фазовой характеристики, на плоскости комплексного переменного может быть построена также и так называемая *характеристическая кривая*, или *кривая Михайлова*, получаемая в результате формальной замены в характеристическом уравнении замкнутой системы оператора p на $j\omega$. Выражение для этой характеристики может быть написано как

$$F(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega),$$

где $x(\omega)$ и $y(\omega)$ — соответственно ее вещественная и мнимая составляющие.

Ценность использования частотных характеристик заключается в том, что они позволяют косвенно, т. е. без решения дифференциального уравнения системы, судить о поведении последней в отношении устойчивости и ряда показателей качества, а также определять и рассчитывать средства коррекции системы для получения заданных динамических показателей.

Наибольшее использование получили характеристики разомкнутой системы благодаря их наглядности и простоте построения. В особенности это следует отметить относительно логарифмических частотных характеристик (амплитудной и фазовой), позволяющих производить синтез системы наиболее простым образом.

Для расчета кривой переходного процесса удобно использование вещественной частотной характеристики замкнутой системы.

§ 5.2. Примеры построения амплитудных и фазовых частотных характеристик в вещественной и комплексной плоскостях

Пример 5.1. Построение амплитудно-частотной, фазо-частотной и амплитудно-фазовой характеристик апериодического звена.

Примем передаточный коэффициент $k=1$ и постоянную времени $T=2,5$ и $0,5$ сек.

Передаточная функция апериодического звена

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp}$$

Заменяя p на $j\omega$, получим соответственно выражения для амплитудно-частотной и фазо-частотной характеристик:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 T^2}};$$

$$\varphi(\omega) = \arg [W(j\omega)] = -\operatorname{arctg} \omega T.$$

Подставив числовые значения T , вычислим $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$. Результаты вычислений представлены в табл. 5.1, по которой построены кривые $A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ (рис. 5.1, а и б).

Таблица 5.1

$T = 2,5 \text{ сек}$			$T = 0,5 \text{ сек}$		
ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0,5	0,622	$-51^\circ 6'$	1	0,895	$-26^\circ 36'$
1	0,372	$-68^\circ 24'$	2	0,708	-46°
1,5	0,258	$-75^\circ 6'$	3	0,554	$-56^\circ 18'$
2	0,195	$-78^\circ 48'$	5	0,372	$-68^\circ 12'$
2,5	0,158	-81°	7	0,279	-74°
3	0,127	$-82^\circ 6'$	10	0,196	$-78^\circ 42'$
20	0,02	$-86^\circ 30'$	50	0,04	$-87^\circ 48'$

Амплитудно-фазовая характеристика апериодического звена (рис. 5.1, в) представляет собой расположенную в четвертом квадранте полуокружность с диаметром, равным отрезку k и координатами центра на вещественной оси $\left(\frac{k}{2}; j0\right)$.

Пример 5.2. Построение амплитудно-частотной, фазо-частотной и амплитудно-фазовой характеристик двух последовательных включенных апериодических звеньев.

Постоянные времени: $T_1=0,05$ сек и $T_2=0,12$ сек; общий передаточный коэффициент $k=k_1=k_2=1$.

Передаточная функция системы из двух аperiodических звеньев

$$W(p) = \frac{k}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}$$

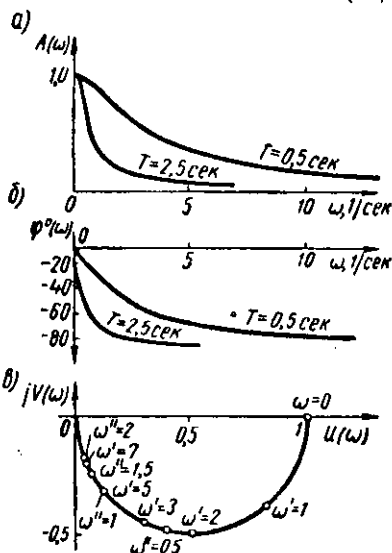


Рис. 5.1. Частотные характеристики аperiodического звена:

а — амплитудные; б — фазовые; в — амплитудно-фазовые

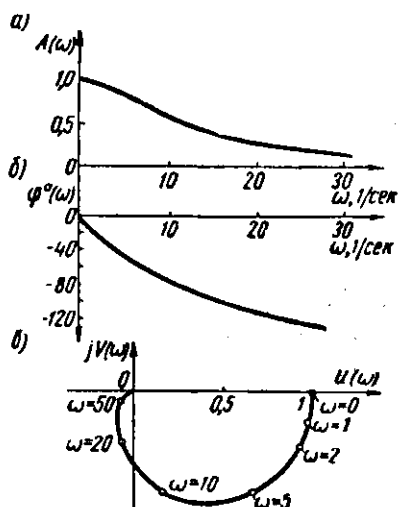


Рис. 5.2. Частотные характеристики последовательных аperiodических звеньев:

а — амплитудная; б — фазовая; в — амплитудно-фазовая

Подставив $p=j\omega$, имеем:

$$\begin{aligned} A(\omega) &= |W(j\omega)| = \frac{k}{\sqrt{(1 + T_1^2 \omega^2)(1 + T_2^2 \omega^2)}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{(1 + 0,05^2 \omega^2)(1 + 0,12^2 \omega^2)}}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \arg[W(j\omega)] = -(\arctg T_1 \omega + \arctg T_2 \omega) = \\ &= -(\arctg 0,05 \omega + \arctg 0,12 \omega). \end{aligned}$$

Задавая различные значения ω , находим $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и $W(j\omega)$. Результаты вычислений сведены в табл. 5.2, по которой построены частотные характеристики $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и $W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega)$ (рис. 5.2).

Таблица 5.2

ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$	ω	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
1	0,99	-10°	20	0,272	$-112^\circ 30'$
2	0,968	-19°	50	0,061	$-148^\circ 30'$
5	0,83	-45°	0	1	0
10	0,572	$-76^\circ 30'$			

Пример 5.3. Построение амплитудно-частотной, фазо-частотной и амплитудно-фазовой характеристик следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем.

Примем параметры следящей системы, рассмотренной в примере 4.14. Структурная схема системы приведена на рис. 4.7.

Заменяя в выражении для передаточной функции разомкнутой системы p на $j\omega$, имеем

$$W(j\omega) = \frac{D}{j\omega(1 + j\omega T_m)} = U(\omega) + jV(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

где

$$U(\omega) = -\frac{DT_m}{1 + T_m^2 \omega^2} = -\frac{25,7 \cdot 0,075}{1 + 0,075^2 \omega^2} = -\frac{1,93}{1 + 5,63 \cdot 10^{-3} \omega^2};$$

$$V(\omega) = -j \frac{D}{\omega + T_m^2 \omega^3} = -j \frac{25,7}{\omega + 5,63 \cdot 10^{-3} \omega^3};$$

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)};$$

$$\varphi(\omega) = \arctg \frac{V(\omega)}{U(\omega)} = \arctg \frac{1}{T_m \omega}.$$

Подставляя различные значения ω , рассчитываем $A(\omega)$, $\varphi(\omega)$ и $W(j\omega)$. Результаты вычислений представлены в табл. 5.3. Частотные характеристики построены на рис. 5.3.

Таблица 5.3

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$A(\omega)$	$\varphi(\omega)$
0	-1,93	$-\infty$	∞	-90°
1	-1,92	-25,6	25,6	$-94,5^\circ$
2	-1,88	-12,55	12,7	$-98,5^\circ$
5	-1,65	-4,51	4,8	$-110,5^\circ$
10	-1,24	-1,65	2,06	-128°
20	-0,595	-0,1665	0,62	-158°
50	-0,0129	-0,0193	0,0232	-165°

Пример 5.4. Построение амплитудно-фазовой характеристики следящей системы с корректирующим контуром переменного тока.

Параметры следящей системы указаны в примере 4.17. Структурная система приведена на рис. 4.9.

Подставляя в выражение для передаточной функции разомкнутой системы $p = j\omega$, получаем

$$W(j\omega) = \frac{D(1 + jT_K \omega)}{j\omega(1 + jT_M \omega)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

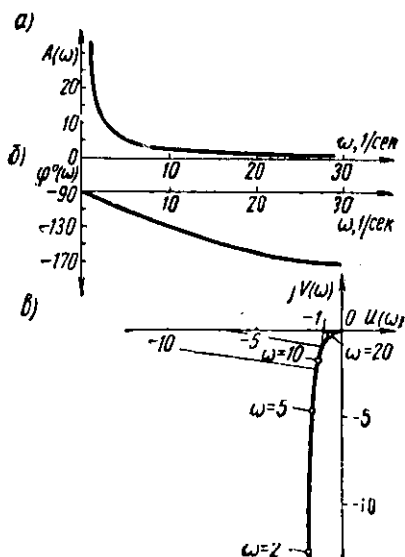


Рис. 5.3. Частотные характеристики следящей системы:

а — амплитудная; б — фазовая; в — амплитудно-фазовая.

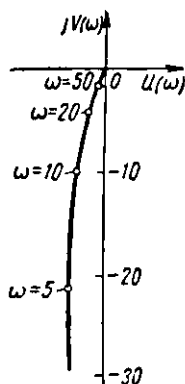


Рис. 5.4. Амплитудно-фазовая характеристика следящей системы с корректирующим контуром переменного тока

где

$$U(\omega) = -\frac{D(T_M - T_K)}{1 + T_M^2 \omega^2} = -\frac{3,36}{1 + 0,07^2 \omega^2};$$

$$V(\omega) = -\frac{D(T_K T_M \omega^2 + 1)}{\omega(1 + T_M^2 \omega^2)} = -\frac{0,314 \omega^2 + 112}{\omega(1 + 0,07^2 \omega^2)}.$$

Задавая различные ω и вычисляя $U(\omega)$, $V(\omega)$, строим амплитудно-фазовую характеристику системы.

Результаты вычислений представлены в табл. 5.4, по которой построена кривая на рис. 5.4.

Пример 5.5. Построение амплитудно-фазовой характеристики системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока.

Таблица 5.4

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
1	-3,34	-112
2	-3,3	-55,5
5	-2,99	-21,3
10	-2,25	-9,63
20	-1,135	-4,02
50	-0,254	-1,35
100	-0,067	-0,65

Структурная схема системы приведена на рис. 4.11. Численные значения параметров приведены в примере 4.18.

Подставляя в выражение для передаточной функции системы $p=j\omega$, имеем

$$W(j\omega) = \frac{K}{1 + k_y k_0 + j\omega(T_K + T_M) - T_K T_M \omega^2} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = \frac{\frac{k_y}{c_e} (1 + k_y k_0 - T_K T_M \omega^2)}{|1 + k_y k_0 - T_K T_M \omega^2|^2 + \omega^2 (T_K + T_M)^2};$$

$$V(\omega) = - \frac{\frac{k_y}{c_e} (T_K + T_M) \omega}{|1 + k_y k_0 - T_K T_M \omega^2|^2 + \omega^2 (T_K + T_M)^2}.$$

Подставляя численные значения параметров системы, получим

$$U(\omega) = \frac{440(421 - 6,73 \omega^2)}{(421 - 6,73 \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot 30,8^2};$$

$$V(\omega) = - \frac{440 \cdot 30,8 \omega}{(421 - 6,73 \omega^2)^2 + \omega^2 \cdot 30,8^2}.$$

Задавая ряд значений ω , вычисляем $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Результаты вычислений сведены в табл. 5.5, на основании которой строим кривую амплитудно-фазовой характеристики (рис. 5.5).

Таблица 5.5

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	1,045	0
2	1,09	-0,17
5	1,27	-0,772
10	-0,702	-0,855
20	-0,18	-0,049
50	-0,025	~0

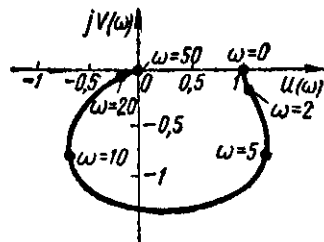


Рис. 5.5. Амплитудно-фазовая характеристика системы автоматического регулирования скорости двигателя

Пример 5.6. Построение амплитудно-фазовой характеристики следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем и жесткой обратной связью по скорости.

Структурная схема системы изображена на рис. 4.8. Численные значения параметров системы приведены в примере 4.16.

Подставляя в выражение для передаточной функции разомкнутой системы $p=j\omega$, получим

$$W(j\omega) = \frac{D}{-T_m \omega^2 + j\omega(1 + k_y k_0)} = U(\omega) + jV(\omega),$$

где

$$U(\omega) = -\frac{DT_m}{\omega^2 T_m^2 + (1 + k_y k_0)^2} =$$

$$= -\frac{1470 \cdot 0,1}{0,1^2 \omega^2 + (1 + 1100 \cdot 0,011)^2},$$

$$V(\omega) = -\frac{D(1 + k_y k_0)}{\omega [\omega^2 T_m^2 + (1 + k_y k_0)^2]} =$$

$$= -\frac{1470(1 + 1100 \cdot 0,011)}{\omega [0,1^2 \omega^2 + (1 + 1100 \cdot 0,011)^2]}.$$

Таблица 5.6

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	-0,858	$-\infty$
2	-0,857	-55,7
5	-0,855	-22,2
10	-0,852	-11,2
20	-0,838	-5,6
50	-0,748	-2
100	-0,543	-0,725

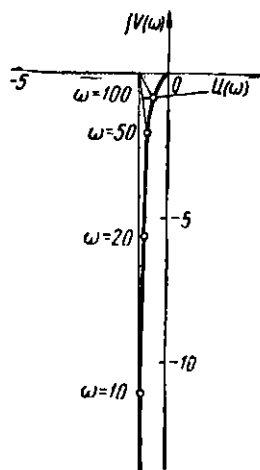


Рис. 5.6. Амплитудно-фазовая характеристика следящей системы с жесткой обратной связью по скорости

Задавая ряд значений ω , вычисляем $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Результаты вычислений сведены в табл. 5.6, по которой построена амплитудно-фазовая характеристика (рис. 5.6).

Пример 5.7. Построение амплитудно-фазовой характеристики следящей системы с пассивным дифференцирующим контуром.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.7, а.

Параметры системы: $k_c = 28$ в/рад; $k_y = 1158$; $c_e = 0,18 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; $j_p = 400$, $T_m = 0,04$ сек; $\alpha = 0,333$; $\tau = 0,01$ сек.

Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{k_c k_y \frac{1}{c_e j_p} (\alpha + \tau p)}{p(1 + \tau p)(1 + T_m p)} = \frac{D(\alpha + \tau p)}{p(1 + \tau p)(1 + T_m p)},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_{elp}}.$$

После подстановки $p = j\omega$ получим

$$W(j\omega) = \frac{D(\alpha + j\omega\tau)}{j\omega(1 + j\omega\tau)(1 + j\omega T_m)}.$$

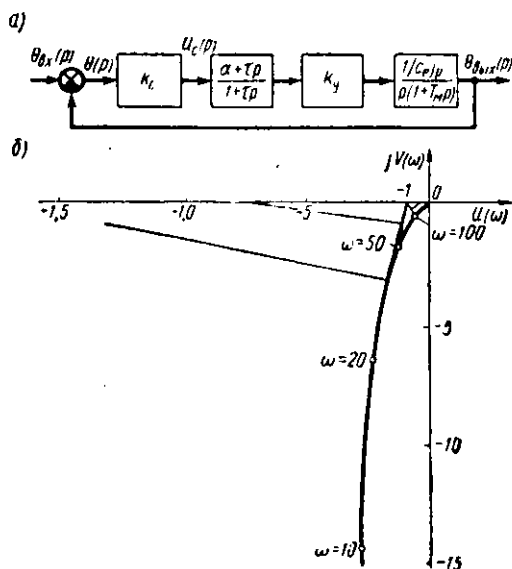


Рис. 5.7. Следящая система с пассивным дифференцирующим контуром

Комплексную частотную функцию можно представить в виде произведения:

$$W(j\omega) = W_1(j\omega) W_2(j\omega) W_3(j\omega) W_4(j\omega).$$

Принимая во внимание численные значения параметров системы, можно записать

$$W_1(j\omega) = \frac{D}{j\omega} = -j \frac{450}{\omega} = A_1(\omega) e^{j\varphi_1(\omega)},$$

$$W_2(j\omega) = \alpha + j\omega\tau = 0,333 + j0,01\omega = A_2(\omega) e^{j\varphi_2(\omega)},$$

$$W_3(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j0,01\omega} = A_3(\omega) e^{j\varphi_3(\omega)},$$

$$W_4(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_m} = \frac{1}{1 + 0,04\omega} = A_4(\omega) e^{j\varphi_4(\omega)}.$$

Используя правило умножения комплексных величин (модули перемножаются, а аргументы складываются), получим численные значения $W(j\omega)$.

Вычисления сведены в табл. 5.7, по данным которой построена амплитудно-фазовая характеристика (рис. 5.7, б).

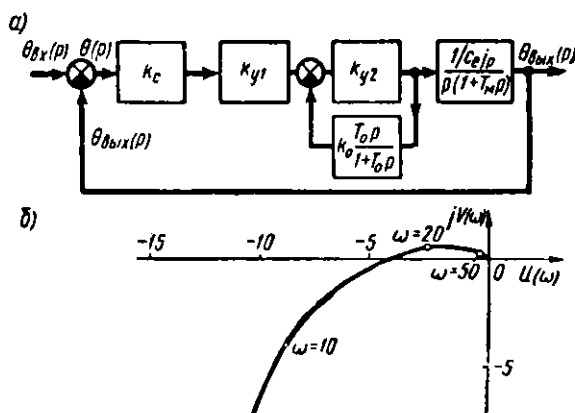


Рис. 5.8. Следящая система с гибкой обратной связью, охватывающей безынерционный усилитель

Таблица 5.7

ω	A_1	A_2	A_3	A_4	φ_1°	φ_2°	φ_3°	φ_4°	$\prod_{i=1}^4 A_i$	$\sum_{i=1}^4 \varphi_i^\circ$
1	450	0,333	1	1	-90°	1°45'	-40'	-2°20'	150	-91°15'
5	90	0,334	1	0,945	-90°	8°30'	-2°50'	-11°20'	28,2	-95°40'
10	45	0,3347	0,995	0,929	-90°	16°45'	-5°45'	-21°45'	13,9	-100°45'
12	37,5	0,351	0,992	0,907	-90°	19°50'	-5°55'	-28°37'	11,85	-105°42'
15	30	0,364	0,99	0,857	-90°	24°15'	-8°32'	-31°	9,18	-106°
20	22,5	0,3886	0,98	0,781	-90°	31°	-11°20'	-38°40'	6,68	-109°
25	18	0,4165	0,97	0,707	-90°	37°	-14°12'	-45°	5,14	-112°12'
30	15	0,447	0,958	0,683	-90°	42°	-16°45'	-50°12'	4,38	-114°45'
40	11,25	0,519	0,929	0,5967	-90°	50°12'	-21°50'	-58°	3,22	-119°40'
50	9	0,6	0,895	0,448	-90°	56°20'	-26°35'	-63,25'	2,16	-124°
60	7,5	0,6863	0,86	0,385	-90°	60°55'	-31°	-67°20'	1,705	-128°20'
70	6,4	0,7752	0,819	0,337	-90°	64°30'	-35°	-70°20'	1,365	-131°40'
80	5,625	0,866	0,781	0,299	-90°	67°22'	-38°40'	-72°40'	1,13	-134°
100	4,5	1,051	0,707	0,243	-90°	71°35'	-45°	-75°55'	0,815	-139°20'

Пример 5.8. Построение амплитудно-фазовой характеристики следящей системы с гибкой обратной связью, охватывающей безынерционный усилитель.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.8, а.

Система имеет следующие параметры: $k_c = 18 \text{ в/рад}$; $k_{y1} = 60$, $k_{y2} = 10$, $c_e = 0,2 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$, $j_p = 360$, $k_0 = 0,8$, $T_0 = 0,01 \text{ сек}$, $T_m = 0,06 \text{ сек}$.

Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{D(1 + T_0 p)}{p(1 + T_m p)[1 + T_0(1 + k_{y2} k_0)p]},$$

где

$$D = \frac{k_c k_{y1} \cdot k_{y2}}{c_e j_p}.$$

Заменяя p на $j\omega$, получим

$$W(j\omega) = \frac{D(1 + T_0 j\omega)}{j\omega(1 + jT_m \omega)[1 + T_0(1 + k_{y2} k_0)j\omega]} = U(\omega) + jV(\omega).$$

Подставляя численные значения параметров и разделяя мнимую и вещественную части, получим

$$U(\omega) = - \frac{21 + 0,0081 \omega^2}{0,0225 \omega^2 + (1 - 0,0054 \omega^2)^2};$$

$$V(\omega) = - \frac{0,225 \omega^2 + 150(1 - 0,0054 \omega^2)}{\omega[0,0225 \omega^2 + (1 - 0,0054 \omega^2)^2]}.$$

Задавая ряд значений ω , вычислим функции $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Результаты расчетов сведены в табл. 5.8.

Таблица 5.8

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	-21	$-\infty$
2	-20	-70,5
5	-16,2	-23,4
10	-8,85	-3,72
20	-2,34	-0,4
50	-0,194	0,124
100	-0,034	0,013

Таблица 5.9

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	-118,3	$-\infty$
2	-4,83	-1,73
3	-2,23	-0,806
5	-0,855	-0,367
10	-0,270	-0,158
20	-0,146	-0,0475
50	$-0,92 \cdot 10^{-3}$	$-2,3 \cdot 10^{-3}$

Амплитудно-фазовая характеристика следящей системы с гибкой обратной связью приведена на рис. 5.8, б.

Пример 5.9. Построение амплитудно-фазовой характеристики следящей системы с гибкой обратной связью.

Структурная схема системы представлена на рис. 5.9, а и имеет следующие значения параметров:

$$k_c = 0,87 \text{ в/град}, T_q = 0,12 \text{ сек}, T_m = 0,25 \text{ сек},$$

$$k_y = 100, c_e = 0,0106 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}; j_p = 165, \sqrt{}$$

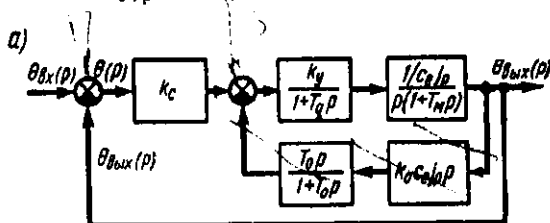
$$k_0 = 0,2, T_0 = 0,1 \text{ сек}.$$

Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{D(1 + T_0 p)}{p + p^2 [T_q + T_m + T_0(1 + k_y k_0)] + (T_q T_m + T_m T_0 + T_q T_0) p^3 + T_q T_m T_0 p^4}$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p} = \frac{0,87 \cdot 100}{0,0106 \cdot 165} = 49,8 \frac{1}{\text{сек}}$$



б)

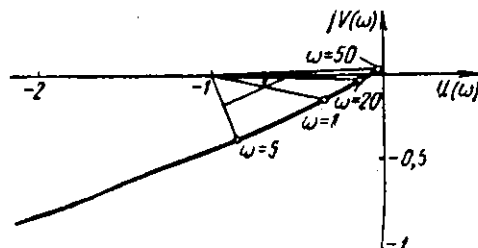


Рис. 5.9. Следящая система с гибкой обратной связью

Подставляя $p = j\omega$ и численные значения параметров, получим

$$W(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)},$$

где

$$\begin{aligned} A(j\omega) &= D(1 + jT_0 \omega) = 49,8(1 + j0,1 \omega); \\ B(j\omega) &= j\omega - \omega^2 [T_q + T_m + T_0(1 + k_y k_0)] - \\ &\quad - j\omega^3 (T_q T_m + T_m T_0 + T_q T_0) + T_q T_m T_0 \omega^4 = \\ &= j\omega - \omega^2 [0,12 + 0,25 + 0,1(1 + 100 \cdot 0,2)] - \\ &\quad - j\omega^3 (0,12 \cdot 0,25 + 0,25 \cdot 0,1 + 0,12 \cdot 0,1) + 0,12 \cdot 0,25 \cdot 0,1 \omega^4. \end{aligned}$$

После преобразований

$$W(j\omega) = \frac{49,8(1 + j0,1 \omega)}{j\omega - 2,47 \omega^2 - j0,067 \omega^3 + 0,003 \omega^4}.$$

Разделяя мнимую и вещественную части, имеем:

$$U(\omega) = \frac{-49,8(2,47 - 0,003\omega^2) + 4,98(1 - 0,067\omega^2)}{\omega^2(2,47 - 0,003\omega^2)^2 + (1 - 0,067\omega^2)^2};$$

$$V(\omega) = -\frac{49,8\omega^2(2,47 - 0,003\omega^2) + 4,98(1 - 0,067\omega^2)}{\omega[\omega^2(2,47 - 0,003\omega^2)^2 + (1 - 0,067\omega^2)^2]}.$$

Задавая ряд значений ω , подсчитываем $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Результаты расчетов сведены в табл. 5.9, на основании которой

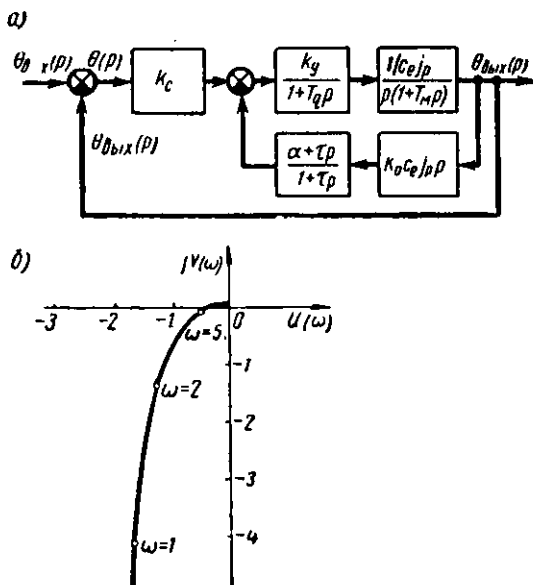


Рис. 5.10. Следящая система с гибкой и жесткой обратными связями по скорости

построена кривая амплитудно-фазовой характеристики, представленная на рис. 5.9, б.

Пример 5.10. Построение амплитудно-фазовой характеристики следящей системы с гибкой и жесткой обратными связями по скорости.

Структурная схема системы представлена на рис. 5.10, а. Параметры системы: $k_c = 0,87$ в/град; $T_q = 0,1$ сек;

$$T_m = 0,5 \text{ сек}; c_e = 0,0103 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}; j_p = 245; k_y = 20;$$

$$\alpha = 0,25; \tau = 0,01 \text{ сек}; k_0 = 0,1.$$

Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где

$$A(p) = k_c k_y \frac{1}{c_e j p} (1 + \tau p);$$

$$B(p) = (1 + k_y k_0 a) p + [T_q + T_m + \tau(1 + k_y k_0)] p^2 + \\ + (T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau) p^3 + T_q T_m \tau p^4.$$

Подставив $p = j\omega$, получим

$$W(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = k_c k_y \frac{1}{c_e j p} (1 + j \tau \omega) = 0,87 \cdot 20 \frac{1}{0,0103 \cdot 245} (1 + j 0,01 \omega);$$

$$B(j\omega) = (1 + k_y k_0 a) j \omega - [T_q + T_m + (1 + k_y k_0) \tau] \omega^2 - \\ - (T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau) j \omega^3 + T_q T_m \tau \omega^4 = (1 + 20 \cdot 0,1 \cdot 0,25) j \omega - \\ - [0,1 + 0,5 + (1 + 20 \cdot 0,1) \cdot 0,01] \omega^2 - \\ - (0,1 \cdot 0,5 + 0,1 \cdot 0,01 + 0,01 \cdot 0,5) j \omega^3 + 0,1 \cdot 0,5 \cdot 0,01 \omega^4.$$

После преобразований

$$W(j\omega) = \frac{4,63 (1 + j 0,01 \omega)}{j \omega - 0,42 \omega^2 - j 0,0374 \omega^3 + 0,000333 \omega^4}.$$

Разделяя мнимую и вещественную части, получим:

$$U(\omega) = \frac{4,63 (-0,42 + 3,33 \cdot 10^{-4} \omega^2) + 0,0463 (1 - 0,0374 \omega^2)}{\omega^2 (-0,42 + 3,33 \cdot 10^{-4} \omega^2)^2 + (1 - 0,0374 \omega^2)^2};$$

$$V(\omega) = \frac{-4,63 (1 - 0,0374 \omega^2) + 0,0463 \omega^2 (-0,42 + 3,33 \cdot 10^{-4} \omega^2)}{\omega [\omega^2 (-0,42 + 3,33 \cdot 10^{-4} \omega^2)^2 + (1 - 0,0374 \omega^2)^2]}.$$

Подставляя различные значения ω , вычислим $U(\omega)$ и $V(\omega)$. Результаты расчетов сведены в табл. 5.10, по которой построена амплитудно-фазовая характеристика, представленная на рис. 5.10, б.

Пример 5.11. Построение амплитудно-фазовой характеристики следящей системы с дифференцирующим и интегрирующим контурами в основной цепи и с гибкой обратной связью по скорости.

Структурная схема системы представлена на рис. 5.11, а.

Таблица 5.10

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
0	-1,905	$-\infty$
1	-1,73	-4,07
2	-1,33	-1,41
5	-0,45	-0,0365
10	-0,085	0,0465

Параметры системы: $k_c = 0,87$ в/град; $k_d = 0,1$ сек;

$$k_u = 1 \frac{1}{\text{сек}}; k_y = 100; c_e = 0,00818 \frac{\text{с}}{\text{град/сек}}; j_p = 220;$$

$$k_0 = 0,2; T_q = 0,15 \text{ сек}; T_m = 0,3 \text{ сек}; T_0 = 0,01 \text{ и } 0,05 \text{ сек}.$$

Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{k_c k_y \frac{1}{c_e j_p} (1 + T_0 p) \left(1 + k_d p + k_u \frac{1}{p} \right)}{p + [T_m + T_q + T_0(1 + k_y k_0)] p^2 + (T_q T_m + T_q T_0 + T_m T_0) p^3 + T_q T_m T_0 p^4}.$$

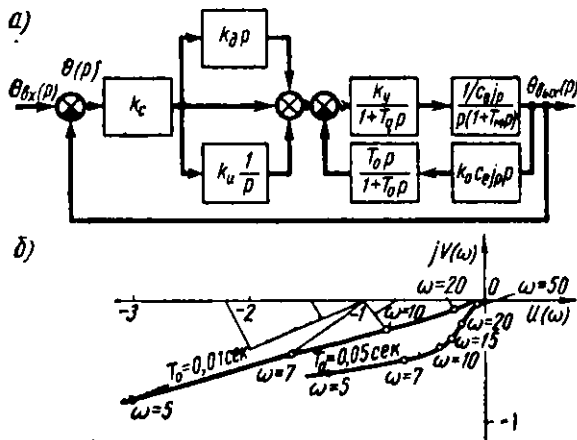


Рис. 5.11. Следящая система с дифференцирующим и интегрирующим звеньями и гибкой обратной связью по скорости

Подставляя $p = j\omega$, получим

$$W(j\omega) = \frac{D [k_u - (k_d + T_0) \omega^2] +}{-\omega^3 + (T_q T_m + T_q T_0 + T_m T_0) \omega^4 -} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ j \omega D (1 + k_u T_0 - \omega^2 k_d T_0)}{-j \omega^3 [T_m + T_q + T_0(1 + k_y k_0) - \omega^2 T_q T_m T_0]},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}.$$

Подставляя численные значения параметров системы, получим: при $T_0 = 0,01$ сек

$$W(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = 48,3 [1 - (0,1 + 0,01)\omega^2] + j\omega \cdot 48,3 (1 + 1 \cdot 0,01 - \omega^2 \cdot 0,1 \cdot 0,01) = 48,3 - 5,32\omega^2 + j\omega \cdot 48,3 (1,01 - 0,001\omega^2),$$

$$B(j\omega) = -\omega^2 + (0,15 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,01 + 0,3 \cdot 0,01)\omega^4 - j\omega^3 [0,3 + 0,15 + 0,01 (1 + 100 \cdot 0,2) - \omega^2 \cdot 0,15 \cdot 0,3 \cdot 0,01] =$$

$$= -\omega^2 + 0,0495\omega^4 - j\omega^3 (0,66 - 4,5 \cdot 10^{-4}\omega^2);$$

при $T_0 = 0,05$ сек

$$W(j\omega) = \frac{A(j\omega)}{B(j\omega)},$$

где

$$A(j\omega) = 48,3 [1 - (0,1 + 0,05)\omega^2] + j\omega \cdot 48,3 (1,0 + 1,0 \cdot 0,05 - \omega^2 \cdot 0,1 \cdot 0,05) = 48,3 - 7,25\omega^2 + j\omega \cdot 48,3 (1,05 - 0,005\omega^2);$$

$$B(j\omega) = -\omega^2 + (0,15 \cdot 0,3 + 0,15 \cdot 0,05 + 0,3 \cdot 0,05)\omega^4 - j\omega^3 [0,3 + 0,15 + 0,05 (1 + 100 \cdot 0,2) - 0,15 \cdot 0,3 \cdot 0,05\omega^2] =$$

$$= -\omega^2 + 0,054\omega^4 - j\omega^3 (0,765 - 6,75 \cdot 10^{-4}\omega^2).$$

Разделяя мнимые и вещественные части, вычисляем их для разных значений ω . Результаты расчетов сведены в табл. 5.11, по которой построены соответствующие амплитудно-фазовые характеристики (рис. 5.11, б).

Т а б л и ц а 5.11

$T_0 = 0,01$ сек			$T_0 = 0,05$ сек		
ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$	ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$
3	-7,6	-2,12	5	-1,3	-0,613
5	-3	-0,823	7	-0,684	-0,48
7	-1,63	-0,45	10	-0,373	-0,364
10	-0,863	-0,231	15	-0,227	-0,257
20	-0,251	-0,05	20	-0,193	-0,174
50	-0,053	-0,001	40	-0,08	-0,016
100	—	—	100	—	—

§ 5.3. Примеры построения логарифмических частотных характеристик

Пример 5.12. Построение логарифмических частотных характеристик апериодического звена.

Передаточный коэффициент звена $k=1$; постоянная времени $T=0,5$ и $2,5$ сек.

Передаточная функция апериодического звена

$$W(p) = \frac{k}{1 + Tp}.$$

Сопрягающие частоты:

при $T=0,5$ сек

$$\omega_1 = \frac{1}{0,5} = 2 \text{ сек}^{-1} [0,3 \text{ дек}];$$

при $T=2,5$ сек

$$\omega_2 = \frac{1}{2,5} = 0,4 \text{ сек}^{-1} [-0,4 \text{ дек}].$$

Строим асимптотические (приближенные) логарифмические амплитудные характеристики, проводя из точек ω_1 и ω_2 прямые с наклоном -20 дб/дек.

Фазовую частотную характеристику строим в логарифмическом масштабе частоты по формуле

$$\varphi = -\arctg T\omega$$

или с помощью шаблона. Частотные характеристики изображены на рис. 5.12.

Пример 5.13. Построение логарифмических частотных характеристик двух последовательно включенных апериодических звеньев.

Постоянные времени: $T_1 = 0,01$ сек и $T_2 = 0,22$ сек; общий передаточный коэффициент $k = k_1 k_2 = 32$.

Передаточная функция системы

$$W(p) = \frac{k}{(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)}.$$

В численном выражении

$$W(p) = \frac{32}{(1 + 0,01 p)(1 + 0,22 p)}.$$

Логарифмическая амплитудная характеристика (л. а. х.) системы $L(\omega)$ будет равна сумме двух составляющих $L_1(\omega)$ и $L_2(\omega)$, поднятой на $20 \lg k$ дб по оси ординат, причем:

$$L_1(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{1 + 0,01 j\omega} \right|;$$

$$L_2(\omega) = 20 \lg \left| \frac{1}{1 + 0,22 j\omega} \right|.$$

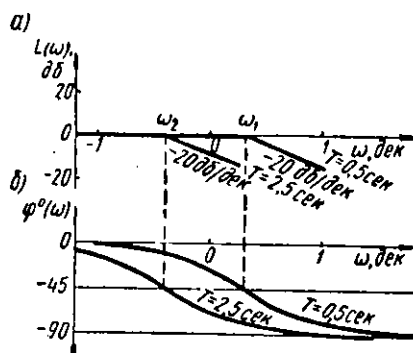


Рис. 5.12. Логарифмические частотные характеристики апериодического звена:

а — амплитудная; б — фазовая

Приближенная л. а. х. строится при помощи сопрягающих частот:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ сек}^{-1} [2 \text{ дек}];$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0,22} = 4,56 \text{ сек}^{-1} [0,658 \text{ дек}].$$

До точки $\omega_2 = 0,658 \text{ дек}$ л. а. х. идет параллельно оси абсцисс на высоте $20 \lg 32 = 20 \cdot 1,505 = 30,1 \text{ дб}$.

В интервале $\omega_1 > \omega > \omega_2$ (от 0,658 до 2 дек) л. а. х. представляет собой прямую с наклоном -20 дб/дек , а при $\omega > \omega_1$ (больше 2 дек) с наклоном -40 дб/дек .

Фазовая частотная характеристика системы $\varphi(\omega)$ будет определяться суммой двух составляющих $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$, рассчитываемых по формулам:

$$\varphi_1(\omega) = -\arctg T_1 \omega = -\arctg 0,01 \omega;$$

$$\varphi_2(\omega) = -\arctg T_2 \omega = -\arctg 0,22 \omega.$$

Логарифмические частотные характеристики системы построены на рис. 5.13.

✓ **Пример 5.14.** Построение логарифмических частотных характеристик следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем.

Структурная схема системы приведена на рис. 4.7. Значения параметров системы указаны в примере 4.14.

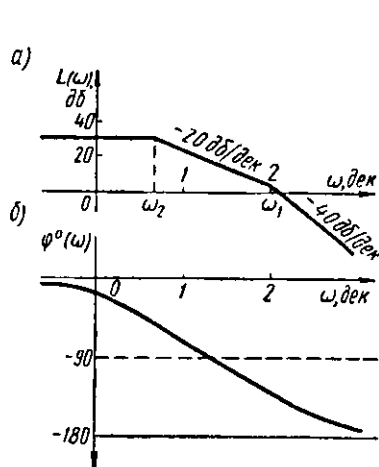


Рис. 5.13. Логарифмические частотные характеристики двух последовательных аperiodических звеньев:

а — амплитудная; б — фазовая

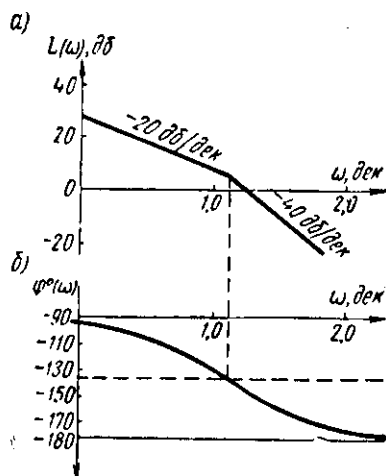


Рис. 5.14. Логарифмические частотные характеристики следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем:

а — амплитудная; б — фазовая

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c k_y \frac{1}{1 + T_m p} \cdot \frac{1}{p} = \frac{25,7}{(1 + 0,075p)p}.$$

Добротность системы

$$D_v = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) = k_c k_y \frac{1}{c_e j p} = 57,3 \cdot 64 \frac{1}{408 \cdot 0,35} = 25,7 \text{ сек}^{-1} [28,2 \text{ дб}].$$

Сопрягающая частота

$$\omega_1 = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{0,075} = 13,3 \text{ сек}^{-1} [1,125 \text{ дек}].$$

Логарифмическая амплитудная характеристика при $\omega < \omega_1$ идет с наклоном -20 дб/дек , а при $\omega > \omega_1$ — с наклоном -40 дб/дек .

Фазовая частотная характеристика представляет собой фазовую характеристику аperiodического звена, смещенную на 90° вниз по оси ординат за счет влияния интегрирующего звена (вызывает постоянный сдвиг фазы на -90°).

Характеристики представлены на рис. 5.14.

Пример 5.15. Построение логарифмических частотных характеристик следящей системы с последовательным корректирующим контуром.

Структурная схема системы приведена на рис. 4.9. Численные значения параметров системы указаны в примере 4.17.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$\begin{aligned} W(p) &= k_c k_k (1 + T_k p) \cdot k_y \frac{1}{(1 + T_m p)p} = \\ &= \frac{k_c k_k k_y \frac{1}{c_e j p} (1 + T_k p)}{(1 + T_m p)p} = \frac{112 (1 + 0,04p)}{(1 + 0,07p)p}. \end{aligned}$$

Добротность системы

$$D_v = \lim_{p \rightarrow 0} pW(p) = 112 \text{ сек}^{-1} [41 \text{ дб}].$$

Сопрягающие частоты

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0,07} = 14,3 \text{ сек}^{-1} [1,156 \text{ дек}]; \\ \omega_2 &= \frac{1}{T_k} = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ сек}^{-1} [1,398 \text{ дек}]. \end{aligned}$$

Наклон л. а. х. при $\omega < \omega_1$ составляет -20 дб/дек, при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ — -40 дб/дек; при $\omega > \omega_2$ — -20 дб/дек.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики следящей системы построены на рис. 5.15.

Пример 5.16. Построение логарифмических частотных характеристик системы автоматического регулирования скорости двигателя постоянного тока.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.11, а, а численные значения параметров — в примере 4.18.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{1}{1 + T_{\kappa} p} \cdot k_y \cdot \frac{\frac{1}{c_e} \cdot k_0 \cdot c_e}{1 + T_M p} = \frac{k_y \cdot k_0}{(1 + T_{\kappa} p)(1 + T_M p)} = \\ &= \frac{700 \cdot 0,6}{(1 + 30,6 p)(1 + 0,22 p)} = \frac{420}{(1 + 30,6 p)(1 + 0,22 p)}. \end{aligned}$$

Коэффициент усиления системы регулирования

$$K = \lim_{p \rightarrow 0} W(p) = 420 [52,5 \text{ дб}].$$

Сопрягающие частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{T_{\kappa}} = \frac{1}{30,6} = 0,0327 \text{ сек}^{-1} [-1,485 \text{ дек}];$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_M} = \frac{1}{0,22} = 4,55 \text{ сек}^{-1} [-0,658 \text{ дек}].$$

Наклон л. а. х. составляет: при $\omega < \omega_1$ — 0 дб/дек; при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ — -20 дб/дек, при $\omega > \omega_2$ — -40 дб/дек.

Амплитудная и фазовая частотные характеристики приведены соответственно на рис. 5.16, а и б.

Пример 5.17. Построение логарифмических частотных характеристик следящей системы с асинхронным двигателем и жесткой обратной связью по скорости.

Структурная схема системы изображена на рис. 4.8. Численные значения параметров приведены в примере 4.16.

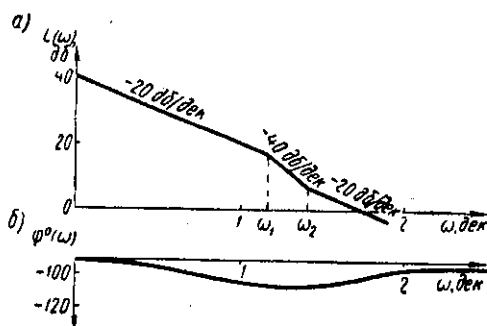


Рис. 5.15. Логарифмические частотные характеристики следящей системы с последовательным корректирующим контуром:

а — амплитудная; б — фазовая

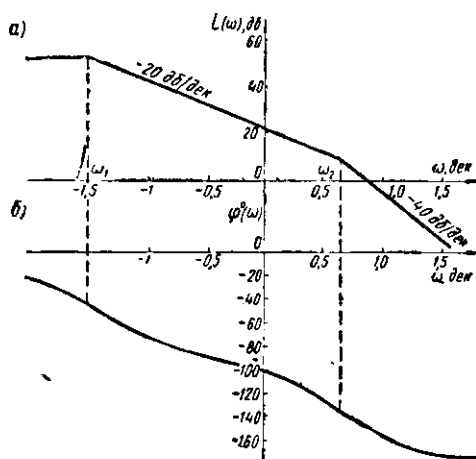


Рис. 5.16. Логарифмические частотные характеристики системы автоматического регулирования скорости двигателя

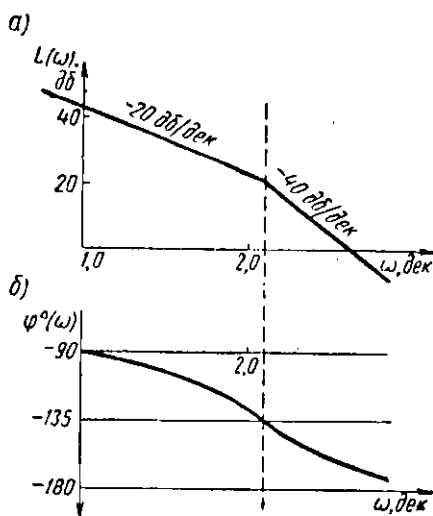


Рис. 5.17. Логарифмические частотные характеристики следящей системы с жесткой обратной связью по скорости:

а — амплитудная; б — фазовая

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c \frac{\frac{1}{k_y} \frac{c_e \cdot j p}{1 + T_m p}}{\frac{1}{1 + k_y \frac{c_e \cdot j p}{1 + T_m p} \cdot k_0 \cdot c_e \cdot j p}} \cdot \frac{1}{p} =$$

$$= \frac{1,6 \cdot 57,3 \cdot 1100 : (0,22 \cdot 312)}{(1 + 1100 \cdot 0,011)p + 0,1p^2} = \frac{1470}{p(12,1 + 0,1p)} = \frac{121,5}{p(1 + 0,00825p)}.$$

Добротность системы

$$D_v = 121,5 \text{ сек}^{-1} [41,7 \text{ дб}].$$

Сопрягающая частота

$$\omega_1 = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{0,00825} = 121 \text{ сек}^{-1} [2,08 \text{ дек}].$$

Характеристики приведены на рис. 5.17.

Пример 5.18. Построение логарифмических частотных характеристик следящей системы с пассивным дифференцирующим контуром в главной цепи.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.7, а. Численные значения параметров приведены в примере 5.7.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{k_c \cdot k_y \cdot \frac{1}{c_e \cdot j p} (\alpha + \tau p)}{p(1 + \tau p)(1 + T_m p)} =$$

$$= \frac{450(0,333 + 0,01p)}{p(1 + 0,01p)(1 + 0,04p)} = \frac{150(1 + 0,03p)}{p(1 + 0,01p)(1 + 0,04p)}.$$

Добротность системы

$$D_v = 150 \text{ сек}^{-1} [43,7 \text{ дб}].$$

Сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{0,04} = 25 \text{ сек}^{-1} [1,398 \text{ дек}];$$

$$\omega_2 = \frac{1}{0,03} = 33,4 \text{ сек}^{-1} [1,523 \text{ дек}];$$

$$\omega_3 = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ сек}^{-1} [2 \text{ дек}].$$

Амплитудная характеристика имеет наклон: при $\omega < \omega_1$ — -20 дб/дек ; при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ — -40 дб/дек ; при $\omega_2 < \omega < \omega_3$ — -20 дб/дек ; при $\omega > \omega_3$ — -40 дб/дек . Характеристики приведены на рис. 5.18.

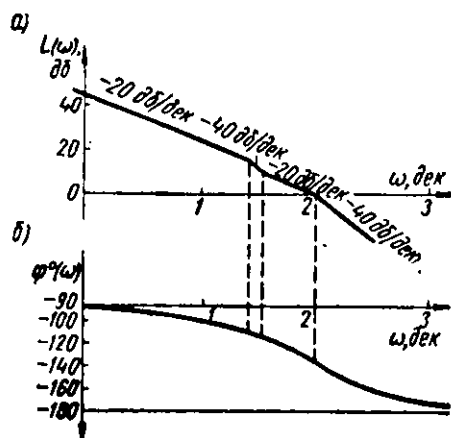


Рис. 5.18. Логарифмические частотные характеристики следящей системы с пассивным дифференцирующим контуром:

а — амплитудная; б — фазовая

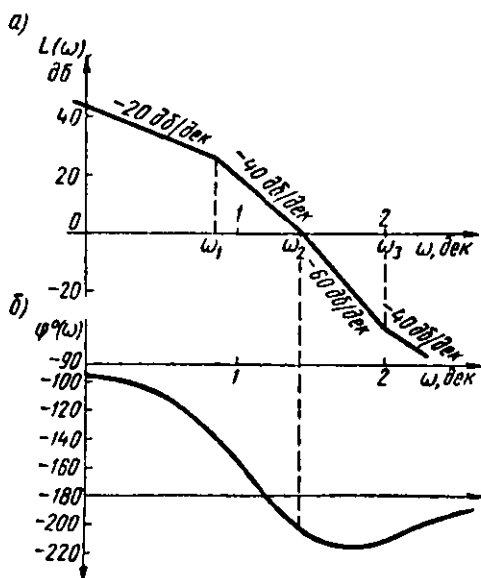


Рис. 5.19. Логарифмические частотные характеристики следящей системы с гибкой обратной связью, охватывающей безынерционный усилитель:

а — амплитудная; б — фазовая

Пример 5.19. Построение логарифмических частотных характеристик следящей системы с гибкой обратной связью, охватывающей безынерционный усилитель. Структурная схема системы приведена на рис. 5.8, а. Численные значения параметров приведены в примере 5.8.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$\begin{aligned}
 W(p) &= k_c \cdot k_{y1} \cdot \frac{k_{y2}}{1 + k_{y2} \cdot k_0 \frac{T_0 p}{1 + T_0 p}} \cdot \frac{1}{p(1 + T_m p)} = \\
 &= \frac{D(1 + T_0 p)}{p + (T_0 + k_{y2} \cdot k_0 \cdot T_0 + T_m) p^2 + (T_0 \cdot T_m + k_{y2} \cdot k_0 \cdot T_0 \cdot T_m) p^3} = \\
 &= \frac{150(1 + 0,01 p)}{p + 0,15 p^2 + 0,0054 p^3}.
 \end{aligned}$$

Добротность системы

$$D_v = 150 \text{ сек}^{-1} [43,5 \text{ дб}].$$

Сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{0,15} = 6,66 \text{ сек}^{-1} [0,824 \text{ дек}];$$

$$\omega_2 = \frac{0,15}{0,0054} = 27,8 \text{ сек}^{-1} [1,444 \text{ дек}];$$

$$\omega_3 = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ сек}^{-1} [2 \text{ дек}].$$

Логарифмическая амплитудная характеристика этой системы имеет наклон: при $\omega < \omega_1$ — —20 дб/дек, при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ — —40 дб/дек, при $\omega_2 < \omega < \omega_3$ — —60 дб/дек, при $\omega > \omega_3$ — —40 дб/дек. Характеристики приведены на рис. 5.19.

Пример 5.20. Построение логарифмических частотных характеристик следящей системы с гибкой обратной связью.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.9, а. Численные значения параметров приведены в примере 5.9.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$\begin{aligned}
 W(p) &= k_c \frac{\frac{k_y}{1 + T_q p} \cdot \frac{1}{(1 + T_m p) p}}{1 + k_0 \frac{c_e j p}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p) p}} = \\
 &= \frac{k_y}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p) p} \cdot \frac{1}{1 + k_0 \frac{c_e j p}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p) p}}
 \end{aligned}$$

$$= \frac{k_c k_y \frac{1}{c_e \cdot i p} (1 + T_0 p)}{p + (T_q + T_0 + T_m + k_y k_0 T_0) p^2 + (T_q T_m + T_m T_0 + T_q T_0) p^3 + T_0 T_m T_0 p^4} =$$

$$= \frac{49,8 (1 + 0,1 p)}{p (1 + 2,47 p + 0,067 p^2 + 0,003 p^3)}.$$

Добротность системы

$$D_0 = 49,8 \text{ сек}^{-1} [34 \text{ дб}].$$

Сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \frac{1}{2,47} =$$

$$= 0,405 \text{ сек}^{-1} [-0,392 \text{ дек}];$$

$$\omega_2 = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ сек}^{-1} [1 \text{ дек}];$$

$$\omega_3 = \frac{2,47}{0,067} =$$

$$= 36,8 \text{ сек}^{-1} [1,566 \text{ дек}];$$

$$\omega_4 = \frac{0,067}{0,003} =$$

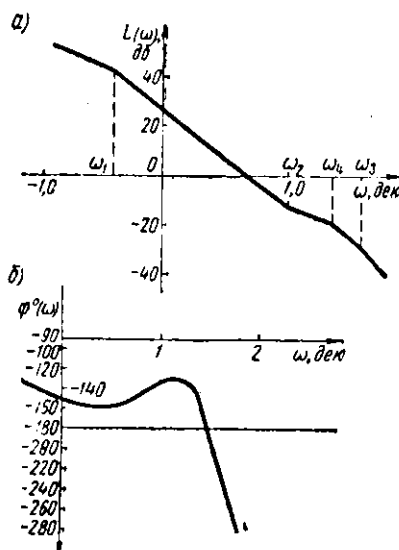
$$= 22,3 \text{ сек}^{-1} [1,348 \text{ дек}].$$

Характеристики приведены на рис. 5.20.

Пример 5.21. Построение логарифмических частотных характеристик следящей системы с гибкой и жесткой обратными связями по скорости.

Рис. 5.20. Логарифмические частотные характеристики следящей системы с гибкой обратной связью:

а — амплитудная; б — фазовая



Структурная схема системы приведена на рис. 5.10, а. Численные значения параметров приведены в примере 5.10.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c \frac{\frac{k_y}{1 + T_q p} \cdot \frac{1}{c_e \cdot i p}}{1 + \frac{k_y}{(1 + T_q p)} \cdot \frac{1}{p(1 + T_m p)} \frac{(a + \tau p)}{(1 + \tau p)} k_0 c_e \cdot i p} =$$

$$= \frac{\frac{k_c k_y}{c_e \cdot i p} (1 + \tau p)}{p [1 + (T_m + T_q + \tau + k_y k_0 \tau) p + (T_m T_q + \tau T_m + \tau T_q) p^2 +$$

$$\rightarrow \frac{6,95(1+0,01p)}{+ \tau T_m T_q p^3 + k_y k_0 \alpha] = \frac{6,95(1+0,01p)}{p[1+0,63p+0,056p^2+0,005p^3+0,5]} =$$

$$= \frac{4,65(1+0,01p)}{p[1+0,42p+0,0374p^2+0,0003p^3]}.$$

Добротность системы

$$D_v = 4,65 \text{ сек}^{-1} [13,4 \text{ дБ}].$$

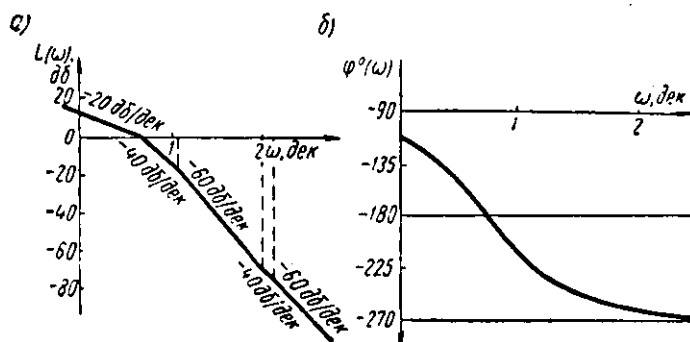


Рис. 5.21. Логарифмические частотные характеристики следящей системы с гибкой и жесткой обратными связями по скорости:

а — амплитудная; б — фазовая

Сопрягающие частоты

$$\omega_1 = \frac{2}{0,42} = 4,8 \text{ сек}^{-1} [0,68 \text{ дек}];$$

$$\omega_2 = \frac{0,42}{0,0374} = 11,2 \text{ сек}^{-1} [1,05 \text{ дек}];$$

$$\omega_3 = \frac{0,0374}{0,0003} = 125 \text{ сек}^{-1} [2,096 \text{ дек}];$$

$$\omega_4 = \frac{1}{0,01} = 100 \text{ сек}^{-1} [2 \text{ дек}].$$

Характеристики приведены на рис. 5.21.

§ 5.4. Примеры построения вещественных частотных характеристик

Пример 5.22. Построение вещественной частотной характеристики следящей системы по ее амплитудно-фазовой характеристике.

Рассмотрим следящую систему из примера 4.14.

Воспользуемся ее амплитудно-фазовой характеристикой (рис. 5.3, в).

Построение вещественной частотной характеристики произведем графическим методом.

Передаточная функция следящей системы на основании формулы (2.12)

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \Phi(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)},$$

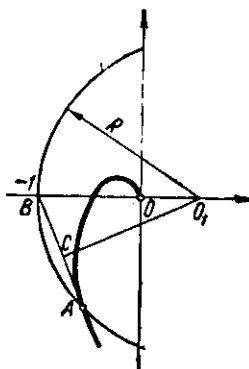


Рис. 5.22. Построение вещественной частотной характеристики следящей системы по ее амплитудно-фазовой характеристике

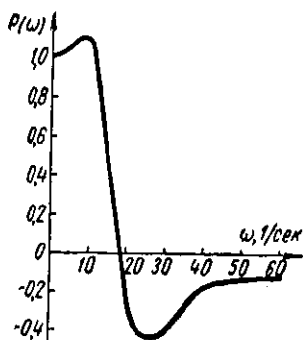


Рис. 5.23. Вещественная частотная характеристика следящей системы

где $W(p)$ — передачная функция разомкнутой системы.

Пусть

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega),$$

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где U, V, P, Q — функции ω . Тогда

$$P + jQ = \frac{U + jV}{1 + U + jV} = \frac{(1 + U - jV)(U + jV)}{(1 + U)^2 + V^2}.$$

Приравнявая вещественные части, получим

$$P = \frac{U(1 + U) + V^2}{(1 + U)^2 + V^2},$$

где P — ордината вещественной частотной характеристики, соответствующая координатам U и V амплитудно-фазовой характеристики.

Можно показать, что линии $P = \text{const}$ представляют собой окружности с радиусами

$$R = \left| \frac{1}{2(1-P)} \right|$$

и центрами, лежащими на вещественной полуоси на расстоянии

$$-\frac{1-2P}{2(1-P)}$$

от начала координат.

Пусть требуется найти $P(\omega)$ для точки A (рис. 5.22) амплитудно-фазовой характеристики, причем частота для этой точки равна ω_1 . Соединяем точку A прямой линией AB с точкой $(-1, j0)$ и восстанавливаем перпендикуляр CO_1 к середине отрезка AB до пересечения его с вещественной осью в точке O_1 . Расстояние от точки O_1 до точки $(-1, j0)$ равно радиусу окружности R . Измерив R , вычисляем

$$P(\omega_1) = \frac{2R-1}{2R} = 1 - \frac{1}{2R}.$$

Аналогичным путем определяются ординаты характеристики $P(\omega)$ для других значений ω .

Построенная таким образом вещественная частотная характеристика следящей системы изображена на рис. 5.23.

Пример 5.23. Построение вещественной частотной характеристики следящей системы с последовательным корректирующим контуром по ее амплитудно-фазовой характеристике.

Следящая система рассмотрена в примере 4.17, а ее амплитудно-фазовая характеристика приведена на рис. 5.4.

Передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в виде

$$W(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega).$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(j\omega)}{\Theta_{\text{вх}}(j\omega)} = \Phi(j\omega) = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega),$$

где

$$P(\omega) = \frac{U(\omega)[1 + U(\omega)] + V^2(\omega)}{[1 + U(\omega)]^2 + V^2(\omega)},$$

представляет собой искомую вещественную частотную характеристику замкнутой системы. Подставив в последнее выражение ряд значений $U(\omega)$ и $V(\omega)$, полученных при построении амплитудно-фазовой характеристики разомкнутой системы, вычислим соответствующие значения $P(\omega)$. Результаты расчетов сведены в табл. 5.12, с помощью которой построена вещественная частотная характеристика системы (рис. 5.24).

Таблица 5.12

ω	$U(\omega)$	$V(\omega)$	$P(\omega)$
2	-3,3	-55,5	1,0
5	-2,99	-21,3	1,0
10	-2,25	-9,63	1,005
20	-1,135	-4,02	1,01
50	-0,254	-1,35	0,685
100	-0,0673	-0,65	0,373

Пример 5.24. Построение вещественной частотной характеристики следящей системы с пассивным дифференцирующим контуром (рис. 5.7, а). Численные значения параметров системы приведены в примере 5.7. Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D(\alpha + \tau p)}{p(1 + \tau p)(1 + T_m p)}$$

На основании выражения (2.12) имеем

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \Phi(p) = \frac{D(\alpha + \tau p)}{T_m \tau p^3 + (T_m + \tau)p^2 + (1 + D\tau)p + \alpha D},$$

где

$$D = \frac{k_y k_c}{c_e I_p}.$$

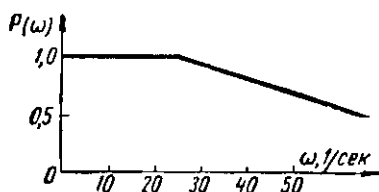


Рис. 5.24. Вещественная частотная характеристика следящей системы с последовательным корректирующим контуром

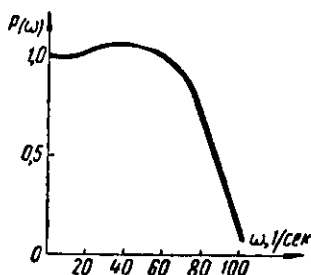


Рис. 5.25. Вещественная частотная характеристика следящей системы с пассивным дифференцирующим контуром

Подставляя численные значения параметров системы и заменяя p на $j\omega$, получим

$$\Phi(j\omega) = \frac{450(0,333 + j0,01\omega)}{-j4 \cdot 10^{-4} \omega^3 - 0,05\omega^2 + j55\omega + 150},$$

откуда, после преобразований,

$$P(\omega) = \text{Re} [\Phi(j\omega)] = \frac{450(50 + 0,0383\omega^2 - 4 \cdot 10^{-6} \omega^4)}{(150 - 0,05\omega^2)^2 + (5,5\omega - 4 \cdot 10^{-4} \omega^3)^2}.$$

Задавая различные значения ω , строим характеристику $P(\omega)$, изображенную на рис. 5.25.



Глава VI. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 6.1. Критерии устойчивости линейных систем

Для того чтобы система автоматического управления могла нормально функционировать, она должна, прежде всего, удовлетворять требованию устойчивости.

Система является устойчивой, если она возвращается к установившемуся состоянию после прекращения действия возмущения, которое вывело ее из этого состояния.

Общее решение $x(t)$ дифференциального уравнения линейной системы управления может быть представлено в виде суммы двух функций времени

$$x(t) = x_s(t) + x_d(t),$$

из которых $x_s(t)$ характеризует так называемое *вынужденное движение* системы и зависит от внешнего воздействия, а $x_d(t)$ определяет *свободное движение* или *переходный процесс* в системе.

Математическая форма записи условия устойчивости представляет собой требование обращения в нуль $x_d(t)$ при неограниченном возрастании времени с момента начала переходного процесса, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x_d(t) = 0.$$

Функция $x_d(t)$, являющаяся общим решением соответствующего однородного дифференциального уравнения (т. е. уравнения системы управления с нулевой правой частью) для линейной системы n -го порядка имеет вид:

$$x_d(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{\lambda_n t},$$

где $c_1, c_2, \dots, c_n$ — постоянные интегрирования, а $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ — неравные корни характеристического уравнения системы управления.

Из последнего выражения видно, что при $t \rightarrow \infty$ $x_d(t)$ будет стремиться к нулю только в том случае, если все n корней ха-

рактистического уравнения имеют отрицательные вещественные части*.

Следовательно, для суждения об устойчивости системы управления нет необходимости определять значения корней характеристического уравнения, что связано обычно с трудоемкими вычислениями. Достаточно располагать косвенными признаками, которые позволяли бы судить об отсутствии в характеристическом уравнении системы управления корней с отрицательной вещественной частью (действительные корни могут рассматриваться как частный случай комплексных с нулевой мнимой частью). Такие признаки получили название *критериев устойчивости*.

Известно несколько критериев устойчивости. Наиболее употребительными из них являются алгебраические критерии Рауса и Гурвица, основанные на рассмотрении системы неравенств, образуемых из коэффициентов характеристического уравнения, а также связанные с частотными представлениями критерии Найквиста и Михайлова.

Ниже приводятся без доказательства формулировки этих критериев устойчивости.

При использовании операторного исчисления характеристическое уравнение системы управления легко находится приравнением нулю знаменателя передаточной функции замкнутой системы

$$1 + W(p) = 0 \quad (6.1)$$

[см. формулу (2.10)].

Учитывая выражение (2.15), получим характеристическое уравнение в виде

$$H(p) = A(p) + B(p) = 0. \quad (6.2)$$

Для системы n -го порядка функция $H(p)$, представляющая собой левую часть характеристического уравнения, имеет вид многочлена n -й степени

$$H(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n. \quad (8.3)$$

Критерий Гурвица. Проверка устойчивости по Гурвицу сводится к вычислению по коэффициентам характеристического уравнения так называемых определителей Гурвица, которые для устойчивой системы управления должны быть положительными.

* Этот вывод справедлив и для случая, когда среди корней λ_i ($i=1, 2, \dots, n$) имеются кратные корни.

Для получения определителей Гурвица составляется таблица из коэффициентов характеристического уравнения n -й степени:

$$\begin{array}{c|ccc} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ \hline a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \vdots & \vdots & \vdots & a_n \end{array}$$

Правила составления таблицы просты: по главной диагонали выписываются по порядку n коэффициентов характеристического уравнения от a_1 до a_n ; каждая строка содержит n элементов; строки с нечетными и четными индексами чередуются; недостающие элементы строк заполняются нулями. Отчеркивая соответствующие строки и столбцы таблицы, получим n определителей Гурвица:

$$\Delta_1 = a_1,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & \cdots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots & a_n \end{vmatrix}.$$

Критерий устойчивости Гурвица заключается в требовании положительности всех n определителей (при $a_0 > 0$), т. е.

$$\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots, \Delta_n > 0.$$

Необходимым (но недостаточным) условием устойчивости системы n -го порядка при $a_0 > 0$ является требование положительности всех коэффициентов характеристического уравнения:

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, \dots, a_n > 0.$$

Поскольку последнее условие легко проверяется по виду уравнения, записанного с конкретными числовыми коэффициентами, то целесообразно проанализировать критерии Гурвица

с учетом этого необходимого условия. В результате такого анализа, излагаемого в большинстве руководств по теории автоматического управления и регулирования [21, 19 и др.], можно получить систему неравенств, соблюдение которых эквивалентно выполнению условий устойчивости.

Для систем первого и второго порядка необходимо условие устойчивости

$$a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0$$

одновременно является и достаточным.

Для систем более высокого порядка, кроме выполнения требования положительности всех коэффициентов характеристического уравнения, необходимо и достаточно соблюдение следующих неравенств:

для системы третьего порядка

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

для системы четвертого порядка

$$a_1(a_2 a_3 - a_0 a_4) - a_1^2 a_5 > 0; \quad \checkmark$$

для системы пятого порядка

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0, \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0;$$

для системы шестого порядка

$$a_3(a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_1(a_1 a_4 - a_0 a_5) > 0, \\ (a_1 a_2 - a_0 a_3)[a_5(a_4 a_3 - a_2 a_5) + a_6(2a_1 a_5 - a_3^2)] + \\ + (a_1 a_4 - a_0 a_5)[a_1 a_2 a_6 - a_5(a_1 a_4 - a_0 a_5)] - a_1^3 a_6^2 > 0.$$

Критерий Рауса. Практически критерием Гурвица выгодно пользоваться при исследовании устойчивости систем автоматического управления не выше пятого порядка. Для систем более высоких порядков удобнее применять критерий Рауса.

Составим таблицу-схему из коэффициентов характеристического уравнения (табл. 6.1). В первую строку таблицы вписываются коэффициенты с четными индексами, а во вторую — с нечетными. Все последующие строки получаются в результате деления разности перекрестных произведений коэффициентов двух предыдущих строк на коэффициент первого столбца предыдущей строки. Всего таблица содержит $n+1$ строку.

Согласно критерию Рауса, для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы при $a_0 > 0$ все коэффициенты первого столбца табл. 6.1 были положительны, т. е. чтобы

$$a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0, \dots$$

Таблица 6.1

a_0	a_2	a_4	a_6	...
a_1	a_3	a_5	a_7	...
$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$	$b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}$	$b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}$	$b_4 = \frac{a_1 a_8 - a_0 a_9}{a_1}$	...
$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}$	$c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}$	$c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}$	$c_4 = \frac{b_1 a_9 - a_1 b_5}{b_1}$	...
$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}$	$d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$	$d_3 = \frac{c_1 b_4 - b_1 c_4}{c_1}$	$d_4 = \frac{c_1 b_5 - b_1 c_5}{c_1}$	...
...	...	...	...	...

Критерий Найквиста. Критерий Найквиста основан на рассмотрении амплитудно-фазовой характеристики $W(j\omega)$ разомкнутой системы, по виду которой можно судить об устойчивости замкнутой системы, что обусловлено наличием однозначной зависимости между передаточной функцией $W(p)$ разомкнутой системы и характеристическим уравнением замкнутой [см. формулу (6.1)].

Амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ может быть построена расчетным путем на основании аналитического выражения функции $W(p)$ при замене в последней p на $j\omega$ и изменении ω от 0 до ∞ (практически расчет заканчивается, когда значения модуля $|W(j\omega)|$ становятся достаточно малыми).

Эта характеристика может быть также получена экспериментально, в частности, по снятым опытным путем частотным характеристикам отдельных звеньев системы. Это обстоятельство является важным практическим преимуществом частотного критерия Найквиста.

Формулировка критерия устойчивости замкнутой системы управления зависит от свойств разомкнутой системы.

Согласно критерию Найквиста, если разомкнутая система устойчива, т. е. ее характеристическое уравнение не имеет корней с положительной вещественной частью (но может иметь нулевые корни), то для устойчивости замкнутой системы автоматического управления необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая характеристика $W(j\omega)$ не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$.

Если же разомкнутая система имеет m корней с положительной вещественной частью, то для устойчивости замкнутой системы требуется, чтобы характеристика $W(j\omega)$ охватывала точку $(-1, j0)$ в положительном направлении $\frac{m}{2}$ раз.

Критерий Михайлова. Критерий устойчивости Михайлова основан на построении так называемой кривой Михайлова, представляющей собой годограф вектора $H(j\omega)$, вычерчиваемый при изменении ω от 0 до ∞ (практически ограничиваются достаточно большими значениями ω , при которых угол поворота вектора перестает изменяться с увеличением ω).

Комплексная функция $H(j\omega)$ получается подстановкой $p = j\omega$ в характеристический полином $H(p)$, стоящий в левой части характеристического уравнения.

Согласно критерию Михайлова, для устойчивости системы автоматического управления n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы характеристическая кривая Михайлова при изменении ω от 0 до ∞ , начиная с положительной вещественной оси, обошла последовательно в положительном направлении (т. е. против часовой стрелки) n квадрантов.

Если представить комплексную функцию $H(j\omega)$ в виде

$$H(j\omega) = x(\omega) + jy(\omega)$$

и построить графики вещественных функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$, откладывая ω по оси абсцисс в положительном направлении, то можно указать другую формулировку критерия Михайлова. Согласно этой формулировке, графики функций $x(\omega)$ и $y(\omega)$ для устойчивой системы должны пересекать ось ω , последовательно чередуясь друг с другом.

Алгебраические критерии Гурвица и Рауса удобны при проверке устойчивости систем до пятого-шестого порядка. Для систем высших порядков выгоднее применять частотные критерии Найквиста и Михайлова.

При исследовании устойчивости систем автоматического управления может ставиться задача не только проверки устойчивости системы при заданных значениях ее параметров, но также и определения некоторой области изменения отдельных параметров, внутри которой система остается устойчивой.

Построение областей устойчивости в функции одного и двух параметров системы управления может быть выполнено при помощи любого критерия устойчивости. Существуют различные формальные способы выделения областей устойчивости. Однако эффективность применения того или иного способа в сильной степени зависит от конкретного содержания решаемой задачи. Поэтому целесообразно не приводить общее описание этих способов, а предоставить читателю освоить сущность неко-

торых из них на конкретных примерах, рассматриваемых в данной главе, с указанием, по мере необходимости, на соответствующие руководства по теории.

§ 6.2. Примеры исследования устойчивости по критериям Рауса и Гурвица

Пример 6.1. Проверка устойчивости системы автоматического регулирования по критерию Гурвица.

Характеристическое уравнение системы имеет вид:

$$p^3 + 1,48 p^2 + 4,6 p + 4 = 0.$$

Для уравнения третьей степени условием устойчивости по Гурвицу, помимо положительности коэффициентов уравнения, является выполнение неравенства

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0,$$

где Δ_2 — определитель второго порядка.

В данном случае $a_0 = 1$; $a_1 = 1,48$; $a_2 = 4,6$; $a_3 = 4$. Следовательно, система устойчива.

Пример 6.2. Проверка устойчивости системы автоматического регулирования.

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$p^6 + 0,212 p^5 + 2,42 p^4 + 36,2 p^3 + 228 p^2 + 1408 = 0.$$

Система неустойчива, так как не выполняется необходимое условие положительности всех коэффициентов уравнения (отсутствует член с первой производной).

Пример 6.3. Проверка по критерию Рауса устойчивости следящей системы.

Система задана характеристическим уравнением.

$$0,0008 p^5 + 0,03 p^4 + 1,36 p^3 + 4 p^2 + 52,5 p + 50 = 0.$$

Составим таблицу Рауса (табл. 6.2).

Система устойчива, так как из таблицы следует, что

$$a_0 > 0, a_1 > 0, b_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0, e_1 > 0.$$

Пример 6.4. Проверка по критерию Рауса устойчивости следящей системы с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью по скорости.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.11, а. Параметры системы имеют следующие значения: $k_c = 0,75$ в/град; $T_q = 0,08$ сек; $T_m = 0,2$ сек; $c_e = 0,0101 \frac{\text{с}}{\text{град/сек}}$; $j_p = 148$; $k_y = 100$; $k_0 = 0,2$; $T_0 = 0,05$ сек; $k_n = 1 \frac{1}{\text{сек}}$; $k_d = 0,1$ сек.

Таблица 6.2

$a_0 = 0,0008$	$a_2 = 1,36$	$a_4 = 52,5$
$a_1 = 0,03$	$a_3 = 4$	$a_5 = 50$
$b_1 = \frac{1,36 \cdot 0,03 - 4 \cdot 0,0008}{0,03} = 1,25$	$b_2 = \frac{52,5 \cdot 0,03 - 50 \cdot 0,0008}{0,03} = 51,2$	$b_3 = 0$
$c_1 = \frac{4 \cdot 1,25 - 0,03 \cdot 51,2}{1,25} = 2,77$	$c_2 = \frac{1,25 \cdot 50 - 0,03 \cdot 0}{1,25} = 50$	$c_3 = 0$
$d_1 = \frac{2,77 \cdot 51,2 - 50 \cdot 1,25}{2,77} = 28,6$	$d_2 = \frac{2,77 \cdot 0 - 1,25 \cdot 0}{2,77} = 0$	$d_3 = 0$
$e_1 = \frac{28,6 \cdot 50 - 2,77 \cdot 0}{28,6} = 50$	$e_2 = 0$	$e_3 = 0$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D(1 + T_0 p) \left(1 + k_d p + \frac{k_n}{p}\right)}{(1 + T_0 p)(1 + T_q p)(1 + T_m p)p + k_y k_0 T_0 p^2}.$$

Передаточная функция замкнутой системы после преобразований

$$\frac{\Theta_{\text{ВМХ}}(p)}{\Theta_{\text{ВХ}}(p)} = \frac{c_0 p^3 + c_1 p^2 + c_2 p + c_3}{a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5},$$

где

$$c_0 = D k_d T_0;$$

$$c_1 = D(k_d + T_0);$$

$$c_2 = D(1 + k_n T_0);$$

$$c_3 = D k_n;$$

$$a_0 = T_q T_m T_0;$$

$$a_1 = T_q T_m + T_0(T_q + T_m);$$

$$a_2 = T_q + T_m + T_0 + T_0(k_y k_0 + k_d D);$$

$$a_3 = 1 + D(k_d + T_0);$$

$$a_4 = D(1 + k_n T_0);$$

$$a_5 = k_n D;$$

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e i_D}.$$

Характеристическое уравнение получим, приравняв нулю знаменатель передаточной функции замкнутой системы:

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0.$$

Подставив численные значения параметров системы, будем иметь:

$$D = \frac{0,75 \cdot 100}{0,0101 \cdot 148} = 50 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$a_0 = 0,08 \cdot 0,2 \cdot 0,05 = 0,0008;$$

$$a_1 = 0,08 \cdot 0,2 + 0,05 (0,08 + 0,2) = 0,03;$$

$$a_2 = 0,08 + 0,2 + 0,05 + 0,05 (100 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 50) = 1,58;$$

$$a_3 = 1 + 50 (0,1 + 0,05) = 8,5;$$

$$a_4 = 50 (1 + 1 \cdot 0,05) = 52,5; \quad a_5 = 1 \cdot 50 = 50;$$

$$0,0008 p^5 + 0,03 p^4 + 1,58 p^3 + 8,5 p^2 + 52,5 p + 50 = 0.$$

Составим таблицу Рауса (табл. 6.3). Все коэффициенты первого столбца таблицы положительны. Следовательно, следящая система при заданных значениях параметров устойчива.

Таблица 6.3

$a_0 = 0,0008$	$a_2 = 1,58$	$a_4 = 52,5$
$a_1 = 0,03$	$a_3 = 8,5$	$a_5 = 50$
$b_1 = \frac{1,58 \cdot 0,03 - 8,5 \cdot 0,0008}{0,03} = 1,36$	$b_2 = \frac{52,5 \cdot 0,03 - 50 \cdot 0,0008}{0,03} = 51,2$	$b_3 = 0$
$c_1 = \frac{8,5 \cdot 1,36 - 51,2 \cdot 0,03}{1,36} = 7,36$	$c_2 = \frac{1,36 \cdot 50}{1,36} = 50$	$c_3 = 0$
$d_1 = \frac{51,2 \cdot 7,36 - 50 \cdot 1,36}{7,36} = 42$	$d_2 = 0$	$d_3 = 0$
$e_1 = \frac{50 \cdot 42}{42} = 50$	$e_2 = 0$	$e_3 = 0$

Пример 6.5. Проверка по критерию Гурвица устойчивости системы автоматического регулирования напряжения генератора.

