
СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ
СИСТЕМ
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДЫ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Цикл учебников и учебных пособий
основан в 1997 г.

*Под общей редакцией заслуженного деятеля науки РФ,
доктора технических наук, профессора
К.А. Пупкова*

МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Учебник в пяти томах

ТОМ 3

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

*Под редакцией заслуженного деятеля науки РФ,
доктора технических наук, профессора К.А. Пупкова
и заслуженного деятеля науки РФ,
доктора технических наук, профессора Н.Д. Егунова*

Издание второе, переработанное и дополненное

*Рекомендовано Министерством образования Российской Федерации
в качестве учебника для студентов высших учебных заведений,
обучающихся по машиностроительным
и приборостроительным специальностям*

Москва
Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
2004

УДК 681.5:681.3 (075.8)
ББК 14.2.6
М54

Рецензенты:

1. Академик РАН Е.П. Попов;
2. Кафедра автоматических систем Московского института радиотехники, электроники и автоматики (заведующий кафедрой, член-корреспондент РАН *Е.Д. Теряев*)

Авторы:

д-р техн. наук, проф. *К.А. Пупков*, д-р техн. наук, проф. *Н.Д. Егунов*, канд. техн. наук *И.Г. Владимиров*, д-р техн. наук, проф. *Ю.П. Корнюшин*, канд. техн. наук, доц. *В.И. Краснощеченко*, д-р техн. наук, проф. *А.П. Курдюков*, канд. техн. наук, доц. *В.Н. Пилишкин*, д-р техн. наук, проф. *В.М. Рыбин*, канд. техн. наук, доц. *В.И. Сивцов*, канд. техн. наук, доц. *Я.В. Слекеничс*, канд. техн. наук *В.Н. Тимин*, д-р техн. наук, проф. *А.И. Трофимов*, д-р техн. наук, проф. *Н.В. Фалдин*

М54 Методы классической и современной теории автоматического управления: Учебник в 5-и тт.; 2-е изд., перераб. и доп. Т.3: Синтез регуляторов систем автоматического управления / Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егунова. — М.: Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004. — 616 с.; ил.

ISBN 5-7038-2191-6 (Т.3)

ISBN 5-7038-2194-0

Центральной проблемой расчета и проектирования систем автоматического управления является проблема обеспечения высокого качества ее функционирования; это — проблема синтеза САУ.

Третий том учебника посвящен изложению методов синтеза регуляторов, обеспечивающих заданное качество процессов управления и позволяющих определить состав, структуру САУ и параметры всех ее устройств из условия удовлетворения заданному комплексу технических требований в классе линейных (стационарных и нестационарных), нелинейных, дискретных и многомерных систем. Отражены основные положения робастного управления. В конце 70-х годов возникла теория робастного управления. Рассмотрены перспективные направления теории робастного управления, основанные на методах H_∞ -оптимизации. Практически все методы проиллюстрированы примерами, взятыми из инженерной практики. Материал является частью общего курса теории автоматического управления, читаемого студентам МГТУ им. Н.Э. Баумана, ТулГУ, ОУАТЭ и других вузов.

Учебник предназначен для студентов вузов; он может быть также использован аспирантами и инженерами, а некоторые положения — научными работниками, занимающимися автоматическими системами.

УДК 681.5:681.3 (075.8)
ББК 14.2.6

ISBN 5-7038-2191-6 (Т.3)
ISBN 5-7038-2194-0

© Пупков К.А., Егунов Н.Д. и др., 2004
© МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004
© Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2004

ОБЩЕЕ ПРЕДИСЛОВИЕ К УЧЕБНИКУ

I. Особенности учебника

Учебник издается в пяти томах и включает также задания для самостоятельной работы. Для него характерно следующее:

1. Учебник охватывает основные фундаментальные положения, составляющие содержание методов теории автоматического управления. Главное достоинство университетского образования в России — упор на фундаментальные знания. Фундаментальность, интеграция образования и науки являются важнейшими факторами подготовки кадров с уровнем, обеспечивающим адаптацию к творчеству по приоритетным направлениям развития науки, включая теорию автоматического управления, с целью разработки:

- теоретических основ конструирования современных сложных систем автоматического управления технологическими процессами и подвижными объектами;
- алгоритмического обеспечения на основе последних достижений вычислительной математики;
- информационных технологий, позволяющих наиболее эффективно проводить автоматизацию процессов, реализуя предварительные научно-технические исследования и расчеты на ЭВМ.

Такой подход обеспечивает освоение и широкое применение информационных технологий, проявление инициативы и самостоятельности при решении сложных технических проблем. Сказанное выше также способствует профессиональной уверенности выпускника в результатах его деятельности.

В связи с этим в учебнике рассмотрены фундаментальные положения, являющиеся базой основных направлений теории автоматического управления (ТАУ). Изложение материала начинается с основных понятий и определений (сущность проблемы автоматического управления, определение системы автоматического управления (САУ), фундаментальные принципы управления, основные виды и законы автоматического управления и др.) и заканчивается рассмотрением содержания некоторых современных направлений теории автоматического управления.

Поскольку курс теории автоматического управления включен в учебные планы различных инженерных специальностей и является одним из важнейших элементов общетехнического образования, учебник может быть рекомендован студентам, заново приобретающим знания в области теории автоматического управления, и специалистам, которым приходится эти знания восстанавливать. Учебником могут пользоваться также студенты тех специальностей, для которых курс является профилирующим, определяющим квалификацию инженера.

При изучении курса студент или специалист должен сделать выборку материала, определяемого конкретной задачей и возможностями общего плана обучения.

2. Инженерная направленность учебника. Поскольку учебник предназначен для студентов вузов, обучающихся по машиностроительным и приборостроительным специальностям, чрезвычайно важным является этап подготовки, связанный прежде всего с освоением инженерных расчетов. Органическое сочетание фундаментальных знаний (о чем говорилось выше) и инженерных методов расчета и проектирования сложных

автоматических систем обеспечивает подготовку специалистов, способных решать сложнейшие проблемы в области аэрокосмической, ракетной и атомной техники, робототехники, автомобилестроения, медицины, автоматизации производственных процессов и других современных систем и комплексов, а также наукоемких технологий.

Как указано в [123], классическую теорию автоматического управления в основном создавали инженеры для инженеров и лишь частично — математики для инженеров. Эти результаты отражены в первых трех томах и многие методы, например относящиеся к проблеме синтеза регуляторов, можно рассматривать как инженерные приемы, показавшие высокую эффективность при решении сложных проблем проектирования САУ (этот факт отражен в главе 6 третьего тома). Современная ТАУ разрабатывается в основном математиками и инженерами, имеющими высокую математическую культуру, поэтому освоение соответствующих разделов учебника требует определенной математической подготовки. В условиях непрерывного повышения уровня математической подготовки выпускников многих вузов данная проблема преодолевается достаточно просто (эти разделы изложены в 4 и 5 томах).

В основном же изложение ведется с инженерной точки зрения: подчеркиваются главные идеи, лежащие в основе методов, но не всегда приводятся строгие математические доказательства. Учитывая, что без освоения технического аспекта и глубокого знания физических процессов, протекающих в элементах САУ (особенно при решении задач синтеза регуляторов сложных систем, и это является одним из факторов, определивших популярность частотного метода), изучение методов теории автоматического управления не приводит к нужному результату, физическая и содержательная сторона дела подчеркивается в течение всего курса. Более того, значительное внимание уделено рассмотрению конкретных промышленных систем управления. Например, в главе 6 третьего тома рассмотрены системы управления тепловыделяющими элементами атомных электростанций, системы управления баллистическими ракетами, высокоточным оружием, системы, используемые в противосамолетной и противоракетной обороне (ПСО и ПРО).

3. Методы теории автоматического управления, рассмотренные в учебнике, в большинстве своем ориентированы на применение ЭВМ. Интенсивное развитие процессов автоматизации проектирования систем автоматического управления, обусловленное развертыванием высокопроизводительных вычислительных комплексов в проектно-конструкторских организациях, перемещение центра тяжести процесса проектирования от аппаратного обеспечения к алгоритмическому и программному обеспечению приводят к необходимости разработки нового методологического обеспечения, включая соответствующие вычислительные технологии [123].

Для содержания книги характерна, в известной мере, «вычислительная окраска» изложенного материала, поскольку возможности современных ЭВМ позволяют значительно ускорить сроки проектирования САУ и, таким образом, налагают свой отпечаток на вычислительную часть ТАУ. Успех в решении поставленных задач расчета и проектирования с использованием ЭВМ зависит от многих факторов, основными из которых являются: степень адекватности математической модели системы; степень эффективности численных методов ТАУ, используемых в алгоритмическом обеспечении; наличие высококачественного программного обеспечения; от того, насколько успешно используется творческий потенциал исследователя-проектировщика. При этом решающий фактор остается за человеком, который может решать многие неформализованные задачи.

Поскольку системы автоматизированного проектирования (САПР) являются в настоящее время одним из наиболее эффективных средств повышения производительности инженерного труда и научной деятельности, сокращения сроков и улучшения качества разработок, то в соответствующих главах и приложениях отражено

содержание используемых численных методов и вычислительных схем с необходимым обоснованием.

Рассмотренное в пятитомнике методологическое обеспечение, ориентированное на применение ЭВМ, может служить базой для решения весьма сложных задач инженерного проектирования САУ.

4. В учебнике с единых позиций изложены как основные методы классической ТАУ, так и положения, определяющие содержание некоторых современных направлений теории управления. В настоящее время имеют место различные трактовки, связанные с выделением в ТАУ «классической» и «современной» теории. Некоторые из них отражены, например, в [7, 37, 82, 99, 123, 126, 141, 142].

В учебнике под современными методами понимаются методы, интенсивно развиваемые в последние два десятилетия и в настоящее время внедряемые в практику инженерных расчетов и создания новых систем, включающие аппарат синтеза грубых систем автоматического управления в пространстве состояний, H_∞ -теория оптимального управления, задачи оптимизации многообъектных многокритериальных систем с использованием стабильно-эффективных компромиссов, синтез систем автоматического управления методами дифференциальной геометрии (геометрический подход), использование нейροкомпьютерных управляющих вычислительных систем, основные положения теории катастроф, фракталов, хаоса, а также задачи исследования и проектирования адаптивных и интеллектуальных систем (они отражены в третьем, четвертом и пятом томах учебника).

Таким образом, учебник охватывает наиболее важные разделы теории автоматического управления; вместе с тем он не претендует на всесторонний охват проблематики теории автоматического управления. Не затронуты такие важные направления, как инвариантность, теория чувствительности, методы и алгоритмы оценивания динамических процессов, идентифицируемость и методы и алгоритмы идентификации (отражены лишь содержание проблемы и подходы к ее решению), системы со случайной структурой, стохастические системы, теория нелинейной фильтрации и др.

5. Основное содержание и структуру учебника определил коллектив авторов, включающий представителей разных российских школ науки об управлении: К.А. Пупков (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Н.Д. Егупов (МГТУ им. Н.Э. Баумана), А.И. Баркин (Институт системного анализа РАН), И.Г. Владимиров (Университет Квинслэнда, г. Брисбэй, Австралия), Е.М. Воронов (МГТУ им. Н.Э. Баумана), А.В. Зайцев (Военная академия РВСН им. Петра Великого), С.В. Канушкин (Серпуховский военный институт РВСН), В.Г. Коньков (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Ю.П. Корнюшин (МГТУ им. Н.Э. Баумана), В.И. Красношеченко (МГТУ им. Н.Э. Баумана), А.П. Курдюков (Институт проблем управления РАН), А.М. Макаренков (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Л.Т. Милов (Московский государственный автомобильно-дорожный институт (МАДИ)), В.Н. Пилишкин (МГТУ им. Н.Э. Баумана), В.И. Рыбин (Московский государственный инженерно-физический институт (МИФИ)), В.И. Сивцов (МГТУ им. Н.Э. Баумана), Я.В. Слекеничс (Обнинский университет атомной энергетики (ОУАТЭ)), В.Н. Тимин (совместное конструкторское бюро «Русская Авионика»), А.И. Трофимов (Обнинский университет атомной энергетики (ОУАТЭ)), Г.Ф. Утробин (Военная академия РВСН им. Петра Великого), Н.В. Фалдин (Тульский государственный университет), О.В. Шевяков (Министерство образования Российской Федерации).

II. Методические вопросы

Необходимо указать, что никакой учебник не может дать окончательных рецептов для решения широчайшего спектра задач, порожденных практикой проектирования сложных систем автоматического управления.

Изложенный в книгах материал призван служить базой, фундаментом, позволяющим с большей скоростью и эффективностью находить пути для решения задач практики.

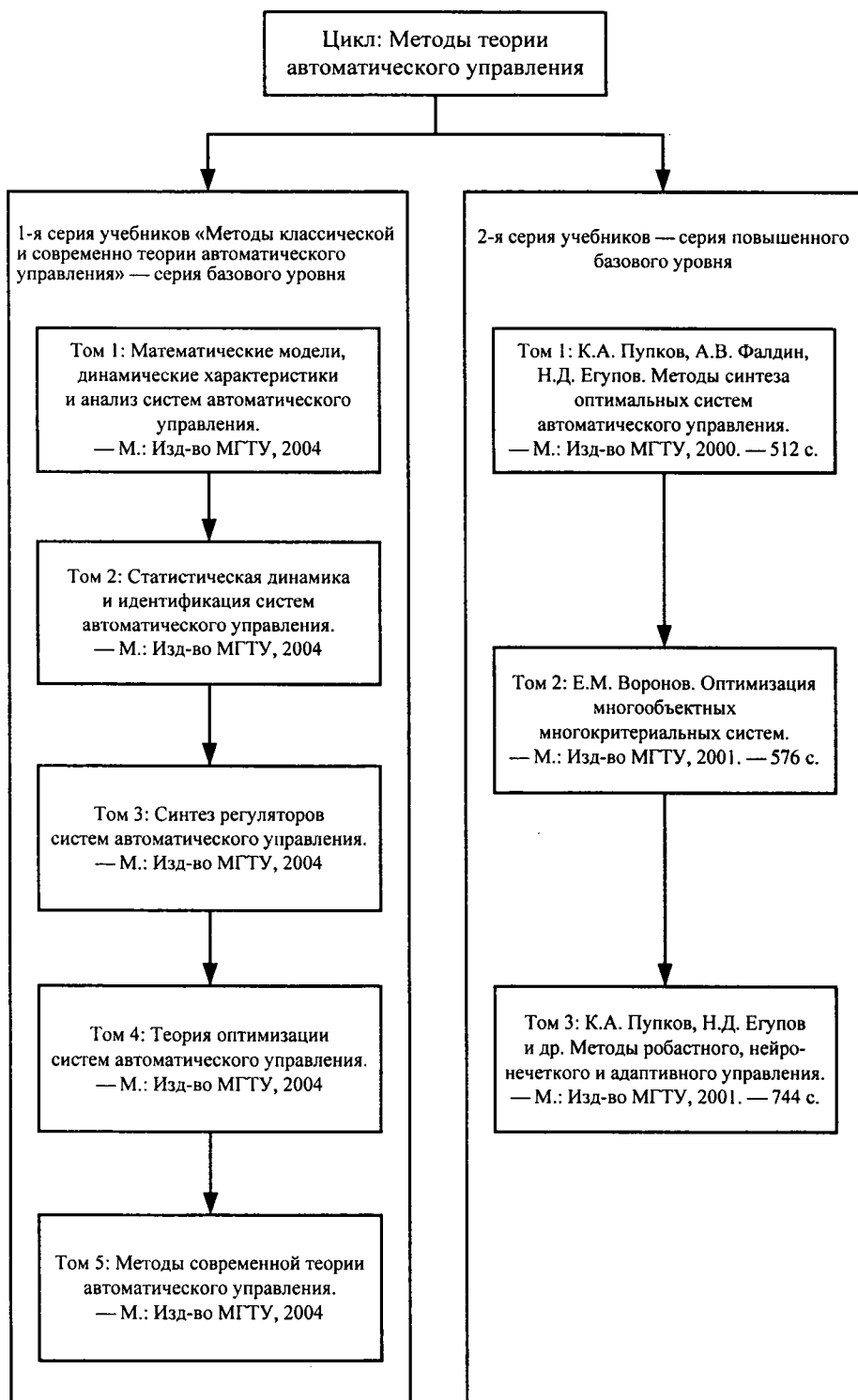


Рис. 1. Структура цикла учебников и учебных пособий «Методы теории автоматического управления»

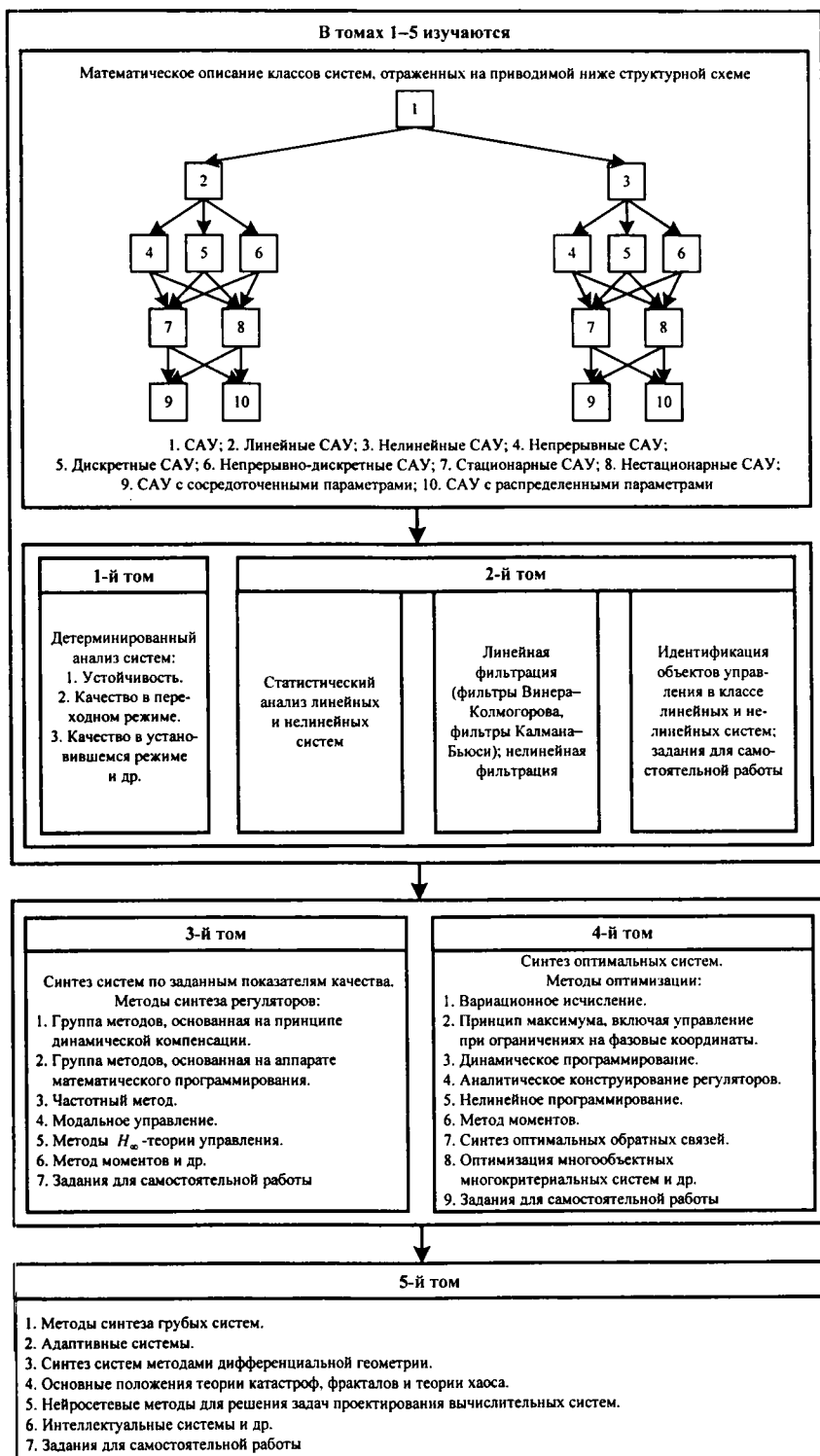


Рис. 2. Структурная схема, иллюстрирующая содержание пятитомника «Методы классической и современной теории автоматического управления» (базовый уровень)

Вместе с тем материал излагается таким образом, чтобы читателю были видны пути практического применения рассматриваемых методов. *В большинстве своем методы доведены до расчетных алгоритмов, приводятся таблицы и другой вспомогательный материал, облегчающий их применение. Положения, изложенные во всех разделах, иллюстрируются подробно рассмотренными примерами расчета и проектирования конкретных систем, которые нашли широкое применение:*

- *при решении задач управления баллистическими ракетами, зенитными управляемыми ракетами (ЗУР), в системах противосамолетной и противоракетной обороны;*
- *в атомной энергетике;*
- *в турбиностроении;*
- *при создании систем вибрационных испытаний и др.*

Весьма важным является вопрос методики изучения курса «Теории автоматического управления» с целью стать специалистом в этой области, пользуясь циклом учебных пособий и учебников, издаваемых указанным выше коллективом авторов.

Весь цикл учебников и учебных пособий можно условно разбить на две серии:

1-я серия — базовая; эта серия включает пять томов настоящего учебника.

2-я серия — базовая повышенного уровня, в которой основное внимание уделено глубокому и достаточно полному изложению методов, определяющих содержание некоторых современных направлений теории автоматического управления.

Сказанное выше иллюстрируется рис. 1.

Базовый уровень приобретает изучением предлагаемого учебника, в котором систематически изложены методы классической и современной теории управления и дано достаточно полное представление о проблематике и путях развития науки об управлении техническими объектами.

Содержание каждого из томов учебника серии базового уровня иллюстрируется рис. 2.

После освоения базового уровня можно приступить к специализации в той или другой области теории автоматического управления, изучая соответствующие тома 2-й серии, а также статьи и монографии по специальным проблемам теории управления и др.

Авторы выражают глубокую благодарность рецензентам — академику РАН Е.П. Попову и коллективу кафедры «Автоматические системы» Московского государственного института радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА), руководимой членом-корреспондентом РАН Е.Д. Теряевым, за ценные замечания, способствовавшие улучшению содержания книги. Авторы благодарят заслуженного деятеля науки и техники РФ, д-ра техн. наук, проф. А.С. Шаталова, заслуженного деятеля науки и техники РФ, д-ра техн. наук, проф. Б.И. Шахтарина (МГТУ им. Н.Э. Баумана), которые своими советами позволили значительно улучшить структуру учебника, углубить изложение отдельных теоретических положений, улучшить окончательный вариант рукописи.

Авторы благодарят концерн «Росэнергоатом», департамент образования и науки Правительства Калужской области, а также Издательский Дом «Манускрипт» за помощь в издании учебника.

Большой объем книги и широта охваченного материала вызвали большие трудности при ее написании. Конечно, эти трудности не всегда удавалось преодолеть наилучшим образом. Читатели, вероятно, смогут высказать много замечаний и дать свои предложения по улучшению книги.

Авторы заранее признательны всем читателям, которые не сочтут за труд указать на замеченные неточности, ошибки, на пути совершенствования структуры учебника и его содержания.

К.А. Пупков
Н.Д. Егупов

ВВЕДЕНИЕ К 3-МУ ТОМУ

Настоящая книга представляет собой 3-й том учебника «Методы классической и современной теории автоматического управления», посвященный изложению содержания центральной проблемы теории автоматического управления — синтезу автоматических систем. *Задача синтеза САУ, в широком смысле, заключается в определении состава, структуры (конфигурации) САУ, параметров всех ее устройств и технических средств реализации из условия удовлетворения заданному комплексу технических требований.*

Эти требования многоплановы и разнохарактерны: от вида статических и динамических характеристик, точности, запаса устойчивости, надежности до весовых, габаритных и энергетических характеристик (требования в отношении быстродействия должны соответствовать мощности исполнительного элемента регулятора), условий изготовления (технологические проблемы) и требований к эксплуатационному обслуживанию и др.

Задачей синтеза САУ по заданным показателям качества является рациональный выбор вспомогательных элементов, параметров и структуры системы при известном динамическом описании объекта управления в целях обеспечения необходимых значений показателей качества. Этими показателями качества, например для линейных стационарных систем, являются запасы устойчивости по амплитуде и фазе, вид переходного процесса, точность САУ при заданных входных воздействиях и др.

Большое значение имеет теория оптимизации САУ. С ее помощью находится решение задачи синтеза такого закона управления, который оптимизирует процесс по тому или иному заданному критерию. Это может быть максимальное быстродействие при ограниченной мощности или ограниченном управляющем моменте или обеспечение наименьших затрат энергии на процесс управления при заданных условиях работы [122, 124].

Если решение первой проблемы (синтез по заданным показателям качества) достигается синтезом регуляторов, включающим рассмотрение вопросов определения его структуры и параметров, места включения, исходя из обеспечения требований к качеству процессов управления, и предметом изучения рассматриваемой проблемы является направление, формулируемое как методы научного проектирования систем с заданными показателями качества, то вторая проблема — проблема оптимизации — по существу является вариационной задачей, когда требуется получить экстремум функционала, который избран в качестве критерия оптимальности системы (см. том 4).

Разработкой методов синтеза САУ, направленных на решение практических задач, занимались многие русские и зарубежные ученые. Далее приведем основные свойства ММ систем, тесно связанных с качеством управления [89]. Назначением регуляторов наряду с решением указанных выше задач является обеспечение устойчивости САУ.

Математическое определение устойчивости применительно к объектам управления, записанным в форме Коши, сформулировано великим русским математиком и механиком, академиком Петербургской Академии наук (1901) Александром Михайловичем Ляпуновым (1857–1918). Это свойство предполагает, что математическая модель объекта управления задана на всей полуоси времени $[0, \infty)$, а сам объект доступен только возмущениям начальных условий и на него не действуют никакие другие внешние воздействия. Предполагается также, что система имеет единственное состояние равновесия, каковым является начало координат.

Во многих технических приложениях динамика объекта рассматривается *на конечном интервале времени* $[0, T]$. К таким приложениям относятся, например, пилотажно-навигационные комплексы космических спускаемых аппаратов и баллистических ракет, предназначенные для выведения этих аппаратов на орбиту вокруг Земли, системы автоматического управления оружием массового поражения, включая баллистические ракеты, торпеды и т.д. Количество таких продуктов человеческой деятельности настолько велико, что породило целое направление, которое развивалось Г.В. Каменковым, А.А. Лебедевым, Н.Г. Четаевым, Н.Д. Моисеевым, К.А. Абгаряном, С.Я. Степановым и др. [89].