Структурная схема системы регулирования изображена на рис. 4.6.

Из примера 4.13 имеем характеристическое уравнение

$$a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0,$$

где

$$a_0 = 0,256 \cdot 10^{-6}; a_1 = 0,167 \cdot 10^{-3}; a_2 = 0,0244; a_3 = 0,54; a_4 = 41.$$

Для устойчивости системы, имеющей характеристическое уравнение четвертой степени, помимо положительности всех коэффициентов уравнения, необходимо выполнение условия

$$\Delta_3 = a_1 a_2 a_3 - a_1^2 a_4 - a_0 a_3^2 > 0.$$

Подставив численные значения коэффициентов уравнения, будем иметь

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= 0,167 \cdot 10^{-3} \cdot 0,0244 \cdot 0,54 - (0,167 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 41 - \\ &- 0,256 \cdot 10^{-6} \cdot 0,54^2 = 0,98 \cdot 10^{-6} > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, система устойчива.

Пример 6.6. Проверка по критерию Гурвица устойчивости следящей системы с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и с гибкой обратной связью по скорости.

Структурная схема системы изображена на рис. 5.11, а. Значения параметров системы: $k_c = 0,87$ в/град; $k_n = 1 \frac{1}{\text{сек}}$; $k_a = 0,1$ сек; $k_y = 100$; $c_e = 0,00818 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$; $i_D = 220$; $k_0 = 0,2$; $T_q = 0,15$ сек; $T_m = 0,3$ сек; $T_0 = 0,05$ сек.

Передаточная функция, а следовательно, и характеристическое уравнение следящей системы, имеют такой же вид, как и в примере 6.4, отличающемся только численными значениями параметров системы.

Определим коэффициенты характеристического уравнения (см. пример 6.4):

$$D = \frac{0,87 \cdot 100}{0,00818 \cdot 220} = 48,4 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$a_0 = 0,15 \cdot 0,3 \cdot 0,05 = 0,00225;$$

$$a_1 = 0,15 \cdot 0,3 + 0,05 (0,15 + 0,3) = 0,0675;$$

$$a_2 = 0,15 + 0,3 + 0,05 + 0,05 (100 \cdot 0,2 + 0,1 \cdot 48,4) = 1,74;$$

$$a_3 = 1 + 48,4 (0,1 + 0,05) = 8,26;$$

$$a_4 = 48,4 (1 + 1 \cdot 0,05) = 50,8;$$

$$a_5 = 1 \cdot 48,4 = 48,4.$$

Все коэффициенты уравнения положительны. Для устойчивости системы пятого порядка необходимо также, чтобы были положительны определители второго и четвертого порядка, т. е. чтобы

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0;$$

$$\Delta_4 = (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 > 0.$$

Подставляя численные значения коэффициентов характеристического уравнения, имеем:

$$\Delta_2 = 0,0675 \cdot 1,74 - 0,00225 \cdot 8,26 = 0,0989 > 0;$$

$$\Delta_4 = (0,0675 \cdot 1,74 - 0,00225 \cdot 8,26)(8,26 \cdot 50,8 - 1,74 \cdot 48,4) - \\ - (0,0675 \cdot 50,8 - 0,00225 \cdot 48,4)^2 = 22,3 > 0.$$

Система устойчива.

Пример 6.7. Проверка с помощью критерия Гурвица устойчивости следящей системы.

Структурная схема изображена на рис. 5.10, а при следующих параметрах: $k_c = 0,87$ в/град; $T_q = 0,12$ сек; $T_m = 0,25$ сек;

$$c_e = 0,0106 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}; j_p = 165; \alpha = 0,1; k_0 = 0,2;$$

$$k_y = 100; \tau = 0,1 \text{ сек.}$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D(1 + \tau p)}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + \tau p)p + k_0 k_y (\alpha + \tau p)p}.$$

Характеристическое уравнение следящей системы (соответствующее знаменателю передаточной функции замкнутой системы) на основании формулы (6.2) получим как сумму числителя и знаменателя выражения $W(p)$, что даст после преобразований

$$T_q T_m \tau p^4 + (T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau) p^3 + (T_q + T_m + \\ + \tau + k_y k_0 \tau) p^2 + (1 + k_y k_0 \alpha + D\tau) p + D = 0,$$

$$\text{где } D = \frac{k_c k_y}{e_e j_p}.$$

Первое необходимое условие устойчивости (положительность всех коэффициентов характеристического уравнения) выполняется, так как все параметры системы представляют собой положительные числа.

Вторым условием устойчивости по Гурвицу для уравнения четвертой степени является требование положительности определителя третьего порядка, что для данного случая равносильно выполнению неравенства

$$(1 + k_y k_0 \alpha + D\tau) [(T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau) (T_q + T_m + \tau + k_y k_0 \tau) - T_q T_m \tau (1 + k_y k_0 \alpha + D\tau)] - D (T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau)^2 > 0.$$

Подставив численные величины, получим:

$$D = \frac{0,87 \cdot 100}{0,0106 \cdot 165} = 49,7 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$(1 + 100 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 49,7 \cdot 0,1) \cdot [(0,12 \cdot 0,25 + 0,12 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,1) \times \\ \times (0,12 + 0,25 + 0,1 + 100 \cdot 0,2 \cdot 0,1) - 0,12 \cdot 0,25 \cdot 0,1 \times \\ \times (1 + 100 \cdot 0,2 \cdot 0,1 + 49,7 \cdot 0,1)] - 49,7 (0,12 \cdot 0,25 + \\ + 0,12 \cdot 0,1 + 0,25 \cdot 0,1)^2 > 0$$

или

$$7,97(0,067 \cdot 2,47 - 0,003 \cdot 7,97) - 49,7 \cdot 0,067^2 = 0,91 > 0.$$

Следовательно, следящая система устойчива.

Пример 6.8. Проверка по критерию Гурвица устойчивости следящей системы.

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$0,0003 p^4 + 0,0337 p^3 + 0,43 p^2 + 51,2 p + 24,8 = 0.$$

Обозначим коэффициенты характеристического уравнения: $a_0 = 0,0003$; $a_1 = 0,0337$; $a_2 = 0,43$; $a_3 = 51,2$; $a_4 = 24,8$.

Все коэффициенты положительны. Проверим, выполняется ли требование положительности определителя третьего порядка:

$$\Delta_3 = a_3 (a_1 a_2 - a_0 a_3) - a_4 a_1^2 = \\ = 51,2 (0,0337 \cdot 0,43 - 0,0003 \cdot 51,2) - 24,8 \cdot 0,0337^2 = \\ = -51,2 \cdot 0,0009 - 24,8 \cdot 0,0337^2 < 0.$$

Следовательно, система неустойчива.

Пример 6.9. Определение области устойчивости следящей системы с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью.

Рассмотрим следящую систему из примера 6.4 при двух значениях передаточного коэффициента дифференцирующего звена $k_d = 0,1$ и $0,01 \text{ сек}$ и зададимся целью определить, при каких значениях передаточного коэффициента усилителя k_y система будет устойчивой. Выделение областей устойчивости следящей системы произведем при помощи критерия Гурвица.

Воспользуемся общими выражениями, полученными в примере 6.4, и определим коэффициенты характеристического уравнения следящей системы, не зависящие от величины k_d :

$$a_0 = T_q T_m T_0 = 0,08 \cdot 0,2 \cdot 0,05 = 0,0008; \\ a_1 = T_q T_m + T_0 (T_q + T_m) = 0,08 \cdot 0,2 + 0,05 (0,08 + 0,2) = 0,03;$$

$$a_4 = \frac{k_c k_y}{c_e j_p} (1 + k_n T_0) = \frac{0,75 k_y}{0,0101 \cdot 148} (1 + 1 \cdot 0,05) = 0,525 k_y;$$

$$a_5 = k_n \frac{k_c k_y}{c_e j_p} = 1 \cdot \frac{0,75 k_y}{0,0101 \cdot 148} = 0,5 k_y.$$

Коэффициенты a_2 и a_3 зависят от величины k_d , поэтому дальнейшие расчеты будем вести отдельно для разных значений k_d .

1. При $k_d = 0,1$ сек:

$$a_2 = T_q + T_m + T_0 + T_0 \left(k_y k_0 + k_d \frac{k_c k_y}{c_e j_p} \right) = 0,08 + 0,2 + 0,05 + 0,05 \left(0,2 k_y + 0,1 \cdot \frac{0,75 k_y}{0,0101 \cdot 148} \right) = 0,33 + 0,0125 k_y;$$

$$a_3 = 1 + \frac{k_c k_y}{c_e j_p} (k_d + T_0) = 1 + \frac{0,75 k_y}{0,0101 \cdot 148} (0,1 + 0,05) = 1 + 0,075 k_y.$$

Все коэффициенты характеристического уравнения положительны. Определитель второго порядка при $k_y > 0$ тоже положителен:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,03 \cdot (0,33 + 0,0125 k_y) - 0,0008 (1 + 0,075 k_y) = 0,0091 + 0,000315 k_y > 0.$$

Граница устойчивости для системы пятого порядка в таком случае определяется уравнением

$$(a_1 a_2 - a_0 a_3) (a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 = 0,$$

которое получаем приравниванием нулю определителя четвертого порядка. Подставим в это уравнение численные величины:

$$\begin{aligned} & [0,03 \cdot (0,33 + 0,0125 k_y) - 0,0008 (1 + 0,075 k_y)] \times \\ & \times [(1 + 0,075 k_y) \cdot 0,525 k_y - (0,33 + 0,0125 k_y) \cdot 0,5 k_y] - \\ & - (0,03 \cdot 0,525 k_y - 0,0008 \cdot 0,5 k_y)^2 = 0 \end{aligned}$$

или после преобразований

$$(k_y^2 + 17,2 k_y + 315) k_y = 0.$$

Получилось уравнение третьей степени относительно k_y . Это уравнение имеет один нулевой и два комплексных корня:

$$k_{y1} = 0; k_{y2,3} = -8,6 \pm j 15,5.$$

Нулевой корень соответствует тривиальному случаю перехода системы в неустойчивое состояние при отрицательных значениях k_y (при этом нарушается необходимое условие $a_4 > 0$ и $a_5 > 0$).

Отсутствие в уравнении вещественных положительных корней свидетельствует о том, что следящая система не имеет границы устойчивости (кроме $k_y=0$). Следовательно, возможно одно из двух: система либо устойчива, либо неустойчива при любых положительных k_y . Для выяснения этого достаточно проверить устойчивость системы при произвольном значении $k_y > 0$.

Воспользуемся результатом, полученным в примере 6.4, при решении которого было установлено, что следящая система устойчива при $k_y=100$. Следовательно, она устойчива при любых положительных k_y .

2. При $k_d=0,01$ сек аналогично предыдущему случаю будем иметь:

$$a_2 = 0,33 + 0,01025 k_y;$$

$$a_3 = 1 + 0,03 k_y.$$

Проверяем условие $\Delta_2 > 0$:

$$\Delta_2 = 0,03 (0,33 + 0,01025 k_y) - 0,0008 (1 + 0,03 k_y) =$$

$$= 0,0091 + 0,000283 k_y > 0.$$

Подставим численные значения параметров в уравнение, определяющее границу устойчивости:

$$[0,03 (0,33 + 0,01025 k_y) - 0,0008 (1 + 0,03 k_y)] \times$$

$$\times [(1 + 0,03 k_y) \cdot 0,525 k_y - (0,33 + 0,01025 k_y) \cdot 0,5 k_y] -$$

$$- (0,03 \cdot 0,525 k_y - 0,0008 \cdot 0,5 k_y)^2 = 0.$$

После преобразований получим уравнение третьей степени относительно k_y

$$k_y (3,01 k_y^2 - 47,2 k_y + 3280) = 0,$$

которое имеет один нулевой и два комплексных корня:

$$k_{y1} = 0; k_{y2,3} = 7,85 \pm j 35,8.$$

Отсутствие в уравнении вещественных корней свидетельствует о том, что при $k_d=0,01$ сек следящая система не имеет границы устойчивости в области положительного k_y . Следовательно, либо система устойчива при любых значениях k_y , либо неустойчива при любых k_y .

Читателю предлагается самому убедиться в устойчивости системы, проверив ее любым способом при произвольно выбранном значении k_y .

Подобный результат объясняется физически тем, что с увеличением k_y возрастает стабилизирующее действие гибкой обратной связи, охватывающей усилитель.

Пример 6.10. Построение области устойчивости следящей системы с жесткой обратной связью по скорости в плоскости двух параметров.

Структурная схема следящей системы изображена на рис. 6.1. Произведем построение области устойчивости в функции коэффициента усиления первого каскада усилителя k_{y1} и коэффициента обратной связи k_0 .

Параметры системы: $k_c = 0,4$ в/град; $k_{y2} = 5,2$, $c_e = 0,014 \frac{в}{град/сек}$; $j_p = 297$; $T_q = 0,06$ сек, $T_m = 0,1$ сек.

Прежде всего нужно найти передаточную функцию разомкнутой системы. Для этого заменим участок прямой цепи систе-

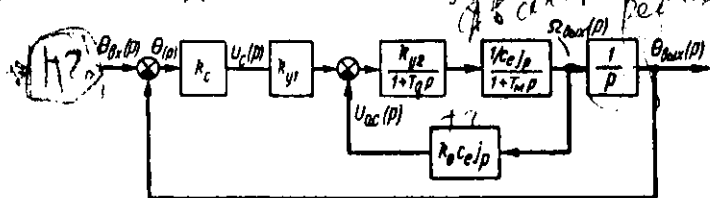


Рис. 6.1. Структурная схема следящей системы с жесткой обратной связью по скорости

мы, охваченной жесткой обратной связью, эквивалентным звеном, передаточная функция которого определится выражением

$$W_1(p) = \frac{\frac{k_{y2}}{1+T_q p} \cdot \frac{1}{\frac{c_e j p}{1+T_m p}}}{1 + \frac{k_{y2}}{1+T_q p} \cdot \frac{c_e j p}{1+T_m p} \cdot k_0 c_e j p}$$

или после преобразований

$$W_1(p) = \frac{\frac{k_{y2}}{c_e j p}}{(1+T_q p)(1+T_m p) + k_{y2} k_0}$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c k_{y1} W_1(p) \cdot \frac{1}{p} = \frac{k_c k_{y1} k_{y2}}{p} \cdot \frac{1}{[(1+T_q p)(1+T_m p) + k_{y2} k_0] p}$$

Обозначив

$$D = \frac{k_c k_{y1} k_{y2}}{c_e j p},$$

после преобразований получим из последнего выражения в окончательном виде передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D}{T_q T_m p^3 + (T_q + T_m) p^2 + (1 + k_{y2} k_0) p}$$

Передаточную функцию замкнутой системы для выходной величины можно определить по формуле (2.16) как

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{D}{T_q T_m p^3 + (T_q + T_m) p^2 + (1 + k_{y2} k_0) p + D}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид:

$$a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3 = 0,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= T_q T_m; \quad a_1 = T_q + T_m; \\ a_2 &= 1 + k_{y2} k_0; \quad a_3 = D = \frac{k_c k_{y2}}{c_e j_p} k_{y1}. \end{aligned}$$

Подставим численные значения параметров системы:

$$\begin{aligned} a_0 &= 0,06 \cdot 0,1 = 0,006; \\ a_1 &= 0,06 + 0,1 = 0,16; \\ a_2 &= 1 + 5,2 k_0; \\ a_3 &= \frac{0,4 \cdot 5,2}{0,014 \cdot 297} k_{y1} = 0,5 k_{y1}. \end{aligned}$$

Условие устойчивости системы по Гурвицу:

$$\begin{aligned} a_0 > 0; \quad a_1 > 0; \quad a_2 > 0; \quad a_3 > 0; \\ \Delta_2 &= a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0. \end{aligned}$$

Первые четыре условия выполняются при $k_0 > 0$ и $k_{y1} > 0$. Из последнего условия имеем

$$0,16 (1 + 5,2 k_0) - 0,006 \cdot 0,5 k_{y1} > 0,$$

откуда следует, что

$$k_0 > 0,0036 k_{y1} - 0,192.$$

Последнее неравенство выражает собой условие устойчивости системы. Граница устойчивости будет определяться выражением

$$k_0 = 0,0036 k_{y1} - 0,192,$$

представляющим собой уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $(-0,192; 0)$ под углом, равным $\arctg 0,0036$.

Значение $k_0 = -0,192$ является границей устойчивости также и по условию

$$a_2 = 1 + 5,2 k_0 > 0,$$

из которого следует, что

$$k_0 > -\frac{1}{5,2} = -0,192.$$

Область устойчивости в плоскости параметров k_{y1} и k_0 построена на рис. 6.2.

Такое построение области устойчивости может быть практически использовано, например, в том случае, когда требуется снизить статическую ошибку системы, обусловленную влиянием сухого трения, зоны нечувствительности и других факторов, не учитываемых при рассмотрении линеаризованной системы. Статическая ошибка следящей системы уменьшается с увеличением передаточного коэффициента усилителя (см. формулу 3.10). Поэтому, с одной стороны, желательно иметь как можно большее значение k_{y1} , однако, с другой стороны, увеличение k_{y1} приводит к ухудшению устойчивости системы. Введение жесткой отрицательной обратной связи по скорости повышает устойчивость системы. Построение области устойчивости, выполненное на рис. 6.2, наглядно показывает, какое необходимо иметь значение коэффициента обратной связи k_0 , чтобы обеспечить устойчивость следящей системы при заданном (из условия статической точности) значении коэффициента усиления k_{y1} .

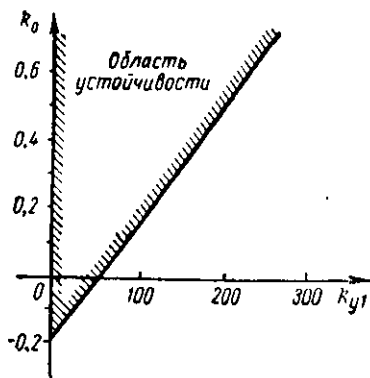


Рис. 6.2. Область устойчивости следящей системы в плоскости параметров k_{y1} и k_0

Заметим, что построенная область устойчивости не может быть использована при расчете системы на заданную скоростную ошибку. Действительно, в режиме работы с постоянной скоростью установившаяся (скоростная) ошибка следящей системы зависит от добротности системы, которая при наличии жесткой обратной связи по скорости будет равняться

$$D_v = \frac{D}{1 + k_{y2} k_0}.$$

В этом случае имеет смысл определение области устойчивости в плоскости параметров k_0 и D_v (а не k_0 и k_{y1} или D). Для этого представим последний коэффициент характеристического уравнения в виде

$$a_3 = D = D_v (1 + k_{y2} k_0)$$

и, подставив в условие устойчивости, получим

$$(T_q + T_m)(1 + k_{y2} k_0) - T_q T_m D_v (1 + k_{y2} k_0) > 0,$$

откуда следует, что

$$D_v < \frac{1}{T_q} + \frac{1}{T_m}.$$

Полученный результат означает, что в рассматриваемой следящей системе предельное значение добротности из условия устойчивости определяется постоянными времени T_q и T_m и не зависит от параметров обратной связи.

Пример 6.11. Проверка по критерию Рауса устойчивости следящей системы с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью по скорости (рис. 5.11, а).

Значения параметров системы: $k_c = 50$ в/рад; $T_q = 0,12$ сек; $T_m = 0,25$ сек; $T_0 = 0,01$ сек; $c_e = 0,7 \frac{\sigma}{\text{рад/сек}}$; $j_p = 143$; $k_d = 0,01$ сек; $k_u = 1 \frac{1}{\text{сек}}$; $k_y = 200$; $k_0 = 0,1$.

Характеристическое уравнение

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$$

имеет следующие коэффициенты:

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p} = \frac{50 \cdot 200}{0,7 \cdot 143} = 100 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$a_0 = T_q T_m T_0 = 0,12 \cdot 0,25 \cdot 0,01 = 0,0003;$$

$$a_1 = T_q T_m + T_0 (T_q + T_m) = 0,12 \cdot 0,25 + 0,01 (0,12 + 0,25) = 0,0337;$$

$$a_2 = T_q + T_m + T_0 + T_0 (k_y k_0 + k_d D) = 0,12 + 0,25 + 0,01 + \\ + 0,01 (200 \cdot 0,1 + 0,01 \cdot 100) = 0,59;$$

$$a_3 = 1 + D (k_d + T_0) = 1 + 100 (0,01 + 0,01) = 3;$$

$$a_4 = D (1 + k_u T_0) = 100 \cdot (1 + 1 \cdot 0,01) = 101;$$

$$a_5 = k_u D = 1 \cdot 100 = 100.$$

Составим таблицу Рауса (табл. 6.4). Коэффициент c_1 в левом столбце таблицы отрицательный. Следовательно, система неустойчива, и продолжать дальше вычисления нет смысла.

Пример 6.12. Определение области устойчивости следящей системы.

Произведем с помощью критерия Гурвица выделение области устойчивости следящей системы, рассмотренной в примере 6.11, в функции величины D .

Выразим коэффициенты характеристического уравнения

$$a_0 p^5 + a_1 p^4 + a_2 p^3 + a_3 p^2 + a_4 p + a_5 = 0$$

через D :

$$a_0 = T_q T_m T_0 = 0,12 \cdot 0,25 \cdot 0,01 = 0,0003;$$

$$a_1 = T_q T_m + T_0 (T_q + T_m) = 0,12 \cdot 0,25 + 0,01 (0,12 + 0,25) = 0,0337;$$

$$a_2 = T_q + T_m + T_0 + T_0 (k_y k_0 + k_d D) = 0,12 + 0,25 + 0,01 + \\ + 0,01 (200 \cdot 0,1 + 0,01 D) = 0,38 + 0,0021 D;$$

Таблица 6.4

$a_0 = 0,0003$	$a_2 = 0,59$	$a_4 = 101$
$a_1 = 0,0337$	$a_3 = 3$	$a_5 = 100$
$b_1 = \frac{3,37 \cdot 10^{-2} \cdot 0,59 - 3 \cdot 10^{-4} \cdot 3}{3,37 \cdot 10^{-2}} = 0,564$	$b_2 = \frac{3,37 \cdot 10^{-2} \cdot 101 - 3 \cdot 10^{-4} \cdot 100}{3,37 \cdot 10^{-2}} = 100$	$b_3 = 0$
$c_1 = \frac{0,564 \cdot 3 - 3,37 \cdot 10^{-2} \cdot 100}{0,564} = -2,98$	$c_2 =$	$c_3 =$
$d_1 =$	$d_2 =$	$d_3 =$
$e_1 =$	$e_2 =$	$e_3 =$

$$a_3 = 1 + (k_a + T_0)D = 1 + (0,01 + 0,01)D = 1 + 0,02D;$$

$$a_4 = (1 + k_n T_0)D = (1 + 1 \cdot 0,01)D = 1,01D;$$

$$a_5 = k_n D = D.$$

Для системы пятого порядка условие устойчивости по Гурвицу сводится к требованию положительности всех коэффициентов характеристического уравнения и определителей Δ_2 и Δ_4 .

Коэффициенты характеристического уравнения будут положительными при $D > 0$.

Проверим условие $\Delta_2 > 0$:

$$\Delta_2 = a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,0337 \cdot (0,38 + 0,0021D) - \\ - 0,0003 \cdot (1 + 0,02D) = 0,0125 + 6,58 \cdot 10^{-5} D > 0$$

при $D > 0$.

Следовательно, в этом случае границу устойчивости будет определять уравнение $\Delta_4 = 0$.

Подставив в выражение

$$\Delta_4 = (a_1 a_2 - a_0 a_3)(a_3 a_4 - a_2 a_5) - (a_1 a_4 - a_0 a_5)^2 = 0$$

значения коэффициентов характеристического уравнения, будем иметь:

$$[0,0337 \cdot (0,38 + 0,0021D) - 0,0003 \cdot (1 + 0,02D)] \times \\ \times [(1 + 0,02D) \cdot 1,01D - (0,38 + 0,0021D)D] - \\ - (0,0337 \cdot 1,01D - 0,0003D)^2 = 0.$$

После преобразований получим уравнение третьей степени относительно D

$$D(1,175 \cdot 10^{-6} D^2 - 8,73 \cdot 10^{-4} D + 78,8 \cdot 10^{-4}) = 0,$$

которое имеет три корня:

$$D_1 = 0; D_2 = 8,93; D_3 = 735.$$

Полученные значения D определяют границы устойчивости следящей системы.

Для того чтобы выяснить, какая область значений D является областью устойчивости, необходимо проверить устойчивость системы при любом значении D .

Воспользуемся результатом, полученным в примере 6.12, в котором было установлено, что при $D=100$ рассматриваемая

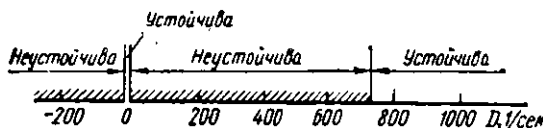


Рис. 6.3. Определение области устойчивости следящей системы в функции параметра

система неустойчива. Значит области неустойчивой работы находятся в пределах $8,93 < D < 735$ и при $D < 0$, а области устойчивости соответствуют значениям $0 < D < 8,93$ и $D > 735$.

На рис. 6.3 выделены участки числовой оси значений D , соответствующие устойчивой и неустойчивой работе следящей системы. Ввиду малой величины интервала $0 < D < 8,93$ практическое значение имеет лишь область $D > 735$.

Упражнения для самостоятельной проработки

1. Проверить с помощью критерия Гурвица устойчивость системы автоматического регулирования по характеристическому уравнению

$$0,0015 p^3 + 0,25 p^2 + 1,8 p + 245 = 0.$$

Ответ. Система устойчива.

2. Проверить устойчивость системы автоматического регулирования, характеристическое уравнение которой имеет вид

$$0,318 p^5 + 4,25 p^4 + 38,2 p^3 + 446 p^2 + 2220 p = 0.$$

Ответ. Система неустойчива.

3. Проверить по критерию Гурвица устойчивость следящей системы, заданной передаточной функцией разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta(p)} = \frac{D(1 + T_0 p)}{[(1 + T_1 p)(1 + T_2 p)(1 + T_0 p) + k_y k_0(m + T_0 p)]p},$$

при следующих значениях параметров: $T_1 = 0,12$ сек; $T_2 = 0,25$ сек, $T_0 = 0,05$ сек; $k_y = 50$; $k_0 = 0,2$; $m = 0,5$; $D = 25$.

Ответ. Следящая система устойчива.

4. Проверить по критерию Гурвица устойчивость системы автоматического регулирования, заданной характеристическим уравнением

$$0,003 p^4 + 0,337 p^3 + 3,85 p^2 + 611 p + 75 = 0.$$

Ответ. Система неустойчива.

5. Проверить по критерию Гурвица устойчивость следящей системы, структурная схема которой изображена на рис. 5.10 при следующих параметрах системы: $k_c = 50$ в/рад; $T_q = 0,1$ сек; $T_m = 0,31$ сек; $c_e = 0,637 \frac{в}{рад/сек}$; $i_p = 158$; $\tau = 0,01$ сек; $\alpha = 0,5$; $k_0 = 0,1$; $k_y = 68$.

Ответ. Следящая система устойчива.

6. Проверить по критерию Рауса устойчивость следящей системы с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью по скорости (структурную схему см. на рис. 5.11), задавшись следующими параметрами системы:

$$k_c = 0,92 \text{ в/град}; T_q = 0,08 \text{ сек}; T_m = 0,2 \text{ сек}; k_y = 100;$$

$$k_0 = 0,18; k_d = 0,6 \text{ сек}; c_e = 0,01 \frac{в}{град/сек};$$

$$j_p = 174; k_n = 0,85 \frac{1}{сек}; T_0 = 0,175 \text{ сек}.$$

Ответ. Следящая система устойчива.

7. Проверить по критерию Гурвица устойчивость следящей системы при заданной передаточной функции для выходной величины

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{49,6(1 + 0,01 p)}{0,0003 p^4 + 0,0337 p^3 + 0,58 p^2 + 6,5 p + 49,6}.$$

Ответ. Система устойчива.

§ 6.3. Примеры исследования устойчивости по критерию Найквиста

Пример 6.13. Проверка устойчивости следящей системы с гибкой обратной связью и определение запаса устойчивости по фазе и модулю.

Структурная схема следящей системы приведена на рис. 5.9, а. Значения параметров системы: $k_c = 0,87$ в/град; $k_0 = 0,2$; $k_y = 100$; $c_e = 0,0106 \frac{в}{град/сек}$; $j_p = 165$; $T_q = 0,12$ сек; $T_m = 0,25$ сек; $T_0 = 0,01$; $0,025$ и $0,5$ сек.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$\begin{aligned} W(p) &= \frac{D(1 + T_0 p)}{(1 + T_0 p)(1 + T_q p)(1 + T_m p)p + k_y k_0 T_0 p^2} = \\ &= \frac{D(1 + T_0 p)}{T_q T_m T_0 p^4 + (T_q T_m + T_q T_0 + T_m T_0) p^3 + (T_q + T_m + T_0 + k_y k_0 T_0) p^2 + p}, \end{aligned}$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j p}.$$

Заменяв p на $j\omega$ и подставив численные значения параметров, будем иметь:

при $T_0 = 0,01 \text{ сек}$

$$W(j\omega) = \frac{49,8(1 + 0,01j\omega)}{(0,0003\omega^3 - 0,58\omega^2) + j(\omega - 0,0337\omega^3)};$$

при $T_0 = 0,025 \text{ сек}$

$$W(j\omega) = \frac{49,8(1 + 0,025j\omega)}{(0,00075\omega^4 - 0,895\omega^3) + j(\omega - 0,0393\omega^3)};$$

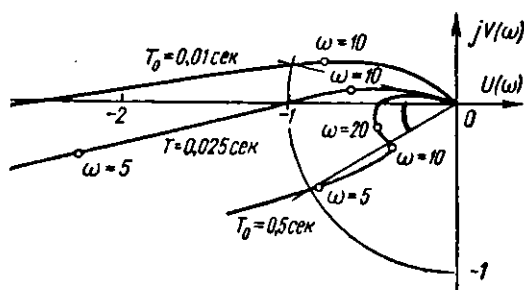


Рис. 6.4. Определение запаса устойчивости следящей системы с гибкой обратной связью

при $T_0 = 0,5 \text{ сек}$

$$W(j\omega) = \frac{49,8(1 + 0,5j\omega)}{(0,015\omega^4 - 10,9\omega^3) + j(\omega - 0,215\omega^3)}.$$

Задавая в трех последних выражениях ряд значений ω , получим три амплитудно-фазовые характеристики разомкнутой системы, построенные на рис. 6.4.

Чтобы судить об устойчивости следящей системы по виду амплитудно-фазовой характеристики $W(j\omega)$, необходимо предварительно выяснить, является ли устойчивой разомкнутая система.

В данном случае это проще всего сделать по критерию Гурвица. Характеристическое уравнение разомкнутой системы имеет вид

$$(a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3) p = 0.$$

При $T_0 = 0,01 \text{ сек}$

$$a_0 = 0,0003; a_1 = 0,0337; a_2 = 0,58; a_3 = 1,$$

и условие устойчивости

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,0337 \cdot 0,58 - 0,0003 \cdot 1 = 0,0193 > 0$$

выполнимо;

при $T_0 = 0,025$ сек

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,0393 \cdot 0,895 - 0,00075 \cdot 1 > 0;$$

при $T_0 = 0,5$ сек

$$a_1 a_2 - a_0 a_3 = 0,215 \cdot 10,9 - 0,015 \cdot 1 > 0.$$

Во всех трех случаях разомкнутая система устойчива. Поэтому для устойчивости следящей системы необходимо и достаточно, чтобы характеристика $W(j\omega)$ не охватывала точку $(-1, j0)$.

Из рис. 6.4 видно, что при $T_0 = 0,01$ сек следящая система неустойчива, так как амплитудно-фазовая характеристика охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

При $T_0 = 0,025$ сек характеристика проходит через эту точку, т. е. система находится на границе устойчивости.

При $T_0 = 0,5$ сек следящая система устойчива.

Для определения запаса устойчивости по фазе проведем окружность радиусом, равным единице, с центром в начале координат и соединим отрезком прямой начало координат и точку пересечения амплитудно-фазовой характеристики с окружностью единичного радиуса. Угол $\Delta\varphi$, образованный отрезком прямой с отрицательной вещественной осью, определяет запас устойчивости по фазе (избыток фазы).

Для устойчивой системы ($T_0 = 0,5$ сек) имеем положительный избыток фазы $\Delta\varphi = 30^\circ$.

При $T_0 = 0,01$ сек имеем отрицательный избыток фазы $\Delta\varphi = -18^\circ$.

При $T_0 = 0,025$ сек избыток фазы равен нулю.

Запас устойчивости по модулю при устойчивой системе ($T_0 = 0,5$ сек) $\Delta R = 52\%$ определен как выраженное в процентах отношение отрезка вещественной оси, заключенного между точкой $(-1, j0)$ и точкой пересечения амплитудно-фазовой характеристики с вещественной осью, к отрезку, равному единице.

Пример 6.14. Проверка устойчивости следящей системы с гибкой обратной связью, дифференцирующим и интегрирующим контурами в главной цепи (рис. 5.11, а).

Значения параметров системы: $k_c = 0,87$ в/град; $k_d = 0,1$ сек; $k_i = 1,0 \frac{1}{\text{сек}}$; $k_y = 100$; $j_p = 250$; $c_e = 7,2 \cdot 10^{-3} \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$; $k_0 = 0,2$; $T_q = = 0,15$ сек; $T_m = 0,3$ сек; $T_0 = 0,09$ сек.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D(k_n + p + k_d p^2)(1 + T_0 p)}{p^2 + p^3 [T_m + T_q + T_0(1 + k_y k_0)] +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{+ p^4 (T_m T_q + T_m T_0 + T_q T_0) + T_m T_q T_0 p^5}{},$$

где $D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}$.

После подстановки численных значений параметров

$$W(p) = \frac{48,3(1 + 1,09p + 0,19p^2 + 0,009p^3)}{p^2 + 2,34p^3 + 0,0855p^4 + 0,00405p^5}.$$

Заменяя $p = j\omega$, имеем

$$W(j\omega) = \frac{48,3(1 + j1,09\omega - 0,19\omega^2 - j0,009\omega^3)}{-\omega^2 - j2,34\omega^3 + 0,0855\omega^4 + j0,00405\omega^5}.$$

Подставляя в последнее выражение ряд значений ω , строим амплитудно-фазовую характеристику системы (рис. 6.5).

Из рисунка видно, что система при данных параметрах устойчива, так как характеристика ее не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$, что является условием устойчивости следящей системы, поскольку разомкнутая система устойчива*.

Пользуясь приемом, описанным в примере 6.13, определим запасы устойчивости по фазе и по модулю.

Для данной системы получаем: запас по фазе $\Delta\varphi = 35^\circ$; запас по модулю $\Delta R = 95\%$.

Пример 6.15. Проверка устойчивости следящей системы.

Рассмотрим следующую систему из примера 6.14 при следующих значениях параметров: $k_c = 0,87$ в/град; $k_d = 0,6$ сек;

$$k_n = 1 \frac{1}{\text{сек}}; k_y = 100; c_e = 0,0106 \frac{\text{а}}{\text{град/сек}}; j_p = 165;$$

$$k_0 = 0,2; T_q = 0,12 \text{ сек}; T_m = 0,25 \text{ сек}; T_0 = 0,01 \text{ и } 0,1 \text{ сек}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = \frac{D \left(1 + k_d p + k_n \frac{1}{p} \right) \times}{p + p^2 [T_m + T_q + T_0(1 + k_y k_0)] +} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\times (1 + T_0 p)}{+ p^3 (T_q T_m + T_q T_0 + T_m T_0) + p^4 T_q T_m T_0},$$

где $D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}$ — добротность системы.

* Здесь так же, как и в примере 6.15, не приводится предварительная проверка устойчивости разомкнутой системы, которая легко может быть сделана, например, по критерию Гурвица.

Подставляя численные значения параметров системы, получим: при $T_0 = 0,1 \text{ сек}$

$$W(p) = \frac{49,8(1 + 1,1p + 0,7p^2 + 0,06p^3)}{p^2 + 2,47p^3 + 0,067p^4 + 0,003p^5};$$

при $T_0 = 0,01 \text{ сек}$

$$W(p) = \frac{49,8(1 + 1,01p + 0,61p^2 + 0,006p^3)}{p^2 + 0,58p^3 + 0,0337p^4 + 0,0003p^5}.$$

После замены p на $j\omega$ получим следующие выражения для амплитудно-фазовых характеристик системы:

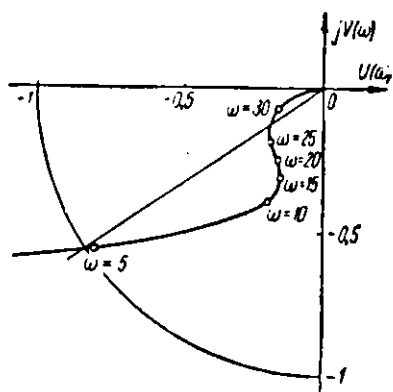


Рис. 6.5. Амплитудно-фазовая характеристика следящей системы с гибкой обратной связью и с дифференцирующим и интегрирующим контурами

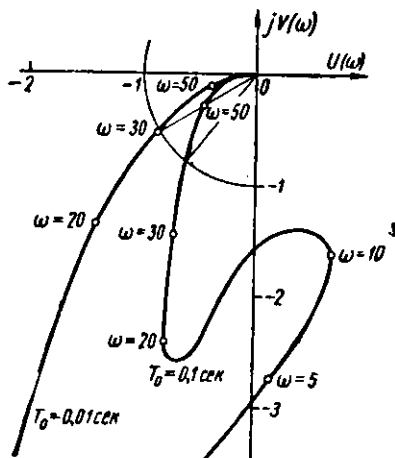


Рис. 6.6. К определению запаса устойчивости следящей системы

при $T_0 = 0,1 \text{ сек}$

$$W(j\omega) = \frac{49,8(1 + j1,1\omega - 0,7\omega^2 - j0,06\omega^3)}{-\omega^2 - j2,47\omega^3 + 0,067\omega^4 + j0,003\omega^5},$$

при $T_0 = 0,01 \text{ сек}$

$$W(j\omega) = \frac{49,8(1 + j1,01\omega - 0,61\omega^2 - j0,006\omega^3)}{-\omega^2 - j0,58\omega^3 + 0,0337\omega^4 + j0,0003\omega^5},$$

по которым построены соответствующие кривые на рис. 6.6.

Пользуясь приемом, описанным в примере 6.13, определим запасы устойчивости системы по фазе и модулю*:

при $T_0 = 0,1 \text{ сек}$

$$\Delta\varphi = 51^\circ; \Delta R \approx 90\%;$$

при $T_0 = 0,01 \text{ сек}$

$$\Delta\varphi = 30^\circ; \Delta R \approx 90\%.$$

* См. сноску на стр. 188.

§ 6.4. Примеры исследования устойчивости по критерию Михайлова

Пример 6.16. Исследование устойчивости следящей системы с жесткой и гибкой обратными связями по скорости.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.10, а. Параметры системы: $k_c = 0,87$ в/град; $k_y = 100$; $c_e = 0,0106$ град/сек; $j_p = 165$; $T_q = 0,12$ сек; $T_m = 0,25$ сек; $\tau = 0,01$ сек; $k_0 = 0,2$; $\alpha = 0,02 \div 0,4$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c W_1(p),$$

где $W_1(p)$ — передаточная функция звеньев, охваченных обратной связью. В свою очередь,

$$W_1(p) = \frac{k_y(1 + \tau p)}{c_e j_p p [(1 + T_q p + \tau p + \tau T_q p^2)(1 + T_m p) + k_y k_0 (\alpha + \tau p)]}.$$

Передаточную функцию разомкнутой системы можно записать как

$$W(p) = \frac{A(p)}{B(p)},$$

где $A(p) = k_y k_c (1 + \tau p)$,

$$B(p) = c_e j_p p [\tau T_q T_m p^3 + (\tau T_q + T_q T_m + \tau T_m) p^2 + (T_q + \tau + T_m + k_y k_0 \tau) p + (1 + k_y k_0 \alpha)].$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{W(p)}} = \frac{A(p)}{H(p)},$$

где

$$H(p) = A(p) + B(p) = c_e j_p \tau T_q T_m p^4 + c_e j_p (\tau T_q + T_q T_m + \tau T_m) p^3 + (T_q + \tau + T_m + k_y k_0 \tau) c_e j_p p^2 + (c_e j_p + c_e j_p k_y k_0 \alpha + k_y k_c \tau) p + k_y k_c.$$

Характеристическое уравнение системы

$$H(p) = 0.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_e j_p T_m T_q \tau = 0,0106 \cdot 165 \cdot 0,25 \cdot 0,12 \cdot 0,01 = 0,000524; \\ a_1 &= c_e j_p \cdot (\tau T_q + T_q T_m + \tau T_m) = \\ &= 0,0106 \cdot 165 (0,01 \cdot 0,12 + 0,12 \cdot 0,25 + 0,01 \cdot 0,25) = 0,0589; \\ a_2 &= (T_q + \tau + T_m + k_y k_0 \tau) c_e j_p = (0,12 + 0,01 + 0,25 + \\ &+ 100 \cdot 0,2 \cdot 0,01) \cdot 0,0106 \cdot 165 = 1,014; \end{aligned}$$

$$a_3 = c_e j_p + c_e j_p k_y k_0 a + k_y k_c \tau = 0,0106 \cdot 165 + 0,0105 \times \\ \times 165 \cdot 100 \cdot 0,2a + 100 \cdot 0,87 \cdot 0,01 = 2,619 + 35a; \\ a_4 = k_y k_c = 100 \cdot 0,87 = 87.$$

Тогда

$$H(p) = a_0 p^4 + a_1 p^3 + a_2 p^2 + a_3 p + a_4 = 0.$$

Уравнение годографа Михайлова

$$H(j\omega) = a_0 (j\omega)^4 + a_1 (j\omega)^3 + a_2 (j\omega)^2 + a_3 (j\omega) + a_4 = \\ = a_0 \omega^4 - j a_1 \omega^3 - a_2 \omega^2 + j a_3 \omega + a_4 = x + jy,$$

где

$$x = a_0 \omega^4 - a_2 \omega^2 + a_4, \quad y = -a_1 \omega^3 + a_3 \omega.$$

Подставив значения коэффициентов, получим:

$$x = 0,000524 \omega^4 - 1,014 \omega^2 + 87; \\ y = -0,0589 \omega^3 + (2,62 + 35a) \omega.$$

Для данной системы коэффициенты характеристического уравнения являются линейными функциями параметра a . При этом исследование влияния коэффициента a на устойчивость системы сводится к построению только двух характеристических кривых, соответствующих двум предельным значениям варьируемого параметра.

Так как при фиксированных значениях ω

$$\frac{\partial x(\omega, a)}{\partial a} = 0; \quad \frac{\partial y(\omega, a)}{\partial a} = 35 \omega = \text{const},$$

то приращение $H(j\omega)$ при изменении a для фиксированного ω будет пропорционально Δa :

$$\Delta H(j\omega) = \left(\frac{\partial x}{\partial a} + j \frac{\partial y}{\partial a} \right) \Delta a = C \Delta a,$$

где C — постоянная для каждого значения ω .

Отсюда следует, что для построения семейства характеристических кривых по параметру a достаточно построить две кривые этого семейства для двух произвольных значений a , а затем разметить отрезки, соединяющие точки обеих кривых с одинаковыми значениями ω , в соответствии с выбранным интервалом изменения приращения Δa .

Построим предельные кривые для значений $a=0,02$ и $a=0,4$: при $a=0,02$ и $0,4$

$$x = 0,000524 \omega^4 - 1,014 \omega^2 + 87;$$

при $a=0,02$

$$y = -0,0589 \omega^3 + (2,62 + 35 \cdot 0,02) \omega = -0,0589 \omega^3 + 3,32 \omega;$$

при $a=0,4$

$$y = -0,0589 \omega^3 + (2,62 + 35 \cdot 0,4) \omega = -0,0589 \omega^3 + 16,6 \omega.$$

Таблица 6.5

ω	0	2	5	6	8	9	12	15	18	20	22
ω^4	0	16	625	1296	4096	6561	20736	50625	104976	160000	234256
$0,000524\omega^4$	0	0,008395	0,3279	0,68	2,149	3,443	10,88	26,56	55,08	84	122,9
ω^3	0	4	25	36	64	81	144	225	324	400	484
$1,014\omega^3$	0	4,056	25,35	36,50	64,9	82,13	146	228	328,5	406	490,8
x при $\alpha=0,02$	0	82,95	61,98	51,15	24,25	8,31	-58,12	-114,4	-185,6	-235	-280,9
ω^3	0	8	125	216	512	729	1728	3375	5832	8000	10648
$0,0589\omega^3$	0	0,4717	7,37	12,5	30,19	42,3	100	202	332	472	628
$3,32\omega$	0	6,638	16,6	19,8	26,55	29,9	39,8	49,75	59,7	66,38	73
$16,6\omega$	0	33,22	83,05	99,5	132,88	149,5	192	249,1	299	332	366
y при $\alpha=0,02$	0	6,17	9,23	7,3	-3,63	-12,4	-60,2	-153,25	-272,3	-405,6	-555
y при $\alpha=0,4$	0	32,75	75,68	87,0	102,69	107,2	92	47	-33	-140	-262

Расчет характеристических кривых Михайлова для $\alpha=0,02$ и 0,4 приведен в табл. 6.5.

Графическое построение кривых Михайлова с интервалом $\Delta\alpha=0,095$ выполнено на рис. 6.7*.

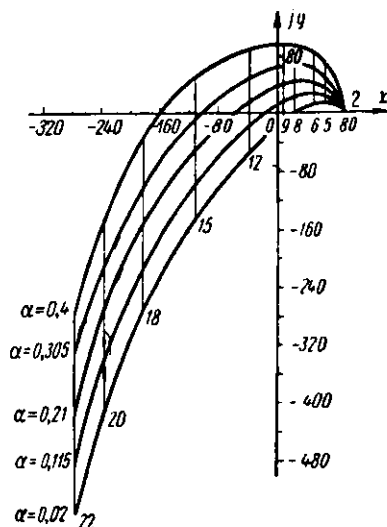


Рис. 6.7. Построение кривых Михайлова

Из рисунка видно, что система находится на границе устойчивости при значении параметра α , примерно равном 0,08.

При $\alpha>0,08$ система устойчива. При $\alpha<0,08$ имеет место неустойчивая работа системы.

Пример 6.17. Исследование устойчивости следящей системы с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью.

* На рис. 6.7—6.11 показаны начальные участки кривых Михайлова. Дальнейший ход кривых ясен из таблицы.

Структурная схема системы представлена на рис. 5.11, а.

Параметры системы: $k_c = 0,87 \frac{\theta}{\text{град}/\text{сек}}$; $k_d = 0,1 \text{ сек}$;

$$k_n = 1 \frac{1}{\text{сек}}; \quad k_y = 100; \quad c_e = 0,00818 \frac{\theta}{\text{град}}; \quad j_p = 220;$$

$$k_0 = 0,2; \quad T_q = 0,15 \text{ сек}; \quad T_m = 0,3 \text{ сек}; \quad T_0 = 0,01 \div 0,5 \text{ сек}.$$

Для составления уравнения системы найдем передаточные функции звеньев, эквивалентных интегро-дифференцирующему звену и звеньям, охваченным гибкой обратной связью.

Передаточная функция звена, эквивалентного интегро-дифференцирующему звену,

$$W_1(p) = 1 + k_d p + \frac{k_n}{p} = \frac{k_d p^2 + p + k_n}{p}.$$

Передаточная функция звена, эквивалентного звеньям, охваченным гибкой обратной связью,

$$\begin{aligned} W_2(p) &= \frac{k_y \cdot \frac{1}{c_e j_p}}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)p} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{k_y \cdot \frac{1}{c_e j_p}}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)p} \cdot \frac{k_0 c_e j_p p^2 T_0}{T_0 p + 1}} = \\ &= \frac{\frac{k_y}{c_e j_p} (T_0 p + 1)}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(T_0 p + 1)p + k_y k_0 T_0 p^2}. \end{aligned}$$

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c W_1(p) W_2(p) = \frac{\frac{k_c k_y}{c_e j_p} (k_d p^2 + p + k_n) (T_0 p + 1)}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p)p^2 + k_y k_0 T_0 p^3}.$$

Передаточная функция замкнутой системы для ошибки

$$\begin{aligned} \frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} &= \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{1}{1 + \frac{D(k_d p^2 + p + k_n)(T_0 p + 1)}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p)p^2 + k_y k_0 T_0 p^3}} = \\ &= \frac{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p)p^2 + k_y k_0 T_0 p^3}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p)p^2 + k_y k_0 T_0 p^3 + D(k_d p^2 + p + k_n)(T_0 p + 1)}, \end{aligned}$$

где

$$D = \frac{k_z k_y}{c_e j_p} = \frac{0,87 \cdot 100}{8,18 \cdot 10^{-3} \cdot 220} = 48,34 \text{ сек}^{-1}.$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p)p^3 + k_y k_0 T_0 p^3 + D(k_d p^2 + p + k_n)(T_0 p + 1) = 0.$$

После преобразований

$$T_q T_m T_0 p^5 + (T_q T_m + T_q T_0 + T_m T_0) p^4 + (T_q + T_m + T_0 + k_y k_0 T_0 + D k_d T_0) p^3 + (1 + D k_d + D T_0) p^2 + (D + k_n D T_0) p + D k_n = 0,$$

откуда получаем выражение вектора Михайлова

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= T_q T_m T_0 j\omega^5 + (T_q T_m + T_q T_0 + T_m T_0) \omega^4 - \\ &- (T_q + T_m + T_0 + k_y k_0 T_0 + D k_d T_0) j\omega^3 - (1 + D k_d + D T_0) \omega^2 + \\ &+ (D + k_n D T_0) j\omega + D k_n = 0,15 \cdot 0,3 T_0 j\omega^5 + \\ &+ (0,3 \cdot 0,15 + 0,15 T_0 + 0,3 T_0) \omega^4 - \\ &- (0,15 + 0,3 + T_0 + 100 \cdot 0,2 T_0 + 48,3 \cdot 0,1 T_0) j\omega^3 - \\ &- (1 + 48,3 \cdot 0,1 + 48,3 T_0) \omega^2 + (48,3 + 1 \cdot 48,3 T_0) j\omega + 48,3 \cdot 1 = \\ &= 0,045 T_0 j\omega^5 + (0,045 + 0,45 T_0) \omega^4 - (0,45 + 25,83 T_0) j\omega^3 - \\ &- (5,83 + 48,3 T_0) \omega^2 + (48,3 + 48,3 T_0) j\omega + 48,3. \end{aligned}$$

Задаваясь параметром T_0 и подставляя различные значения частоты, можно построить кривые Михайлова.

В соответствии с изложенным в примере 6.16, достаточно построить только предельные кривые (для $T_0 = 0,01$ и $0,5 \text{ сек}$), а промежуточные получить графически.

Построим кривую Михайлова для значения постоянной времени цепи обратной связи $T_0 = 0,01 \text{ сек}$

$$\begin{aligned} H(j\omega) &= 0,00045 j\omega^5 + 0,0495 \omega^4 - 0,708 j\omega^3 - 6,32 \omega^2 + \\ &+ 48,8 j\omega + 48,3 = 0,0495 \omega^4 - 6,32 \omega^2 + 48,3 + \\ &+ j\omega(0,00045 \omega^4 - 0,708 \omega^2 + 48,8). \end{aligned}$$

При $\omega = 0$

$$H(j\omega) = 48,34;$$

при $\omega = \infty$

$$H(j\omega) \rightarrow \infty.$$

Расчёты при других значениях ω сведём в табл. 6.6.

Таблица 6.6

1	ω	0,1	0,5	1	2	3	5	10	20	30	50
2	ω^2	0,01	0,25	1	4	9	25	100	400	900	2500
3	ω^3	0,001	0,0625	1	16	81	625	10 000	160 000	810 000	6 250 000
4	0,0495·(3)	0,0000495	0,00309	0,0495	0,792	4,01	30,9	495	7 920	40 090	309 400
5	6,32·(2)	0,0632	1,58	6,32	25,3	56,9	158,0	631,0	2 527	5 686	15 790
6	(4)+48,34—	48,3	46,8	42,1	23,8	-4,52	-78,6	-88,4	5 391	34 460	293 600
7	0,0004·(3)	0,00000045	0,0000281	0,00045	0,0072	0,0364	0,281	4,5	72	364,5	2 812
8	0,708·(2)	0,00708	0,177	0,708	2,83	6,38	17,7	70,8	283,0	637,5	1 771
9	(7)+48,8—	48,8	48,6	48,1	46,0	42,5	31,4	-17,5	-162,5	-224,2	1 090
10	(8)	4,88	24,3	48,1	92,0	127,0	157,0	-175,0	-3250	-6 725	54 500
11	(9) ω	48,3+74,88	46,8+	+42,1+	23,9+	-4,52+	-78,6+	-88,4-	5391—	34 460—	293 600+
	(6)+7(10)		+74,3	+748,1	+792,0	+7127,0	+7157,0	-7175,0	-73250	-76725	+754 500

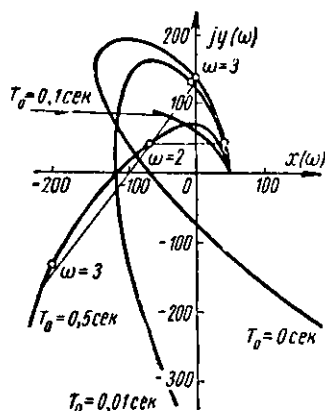
Таблица 6.7

1	ω	0,1	0,5	1	2	3	5	10	20	30	50
2	ω^2	0,01	0,25	1	4	9	25	100	400	900	2500
3	ω^3	0,001	0,0625	1	16	81	625	10 000	160 000	810 100	6 250 000
4	0,27·(3)	0,00027	0,01687	0,27	4,32	21,87	168,7	2700	43 200	218 700	1 687 000
5	30·(2)	0,3	7,5	30	120	270	750	3 000	12 000	27 000	75 000
6	(4)+48,3—	48,04	40,86	18,61	-67,34	-199,8	-530,9	-251,7	31 250	191 700	1 612 000
7	0,0225·(3)	0,00000225	0,0014	0,0225	0,36	2,40	14,06	225	3 600	23 990	140 600
8	13,37·(2)	0,1337	3,342	13,367	53,47	120,3	334,2	1 336	5 347	12 030	33 420
9	(7)+72,51—	72,38	69,17	59,16	19,40	-45,39	-247,6	-9685	-1 674	12 040	107 200
10	(8)	7,238	34,58	59,16	38,80	-136,2	-1238	29 684	-33 480	361 100	5 362 000
11	(9) ω	48,04+	40,86+	18,61+	-67,34+	-199,8	-530,9	-251,7	31 248	191 700+	1 612 000+
	(6)+7(10)	+77,273	+734,58	+759,16	+73880	-7136,2	-71238	-79685	-733 480	+7361 100	+75 362 000

На основании таблицы строим кривую Михайлова (рис. 6.8).

Согласно критерию Михайлова, система устойчива, если годограф вектора Михайлова проходит последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов (n — порядок уравнения, описывающего систему).

Исследуемая система описывается уравнением пятого порядка. Из таблицы и графика видно, что кривая проходит последовательно пять квадрантов*. Значит при $T_0=0,01$ сек система устойчива.



Построим кривую Михайлова для $T_0=0,5$ сек:

$$H(j\omega) = 0,0225j\omega^5 + 0,27\omega^4 - 13,37j\omega^3 - 30\omega^2 + 72,51j\omega + 48,3 = 0,27\omega^4 - 30\omega^2 - 48,3 + j\omega(0,0225\omega^4 - 13,37\omega^2 + 72,51).$$

При $\omega=0$

$$H(j\omega) = 48,34,$$

При $\omega = \infty$

$$H(j\omega) \rightarrow \infty.$$

Рис. 6.8. Построение кривых Михайлова

Расчеты при других значениях ω сведем в табл. 6.7, на основании которой построим кривую Михайлова.

Кривая проходит последовательно пять квадрантов. Значит, при $T_0=0,5$ сек система также устойчива.

Строим кривые для промежуточных значений T_0 . Из графика видно, что при всех промежуточных значениях T_0 система устойчива.

Выясняем, устойчива ли система при отсутствии гибкой обратной связи. Для этого строим кривую Михайлова при $T_0=0$:

$$H(j\omega) = 0,045\omega^4 - 0,45j\omega^3 - 5,834\omega^2 + 48,34j\omega + 48,34 = 0,045\omega^4 - 5,834\omega^2 + 48,34 + j\omega(48,34 - 0,45\omega^2).$$

В этом случае имеем систему четвертого порядка.

При $\omega=0$

$$H(j\omega) = 48,34.$$

При $\omega = \infty$.

$$H(j\omega) \rightarrow \infty.$$

Расчеты при других значениях ω сводим в табл. 6.8, на основании которой строим кривую Михайлова (рис. 6.8). Из табли-

* См. сноску на стр. 192.

цы и рисунка видно, что кривая проходит последовательно четыре квадранта. Значит, при отсутствии гибкой обратной связи ($T_0=0$) система устойчива.

Пример 6.18. Исследование устойчивости следящей системы с гибкой обратной связью путем построения кривых Михайлова для различных значений параметра $T_0=0,05 \div 0,005$ сек.

Структурная схема системы представлена на рис. 5,9,а.

Параметры системы: $k_c=0,87$ в/град; $T_q=0,05$ сек; $j_p=165$; $k_0=0,2$; $k_y=100$; $c_e=0,0106$; $T_m=0,14$ сек.

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{\Theta_{вых}(p)}{\Theta_{вх}(p)} = \frac{D(1+T_0p)}{(1+T_qp)(1+T_mp)(1+T_0p)p + + k_y k_0 T_0 p^2 + D(1+T_0p)},$$

где $D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}$ — добротность системы.

Характеристическое уравнение системы

$$\begin{aligned} H(p) = & T_q T_m T_0 p^4 + (T_q T_m + \\ & + T_q T_0 + T_0 T_m) p^3 + \\ & + (T_q + T_0 + T_m + k_y k_0 T_0) p^2 + \\ & + (1 + DT_0) p + D = 0. \end{aligned}$$

Подставим численные значения параметров, соответствующие двум крайним значениям T_0 :

при $T_0=0,005$ сек

$$H(j\omega) = 49,7 - 0,295\omega^2 + 0,35 \cdot 10^{-4} \omega^4 + + j(\omega \cdot 1,249 - 7,95 \cdot 10^{-3} \omega^3);$$

при $T_0=0,05$ сек

$$H(j\omega) = 49,7 - 1,24\omega^2 + 3,5 \cdot 10^{-4} \omega^4 + + j(3,485\omega - 0,0165\omega^3).$$

Таблица 68

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	0,015625	0,0078125	0,00390625	0,001953125	0,0009765625
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001
0,1	0,01	0,001	0,0001	0,00001	0,000001	0,0000001	0,00000001	0,000000001	0,0000000001

Подставив ряд значений ω , построим две кривые, соответствующие двум крайним значениям параметра T_0 . Соединим точки, соответствующие одинаковым частотам, прямыми и разделим их на три равные части. Соединив точки деления плавными кривыми, получим семейство кривых Михайлова (рис. 6.9).

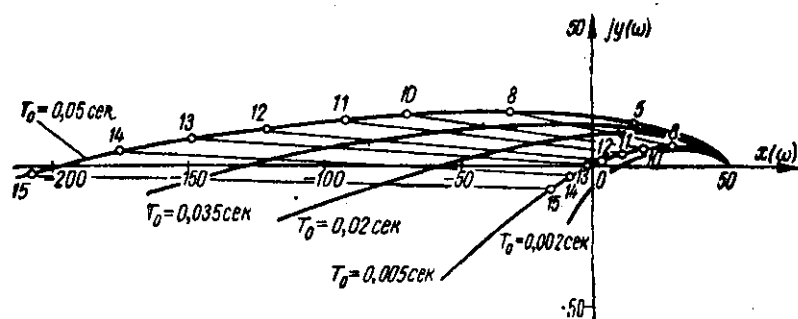


Рис. 6.9. Определение области устойчивости следящей системы при помощи критерия Михайлова

Дополнительно построим кривую Михайлова при $T_0 = 0,002$ сек.

Как видно из рассмотрения кривых, система будет устойчива при значениях параметра $T_0 = 0,05 \div 0,005$ сек. При $T_0 < 0,005$ сек система неустойчива.

Глава VII. ПЕРЕХОДНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 7.1. Основные способы определения переходных процессов

По окончании расчета системы автоматического управления, в процессе которого из условия обеспечения устойчивости и заданных косвенных показателей качества (времени переходного процесса, величины перерегулирования и т. д.) оказываются выбранными структура и значения параметров системы, обычно производится приближенное построение кривой переходного процесса в системе при каком-либо типовом воздействии.

Различные методы определения переходных процессов (в виде графиков изменения во времени выходной величины или ошибки) для наиболее характерных режимов работы системы можно разбить на две основные группы.

В первую группу входят различные (аналитические, графические, графо-аналитические) способы приближенного решения дифференциальных уравнений системы управления, из которых наибольшее распространение получил операторный метод, основанный на использовании преобразований Лапласа [Л. 27].

Вторую группу составляют методы, основанные на использовании частотных характеристик систем автоматического управления. Здесь наиболее известным является метод построения кривой переходного процесса при помощи так называемых трапецидальных вещественных частотных характеристик.

При использовании операторного метода, благодаря алгебраизации дифференциальных уравнений (при переходе к операторным изображениям величин), существенно упрощается процесс составления уравнений систем автоматического управления, который сводится к определению передаточных функций отдельных звеньев и преобразованию структурных схем систем управления (см. гл. II, IV).

После определения передаточной функции замкнутой системы $\Phi(p)$ операторное изображение выходной величины на основании формулы (2.5) может быть получено как

$$X_{\text{вых}}(p) = \Phi(p) X_{\text{вх}}(p).$$

В качестве типового входного воздействия $x_{\text{вх}}(t)$, являющегося оригиналом по отношению к изображению $X_{\text{вх}}(p)$, чаще всего применяется воздействие в виде единичной (скачкообразной) функции времени

$$x_{\text{вх}}(t) = 1(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t \geq 0, \\ 0 & \text{при } t < 0, \end{cases}$$

операторное изображение которой по Лапласу

$$x_{\text{вх}}(t) \doteq X_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p}.$$

Кроме единичной функции в качестве типовых воздействий при исследовании систем автоматического управления (главным образом, следящих систем), принимаются также следующие входные воздействия:

в виде линейной функции времени

$$\Theta_{\text{вх}}(t) = \Omega t \text{ при } \Omega = \text{const},$$

для которой операторное изображение

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{\Omega}{p^2};$$

в виде квадратичной функции времени

$$\Theta_{\text{вх}}(t) = \frac{\varepsilon}{2} t^2 \text{ при } \varepsilon = \text{const},$$

для которой операторное изображение

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{\varepsilon}{p^3};$$

в виде синусной функции времени

$$\Theta_{\text{вх}}(t) = A \sin bt \text{ при } A = \text{const}, b = \text{const},$$

для которой

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{Ab}{p^2 + b^2}.$$

Следует иметь в виду, что в ряде руководств по операционному исчислению операторные изображения функций определяются не преобразованием Лапласа (принятым в данной книге), а так называемым преобразованием Карсона-Хевисайда, отличающимся наличием множителя p перед интегралом Лапласа. Поэтому, пользуясь таблицами из этих руководств, нужно все операторные изображения разделить на p .

Если известна передаточная функция системы $\Phi(p)$ и задано входное воздействие, то определение переходного процесса сводится к нахождению оригинала $x_{\text{вых}}(t)$ по его операторному изображению $X_{\text{вых}}(p)$. При этом должны быть заданы начальные условия, которые большей частью принимаются нулевыми.

Для нахождения оригиналов в системах невысокого порядка могут быть использованы таблицы операторных изображений [Л. 27 и др.].

В системах выше третьего порядка обычно пользуются второй теоремой разложения Хевисайда, сущность которой заключается в следующем. Пусть операторное изображение $F(p)$ некоторой функции $f(t)$ представлено в виде дроби

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)},$$

где $F_1(p)$, $F_2(p)$ — полиномы от p .

Тогда оригинал может быть определен как

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}, \quad (7.1)$$

где

$$F_2'(p_k) = \left[\frac{dF_2(p)}{dp} \right]_{p=p_k},$$

а $p_1, p_2, \dots, p_k$ — суть корни алгебраического уравнения, среди которых нет кратных и нулевых корней*.

Применение теоремы разложения позволяет избежать трудоемкой процедуры определения постоянных интегрирования, необходимой при использовании классических методов решения дифференциальных уравнений, но не избавляет от нахождения корней уравнения $F_2(p) = 0$, являющегося характеристическим уравнением исследуемой системы управления.

Из многочисленных способов определения приближенных значений корней характеристического уравнения наиболее эффективными, по мнению авторов, являются метод деления многочленов [Л. 21] и итерационный метод [Л. 1], применение которых показано на примерах, рассмотренных в § 7. 2.

Построение кривой переходного процесса при помощи трапецеидальных вещественных частотных характеристик основано на наличии однозначной связи между функцией $x_{\text{вых}}(t)$, определяющей переходный процесс в системе управления, и частотной функцией $P(\omega)$, представляющей собой вещественную часть комплексного выражения

$$\Phi(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega),$$

получаемого подстановкой $p = j\omega$ в передаточную функцию замкнутой системы управления $\Phi(p)$.

* Нахождение оригинала при наличии нулевых и кратных корней, а также учет ненулевых начальных условий излагается в [Л. 19].

Метод трапецидальных вещественных частотных характеристик подробно изложен в руководствах по теории автоматического управления [см., например, Л. 19, 26 и др.]. Практическое применение метода иллюстрируется в данной книге на примерах, рассмотренных в § 7.3. Подробные таблицы используемых при этом так называемых h_x -функций содержатся в [Л. 26].

В следящих системах переходный процесс часто определяется в виде графика изменения не выходной величины системы $\Theta_{\text{вых}}(t)$, а ошибки $\Theta(t)$. В этом случае передаточная функция замкнутой системы определяется формулой (2.14) [вместо (2.12)], а начальные условия пересчитываются с учетом соотношения

$$\Theta(t) = \Theta_{\text{вх}}(t) - \Theta_{\text{вых}}(t).$$

§ 7.2. Примеры решения уравнений операторным методом

Пример 7.1. Определение переходного процесса в апериодическом звене при единичном входном воздействии.

Передаточная функция звена

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{1 + Tp}.$$

Входная величина представляет собой единичную функцию времени $x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$; $k=1$; постоянная времени звена $T=0.05$; 0,5 и 2,5 сек.

При $x_{\text{вх}}(t) = 1(t)$

$$X_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p}$$

и

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{k}{(1 + Tp)p}.$$

Получено простое операторное изображение, для которого оригинал

$$x_{\text{вых}}(t) = k \left(1 - e^{-\frac{t}{T}} \right).$$

На рис. 7.1 построен график функции $x_{\text{вых}}(t)$ при заданных значениях T .

Пример 7.2. Построение графика изменения выходной величины апериодического звена при линейном входном воздействии $x_{\text{вх}}(t) = at$.

Параметры звена: $k=10$; $a=40 \frac{1}{\text{сек}}$; $T=0.05$; 0,5 и 2,5 сек.

При $x_{\text{вх}}(t) = at$

$$X_{\text{вх}}(p) = \frac{a}{p^2}.$$

Тогда $X_{\text{вых}}(p) = \frac{k}{Tp+1} \cdot \frac{a}{p^2}.$

Функцию $x_{\text{вых}}(t)$ можно найти по таблицам или интегрированием в пределах от 0 до t оригинала, соответствующего изображению

$$\frac{ak}{(Tp+1)p^2}.$$

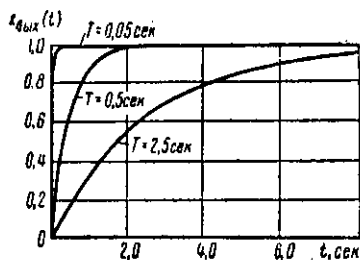


Рис. 7.1. Кривые $X_{\text{вых}}(t)$ для аperiodического звена при единичной входной функции

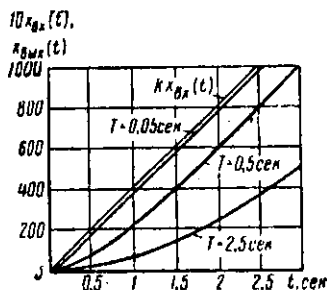


Рис. 7.2. Кривые $X_{\text{вых}}(t)$ для аperiodического звена при линейной входной функции

В обоих случаях

$$x_{\text{вых}}(t) = akt - akT \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

После подстановки численных величин

$$x_{\text{вых}}(t) = 400t - 400T \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

График $x_{\text{вых}}(t)$ для указанных значений T построен на рис. 7.2.

Пример 7.3. Построение графика $x_{\text{вых}}(t)$ для аperiodического звена при квадратичном входном воздействии.

Передаточная функция звена

$$\frac{X_{\text{вых}}(p)}{X_{\text{вх}}(p)} = \frac{k}{Tp+1}.$$

Параметры звена: $T = 0.05; 0.5$ и 2.5 сек; $k = 10$.

Входная величина

$$x_{\text{вх}}(t) = \frac{b}{2} t^2,$$

где $b = 4 \frac{1}{\text{сек}^2}.$

Так как

$$x_{\text{вх}}(t) \doteq X_{\text{вх}}(p) = \frac{b}{p^3}, \text{ то } X_{\text{вых}}(p) = \frac{kb}{(Tp+1)p^3}.$$

Интегрируя дважды оригинал, соответствующий изображению

$$\frac{kb}{(Tp+1)p},$$

получим

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{kb}{2}t^2 - bktTt + bkT^2\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

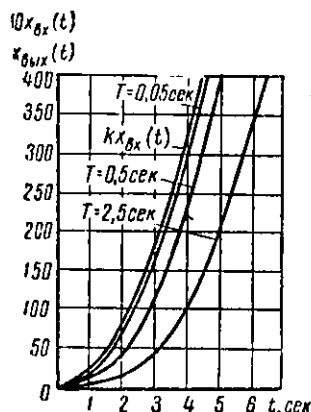


Рис. 7.3. Кривые $x_{\text{вых}}(t)$ для аperiodического звена при квадратичной входной функции

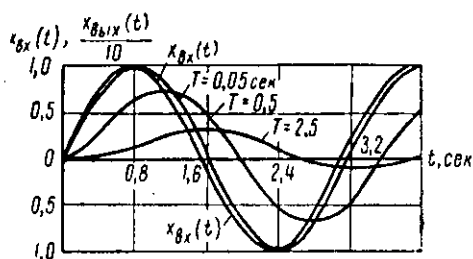


Рис. 7.4. Кривые $x_{\text{вых}}(t)$ для аperiodического звена при синусоидальной входной функции

После подстановки числовых величин

$$x_{\text{вых}}(t) = 20t^2 - 40Tt - 40T^2\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

График $x_{\text{вых}}(t)$ для заданных значений T построен на рис. 7.3.

Пример 7.4. Построение графика $x_{\text{вых}}(t)$ для аperiodического звена при синусоидальном входном воздействии.

Пусть $x_{\text{вх}}(t) = A \sin \Omega t$,
где $A = 1$, $\Omega = 2 \frac{1}{\text{сек}}$.

Тогда

$$X_{\text{вх}}(p) = \frac{A\Omega}{p^2 + \Omega^2};$$

$$X_{\text{вых}}(p) = \frac{kA\Omega}{(Tp+1)(p^2 + \Omega^2)}.$$

Пользуясь таблицей операторных изображений [Л. 27], находим

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{kA}{\sqrt{T^2 \Omega^2 + 1}} \left[\frac{T\Omega}{\sqrt{T^2 \Omega^2 + 1}} e^{-\frac{t}{T}} + \sin(\Omega t - \arctg T\Omega) \right].$$

После подстановки числовых величин

$$x_{\text{вых}}(t) = \frac{10}{\sqrt{4T^2 + 1}} \left[\frac{2T}{\sqrt{4T^2 + 1}} e^{-\frac{t}{T}} + \sin(2t - \arctg 2T) \right].$$

График $x_{\text{вых}}(t)$ построен на рис. 7.4.

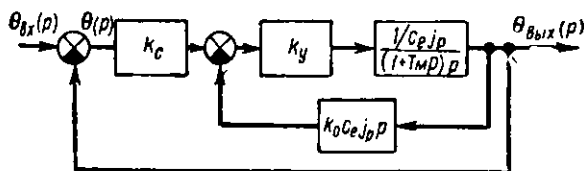


Рис. 7.5. Структурная схема следящей системы

Пример 7.5. Построение графика изменения ошибки следящей системы по семейству безразмерных кривых. Передаточная функция следящей системы

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{T_m p^2 + (1 + k_y k_0) p}{T_m p^2 + (1 + k_y k_0) p + D}.$$

Параметры системы: $T_m = 0,04$ сек; $k_y = 300$; $k_0 = 0,002$; $D = 100 \frac{1}{\text{сек}}$. Структурная схема системы изображена на рис. 7.5.

Воспользуемся приведенными на рис. 7.6 безразмерными кривыми ошибки $\Theta(t)$, построенными по оригиналу операторного изображения

$$\Theta(p) = \frac{p^2 + 2\zeta\omega_0 p}{(p^2 + 2\zeta\omega_0 p + \omega_0^2) p}$$

для различных значений коэффициента затухания ζ при единичном входном воздействии $\Theta_{\text{вх}}(t) = 1(t)$.

Подставляя численные значения параметров и принимая

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p},$$

будем иметь

$$\Theta(p) = \frac{0,04p^2 + 1,6p}{(0,04p^2 + 1,6p + 100)p} = \frac{p^2 + 40}{p^2 + 40p + 2500}.$$

Сравнивая полученное выражение с изображением ошибки в безразмерных параметрах, находим, что в нашем случае $\omega_0^2 = 2500$ и, следовательно, $\omega_0 = 50$.

Из уравнения $2 \cdot 50\zeta = 40$ находим $\zeta = 0,4$.

Выбираем на рис. 7.6 кривую при $\zeta = 0,4$ и наносим по оси абсцисс значения времени из условия

$$t = \frac{\bar{t}}{\omega_0} = \frac{\bar{t}}{50},$$

где $\bar{t}$ — безразмерное время.

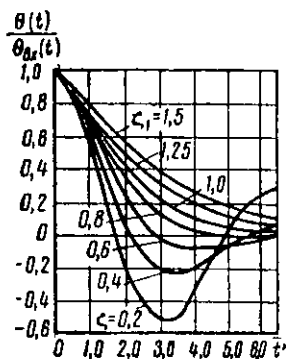


Рис. 7.6. Безразмерные кривые ошибки для систем второго порядка

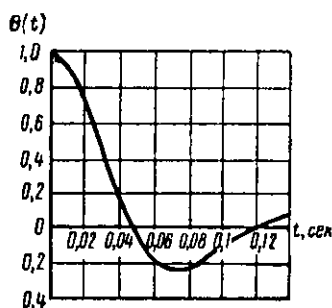


Рис. 7.7. График $\theta(t)$ для следящей системы при единичном воздействии

В результате получим график $\theta(t)$, приведенный на рис. 7.7.

Пример 7.6. Построение графика $\theta_{вых}(t)$ для следящей системы при входном сигнале, изменяющемся по линейному закону $\theta_{вх}(t) = \Omega t$.

Система имеет следующие значения параметров: $k_c = 50$ в/рад; $k_y = 400$; $c_e = 0,6 \frac{с}{рад/сек}$; $T_m = 0,02$ сек; $j_p = 250$; $k_0 = 10^{-4}$; $\Omega = 60$ град/сек.

Структурная схема следящей системы изображена на рис. 7.5. Так как

$$\theta_{вх}(t) = \Omega t \div \frac{\Omega}{p^2},$$

то операторное изображение выходной величины

$$\theta_{вых}(p) = \frac{D\Omega}{[T_m p^3 + (1 + k_y k_0) p + D] p^2},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}.$$

В справочнике по операционному исчислению имеем формулу

$$\frac{1}{[(p+a)^2 + b^2] p^2} \doteq \frac{1}{a^2 + b^2} \left[t - \frac{2a}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt - \lambda) \right],$$

где $\lambda = 2 \arctg \frac{b}{-a}$.

Выражение для $\Theta_{\text{вых}}(p)$ можно преобразовать к виду

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D\Omega}{T_m} \cdot \frac{1}{\left(p^2 + \frac{1 + k_y k_0}{T_m} p + \frac{D}{T_m} \right) p^2}.$$

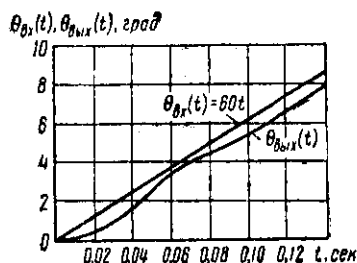


Рис. 7.8. Графики $\Theta_{\text{вх}}(t)$ и $\Theta_{\text{вых}}(t)$ для следящей системы при линейном воздействии

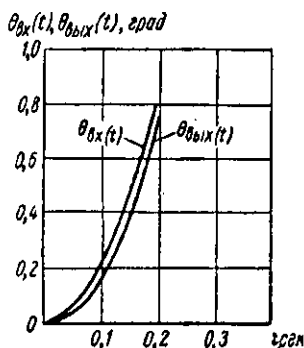


Рис. 7.9. Графики $\Theta_{\text{вх}}(t)$ и $\Theta_{\text{вых}}(t)$ при квадратичном воздействии

Приравнявая соответствующие коэффициенты знаменателей, замечаем, что последнее выражение можно свести к формуле справочника, если положить

$$a = \frac{1 + k_y k_0}{2T_m};$$

$$b = \frac{1}{2T_m} \sqrt{4DT_m - (1 + k_y k_0)^2};$$

$$a^2 + b^2 = \frac{D}{T_m}.$$

Учитывая постоянный множитель Ω , будем иметь

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = \Omega t - \Omega \left[\frac{2a}{a^2 + b^2} - \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt - \lambda) \right].$$

После подстановки численных значений параметров системы

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 60t - 60 [0,00777 - 0,0129e^{-26t} \sin(77,4t - 3,79)].$$

График $\Theta_{\text{вых}}(t)$ представлен на рис. 7.8.