В 1945 году, ставший впоследствии почетным академиком Российской Академии естественных наук, Владимир Викторович Солодовников ввел в практику автоматического управления понятие *прямых показателей качества переходных процессов*. Под этим понятием понимаются два неформализованных свойства переходных процессов в замкнутой системе, а именно: *время регулирования и перерегулирование*. При этом полагается, что переходной процесс является реакцией на ступенчатое внешнее воздействие и стремится к некоторому установившемуся значению.

В том же году В.В. Солодовниковым было введено понятие *статической ошибки, которая характеризует точность работы системы управления в установившемся режиме* [124].

Для определения *прямых показателей качества переходных процессов* стационарных линейных систем А.А. Фельдбаум ввел в рассмотрение корневые показатели:

- *степень устойчивости, или расстояние до мнимой оси ближайшего к ней следа корня,*
- *колебательность, или отношение абсолютной величины мнимой части корня к действительной для ближайшей (слева) к мнимой оси пары комплексно-сопряженных корней.*

В 1939 году Г.В. Щипановым в практику автоматического управления применительно к объектам управления, записанным в форме Коши, было введено понятие инвариантности:

i -выход $(i = \overline{1, m})$ замкнутой системы назовем инвариантным к j -входу $(j = \overline{1, m}, i \neq j)$, если он невосприимчив к этому входу.

В 1938 году членом-корреспондентом АН СССР Иваном Николаевичем Вознесенским было введено понятие автономности: *объект управления называется автономным в смысле И.Н. Вознесенского, если замкнутая многосвязная система с векторным управлением (m -размерность вектора управлений) распадается на m односвязных подсистем*. Свойство автономности вводилось И.Н. Вознесенским применительно к объектам управления, записанным в форме Коши. Однако «вход-выходная» форма описания позволяет формализовать введенное свойство, и инвариантности являются двумя сторонами одной и той же медали, в роли которой выступает одна и та же математическая модель в форме «вход-выход»: всякий i -выход системы не зависит от всех не i -тых компонент вектора входа. Причем описанный эффект проявляется при любом $m > 1$, т.е. начиная с $m = 2$. Академик АН СССР Борис Николаевич Петров назвал возникающий для $m = 2$ эффект *принципом двухканальности* [88]. В рамках теории инвариантности ценные результаты получены В.С. Кулебакиным, Н.Н. Лузиным, П.И. Кузнецовым, Б.Н. Петровым, А.Г. Ивахненко, Г.М. Улановым и др.

В 1937 году, ставшими впоследствии академиками АН СССР Александром Александровичем Андроновым (1901–1952) и Львом Семеновичем Понтрягиным (1908–1988), было дано определение *грубой (структурно устойчивой) математической модели*.

При использовании математической модели объекта управления возникает естественный вопрос о соответствии свойств модели свойствам описываемого ею объекта. Поскольку любая модель описывает объект лишь приближенно, то интерес представляют только те свойства модели, которые сохраняются при вариациях ее параметров в некоторых пределах. Если подобное справедливо для модели, то вполне естественно, что и объект управления наделен свойствами, совпадающими со свойствами модели. Варьировать параметры модели необходимо и для учета реализации на конкретных физических элементах закона управления, полученного расчетным путем, а также учета изменения физических параметров объекта управления вследствие старения (износа).

Если при вариациях параметров модели некоторое свойство ее движений сохраняется, то такое свойство принято называть грубым (или, как принято в англоязычных странах, робастным) [89].

Академиком АН СССР Николаем Николаевичем Красовским в 1956 году дано определение грубости данного свойства движений модели [89].

Заданные свойства математических моделей систем: устойчивость на $[0, \infty)$ и $[0, T]$, автономность, грубость (робастность), инвариантность, качество переходных процессов, точность и др. достигаются решением задачи синтеза.

Приведем лишь некоторые результаты решения этой задачи и назовем их авторов.

К первым результатам решения задачи синтеза САУ следует отнести гиперболу И.А. Вышнеградского, с помощью которой определяется область устойчивости и область неустойчивости САУ, поведение которой описывается ДУ третьего порядка. Гипербола И.А. Вышнеградского направлена на решение задачи стабилизации САУ в форме «вход–выход»; она позволяет выделить области аperiodических и колебательных переходных процессов. С результатом И.А. Вышнеградского тесно связана задача модального управления, формализованная Н.Н. Розенброком, и аналитическое решение этой задачи для скалярного случая, предложенное Ю. Аккерманом [89].

В 1940 году В.С. Кулебакиным сформулирован подход, который можно назвать принципом двухэтапного синтеза регуляторов (принцип двухэтапной коррекции). Содержание его заключается в том, что на первом этапе выбирается эталонный оператор замкнутой системы (для стационарных систем — эталонная ПФ $W^3(s)$), а на втором — структурная схема и параметры регулятора, а также исполнительный элемент, имеющий мощность, обеспечивающую необходимое быстродействие.

Что касается класса стационарных линейных САУ, то существенные результаты по выбору эталонных передаточных функций систем, удовлетворяющих техническим требованиям при некоторых типовых полезных сигналах, были получены в работах В.А. Боднера, Б.Н. Петрова, В.В. Солодовникова, Г.С. Поспелова, Т.Н. Соколова, С.П. Стрелкова, А.А. Фельдбаума [110].

При решении задач синтеза САУ, подверженных воздействию случайных процессов, важную роль играет нахождение динамических характеристик оптимальной (эталонной) системы. Большое значение в решении этой проблемы имеют работы Н. Винера, Л. Заде и Дж. Рагаццини, В.В. Солодовникова, В.С. Пугачева, П.С. Матвеева, К.А. Пупкова, В.И. Кухтенко.

В частотном методе, разработанном В.В. Солодовниковым и получившим широкое распространение в инженерной практике, расчет производится с использованием типовых логарифмических амплитудных частотных характеристик, для которых построены подробные номограммы показателей качества процессов управления [124]. С помощью этих номограмм можно построить эталонную амплитудную частотную характеристику (реализация 1-го этапа) синтезируемой системы, опреде-

лить ее передаточную функцию, найти частотные характеристики и передаточную функцию корректирующего устройства.

Я.З. Цыпкиным рассмотрена *задача определения эталонной характеристики замкнутой САУ* для случаев, когда показателями качества выбраны интегральное квадратическое отклонение и энергия управления [139].

Теоретические положения, являющиеся основой решения задачи синтеза, нашли отражение в работах Е.П. Попова и В.А. Бесекерского [19, 94].

Широкий спектр подходов к решению задачи построения ММ эталонной системы, например с использованием фильтров Баттерворса, рассмотрен А.А. Первозванским [87].

В.С. Кулебакиным был предложен *метод синтеза систем автоматического управления, описываемых линейными дифференциальными уравнениями второго и третьего порядков, удовлетворяющих некоторым техническим требованиям*. Для таких систем эталонная передаточная функция выбирается из условия реализации заданной формы переходного процесса. На основе выбранной эталонной передаточной функции можно найти параметры реальной системы. *Такой метод синтеза носит название метода стандартных коэффициентов*. Характерная особенность этого метода заключается в том, что искомые параметры определяются при решении системы уравнений, полученных путем приравнивания коэффициентов при соответствующих операторах эталонной и реальной передаточных функций системы управления [58].

Основными недостатками метода стандартных коэффициентов при решении задачи синтеза является во многих случаях неразрешимость системы уравнений, служащей для определения параметров этой системы [110].

В.А. Боднером показано, что при включении определенным образом обратных параллельных корректирующих устройств система становится разрешимой [21].

Существенные результаты, направленные на решение задачи определения параметров элементов, входящих в систему управления и обеспечивающих равенство эталонной ММ и ММ проектируемой системы, получены В.В. Солодовниковым, В.Г. Сегалиным, Гуллемином, Т.Н. Соколовым, В.Р. Эвансом, В.А. Боднером, В.С. Кулебакиным, Э.Г. Удерманом и др. [110].

Для решения инженерных задач разрабатывались методы синтеза САУ в следующих постановках:

1. Синтез по заданному расположению полюсов изображений процессов (передаточной функции), а также с использованием D -разбиения плоскости коэффициентов знаменателя изображения (или плоскости параметров системы).
2. Синтез по заданному расположению полюсов и нулей передаточной функции, в том числе метод корневых годографов.
3. Синтез по интегральным оценкам.
4. Синтез методом подобия амплитудно-фазовых и вещественных частотных характеристик.

Методы синтеза по расположению полюсов передаточной функции рассмотрены в работах Г.Н. Никольского, В.К. Попова, Т.Н. Соколова, З.Ш. Блоха, Ю.И. Неймарка и др. [81].

Метод синтеза по заданному (взаимному) расположению полюсов и нулей передаточной функции может обеспечить все показатели качества переходного процесса. Он рассматривается в работах С.П. Стрелкова, Е.П. Попова, Траксела и др. [81].

Кроме того, *корневые методы* предложены К.Ф. Теодорчиком, Г.А. Бендриковым, Г.В. Римским, Гуллемином.

Метод, разработанный Н.Т. Кузовковым, *позволяет использовать связь основных показателей качества процесса управления с величинами доминирующих полюсов и*

нулей синтезируемой системы, а также установить связь этих полюсов и нулей с варьируемым параметром [61].

Для определения части параметров используются также интегральные оценки качества переходного процесса, развиваемые в работах Л.И. Мандельштама, Б.В. Булгакова, В.С. Кулебакина, А.А. Фельдбаума, А.А. Красовского и др.

Параметры системы определяются в результате минимизации функционала

$$I = \int_0^{\infty} V dt,$$

где V — в общем случае квадратичная форма. Интеграл I находится без интегрирования дифференциальных уравнений системы.

Синтез звеньев по амплитудно-фазовым характеристикам скорректированной и нескорректированной систем предложен в работе А.В. Фатеева.

А.В. Башариным разработан графический метод синтеза нелинейных систем управления, который может применяться также к системам с переменными параметрами.

Н.Н. Соколовым изучен широкий спектр задач синтеза линеаризованных систем автоматического управления, при этом основное внимание уделено методам определения эталонных передаточных функций [81]. Подходы к решению задачи синтеза регуляторов, доведение ее до алгоритма вычисления параметров корректирующих цепей с использованием линейных дифференциальных операторов в классе систем с переменными параметрами изучены А.В. Солодовым [111].

Обратные задачи динамики систем составляют один из ведущих разделов аналитической механики, суть которых состоит в том, что по заданному описанию модели динамической системы необходимо найти систему сил, действие которых порождает ее движение с заданными свойствами. Взаимосвязь задачи формирования заданных движений на выходе управляемой динамической системы с обратными задачами динамики рассматривали Л.М. Бойчук, А.А. Жевнин, К.С. Колесников, А.П. Крищенко, В.И. Толокнов, Б.Н. Петров, П.Д. Крутько, Е.П. Попов, Г.Е. Пухов, К.Д. Жук, А.В. Тимофеев и др. [45, 59].

В результате исследования условий подавления (парирования) влияния возмущений на поведение объекта управления А.С. Востриковым был сформулирован принцип локализации как структурное требование к построению алгоритмов управления динамическими объектами, суть которого состоит в организации в системе управления специальной быстрой подсистемы, где локализуются возмущения, влияние которых на поведение объекта нужно парировать [31, 32, 131]. Метод синтеза САУ, обеспечивающих формирование заданных показателей качества переходных процессов в условиях действия неконтролируемых возмущений на основе использования старшей производной совместно с большим коэффициентом усиления в законе обратной связи, был предложен в работах А.С. Вострикова и получил дальнейшее развитие в методе локализации. Кроме того, в качестве общей методической основы для синтеза нелинейных систем управления был предложен принцип локализации как структурное требование к проектируемой системе управления, состоящее в формировании специальной быстрой подсистемы для подавления влияния сигнальных и параметрических возмущений. Структурное представление систем, удовлетворяющих данному принципу, позволяет выделить контур — «контур локализации», при этом расчет системы управления сводится главным образом к решению двух задач: проектированию эталонного управления и стабилизации быстрых процессов в контуре локализации. Принципу локализации удовлетворяют различные типы систем, в частности, системы со скользящими режимами, системы с большими коэффициентами в законе обратной связи, а также ряд адаптивных систем и систем, близких по свойствам к адаптивным [31, 32, 131].

В настоящее время можно выделить несколько наиболее развитых направлений в теории синтеза систем управления, позволяющих обеспечить формирование требуемых показателей качества переходных процессов по выходным переменным, а также их инвариантность по отношению к переменным характеристикам объекта и неконтролируемым возмущениям.

Важное направление — это *теория синтеза систем с переменной структурой и, в частности, систем управления с организацией скользящих режимов движения вдоль многообразия, заданного в пространстве состояний объекта*. Основы этого направления рассматривались в работах Е.А. Барбашина, Е.И. Геращенко, С.М. Геращенко, С.В. Емельянова, Б.Н. Петрова, В.И. Уткина и получили дальнейшее развитие в работах многих исследователей. Данное направление интенсивно развивается и в настоящее время [42, 43, 44].

Системы с переменной структурой (СПС), введенные в теорию и практику автоматического управления С.В. Емельяновым, находят большое теоретическое развитие и практическое применение. *Основная идея построения СПС заключается в организации нескольких структур регулятора и смене их в процессе управления объектом таким образом, чтобы в наибольшей степени использовать положительные свойства каждой из структур и получить новые движения системы, возможно несвойственные ни одной из отдельно взятых структур регулятора. При этом вся система в целом может получить качественно новые свойства.*

Решение задачи компенсации в виде функциональных степенных рядов рассмотрено Г. Ван-Трисом в [26]. Там же построены алгоритмы определения компенсирующих ядер в прямой цепи и цепи обратной связи.

В [101] К.А. Пупковым, А.С. Ющенко и В.И. Капалиным *систематически и с единых методологических позиций изложена теория нелинейных систем*; разработаны методы синтеза регуляторов в классе нелинейных систем, поведение которых описывается функциональными рядами Вольтерра. *Класс систем со случайными параметрами исследован в работах Е.А. Федосова и Г.Г. Себрякова, а применение теории чувствительности — в работах Р.М. Юсупова.*

Аппарат многомерных ИПФ, ПФ, частотных характеристик, а также многомерных интегральных преобразований Лапласа и Фурье позволил О.Н. Киселеву, Б.Л. Шмудляну, Ю.С. Попкову и Н.П. Петрову разработать конструктивные алгоритмы идентификации и оптимизации нелинейных стохастических систем, включая синтез регуляторов [93]. Я.З. Цыпкиным и Ю.С. Попковым рассмотрены методы синтеза регуляторов в классе дискретных систем [140].

А.С. Шаталовым, В.В. Барковским, В.Н. Захаровым рассмотрен широкий спектр вопросов по *проблеме синтеза систем автоматического управления*; результаты отражены в [14, 15]. *Аппарат обратных задач динамики управляемых систем использован П.Д. Крутько для синтеза оператора обратной связи, а также для решения ряда других задач [59].*

И.А. Огурком *рассмотрена задача синтеза в следующей постановке: параметры регулятора определяются таким образом, чтобы [81]:*

- 1) *воспроизводился переходной процесс $h_3(t)$, относящийся к координате $x(t)$, при возмущениях определенного вида; при этом с допустимой погрешностью должна воспроизводиться кривая $h_3(t)$, ее экстремальные значения, скорость и время протекания переходного процесса;*
- 2) *обеспечивалась заданная степень устойчивости и колебательность системы.*

Конструктивные алгоритмы синтеза регуляторов для широкого класса систем с использованием аппарата математического программирования предложены И.А. Дилюком, А.С. Огурком, А.С. Коноваловым, Л.А. Осиповым и отражены в [5].

В.В. Солодовниковым, В.В. Семеновым и А.Н. Дмитриевым разработаны спектральные методы расчета и проектирования САУ, позволяющие построить конструктивные алгоритмы синтеза регуляторов [114, 118], В.С. Медведевым и Ю.М. Астаповым рассмотрены алгоритмы нахождения эталонных ПФ при случайных воздействиях, а также методы синтеза корректирующих устройств с использованием логарифмических частотных характеристик, по заданным собственным значениям матрицы системы управления линейными объектами по квадратичному критерию качества [10].

В.И. Сивцовым и Н.А. Чулиным получены результаты, позволяющие решать задачи автоматизированного синтеза систем управления на основе частотного метода [109]; В.А. Карабановым, Ю.И. Бородиным и А.Б. Ионнисаном рассмотрены некоторые задачи обобщения частотного метода на класс нестационарных систем.

В работах Е.Д. Теряева, Ф.А. Михайлова, В.П. Булекова и др. рассмотрены задачи синтеза нестационарных систем.

Чрезвычайно трудной является проблема синтеза регуляторов в многомерных системах. В работах, рассматривающих вопрос о разрешимости задачи синтеза регуляторов при выполнении известных требований, получены соответствующие условия разрешимости (Р. Брокетт, М. Месарович). В.В. Солодовниковым, В.Ф. Бирюковым, Н.Б. Филимоновым получены результаты, направленные на решение задач синтеза регуляторов в классе многомерных систем; ими предложен критерий качества, который адекватно отражает динамическое поведение многомерных систем; сформулированы условия, при которых задача синтеза разрешима [1, 69, 112, 119, 124]. Ценные результаты получены А.Г. Александровым и отражены в [3]. Многими авторами (Б. Андерсон, Р. Скотт и др.) рассмотрен подход, в основу которого положено «модельное соответствие» синтезируемой системы и желаемой модели. В этом же русле с использованием метода пространства состояний находятся работы Б. Мура, Л. Силвермана, В. Уонема, А. Морзе и др. Используется «геометрический подход», рассмотренный В. Уонемом и Д. Персоном.

Одной из проблем, связанной с синтезом регуляторов в классе многомерных систем, является проблема «развязки» каналов. В русле решения этой проблемы находятся работы Е. Джильберта, С. Уанга, Е. Девисона, В. Воловича, Г. Бенгстона и др.

Вопросы синтеза регуляторов в многомерных системах с использованием разных подходов изложены в работах Е.М. Смагина, Х. Розенброка, М. Явдана, А.Г. Александрова, Р.И. Ивановского, А.Г. Таранова.

С. Канг и Т. Калат изучили «проблему минимального проектирования». Вопросы, связанные с диагональной доминантностью, изучались О.С. Соболевым, Х. Розенброком, Д. Хаукинсом.

Отдельным вопросам проблемы синтеза многомерных систем посвящены работы М.В. Меерова, Б.Г. Ильясова. В [79] (ред. Е.А. Федосов) рассмотрены перспективные методы проектирования многомерных динамических систем.

В главе 6-ой приведены имена ученых и конструкторов, усилиями которых разработаны сложнейшие системы автоматического управления 20-го столетия, а также решен широкий спектр смежных проблем, связанных с созданием систем противосамолетной и противоракетной обороны (ПСО и ПРО), а также ракетно-космической техники.

Назовем имена ученых, внесших значительный вклад в теорию и практику управления реакторами и АЭС (см главу 6):

- создание научно-технических основ управления ядерными реакторами и атомными станциями: И.В. Курчатов, А.С. Абрамов, Н.А. Доллежал, А.И. Лейпунский и др;
- создание систем контроля и управления ядерными реакторами: И.Я. Емельянов, В.Ф. Безлюдов, С.М. Фарафонов, П.Д. Брагин и др.;

- создание математических моделей и исследование систем автоматического управления ядерными реакторами: Б.А. Кувшинников, П.Т. Потапенко, И.И. Сидорова, Л.А. Маталин, А.И. Могильнер и др.;
- создание теории и технических средств пространственного управления энерговыделением реактора: Е.Ф. Филипчук, А.Г. Филиппов, В.Т. Небоян и др.;
- разработка систем автоматического управления исследовательскими реакторами: Г.Н. Алексаков, Б.Н. Никифоров, В.В. Королев и др.

Современный период развития теории управления характеризуется постановкой и решением задач, учитывающих неточность наших знаний об объектах управления и действующих на них внешних возмущений. Задачи синтеза регулятора и оценивания состояния с учетом неопределенности в модели объекта и характеристиках входных воздействий являются одними из центральных в современной теории управления. Их важность обусловлена прежде всего тем, что практически в любой инженерной задаче конструирования САУ присутствует неопределенность в модели объекта и в знании класса входных возмущений.

Современное состояние этого направления, интенсивно развиваемого с 1980-х годов, отражено в [62, 63, 73, 91, 106, 107, 108], а также в главе 5-ой настоящего тома.

Решению проблем теории автоматического управления, определяющих прогресс науки об управлении в последние десятилетия, посвящены книги И.В. Мирошника, В.О. Никифорова и А.Л. Фрадкова [77], Б.Р. Андриевского и А.Л. Фрадкова [7], С.В. Емельянова и С.К. Коровина [44], В.Н. Афанасьева, В.Б. Колмановского и В.Р. Носова [11].

Монография В.Д. Юркевича [148] посвящена проблемам синтеза непрерывных и дискретных САУ в условиях неполной информации о внешних неконтролируемых возмущениях при переменных параметрах объекта управления.

Новые подходы отражены в [89]. В этой монографии В.А. Подчукаевым получено решение задач синтеза в явном виде (в аналитической форме) без использования каких-либо итерационных или поисковых процедур.

Результаты, характеризующие современный этап развития важных направлений теории автоматического управления, получены Е.А. Федосовым, Г.Г. Себряковым, С.В. Емельяновым, С.К. Коровиным, А.Г. Бутковским, С.Д. Земляковым, И.Е. Казаковым, П.Д. Крутько, В.Ю. Бутковским, А.С. Ющенко, И.Б. Ядыкиным и другими [134].

Необходимо отметить, что вышедшие за последние годы учебники затрагивают, как правило, лишь отдельные стороны современной теории. Некоторую информацию можно извлечь из статей и обзоров на русском языке, однако все это дает лишь мозаичную картину предмета. В книге Б.Т. Поляка и П.С. Щербакова «Робастная устойчивость и управление» (см. библиографию в 1-м томе) дано систематическое изложение современной теории управления. Часть I посвящена задачам управления, в которых отсутствует неопределенность в описании предмета (однако допускается неопределенность внешних воздействий). Вторая часть книги посвящена управлению в условиях неопределенности, т.е. проблеме робастности.

Соавторами отдельных разделов 3-го тома являются: канд. техн. наук, доц. М.Ю. Адкин (п. 3.3); канд. техн. наук, доцент Д.А. Акименко (п. 3.5); д-р техн. наук А.В. Зайцев (глава 6); канд. техн. наук, доцент С.В. Канушкин (глава 6); д-р техн. наук, проф. Ю.Л. Лукашенко, проф. А.К. Карышев, канд. техн. наук, доцент Д.В. Мельников и инж. А.А. Карышев (п. 3.4); инж. Э.П. Козубов (п. 6.5); канд. техн. наук, доцент В.И. Краснощеченко (пп. 1.13, 4.5); инж. К.Ю. Савинченко, инж. К.И. Желнов (глава 2); инж. А.А. Самохвалов (глава 1, расчет примеров в главах 2 и 3); д-р техн. наук, проф. Г.Ф. Утробин (глава 6).

Авторы выражают признательность сотрудникам редакционно-издательского отдела Калужского филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана К.И. Желнову, С.Н. Капранову, А.Л. Репкину, К.Ю. Савинченко, М.Р. Фишеру за подготовку рукописи к изданию и создание оригинал-макета учебника.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ АББРЕВИАТУР

АСУ	— автоматизированная система управления
АФЧХ	— амплитудно-фазовая частотная характеристика
АЧХ	— амплитудно-частотная характеристика
ГОС	— гибкая обратная связь
ДУ	— дифференциальное уравнение
ИПФ	— импульсная переходная функция
ИУ	— исполнительное устройство
ИУр	— интегральное уравнение
КУ	— корректирующее устройство (регулятор)
КФ	— корреляционная функция
ЛАЧХ	— логарифмическая АЧХ
ЛП	— линейное программирование
ЛФЧХ	— логарифмическая ФЧХ
ММ	— математическая модель
МПФ	— матричная передаточная функция
НЧ	— неизменяемая часть
ОК	— основной канал в многомерных системах
ОНБ	— ортонормированный базис
ОНС	— ортонормированная система
ОС	— обратная связь
ОУ	— объект управления
П	— пропорциональный регулятор
ПД	— пропорционально-дифференциальный регулятор
ПИ	— пропорционально-интегральный регулятор
ПИД	— пропорционально-интегрально-дифференциальный регулятор
ПС	— перекрестная связь в многомерных объектах
ПФ	— передаточная функция
ПХ	— переходная характеристика
Р	— регулятор (корректирующее устройство)
САУ	— система автоматического управления
СПФ	— стандартная (эталонная) передаточная функция
СУ	— система управления
СХ	— спектральная характеристика относительно ОНБ
ТАУ	— теория автоматического управления
ТП	— технологический процесс
ФС	— фундаментальная система
ФФ	— формирующий фильтр
ФЧХ	— фазочастотная характеристика

СПИСОК ИСПОЛЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

A	— оператор системы
$A(\omega)$	— амплитудная частотная характеристика
$A(j\omega)$	— амплитудно-фазовая характеристика
$A(t), B(t)$	— матрицы коэффициентов векторно-матричного дифференциального уравнения
$\delta(t)$	— дельта-функция
$y(t)$	— входной скалярный сигнал
$Y(t)$	— входной векторный сигнал
$x(t)$	— выходной скалярный сигнал
$X(t)$	— выходной векторный сигнал
$W(s)$	— передаточная функция скалярной системы
$W(s, t)$	— параметрическая передаточная функция
$W(s)$	— передаточная функция системы в пространстве состояний
$F(s)$	— преобразование Лапласа функции $f(t)$
$k(\tau)$	— импульсная переходная функция скалярной стационарной системы
$k(t, \tau)$	— импульсная переходная функция скалярной нестационарной системы
K	— коэффициент усиления системы или элемента
$K(\tau)$	— матричная импульсная переходная функция
$K(t, \tau)$	— матрица ИПФ нестационарной системы в пространстве состояний
$K(t)$	— матрица коэффициентов обратной связи
$P(\omega)$	— действительная частотная характеристика
$Q(\omega)$	— мнимая частотная характеристика
$\varphi(\omega)$	— фазовая частотная характеристика
$L(\omega)$	— логарифмическая амплитудная частотная характеристика
$\varepsilon(t)$	— сигнал ошибки системы
$x_c(t)$	— свободная составляющая выходного сигнала (свободные колебания)
$x_b(t)$	— вынужденная составляющая выходного сигнала (вынужденные колебания)

$h(t)$	— переходная характеристика
I	— единичная матрица
$j = \sqrt{-1}$	— мнимая единица
m	— порядок числителя передаточной функции
n	— порядок знаменателя передаточной функции
T_y	— время переходного процесса
T	— постоянная времени
$E(s)$	— преобразование Лапласа для сигнала ошибки
ξ	— коэффициент демпфирования
λ_i	— корни характеристического уравнения
$\omega_{ср}$	— частота среза
$\rho(x, y)$	— метрика
$L^2(\Omega), C[0, T]$	— функциональные пространства
$\ x\ $	— норма элемента x
$F = \{f_k(t) : k = 1, 2, \dots\}$	— линейно независимая система
$\Phi = \{\varphi_k(t) : k = 1, 2, \dots\}$	— ортонормированный базис или ортонормированная система
c_k	— коэффициенты Фурье
$C(t)$	— матрица уравнения наблюдения
C_k	— коэффициенты ошибок
C^f	— одностолбцовая матрица коэффициентов Фурье функции $f(t)$
$Wal(k, t)$	— k -я функция Уолша
$h_3(t)$	— эталонная переходная характеристика
$I(p)$	— функционал качества
$W_3(s)$	— эталонная ПФ замкнутой системы
$W_p^{ст}(s) = W_p^3(s)$	— стандартная (эталонная) передаточная функция разомкнутой системы
$W_o(s), W_{нч}(s)$	— передаточная функция объекта или неизменяемой части системы
$W_p(s)$	— передаточная функция разомкнутой системы
$W_{кy}(s)$	— передаточная функция корректирующего устройства (регулятора)
M	— оператор математического ожидания
$\Delta\omega$	— эффективная полоса пропускания системы
$X(0) = X^0$	— начальное состояние системы

$\mathbf{X}(T) = \mathbf{X}^T$	— конечное состояние системы
$\mathbf{X}(t)$	— вектор-функция состояния
$\mathbf{X}_s(t)$	— вектор-функция выхода
$\mathbf{X}_\Phi(t)$	— фундаментальная матрица
$\mathbf{S}_c$	— матрица управляемости по состоянию
$\mathbf{S}_s$	— матрица управляемости по выходу
$\mathbf{L}_o$	— матрица наблюдаемости
lx	— линейный функционал
λ_i	— моменты функции относительно системы функций
$u^*(t)$	— оптимальное программное скалярное управление
$u^*(t, \mathbf{X}(t))$	— оптимальное скалярное управление, реализующее принцип обратной связи
$\mathbf{U}^*(t)$	— оптимальное векторное программное управление
$\mathbf{U}^*(t, \mathbf{X}(t))$	— оптимальное векторное управление по принципу обратной связи

ГЛАВА 1. МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Синтез регуляторов (корректирующих устройств) САУ — одна из важнейших задач, изучаемых теорией автоматического управления. Эта задача является весьма сложной, неоднозначной, требующей творческого подхода при ее решении. Если многие важные задачи теории управления изучаются и другими науками, то задача синтеза — это задача, собственно, теории управления. Указанная задача должна учитывать особенности работы конкретных систем управления, их конструкцию, технические характеристики и т.п.