Пример 7.7. Построение графика $\Theta_{\text{вых}}(t)$ для следящей системы при квадратичном входном воздействии.

Пусть $\Theta_{\text{вх}}(t) = \frac{\varepsilon}{2} t^2$ ($\varepsilon = 40 \frac{1}{\text{сек}^2}$).

Подставляя в передаточную функцию системы, рассмотренной в примере 7.6, значение

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{\varepsilon}{p^3},$$

будем иметь

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D\varepsilon}{[T_M p^3 + (1 + k_y k_0) p + D] p^3}.$$

Вводя те же подстановки, что и в примере 7.6, запишем

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = (a^2 + b^2) \varepsilon \frac{1}{p^3 [(p + a)^2 + b^2]}.$$

Готовой формулы в справочнике нет, поэтому проинтегрируем оригинал табличного изображения, использованного в примере 7.6:

$$\frac{1}{p^3 [(p + a)^2 + b^2]} \doteq \int_0^t \frac{1}{a^2 + b^2} \left[t - \frac{2a}{a^2 + b^2} + \frac{1}{b} e^{-at} \sin(bt - \lambda) \right] dt,$$

где

$$\lambda = 2 \arctg \frac{b}{-a}.$$

Выполняя интегрирование и учитывая наличие постоянного множителя ε , получим

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = \frac{\varepsilon}{2} t^2 - \frac{\varepsilon}{a^2 + b^2} \left\{ 2at + e^{-at} \left[\frac{a}{b} \sin(bt - \lambda) + \right. \right. \\ \left. \left. + \cos(bt - \lambda) \right] + \frac{a}{b} \sin \lambda - \cos \lambda \right\}.$$

Подставив в последнее выражение численные значения параметров следящей системы, будем иметь

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 20t^2 - 0,006 \{ 52t + e^{-26t} [0,336 \sin(77,4t - 3,79) + \\ + \cos(77,4t - 3,79)] + 0,597 \}.$$

График функции $\Theta_{\text{вых}}(t)$ представлен на рис. 7.9.

Пример 7.8. Определение переходного процесса на выходе следящей системы при $\Theta_{\text{вых}}(t) = A \sin \Omega t$.

Значения параметров входного воздействия: $A=1$, $\Omega=8 \text{ рад/сек}$.

Поскольку

$$\sin \Omega t \doteq \frac{\Omega}{p^2 + \Omega^2},$$

то изображение выходной величины следящей системы (из примера 7.6)

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D\Omega}{[T_{\Sigma} p^2 + (1 + k_y k_0) p + D] (p^2 + \Omega^2)}.$$

Вводя такие же подстановки, как и в примере 7.6, можем написать

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = (a^2 + b^2) \frac{1}{[(p + a)^2 + b^2] (p^2 + \Omega^2)}.$$

Применяя соответствующую формулу из справочника по операционному исчислению, будем иметь

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = \frac{a^2 + b^2}{\sqrt{(a^2 + b^2 - \Omega^2)^2 + 4a^2 \Omega^2}} \sin(\Omega t - \lambda) + \\ + \frac{(a^2 + b^2) \Omega}{b \sqrt{(a^2 + b^2 - \Omega^2)^2 + 4a^2 \Omega^2}} e^{-at} \sin(bt - \varphi),$$

где

$$\lambda = \arctg \frac{2a\Omega}{a^2 + b^2 - \Omega^2}; \quad \varphi = \arctg \frac{-2ab}{a^2 - b^2 + \Omega^2}.$$

Подставив численные значения параметров системы, получим

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 1,024 \sin(8t - 0,063) + 0,106 e^{-26t} \sin(77,4t - 3,79).$$

Значения $\Theta_{\text{вых}}(t)$ приведены в табл. 7.1, по которой построен график, изображенный на рис. 7.10.

Таблица 7.1

$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$	$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$
0	0	0,20	1,021
0,005	0,0008	0,35	0,404
0,01	0,0076	0,50	-0,73
0,05	0,341	0,60	-1,02
0,10	0,682	0,80	0,0552
0,15	0,929	1,00	1,02

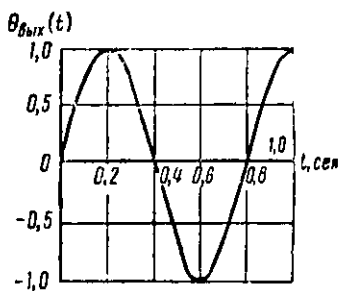


Рис. 7. 10. График $\Theta_{\text{вых}}(t)$ при синусном воздействии

Пример 7.9. Построение кривой переходного процесса в следящей системе с жесткой отрицательной обратной связью по скорости.

Структурная схема системы изображена на рис. 7.5.

Управляющее воздействие имеет вид единичной функции времени.

Система имеет следующие параметры: передаточный коэффициент преобразующего устройства $k_0 = 50$ в/рад; передаточный коэффициент усилителя $k_y = 800$; скоростной коэффициент двигателя $c_e = 0,6 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}$; электрохимическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,04$ сек; передаточное число редуктора $j_p = 250$; коэффициент жесткой обратной связи $k_0 = 0; 0,0001; 0,00565; 0,01$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c \frac{\frac{k_y \frac{1}{c_e j_p}}{(T_m p + 1) p}}{1 + \frac{k_y \frac{1}{c_e j_p}}{(T_m p + 1) p} \cdot k_0 c_e j_p p} = \frac{D}{(T_m p + 1 + k_y k_0) p},$$

где $D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}$.

Операторное изображение выходной величины

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{вых}}(p) &= \frac{W(p)}{1 + W(p)} \Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{1 + \frac{1}{W(p)}} \Theta_{\text{вх}}(p) = \\ &= \frac{D}{T_m p^2 + (1 + k_y k_0) p + D} \Theta_{\text{вх}}(p). \end{aligned}$$

При $\Theta_{\text{вых}}(t) = 1(t)$
операторное изображение входной величины

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p},$$

тогда

$$\begin{aligned} \Theta_{\text{вых}}(p) &= \frac{D}{[T_m p^2 + (1 + k_y k_0) p + D] p} = \\ &= \frac{\frac{D}{T_m}}{p \left(p^2 + \frac{1 + k_y k_0}{T_m} p + \frac{D}{T_m} \right)}. \end{aligned}$$

В таблице операторных изображений имеем:
при $n^2 > m^2$

$$\frac{1}{p(p^2 + 2mp + n^2)} \doteq \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\cos n_1 t + \frac{m}{n_1} \sin n_1 t \right) \right],$$

где $n_1 = \sqrt{n^2 - m^2}$;

при $m^2 > n^2$

$$\frac{1}{p(p^2 + 2mp + n^2)} = \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\operatorname{ch} at + \frac{m}{a} \operatorname{sh} at \right) \right],$$

где $a = \sqrt{m^2 - n^2}$.

В данном случае

$$2m = \frac{1 + k_y k_0}{T_m}; \quad n^2 = \frac{D}{T_m}.$$

В зависимости от k_0 может быть $n^2 > m^2$ или $m^2 > n^2$.

Рассмотрим несколько случаев при различных значениях k_0 :

1) $k_0 = 0$.

$$2m = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{0,04} = 25;$$

$$m = 12,5; \quad m^2 = 12,5^2 = 156,2;$$

$$n^2 = \frac{D}{T_m} = \frac{k_c k_y}{c_e j_p T_m} = \frac{50 \cdot 800}{0,6 \cdot 250 \cdot 0,04} = 6666.$$

$m^2 < n^2$

Чтобы перейти от изображения к оригиналу, находим:

$$n_1 = \sqrt{n^2 - m^2} = \sqrt{6666 - 156,2} = 80,75;$$

$$\frac{m}{n_1} = \frac{12,5}{80,75} = 0,155;$$

тогда

$$\Theta_{\text{ВМХ}}(t) = 1 - e^{-12,5t} (\cos 80,75t + 0,155 \sin 80,75t).$$

2) $k_0 = 10^{-4}$.

$$2m = \frac{1 + k_0 k_y}{T_m} = \frac{1 + 800 \cdot 10^{-4}}{0,04} = 27;$$

$$m = 13,5; \quad m^2 = 182,25;$$

$$n_1 = \sqrt{6666 - 182,25} = 80,6;$$

$$n^2 = 6666; \quad \frac{m}{n_1} = 0,1675;$$

$$m^2 < n^2.$$

$$\Theta_{\text{ВМХ}}(t) = 1 - e^{-13,5t} (\cos 80,6t + 0,1675 \sin 80,6t).$$

3) $k_0 = 0,00565$.

$$2m = \frac{1 + k_0 k_y}{T_m} = \frac{1 + 0,00565 \cdot 800}{0,04} = 138;$$

$$m = 69; \quad m^2 = 4760; \quad m^2 < n^2;$$

$$n_1 = \sqrt{6666 - 4760} = 43,6; \quad \frac{m}{n_1} = 1,583;$$

$$\Theta_{\text{ВМХ}}(t) = 1 - e^{-69t} (\cos 43,6t + 1,583 \sin 43,6t).$$

4) $k_0 = 0,01$.

$$2m = \frac{1 + k_v k_a}{T_m} = \frac{1 + 800 \cdot 0,01}{0,04} = 225; m = 112,5;$$

$$m^2 = 12\,635; \text{ т. е. } m^2 > n^2.$$

При этом условии (по приведенной выше формуле)

$$a = \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{12\,635 - 6666} = 77,25;$$

$$\frac{m}{a} = 1,456;$$

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 1 - e^{-112,5t} (\text{ch } 77,25t + 1,456 \text{ sh } 77,25t).$$

Таблица 7.2

t, сек	$\Theta_{\text{вых}}$				t, сек	$\Theta_{\text{вых}}$			
	$k_0=0$	$k_0=10^{-4}$	$k_0=0,00565$	$k_0=0,01$		$k_0=0$	$k_0=10^{-4}$	$k_0=0,00565$	$k_0=0,01$
0	0	0	0	0	0,1	1,02	1,01	0,992	0,973
0,01	0,293	0,274	0,16	0,17	0,11	1,2	1,17	—	—
0,02	0,913	1,1	0,408	0,4	0,12	1,22	1,2	—	—
0,03	1,44	1,43	0,615	0,577	0,15	0,85	0,89	—	—
0,04	1,61	1,59	0,766	0,704	0,19	1,08	1,07	—	—
0,05	1,33	1,39	0,864	0,796	0,28	0,949	0,956	—	—
0,06	1,02	1,02	0,919	0,853	0,27	1,03	1,02	—	—
0,07	0,705	0,726	0,955	0,892	0,31	0,986	—	—	—
0,08	0,596	0,71	0,974	0,926	—	—	—	—	—
0,09	0,824	0,791	0,986	0,964	—	—	—	—	—

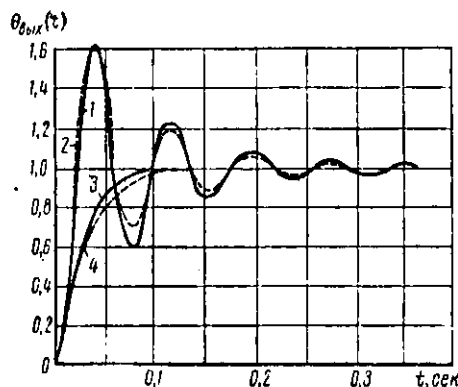


Рис. 7.11. Графики $\Theta_{\text{вых}}(t)$ для следящей системы:

1 — $k_0=0$; 2 — $k_0=10^{-4}$; 3 — $k_0=0,00565$;
4 — $k_0=0,01$

Рассчитанный по табл. 7.2 график $\Theta_{\text{вых}}(t)$ изображен на рис. 7.11.

Пример 7.10. Построение кривой переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе с жесткой обратной связью по скорости (рис. 7.5) при изменении управляющего воздействия по закону единичной функции времени.

Система имеет следующие параметры: передаточный коэффициент преобразующего устройства $k_c = 0,87$ в/град; передаточный коэффициент усилителя

$k_y = 400$; скоростной коэффициент двигателя $c_e = 0,0131 \frac{r}{\text{град/сек}}$; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,02 \text{ сек}$; передаточное число редуктора $j_p = 200$; коэффициент жесткой обратной связи $k_0 = 0; 0,0001; 0,00565; 0,01$.

Передаточная функция разомкнутой системы (см. пример 7.9)

$$W(p) = \frac{D}{(T_m p + 1 + k_y k_0) p},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}.$$

Операторное изображение выходной величины

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{W(p)}{1 + W(p)} \Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{\frac{D}{T_m}}{\left(p^2 + \frac{1 + k_y k_0}{T_m} p + \frac{D}{T_m}\right)} \Theta_{\text{вх}}(p).$$

При $\Theta_{\text{вх}}(t) = 1(t)$

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p},$$

откуда

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{\frac{D}{T_m}}{p \left(p^2 + \frac{1 + k_y k_0}{T_m} p + \frac{D}{T_m} \right)}.$$

Для расчета переходного процесса применим формулы, приведенные в примере 7.9:

при $n^2 > m^2$

$$\frac{1}{p(p^2 + 2mp + n^2)} \doteq \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\cos n_1 t + \frac{m}{n_1} \sin n_1 t \right) \right],$$

где $n_1 = \sqrt{n^2 - m^2}$;

при $m^2 > n^2$

$$\frac{1}{p(p^2 + 2mp + n^2)} \doteq \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\text{ch } \alpha t + \frac{m}{\alpha} \text{sh } \alpha t \right) \right],$$

где $\alpha = \sqrt{m^2 - n^2}$.

В данном случае

$$2m = \frac{1 + k_y k_0}{T_m}; \quad n^2 = \frac{D}{T_m}.$$

В зависимости от k_0 может быть $m^2 > n^2$ или $n^2 > m^2$.

Рассмотрим несколько случаев при различных значениях k_0 :
 1) $k_0=0$.

$$2m = \frac{1}{T_m} = \frac{1}{0,02} = 50;$$

$$m = 25; \quad m^2 = 625;$$

$$n^2 = \frac{D}{T_m} = \frac{k_c \cdot k_y}{c_e I_p T_m} = \frac{0,87 \cdot 400}{0,0131 \cdot 200 \cdot 0,02} = 6660;$$

$$n_1 = \sqrt{n^2 - m^2} = \sqrt{6660 - 625} = 77,7;$$

$$\frac{m}{n_1} = \frac{25}{77,7} = 0,325.$$

Перейдем от изображения к оригиналу. Так как $m^2 < n^2$, то

$$\Theta_{\text{БМХ}}(t) = 1 - e^{-25t} (\cos 77,7t + 0,325 \sin 77,7t).$$

2) $k_0 = 10^{-4}$.

$$2m = \frac{1 + k_0 k_y}{T_m} = \frac{1 + 400 \cdot 10^{-4}}{0,02} = 52;$$

$$m = 26; \quad m^2 = 676;$$

$$n_1 = \sqrt{6660 - 676} = 77,4;$$

$$\frac{m}{n_1} = \frac{26}{77,4} = 0,336;$$

$$\Theta_{\text{БМХ}}(t) = 1 - e^{-26t} (\cos 77,4t + 0,336 \sin 77,4t).$$

3) $k_0 = 0,00565$.

$$2m = \frac{1 + k_0 k_y}{T_m} = \frac{1 + 0,00565 \cdot 400}{0,02} = 163;$$

$$m = 81,5; \quad m^2 = 6642;$$

$$n_1 = \sqrt{6665 - 6642} = 4,8;$$

$$\frac{m}{n_1} = \frac{81,5}{4,8} = 17;$$

$$\Theta_{\text{БМХ}}(t) = 1 - e^{-81,5t} (\cos 4,8t + 17 \sin 4,8t).$$

4) $k_0 = 0,01$.

$$2m = \frac{1 + k_0 k_y}{T_m} = \frac{1 + 0,01 \cdot 400}{0,02} = 250;$$

$$m = 125; \quad m^2 = 15600.$$

В данном случае $m^2 > n^2$, а следовательно,

$$\alpha = \sqrt{m^2 - n^2} = \sqrt{15\,600 - 6665} = 94,6;$$

$$\frac{m}{\alpha} = \frac{125}{94,6} = 1,32;$$

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 1 - e^{-125t} (\text{ch } 94,6t + 1,32 \text{ sh } 94,6t).$$

Данные расчета $\Theta_{\text{вых}}(t)$ представлены в табл. 7.3, на основании которой построены кривые переходных процессов в следящей системе (рис. 7.12).

Пример 7.11. Построение кривой переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе с гибкой обратной связью.

Структурная схема системы изображена на рис. 5.9, а. Управляющее

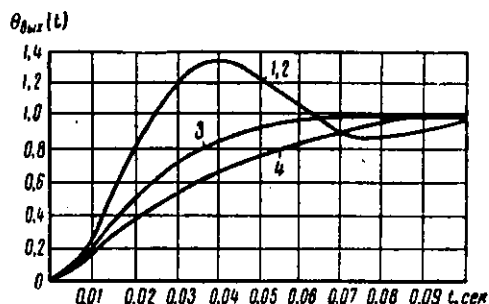


Рис. 7.12. График $\Theta_{\text{вых}}(t)$ для следящей системы:

1, 2 — $k_0=0$ и $k_0=10^{-4}$; 3 — $k_0=0,00565$; 4 — $k_0=0,01$

Таблица 7.3

$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}$				$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}$			
	$k_0=0$	$k_0=10^{-4}$	$k_0=0,00565$	$k_0=0,01$		$k_0=0$	$k_0=10^{-4}$	$k_0=0,00565$	$k_0=0,01$
0	0	0	0	0	0,045	1,34	1,32	0,883	0,71
0,005	0,07	0,075	0,06	0,06	0,06	1,08	1,05	0,996	0,81
0,01	0,266	0,269	0,19	0,166	0,07	0,917	0,925	0,998	0,88
0,015	0,52	0,50	0,354	0,271	0,08	0,865	0,893	0,999	0,965
0,02	0,792	0,785	0,493	0,366	0,09	0,898	0,896	—	—
0,025	1,0	1,02	0,616	0,45	0,1	0,964	0,967	—	—
0,03	1,20	1,199	0,702	0,53	0,2	0,999	1,0	—	—
0,035	1,34	1,33	0,712	0,6	—	—	—	—	—
0,04	1,36	1,35	0,84	0,653	—	—	—	—	—

воздействие изменяется по закону единичной функции времени.

Система имеет следующие параметры: передаточный коэффициент преобразующего устройства $k_c=0,87$ в/град; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_q=0,12$ сек, электро-механическая постоянная времени двигателя $T_M=0,25$ сек; скоростной коэффициент двигателя $c_e=0,0106 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$; передаточное число редуктора $i_p=165$; коэффициент гибкой обратной

связи $k_0=0,2$; коэффициент усиления усилителя $k_y=100$; постоянная времени стабилизирующего звена $T_0=0,5$ сек.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c \frac{\frac{k_y}{c_e i p}}{(1 + T_q p)(1 + T_m p) p} \cdot \frac{k_y}{1 + \frac{c_e i p}{(1 + T_q p)(1 + T_m p) p} \cdot \frac{k_0 c_e i p p T_0 p}{(1 + T_0 p)}}$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{ух}}(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{D(1 + T_0 p)}{T_q T_m T_0 p^4 + (T_q T_m + T_0 T_m + T_0 T_q) p^3 + (T_q + T_m + T_0 + k_y k_0 T_0) p^2 + (1 + D T_0) p + D}$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e i p}$$

Определим численные значения:

$$D = \frac{0,87 \cdot 100}{0,0106 \cdot 165} = 49,7;$$

$$T_q T_m T_0 = 0,12 \cdot 0,25 \cdot 0,5 = 0,015;$$

$$T_q T_m + T_0 T_m + T_q T_0 = 0,12 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,25 + 0,5 \cdot 0,12 = 0,215;$$

$$T_q + T_m + T_0 + k_y k_0 T_0 = 0,12 + 0,25 + 0,5 + 100 \cdot 0,2 \cdot 0,5 = 10,9;$$

$$1 + D T_0 = 1 + 49,7 \cdot 0,5 = 25,9;$$

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{ух}}(p)} = \frac{49,7(1 + 0,5 p)}{0,015 p^4 + 0,215 p^3 + 10,9 p^2 + 25,9 p + 49,7}$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$0,015 p^4 + 0,215 p^3 + 10,9 p^2 + 25,9 p + 49,7 = 0,$$

или

$$p^4 + 14,3 p^3 + 725 p^2 + 1710 p + 3320 = 0,$$

Определим корни характеристического уравнения по методу деления многочленов [Л.21].

Первое приближение:

$$725 p^2 + 1710 p + 3320 = 0,$$

или

$$p^2 + 2,37 p + 4,6 = 0;$$

$$\begin{array}{r}
 - \frac{p^4 + 14,3 p^3 + 725 p^2 + 1710 p + 3320}{p^4 + 2,4 p^3 + 4,6 p^2} \bigg| \frac{p^3 + 2,37 p + 4,6}{p^3 + 12 p + 692} \\
 - \frac{12 p^3 + 720 p^2 + 1710 p}{12 p^3 + 28 p^2 + 54 p} \\
 \hline
 692 p^2 + 1660 p + 3320
 \end{array}$$

Второе приближение:

$$692 p^2 + 1660 p + 3320 = 0,$$

или

$$p^2 + 2,4 p + 4,8 = 0;$$

$$\begin{array}{r}
 - \frac{p^4 + 14,3 p^3 + 725 p^2 + 1710 p + 3320}{p^4 + 2,4 p^3 + 4,8 p^2} \bigg| \frac{p^2 + 2,4 p + 4,8}{p^2 + 12 p + 691} \\
 - \frac{12 p^3 + 720 p^2 + 1710 p}{12 p^3 + 29 p^2 + 57 p} \\
 \hline
 - \frac{691 p^2 + 1650 p + 3320}{691 p^2 + 1660 p + 3310}
 \end{array}$$

Дальнейшие вычисления не имеют смысла, так как результаты их отличаются лишь в третьем знаке.

Таким образом, характеристическое уравнение системы разлагается на два квадратных:

$$691 p^2 + 1660 p + 3310 = 0 \text{ и } p^2 + 12 p + 691 = 0,$$

или

$$p^2 + 2,4 p + 4,79 = 0 \text{ и } p^2 + 12 p + 691 = 0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -1,2 \pm j 1,83;$$

$$p_{3,4} = -6 \pm j 25,6.$$

Таким образом,

$$p_1 = -1,2 + j 1,83 = 2,19 \angle 90^\circ + 33^\circ 15';$$

$$p_2 = -1,2 - j 1,83 = 2,19 \angle -(90^\circ + 33^\circ 15');$$

$$p_3 = -6 + j 25,6 = 26,3 \angle 90^\circ + 13^\circ 10';$$

$$p_4 = -6 - j 25,6 = 26,3 \angle -(90^\circ + 13^\circ 10').$$

При $\Theta_{вх}(t) = 1(t)$

$$\Theta_{вх}(p) = \frac{1}{p}.$$

Операторное изображение выходной величины

$$\Theta_{вых}(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \cdot \frac{1}{p}.$$

где

$$F_1(p) = 49,7(1 + 0,5p);$$

$$F_2(p) = 0,015p^4 + 0,215p^3 + 10,9p^2 + 25,9p + 49,7.$$

Используем вторую теорему разложения (7.1) для отыскания оригинала по его изображению. В данном случае:

$$F'_2(p) = 0,06p^3 + 0,645p^2 + 21,8p + 25,9;$$

$$F_1(p) = 49,7(1 + 0,5p).$$

Вычислим $\frac{F_1(p_1)}{p_1 F'_2(p_1)}$:

$$p_1 = -1,2 + j1,83 = 2,19 | 90^\circ + 33^\circ 15';$$

$$\begin{aligned} F_1(p_1) &= 49,7 [1 + 0,5(-1,2 + j1,83)] = \\ &= 20,9 + j45,5 = 49,7 | 66^\circ 22'; \end{aligned}$$

$$F'_2(p_1) = 0,06p_1^3 + 0,645p_1^2 + 21,8p_1 + 25,9;$$

$$0,06p_1^3 = 0,06 \cdot 10,5 | 9^\circ 45' = 0,621 + j0,106;$$

$$0,645p_1^2 = 0,645 \cdot 4,8 | 180^\circ + 66^\circ 30' = -1,23 - j2,84;$$

$$21,8p_1 = 21,8(-1,2 + j1,83) = -26,1 + j39,8;$$

$$F'_2(p_1) = -0,798 + j37 = 37 | 90^\circ + 1^\circ 15'.$$

Тогда

$$\frac{F_1(p_1)}{p_1 F'_2(p_1)} = \frac{49,7 | 66^\circ 22'}{37 | 90^\circ + 1^\circ 15' \cdot 2,19 | 90^\circ + 33^\circ 15'} = 0,613 e^{-j(90^\circ + 53^\circ 8')}.$$

Соответственно

$$\frac{F_1(p_2)}{p_2 F'_2(p_2)} = 0,613 e^{j(90^\circ + 53^\circ 8')}.$$

Вычислим $\frac{F_1(p_3)}{p_3 F'_2(p_3)}$:

$$p_3 = -6 + j25,6 = 26,3 | 90^\circ + 13^\circ 10';$$

$$\begin{aligned} F_1(p_3) &= 49,7 [1 + 0,5(-6 + j25,6)] = \\ &= -98,6 + j637 = 644 | 90^\circ + 8^\circ 52'; \end{aligned}$$

$$F'_2(p_3) = 0,06p_3^3 + 0,645p_3^2 + 21,8p_3 + 25,9;$$

$$0,06p_3^3 = 0,06 \cdot 18170 | 270^\circ + 39^\circ 30' = 694 - j841;$$

$$0,645p_3^2 = 0,645 \cdot 691 | 180^\circ + 26^\circ 20' = -400 - j198;$$

$$21,8 p_3 = 21,8(-6,0 + j 25,6) = -130 + j 556;$$

$$F'_2(p_3) = 190 - j 482 = 518 \angle -68^\circ 30'.$$

Тогда

$$\frac{F_1(p_3)}{p_3 \cdot F'_2(p_3)} = \frac{644 \angle 90^\circ + 8^\circ 52'}{518 \angle -68^\circ 30' \cdot 26,3 \angle 90^\circ + 13^\circ 10'} = 0,0472 e^{j 64^\circ 12'}.$$

Соответственно

$$\frac{F_1(p_4)}{p_4 F'_2(p_4)} = 0,0472 e^{-j 64^\circ 12'}.$$

Подставляя в формулу (7.1), будем иметь:

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 1 + 0,613 e^{-j(90^\circ + 58^\circ 8')} \cdot e^{(-1,2 + j 1,83)t} + \\ + 0,613 e^{j(90^\circ + 58^\circ 8')} \cdot e^{(-1,2 - j 1,83)t} + 0,0472 e^{j 64^\circ 12'} \cdot e^{(-6 + j 25,6)t},$$

или после преобразований

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 1 + 1,23 e^{-1,2t} \cos(1,83t - 2,58) + \\ + 0,0945 e^{-5,96t} \cos(25,6t + 1,12).$$

Результаты расчета функции $\Theta_{\text{вых}}(t)$ представлены в табл. 7.4, по которой построен график (рис. 7.13).

Таблица 7.4

$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$	$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$
0	0	2,0	1,05
0,2	0,446	2,4	0,839
0,4	0,792	2,8	0,965
0,8	1,2	3,2	0,974
1,0	1,27	3,6	0,989
1,2	1,27	4,0	1,0
1,6	1,17		

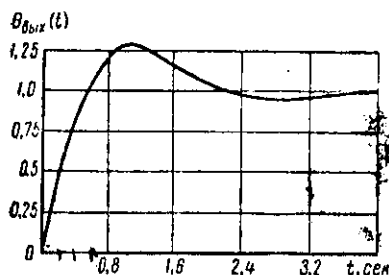


Рис. 7.13. График переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе с гибкой обратной связью при $T_0=0,5$ сек

Пример 7.12. Построение кривой переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе с жесткой и гибкой обратными связями.

Структурная схема системы изображена на рис. 5.10, а. Управляющее воздействие изменяется по закону единичной функции времени.

Система имеет следующие параметры: передаточный коэффициент преобразующего устройства $k_c=87$ в/град; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_q=0,12$ сек; электро-механическая постоянная времени двигателя $T_m=0,25$ сек; скорост-

ной коэффициент двигателя $c_e = 0,0106 \frac{\text{град/сек}}{\text{град/сек}}$; передаточное число редуктора $j_p = 165$; коэффициент гибкой обратной связи $k_0 = 0,2$; коэффициент усиления $k_y = 100$; постоянная времени стабилизирующего звена $\tau = 0,05 \text{ сек}$; передаточный коэффициент стабилизирующего звена $\alpha = 0,2$.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c \frac{\frac{k_y}{c_e j_p}}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)p} = \frac{A(p)}{B(p)},$$

$$1 + \frac{\frac{k_y}{c_e j_p}}{(1 + T_q p)(1 + T_m p)p} \cdot \frac{k_0 c_e j_p p(\alpha + \tau p)}{(1 + \tau p)},$$

где

$$A(p) = D(1 + \tau p),$$

$$B(p) = T_q T_m \tau p^3 + (T_q \tau + T_m \tau + T_q T_m) p^2 + [T_q + T_m + (1 + k_y k_0) \tau] p^2 + (1 + k_y k_0 \alpha) p;$$

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}.$$

Передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)} = \frac{A(p)}{H(p)},$$

где

$$H(p) = A(p) + B(p) = T_q T_m \tau p^3 + (T_q \tau + T_m \tau + T_q T_m) p^2 + [T_q + T_m + (1 + k_y k_0) \tau] p^2 + (1 + k_y k_0 \alpha + D\tau) p + D.$$

Найдем численные значения коэффициентов:

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p} = \frac{0,87 \cdot 100}{0,0106 \cdot 165} = 49,7 \frac{1}{\text{сек}};$$

$$T_q T_m \tau = 0,12 \cdot 0,25 \cdot 0,05 = 0,0015 \text{ сек}^3;$$

$$T_q \tau + T_m \tau + T_q T_m = 0,12 \cdot 0,05 + 0,25 \cdot 0,05 + 0,12 \cdot 0,25 = 0,0485 \text{ сек}^2;$$

$$T_q + T_m + (1 + k_y k_0) \tau = 0,12 + 0,25 + (1 + 0,2 \cdot 100) 0,05 = 1,42 \text{ сек};$$

$$1 + k_y k_0 \alpha + D\tau = 1 + 0,2 \cdot 100 \cdot 0,2 + 49,7 \cdot 0,05 = 7,49;$$

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{49,7(1 + 0,05p)}{0,0015p^3 + 0,0485p^2 + 1,42p^2 + 7,49p + 49,7}.$$

Характеристическое уравнение системы имеет вид

$$0,0015p^3 + 0,0485p^2 + 1,42p + 7,49p + 49,7 = 0,$$

или

$$p^4 + 32,3p^3 + 947p^2 + 4990p + 33\,200 = 0.$$

Для определения корней характеристического уравнения воспользуемся методом деления многочленов [Л.21].

Квадратное уравнение первого приближения

$$947p^2 + 4990p + 33\,200 = 0,$$

или

$$\begin{array}{r} p^2 + 5,27p + 35,1 = 0, \\ - \frac{p^4 + 32,3p^3 + 947p^2 + 4990p + 33\,200}{p^4 + 5,27p^3 + 35,1p^2} \quad \left| \frac{p^2 + 5,27p + 35,1}{p^2 + 27,1 + 769} \right. \\ \hline 27,1p^3 + 912p^2 + 4990p \\ - 27,1p^3 + 143p^2 + 949p \\ \hline 769p^2 + 4042p + 33\,200. \end{array}$$

Квадратное уравнение второго приближения

$$769p^2 + 4042p + 33\,200 = 0,$$

или

$$\begin{array}{r} p^2 + 5,25p + 43,1 = 0, \\ - \frac{p^4 + 32,3p^3 + 947p^2 + 4990p + 33\,200}{p^4 + 5,25p^3 + 43,1p^2} \quad \left| \frac{p^2 + 5,25p + 43,1}{p^2 + 27,1p + 761} \right. \\ \hline 27,1p^3 + 904p^2 + 4990p \\ - 27,1p^3 + 143p^2 + 1170p \\ \hline 761p^2 + 3820p + 33\,200. \end{array}$$

Квадратное уравнение третьего приближения

$$761p^2 + 3820p + 33\,200 = 0,$$

или

$$\begin{array}{r} p^2 + 5,02p + 43,5 = 0, \\ - \frac{p^4 + 32,3p^3 + 947p^2 + 4990p + 33\,200}{p^4 + 5,02p^3 + 43,5p^2} \quad \left| \frac{p^2 + 5,02p + 43,5}{p^2 + 27,3p + 766} \right. \\ \hline 27,3p^3 + 903p^2 + 4990p \\ - 27,3p^3 + 137p^2 + 1190p \\ \hline 766p^2 + 3800p + 33\,200. \end{array}$$

Квадратное уравнение четвертого приближения

$$766p^2 + 3800p + 33\,200 = 0,$$

или

$$p^2 + 4,95p + 43,2 = 0,$$

$$\begin{array}{r}
 \frac{p^4 + 32,3p^3 + 947p^2 + 4990p + 33\,200}{p^4 + 4,95p^3 + 43,2p^2} \cdot \frac{p^2 + 4,95p + 43,2}{p^2 + 27,4p + 768} \\
 \hline
 27,4p^3 + 904p^2 + 4990p \\
 - 27,4p^3 + 136p^2 + 1180p \\
 \hline
 768p^2 + 3810p + 33\,200 \\
 - 768p^2 + 3800p + 33\,300 \\
 \hline
 \hline
 \end{array}$$

Этим можно ограничиться, так как результаты вычислений отличаются лишь в третьем знаке.

Таким образом, характеристическое уравнение системы разложено на два квадратных:

$$p^2 + 4,95p + 43,2 = 0,$$

$$p^2 + 27,4p + 768 = 0,$$

решая которые, получим корни характеристического уравнения:

$$p_{1,2} = -2,48 \pm j6,09;$$

$$p_{3,4} = -13,7 \pm j24,1.$$

Операторное изображение выходной величины

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{D \cdot F_1(p)}{F_2(p)} \cdot \frac{1}{p},$$

где

$$F_1(p) = 1 + \tau p = 1 + 0,05p;$$

$$F_2(p) = 0,0015p^4 + 0,0485p^3 + 1,42p^2 + 7,49p + 49,7.$$

Для перехода от операторной функции $\Theta_{\text{вых}}(p)$ к оригиналу $\Theta_{\text{вых}}(t)$ воспользуемся формулой разложения (7.1), в которой

$$F'_2(p_k) = 0,006p^3 + 0,1455p^2 + 2,84p + 7,49.$$

Обозначим

$$a_0 = 0,006; \quad a_1 = 0,1455; \quad a_2 = 2,84; \quad a_3 = 7,49.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
 F'_2(p_k) &= a_0(-\alpha + j\beta)^3 + a_1(-\alpha + j\beta)^2 + a_2(-\alpha + j\beta) + a_3 = \\
 &= (-a_0\alpha^3 + 3a_0\alpha\beta^2 + a_1\alpha^2 - a_1\beta^2 - a_2\alpha + a_3) + \\
 &\quad + j(3a_0\alpha^2\beta - a_0\beta^3 - 2a_1\alpha\beta + a_2\beta),
 \end{aligned}$$

где α и β — соответственно вещественная и мнимая части k -го корня характеристического уравнения.

Соответственно

$$\frac{D \cdot F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{D \cdot 1}{D} = 1.$$

Вычислим:

$$p_1 = -2,48 + j6,09 = 6,57 \angle 112^\circ 10'; \quad p_2 = 6,57 \angle -112^\circ 10';$$

$$F_1(p_1) = 1 + 0,05(-2,48 + j6,09) = 0,876 + j0,304 = 0,927 \angle 19^\circ 40';$$

$$F_1(p_2) = 0,876 - j0,304 = 0,927 \angle -19^\circ 40';$$

$$F'_2(p_1) = (-0,006 \cdot 2,48^3 + 3 \cdot 0,006 \cdot 2,48 \cdot 6,09^2 + 0,1455 \cdot 2,48^2 - 0,1455 \cdot 6,09^2 - 2,84 \cdot 2,48 + 7,49) + j(3 \cdot 0,006 \cdot 2,48^2 \cdot 6,09 - 0,006 \cdot 6,09^3 - 2 \cdot 0,1455 \cdot 2,48 \cdot 6,09 + 2,84 \cdot 6,09) =$$

$$= -2,51 + j12,3 = 12,6 \angle 101^\circ 40';$$

$$F'_2(p_2) = -2,51 - j12,3 = 12,6 \angle -101^\circ 40'.$$

Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{D \cdot F_1(p_1)}{p_1 \cdot F'_2(p_1)} e^{p_1 t} + \frac{D \cdot F_1(p_2)}{p_2 \cdot F'_2(p_2)} e^{p_2 t} = \\ & = \frac{49,7 \cdot 0,927 \angle 19^\circ 40'}{6,57 \angle 112^\circ 10' \cdot 12,6 \angle 101^\circ 40'} e^{(-2,48 + j6,09)t} + \\ & + \frac{49,7 \cdot 0,927 \angle -19^\circ 40'}{6,57 \angle -112^\circ 10' \cdot 12,6 \angle -101^\circ 40'} e^{(-2,48 - j6,09)t} = \\ & = e^{-2,48t} (0,559 e^{-j\varphi} \cdot e^{j6,09t} + 0,559 e^{j\varphi} e^{-j6,09t}) = \\ & = 1,118 e^{-2,48t} \frac{e^{j(6,09t - \varphi)} + e^{-j(6,09t - \varphi)}}{2} = \\ & = 1,118 e^{-2,48t} \cdot \cos(6,09t - \varphi), \end{aligned}$$

где $\varphi = 194^\circ 10'$.

Окончательно получим

$$\sum_{k=1}^2 \frac{D F_1(p_k)}{p_k \cdot F'_2(p_k)} e^{p_k t} = -1,118 e^{-2,48t} \cos(6,09t - 0,256).$$

Вычислим:

$$p_3 = -13,7 + j24,1 = 27,7 \angle 119^\circ 30';$$

$$p_4 = 27,7 \angle -119^\circ 30';$$

$$F_1(p_3) = 1 + 0,05(-13,7 + j24,1) = 0,316 + j1,21 = 1,24 \angle 75^\circ 20';$$

$$F'_2(p_3) = (-0,006 \cdot 13,7^3 + 3 \cdot 0,006 \cdot 13,7 \cdot 24,1^2 + 0,1455 \cdot 13,7^2 - 0,1455 \cdot 24,1^2 - 28,4 \cdot 13,7 + 7,49) + j(3 \cdot 0,006 \cdot 13,7^2 \cdot 24,1 -$$

$$\begin{aligned}
 &= 0,006 \cdot 24,1^3 - 2 \cdot 0,1455 \cdot 13,7 \cdot 24,1 + 2,84 \cdot 24,1 = \\
 &= 39,4 - j 29,4 = 49,2 \angle -36^\circ 40'.
 \end{aligned}$$

Тогда

$$\frac{D \cdot F_1(p_3)}{p_3 \cdot F_2'(p_3)} = \frac{49,7 \cdot 1,240 \angle 75^\circ 20'}{27,7 \angle 119^\circ 30' \cdot 49,2 \angle -36^\circ 40'} = 0,0453 \angle -8^\circ 30'.$$

Аналогично предыдущему

$$\sum_{k=3}^4 \frac{D \cdot F_1(p_k)}{p_k \cdot F_2'(p_k)} e^{p_k t} = 0,0906 e^{-13,7t} \cos(24,1t - 0,14).$$

Таким образом, решение уравнения переходного процесса имеет вид

$$\begin{aligned}
 \Theta_{\text{вых}}(t) &= 1 + 0,0906 e^{-13,7t} \cos(24,1t - 0,14) - \\
 &- 1,118 e^{-2,48t} \cos(6,09t - 0,256).
 \end{aligned}$$

Результаты расчета по полученному аналитическому выражению сведены в табл. 7.5, по данным которой построен график переходного процесса в следящей системе (рис. 7.14).

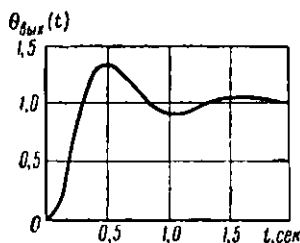


Рис. 7.14. График переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе с гибкой и жесткой обратными связями по скорости

Таблица 7.5

$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$	$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$
0	0	0,5	1,32
0,1	0,123	0,6	1,25
0,15	0,393	0,8	1,06
0,2	0,592	0,9	0,933
0,25	0,814	1,05	0,912
0,3	1,0	1,3	0,992
0,35	1,15	1,55	1,02
0,4	1,25	1,8	1,0
0,45	1,31	2,0	0,994

Пример 7.13. Построение кривой переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью.

Структурная схема системы изображена на рис. 5.11, а. Управляющее воздействие имеет вид единичной функции времени. Начальные условия — нулевые.

Система имеет следующие параметры: передаточный коэффициент преобразующего звена $k_c = 0,87$ в/град; передаточный

коэффициент дифференцирующего звена $k_d = 0,6 \text{ сек}$; передаточный коэффициент интегрирующего звена $k_n = 1 \frac{1}{\text{сек}}$; коэффициент усиления усилителя $k_y = 100$; скоростной коэффициент двигателя $c_e = 0,0106 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$; передаточное число редуктора $j_p = 165$; коэффициент гибкой обратной связи $k_0 = 0,2$; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_q = 0,12 \text{ сек}$; электро механическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,25 \text{ сек}$; постоянная времени стабилизирующего звена $T_0 = 0,4 \text{ сек}$.

Определим передаточную функцию замкнутой системы. Объединив три параллельных звена в прямой цепи системы в одно эквивалентное звено с передаточной функцией

$$W_1(p) = k_d p + 1 + \frac{k_n}{p}$$

и заменив часть системы, охваченную гибкой обратной связью, эквивалентным звеном

$$\begin{aligned} W_2(p) &= \frac{\frac{k_y}{(1 + T_q p)} \cdot \frac{1}{c_e j_p}}{(1 + T_q p) \cdot (1 + T_m p) p} = \\ &= \frac{1}{1 + \frac{k_y}{(1 + T_q p)} \cdot \frac{c_e j_p}{(1 + T_m p) \cdot \frac{T_0 p}{1 + T_0 p}} \cdot k_0 c_e j_p p} = \\ &= \frac{\frac{k_y}{c_e j_p} (1 + T_0 p)}{[(1 + T_q p) (1 + T_m p) (1 + T_0 p) + k_y k_0 T_q p] p}, \end{aligned}$$

получим передаточную функцию разомкнутой системы

$$W(p) = k_c W_1(p) \cdot W_2(p).$$

Передаточную функцию замкнутой системы для выходной величины определим из выражения

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{W(p)}{1 + W(p)}.$$

Подставляя значения $W(p)$, $W_1(p)$ и $W_2(p)$ после преобразований получим

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{A(p)}{H(p)},$$

где

$$\begin{aligned} A(p) &= T_0 k_d k_c k_y p^3 + k_y k_c (k_d + T_0) p^2 + \\ &+ k_y k_c (1 + T_0 k_n) p + k_y k_c k_n; \end{aligned}$$

$$H(p) = T_0 T_q T_m c_e j_p p^5 + [T_q T_m + T_0 (T_q + T_m)] c_e j_p p^4 + \\ + \{[T_q + T_m + T_0 (1 + k_0 k_y)] c_e j_p + T_0 k_d k_c k_y\} p^3 + \\ + [c_e j_p + k_y k_c (k_d + T_0)] p^2 + k_y k_c (1 + T_0 k_m) p + k_y k_c k_n.$$

Подставляя численные значения параметров системы, будем иметь:

$$A(p) = 0,4 \cdot 0,60 \cdot 0,87 \cdot 100 p^5 + 0,87 \cdot 100 (0,6 + 0,4) p^2 + \\ + 0,87 \cdot 100 (1 + 0,4 \cdot 1) p + 100 \cdot 0,87 \cdot 1;$$

$$H(p) = 0,4 \cdot 0,12 \cdot 0,25 \cdot 0,0106 \cdot 165 p^5 + [0,12 \cdot 0,25 + 0,4 \cdot 0,12 + \\ + 0,4 \cdot 0,25] \cdot 0,0106 \cdot 165 p^4 + \{[0,12 + 0,25 + 0,4 (1 + 0,2 \cdot 100)] \times \\ \times 0,0106 \cdot 165 + 0,4 \cdot 0,6 \cdot 0,87 \cdot 100\} p^3 + [0,0106 \cdot 165 + \\ + 0,87 \cdot 100 (0,6 + 0,4)] p^2 + 0,87 \cdot 100 (1 + 0,4 \cdot 1) p + 100 \cdot 0,87 \cdot 1.$$

Окончательно

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{20,9p^5 + 87p^4 + 122p + 87}{0,021p^5 + 0,311p^4 + 36,2p^3 + 88,7p^2 + 122p + 87} = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}$$

или

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{F_1(p)}{p \cdot F_2(p)} \cdot \Theta_{\text{вх}}(p).$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$0,021p^5 + 0,311p^4 + 36,2p^3 + 88,7p^2 + 112p + 87 = 0,$$

или

$$f(p) = p^5 + 14,83p^4 + 1726p^3 + 4230p^2 + 5800p + 4150 = 0.$$

Определим корни характеристического уравнения методом итераций [Л.1]. Обозначим: $a_1 = 14,83$; $a_2 = 1726$; $a_3 = 4230$; $a_4 = 5800$; $a_5 = 4150$.

Формулы итерационного способа (считая, что младшие по модулю корни комплексные) имеют вид:

$$\alpha = \frac{a_4}{a_3 - \gamma} - \frac{a_5(a_2 - \beta)}{(a_3 - \gamma)^2};$$

$$\beta = \alpha(a_1 - \alpha) + \frac{a_5}{a_3 - \gamma};$$

$$\gamma = \alpha(a_2 - \beta) + \frac{a_5}{a_3 - \gamma}(a_1 - \alpha).$$

Первое приближение:

$$\alpha = \frac{5800}{4230 - 0} - \frac{4150(1726 - 0)}{(4230 - 0)^2} = 0,972;$$

$$\beta = 0,972(14,83 - 0,972) + \frac{4150}{4230 - 0} = 14,6;$$

$$\gamma = 0,972(1726 - 14,6) + \frac{4150}{4230 - 0} \cdot (14,83 - 0,972) = 1680.$$

Второе приближение:

$$\alpha = \frac{5800}{4230 - 1680} - \frac{4150 (1726 - 14,6)}{(4230 - 1680)^2} = 1,185;$$

$$\beta = 1,185 (14,83 - 1,185) + \frac{4150}{4230 - 1680} = 17,8;$$

$$\gamma = 1,185 (1726 - 17,8) + \frac{4150}{4230 - 1680} (14,83 - 1,185) = 2050.$$

Третье приближение:

$$\alpha = \frac{5800}{4230 - 2050} - \frac{4150 (1726 - 17,8)}{(4230 - 2050)^2} = 1,175;$$

$$\beta = 1,175 - (14,83 - 1,175) + \frac{4150}{4230 - 2050} = 17,9;$$

$$\gamma = 1,175 (1726 - 17,9) + \frac{4150}{4230 - 2050} (14,83 - 1,175) = 2030.$$

Различие в определении α , β и γ в третьем знаке. Процесс итерации можно закончить, приняв

$$\alpha = 1,175; \quad \beta = 17,9; \quad \gamma = 2030.$$

Разлагаем $f(p)$ на множители:

$$\begin{aligned} f(p) &= \left(p^2 + \alpha p + \frac{a_3}{a_2 - \gamma} \right) [p^3 + (a_1 - \alpha) p^2 + (a_2 - \beta) p + a_3 - \gamma] = \\ &= \left(p^2 + 1,175 p + \frac{4150}{4230 - 2030} \right) [p^3 + (14,83 - 1,175) p^2 + \\ &\quad + (1726 - 17,9) p + 4230 - 2030] = \\ &= (p^2 + 1,175 p + 1,89) \cdot (p^3 + 13,66 p^2 + 1708 p + 2200) = 0. \end{aligned}$$

Откуда имеем два комплексных корня

$$p_{1,2} = -0,587 \pm \sqrt{(-0,587)^2 - 1,89} = -0,587 \pm j 1,242$$

и уравнение третьей степени

$$f_1(p) = p^3 + 13,66 p^2 + 1708 p + 2200 = 0.$$

Обозначим: $a_1 = 13,66$; $a_2 = 1708$; $a_3 = 2200$.

Считая, что младший по модулю корень действительный, будем иметь:

$$\alpha = \frac{a_3}{a_2 - \beta};$$

$$\beta = \alpha (a_1 - \alpha).$$

Первое приближение:

$$\alpha = \frac{2200}{1708 - 0} = 1,29;$$

$$\beta = 1,29 (13,66 - 1,29) = 15,9.$$

Второе приближение:

$$\alpha = \frac{2200}{1708 - 15,9} = 1,30;$$

$$\beta = 1,30 (13,66 - 1,30) = 16,05.$$

Принимаем $\alpha = 1,30$; $\beta = 16,05$.

Разлагаем $f_1(p)$ на множители:

$$\begin{aligned} f_1(p) &= (p + \alpha) [p^2 + (a_1 - \alpha)p + a_2 - \beta] = \\ &= (p + 1,30) [p^2 + (13,66 - 1,30)p + 1708 - 16,05] = \\ &= (p + 1,30) (p^2 + 12,36p + 1692) = 0. \end{aligned}$$

Откуда получим корни:

$$p_3 = -1,30;$$

$$p_{4,5} = -6,18 \pm \sqrt{(-6,18)^2 - 1692} = -6,18 \pm j40,7.$$

Таким образом, характеристическое уравнение имеет следующие корни:

$$p_{1,2} = -0,587 \pm j1,242;$$

$$p_3 = -1,30;$$

$$p_{4,5} = -6,18 \pm j40,7.$$

Построим кривую переходного процесса. При $\Theta_{\text{вх}}(t) = 1(t)$

$$\Theta_{\text{вх}}(p) = \frac{1}{p},$$

$$\Theta_{\text{вых}}(p) = \frac{F_1(p)}{pF_2(p)}.$$

Применив теорему разложения, получим

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{i=1}^n \frac{F_1(p_i)}{p_i F_2'(p_i)} e^{p_i t},$$

где $n=4$; p_i — i -й корень характеристического уравнения.

Вычислим производную

$$\begin{aligned} F_2'(p) &= \frac{dF_2(p)}{dp} = \frac{d(0,021p^5 + 0,311p^4 + 36,2p^3 + 88,7p^2 + 122p + 87)}{dp} = \\ &= 0,105p^4 + 1,244p^3 + 108,6p^2 + 177,4p + 122. \end{aligned}$$

Далее имеем

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = 1.$$

Обозначив

$$K_i = \frac{F_1(p_i)}{p_i F_2'(p_i)},$$

запишем выходную величину

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 1 + K_1 e^{p_1 t} + K_2 e^{p_2 t} + K_3 e^{p_3 t} + K_4 e^{p_4 t} + K_5 e^{p_5 t}.$$

Определим коэффициенты $K_1, \dots, K_5$.

Обозначив

$$K_i = \frac{g_i}{f_i} \quad (i = 1, 2, \dots, 5),$$

будем иметь:

$$g_1 = 20,9(-0,587 + j1,242)^3 + 87(-0,587 + j1,242)^2 + \\ + 122(-0,587 + j1,242) + 87;$$

$$f_1 = (-0,587 + j1,242) [0,105(-0,587 + j1,242)^4 + \\ + 1,244(-0,587 + j1,242)^3 + 108,6(-0,587 + j1,242)^2 + \\ + 177,4(-0,587 + j1,242) + 122];$$

$$K_1 = -0,05 - j0,214;$$

$$K_2 = -0,05 + j0,214;$$

$$g_3 = F_1(p_3) = 20,9(-1,30)^3 + 87(-1,30)^2 + 122(-1,30) + 87;$$

$$f_3 = p_3 F_2'(p_3) = -1,30 [0,105(-1,30)^4 + 1,244(-1,30)^3 + \\ + 108,6(-1,30)^2 + 177,4(-1,30) + 122];$$

$$K_3 = -0,319;$$

$$g_4 = F_1(p_4) = 20,9(-6,18 + j40,7)^3 + 87(-6,18 + j40,7)^2 + \\ + 122(-6,18 + j40,7) + 87;$$

$$f_4 = p_4 \cdot F_2'(p_4) = (-6,18 + j40,7) [0,105(-6,18 + j40,7)^4 + \\ + 1,244(-6,18 + j40,7)^3 + 108,6(-6,18 + j40,7)^2 + \\ + 177,4(-6,18 + j40,7) + 122],$$

$$K_4 = -0,2905 + j0,0565;$$

$$K_5 = -0,2905 - j0,0565.$$

На основании формул Эйлера имеем:

$$(a + jb)e^{(x+iy)t} + (a - jb)e^{(x-iy)t} = e^{xt} [a(e^{iyt} + e^{-iyt}) + \\ + jb(e^{iyt} - e^{-iyt})] = 2e^{xt} [a \cos yt + b \sin yt] = \\ = 2 \sqrt{a^2 + b^2} e^{xt} (\sin \varphi \cdot \cos yt + \cos \varphi \sin yt) = 2Ae^{xt} \sin(yt + \varphi),$$

где

$$A = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \sin \varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \cos \varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2 + b^2}};$$

$$\varphi = \arctg \frac{a}{-b}.$$

Примем $K_1 = a + jb$ и $K_2 = a - jb$,
здесь

$$a = -0,05;$$

$$b = -0,214.$$

Тогда

$$2A = 2\sqrt{(-0,050)^2 + (0,214)^2} = 0,439;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{a}{-b} = \operatorname{arctg} \frac{-0,050}{0,214} = 347^\circ = 6,054 \text{ рад.}$$

Аналогично имеем для K_4 и K_5 :

$$2A = 2\sqrt{(-0,2905)^2 + (0,0565)^2} = 0,592;$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{-0,2905}{-0,0565} = 259^\circ = 4,52 \text{ рад.}$$

Выходная величина следящей системы

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = 0,439e^{-0,587t} \cdot \sin(1,242t + 6,054) - 0,319e^{-1,3t} +$$

$$+ 0,592e^{-6,18t} \sin(40,7 + 4,52).$$

Результаты расчета полученного аналитического выражения сведены в табл. 7.6, по которой построен график переходного процесса в следящей системе (рис. 7.15).

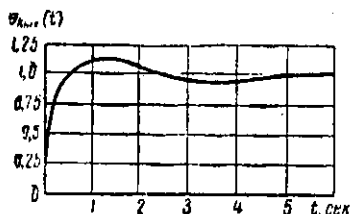


Рис. 7.15. График переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе при единичном воздействии

Таблица 7.6

$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$	$t, \text{сек}$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$
0	0	2,0	1,08
0,2	0,777	2,5	1,01
0,4	0,952	3	0,968
0,6	1,02	4	0,953
1	1,12	5	0,993
1,5	1,14	7	1,01

Пример 7.14. Построение кривой переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ и кривой ошибки $\Theta(t)$ в следящей системе с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью.

Структурная схема системы изображена на рис. 5.11, а.

Управляющее воздействие изменяется по линейному закону $\Theta_{\text{вх}}(t) = \Omega t$ при $\Omega = 60 \text{ град/сек.}$

Система имеет следующие параметры: передаточный коэффициент преобразующего звена $k_c = 0,75 \text{ в/град}$; передаточный коэффициент интегрирующего звена $k_{\text{и}} = 1 \frac{1}{\text{сек}}$, коэффициент усиления усилителя $k_{\text{у}} = 5$; скоростной коэффициент двигателя

$c_0 = 0,0104 \frac{\text{град}}{\text{сек}}$; передаточное число редуктора $j_p = 144$; коэффициент гибкой обратной связи $k_0 = 0,1$; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_q = 0,08 \text{ сек}$; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,20 \text{ сек}$; постоянная времени стабилизирующего звена $T_0 = 0,01 \text{ сек}$; передаточный коэффициент дифференцирующего звена $k_d = 0,01; 0,05; 0,1 \text{ сек}$.

На основании формулы (2.14)

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{1}{1 + W(p)} = \frac{B(p)}{H(p)},$$

где

$$\begin{aligned} B(p) = & \left(p^3 + \frac{T_m T_0 + T_q T_0 + T_m T_q}{T_m T_q T_0} p^2 + \right. \\ & \left. + \frac{T_m + T_q + T_0 + T_0 k_0 k_y}{T_m T_q T_0} p + \frac{1}{T_m T_q T_0} \right) p^3. \\ H(p) = & p^5 + \frac{T_m T_0 + T_q T_0 + T_m T_q}{T_m T_q T_0} p^4 + \\ & + \frac{T_m + T_q + T_0 + T_0 k_0 k_y + T_0 D k_d}{T_m T_q T_0} p^3 + \frac{1 + D T_0 + D k_d}{T_q T_m T_0} p^2 + \\ & + \frac{T_0 k_d + 1}{T_m T_q T_0} D p + \frac{k_d D}{T_m T_q T_0}. \end{aligned}$$

После подстановки значений параметров системы получим:

$$\begin{aligned} T_m T_q T_0 &= 0,00016; \\ T_m + T_q + T_0 &= 0,29; \\ T_m T_q + T_m T_0 + T_q T_0 &= 0,0188; \\ \frac{1}{T_m T_q T_0} &= 6250; \quad T_0 k_0 k_y = 0,005; \\ D T_0 &= 0,025; \quad D = 2,5. \end{aligned}$$

При $k_d = 0,01$ характеристическое уравнение будет

$$p^5 + 117,5p^4 + 1845p^3 + 6510p^2 + 6310p + 15600 = 0,$$

откуда получим корни:

$$\begin{aligned} p_1 &= -4,34; \\ p_2 &= -13,3; \\ p_3 &= -99,6; \\ p_{4,5} &= -0,120 \pm j1,64. \end{aligned}$$

Выражение для ошибки будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \Theta(t) = & 1,29e^{-4,34t} - 0,067e^{-13,3t} - 3 \cdot 10^{-5}e^{-99,6t} + \\ & + 39,3e^{-0,12t} \cos(1,64t + 1,6). \end{aligned}$$

При $k_d=0,05$ будем иметь характеристическое уравнение
 $p^5 + 117,5p^4 + 1850p^3 + 7190p^2 + 6310p + 15\,600 = 0$
с корнями:

$$p_1 = -5,14; \quad p_2 = -12,4; \quad p_3 = -99,6;$$

$$p_{4,5} = -0,146 \pm j1,56;$$

выражение для ошибки будет

$$\Theta(t) = -0,827e^{-5,14t} + 0,267e^{-12,4t} - 7 \cdot 10^{-5}e^{-99,6t} +$$

$$+ 37,9e^{-0,146t} \cos(1,56t + 1,556).$$

При $k_d=0,1$ будем иметь характеристическое уравнение
 $p^5 + 117,5p^4 + 1860p^3 + 7940p^2 + 6310p + 15\,600 = 0$
с корнями:

$$p_1 = -6,43; \quad p_2 = -11,1; \quad p_3 = -99,6;$$

$$p_{4,5} = -0,163 \pm j1,473;$$

выражение для ошибки будет

$$\Theta(t) = -3,36e^{-6,43t} + 1,32e^{-11,1t} - 60 \cdot 10^{-5}e^{-99,6t} +$$

$$+ 36,2e^{-0,163t} \cos(1,473t + 1,514).$$

Результаты расчета помещены в табл. 7.7, по данным которой построены графики переходных процессов соответственно для выходной величины (рис. 7.16, а) и ошибки (рис. 7.16, б). При этом

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = \Theta_{\text{вх}}(t) - \Theta(t).$$

Таблица 7.7

t, сек	$\Theta_{\text{вх}} = 60t$	$k_d=0,01$		$k_d=0,05$		$k_d=0,10$	
		$\Theta(t)$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$	$\Theta(t)$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$	$\Theta(t)$	$\Theta_{\text{вых}}(t)$
0,1	6	6	0	5,3	0,7	3,2	2,8
0,2	11	13	1	10,7	1,3	8,2	3,8
0,4	24	22,9	1,1	20,4	3,6	17,1	6,9
0,6	36	30,4	5,6	28,6	7,4	24,2	11,8
0,8	48	33,6	14,4	31,8	16,2	28,6	19,4
1,0	60	33,4	26,6	32,7	27,3	30,4	29,6
1,5	90	19,1	70,9	22,2	67,8	23,7	66,3
2,0	120	-5,4	124,4	-4,4	124,4	6,5	113,5
2,5	150	-23,5	173,5	-17,8	167,8	-11,1	161,1
3,0	180	-25,6	205,6	-24,4	204,4	-20,8	200,8
5,0	300	19,2	280,8	18,2	283,5	13,6	286,4
7,0	420	-14,6	434,6	-13,5	432,5	-8,5	428,5
10	—	7,8	—	1,1	—	6,1	—
15	—	-2,7	—	-4,2	—	-0,1	—
20	—	3,4	—	0,5	—	-1,2	—

Пример 7.15. Построение графика переходного процесса $\Theta(t)$ в следящей системе при управляющем воздействии, изменяющемся по квадратичному закону.

Примем

$$\Theta_{\text{вх}}(t) = \frac{\epsilon}{2} t^2,$$

где $\epsilon = 30 \text{ град/сек}^2$.

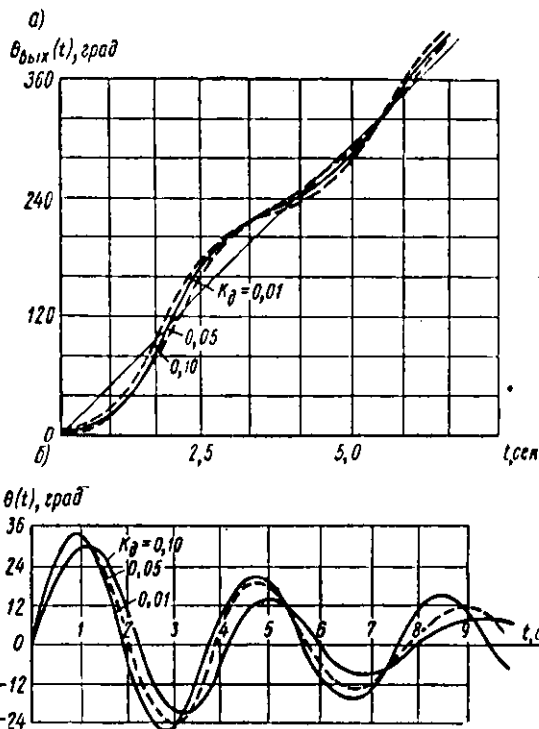


Рис. 7.16. Графики переходного процесса в следящей системе при линейном воздействии

Значения параметров следящей системы возьмем из примера 7.13.

Структурная схема системы приведена на рис. 5.11, а. Начальные условия — нулевые.

Передаточная функция разомкнутой системы

$$W(p) = k_c \left(1 + k_d p + \frac{k_n}{p} \right) \times \\ \times \frac{\frac{k_y}{c_e j_p} (1 + T_0 p)}{(T_q p + 1)(T_m p + 1)(T_0 p + 1) p + k_y k_0 T_0 p^3}.$$

На основании формулы (2.14)

$$\Theta(p) = \frac{1}{1 + \frac{D(k_d p^2 + p + k_n)(1 + T_0 p)}{p[(T_q p + 1)(T_m p + 1)(T_0 p + 1)p + k_y k_0 T_0 p^2]}} \Theta_{\text{вх}}(p),$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e l p}.$$

После преобразований

$$\Theta(p) = \frac{B(p)}{H(p)} \Theta_{\text{вх}}(p),$$

где

$$\begin{aligned} B(p) &= p[(T_q p + 1)(T_m p + 1)(T_0 p + 1)p + k_y k_0 T_0 p^2] = \\ &= T_q T_m T_0 p^5 + (T_q T_0 + T_q T_m + T_m T_0) p^4 + \\ &\quad + (T_0 + T_m + T_q + k_y k_0 T_0) p^3 + p^2; \\ H(p) &= p[(T_q p + 1)(T_m p + 1)(T_0 p + 1)p + k_y k_0 T_0 p^2] + \\ &+ D(k_d p^2 + p + k_n + k_d T_0 p^3 + T_0 p^2 + k_n T_0 p) = T_q T_m T_0 p^5 + \\ &\quad + (T_q T_0 + T_q T_m + T_m T_0) p^4 + \\ &\quad + (T_0 + T_m + T_q + k_y k_0 T_0 + k_d T_0 D) p^3 + \\ &\quad + (1 + D T_0 + D k_d) p^2 + (D k_n T_0 + D) p + k_n D. \end{aligned}$$

Подставляя численные значения параметров и учитывая, что $e = 0,524 \text{ рад/сек}^2$, после преобразований получим

$$\Theta(p) = \frac{0,00629 p^3 + 0,0931 p^2 + 4,59 p + 0,524}{(0,012 p^5 + 0,178 p^4 + 20,7 p^3 + 50,7 p^2 + 69,6 p + 49,7) p}.$$

Начальные условия для функции $\Theta(t)$ находятся из соотношений

$$\Theta^{(k)}(0) = \Theta_{\text{вх}}^{(k)}(0) - \Theta_{\text{вых}}^{(k)}(0).$$

где $k=0, 1, 2, \dots, n-1$ — порядок производной.

В данном случае начальные условия для функции $\Theta_{\text{вых}}(t)$ заданы нулевыми, т. е.

$$\Theta_{\text{вых}}(0) = \Theta'_{\text{вых}}(0) = \Theta''_{\text{вых}}(0) = \Theta'''_{\text{вых}}(0) = \Theta^{IV}_{\text{вых}}(0) = 0.$$

С другой стороны,

$$\Theta_{\text{вх}}(0) = \Theta'_{\text{вх}}(0) = \Theta''_{\text{вх}}(0) = \Theta^{IV}_{\text{вх}}(0) = 0$$

и

$$\Theta_{\text{вх}}^*(0) = e.$$

Следовательно, начальные условия для ошибки $\Theta(t)$ будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \Theta(0) = \Theta'(0) = \Theta''(0) = \Theta^{IV}(0) &= 0; \\ \Theta^*(0) &= e. \end{aligned}$$

Характеристическое уравнение и его корни те же, что и в примере 7.13, так как изменился только вид входной функции.

Подставляя значения корней в формулу (7.1), после преобразований, аналогичных проделанным в примерах 7.13 и 7.14, получим

$$\Theta(t) = 0,0105 + 0,366e^{-1,3t} + e^{-5,17t}(-0,000194 \cos 40,7t + 0,000495 \sin 40,7t) + e^{-0,587t}(-0,372 \cos 1,24t + 0,203 \sin 1,24t)$$

или

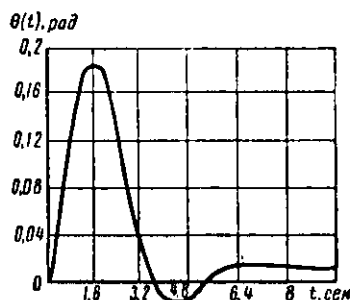
$$\Theta(t) = 0,0105 + 0,366e^{-1,3t} + 0,0002e^{-6,17t} \sin(40,7t - 75^\circ 40') + 0,423e^{-0,587t} \sin(1,24t - 61^\circ 20').$$

Значения функции $\Theta(t)$ представлены в табл. 7.8, по данным которой построен график (рис. 7.17).

Таблица 7.8

$t, \text{сек}$	$\Theta(t)$	$t, \text{сек}$	$\Theta(t)$	$t, \text{сек}$	$\Theta(t)$	$t, \text{сек}$	$\Theta(t)$
0,8	0,117	2,8	0,0753	4,5	-0,019	6,5	0,0124
1,6	0,186	3,0	0,0521	5	-0,01	8,5	0,0106
2	0,167	3,5	0,0071	5,5	0,0016	9,77	0,0102
2,4	0,124	4	-0,0147	6	0,0114		

Рис. 7.17. График переходного процесса в следящей системе при квадратичном воздействии



§ 7.3. Примеры построения кривой переходного процесса по вещественным трапецидальным частотным характеристикам

Пример 7.16. Определение характера изменения ошибки в следящей системе с жесткой и гибкой обратными связями.

Структурная схема системы изображена на рис. 5.10,а.

Значения параметров системы: $k_c=0,87$ в/град; $T_q=0,12$ сек; $T_m=0,25$ сек; $c_e=8,75 \cdot 10^{-3} \frac{\text{град}}{\text{сек}}$; $j_p=200$; $k_0=0,2$; $\tau=0,05$ сек; $k_y=50$; $\alpha=0,25$; $\Theta_{\text{вх}}(t)=\Omega t$, $\Omega=60$ град/сек.

Операторное изображение ошибки

$$\Theta(p) = \frac{T_q T_m \tau p^3 + (T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau) p^2 +}{\{T_q T_m \tau p^4 + (T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau) p^3 +$$

$$+ [T_q + T_m + (1 + k_y k_0) \tau] p^2 + (1 + k_y k_0 \alpha) p + [T_q + T_m + (1 + k_y k_0) \tau] p^2 + (1 + k_y k_0 \alpha + D \tau) p + D\}} \cdot \frac{\Omega}{p},$$

где $D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}$.

Умножив это выражение на p и заменив p на $j\omega$, выделим вещественную часть и получим выражение для построения обобщенной вещественной частотной характеристики

$$P(\omega) = \frac{D\Omega \{-T_q T_m \tau^2 \omega^4 - [T_q T_m -$$

$$\{T_q T_m \tau \omega^4 - [T_q + T_m + (1 + k_y k_0) \tau] \omega^3 + D\}^2 +$$

$$- (1 + k_y k_0) \tau^2\} \omega^2 + 1 + k_y k_0 \alpha\}}{+ \{-(T_q T_m + T_q \tau + T_m \tau) \omega^3 + (1 + k_y k_0 \alpha + D \tau) \omega\}^2}$$

или, после подстановки численных значений параметров системы,

$$P(\omega) = 1491 \frac{-0,75 \cdot 10^{-4} \omega^4 - 0,25 \cdot 10^{-2} \omega^2 + 3,5}{(0,0015 \omega^4 - 0,92 \omega^2 + 24,85)^2 + (-0,0485 \omega^3 + 4,743 \omega)^2}.$$

По этой формуле строим вещественную частотную характеристику (рис. 7.18, а), которую аппроксимируем шестью трапециями (рис. 7.18, б), имеющими следующие параметры:

трапеция I — $P^I=10,35$; $\omega_d=5,5$; $\omega_0=7,75$; $\chi=0,71$;

трапеция II — $P^{II}=3$; $\omega_d=7,75$; $\omega_0=9$; $\chi=0,86$;

трапеция III — $P^{III}=1,5$; $\omega_d=9$; $\omega_0=10,5$; $\chi=0,85$;

трапеция IV — $P^{IV}=1$; $\omega_d=10,5$; $\omega_0=13,5$; $\chi=0,78$;

трапеция V — $P^V=-5,35$; $\omega_d=2,5$; $\omega_0=4,75$; $\chi=0,53$;

трапеция VI — $P^{VI}=-2,05$; $\omega_d=0,75$; $\omega_0=2,5$; $\chi=0,3$.

По таблицам h_χ — функций [Л.26] строим соответствующие отдельным трапециям составляющие сигнала ошибки, суммируя которые, получаем требуемую кривую $\Theta(t)$, приведенную на рис. 7.18, в. На этом же рисунке показаны и отдельные составляющие процесса.

Пример 7.17. Построение кривой переходного процесса в следящей системе с гибкой обратной связью (рис. 5.9, а).

Параметры системы: $k_c=0,87$ в/град; $k_y=20$; $c_e=0,0175 \frac{\text{град} \cdot \text{сек}}{\text{град}}$; $j_p=100$; $T_q=0,12$ сек; $T_m=0,25$ сек; $k_0=0,1$; $T_0=0,3$ сек; $\Theta_{\text{вх}}(t)=1(t)$.

Заменяя p на $j\omega$ в передаточной функции разомкнутой системы $W(p)$, полученной в примере 5.9, будем иметь

$$W(j\omega) = \frac{D(1 + jT_0\omega)}{(1 + j\omega T_q)(1 + j\omega T_m)(1 + j\omega T_0)j\omega + k_y k_0 T_0 (j\omega)^2},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e J_p}.$$

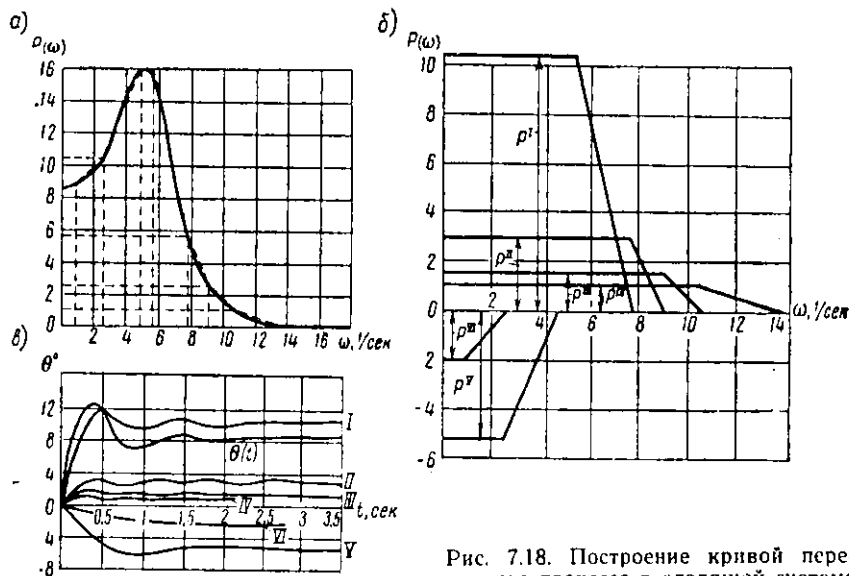


Рис. 7.18. Построение кривой переходного процесса в следящей системе

Передаточная частотная функция замкнутой системы для выходной величины

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(j\omega)}{\Theta_{\text{вх}}(j\omega)} = \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} = \frac{D(1 + j\omega T_0)}{T_q T_m T_0 \omega^4 - j(T_m T_0 + T_m T_q + T_q T_0) \omega^3 - (T_m + T_q + T_0 + k_y k_0 T_0) \omega^2 + j(1 + T_0 D) \omega + D}.$$

Подставляя численные значения параметров следящей системы и используя соответствующие формулы, получим выражение

$$P(\omega) = \frac{9,94(0,009\omega^4 - 1,27\omega^2 + 9,94) - 2,98(0,141\omega^3 - 3,98\omega)\omega}{(0,009\omega^4 - 1,27\omega^2 + 9,94)^2 + (0,141\omega^3 - 3,98\omega)^2},$$

по которому строим вещественную частотную характеристику (рис. 7.19, а).

Разбиваем $P(\omega)$ на четыре трапеции (рис. 7.19, б), имеющие следующие параметры:

трапеция I — $P^I = P_1 - P_2 = 1,263 + 0,57 = 1,833$;

$\omega_{d1} = 2,75$; $\omega_{01} = 4,78$;

трапеция II — $P^{II} = P_0 - P_1 = 1 - 1,263 = -0,263$;

$\omega_{d2} = 0,4$; $\omega_{02} = 1,7$;

трапеция III — $P^{III} = P_2 - P_3 = -0,57 + 0,22 = -0,35$;

$\omega_{d3} = 6,7$; $\omega_{03} = 10,7$;

трапеция IV — $P^{IV} = P_3 = -0,22$; $\omega_{d4} = 10,7$; $\omega_{04} = 16$.

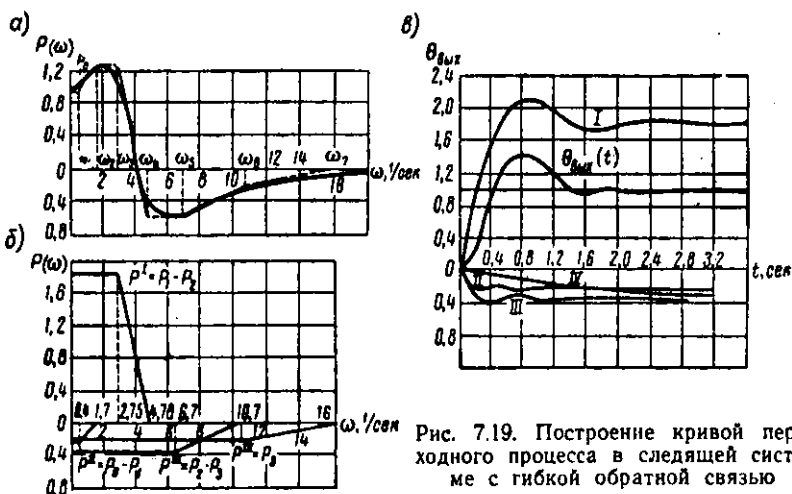


Рис. 7.19. Построение кривой переходного процесса в следящей системе с гибкой обратной связью

Коэффициенты наклона трапеций:

$$\kappa_1 = \frac{\omega_{d1}}{\omega_{01}} = \frac{2,75}{4,78} = 0,575;$$

$$\kappa_2 = \frac{\omega_{d2}}{\omega_{02}} = \frac{0,4}{1,7} = 0,235;$$

$$\kappa_3 = \frac{\omega_{d3}}{\omega_{03}} = \frac{6,7}{10,7} = 0,626;$$

$$\kappa_4 = \frac{\omega_{d4}}{\omega_{04}} = \frac{10,7}{16} = 0,67.$$

Используя таблицы $h_x(t)$ -функций, рассчитываем ординаты составляющих переходного процесса, суммируя которые, строим кривую $\theta_{\text{вых}}(t)$ (рис. 7.19, в).

Пример 7.18. Построение кривой переходного процесса при единичном управляющем воздействии в следящей системе с гибкой и жесткой обратными связями по скорости (рис. 5.10, а).