Рассматриваемую задачу решает, как правило, большой коллектив разработчиков: специалисты по отдельным элементам систем; специалисты, изучающие объект управления и строящие его математическую модель; математики и др.

Проблема синтеза корректирующих устройств (КУ) в большинстве случаев точно не решается. Даже если можно построить алгоритм нахождения точного решения, то такой алгоритм интересен лишь с точки зрения выявления тех трудностей, которые необходимо преодолеть при решении задачи.

При решении сложных инженерных задач общую задачу синтеза регуляторов часто рассматривают как совокупность частных задач, которые вытекают из проектируемой системы и степени сложности задачи синтеза регулятора. К частным можно отнести следующие задачи:

- стабилизация объекта управления и повышение запаса устойчивости;
- обеспечение необходимой точности воспроизведения воздействий в установившемся режиме;
- обеспечение заданного качества в переходном режиме.

Решение указанных задач базируется на некоторых общих принципах, которые кратко изложены в настоящей главе.

Общие принципы указывают пути достижения высокого качества работы САУ как в переходном, так и в установившемся режимах.

Для случая, когда объект линеен и стационарен, а система — скалярна, разработано большое число методов синтеза регуляторов. Каждый из этих методов имеет свои достоинства и недостатки.

Содержание этой главы имеет ярко выраженную инженерную направленность, в связи с чем при решении конкретных задач проектирования регуляторов можно воспользоваться одним из изложенных здесь методов; при рассмотрении основных положений уделено внимание физической стороне вопроса; поскольку методы ориентированы на применение ЭВМ, подробно излагается вычислительная технология. Практически каждый из методов иллюстрируется примерами, взятыми из инженерной практики.

Для того чтобы изложение не воспринималось в отрыве от запросов практики, в главе помещен материал, отражающий применение регуляторов в системах, предназначенных для управления конкретными процессами.

Большинство из изложенных здесь методов в той или иной мере используют аппарат математического программирования как наиболее конструктивный путь решения задач расчета параметров регуляторов с большим числом ограничений,

связанных не только с задачей синтеза по заданным показателям качества, но и с необходимостью обеспечения большого числа ограничений.

Более того, постановка задачи синтеза регуляторов является естественной при использовании терминов математического программирования, при этом не исключается и случай, когда невозможно получить целевую функцию и ограничения в виде явных выражений от варьируемых параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$.

Вместе с тем изложение часто носит эвристический характер, оно не всегда имеет достаточно полное теоретическое обоснование, но тем не менее метод позволяет при вдумчивом подходе получить конструктивные результаты при решении инженерных задач.

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ И ОСНОВНЫЕ ЭТАПЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

1.1.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С ЗАДАЧЕЙ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ

Напомним, что *управление состоит в том, чтобы, воздействуя на объект соответствующими командами, обеспечить такое протекание процесса, которое приводит к достижению поставленной цели.*

В каждом конкретном объекте имеется величина или величины (в зависимости от содержания задачи), значения которых требуется поддерживать постоянными или изменять надлежащим образом; к таким величинам можно отнести, например, частоту вращения вала турбины, температуру и давление на выходе технологической установки, напряжение на клеммах генератора, координаты ракеты, осуществляющей процесс самонаведения, и т.д. Эти величины называются управляемыми переменными.

Приведем примеры. Напряжение на шинах генератора, рассматриваемое как управляемая переменная (регулируемая переменная), должно поддерживаться равным некоторой требуемой постоянной величине (цель управления) независимо от влияния различного рода возмущающих факторов, например тока нагрузки генератора [135]*.

Управляемой переменной может рассматриваться температура закалочной печи, которая также независимо от помех должна в течение процесса закалки изменяться по заранее заданному закону (программе).

Целью управления может быть, например, обеспечение постоянства напряжения (регулируемая переменная) между различными узлами электротехнической системы или достижение максимальной мощности, выделяемой на определенном элементе [87].

Во второй главе рассмотрена система, задача управления которой — обеспечение такого изменения координат ракеты, чтобы имела место ее встреча с целью.

В последнем случае нужно управлять не одной, а несколькими переменными: курсом, креном, тангажом — и, таким образом, можно говорить о многомерном объекте, причем для достижения указанной цели необходимо формировать соответствующие векторные воздействия на объект.

Далее обратим внимание на принципиально важный факт: **изменение протекающих в объекте процессов должно быть таким, чтобы они удовлетворяли определенным условиям, тесно связанным с понятием «качество управления».**

Примеры:

- промах системы самонаведения не должен превышать заданного значения, обусловленного возможностями боевой части ракеты (при этом в процессе самонаведения не должны иметь место перегрузки, превышающие допустимые);

* Как ранее отмечалось, если целью системы является поддержание постоянного значения физической величины при наличии возмущений, то ее в этом случае называют системой регулирования.

- баллистические, тактические или оперативно-тактические ракеты должны иметь такую точность, чтобы уничтожить хорошо защищенные цели: штабы, центры управления, стартовые позиции ракет;
- системы управления высокоточным оружием, использующие спутниковые информационно-управляющие компоненты, должны обеспечивать необходимую вероятность поражения целей, таких как промышленная инфраструктура, энергетика, системы связи, узлы коммуникаций, мосты и др. в зависимости от обстоятельств, продиктовавших его применение;
- при холодной прокатке металла толщина прокатываемой полосы должна находиться строго в заданных пределах;
- при термической обработке изделий необходимо, чтобы температура изменялась по определенному закону с течением времени с заданной точностью;
- в космонавтике необходимо обеспечение движения космического корабля в пространстве по заданной траектории и т.д.

Пусть $x(t)$ — процесс изменения управляемой переменной объекта. Тогда можно указать в качестве примера две задачи, иллюстрирующие понятие «качество управления»:

- обеспечить близость выхода $x(t)$ к желаемому постоянному значению $x_3 = \text{const}$ (задача стабилизации);
- обеспечить близость выхода $x(t)$ к эталонному процессу $x_3(t)$, являющемуся функцией времени (задача программного управления).

Если воспользоваться обозначением $\varepsilon(t) = x_3(t) - x(t)$, то близость $x(t)$ и $x_3(t)$ равносильна малости величины ошибки $\varepsilon(t)$. Очевидно, поставленная задача будет решена идеально, если удастся выбрать такое воздействие на объект, что $\varepsilon(t) \equiv 0$.

Элементы, без которых принципиально невозможна работа системы: объект управления, исполнительный элемент, усилитель, измерительное устройство (датчик), называются функционально необходимыми.

Сами по себе системы, в структуру (конфигурацию) которых включены только функционально необходимые элементы и в которых протекают те или иные рабочие процессы, часто не обеспечивают их нормального хода, иначе говоря, сами по себе такие системы не могут устранить отклонение режима от заданного (обеспечить $\varepsilon(t) < \varepsilon_d$, где ε_d — допустимая величина ошибки), вызываемое различными факторами [139]. Напомним, что объекты, обладающие свойством возвращаться к своему прежнему состоянию после устранения причин, вызвавших изменение этого состояния, можно назвать устойчивыми. Этот класс объектов принципиально может работать без регуляторов; введение же регуляторов позволяет существенно улучшить свойства объектов [139].

Пример. Выше (см. том 1) рассматривалась задача управления креном ракеты. Очевидно, к функционально необходимым элементам системы, кроме ракеты, следует отнести привод, необходимый для отклонения рулей ракеты. Если ПФ ракеты имеет вид

$$W_k(s) = \frac{K_\gamma}{s(T_\gamma s + 1)},$$

где K_γ и T_γ — параметры ракеты, а привод полагается безынерционным с $W_{\text{пр}}(s) = K_{\text{пр}}$, то замкнутая система управления креном может быть представлена так (рис. 1.1).

Передаточная функция канала управления креном определяется формулой (см. том 1)

$$W(s) = \frac{K_{\text{пр}} K_{\gamma} K_{l_{\gamma}}}{T_{\gamma} s^2 + s + K_{\text{пр}} K_{\gamma} K_{l_{\gamma}}} \quad (1.1)$$

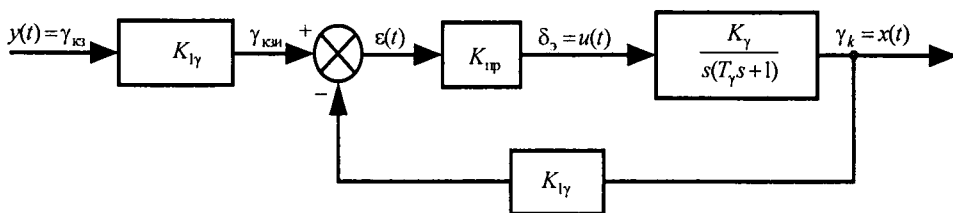


Рис. 1.1. Структурная схема системы

Формулу (1.1) можно переписать в следующем виде:

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2T_{\zeta} s + 1},$$

где $T = \sqrt{\frac{T_{\gamma}}{K_{\text{пр}} K_{\gamma} K_{l_{\gamma}}}}$ — постоянная времени ракеты по крену; на рис. 1.2 приведены графики ПХ $h(t)$ при различных значениях параметров $K_{\text{пр}}, K_{\gamma}, K_{l_{\gamma}}$.

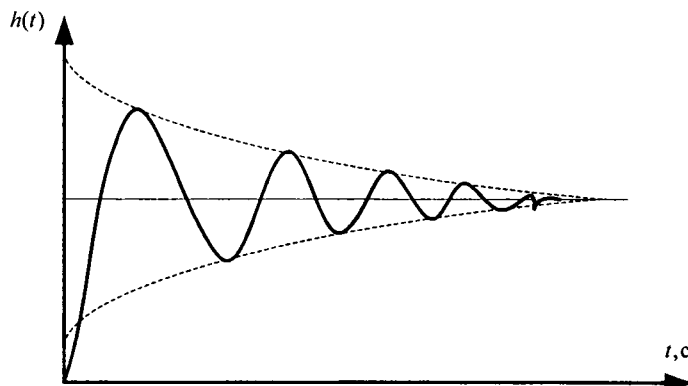


Рис. 1.2. Переходные характеристики системы управления каналом крена ракеты

Анализ процесса $h(t)$ позволяет сделать следующий вывод: *качество системы управления креном ракеты, в структуру которой входят только функционально необходимые элементы, является неприемлемым (процесс сильноколебательный) из-за малого значения ζ (такая ситуация легко физически объяснима). Параметром, с помощью которого можно изменять качество управления, является коэффициент передачи $K_{l_{\gamma}}$ чувствительного элемента. Очевидно, для увеличения ζ (увеличения затухания) коэффициент $K_{l_{\gamma}}$ надо уменьшать. Однако с уменьшением $K_{l_{\gamma}}$ увеличивается установившаяся ошибка. Поэтому такой путь получения желаемых характеристик контура управления креном оказывается неприемлемым [70].*

Отсюда следует общий вывод: *система, включающая объект и функционально необходимый элемент (привод для отклонения рулей), при любом изменении ее па-*

раметров не обеспечивает нормального протекания процесса (установления заданного значения угла крена ракеты).

Замкнутая система (включающая только функционально-необходимые элементы), которая изначально обладала бы соответствующим качеством без проведения дополнительных мероприятий, — это весьма редкий случай. Изменение параметров функционально необходимых элементов часто оказывается недостаточным и по известным обстоятельствам нежелательным [70].

Поэтому для достижения заданного качества управления должна быть изменена конфигурация (структура) системы, а именно — в нее необходимо вводить дополнительный элемент, цель которого — изменение динамических характеристик замкнутой системы в направлении, обеспечивающем качество работы, задаваемое тактико-техническими требованиями (ТТТ). Такое дополнительное звено в системе носит название корректирующего устройства или регулятора [116, 122, 123, 139, 148].

Объект, в котором осуществляется управление, называется управляемым, а вместе с присоединенным к нему регулятором они образуют автоматическую систему [139].

Поясним сказанное, рассматривая канал крена. Введем в систему управления каналом крена новый элемент — дифференцирующее звено в обратной связи (такой подход, использующий введение обратной связи по скорости, применяется на практике, причем сигнал $\dot{x}(t) = \dot{\gamma}_k(t)$ формируется с помощью скоростного гироскопа).

Структурная схема канала управления креном с введением сигнала крена и его производной представлена на рис. 1.3.

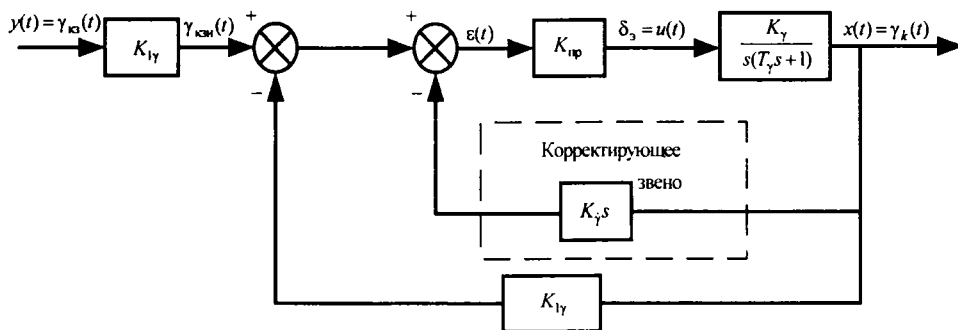


Рис. 1.3. Структурная схема системы

Для структурной схемы, представленной на рис. 1.3, передаточная функция имеет вид (1.1), однако коэффициент демпфирования изменяется; он определяется зависимостью

$$\xi_s = \frac{1 + K_{пр} K_{\gamma} K_{\dot{\gamma}}}{2\sqrt{K_{пр} K_{ly} K_{\gamma} T_{\gamma}}} = \xi + \frac{K_{пр} K_{\gamma} K_{\dot{\gamma}}}{2\sqrt{K_{пр} K_{ly} K_{\gamma} T_{\gamma}}} = \xi + \Delta\xi. \quad (1.2)$$

Как следует из последней формулы, изменяя $K_{\dot{\gamma}}$, можно в достаточно широких пределах менять характер установления угла крена.

Из изложенного можно сделать вывод: с помощью дополнительного сигнала, сформированного специально введенным корректирующим звеном, можно изменять динамические характеристики системы «ракета–автопилот», не меняя аэродинамической формы ракеты и параметров привода и, таким образом, добиться необходимого качества протекания процесса (устранить колебания и обеспечить протекание процесса, близкого к апериодическому).

1.1.2. КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

Идеальная система, способная точно воспроизводить любой входной сигнал, должна характеризоваться, естественно, передаточной функцией, равной единице при всех частотах, т.е. *должна представлять собой идеальный фильтр нижних частот с очень большой частотой среза*. Такое требование, предъявляемое к идеальной системе, разумно только в случае отсутствия помех на ее входе, так как только в этом случае точное воспроизведение входного сигнала представляется желательным [117, 122, 139].

Для неискаженной передачи необходимо, чтобы реакция была точной копией входного сигнала. *Допускается различие в амплитуде, так как важна форма, а не величина отклика*. Кроме того, *выходной сигнал может запаздывать по времени относительно воздействия*. Поэтому можно считать, что сигнал $y(t)$ воспроизводится без искажений, если реакция системы $x(t) = ky(t - t_0)$.

Тогда $X(j\omega) = W(j\omega)Y(j\omega) = kY(j\omega)e^{-j\omega t_0}$. Следовательно, *неискажающая система должна иметь передаточную функцию $W(\omega) = ke^{-j\omega t_0}$* .

Модуль этой передаточной функции показан на рис. 1.4. Очевидно, амплитудно-частотная характеристика системы $|W(\omega)|$ постоянна на всех частотах и равна k . С другой стороны, фазовый сдвиг пропорционален частоте, т.е. $\varphi(\omega) = -\omega t_0$.

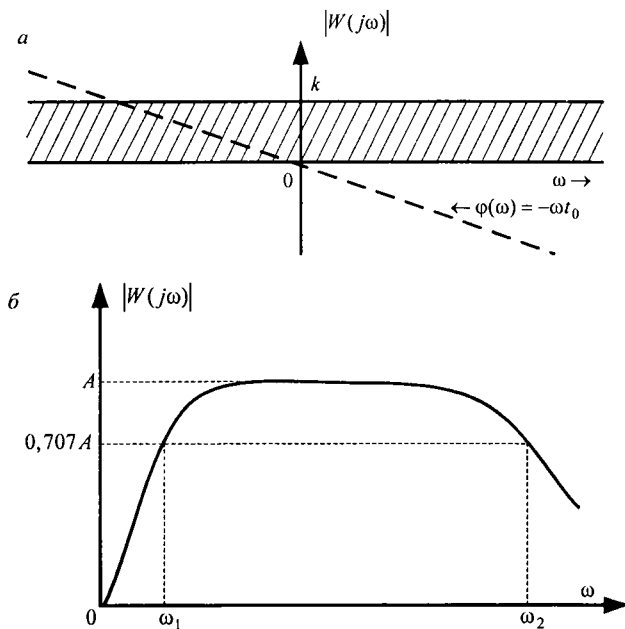


Рис. 1.4. Характеристики линейной системы:
 а — идеальной (амплитудно-частотная и фазочастотная);
 б — реальной (амплитудно-частотная характеристика)

Степень постоянства величины $|W(\omega)|$ системы обычно характеризуется ее полосой пропускания. *Для неискаженной передачи система должна обладать бесконечной полосой пропускания*. В силу существующих физических ограничений такую систему создать невозможно. В действительности удовлетворительное неискаженное

воспроизведение можно получить в системе с ограниченной, но весьма большой полосой пропускания. Энергия любого физического сигнала убывает с увеличением частоты, поэтому достаточно, чтобы система воспринимала лишь те частотные составляющие, в которых содержится наибольшая часть сигнала. Ослабление высокочастотных составляющих должно привести к незначительным искажениям сигнала, так как эти составляющие несут весьма малую часть его энергии.

Система воспроизводит без искажений все сигналы, частоты которых не превышают определенную частоту W , рад/с. Сигналы, имеющие частоты выше W , полностью подавляются (рис. 1.5, а).

Таким образом, амплитудно-частотная характеристика идеальной системы представляет собой стробирующую функцию. Соответствующая фазовая характеристика для неискаженной передачи равна $-\omega t_0$. Передаточная функция такой системы определяется соотношением

$$W(j\omega) = |W(j\omega)| e^{j\varphi(\omega)},$$

а ее реакция на единичный импульс имеет вид [117, 122, 139]

$$k(t) = \frac{W}{\pi} \text{Sa}[W(t - t_0)].$$

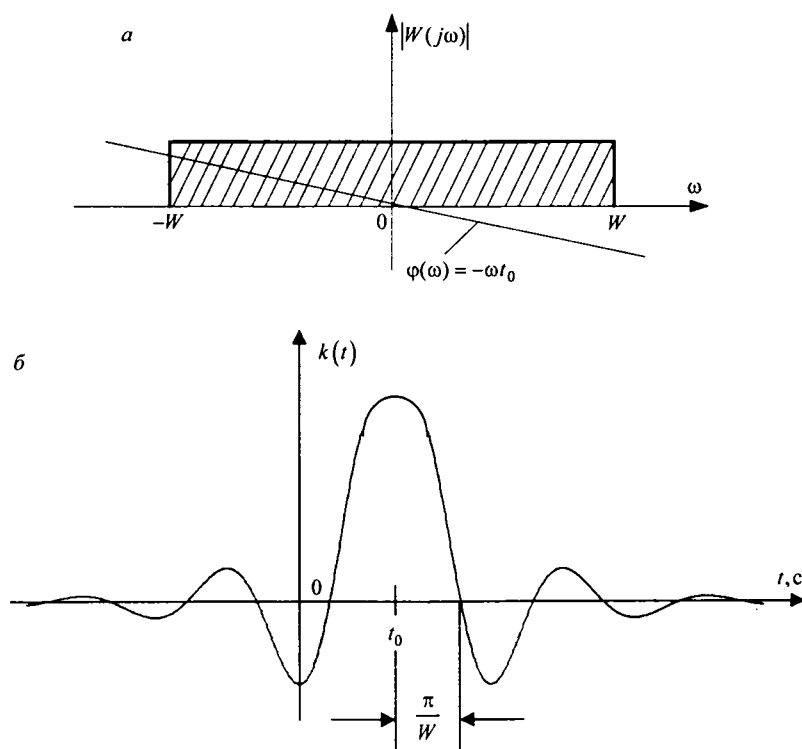


Рис. 1.5. Характеристики идеального фильтра нижних частот: а — амплитудно-частотная и фазочастотная; б — импульсная реакция

График этой функции на рис. 1.5, б показывает, что импульсная реакция существует и при отрицательных значениях t . Отклик появляется раньше воздействия, которое система как бы предвосхищает. К сожалению, практически создать такую систему с предсказанием невозможно. Следовательно, идеальная система физиче-

ски нереализуема, так как не выполняется условие физической осуществимости. Аналогичным образом можно показать, что и другие идеальные фильтры (такие, как идеальный фильтр верхних частот или идеальный полосовой фильтр, характеристики которых показаны на рис. 1.6) физически нереализуемы.

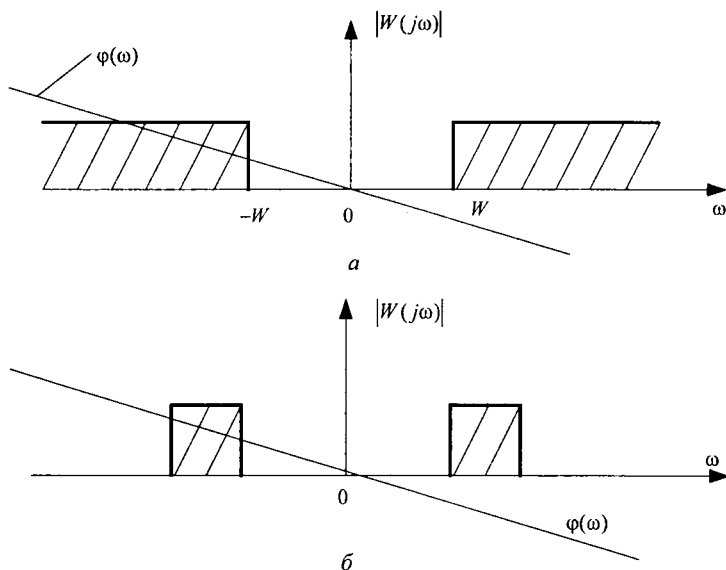


Рис. 1.6. Амплитудно- и фазочастотные характеристики идеальных линейных систем:
а — фильтра верхних частот; б — полосового фильтра

На практике используются системы, характеристики которых близки к идеальным. Простейшая система (фильтр нижних частот) показана на рис. 1.7, а. Передаточная функция этого фильтра [117]

$$W(j\omega) = \frac{1/(1/R + i\omega C)}{i\omega L + 1/(1/R + i\omega C)} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + i\omega L/R}.$$

Так как $1/\sqrt{LC} = W$ и $\sqrt{L/C} = R$, то

$$W(j\omega) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}W}{\left(\frac{W}{2} + i\omega\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}W\right)^2} \frac{2W}{\sqrt{3}}.$$

Импульсная реакция $k(t)$ имеет вид

$$k(t) = F^{-1}[W(j\omega)] = \frac{2W}{\sqrt{3}} e^{-\frac{Wt}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}Wt\right).$$

На рис. 1.7, б показаны амплитудно- и фазочастотные характеристики этого фильтра, а на рис. 1.7, в — импульсная реакция $k(t)$. Импульсная реакция близка к реакции идеального фильтра, только она начинается в момент $t = 0$, и, таким образом, выполнено условие физической осуществимости.

Желательно найти признак, по которому можно было бы различать физически реализуемые и физически нереализуемые характеристики. Таким признаком является критерий Пэйли–Винера.

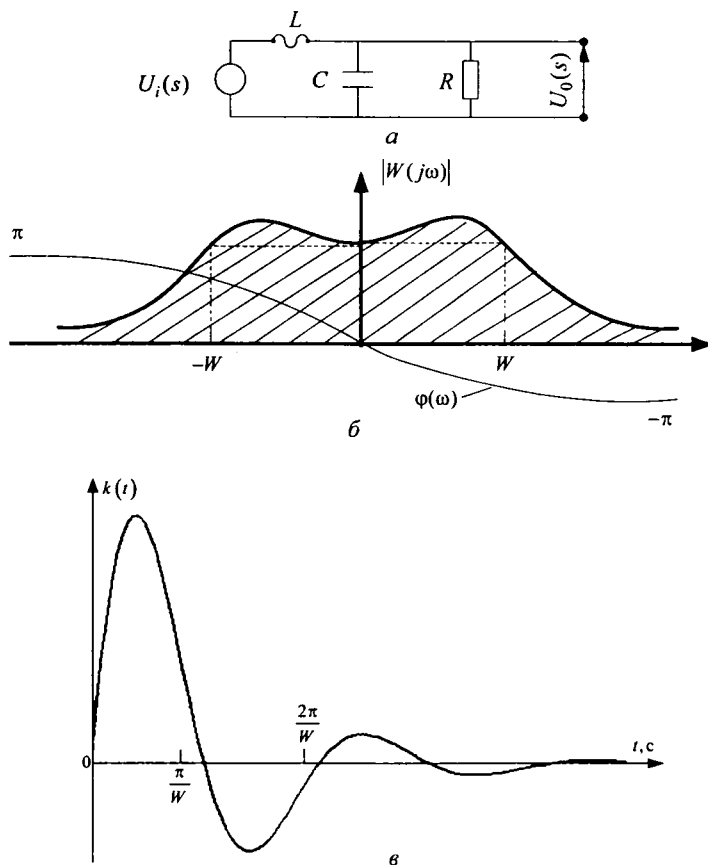


Рис. 1.7. Простейший реальный фильтр нижних частот:
 а — схема; б — амплитудно-фазочастотные характеристики; в — импульсная реакция

В частотной области указанный критерий формулируется следующим образом: для физической реализуемости системы необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\ln W(j\omega)|}{1 + \omega^2} d\omega < \infty. \quad (1.3)$$

Однако для выполнения критерия Пейли–Винера амплитудно-частотная характеристика $W(j\omega)$ должна быть интегрируемой в квадрате, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega < \infty.$$

Если амплитудно-частотная характеристика не удовлетворяет критерию Пейли–Винера, то система имеет непричинную импульсную реакцию, т.е. реакцию, существующую до того, как к системе приложено воздействие.

Вывод. Идеальную систему нельзя осуществить техническими средствами. Поэтому задача заключается в построении такой системы, обладающей свойствами фильтра нижних частот, которая могла бы воспроизводить входные сигналы с точностью, достаточной для ее практических применений. Кроме того, при наличии помех задача точного воспроизведения воздействия теряет смысл.

Поэтому далее рассмотрим вопросы качества работы физически осуществимых систем, применяемых при решении практических задач. Положения, связанные с качеством САУ, подробно изучались выше (см. том 1 учебника). Здесь лишь напомним ключевые положения.

1. Устойчивость системы

а) Свойство устойчивости является необходимым условием работоспособности всякой системы автоматического управления. Оно означает, что переходные процессы, вызванные в системе тем или иным возмущением, будут затухать.

Напомним, что устойчивость замкнутой САУ зависит от расположения годографа $W_p(j\omega)$ разомкнутой системы относительно критической точки с координатами $(-1; j0)$. Чем ближе он к критической точке, тем ближе замкнутая система к границе устойчивости [117].

Для устойчивых систем удаление годографа $W_p(j\omega)$ от критической точки $(-1; j0)$ характеризуется запасом устойчивости по модулю и фазе (рис. 1.8).

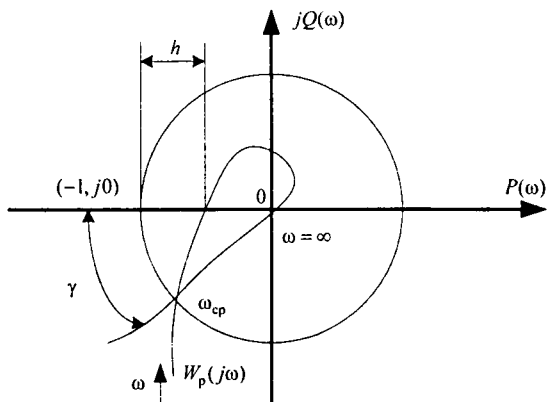


Рис. 1.8. Запасы устойчивости САУ по модулю и фазе

Минимальный отрезок действительной оси h , характеризующий расстояние между критической и ближайшей точкой пересечения годографа $W_p(j\omega)$ с действительной осью, называют запасом устойчивости по модулю. Минимальный угол γ , образуемый радиусом, проходящим через точку пересечения годографа $W_p(j\omega)$ с окружностью единичного радиуса (с центром в начале координат) и отрицательной частью действительной оси, называют запасом устойчивости по фазе. Система обладает требуемым запасом устойчивости, если она, удовлетворяя условию устойчивости, имеет значения модуля характеристического вектора $W_p(j\omega)$, отличающиеся от единицы не менее чем на заданное значение h (запас устойчивости по модулю), и угол поворота или фазу, отличающуюся от $(-\pi)$ не менее чем на заданное значение γ . На рис. 1.9 представлена зона устойчивости САУ.

В случае применения для анализа устойчивости логарифмических частотных характеристик (рис. 1.10) запасу устойчивости по модулю соответствует отрезок $l = 20 \lg h$ при том значении частоты, при котором фазовая характеристика $\varphi(\omega) = -\pi$. Относительно ЛЧХ можно говорить и о запасах устойчивости по модулю (l_1 и l_2), соответствующих частотам ω_1 и ω_2 . Запасу устойчивости системы по

фазе γ соответствует значение угла, прерывающее значение фазовой характеристики над линией $-\pi$ при частоте среза $\omega_{\text{ср}}$ (см. рис. 1.10).

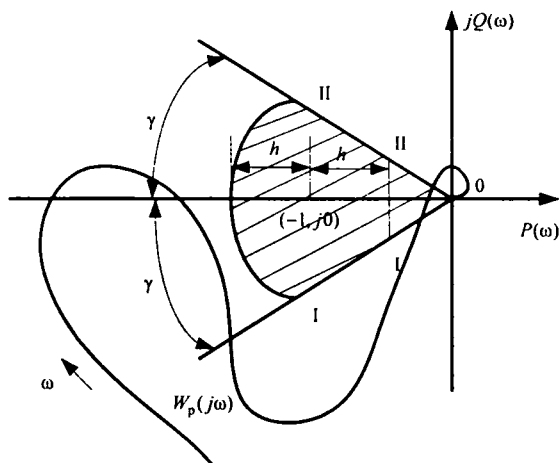


Рис. 1.9. Зона устойчивости САУ на комплексной плоскости

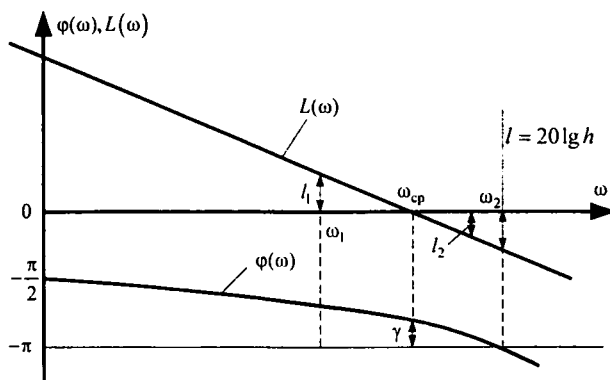


Рис. 1.10. Определение запасов устойчивости САУ по ЛЧХ

2. Качество переходного процесса при воздействии ступенчатой функции

В 1945 г. В.В. Солодовников ввел понятие прямых показателей качества переходных процессов. При этом полагается, что переходный процесс является реакцией на ступенчатое внешнее воздействие и стремится к некоторому установившемуся значению.

Прямые показатели качества (здесь их только напомним, подробно см. том 1):

а) **время управления** T_y — минимальное время, по истечении которого величина будет оставаться близкой к установившемуся значению с заданной точностью:

$$|h(t) - h_{\text{уст}}| \leq \Delta;$$

б) **перерегулирование** σ — максимальное отклонение переходной характеристики от установившегося значения выходной величины, выраженное в относительных единицах или процентах:

$$\sigma = \frac{h_{\text{max}} - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} 100;$$

в) **частота колебаний** $\omega = 2\pi/T$, где T — период колебаний для колебательных переходных характеристик;

г) **число колебаний** n , которое имеет переходная характеристика $h(t)$ за время управления T_y ;

д) **время нарастания переходного процесса** T_n — абсцисса первой точки пересечения кривой переходной характеристики $h(t)$ с уровнем установившегося значения $h_{уст}$;

е) **декремент затухания** χ , равный отношению модулей двух смежных перерегулирований:

$$\chi = \left| \frac{h_{\max 1} - h_{уст}}{h_{\max 2} - h_{уст}} \right|.$$

Переходные процессы, возникающие в системах при скачкообразных воздействиях, принято делить на три группы: монотонные, апериодические и колебательные (рис. 1.11).

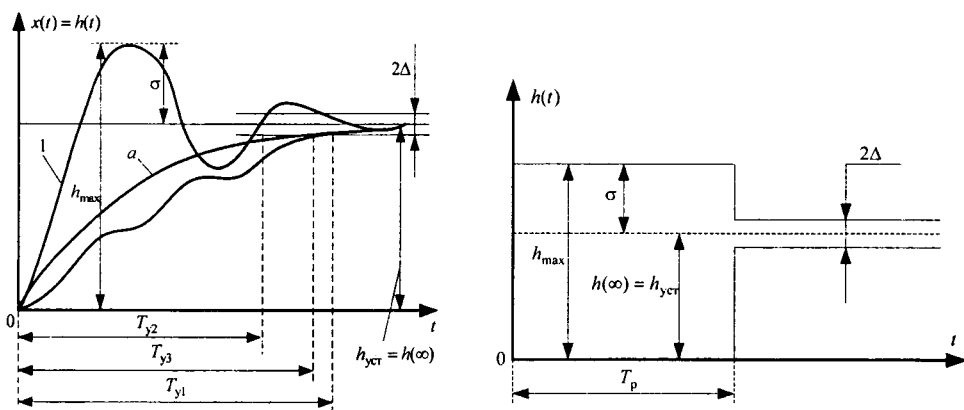


Рис. 1.11. К вопросу о качестве переходного процесса

3. Оценка качества управления при гармонических воздействиях [122]

Вопросы оценки качества подробно описывались в томе 1. Напомним, что для оценки качества переходного процесса используются следующие величины: *показатель колебательности* M , *резонансная (собственная) частота* ω_p , *полоса пропускания системы* ω_0 , *частота среза* $\omega_{ср}$, *запасы устойчивости по модулю и по фазе* (рис. 1.12 и 1.13).

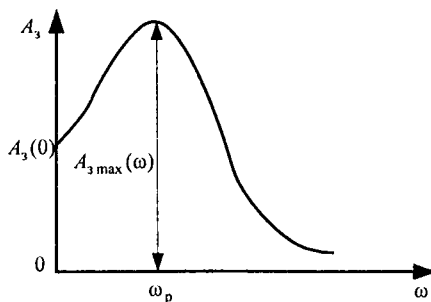


Рис. 1.12. Резонансная частота системы

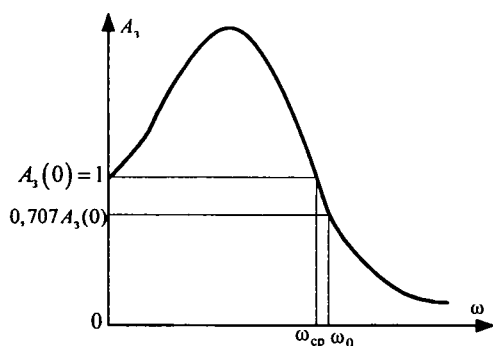


Рис. 1.13. Полоса пропускания системы

Частота среза ω_{cp} — частота, при которой амплитудно-частотная характеристика системы принимает значение, равное 1, т.е. $A_s(\omega_{cp})=1$. Эта частота косвенно характеризует длительность переходного процесса. Время управления обратно пропорционально частоте среза:

$$T_y \cong (1 + 2)2\pi / \omega_{cp}.$$

4. Корневые методы оценки качества управления [122]

На характер переходного процесса влияют и числитель и знаменатель передаточной функции замкнутой системы. Если числитель не имеет нулей, то характер переходных процессов можно оценить по ее полюсам, т.е. корням характеристического уравнения замкнутой САУ.

Для приближенной оценки качества переходного процесса в системе нужно на плоскости корней s выделить область, в которой располагаются корни ее характеристического уравнения. Чаще всего эту область представляют трапецией (рис. 1.14). Корни характеристического уравнения располагаются внутри этой трапеции $ABCD$, на ее сторонах и основаниях хотя бы по одному корню, а вне ее — ни одного.

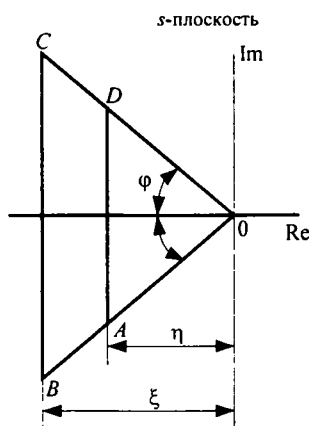


Рис. 1.14. Область расположения корней характеристического уравнения

А.А. Фельдбаум рассмотрел три случая расположения корней характеристического уравнения САУ на комплексной плоскости (рис. 1.15), получив для них в условиях $y(t)=1(t)$ аналитические выражения для мажорант $M_{\max}$ и минорант $M_{\min}$

переходных процессов, времени управления T_y и перерегулирования σ и начальных условий вида [135]

$$h(0), \quad h^{(i)}(0) = 0 \quad (i = \overline{1, n-1}).$$

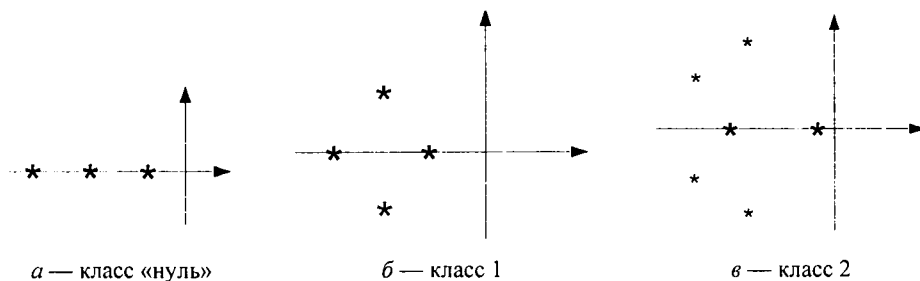


Рис. 1.15. Расположение корней на комплексной плоскости

Понятие устойчивости η введено Я.З. Цыпкиным и П.В. Бромбергом, а методы построения мажорант и минорант разработаны С.А. Чаплыгиным, Н.Н. Лузиным, А.А. Фельдбауном, А.М. Рубинчиком [89].

5. Качество работы системы в установившемся режиме

Точность системы в установившемся режиме определяется коэффициентами ошибок (этот вопрос подробно рассмотрен в параграфе (см. том 1)).

6. Обобщенные квадратичные оценки

Пусть $\varepsilon(t)$ переходная ошибка, определяемая формулой

$$\varepsilon(t) = h_{уст} - h(t). \quad (1.4)$$

Квадратичные интегральные оценки вычисляются по формулам [117, 122]

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\infty} \varepsilon^2(t) dt; \\ I_2 &= \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \tau_1^2 \varepsilon^2(t)] dt; \\ &\dots\dots\dots \\ I_n &= \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \tau_1^2 \varepsilon^2(t) + \dots + \tau_n^2 \varepsilon^{(n)}(t)] dt, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ — постоянные величины.

7. Грубость систем

Понятие грубости математической модели системы связано с именами А.А. Андропова, Л.С. Понтрягина, М.А. Айзермана, Н.Н. Красовского.

Свойство, присущее модели системы, называется грубым, если при вариациях параметров модели это свойство сохраняется. При решении задач синтеза систем под требуемой грубостью будем понимать обеспечение запаса устойчивости при вариации параметров.

1.1.3. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ ОДНОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Поскольку выше достаточно подробно рассмотрены понятия, определяющие качество работы систем автоматического управления, продолжим рассмотрение задачи

синтеза регуляторов. Рассмотрим обобщенную структурную схему системы автоматического управления (рис. 1.16).

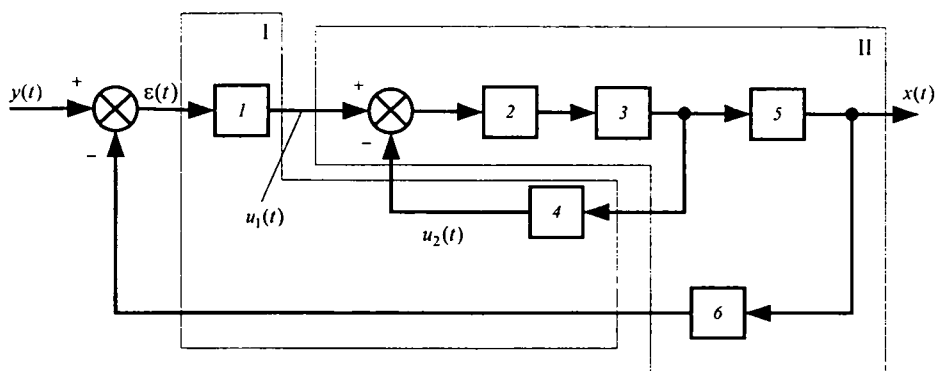


Рис. 1.16. К постановке задачи синтеза КУ:

- I — изменяемая часть системы, включающая последовательное (1) и параллельное (4) корректирующие устройства (может быть или (1), или (4), или и то и другое);
 II — неизменяемая часть системы, состоящая из усилителя 2, исполнительного элемента 3, объекта управления 5 и измерительного элемента 6 (неизменяемую часть называют объектом)

Ее можно представить в виде замкнутой цепи, состоящей из отдельных элементов, которые можно классифицировать по функциональным признакам, т.е. по их назначению в системе [117, 122].

Элементы первого типа, без которых невозможна работа системы автоматического управления, называются функционально необходимыми (см. блок II на рис. 1.16). К ним относятся:

- 1) *измерительные элементы*, измеряющие и преобразующие отклонение требуемого значения управляемой величины от действительного;
- 2) *усилительные элементы*, усиливающие как по величине, так и по мощности сигнал, снимаемый с измерительного элемента;
- 3) *исполнительные элементы*, вырабатывающие управляющие воздействия требуемой формы и мощности, необходимые для управления объектом;
- 4) *объект управления*.

Ко второму типу относятся элементы, которые вводятся для изменения динамических свойств системы автоматического управления (см. блок I на рис. 1.16), — это (в зависимости от места включения) последовательные и параллельные корректирующие элементы (регулятор).

Из сказанного следует, что структура системы (рис. 1.16), включающая функционально необходимые элементы (неизменяемая часть системы II), дополнена корректирующими устройствами 1 и 4 с целью изменения динамических свойств системы в нужном направлении. При решении задачи синтеза линейной САУ необходимо учитывать статические и динамические характеристики объекта и той части системы, которая не подлежит изменению, но существенно влияет на свойства САУ в целом (исполнительные устройства, измерительные элементы и др.).

При проектировании САУ применяют следующие способы коррекции динамических характеристик:

- 1) *последовательную коррекцию* (корректирующее устройство включают последовательно с усилительно-преобразующим устройством и объектом управления);
- 2) *параллельную коррекцию* (корректирующее устройство включают параллельно усилительно-преобразующему устройству);

- 3) *корректирующую обратную связь* (корректирующее устройство включают встречно-параллельно, охватывая усилительно-преобразующее устройство системы в качестве элемента местной обратной связи);
- 4) *комбинированную коррекцию*.

Предположим, что структурная схема САУ задана и приведена к виду, показанному на рис. 1.17. Система состоит из: объекта или неизменяемой части, включающей последовательно соединенные элементы с передаточными функциями $W_0(s)$ и $W_m(s)$; последовательного корректирующего устройства (ПКУ) с передаточной функцией $W_{кy1}(s)$; корректирующей обратной связи (КОС) с передаточной функцией $W_{кy2}(s)$, охватывающей звено $W_m(s)$. Передаточная функция САУ, разомкнутой в месте измерения ошибки, имеет вид

$$W(s) = W_{кy1}(s) \frac{W_m(s)}{1 + W_m(s)W_{кy2}(s)} W_0(s). \quad (1.6)$$

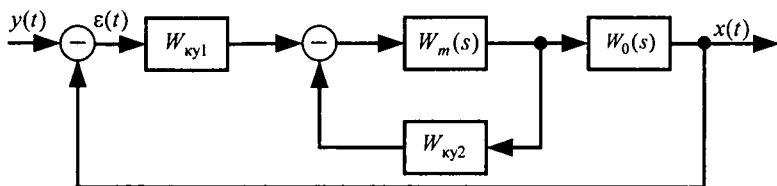


Рис. 1.17. Структурная схема САУ с последовательным корректирующим устройством и корректирующей обратной связью

Передаточные функции $W_m(s)$ и $W_0(s)$ заданы в виде аналитических выражений или соответствующих им частотных характеристик. **Задача заключается в определении таких передаточных функций $W_{кy1}(s)$ и $W_{кy2}(s)$ корректирующего устройства и корректирующей обратной связи, чтобы система обладала необходимыми показателями качества.**

Преимуществом ПКУ является то, что они могут быть реализованы в виде простых пассивных или активных RC -фильтров на серийных или специальных микросхемах. Перечислим недостатки ПКУ [117]:

- 1) эффективность их действия существенно снижается вследствие непостоянства параметров и характеристик основных элементов системы (при применении ПКУ к характеристикам остальных элементов системы следует предъявлять повышенные требования);
- 2) дифференцирующие RC -фильтры чувствительны к помехам и шумам.

Теперь перечислим преимущества КОС:

- 1) КОС уменьшают зависимость динамических свойств САУ при изменении параметров и характеристик элементов, входящих в ее состав;
- 2) питание КОС обычно не вызывает затруднений, так как они включаются на выходе системы, где развивается значительная мощность;
- 3) системы с КОС менее подвержены влиянию помех, чем системы с ПКУ, так как элементы системы, включенные перед их входом, играют роль фильтров нижних частот.

Недостатки КОС заключаются в следующем:

- 1) высокая стоимость и громоздкость составляющих элементов (тахогенераторы, дифференцирующие трансформаторы и др.);
- 2) необходимость применения больших по значению коэффициентов усиления.

Отметим, что одни и те же технические требования к системе можно реализовать при помощи различных корректирующих устройств. Последние выбирают такими, чтобы они были технически наиболее просто осуществимы.

Во многих случаях нельзя получить точных результатов расчётным путём, так как современные САУ характеризуются не только постоянными, но и переменными, а иногда и распределёнными параметрами. Теоретический анализ и расчёт лишь облегчают выбор рациональной системы, а также ориентировочных значений параметров корректирующих устройств, входящих в состав системы. Значения этих параметров уточняют в результате последующей регулировки и настройки САУ в реальных условиях её эксплуатации.

На основе сказанного выше можно ввести в рассмотрение два ключевых понятия, связанных с проблемой синтеза регуляторов [110, 117, 122]:

1. *Эталонный оператор системы $W^*(s)$ (эталонная передаточная функция) — это такой оператор, который обеспечивает заданное в известном смысле качество процессов управления.*

Требования к системе *определяются заданием эталонной ПФ (эталонной системы). Эталонная ПФ системы определяет качество системы как в переходном, так и в установившемся режимах (в зависимости от постановки задачи).*

Задачу синтеза регулятора в терминах эталонной системы можно, например, сформулировать так: *если система с известной эталонной ПФ $W^*(s)$ имеет следующие параметры, характеризующие качество управления:*

- 1) нулевую установившуюся ошибку при подаче на вход сигнала вида $y(t) = 1(t)$;
- 2) перерегулирование $\sigma_{\max} \%$ в системе не превышает $\sigma_{\text{доп}} \%$;
- 3) время переходного процесса T_y не превышает $T_{y\text{доп}}$;
- 4) максимальное ускорение выходной переменной при заданных условиях не превышает допустимого значения,

то задача синтеза состоит в нахождении такой передаточной функции регулятора $W_{\text{к}}(s)$, которая при заданных ПФ функционально необходимых элементах обеспечила бы в общем случае приближённое равенство $W(s) \approx W^*(s)$, где $W(s)$ — ПФ замкнутой системы с учетом $W_{\text{к}}(s)$.

2. *Эталонный выходной сигнал $x_s(t)$ при подаче на вход системы заданного $y_s(t)$ воздействия. Полагается, что если система при подаче на её вход $y_s(t)$ имеет реальный выходной сигнал $x_p(t)$, близкий в известном смысле к эталону, например*

$$\int_0^T [x_s(t) - x_p(t)]^2 dt < \varepsilon_y,$$

то делается вывод, что система удовлетворяет ТТГ.

Для систем, работающих в *переходном режиме*, эталонный выходной сигнал может быть задан в виде *переходной характеристики*, определяемой параметрами: временем управления T_y , перерегулированием $\sigma \%$, частотой колебаний $\omega = 2\pi/T$, n — числом колебаний и др. Часто $h_s(t)$ — эталонная переходная характеристика задается в виде апериодического переходного процесса (рис. 1.18)

$$h_s(t) = K(1 - e^{-a_s t}) = x_s(t). \quad (1.7)$$

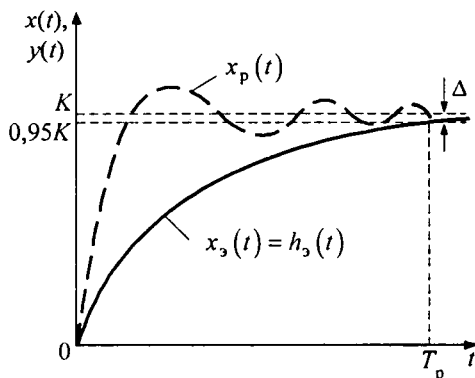


Рис. 1.18. Эталонный переходный процесс

Параметр α_3 характеризуется заданным временем T_y . Поскольку T_y представляет собой момент входа переходного процесса, например, в 5%-ую трубку относительно установившегося значения, то очевидно, что

$$h_3(T_y) = 0,95K = K(1 - e^{-\alpha_3 T_y}); \quad (1.8)$$

откуда имеем

$$\alpha_3 = -\frac{\ln 0,05}{T_y} \approx \frac{3}{T_y}. \quad (1.9)$$

Эталонную переходную характеристику колебательного типа можно задать в форме [5]

$$h_3(t) = [H_0 + (H_1 - H_0)e^{-\alpha_3 t} \cos \beta_3 t]l(t), \quad (1.10)$$

где H_1 — амплитуда желаемого процесса при $t=0$, H_0 — значение $h_3(t)$ при $t=\infty$ (астатизм системы).