Вещественная частотная характеристика $P(\omega)$ изображена на рис. 7.20, а.

Аппроксимируем ее четырьмя трапециями со следующими параметрами (рис. 7.20, б):

трапеция I — $P^I = -0,18$; $\omega_{01} = 2,3$; $\omega_{d1} = 0,9$;

$$\kappa_1 = \frac{\omega_{d1}}{\omega_{01}} = 0,39;$$

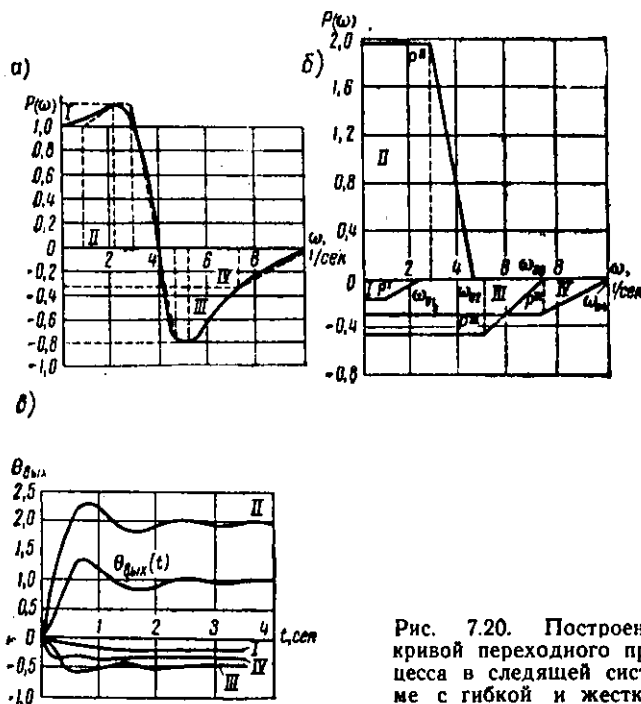


Рис. 7.20. Построение кривой переходного процесса в следящей системе с гибкой и жесткой обратными связями

трапеция II — $P^{II} = 1,98$; $\omega_{02} = 4,75$; $\omega_{d2} = 3$;

$$\kappa_2 = \frac{\omega_{d2}}{\omega_{02}} = 0,63;$$

трапеция III — $P^{III} = -0,48$; $\omega_{03} = 7,5$; $\omega_{d3} = 5,2$;

$$\kappa_3 = \frac{\omega_{d3}}{\omega_{03}} = 0,69;$$

трапеция IV — $P^{IV} = -0,32$; $\omega_{04} = 10,2$; $\omega_{d4} = 7,5$;

$$\kappa_4 = \frac{\omega_{d4}}{\omega_{04}} = 0,73.$$

По таблицам $h_x(t)$ -функций рассчитываем отдельные составляющие переходного процесса, соответствующие четырем трапециям, и строим кривую $\Theta_{\text{вых}}(t)$, приведенную на рис. 7.20, в.

Пример 7.19. Построение кривой переходного процесса $\Theta_{\text{вых}}(t)$ в следящей системе с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью (рис. 5.11, а) при единичном входном воздействии.

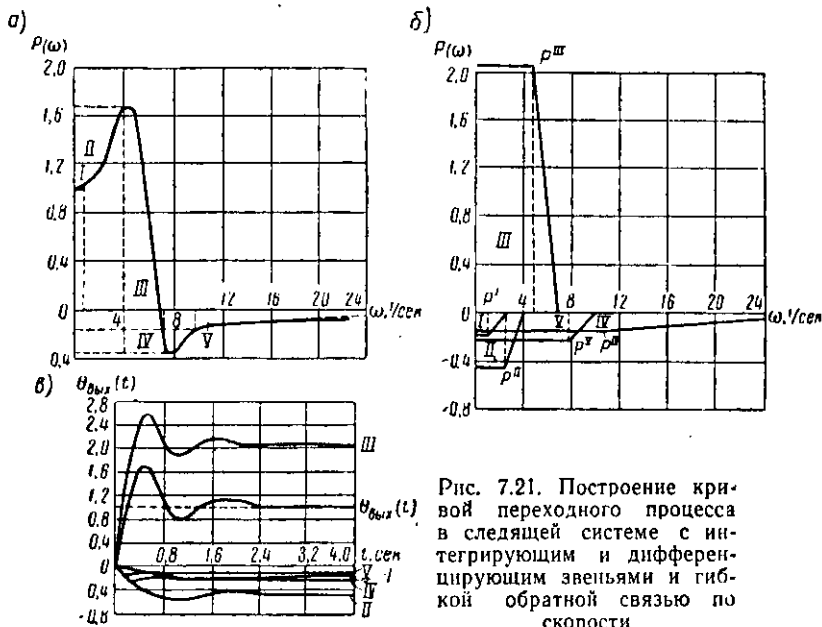


Рис. 7.21. Построение кривой переходного процесса в следящей системе с интегрирующим и дифференцирующим звеньями и гибкой обратной связью по скорости

Примем следующие значения параметров системы: $k_c = 0,87$ в/град; $T_q = 0,15$ сек. $T_m = 0,3$ сек; $c_e = 0,018$ град/сек; $j_p = 100$; $k_0 = 0,2$; $T_0 = 0,05$ сек; $k_d = 0,1$ сек; $k_n = 1$ сек; $k_y = 100$.

Передаточная функция следящей системы для выходной величины

$$\frac{\Theta_{\text{вых}}(p)}{\Theta_{\text{вх}}(p)} = \frac{D(1 + T_0 p)(k_d p^2 + p + k_n)}{p^2[(1 + T_q p)(1 + T_m p)(1 + T_0 p) + k_0 k_y T_0 p] + D(1 + T_0 p)(k_d p^2 + p + k_n)},$$

где

$$D = \frac{k_c k_y}{c_e j_p}.$$

Подставляя численные значения параметров системы в написанное выражение и заменяя p на $j\omega$, после преобразований получим

$$P(\omega) = \frac{4,83[(1 - 0,15\omega^2)(0,0675\omega^4 - 8,24\omega^2 + 48,3) + (0,0675\omega^4 - 8,24\omega^2 + 48,3)^2 + (1,05\omega - 5 \cdot 10^{-3}\omega^3)][\omega(2,25 \cdot 10^{-3}\omega^4 - 1,74\omega^2 + 50,6)]}{+ [\omega(0,00225\omega^4 - 1,74\omega^2 + 50,6)]^2}.$$

Строим вещественную частотную характеристику (рис. 7.21, а), которую аппроксимируем пятью трапециями, изображенными на рис. 7.21, б.

Трапеции имеют следующие параметры:

трапеция I — $P^I = -0,20$; $\omega_{d1} = 0,9$; $\omega_{01} = 2,5$; $\chi_1 = 0,36$;

трапеция II — $P^{II} = -0,47$; $\omega_{d2} = 2,5$; $\omega_{02} = 3,9$; $\chi_2 = 0,64$;

трапеция III — $P^{III} = 2,04$; $\omega_{d3} = 5,0$; $\omega_{03} = 7,0$; $\chi_3 = 0,71$;

трапеция IV — $P^{IV} = -0,22$; $\omega_{d4} = 8,0$; $\omega_{04} = 9,8$; $\chi_4 = 0,85$;

трапеция V — $P^V = -0,15$; $\omega_{d5} = 9,8$; $\omega_{05} = 27,5$; $\chi_5 = 0,36$.

Кривая $\Theta_{\text{вых}}(t)$ и составляющие переходного процесса построены на рис. 7.21, в.



Глава VIII. ДИНАМИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО МЕТОДУ ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

§ 8.1. Основные положения метода логарифмических частотных характеристик

Метод расчета систем автоматического управления с применением логарифмических частотных характеристик получил широкое распространение в инженерной практике, благодаря своей простоте, наглядности и минимальному количеству необходимых вычислений.

Для минимально-фазовых систем (системы без запаздывания, без линий связи с распределенными параметрами и т. п.) имеет место однозначная связь между амплитудно-частотной и фазово-частотной характеристиками. Поэтому можно по виду амплитудной характеристики судить о фазовой, т. е. пользоваться в основном амплитудной частотной характеристикой при оценке поведения системы.

Наиболее удобным оказывается построение амплитудной частотной характеристики в логарифмическом масштабе, так как последний позволяет установить характер влияния каждого из звеньев на поведение системы и определить характеристику корректирующего контура, обеспечивающего заданные условия работы системы.

Напишем в логарифмическом масштабе передаточную функцию некоторой системы в разомкнутом состоянии. В обычном масштабе она имеет вид:

$$K(j\omega) = K_A(\omega) \cdot e^{j\psi(\omega)}.$$

Прологарифмируем эту функцию:

$$\ln K(j\omega) = \ln K_A(\omega) + j\psi(\omega).$$

Член $\ln K_A(\omega)$ представляет собой амплитудную логарифмическую частотную характеристику разомкнутой системы, а $\psi(\omega)$ — фазовую логарифмическую частотную характеристику разомкнутой системы, совпадающую с нелогарифмической ха-

рактической, но строящуюся в логарифмическом масштабе частот.

Амплитудное значение коэффициента усиления передаточной функции системы $K_A(\omega)$ представляет собой произведение амплитудных значений коэффициентов усиления последовательно включенных звеньев системы:

$$K_A(\omega) = K_1(\omega) \cdot K_2(\omega) \cdot \dots \cdot K_n(\omega).$$

При логарифмировании величины $K_A(\omega)$ получим

$$\ln K_A(\omega) = \ln K_1(\omega) + \ln K_2(\omega) + \dots + \ln K_n(\omega).$$

Следовательно, после логарифмирования имеем сумму логарифмических характеристик коэффициентов усиления отдельных звеньев, которая равна логарифмической характеристике коэффициента усиления всей системы (в разомкнутом состоянии).

Переход от произведения частотных характеристик к их сумме значительно упрощает расчет системы и повышает его наглядность, так как влияние каждого слагаемого на общую сумму установить существенно проще, чем влияние каждого сомножителя на произведение.

Кроме того, вид амплитудных частотных характеристик в логарифмическом масштабе позволяет пользоваться приближенной их формой в виде отрезков прямых линий с разными наклонами, что значительно облегчает их построение (большинство характеристик звеньев системы может быть построено при помощи двух-трех отрезков со стандартными наклонами).

Так как величина $\ln K_A(\omega)$ определяет собой логарифм отношения амплитуды выходной величины к амплитуде входной величины, то величину логарифма указанного отношения выражают в децибеллах, т.е. в единицах, принятых при оценке величины усиления.

Обычно вместо натуральных логарифмов $\ln K_A(\omega)$ используют масштаб десятичных логарифмов:

$$g = a \ln K_A(\omega) = 20 \lg K_A(\omega) [\text{дБ}].$$

Коэффициент пропорциональности a определяется следующим образом: если обозначить

$$\ln K_A(\omega) = n,$$

то

$$e^n = K_A(\omega),$$

$$\lg K_A(\omega) = n \lg e.$$

Отсюда

$$g = 20 \lg K_A(\omega) = 20 n \lg e = 20 \lg e \cdot \ln K_A(\omega) \approx 8,66 \ln K_A(\omega).$$

и, следовательно, $a = 8,66$.

Масштаб частоты также принимается логарифмическим, т. е. характеризующим отношение частот, имеющее размерность или октав (одна октава соответствует удвоению частоты), или декад (одна декада соответствует отношению частот, равному десяти). Таким образом, откладывается (обычно по оси абсцисс) не само значение частоты ω , а $\log_2 \frac{\omega}{\omega_1}$, или $\lg \frac{\omega}{\omega_1}$, где ω_1 — некоторое определенное заранее выбранное значение частоты, которое, например, может быть принято равным единице, частоте собственных колебаний системы или же частоте $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$, соответствующей постоянной времени какого-либо звена, в частности наибольшей постоянной. Соотношение масштабов декад и октав может быть определено из выражения

$$\log_2 \frac{\omega}{\omega_1} = \frac{\lg \frac{\omega}{\omega_1}}{\lg 2} \approx 3,32 \lg \frac{\omega}{\omega_1}.$$

Следовательно, при $\omega_1 = 1$ для определения частоты в октавах следует найти $\lg \omega$ и умножить его на 3,32.

Кроме логарифмических амплитудной и фазовой частотной характеристик, используют также логарифмические амплитудно-фазовые характеристики разомкнутой и замкнутой систем (строятся в прямоугольных координатах: логарифм амплитуды — фаза).

§ 8.2. Примеры определения передаточных функций и построения частотных характеристик корректирующих звеньев

Пример 8.1. Определение передаточной функции и построение частотных характеристик простейшего инерционного (апериодического) звена (рис. 8.1, а).

1. Составляем уравнение э. д. с. звена при единичном возмущении, т. е. при подаче на вход звена напряжения постоянного тока

$$U_1 = I \cdot R + U_2.$$

Выражение для тока имеет вид

$$I = C p U_2,$$

откуда

$$U_1 = (CRp + 1) U_2.$$

Полагая $CR = T$, получим

$$W(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{1 + Tp}.$$

2. Для построения амплитудно-фазовой частотной характеристики заменим p на $j\omega$, тогда

$$W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1};$$

освобождаемся от мнимой величины в знаменателе:

$$W(j\omega) = \frac{1}{T^2 \omega^2 + 1} - j \frac{T\omega}{T^2 \omega^2 + 1} = U(\omega) - jV(\omega).$$

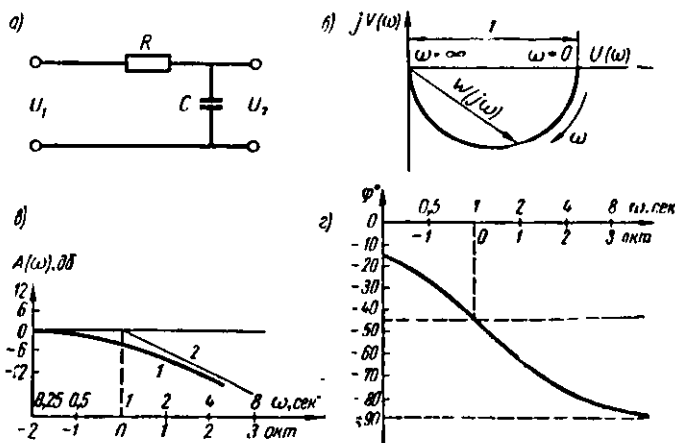


Рис. 8.1. Аперодическое звено и его характеристики

Амплитудно-фазовая характеристика звена может быть также изображена в виде

$$W(j\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2 \omega^2 + 1}} \cdot e^{-\arctg T\omega}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой (при изменении частоты в пределах $\omega=0 \rightarrow \infty$) полуокружность (рис. 8.1, б).

3. Для построения логарифмической амплитудной характеристики (л. а. х.) звена напомним

$$20 \lg A(\omega) = -10 \lg(T^2 \omega^2 + 1) \text{ дБ.}$$

На рис. 8.1, в представлена л. а. х., построенная по точкам (кривая 1), причем масштаб частоты взят относительный (частота $\omega_r = \frac{1}{T}$ принята за единицу). На этом же рисунке построена приближенная, асимптотическая л. а. х. (характеристика 2), состоящая из двух участков — горизонтального, полученного в

предположении, что $T^2\omega^2 \ll 1$ и, следовательно, при малых частотах $A(\omega) \approx 1$, и наклонного участка (с наклоном -6 дБ/окт), соответствующего предположению, что $20 \lg A(\omega) \approx -20 \lg T\omega$ ($T^2\omega^2 \gg 1$) (единицей на этом участке пренебрегаем). Указанные участки соединяются при сопрягающей частоте $\omega_T =$

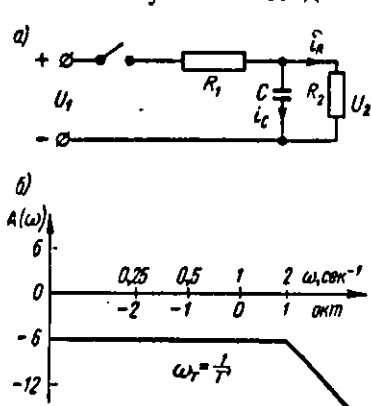


Рис. 8.2. Аперидическое звено при учете входного сопротивления следующего звена и его характеристика

$= \frac{1}{T}$. Как видно из рис. 8.1, в, наибольшая ошибка при построении приближенной л. а. х. аперидического звена имеет место при частоте $\omega = \omega_T$ и составляет -3 дБ .

4. Фазовая характеристика строится по точкам по формуле $\varphi(\omega) = -\text{arctg } T\omega$. На рис. 8.1, г приведена фазовая характеристика, построенная в функции частоты в логарифмическом масштабе (частота взята в относительных единицах $\frac{\omega}{\omega_T}$). Оче-

видно, что при $\omega = \omega_T$ значение $\text{arctg } T\omega = 45^\circ$.

Пример 8.2. Определение тех же данных, что и в примере 8.1, для аперидического звена с учетом входного сопротивления следующего звена (рис. 8.2, а).

Передаточная функция звена

$$W(p) = k_0 \frac{1}{T'p + 1},$$

где

$$k_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} < 1;$$

$$T' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C.$$

Если сравнить полученную передаточную функцию с передаточной функцией звена, изображенного на рис. 8.1, а, то оказывается, что: а) передаточный коэффициент при нулевой частоте (постоянный ток) меньше единицы за счет входного сопротивления R_2 следующего звена.

Постоянная времени также уменьшается:

$$T' = T \frac{R_2}{R_1 + R_2} = Tk_0;$$

б) амплитудно-фазовая характеристика по-прежнему будет иметь вид полуокружности, но с диаметром, равным k_0 ;

в) логарифмическая амплитудная характеристика будет проходить ниже линии, соответствующей нулю децибелл (рис. 8.2,б);

г) фазовая характеристика остается такой же (точке $\omega_T = \frac{1}{T'}$ соответствует угол $\varphi = -45^\circ$).

Пример 8.3. Определение передаточной функции и построение частотных характеристик апериодического звена, имеющего схему, представленную на рис. 8.3, а.

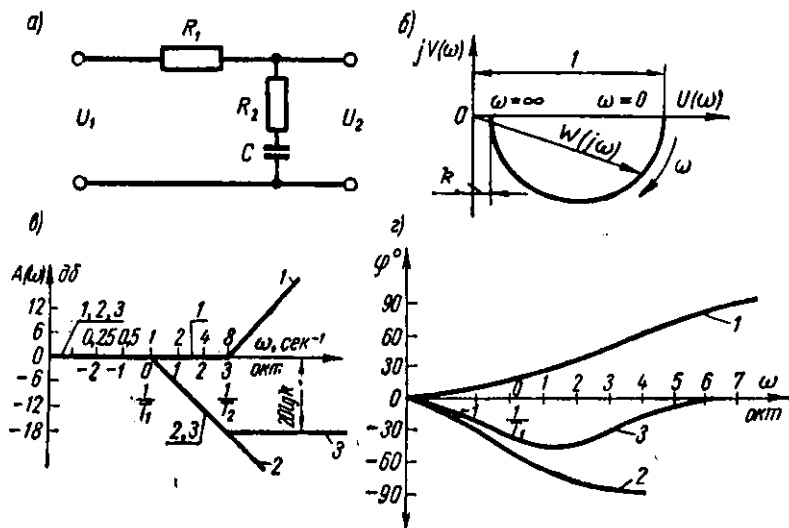


Рис. 8.3. Комбинированное апериодическое звено и его характеристики

1. Передаточная функция звена

$$W(p) = \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1}.$$

Очевидно, что при $\omega=0$ значение передаточного коэффициента $k_0=1$, а при $\omega=\infty$

$$k_\infty = \frac{T_2}{T_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

2. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой полуокружность, которая не проходит через начало координат при $\omega=\infty$, а диаметр ее равен $1-k_\infty$ (рис. 8.3,б).

3. Логарифмическая амплитудная характеристика строится по выражению

$$20 \lg A(\omega) = 10 \lg (T_2^2 \omega^2 + 1) - 10 \lg (T_1^2 \omega^2 + 1).$$

Первое слагаемое характеристики (числитель дроби) представляет собой так называемую полубесконечную прямую 1 (рис. 8.3, а) с положительным наклоном $+6 \text{ дБ/окт}$, а второе слагаемое — полубесконечную прямую 2 с отрицательным наклоном -6 дБ/окт .

Результирующая характеристика 3 имеет два крайних горизонтальных участка и средний с наклоном -6 дБ/окт .

4. Фазовая характеристика строится как сумма двух составляющих характеристик, соответствующих числителю и знаменателю передаточной функции.

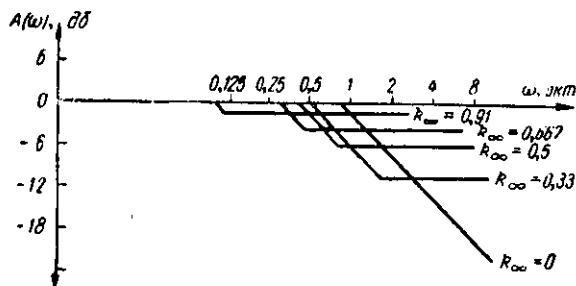


Рис. 8.4. Влияние изменения сопротивления R_2 на л. а. х. звена на рис. 8.3.

На рис. 8.3, а представлены: составляющая 1, соответствующая числителю, составляющая 2, соответствующая знаменателю, и результирующая характеристика 3, имеющая максимальный отрицательный фазовый сдвиг в середине наклонного участка л. а. х.

Пример 8.4. Анализ влияния величины сопротивления R_2 в схеме, изображенной на рис. 8.3, а, на передаточную функцию и логарифмические характеристики (при значениях R_2 , равных $0; 0,5R_1; R_1; 2R_1$ и $10R_1$).

Полагаем R_1 неизменным и определяем k_∞ . Строим л. а. х. для указанных значений R_2 . Значения k_∞ соответственно равны: $0; 0,33; 0,5; 0,667; 0,91$.

Логарифмические амплитудные характеристики представлены на рис. 8.4. Как видно из этого рисунка, при увеличении R_2 возрастает k_∞ , равно как и постоянные времени T_1 и T_2 , что вызывает смещение характеристик в область меньших частот и уменьшение разности между k_0 и k_∞ .

Пример 8.5. Определение передаточной функции и построение частотных характеристик для звена по схеме, изображенной на рис. 8.5.

$$W(p) = k_0 \frac{T_2 p + 1}{T_1 p + 1}; \quad k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + \frac{R_1}{R_4}};$$

$$k_{\infty} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_4}}; \quad \varphi(\omega) = \operatorname{arctg} T_2 \omega - \operatorname{arctg} T_1 \omega;$$

$$T_1 = \frac{1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{R_1}{R_4}}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3} + \frac{R_3}{R_4}} T_2; \quad T_2 = \frac{R_2 \cdot R_3}{R_2 + R_3} C.$$

Частотные характеристики имеют тот же вид, что и для звена, изображенного на рис. 8.3, а.

Пример 8.6. Получение передаточной функции и построение частотных характеристик апериодического звена второго порядка, схема которого представлена на рис. 8.6.

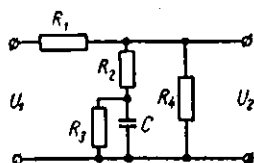


Рис. 8.5. Корректирующее звено с учетом входного сопротивления последующего звена

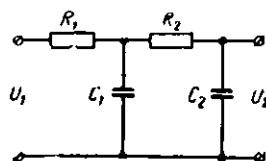


Рис. 8.6. Инерционное звено второго порядка

1. Уравнение э. д. с. для этой схемы будет иметь вид

$$U_1 = IR_1 + I_2 R_2 + U_2,$$

где

$$I = I_1 + I_2;$$

$$I_1 = C_1 p U_{C1};$$

$$I_2 = C_2 p U_2;$$

$$U_{C1} = I_2 R_2 + U_2 = U_2 (1 + R_2 C_2 p).$$

Следовательно,

$$I = C_1 p U_2 (R_2 C_2 p + 1) + C_2 p U_2 = U_2 [C_1 C_2 R_2 p^2 + (C_1 + C_2) p].$$

Отсюда

$$U_1 = [R_1 C_1 R_2 C_2 p^2 + R_1 (C_1 + C_2) p] U_2 + R_2 C_2 p U_2 + U_2.$$

Далее получаем

$$W(p) = \frac{1}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + T_{1,2}) p + 1},$$

где

$$T_1 = R_1 C_1;$$

$$T_2 = R_2 C_2; \quad T_{1,2} = R_1 C_2.$$

Подставив $p = j\omega$, получим

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + [(T_1 + T_2 + T_{1,2})^2 - 2T_1 T_2] \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4}}.$$

В случае последовательного включения двух апериодических звеньев через разделительный усилитель $T_{1,2} = 0$.

Первая сопрягающая частота определяется приравниванием второго члена подкоренного выражения единице и имеет вид

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(T_1 + T_2 + T_{1,2})^2 - 2T_1 T_2}}.$$

Вторая сопрягающая частота находится приравниванием второго члена подкоренного выражения третьему:

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{(T_1 + T_2 + T_{1,2})^2 - 2T_1 T_2}}{T_1 T_2}.$$

2. Логарифмическая частотная амплитудная характеристика имеет три участка (рис. 8.7), на которые она делится указанными сопрягающими частотами ω_1 и ω_2 (наклон первого участка 0 дБ/окт, второго — 6 дБ/окт и третьего — 12 дБ/окт).

Фазовая характеристика легко строится по двум полубесконечным прямым с наклоном — 6 дБ/окт, на которые можно разделить л. а. х. данного звена.

Пример 8.7. Определение передаточных функций и построение частотных характеристик простейшего упреждающего (дифференцирующего) звена, представленного на рис. 8.8.

1. Для определения передаточной функции составим уравнение э. д. с. данного звена:

$$U_1 = U_C + U_2,$$

где

$$U_2 = IR; \quad I = CpU_C$$

или

$$U_C = \frac{I}{Cp} = \frac{U_2}{RCp},$$

отсюда

$$U_1 = U_2 \left(\frac{1}{RCp} + 1 \right).$$

Передаточная функция

$$W(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Tp}{Tp + 1},$$

где $T = RC$.

2. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

$$W(j\omega) = \frac{Tj\omega}{1 + Tj\omega} = \frac{T^2\omega^2}{1 + T^2\omega^2} + j \frac{T\omega}{1 + T^2\omega^2}.$$

Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой полуокружность с диаметром, равным единице (рис. 8.9, а). При $\omega=0$ передаточная функция $W(j\omega)=0$, при $\omega=\infty$ — $W(j\omega)=1$. Соответственно фазовый сдвиг будет $\varphi_0=90^\circ$ и $\varphi_\infty=0^\circ$.

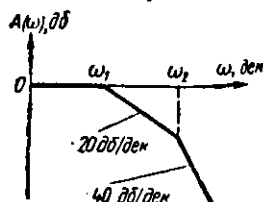


Рис. 8.7. Логарифмическая амплитудная характеристика инерционного звена второго порядка

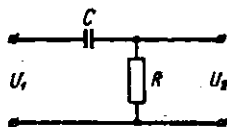


Рис. 8.8. Простейшее упрещающее дифференцирующее звено

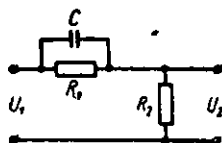


Рис. 8.10. Корректирующее звено с заданной зоной дифференцирования

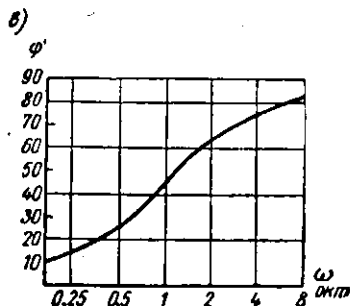
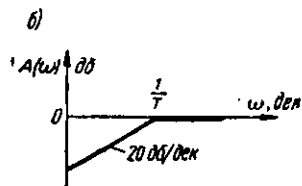
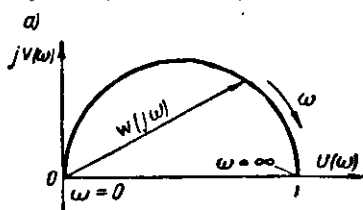


Рис. 8.9. Частотные характеристики простейшего упрещающего звена

3. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика может быть построена по двум составляющим, одна из которых ($20 \lg T\omega$) представляет собой прямую линию с наклоном $+20 \text{ дБ/дек}$, а вторая — $[10 \lg(1 + T^2\omega^2)]$ является л. а. х. инерционного (апериодического) звена (рис. 8.9, б).

Результирующая л. а. х. имеет наклонный участок ($+20 \text{ дБ/дек}$) в зоне частот ω от 0 до $\frac{1}{T}$ и горизонтальный — при частотах $\omega > \frac{1}{T}$.

4. Фазовая характеристика звена представлена на рис. 8.9, в. Она также имеет две составляющие:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = +90^\circ - \operatorname{arctg} T\omega.$$

Выбор величины T связан с желаемой зоной дифференцирования. Очевидно, что чем меньше T , тем больше указанная зона. В частности, при весьма малых значениях T , т. е. когда на широком диапазоне частот $T^2\omega^2 < 1$ можно приближенно считать, что л. а. х. звена равна $20 \lg(T\omega)$.

Пример 8.8. Определение передаточной функции и частотных характеристик для корректирующего звена с заданной зоной дифференцирования, представленного на рис. 8.10.

1. Для определения передаточной функции находим следующие величины:

$$U_1 = U_C + IR_2; \quad U_C = I_1 R_1; \quad I = I_C + I_1;$$

$$I_C = CpU_C; \quad U_1 = I_1 R_1 + IR_2; \quad I = CpU_C + \frac{U_C}{R_1};$$

$$U_C = \frac{U_2 R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_1 Cp + 1};$$

$$U_1 = U_2 \frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{1}{R_1 Cp + 1} + U_2;$$

или

$$U_1 = U_2 \frac{R_1 + R_2(R_1 Cp + 1)}{R_2(R_1 Cp + 1)}.$$

Тогда передаточная функция

$$W(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R_1 R_2 Cp + R_2}{R_1 + R_1 R_2 Cp + R_2} = k_0 \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1},$$

где $T_1 = R_1 C$; $T_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C$;

$$k_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

2. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой полуокружность, причем диаметр ее равен $k_\infty - k_0$. В данном случае

$$k_\infty = 1, \text{ а } k_0 = \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

следовательно,

$$d = k_\infty - k_0 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \text{ (рис. 8.11, а).}$$

3. Логарифмическая амплитудная характеристика звена может быть получена как сумма трех составляющих (рис. 8.11, б):

1) $20 \lg k_0$ (безынерционное звено); 2) $10 \lg(T_1^2 \omega^2 + 1)$ — полубесконечная прямая с положительным наклоном и 3) $-10 \lg(T_2^2 \omega^2 + 1)$ — полубесконечная прямая с отрицательным наклоном.

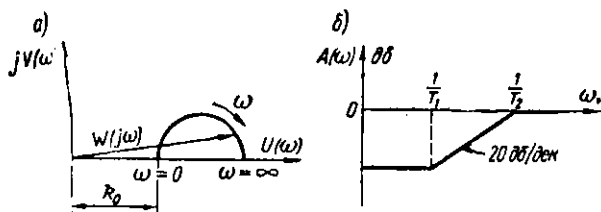


Рис. 8.11. Частотные характеристики корректирующего звена с заданной зоной дифференцирования

Результирующая характеристика имеет три участка (два крайних горизонтальных и средний с наклоном $+20 \text{ дБ/дек}$) и две сопрягающие частоты: $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ и $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$.

4. Фазовая характеристика может быть получена как сумма двух фазовых характеристик (числителя и знаменателя передаточной функции):

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 = \arctg \frac{\omega}{T_1 \omega} - \arctg T_2 \omega.$$

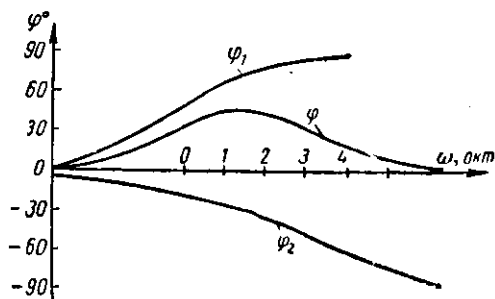


Рис. 8.12. Фазовая характеристика корректирующего звена с заданной зоной дифференцирования

Как видно из рис. 8.12, фазовая характеристика дает упреждающий сдвиг в зоне восходящей части л. а. х. с максимумом, приходящимся на средину наклонной части л. а. х. звена.

5. Выражение для кривой переходного процесса при единичном возмущении имеет вид

$$U_2 = U_1 \frac{T_2}{T_1} \left(1 + \frac{T_1 - T_2}{T_2} e^{-\frac{1}{T_2}} \right).$$

Пример 8.9. Построение семейства л. а. х. и фазовых характеристик корректирующего звена примера 8.8 при различных значениях $k_0 = 1/2; 1/4; 1/8; 1/16; 1/32; 1/64$ и $1/128$.

Установим, как меняется при этом зона дифференцирования и максимальное значение фазового сдвига.

Построим зависимость $\varphi_{\max} = f(k_0)$.

Приведем также значение коэффициента форсировки $m_\Phi = \frac{1}{k_0}$, необходимого для того, чтобы не снижать передаточный коэффициент системы в низкочастотной зоне при последовательном введении данного корректирующего звена.

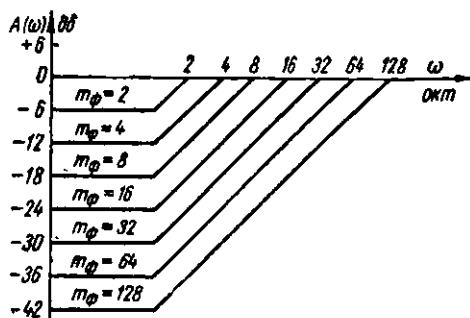


Рис. 8.13. Семейство л. а. х. корректирующего звена примера 8.8

1. Семейство л. а. х. при изменении $k_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{128}$ представлено на рис. 8.13.

2. Фазовые характеристики даны на рис. 8.14.

3. Зависимость $\varphi_{\max} = f(k_0)$ представлена на рис. 8.15.

4. Зона дифференцирования, т. е. отношение сопрягающих частот $\frac{\omega_2}{\omega_1} = m_\Phi$.

Пример 8.10. Определение влияния сопротивления источника питания в схеме корректирующего звена примера 8.8 (рис. 8.16, а).

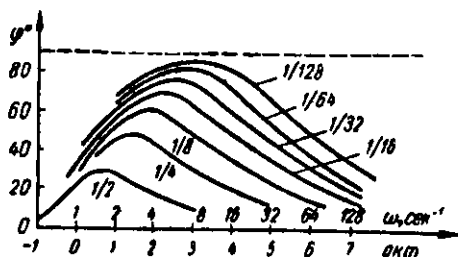


Рис. 8.14. Семейство фазовых характеристик корректирующего звена примера 8.8

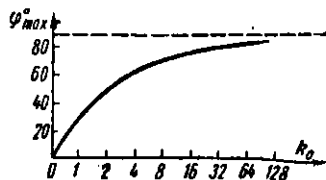


Рис. 8.15. Зависимость $\varphi_{\max} = f(k_0)$ для корректирующего звена примера 8.8

1. Передаточная функция

$$W(p) = k_0 \frac{T_1 p + 1}{T_2 p + 1},$$

$$\text{где } k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1 + R_2}{R_3}}; \quad T_1 = R_2 C;$$

$$T_2 = \frac{(R_1 + R_3) R_2}{R_1 + R_2 + R_3} C; \quad k_\infty = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_3}}.$$

2. Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой полуокружность с диаметром $d = k_\infty - k_0$.

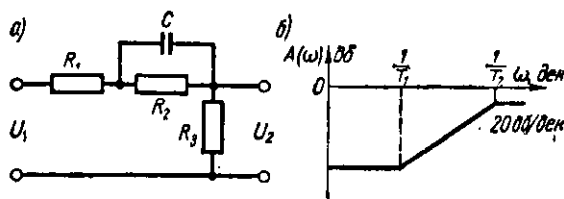


Рис. 8.16. Корректирующее звено с учетом сопротивления источника питания и его характеристика

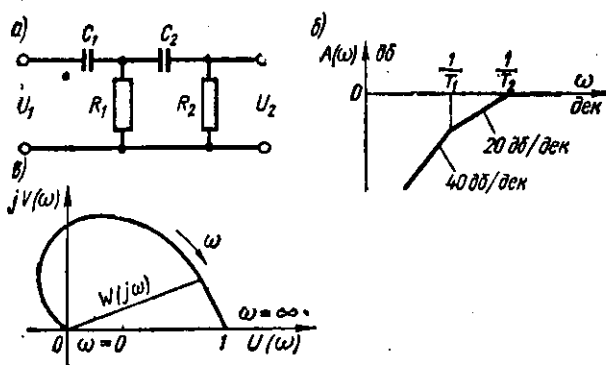


Рис. 8.17. Дифференцирующее звено второго порядка и его характеристики

3. Логарифмическая амплитудная характеристика звена имеет тот же вид, но участок характеристики в зоне высоких частот расположен ниже нуля децибел (рис. 8.16, б).

4. Фазовая характеристика имеет тот же вид, что и у основного звена.

5. Первая сопрягающая частота ω_1 осталась той же, вторая сопрягающая частота несколько уменьшилась, так как увеличилась величина T_2 .

Пример 8.11. Определение передаточной функции и построение частотных характеристик для дифференцирующего звена второго порядка, представленного на рис. 8.17, а.

1. Передаточная функция

$$W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2}{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2 + T_{1,2}) p + 1};$$

$$k_0 = 0; \quad k_\infty = 1.$$

Отличительной особенностью передаточной функции второго порядка, по сравнению с двумя звеньями первого порядка, включенными через раздельный усилитель, является наличие дополнительной постоянной времени $T_{1,2}$. При малых значе-

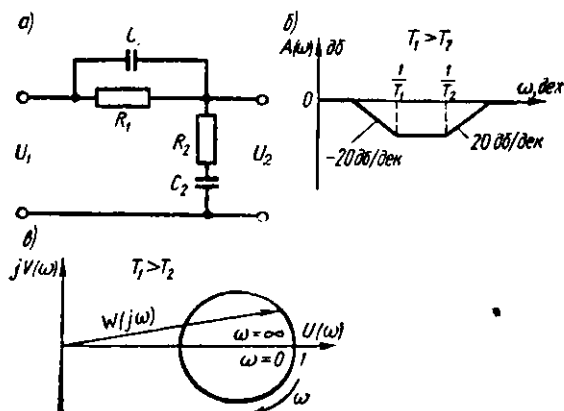


Рис. 8.18. Интегро-дифференцирующее звено и его характеристики

ниях R_1 и C_2 величиной $T_{1,2}$ можно пренебречь. Тогда передаточные функции для обоих случаев будут практически одинаковы.

2. Построим частотные характеристики звена. Амплитудное значение передаточного коэффициента

$$A(\omega) = \frac{T_1 T_2 \omega^2}{\sqrt{1 + [(T_1 + T_2 + T_{1,2})^2 - 2T_1 T_2] \omega^2 + T_1^2 T_2^2 \omega^4}}.$$

Логарифмическая амплитудная характеристика (рис. 8.17, б) имеет две сопрягающие частоты:

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{(T_1 + T_2 + T_{1,2})^2 - 2T_1 T_2}};$$

$$\omega_2 = \frac{\sqrt{(T_1 + T_2 + T_{1,2})^2 - 2T_1 T_2}}{T_1 T_2}.$$

В пределах $\omega=0 \div \omega_1$ наклон л. а. х. составляет 40 дб/дек; в зоне частот $\omega=\omega_1 \div \omega_2$ наклон равен 20 дб/дек и, наконец, при $\omega > \omega_2$ наклон равен 0.

Амплитудно-фазовая характеристика представлена на рис. 8.17, в.

✓ **Пример 8.12.** Определение передаточной функции и частотных характеристик интегро-дифференцирующего звена, схема которого представлена на рис. 8.18, а.

1. Передаточная функция

$$W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 + \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + 1};$$

$$k_0 = 1; k_\infty = 1, T_1 = R_1 C_1, T_2 = R_2 C_2.$$

Средний участок имеет нулевой наклон при значении передаточного коэффициента

$$k_i = \frac{T_1 + T_2}{T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) T_2}.$$

Соотношения справедливы при $T_1 > T_2$.

2. Построим частотные характеристики.

Логарифмическая амплитудная характеристика звена имеет два наклонных участка — 20 дб/дек и +20 дб/дек и три горизонтальных (рис. 8.18, б). Средний участок находится в зоне частот от $\omega_1 = \frac{1}{T_1}$ до $\omega_2 = \frac{1}{T_2}$. Подобного рода л. а. х. часто используется для корректирования частотной характеристики системы в определенной зоне частот.

Амплитудно-фазовая характеристика представляет собой окружность (рис. 8.18, в) с диаметром $d = 1 - k_i$.

Пример 8.13. Определение семейства л. а. х. и построение фазовой характеристики для звена, представленного на рис. 8.18, по следующим данным: $\frac{T_1}{T_2} = 4$ и $k_i = 2, 4, 8, 16, 32$.

Ответ. Логарифмические амплитудные характеристики для заданных условий изображены на рис. 8.19, а.

Фазовая характеристика для одной из л. а. х. приведена на рис. 8.19, б.

Пример 8.14. Определение передаточной функции и построение частотных характеристик для интегро-дифференцирующего звена, изображенного на рис. 8.20, а.

1. Передаточная функция

$$W(p) = \frac{T_1 T_2 p^2 + (T_1 + T_2)p + 1}{T_1 T_2 p^2 + \left[T_1 \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \right) + T_2 \right] p + \frac{R_1 + R_2 + R_3}{R_2 + R_3}};$$

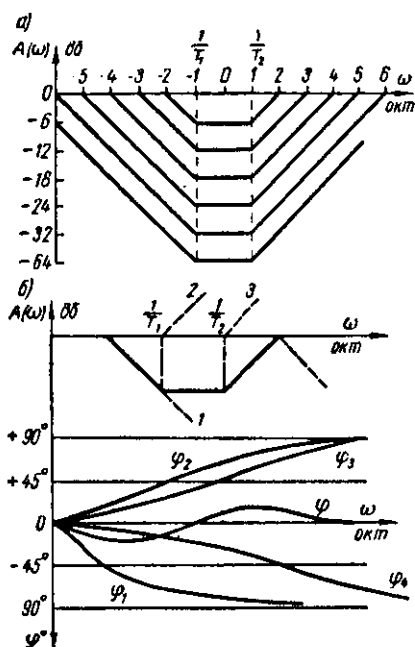


Рис. 8.19. Частотные характеристики звена, изображенного на рис. 8.18, а

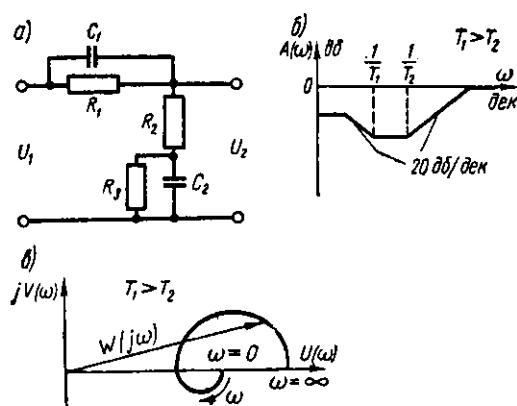


Рис. 8.20. Интегро-дифференцирующее звено и его характеристики

$$k_0 = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2 + R_3}}; \quad k_\infty = 1;$$

$$T_1 = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3} C_2; \quad T_2 = R_1 C_1.$$

2. Построим частотные характеристики.

Логарифмическая амплитудная характеристика звена представлена на рис. 8.20, б. В отличие от предыдущего случая $k_0 \neq 1$, что объясняется наличием сопротивления R_3 , благодаря которому при $\omega=0$ (постоянный ток) цепь оказывается замкнутой и в сопротивлении R_1 имеет место падение напряжения IR_1 , которое и уменьшает $k_0 = \frac{U_2(0)}{U_1(0)}$.

Амплитудно-фазовая характеристика, имеющая вид спирали, представлена на рис. 8.20, в: при $R_1=R_2=R_3=1$ $C_1=0,1$, $C_2=2$.

Фазовая характеристика подобна предыдущему случаю.

Пример 8.15. Определение передаточной функции колебательного звена (рис. 8.21). Определение резонансной частоты $\omega_{\text{рез}}$ и показателя колебательности звена в зависимости от его параметров.

1. Для определения передаточной функции составим следующие уравнения:

$$U_1 = L \frac{dI}{dt} + IR + U_2$$

или

$$U_1 = LpI + IR + U_2;$$

$I = CpU_2$ (если C и R поменять местами),
отсюда

$$U_1 = LCp^2 U_2 + RCpU_2 + U_2.$$

Тогда

$$W(p) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{LCp^2 + RCp + 1}$$

или

$$W(p) = \frac{\frac{1}{LC}}{p^2 + \frac{1}{T}p + \frac{1}{LC}},$$

где $T = \frac{L}{R}$.

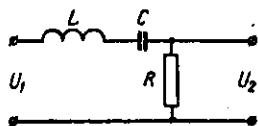


Рис. 8.21. Колебательное звено

Характеристическое уравнение:

$$p^2 + \frac{R}{L}p + \frac{1}{LC} = 0.$$

Корни уравнения

$$p_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}.$$

При $R=0$ имеем

$$p_{1,2} = \pm j \sqrt{\frac{1}{LC}} = \pm j \omega_0,$$

где $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ — частота незатухающих колебаний звена при $R=0$.

Определим значение граничного сопротивления R_r (граница между отрицательными вещественными и комплексными корнями):

$$\frac{R_r^2}{4L^2} = \frac{1}{LC}; \quad R_r = 2 \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Выразим величину R в относительных единицах: $\frac{R}{R_r} = r$ или

$$R = 2r \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Следовательно,

$$\frac{R}{L} = 2r \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Заменим в полученном выражении для $W(p)$ p на $j\omega$ и $\sqrt{\frac{1}{LC}}$ на ω_0 .

Тогда будем иметь

$$W(j\omega) = \frac{\omega_0^2}{-\omega^2 + 2r\omega_0 j\omega + \omega_0^2}.$$

Перейдем к относительным частотам $d = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Для этого разделим числитель и знаменатель на ω_0^2 . Тогда будем иметь

$$W(jd) = \frac{1}{-d^2 + 2rjd + 1}. \quad (8.1)$$

2. Определим резонансную частоту $d_{\text{рез}}$ и показатель колебательности M .

Метод логарифмических частотных характеристик с расчетом по ступенчатому воздействию разработан наиболее полно, так как снабжен большим количеством номограмм, графиков и типовых характеристик.

Достоинством этого метода является простота построения нескорректированной и желаемой характеристик, а также нахождение суммарной характеристики последовательных корректирующих звеньев.

Однако имеются известные затруднения при нахождении обратных корректирующих звеньев. Вместе с тем на практике они получили наиболее широкое распространение как технически удобное средство коррекции.

Расчет автоматизированной системы, состоящей из связанных между собой в единую замкнутую цепь автоматического управления различных элементов, представляет достаточно сложную задачу с возможностью многозначного решения.

Выбор оптимального варианта зависит от требований, которые выдвигаются в данных условиях (малогабаритность, быстродействие, точность и др.).

Поэтому детальный план расчета следящей системы не может носить сколько-нибудь универсального характера. Укажем лишь его общий порядок с тем, чтобы проектировщик системы сам мог конкретизировать некоторые детали в процессе расчета на базе рассматриваемого примера.

Ниже приводится краткая характеристика основных этапов расчета.

Задание на расчет. В зависимости от технических условий задание может быть довольно разнообразным. Чаще всего в задание вводятся лишь эксплуатационные требования общего характера: мощность, точность, режим работы, максимальная скорость, максимальное ускорение работы системы, эксплуатационные условия (температурный режим, длительность эксплуатации и т. д.).

В некоторых случаях выдвигаются дополнительные требования: габариты, вес, род тока, тип двигателя, тип усилителя, требования бесконтактности и др.

Иногда проектировщику приходится самому дополнительно задаваться некоторыми данными, необходимыми для расчета в качестве исходных.

Выбор исходных данных. К исходным данным расчета относятся: вид возмущающего воздействия (гармоническое или единичное ступенчатое воздействие), величина перерегулирования $\sigma\%$ при единичном воздействии (обычно в пределах 10—40%), время переходного процесса t_p , число переходов через положение равновесия (обычно 1—3), запас по модулю и фазе, род тока, величины напряжений и частоты, типы усилителей и исполнительного двигателя, тип чувствительного элемента и главной обратной связи. Иногда значительная часть этих данных содержится в задании.

Все исходные данные принимаются или на основании опыта проектирования, или же на основании инженерных соображений, связанных с вопросами экономики, удобством эксплуатации и местных условий.

В наиболее ответственных случаях может быть предусмотрено несколько вариантов исходных данных, по которым следует провести соответствующее количество параллельных расчетов.

Выбор основных элементов схемы. После уточнения исходных данных необходимо произвести выбор основных элементов схемы, к которым относятся: усилители (электромашинный, магнитный, электронный, полупроводниковый), исполнительный двигатель, вывальный или чувствительный элемент, редуктор, жесткая обратная связь, преобразовательные элементы (дискриминаторы, выпрямители и т. п.), источники питания.

Здесь должны быть установлены входные и выходные мощности элементов, их марка или тип, напряжения питания, каталожные данные выбираемых элементов. Должны быть также сформулированы требования на расчет некоторых нестандартных элементов, например усилителей, дискриминаторов и т. д.

Определение параметров основных элементов и составление структурной схемы главной цепи. После выбора основных элементов необходимо определить их параметры, соответствующие

как статическому, так и динамическому режимам. К этим параметрам относятся: коэффициенты усиления по напряжению, постоянные времени всех цепей, передаточные числа, передаточные функции элементов.

Часть параметров может быть определена расчетным путем, часть — получена экспериментально, некоторые же могут быть взяты из справочных материалов.

После этого составляется структурная схема главной цепи и определяется ее передаточная функция.

Наличие указанных выше данных и структурной схемы главной цепи позволяет перейти непосредственно к расчету системы.

Статический расчет системы по структурной схеме. Определяются все статические характеристики отдельных звеньев и производится расчет статической точности системы в соответствии с техническими условиями. Выполняется линеаризация характеристик элементов. Производится проверка статической точности при заданных изменениях температурного режима.

Расчет отдельных элементов системы. Сюда относится расчет усилителей, сопряжение усилителей с исполнительным двигателем, сопряжение каскадов усилителей, выбор и расчет корректирующих цепей в усилителях, учет влияния отдельных факторов на работу элементов, уточнение передаточных функций и коэффициентов усиления элементов и т. п. Уточняется линеаризация характеристик элементов.

Динамический расчет системы. К динамическому расчету с применением л. а. х. относятся:

а) определение логарифмической частотной характеристики нескорректированной системы (частотная характеристика главной цепи) и ее оценка; б) построение низкочастотной зоны желаемой характеристики из условий заданной точности; в) определение среднечастотной зоны из условий запаса устойчивости и быстродействия; г) построение высокочастотной зоны; д) нахождение вещественной частотной характеристики; е) предварительный выбор или определение корректирующей характеристики и корректирующих средств, а также места их включения; ж) определение корректирующих звеньев и их параметров; з) построение скорректированной характеристики и сопоставление ее с нескорректированной и желаемой характеристиками; и) внесение изменений в средства коррекции и уточнение скорректированной характеристики; к) построение характеристики переходного процесса при единичном ступенчатом воздействии; л) внесение дополнительных коррективов и окончательная оценка результатов расчета системы.

Расчет системы автоматического управления на примере расчета следящей системы профилешлифовального станка. Работа следящей системы профилешлифовального станка (принципиальная схема изображена на рис. 1.16) описана в примере 1.7.

Технические условия:

1. Максимальная скорость обработки $V_{\max} = 20$ мм/мин.
2. Максимальная процентная ошибка $\delta v_{\max} \leq 0,008$ мм.
3. Динамические показатели качества переходного процесса при единичном управляющем воздействии: максимальное перерегулирование $\sigma \leq 20\%$; продолжительность переходного процесса $t_n \leq 0,2$ сек; число колебаний $\mu \leq 2$.
4. Корректирующие устройства должны выбираться с учетом возможности их сопряжения с полупроводниковым усилителем, принятым в системе.
5. В качестве исполнительного двигателя принят двигатель постоянного тока с независимым возбуждением типа СЛ-621. Передаточное число редуктора $j_p = 233$, ходовой винт между суппортом и выходной осью следящей системы $h = 2$ мм.
6. Предусмотреть наличие в системе жесткой отрицательной обратной связи по скорости, необходимо для обеспечения широкого диапазона изменения скорости следящей подачи.

Выбор основных элементов следящей системы:

1. *Исполнительный двигатель.* Тип исполнительного двигателя оговорен в технических условиях.

Основные технические данные двигателя СЛ-621 приведены в табл. 8.2.

Таблица 8.2

Номинальное напряжение возбуждения $U_{н.в}^{\circ}$	Номинальный ток возбуждения $I_{н.в}^{\circ}$, а	Номинальный ток якоря $I_{н.я}^{\circ}$, а	Ток короткого замыкания $I_{к.з}^{\circ}$, а	Номинальная мощность $P_{н}^{\circ}$, вт	Номинальный вращающий момент $M_{н}^{\circ}$, гсм	Пусковой момент $M_{п}^{\circ}$, гсм	Момент инерции якоря J , гсм ²	Сопротивление обмотки возбуждения $R_{в}^{\circ}$, ом	Сопротивление обмотки якоря $R_{я}^{\circ}$, ом	Индуктивность обмотки якоря $L_{я}^{\circ}$, мкн	Номинальная скорость n , об/мин
110	0,22	2,08	31	172	7000	12 500	6,72	560	3	35	2400

2. *Электромашинный усилитель.* Потребляемая мощность двигателя

$$P_{\text{потр.дв}} = \frac{P_{\text{н.дв}}}{\eta_{\text{дв}}} = \frac{172}{0,85} = 202 \text{ вт.}$$

Из условия, что $P_{\text{пол.э}} > P_{\text{потр.дв}}$, выбираем ЭМУ-5А с комплектом обмоток 5—2—Б, номинальные технические данные которого приведены в табл. 8.3.

Таблица 8.3

Мощность $P_{н}^{\circ}$, кат	Напряжение $U_{н}^{\circ}$, в	Ток $I_{н}^{\circ}$, а	Скорость вращения n , об/мин	К. п. д. η , %	Сопротивление якоря $R_{я}^{\circ}$, ом	Индуктивность якоря $L_{я}^{\circ}$, мкн	Сопротивление обмотки $R_{к'}^{\circ}$, ом	Индуктивность обмотки $L_{к'}^{\circ}$, мкн	Сопротивление обмотки управления $R_{у'}^{\circ}$, ом	Индуктивность обмотки управления $L_{у'}^{\circ}$, мкн	Номинальный ток обмотки управления $I_{у.н}^{\circ}$, ма
0,5	115	4,35	2850	69	1,7	40	1,3	30	3000	100	10

Полезная мощность ЭМУ

$$P_{\text{пол.э}} = P_{н} \cdot \eta_{э} = 0,5 \cdot 0,69 = 0,344 \text{ кВт.}$$

Условие $P_{\text{пол.э}} > P_{\text{потр.дв}}$ выполнено.

3. *Датчик.* Датчиком в следящей системе служит вращающийся трансформатор ВТ-2 нулевого класса точности. Технические данные ВТ-2 приведены в табл. 8.4.

Передаточный коэффициент датчика (с учетом дифференциала) $k_d = \frac{U_{\text{вх.у}}}{\Theta} = 3,6 \text{ в/град}$ или $k_d = 206 \text{ в/град}$. С учетом шага ходового винта передаточный коэффициент от оси датчика к суппорту $k'_d = 0,318 \text{ мм/град}$ или $k'_d = 5,55 \times 10^{-3} \text{ мм/град}$.

4. *Тахогенератор.* Напряжение, пропорциональное скорости вращения исполнительного двигателя, в проектируемой следящей системе вырабаты-

Таблица 8.4

Питание		Коэффициент трансформации	Предельная скорость вращения n , об/мин	Погрешность работы δ , %	Электрическая асимметрия не превышает, мин	Сопротивление обмоток			
U_n , в	I_n , а					статора		ротора	
						Z , ом	R , ом	Z , ом	R , ом
110	500	$2 \pm 0,05$	1000	0,06	± 2	1050	150	670	92

вается тахогенератором переменного тока АТ-231. Технические данные его приведены в табл. 8.5.

Таблица 8.5

Напряжение возбуждения U_B , в	Частота напряжения возбуждения f , гц	Максимальная скорость вращения n , об/мин	Крутизна характеристики, мв/об/мин	Сопротивление обмоток			
				возбуждения		генераторной	
				Z , ом	R , ом	Z , ом	R , ом
110	500	4000	5,7	440	30	2300	250

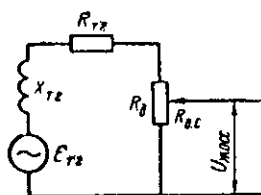


Рис. 8.23. Эквивалентная схема тахогенератора

5. Полупроводниковый усилитель. Расчет полупроводникового усилителя здесь не приводится. Как видно из принципиальной схемы следящей системы (рис. 5.16), полупроводниковый усилитель состоит из трех каскадов, коэффициенты усиления которых соответственно равны: $k_{y1}=32,6$, $k_{y2}=4,0$, $k_{y3}=2,7$.

6. Выбор параметров жесткой отрицательной обратной связи по скорости (ЖОСС). На основании расчета установившихся режимов (расчеты установившихся режимов систем автоматического управления рассмотрены в гл. III) примем, что основной сигнал управления в результате введения

ЖОСС уменьшается в $\beta_{жосс}$ раз ($\beta_{жосс}=4$).

При максимальной ошибке

$$\theta_{max} = \frac{\delta_{max}}{k_{\delta}} = \frac{0,008}{5,55 \cdot 10^{-3}} = 1,44^{\circ},$$

входное напряжение усилителя $U_{вх.у}=5,2$ в. Тогда напряжение ЖОСС

$$U_{жосс} = \frac{U_{вх.у}}{\beta_{жосс}} (\beta_{жосс} - 1) = \frac{5,2}{4} (4 - 1) = 3,96.$$

Эквивалентная схема тахогенератора, работающего на нагрузку, изображена на рис. 8.23.

Для тахогенератора АТ-231, согласно данным табл. 8.5,

$$X_{TГ} = \sqrt{Z_{TГ}^2 - R_{TГ}^2} = \sqrt{2300^2 - 250^2} = 2290 \text{ ом}.$$

Электродвижущая сила тахогенератора при $n_n=4000$ об/мин

$$E_{TГ.н} = k_{TГ} n_n = 5,7 \cdot 10^{-3} \cdot 4000 = 22,8 \text{ в}.$$

Примем $R_d(R_{14}) = 5 \text{ ком.}$ Тогда

$$R_{0.c} = \frac{U_{жосс}}{E_{тг}} \sqrt{(R_d + R_{тг})^2 + X_{тг}^2} = \\ = \frac{3,9}{22,8} \sqrt{(5000 + 250)^2 + 2290^2} = 975 \text{ ом.}$$

Тахогенератор с исполнительным двигателем соединен через повышающий редуктор, коэффициент передачи которого

$$k_{р.тг} = \frac{n_{тг.н}}{n_{дв.н}} = \frac{4000}{2400} = 1,67.$$

Передаточный коэффициент тахометрической обратной связи

$$k_{жосс} = k_{р.тг} k_{тг} \cdot \frac{U_{жосс}}{E_{тг}} = 1,67 \cdot 5,7 \cdot \frac{3,9}{22,8} = \\ = 1,63 \frac{\text{мв}}{\text{об/мин}} = 0,0156 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}}.$$

Определение передаточной функции нескорректированной системы:

1. *Исполнительный двигатель.* Кроме параметров самого электродвигателя, в звено «исполнительный двигатель» включены параметры якоря ЭМУ и его компенсационной обмотки.

Для звена «исполнительный двигатель» можно составить следующее дифференциальное уравнение:

$$e_э = e_{дв} + i(R_{я.э} + R_k + R_{я.дв}) + (L_{я.э} + L_k + L_{я.дв}) \frac{di}{dt}, \quad (8.5)$$

где $e_э$ — э. д. с. продольных щеток якоря ЭМУ;

$e_{дв}$ — э. д. с. двигателя;

$R_{я.э}$ — сопротивление якоря ЭМУ;

R_k — сопротивление компенсационной обмотки ЭМУ;

$R_{я.дв}$ — сопротивление якоря двигателя;

$L_{я.э}$ — индуктивность якоря ЭМУ;

$L_{я.дв}$ — коэффициент самоиндукции якоря двигателя;

L_k — коэффициент самоиндукции компенсационной обмотки.

Если обозначить

$$R_{я.э} + R_k + R_{я.дв} = R,$$

$$L_{я.э} + L_k + L_{я.дв} = L$$

и учесть, что $e_{дв} = e_1 \Omega_{дв}$,

(где $\Omega_{дв}$ — угловая скорость электродвигателя, e_1 — коэффициент пропорциональности), то можно переписать уравнение (8.5):

$$e_э = e_1 \Omega_{дв} + iR + L \frac{di}{dt}. \quad (8.6)$$

Уравнение движения вала двигателя можно записать в следующем виде:

$$M_{вр} = J \frac{d\Omega_{дв}}{dt} = e_2 i. \quad (8.7)$$

Выходной величиной звена будем считать скорость $\Omega_{дв}$. Исключая из уравнений (8.6) и (8.7) величину i , находим связь между $e_э$ и $\Omega_{дв}$:

$$L \frac{d^2 \Omega_{дв}}{dt^2} + R \frac{d\Omega_{дв}}{dt} + \frac{e_1 e_2}{J} \Omega_{дв} = \frac{e_2}{J} e_э. \quad (8.8)$$

Разделив обе части на L , получим:

$$\frac{d^2 \Omega_{дв}}{dt^2} + \frac{R}{L} \cdot \frac{d\Omega_{дв}}{dt} + \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2}{JL} \cdot \Omega_{дв} = e_2 \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{\varepsilon_2}{JL}.$$

Если обозначить: $\frac{L}{R} = T_{эл}$ — электромагнитной постоянной времени; $\frac{JR}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = T_{эм}$ — электромеханической постоянной времени, то это уравнение примет вид

$$\frac{d^2 \Omega_{дв}}{dt^2} + \frac{1}{T_{эл}} \cdot \frac{d\Omega_{дв}}{dt} + \frac{1}{T_{эл} T_{эм}} \Omega_{дв} = \frac{1}{\varepsilon_1} \cdot \frac{1}{T_{эл} T_{эм}} e_2$$

или

$$T_{эл} T_{эм} \frac{d^2 \Omega_{дв}}{dt^2} + T_{эм} \frac{d\Omega_{дв}}{dt} + \Omega_{дв} = k_{дв} e_2, \quad (8.9)$$

где $k_{дв} = \frac{1}{\varepsilon_1}$ — передаточный коэффициент звена.

Уравнение (8.9) представляет собой уравнение колебательного звена с собственной частотой колебаний

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_{эл} T_{эм}}} = \frac{1}{T_0}. \quad (8.10)$$

Вводя постоянную затухания ξ , согласно уравнению (8.9) получим

$$\left. \begin{aligned} 2\xi\omega_0 &= \frac{1}{T_{эл}}, \\ \xi &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_{эм}}{T_{эл}}}. \end{aligned} \right\} \quad (8.11)$$

Записывая уравнение (8.9) в операторной форме, будем иметь

$$T_{эл} T_{эм} \Omega_{дв} p^2 + T_{эм} \Omega_{дв} p + \Omega_{дв} = k_{дв} E_2,$$

откуда передаточная функция звена

$$k_{дв}(p) = \frac{\Omega_{дв}}{E_2} = \frac{k_{дв}}{T_{эл} T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1}.$$

Или, если за выходную величину принять угол Θ , то

$$k_{дв}(p) = \frac{k_{дв}}{p(T_{эл} T_{эм} p^2 + T_{эм} p + 1)}.$$

С учетом (8.10) и (8.11) передаточная функция звена

$$k_{дв}(p) = \frac{k_{дв}}{p(T_0^2 p^2 + 2\xi T_0 p + 1)}. \quad (8.12)$$

Определим численные значения параметров данного звена:

$$\varepsilon_1 = \frac{U_{дв.н}}{\Omega_{дв.н}} = \frac{U_{дв.н} 60}{2\pi n_n} = \frac{110 \cdot 60}{2\pi 2400} = 0,435 \text{ в} \cdot \text{сек}/\text{рад};$$

$$k_{дв} = \frac{1}{\varepsilon_1} = \frac{1}{0,435} = 2,3 \text{ рад}/\text{в} \cdot \text{сек};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{M_{\text{дв.н}}}{I_{\text{я.н}}} = \frac{7000 \cdot 10^{-5}}{2,08} = 0,0336 \text{ кгм/а}; \\ R &= R_{\text{л.э}} + R_{\text{к}} + R_{\text{я.дв}} = 1,7 + 1,3 + 3 = 6 \text{ ом}; \\ J &= J_{\text{дв}} + J'_{\text{мех}} = 6,72 + 0,47 \approx 7,2 \text{ г·см·сек}^2; \\ T_{\text{эм}} &= \frac{JR}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \frac{7,2 \cdot 10^{-5} \cdot 6}{0,435 \cdot 0,0366} = 0,0296 \text{ сек}; \\ T_{\text{эл}} &= \frac{L}{R} = \frac{(40 + 30 + 35) \cdot 10^{-3}}{6} = 0,0175 \text{ сек}; \\ \omega_0 &= \frac{1}{\sqrt{T_{\text{эл}} T_{\text{эм}}}} = \frac{1}{\sqrt{0,0175 \cdot 0,0296}} = 44 \text{ сек}^{-1}; \\ T_0 &= 0,0228 \text{ сек}; \\ \zeta &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_{\text{эм}}}{T_{\text{эл}}}} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{0,0296}{0,0175}} = 0,65. \end{aligned}$$

Коэффициент затухания имеет достаточно большое значение, поэтому данное звено можно представить в виде цепочки из двух апериодических звеньев с постоянными времени $T_{\text{дв1}} = 0,0333 \text{ сек}$ и $T_{\text{дв2}} = 0,0156 \text{ сек}$.

На рис. 8.24 приведена логарифмическая амплитудная частотная характеристика колебательного звена с $\zeta = 0,65$, которое разбито на два инерционных звена с постоянными времени $T_{\text{дв1}}$ и $T_{\text{дв2}}$. Замена колебательного звена двумя инерционными звеньями приводит к ошибке не более 1,5 дБ.

Таким образом, передаточная функция звена «исполнительный двигатель»

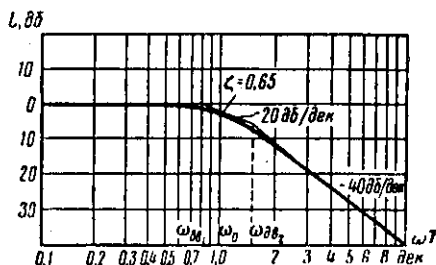


Рис. 8.24. Логарифмическая амплитудная характеристика колебательного звена

$$k_{\text{дв}}(p) = \frac{k_{\text{дв}}}{p(1 + T_{\text{дв1}} p)(1 + T_{\text{дв2}} p)}$$

или в численном выражении

$$k_{\text{дв}}(p) = \frac{2,3}{p(1 + 0,0333p)(1 + 0,0156p)} \text{ рад/в.} \quad (8.13)$$

2. **Электромашинный усилитель.** Введем обозначения:

$L_{0.у}$ — коэффициент индуктивности обмотки управления ЭМУ,

$R_{0.у}$ — активное сопротивление обмотки управления ЭМУ,

$R_{у.вых}$ — выходное сопротивление предварительного усилителя.

Передаточная функция звена

$$k_{\text{э}}(p) = \frac{E_{\text{э}}}{U_{0.у}} = \frac{k_{\text{э}}}{(1 + T_{0.у} p)(1 + T_{\text{э}} p)}, \quad (8.14)$$

где $E_{\text{э}}$ — э. д. с. продольной цепи ЭМУ;

$U_{0.у}$ — напряжение на обмотках управления ЭМУ;

$T_{0,y}$ — постоянная времени обмотки управления;
 T_s — постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ.
 Численные значения постоянных времени:

$$T_s = \frac{L_{я.э}}{R_{я.э}} = \frac{35 \cdot 10^{-3}}{1,7} = 0,02 \text{ сек.},$$

$$T_{0,y} = \frac{L_{0,y}}{R_{0,y} + R_{y.вых}} = \frac{100}{3000 + 450\,000} = 0,00022 \text{ сек.}$$

По сравнению со всеми постоянными времени, постоянной времени $T_{0,y}$ можно пренебречь, так как она в 71 раз меньше последней учитываемой постоянной времени следящей системы.

Передаточный коэффициент звена можно приблизительно определить как

$$k_s = \frac{U_{н.э}}{U_{0,y}} = \frac{110}{30} = 3,67.$$

Таким образом, передаточная функция звена

$$k_s(p) = \frac{3,67}{1 + 0,02p}. \quad (8.15)$$

3. *Предварительный усилитель.* Усилитель на полупроводниковых элементах является безынерционным звеном.

При синтезе корректирующих звеньев удобно разбить усилитель на отдельные каскады, так как они охватываются различными обратными связями. Но надо учитывать, что коэффициент усиления всего усилителя снижается за счет введения в усилитель прямого корректирующего звена. Как указывалось выше, коэффициенты усиления отдельных каскадов составляют: $k_{y1}=32,6$; $k_{y2}=40$; $k_{y3}=2,7$.

4. *Редуктор.* Передаточная функция редуктора

$$k_p = \frac{1}{j_p} = \frac{1}{233} = 0,00428, \quad (8.16)$$

где j_p — передаточное число редуктора.

5. *Датчик.* Передаточный коэффициент цепи датчика

$$k_d = 206 \text{ в/рад.} \quad (8.17)$$

6. *Жесткая обратная связь по скорости* (рис. 8.23). Коэффициент жесткой обратной связи по скорости

$$k_{жосс} = 0,0156 \text{ в.сек/рад.} \quad (8.18)$$

Передаточные функции всех основных звеньев сведены в табл. 8.6.

7. *Передаточная функция нескорректированной системы.* Для расчета корректирующих звеньев удобнее всего пользоваться передаточной функцией системы, не охваченной жесткими обратными связями, так как в этом случае упрощается методика определения структуры корректирующих звеньев. После выявления вида и места включения корректирующих звеньев передаточная функция всей скорректированной системы выводится с учетом жестких обратных связей.

Определим добротность следящей системы, которая отвечала бы заданной точности и максимальной скорости исполнительного органа.

Передаточное число между исполнительным двигателем и суппортом шлифовальной головки

$$j_n = \frac{j_p}{h} = \frac{233}{2} = 116,5 \frac{1}{\text{мм}}.$$

Таблица 86

№	Наименование звена	Передаточная функция	Статистический коэффициент усиления	Постоянные времени
1	Датчик	k_d	206 в/рад	—
2	Усилитель	k_{y1}	32,6	—
		k_{y2}	4,0	
		k_{y3}	2,7	
3	ЭМУ	$\frac{k_3}{1 + T_3 p}$	3,67	$T_3 = 0,02 \text{ сек}$
4	Исполнительный двигатель	$\frac{k_{дв}}{p(1 + T_{дв1}p)(1 + T_{дв2}p)}$	$2,3 \frac{\text{рад}}{\text{в} \cdot \text{сек}}$	$T_1 = 0,0333 \text{ сек}$ $T_2 = 0,0156 \text{ сек}$
5	Редуктор	k_p	0,00428	—
6	ЖОСС	$k_{жосс}$	$0,0156 \frac{\text{сек}}{\text{рад}}$	—

где $j_p = 233$ — передаточное число редуктора;

$h = 2 \text{ мм}$ — шаг ходового винта.

Максимальная скорость суппорта

$$V_{\max} = \frac{n_{н.дв}}{j_p} = \frac{2400}{116,5} = 20,6 \text{ мм/мин} = 0,344 \text{ мм/сек.}$$

Добротность системы

$$D_V = \frac{V_{\max}}{\Theta_{V_{\max}}} = \frac{0,344}{0,008} = 43 \frac{1}{\text{сек}}.$$

Передаточная функция нескорректированной системы

$$K'(p) = \frac{D_V}{p(1 + T_3 p)(1 + T_{дв1} p)(1 + T_{дв2} p)},$$

или в численном выражении

$$K'(p) = \frac{43}{p(1 + 0,02p)(1 + 0,0333p)(1 + 0,0156p)}. \quad (8.19)$$

Построение логарифмических частотных характеристик. Построение л. а. х. производится методом сопрягающих частот. Сопрягающие частоты:

$$\omega_{дв1} = \frac{1}{T_{дв1}} = \frac{1}{0,0333} = 30 \text{ сек}^{-1}, \lg \omega_{дв1} = 1,48;$$

$$\omega_{дв2} = \frac{1}{T_{дв2}} = \frac{1}{0,0156} = 64 \text{ сек}^{-1}, \lg \omega_{дв2} = 1,81;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{0,02} = 50 \text{ сек}^{-1}, \lg \omega_3 = 1,7.$$

Добротность системы в децибелах

$$L = 20 \lg D_V = 20 \lg 43 = 32,7 \text{ дб}.$$

Логарифмическая амплитудная частотная характеристика приведена на рис. 8.25, а. Фазовая логарифмическая частотная характеристика (рис. 8.25, б)

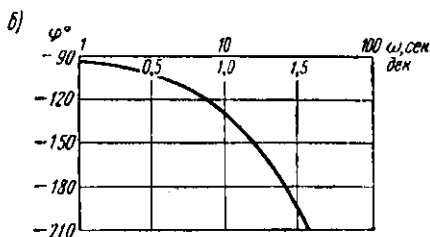
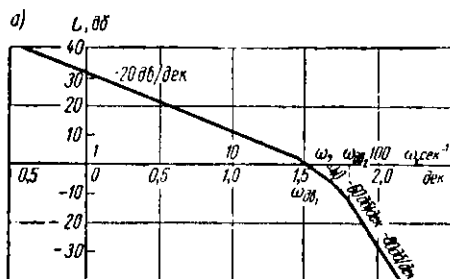


Рис. 8.25. Частотные характеристики нескорректированной системы

строится путем суммирования фазовых характеристик отдельных звеньев системы. Из построенных частотных характеристик следует, что система неустойчива.

Определение вида корректирующих звеньев и места их включения. Для определения вида желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики была использована моделирующая счетная машина ИПТ-5. Предварительный расчет на ИПТ-5 показал, что амплитудная характеристика, отвечающая заданным качественным показателям следящей системы, должна иметь вид, изображенный на рис. 8.26 (характеристика 2).

Вычитая из желаемой характеристики 2 исходную 1, получим логарифмическую амплитудно-частотную характеристику корректирующих звеньев 3. Кривая 3 показывает, что для того, чтобы скорректировать систему, необходимо осуществить довольно сложное корректирующее звено.

Для облегчения этой задачи характеристика 3 разбивается на две составляющие 4 и 5, каждая из которых осуществляется самостоятельным корректирующим звеном, характеристика 4 — последовательным корректирующим звеном, характеристика 5 — обратным параллельным корректирующим звеном. Обратное звено одновременно осуществляет стабилизирующую обратную связь и жесткую обратную связь по напряжению ЭМУ.

Введение обоих звеньев в систему понижает коэффициент усиления системы на 23 дб. Поэтому необходимо увеличить статический коэффициент усиления основных звеньев до 56 дб (характеристика 6).

Последовательное корректирующее звено включается перед окончательным каскадом предварительного усилителя. Стабилизирующая обратная связь по напряжению охватывает ЭМУ и два последних каскада усилителя (фазочувствительный и окончательный). После введения корректирующих звеньев структурная схема следящей системы принимает вид, показанный на рис. 8.27.

1. Расчет последовательного корректирующего звена. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика последовательного звена приведена на рис. 8.26 (л. а. х. 4). Передаточная функция такого звена

$$K_{к.з}(p) = k_0 \frac{1 + T_3 p}{1 + T_3 p}; \quad (8.20)$$

где $T_3 = \frac{1}{\omega_3}$.

Исходя из передаточной функции, составим электрическую схему корректирующего звена (рис. 8.28). Здесь $R_{вых2}$ — выходное сопротивление фазочувствительного усилителя ($R_{вых2} = 2 \text{ ком}$), $R_{вх3}$ — входное сопротивление оконечного каскада ($R_{вх3} = 6,6 \text{ ком}$).

Для данного звена:

$$k_0 = \frac{R_{вх3}}{R_{вых2} + R_{вх3} + R_8};$$

$$T_3 = R_8 C_1; T_3 = \frac{R_{вых2} + R_{вх3}}{R_{вых2} + R_8 + R_{вх3}} T_3.$$

Из л. а. х. 4 (рис. 8.26) находим:

$$T_3 = 0,02 \text{ сек}; T_3 = \frac{1}{\omega_3} = 0,006 \text{ сек}.$$

Тогда

$$R_8 = \frac{(R_1 + R_3)(T_3 - T_3)}{T_3} = \frac{(2,0 + 6,6)(0,02 - 0,006)}{0,006} = 20 \text{ ком};$$

$$C_1 = \frac{T_3}{R_8} = \frac{0,02}{2 \cdot 10^4} = 10^{-6} \text{ ф} = 1 \text{ мкф};$$

$$k_0 = \frac{R_{вх3}}{R_{вых2} + R_{вх3} + R_8} = \frac{6,6}{2,0 + 6,6 + 20} = 0,25.$$

Таким образом, передаточная функция последовательного корректирующего звена

$$K_{к.з} = 0,25 \frac{1 + 0,02p}{1 + 0,006p}. \quad (8.21)$$

2. Расчет обратного корректирующего звена. Если система будет скорректирована при помощи прямых звеньев, то передаточную функцию системы можно представить как

$$K_{ск}(p) = K(p) K_{п.з}(p).$$

Если система скорректирована при помощи звеньев обратной связи, то передаточную функцию можно представить в виде

$$K_{ск}(p) = \frac{K(p)}{1 + K_{охв}(p) K_{о.с}(p)}.$$

Приравнявая эти два выражения, получим

$$K_{п.з}(p) = \frac{1}{1 + K_{охв}(p) K_{о.с}(p)}.$$

Допустим, что в каком-то диапазоне частот $\omega' \div \omega''$

$$K_{охв}(p) K_{о.с}(p) \gg 1.$$

Тогда

$$K_{п.з} = \frac{1}{K_{охв}(p) K_{о.с}(p)}$$

Прологарифмируем это выражение:

$$20 \lg K_{п.з} = -20 \lg K_{охв} - 20 \lg K_{о.с},$$

или

$$-20 \lg K_{о.с} = 20 \lg K_{охв} + 20 \lg K_{п.з}.$$

Для того чтобы найти л. а. х. обратных корректирующих звеньев, надо сложить л. а. х. звеньев, охваченных обратной связью, с л. а. х. прямых корректирующих звеньев, и эту сумму взять с обратным знаком. Эта операция произведена графически на рис. 8.29.