Если $H_1 = 0$, $H_0 = 1$ (астатизм первого порядка), то

$$h_3(t) = [1 - e^{-\alpha_3 t} \cos \beta_3 t]l(t). \quad (1.11)$$

Задаваясь параметрами α_3 и β_3 , можно строить процессы разной длительности, колебательности, перерегулирования [5].

Кроме этого, могут задаваться ограничения на скорость и ускорение процессов на выходе, а также на управление $u(t)$. Например, требования в отношении быстрогодействия должны учитывать мощность исполнительного элемента.

Поэтому в общем виде, если объект задан описанием в пространстве состояний

$$\dot{X} = A_0 X + B_0 u, \quad (1.12)$$

то $X(t) \in X^n$, где X^n — разрешенная область возможных значений вектор-функции $X(t) \forall t \in [0, T]$, а $u(t) \in U^1$, где U^1 — разрешенная область значений управления $u(t) \forall t \in [0, T]$.

Теперь можно привести одну из конкретных формулировок задачи синтеза в терминах эталонного выходного сигнала [117, 122]: при заданной неизменяемой части системы найти структуру элементов 1 и 4 и рассчитать их параметры из условия наилучшего в известном смысле приближения реального процесса $x_p(t)$ к эталонной

переходной характеристике с заданными показателями качества — быстродействием, колебательностью и максимальным отклонением в переходном режиме, а также приближённом обеспечении заданной точности в стационарных режимах.

Часто задаются добротность по скорости и по ускорению (например, САУ должна иметь добротность по скорости D_c и по ускорению D_y). Говорят, что переходная характеристика должна находиться в «коробочке» В.В. Солодовникова (рис. 1.11).

Существуют и другие формулировки задачи синтеза, но во всех формулировках выделяются следующие основные задачи [110, 117, 122]:

- обеспечение устойчивости (стабилизация);
- повышение запаса устойчивости (демпфирование);
- повышение точности управления в установившихся режимах (точность системы при отработке типовых входных воздействий);
- улучшение переходных процессов.

Многие формулировки содержат противоречивые требования, и в этом случае весьма эффективным является аппарат математического программирования, если требования сформулированы в форме соответствующих ограничений.

Часто последовательное корректирующее устройство заменяется на два: последовательное и параллельное [122]. Рассмотрим САУ с последовательным КУ (рис. 1.19) и эквивалентную систему с последовательным и параллельным включением КУ (рис. 1.20).

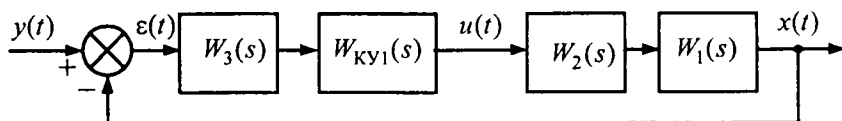


Рис. 1.19. САУ с последовательным включением КУ

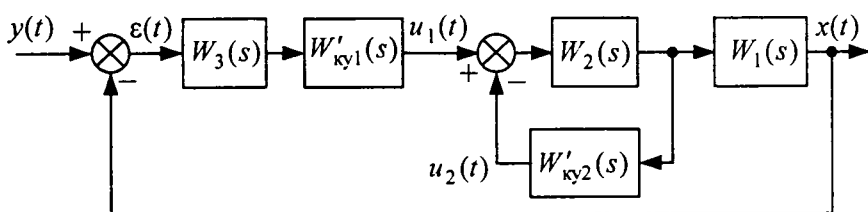


Рис. 1.20. САУ с последовательным и параллельным включением КУ

Положим, что рассчитано последовательное КУ с передаточной функцией $W_{ky1}(s)$. Поскольку $W_{ky1}(s)$ реализуется с использованием сложных схем, заменим его на два более простых элемента с ПФ $W'_{ky1}(s)$ и $W'_{ky2}(s)$ [122]. Имеем

$$WW_{ky1} = \frac{WW'_{ky1}}{1 + W_2W'_{ky2}}, \quad W = W_1W_2W_3.$$

Отсюда находим

$$W'_{ky1}(s) = W_{ky1}(s) \left(1 + W_2(s)W'_{ky2}(s) \right); \quad (1.13)$$

$$W'_{ky2}(s) = \frac{W'_{ky1}(s) - W_{ky1}(s)}{W_2(s)W_{ky1}(s)}. \quad (1.14)$$

Если выбрана $W'_{кy2}(s)$, то с помощью (1.13) можно рассчитать передаточную функцию последовательного корректирующего устройства $W'_{кy1}(s)$. С помощью равенства (1.14) легко найти $W'_{кy2}(s)$, если выбрана $W'_{кy1}(s)$.

Изложенное выше касалось в основном содержания и постановки задачи синтеза регуляторов.

Итоговые положения можно сформулировать так [110, 117, 122].

Основной задачей при проектировании системы автоматического управления является выбор её структурной схемы, характеристик и схемы взаимодействия элементов, а также способа их технической реализации, отвечающего динамическим, энергетическим и эксплуатационным требованиям, предъявляемым к системе. Эту задачу можно разделить на две части. *Первая часть задачи заключается в выборе источников энергии и определении принципа действия функционально необходимых элементов на основе изучения условий работы проектируемой системы. Вес, габариты, надёжность работы и стоимость системы в значительной мере будут определяться рациональным решением первой части задачи. Вторая часть задачи заключается в выборе структурной схемы и параметров функционально необходимых элементов и корректирующих устройств из условия удовлетворения требованиям, предъявляемым к динамическим свойствам системы. От решения второй части задачи зависят динамические и статические свойства системы автоматического управления, её сложность, стоимость, надёжность и т.д. Естественно, что обе задачи тесно связаны между собой.*

Основными этапами синтеза являются:

- 1) *определение эталонной передаточной функции, удовлетворяющей требованиям качества управления;*
- 2) *энергетический расчёт элементов;*
- 3) *определение структурной схемы и параметров проектируемой системы по желаемой передаточной функции.*

На первом этапе синтеза из условия удовлетворения ТТТ (порядку астатизма, минимуму среднеквадратической ошибки, допустимому перерегулированию, длительности переходного процесса, динамической ошибке и т.д.) определяется эталонная передаточная функция системы автоматического управления.

На втором этапе синтеза производится энергетический расчёт элементов, входящих в нескорректированную систему (двигателя, усилителя мощности, измерительного устройства), и определяются параметры этих элементов.

На третьем этапе синтеза определяется конфигурация (полная структурная схема системы с учётом корректирующих устройств), общий коэффициент усиления системы в разомкнутом состоянии, схемы, параметры и место включения корректирующих устройств из условия соответствия передаточной функции скорректированной системы эталонной передаточной функции.

На четвёртом этапе производится экспериментальная доводка системы управления.

С точки зрения сложности задачи синтеза можно разделить на три категории [82, 117, 122]:

1. *Задача выбора параметров системы из условия достижения требуемых показателей качества процессов управления (задача выбора $W^3(s)$).*
2. *Задача синтеза корректирующих устройств, которая состоит в выборе места включения, определении структуры и параметров корректирующих устройств, исходя из требований к качеству процессов управления. Часто в такой постановке место включения корректирующих устройств бывает заданным.*

3. *Общая задача синтеза системы, заключающаяся в определении общей структурной схемы системы, технических средств её реализации, включая требования к объекту управления, а также всех характеристик и параметров, входящих в систему устройств, на основе технических требований, предъявляемых к системе.*

Необходимо подчеркнуть, что чем лучше будет решена задача синтеза аналитическим путём, тем меньше будут затраты времени и средств при переходе к экспериментальным исследованиям и окончательной доводке системы.

Условная структурная схема, иллюстрирующая основные этапы создания САУ, приведена на рис. 1.21.

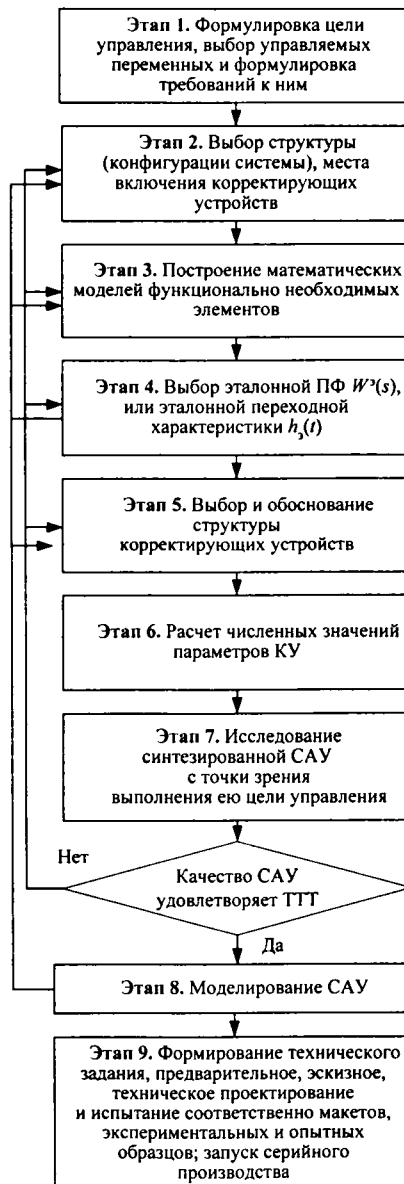


Рис. 1.21. Условная структурная схема, иллюстрирующая процесс создания САУ сложными объектами

Этап 1. Формулировка цели управления, выбор управляемых переменных и формулировка требований к ним. Пример: система управления баллистической ракеты. Цель управления — поражение объектов вероятного противника; управляемые переменные — углы, характеризующие движение ракеты (курс, крен, тангаж); требования — изменение управляемых переменных должно обеспечить выполнение всего алгоритма управления, включая реализацию точностных параметров и т.д. (см. главу 6).

Этап 2. Выбор структуры (конфигурации системы), места включения корректирующих устройств. Выбор источников энергии и функционально необходимых элементов с учетом их надежности, массы и габаритов, условий функционирования (вибрация, влажность, температура и др.); выбор мощности исполнительного элемента (она должна соответствовать требованиям, предъявляемым к быстродействию системы, кроме того, на основе опыта должна быть произведена оценка дисперсии на входе привода), энергетический расчет исполнительного устройства, усилителя мощности и т.д. (на этом этапе необходимо помнить о возможной несогласованности энергетического расчета элементов, входящих в систему с динамическим расчетом, результаты которого определяют процессы управления, т.е. динамические процессы, протекающие в системе, в которой потоки информации, а также решения и действия для достижения цели управления структурно реализуются в виде замкнутого контура, т.е. системы с обратной связью). При выборе элементов ориентируются на функциональную полноту, быстродействие, надежность, потребляемую мощность, стоимость, помехозащищенность, технологичность; оценивается значимость различных элементов, давая приоритет тем, которые наиболее существенно влияют на конфигурацию и основные характеристики проектируемой системы.

Результат реализации 2-го этапа: *детальная функциональная схема проектируемой САУ с результатами энергетического расчета, т.е. с результатами, полностью характеризующими энергетическую часть системы.*

Этап 3. Построение математических моделей функционально необходимых элементов. С помощью изучения физических процессов, протекающих в элементах, или в результате решения задачи идентификации находятся математические модели элементов в форме ДУ или ПФ: объекта управления, гироскопических датчиков углов, датчиков ускорений, угловых скоростей, температуры, давления, расхода и т.д. Важность степени полноты математического описания элементов, а следовательно, и системы в целом, глубокая проработка и конструктивное решение задачи синтеза регулятора приводят к радикальному сокращению всех видов работ (учитывая и материальные расходы, связанные с экспериментальной отработкой системы).

Результат реализации 3-го этапа: *детальная структурная схема проектируемой САУ (она не включает ПФ корректирующих устройств).*

Этап 4. Выбор эталонной ПФ $W^3(s)$, или эталонной переходной характеристики. Обязательно учитывают при этом два фактора: цель управления и динамические характеристики функционально необходимых элементов (выбор $W^3(s)$ без учета динамических характеристик функционально необходимых элементов может привести к чрезмерной сложности корректирующих устройств, а иногда к их физической нереализуемости, поскольку учет только первого фактора приводит к необходимости синтеза регулятора, обладающего большими возможностями в плане решения задачи коррекции в структуре сложной системы).

Результат реализации 4-го этапа: *аналитическая зависимость, определяющая $W^3(s)$ и $h_3(t)$.*

Этап 5. Выбор и обоснование структуры корректирующих устройств, реализующих последовательную коррекцию, параллельную коррекцию, отрицательные

корректирующие обратные связи (пассивные и активные четырехполюсники постоянного тока, реализующие ПФ реальных интегрирующих, дифференцирующих, инерционных, интегро-дифференцирующих звеньев); дифференцирующие трансформаторы (часто используются в виде параллельных КУ), пассивные четырехполюсники переменного тока, дискретные корректирующие устройства и т.д. Основой для предварительного выбора КУ является ПФ неизменяемой части (например, если ПФ неизменяемой части порождает в области частоты среза отрицательный запас по фазе, то для обеспечения необходимых динамических свойств необходимо вводить КУ, создающее опережение по фазе; если неизменяемая часть САУ содержит слабо демпфированные колебания или консервативные звенья, то используются КУ, подавляющие высокие и средние частоты, создающие отрицательный фазовый сдвиг без изменения АЧХ (фазосдвигающие КУ)).

Результат реализации 5-го этапа: *детальная структурная схема проектируемой САУ, содержащая ПФ КУ без численных значений параметров.*

Этап 6. Расчет численных значений параметров КУ. При реализации этого этапа целесообразно построить области устойчивости системы в пространстве варьируемых параметров, т.е. найти совокупность значений параметров, при которых система не только устойчива, но и обеспечиваются необходимые запасы устойчивости.

Результат реализации 6-го этапа: *первый вариант детальной структурной схемы проектируемой САУ, полученной с использованием аналитического аппарата.*

Этап 7. Исследование синтезированной САУ с точки зрения выполнения ею цели управления. 7-й этап завершает оценочный количественный результат, при этом имели место упрощение математических моделей элементов и системы, исключение из рассмотрения некоторых параметров, соотношений, несмотря на их заметное влияние на работу САУ. Все это позволило привлечь хорошо разработанный математический аппарат и получить при принятых допущениях точное решение, которое можно использовать как базовое при реализации следующих этапов создания САУ. Проектирование — это итерационный, нелинейный, творческий процесс, и при первой итерации опытные разработчики прибегают к упрощению сложных систем.

Если качество САУ не удовлетворяет ТТТ, необходимо изменить конфигурацию системы, более конструктивно выбрать функционально необходимые элементы с учетом условий работы САУ и изменить структуру регулятора.

Этап 8. Моделирование САУ. С учетом следующих преимуществ компьютерного моделирования:

- поведение системы можно исследовать при самых разных условиях;
- детальные исследования САУ можно выполнить за короткий промежуток времени;
- изучение поведения системы в таких гипотетических условиях, которые трудно реализуемы в реальных условиях (безопасность и др.);
- выявление параметров, в наибольшей степени влияющих на показатели качества САУ, исследование при различных задающих и возмущающих воздействиях (различные маневры цели, различные точки приложения помех с различными статическими характеристиками), определение чувствительности системы к отказам тех или иных ее составляющих;
- моделирование практически не накладывает ограничений как на степень сложности проектируемой САУ, так и на степень сложности решаемых системой задач (аналитический аппарат в этих случаях практически неприменим)

проводится полное моделирование проектируемой системы с учетом нелинейностей, переменности параметров и др.; оно является основным инструментом проектирования САУ на этапе, предшествующем аппаратной реализации САУ. Математический аппарат и компьютерное моделирование дополняют друг друга.

Результат: один из вариантов структурной схемы проектируемой САУ, поскольку итерационный процесс может быть продолжен.

Этап 9. **Формирование технического задания, предварительное эскизное, техническое проектирование и испытание соответственно макетов, экспериментальных и опытных образцов; запуск серийного производства.**

1.2. МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТРУКТУРЫ РЕГУЛЯТОРОВ

1.2.1. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ ПУТИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ЗАДАННОГО КАЧЕСТВА И СТРУКТУРУ РЕГУЛЯТОРА В КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

При проектировании регуляторов необходимо иметь в виду некоторые общие положения, которые могут облегчить решение конкретных задач. Можно указать пути обеспечения заданного качества работы САУ в переходном и установившемся режимах:

- введение в прямую и обратную цепи системы дифференцирующих звеньев для обеспечения заданного качества работы в переходном режиме;
- введение в прямую цепь интеграторов для обеспечения заданной точности работы САУ в установившемся режиме;
- введение в прямую цепь усилителя с таким коэффициентом усиления, который рационально влиял бы на качество как в переходном, так и в установившемся режимах и др.;
- введение корректирующих обратных связей.

Имеют место и другие положения принципиального характера.

Изложим содержание сформулированных общих принципов обеспечения высокого качества работы САУ.

1.2.1.1. СТАБИЛИЗАЦИЯ ОБЪЕКТОВ ВВЕДЕНИЕМ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ ПО ПРОИЗВОДНЫМ

Положим, что известно некоторое эталонное расположение полюсов замкнутой системы, обеспечивающее произвольную степень устойчивости (по расположению полюсов на комплексной плоскости (рис. 1.22) можно судить и о качестве работы САУ в переходном режиме) [87].

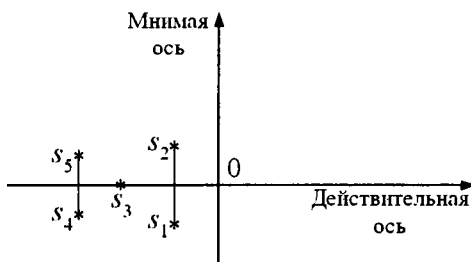


Рис. 1.22. Комплексная плоскость

Изложим метод реализации заданного расположения полюсов САУ на комплексной плоскости.

Положим, что $-s_1, -s_2, \dots, -s_n$ — заданные полюса. Тогда эталонное характеристическое уравнение замкнутой системы имеет вид

$$D_3(s) = (s + s_1)(s + s_2) \dots (s + s_n) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0. \quad (1.15)$$

Пусть объект (рис. 1.23) имеет ПФ

$$W_0(s) = \frac{K}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0}. \quad (1.16)$$

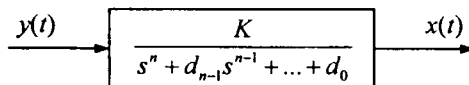


Рис. 1.23. Структурная схема неизменяемой части системы

Охватим объект обратной связью с передаточной функцией вида

$$W_{oc}(s) = K_0 + K_1s + K_2s^2 + \dots + K_{n-1}s^{n-1}. \quad (1.17)$$

Тогда структурная схема принимает вид, изображенный на рис. 1.24. Найдем ПФ системы

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{\frac{K}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0}}{1 + \frac{K(K_0 + K_1s + K_2s^2 + \dots + K_{n-1}s^{n-1})}{s^n + d_{n-1}s^{n-1} + \dots + d_0}} = \\ &= \frac{K}{s^n + (d_{n-1} + KK_{n-1})s^{n-1} + \dots + (d_1 + KK_1)s + (d_0 + KK_0)}. \end{aligned}$$

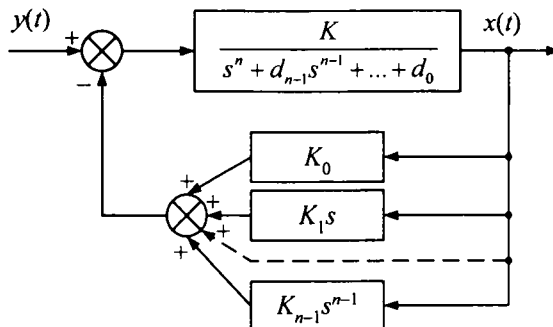


Рис. 1.24. Структурная схема объекта, охваченного обратной связью по производным

Запишем характеристическое уравнение скорректированной системы

$$D(s) = s^n + (d_{n-1} + KK_{n-1})s^{n-1} + \dots + (d_1 + KK_1)s + (d_0 + KK_0). \quad (1.18)$$

Сравнивая (1.15) и (1.18), получим условия равенства (1.18) эталонному характеристическому уравнению (1.15) [87]:

$$d_i + KK_i = \alpha_i; \quad KK_i = \alpha_i - d_i, \quad i = \overline{0, n-1}.$$

Тогда

$$K_i = \frac{\alpha_i - d_i}{K}, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (1.19)$$

Изложенное выше позволяет заключить [87]: введение обратной связи по выходу и его производным позволяет вместо характеристического уравнения вида

$$D_0(s) = s^n + d_{n-1}s^{n-1} + d_{n-2}s^{n-2} + \dots + d_1s + d_0 \quad (1.20)$$

получить характеристическое уравнение

$$D(s) = s^n + (d_{n-1} + KK_{n-1})s^{n-1} + \dots + (d_1 + KK_1)s + (d_0 + KK_0), \quad (1.21)$$

где путем изменения коэффициентов $K_0, K_1, \dots, K_{n-1}$ можно добиться равенства (1.18) эталонному характеристическому многочлену (1.15).

Таким образом, для обеспечения произвольного расположения n корней характеристического уравнения замкнутой системы достаточно вводить обратную связь по выходу и его производным вплоть до $(n-1)$ -й.

Для стабилизации объекта можно использовать ОС лишь по нескольким производным, но необязательно до $(n-1)$ порядка включительно [87].

Пример 1.1 [87]. Имеем разомкнутую неустойчивую систему с ПФ вида

$$W_p(s) = \frac{1}{s^2(Ts+1)}.$$

Полюса системы имеют следующие значения (рис. 1.25):

$$s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad s_3 = -1/T.$$

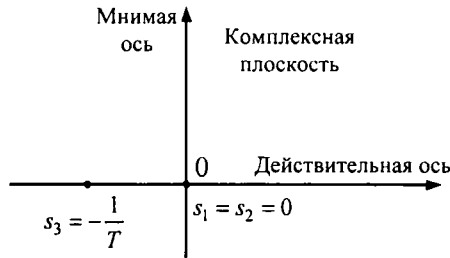


Рис. 1.25. Полюса системы на комплексной плоскости

Замкнем систему ОС (рис. 1.26)

$$W_{oc} = K_0 + K_1s + K_2s^2.$$

Тогда ПФ замкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{1/(Ts^3 + s^2)}{1 + \frac{K_0 + K_1s + K_2s^2}{Ts^3 + s^2}} = \frac{1}{Ts^3 + (1 + K_2)s^2 + K_1s + K_0}.$$

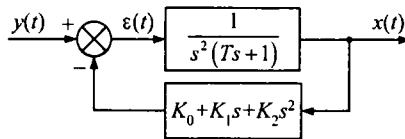


Рис. 1.26. Структурная схема системы

Запишем характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(s) = s^3 + \frac{1+K_2}{T}s^2 + \frac{K_1}{T}s + \frac{K_0}{T} = 0. \quad (1.22)$$

Выберем эталонный многочлен (рис. 1.27) вида

$$D_s(s) = (s + \alpha)^3 = 0; \quad s_1 = -\alpha; \quad s_2 = -\alpha; \quad s_3 = -\alpha.$$

Тогда

$$(s + \alpha)^3 = s^3 + 3s^2\alpha + 3s\alpha^2 + \alpha^3 = 0. \quad (1.23)$$

Приравнявая коэффициенты в (1.22) и (1.23) при одинаковых степенях s , получаем формулы, определяющие K_0, K_1, K_2 :

$$\frac{1+K_2}{T} = 3\alpha; \quad 1+K_2 = 3T\alpha; \quad K_2 = 3T\alpha - 1;$$

$$\frac{K_1}{T} = 3\alpha^2; \quad K_1 = 3T\alpha^2; \quad \frac{K_0}{T} = \alpha^3; \quad K_0 = \alpha^3 T.$$



Рис. 1.27. К решению задачи (пример 1.1)

Обеспечим устойчивость системы введением более простой ОС (рис. 1.28). Запишем формулу, определяющую ПФ замкнутой САУ:

$$W(s) = \frac{1 / (Ts^3 + s^2)}{1 + \frac{K_0 + K_1 s}{Ts^3 + s^2}} = \frac{1}{Ts^3 + s^2 + K_1 s + K_0}.$$

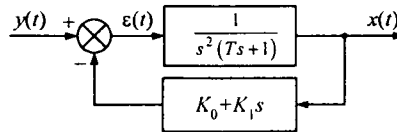


Рис. 1.28. К примеру 1.1

Используя критерий Ляпунова–Шипара, получим необходимые и достаточные условия устойчивости системы, имеющей характеристическое уравнение

$$\alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3 = 0;$$

здесь $\alpha_0 = T$; $\alpha_1 = 1$; $\alpha_2 = K_1$; $\alpha_3 = K_0$.

Необходимые и достаточные условия устойчивости имеют вид

$$\alpha_0 > 0; \quad \alpha_1 > 0; \quad \alpha_2 > 0; \quad \alpha_3 > 0; \quad \Delta_2 > 0.$$

Здесь

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

— главный определитель Гурвица; из него найдем Δ_2 :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 \alpha_3 = 1K_1 - TK_0 > 0; \quad K_1 > TK_0.$$

Теперь легко записать соответствующие неравенства

$$T > 0; \quad K_1 > 0; \quad K_0 > 0; \quad K_1 > K_0 T.$$

Таким образом, для обеспечения устойчивости нет необходимости вводить вторую производную по выходу.

В [87] приведены теоретические положения, определяющие общий алгоритм стабилизации. Выше был рассмотрен случай, когда объект описывался ДУ

$$L_x x = K y(t);$$

в [87] исследован объект, подлежащий стабилизации и описываемый уравнением вида

$$L_x x = L_y y,$$

где $L_y = \sum_{\gamma=0}^m B_\gamma \frac{d^\gamma}{dt^\gamma}$ — линейный дифференциальный оператор, при этом $m < n$.