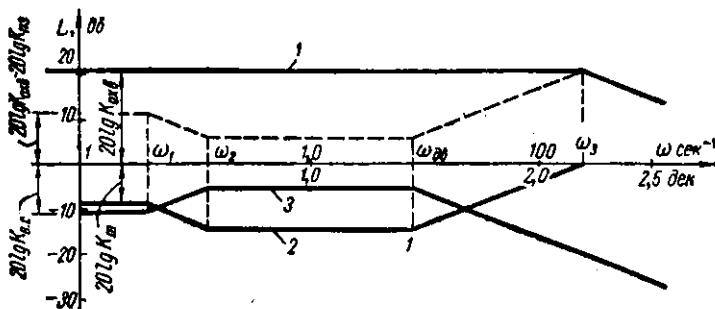


Рис. 8.29. К расчету корректирующих звеньев:

1 — л. а. х. звеньев, охваченных обратной связью; 2 — л. а. х. прямого корректирующего звена; 3 — л. а. х. обратного корректирующего звена

Передаточная функция звеньев, охваченных гибкой обратной связью,

$$K'_{охв}(p) = k_{y2} k_{к.з}(p) k_{y.з} k_g(p) = \frac{4,0 \cdot 0,25 \cdot 2,7 \cdot 3,67 (1 + 0,0333p)}{(1 + 0,006p)(1 + 0,0333p)} = \frac{10}{(1 + 0,006p)}. \quad (8.22)$$

Отсюда

$$20 \lg K'_{охв} = 20 \lg 10 = 20 \text{ db},$$

$$\omega_3 = \frac{1}{0,006} = 166,5 \text{ сек}^{-1}, \lg \omega_3 = 2,22.$$

Электрическая схема звена, при помощи которого можно осуществить характеристику 3 (рис. 8.29), изображена на рис. 8.30.

Передаточная функция такого звена

$$K_{о.с}(p) = k_{о.с} \frac{1 + T_1 p}{(1 + T_2 p)(1 + T_{дв1} p)}. \quad (8.23)$$

Параметры звена должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$T_1 = R_{13} C_3; \quad (8.24)$$

$$T_2 T_{дв1} = k_{о.с} T_1 R_{13} C_3; \quad (8.25)$$

$$T_2 + T_{дв2} = \frac{(R_{12} + R_5) T_1 + (R_{13} + R_{12}) R_5 C_2}{R_{13} + R_{12} + R_5}, \quad (8.26)$$

$$k_{0.c} = \frac{R_5}{R_5 + R_{12} + R_{13}}. \quad (8.27)$$

Из расчета усилителя известно, что $R_5 = 1000 \text{ ом}$.

Из л. а. х. обратного корректирующего звена (рис. 8.29) следует, что:

$$20 \lg k_{0.c} = -11 \text{ дБ}; \quad k_{0.c} = 0,282;$$

$$\omega_1 = 2,0 \text{ сек}^{-1}; \quad T_1 = \frac{1}{\omega_1} = 0,5 \text{ сек};$$

$$\omega_2 = 3,63 \text{ сек}^{-1}; \quad T_2 = \frac{1}{\omega_2} = 0,276 \text{ сек};$$

$$\omega_{дв1} = 30,2 \text{ сек}^{-1}; \quad T_{дв1} = \frac{1}{\omega_{дв1}} = 0,0333 \text{ сек}.$$

Зададимся $R_{12} = 980 \text{ ом}$.

Из выражения (8.27) получим

$$R_{13} = \frac{R_5 - k_{0.c}(R_5 + R_{12})}{k_{0.c}} = \frac{1,0 - 0,282(1,0 + 0,98)}{0,282} = 1,56 \text{ ком}.$$

Решая совместно (8.25) и (8.26), определим

$$C_2 = \frac{T_{дв1} [R_5 T_{дв1} - k_{0.c}(R_{12} + R_5) T_1]}{k_{0.c} R_5 [T_{дв1} (R_{13} + R_{12}) - T_1 R_{12}]} = \frac{0,0333 [1000 \cdot 0,0333 - 0,282 (1000 + 980) 0,5] \cdot 10^6}{0,282 \cdot 1000 [0,0333 (1560 + 980) - 0,5 \cdot 980]} = 7,16 \text{ мкф}.$$

Если принять $C_2 = 7 \text{ мкф}$, то постоянная времени T_2 в соответствии с (8.25) будет

$$T_2 = \frac{k_{0.c} T_1 R_{12} C_2}{T_{дв1}} = \frac{0,282 \cdot 0,5 \cdot 980 \cdot 7 \cdot 10^{-6}}{0,0333} = 0,297 \text{ сек}.$$

Из выражения (8.24) определим

$$C_3 = \frac{T_1}{R_{13}} = \frac{0,5 \cdot 10^6}{1560} = 32 \text{ мкф}.$$

На основании произведенного расчета передаточная функция обратного корректирующего звена

$$k_{0.c}(p) = 0,282 \frac{1 + 0,5 p}{(1 + 0,297 p)(1 + 0,0333 p)}. \quad (8.28)$$

Передаточная функция скорректированной системы. На рис. 8.31 приведена структурная схема скорректированной следящей системы, для которой передаточная функция в разомкнутом виде

$$K(p) = \frac{k_{\partial} k_{y1} k'_{охв}(p) k_{дв}(p) k_p}{1 + k_{0.c}(p) k'_{охв}(p) + k_{жосс} k''_{охв}(p)}. \quad (8.29)$$

Подставив в (8.29) выражения передаточных функций отдельных звеньев, будем иметь:

$$\begin{aligned}
 K(p) &= \frac{k_{\partial} k_{y1} k'_{\text{охв}} k_{\text{дв}} k_p}{p(1+T_3 p)(1+T_{\text{дв1}} p)(1+T_{\text{дв2}} p) \left[1 + \frac{k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} (1+T_1 p)}{(1+T_3 p)(1+T_2 p)(1+T_{\text{дв1}} p)} + \right.} \\
 &\quad \left. + \frac{k_{\text{жосс}} k'_{\text{охв}}}{(1+T_3 p)(1+T_{\text{дв1}} p)(1+T_{\text{дв2}} p)} \right] = \\
 &= \frac{k_{\partial} k_{y1} k'_{\text{охв}} k_{\text{дв}} k_p}{p(1+T_3 p)(1+T_{\text{дв1}} p)(1+T_{\text{дв2}} p) \left[\frac{(1+T_3 p)(1+T_2 p)(1+T_{\text{дв1}} p)(1+T_{\text{дв2}} p) +}{(1+T_3 p)(1+T_2 p) \times} \right.} \\
 &\quad \left. + \frac{k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} (1+T_1 p)(1+T_{\text{дв2}} p) + k_{\text{жосс}} k'_{\text{охв}} (1+T_2 p)}{(1+T_{\text{дв1}} p)(1+T_{\text{дв2}} p)} \right] = \\
 &= \frac{k_{\partial} k_{y1} k'_{\text{охв}} k_{\text{дв}} k_p}{p \left[(1+T_2 p)(1+T_3 p)(1+T_{\text{дв1}} p)(1+T_{\text{дв2}} p) + \right.} \\
 &\quad \left. + k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} (1+T_1 p)(1+T_{\text{дв2}} p) + k_{\text{жосс}} k'_{\text{охв}} (1+T_2 p) \right]}. \quad (8.30)
 \end{aligned}$$

Приведем выражение (8.30) к виду

$$K(p) = \frac{K(1+T_2 p)}{p(a_4 p^4 + a_3 p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + 1)}. \quad (8.31)$$

Раскрывая скобки в знаменателе выражения (8.30) и группируя члены по степеням p , можно определить величины коэффициентов a_1 и a_4 :

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \frac{T_2 T_3 T_{\text{дв1}} T_{\text{дв2}}}{1 + k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} + k'_{\text{охв}} k_{\text{жосс}}}; \\
 a_3 &= \frac{T_2 T_3 T_{\text{дв1}} + T_2 T_3 T_{\text{дв2}} + T_2 T_{\text{дв2}} T_{\text{дв1}} + T_3 T_{\text{дв1}} T_{\text{дв2}}}{1 + k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} + k'_{\text{охв}} k_{\text{жосс}}}; \\
 a_2 &= \frac{T_2 (T_3 + T_{\text{дв1}} + T_{\text{дв2}}) + T_3 (T_{\text{дв1}} + T_{\text{дв2}}) + T_{\text{дв1}} T_{\text{дв2}} + k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} T_1 T_{\text{дв2}}}{1 + k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} + k'_{\text{охв}} k_{\text{жосс}}}; \\
 a_1 &= \frac{T_2 + T_3 + T_{\text{дв1}} + T_{\text{дв2}} + k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} (T_1 + T_{\text{дв2}}) + k_{\text{жосс}} k'_{\text{охв}} T_2}{1 + k'_{\text{охв}} k_{\text{о.с}} + k'_{\text{охв}} k_{\text{жосс}}},
 \end{aligned}$$

где

$$k'_{\text{охв}} = k_{y2} k_{\kappa 3} k_{y3} k_{\varepsilon} = 4,0 \cdot 0,25 \cdot 2,7 \cdot 3,67 = 10;$$

$$k_{\text{охв}} = k_{y1} k_{y2} k_{\kappa 3} k_{y3} k_{\varepsilon} k_{\text{дв}} = 32,6 \cdot 4,0 \cdot 0,25 \cdot 2,7 \cdot 3,67 \cdot 2,3 = 744 \frac{\text{рад/сек}}{6}.$$

Определим численные значения коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 a_4 &= \frac{0,297 \cdot 0,006 \cdot 0,0333 \cdot 0,0156}{1 + 10 \cdot 0,282 + 744 \cdot 0,0156} = 0,605 \cdot 10^{-7} \text{ сек}^4, \\
 a_3 &= \frac{(0,297 \cdot 0,006 \cdot 0,0333 + 0,297 \cdot 0,006 \cdot 0,0156 + 0,297 \cdot 0,0333 \cdot 0,0156 + \\
 &\quad + 0,006 \cdot 0,0333 \cdot 0,0156)}{1 + 10 \cdot 0,282 + 744 \cdot 0,0156} = 0,16 \cdot 10^{-4} \text{ сек}^3; \\
 a_2 &= \frac{0,297(0,006 + 0,0333 + 0,0156) + 0,006(0,0333 + 0,0156) + 0,0333 \cdot 0,0156 + \\
 &\quad + 10 \cdot 0,282 \cdot 0,5 \cdot 0,0156}{1 + 10 \cdot 0,282 + 744 \cdot 0,0156} = 0,256 \cdot 10^{-2} \text{ сек}^2; \\
 a_1 &= \frac{0,297 + 0,006 + 0,0333 + 0,0156 + 10 \cdot 0,282(0,5 + 0,0156) + 0,0156 \cdot 744 \cdot 0,297}{1 + 10 \cdot 0,282 + 744 \cdot 0,0156} = \\
 &= 0,321 \text{ сек}; \\
 K &= \frac{206 \cdot 32,6 \cdot 10^{-2} \cdot 3 \cdot 0,00428}{1 + 10 \cdot 0,282 + 744 \cdot 0,0156} = 43 \frac{1}{\text{сек}}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, передаточная функция скорректированной следящей системы

$$K(p) = \frac{43(1 + 0,297p)}{p(0,605 \cdot 10^{-7}p^4 + 0,16 \cdot 10^{-4}p^3 + 0,256 \cdot 10^{-2}p^2 + 0,321p + 1)} \quad (8.32)$$

По передаточной функции (8.32) построим логарифмическую амплитудно-частотную и фазовую частотную характеристики.

Сопрягающие частоты:

$$\begin{aligned}
 \omega_1 &= \frac{1}{a_1} = \frac{1}{0,321} = 3,12 \text{ сек}^{-1}; \quad \lg \omega_1 = 0,494; \\
 \omega_2 &= \frac{a_1}{a_2} = \frac{0,321}{0,256 \cdot 10^{-2}} = 125 \text{ сек}^{-1}; \quad \lg \omega_2 = 2,1; \\
 \omega_3 &= \frac{a_2}{a_3} = \frac{0,256 \cdot 10^{-2}}{0,16 \cdot 10^{-4}} = 160 \text{ сек}^{-1}; \quad \lg \omega_3 = 2,2; \\
 \omega_4 &= \frac{a_3}{a_4} = \frac{0,16 \cdot 10^{-4}}{0,605 \cdot 10^{-7}} = 265 \text{ сек}^{-1}; \quad \lg \omega_4 = 2,42; \\
 \omega_1' &= \frac{1}{0,297} = 3,37 \text{ сек}^{-1}; \quad \lg \omega_1' = 0,528.
 \end{aligned}$$

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика изображена на рис. 8.32, а. На рис. 8.32, б построена фазовая частотная характеристика методом сложения фазовых характеристик отдельных звеньев.

Из частотных характеристик видно, что система обладает запасом устойчивости по фазе $\Delta\varphi = 56^\circ$ и запасом по модулю $\Delta L = 9,5 \text{ дБ}$.

Построение кривой переходного процесса в следящей системе воспользуемся

Таблица 8.7

$\omega, \text{сек}^{-1}$	$L, \text{дБ}$	$\varphi, \text{град}$	$P(\omega)$	$\omega, \text{сек}^{-1}$	$L, \text{дБ}$	$\varphi, \text{град}$	$P(\omega)$
2	25,0	-93	1,0	40	-1,5	-135	0,25
3	21,5	-94	1,0	50	-3,5	-146	-0,3
4	18,5	-96	1,0	60	-5,0	-156	-0,7
5	16,5	-96,5	1,0	80	-7,5	-173	-0,7
8	12,5	-90	0,98	100	-9,5	-190	-0,5
10	10,5	-101	0,97	120	-11,0	-205	-0,3
20	4,5	-113	0,85	160	-15,5	-228	-0,1
30	1,0	-124	0,62	200	-23,0	-245	-0,025

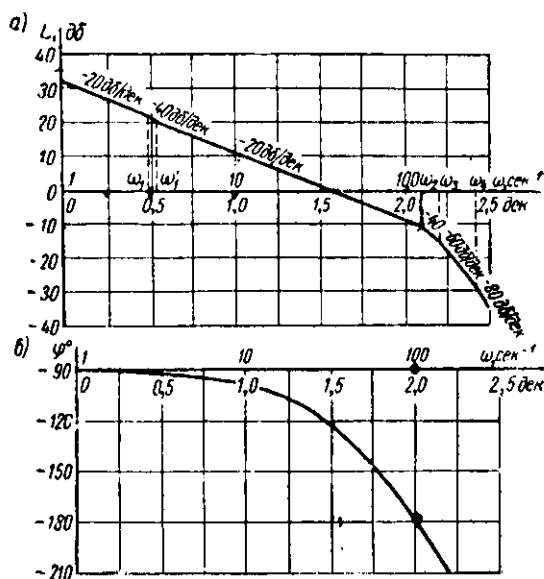


Рис. 8.32. Частотные характеристики скорректированной следящей системы

приближенным методом типовых трансцендентальных вещественных частотных характеристик.

Предварительно необходимо построить вещественную частотную характеристику замкнутой системы $P(\omega)$. Для этого используем номограмму (рис. 8.33). Задавая рядом значений ω , перенесем значения амплитуды и фазы, определяемые из частотных характеристик системы (рис. 8.32), на номограмму (рис. 8.33). Соединив эти точки плавной кривой, получим амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы. Точки пересечения этой кривой с сеткой кривых номограммы дадут значения вещественной частотной характеристики замкнутой системы $P(\omega)$.

Все вычисления сведены в табл. 8.7. Характеристика $P(\omega)$ построена на рис. 8.34.

Вещественную частотную характеристику разбиваем на четыре трапеции. Каждая трапецидальная вещественная частотная характеристика определяется следующими параметрами:

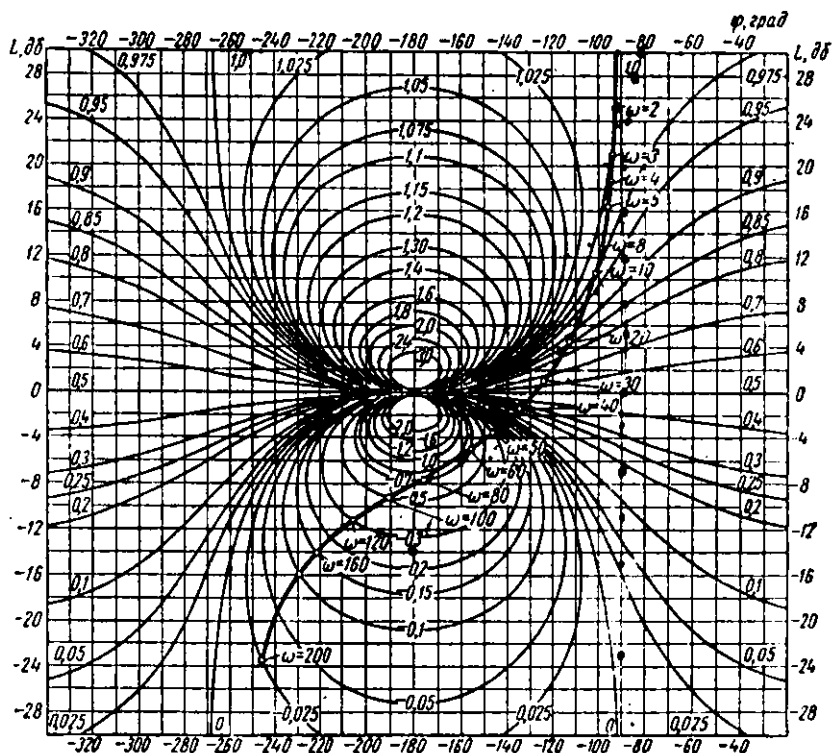


Рис. 8.33. Номограмма для построения вещественной частотной характеристики по л. а. х. разомкнутой системы

а) коэффициентом основного наклона

Таблица 8.8

$$\kappa = \frac{\omega_d}{\omega_0}$$

где ω_d — интервал равномерного пропускания частот;

ω_0 — интервал пропускания частот;

б) высотой трапеции $P(0)$.

Номер трапеции	ω_d , сек ⁻¹	ω_0 , сек ⁻¹	$\kappa = \frac{\omega_d}{\omega_0}$	$P(0)$
1	9	29	0,31	0,3
2	29	61	0,475	1,46
3	74	129	0,574	-0,56
4	129	200	0,645	-0,2

Переходный процесс при единичном возмущении для трапецидальной характеристики при $P(0)=1$ выражается уравнением

$$h_{\kappa} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1-\kappa} \left[Si(\omega_0 t) - \kappa Si(\kappa \omega_0 t) + \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\kappa t)}{t} \right].$$

Значения h_χ для различных значений χ и τ приведены в таблицах справочников [8].

Все параметры трапеций, на которые разбита вещественная частотная характеристика данной системы, приведены в табл. 8.8.

Таблица 8.9

τ	h	$t = \frac{\tau}{\omega_{01}}$, сек	$x_1 = hP_1(0)$
0	0	0	0
0,4	0,166	0,014	0,05
1,0	0,405	0,034	0,121
2,0	0,740	0,069	0,22
3,0	0,964	0,104	0,289
4,0	1,071	0,138	0,322
5,0	1,090	0,172	0,328
6,0	1,066	2,207	0,320
7,0	1,037	0,242	0,311
8,0	1,019	0,276	0,306

Трапеция 1. $\chi = 0,31$;
 $P_1(0) = 0,3$;
 $\omega_{01} = 29 \text{ сек}^{-1}$.

Таблица 8.10

τ	h	$t = \frac{\tau}{\omega_{02}}$, сек	$x_2 = hP_2(0)$
0	0	0	0
0,4	0,186	0,006	0,272
1	0,452	0,016	0,660
2	0,819	0,033	1,19
3	1,047	0,049	1,52
4	1,133	0,066	1,65
5	1,117	0,082	1,63
6	1,058	0,098	1,54
7	1,003	0,115	1,50
8	0,975	0,131	1,42
10	0,983	0,164	1,43
12	0,992	0,197	1,45
14	0,994	0,230	1,45
16	1,009	0,262	1,47

Трапеция 2. $\chi = 0,47$;
 $P_2(0) = 1,46$;
 $\omega_{02} = 61 \text{ сек}^{-1}$.

Таблица 8.11

τ	h	$t = \frac{\tau}{\omega_{03}}$, сек	$x_3 = hP_3(0)$
0	0	0	0
0,4	0,199	0,003	-0,111
1	0,482	0,008	-0,027
2	0,864	0,015	-0,48
3	1,089	0,023	-0,60
4	1,154	0,031	-0,64
5	1,112	0,039	-0,61
6	1,03	0,046	-0,57
7	0,967	0,054	-0,54
8	0,947	0,062	-0,53
10	0,987	0,077	-0,55
12	1,012	0,093	-0,56
14	1,005	0,108	-0,55
16	1,006	0,124	-0,55

Трапеция 3. $\chi = 0,57$;
 $P_3(0) = -0,56$;
 $\omega_{03} = 129 \text{ сек}^{-1}$.

Таблица 8.12

τ	h	$t = \frac{\tau}{\omega_{04}}$, сек	$x_4 = hP_4(0)$
0	0	0	0
0,4	0,208	0,002	-0,042
1	0,505	0,005	-0,101
2	0,898	0,010	-0,180
3	1,116	0,015	-0,223
4	1,162	0,020	-0,232
5	1,097	0,025	-0,219
6	1,001	0,030	-0,200
7	0,941	0,035	-0,188
8	0,934	0,040	-0,187
10	1,005	0,050	-0,201
12	1,026	0,060	-0,205
14	0,998	0,070	-0,200

Трапеция 4. $\chi = 0,65$;
 $P_4(0) = -0,2$;
 $\omega_{04} = 200 \text{ сек}^{-1}$.

При помощи таблиц h_x -функций определим переходный процесс для каждой трапеции при единичном возмущении (табл. 8.9—8.12).
Переходный процесс следящей системы будет определяться суммой

$$\Theta_{\text{вых}}(t) = x(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) + x_4(t),$$

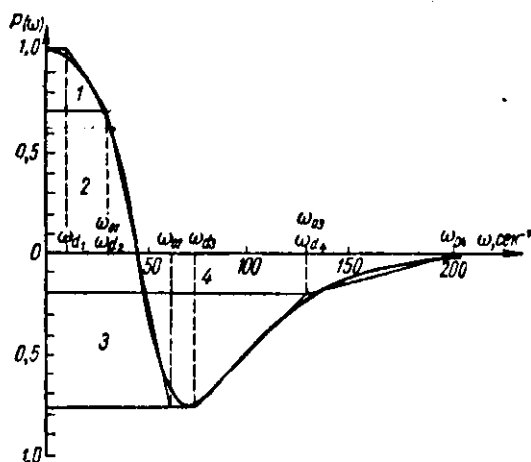


Рис. 8.34. Вещественная частотная характеристика следящей системы

Кривая переходного процесса следящей системы приведена на рис. 8.35. Там же даны отдельные составляющие указанной кривой.

Таблица 8.13

D_V , сек ⁻¹	ΔL , дб	$\Delta\phi$, град	σ , %	t_n , сек	μ
43	9,5	56	14	0,12	2

Качественные показатели следящей системы. В результате проведенного расчета можно определить качественные показатели, которые имеет рассчитанная следящая система профилишлифовального станка.

Из логарифмической амплитудной и фазовой характеристик (рис. 8.32) следует, что система обладает запасом устойчивости по амплитуде $\Delta L = 9,5$ дб и по фазе $\Delta\phi = 56^\circ$.

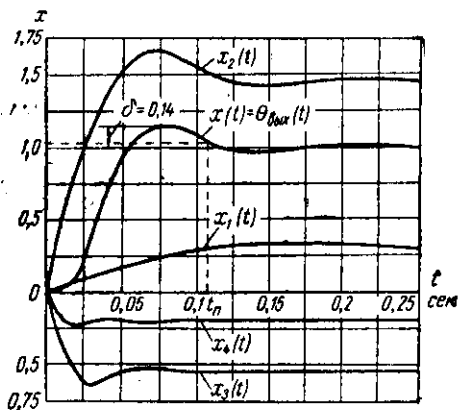


Рис. 8.35. Кривая переходного процесса в следящей системе и составляющие этой кривой

График переходного процесса при единичном возмущении, приведенный на рис. 8.35, показывает, что максимальное перерегулирование в системе $\sigma = 14\%$, время переходного процесса $t_n = 0,12$ сек и число колебаний не превышает $\mu = 2$.

Все полученные качественные показатели системы сведены в табл. 8.13. Следящая система отвечает техническим условиям, сформулированным в начале расчета.



Глава IX. РАСЧЕТ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 9.1. Вводные замечания

Анализ и синтез нелинейных систем автоматического управления значительно сложнее, чем линейных систем, что объясняется необходимостью решения нелинейных дифференциальных уравнений. В большинстве случаев подобное решение не может быть дано в общем виде, в связи с чем приходится прибегать к частным решениям, выполняемым с той или иной степенью приближения. Поэтому большую роль приобретают различные упрощенные и приближенные методы, при помощи которых можно получить ответы на отдельные вопросы (устойчивость в определенных условиях; наличие автоколебаний; поведение системы в каком-либо частном режиме, например при установившейся скорости, при воздействии и возмущении определенного вида и т. п.).

Следует подчеркнуть, что принцип суперпозиции, широко применяемый в линейной теории, при анализе и синтезе нелинейных систем не применим. Таким образом, в последнем случае выходной сигнал в статике не пропорционален входному, форма выходной величины при ступенчатом воздействии оказывается зависимой от величины этого воздействия, а реакция на произвольное входное воздействие не может быть найдена как сумма реакций на отдельные составляющие входного воздействия.

Невозможность применения принципа суперпозиции связана с невозможностью использования экстраполяции. Определенные сведения о переходном процессе в нелинейной системе при ступенчатом воздействии на входе не позволяют сделать заключения о характере реакции системы на подобное воздействие большей или меньшей величины. Таким же образом оказывается невозможным использовать известную реакцию системы на сигнал одного вида для суждения о реакции на сигнал другого типа (нарушается формальное соотношение между временной и частотной областями, которое существует для линейных систем).

В настоящее время разработано весьма большое число методов исследования нелинейных систем. Некоторые из этих мето-

дов годятся только для анализа отдельных элементов, другие применимы для систем в целом. Полного решения поставленной задачи редко удается достичь при помощи какого-либо одного метода. Чаще приходится использовать несколько методов, каждый из которых обеспечивает некоторую часть необходимой информации при анализе и расчете.

Приведем краткую характеристику основных групп методов и остановимся в дальнейшем на применении в расчетах лишь некоторых из них, как получивших наибольшее использование для решения практических задач.

А. Методы интегрируемой аппроксимации: 1) линейная, 2) кусочно-линейная, 3) нелинейная интегрируемая.

Принцип первого вида аппроксимации основывается на допущении, что основные параметры системы имеют постоянное значение, соответствующее выбранной точке, что позволяет применить методику линейного анализа. Последний имеет силу лишь для ограниченной зоны вблизи рабочей точки (малые сигналы или малые отклонения, или же малая степень нелинейности).

Второй вид аппроксимации предназначен для случая сравнительно больших сигналов и заключается в составлении линейных дифференциальных уравнений для каждого прямолинейного участка, на которые разбита нелинейная характеристика. Общее решение сводится в этом случае к решению ряда неоднородных линейных уравнений. Требуемый объем вычислений обычно велик, особенно если система высокого порядка или нелинейность такова, что для точной аппроксимации требуется разбивка характеристики на большое число линейных отрезков.

В случае применения третьего вида аппроксимации решение уравнения находят путем замены характеристики нелинейного элемента некоторой близкой к ней кривой, которая может быть написана аналитически. Таким образом, производится замена «точного» уравнения приближенным, которое может быть точно проинтегрировано, что практически является не менее точным, чем приближенное решение «точного» уравнения.

В ряде случаев значительной точности аппроксимации не требуется, причем часто соображения физического характера указывают на требуемую точность аппроксимации.

Из видов аппроксимации нелинейных характеристик можно отметить:

1) аппроксимацию целой рациональной функцией:

$$H = \alpha B + \beta B^n (\alpha > 0; \beta > 0);$$

2) аппроксимацию дробной рациональной функцией:

$$B - H = \frac{\alpha H}{1 - \beta H} \text{ (при } H > 0);$$

3) аппроксимацию при помощи степенной функции:

$$B = \alpha \cdot H^{\beta};$$

4) аппроксимацию при помощи логарифмической функции:

$$B = \alpha \ln\left(1 + \frac{H}{\beta}\right) \quad (\text{при } H > 0).$$

Выбор того или иного вида аппроксимации зависит от вида нелинейной характеристики и от желательной степени упрощения решения задачи.

Б. Численно-графические методы. Исследование и расчет нелинейных систем могут производиться путем численных и графических методов интегрирования нелинейных дифференциальных уравнений.

Целесообразно проводить расчет нелинейной системы комбинированным путем, т. е. предварительно использовать какой-либо приближенный метод, а затем для уточнения и проверки правильности выбранных параметров провести расчет численным или графическим путем или же при помощи моделирования.

В настоящее время известен целый ряд численных и графических способов, из которых следует отметить: способ численного интегрирования по разностному методу Адамса [Л. 17], способ приближенного интегрирования акад. Чаплыгина, метод Эйлера (один из наиболее простых методов), численное интегрирование методом разложения в ряд Тейлора, численное интегрирование методом разложения во временный ряд (использование импульсной функции), метод Боксера и Тэйлора с использованием z -преобразования и др. [Л. 29].

За последнее время появились достаточно простые графические методы, из которых следует отметить метод секущих, метод касательных [Л. 19] и метод с использованием решения уравнения в конечных разностях [Л. 9]. В ряде случаев вместо применения трудоемких численно-графических методов может быть применено моделирование, позволяющее получить большое число вариантов решения нелинейных задач.

В. Методы фазовых траекторий. Эти методы основаны на введении некоторых наглядных понятий и представлений геометрического характера. Основным из них является понятие фазового пространства, которое дает полное представление о характере возможных движений в системе.

Пусть система описывается дифференциальным уравнением n -го порядка. Ее состояние может быть охарактеризовано n числами, которые можно рассматривать как задание некоторой точки в n -мерном пространстве, причем каждой точке этого пространства будет соответствовать одно определенное состояние (определенная фаза) системы. Поэтому такое пространство называется *фазовым пространством*.

В основном область применения этого метода ограничена системами не выше третьего порядка, однако он может оказаться полезным и для проверки различных приближенных методов, применяемых к системам более высокого порядка.

Для систем, описываемых дифференциальным уравнением второго порядка, фазовое пространство (в этом частном случае) превращается в фазовую плоскость.

Практически наибольшее распространение для исследования нелинейных систем получил метод фазовой плоскости. Результаты исследования этим методом дают полную картину поведения систем в том смысле, что могут быть получены все решения данного дифференциального уравнения для широкой совокупности начальных условий и возмущающих функций в виде скачка или линейно возрастающего сигнала. Метод фазовой плоскости применим для любого типа нелинейности, а также для сочетания нелинейностей. Путем графического интегрирования на его основе можно получить кривую переходного процесса.

Недостатком метода является его ограничение системами второго порядка и возмущающими функциями вида ступенчатого воздействия или линейно нарастающего сигнала.

В некоторых случаях можно аппроксимировать системы высших порядков системой второго порядка с запаздыванием, что расширяет область применения метода фазовой плоскости. Однако подобный прием не гарантирует, в отдельных случаях, от существенных неточностей. Этот метод дает возможность установить физическую картину влияния на систему того или иного типа нелинейности в большей степени, чем какой-либо другой.

Г. Методы малого параметра. Основные исследования по методу малого параметра были проведены французским математиком Пуанкаре и русским ученым Ляпуновым. В дальнейшем были разработаны различные варианты метода малого параметра, успешно применяемые в радиотехнике и теории автоматического управления, составившие целую группу методов малого параметра.

Последняя может быть разделена на две подгруппы методов: аналитические и графоаналитические.

Наиболее ранними являются методы Ляпунова, Рэлея и Ван дер Поля. Метод последнего был строго обоснован Мандельштамом, Папалекси и Андроновым, которые также развили метод Пуанкаре.

Булгаков развил свой оригинальный метод малого параметра применительно к системам высокого порядка. Крылов и Боголюбов разработали на этой же научной базе принцип так называемого *гармонического баланса*, а Теодорчик — *принцип энергетического баланса*. Графоаналитические варианты, базирующиеся на указанных принципах, разрабатывались Гольдфарбом, Теодорчиком, Поповым и др.

Наибольшее распространение в инженерной практике получили графоаналитические методы Гольдфарба и Попова, базирующиеся на принципе гармонического баланса.

Ниже приводятся примеры расчета по этим методам. Общая идея метода малого параметра основана на том, что ряд членов, входящих в левую часть дифференциальных уравнений нелинейных систем, можно считать малыми по сравнению с остальными членами, в основном определяющими характер движения системы. Поэтому рассматриваются упрощенные уравнения без малых членов как уравнения, близкие к линейным (в определенных условиях). Следовательно, можно говорить о так называемых *квазилинейных системах*.

В связи с этим методы малого параметра, направленные к исследованию периодических режимов нелинейных систем, являются приближенными, так как они позволяют определить лишь приближенные значения амплитуды и частоты основной гармоники периодических колебаний, предполагаемых близкими к гармоническим.

Графоаналитический метод гармонического баланса (метод гармонической линеаризации) представляет собой результат распространения частотной линейной методики на исследование нелинейных систем. Как известно, при гармонических сигналах на входе нелинейного звена на выходе последнего будут иметь место периодические несинусоидальные величины, которые можно разложить на основную и высшие гармоники. Если последними пренебречь, а рассматривать только основную гармонику, то можно вычислить комплексный коэффициент усиления нелинейного звена по первой гармонике, который является своеобразным аналогом передаточной функции. Таким образом, этот метод позволяет использовать обычный линейный частотный аппарат с некоторыми видоизменениями.

Д. Методы моделирования. Исключительно важное значение для анализа и синтеза нелинейных систем автоматического управления за последнее время приобрели методы моделирования в связи с широким распространением аналоговых (непрерывных) и дискретных электронных вычислительных машин как специализированных, так и общего назначения.

Поскольку сложная нелинейная задача не может быть решена в общем виде, то для нахождения оптимального, или просто приемлемого варианта, нужно решить значительное число частных задач. Подобная работа проще всего может быть выполнена на моделирующей установке. С ее помощью можно промоделировать весьма сложные системы со многими нелинейностями и обследовать широкую область начальных условий и внешних возмущений, причем коррекцию целесообразно выполнять при помощи последовательных приближений.

Однако и в этом случае аналитические и графические методы анализа могут оказаться весьма полезными, так как они позволяют предварительно нащупать оптимальную структуру системы и зону варьирования параметрами.

В некоторых случаях существенные черты влияния отдельных нелинейностей проще раскрываются при помощи фазовой характеристики (фазового портрета системы), а не переходной. Поэтому предварительное изучение задачи тем или иным методом может дать значительную экономию машинного времени, уменьшить объем полученного материала и сократить время для его анализа.

§ 9.2. Примеры расчетов по методам линейной аппроксимации

В общем случае некоторая физическая переменная y зависит от n независимых физических переменных, т. е.

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Очевидно, что подобная зависимость не анализируется обычными линейными методами. Линеаризация может быть допустимой лишь при небольших отклонениях, в зоне некоторой рабочей точки.

Тогда за переменные можно принять приращения физических переменных относительно некоторой точки y_0 :

$$\begin{aligned}\Delta y &= y - y_0, \\ \Delta x_1 &= x_1 - x_{10}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Delta x_n &= x_n - x_{n0},\end{aligned}$$

где $y_0, x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$ — значения переменных в рабочей точке.

Если ввести приращения, то можно написать

$$\Delta y = \Delta f(\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n).$$

Линейная модель этого нелинейного уравнения имеет вид

$$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + \dots + k_n \Delta x_n.$$

Таким образом, построение модели сводится к соответствующему выбору коэффициентов $k_1, k_2, \dots, k_n$ (наклону прямых в зоне точки y_0).

В простейшем случае при плоской задаче

$$\Delta y = k \Delta x \text{ (см. рис. 9.1).}$$

Определение коэффициента k может быть осуществлено при помощи различных приемов. Рассмотрим два наиболее распространенных: метод касательных (разложение в ряде Тейлора) и

метод минимальной квадратичной ошибки (метод наименьших квадратов).

Для систем с малой степенью нелинейности и небольшой рабочей областью оба метода дают приблизительно одинаковые результаты.

Первый метод основан на учете только первого члена ряда Тэйлора и проще всего применим, если нелинейность задана в аналитической форме. Второй метод применим для рабочей области, большей, чем в первом случае.

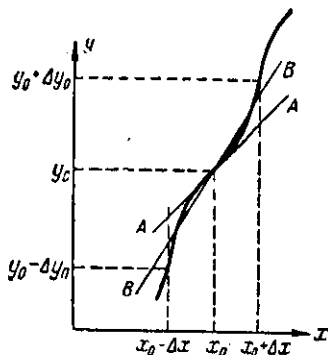


Рис. 9.1. Линейная аппроксимация методом касательных и методом наименьших квадратов

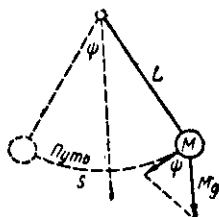


Рис. 9.2. К линейной аппроксимации уравнения движения маятника

На рис. 9.1 линия A представляет собой аппроксимацию методом касательных, дающую хорошее совпадение вблизи рабочей точки и существенное расхождение у границ рабочей зоны. Линия B является аппроксимацией методом наименьших квадратов. Она мало отклоняется от нелинейной зависимости во всей рабочей зоне, хотя ее наклон не соответствует наклону кривой в рабочей точке y_0 .

Пример 9.1. Выполнение линейной аппроксимации по методу касательных уравнения маятника, колеблющегося с малой амплитудой (рис. 9.2).

Считаем подвес L абсолютно жестким, но не обладающим массой. Вся масса сосредоточена в грузе M .

В данном случае нелинейная характеристика задается в аналитической форме.

Для математического маятника (без трения) можно написать:

$$-Ma = -Ms'' = Mg \sin \psi.$$

Если учесть, что $ds = L \cdot d\psi$, то это уравнение можно переписать, т. е.

$$\ddot{\psi} = \frac{-g \cdot \sin \psi}{L}.$$

Полученное уравнение является нелинейным, так как имеет множитель $\sin \psi$.

Разложение $\sin \psi$ в ряд около $\psi=0$ дает

$$\ddot{\psi} = \frac{-g \left(\psi - \frac{1}{6} \psi^3 + \frac{1}{120} \psi^5 - \dots \right)}{L}.$$

Для малых значений можно учесть только первый член ряда

$$\ddot{\psi} = -\frac{g\psi}{L}.$$

В результате решения этого уравнения получим

$$\psi = A_1 \sin \left(\frac{g}{L} \cdot t + A_2 \right),$$

где A_1 и A_2 — коэффициенты, определяемые начальными условиями.

Следует отметить, что полученная приближенная зависимость дает хорошую точность в пределах около 30° (ошибка не превышает 1%).

Пример 9.2. Проведение линейной аппроксимации по методу наименьших квадратов кривых, изображенных на рис. 9.3.

Рабочая точка характеризуется значениями: $y=4$; $x_1=4$; $x_2=0$.

Основные положения метода: общий случай, когда имеется одна зависимая переменная y и n независимых переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$. Пусть соотношение между y и последними задано как совокупность точек в окрестности рабочей точки y_0 , которой соответствуют значения $x_{10}, x_{20}, \dots, x_{n0}$. Следовательно, совокупности $\Delta x_{11}, \Delta x_{21}, \dots, \Delta x_{n1}$ соответствует определенное Δy (таких совокупностей имеется m).

Положим, что количество численно заданных точек превышает число независимых переменных, т. е. $m > n$. Необходимо определить соотношение между приращениями переменных в виде

$$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2 + \dots + k_n \Delta x_n$$

так, чтобы сумма квадратов разностей между двумя значениями Δy одного определенного из последнего выражения и другого, полученного из заданной числовой совокупности, бы-

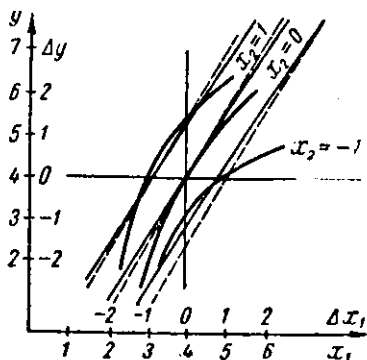


Рис. 9.3. Линейная аппроксимация методом наименьших квадратов

ла минимальной, т. е. необходимо найти такие значения $k_1, k_2, \dots, k_n$, при которых выражение

$$E^2 = \sum_{i=1}^m (k_1 \Delta x_{1i} + k_2 \Delta x_{2i} + \dots + k_n \Delta x_{ni} - \Delta y_i)^2$$

было бы, по возможности, минимальным.

Предыдущее выражение для Δy показывает, что рабочая точка лежит на аппроксимирующей линии (в общем случае плоскости), поскольку оно не содержит свободного члена.

Для того чтобы минимизировать E^2 , приравняем нулю каждую из первых частных производных:

$$\frac{\partial E^2}{\partial k_1}; \quad \frac{\partial E^2}{\partial k_2}; \quad \dots; \quad \frac{\partial E^2}{\partial k_n}.$$

В результате получается система из n линейных уравнений относительно n неизвестных $k_1, k_2, \dots, k_n$, решение которой может быть произведено обычными методами.

Чаще всего приходится иметь дело с одним или двумя независимыми переменными.

В случае одного независимого переменного

$$\Delta y = k \Delta x,$$

где

$$k = \frac{\sum_{i=1}^m \Delta x_i \Delta y_i}{\sum_{i=1}^m \Delta^2 x_i}.$$

Для случая двух независимых переменных

$$\Delta y = k_1 \Delta x_1 + k_2 \Delta x_2,$$

где $k_1 = \frac{eb - dc}{ab + c^2}$ и $k_2 = \frac{ad - ce}{ab - c^2}$, причем

$$a = \sum_{i=1}^m \Delta^2 x_{1i};$$

$$b = \sum_{i=1}^m \Delta^2 x_{2i};$$

$$c = \sum_{i=1}^m \Delta x_{1i} \Delta x_{2i};$$

$$d = \sum_{i=1}^m \Delta y_i \Delta x_{2i};$$

$$e = \sum_{i=1}^m \Delta y_i \Delta x_{1i}.^*$$

Численные значения выбранных точек независимых переменных могут быть взяты симметричными. Тогда члены, содержащие перекрестные произведения, окажутся равными нулю, что значительно облегчает вычисление коэффициентов.

Для случая двух независимых переменных это соответствует равенству нулю величины

$$c = \sum_{i=1}^m \Delta x_{1i} \Delta x_{2i} = 0.$$

На рис. 9.3 представлены, как уже отмечалось, три кривые $y=f(x_1)$ при различных значениях $x_2=1; 0; -1$; рабочая точка задана по кривой $x_2=0$ ($y=4$ и $x_1=4$).

В данном случае имеем две независимые переменные. Выбираем численные значения точек симметричными для получения $c=0$ и заносим эти значения в табл. 9.1.

Вычисляем соответственные величины для определения k_1 и k_2 :

$$a = \sum_{i=1}^9 \Delta^2 x_{1i} = (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + \\ + (1)^2 + (-1)^2 + (0)^2 + (1)^2 = 6;$$

$$b = \sum_{i=1}^9 \Delta^2 x_{2i} = 6; \quad c = 0; \quad d = \sum_{i=1}^9 \Delta y_i \Delta x_{2i} = 8;$$

$$e = \sum_{i=1}^9 \Delta y_i \Delta x_{1i} = 9;$$

$$k_1 = \frac{9 \cdot 6}{6 \cdot 6} = 1,5; \quad k_2 = 1,33.$$

Отсюда

$$\Delta y = 1,5 \Delta x_1 + 1,33 \Delta x_2.$$

Соответствующие прямые (сплошные линии) проведены на рис. 9.3 и являются аппроксимацией по методу наименьших квадратов. Там же нанесены пунктирные линии, проведенные по методу касательных.

Как видно из рис. 9.3, метод наименьших квадратов дает в пределах заданной рабочей области лучшую аппроксимацию, чем метод касательных. Однако он более трудоемок.

* Если нелинейные зависимости заданы в аналитической интегрируемой форме, то суммирование можно заменить интегрированием.

Таблица 9.1

Точка	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Δx_1	-1	0	1	-1	0	1	-1	0	1
Δx_2	-1	-1	-1	0	0	0	1	1	1
Δy	-3	-1	0	-2	0	-1,5	0	1,5	2,5

Данные метода наименьших квадратов могут быть применены для аппроксимации в случае одной независимой переменной при помощи полинома. Для этого может быть использовано выражение

$$y = k_0 + k_1 x + k_2 x^2 + \dots + k_n x^n.$$

В него подставляются значения заданных точек на основании общего случая следующим образом:

$$\Delta y = y; \quad \Delta x_1 = 1; \quad \Delta x_2 = x; \quad \Delta x_3 = x^2 \dots; \Delta x_n = x^{n-1}.$$

§ 9.3. Примеры расчетов численно-графическими методами

1. *Метод разложения в ряд Тейлора.* Данный метод решения нелинейных дифференциальных уравнений основан на экстраполяции функции между двумя точками с помощью ряда Тейлора.

Решаемое дифференциальное уравнение может быть представлено в виде

$$y^{(n)} = f(t, y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})$$

при заданных начальных условиях.

Применим разложение в ряд Тейлора, взяв в качестве независимой переменной время t :

$$y = Y(t_0) + \dot{Y}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{Y}(t_0)}{2!} \cdot (t - t_0)^2 + \frac{\ddot{\ddot{Y}}(t_0)}{3!} (t - t_0)^3 + \dots$$

Численные результаты выражаются через фиксированные отрезки времени h :

$$t_n = t_0 + nh,$$

$$h = t_n - t_{n-1}.$$

При подсчетах последовательно перемещается начальная точка:

$$y_{n+1} = y_n + \dot{y}_n h + \ddot{y}_n \frac{h^2}{2!} + \dots + \frac{h^3}{3!}.$$

Производные $\dot{y}_n$, $\ddot{y}_n$, $\dddot{y}_n$ могут быть найдены, если продифференцировать исходные уравнения и подставить значения y_n и t_n . Ряд сходится достаточно быстро, если выбранное h достаточно мало.

Производные от y_{n+1} могут быть также определены при помощи ряда Тэйлора.

Ряд для первой производной получается дифференцированием y_{n+1} по h :

$$\dot{y}_{n+1} = \dot{y}_n + \ddot{y}_n h + \dddot{y}_n \frac{h^2}{2!} + \dots$$

Аналогично находятся и старшие производные.

Следует отметить, что данный метод является весьма трудоемким. Поэтому чаще всего ряд Тэйлора используется в начале расчета, а в дальнейшем решение проводится каким-либо другим методом, например методом Эйлера.

Пример 9.3. Решение по методу Тэйлора нелинейного дифференциального уравнения следующего вида:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y^2 - 1 = 0;$$

начальные условия: $y = 1$, $\dot{y} = -1$ при $t = 0$.

Определяем производные при указанных начальных условиях:

$$\ddot{y} = 1 - \dot{y} - y^2;$$

$$\dddot{y} = -\ddot{y} - 2y\dot{y};$$

$$\ddot{\ddot{y}} = -\dddot{y} - 2y\ddot{y} - 2(\dot{y})^2.$$

Следовательно, при $t=0$ получим

$$y_0 = 1; \quad \dot{y}_0 = -1; \quad \ddot{y}_0 = 1; \quad \dddot{y}_0 = 1; \quad \ddot{\ddot{y}}_0 = -5.$$

Для $n=0$ разложение получит вид

$$y_1 = 1 - h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} - \frac{5h^4}{4!} + \dots$$

Положив $h=0,1$, получаем

$$y_1 = 1 - 0,1 + 0,005 + 0,0017 + \dots = 0,9052.$$

Для того чтобы вычислить y_2 , необходимо определить $\ddot{y}_1$,

y_1 и т. д. Однако для их нахождения необходимо вычислить величину y_1 так же, как это было сделано для величины y_1 , т. е.

$$\dot{y}_1 = -1 + h + \frac{h^2}{2} - \frac{5h^3}{6},$$

что получится в результате дифференцирования по h ряда для y_1 .

Подставляя также $h=0,1$, имеем

$$\dot{y}_1 = -1 + 0,1 + 0,005 - 0,0008 = -0,8958.$$

Далее определим

$$\ddot{y}_1 = 1 + h - \frac{5}{2}h^2$$

или

$$\ddot{y}_1 = 1 + 0,1 - 0,0250 = 1,0750.$$

Для проверки правильности решения подставим эти величины в исходное уравнение:

$$\ddot{y} + \dot{y} + y^2 - 1 = 1,0750 + (-0,8958) + (0,9052)^2 - 1 = 0,007 = 0.$$

Указанная ошибка ($\approx 1\%$) характеризует степень точности, которая получается при выбранном временном шаге $h=0,1$ сек и данном количестве членов.

Таким же образом подсчитываются величины $\ddot{y}_1, \ddot{y}_2$:

$$\ddot{y}_1 = 0,6141; \ddot{y}_2 = 3,3645.$$

Следовательно, при $n=1$

$$y_2 = 0,9052 - 0,8958h + 1,0750 \frac{h^2}{2!} + 0,6141 \frac{h^3}{3!} - 3,3645 \frac{h^4}{4!}.$$

При том же значении $h=0,1$ сек находим $y_2=0,8104$.

Далее также последовательно определяются $y_3, y_4, \dots, y_n$.

Пример 9.4. Решение при помощи ряда Тэйлора уравнения

$$\dot{x} = -x + t \text{ при } t=0 \text{ величина } x=0^*.$$

Таким же образом эти методы применяются и к нелинейным дифференциальным уравнениям первого порядка.

Выбираем интервал t , равным $h=0,1$ сек. Производные $\dot{x}, \ddot{x}, \dots, x$ имеют вид:

$$\dot{x} = -x + t,$$

* В дальнейшем для наглядности проводим решение этого простого уравнения также методами Эйлера и Адамса. Точное решение может быть легко получено аналитически.

$$\ddot{x} = -\dot{x} + 1,$$

$$\ddot{\ddot{x}} = -\ddot{x}.$$

В начальной точке $n=0$ значения производных будут:

$$\dot{x}_0=0; \ddot{x}_0=1 \text{ и } \ddot{\ddot{x}}_0=-1.$$

Как и в предыдущей задаче, получаем первых три значения x :

$$x_1 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,1^2 + \frac{1}{6} (-1) \cdot 0,1^3 = 0,005;$$

$$x_2 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,2^2 + \frac{1}{6} (-1) \cdot 0,2^3 = 0,019;$$

$$x_3 = 0 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,3^2 + \frac{1}{6} (-1) \cdot 0,3^3 = 0,040.$$

Вычисления производились с точностью до третьего знака после запятой. Однако точность определения третьего десятичного знака в этом случае является недостаточной, так как при вычислениях число десятичных знаков должно быть по меньшей мере на один знак больше, чем выбранное число знаков (в данном случае следовало бы производить вычисления с четырьмя знаками после запятой).

Будем считать, что значение третьего десятичного знака в x_3 сомнительно. Поэтому вернемся к x_2 и будем вести процесс экстраполяции от x_2 к x_3 . При $n=2$ производные будут:

$$\dot{x}_2 = 0,181; \ddot{x}_2 = 0,819; \ddot{\ddot{x}}_2 = -0,819.$$

Тогда вновь определенное значение

$$\begin{aligned} x_3 &= 0,019 + (0,181 \cdot 0,1) + \frac{1}{2} \cdot 0,819 \cdot 0,1^2 + \\ &+ \frac{1}{6} (-0,819) \cdot 0,1^3 = 0,041. \end{aligned}$$

2. *Модифицированный метод Эйлера.* Этот метод дает высокую точность, если временной шаг h в ряде Тэйлора достаточно мал. Тогда сумма двух первых членов может обеспечить хорошую точность:

$$x_{n+1} = x_n + m_n \cdot h \quad (9.1), \text{ где } m_n = \left(\frac{dx}{dt} \right)_n.$$

Это выражение является заведомо неточным. Первое опущенное слагаемое ряда Тэйлора имеет порядок h^2 .

Можно повысить точность результатов. Значение x_{n-1} в выражении для ряда Тэйлора получается путем замены положи-

тельного временного приращения h на отрицательное $-h$. Вычтя результат из выражения

$$x_{n+1} = x_n + m_n h + \frac{1}{2!} m'_n h^2 + \frac{1}{3!} m''_n h^3 + \dots$$

$$\left[\text{Здесь } m_n = \left(\frac{dx}{dt} \right)_n; \quad m'_n = \left(\frac{d^2x}{dt^2} \right)_n \dots \right],$$

получим

$$x_{n+1} = x_{n-1} + 2m_n h. \quad (9.2)$$

Это выражение точнее, чем первое (9.1), так как первое опущенное слагаемое имеет порядок h^3 (если h мало, то h^3 значительно меньше, чем h^2). Можно еще повысить точность, а также обеспечить проверку вычисления, используя выражение (9.1) с подстановкой вместо m_n среднего значения m между точками x_n и x_{n+1} . В этом случае

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{2} (m_n + m_{n+1}) h. \quad (9.3)$$

Здесь два значения m вычисляются соответственно при t_n и t_{n+1} .

Выражения (9.2) и (9.3) могут быть использованы совместно для решения заданного уравнения. Тогда первое значение x_{n+1} вычисляется по уравнению (9.2). Значение m_{n+1} определяется затем из дифференциального уравнения.

Далее вычисляют второе значение x_{n+1} по уравнению (9.3) (это значение оказывается более точным, чем первое). Оно может быть снова использовано для подстановки в дифференциальное уравнение с целью определения нового значения m_{n+1} , которое, в свою очередь, может быть использовано в уравнении (9.3) для нахождения еще более точного значения x_{n+1} .

Для определения x_{n+1} из уравнения (9.2) необходимо вычислить x_{n-1} и m_n , что может быть сделано из ряда Тэйлора путем определения x_1 и m_1 по x_0 и t_0 и нескольким производным, вычисленным при $t=t_0$.

После этого начального шага вычисления продолжают только при помощи выражений (9.2) и (9.3).

Пример 9.5. Решение по методу Эйлера уравнения $\dot{x} = -x + t$ с начальными условиями: $x=0$ при $t=0$.

В качестве временного приращения выбираем также $h = 0,1$ сек. Используем значение $x_1 = 0,005$, найденное в предыдущей задаче по методу Тэйлора. Производим вычисления по следующим формулам:

$$m_n = -x_n + t_n;$$

$$x_{n+1}^{(1)} = x_{n-1} + 2m_n \cdot h;$$

$$x_{n+1}^{(2)} = x_n + (m_n)_{\text{ср}} \cdot h;$$

$$(m_n)_{\text{ср}} = \frac{1}{2} (m_n + m_{n+1});$$

$$c = x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}.$$

Подсчет по формуле (9.2) обозначаем через $x_{n+1}^{(1)}$, а по формуле (9.3) — $x_{n+1}^{(2)}$. Разница между ними является поправкой c , которая должна быть порядка одной-двух единиц в последнем удерживаемом десятичном разряде. Результаты подсчетов

Таблица 9.2

n	t_n	x_n	m_n	$2m_n h$	$x_{n+1}^{(1)}$	m_{n+1}	$(m_n)_{\text{ср}}$	$x_{n+1}^{(2)}$	c
0	0	0	0						
1	0,1	0,005	0,095	0,019	0,019	0,181	0,138	0,019	0,000
2	0,2	0,019	0,181	0,036	0,041	0,259	0,220	0,041	0,000
3	0,3	0,041	0,259	0,052	0,071	0,329	0,294	0,070	0,000
4	0,4	0,070	0,330	0,066	0,107	0,393	0,362	0,106	-0,001
5	0,5	0,106	0,394	0,079	0,149	0,451	0,422	0,148	-0,001
6	0,6	0,148	0,452						

заносим в табл. 9.2. (Строки таблицы вычисляются в последовательном порядке).

В данном случае результаты подсчета могут быть, вследствие простоты уравнения, сопоставлены с точным (аналитическим) решением

$$x = e^{-t} + t - 1.$$

Данные таблицы совпадают с численными значениями точного решения, за исключением значений $x_5^{(2)}$ и $x_6^{(2)}$ (они меньше на 0,001, что допустимо).

Как уже отмечалось, точность приближенного решения зависит от выбора временного приращения h . Если значение поправки c нарастает или с самого начала расчета является большим, то это значит, что принятая величина h велика и ее следует уменьшить.

3. *Метод Адамса.* Этот метод позволяет производить более точную экстраполяцию от одной точки к последующей при расчете процесса по точкам, например по методу Эйлера или какому-нибудь другому, чем при помощи прямой линии, проводимой между соседними точками.

По методу Адамса для экстраполяции используется не линейная зависимость, а алгебраическое уравнение, степень которого выше единицы. Это позволяет осуществлять экстраполяцию решения на большем интервале и с большей точностью.

Довольно часто применяют квадратичную экстраполяцию решения дифференциального уравнения. Более точные результаты можно получить при использовании кривых высшей степени. Как пример автоматического использования экстраполяции можно указать на цифровую систему управления копировально-фрезерным станком, в которой производится считывание управляющего сигнала с перфоленты (сигнал по точкам) и превращение его при пропускании через экстраполирующее устройство в непрерывный сигнал.

Следующей по сложности за прямой линией является парабола, описываемая уравнением второй степени:

$$x = x_n + a(t - t_n) + b(t - t_n)^2,$$

где a и b — постоянные,

t_n и x_n — координаты точки, через которую должна пройти искомая кривая.

Дифференцируя это выражение, получим:

$$\frac{dx}{dt} = a + 2b(t - t_n).$$

Полагая, как и выше, $t = t_n$ и $\frac{dx}{dt} = m_n$, получим, что

$$a = m_n.$$

Подобно этому при $t = t_{n-1}$ и $t_{n-1} - t_n = -h$ имеем

$$\frac{dx}{dt} = m_{n-1} = m_n - 2b \cdot h$$

и, следовательно,

$$b = \frac{m_n - m_{n-1}}{2h}.$$

Отсюда получим экстраполяционную формулу

$$x_{n+1} = x_n + h \left[m_n + \frac{1}{2} (m_n - m_{n-1}) \right].$$

Подобным же образом получается экстраполяционная формула более высокой степени, например, пятого порядка

$$x_{n+1} = x_n + h \left(m_n + \frac{1}{2} \Delta m_{n-1} + \frac{5}{12} \Delta^2 m_{n-2} + \right. \\ \left. + \frac{3}{8} \Delta^3 m_{n-3} + \frac{251}{720} \Delta^4 m_{n-4} \right),$$

где

$$\Delta m_{n-1} = m_n - m_{n-1};$$

$$\Delta^2 m_{n-2} = \Delta m_{n-1} - \Delta m_{n-2};$$

$$\Delta^3 m_{n-3} = \Delta^2 m_{n-2} - \Delta^2 m_{n-3};$$

$$\Delta^4 m_{n-4} = \Delta^3 m_{n-3} - \Delta^3 m_{n-4}.$$

Из этой формулы могут быть получены соответствующие формулы более низших порядков, а именно: если оставить лишь первое слагаемое, т. е. $h \cdot m_n$, то получим линейную экстраполяцию, при двух первых слагаемых — квадратичную параболическую экстраполяцию и т. д.

Аналогично выражению для определения x_{n+1} выводится выражение для вычисления предыдущих точек решения:

$$x_{n-1} = x_n - h \left(m_n - \frac{1}{2} \Delta m_{n-1} - \frac{1}{12} \Delta^2 m_{n-2} - \right. \\ \left. - \frac{1}{24} \Delta^3 m_{n-3} - \frac{19}{720} \Delta^4 m_{n-4} \right).$$

Здесь коэффициенты при слагаемых меньше, чем в выражении для x_{n+1} , что указывает на большую его точность по сравнению с последним.

Решение может также производиться с использованием обеих формул, причем сначала вычисляются x_{n+1} , используя значения x_n и значения производных m и их разностей, определенных в точке x_n . Полученное значение x_{n+1} проверяется при помощи выражения для x_{n-1} . Для этого значения x_{n+1} различные значения производных m и их разностей в точке x_{n+1} следует подставить в качестве x_n , m_n и т. д. в правую часть выражения для x_{n-1} .

Полученное значение x_{n-1} должно быть равно значению x_n , с которого был начат процесс вычисления. Если получится существенное расхождение, то следует снова определить x_{n+1} при помощи первой формулы.

Пример 9.6. Применение кубической экстраполяции по методу Адамса для уравнения

$$\frac{dx}{dt} = -x + t.$$

Начальное условие: $x=0$ при $t=0$. Постоянное временное приращение $h=0,1$ сек.

Используем первые два значения x , определенные в предыдущем примере с помощью ряда Тэйлора: $x_1=0,005$ и $x_2=0,019$.

Для вычисления данных таблицы используются следующие формулы:

$$m_n = -x_n + t_n;$$

$$\Delta m_{n-1} = m_n - m_{n-1};$$

$$\Delta^2 m_{n-2} = \Delta m_{n-1} - \Delta m_{n-2};$$

$$A = \frac{1}{2} \Delta m_{n-1}; \quad B = \frac{5}{12} \Delta^2 m_{n-2}; \quad C = \frac{1}{12} \Delta^2 m_{n-2};$$

$$x_{n+1} = x_n + h(m_n + A + B);$$

$$x_{n-1} = x_n - h(m_n - A - C).$$

Данные подсчета сводятся в табл. 9.3.

Рассматриваемый пример решается со значительным дублированием данных, которое можно сократить.

Таблица 9.3

h	t_n	x_n	m_n	Δm_{n-1}	$\Delta^2 m_{n-2}$	A	B	x_{n+1}	C	x_{n-1}
0	0	0	0							
1	0,1	0,005	0,095	0,095	—	—	—	—	—	—
2	0,2	0,019	0,181	0,086	—0,009	0,043	—0,004	0,041	—	—
3	0,3	0,041	0,259	0,078	—0,008	0,039	...	...	—0,001	0,019
3	0,3	0,041	0,259	0,078	—0,008	0,039	—0,003	0,071	—	—
4	0,4	0,071	0,329	0,070	—0,008	0,035	...	...	—0,001	0,041
4	0,4	0,071	0,329	0,070	—0,008	0,035	—0,003	0,107	—	—
5	0,5	0,107	0,393	0,064	—0,006	0,032	...	...	—0,001	0,071
5	0,5	0,107	0,393	0,064	—0,006	0,032	—0,003	0,149	—	—
6	0,6	0,149	0,451	0,058	—0,006	0,029	...	...	—0,001	0,107

Проверка производилась после каждого шага, причем ни одно из найденных значений x_{n+1} не потребовало пересчета. Результаты расчета полностью совпадают с точным решением (за исключением x_4 , которое больше на 0,001).

В процессе вычислений формула для x_{n+1} впервые применяется при вычислении строки $n=2$ для определения x_3 . Последнее значение подставляется как x_n в строку $n=3$. По этому значению x_n и по соответствующим значениям m_n и разностей с помощью определения x_{n-1} проверяется значение x_2 . Последнее вписывается в крайнюю правую графу первой из строк $n=3$. Сопоставление значений x_2 из крайней правой графы этой строки со значением x_2 предыдущей строки таблицы в третьей слева графе дает проверку точности.

После проверки значения x_3 при помощи выражения для x_{n+1} вычисляется новая строка таблицы для $n=3$ и определяется x_4 , после чего в строке $n=4$ производится проверка при помощи выражения для x_{n-1} . Строки, соответствующие последовательному применению этих выражений, сгруппированы в таблице попарно.

Таким образом, как в методе Эйлера, так и в методе Адамса для проверки расчетов предусмотрены две попеременно применяемые формулы.

Поскольку подобные вычисления весьма трудоемки, то проведение проверок в процессе расчета необходимо. В связи с этим разработано большое количество методов проверки, кроме отмеченных выше (графический метод, метод последовательных разностей, численное интегрирование и др.). Подробнее см. [Л. 17 и 29].

4. *Решение уравнений порядка выше первого.* Уравнения, порядок которых выше первого, могут быть решены аналогичным образом, как и уравнения первого порядка, путем сведения их к системе уравнений первого порядка, что достигается введением дополнительных переменных.

Пусть дано уравнение третьего порядка

$$\frac{d^3x}{dt^3} + f_2(x, t) \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + f_1(x, t) \frac{dx}{dt} + f_0(x, t) = 0,$$

где функции f_2 , f_1 , f_0 однозначны, непрерывны и дифференцируемы. Это уравнение может быть сведено к трем уравнениям первого порядка путем замены $\frac{dx}{dt} = y$ и $\frac{d^2x}{dt^2} = z$.

После введения дополнительных переменных получаем систему уравнений:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = z;$$

$$\frac{dz}{dt} = -f_2(x, t)z - f_1(x, t)y - f_0(x, t).$$

Эта система уравнений может быть последовательно решена путем известных методов решения уравнений первого порядка (Тэйлора, Эйлера и пр.).

Как обычно, необходимо определить начальные значения x , y и z , после чего решение всех трех уравнений должно производиться последовательно, что является более трудоемким, но в принципе аналогично решению одного уравнения первого порядка.

Следует подчеркнуть, что общность численных методов велика, так как ими можно воспользоваться для решения любого дифференциального уравнения.

Однако при решении сложных задач трудоемкость настолько возрастает, что приводит к необходимости применять автоматические вычислительные машины. Для более простых случаев (или когда требуются лишь ограниченные сведения) возможно выполнение вычислений вручную или при помощи арифмометра.

Пример 9.7. Решение уравнения третьей степени

$$\frac{d^3x}{dt^3} - \frac{dx}{dt} = t.$$

Начальные условия: $x_0=1$; $\left(\frac{dx}{dt}\right)_0=0$; $\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0=1$ при $t=0$.

Принимаем временной шаг $h=0,1$ сек.

Вычисление проведем по методу Эйлера с получением первых данных по методу Тэйлора.

Проводим замену заданного уравнения третьего порядка тремя уравнениями первого порядка путем введения дополнительных переменных y и z :

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad \frac{dy}{dt} = z; \quad \frac{dz}{dt} = y + t.$$

Производные более высокого порядка и их значения при $t_0=0$:

$$\frac{dz}{dt} = y + t; \quad \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 = 0;$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = z + 1; \quad \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 = 2;$$

$$\frac{d^3z}{dt^3} = \frac{dz}{dt}; \quad \left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_0 = 0;$$

$$\frac{d^4z}{dt^4} = \frac{d^2z}{dt^2}; \quad \left(\frac{d^4z}{dt^4}\right)_0 = 2.$$

Определяем с помощью ряда Тэйлора значения переменных x_1 , y_1 и z_1 при $t_1=0,1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + y_0 h + \frac{1}{2} z_0 h^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 h^3 = \\ &= 1 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0,1^2 + 0 = 1,005; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + z_0 h + \frac{1}{2} \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 h^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 h^3 = \\ &= 0 + 1 \cdot 0,1 + 0 + \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 0,1^3 = 0,1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= z_0 + \left(\frac{dz}{dt}\right)_0 \cdot h + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)_0 h^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{d^3z}{dt^3}\right)_0 h^3 = \\ &= 1 + 0 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,1^2 + 0 = 1,01. \end{aligned}$$

Далее по методу Эйлера вычисляются для каждого из трех уравнений первой степени отдельные таблицы с использованием найденных значений x_1 , y_1 и z_1 . При составлении таблиц производится последовательное вычисление величин

$$x_{n+1}^{(1)}, y_{n+1}^{(1)}, z_{n+1}^{(1)}, x_{n+1}^{(2)}, y_{n+1}^{(2)}, z_{n+1}^{(2)}, w_{n+1},$$

после чего весь процесс повторяется. Перед каждой таблицей приведены соотношения, применяемые для ее вычисления.

Формулы для вычислений к табл. 9.4:

$$\frac{dx}{dt} = y; \quad x_{n+1}^{(1)} = x_{n-1} + 2y_n h; \quad x_{n+1}^{(2)} = x_n + (y_n)_{\text{cp}} h;$$

$$(y_n)_{\text{cp}} = \frac{1}{2} (y_n + y_{n+1}^{(1)}); \quad c_x = x_{n+1}^{(2)} - x_{n+1}^{(1)}.$$

Таблица 9.4

n	t_n	x_n	y_n	$2y_n h$	$x_{n+1}^{(1)}$	$y_{n+1}^{(1)}$	$(y_n)_{\text{cp}}$	$x_{n+1}^{(2)}$	c_x
0	0,0	1,000	0	—	—	—	—	—	—
1	0,1	1,005	0,100	0,020	1,020	0,202	0,015	1,020	0
2	0,2	1,020	0,203	0,041	1,046	0,308	0,026	1,046	0
3	0,3	1,046	0,310	0,062	1,082	0,421	0,037	1,083	0,001
4	0,4	1,083	0,423	0,085	1,131	0,543	0,048	1,131	0
5	0,5	1,131	—	—	—	—	—	—	—

Формулы для вычислений к табл. 9.5:

$$\frac{dy}{dt} = z; \quad y_{n+1}^{(1)} = y_{n-1} + 2z_n h;$$

$$y_{n+1}^{(2)} = y_n + (z_n)_{\text{cp}} h;$$

$$(z_n)_{\text{cp}} = \frac{1}{2} (z_n + z_{n+1}^{(1)});$$

$$c_y = y_{n+1}^{(2)} - y_{n+1}^{(1)}.$$

Таблица 9.5

n	t_n	y_n	z_n	$2z_n h$	$y_{n+1}^{(1)}$	$z_{n+1}^{(1)}$	$(z_n)_{\text{cp}}$	$y_{n+1}^{(2)}$	c_y
0	0,0	0	1,000	—	—	—	—	—	—
1	0,1	0,100	1,010	0,202	0,202	1,040	0,103	0,203	0,001
2	0,2	0,203	1,040	0,208	0,308	1,091	0,107	0,310	0,002
3	0,3	0,310	1,091	0,218	0,421	1,162	0,113	0,423	0,002
4	0,4	0,423	1,163	0,233	0,543	1,256	0,121	0,544	0,001
5	0,5	0,544	—	—	—	—	—	—	—

Формулы для вычислений к табл. 9.6:

$$\frac{dz}{dt} = y + t = w;$$

$$z_{n+1}^{(1)} = z_{n-1} + 2w_n h; \quad z_{n+1}^{(2)} = z_n + (w_n)_{\text{cp}} h;$$

$$(w_n)_{\text{cp}} = \frac{1}{2} (w_n + w_{n+1}^{(1)}); \quad c_z = z_{n+1}^{(2)} - z_{n+1}^{(1)}.$$

Таблица 9.6

n	t_n	y_n	z_n	w_n	$2w_n h$	$z_{n+1}^{(1)}$	w_{n+1}	$(w_n)_{cp}$	z_{n+1}^2	c_z
0	0,0	0	1,000	0						
1	0,1	0,100	1,010	0,200	0,040	1,040	0,403	0,030	1,040	0
2	0,2	0,203	1,040	0,403	0,081	1,091	0,610	0,051	1,091	0
3	0,3	0,310	1,091	0,610	0,122	1,162	0,823	0,072	1,163	0,001
4	0,4	0,423	1,163	0,823	0,165	1,256	1,044	0,093	1,256	0
5	0,5	0,544	1,256	0	—	—	—	—	—	—

Решение в аналитической форме данного дифференциального уравнения:

$$x = -1 + e^t + e^{-t} - \frac{t^2}{2}.$$

Численные данные отличаются от точного решения не более чем на единицу третьего десятичного разряда.

5. Численное интегрирование с применением z -преобразования. В настоящее время метод z -преобразования является основным методом анализа импульсных и цифровых систем.

Применение аппарата z -преобразования позволило почти полностью перенести на дискретные системы частотные методы, разработанные для непрерывных систем, а также понятия передаточных функций, логарифмических характеристик, коэффициентов ошибки, частотные критерии устойчивости, частотные методы анализа и синтеза при случайных воздействиях и др.

Метод z -преобразования позволяет также производить анализ нелинейных дискретных систем. Хотя этот метод был разработан для импульсных систем, однако он оказался достаточно удобным и для получения временных переходных функций непрерывных систем при условии, что непрерывная система заменяется ее импульсной моделью. Из теории z -преобразования известно [Л. 28], что функция $f(t)$ может быть представлена в импульсной форме как последовательность импульсов в моменты времени nT ; при этом площадь каждого импульса равна значению функции в соответствующие моменты времени $t = nT$. Для такой функции можно применять аппарат z -преобразования.

Преобразование по Лапласу импульсной функции имеет вид

$$F^*(s) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) \cdot e^{-snT},$$

где T — период прерывания,
 s — комплексная переменная.

Приведенное уравнение показывает, что $F^*(s)$ представляет собой бесконечный ряд по e^{Ts} . Это позволяет использовать подстановку

$$z = e^{Ts} \text{ или } s = \frac{1}{T} \ln z$$

и применить сокращенное обозначение $F(z)$ для получающейся функции от z . Следовательно,

$$F(z) = F^*\left(\frac{1}{T} \ln z\right) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) z^{-n}.$$

Уравнение для $F(z)$ определяет математическую операцию, широко известную в литературе под названием z -преобразования. Это уравнение, представляющее собой z -преобразование, является аналогом преобразования Лапласа

$$F(s) = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt$$

и изображается бесконечной суммой, так как применяется к импульсным функциям.

Так же, как и для непрерывных систем, можно и для импульсных систем говорить о передаточной функции (импульсной передаточной функции или z -передаточной функции импульсной системы):

$$g(z) = \frac{y(z)}{x(z)}.$$

Таким образом, передаточной функцией импульсной системы является отношение z -преобразований импульсного выхода системы к ее импульсному входу. Она аналогична передаточной функции системы без импульсных элементов

$$g(s) = \frac{y(s)}{x(s)}.$$

Эта аналогия позволяет использовать z -преобразование и импульсные передаточные функции так же, как преобразование Лапласа и обычные передаточные функции, что делает z -преобразование удобным математическим методом в теории импульсных систем и позволяет использовать его для линейных и нелинейных непрерывных систем.

Так же, как и для функции $F(z)$, может быть написано аналогичное выражение для функции

$$g(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} g(nT) z^{-n}.$$

Если функция $g(t)$ является некоторой импульсной функцией, то $g(nT)$ представляет собой площадь импульса в момент $t=nT$, а не значение $g(t)$ в этот момент.

Основываясь на рассмотренных определениях z -преобразования временной функции и импульсной передаточной функции, можно вычислить импульсные передаточные функции системы или ее отдельных элементов по их обычным передаточным функциям.

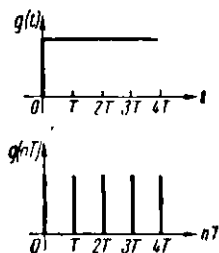


Рис. 9.4. Ступенчатая функция

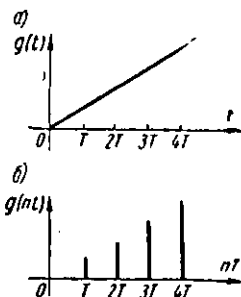


Рис. 9.5. Линейно-нарастающая функция

Из уравнения для $F(z)$ можно легко получить z -преобразование временной функции, а затем и искомую временную функцию системы.

Таким образом, для вычисления импульсной передаточной функции $g(z)$ надо определить $g(t)$ и $g(s)$, найти временную последовательность $g(nT)$ подстановкой nT вместо t в функцию $g(t)$ и, наконец, определить сумму ряда $g(z)$ (для физически реализуемых систем этот ряд сходится).

Если функция $g(s)$ является сложной, то ее необходимо разложить на составляющие и к ним применить преобразование.

Пример 9.8. Определение z -преобразования ступенчатой функции (рис. 9.4).

Ступенчатая функция может быть записана как

$$g(t) = ku(t).$$

Функция

$$g(s) = L\{g(t)\} = \frac{k}{s}.$$

Подстановка в уравнение $g(t)$ последовательности импульсов дает

$$g(nT) = ku(nT) = K.$$

Положим, что начало прерывания совпадает с началом ступенчатой функции.

Определяем зависимость $g(z)$, т. е. вычисляем z -преобразование ступенчатой функции

$$g(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} kz^{-n} = k(1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots) = \frac{k}{1 - z^{-1}},$$

представляя сумму в виде бесконечного ряда, который равен $\frac{k}{1 - z^{-1}}$ для $|z^{-1}| < 1$ (при делении числителя k на знаменатель $(1 - z^{-1})$ получается бесконечный ряд).

Умножая числитель и знаменатель на z , получим

$$g(z) = \frac{kz}{z - 1} \text{ для } |z^{-1}| < 1.$$

Пример 9.9. Определение z -преобразования линейно-нарастающей функции (рис. 9.5).

Линейно-нарастающая функция (функция с постоянным наклоном) может быть записана как

$$g(t) = kt.$$

Обычная передаточная функция $g(s)$, т. е. преобразование Лапласа от $g(t)$, имеет вид:

$$g(s) = L\{g(t)\} = \frac{k}{s^2}.$$

Подстановка последовательности импульсов $t = nT$ дает

$$g(nT) = kTn,$$

где n — целое число.

Далее получаем z -преобразование функции с постоянным наклоном:

$$g(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} knTz^{-n} = kTz^{-1} [1 + 2z^{-1} + 3z^{-2} + \dots + (k+1)z^{-k} + \dots] = \frac{kTz^{-1}}{(1 - z^{-1})^2} \text{ для } |z^{-1}| < 1$$

или
$$g(z) = \frac{kTz}{(z - 1)^2} \text{ для } |z^{-1}| < 1.$$

Полученное выражение является также импульсной передаточной функцией для системы с обычной передаточной функцией $g(s) = \frac{k}{s^2}$.

Пример 9.10. Определение z -преобразования экспоненциальной функции (рис. 9.6).

Переходная и обычная передаточные функции:

$$g(t) = ke^{-at} \text{ и } g(s) = L\{g(t)\} = \frac{k}{s+a},$$

где a — постоянная.

Импульсная последовательность

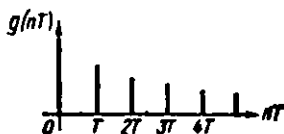
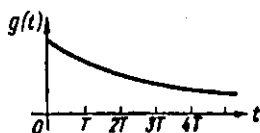


Рис. 9.6. Экспоненциальная функция

$$g(nT) = ke^{-anT}.$$

Определяем z-преобразование экспоненциальной функции:

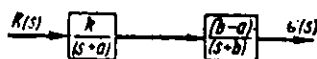


Рис. 9.7. К определению импульсной передаточной функции

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} ke^{-anT} z^{-n} = k[1 + (e^{-aT} z^{-1}) + (e^{-aT} z^{-1})^2 + \dots] = \frac{k}{1 - e^{-aT} z^{-1}} \text{ при } |e^{-aT} z^{-1}| < 1$$

или
$$g(z) = \frac{kz}{z - e^{-aT}} \text{ при } |e^{-aT} z^{-1}| < 1.$$

Пример 9.11. Определение импульсной передаточной функции системы, структурная схема которой представлена на рис. 9.7. Передаточная функция всей системы

$$g(s) = \frac{k(b-a)}{(s+a)(s+b)}.$$

Разлагаем на составляющие

$$g(s) = \frac{k}{s+a} - \frac{k}{s+b}.$$

Переходная функция и импульсная последовательность соответственно будут:

$$g(t) = k(e^{-at} - e^{-bt}),$$

$$g(nT) = k(e^{-anT} - e^{-bnT}).$$

Определяем импульсную передаточную функцию

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nT) z^{-n} = k \sum_{n=0}^{\infty} (e^{-anT} - e^{-bnT}) z^{-n}.$$

Отсюда получим, что сумма ряда

$$g(z) = \frac{k}{1 - e^{-aT} z^{-1}} - \frac{k}{1 - e^{-bT} z^{-1}}.$$

После небольших преобразований получим

$$g(z) = \frac{kz(e^{-aT} - e^{-bT})}{(z - e^{-aT})(z - e^{-bT})}.$$

Пример 9.12. Вычисление кривой переходного процесса на выходе инерционного звена (рис. 9.8) с использованием z -преобразования при подаче на вход ступенчатого воздействия.

Значения параметров схемы: входное напряжение $x=1$ в; $R=1$ ом и $L=1$ гн.

Для вычисления выходного напряжения $y(t)$ с использованием z -преобразования необходимо представить $x(t)$ и импульсную переходную функцию (функцию веса) $g(t)$ в виде соответствующих последовательностей импульсов.

Импульсная переходная функция для цепи при указанных параметрах

$$g(t) = e^{-t}.$$

При этом входная функция $x^*(t)$ представляет собой серию равномерно распределенных импульсов (рис. 9.9), а функция $g^*(t)$ — затухающую последовательность импульсов (интервал между импульсами примем равным 0,3 сек).

Каждая функция может быть записана в виде временного ряда:

$$x^*(t) = \mu_0(t) + \mu_0(t - 0,3) + \mu_0(t - 0,6) + \dots; \\ g^*(t) = \mu_0(t) + e^{-0,3} \mu_0(t - 0,3) + e^{-0,6} \mu_0(t - 0,6) + \dots,$$

где $\mu_0(t)$ — единичный импульс при $t=0$; $\mu_0(t-0,3)$ — импульс в момент времени $t=0,3$ сек и т. д.

Произведем почленно преобразование Лапласа:

$$x^*(s) = 1 + e^{-0,3s} + e^{-0,6s} + \dots$$

Этот бесконечный ряд можно записать в виде предела

$$x^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-0,3s}}.$$

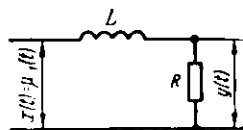


Рис. 9.8. К вычислению кривой переходного процесса с использованием z -преобразования

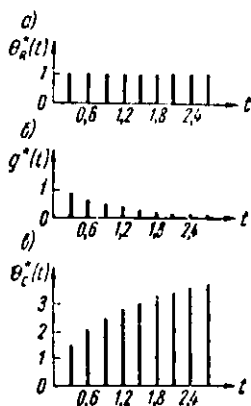


Рис. 9.9. Последовательности импульсов при вычислении переходного процесса в инерционном звене

Таким же образом

$$g^*(s) = 1 - e^{-0,3} \cdot e^{-0,3s} + e^{-0,6} \cdot e^{-0,6s} - \dots,$$

или

$$g^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-0,3} \cdot e^{-0,3s}}.$$

Вводя подстановку через $z^n = e^{nTs}$, получим:

$$x(z) = \frac{z}{z-1},$$

$$g(z) = \frac{z}{z - 0,7408}.$$

Получены уже известные выражения для z -преобразования последовательности равномерно распределенных импульсов. При получении z -преобразования для выходной величины $y^*(t)$ надлежит перемножить $x(z)$ и $g(z)$:

$$y(z) = x(z) \cdot g(z) = \frac{z^2}{z^2 - 1,7408z + 0,7408}.$$

Разделив числитель полученного выражения на знаменатель (разложение в степенной ряд), получим

$$y(z) = 1 + 1,741 z^{-1} + 2,29 z^{-2} + 2,697 z^{-3} + \dots$$

Для этого выражения подстановка e^{nTs} вместо z^n дает обратное z -преобразование n -го члена в импульс, имеющий место в момент времени nT .

Следовательно, обратное преобразование для получения выходной временной функции имеет вид (рис. 9.9, в)

$$y(t) = \mu_0(t) + 1,741 \mu_0(t - 0,3) + 2,29 \mu_0(t - 0,6) + \\ + 2,697 \mu_0(t - 0,9) + \dots$$

Для непрерывной функции могут быть выбраны различные способы аппроксимации. Интервалы между импульсами T должны быть взяты достаточно малыми, чтобы обеспечить желательную точность решения.

Наиболее простым методом для данной задачи может быть принят следующий.

Полагают, что площадь каждого импульса равна значению действительной функции времени в отсчитываемый момент, умноженная на T (интервал между импульсами). Тогда действительная функция может быть представлена импульсной последовательностью, определяемой равенствами:

$$x_a^*(t) = T x^*(t),$$

$$g_a^*(t) = T g^*(t).$$

При этом выходная импульсная последовательность получается равной выходной величине $y^*(t)$, умноженной на T (приближенно).

Обоснование этого положения лежит в использовании равенства

$$s = \frac{1}{T} \ln z \text{ (см. ниже).}$$

В связи с этим z -преобразование для выходной величины

$$y_a(z) = T x(z) \cdot g(z).$$

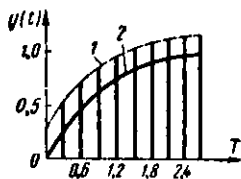


Рис. 9.10. Вычисления выходной величины инерционного звена:

1 — при помощи z -преобразования; 2 — точным решением уравнения

Результаты подсчета выходной величины представлены на рис. 9.10 (кривая 1); там же дано точное решение (кривая 2). Из сопоставления кривых видно, что чем меньше выбирается T , тем ближе кривая, получаемая по рассматриваемому методу, стоит к действительности.

Если параметры цепи R и L изменялись бы с изменением напряжения (нелинейная цепь), то необходимо было бы определять их значение при каждом последовательном шаге вычислений.

Пример 9.13. Вычисление кривой переходного процесса линейной следящей системы с применением обратного z -преобразования.

Обратное z -преобразование представляет собой метод вычисления переходного процесса системы, основанный на преобразовании уравнения $y(z) = g(z) x(z)$ во временную область.

Метод обратного z -преобразования позволяет получить временную функцию, справедливую (строго говоря) лишь для дискретных моментов времени. Как уже отмечалось, выражение z -преобразования в общей форме имеет вид

$$F(z) = \sum_{n=0}^{n=\infty} f(nT) z^{-n}.$$

Обратное z -преобразование может быть представлено как

$$f(nT) = \oint F(z) z^{n-1} dz.$$

Интеграл в этом выражении должен вычисляться вдоль замкнутого контура в плоскости комплексного переменного z .

Приблизительно выражение для определения $f(nT)$ может быть написано так:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-\frac{\pi}{T}}^{\frac{\pi}{T}} F\left(\frac{1}{T} \ln z\right) e^{\frac{1}{T} \ln znT} \cdot d\left(\frac{1}{T} \ln z\right),$$

что можно переписать следующим образом:

$$f(nT) = \frac{1}{2\pi jT} \oint F\left(\frac{1}{T} \ln z\right) z^{n-1} dz,$$

где контур интегрирования представляет собой окружность единичного радиуса с центром в начале координат z -плоскости.

Если функция $F\left(\frac{1}{T} \ln z\right)$ может быть выражена через отношение двух полиномов от z , то после выполнения деления вычисляется $f(nT)$, а следовательно, и переходный процесс во времени. Однако указанная функция не позволяет сделать непосредственного разложения. Поэтому приходится использовать следующее разложение:

$$\ln z = 2 \left[\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \frac{1}{3} \cdot \frac{(1-z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{(1-z^{-1})^5}{(1+z^{-1})^5} + \dots \right].$$

Выразим величину s^{-1} через z , т. е. $s^{-1} = \frac{T}{\ln z}$.

Подставим в последнее выражение полученное выше значение для $\ln z$ и разделим числитель на знаменатель:

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \left[\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} - \frac{1}{3} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - \frac{4}{45} \cdot \frac{(1-z^{-1})^3}{(1+z^{-1})^3} - \dots \right].$$

Для удобства расчетов (с достаточной для практики точностью) ограничимся первым членом полученного ряда:

$$s^{-1} = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}.$$

Таким же образом находится выражение для s^{-2} и для любых степеней s :

$$\begin{aligned} s^{-2} &= (s^{-1})^2 = \left(\frac{T}{2} \right)^2 \left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{1}{3} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} - \dots \right)^2 = \\ &= \frac{T^2}{4} \left[\left(\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right)^2 - \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \right)^2 - \dots \right]. \end{aligned}$$

Взяв два первых члена, приближенно получим

$$s^{-2} = \frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2}.$$

Выражения для $s^{-1} + s^{-5}$ приведены в табл. 9.7. С ее помощью при расчетах можно выполнить переход от преобразования Лапласа к z -преобразованию.

Таким образом, величину $F\left(\frac{1}{T} \ln z\right)$ можно представить в виде отношения полиномов, расположенных по степеням z^{-k} .

Применим рассмотренный метод для расчета переходного процесса заданной следящей системы.

Таблица 9.7

Преобразование Лапласа	z-преобразование
s^{-1}	$\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$
s^{-2}	$\frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{1-2z^{-1}+z^{-2}}$
s^{-3}	$\frac{T^3}{2} \cdot \frac{z^{-1}+z^{-2}}{1-3z^{-1}+3z^{-2}-z^{-3}}$
s^{-4}	$\frac{T^4}{6} \cdot \frac{z^{-1}+4z^{-2}+}{1-4z^{-1}+6z^{-2}-} \rightarrow$ $\rightarrow \frac{+z^{-3}}{-4z^{-3}+z^{-4}} - \frac{T^4}{720}$
s^{-5}	$\frac{T^5}{24} \cdot \frac{z^{-1}+11z^{-2}+}{1-5z^{-1}+10z^{-2}-} \rightarrow$ $\rightarrow \frac{+11z^{-3}+z^{-4}}{-10z^{-3}+5z^{-4}-z^{-5}}$

Пусть передаточная функция замкнутой системы

$$\frac{\Theta_0}{\Theta_i}(s) = \frac{4}{s^2 + 2,4s + 4}$$

Рассчитаем переходный процесс при единичном воздействии $\Theta_i = 4$ рад.

Тогда $\Theta_i(s) = \frac{4}{s}$, отсюда

$$\Theta_0(s) = \frac{16}{s^3 + 2,4s^2 + 4s}$$

Делим числитель и знаменатель на s^3 , т. е. приводим к s^{-1} -форме:

$$\Theta_0(s) = \frac{16s^{-3}}{1 + 2,4s^{-1} + 4s^{-2}}$$

Переходим от преобразования Лапласа к z-преобразованию, используя приведенную выше таблицу (подставляем вместо s^{-1} , s^{-2} , s^{-3} их значения, выраженные через z):

$$\begin{aligned} \Theta_0(z) &= \frac{1}{T} \cdot \frac{16 \cdot \frac{T^3}{2} \cdot \frac{z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^3}}{1 + 2,4 \left(\frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} \right) + 4 \left[\frac{T^2}{12} \cdot \frac{1+10z^{-1}+z^{-2}}{(1-z^{-1})^2} \right]} \\ &= \frac{1}{T} \cdot \frac{8T^3(z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1}) + 1,2T(1+z^{-1})(1-z^{-1})^2 + \frac{T^2}{3}(1+10z^{-1}+z^{-2})(1-z^{-1})} \\ &= \frac{24T^2 z^{-1} + 24T^2 z^{-2}}{(3+3,6T+T^2) - (9+3,6T-9T^2)z^{-1} + (9-3,6T-9T^2)z^{-2} - (3-3,6T+T^2)z^{-3}} \end{aligned}$$

Далее выбираем подходящее значение для T . Обычно рекомендуется выбрать T , равным не более одной десятой ожидаемого периода собственных колебаний системы или времени переходного процесса (если такая оценка хотя бы приближенно может быть сделана).

Примем ориентировочно $T=0,4$ сек (если эта величина после получения характеристики переходного процесса окажется

завышена, то придется задаться меньшим значением T и произвести расчет переходного процесса вновь). Подстановка принятого значения T в выражение для $\Theta_0(z)$ дает

$$\Theta_0(z) = \frac{3,84 z^{-1} + 3,84 z^{-2}}{4,6 - 9z^{-1} + 6,12 z^{-2} - 1,72 z^{-3}}.$$

Получаем бесконечный ряд путем деления числителей на знаменатель:

$$\begin{aligned} \Theta_0(z) = & 0,836 \cdot z^{-1} + 2,47 \cdot z^{-2} + 3,71 \cdot z^{-3} + 4,29 \cdot z^{-4} + \\ & + 4,39 \cdot z^{-5} + 4,33 \cdot z^{-6} + 4,1 \cdot z^{-7} + 4,0 \cdot z^{-8} + \dots \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, каждый коэффициент при z^{-n} представляет собой значение Θ_0 в соответствующий момент времени $t = nT$, что позволяет по точкам построить кривую переходного процесса $\Theta_0(t)$ (рис. 9.11). На этом же рисунке сплошной линией приведена кривая точного решения. Можно отметить, что величина T выбрана удачно.

Пример 9.14. Вычисление кривой переходного процесса в нелинейной электрической цепи с использованием обратного z -преобразования.

На рис. 9.12 дана электрическая цепь RC с переменным сопротивлением, величина которого зависит от приложенного к нему напряжения.

Допустим, что вольтамперная характеристика сопротивления схемы характеризуется зависимостью

$$I_R = U^2.$$

Дифференциальное нелинейное уравнение рассматриваемой схемы будет

$$I = I_C + I_R = C\dot{U} + U^2.$$

Положим, что $I = 4$ а и $C = 0,04$ Ф, тогда уравнение примет вид

$$4 = 0,04\dot{U} + U^2.$$

Полученное уравнение является интегрируемым и его точное решение запишется как

$$U = 2 \cdot \text{th} \cdot 50t.$$

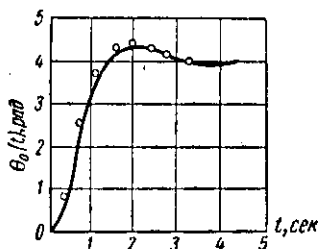


Рис. 9.11. Кривая переходного процесса линейной следящей системы

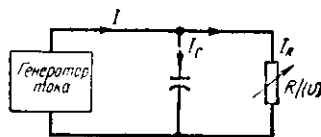


Рис. 9.12. К вычислению кривой переходного процесса в нелинейной электрической цепи RC

Решим эту же задачу с использованием обратного z -преобразования. Напишем исходное уравнение обычным образом:

$$0,04\dot{U} + U^2 - 4 = 0.$$

Приравняем $U^2 = DU$, где D будем временно считать постоянной величиной (в действительности $D=U$), чтобы иметь возможность применить обычное преобразование Лапласа. Уравнение получит вид

$$0,04\dot{U} + DU - 4 = 0.$$

При нулевых начальных условиях

$$U(s) = \frac{100}{s^2 + 25Ds} = \frac{100s^{-2}}{1 + 25 \cdot Ds^{-1}}.$$

Подставим вместо s^{-2} и s^{-1} их выражения, определенные через z , тогда

$$\begin{aligned} U(z) &= \frac{1}{T} \cdot \frac{100 \frac{T^2}{12} \frac{(1 + 10z^{-1} + z^{-2})}{(1 - z^{-1})^3}}{1 + 25D \cdot \frac{T(1 + z^{-1})}{2(1 - z^{-1})}} = \\ &= \frac{100T(1 + 10z^{-1} + z^{-2})}{(12 + 150DT) - 24z^{-1} + (12 - 150DT)z^{-2}}. \end{aligned}$$

Выбираем величину $T = 0,005$ сек и подставляем в предыдущее выражение:

$$U(z) = \frac{0,5 + 5z^{-1} + 0,5z^{-2}}{(12 + 0,75D) - 24z^{-1} + (12 - 0,75D)z^{-2}}.$$

Если бы D была постоянной величиной (линейная система), то для вычисления $U(t)$ надо было бы почленно разделить, как это делалось выше, числитель на знаменатель. В данном случае необходимо на каждом шаге деления определять D и использовать его в следующем шаге, что равносильно изменению величины D скачками от одного интервала времени к другому (в пределах каждого интервала D остается постоянным). Это допущение вносит в расчет некоторую ошибку, которая оказывается тем меньше, чем меньше выбрана величина T . Очевидно, что при уменьшении T возрастает объем вычислений.

При $t=0$, т. е. при включении источника тока в схему RC , величина $\dot{D}=0$, поскольку $U=0$. Следовательно, выражение для $U(z)$ получит вид

$$U_0(z) = \frac{0,5 + 5z^{-1} + 0,5z^{-2}}{12 - 24z^{-1} + 12z^{-2}}.$$

Разделив почленно числитель на знаменатель, получим бесконечный ряд:

$$U_0(z) = 0,0417 + 0,499z^{-1} + 0,968z^{-2} + 1,356z^{-3} + 1,634z^{-4} + \dots$$

Отсюда находим величину $U=0,0417$ при $t=T$, т. е. в конце первого интервала.

Так как в данном примере принято, что $D=U$, то для второго шага следует положить $D=0,0417$.

Для более точного подсчета возможно применение метода итераций (производится корректировка коэффициентов на каждом шаге).

Определяем напряжение при $t=T$, подставив в выражение $U(z)$ найденное значение $D=0,0417$ для первого шага:

$$U_1(z) = \frac{0,5 + 5z^{-1} + 0,5z^{-2}}{12,03 - 24z^{-1} + 11,97z^{-2}},$$

Деление числителя на знаменатель дает

$$U_1(z) = 0,0416 + 0,499z^{-1} + \dots$$

Следовательно, при $t=T$ значение напряжения

$$U(T) = 0,499.$$

Это же значение принимается для D в интервале между $t=T$ и $t=2T$. Оно подставляется в выражение для $U(z)$ при определении значения $U_2(z)$ в момент времени $t=2T$:

$$U_2(z) = \frac{0,5 + 5z^{-1} + 0,5z^{-2}}{12,37 - 24z^{-1} + 11,63z^{-2}} \text{ и т. д.}$$

В табл. 9.8 даны расчетные значения U , D и значения числителя и знаменателя выражения $U(z)$.

Разложение в ряд (обратное z -преобразование) для рассматриваемого случая имеет вид

$$U(z) = 0,499z^{-1} + 0,92z^{-2} + 1,3z^{-3} + 1,52z^{-4} + \dots$$

На рис. 9.13 нанесены расчетные точки значений U в дискретные моменты времени и там же проведена кривая точного решения, с которой указанные точки достаточно хорошо совпадают. Для уменьшения ошибки можно применить способ, заключающийся в повторении основной операции для нового значения T .

Таблица 9.8

t	D	U	$(12+0,75D)-24z^{-1}+(12-0,75D)z^{-2}$	$0,5+5z^{-1}+0,5z^{-2}$
0	0	0	$12-24z^{-1}+12z^{-2}$	„
T	0,0417	0,499	$12,03-24z^{-1}+11,97z^{-2}$	„
$2T$	0,499	0,92	$12,37-24z^{-1}+11,63z^{-2}$	„
$3T$	0,92	1,3	$12,73-24z^{-1}+11,25z^{-2}$	„
$4T$	1,3	1,52	$12,974-24z^{-1}+11,026z^{-2}$	„

Начальное значение T выбирают из соображений приемлемой трудоемкости. С выбранным T производят вычисления и наносят на график кривую переходного процесса.

Затем выбирают меньшее значение T (например, половину начального) и вновь вычисляют кривую переходного процесса. Сопоставление полученных кривых позволяет судить о степени повышения точности при втором значении T и о целесообразности его дальнейшего повышения.

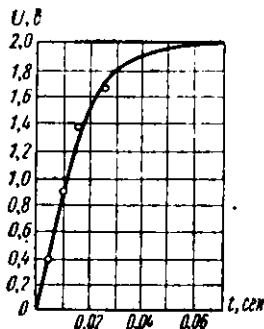


Рис. 9.13. Кривая переходного процесса нелинейной электрической цепи RC

Одним из способов повышения точности является также определение нелинейных коэффициентов на основе экстраполяции. В этом случае находят некоторое ожидаемое значение T по его величине в предыдущих членах последовательности. Экстраполяция может быть линейной, квадратичной и более сложной.

Пример 9.15. Расчет переходного процесса в следящей системе с нелинейной инерционной нагрузкой.

Рассчитаем переходный процесс в нелинейной системе по методу обратного z -преобразования с применением линейной экстраполяции.

Нелинейность в системе вызывается изменением момента инерции нагрузки в виде намоточного барабана. В этом случае момент инерции нагрузки является функцией углового положения исполнительного вала:

$$J = 5,65 + |\Theta_0|.$$

Пусть на вход системы подано ступенчатое воздействие $\Theta_i = 4,0 \text{ рад}$, а операторное выражение для выходного перемещения

$$\Theta_0(s) = \frac{4}{0,0442Js^3 + 6s^2 + s}.$$

После подстановки значения J и некоторых преобразований получим

$$\Theta_0(s) = \frac{4s^{-3}}{0,0442(5,65 + |\Theta_0|) + 0,65s^{-1} + s^{-2}} = \frac{4s^{-3}}{A + 0,65s^{-1} + s^{-2}},$$

где $A = 0,0442 \cdot (5,65 + |\Theta_0|)$.

Положим $T = 0,4 \text{ сек}$ и выразим s через z , т. е. перейдем к z -преобразованию при помощи приведенной выше таблицы:

$$\Theta_0(z) = \frac{3,84(z^{-1} + z^{-2})}{(12A + 1,6) - 36Az^{-1} + (36A - 2,88)z^{-2} - (12A - 1,28)z^{-3}}.$$

Прямолинейная экстраполяция определяется равенством (рис. 9.14)

$$\Theta_0(nT) = 2\Theta_0[(n-1)T] - \Theta_0[(n-2)T].$$

Подобная экстраполяция достаточно точна, если величина $\frac{d\theta_0(nT)}{dnT}$ мала. Поэтому можно ожидать расхождения в точках перегибов и резких изломов кривой.

При $t=0$ очевидно $\Theta_0=0$; $A=0,0442 \cdot 5,65=0,25$.

После первого шага, определяемого делением числителя, равного $3,84(z^{-1}+z^{-2})$, на знаменатель, равный $(4,6-9z^{-1}+6,12z^{-2}-1,72z^{-3})$, находим значение $\Theta_0(T)=0,835$ при $t=T$.

Производим экстраполяцию Θ_0 для второго шага:

$$\Theta_0(2T) = 2 \cdot 0,835 - 0 = 1,67;$$

$$A = 0,0442(5,65 + 1,67) = 0,3235.$$

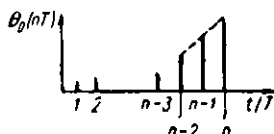


Рис. 9.14. Прямолинейная экстраполяция

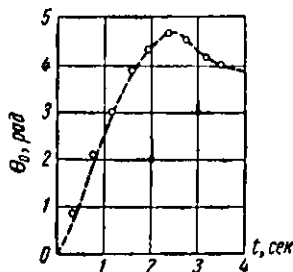


Рис. 9.15. Кривая переходного процесса нелинейной следящей системы

Знаменатель для второго шага равен:

$$(5,482 - 11,65z^{-1} + 8,77z^{-2} - 2,602z^{-3}).$$

Произведя обратное z -преобразование для второго шага, получим $\Theta_0(2T)=0,07$ (коэффициент при z^{-2}).

Затем опять проводим экстраполяцию для нахождения Θ_0 и A , соответствующих третьему шагу, и т. д.

В результате получаем следующий ряд для нелинейной системы:

$$\Theta_0(z) = 0,835z^{-1} + 2,07z^{-2} + 3,0z^{-3} + 3,87z^{-4} + 4,31z^{-5} + 4,65z^{-6} + 4,54z^{-7} + 4,19z^{-8} + 4,0z^{-9} \dots$$

Как уже отмечалось, коэффициенты этого ряда представляют собой дискретные значения угла Θ_0 переходного процесса следящей системы. По этим значениям строим переходный процесс (рис. 9.15).

§ 9.4. Примеры расчетов по методам фазовых траекторий

Для построения фазовых траекторий (характеристик) используется характеристическое уравнение системы, которое может быть записано в общем виде:

$$A_n \frac{d^n x}{dt^n} + A_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + A_2 \ddot{x} + A_1 \dot{x} + A_0 x = 0.$$

Для заданных определенных начальных условий решение этого уравнения отображается единственной кривой в n -мерном пространстве.

Координатами последнего являются $x, \dot{x}, \ddot{x}, \dots, x^{(n-1)}$.

Это пространство может быть названо *фазовым пространством*, а кривая, отображающая решение характеристического уравнения, — *фазовой траекторией* или *фазовой характеристикой*.

Семейство фазовых траекторий для всех возможных начальных условий или некоторой совокупности их, представляющей интерес для анализа, называется *фазовым портретом*.

Каждой точке фазовой траектории соответствует некоторое определенное значение времени t . Очевидно, что коэффициенты характеристического уравнения $A_0 \dots A_n$ могут иметь постоянное значение (линейное уравнение), быть функцией времени (линейное уравнение с переменными коэффициентами) или функциями сигналов и их производных (нелинейное уравнение).

В случае уравнения второго порядка фазовое пространство превращается в фазовую плоскость с фазовыми траекториями, построенными в прямоугольных координатах x, y , где $y = \dot{x}$.

Фазовый портрет системы дает возможность провести анализ поведения системы, получив следующие данные:

- 1) переходный процесс для заданной совокупности начальных условий;
- 2) тип переходного процесса (апериодический или колебательный);
- 3) величину перерегулирования;
- 4) устойчивость;
- 5) автоколебания (амплитуда и частота);
- 6) возможные режимы работы;
- 7) влияние отдельных нелинейностей (сопоставление с линейными системами и нелинейными с другими нелинейностями);
- 8) рекомендации по коррекции системы линейными и нелинейными средствами.

Уравнение второго порядка может быть записано как

$$\ddot{x} + A\dot{x} + Bx = F$$

или

$$\ddot{x} = F - Bx - A\dot{x}.$$

Обычно обозначают $\dot{x} = y$, тогда последнее выражение будет

$$\frac{dy}{dt} = F - Bx - Ay.$$

Для получения фазового портрета необходимо провести ряд преобразований исходного дифференциального уравнения.

К этим преобразованиям относятся:

1. Исключение величины t , которая отсутствует (в явной форме) в фазовой траектории.

Для этого исходное уравнение делим на $y = \frac{dx}{dt}$, тогда

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{dy}{dx} = \frac{F - Bx - Ay}{y}.$$

Для общего случая:

$$\frac{dy}{dt} = Q(x, y);$$

$$\frac{dx}{dt} = P(x, y);$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

Уравнение для $\frac{dy}{dx}$ определяет наклон фазовой траектории в координатах x, y .

2. Разделение переменных для интегрирования уравнения.

Для некоторых уравнений переменные разделяются просто и интегрирование может быть проведено достаточно легко.

3. Интегрирование уравнения для получения фазовой траектории.

Интегрирование может быть осуществлено аналитически, графически, численно или при помощи вычислительной машины.

В ряде случаев для нелинейных уравнений переменные разделяются далеко не всегда.

Если удастся получить решение для x и $y = x$, но процесс алгебраического исключения t весьма сложен, то отдельные точки фазовой траектории могут быть получены путем вычисления x и y из каждого уравнения в отдельности для выбранных значений t . Тогда траектория строится по точкам, причем каждой точке будет соответствовать определенный индекс времени, что является полезным для построения переходного процесса.

Этот же прием можно использовать в некоторых случаях при решении уравнения на вычислительной машине.

Как правило, для нелинейных уравнений интегрирование проще всего выполнять графически, так же как и для большинства линейных уравнений.

Разработан ряд практических методов построения фазовых характеристик (метод изоклин, построение Льенара, дельта-метод и др.), использующих те или иные приемы графического интегрирования.

Пример 9.16. Получение фазовой характеристики для линейного консервативного звена.

1. Простейшее дифференциальное уравнение консервативного звена имеет вид

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Величина

$$\frac{dy}{dt} = -x.$$

Исключаем параметр t :

$$\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{x}{y} = \frac{dy}{dx}.$$

Производим разделение переменных:

$$y \cdot dy = -x \, dx.$$

Интегрирование обеих частей равенства дает уравнение фазовой траектории

$$y^2 + x^2 = c$$

или

$$\frac{y^2}{c} + \frac{x^2}{c^2} = 1.$$

Для данного консервативного звена фазовая траектория представляет собой окружность, а фазовый портрет — семейство окружностей, диаметры которых зависят от начальных условий (величина c).

2. Консервативное линейное звено характеризуется уравнением

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Решение последнего может быть записано как

$$x = A \sin(\omega_0 t + \varphi),$$

где A и φ — постоянные, определяемые из начальных условий (A — амплитуда; φ — фаза колебаний).

Значение величины

$$y = \frac{dx}{dt} = A \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Исключая величину $\omega_0 t + \varphi$ из уравнения для x и y , получим

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{A^2 \omega_0^2} = 1,$$

что является уравнением эллипса с полуосями A и $\omega_0 A$.

Фазовая траектория, представляющая собой эллипс (рис. 9.16, кривая 1), соответствует незатухающим колебаниям системы с амплитудой, определяемой начальными условиями (в данном случае начальным отклонением).

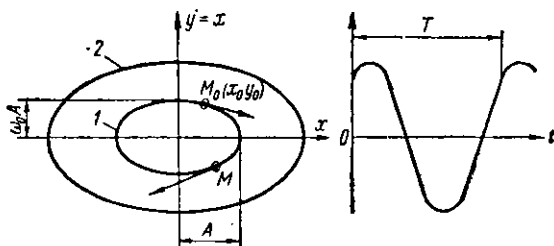


Рис. 9.16. Фазовые траектории линейного консервативного звена

При другой начальной амплитуде имеет место эллипс с другими полуосями и т. д. (рис. 9.16, кривая 2).

Метод изоклин. В ряде случаев разделение переменных и интегрирование представляет собой трудоемкую, а подчас и трудно выполнимую операцию. Тогда целесообразно прибегнуть к использованию выражения $\frac{dy}{dx}$, представляющего собой наклон фазовой траектории в данной точке, и графическому интегрированию.

В выражении для $\frac{dy}{dx}$ имеются три переменных: x , y и $\frac{dy}{dx}$. Зададимся каким-нибудь определенным значением

$$N_1 = \frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}.$$

В этом случае получается уравнение с двумя неизвестными x и y , что на плоскости xy дает одну единственную кривую — *изоклину*, представляющую собой геометрическое место всех точек фазового портрета, для которых наклон фазовой траектории равен постоянному значению N_1 .

Задаваясь различными постоянными значениями наклона $N_1, N_2, N_3, \dots, N_n$, можно построить семейство изоклин для некоторого уравнения, т. е. для некоторой системы.

Последнее используется для построения фазовых траекторий с различными начальными условиями при помощи отрезков прямых, направленных в соответствии с наклоном, определяемым изоклинами.

Пример 9.17. Построение фазовой траектории по семейству изоклин.

На рис. 9.17 изображено семейство изоклин для некоторой определенной системы. Необходимо построить фазовую траекторию при произвольно выбранных начальных условиях работы этой системы.

Возьмем в качестве исходной точки, например, точку A на изоклине N_1 и от нее начнем построение траектории. На каж-

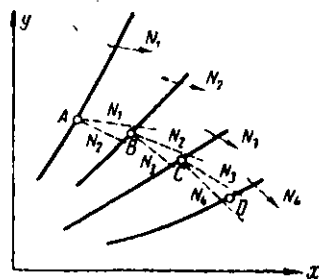


Рис. 9.17. Построение фазовой траектории по изоклинам

дой из изоклин наносится стрелка, указывающая наклон фазовой траектории, когда она пересекает данную изоклину.

Для построения участка траектории между двумя соседними изоклинами N_1 и N_2 из точки A проводим две прямые под наклоном N_1 и N_2 в направлении изоклины N_2 . Поскольку траектория в точке A имеет наклон N_1 , а следующую изоклину должна пересекать с наклоном N_2 , то она должна лежать внутри угла, образованного указанными прямыми. Приближенно можно положить, что точка

B пересечения траекторией изоклины N_2 находится на середине отрезка последней, отсекаемого этими прямыми.

Из точки B таким же образом проводим две прямые с наклоном N_2 и N_3 и получаем точку C фазовой траектории, в которой она пересекает изоклину N_3 и т. д.

Фазовая траектория проводится через полученные точки $A, B, C, D, \dots$

Очевидно, чем чаще будут проведены изоклины, тем точнее окажется построение фазовой траектории.

Выбирая другие начальные точки на той же изоклине N_1 , строим другие траектории и получаем фазовый портрет.

Метод изоклин наиболее удобен именно для построения не единичной фазовой траектории, а фазового портрета для определенной зоны начальных условий.

Для некоторых уравнений изоклины являются прямыми или легко вычисляемыми кривыми и могут быть построены достаточно просто.

В более сложных случаях, в частности, для построения единичной фазовой траектории, можно рекомендовать другие методы графического приближенного интегрирования.

Пример 9.18. Построение семейства изоклин и фазового портрета для консервативного звена, описываемого уравнением типа

$$\ddot{x} + x = 0.$$

Учитывая, что $y = \dot{x}$, напомним

$$\frac{dy}{dx} + x = 0.$$

Освобождаясь от параметра t , получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = N$, будем иметь

$$N = -\frac{x}{y},$$

или

$$\frac{y}{x} = -\frac{1}{N},$$

или

$$y = -\frac{1}{N} \cdot x.$$

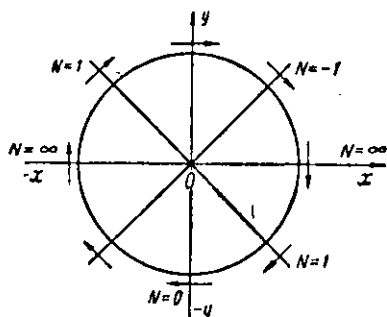


Рис. 9.18. Семейство изоклин и фазовая траектория простейшего консервативного звена

Если задаваться постоянными значениями N от нуля до бесконечности, то получим семейство изоклин в виде прямых линий, расположение которых на плоскости x, y определяется значением величины N (рис. 9.18).

Следует отметить, что стрелки, определяющие наклон траектории, пересекающей любую изоклину, в данном случае оказываются перпендикулярными линии изоклины, так как расположение изоклины (т. е. ее наклон) определяется так же, как и наклон траектории, величиной N .

Отсюда следует, что для данного консервативного звена все фазовые траектории являются окружностями (рис. 9.18). Полученные результаты согласуются с данными аналитического решения для этого звена (см. пример 9.16).

Пример 9.19. Построение семейства изоклин и фазовой траектории для консервативного звена, описываемого уравнением типа

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0.$$

Так же, как и в предыдущем примере, напомним

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 x.$$

Освобождаясь от параметра t , получим

$$\frac{dy}{dx} = -\omega_0^2 \frac{x}{y}.$$

Полагая $\frac{dy}{dx} = N$, будем иметь

$$N = -\frac{\omega_0^2 x}{y}.$$

Откуда получим уравнение для изоклин

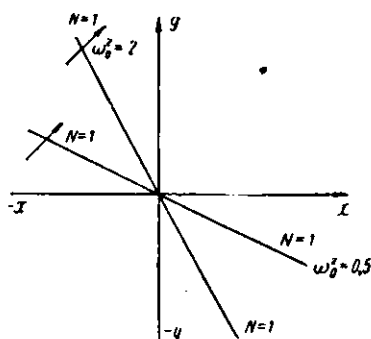


Рис. 9.19. Изоклины консервативного звена при $\omega_0^2 \neq 1$

$$y = -\frac{\omega_0^2}{N} x.$$

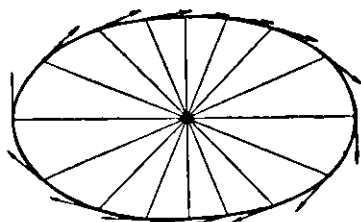


Рис. 9.20. Семейство изоклин и фазовая траектория консервативного звена при $\omega_0^2 \neq 1$

При $\omega_0^2 = 1$ имеем предыдущий случай консервативного звена. И в данном случае семейство изоклин представляет собой прямые линии, располагающиеся при тех же наклонах траектории, что и линии, изображенные на рис. 9.18, но под другими углами на фазовой плоскости, определяемыми значением ω_0^2 .

Действительно, положим $\omega_0^2 = 2$. Тогда при $N = 1$ будем иметь уравнение изоклины $y = -2x$. Следовательно, эта изоклина оказывается сдвинутой на 30° относительно оси y (рис. 9.19)*.

Наклон траектории N на указанной изоклине составляет 45° , так как $N = 1$.

Пусть теперь $\omega_0^2 = 0,5$. Тогда изоклина имеет уравнение $y = -0,5 \frac{x}{N}$. При $N = 1$ получим $y = -0,5x$ (рис. 9.19), что дает сдвиг относительно оси y , равный 60° .

Фазовые траектории при $\omega_0^2 \neq 1$ представляют собой эллипс с большой полуосью, совпадающий или с осью y ($\omega_0^2 = 2$), или же с осью x ($\omega_0^2 = 0,5$), как показано на рис. 9.20.

* На рис. 9.18 этот сдвиг составляет 45° .

Пример 9.20. Построение семейства изоклин и фазовой характеристики линейной системы с положительным демпфированием.

Уравнение линейной системы второго порядка с положительным демпфированием имеет вид

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0$$

или

$$\frac{dy}{dt} + ay + bx = 0,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-ay - bx}{y} = N.$$

Уравнение изоклины

$$y = \frac{-b}{N+a} \cdot x$$

представляет собой уравнение прямой линии (семейство прямых линий).

Построим для некоторого конкретного случая фазовую траекторию линейной системы с положительным демпфированием. Положим, что $a=1$ и $b=1$. Тогда уравнение изоклины примет вид

$$y = \frac{-1}{N+1} \cdot x = f(x).$$

Задаемся рядом значений N , подсчитываем коэффициенты уравнения соответствующих изоклин и сводим полученные результаты в табл. 9.9.

На рис. 9.21 приведено построение фазовой характеристики для рассматриваемой системы.

Предварительно было построено семейство изоклин по полученному выше уравнению $y=f(x)$ при $N=0 \div \infty$ и определены углы $\alpha = \operatorname{arctg} N$, т. е. наклон фазовой траектории в точке ее пересечения с данной изоклиной. Соответствующие наклоны в виде стрелок нане-

Таблица 9.9

N	$\frac{-1}{N+1}$	$\alpha^\circ = \operatorname{arctg} N$
-1	∞	-45
-1,5	2	-56,5
-2,0	1	-63,5
-3,0	0,5	-71,5
-5,0	0,25	-78,7
-11,0	0,1	-85
$-\infty$	0	-90
3,0	-0,25	90+18,5
2,0	-1/3	90+26,5
1,0	-0,5	90+45
0,5	-0,667	90+63,5
0,0	-1,0	180
-0,5	-2,0	180+26,5
-1,0	∞	180+45
-2,0	1	180+63,5
-3,0	0,5	180+73,5
-5,0	0,25	180+78,7
-11,0	0,1	180+85
$-\infty$	0	180+90

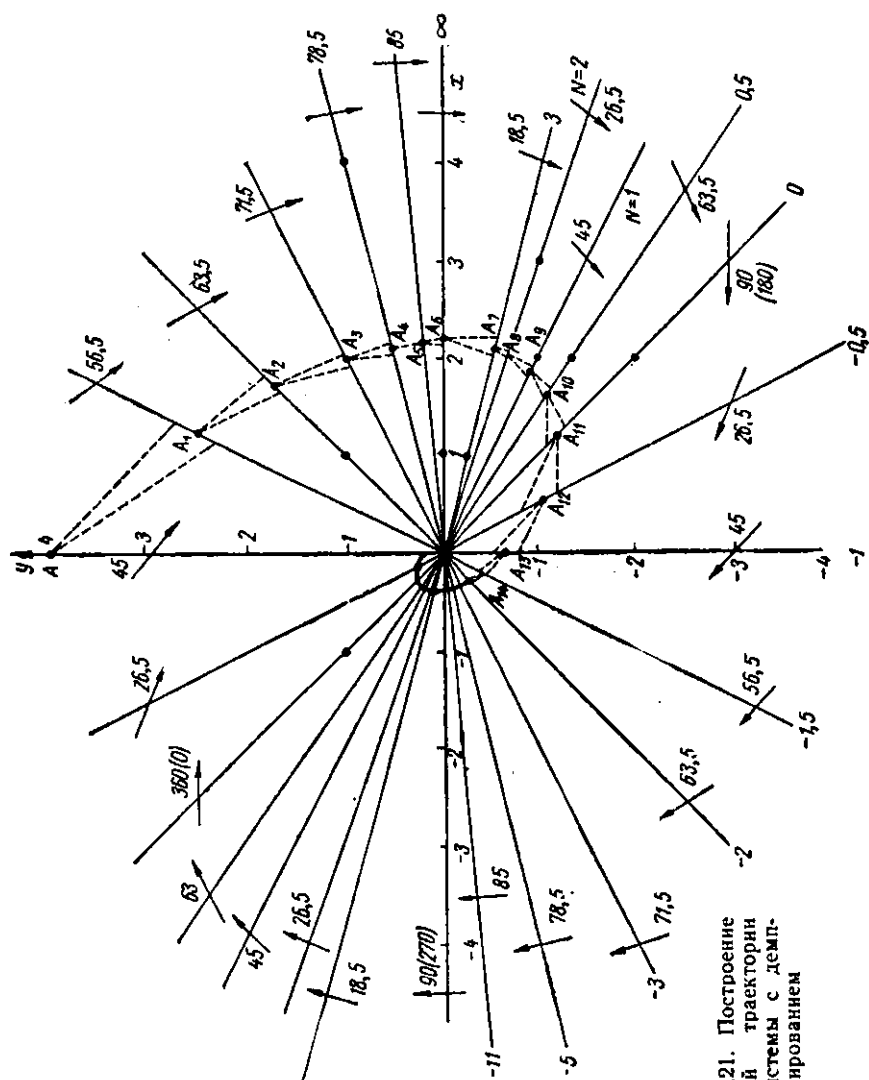


Рис. 9.21. Построение фазовой траектории для системы с демпфированием

сены на изоклины, которые в данном случае представляют собой прямые линии.

Затем выбрана произвольная начальная точка A (например, на оси y) на любом расстоянии от начала координат (т. е. любые начальные условия) и последовательно найдены на изоклинах точки $A_1, A_2, \dots, A_n$ фазовой траектории, которая в данном случае представляет собой скручивающуюся к началу координат спираль.

Полученная траектория показывает, что характеристика системы является затухающей с небольшим колебательным процессом.

Пример 9.21. Построение по методу изоклин фазовых траекторий системы, описываемой нелинейным уравнением $\ddot{x} + x\dot{x} + x = 0$.

Нелинейность в уравнении (произведение $x\dot{x}$) является аналитической и поэтому решение задачи может быть проведено так же, как и в предыдущих случаях. Можно написать:

$$\frac{dy}{dt} + yx + x = 0,$$

отсюда

$$\frac{dy}{dt} = -(y + 1)x.$$

Делим обе части на $\frac{dx}{dt} = y$,

тогда получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y+1}{y} \cdot x = N.$$

При этом имеем уравнение изоклины при постоянном значении N :

$$y = -\frac{x}{x+N}.$$

В данном случае изоклины не являются прямыми (нелинейное уравнение) и поэтому каждую изоклину приходится строить по нескольким точкам.

На рис. 9.22 представлено семейство изоклин и фазовые траектории для двух случаев начальных условий. Указанные траектории являются замкнутыми, что характеризует систему как автоколебательную.

Пример 9.22. Построение по методу изоклин фазовой траектории системы, описываемой уравнением Ван дер Поля.

Нелинейное уравнение Ван дер Поля имеет вид

$$\ddot{x} - \varepsilon(1-x^2) \cdot \dot{x} + x = 0.$$

Оно характеризует колебательную систему с переменным коэффициентом демпфирования (для некоторых видов ламповых генераторов).

Как видно из приведенного уравнения, при больших отклонениях x ($x^2 > 1$) демпфирование является положительным и,

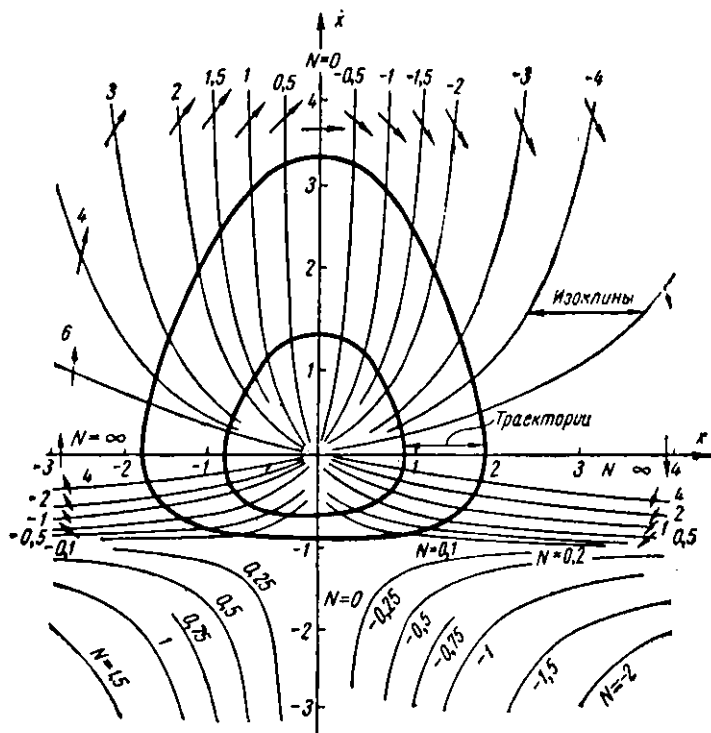


Рис. 9.22. Примеры фазовых траекторий для уравнения $\ddot{x} + x\dot{x} + x = 0$

наоборот, при малых отклонениях, т. е. когда $x^2 < 1$, демпфирование становится отрицательным.

Вид фазовых траекторий зависит от величины коэффициента ϵ .

Как обычно, определяем значение наклона траектории:

$$\frac{dy}{dt} = \epsilon(1 - x^2)y + x = 0$$

или

$$\frac{dy}{dt} = -x + \epsilon(1 - x^2)y,$$

откуда

$$\frac{dy}{dx} = N = \frac{\varepsilon (1 - x^2) y - x}{y}.$$

Уравнение изоклины имеет вид

$$y = \frac{x}{\varepsilon (1 - x^2) - N}.$$

Пусть значение коэффициента $\varepsilon = 0,2$, т. е.

$$y = \frac{x}{0,2 (1 - x^2) - N}.$$

Решение этого уравнения для ряда значений N дает семейство изоклин, представленное на рис. 9.23. В данном случае изоклины также не являются прямыми линиями. Начало координат является особой точкой, через которую проходят изоклины при различных значениях N .

На этом же рисунке представлена замкнутая фазовая траектория системы, являющаяся предельным циклом, к которому стремится любое решение независимо от начальных условий. Указанный предельный цикл характеризует наличие в системе устойчивых периодических колебаний, к которым система приходит вне зависимости от первоначального отклонения (если начальная точка находится внутри предельного цикла, то фазовая траектория представляет собой разворачивающуюся спираль и, наоборот, при начальной точке вне этого цикла — сжимающаяся спираль).

Очевидно, что для точного построения фазовой траектории необходимо нанести большее количество изоклин, чем это показано на рис. 9.23.

Существенно отметить, что полученная фазовая траектория близка по своей форме к окружности. При $\varepsilon = 0$ она превращается в окружность, так как уравнение системы переходит в уравнение линейного консервативного звена (рис. 9.18). Наоборот, при увеличении ε фазовая траектория предельного цикла вытягивается вдоль оси y . (Наибольшее отклонение x близко к двум при любых значениях ε .)

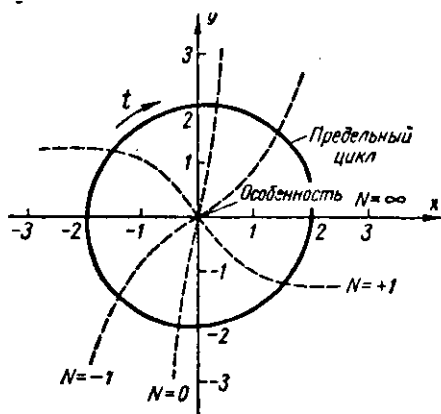


Рис. 9.23. Изоклины и фазовая траектория для нелинейного уравнения Вандер Поля при $\varepsilon = 0,2$

Пример 9.23. Построение фазовых траекторий системы с насыщением.

Исходим из аппроксимированной нелинейной характеристики насыщения усилителя (рис. 9.24, а), состоящей из трех прямолинейных отрезков (линейно-кусочная аппроксимация). Подобная нелинейная характеристика является неаналитической и

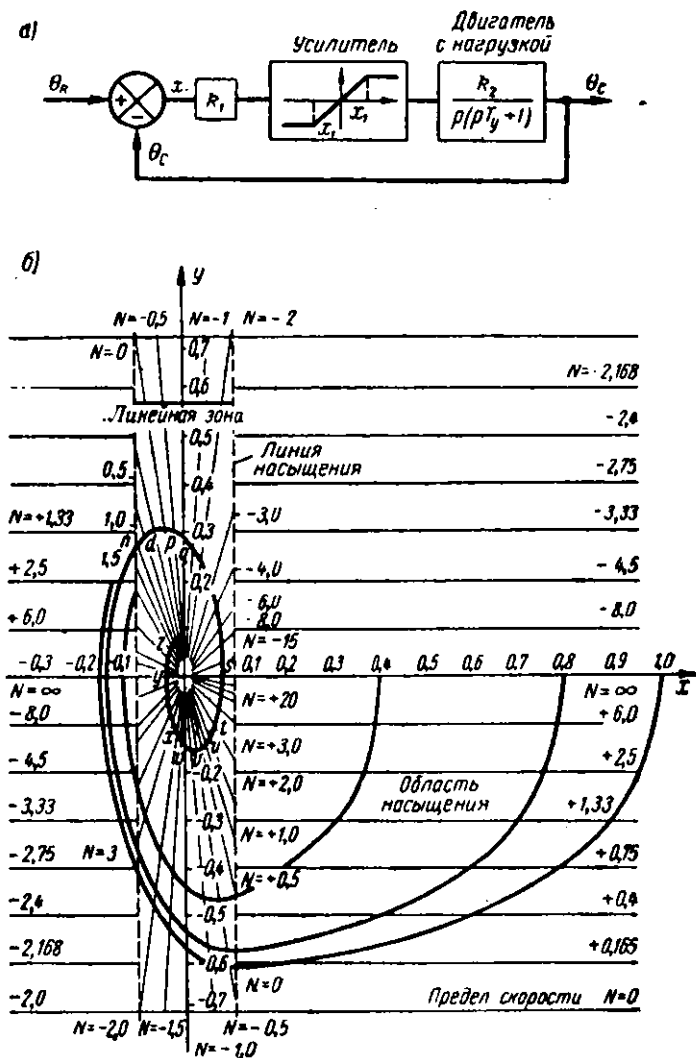


Рис. 9.24. Блок-схема и фазовые траектории следящей системы с насыщением

поэтому ее целесообразно разбить на участки, в пределах каждого из которых может быть написано достаточно простое аналитическое выражение. Так, для линейной зоны получим уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} + bx = 0,$$

где

$$a = \frac{1}{T_d} \text{ и } b = \frac{k_1 k_2}{T_d}.$$

Это уравнение справедливо в пределах значений величины $-x_1 < x < +x_1$, где значение x_1 , при котором наступает насыщение.

Для зоны насыщения уравнения имеют вид:
при $x \leq -x_1$

$$\ddot{x} + a\dot{x} - c = 0,$$

при $x \geq +x_1$

$$\ddot{x} + a\dot{x} + c = 0,$$

где $c = bx_1$.

Найдем уравнения изоклин для трех участков рассматриваемой нелинейной системы.

Первое уравнение является линейным и изоклины представляют собой семейство прямых линий, проходящих через начало координат. Уравнение изоклин для этого случая имеет вид

$$y = \frac{-b}{N+a} x.$$

Для участков насыщения уравнения изоклин будут:

$$\frac{dy}{dt} + ay - c = 0,$$

$$\frac{dy}{dt} + ay + c = 0$$

или

$$\frac{dy}{dt} = -ay + c,$$

$$\frac{dy}{dt} = -ay - c,$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ay - c}{y} = N,$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{ay + c}{y} = N.$$

Следовательно,

$$y = \pm \frac{c}{N+a}.$$

Таким образом, для зон насыщения изоклины представляют собой прямые, параллельные оси абсцисс и отстоящие от начала координат на расстояниях x , зависящих от величины наклона N при заданных параметрах c и a .

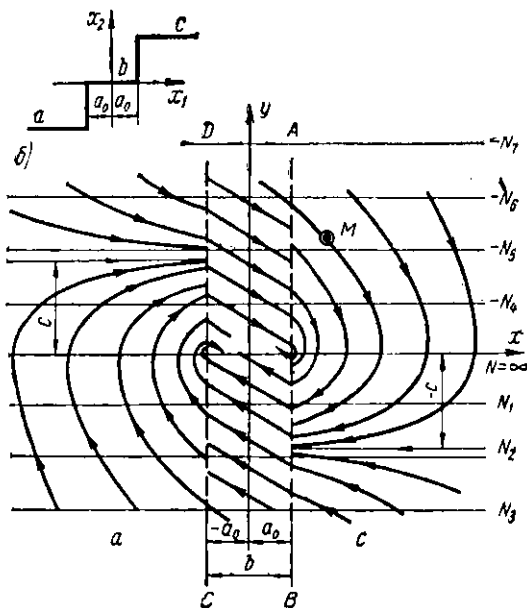


Рис. 9.25. Фазовый портрет релейной следящей системы

Фазовая плоскость разделена на линейную зону (средняя часть), ограниченную вертикальными линиями при значениях x , равных x_1 и $-x_1$ (рис. 9.24, б), и две нелинейные, расположенные по обе стороны от первой.

Фазовые траектории строятся обычным образом.

На рис. 9.24 построены три фазовые траектории при различных начальных условиях (начальные отклонения соответственно равны в относительных единицах $x_n = 1; 0,8; 0,4$).

Следует отметить, что фазовые траектории свидетельствуют о колебательном затухающем процессе.

Пример 9.24. Построение фазовых траекторий релейной системы.

Примем, что реле системы имеет некоторую зону нечувствительности a_0 (рис. 9.25, а). Следовательно, релейная характе-

ристика имеет три зоны: a , b и c . Для зоны b (средней) имеем уравнение

$$\ddot{x} + a\dot{x} = 0,$$

где $a = \frac{1}{T_d}$.

Для зон a и c уравнения соответственно имеют вид:

$$\ddot{x} + a\dot{x} + c = 0,$$

$$\ddot{x} + a\dot{x} - c = 0,$$

что совпадает, как и следовало ожидать, с уравнениями зон насыщения в предыдущем примере.

Уравнения для изоклин в зонах a и c , очевидно, получаются такими же, как и в примере 9.23, а именно

$$y = \pm \frac{c}{N + a}.$$

Для средней зоны b получим

$$\frac{dy}{dt} + ay = 0,$$

или

$$\frac{dy}{dt} = -ay,$$

отсюда

$$\frac{dy}{dx} = -a = N,$$

что свидетельствует о неизменном наклоне траектории в зоне нечувствительности, равном $N = -\frac{1}{T_d}$ (тангенс угла наклона прямых участков траектории составляет $\frac{1}{T_d}$).

На рис. 9.25, б представлен фазовый портрет релейной системы, из которого видно, что отработка системы носит колебательно-затухающий характер и в зоне нечувствительности траектории обладают неизменным наклоном.

В данном (простом) случае задача может быть решена также интегрированием отдельных дифференциальных уравнений, написанных для отдельных зон.

Так, после исключения переменной t и интегрирования полученных выражений будем иметь уравнения фазовых траекторий для отдельных зон:

для зоны b

$$y = -\frac{1}{T_d} x + c_1;$$

для зоны a

$$x = T_d [c \cdot \ln(y + c) - y] + c_2;$$

для зоны c

$$x = -T_d [c \cdot \ln(y - c) + y] - c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 — произвольные постоянные интегрирования.

Как уже отмечалось, в зоне b фазовые траектории при значениях $-\infty < c_1 < +\infty$ представляют собой прямые с ординатами пересечения оси y , равными различным значениям c_1 . Тангенс угла наклона этих прямых равен $-1/T_d$.

Указанная зона b ограничена линиями переключения CD и AB , слева и справа от которых расположены траектории зон a и c , построенные по полученным уравнениям или при помощи изоклин.

Траектории этих участков подобны, но имеют разные знаки. Стрелки указывают направление движения изображающей точки, причем все фазовые траектории имеют форму спиралевидных кривых, сходящихся в начале координат. Следовательно, при любых начальных условиях система будет устойчивой, т. е. переходный процесс является затухающим.

При построении фазовых траекторий надлежит учитывать, что в верхней половине фазовой плоскости, где $y > 0$, изображающая точка M всегда движется слева направо, т. е. в сторону увеличения x , а в нижней половине плоскости — справа налево (соответственно ставятся и стрелки вдоль фазовых траекторий). При пересечении траекториями оси x величина $y = 0$, т. е. $\frac{dx}{dt} = 0$, что соответствует максимуму и минимуму кривой $x(t)$.

В точке пересечения траекторией оси x наклон всегда $N = \infty$, т. е. фазовые траектории пересекают ось x под углом 90° .

Пример 9.25. Получение кривой переходного процесса по фазовой траектории системы.

Если имеется фазовая траектория, полученная косвенным образом, например по методу изоклин, то ее можно использовать для расчета кривой переходного процесса при помощи какого-либо графического метода.

Известно, что значение x во времени будет

$$x = \int_0^t \dot{x} dt$$

или

$$\Delta x = \int_{t_1}^{t_2} \dot{x} dt,$$

отсюда приближенно

$$\Delta x = \dot{x}_{\text{ср}} \cdot \Delta t.$$

Это соотношение можно использовать для определения графическим путем значения t для любых точек фазовой траектории.

Для этого, например, аппроксимируем фазовую траекторию прямолинейными отрезками (прямолинейная аппроксимация) и определяем значение $\dot{x}_{\text{ср}}$ в середине каждого отрезка.

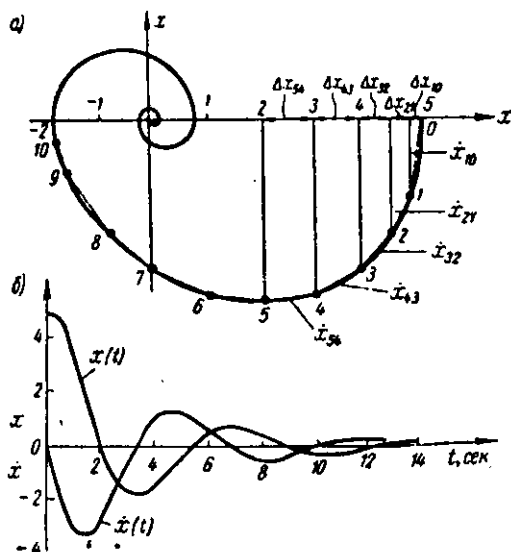


Рис. 9.26. К определению кривой переходного процесса по фазовой траектории системы

Проекция этого отрезка на ось x дает Δx . При этом

$$\Delta t = \frac{\Delta x}{\dot{x}_{\text{ср}}} \text{ и } t = \sum \Delta t.$$

Пусть дана некоторая фазовая траектория устойчивой системы (свертывающаяся спираль), представленная на рис. 9.26, а и построенная по уравнению

$$\ddot{x} + 0,6 \dot{x} + x = 0.$$

Аппроксимируем траекторию отрезками прямых $0 \div 1, 1 \div 2, 2 \div 3, 3 \div 4$ и т. д.

Далее находим средние значения $\dot{x}$: $\dot{x}_{10}$, $\dot{x}_{21}$, $\dot{x}_{32}$... и проекции отрезков на ось x : Δx_{10} , Δx_{21} , Δx_{32} , Δx_{43} ...

Затем определяем значение времени: $\Delta t_1 = \frac{\Delta x_{10}}{\dot{x}_{10}}$; $\Delta t_2 = \frac{\Delta x_{21}}{\dot{x}_{21}}$...

после чего строим $x=f(t)$, начиная с его максимального значения в точке O (рис. 9.26, б).

На этом же графике нанесена кривая $\dot{x}=f(t)$.

Все методы вычисления времени по фазовой траектории имеют общий недостаток — трудность точного считывания координат кривой в некоторых точках.

Так, траектория в точке пересечения оси x всегда нормальна к ней и поэтому значения Δx в этой зоне настолько малы, что можно допустить существенную ошибку.

§ 9.5. Примеры расчетов по методам гармонического баланса

В § 9.1 отмечалось, что методы гармонического баланса представляют собой один из вариантов метода малого параметра и базируются на понятии комплексного коэффициента усиления по первой гармонике для коэффициента усиления нелинейного звена [Л. 22].

Комплексный коэффициент усиления по первой гармонике для нечетной функции [$f(-x_0)=-f(x)$] нелинейного звена, имеющего зависимость $x_2=f(x_1)$, может быть записан как

$$\bar{k}_n = \frac{\bar{x}_2}{x_1} = g(A) + j \cdot b(A),$$

где

$$g(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cdot \sin \psi) \sin \psi d\psi,$$

$$b(A) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \cdot \sin \psi) \cos \psi d\psi.$$

Входная величина $x_1 = A \sin \psi$.

Выходная величина x_2 представляет собой, как уже отмечалось, несинусоидальную периодическую функцию. Если разложить ее в тригонометрический ряд и ограничиться первой гармоникой, то получим

$$x_2 = f(A \cdot \sin \psi) = \sin \psi \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cdot \sin \psi) \sin \psi d\psi \right] + \\ + \cos \psi \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \cdot \sin \psi) \cdot \cos \psi d\psi \right].$$

Полученные зависимости показывают, что комплексный коэффициент усиления нелинейного звена зависит от амплитуды A входного сигнала,

При однозначной нечетной функции $x_2=f(x_1)$ выражение для k_n упрощается, так как составляющая $b(A)$ оказывается равной нулю и, следовательно, k_n — действительным числом (между x_1 и x_2 нет сдвига по фазе).

Пользуясь указанными формулами, можно определить комплексный коэффициент усиления для различных частных случаев характеристик нелинейных звеньев. Так, для звена с зоной нечувствительности (рис. 9.27, а) функция $x_2=f(x_1)$ может быть записана в следующем виде:

$$\text{при } |x_1| \leq a \quad x_2 = 0;$$

$$\text{при } x_1 > a$$

$$x_2 = x_1 - a;$$

$$\text{при } x_1 < -a$$

$$x_2 = x_1 + a.$$

Так как функция $x_2=f(x_1)$ однозначна и нечетна, то $b(A) = 0$, т. е. первая гармоника выходного напряжения не сдвинута по фазе относительно входного напряжения.

Выражение для комплексного коэффициента усиления будет иметь вид

$$\begin{aligned} k_n = g(A) &= \frac{4}{\pi A} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (A \cdot \sin \psi - a) \sin \psi d\psi = \\ &= 1 - \frac{2a}{4\pi} + \frac{\sin 2\alpha}{\pi} - \frac{4 \cos \alpha}{\frac{\pi A}{a}}, \end{aligned}$$

где

$$\alpha = \arcsin \frac{a}{A}.$$

Очевидно, что эта формула справедлива при $A > a$. Интеграл может быть взят в пределах от α до $\frac{\pi}{2}$, поскольку выходная кривая симметрична относительно вертикальной линии, проходящей через $\frac{\pi}{2}$.

На рис. 9.27, б представлена характеристика коэффициента усиления нелинейного звена с зоной нечувствительности в зависимости от амплитуды входного синусоидального воздействия A , отнесенной к величине зоны нечувствительности a , т. е. от величины $\frac{A}{a}$. Здесь интересно отметить, что до значения $\frac{A}{a} = 1$ величина $k_n = 0$, так как сигнал x_1 в этом случае остается в пределах зоны нечувствительности. При увеличении $\frac{A}{a}$ коэффи-

циент k_n стремится к пределу, равному 1. Это объясняется тем, что при больших значениях A зона нечувствительности становится пренебрежимо мала по сравнению с амплитудой A входного сигнала.

Для релейной характеристики выражение для коэффициента усиления k_n имеет вид

$$k_n = g(A) = \frac{4}{\pi A} \int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}} B \sin \psi d\psi = \frac{4B}{\pi A} \cos \alpha,$$

здесь $\alpha = \arcsin \frac{a}{A}$;

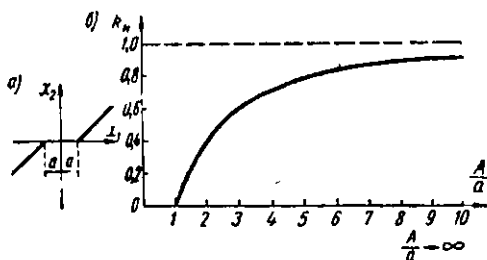


Рис. 9.27. Характеристика коэффициента усиления нелинейного звена с зоной нечувствительности

B — величина напряжения на выходе реле.

Подставляя значение α в уравнение для k_n , получим

$$k_n = \frac{4B}{\pi A} \sqrt{1 - \left(\frac{a}{A}\right)^2} = \frac{4}{\pi} \cdot \frac{B}{a} \frac{1}{\frac{A}{a}} \sqrt{1 - \frac{1}{\left(\frac{A}{a}\right)^2}}.$$

Характеристика k_n в зависимости от $\frac{A}{a}$ представлена на рис. 9.28.

Для звена, имеющего однозначную нелинейную характеристику с насыщением, характеристика k_n дана на рис. 9.28.

Для нелинейного звена с неоднозначной характеристикой комплексный коэффициент усиления k_n имеет две составляющие g и b , в связи с чем фаза первой гармоники x_2 оказывается отличной от фазы гармонического задания величины x_1 .

Комплексный коэффициент усиления

$$k_n = g\left(\frac{A}{a}\right) + j \cdot b\left(\frac{A}{a}\right),$$

где

$$g\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \cdot \sin \psi d\psi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[\frac{3}{4} \pi - \frac{\alpha}{2} - \cos \alpha + \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{a}{A} 2 \cos \alpha \right];$$

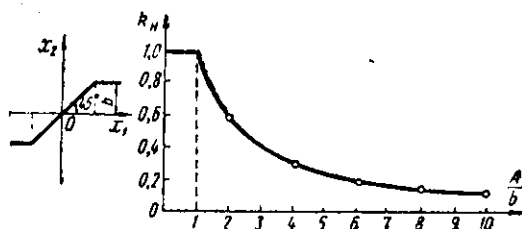


Рис. 9.28. Характеристика коэффициента усиления нелинейного звена насыщения

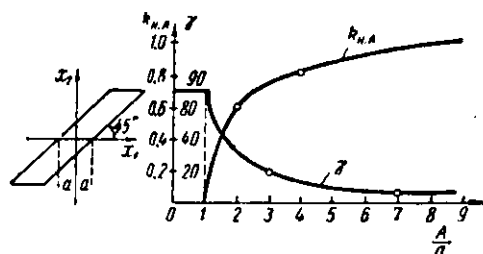


Рис. 9.29. Характеристика нелинейного звена типа люфта или сухого трения

$$b\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{2}{\pi A} \int_0^{\pi} f(A \sin \psi) \cos \psi d\psi =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[-\frac{3}{4} + \sin^2 \alpha + \frac{1}{4} \cos 2\alpha \right].$$

Здесь

$$\alpha = \arcsin \left(1 - \frac{2a}{A} \right).$$

Можно записать

$$k_n = k_{nA} \left(\frac{A}{a} \right) \cdot e^{I_1 \left(\frac{A}{a} \right)},$$

где

$$k_{н.А} \left(\frac{A}{a} \right) = \sqrt{g^2 + b^2}; \quad \gamma \left(\frac{A}{a} \right) = \arctg \frac{b}{g}.$$

На рис. 9.29 изображены характеристики $k_{н.А} = f \left(\frac{A}{a} \right)$ и $\gamma = \varphi \left(\frac{A}{a} \right)$ для рассматриваемого случая.

По методу Гольдфарба при использовании k_n в графических построениях на комплексной плоскости применяют зависимость, обратную по отношению к k_n , т. е. строят

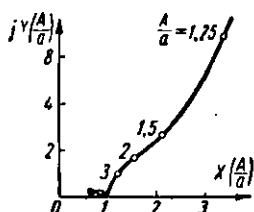


Рис. 9.30. Геометрическое место точек концов векторов для нелинейного звена с неоднозначной характеристикой

$$z_n = \frac{1}{k_n} = \frac{1}{g + jb} = \frac{g}{g^2 + b^2} - j \frac{b}{g^2 + b^2} = X \left(\frac{A}{a} \right) + jY \left(\frac{A}{a} \right).$$

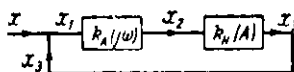


Рис. 9.31. Структурная схема нелинейной системы

Подобное геометрическое место точек концов векторов z_n для случая рис. 9.29 при $\frac{A}{a}$, изменяющемся от 0 до ∞ , представлено на рис. 9.30.

На характеристике $z_n = f \left(\frac{A}{a} \right)$ нанесены отдельные цифровые значения $\frac{A}{a}$, которым соответствуют определенные векторы z_n . При $\frac{A}{a} \rightarrow \infty$ величины k_n и z_n стремятся к единице. При $\frac{A}{a} \rightarrow 1$ величина $k_n \rightarrow 0$, а $z_n \rightarrow \infty$, причем сдвиг по фазе в последнем случае стремится к 90° , что видно также из рис. 9.29.

Следует подчеркнуть, что k_n зависит от величины A и не зависит от частоты входного воздействия.

Пусть имеется система, состоящая из линейной части с комплексным коэффициентом усиления $k_n(j\omega)$ и нелинейного элемента с комплексным коэффициентом усиления $k_n(A)$. Подобная система может быть представлена как последовательное

соединение двух звеньев с коэффициентами усиления $k_n(j\omega)$ и $k_n(A)$. На вход системы подается гармоническое возмущение x (рис. 9.31). На вход линейного звена поступает величина $x_1 = x - x_3$. Соответственно, на вход второго (нелинейного) звена подается величина x_2 .

Для коэффициентов усиления $k_n(j\omega)$ и $k_n(A)$ можно написать:

$$k_n(j\omega) = \frac{x_2}{x_1} \text{ и } k_n(A) \cong \frac{x_3}{x_2}.$$

Допустим, что в системе установились устойчивые автоколебания, которые могут возникнуть после начального возмущения. Тогда можно считать режим автоколебаний, происходящим при $x=0$.

В этом случае для уравнения первого приближения можно положить $x_3 = -x_1$.

Найдем условия возникновения автоколебаний на базе отмеченных соотношений. Напишем:

$$\begin{aligned} x_2 &= k_n(j\omega) \cdot x_1; \\ x_3 &= k_n(A) \cdot x_2 = -x_1. \end{aligned}$$

Отсюда, подставляя значение x_1 из второго равенства в первое и сокращая на x_2 , получим

$$1 = -k_n(j\omega) \cdot k_n(A)$$

или

$$-k_n(j\omega) = \frac{1}{k_n(A)}.$$

Следует подчеркнуть, что коэффициент усиления $k_n(j\omega)$ зависит лишь от частоты колебаний и не зависит от их амплитуды, в то время как коэффициент усиления $k_n(A)$ зависит от амплитуды и не зависит от частоты колебаний.

Решение полученного уравнения удобнее всего произвести графически путем построения на комплексной плоскости характеристик $-k_n(j\omega)$ и $\frac{1}{k_n(A)}$, т. е. амплитудно-фазовой характеристики $k_n(j\omega)$ линейной части, взятой с обратным знаком, и характеристики $z_n = \frac{1}{k_n(A)}$ для нелинейного звена.

Точка пересечения этих кривых определяет частоту и амплитуду возможных автоколебаний.

Если характеристики не пересекаются, то уравнение не имеет места и автоколебания в данной системе невозможны.

Пусть в системе имеется нелинейное звено с характеристиками, изображенными на рис. 9.29 и 9.30, что соответствует наличию в системе сухого трения или люфта.

На рис. 9.32 построено одно из возможных сочетаний характеристик $k_d(j\omega)$ и $\frac{1}{k_n(A)}$. Характеристики пересекаются в точке M . Наличие пересечения указанных кривых свидетельствует

лишь о возможности существования автоколебаний. Поэтому необходимо исследовать точку M на устойчивость автоколебаний. Очевидно, неустойчивые автоколебания физически в системе существовать не могут.

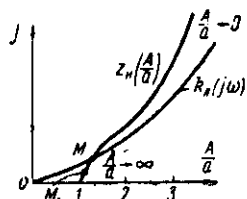


Рис. 9.32. Примерный вид характеристик $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$ и $k_d(j\omega)$

Устойчивость автоколебаний может быть определена следующим образом (эта оценка является приближенной и строго не обоснована). Если точка амплитудной характеристики $z_n(A)$, соответствующая увеличенной амплитуде $A + \Delta A$, не охватывается амплитудно-фазовой частотной характеристикой линейной части, то рассматриваемые колебания устойчивы, в противном случае — неустойчивы.

Пользуясь этим правилом, установим вид автоколебаний для случая рис. 9.32. При увеличении амплитуды на ΔA вектор z_n переместится по амплитудной характеристике в направлении $\frac{A}{a} \rightarrow \infty$, например

в точку M_1 . Поскольку последняя не охватывается амплитудно-фазовой частотной характеристикой, то в данном случае автоколебания устойчивы. Таким образом, система в линейном приближении (без учета нелинейного звена) является устойчивой, поскольку характеристика $k_d(j\omega)$ не охватывает точку $-1; j0$, или, что то же самое, точку $1, j0$, как это изображено на рис. 9.32.

Если учесть нелинейное звено (люфт или трение), то оказывается, что система является автоколебательной с устойчивыми колебаниями в точке M , которая определяет амплитуду (по характеристике z_n) и частоту [по характеристике $-k_d(j\omega)$] установившихся колебаний.

Рассмотрением характеристик z_n и k_d можно установить влияние параметров системы на устойчивость и определить, как надо деформировать амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы, чтобы избежать автоколебаний (если это, конечно, необходимо, так как в некоторых случаях они желательны).

Пример 9.26. Определение возможности возникновения автоколебаний в системе с насыщением по методу Гольдфарба.

Будем считать, что система имеет звено с однозначной нелинейной характеристикой насыщения, которую аппроксимируем,

как и выше (рис. 9.24), тремя отрезками прямых (наклонным и двумя горизонтальными).

Коэффициент усиления по первой гармонике для данного звена

$$k_n = g\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{4}{\pi} \left[\frac{a}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\cos \alpha}{\frac{A}{a}} \right],$$

где $\alpha = \arcsin \frac{a}{A}$ (a — ширина линейной зоны).

Положим, что в пределах линейной зоны коэффициент усиления звена равен единице (действительный коэффициент усиления можно рассматривать принадлежащим отдельному звену без насыщения). При увеличении амплитуды входного сигнала A коэффициент усиления будет уменьшаться и в пределе стремиться к нулю.

Величина, обратная k_n , т. е. $z_n\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{1}{k_n}$, нанесенная на комплексную плоскость, в этом случае будет представлять собой прямую линию, совпадающую с положительным направлением вещественной оси.

Поскольку с увеличением A/a коэффициент k_n стремится к нулю, то величина z_n будет стремиться к бесконечности и, наоборот, при $\frac{A}{a} \rightarrow 0$ величина $z_n\left(\frac{A}{a}\right) = 1$, так как $k_n = 1$ (в линейной зоне). Следовательно, $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$ располагается от точки 1, $j0$ вправо (рис. 9.33).

Нанесем на комплексную плоскость характеристику разомкнутой линейной части системы с обратным знаком $-k_{\pi 1}(j\omega)$, которая не охватывает точки 1, $j0$ (система как линейная устойчива). Поскольку характеристики $k_{\pi 1}$ и z_n не пересекаются, то автоколебаний не возникает и, следовательно, система устойчивая как линейная, остается устойчивой и при наличии звена с насыщением.