В рассмотренном случае сигнал обратной связи строится как решение соответствующего дифференциального уравнения, причем линейные дифференциальные операторы обратной связи могут быть выбраны так, чтобы характеристический многочлен замкнутой системы имел произвольные, наперед заданные коэффициенты, т.е. произвольное расположение корней.

В [87] можно познакомиться с более полным теоретическим обоснованием решения задачи стабилизации с помощью обратной связи.

Большой класс объектов описывается уравнениями второго порядка. Поэтому продолжим рассмотрение вопроса применительно к колебательному звену.

Рассмотрим системы, структурные схемы которых представлены на рис. 1.29.

Положим, что колебательное звено (рис. 1.29, а) имеет небольшое значение ξ и, таким образом, является *сильноколебательным*. Охватим это звено ОС с ПФ $W_{oc} = K_0 s$. Найдём такое значение K_0 , которое обеспечило бы заданное значение ξ_3 , (например, $\xi_3 = 0,7$):

$$W(s) = \frac{1/(T^2 s^2 + 2T\xi s + 1)}{1 + \frac{KK_0 s}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}} = \frac{K}{T^2 s^2 + (2T\xi + KK_0)s + 1} = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi_3 s + 1}.$$

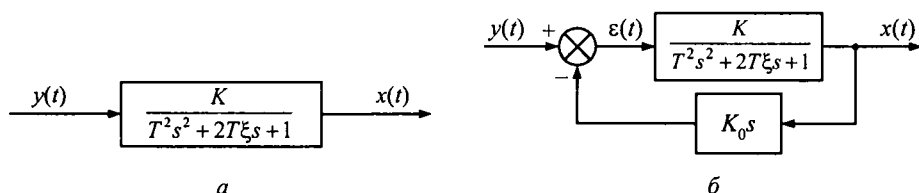


Рис. 1.29. Структурные схемы систем

Найдём ξ_3 :

$$2T\xi + KK_0 = 2T\xi_3; \quad \xi_3 = \frac{2T\xi + KK_0}{2T} = \xi + \frac{KK_0}{2T}.$$

Таким образом, охват колебательного звена ОС с ПФ $W_{oc} = K_0 s$ даёт возможность увеличивать коэффициент демпфирования до нужного значения, не изменяя структуры объекта [122].

Этот результат чрезвычайно важен, поскольку, не изменяя конструкции элемента, введением гибкой обратной связи можно добиться уменьшения его колебательности [70].

Пример 1.2. Рассмотрим структурную схему канала управления продольным движением ракеты (рис. 1.30). Здесь, помимо сигнала обратной связи по углу тангажа, сформированного позиционным гироскопом, введены два дополнительных сигнала [70].

Один из них, измеряемый скоростным гироскопом, пропорционален угловой скорости вращения продольной оси ракеты $\dot{\theta}$, а второй — датчиком линейных ускорений, пропорционален углу атаки α .

Из структурной схемы (рис. 1.30) следует дифференциальное уравнение вида [70]

$$\ddot{\alpha}(t) + \left(2\xi\omega_0 + a_\delta K_{np} K_\delta\right) \dot{\alpha}(t) + \left(\omega_0^2 + a_\delta K_{np} K_\alpha + \frac{1}{T_\delta} a_\delta K_{np} K_\delta\right) \alpha(t) = a_\delta K_{np} K_\delta (\theta_3 - \theta). \quad (1.24)$$

Из рассмотрения последнего уравнения следует: сигнал скоростного гироскопа искусственно изменяет коэффициент демпфирования ракеты и собственную частоту ее колебаний [70].

Из изложенного следует: даже если объект неустойчив, введение обратной связи по производным решает задачу его стабилизации и, более того, позволяет обеспечить произвольную степень устойчивости. Стабилизация с помощью обратной связи и обеспечение заданного качества работы систем, описываемых уравнениями 2-го порядка (уменьшение степени колебательности, т.е. демпфирование), нашли приме-

нение при проектировании систем управления летательными аппаратами, в частности, при управлении углом крена (см. п. 1.1.1) и продольным движением без изменения аэродинамических характеристик летательного аппарата.

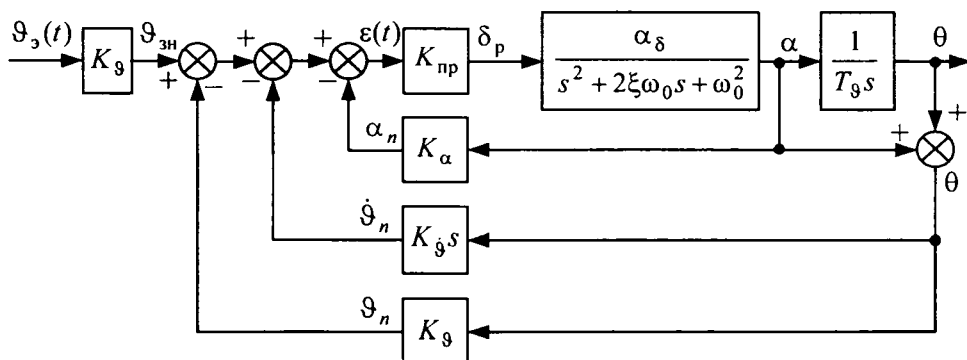


Рис. 1.30. Структурная схема системы

1.2.1.2. ЦЕЛЕНАПРАВЛЕННОЕ ИЗМЕНЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СИСТЕМ ПУТЕМ ВВЕДЕНИЯ ДИФФЕРЕНЦИРУЮЩИХ ЗВЕНЬЕВ В ПРЯМУЮ ЦЕПЬ

Рассмотрим систему, структурная схема которой представлена на рис. 1.31.

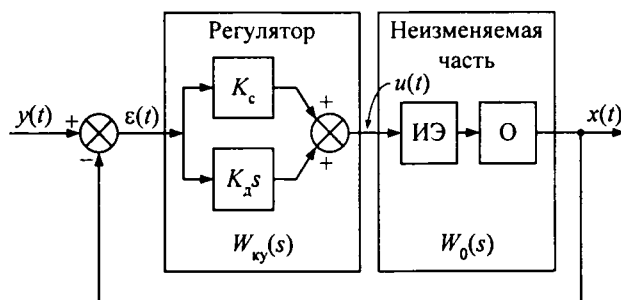


Рис. 1.31. Структурная схема системы

Важным свойством регулятора является формирование сигнала $u(t)$, поступающего на объект управления таким образом, чтобы имел место *фактор прогнозирования*. Поясним сказанное: управляемая величина $x(t)$ воздействует на измерительную систему (на рис. 1.31 $W_{ис}(s) = 1$), последняя же вместе с задающим устройством, выходом которого является сигнал $y(t)$, воздействует на элемент сравнения, формирующий ошибку $\varepsilon(t)$ (реализуется принцип отклонения). Сигнал $\varepsilon(t)$ поступает на регулятор, который в соответствии с заложенным в нем законом управляет исполнительным элементом ИЭ. Положим, что на вход поступает сигнал $y(t)$ такой, что на начальном этапе управления имеет место увеличивающаяся по амплитуде ошибка $\varepsilon(t)$, и из физических соображений ясно, что на указанном этапе при увеличении $\varepsilon(t)$ с целью быстрого устранения значительного рассогласования между входом и выходом необходимо увеличить амплитуду сигнала $u(t)$, поступающего на ИЭ и далее на управляющий орган (например, на рули ракеты). Это приведет к быстрому

устранению большого рассогласования. Такой процесс форсирования может быть реализован введением в прямую цепь системы дифференцирующего звена.

Из-за наличия дифференцирующего звена регулятор формирует сигнал управления $u(t)$ с прогнозом: если амплитуда $\varepsilon(t)$ увеличивается, производная $\dot{\varepsilon}(t)$ положительна и сигнал $u(t)$ усиливается. С момента уменьшения сигнала $\varepsilon(t)$ сигнал $\dot{\varepsilon}(t) < 0$ и сигнал $u(t)$ интенсивно ослабляется (рис. 1.32).

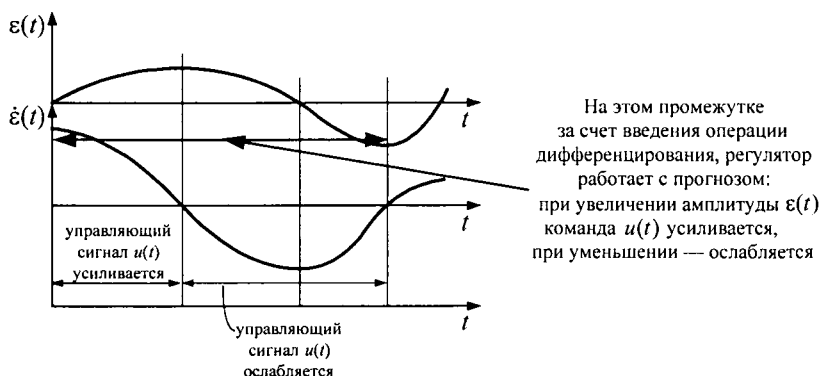


Рис. 1.32. Сигнал ошибки $\varepsilon(t)$

Продолжим рассмотрение на примере [139].

Рассмотрим движение корабля. Обозначим через $\varphi(t) = x(t)$ курс корабля. Волны, ветер создают возмущающий момент относительно вертикальной оси, который изменяет курс корабля. Управляющим или регулирующим органом корабля является руль. Введем в систему управления кораблем *дополнительный сигнал, управляющий двигателем, который бы при уходе корабля от курса добавлялся к сигналу, пропорциональному отклонению от курса, с тем чтобы уменьшить этот уход, а при приближении к заданному курсу, наоборот, вычитался из сигнала, пропорционального отклонению, что будет приводить к уменьшению отклонения руля. Таким дополнительным сигналом может служить сигнал, пропорциональный производной от угла отклонения корабля, т.е. пропорциональный скорости поворота от курса.* На рис. 1.33, а изображена одна полуволна колебаний отклонения от курса. В точках t_1 и t_2 отклонения от курса одинаковы, и регулятор не будет чувствовать разницу между этими точками. С физической точки зрения эти два момента времени различны, поскольку в точке t_1 мы отходим от курса, а в t_2 , наоборот, мы стремимся на курс. Эти точки можно отличить друг от друга знаком производной. В точке t_1 производная имеет положительный знак. В точке же t_2 производная отрицательна (рис. 1.33, б). Если образовать новый сигнал управления $\varphi + \alpha \dot{\varphi}$ (рис. 1.33, в), то при удалении от заданного курса двигатель будет вращаться с большей скоростью. Это позволяет ускорить процесс возвращения корабля на заданный курс. При этом двигатель будет выключаться раньше прихода корабля на заданный курс. Установившийся режим здесь может наступить только в том случае, когда движки потенциометров и руль совпадут по напряжению с продольной осью корабля. Статическая ошибка будет равна нулю. Характер процесса теперь будет иметь вид, изображенный на рис. 1.34. Для образования производной существуют специальные устройства — указатели скорости, дифференциаторы.

Иногда в автомат курса вводят сигналы, пропорциональные не только скорости отклонения $\dot{\varphi}$, но и ускорения $\ddot{\varphi}$. Эти сигналы могут быть получены, например, от так называемого демпфирующего гироскопа. Введение производных $\dot{\varphi}$, $\ddot{\varphi}$ позволяет придать системе устойчивость и в то же время не влияет на статические свойства системы, т.е. на свойства ее в установившемся режиме.

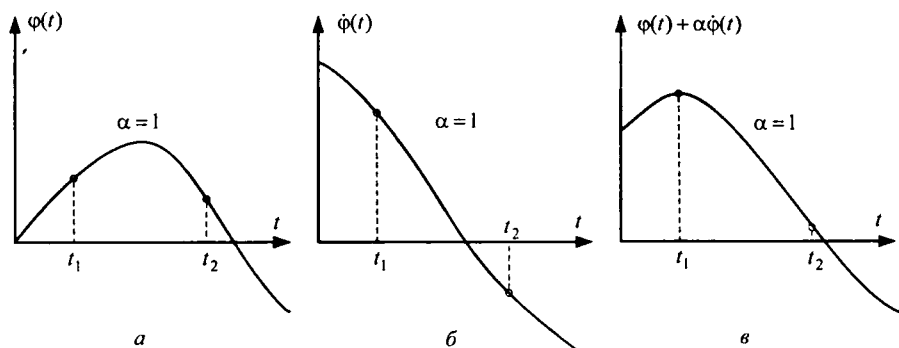


Рис. 1.33

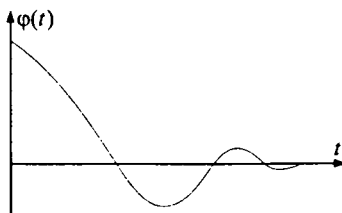


Рис. 1.34

Рассмотрим систему (рис. 1.35).

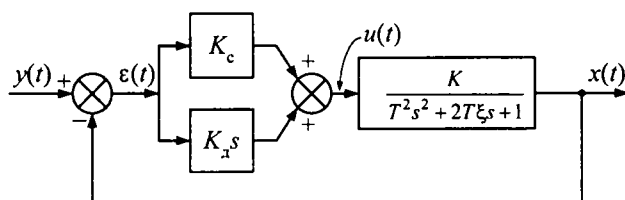


Рис. 1.35. Структурная схема системы

Передаточная функция системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K_c + K_d s}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1} = \frac{K_c + K_d s}{T^2 s^2 + (2T\xi + K_d)s + K_c + 1} = \frac{K_3 + K_3' s}{T_3^2 s^2 + 2T_3\xi_3 s + 1},$$

где

$$T_3 = \frac{T}{\sqrt{1 + K_c}}; \quad \xi_3 = \frac{\xi}{\sqrt{1 + K_c}} + \frac{K_d}{2T\sqrt{1 + K_c}}.$$

Выбором коэффициентов K_d и K_c можно целенаправленно изменять динамические свойства замкнутой системы в переходном режиме, в том числе увеличить ξ до нужного значения.

1.2.1.3. ВЛИЯНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ УСИЛЕНИЯ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ И ИНТЕГРАТОРОВ В ПРЯМОЙ ЦЕПИ НА КАЧЕСТВО РАБОТЫ САУ В УСТАНОВИВШЕМСЯ РЕЖИМЕ

Известно, что установившаяся ошибка работы САУ определяется выражением (см. том 1)

$$\varepsilon(t) = C_0 y(t) + C_1 \dot{y}(t) + \frac{1}{2!} C_2 \ddot{y}(t) + \dots + \frac{1}{m!} C_m y^{(m)}(t), \quad (1.25)$$

где $C_0, C_1, C_2 \dots$ — коэффициенты ошибок.

Если $W(s)$ — ПФ замкнутой САУ, то справедлива формула

$$C_n = \left. \frac{d^k}{ds^k} [1 - W(s)] \right|_{s=0}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (1.26)$$

Обычно называют: C_0 — коэффициент статической ошибки; C_1 — коэффициент скоростной ошибки; C_2 — коэффициент ошибки по ускорению и т.д.

Из формулы (1.20) находим

$$C_0 = 1/(1 + K), \quad (1.27)$$

где K — коэффициент усиления разомкнутой системы (рис. 1.36).

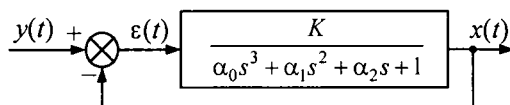


Рис. 1.36. Структурная схема системы

Из (1.27) следует, что уменьшение установившейся ошибки достигается увеличением коэффициента усиления K . Вместе с тем с увеличением точности в установившемся режиме уменьшаются запасы устойчивости и при некотором $K > K_{кр}$ система становится неустойчивой.

Для примера рассмотрим систему (рис. 1.36). Имеем

$$W(s) = \frac{\frac{K}{\alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + 1}}{1 + \frac{K}{\alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + 1}} = \frac{K}{\alpha_0 s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + 1 + K}.$$

Воспользуемся критерием Лянара–Шипара; пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 & 0 \\ \alpha_0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & \alpha_3 \end{vmatrix} \quad \text{— главный определитель Гурвица.}$$

Необходимые и достаточные условия устойчивости можно записать так: $\alpha_0 > 0$; $\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0, \alpha_3 = 1 + K$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 1 + K \\ \alpha_0 & \alpha_2 \end{vmatrix} = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 (1 + K) = \alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 - \alpha_0 K > 0.$$

Отсюда получаем

$$\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0 > \alpha_0 K;$$

далее запишем выражение, определяющее критический коэффициент усиления $K_{кр}$:

$$\frac{\alpha_1 \alpha_2 - \alpha_0}{\alpha_0} = K_{кр}.$$

При $K > K_{кр}$ — система неустойчива.

Из изложенного легко заключить: при увеличении точности работы САУ в установившемся режиме путем увеличения K необходимо помнить: запас устойчивости системы уменьшается и существует $K = K_{кр}$, при котором система становится неустойчивой.

Для достижения нужного запаса устойчивости используют введение в прямую цепь дополнительных звеньев, например апериодического звена, постоянная времени которого значительно больше постоянных времени имеющихся апериодических звеньев.

Пользуясь (1.26), легко показать, что если в прямой цепи имеется один интегратор, то $C_0 = 0$.

В самом деле, если в прямой цепи имеется один интегратор, то ПФ разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{1}{s} W_0(s).$$

Найдем ПФ замкнутой системы

$$W(s) = \frac{\frac{W_0(s)}{s}}{1 + \frac{W_0(s)}{s}} = \frac{W_0(s)}{s + W_0(s)}.$$

Запишем зависимость для коэффициента C_0 :

$$C_0 = (1 - W(s)) \Big|_{s=0} = 1 - \frac{W_0(0)}{W_0(0)} = 1 - 1 = 0.$$

Аналогичным образом легко показать, что если в прямую цепь включены два интегратора, то $C_0 = 0$, $C_1 = 0$; для трех интеграторов имеем $C_0 = 0$, $C_1 = 0$, $C_2 = 0$.

Как и в предыдущем случае, когда увеличение коэффициента усиления в прямой цепи разомкнутой системы понижало запас устойчивости, так и введение интеграторов приводит к аналогичному результату.

Повышение точности работы в установившемся режиме путем введения интегрирующих звеньев требует проведения мероприятий по сохранению запасов устойчивости САУ.

1.2.1.4. ВЛИЯНИЕ МЕСТНЫХ ОС

В сложные системы автоматического управления вводятся специально элементы, охваченные местными обратными связями.

С помощью указанных обратных связей можно существенно изменять динамические свойства элементов САУ и, таким образом, оказывать влияние на характеристики всей системы. Такой подход широко используется при решении практических задач. Как указано в [122], даже простейшие отрицательные обратные связи могут существенно изменить свойства типовых динамических звеньев. Еще больший эффект дают сложные отрицательные и положительные обратные связи. Следовательно, если основные элементы регулятора по своей физической природе позволяют

создать обратные связи, то динамические свойства этих элементов зачастую могут быть изменены в нужном направлении с целью обеспечить заданное качество управления замкнутой системы. Влияние местных обратных связей, реализующих параллельные корректирующие устройства, весьма разнообразно, и каждый конкретный случай требует исследования и обоснования при использовании в конкретных системах.

Основные виды ОС определяются ПФ (рис. 1.37):

- жесткая обратная связь (действует на систему как в переходном, так и установившемся режимах)

$$W_{oc}(s) = K_{oc}; \quad (1.28)$$

- инерционная жесткая ОС

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}}{T_{oc}s + 1}; \quad (1.29)$$

- гибкая обратная связь (действует лишь в переходных режимах)

$$W_{oc}(s) = K_{oc}s; \quad (1.30)$$

- инерционная гибкая ОС

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}s}{T_{oc}s + 1}. \quad (1.31)$$

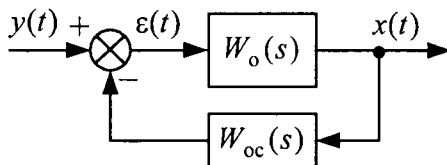


Рис. 1.37. Структурная схема системы с обратной связью $W_{oc}(s)$

Проиллюстрируем основные свойства ОС при охвате ими различных типов звеньев [122].

Пусть $W_o(s) = \frac{K}{Ts + 1}$, $W_{oc}(s) = K_{oc}$; тогда

$$W(s) = \frac{K_3}{T_3s + 1},$$

где

$$K_3 = \frac{K}{1 + KK_{oc}}, \quad T_3 = \frac{T}{1 + KK_{oc}}.$$

Вывод: жесткая отрицательная ОС не изменяет структуру апериодического звена, но уменьшает его инерционность (уменьшает постоянную времени).

Тем самым она улучшает качество переходного процесса в САУ и оказывает стабилизирующее действие.

Если же $W_o(s) = \frac{K}{Ts + 1}$, а $W_{oc}(s) = K_{oc}s$, то

$$W(s) = \frac{K}{T_3s + 1},$$

где

$$T_3 = T + KK_{oc}.$$

Таким образом, *гибкая отрицательная ОС не изменяет структуру и не влияет на передаточный коэффициент аperiodического звена. Она лишь увеличивает его инерционность* (увеличивает его постоянную времени).

Положим теперь, что

$$W_o(s) = \frac{K}{s}, \text{ а } W_{oc}(s) = K_{oc}.$$

В этом случае получаем

$$W(s) = \frac{K_3}{T_3 s + 1},$$

где

$$K_3 = \frac{1}{K_{oc}}, \quad T_3 = \frac{1}{K K_{oc}}.$$

Итак, под действием жесткой ОС теряется интегрирующее свойство звена и оно превращается в аperiodическое с коэффициентом усиления, который определяется K_{oc} . Постоянная времени T_3 будет мала при большом K .

Рассмотрим случай, когда

$$W_o(s) = \frac{K}{s}, \quad W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}}{T_{oc}s + 1}.$$

Имеем

$$W(s) = \frac{K_3 (T_{oc}s + 1)}{T_1^2 s^2 + T_2 s + 1},$$

где

$$K_3 = \frac{1}{K_{oc}}, \quad T_1^2 = \frac{T_{oc}}{K K_{oc}}, \quad T_2 = \frac{1}{K K_{oc}}.$$

Следовательно, интегрирующее звено превращается в звено второго порядка; при большом K охват интегрирующего звена инерционной жесткой обратной связью эквивалентен усиленному звену с введением производной.

Если же $W_o(s) = \frac{1}{s}$, а $W_{oc}(s) = K_{oc}s$, то

$$W(s) = \frac{K_3}{s} = T_3 s,$$

где

$$K_3 = \frac{K}{1 + K K_{oc}}.$$

Таким образом, гибкая обратная связь не изменяет структуру интегрирующего звена, но уменьшает его передаточный коэффициент (увеличивает постоянную времени $T_3 = \frac{1}{K_3}$).

Рассмотрим практически важный случай, когда

$$W_o(s) = \frac{K}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}, \quad W_{oc}(s) = K_{oc}.$$

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K_3}{T_3^2 s^2 + 2T_3 \xi_3 s + 1},$$

где

$$K_3 = \frac{K}{1 + KK_{oc}}, T_3 = \frac{T}{\sqrt{1 + KK_{oc}}}, \xi_3 = \frac{\xi}{\sqrt{1 + KK_{oc}}}.$$

Вывод. Жесткая отрицательная ОС не изменяет структуру колебательного звена, но уменьшает постоянную времени и коэффициент демпфирования; при этом уменьшается коэффициент передачи.

Если же колебательное звено охватывается отрицательной ОС с ПФ

$$W_{oc}(s) = K_{oc}s,$$

то при $K_{oc} < \frac{2T(1-\xi)}{K}$

$$W(s) = \frac{K}{T^2s^2 + 2T\xi_3s + 1},$$

где

$$\xi_3 = \xi + \frac{KK_{oc}}{2T} \text{ (этот случай рассматривался выше).}$$

Если же $K_{oc} > \frac{2T(1-\xi)}{K}$, то

$$W(s) = \frac{K}{(T_1s + 1)(T_2s + 1)},$$

где

$$T_1 = 0,5 \left(r + \sqrt{r^2 - 4T^2} \right); T_2 = 0,5 \left(r - \sqrt{r^2 - 4T^2} \right); r = 2\xi T + KK_{oc}.$$

Следовательно, сильная отрицательная ОС превращает колебательное звено в последовательное соединение двух апериодических звеньев.

Легко показать, что если $W_0(s) = K$; $W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}}{T_{oc}s + 1}$, то

$$W(s) = K_3 (T_3s + 1),$$

где

$$K_3 = \frac{K}{1 + KK_{oc}}, T_3 = \frac{T_{oc}}{1 + KK_{oc}},$$

т.е. инерционная отрицательная ОС превращает идеальное усилительное звено в реальное дифференцирующее звено, с помощью которого можно получить производные входного сигнала.

Последовательный регулятор, имеющий ПФ

$$W_{ky}(s) = \frac{Ts + 1}{Ts}$$

и объединяющий в себе введение интеграла и производной, называется изодромным. Использование изодромного регулятора позволяет получить необходимый порядок астатизма, сохраняя устойчивость и качество системы в переходном режиме.

А теперь рассмотрим случай, когда объект с ПФ

$$W_o(s) = \frac{K}{s(Ts + 1)}$$

охватывается ОС с ПФ

$$W_{oc}(s) = \frac{K_{oc}s}{T_{oc}s + 1}.$$

Пользуясь структурными преобразованиями, получим ПФ замкнутой системы [122]

$$W(s) = \frac{K_1(T_{oc}s + 1)}{s(T_2^2 s^2 + T_1 s + 1)},$$

где

$$K_1 = \frac{K}{1 + KK_{oc}}, \quad T_2^2 = \frac{TT_{oc}}{1 + KK_{oc}}, \quad T_1 = \frac{T + T_{oc}}{1 + KK_{oc}}.$$

Вывод. При сохранении интегрирующего свойства звена получается эффект введения производной, т.е. интегрирующее звено становится изодромным (постоянные времени T_1 и T_2 могут быть уменьшены за счет увеличения K). Инерционное запаздывание в ОС может быть использовано для улучшения качества переходных процессов (получается эффект, аналогичный введению производной в прямой цепи).

В заключение рассмотрим условие сохранения порядка астатизма охватываемого звена.

Если $W_o(s) = \frac{K_0}{s^\nu} W'_o(s)$ и $W_{oc}(s) = K_{oc} s^\mu W'_{oc}(s)$, то

$$W(s) = \frac{K_0 W'_o(s)}{s^\nu + s^\mu K_0 K_{oc} W'_o(s) W'_{oc}(s)}.$$

Отсюда следует, что для сохранения ν -го порядка астатизма необходимо выполнение условия $\mu \geq \nu$.