Возьмем теперь характеристику $k_{\pi 2}(j\omega)$ линейной части системы, которая охватывает точку 1, $j0$. В этом случае характеристики $k_{\pi 2}(j\omega)$ и $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$ пересекаются в некоторой точке M (рис. 9.27).

При увеличении амплитуды до величины $A_M + \Delta A$ вектор z_n переместится в некоторую точку M_1 , которая не охватывается характеристикой $k_{\pi 2}(j\omega)$, что свидетельствует о наличии устойчивых колебаний в системе.

Таким образом, неустойчивая линейная система превратилась в автоколебательную нелинейную систему за счет внесения в нее звена с нелинейной характеристикой типа насыщения.

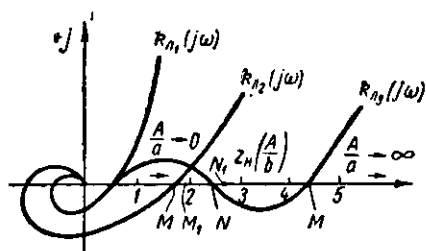


Рис. 9.33. Варианты расположения характеристик $k_d(j\omega)$ по отношению характеристики $z_H(\frac{A}{a})$ звена с насыщением

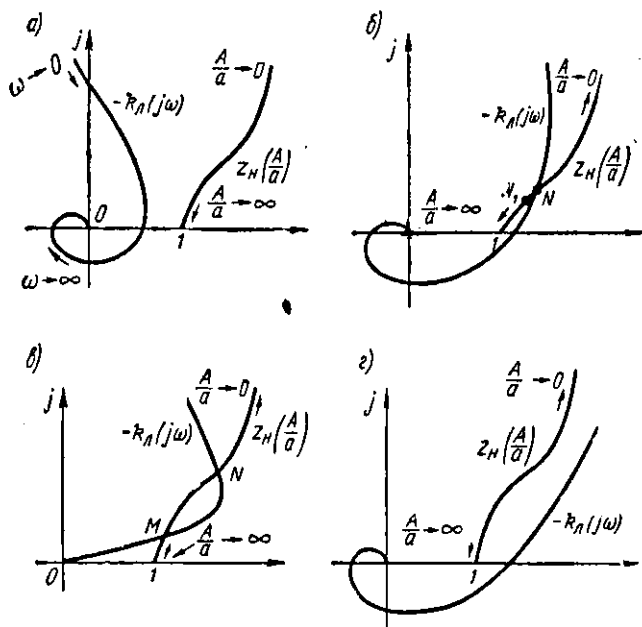


Рис. 9.34. Варианты взаимного расположения характеристик $k_d(j\omega)$ и характеристики $z_H(\frac{A}{a})$ звена с неоднозначной нелинейностью

Наконец, возьмем более сложную линейную характеристику $k_{лз}(j\omega)$ устойчивой системы, пересекающую характеристику z_n в двух точках N и M ; здесь возможны автоколебания в двух точках (рис. 9.27).

При увеличении амплитуды A первая точка N смещается в положение N_1 , которое охватывается характеристикой $k_{лз}(j\omega)$, вторая точка M при увеличении амплитуды не охватывается этой характеристикой. Поэтому в первом случае автоколебания неустойчивы, а во втором устойчивы.

Следовательно, система, устойчивая как линейная, при наличии звена с насыщением стала устойчива в малом и автоколебательна в большом.

Пример 9.27. Определение возможности возникновения автоколебаний в системе с люфтом по методу Гольдфарба.

Пусть задана характеристика $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$ вида, изображенного на рис. 9.32, для нелинейного звена типа люфта или сухого трения. Рассмотрим возможные варианты взаимного расположения линейной характеристики и неизменной нелинейной характеристики $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$.

На рис. 9.34, *а* характеристики не пересекаются, причем линейная часть устойчива, так как ее характеристика не охватывает точку $1, j0$. Система остается устойчивой и не имеет автоколебаний после внесения в нее нелинейного звена рассматриваемого типа.

На рисунке 9.34, *б* частотная характеристика охватывает точку $1, j0$ и имеет пересечение с характеристикой z_n (точка N). Если рассматривать увеличение амплитуды, то нужно передвинуться из точки N в некоторую точку N_1 , которая охватывается частотной характеристикой. Следовательно, автоколебания неустойчивые.

Таким образом, система неустойчивая, как линейная, при наличии нелинейного звена устойчивых автоколебаний в данном случае не имеет. Однако при амплитудах, меньших A_N , система становится устойчивой, так как при $A < A_N$ амплитуды при наличии нелинейного звена затухают (система в малом устойчива). При $A > A_N$ колебания неограниченно возрастают (система неустойчива в большом).

Таким образом, внесение в систему нелинейного элемента (сухое трение или люфт) стабилизировало систему при малых отклонениях от положения равновесия.

На рис. 9.34, *в* имеет место пересечение в двух точках M и N , причем частотная характеристика соответствует устойчивой линейной системе. Точка M характеризует устойчивые автоколебания, а точка N — неустойчивые.

При амплитудах, меньших A_N , система так же, как и в пре-

дыдущем случае, оказывается устойчивой, так как в этом случае колебания затухают. При амплитуде $A > A_N$ колебания возрастают и при амплитуде A_M становятся незатухающими. Следовательно, система устойчива в малом и имеет автоколебания в большом.

Наконец, в последнем варианте (рис. 9.34, з) характеристики не пересекаются, причем система, как линейная, неустойчива. При внесении люфта или сухого трения автоколебаний не возникает и система остается неустойчивой как в малом, так и в большом.

Пример 9.28. Определение автоколебаний с использованием логарифмических частотных характеристик в системе с насыщением.

Использование логарифмических частотных характеристик для определения автоколебаний наиболее удобно, если рассматривать неизменную структуру линейной части, определенную нелинейность, например, типа насыщения и переменный коэффициент усиления системы.

Рассмотрим случай, представленный на рис. 9.33, для системы с характеристикой $k_{\lambda 2}(j\omega)$. Предварительно строим характеристики: амплитудную логарифмическую $g_{\lambda}(\omega)$ и фазовую $\psi(\omega)$ (рис. 9.35).

Характеристика нелинейного звена $\frac{1}{g_n}$ представляет собой прямую линию, проходящую по вещественной оси, т. е. в зоне угла $\psi = 0^\circ$ или $\psi = -180^\circ$ [это зависит от знака $k_{\lambda}(j\omega)$]. Обычно на графике логарифмических характеристик нелинейная характеристика насыщения наносится в виде вертикальной линии в точке $\psi = -180^\circ$ вверх от нуля децибелл, так как $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$ меняется в пределах от $1 \div \infty$.

Точно так же, как и на комплексной плоскости (рис. 9.33), пересечение линейной и нелинейной характеристик свидетельствует о возможности возникновения автоколебаний. Устойчивость последних может быть установлена на основании следующих данных. Если $\frac{d\psi}{d\omega} < 0$ при перемещении точки M вверх с увеличением амплитуды A , то автоколебания устойчивы.

Из рассмотрения рис. 9.35 видно, что он соответствует характеристике $k_{\lambda 2}(j\omega)$, пересекающей $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$ в точке M и изображенной на рис. 9.33. Система, как линейная, неустойчива, причем звено с насыщением превращает ее в автоколебательную систему с устойчивым режимом автоколебаний.

Пример 9.29. Определение автоколебаний при помощи логарифмических характеристик в сложной системе с насыщением.

Рассмотрим использование логарифмических характеристик для случая системы с характеристикой, аналогичной характеристике $k_{лз}(j\omega)$, изображенной на рис. 9.33 (характеристика $k_{лз}(j\omega)$ имеет два пересечения с нелинейной характеристикой).

Пусть система имеет передаточную функцию

$$K(p) = \frac{k(p+b_1)(p+b_2)}{p(p+a_1)(p+a_2)(p+a_3)} = \frac{k(p+4)(p+8)}{p(p+0,4)(p+0,8)(p+50)}.$$

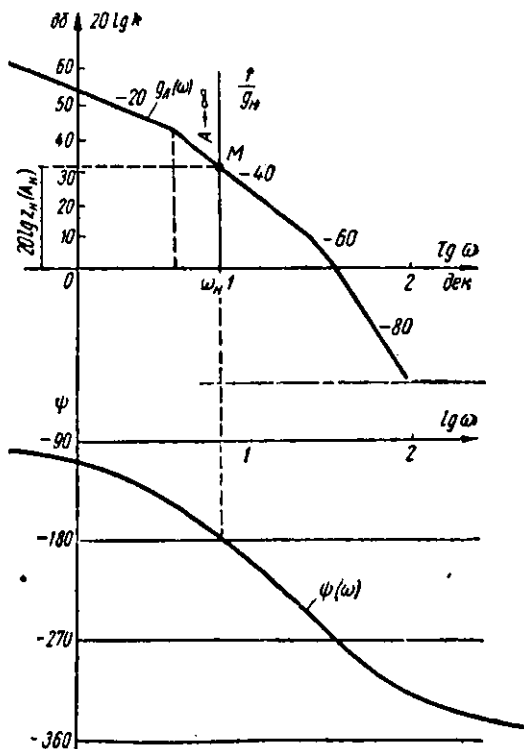


Рис. 9.35. Определение автоколебаний при помощи логарифмических характеристик в системе с насыщением

Расположение логарифмической амплитудной характеристики зависит от величины статического коэффициента усиления k .

На рис. 9.36 приведены три амплитудные характеристики — 1, 2, 3, соответствующие большому, среднему и малому значениям k .

Фазовая характеристика $\psi(\omega)$ занимает, естественно, неизменное положение при любых значениях k . Поскольку она пересекает линию -180° дважды (при $\omega=1$ и 5), то в точках пересечения проводятся линии нелинейной характеристики $1/g_H$.

При коэффициенте усиления k , соответствующем характеристике 3, пересечение с $1/g_n$ отсутствует. Система как линейная устойчива и автоколебаний нет. Характеристика 2 имеет одно пересечение в точке 5. В этом случае система неустойчива, как линейная, получает устойчивый автоколебательный режим ($\frac{d\psi}{d\omega} < 0$ и при увеличении амплитуды A точка характеристики $1/g_n$ перемещается вверх).

Частота, соответствующая точке 5, характеризует частоту автоколебаний, а их амплитуда определяется значением амплитуды по характеристике $1/g_n$ в точке 5.

Обратимся теперь к характеристике 1. Система с такой характеристикой в линейном плане является устойчивой. Характеристика 1 пересекает линии $1/g_n$ в точках 4 и 6, что свидетельствует о возможности возникновения двух автоколебательных режимов.

Рассмотрение точек пересечения 4 и 5 показывает, что точка 6 соответствует неустойчивым автоколебаниям, а точка 4 — устойчивым. Следовательно, при малых амплитудах система устойчива (устойчивость в малом). При увеличении амплитуды входного воздействия за ее значение при точке 6 система переходит в устойчивый автоколебательный режим.

Пример 9.30. Определение автоколебаний при помощи логарифмических характеристик в системе с релейным элементом.

Характеристика релейного элемента представлена на рис. 9.37. Величина $z_n\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{1}{k_n\left(\frac{A}{a}\right)}$ имеет две ветви, уходя-

щие в бесконечность (при $\frac{A}{a} = 1$ и $\frac{A}{a} \rightarrow \infty$). Минимум этой функции имеет место при $\frac{A}{a} = 1,41$ и составляет $z_{n,\min} = 1,61$

или $g_{n,\min} \approx 3,4$ дб. Характеристика является чисто вещественной. В связи с этим обычная характеристика устойчивой системы не будет пересекать нелинейной характеристики. Поэтому возьмем л. а. х. неустойчивой системы (рис. 9.38). Нанесем также фазовую характеристику $\psi(\omega)$ системы. Поскольку характеристика $z_n\left(\frac{A}{a}\right)$ является однозначной и, следовательно, вещественной, то она будет располагаться на комплексной плоскости по вещественной оси, а при использовании логарифмических характеристик в виде вертикальной линии (с двумя ветвями) в точке фазовой характеристики, соответствующей фазовому сдвигу $\psi = -180^\circ$ (рис. 9.38).

Начинаться эта характеристика будет на уровне $g_{n,\min} = 3,4$ дб.

Рис. 9.36. Влияние изменения коэффициента усиления на поведение системы с насыщением

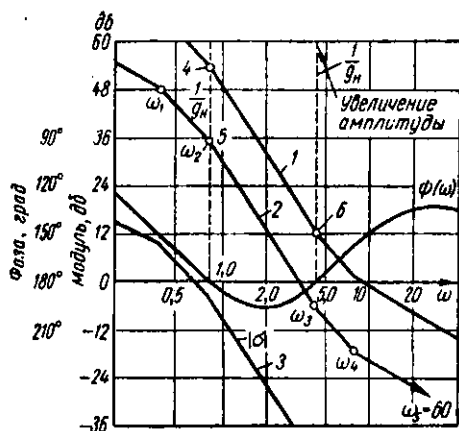


Рис. 9.37. Характеристика коэффициента усиления релейного звена

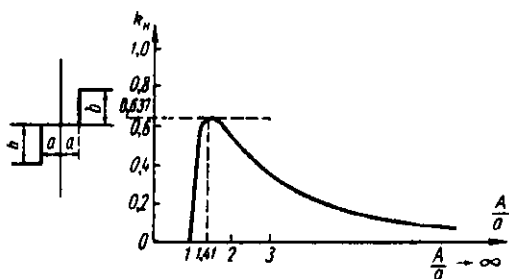
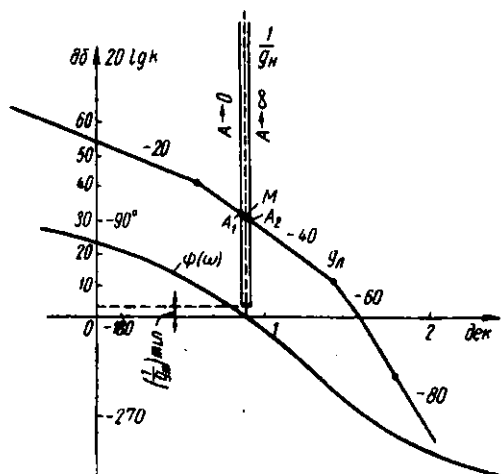


Рис. 9.38. Определение автоколебаний при помощи логарифмических характеристик в системе с релейным элементом



В рассматриваемом случае амплитудная характеристика пересекает обе ветви нелинейной характеристики при одной и той же частоте и разных амплитудах A_1 и A_2 , причем $A_1 < A_2$, что ясно из графика.

Пересечение в точке A_1 соответствует неустойчивым автоколебаниям ($\frac{d\psi}{d\omega} < 0$, но движение точки вниз при увеличении

амплитуды).

Следовательно, система неустойчивая, как линейная, стала устойчивой в малом (до амплитуды A_1). В точке A_2 имеют место устойчивые автоколебания (система автоколебательна в большом), т. е. при амплитуде $A > A_1$).

Пример 9.31. Определение автоколебаний при помощи логарифмических характеристик для системы с люфтом.

Нелинейная характеристика звена с люфтом является неоднозначной, в связи с чем коэффициент усиления подобного звена является комплексным, т. е. дает фазовый сдвиг. Поэтому в этом случае удобнее решать задачу на комплексной плоскости в обычном масштабе (рис. 9.34) или же в логарифмическом в координатах: логарифм амплитуды — фаза.

Пусть имеется система третьего порядка с люфтом. Передаточная функция ее в частотной форме

$$K(j\omega) = \frac{4,0}{j\omega(j\omega + 1)(0,1j\omega + 1)}.$$

На рис. 9.39 нанесена в координатах логарифм амплитуды — фаза амплитудно-фазовая логарифмическая характеристика системы $[g_n(j\omega)]$.

Там же построена нелинейная характеристика звена с люфтом — $\frac{1}{g_n\left(\frac{A}{a}\right)}$. Указанные характеристики пересекаются в двух

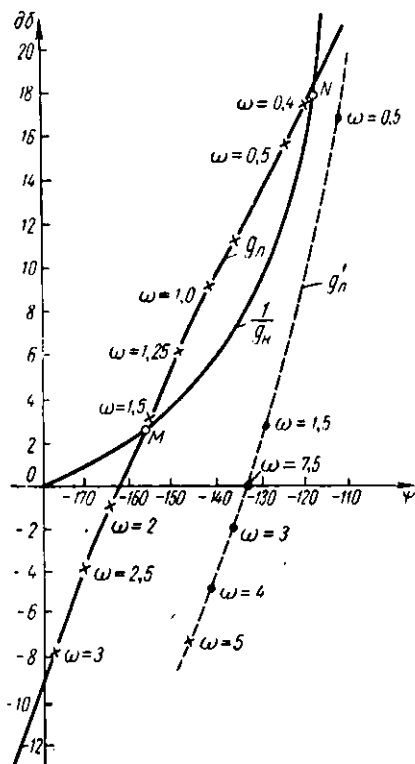


Рис. 9.39. Определение автоколебаний системы с люфтом при помощи логарифмических характеристик

точках M и N , что соответствует случаю, представленному на рис. 9.34, в, где дано такое же решение в обычном масштабе на комплексной плоскости. Точка N соответствует неустойчивому колебательному режиму, а точка M — устойчивым автоколебаниям. Следовательно, система устойчива «в малом» и автоколебательна «в большом».

Если необходимо устранить автоколебания, может быть применена линейная коррекция для смещения амплитудно-фазовой характеристики так, чтобы не было пересечений характеристик g_a и $\frac{1}{g_n}$. Результат такого смещения показан на рис. 9.39 (пунктирная линия, обозначающая новое положение амплитудно-фазовой характеристики g'_a). Коррекция достигнута при помощи последовательного корректирующего звена с передаточной функцией

$$K_k(j\omega) = 0,2 \frac{0,6 j\omega + 1}{0,12 j\omega + 1}.$$

Пример 9.32. Определение автоколебаний по методу Попова Е. П. для системы с насыщением.

Исходной теоретической базой метода Попова являются идеи гармонического баланса и эквивалентной линеаризации, разработанные в трудах И. М. Крылова и П. П. Боголюбова.

Эквивалентная линеаризация представляет собой приближенную замену нелинейного выражения выражением, которое похоже на линейное, но существенно отличается от него тем, что коэффициенты его зависят не только от частоты, но и от амплитуды искомых колебаний в системе. По методу Гольдфарба рассматривался наиболее простой вид нелинейности, описываемой непосредственно зависимостью между выходной и входной величинами, т. е.

$$x_2 = f(x_1).$$

В ряде случаев приходится иметь дело с нелинейными дифференциальными зависимостями. Встречаются и более сложные случаи, когда обе величины (входная и выходная и их производные) находятся под знаком нелинейной функции раздельно.

Рассмотрим нахождение приближенных уравнений нелинейных звеньев применительно к простейшей нелинейной дифференциальной зависимости вида $x_2 = f(x_1, \dot{x}_1)$ *.

Полагая, что $x_1 = A \sin \omega t$, можем написать

$$x_2 = f(A \sin \omega t, A\omega \cos \omega t).$$

* Ознакомиться с более сложными случаями можно в специальной литературе [Л. 21, 22].

Обозначим $u = \omega t$ и разложим функцию x_2 в ряд Фурье:

$$x_2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) du + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \times \right. \\ \left. \times \sin u du \right] \sin u + \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \cos u du \right] \cos u + \dots$$

Данный метод предполагает отсутствие постоянной составляющей при исследовании автоколебаний. Поскольку первый интеграл представляет собой некоторую постоянную величину, то полагаем этот интеграл равным нулю.

Отбросив высшие гармоники и учтя, что

$$\sin \omega t = \frac{x_1}{A} \text{ и } \cos \omega t = \frac{\dot{x}_1}{A\omega},$$

можем написать:

$$x_2 \approx q(A, \omega) x_1 + \frac{q_1(A, \omega)}{\omega} \dot{x}_1,$$

где

$$q(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \sin u du;$$

$$q_1(A, \omega) = \frac{1}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin u, A\omega \cos u) \cos u du.$$

Таким образом, нелинейное выражение заменяется приближенным, похожим на линейное. Последнее может рассматриваться как линейное при постоянных значениях A и ω , что имеет место при автоколебаниях. Это обстоятельство позволяет применить к полученному выражению линейные методы исследования для приближенного определения автоколебаний.

Следует отметить, что рассматриваемый вариант метода гармонического баланса отличается применением приближенного выражения, похожего на линейное, от метода Гольдфарба, построенного на использовании комплексного коэффициента усиления, зависящего только от амплитуды A и независящего от частоты колебаний системы.

Если определить значения коэффициентов приближенного уравнения для зависимостей $x_2 = f(x_1)$, то для этого частного случая выражения для комплексного коэффициента усиления, естественно, совпадут с теми, которые были получены ранее.

Зная приближенное уравнение нелинейного звена, определенное при помощи гармонической линеаризации, можно получить

приближенное уравнение всей системы, имеющей линейную часть и нелинейное звено.

Дифференциальное уравнение линейной части в общем виде

$$Q_n(p) x_1 = -R_n(p) x_1.$$

Приближенное уравнение нелинейного звена

$$Q_n(p) x_2 = R_n(p) x_1.$$

Операторные многочлены $Q_n(p)$ и $R_n(p)$ для различных характеристик нелинейностей будут иметь различный вид.

Перемножая приведенные уравнения, получим условное характеристическое уравнение замкнутой системы с учетом нелинейности:

$$Q_n(p) Q_n(p) + R_n(p) R_n(p) = 0.$$

Если в системе возникнут незатухающие колебания (автоколебания) с постоянной амплитудой A_n и постоянной частотой ω_n , то для этого режима коэффициенты характеристического уравнения становятся постоянными. В этом случае последнее уравнение является линейным с постоянными коэффициентами, которому соответствует пара чисто мнимых корней.

Появление незатухающих собственных колебаний в системе можно установить применением любого из методов определения границы устойчивости линейной системы. В частности может быть использован метод Михайлова.

Если в условное характеристическое уравнение замкнутой нелинейной системы при постоянной амплитуде A подставим переменную величину $j\omega$, которая по аналогии с линейными уравнениями может рассматриваться как параметр, играющий математически ту же роль, что и частота колебаний в системе, то получим ряд уравнений при различных постоянных значениях амплитуды $A_1, A_2, \dots, A_n$ и переменном параметре $j\omega$:

$$L(j\omega) = Q_n(j\omega) Q_n(j\omega) + R_n(j\omega) R_n(j\omega).$$

Эти уравнения графически представляют собой на комплексной плоскости семейство кривых, подобных кривым Михайлова для линейных систем.

Если уравнение нелинейного звена, как это рассматривалось выше, имеет вид $x_2 = f(x_1)$, то в случае однозначной характеристики нелинейного звена получим семейство уравнений вида

$$L(j\omega) = Q_n(j\omega) + R_n(j\omega) q(A_1).$$

В случае же неоднозначной характеристики получим

$$L(j\omega) = Q_n(j\omega) + R_n(j\omega) \left[q(A_1) + \frac{q_1(A_1)}{\omega} j\omega \right].$$

Для нахождения значений A_n , ω_n и построения семейства кривых Михайлова на комплексной плоскости, как обычно, выделяют в выражении $L(j\omega)$ вещественную и мнимую части:

$$L(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega).$$

Если имеют место автоколебания, то одна из кривых Михайлова при амплитуде A_n должна пройти через начало координат. В этом случае при некоторой частоте ω_n координаты этой кривой X_n и Y_n превращаются в нуль, т. е.

$$X(\omega_n, A_n) = 0 \text{ и } Y(\omega_n, A_n) = 0.$$

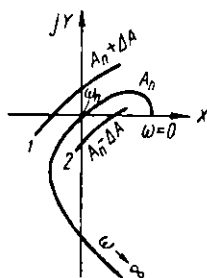


Рис. 9.40. Кривые Михайлова для определения устойчивости автоколебаний в нелинейной системе

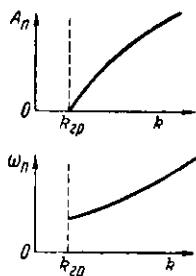


Рис. 9.41. Зависимости $A_n = f(k)$
 $\omega_n = f(k)$

Из этих двух уравнений можно определить искомые амплитуду A_n и частоту ω_n автоколебаний рассматриваемой нелинейной системы.

В случае, когда вещественные положительные решения для A_n и ω_n не получаются, то автоколебания в данной системе невозможны.

Далее необходимо определить, являются ли автоколебания устойчивыми (в случае положительных вещественных значений A_n и ω_n).

Дадим малое приращение амплитуде ΔA . Тогда при увеличенной амплитуде $A = A_n + \Delta A$ кривая Михайлова может занять положение 1 или 2 (рис. 9.40).

Кривая 1, поскольку она охватывает начало координат, характеризует в линейной теории устойчивую систему, колебания которой затухают. Кривая 2 — неустойчивую систему, колебания которой возрастают. Следовательно, если увеличенная амплитуда соответствует кривой 1, а уменьшенная ($A_n - \Delta A$) — кривой 2, то колебания являются устойчивыми, так как они с обеих сторон сходятся к началу координат.

Наоборот, если увеличенная амплитуда соответствует кривой 2, а уменьшенная — кривой 1, то колебания являются неустойчивыми. В этом случае кривая, проходящая через начало координат, является границей между затухающими (устойчивость в малом) и расходящимися колебаниями (неустойчивость в большом).

Данный метод позволяет также строить графики зависимостей ω_n и A_n от какого-либо параметра системы, например коэффициента усиления k . В этом случае последний надо считать переменным, т. е.

$$X(\omega_n, A_n, k) = 0;$$

$$Y(\omega_n, A_n, k) = 0.$$

Пользуясь этими уравнениями, можно найти зависимости $A_n = f(k)$ и $\omega_n = f(k)$, как это показано, например, на рис. 9.41.

Затем с помощью графиков можно выбирать параметр k в соответствии с условиями по амплитуде и частоте автоколебаний (если режим автоколебаний желателен в системе). В частности, при необходимости устранения автоколебаний параметр k выбирается из условия $k < k_{гр}$.

Рассмотрим применение метода Попова к исследованию нелинейной системы с насыщением.

Характеристика звена с насыщением [Л. 22]

$$q(A) = \frac{2k_y}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A} + \frac{b}{A} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A^2}} \right),$$

где k_y — коэффициент усиления звена в линейной зоне;
 b — ширина линейной зоны.

Пусть характеристическое уравнение линейной части системы

$$(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)p + k_n = 0.$$

По методу гармонической линеаризации характеристика с насыщением может быть заменена соотношением

$$x_2 = q(A) x_1.$$

Характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2) p^2 + p + k_n q(A) = 0.$$

Подставляя $p = j\omega$ и разделяя на вещественную и мнимую части, получим

$$X(A_n, \omega_n) = 0 \text{ и } Y(A_n, \omega_n) = 0$$

или

$$k_n q(A_n) - (T_1 + T_2) \omega_n^2 = 0;$$

$$1 - T_1 T_2 \omega_n^2 = 0.$$

Из последнего уравнения определяем частоту периодического режима:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}.$$

Подставляя значение ω_n и $q(A)$ в первое уравнение, получаем выражение для определения амплитуды A_n периодического решения через параметры системы:

$$\frac{2k_y k_y}{\pi} \left(\arcsin \frac{b}{A_n} + \frac{b}{A_n} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_n^2}} \right) = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Для определения устойчивости автоколебаний можно воспользоваться приемом, указанным на рис. 9.40, или одним из его вариантов [Л. 22].

Из выражения для ω_n видно, что частота автоколебаний зависит только от постоянных времени T_1 и T_2 .

Полученные соотношения позволяют построить зависимости амплитуды A_n и частоты ω_n при изменении каждого из параметров системы ($k = k_y$; T_1 или T_2 ; b).

Для определения влияния коэффициента усиления k на амплитуду автоколебаний получим:

$$k = \frac{\pi (T_1 + T_2)}{2T_1 T_2 \left(\arcsin \frac{b}{A_n} + \frac{b}{A_n} \sqrt{1 - \frac{b^2}{A_n^2}} \right)}.$$

При $A_n = b$ коэффициент усиления

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Следовательно, автоколебания могут возникнуть лишь при $k \geq k_{кр}$.

Вместе с тем, если рассматривать систему как линейную, то условия ее устойчивости могут быть получены как

$$\begin{aligned} k_{кр} - (T_1 + T_2) \omega_n^2 &= 0; \\ 1 - T_1 T_2 \omega_n^4 &= 0; \end{aligned}$$

откуда

$$k_{кр} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2}.$$

Таким образом, $k_{кр} = k_{кр}$.

Следовательно, при $k < k_{кр} = k_{кр}$ система является устойчивой и автоколебания не возникают (ср. с рис. 9.33).

Аналогичны решения задач по данному методу и для систем с другими нелинейностями, которые были рассмотрены выше применительно к методу Гольдфарба [Л. 5].



Глава X. МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

§ 10.1. Основы метода математического моделирования

Непрерывное повышение требований к современным системам автоматического управления в части точности, быстродействия, диапазона изменения переменных величин и параметров приводит к существенному усложнению управляющих алгоритмов. Становится необходимым учет тонких структур изучаемых процессов, что требует более полного и точного их математического описания. При этом обнаруживается возрастающее несоответствие возможностей теоретических методов исследования и проектирования автоматических систем практическим потребностям.

Аналитические методы разработаны достаточно полно и доведены до уровня инженерных расчетов лишь для линейных систем. Однако и здесь возрастание порядка дифференциальных уравнений, определяющих поведение системы управления, резко снижает эффективность теоретических расчетов вследствие их большой трудоемкости.

Для нелинейных же систем и процессов нет общего математического аппарата, и обычно приходится довольствоваться частными исследованиями отдельных вопросов, относящихся к учету влияния тех или иных нелинейностей на поведение соответствующих линеаризованных систем управления. Вместе с тем, наметившаяся в последние годы тенденция к широкому использованию новых кибернетических принципов в технике управления (оптимизация, самоприспособливание и т. д.) приводит к необходимости рассмотрения существенно нелинейных систем автоматического управления как за счет уточнения свойств объектов управления и условий их работы, так и в связи с применением более сложных управляющих алгоритмов. Поэтому во многих случаях приходится обращаться к экспериментальной дора-

ботке и отладке опытных образцов аппаратуры управления в натуральных условиях.

Однако метод экспериментального исследования на реальных установках (натуре) обладает рядом принципиальных недостатков, из которых следует указать, в первую очередь, на следующие:

а) высокая стоимость изготовления и испытаний экспериментальных образцов;

б) большие затраты труда и времени;

в) непригодность для исследования ряда важных режимов (аварийное состояние, предельные режимы и т. д.);

г) невозможность применения метода при разработке и проектировании новых систем, когда отсутствуют макеты и опытные образцы аппаратуры.

Кроме того, многие второстепенные факторы, сопровождающие реальные процессы управления, часто оказываются излишними на начальной стадии исследования, затемняющими основной процесс.

В связи с изложенным сейчас все более широкое применение в инженерной практике получает метод *математического моделирования*, который может рассматриваться как своеобразный вид экспериментального исследования систем автоматического управления.

В основу этого метода положено понятие о математической модели исследуемого процесса. Под *математической моделью** будем понимать совокупность сведений, используемых в качестве математического описания процесса управления, заданных в виде аналитических зависимостей (например, системы дифференциальных уравнений), таблиц, графиков, логических соотношений и т. п.

Математическая модель составляется на основе физических законов, выражающих связи между отдельными сторонами процесса, и экспериментальных данных, характеризующих численные значения переменных и параметров системы управления, а также тех зависимостей, которые не могут быть выражены в аналитической форме.

Возможны два пути исследования реального физического процесса (системы) по его математической модели.

Первый из них заключается в проведении расчетов (в том числе на универсальных цифровых вычислительных машинах) с помощью тех или иных расчетных методов, оканчивающихся обычно получением результата «на бумаге» (в виде графиков, таблиц, формул и т. д.).

* Во избежание путаницы в терминах рекомендуется избегать употребления выражений «математическая модель» и просто «модель» для сокращенного обозначения моделирующего устройства или вычислительной машины, как это принято рядом авторов.

Второй путь предусматривает *воспроизведение (реализацию)* исследуемого процесса, заданного его математической моделью, в виде искусственно создаваемого в специальной моделирующей системе (установке) физического процесса, *подобного или аналогичного* исследуемому процессу с точки зрения динамики управления. Подобие обоих процессов обычно выражается в том, что характеризующие их переменные величины, соответствующие друг другу, связаны между собой пропорциональной зависимостью в каждый момент времени.

Метод математического моделирования на практике обычно отождествляется со вторым путем исследования процесса управления по его математической модели.

В частном случае, когда физическая природа процессов в исследуемой системе и в моделирующей установке одинакова, имеет место так называемое *физическое моделирование*. Несмотря на большую наглядность последнего и ряд положительных качеств, возможности его весьма ограничены [см. Л. 15]. Вследствие этого моделирование систем автоматического управления в настоящее время производится почти исключительно при помощи математических моделирующих устройств, из которых наибольшее распространение получили электронные (ламповые и полупроводниковые), как наиболее экономичные и удобные в эксплуатации. Вместе с тем, в ряде случаев оказывается необходимым использование также и электромеханических устройств.

Первоначально моделирующие устройства создавались по принципу *прямой аналогии*, сущность которого состоит в том, что специально подбираются и сочетаются определенным образом между собой отдельные элементы (обычно, электрические: сопротивления, конденсаторы, катушки самоиндукции и др.) так, чтобы их естественные свойства воспроизводили соответствующие свойства элементов исследуемой системы, например таких, как вязкость, упругость, инерционность и т. д. Примерами такого моделирования могут служить: воспроизведение колебаний маятника при помощи электрического контура RLC , использование электродвигателя постоянного тока для моделирования аэродинамических свойств самолета и др. [Л. 15].

В настоящее время моделирование по методу прямой аналогии имеет ограниченное применение. Универсальность математических моделей, их независимость от физической природы исследуемых процессов обусловили то, что в качестве главного отличительного признака, характеризующего конкретные моделирующие устройства, принято выделять вид математических зависимостей (например, определенный класс дифференциальных уравнений), описывающих данный процесс. При таком подходе построение моделирующих устройств производится с позиций реализации в виде некоторого физического процесса исходной математической модели, отражающей свойства и за-

кономерности многих, различных по своему физическому содержанию реальных процессов, если все они могут быть количественно охарактеризованы данной математической моделью. При этом составные элементы моделирующих устройств различаются по виду выполняемых ими математических операций (умножение, суммирование, интегрирование и т. д.), а сами моделирующие устройства могут рассматриваться как *аналоговые вычислительные машины*, предназначенные для исследования физических процессов, описываемых определенным классом математических зависимостей. В отличие от моделирования по методу прямой аналогии здесь требование подобия величин соблюдается не по отдельным элементам, а для всего процесса в целом.

В последнее время начало успешно развиваться математическое моделирование на цифровых вычислительных машинах, обладающее рядом преимуществ, особенно важных при исследованиях сложных систем и процессов, требующих выполнения большого числа логических операций, учета статистических факторов и т. д. Однако это перспективное направление имеет свою специфику и в данной книге не рассматривается.

Основным средством исследования систем автоматического управления методом математического моделирования, получившим наибольшее распространение и быстро входящим в повседневную инженерную практику, являются по-прежнему аналоговые вычислительные машины (аналоговые моделирующие устройства), выпускаемые отечественной промышленностью. Их применение для анализа и расчета систем автоматического управления иллюстрируется на примерах, представленных в данной главе.

Вычислительная машина может замещать при моделировании исследуемую систему управления полностью или частично (например, объект управления при сохранении реального управляющего устройства). В последнем случае имеет место так называемое *моделирование с включением реальной аппаратуры* (иногда называемое также физическим моделированием), требующее специальных преобразующих устройств (динамических стендов) для сопряжения макетов или образцов приборов, входящих в исследуемую систему, с вычислительной машиной.

Подобный способ моделирования имеет очень важное практическое значение как средство для отладки и настройки приборов управления в условиях работы, близких к действительным. В качестве примеров такого использования аналоговых вычислительных машин можно указать на испытательные стенды для отладки автопилотов, имитирующие полет самолета или ракеты, различные тренажеры для летного состава и т. п.

Однако на стадии разработки и проектирования новых систем управления, естественно, применяется моделирование на вычислительных машинах всей системы в целом.

Одним из основных преимуществ метода математического моделирования является его инвариантность по отношению к характеру исследуемых задач. В частности, весьма важно то, что нет принципиальной разницы между моделированием линейных и нелинейных систем автоматического управления.

Тем не менее, опыт показывает, что в подавляющем большинстве случаев сначала исследуется модель линеаризованной системы, а затем уже в нее вводятся те или иные нелинейные зависимости.

Соответственно этому в первую очередь необходимо освоить методику моделирования линейных систем на аналоговых вычислительных машинах.

Для исследования линейных систем управления необходимо иметь в составе моделирующего устройства вычислительные элементы, выполняющие три математические операции: масштабное преобразование (умножение на постоянный множитель), суммирование и интегрирование. В современных электронных вычислительных машинах все эти действия выполняются при помощи так называемого *решающего* (или *операционного*) усилителя постоянного тока с отрицательной обратной связью (рис. 10.1).

При большом значении коэффициента усиления k усилителя передаточная функция последнего достаточно точно описывается следующим выражением [Л. 15]:

$$\frac{U_{\text{вых}}(p)}{U_{\text{вх}}(p)} = -\frac{Z_0(p)}{Z_1(p)} \quad (\text{рис. 10.1, а}),$$

где $Z_1(p)$ — входное сопротивление усилителя;

$Z_0(p)$ — сопротивление в цепи обратной связи.

В зависимости от характера $Z_1(p)$ и $Z_0(p)$ будем иметь один из тех случаев:

1) если

$$Z_1(p) = R_1 \text{ и } Z_0(p) = R_0,$$

то

$$U_{\text{вых}}(p) = -\frac{R_0}{R_1} U_{\text{вх}}(p),$$

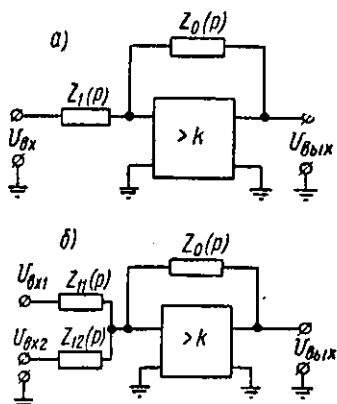


Рис. 10.1. Основные элементы структурных моделей:

а — решающий усилитель;
б — суммирующий усилитель

и усилитель выполняет операцию умножения на постоянный отрицательный множитель (инвертирование сигнала);

2) если

$$Z_1(p) = R, \text{ а } Z_0(p) = \frac{1}{Cp},$$

то

$$U_{\text{вых}}(p) = -\frac{1}{RCp} U_{\text{вх}}(p),$$

и усилитель является интегрирующим;

3) если

$$Z_0(p) = R, \text{ а } Z_1(p) = \frac{1}{Cp},$$

то

$$U_{\text{вых}}(p) = -RCp U_{\text{вх}}(p),$$

т. е. усилитель играет роль дифференцирующего звена.

Заметим, что при моделировании систем автоматического управления по возможности избегают применения дифференцирующих усилителей вследствие их чувствительности к внешним и внутренним помехам (наводкам), имеющим обычно повышенную частоту.

На рис. 10.1, б изображен суммирующий усилитель, выходная величина которого в операторной форме определяется выражением

$$U_{\text{вых}}(p) = -Z_0(p) \sum_{i=1}^n \frac{U_{\text{вх}i}(p)}{Z_{1i}(p)},$$

где $Z_{1i}(p)$ — сопротивление i -ой входной цепи.

При $Z_0(p) = \frac{1}{Cp}$ имеем суммирующий интегрирующий усилитель.

Существует два способа набора задач на моделирующих устройствах:

а) набор по дифференциальному уравнению, описывающему данную систему;

б) набор по структурной схеме исследуемой системы.

В первом случае за исходные данные при моделировании принимается уравнение (или система уравнений), которое приводится к определенному виду.

Поясним применение этого метода на примере исследования простой системы автоматического управления, динамические свойства которой описываются линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами:

$$x'' + a_1 x' + a_2 x = f(t).$$

Пусть машинное уравнение (т. е. уравнение, подготовленное для набора на модели и отличающееся от исходного, только масштабами переменных) имеет вид

$$P^2X + a_1PX + a_2X = F.$$

Здесь X и F не операторные изображения функций x и f , а так называемые *машинные переменные* (чтобы не усложнять записи, примем все масштабные коэффициенты равными единице).

Разрешив машинное уравнение относительно старшей производной, получим

$$P^2X = F(t) - a_1PX - a_2X. \quad (10.1)$$

Представим себе, что на вход интегрирующего усилителя подана величина P^2X (не предпринимая пока вопроса о ее получении). Тогда на выходе этого усилителя получим величину, равную $-PX$. Подав ее, в свою очередь, на второй интегрирующий усилитель, получим на его выходе X (рис. 10.2, а). Если нам нужно иметь отрицательную величину $-X$, то мы должны будем использовать инверсный усилитель. Остается умножить величины $-PX$ и $-X$ соответственно на постоянные a_1 и a_2 , при этом получим все члены, стоящие в правой части машинного уравнения.

Подадим величины F , $-a_1PX$ и $-a_2X$ на вход первого интегрирующего (и одновременно суммирующего) усилителя (умножение на a_1 и a_2 можно осуществить подбором сопротивлений и делителей напряжения во входных цепях усилителя), как показано на рис. 10.2, б. Полученная схема, работающая по принципу «сведения баланса», обеспечит выполнение равенства (10.1).

Подобным образом решаются и более сложные задачи, описываемые одним или несколькими уравнениями.

Однако в практике моделирования систем автоматического управления наибольшее применение получил другой способ набора задач, заключающийся в том, что исследуемая система набирается по отдельным звеньям, соответствующим определенным звеньям структурной схемы исследуемой системы. Этот способ оказывается предпочтительнее в силу ряда причин:

1) системы автоматического управления обладают явно выраженной направленностью передачи воздействий, равно как и составляющие их звенья, передаточные функции которых выра-

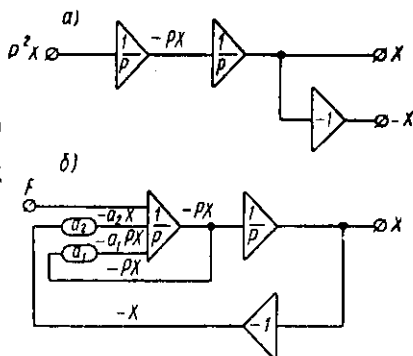


Рис. 10.2. Моделирование системы автоматического управления по уравнению

жают математическую зависимость двух величин (входной и выходной) и поэтому удобны для моделирования по звеньям;

2) набор задачи по структурной схеме модели дает ясное представление о соответствии величин и параметров в исследуемой системе и модели, что удобно при подборе корректирующих связей;

3) такой способ позволяет осуществлять набор задачи путем сочетания небольшого числа элементов модели, соответствующих типовым звеньям направленного действия, из которых обычно составляется структурная схема системы автоматического управления.

Часть наиболее употребительных звеньев модели приведена в табл. 10.1, в которой указаны также и соответствующие им передаточные функции.

Масштабы переменных величин задаются при этом весьма просто.

Машинная переменная X_i связана с соответствующей переменной x_i выражением

$$X_i = m_i x_i,$$

где m_i — масштабный коэффициент.

За машинную единицу обычно принимается напряжение, равное 100 в.

При выборе масштаба нужно следить, чтобы

$$m_i x_i < 1 \text{ (100 в.)}$$

Если t — натуральное, а τ — машинное время, то

$$\tau = m_t t,$$

где m_t — масштабный коэффициент времени.

Так как

$$p = \frac{d}{dt},$$

то в машинных единицах будем иметь

$$P = \frac{d}{d\tau} = \frac{1}{m_t} p,$$

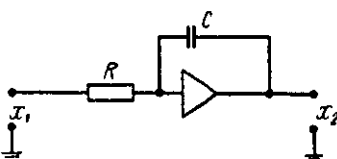
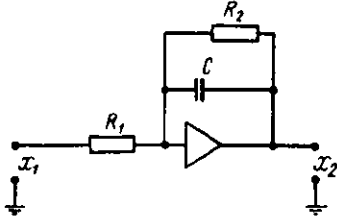
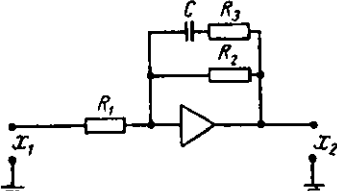
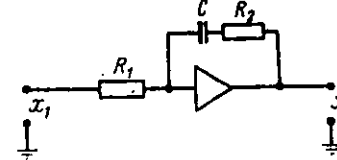
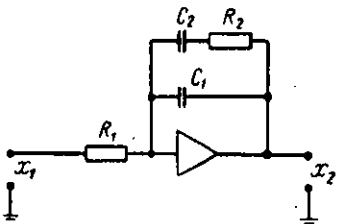
откуда

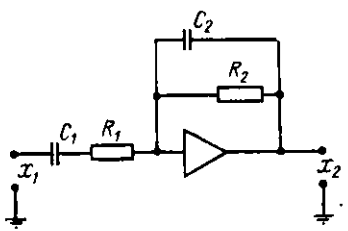
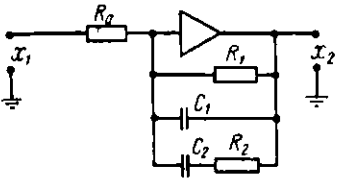
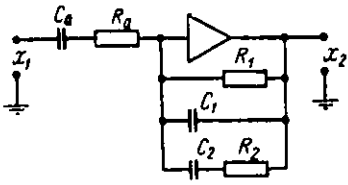
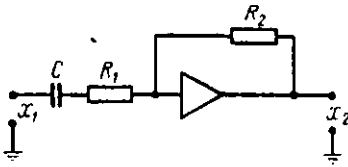
$$p = m_t P. \quad (10.2)$$

Обычно моделирование ведется в замедленном ($m_t > 1$) или натуральном ($m_t = 1$ — при сочетании модели с реальной аппаратурой) масштабе времени.

Определив состав решающих элементов, входящих в моделирующее устройство, предназначенное для решения определенного типа задач, необходимо установить связь между отдельными элементами, задать численные значения параметров исследуемой системы и начальных условий.

Таблица 10.1

Пункт	Схема	Передающая функция
а		$k(p) = -\frac{1}{Tp}; \quad T = RC$
б		$k(p) = -\frac{k}{Tp+1}; \quad k = \frac{R_2}{R_1};$ $T = R_2C$
в		$k(p) = -k \frac{T_1p+1}{T_2p+1}; \quad k = \frac{R_2}{R_1};$ $T_1 = R_3C;$ $T_2 = (R_2+R_3)C$
г		$k(p) = -\frac{T_2p+1}{T_1p};$ $T_1 = R_1C; \quad T_2 = R_2C$
д		$k(p) = -\frac{1}{T_1p} \cdot \frac{T_2p+1}{T_3p+1};$ $T_1 = R_1(C_1+C_2); \quad T_2 = C_2R_2;$ $T_3 = \frac{C_1}{C_1+C_2} T_2$

Пункт	Схема	Передаточная функция
е		$k(p) = - \frac{T_3 p}{(T_1 p + 1)(T_2 p + 1)};$ $T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = R_2 C_2;$ $T_3 = C_1 R_2$
ж		$k(p) = - \frac{k(1 + T_3 p)}{1 + p(T_1 + T_2 + T_3) +$ $+ p^2 T_1 T_2};$ $k = \frac{R_1}{R_0};$ $T_1 = R_1 C_1; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad T_3 = C_2 R_1$
з		$k(p) = - \frac{p T_4 (1 + p T_2)}{[1 + p(T_1 + T_2 + T_3) +$ $+ p^2 T_1 T_2](1 + p T_4)};$ $T_1 = C_1 R_1; \quad T_2 = R_2 C_2; \quad T_3 = C_2 R_1;$ $T_4 = R_1 C_a; \quad T_a = R_a C_a.$
и		$k(p) = - k \frac{T_1 p}{T_1 p + 1};$ $T_1 = R_1 C; \quad k = \frac{R_2}{R_1}$

В зависимости от способа соединения решающих блоков современные аналоговые вычислительные машины могут быть построены по *матричному* или *структурному* принципам.

В моделирующих установках матричного типа вход каждого решающего элемента заранее соединен с выходами всех элементов через коммутационные устройства, при помощи которых из-

меняется степень связей между решающими элементами в соответствии с численными значениями коэффициентов исследуемой системы уравнений (таковы моделирующие установки ИПТ-4, ЭЛИ-14, ЭЛИ-12 и др.).

Преимуществом матричных моделирующих устройств, упрощающих их эксплуатацию, является минимум коммутационных операций между блоками, которые сводятся к установке численных значений коэффициентов.

Вместе с тем, данному типу присущ ряд недостатков: увеличивается число потребных решающих усилителей; для набора задачи предварительно преобразовывается исходная система дифференциальных уравнений в специальную матричную форму, что оказывается сопряженным со значительной подготовительной работой; затрудняется воспроизведение нелинейных зависимостей.

В связи с этим современные моделирующие устройства строятся, в основном, по структурному принципу, при котором решающие элементы (или их группы) выполняются конструктивно в виде отдельных блоков, соединенных между собой гибкими проводами непосредственно или на специальном наборном поле в соответствии со схемой набора исследуемой задачи (ИПТ-5, МПТ-9, МИ-7, ЭМУ-8 и др.). При этом обычно не требуется особой подготовки исходных уравнений для набора на машине. Суть подготовительных операций в основном сводится к составлению схемы набора задачи и выбору надлежащих масштабов переменных, что легко усваивается из рассматриваемых в данной главе примеров.

Большие возможности и эффективность метода математического моделирования наиболее полно раскрываются при исследовании нелинейных систем. В практике моделирования различают воспроизведение так называемых типичных нелинейностей систем автоматического управления (насыщение, люфт, сухое трение, релейные характеристики и т. д.) и воспроизведение нелинейных зависимостей произвольного вида.

В принципе моделирование нелинейных систем и процессов производится так же, как и линейных, однако используемые при этом технические средства являются более сложными.

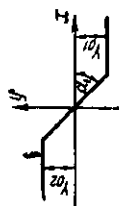
Типичные нелинейности систем автоматического управления обычно воспроизводятся при помощи комбинаций линейных решающих усилителей с так называемыми диодными ограничителями и запирающими напряжениями (основные схемы набора типичных нелинейностей приведены в табл. 10.2).

Для воспроизведения функций произвольного вида, получения произведений переменных и ряда других нелинейных операций в электронных моделирующих установках наиболее часто используются диодные функциональные преобразователи, основанные на линейнокусочной аппроксимации воспроизводимых

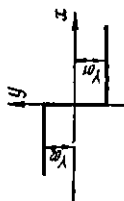
Таблица 102

Наименование нелинейной зависимости	График нелинейной зависимости	Схема соединения элементов на коммутационном поле
а) ломаная линия А		
б) ломаная линия Б		
в) ломаная линия В		
г) ломаная линия Г		
д) зона нечувствительности		

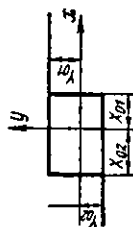
е) ограничение по Y



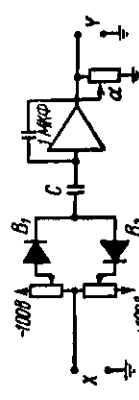
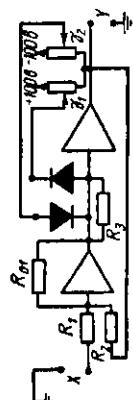
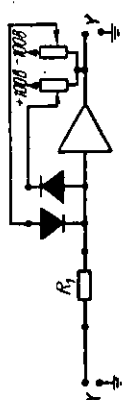
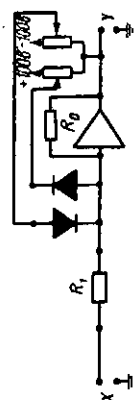
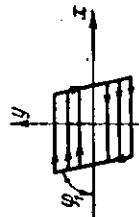
ж) момент сухого трения



з) релейная характеристика



и) люфт



функциональных зависимостей. Кроме того, применяются схемы на электронно-лучевых трубках, а также электромеханические блоки [Л.15].

В инженерной практике обычно стремятся сначала воспроизвести модель линеаризованной системы управления (а в существенно нелинейных системах, не поддающихся линеаризации, — линейную часть системы), которая затем усложняется в процессе исследования введением нелинейных зависимостей.

§ 10.2. Примеры моделирования линейных систем автоматического управления

Пример 10.1. Составление схемы набора апериодического звена.

Передаточная функция апериодического звена

$$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{k}{1 + Tp}.$$

Выбирая масштаб времени m_t (выбор его числового значения зависит от параметров моделируемого звена), запишем на основании формулы (10.2)

$$p = m_t P.$$

Введем машинные переменные, после чего

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{k}{1 + T m_t P},$$

откуда

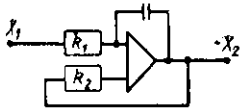
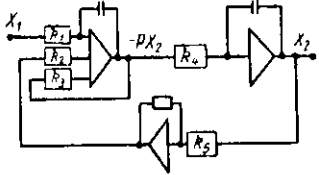
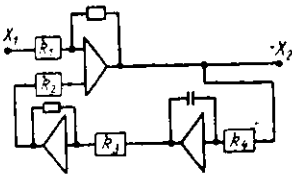
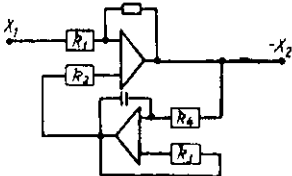
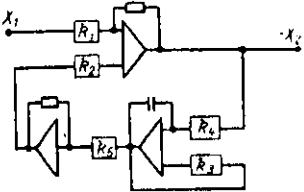
$$m_t T P X_2 + X_2 = k X_1$$

или

$$P X_2 = \frac{k}{m_t T} X_1 - \frac{1}{m_t T} X_2.$$

Предположим, что уже имеется величина — X_1 в виде электрического напряжения. Взяв от нее с помощью делителя часть, пропорциональную коэффициенту $\frac{1}{m_t T}$, и просуммировав с напряжением $\frac{k}{m_t T} X_1$ (X_1 — заданная входная величина), получим напряжение, пропорциональное $P X_2$, которое затем подадим на вход интегрирующего усилителя. Тогда на выходе усилителя получим величину — X_2 . Соединив выход усилителя с входной клеммой, принятой в начале набора за величину — X_2 , получим требуемую схему модели апериодического звена, приведенную в табл. 10.3, пункт а, в которой через k_1 и k_2 обозначены переда-

Таблица 10.3

Пункт	Передаточная функция	Схема набора	Коэффициенты
a	$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{k}{1 + pT}$		$k_1 = \frac{k}{m_f T};$ $k_2 = \frac{1}{m_f T}$
б	$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{k}{1 + 2\zeta T p + T^2 p^2}$		$k_1 = \frac{k}{m_f^2 T^2};$ $k_2 k_5 = \frac{1}{m_f^2 T^2};$ $k_3 = \frac{2\zeta}{m_f T}; \quad k_4 = 1$
в	$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = k \frac{p}{1 + pT}$		$k_1 = \frac{k}{T};$ $k_2 k_3 k_4 = \frac{1}{m_f T}$
г	$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = k \frac{1 + pT_1}{1 + pT_2}, \quad T_1 < T_2$		$k_1 = k \frac{T_1}{T_2};$ $k_2 = \frac{1}{m_f T_1};$ $k_3 k_4 = k_2 - \frac{1}{m_f T_2}$
д	$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = k \frac{1 + pT_1}{1 + pT_2}, \quad T_1 > T_2$		$k_1 = k \frac{T_1}{T_2};$ $k_3 = \frac{1}{m_f T_1};$ $k_2 k_4 k_5 = \frac{1}{m_f T_2} - k_3$

точные коэффициенты решающего усилителя по соответствующим входным каналам*.

Пример 10.2. Составление схемы набора колебательного звена.

Передаточная функция колебательного звена

$$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\zeta T p + 1}.$$

Принимая масштаб времени m_t и переходя при помощи соотношения

$$p = m_t P$$

к машинным уравнениям, будем иметь

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{k}{m_t^2 T^2 P^2 + 2\zeta m_t T P + 1},$$

откуда

$$m_t^2 T^2 P^2 X_2 + 2\zeta m_t T P X_2 + X_2 = k X_1$$

или

$$P^2 X_2 = \frac{k}{m_t^2 T^2} X_1 - \frac{2\zeta}{m_t T} P X_2 - \frac{1}{m_t^2 T^2} X_2.$$

Как и в предыдущем примере, предположим, что в схеме набора имеются величины X_1 , $-PX_1$ и $-X_2$. Умножив их с помощью делителей на соответствующие коэффициенты и просуммировав, будем иметь на входе интегрирующего усилителя $P^2 X_2$. С выхода этого усилителя снимем $-PX_2$ и, проинтегрировав на втором усилителе, получим X_2 . Подав X_2 на инвертирующий усилитель, получим $-X_2$. Располагая $-PX_2$ и $-X_2$, произведем все соединения на коммутационном поле. Схема набора приведена в табл. 10.3, пункт б.

Если при сопряжении данного звена с другими звеньями необходимо иметь величины X_2 и $-X_2$, то коэффициенты k_2 и k_3 имеют значения:

$$k = \frac{1}{m_t^2 T^2}; \quad k_3 = 1.$$

Если же необходимо иметь только X_2 , то коэффициент $\frac{1}{m_t^2 T^2}$ может быть перераспределен как угодно между вторым и пятым входами, т. е.

$$k_2 k_3 = \frac{1}{m_t^2 T^2}.$$

* В примерах § 10.2 при переходе к машинным переменным, чтобы не усложнять запись уравнений, не вводятся масштабные множители m_t для переменных величин, которые легко учитываются при выборе передаточных коэффициентов решающих усилителей.

Пример 10.3. Составление схемы набора дифференцирующего звена.

Передаточная функция дифференцирующего звена

$$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = \frac{kp}{1 + Tp}.$$

Вводя масштаб времени m_t , переходим к машинным уравнениям:

$$\frac{X_2}{X_1} = \frac{km_t P}{1 + m_t T P}$$

или

$$m_t T P X_2 = km_t P X_1 - X_2.$$

Эту схему, требующую применения дифференцирующего усилителя, стараются не воспроизводить по причинам, изложенным в § 10.1. Поэтому сделаем дополнительное преобразование, разделив обе части последнего выражения на $m_t T P$,

$$X_2 = \frac{k}{T} X_1 - \frac{1}{m_t T} \cdot \frac{X_2}{P}.$$

Предполагая, что в схеме имеются величины X_1 и $-\frac{X_2}{P}$, умножим их на соответствующие коэффициенты и просуммируем на входе решающего усилителя. С выхода последнего снимем величину $-X_2$.

Интегрируя $-X_2$, получим $\frac{X_2}{P}$ и после инвертирования с помощью третьего усилителя будем иметь $-\frac{X_2}{P}$. Схема набора звена приведена в табл. 10.3, пункт в.

Пример 10.4. Составление схемы набора интегро-дифференцирующего звена.

Передаточная функция моделируемого звена

$$\frac{x_2(p)}{x_1(p)} = k \frac{1 + T_1 p}{1 + T_2 p}.$$

Переходя к машинным уравнениям, имеем

$$\frac{X_2}{X_1} = k \frac{1 + m_t T_1 P}{1 + m_t T_2 P}$$

или

$$k(m_t T_1 P + 1) X_1 = (m_t T_2 P + 1) X_2.$$

Умножим обе части полученного выражения на T_1 и добавим затем к правой части $T_2 X_2 - T_1 X_2$, тогда получим:

$$k(m_t T_1 P + 1) T_1 X_1 = (T_2 T_1 m_t P + T_1) X_2 + T_2 X_2 - T_1 X_2;$$

$$k(m_t T_1 P + 1) T_1 X_1 = T_2 (m_t T_1 P + 1) X_2 - (T_2 - T_1) X_2;$$

$$k T_1 X_1 + \frac{T_2 - T_1}{m_t T_1 P + 1} X_2 = T_2 X_2.$$

Окончательно

$$X_2 = k \frac{T_1}{T_2} X_1 + \frac{1 - \frac{T_1}{T_2}}{m_i T_1 P + 1} X_2.$$

Множитель, стоящий перед X_2 в правой части последнего равенства, представляет собой не что иное, как передаточную функцию апериодического звена, рассмотренного в примере 10.1, с передаточным коэффициентом, равным $1 - \frac{T_1}{T_2}$.

Следовательно, выходную величину X_2 необходимо подать через схему модели апериодического звена на вход решающего усилителя, суммируя ее с величиной $k \frac{T_1}{T_2} X_1$. Отсюда вытекает схема набора, представленная в двух вариантах в табл. 10.3, пункты ε и δ .

Согласно табл. 10.3, пункт α , имеем

$$k_3 = \frac{1}{m_i T_1}; \quad k_3 k_4 = \frac{1 - \frac{T_1}{T_2}}{m_i T_1} = \frac{1}{m_i T_1} - \frac{1}{m_i T_2} = k_3 - \frac{1}{m_i T_2}.$$

Если $T_2 > T_1$, то $1 - \frac{T_1}{T_2} > 0$, и выходная величина схемы модели апериодического звена должна иметь тот же знак, что и X_1 . Это обеспечивается наличием в замкнутой цепи (табл. 10.3, пункт ε) двух решающих усилителей, вследствие чего знак меняется дважды.

Если же $T_2 < T_1$, то $1 - \frac{T_1}{T_2} < 0$ и уравнение набора задачи примет вид

$$X_2 = k \frac{T_1}{T_2} X_1 - \frac{\frac{T_1}{T_2} - 1}{m_i T_1 P + 1} X_2.$$

В этом случае для изменения знака в замкнутой цепи должно быть три усилителя, что отображено в табл. 10.3, пункт δ . При этом

$$k_3 k_4 k_5 = \frac{1}{m_i T_2} - k_3.$$

Пример 10.5. Исследование переходного процесса в следящей системе копировально-фрезерного станка.

Структурная схема системы приведена на рис. 10.3. Примем единичное входное воздействие и указанные ниже параметры системы: передаточный коэффициент преобразующего устройства $k_c = 10$ в/мм; передаточный коэффициент дифференцирующего трансформатора $k_{\Delta t} = 0,104$ сек; коэффициент усиления

электронного усилителя напряжения $k_{y.н} = 6,3$; передаточный коэффициент ЭМУ по напряжению $k_s = 35,6$; передаточный коэффициент двигателя с редуктором по скорости $k_{дв} = \frac{1}{c_e f_p} = 0,053 \frac{\text{мм сек}}{\text{в}}$; коэффициент гибкой обратной связи $k_{o.с} = 0,027 \text{ сек}$, постоянная времени дифференцирующего трансформатора $T_z = 0,0303 \text{ сек}$; постоянная времени поперечной цепи

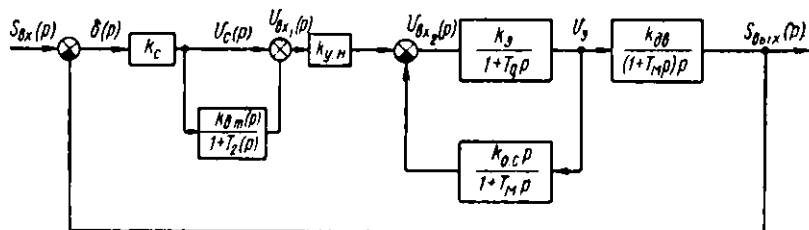


Рис. 10.3 Структурная схема следящей системы копировально-фрезерного станка

якоря ЭМУ $T_q = 0,0616 \text{ сек}$; электромеханическая постоянная двигателя $T_m = 0,134 \text{ сек}$.

В структурной схеме линейной системы передаточные коэффициенты можно перераспределять между звеньями, не охваченными обратными связями (или охваченными одинаково). Воспользовавшись этим, представим передаточные коэффициенты звеньев прямой цепи системы k_c , $k_{y.н}$, $k_{дв}$ в виде произведений

$$k_c = k'_c k''_c; \quad k_{y.н} = k'_{y.н} k''_{y.н}; \quad k_{дв} = k'_{дв} k''_{дв},$$

придав отдельным сомножителям следующие числовые значения:

$$\begin{aligned} k'_c &= 1, & k''_c &= 10; \\ k'_{y.н} &= 1, & k''_{y.н} &= 6,3; \\ k'_{дв} &= 1, & k''_{дв} &= 0,053. \end{aligned}$$

Произведение $k''_c k''_{y.н} k''_{дв}$ отнесем к последнему (интегрирующему) звену. Благодаря этому при последующих расчетах коэффициентов схемы набора по отдельным входам усилителей будут, в основном, иметь дело с единичными передаточными коэффициентами, что упрощает вычисления.

Используя затем табл. 10.3, составим по исходной структурной схеме следящей системы схему набора ее математической модели (рис. 10.4).

С помощью формул, приведенных в табл. 10.3, рассчитаем передаточные коэффициенты по входам усилителей, приняв масштаб времени $m_t = 20$:

$$k_1 = 1; k_2 = 1; k_3 = \frac{k_{\text{а.т}}}{T_1} = \frac{0,104}{0,0303} = 3,43;$$

$$k_4 k_5 = \frac{1}{m_t T_2} = \frac{1}{20 \cdot 0,0303} = 1,65; k_4 = 1,65; k_5 = 1; k_6 = 1;$$

$$k_7 = k'_c k'_{y.u} = 1 \cdot 1 = 1; k_8 = k_7 = k'_c k'_{y.u} = 1;$$

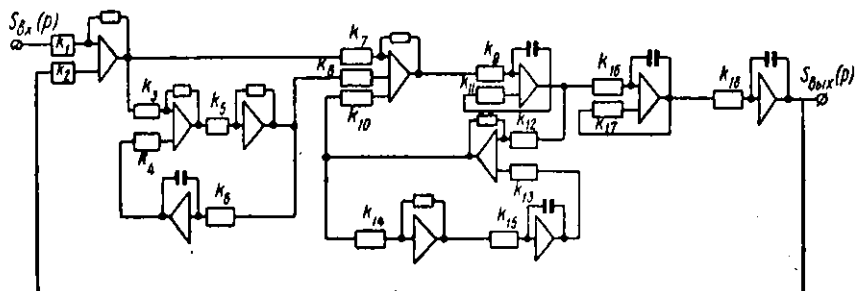


Рис. 10.4. Схема набора к примеру 10.5.

$$k_9 = \frac{k_{\text{э.м.у}}}{m_t T_q} = \frac{35,6}{20 \cdot 0,0616} = 28,9;$$

$$k_{10} = 1; k_{11} = \frac{1}{m_t T_q} = \frac{1}{20 \cdot 0,0616} = 0,812;$$

$$k_{12} = \frac{k_{\text{о.с}}}{T_m} = \frac{0,027}{0,134} = 0,202;$$

$$k_{13} k_{14} k_{15} = \frac{1}{T_m m_t} = \frac{1}{0,134 \cdot 20} = 0,373;$$

$$k_{13} = 0,373; k_{14} = 1; k_{15} = 1; k_{16} = \frac{k'_{\text{ав}}}{m_t T_m} = \frac{1}{20 \cdot 0,134} = 0,373;$$

$$k_{17} = \frac{1}{m_t T_m} = \frac{1}{20 \cdot 0,134} = 0,373;$$

$$k_{18} = \frac{k'_c k''_{y.u} k''_{\text{ав}}}{m_t} = \frac{10 \cdot 6,3 \cdot 0,053}{20} = 0,167.$$

При исследовании модели не рекомендуется работа операционных усилителей с передаточными коэффициентами, большими 10. При подсчете коэффициентов получено $k_9 = 28,9$. Уменьшением $k_9 = 35,6$ в 10 раз получим $k_9 = 2,89$. Но при этом должно сохраниться постоянство произведения $k_9 k_{\text{о.с}}$; вследствие чего необходимо в 10 раз увеличить $k_{\text{о.с}}$. В результате получаем $k_{12} = 2,02$. Для сохранения постоянства произведения $k'_c k'_{y.u} k'_c k'_{\text{ав}}$ необходимо k_{18} увеличить в 10 раз: $k_{18} = 1,67$. Для удобства на-

бора производим последнее перераспределение коэффициентов: принимаем $k_{18} = 1$ и увеличиваем k_{16} в 1,67 раз: $k_{16} = 0,373 \cdot 1,67 = 0,623$.

Окончательно принятые в схеме набора коэффициенты:

$$\begin{array}{lll} k_1 = 1; & k_7 = 1; & k_{13} = 0,373; \\ k_2 = 1; & k_8 = 1; & k_{14} = 1; \\ k_3 = 3,43; & k_9 = 2,89; & k_{15} = 1; \\ k_4 = 1,65; & k_{10} = 1; & k_{16} = 0,623; \\ k_5 = 1; & k_{11} = 0,812; & k_{17} = 0,373; \\ k_6 = 1; & k_{12} = 2,02; & k_{18} = 1. \end{array}$$

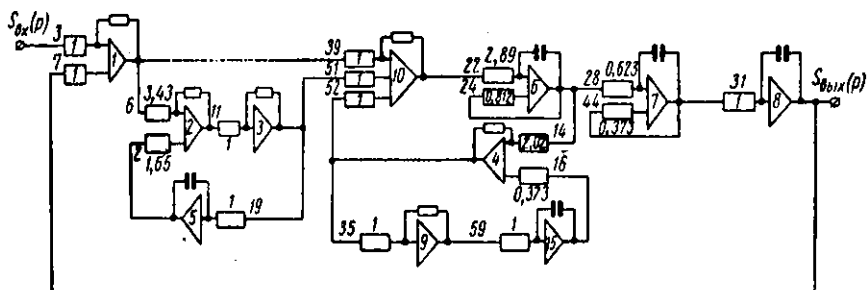


Рис. 10.5. Рабочая схема набора на моделирующей установке МН-7

Рабочая схема набора на моделирующей установке МН-7 (с указанием нумерации усилителей, входов и коэффициентов, установленных по входам) представлена на рис. 10.5.

Кривая переходного процесса, измененная по точкам, приведена на рис. 10.6.

Динамические показатели системы: время переходного процесса $t_n = 0,5$ сек; перерегулирование $\sigma = 50\%$, число колебаний $m = 1$.

Решая операторное уравнение исследуемой системы, получим следующее выражение:

$$S_{\text{вых}}(t) = 1 + 1,12e^{-14,76t} + 2,11e^{-7,6t} \cos \times \\ \times (12,9t + 3,37) - 0,025e^{-143t}.$$

Построенная по этому выражению кривая переходного процесса достаточно точно совпадает с кривой, полученной при исследовании на модели.

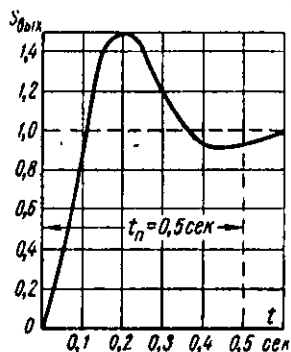


Рис. 10.6. Кривая переходного процесса, полученная на модели

Пример 10.6. Исследование переходного процесса в следящей системе профилешлифовального станка.

Структурная схема следящей системы изображена на рис. 4.13. Параметры системы:

$$\begin{aligned} k_{y1} &= 32,6; \quad k_{y2} = 4,35; \quad k_{y3} = 9,9; \quad k_{o.c} = 3,63 \frac{\text{в}}{\text{рад.сек}}; \\ k_{n1} &= 0,282; \quad \alpha = 0,231; \quad c_e = 0,435 \frac{\text{в}}{\text{рад.сек}}; \quad j_p = 233; \quad k_c = 206 \text{ в/рад}; \\ k_u &= 1 \frac{1}{\text{сек}}; \quad T_1 = 0,03 \text{ сек}; \quad T_2 = 0,003 \text{ сек}; \quad T_0 = 0,006 \text{ сек}; \\ T_q &= 0,02 \text{ сек}; \quad T_m = 0,003 \text{ сек}; \quad T_s = 0,018 \text{ сек}; \\ \tau &= 0,02 \text{ сек}; \quad T_3 = 0,05 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Варьируя параметры постоянной времени гибкой обратной связи T_3 и коэффициента усиления второго каскада усилителя k_{y2} , постараемся добиться наилучших показателей качества переходного процесса, укладывающихся в пределы:

- а) максимальное перегерулирование $\sigma \leq 25\%$,
- б) продолжительность переходного процесса $t_n \leq 0,2 \text{ сек}$,
- в) число колебаний $m \leq 3$

при единичном входном воздействии.

При моделировании не рекомендуется работа операционных усилителей с коэффициентами усиления, большими 10, в то время как в моделируемой системе такие коэффициенты имеют место ($k_c = 206$, $k_{y1} = 32,6$).

Воспользуемся тем, что в линейной структурной схеме коэффициенты усиления можно перераспределять между звеньями, не охваченными обратными связями (или охваченными одинаково), и найдем произведения, постоянство которых должно быть выдержано при моделировании:

$$\begin{aligned} k_{y2} \alpha k_{y3} &= 4,35 \cdot 0,231 \cdot 9,9 = 10; \\ k_{y1} \frac{1}{c_e j_p} &= \frac{32,6}{0,435 \cdot 233} = 0,321; \\ k_c k_u &= 206 \cdot 1 = 206. \end{aligned}$$

Перераспределив коэффициенты усиления, получим следующие параметры для моделирования системы:

$$\begin{aligned} k_c &= 2, \quad k_{y1} = 0,321, \quad k_{y2} = 2; \\ \alpha &= 0,5, \quad k_{y3} = 10, \quad \frac{1}{c_e j_p} = 1; \quad k_u = 103, \quad k_{n1} = 0,282; \\ k_{o.c} &= 3,63; \quad T_1 = 0,03 \text{ сек}, \quad T_2 = 0,003 \text{ сек}, \\ \tau &= 0,02 \text{ сек}, \quad T_0 = 0,006 \text{ сек}, \quad T_q = 0,02 \text{ сек}, \\ T_s &= 0,018 \text{ сек}, \quad T_m = 0,03 \text{ сек}. \end{aligned}$$

Примем масштаб времени $m_t = 50$.

Используя табл. 10.3, составим структурную схему модели системы (рис. 10.7) и рассчитаем коэффициенты:

$$k_1 = k_c = 2; \quad k_2 = k_c = 2; \quad k_3 = k_{y1} = 0,321;$$

$$k_4 = k_{y1} k_{o.c} = 0,321 \cdot 3,63 = 1,17;$$

$$k_8 = k_{y3} = 2; \quad k_9 = k_{y3} = 2;$$

$$k_7 = \alpha \frac{\tau}{T_0} = 0,5 \frac{0,02}{0,006} = 1,67;$$

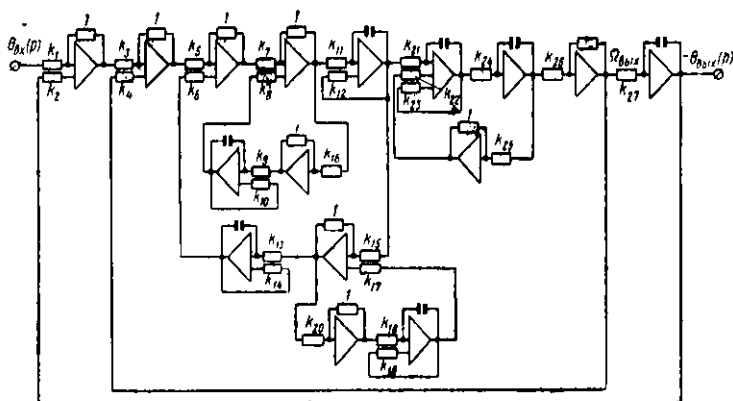


Рис. 10.7. Схема набора модели следящей системы профилиально-фрезерного станка

$$k_8 k_9 k_{16} = \frac{1}{m_t} \left(\frac{1}{T_0} - \frac{1}{\tau} \right) = \frac{1}{50} \left(\frac{1}{0,006} - \frac{1}{0,02} \right) = 2,33;$$

$$k_8 = 2,33; \quad k_9 = 1; \quad k_{10} = \frac{1}{m_t \tau} = \frac{1}{50 \cdot 0,02} = 1; \quad k_{16} = 1;$$

$$k_{11} = \frac{k_{y3}}{m_t T_q} = \frac{10}{50 \cdot 0,02} = 10; \quad k_{12} = \frac{1}{m_t T_q} = \frac{1}{50 \cdot 0,02} = 1;$$

$$k_{13} k_{18} = k_{01} \frac{1}{m_t T_1} \cdot \frac{T_a}{T_s} = 0,282 \frac{1}{50 \cdot 0,03} \cdot \frac{0,05}{0,003} = 3,13;$$

$$k_{13} = 3,13; \quad k_{14} = \frac{1}{m_t T_1} = \frac{1}{50 \cdot 0,03} = 0,667; \quad k_{15} = 1;$$

$$k_{17} k_{18} k_{20} = \frac{1}{m_t} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_3} \right) = \frac{1}{50} \left(\frac{1}{0,003} - \frac{1}{0,05} \right) = 6,27;$$

$$k_{17} = 1; \quad k_{18} = 6,27; \quad k_{20} = 1; \quad k_{19} = \frac{1}{m_t T_3} = \frac{1}{50 \cdot 0,05} = 0,4;$$

$$k_{21} = \frac{1}{m_t^2 T_a T_u} = \frac{1}{50^2 \cdot 0,018 \cdot 0,03} = 0,74;$$

$$k_{24}k_{25} = \frac{1}{m_1 T_0 T_m} = \frac{1}{50 \cdot 0,018 \cdot 0,03} = 0,74; \quad k_{25} = 1;$$

$$k_{23} = \frac{T_m}{m_1 T_0 T_m} = \frac{0,03}{50 \cdot 0,018 \cdot 0,03} = 1,11 \quad \left(\text{так как } \zeta = \frac{T_m}{T}, \right.$$

$$\left. \text{а } T = \sqrt{T_0 T_m} \right);$$

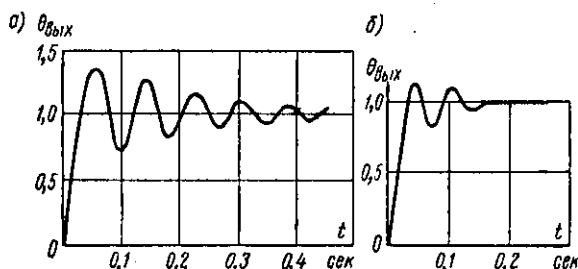


Рис. 10.8. Переходный процесс в модели следящей системы

$$k_{24} = 1; \quad k_{25} = 0,74; \quad k_{26} = 1;$$

$$k_{27} = \frac{k_n}{m_1} = \frac{103}{50} = 2,06.$$

Принятое значение параметров системы, в том числе $T_0 = 0,05$ сек и $k_{y3} = 4,35$, дает переходный процесс (рис. 10.8, а) со следующими динамическими показателями:

$$\sigma = 35\%; \quad t_n = 0,4 \text{ сек}; \quad m > 5,$$

т. е. не удовлетворяет предъявленным требованиям.