Изложенные здесь положения лежат в основе подходов к выбору рациональной структуры регулятора для каждого конкретного случая. При проведении инженерных расчетов целесообразно принимать во внимание следующее. Уменьшение установившейся ошибки достигается увеличением добротности системы (передаточного коэффициента разомкнутой системы). Вместе с тем при увеличении коэффициента усиления в большинстве случаев уменьшаются запасы устойчивости и при $K > K_{кр}$ система становится неустойчивой. Поэтому при повышении точности работы САУ в установившемся режиме путем увеличения K необходимо предусмотреть мероприятия для обеспечения достаточного запаса устойчивости. Увеличение точности путем обеспечения астатизма (включение интеграторов в прямую цепь) также требует реализации мероприятий по сохранению запасов устойчивости САУ.

Для получения астатизма целесообразно использовать изодромные звенья с ПФ

$$W_{ky}(s) = \frac{K_n(T_n s + 1)}{s} = 1 + \frac{K_n}{s},$$

где

$$T_n = \frac{1}{K_n} \text{ — постоянная времени изодрома.}$$

Если T_n — достаточна велика, то запас устойчивости может быть сохранен неизменным [117].

Неединичная обратная связь — один из путей реализации астатической системы.

Демпфирование с подавлением высоких частот — еще один путь обеспечения устойчивости или повышения запаса устойчивости. Этот путь реализуется введением апериодического звена, постоянная времени которого значительно больше постоянных времени имеющихся апериодических звеньев разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{K}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)}.$$

Устойчивость и необходимый запас устойчивости могут быть обеспечены введением форсирующего звена при любой ПФ исходной системы. При этом увеличивается быстродействие системы, вместе с тем увеличивается и влияние помех.

Итоговые положения: к факторам, оказывающим существенное влияние на качество работы замкнутой системы автоматического управления, можно отнести:

- стабилизацию объекта введением обратных связей;
- введение дифференцирующих звеньев в прямую цепь для реализации работы системы с прогнозом и обеспечение заданного качества работы системы в переходном режиме;
- введение усилительных элементов и интеграторов для обеспечения заданной точности в установившемся режиме;
- введение местных обратных связей с использованием их в направлении обеспечения заданного качества работы САУ.

1.2.2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И АНАЛИЗ РЕГУЛЯТОРОВ

1.2.2.1. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

В предыдущем параграфе была показана роль операций усиления, интегрирования и дифференцирования: с помощью изменения величины коэффициента усиления в прямой цепи, введения местных обратных связей, включения интегрирующих и дифференцирующих звеньев можно добиться заданного качества работы САУ (в пределах возможностей, которые определены структурой используемого регулятора). В соответствии с этим положением строятся математические модели регуляторов, цель которых — формирование управляющего воздействия (команды управления) на объект.

Здесь пока ограничимся рассмотрением наиболее распространенных математических моделей линейных регуляторов по отклонению непрерывного действия. В этих простейших законах управляющее воздействие $u(t)$ линейно зависит от сигнала ошибки $\varepsilon(t)$ (включение в прямую цепь усилителя), его интеграла (включение интегрирующих звеньев) и первой производной (включение дифференцирующих звеньев). Сказанное выше позволяет ввести в рассмотрение следующие виды управляющих устройств (регуляторов):

- 1) пропорциональное управляющее устройство (П-управление)

$$W_{\text{кy}}(s) = K; \quad (1.32)$$

- 2) интегральное управляющее устройство (И-управление)

$$W_{\text{кy}}(s) = \frac{K_{\text{и}}}{s} = \frac{1}{T_{\text{и}}s}, \quad K_{\text{и}} = \frac{1}{T_{\text{и}}}; \quad (1.33)$$

- 3) пропорционально-интегральное управляющее устройство (ПИ-управление)

$$W_{\text{кy}}(s) = K + \frac{K_{\text{и}}}{s} = K + \frac{1}{T_{\text{и}}s}; \quad (1.34)$$

- 4) пропорционально-дифференциальное управляющее устройство (ПД-управление)

$$W_{\text{кy}}(s) = K + K_{\text{д}}s = K + \frac{1}{T_{\text{д}}}s; \quad (1.35)$$

- 5) пропорционально-интегрально-дифференциальное управляющее устройство (ПИД-управление)

$$W_{\text{кy}}(s) = K + \frac{K_{\text{и}}}{s} + K_{\text{д}}s. \quad (1.36)$$

Вводя кратное интегрирование и дифференцирование, можно получить более сложные законы управления.

Приведем конкретные примеры использования регуляторов с указанными математическими моделями. При решении задач стабилизации целесообразно использовать П-управление, ПД-управление, цепи с ОС [117, 124, 127]:

1. *Стабилизация при помощи интегрирующего звена (П-управление) применяется, когда считают возможным сохранить в стабилизированной системе тот же порядок величины времени установления выходного сигнала и тот же порядок величины частоты среза, которые были в нестабилизированной системе.* Напомним, что время установления выходного сигнала определяется как такое время T_y , в течение которого выходная величина возросла бы от 0 до 1, если бы скорость ее роста была постоянна и максимальна. Для вычисления T_y можно пользоваться формулами

$$T_y = \frac{\pi}{\omega_{\text{ср}}} = \frac{1}{2f_{\text{ср}}}.$$

При использовании П-управления для типовых следящих систем, включающих двигатели, амплитудно-фазовая характеристика, а следовательно, и частотная характеристика разомкнутой системы остаются почти неизменными в области частот, лежащей выше $1/4$ частоты, соответствующей точке пересечения отрезков асимптоты логарифмической амплитудно-частотной характеристики с наклонными, равными соответственно 6 дБ/октава и 12 дБ/октава (иными словами, при частотах, превышающих частоту, которая на две октавы ниже частоты $1/T_{\text{дв}}$) [117, 124, 127].

2. *Стабилизация при помощи дифференциального звена (ПД-управление) применяется для улучшения работы системы на всех частотах. При применении этого метода происходит, в частности, повышение частоты среза и соответствующее уменьшение времени установления выходной величины.* При этом обычно увеличивается допустимый коэффициент усиления по скорости и сохраняется удовлетворительный запас устойчивости, т.е. достаточное значение избытка фазы в окрестности точки, соответствующей частоте среза.
3. *Стабилизация при помощи одной или нескольких дополнительных цепей обратной связи применяется для улучшения характеристик системы. Этот метод стабилизации систем весьма эффективен.* Кроме того, он позволяет уменьшить влияние изменений (флюктуаций) параметров некоторых ее элементов на поведение системы. Обратная связь применялась давно, с 40–50-х годов, для изменения и улучшения характеристик ламповых усилителей. Обратная связь применялась для линеаризации их выходных ступеней, для поддержания постоянства их усиления, для придания требуемой формы их частотным характеристикам и во многих других случаях.

Дополнительные цепи обратной связи в системах управления могут применяться для тех же целей, что и в ламповых усилителях. Усложнение заключается в том, что в сложных системах приходится иметь дело с более разнообразными звеньями (механическими и электромеханическими, помимо электрических и электронных). Кроме приведенных выше положений при синтезе регуляторов необходимо учитывать следующие факторы:

- *если в задающем воздействии присутствуют помехи, то используемые в САУ элементы не должны способствовать их существенному повышению;*
- *если ПФ системы включает только апериодические элементы, то обеспечение устойчивости или повышение демпфирования может быть достигнуто введением апериодического звена, постоянная времени которого значительно больше постоянных времени имеющихся апериодических звеньев [122];*

- введением форсирующего звена могут быть обеспечены устойчивость и необходимый запас устойчивости при любой ПФ исходной системы (если она становится структурно устойчивой). Одновременно увеличивается и быстродействие, однако при этом усиливается влияние помех [139];
- используется предположение, что наилучшие динамические характеристики система имеет, когда ближайшие к мнимой оси полюсы являются комплексно-сопряженными. Добавление третьего ближайшего к мнимой оси вещественного полюса обычно улучшает качество переходного процесса [124];
- как уже подчеркивалось, регулятор с отставанием по фазе влияет на характеристики системы в высокочастотной области аналогично коррекции путем уменьшения коэффициента усиления. Однако в области низких частот влияние регулятора сказывается не так сильно. Поэтому характеристики системы, обусловленные низкими частотами, практически не изменяются, тогда как запасы устойчивости значительно улучшаются (здесь предполагается, что

$$W_{\text{кн}}(s) = \frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2} \text{ и задачей синтеза является определение } \omega_1 \text{ и } \omega_2, \text{ обеспечивающих требуемые характеристики САУ, при этом } \omega_1 > \omega_2 \text{ [124];}$$

- если в ПФ $W_{\text{кн}}(s) = \frac{1 + s/\omega_1}{1 + s/\omega_2}$ и $\omega_1 < \omega_2$, то имеет место регулятор с опережением по фазе; синтез такого регулятора и его особенности рассмотрены в [124].

1.2.2.2. АНАЛИЗ ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК РЕГУЛЯТОРОВ

Кратко рассмотрим основные характеристики приведенных выше регуляторов, следуя [78].

С использованием П-регулятора комплексная частотная характеристика (КЧХ) разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(j\omega) = K W_o(j\omega). \quad (1.37)$$

При подключении к объекту П-регулятора КЧХ объекта увеличивается на каждой частоте пропорционально в K раз.

На рис. 1.38 приведены КЧХ разомкнутых систем с П-регулятором. При $K = 1$ КЧХ разомкнутой системы совпадает с КЧХ объекта регулирования. При $K > 1$ КЧХ разомкнутой устойчивой системы приближается к точке $B(-1, j0)$; при $K < 1$ КЧХ отходит от этой точки.

На рис. 1.38 в качестве примера изображены две КЧХ разомкнутой системы: при $K = K_1 = 1,5$ и при $K = K_2 = 0,5$.

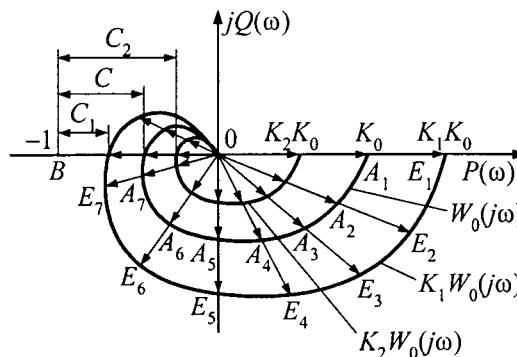


Рис. 1.38. Характер изменения КЧХ разомкнутой системы при изменении ее коэффициента

Выходной процесс в П-регуляторе описывается выражением

$$u(t) = K\varepsilon(t), \quad (1.38)$$

где $\varepsilon(t)$ — входное воздействие регулятора, $u(t)$ — управляющий сигнал, поступающий на объект управления. Как выше отмечалось, чрезмерное *увеличение запаса устойчивости C ухудшает качество регулирования*, так как при этом затягивается переходный процесс в системе (увеличивается время переходного процесса), увеличивается установившаяся ошибка.

С учетом сказанного для системы с П-регулятором существует некоторое оптимальное значение коэффициента его передачи K^* , которое и следует выбирать при настройке системы [78].

При использовании И-регулятора выходная величина $u(t)$ — команда управления, пропорциональна интегралу от входной величины $\varepsilon(t)$

$$u(t) = K_{\text{и}} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau. \quad (1.39)$$

Коэффициент передачи $K_{\text{и}}$ является параметром настройки И-регулятора, определяется формулой

$$W_{\text{кы}}(j\omega) = \frac{K_{\text{и}}}{\omega} e^{-j\pi/2}. \quad (1.40)$$

Комплексная частотная характеристика разомкнутой системы с И-регулятором имеет вид

$$W_{\text{р}}(j\omega) = \frac{K_{\text{и}}}{\omega} e^{-j\pi/2} W_0(j\omega). \quad (1.41)$$

Из (1.41) следует, что в системе с И-регулятором вектор КЧХ объекта на данной частоте увеличивается в $K_{\text{и}}/\omega$ раз и поворачивается по часовой стрелке на 90° .

В качестве примера на рис. 1.39 построена КЧХ разомкнутой системы с И-регулятором по КЧХ объекта управления.

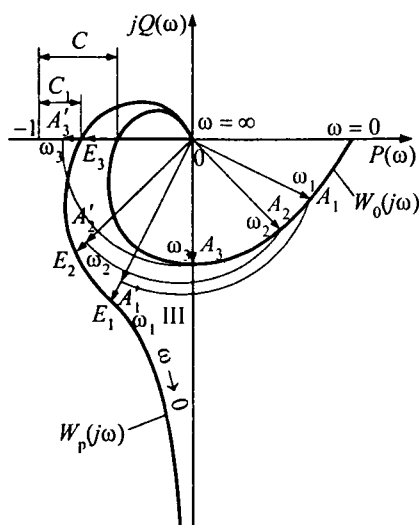


Рис. 1.39. Комплексные частотные характеристики объекта $W_0(j\omega)$ и разомкнутой САУ $W_{\text{р}}(j\omega)$ с И-регулятором

На рис. 1.39 каждый вектор разомкнутой системы связан с КЧХ выражением (1.41), например

$$OE_1 = \frac{K_n}{\omega_1} e^{-j\pi/2} OA_1. \quad (1.42)$$

Так как при $\omega \rightarrow 0$ отношение $K_n/\omega \rightarrow \infty$, то КЧХ разомкнутой системы с И-регулятором при $\omega \rightarrow 0$ уходит в бесконечность, асимптотически приближаясь в третьем квадранте к отрицательному направлению мнимой полуоси [78].

Основное назначение закона И-регулирования — ликвидация установившейся ошибки управления.

В качестве самостоятельных И-регуляторы применяются достаточно редко из-за медленного нарастания управляющего сигнала $U(t)$ при отклонении регулируемой переменной (при увеличении ошибки $\varepsilon(t)$).

Очень часто закон управления используется блоком или устройством, конструктивно являющимся составной частью регулятора, реализующего более сложный, например пропорционально-интегральный, закон управления.

Выше отмечалось о реализации законов управления, учитывающих производную от сигнала $\varepsilon(t)$.

Если П- и И-регуляторы не могут упреждать (прогнозировать) ожидаемые отклонения регулируемой величины, реагируя только на уже имеющиеся в данный момент нарушения технологического процесса, то с помощью введения производной возможен процесс прогнозирования при формировании управляющего сигнала, поступающего на объект управления.

Регулятор, использующий $\dot{\varepsilon}(t)$ (Д-регулятор), при большой скорости отклонения регулируемой величины (когда в начальный момент П-регулятор оказывает слабое управляющее воздействие на объект, а И-регулятор только начинает наращивать управляющее воздействие) оказывает существенное управляющее воздействие на объект, ликвидируя тем самым отклонение регулируемой величины (уменьшая ошибку $\varepsilon(t)$), причем чем больше возмущающее воздействие на объект (чем больше ошибка $\varepsilon(t)$), тем быстрее будет отклоняться управляемая величина от заданного значения и тем значительнее будет управляющее воздействие регулятора на объект, направленное на нейтрализацию возмущающего воздействия [78].

Реализация Д-регулятора в чистом виде практически неосуществима. В связи с этим в качестве Д-управляющих устройств используются дифференциаторы с передаточной функцией [78]

$$W_{\text{кд}}(s) = \frac{K_d T_d s}{T_d s + 1}. \quad (1.43)$$

Для комплексного использования преимуществ законов П- и И-регулирования в автоматических системах широко применяются регуляторы, формирующие законы как П-, так и И-регулирования одновременно. Такие регуляторы называются, как было сказано выше, пропорционально-интегральными, или сокращенно — ПИ-регуляторами.

На практике используются ПИ-регуляторы, имеющие ПФ вида

$$W_{\text{кп}}(s) = K + \frac{1}{T_n s} = K + \frac{K_n}{s} \quad (1.44)$$

— параллельное соединение П-регулятора и И-регулятора ($K_n = 1/T_n$; T_n называют постоянной времени интегрирования).

Если при настройке ПИ-регулятора установить очень большое значение постоянной времени T_n , то он превратится в П-регулятор.

Если при настройке регулятора установить очень малые значения k , то получим И-регулятор с коэффициентом передачи по скорости $1/T_n = K_n$.

Часто используются ПИ-регуляторы с ПФ [78]

$$W_{\text{кп}}(s) = \frac{K(T_{\text{из}}s + 1)}{T_{\text{из}}s}, \quad (1.45)$$

где $T_{\text{из}}$ — постоянная времени издрорма.

Переходная характеристика ПИ-регулятора с передаточной функцией (1.44) представлена на рис. 1.40 (прямая 1) [78].

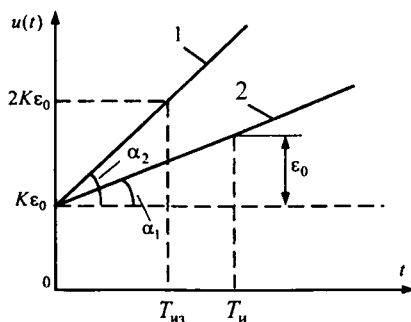


Рис. 1.40. Закон ПИ-управления регуляторов с передаточной функцией (1.44) (прямая 1) и с передаточной функцией (1.45) (прямая 2) при поступлении на вход постоянного сигнала ε_0 и при одинаковом значении коэффициента передачи K регуляторов

В (1.44) K и T_n — параметры настройки; в (1.44) имеют место взаимосвязанные параметры настройки статической и астатической частей по коэффициенту усиления K . Так, при настройке коэффициента усиления K будет изменяться и постоянная времени интегрирования:

$$T_n = T_{\text{из}} / K. \quad (1.46)$$

Постоянной времени издрорма регулятора с ПИ-законом регулирования называется время, в течение которого от действия интегральной (астатической) части регулятора удваивается пропорциональная (статическая) составляющая закона управления.

На рис. 1.41 приведены переходные характеристики в ПИ-регуляторах, выходной сигнал которых определяется зависимостями [78]

$$u(t) = K\varepsilon(t) + \frac{1}{T_n} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \quad (1.47)$$

и

$$u(t) = K \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T_{\text{из}}} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right). \quad (1.48)$$

Из рис. 1.41, а видно, что при законе ПИ-регулирования скорость нарастания интегральной составляющей на выходе регулятора при изменении K не изменяется. При законе ПИ-регулирования в случае изменения K пропорционально изменяется и скорость нарастания интегральной составляющей на выходе регулятора.

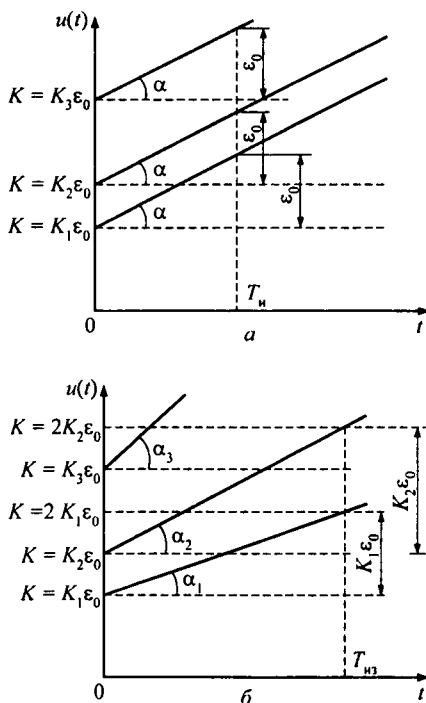


Рис. 1.41. Характер изменения законов ПИ-управления при различных постоянных значениях коэффициента усиления K регуляторов:
 a — для регуляторов с ПФ $W_{\text{кy}}(s) = K + \frac{1}{T_{\text{и}}s}$; b — для регуляторов с ПФ $W_{\text{кy}}(s) = \frac{K(T_{\text{нз}}s + 1)}{T_{\text{нз}}s}$

На практике нашли применение ПД-регуляторы с ПФ

$$W_{\text{кy}}(s) = K + K_{\text{д}}s, \quad (1.49)$$

а также с ПФ

$$W_{\text{кy}}(s) = K(1 + T_{\text{пв}}s), \quad (1.50)$$

где $T_{\text{пв}}$ — постоянная времени предвращения.

И, наконец, запишем ПФ ПИД-регуляторов [78]

$$W_{\text{кy}}(s) = K + \frac{1}{T_{\text{и}}s} + K_{\text{д}}s = K + \frac{K_{\text{и}}}{s} + K_{\text{д}}s$$

и

$$W_{\text{кy}}(s) = K \left(1 + \frac{1}{T_{\text{и}}s} + T_{\text{пв}}s \right) = K \left(1 + \frac{K_{\text{и}}}{s} + T_{\text{пв}}s \right)$$

— ПИД-регулятор с общим коэффициентом усиления для различных составляющих закона управления. При скачкообразном изменении регулируемой величины идеальный ПИД-регулятор в начальный момент времени оказывает мгновенное бесконечно большое воздействие на объект регулирования; затем величина воздействия мгновенно падает до значения, определяемого пропорциональной частью регулятора, после чего, как и в ПИ-регуляторе, постепенно начинает оказывать свое влияние астатическая часть регулятора.

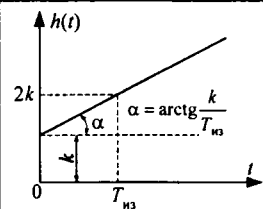
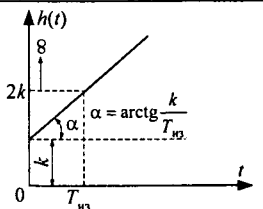
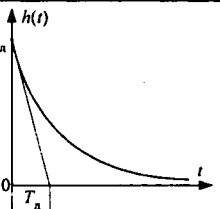
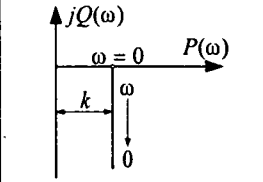
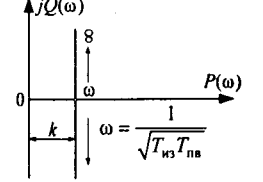
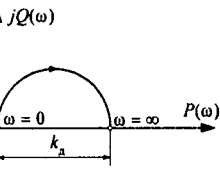
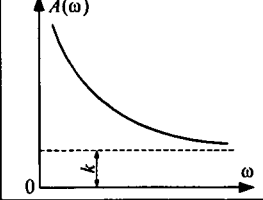
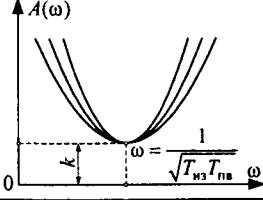
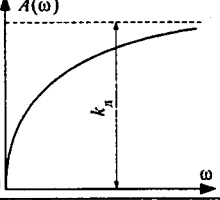
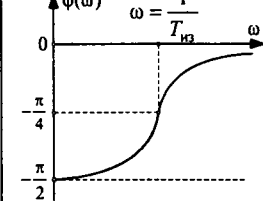
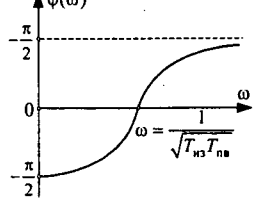
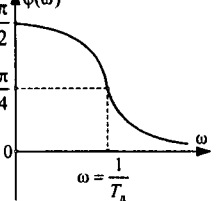
K , $T_{\text{и}}$ и $K_{\text{д}}$ — параметры настройки ПИД-регулятора.

ПИД-регулятор по своим возможностям является более универсальным по сравнению с другими регуляторами. С его помощью можно осуществлять различные законы управления.

Характеристики типовых ПИ-, ПИД-регуляторов и дифференциаторов приведены в табл. 1.1.

Таблица 1.1

Характеристики типовых ПИ-, ПИД-регуляторов и дифференциаторов

Вид характеристики	Характеристика регулятора типа		
	ПИ	ПИД	Дифференциатора
Уравнение	$y = k \left(x + \frac{1}{T_{\text{нз}}} \int_0^t x dt \right)$	$y = k \left(x + \frac{1}{T_{\text{нз}}} \int_0^t x dt + T_{\text{нв}} \frac{dx}{dt} \right)$	$T_{\text{д}} \frac{dy}{dt} + y = k_{\text{д}} T_{\text{д}} \frac{dx}{dt}$
Передаточная функция	$k \left(1 + \frac{1}{T_{\text{нз}} s} \right)$	$k \left(1 + \frac{1}{T_{\text{нз}} s} + T_{\text{нв}} s \right)$	$\frac{k_{\text{д}} T_{\text{д}} s}{T_{\text{д}} s + 1}$
Переходная характеристика $h(t)$			
КЧХ $W(j\omega)$			
АЧХ $A(\omega)$			
ФЧХ $\varphi(\omega)$			

1.2.2.3. ТЕХНИЧЕСКАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ [117].
ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ КОРРЕКТИРУЮЩИЕ УСТРОЙСТВА [117]

Пассивное интегрирующее звено. Передаточная функция звена имеет вид

$$W(s) = \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s}.$$

На рис. 1.42 изображена электрическая схема такого звена. Нетрудно видеть, что сопротивления делителя напряжения равны:

$$z_1(s) = R_1, \quad z_2(s) = R_2 + \frac{1}{sC}.$$

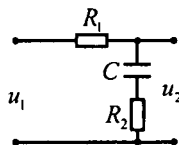


Рис. 1.42. Принципиальная схема

Отсюда находим

$$W(s) = \frac{z_2(s)}{z_1(s) + z_2(s)} = \frac{1 + R_2 C}{1 + (R_1 + R_2)Cs} = \frac{1 + T_2 s}{1 + T_1 s}, \quad (1.51)$$

где

$$T_1 = (R_1 + R_2)C \quad \text{и} \quad T_2 = R_2 C.$$

Амплитудная и фазовая характеристики изображены на рис. 1.43.

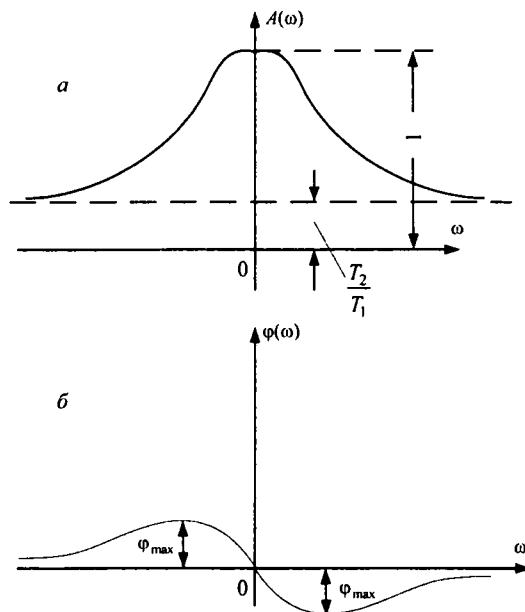


Рис. 1.43. АЧХ и ФЧХ звена (1.51)

Амплитудная характеристика показывает, что звено пропускает низкие частоты с коэффициентом передачи, близким к единице. При $\omega = 0$ имеем $A(\omega) = 1$. Высокие частоты подавляются звеном. При $\omega \rightarrow \infty$ получаем $A(\omega) \rightarrow T_2 / T_1$.