Измеряя значения T_0 и k_{y2} , получим следующие результаты:

при $T_0 = 0,05$ сек и $k_{y3} = 4,35$

$$\sigma = 35\%, \quad t_n = 0,4 \text{ сек}, \quad m > 5;$$

при $T_0 = 0,05$ сек и $k_{y3} = 8,7$

$$\sigma = 30\%, \quad t_n = 0,5 \text{ сек}, \quad m > 5;$$

при $T_0 = 0,03$ сек и $k_{y3} = 4,35$

$$\sigma = 30\%, \quad t_n = 0,35 \text{ сек}, \quad m = 5;$$

при $T_0 = 0,02$ сек и $k_{y3} = 4,35$

$$\sigma = 30\%, \quad t_n = 0,3 \text{ сек}, \quad m = 4;$$

при $T_0 = 0,03$ сек и $k_{y3} = 8,7$

$$\sigma = 25\%, \quad t_n = 0,2 \text{ сек}, \quad m = 4;$$

при $T_s = 0,02$ сек и $k_{y1} = 8,7$
 $\sigma = 20\%$, $t_n = 0,15$ сек, $m = 2$.

Наилучшие результаты дает последний вариант, для которого переходный процесс изображен на рис. 10.8, б.

§ 10.3. Примеры моделирования нелинейных систем автоматического управления

Пример 10.7. Исследование следящей системы с безынерционным усилителем, охваченным гибкой обратной связью, с учетом нелинейности его передаточной характеристики.

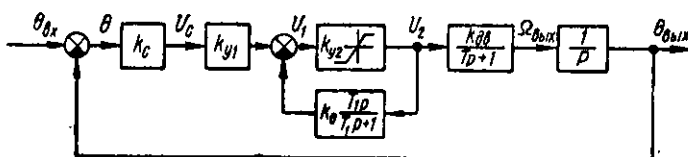


Рис. 10.9. Структурная схема следящей системы с учетом нелинейности передаточной характеристики усилителя

На рис. 10.9 приведена структурная схема исследуемой следящей системы с асинхронным двухфазным двигателем и безынерционным усилителем, второй каскад которого, охваченный гибкой обратной связью с передаточной функцией

$$K_0(p) = k_0 \frac{T_1 p}{T_1 p + 1},$$

обладает нелинейной характеристикой типа «насыщение», в упрощенном виде изображенной на структурной схеме.

Подавая на вход следящей системы скачкообразное входное воздействие

$$\theta_{вх}(t) = \theta_{вх.0} \cdot 1(t),$$

где

$$\theta_{вх.0} = 0,4 \text{ град},$$

исследуем качество переходного процесса в следящей системе при изменении коэффициента усиления первого каскада усилителя k_{y1} в пределах от 35 до 1400.

За показатели качества переходного процесса примем: время переходного процесса t_n , величину перерегулирования σ , число переходов за время t_n через равновесное состояние m .

Зададим следующие параметры системы: передаточный коэффициент чувствительного элемента $k_c = 1$ в/град; коэффициент усиления второго каскада усилителя на линейном участке его

ной связи ($k_9 k_6$) всегда должно быть нечетное число решающих усилителей. На расчет коэффициентов схемы набора это не влияет, так как $k_7 = 1$.

Коэффициенты схемы набора, рассчитанные для отдельных звеньев модели по формулам табл. 10.3, имеют следующие числовые значения:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1, & k_4 &= 35 \div 1400, & k_7 &= 1, & k_{10} &= 1, \\ k_2 &= 1, & k_3 &= 10, & k_8 &= 5, & k_{11} &= 3,6, \\ k_5 &= 1, & k_6 &= 1, & k_9 &= 0,25, & k_{12} &= 0,05. \end{aligned}$$

Полученные коэффициенты неудобны для набора. Вместе с тем, в отличие от моделирования линейных систем, в данном случае нельзя распределять произвольно передаточные коэффициенты между звеньями, разделенными нелинейностями. В частности, коэффициент усиления первого каскада усилителя $k_{y1} = 1400$ практически невозможно реализовать между входом модели и звеном с насыщением без введения в схему набора дополнительных решающих усилителей и соответствующего усложнения схемы.

Поэтому в практике моделирования широко применяется прием, основанный на известном положении теории подобия физических явлений, в соответствии с которым условия подобия, справедливые для линейных систем, могут быть распространены и на нелинейные системы при дополнительном условии — совпадении относительных характеристик нелинейных зависимостей. Иными словами, искажения, вносимые в протекание процесса за счет нелинейностей, должны сказываться одинаково (отличаясь лишь масштабом переменных) в оригинале и в модели.

В применении к рассматриваемой следящей системе это условие выражается в требовании, чтобы ограничение выходного напряжения усилителя наступало при том же относительном значении (связанном с величиной входного воздействия), что и в исходной схеме.

С учетом сказанного распределим коэффициенты схемы набора в моделируемой системе сначала, как в линейной, а затем изменим соответственно величину напряжения ограничения.

Для значения $k_{y1} = 70$ примем $k_1 = 1$, $k_3 = 1$, $k_4 = 1$.

В этом случае усилитель будет находиться на границе насыщения при входном сигнале

$$\Theta_{\text{вх.гр}} = \frac{U_{2\text{max}}}{k_c k_{y1}} = \frac{30}{1 \cdot 70} = 0,43 \text{ град}$$

(в установившемся режиме сигнал гибкой обратной связи равен нулю и может не приниматься в расчет).

Этому соответствует входное напряжение модели

$$U_{\text{вх.гр}} = \Theta_{\text{вх.гр}} m_{\Theta} = 0,43 \cdot 100 = 43 \text{ в.}$$

Так как при выбранных коэффициентах схемы набора произведение $k_3 k_9 k_4 = 1$, то величина ограничения усилителя в модели должна равняться $U_{\text{гр}} = 43 \text{ в.}$

Поскольку выходное напряжение модели должно быть приведено к тому же масштабу, что и входное, то произведение коэффициентов $k_{11} k_{12}$ должно подчиняться условию

$$k_{11} k_{12} = 3,6 \cdot 0,05 \cdot 79 = 12,6,$$

из которого можно получить приемлемое распределение:

$$k_{11} = 1,26, \quad k_{12} = 10.$$

Остальные коэффициенты схемы набора можно оставить без изменений.

Таким образом, для $k_{y1} = 70$ будем иметь окончательно следующие значения коэффициентов по входам решающих усилителей в схеме набора:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1, & k_4 &= 1, & k_7 &= 1, & k_{10} &= 1, \\ k_2 &= 1, & k_5 &= 10, & k_8 &= 5, & k_{11} &= 1,26, \\ k_3 &= 1, & k_6 &= 1, & k_9 &= 0,25, & k_{12} &= 10. \end{aligned}$$

Для других значений коэффициента усиления первого каскада усилителя коэффициенты схемы набора k_1 и k_2 должны выбираться так, чтобы удовлетворялось равенство

$$k_1 k_2 = \frac{k_{y1}}{70}.$$

Определим масштаб моделирования m_{Θ} по скорости выходной оси следящей системы.

Максимальное значение скорости в установившемся режиме будет иметь место при напряжении насыщения усилителя

$$\Omega_{\text{вых max}} = k_{\text{ав}} U_{2 \text{ max}} = 3,6 \cdot 30 = 108 \text{ град/сек.}$$

В модели выходное напряжение U_2 предпоследнего решающего усилителя, при выбранном напряжении ограничения $U_{\text{гр}} = 43 \text{ в.}$ будет иметь максимальное значение

$$U_{2 \text{ max}} = k_{11} U_{\text{гр}} = 1,26 \cdot 43 = 54 \text{ в.}$$

Следовательно,

$$m_{\Theta} = \frac{U_{2 \text{ max}}}{\Omega_{\text{вых max}}} = \frac{54}{108} = 0,5 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}.$$

При исследовании следящей системы на модели задаем последовательно значения коэффициентов усиления первого каскада усилителя

$$k_{y1} = 35, 70, 140, 350, 700, 1400,$$

и фиксируем переходные процессы (при скачкообразном входном воздействии) на экране осциллографа с послесвечением.

Последующая обработка осциллограмм позволяет установить зависимости выбранных показателей качества переходного процесса от изменения величины k_{y1} , выраженные графически на рис. 10.11.

Пример 10.8. Исследование влияния начальных условий на переходный процесс в следящей системе с насыщением.

Исследуем переходные процессы в следящей системе, рассмотренной в примере 10.7 при нулевых, отрицательных и положительных начальных условиях по скорости изменения выходной величины системы:

$$\Omega_{\text{вых}}(0) = 0, \quad \Omega_{\text{вых}}(0) = -48 \frac{\text{град}}{\text{сек}}, \quad \Omega_{\text{вых}}(0) = 48 \frac{\text{град}}{\text{сек}}.$$

Схема набора модели остается той же, что и в предыдущем примере.

При масштабе моделирования по скорости $m_{\dot{x}} = 0,5 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$ начальные условия в модели будут соответственно:

$$U_{\dot{x}}(0) = 0, \quad U_{\dot{x}}(0) = -24 \text{ в}, \quad U_{\dot{x}}(0) = 24 \text{ в}.$$

Подавая входное воздействие скачкообразного типа при $\Theta_{\text{вх}} = 0,4 \text{ град}$ и коэффициентах усиления первого каскада усилителя

$$k_{y1} = 35, 70, 140, 350, 700, 1400,$$

получим осциллограммы переходных процессов.

Анализ осциллограмм свидетельствует о том, что характер зависимостей, представленных на рис. 10.11, существенно не изменился.

В качестве иллюстрации на рис. 10.12 приведены три осциллограммы зависимости $\Theta_{\text{вых}}(t)$, полученные соответственно при $\Omega_{\text{вых}}(0) = 0$, $\Omega_{\text{вых}}(0) > 0$ и $\Omega_{\text{вых}}(0) < 0$.

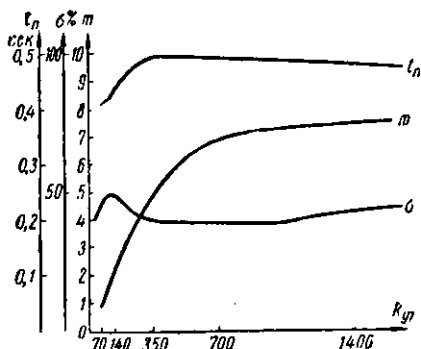


Рис. 10.11. Зависимости показателей качества следящей системы от изменения коэффициента усиления первого каскада усилителя

Пример 10.9. Исследование следящей системы с гибкой обратной связью по скорости с учетом насыщения усилителя.

Структурная схема исследуемой следящей системы приведена на рис. 10.13. От схемы, изображенной на рис. 10.9, данная система отличается тем, что гибкая обратная связь, реализуемая путем дифференцирования напряжения тахогенератора, охваты-

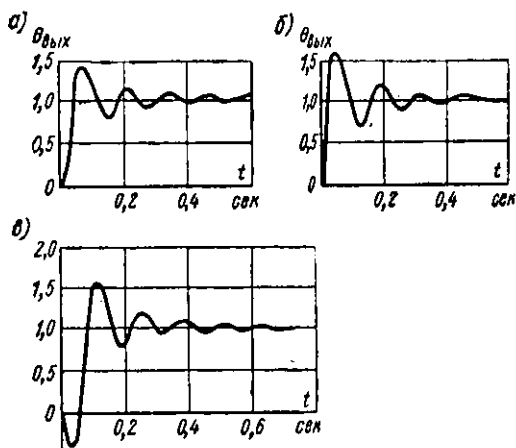


Рис. 10.12. Влияние начальных условий на переходный процесс в следящей системе:

а — при нулевых начальных условиях; б — при положительных начальных условиях; в — при отрицательных начальных условиях

вает наряду со вторым каскадом усилителя также и исполнительный двигатель.

Параметры системы:

$$k_c = 1 \text{ в/град}; k_{y1} = 35 \div 1400; k_{y2} = 1; k_{дв} = 1,25 \frac{\text{град/сек}}{\text{в}};$$

$$T = 0,05 \text{ сек}; k_0 = 2,88 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}; T_1 = 0,1 \text{ сек}; U_{2\text{max}} = 30 \text{ в}$$

(напряжение при насыщении).

Схема набора модели следящей системы изображена на рис. 10.14.

Масштабные коэффициенты примем такими же, как и в примере 10.7.

Коэффициенты набора, рассчитанные аналогично предыдущим примерам, указаны на схеме набора.

Подавая на вход модели скачкообразное воздействие, соответствующее функции

$$\Theta_{вх}(t) = \Theta_{вх0} \cdot 1(t),$$

(где $\Theta_{вх0} = 0,4 \text{ град}$), исследуем зависимости показателей каче-

ства процесса t_n и σ от добротности следящей системы $D = k_c k_{y1} k_{y2} k_{дв}$, изменяемой за счет величины k_{y1} , при нулевых, положительных и отрицательных начальных условиях по скорости изменения выходной величины.

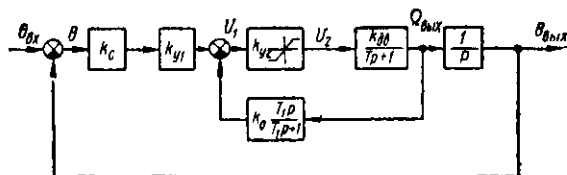


Рис. 10.13. Структурная схема следящей системы с гибкой обратной связью по скорости с учетом насыщения усилителя

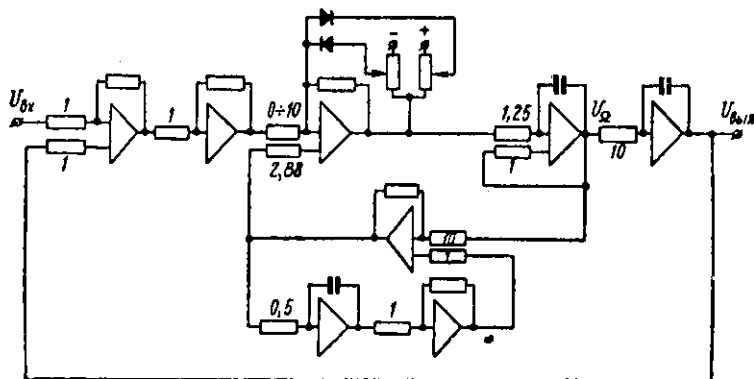


Рис. 10.14. Схема набора модели следящей системы с гибкой обратной связью по скорости с учетом нелинейности усилителя

Для получения различных значений добротности в модели необходимо изменять значения коэффициентов набора входного суммирующего усилителя аналогично изменению k_1 и k_2 в схеме, изображенной на рис. 10.10 примера 10.7.

Полученные на модели зависимости t_n и σ от D представлены графически на рис. 10.15, на котором индексами «+» и «-» отмечены кривые, снятые соответственно при $\Omega_{вых}(0) = 48$ град/сек и $\Omega_{вых}(0) = -48$ град/сек, а без индекса — при $\Omega_{вых}(0) = 0$.

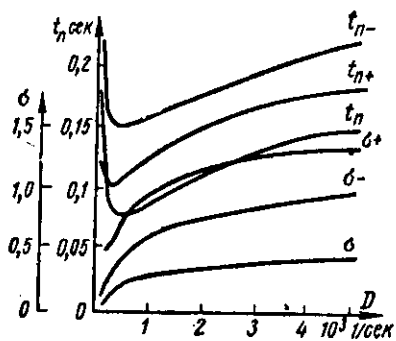


Рис. 10.15. Зависимости σ и t_n от добротности следящей системы

Пример 10.10. Исследование следящей системы с нелинейным законом управления.

На рис. 10.16 изображена функциональная схема следящей системы, в которой для повышения быстродействия и снижения динамической ошибки использовано нелинейное управляющее устройство дискретного типа, вырабатывающее дополнительное форсирующее воздействие. Прямая цепь системы содержит те же элементы, что и в предыдущих примерах.

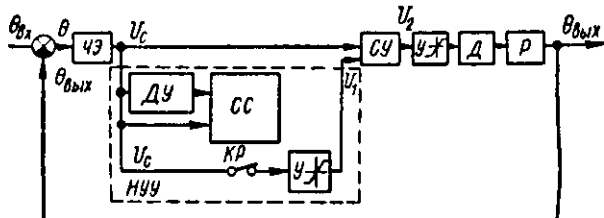


Рис. 10.16. Функциональная схема следящей системы с нелинейным законом управления:

ЧЭ — чувствительный элемент; ДУ — дифференцирующее устройство; СУ — следящее устройство; У — усилитель; Д — двигатель; Р — редуктор; КР — контакт реле; НУУ — нелинейное управляющее устройство; СС — схема совпадения

Нелинейное управляющее устройство срабатывает при совпадении знаков ошибки θ и производной от ошибки $\dot{\theta}$, что свидетельствует о нарастании ошибки по абсолютной величине. После того как ошибка пройдет через максимум и начнет уменьшаться ($\dot{\theta}$ изменит знак), форсирующее воздействие снимается, и система работает обычным образом.

Исследуем на модели зависимости показателей качества переходного процесса t_n , σ , m от величины добротности системы и сравним их с соответствующими зависимостями для следящей системы с линейным законом управления.

Примем входное воздействие, величину насыщения усилителя и масштабы величин такими же, как и в примере 10.7.

Схема набора модели на вычислительной машине М11-7 изображена на рис. 10.17.

Решающие усилители 3, 4 и 6 моделируют дифференцирующее звено с передаточной функцией

$$K_d(p) = k_0 \frac{T_1 p}{T_1 p + 1}.$$

Поскольку постоянная времени $T_1 = 0,05$ сек относительно небольшая, то запаздывание невелико, и звено близко к чисто дифференцирующему.

Усилители 11 и 12, имеющие большие коэффициенты усиления и ограничение характеристик при выходном напряжении

20 в, работают в режиме, близком к релейному. Их выходы подключены ко входу суммирующего усилителя 13, выходное напряжение которого поступает на обмотку реле с контактом 1Р.

При таком подборе параметров реле срабатывает при малых, но совпадающих по знаку напряжениях на входах усилителей 11 и 12. Если же знаки этих напряжений, соответственно пропорциональных $\dot{\Theta}$ и Θ , различны, то на выходе усилителя 13 напряжение будет близким к нулю и реле не работает.

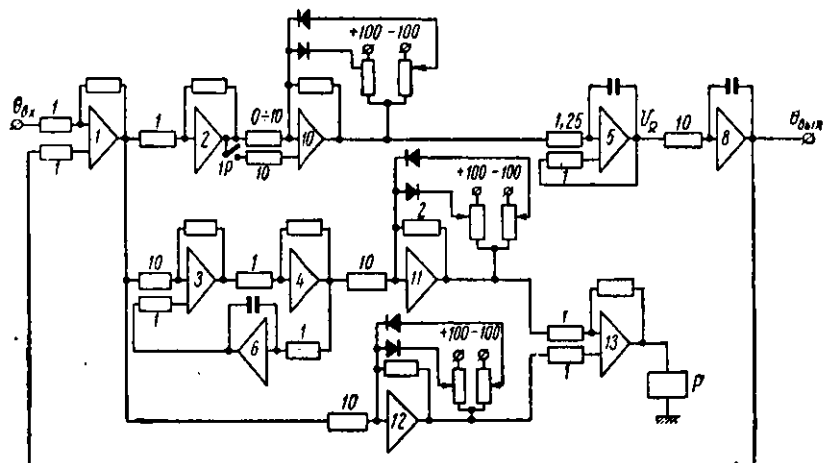


Рис. 10.17. Схема набора модели следящей системы с нелинейным законом управления

При срабатывании реле на вход усилителя 10 подается дополнительный сигнал, переводящий его в режим насыщения.

Результаты исследования следящей системы с нелинейным законом управления представлены в виде графиков на рис. 10.18, на котором для сравнения приведены подобные же кривые, полученные в предыдущих примерах.

Из сравнения графиков видно, что введение нелинейного закона управления позволяет получить лучшие качественные показатели работы следящей системы.

Пример 10.11. Исследование следящей системы с нелинейной характеристикой усилителя и квадратичной обратной связью по скорости.

Принципиальная схема исследуемой следящей системы изображена в упрощенном виде на рис. 10.19.

Особенностью схемы является наличие двух тахогенераторов. Обмотка возбуждения OB_2 одного из них подключена на постоянное по амплитуде напряжение сети переменного тока, а у дру-

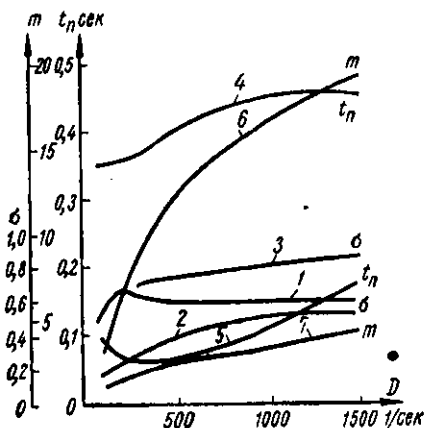


Рис. 10.18. Результирующие кривые зависимости показателей качества переходного процесса от параметров следящей системы:

1, 4, 6 — нескорректированные системы; 2, 5, 7 — системы с нелинейным законом управления; 3 — система с линейным законом управления

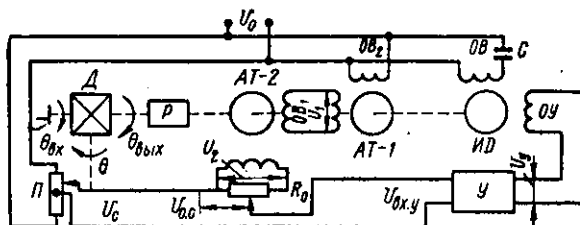


Рис. 10.19. Принципиальная схема следящей системы с квадратичной обратной связью:

Д — дифференциал; Р — редуктор; АТ-1, АТ-2 — асинхронные тахогенераторы; ИД — исполнительный двигатель; П — потенциометр; ОВ — обмотка возбуждения; ОУ — обмотка управления

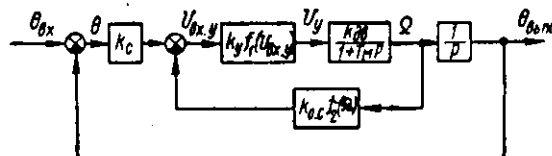


Рис. 10.20. Структурная схема следящей системы с квадратичной обратной связью по скорости

того обмотка возбуждения OB_1 запитывается выходным напряжением U_1 первого тахогенератора. Выходное напряжение U_2 второго тахогенератора проходит через делитель напряжения R_0 , суммируется как сигнал обратной связи $U_{o.c}$ с напряжением сигнала ошибки U_c и подается на вход электронного усилителя.

Напряжение на выходе каждого тахогенератора пропорционально произведению скорости вращения ротора и напряжения возбуждения. Следовательно,

$$U_1 = k_{\tau 1} U_0 \Omega,$$

$$U_2 = k_{\tau 2} U_1 \Omega = k_{\tau 1} k_{\tau 2} U_0 \Omega^2,$$

где $k_{\tau 1}$, $k_{\tau 2}$ — передаточные коэффициенты тахогенераторов.

Тогда, с учетом коэффициента делителя

$$\alpha = \frac{U_{o.c}}{U_2},$$

будем иметь напряжение обратной связи

$$U_{o.c} = k_{o.c} \Omega^2,$$

где $k_{o.c} = \alpha k_{\tau 1} k_{\tau 2} U_0 = \text{const}$ — коэффициент обратной связи.

Таким образом, напряжение обратной связи в данной системе пропорционально квадрату скорости вращения выходной оси.

Благодаря этому следящая система имеет переменное демпфирование: при малых скоростях обратная связь слабо влияет на работу системы, при больших скоростях ее демпфирующее действие резко возрастает. При определенных условиях это может дать существенное улучшение качественных показателей системы.

Структурная схема следящей системы с квадратичной жесткой обратной связью по скорости представлена на рис. 10.20.

На схеме нелинейное звено в прямой цепи системы воспроизводит ограничение передаточной характеристики электронного усилителя (рис. 10.21, а). В этом же звене учитывается величина коэффициента усиления k_y на линейном участке характеристики.

Нелинейное звено в цепи обратной связи воспроизводит квадратичную зависимость сигнала обратной связи от скорости вращения выходной оси системы (рис. 10.21, б).

Параметры системы имеют следующие значения: передаточный коэффициент потенциометра $k_c = 0,87$ в/град; передаточный коэффициент усилителя на линейном участке $k_y = 4,8$; передаточный коэффициент

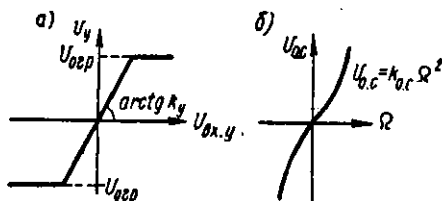


Рис. 10.21. Передаточные характеристики нелинейных звеньев:

а — электронного усилителя; б — обратной связи

двигателя по скорости с учетом редуктора $k_{дв} = 1 \frac{\text{град/сек}}{\text{в}}$; электромеханическая постоянная времени двигателя $T_m = 0,2 \text{ сек}$; коэффициент обратной связи $k_{о.с} = 0,1 \frac{\text{в}}{\text{рад/сек}^2}$; ограничение передаточной характеристики усилителя $U_{огр} = 4,8 \text{ в}$.

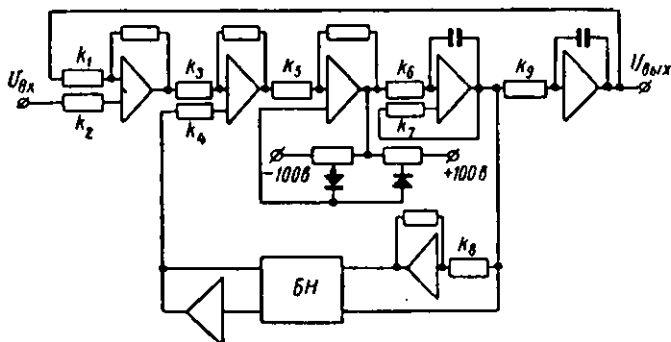


Рис. 10.22. Схема набора модели следящей системы с квадратичной обратной связью

Примем масштаб времени $m_t = 50$.

Схема набора модели представлена на рис. 10.22, для которой коэффициенты входов, рассчитанные без учета нелинейностей, имеют после их распределения следующие значения:

$$k_1 = 1, \quad k_4 = k_{о.с} = 0,5 \cdot 1, \quad k_7 = 0,1,$$

$$k_2 = 1, \quad k_5 = 4,8, \quad k_8 = 1,$$

$$k_3 = 1, \quad k_6 = 0,1, \quad k_9 = 1.$$

Зададимся величиной входного скачкообразного воздействия

$$\Theta_{вх} = \Theta_{вх0} \cdot 1(t),$$

равной $\Theta_{вх0} = 5 \text{ град}$, и примем масштаб $m_\theta = 5 \frac{\text{в}}{\text{град}}$. Этому будет соответствовать входное напряжение модели $U_{вх0} = 25 \text{ в}$. При этом насыщение в модели будет иметь место при $m_0 U_{огр} = 5 \times 4,8 = 24 \text{ в}$.

Насыщение усилителя воспроизводится так же, как и в предыдущих примерах.

Нелинейное звено в цепи обратной связи моделируется при помощи нелинейного блока типа БН-10 совместно с решающими усилителями моделирующей установки. При этом для удобства набора коэффициент $k_{о.с}$ можно представить в виде произведения двух коэффициентов:

$$k_{о.с} = k_{о.с1} k_{о.с2},$$

из которых $k_{0,c2}$ учитывается при наборе передаточной характеристики $k_{0,c2}/f_2(\Omega)$ в блоке БН-10, а $k_{0,c1}$ — на входе соответствующего решающего усилителя.

При наборе квадратичной зависимости $f_2(\Omega)$ можно воспользоваться табл. 10.4, где принято $k_{0,c2}=0,1$; $k_{0,c1}=10k_{0,c2}$.

Правила настройки нелинейных блоков приводятся в инструкциях по соответствующим моделирующим установкам.

Таблица 10.4

		kX	Номер элементов							
			1	2	3	4	5	6	7	8
1	Рабочий квадрант и знак kX	+	1		1		3		3	
2	Ограничение по X , в		4	9	15	20	—4	—9	—15	—20
3	Набор $U_{вх}$, в	30	30	30	30	30	—30	—30	—30	—30
4	$F(X) \cdot U_{вх}$, в	11	34	57	76	85	—34	—57	—76	—85

Подавая на вход системы скачкообразные воздействия $\Theta_{вх0}$ с величинами, последовательно равными 2; 5; 10; 15 град при $k_{0,c} = 1 \frac{\sigma}{\text{град/сек}^2}$, исследуем зависимости показателей качества переходного процесса от величины входного воздействия, что характерно для нелинейных систем.

Таблица 10.5

$\Theta_{вх}$, град	σ , %	t_n , сек	m
2	50	0,41	4
5	44	0,56	6
10	30	0,63	6
15	10	0,7	6

Таблица 10.6

$k_{0,c} \frac{\sigma}{\text{град/сек}^2}$	σ , %	t_n , сек	m
0,5	70	0,8	7
1	44	0,56	6
3	18	0,26	2
10	0	0,3	0

Результаты исследования представлены в табл. 10.5, по данным которой построены графики, изображенные на рис. 10.23.

Подавая затем входные воздействия величиной $\Theta_{вх0}=5$ град и изменяя последовательно значения коэффициента обратной связи $k_{0,c}=0,5$; 1; 3; $10 \frac{\sigma}{\text{град/сек}^2}$, исследуем зависимости показателей качества переходного процесса от величины $k_{0,c}$.

Результаты исследования представлены в табл. 10.6 и на рис. 10.24.

Пример 10.12. Исследование релейной автоколебательной следящей системы.

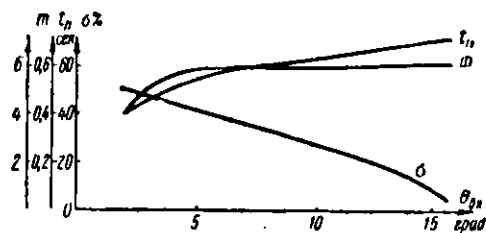


Рис. 10.23. Зависимости показателей качества нелинейной следящей системы от величины входного воздействия

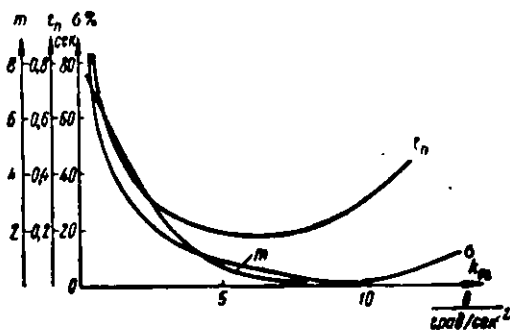


Рис. 10.24. Зависимости показателей качества нелинейной следящей системы от величины коэффициента квадратичной обратной связи

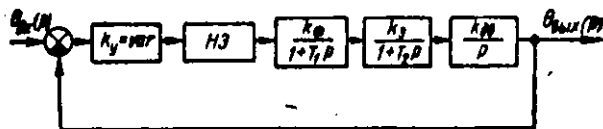


Рис. 10.25. Структурная схема релейной автоколебательной следящей системы

Структурная схема системы изображена на рис. 10.25.

Система имеет следующие параметры: передаточный коэффициент фильтра $k_{\Phi}=1$; передаточный коэффициент ЭМУ по напряжению $k_a=3,75$; постоянная времени поперечной цепи якоря ЭМУ $T_2=0,1$ сек; передаточный коэффициент двигателя с редуктором по скорости $k_{дв}=80$; коэффициент усиления электронного усилителя (включая передаточный коэффициент преобразующего устройства) $k_y=var$; постоянная времени фильтра $T_1=var$.

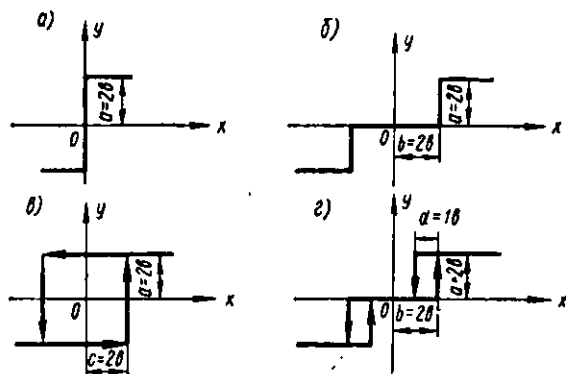


Рис. 10.26. Передаточные характеристики нелинейного (релейного) элемента

Передаточная характеристика нелинейного (релейного) элемента НЭ имеет один из четырех видов, представленных на рис. 10.26 (типы А, Б, В, Г соответственно обозначены на рис. а, б, в, г). При исследовании на модели требуется:

1) определить амплитуду и период автоколебаний в следящей системе при характеристике нелинейного элемента, изображенной на рис. 10.26, а, и изменении постоянной времени фильтра в пределах $0,01 \text{ сек} < T_1 < 0,12 \text{ сек}$;

2) определить амплитуду и период автоколебаний при различных характеристиках нелинейного элемента (рис. 10.26, б, в, г) и значениях переменных параметров системы $k_y=1$ и $T_1=0,01; 0,02; 0,04 \text{ сек}$.

3) исследовать влияние изменения коэффициента k_y на амплитуду и период автоколебаний при $T_1=0,01 \text{ сек}$ и различных характеристиках нелинейного элемента (рис. 10.26, б, в, г).

Используя табл. 10.3, составим блок-схему набора линейной части системы на модели (рис. 10.27, а) и определим передаточные коэффициенты по входам, приняв масштаб времени $m_t=80$:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = k_y = 1;$$

$$k_4 = \frac{k_{\Phi}}{m_t T_1} = \frac{1}{80 \cdot 0,01} = 1,25;$$

$$k_5 = \frac{1}{m_t T_1} = \frac{1}{80 \cdot 0,01} = 1,25;$$

$$k_6 = \frac{k_3}{m_t T_2} = \frac{3,75}{80 \cdot 0,1} = 0,469;$$

$$k_7 = \frac{1}{m_t T_2} = \frac{1}{80 \cdot 0,1} = 0,125;$$

$$k_8 = \frac{k_{дв}}{m_t} = \frac{80}{80} = 1.$$

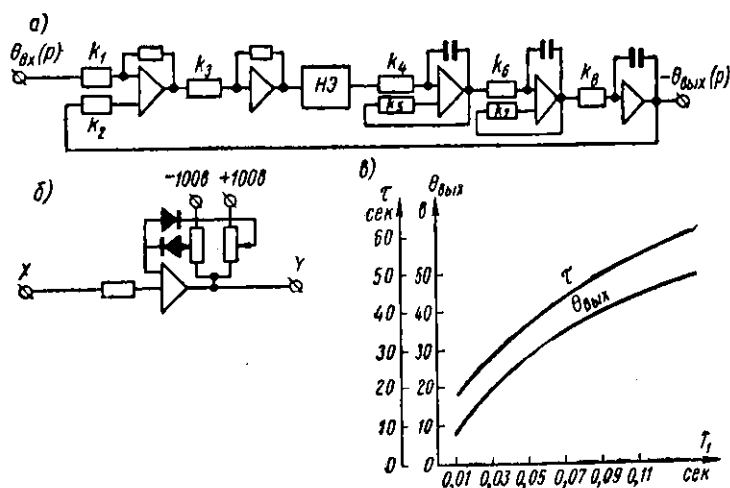


Рис. 10.27. Исследование релейной следящей системы

Схема набора характеристики нелинейного элемента типа А показана на рис. 10.27, б. Если заперты оба диода, сопротивление обратной связи равно бесконечности, и коэффициент усиления усилителя очень велик (порядка 40 000). Поэтому при небольшом напряжении на входе X напряжение на выходе Y резко возрастает до заданной величины a , при которой открывается один из диодов.

Сопротивление обратной связи при этом становится значительно меньше входного сопротивления, и при дальнейшем увеличении напряжения на входе X напряжение на выходе остается постоянным $Y=a$.

При изменении постоянной времени T_1 изменяются в наборе задачи коэффициенты k_4 и k_5 . Результаты зависимости изменения амплитуды $\Theta_{вых}$ и периода автоколебаний τ от T_1 сведены

в табл. 10.7. Для удобства проверки величины $\Theta_{\text{вых}}$ даны в вольтах, а τ — в секундах работы на модели, т. е. не приведены к натуральному масштабу. Графики зависимостей $\Theta_{\text{вых}} = f(T_1)$ и $\tau = f(T_1)$ изображены на рис. 10.27, в.

Таблица 10.7

T_1 , сек	$\Theta_{\text{вых}}$, в	τ , сек	T_1 , сек	$\Theta_{\text{вых}}$, в	τ , сек
0,01	7,8	17,5	0,08	38,2	47
0,02	13,8	24	0,10	42,3	53
0,04	23,2	33	0,12	46,4	58
0,05	28,5	37	0,14	50,0	62
0,06	31,9	40			

Таблица 10.8

T_1 , сек	$\Theta_{\text{вых}}$, в	τ , сек
0,01	7,2	17,5
0,02	13,4	24
0,04	22,9	33

Таблица 10.9

T_1 , сек	$\Theta_{\text{вых}}$, в	τ , сек
0,01	12,1	21,5
0,02	17,9	27,5
0,04	26,4	36,0

Таблица 10.10

T_1 , сек	$\Theta_{\text{вых}}$, в	τ , сек
0,01	8,4	18,5
0,02	14,4	25
0,04	23,8	34

Таблица 10.11

k_y	$\Theta_{\text{вых}}$, в	τ , сек
1	12,1	21,5
2	10,1	19,5
4	8,8	18,5
8	8,2	18
15	7,8	17,5

Релейная характеристика типа Б набирается по схеме, изображенной на рис. 10.28. Пока напряжение на входе меньше напряжения отпирания диодов входной диодной ячейки, входное сопротивление стремится к бесконечности и коэффициент усиления равен нулю. Как только при возрастании входного сигнала открывается один из диодов, входное сопротивление становится значительно меньше сопротивления обратной связи. Напряжение на выходе резко возрастает и ограничивается диодной ячейкой обратной связи.

Результаты зависимости изменения амплитуды и периода автоколебаний от T_1 для данной релейной характеристики сведены в табл. 10.8.

Релейная характеристика типа В набирается по схеме, приведенной на рис. 10.29. Дополнительный (по сравнению с характеристикой типа А) сдвиг момента изменения знака выходного сигнала осуществляется за счет положительной обратной связи. Результаты исследований при данной релейной характеристике сведены в табл. 10.9.

На рис. 10.30 дана схема набора релейной характеристики типа Г. Подобно предыдущей схеме, положительная обратная связь вносит дополнительный (по сравнению с релейной характеристикой типа Б) сдвиг момента отключения реле. С помощью потенциометров P_1 и P_2 устанавливается ширина зоны нечувствительности. В табл. 10.10 приведены результаты ис-

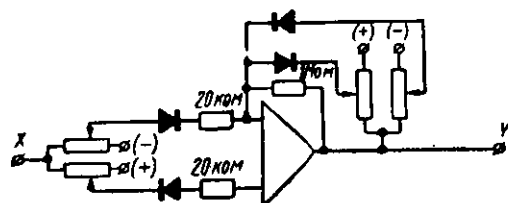


Рис. 10.28. Схема набора релейной характеристики типа Б

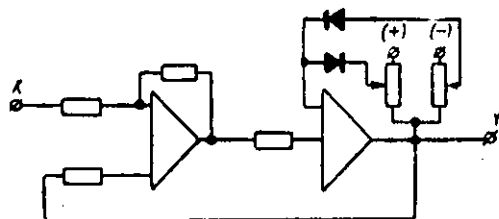


Рис. 10.29. Схема набора релейной характеристики типа В

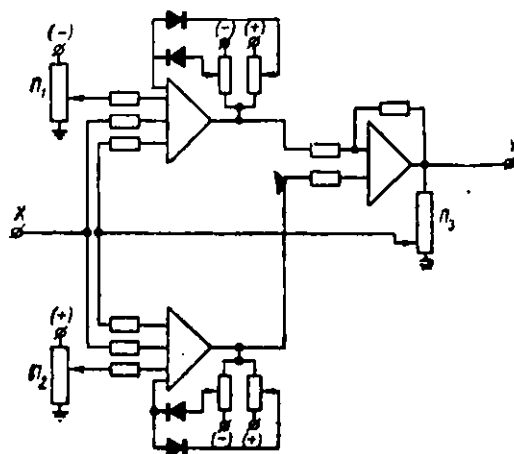


Рис. 10.30. Схема набора релейной характеристики типа Г

следования работы схемы при данной релейной характеристике.

Для релейных схем типа Б, В, Г при увеличении коэффициента k_y амплитуда и период автоколебаний приближаются к соответствующим величинам, полученным для характеристики типа А. В табл. 10.11 в качестве иллюстрации приводятся данные об изменении амплитуды и периода автоколебаний при увеличении коэффициента k_y , полученные для релейной характеристики типа В при $T_1=0,01$ сек.

§ 10.4. Примеры построения областей равного качества в пространстве параметров систем управления

Пример 10.13. Исследование следящей системы с гибкой обратной связью.

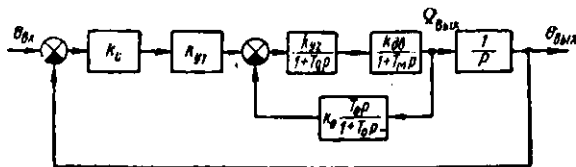


Рис. 10.31. Структурная схема следящей системы с гибкой обратной связью

Структурная схема следящей системы изображена на рис. 10.31.

Система имеет следующие значения параметров: передаточный коэффициент чувствительного элемента $k_c=0,87$ в/град, постоянная времени поперечной цепи ЭМУ $T_q=0,12$ сек; электромеханическая постоянная времени исполнительного двигателя $T_m=0,25$ сек; передаточный коэффициент двигателя по скорости с учетом редуктора $k_{дв}=0,57 \frac{\text{град/сек}}{\text{в}}$; коэффициент обратной

связи от тахогенератора $k_0=0,35 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$; постоянная времени звена обратной связи $T_0=0,5$ сек; общий коэффициент усиления усилителя $k_y=k_{y1} \cdot k_{y2}=100$.

Как видно из структурной схемы, часть общего усилителя системы с коэффициентом k_{y2} входит во внутренний контур, т. е. охватывается гибкой обратной связью, а коэффициент k_{y1} влияет только на величину добротности следящей системы $D=k_c k_{y1} k_{y2} k_{дв}$.

При моделировании будем исследовать зависимость времени переходного процесса t_n и перерегулирования σ от измене-

ния параметров системы T_0 и k_{y2} при постоянной добротности. Для этого, приняв в качестве исходных $k_{y1}=1$ и $k_{y2}=100$, будем изменять их значения в обратно пропорциональной зависимости так, чтобы обеспечивалось условие $k_y = k_{y1}k_{y2} = \text{const}$.

Составим схему набора модели исследуемой системы (рис. 10.32) и произведем расчет ее коэффициентов при помощи таблицы набора типовых звеньев (табл. 10.3).

Поскольку целью данного исследования является определение областей равного качества в плоскости параметров T_0 , k_{y2} ,

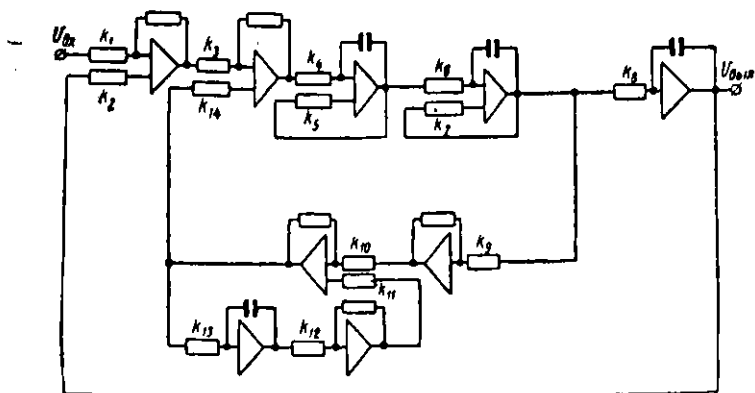


Рис. 10.32. Схема набора модели следящей системы с гибкой обратной связью

что требует получения большого числа отдельных решений, то значительное замедление процесса при моделировании было бы нецелесообразным, так как сильно увеличило бы общее время исследования. Поэтому примем масштаб времени $m_t=3$.

Так как система линейная, то выбор масштаба других переменных не имеет принципиального значения, поскольку результаты исследования можно представить в относительных единицах. Необходимо только в процессе моделирования следить за тем, чтобы решающие усилители не попадали в режим насыщения («не зашкаливали»).

Рассчитанные значения коэффициентов набора:

$$\begin{aligned} k_1 &= 87; & k_4 &= 6,35; & k_7 &= 1,33; & k_{10} &= 1; \\ k_2 &= 0,87; & k_5 &= 2,78; & k_8 &= 0,33; & k_{11} k_{12} k_{13} &= 0,67. \\ k_3 &= 5; & k_6 &= 6,7; & k_9 &= 0,35; \end{aligned}$$

Подавая на вход модели единичные воздействия при нулевых начальных условиях, будем фиксировать на экране осциллографа с послесвечением переходные процессы в исследуемой

системе для двух значений k_0 , равных 0,2 и 1, изменяя при этом параметры внутреннего контура:

T_0 — в пределах от 0,025 сек до 1 сек, k_{y2} — в пределах от 20 до 120.

При этом добротность системы D будем поддерживать постоянной за счет соответствующего изменения k_{y1} .

Практически это делается следующим образом. Устанавливаются исходные значения T_0 и k_{y2} и определяются показатели качества t_n и σ . Затем одному из этих параметров дается небольшое приращение в какую-либо сторону, а второй параметр варьируется так, чтобы привести показатели качества к прежним величинам. Когда это будет достигнуто, то полученная пара значений T_0 , k_{y2} определит точку на линиях равных значений t_n и σ в плоскости параметров T_0 , k_{y2} . В силу свойства непрерывности решения дифференциального уравнения, описывающего систему в области ее устойчивой работы, изложенная процедура занимает сравнительно немного времени, если не давать слишком больших приращений параметров. Целесообразно также наложить на экран осциллографа прозрачную сетку с нанесенными значениями показателей качества, что позволит ограничиться визуальными наблюдениями отдельных переходных процессов без их фиксирования.

Так как, согласно формуле для расчета коэффициентов набора дифференцирующего звена (см. табл. 10.3, в),

$$k_{11} k_{12} k_{13} = \frac{1}{m_t T_0},$$

то требуемое изменение T_0 может осуществляться путем вариации в схеме набора модели любого из трех коэффициентов левой части последнего выражения.

Результаты моделирования представлены в виде соответствующих семейств кривых $t_n = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ на рис. 10.33 и 10.34 для $k_0 = 0,2$ и $k_0 = 1$ соответственно.

На тех же рисунках показаны границы устойчивости исследуемых систем в виде заштрихованных кривых.

Пример 10.14. Исследование следящей системы копировально-фрезерного станка.

Структурная схема исследуемой системы изображена на рис. 10.3.

Значения параметров указаны в примере 10.5.

Целью исследования является построение области устойчивости и зон равного качества в плоскости параметров корректирующих звеньев: последовательного — дифференцирующего трансформатора ($k_{дт}$, T_2) и параллельного — гибкой обратной связи ($k_{о.с}$).

За показатели качества примем время переходного процесса t_n и перерегулирование σ при единичном входном воздействии и нулевых начальных условиях.

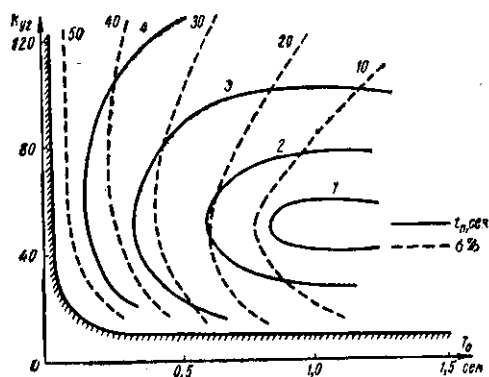


Рис. 10.33. Линии равного качества при $k_0=0,2$

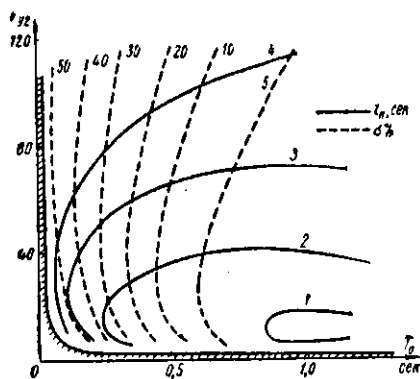


Рис. 10.34. Линии равного качества при $k_0=1$

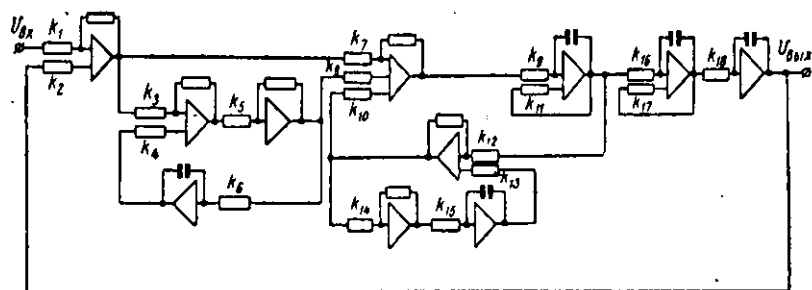


Рис. 10.35. Схема набора модели следящей системы копировально-фрезерного станка

Особенностью рассматриваемой следящей системы является то, что постоянная времени звена гибкой обратной связи выбрана равной электрохимической постоянной времени исполнительного двигателя T_m . Однако последняя не поддается точному контролю в процессе работы и может изменяться в довольно широких пределах. Поэтому необходимо также исследовать чувствительность системы к вариациям T_m в прямой цепи системы.

Схема набора модели исследуемой следящей системы приведена на рис. 10.35.

Приняв масштаб времени $m_t = 20$, рассчитаем коэффициенты входов решающих усилителей по формулам табл. 10.3:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = \frac{k_{д.т}}{T_2} = \frac{0,104}{0,0303} = 3,43;$$

$$k_4 k_0 = \frac{1}{m_t T_2} = \frac{1}{20 \cdot 0,0303} = 1,65; \quad k_4 = 1,65;$$

$$k_5 = 1; \quad k_6 = 1; \quad k_7 = 1; \quad k_8 = 1;$$

$$k_9 = \frac{k_{выу}}{m_t T_q} = \frac{35,6}{20 \cdot 0,0616} = 28,9; \quad k_{10} = 1;$$

$$k_{11} = \frac{1}{m_t T_q} = \frac{1}{20 \cdot 0,0616} = 0,812;$$

$$k_{12} = \frac{k_{о.с}}{T_m} = \frac{0,027}{0,134} = 0,202;$$

$$k_{13} k_{14} k_{15} = \frac{1}{m_t T_m} = \frac{1}{20 \cdot 0,134} = 0,373;$$

$$k_{16} = \frac{1}{m_t T_m} = \frac{1}{20 \cdot 0,134} = 0,373; \quad k_{17} = \frac{1}{m_t T_m} = \frac{1}{20 \cdot 0,134} = 0,373;$$

$$k_{18} = \frac{k_c k_{у.н} k_{дв}}{m_t} = \frac{10 \cdot 6,3 \cdot 0,053}{20} = 0,167.$$

Перераспределив коэффициенты с учетом удобства набора модели системы на вычислительной машине, получим окончательно:

$$\begin{aligned} k_1 &= 1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 3,43; \quad k_4 = 1,65; \quad k_5 = 1; \quad k_6 = 1; \\ k_7 &= 1; \quad k_8 = 1; \quad k_9 = 2,89; \quad k_{10} = 1; \quad k_{11} = 0,812; \quad k_{12} = 2,02; \\ k_{13} &= 0,373; \quad k_{14} = 1; \quad k_{15} = 1; \quad k_{16} = 0,373; \quad k_{17} = 0,373; \\ k_{18} &= 1,67. \end{aligned}$$

Как видно из приведенного выше расчета, коэффициент k_3 схемы набора определяется отношением параметров дифференцирующего трансформатора $k_{д.т}$ и T_2 . Поэтому изменение k_3 эквивалентно вариациям любого из них при неизменном втором

(или обоих сразу). Это дает возможность существенно сократить объем исследования и выразить его результаты в виде линий равного качества в плоскости двух параметров: отношения $k_{д.т}/T_2$ и коэффициента гибкой обратной связи $k_{о.с.}$. Последний можно варьировать путем изменения коэффициента k_{12} схемы набора.

Семейства кривых $t_n = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$, приближенно разбивающих пространство параметров корректирующих звеньев сле-

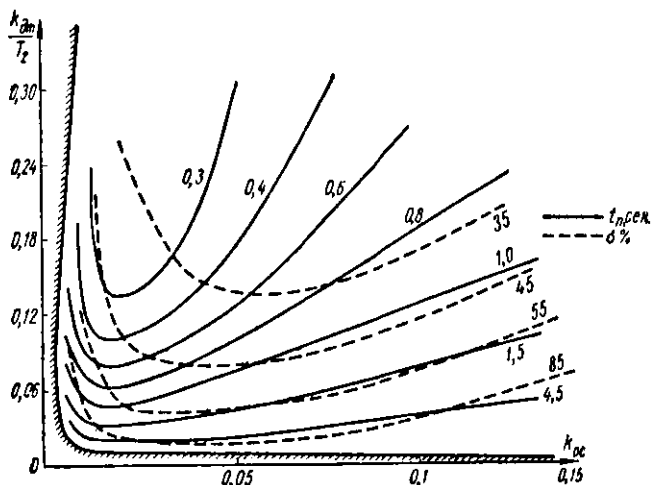


Рис. 10.36. Построение области устойчивости и зон равного качества для следящей системы копировально-фрезерного станка

дящей системы на зоны равного качества, представлены на рис. 10.36. Там же показана штриховой линией граница области устойчивости. Процедура моделирования подобна изложенной в предыдущем примере.

Исследование чувствительности системы к изменению постоянной времени исполнительного двигателя T_m (при неизменной постоянной звена гибкой обратной связи) можно осуществить путем вариации коэффициентов k_{16} и k_{17} набора модели, так как

$$k_{16} = k_{17} = \frac{1}{m_t T_m}.$$

Результаты исследования представлены в табл. 10.12 и изображены в виде графиков зависимостей t_n и σ от величины $\alpha = \frac{0.134}{T_m}$, выражающей отношение неизменяемой постоянной

времени звена обратной связи к постоянной времени исполнительного двигателя, варьируемой в процессе исследования (рис. 10.37).

Как видно из графиков, при $\alpha > 1$ существует значительная область, в которой изменение T_m в прямой цепи системы практически не влияет на качество переходного процесса.

Таблица 10.12

$T_m, \text{сек}$	$\alpha = \frac{0,134}{T_m}$	$t_n, \text{сек}$	$\sigma, \%$
0,5	0,27	4,5	90
0,25	0,535	1,0	55
0,166	0,81	0,65	45
0,125	1,07	0,35	35
0,1	1,34	0,3	30
0,083	1,63	0,25	26
0,0625	2,14	0,2	23
0,05	2,7	0,2	20

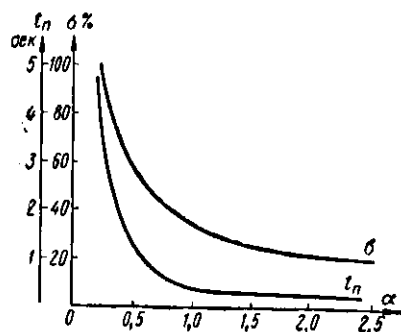


Рис. 10.37. Чувствительность следящей системы к изменению параметров

Пример 10.15. Определение областей устойчивости и зон равного качества системы стабилизации углового положения самолета.

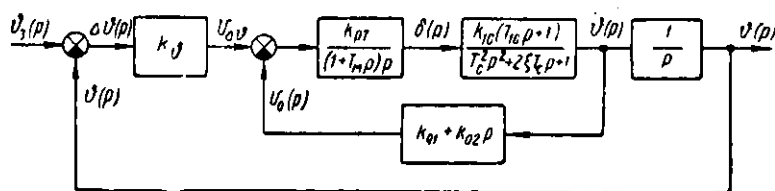


Рис. 10.38. Структурная схема системы угловой стабилизации самолета

Структурная схема исследуемой системы приведена на рис. 10.38.

Необходимые динамические свойства системы обеспечиваются путем надлежащего выбора параметров корректирующего звена местной обратной связи k_{01} и k_{02} , являющихся передаточными коэффициентами сигналов, пропорциональных соответственно скорости и ускорению угла тангажа θ , вырабатываемых гироскопическими датчиками автопилота.

Параметры прямой цепи системы имеют следующие значения: передаточный коэффициент гировертикали (определяющий сигнал ошибки $U_{\Delta\theta}$ на единицу рассогласования угла тангажа

[illegible]

Область устойчивости и зоны равного качества ($t_n = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$) определим в плоскости параметров k_{01} , k_{02} корректирующего звена в цепи местной обратной связи.

$$k_1 = k_9 = 11,5; \quad k_2 = k_8 = 11,5;$$

$$k_3 = k_{01} = 26,7; \quad k_4 = k_{02} = 28,6;$$

$$k_5 = \frac{k_{p.T}}{m_T T_M} = \frac{0,495}{2,0,066} = 3,74;$$

410

$$k_8 = \frac{k_{1c} T_{1c}}{m_t T_c^2} = \frac{0,88 \cdot 1,27}{2 \cdot 0,725^2} = 1,07; \quad k_9 = 1;$$

$$k_{10} = \frac{1}{m_t^2 T_c^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 0,725^2} = 0,476;$$

$$k_{11} = \frac{k_{1c}}{m_t^2 T_c^2} = \frac{0,88}{2^2 \cdot 0,725^2} = 0,42;$$

$$k_{12} = \frac{2\epsilon}{m_t T_c} = \frac{2 \cdot 0,476}{2 \cdot 0,725} = 0,656; \quad k_{13} = 1; \quad k_{14} = 1;$$

$$k_{15} = 1; \quad k_{16} = \frac{1}{m_t} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

После перераспределения коэффициентов для удобства набора получим окончательные значения:

$$k_1 = 1; \quad k_2 = 1; \quad k_3 = 2,32; \quad k_4 = 2,49; \quad k_5 = 3,74; \quad k_6 = 7,58;$$

$$k_7 = 0,5; \quad k_8 = 2,14; \quad k_9 = 5,75; \quad k_{10} = 0,476; \quad k_{11} = 4,85;$$

$$k_{12} = 0,556; \quad k_{13} = 1; \quad k_{14} = 1; \quad k_{15} = 1; \quad k_{16} = 0,5.$$

Для определения границы области устойчивости будем изменять «шагами» коэффициент k_{01} , а затем подбирать такие значения k_{02} , при которых переходный процесс в системе становится расходящимся.

Полученная последовательность точек с координатами k_{01} , k_{02} определит искомую границу области устойчивости. Соответствующие значения k_{01} , k_{02} приведены в табл. 10.13.

Таблица 10.13

k_{01}	1,15	3,46	5,75	11,5	17,25	26,7	46,0	57,5	69,0	80,5	92,0	115,0
k_{02}	6,27	2,4	1,55	0,8	0,99	1,45	2,27	2,67	3,62	4,27	4,95	6,26

Аналогичным образом определяются линии постоянных значений показателей качества, приближенно характеризующие зоны равного качества в пространстве параметров k_{01} , k_{02} , приведенные на рис. 10.40.

На том же рисунке штриховой линией нанесена граница области устойчивости.

Пример 10.16. Исследование системы стабилизации продольного движения самолета в функции параметров корректирующих связей.

В данной системе стабилизация углового положения самолета в вертикальной плоскости осуществляется при помощи

$$\begin{array}{r} 21,8 \\ 21,8 \\ \hline 1244 \\ 218 \\ \hline 4368 \\ 16,2 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1001,8 \\ 2003,5 \\ \hline 100 \end{array}$$

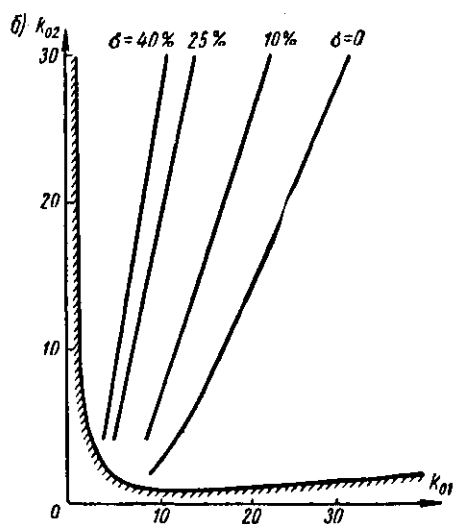
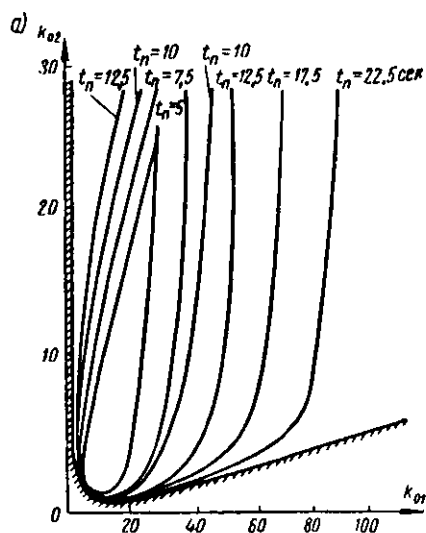


Рис. 10.40. Построение областей устойчивости и зон равного качества в пространстве параметров корректирующего звена системы стабилизации самолета:

$a - t_n, \text{сек}; \delta - \sigma, \%$

двух обратных связей: по углу поворота δ рулей высоты и по угловой скорости $\dot{\theta}$ тангажа.

Степень влияния каждой из этих связей зависит от величины соответствующего передаточного коэффициента k_δ и k_0 (см. структурную схему, изображенную на рис. 10.41).

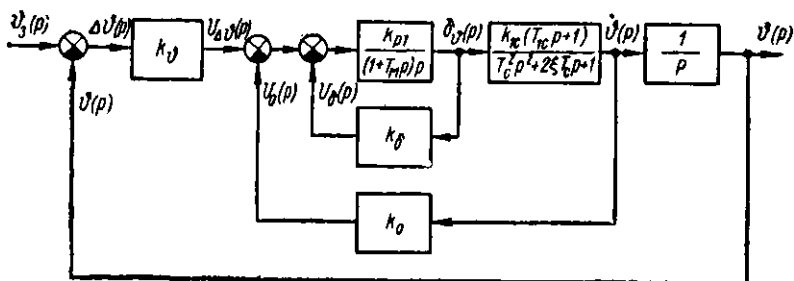


Рис. 10.41. Структурная схема системы стабилизации продольного движения самолета

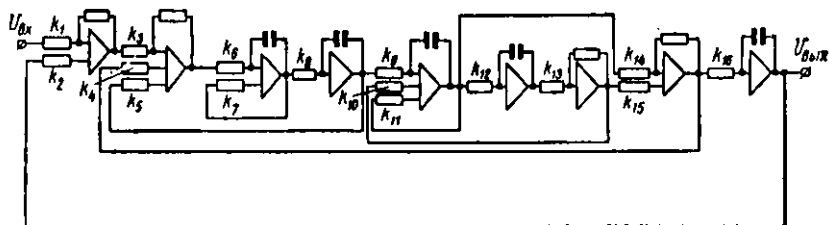


Рис. 10.42. Схема набора модели системы стабилизации самолета

Необходимо исследовать, как зависят качественные показатели системы от изменения этих коэффициентов, т. е. построить области равного качества $t_n = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$ в пространстве параметров k_δ , k_0 .

Система имеет следующие параметры:

$$k_\delta = 0,7 \text{ в./град}; \quad k_{p, \tau} = 2,48 \frac{\text{град/сек}}{\text{в}}; \quad T_M = 0,066 \text{ сек};$$

$$k_{1c} = 0,6 \text{ 1/сек}; \quad T_{1c} = 1,83 \text{ сек}; \quad T_c = 0,67 \text{ сек}; \quad \xi = 0,41.$$

В качестве исходных значений варьируемых параметров, после предварительного подбора на модели, возьмем $k_\delta = 0,43 \frac{\text{в}}{\text{град}}$ и $k_0 = 0,46 \frac{\text{в}}{\text{град/сек}}$.

Приняв масштаб времени в модели $m_t=2$, составим схему набора (см. рис. 10.42) и рассчитаем ее коэффициенты:

$$k_1 = k_9 = 0,7; \quad k_2 = k_8 = 0,7; \quad k_3 = 1; \quad k_4 = k_0 = 0,46;$$

$$k_5 = k_6 = 0,43;$$

$$k_8 = \frac{1}{m_t T_m} = \frac{1}{2 \cdot 0,066} = 7,6; \quad k_7 = \frac{1}{m_t T_m} = \frac{1}{2 \cdot 0,066} = 7,6;$$

$$k_8 = \frac{k_{p \cdot \tau}}{m_t} = \frac{2,48}{2} = 1,24; \quad k_9 = \frac{1}{m_t^2 T_c^2} = \frac{1}{2^2 \cdot 0,67^2} = 0,55;$$

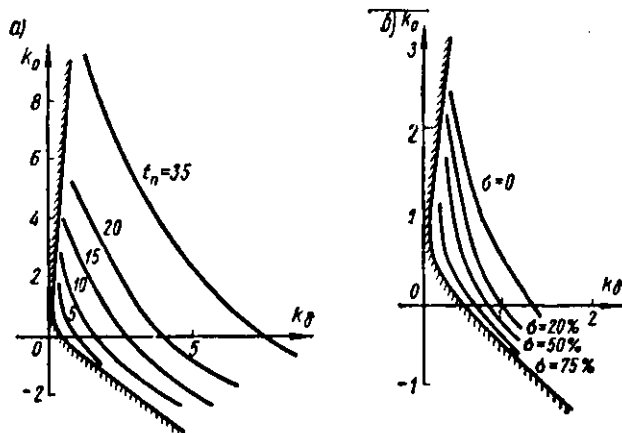


Рис. 10.43. Построение линий равного качества в плоскости параметров корректирующих связей системы стабилизации самолета:

а — t_n , сек; б — σ , %

$$k_{10} = \frac{1}{m_t^2 T_c^2} = 0,55; \quad k_{11} = \frac{2\xi}{m_t T_c} = \frac{2 \cdot 0,41}{2 \cdot 0,67} = 0,61;$$

$$k_{12} = 1; \quad k_{13} = 1; \quad k_{14} = m_t k_{1c} T_{1c} = 2 \cdot 0,6 \cdot 1,83 = 2,2;$$

$$k_{15} = k_{1c} = 0,6;$$

$$k_{16} = \frac{1}{m_t} = \frac{1}{2} = 0,5.$$

В данном случае перераспределять коэффициенты схемы набора модели нет необходимости.

Результаты моделирования представлены графически на рис. 10.43 в виде линий равного качества ($t_n = \text{const}$ и $\sigma = \text{const}$) и заштрихованной границы области устойчивости в плоскости параметров корректирующих связей исследуемой системы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзерман М. А. Лекции по теории автоматического регулирования. ГТТИ, 1958.
2. Анисимов В. И., Вавилов А. А., Фатеев А. В. Сборник примеров и задач по линейной теории автоматического регулирования. ГЭИ, 1959.
3. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. ФМ, 1959.
4. Бесекерский В. А., Орлов В. П., Полонская Л. В., Федоров С. М. Проектирование следящих систем малой мощности. Судпромгиз, 1958.
5. Бесекерский В. А., Пальтов И. П., Фабрикант Е. А., Федоров С. М., Чинаев П. И. Сборник задач по теории автоматического регулирования. ФМ, 1963.
6. Блажкин А. Т. Электромашинное автоматическое управление приводами. Металлургиздат, 1954.
7. Блох З. Ш. Динамика линейных систем автоматического регулирования. Техиздат, 1952.
8. Боднер В. А., Козлов М. С. Стабилизация летательных аппаратов и автопилоты. Оборонгиз, 1961.
9. Васильев Д. В., Филиппов Г. С. Основы теории и расчета следящих систем. ГЭИ, 1959.
10. Васильев Д. В., Чуич В. Г. Расчет систем автоматического управления. Машгиз, 1959.
11. Васильев Д. В., Митрофанов Б. А., Рабкин Г. Л., Самохвалов Г. Н., Семенкович А. А., Фатеев А. В., Чичерин Н. И. Проектирование и расчет следящих систем. Судостроение, 1964.
12. Васильев Д. В., Михайлов В. А., Норневский Б. И. Автоматизация судовых установок. Судостроение, 1965.
13. Воронов А. А. Основы теории автоматического управления, часть I. «Энергия», 1965.
14. Джеймс Х., Никольс, Филлипс Р. Теория следящих систем. ИЛ, 1953.
15. Коган Б. Я. Электронные моделирующие устройства и их применение для исследования систем автоматического регулирования. ФМ, 1963.
16. Красовский А. А., Поспелов Г. С. Основы автоматики и технической кибернетики. ГЭИ, 1962.
17. Каннингхэм В. Введение в теорию нелинейных систем. Госэнергоиздат, 1962.
18. Майоров Ф. В. Электронные регуляторы. Техиздат, 1956.
19. Под ред. Солодовникова В. В. Основы автоматического регулирования. Теория. Машгиз, 1954.
20. Под ред. Пугачева В. С. Основы автоматического управления. ФМ, 1963.
21. Попов Е. П. Динамика систем автоматического регулирования. Техиздат, 1954.
22. Попов Е. П., Пальтов И. П. Приближенные методы исследования нелинейных автоматических систем. ФМ, 1960.

23. Попков С. Л. Следящие системы. Высшая школа, 1963.
24. Соколов Т. Н. Электромеханические системы автоматического управления. ГЭИ, 1952.
25. Соколов Т. Н., Дружинский И. А. Автоматическое управление процессами копирования на металлорежущих станках. Машгиз, 1954.
26. Солодовников В. В., Толчеев Ю. И., Крутикова Г. В. Частотный метод построения переходных процессов. Гостехиздат, 1955.
27. Теумин И. И. Справочник по переходным электрическим процессам. Связьиздат, 1951.
28. Ту Юлиус Т. Цифровые и импульсные системы автоматического управления. Машиностроение, 1964.
29. Тэлер Дж., Пестель М. Анализ и расчет нелинейных систем автоматического управления. Энергия, 1964.
30. Фатеев А. В. Основы линейной теории автоматического регулирования. ГЭИ, 1954.
31. Фельдбаум А. А. Электрические системы автоматического регулирования. Оборонгиз, 1957.
32. Фельдбаум А. А. Вычислительные устройства в автоматических системах. ФМ, 1959.
33. Фельдбаум А. А., Дудыкин А. Д., Мановцев А. П., Морозов Н. Н. Теоретические основы связи и управления. ФМ, 1963.
34. Чуич В. Г. Настройка статических систем авторегулирования. Электричество, 1956, № 9.
35. Честнат Г., Майер Р. Проектирование и расчет следящих систем и систем регулирования. ГЭИ, 1959.



О Г Л А В Л Е Н И Е

	Стр.
дисловие	3
<i>а в а I. Функциональные схемы систем автоматического управления</i>	5
§ 1.1. Основные функциональные элементы систем автоматического управления	5
§ 1.2. Примеры составления функциональных схем по принципиальным схемам	9
<i>а в а II. Структурные схемы систем автоматического управления .</i>	31
§ 2.1. Основные правила составления и преобразования структурных схем	31
§ 2.2. Примеры составления структурных схем и определения передаточных функций систем в общем виде	39
<i>Г л а в а III. Точность систем автоматического управления в установившемся режиме</i>	59
§ 3.1. Основные расчетные соотношения	59
§ 3.2. Примеры расчета статических параметров отдельных элементов	66
§ 3.3. Примеры расчета установившихся ошибок и статических параметров систем автоматического управления	71
<i>Г л а в а IV. Уравнения и передаточные функции систем автоматического управления</i>	87
§ 4.1. Методика составления операторных уравнений и определения передаточных функций	87
§ 4.2. Примеры определения передаточных функций отдельных элементов	90
§ 4.3. Примеры определения передаточных функций систем автоматического управления	110
<i>Г л а в а V. Частотные характеристики систем автоматического управления</i>	135
§ 5.1. Виды частотных характеристик, применяемых при анализе и синтезе систем автоматического управления	135
§ 5.2. Примеры построения амплитудных и фазовых частотных характеристик в вещественной и комплексной плоскостях	138
§ 5.3. Примеры построения логарифмических частотных характеристик	151
§ 5.4. Примеры построения вещественных частотных характеристик	161

	Стр.
Глава VI. Устойчивость систем автоматического управления	165
§ 6.1. Критерии устойчивости линейных систем	165
§ 6.2. Примеры исследования устойчивости по критериям Рауса и Гурвица	171
§ 6.3. Примеры исследования устойчивости по критерию Найквиста	185
§ 6.4. Примеры исследования устойчивости по критерию Михайлова	190
Глава VII. Переходные процессы в системах автоматического управления	199
§ 7.1. Основные способы определения переходных процессов	199
§ 7.2. Примеры решения уравнений операторным методом	202
§ 7.3. Примеры построения кривой переходного процесса по вещественным трапецеидальным частотным характеристикам	235
Глава VIII. Динамический расчет систем автоматического управления по методу логарифмических частотных характеристик	242
§ 8.1. Основные положения метода логарифмических частотных характеристик	242
§ 8.2. Примеры определения передаточных функций и построения частотных характеристик корректирующих звеньев	244
§ 8.3. Пример расчета системы автоматического управления	262
Глава IX. Расчет нелинейных систем автоматического управления	287
§ 9.1. Вводные замечания	287
§ 9.2. Примеры расчетов по методам линейной аппроксимации	288
§ 9.3. Примеры расчетов численно-графическими методами	290
§ 9.4. Примеры расчетов по методам фазовых траекторий	301
§ 9.5. Примеры расчетов по методам гармонического баланса	301
Глава X. Моделирование систем автоматического управления	361
§ 10.1. Основы метода математического моделирования	361
§ 10.2. Примеры моделирования линейных систем автоматического управления	361
§ 10.3. Примеры моделирования нелинейных систем автоматического управления	361
§ 10.4. Примеры построения областей равного качества в пространстве параметров систем управления	361
Литература	



Васильев Дмитрий Васильевич

Чуич Воислав Георгиевич

Системы автоматического управления
(примеры расчета)

Редактор Оводова С. М.

Художественный редактор

Гуторов Н. К.

Техн. редактор Григорчук Л. А.

Корректор Марченко С. К.

Переплет художника

Алексеева А. В.

Т—06853. Сдано в набор 3/II—67 г. Подп.
к печати 5/VI—67 г. Формат 60×90¹/₁₆.
Объем 26,25 печ. л. Уч.-изд. л. 20,93.
Изд. № Стд/20. Зак. 1162. Тираж 50 000 экз.
Цена 86 коп.

Тематический план издательства
«Высшая школа» (вузы и техникумы)
на 1967 год. Позиция № 93

Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14,
Издательство «Высшая школа»

Главполиграфпром Комитета по печати
при Совете Министров СССР. Отпечатано
в Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградской типографии № 1 «Печат-
ный Двор» им. А. М. Горького, г. Ленин-
град, Гатчинская ул., 26 с матриц Влади-
мирской типографии. Гор. Владимир, ул.
Победы, д. 18-б

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ НА ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛ

«ВЕСТНИК ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ»

Единственный в Советском Союзе ежемесячный журнал, освещающий актуальные вопросы учебной, научной и воспитательной деятельности вузов — «Вестник высшей школы» — издается 25-й год. Журнал помещает на своих страницах интересные и разнообразные материалы — статьи, репортажи, обзоры, письма и т. п., в которых обсуждаются, нередко в дискуссионной форме, проблемы улучшения подготовки молодых специалистов, перспективы развития высшего образования и вузовской науки.

В разделе «Наука в высшей школе» широко освещается опыт и ставятся вопросы методики научных исследований, подготовки научной смены, повышения квалификации специалистов; публикуются сообщения о новейших открытиях, сделанных учеными вузов (для этого журнал имеет специальный раздел «На передовых рубежах науки»), даются информации о межвузовских научных и научно-методических конференциях.

В разделе «Воспитывать активных строителей коммунизма» ставятся общие проблемы воспитания молодежи.

Подробные сведения о новых книгах для вузов имеются в разделе «Критика и библиография». Юридическая консультация журнала ответит на вопросы читателей.

В разделе «За рубежом» читатели знакомятся с опытом педагогической и научной работы вузов социалистических, развивающихся и капиталистических стран.

В «Вестнике высшей школы» принимают постоянное участие видные ученые. Все это делает журнал интересным и полезным не только для работников, аспирантов и студентов высших учебных заведений, но и для сотрудников исследовательских учреждений, научных отделов и лабораторий, для самых различных общественных организаций — для всех, кто занимается научной и воспитательной деятельностью.

Журнал выходит 12 раз в год.

Подписная цена на год — 6 руб.

В каталоге «Союзпечати» журнал значится под № 70117.

Подписка принимается без ограничения с начала любого месяца в пунктах подписки «Союзпечати», отделениях и узлах связи, почтамтах, а также общественными распространителями печати. В розничную продажу журнал не поступает.