Звено вносит отрицательный фазовый сдвиг. При $\omega = 0$ и при $\omega \rightarrow \infty$ фазовый сдвиг равен нулю. Максимальный отрицательный фазовый сдвиг получается при частоте

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}.$$

Этот максимум равен

$$\psi_{\max} = -\arctg \frac{T_1 - T_2}{2\sqrt{T_1 T_2}}. \quad (1.52)$$

Пассивное дифференцирующее звено. Передаточная функция звена имеет вид

$$W(s) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1 + T_1 s}{1 + T_2 s} = G_0 \frac{1 + T_1 s}{1 + G_0 T_1 s}, \quad (1.53)$$

где $T_1 > T_2$ и $G_0 = T_2 / T_1$ — коэффициент передачи звена на нулевой частоте, т.е. в установившемся режиме.

На рис. 1.44 изображена электрическая схема такого звена.

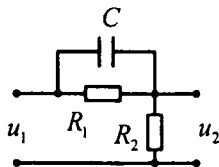


Рис. 1.44. Принципиальная схема

Амплитудная и фазовая характеристики изображены на рис. 1.45. Сравнение этих характеристик с характеристиками пассивного интегрирующего звена (см. рис. 1.43) показывает, что *дифференцирующее пассивное звено по своему действию противоположно интегрирующему*.

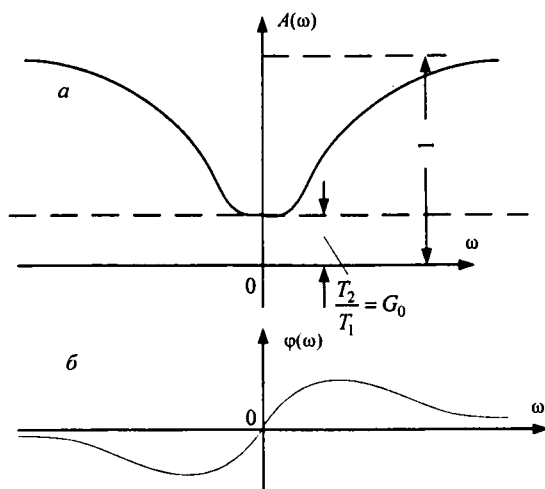


Рис. 1.45. Частотные характеристики

Пассивное дифференцирующее звено ослабляет нижние частоты. При $\omega = 0$ коэффициент передачи $G_0 = \frac{T_2}{T_1}$. Верхние частоты пропускаются лучше, чем нижние.

При $\omega \rightarrow \infty$ коэффициент передачи стремится к единице. Таким образом, это звено подавляет низкие частоты. Так как в конце концов важен относительный уровень пропускания различных частот, то про это звено можно также сказать, что оно подчеркивает высокие частоты по сравнению с низкими.

Важным свойством пассивного дифференцирующего звена является способность уменьшать постоянную времени какого-либо элемента системы управления в заданное число раз. Пусть, например, в системе управления имеется звено с передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{k_c}{1 + T_c s}.$$

Введем последовательно с этим звеном пассивное дифференцирующее звено с передаточной функцией (1.53).

При выполнении условия $T_1 = T_c$

$$W(s) = G_0 \frac{k_c}{1 + G_0 T_c s}.$$

Таким образом, постоянная времени звена T_c уменьшилась в $1/G_0$ раз. Однако во столько же раз оказался сниженным коэффициент передачи звена, что может потребовать введения дополнительного усилителя.

Пассивное интегро-дифференцирующее звено. Передаточная функция такого звена имеет вид

$$W(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + T_3 s)(1 + T_4 s)}, \quad (1.54)$$

причем

$$T_1 T_2 = T_3 T_4, \quad T_3 + T_4 > T_1 + T_2.$$

На рис. 1.46 изображена одна из возможных принципиальных схем интегро-дифференцирующего звена. Передаточную функцию этого звена можно представить так:

$$W(s) = \frac{z_2(s)}{z_1(s) + z_2(s)} = \frac{R_2 + \frac{1}{sC_2}}{\frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s} + R_2 + \frac{1}{sC_2}}.$$

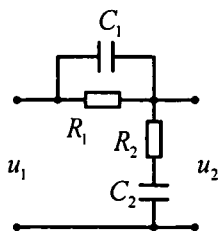


Рис. 1.46. Принципиальная схема

Вводя обозначения $R_1 C_1 = T_1$ и $R_2 C_2 = T_2$, можно преобразовать последнее выражение к виду

$$W(s) = \frac{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s) + \frac{R_1}{R_2} T_2 s}.$$

Амплитудная и фазовая характеристики изображены на рис. 1.47. Из амплитудной характеристики видно, что звено при частоте $\omega = 0$ и $\omega \rightarrow \infty$ имеет коэффициент передачи, равный единице. Подавление входного сигнала происходит в некоторой области средних частот.

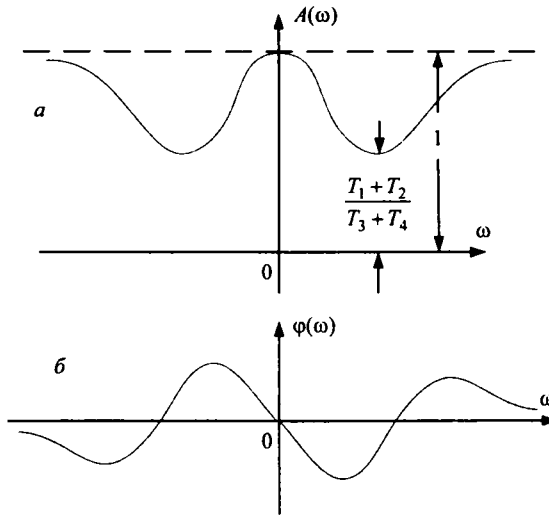


Рис. 1.47. Графики частотных характеристик

При частоте $\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}} = \frac{1}{\sqrt{T_3 T_4}}$ будет иметь место минимальное значение модуля передаточной функции

$$A_{\min} = \frac{T_1 + T_2}{T_3 + T_4}. \quad (1.55)$$

Фазовый сдвиг равен нулю при $\omega = 0, \omega = \omega_m$ и $\omega \rightarrow \infty$. В области низких частот ($\omega < \omega_m$) будет иметь место отрицательный фазовый сдвиг и в области высоких частот ($\omega > \omega_m$) — положительный фазовый сдвиг. Максимальные значения отрицательных и положительных фазовых сдвигов равны по абсолютной величине.

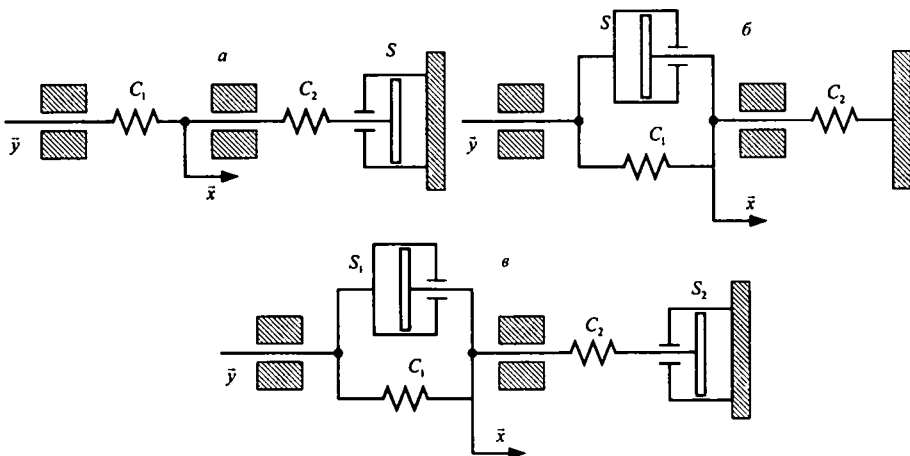


Рис. 1.48. Принципиальные схемы последовательных корректирующих устройств

Последовательные корректирующие звенья могут быть также построены на механических элементах. На рис. 1.48 изображены рассмотренные выше три основных типа

корректирующих звеньев: пассивное интегрирующее (рис. 1.48, а), пассивное дифференцирующее (рис. 1.48, б) и пассивное интегро-дифференцирующее (рис. 1.48, в). Эти звенья построены на базе использования пружин и демпферов. В качестве входной величины используется перемещение y и выходной — перемещение x [117].

Параллельные корректирующие звенья. Как уже отмечалось, *параллельные корректирующие звенья удобно применять при использовании сложных законов управления, когда наряду с основным сигналом вводятся его производные или интегралы.*

Введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой интеграторы, соответствует поднятию нижних частот. Введение параллельных корректирующих звеньев, представляющих собой дифференциаторы, соответствует поднятию верхних частот [117].

В качестве примера на рис. 1.49 изображен случай введения дополнительно к основному сигналу, пропорциональному углу поворота вала, сигналов, пропорциональных первой и второй производным угла поворота. Первый сигнал вырабатывается датчиком угла — потенциометром, второй — тахогенератором и третий — дифференцирующим трансформатором, на вход которого поступает напряжение тахогенератора [117].

На рис. 1.49, б приведена структурная схема рассматриваемого устройства. На ней обозначено: k_1 — коэффициент передачи потенциометра, k_2 — коэффициент передачи тахогенератора, k_3 и T — коэффициент передачи и постоянная времени дифференцирующего трансформатора.

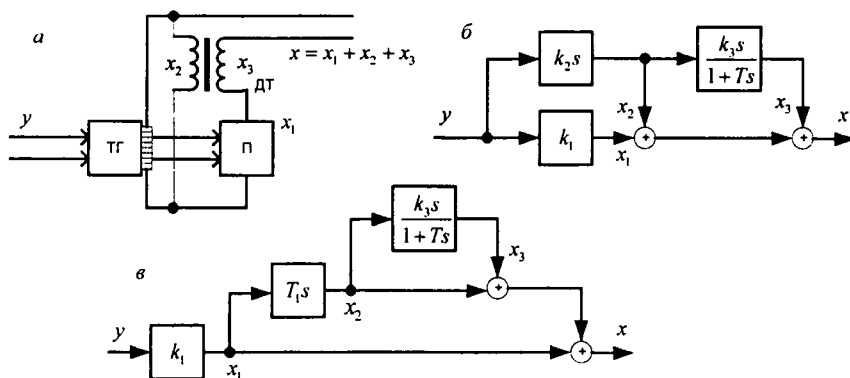


Рис. 1.49. Принципиальная и структурные схемы систем

Результирующая передаточная функция

$$W(s) = \frac{x}{y} = k_1 + k_2 s + \frac{k_2 k_3 s^2}{1 + Ts}. \quad (1.56)$$

Структурная схема может быть приведена к виду, изображенному на рис. 1.49, в, если в выражении (1.56) вынести за скобки множитель k_1 :

$$W(s) = k_1 \left(1 + T_1 s + \frac{k_3 T_1 s^2}{1 + Ts} \right), \quad (1.57)$$

где $T_1 = \frac{k_2}{k_1}$.

Рассмотрим также в общем виде (на примере изодрома, рис. 1.50) параллельные корректирующие устройства $W_{\text{к}}(s)$. Изодромное КУ представляет собой параллель-

ное соединение двух звеньев — интегратора и усилителя, на входы которых поступает сигнал $y(t)$. Сигнал на выходе изодромного КУ

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t),$$

а передаточная функция

$$W_{\text{издр}}(s) = \frac{k_n}{s} + k = k_n \frac{Ts + 1}{s}, \quad T = \frac{k}{k_n}. \quad (1.58)$$

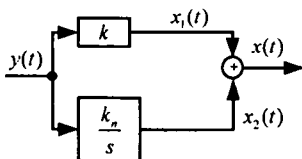


Рис. 1.50. Изодромное корректирующее устройство

Как, видно из выражения (1.58), изодромное КУ обладает свойствами интегратора и форсирующего звена в интервале частот, примыкающих к $\omega = 1/T$. Техническая реализация изодрома может быть выполнена на аналоговых микросхемах. Параллельные КУ широко применяют для повышения устойчивости различных промышленных САР.

1.3. ОБРАТНЫЕ СВЯЗИ [117, 124]

В динамическом отношении отрицательные обратные связи могут оказывать самое различное действие. Можно наметить три основных вида отрицательных обратных связей [117]:

- 1) *обратные связи, подавляющие высокие частоты* (аналоги пассивного последовательного интегрирующего звена);
- 2) *обратные связи, подавляющие низкие частоты* (аналоги пассивного последовательного дифференцирующего звена);
- 3) *обратные связи, подавляющие средние частоты* (аналоги пассивного последовательного интегро-дифференцирующего звена).

В табл. 1.2 приведены наиболее распространенные случаи перехода от электрических последовательных корректирующих звеньев к электрическим обратным связям. Эта таблица может быть использована также для перехода от последовательных звеньев к обратным связям любого типа (неэлектрическим), так как она позволяет по передаточной функции последовательного звена определить передаточную функцию эквивалентной отрицательной обратной связи [117].

Примером технической реализации задачи синтеза корректирующих обратных связей является схема коррекции с тахометрической обратной связью [117]. Последнюю обычно применяют в позиционных следящих системах для демпфирования колебаний.

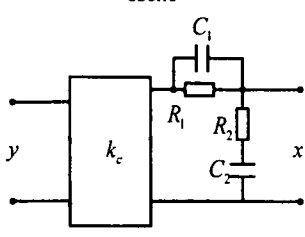
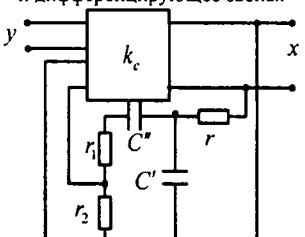
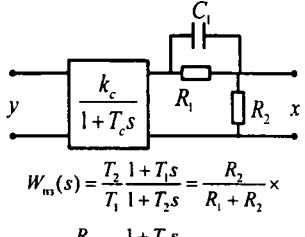
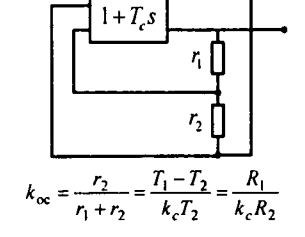
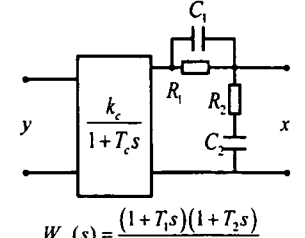
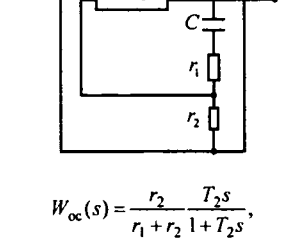
На рис. 1.51, а показана КОС, состоящая из тахогенератора ТГ, механически связанного с валом исполнительного электродвигателя, и пассивного однозвенного RC -контура (RC -фильтра). Передаточная функция этого устройства

$$Z(s) = \frac{kTs^2}{1 + Ts}.$$

Вместо однозвенного может быть применен двухзвенный RC -контур (рис. 1.51, б). Тогда передаточная функция корректирующего устройства имеет вид

$$Z(s) = \frac{ks^2}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}.$$

Продолжение табл. 1.2

1	2	3	4	5
4	Безынерционный усилитель	Интегро-дифференцирующее звено  $W_m(s) = \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_3s)(1+T_4s)},$ $T_1 = R_1C_1, T_2 = R_2C_2, T_1T_2 = T_3T_4,$ $T_3 + T_4 = T_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2$	Апериодическое и дифференцирующее звенья  $W_{oc}(s) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{T_2s}{(1+T_1s)(1+T_2s)},$ $\frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{R_1}{k_c R_2}, rC' \approx T_1,$ $(r_1 + r_2)C' \approx T_2$	Подавление средних частот
5	Безынерционный усилитель, $W_c(s) = \frac{k_c}{1+T_c s}$	Пассивное дифференцирующее звено (частный случай, когда $T_1 = T_c$)  $W_m(s) = \frac{T_2}{T_1} \frac{1+T_1s}{1+T_2s} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \times$ $\times \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1+T_1s}{1+T_2s} (T_1 > T_2),$ $T_1 = R_1C_1 = T_c, T_2 = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} C_1$	Делитель напряжения  $k_{oc} = \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{T_1 - T_2}{k_c T_2} = \frac{R_1}{k_c R_2}$	Подавление низких частот
6	То же	Интегро-дифференцирующее звено (частный случай, когда $T_1 = T_c$)  $W_m(s) = \frac{(1+T_1s)(1+T_2s)}{(1+T_3s)(1+T_4s)},$ $T_1 = R_1C_1 = T_c, T_2 = R_2C_2,$ $T_1T_2 = T_3T_4,$ $T_3 + T_4 = T_1 + \frac{R_1 + R_2}{R_2} T_2$	Дифференцирующее звено  $W_{oc}(s) = \frac{r_2}{r_1 + r_2} \frac{T_2s}{1+T_2s},$ $(r_1 + r_2)C = T_2, \frac{r_2}{r_1 + r_2} = \frac{R_1}{k_c R_2}$	Подавление средних частот

На рис. 1.52 приведена схема КУ с мостовой тахометрической обратной связью. Если мост сбалансирован, то напряжение на выходе пропорционально угловой скорости вращения электродвигателя; если мост не сбалансирован, то напряжение на выходе пропорционально угловой скорости и ускорению.

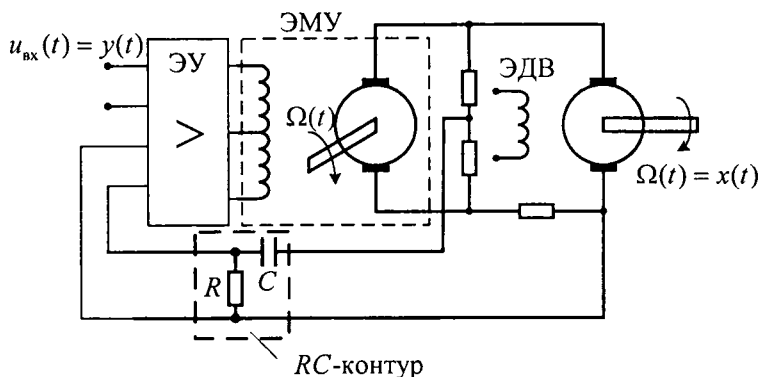


Рис. 1.52. Корректирующее устройство в виде мостовой тахометрической обратной связи:
 ЭУ — электронный усилитель; ЭМУ — электромашинный усилитель;
 ЭДВ — электродвигатель постоянного тока

1.4. ОБЩИЕ ПОДХОДЫ И ПРИНЦИПЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ РАСЧЁТА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРОВ

Далее будем полагать, что структура и изменяемые параметры регулятора известны. Можно указать *два принципиально разных подхода к решению задачи расчёта численных значений параметров регулятора*.

Ключевое положение первого подхода заключается в том, что структура и численные значения параметров регулятора (последовательного или параллельного) определяются точно, если заданы эталонная ПФ $W^3(s)$ и ПФ объекта управления (в первом подходе структура регулятора полагается также неизвестной). При использовании первого подхода для решения конкретных, иногда достаточно сложных инженерных задач важным является учёт следующих обстоятельств.

Теоретическое положение, приводящее к точному решению задачи, является очевидным: поскольку известны $W^3(s)$ и $W_o(s)$, то, пользуясь аппаратом структурных преобразований, достаточно просто получить формальное решение задачи. Например, далее будет рассмотрена система, структурная схема которой представлена на рис. 1.53.

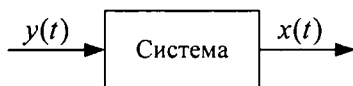


Рис. 1.53. Структурная схема системы

ПФ регулятора, полностью определяющая его структуру и параметры, имеет вид

$$W_{\text{кy}}(s) = W_o^{-1}(s) \frac{W^3(s)}{(1 - W^3(s))}. \quad (1.59)$$

Поскольку $W_o(s)$ и $W^3(s)$ известны, то с помощью элементарных операций определяется ПФ $W_{ку}(s)$, т.е. известными являются порядок полиномов числителя и знаменателя $W_{ку}(s)$ и численные значения их коэффициентов. Так как проектируемая САУ должна отвечать динамическим, энергетическим и эксплуатационным требованиям, то на первом этапе её проектирования выбираются функционально необходимые элементы, источники энергии, исполнительные органы, усилительные устройства, измерительные системы, включая и объект управления, которыми определяются вес, габариты, надёжность и стоимость системы. Каждый из указанных элементов характеризуется своими динамическими свойствами, определяемыми их математическими моделями, например ПФ, и является звеном структурной схемы системы. Часто системы обладают большой сложностью и включают в качестве элементов такие технические устройства, как радиолокаторы, ракеты, вычислительные машины, каналы связи и др. (см. главу 6).

Регулятор системы, определяемый с помощью структурных преобразований, должен обеспечить, например, необходимый порядок астатизма, заданную величину перерегулирования (выброса), полосу пропускания, коэффициенты ошибок, не превышающие заданных величин, допустимые значения скорости и ускорения управляемых переменных и др.

Реализация рассматриваемого подхода даёт, как уже говорилось выше, точное формальное решение задачи, но при этом очевидным являются факторы:

- *регулятор должен обладать большими возможностями, чтобы компенсировать влияние динамических свойств всех элементов системы* (например, физическим выражением этих свойств может являться та или иная степень инерционности; инерционность и достаточно большой коэффициент усиления могут привести систему в неработоспособное состояние, т.е. система может оказаться неустойчивой) *и обеспечить точное равенство ПФ скорректированной системы эталонной ПФ $W^3(s)$* ;
- *ввиду чрезвычайно сложной задачи, решаемой регулятором, можно говорить о его большой сложности и физической нереализуемости* (или трудной физической реализуемости);
- *включение синтезированного регулятора в структуру системы может привести к появлению новых свойств замкнутой САУ* (например, система может оказаться неустойчивой и не обладать свойством грубости и др.).

В связи со сказанным выше использование первого подхода требует проведения исследований в каждом конкретном случае.

Основная идея второго подхода состоит в обеспечении приближённого равенства эталонной и реальной ПФ замкнутой САУ.

При реализации этого подхода можно использовать положения, изложенные в п. 1.1, для решения одной из самых ответственных задач — *предварительного определения структуры физически реализуемого регулятора и его изменяемых параметров* (при втором подходе структуру регулятора определяет проектировщик, исходя из необходимости выполнения известных условий).

На этом этапе можно рассматривать, например, возможность включения в структуру системы вместо одного сложного регулятора несколько простых корректирующих устройств, включённых параллельно, техническая реализация которых на пассивных элементах не сложна [122].

Реализация некоторых регуляторов на пассивных элементах может привести к неоправданному увеличению его веса и габаритов, что особенно заметно в случае маломощных объектов. Вес и габариты таких корректирующих устройств мож-

но уменьшить путём построения их на активных элементах с соблюдением условий физической реализуемости [110].

Выбором параметров таких корректирующих устройств, имеющих обратные связи, можно обеспечить заданные динамические свойства системы, причём вес и габариты устройств будут значительно меньше веса и габаритов корректирующего устройства на пассивных элементах.

Таким образом, при использовании второго подхода требование точного равенства ПФ скорректированной системы и $W^3(s)$ снимается. Естественно, что и динамические характеристики таким образом скорректированной системы будут близки к эталонным, но не равны им. При этом принципиально упрощается структура регулятора и появляется возможность творческого подхода при определении его рациональной структуры.

Например, ранее были рассмотрены положения, позволяющие выбрать такую наиболее простую, с точки зрения физической реализации, структуру регулятора, которая обеспечивает устойчивость системы и необходимое качество управления в переходном и установившемся режимах. Регуляторы относятся к изменяемым элементам системы, поскольку их параметры можно менять с целью изменения динамических свойств автоматической системы в нужном направлении.

Выбор структуры регулятора — это первый этап решения задачи, и он часто носит качественный характер, при этом широко используется опыт проектировщика по разработке аналогичных сложных систем.

Второй этап — расчёт численных значений параметров регулятора при его разумно выбранной структуре, обеспечивающей выполнение ТТТ, оказывается почти всегда более трудным, поскольку в алгоритме расчёта при условии, что структура регулятора обладает соответствующими возможностями, необходимо учитывать вид и число показателей, характеризующих качество работы системы, степень их противоречивости, наличие аналитических выражений, связывающих указанные показатели с параметрами и структурой регулятора, и др.

Наиболее конструктивный путь расчёта параметров регулятора с учётом большого числа ограничений — это использование методов нелинейного программирования.

Рассмотрим скалярную систему или её элемент (рис. 1.53).

Как правило, поведение системы управления описывается скалярным дифференциальным уравнением, например, вида (здесь при рассмотрении поставленной задачи расширим класс систем, включая в этот класс нестационарные и в некоторых случаях нелинейные системы):

$$\sum_v^n a_v(t) x^{(v)} = \sum_v^m b_v(t) y^{(v)}. \quad (1.60)$$

Обозначим

$$\sum_v^n a_v(t) \frac{d^v}{dt^v} = L_x; \quad \sum_v^m b_v(t) \frac{d^v}{dt^v} = L_y. \quad (1.61)$$

Тогда (1.60) запишется в форме

$$L_x x = L_y y; \quad (1.62)$$

отсюда следуют зависимости

$$L_y^{-1} L_x x = y \quad \text{и} \quad L_x^{-1} L_y y = x,$$

или, что то же самое,

$$Lx = y \quad \text{и} \quad x = Ay. \quad (1.63)$$

Первая из зависимостей называется операторным уравнением системы (уравнение с оператором L), второе — операторным соотношением.

Очевидно, что

$$A = L^{-1}.$$

Пример. Линейная нестационарная система описывается уравнением

$$\sum_{v=0}^n a_v(t) x^{(v)} = y, \text{ или } Lx = y,$$

где $L = \sum_{v=0}^n a_v(t) \frac{d^v}{dt^v}$ — линейный дифференциальный оператор.

Именно в такой форме, т.е. в форме операторных уравнений (дифференциальных, интегральных, дифференциально-интегральных и др.), задается математическое описание системы.

Очевидно,

$$x(t) = L^{-1}y = \int_0^t k(t, \tau) y(\tau) d\tau = Ay \quad (1.64)$$

— формула Коши, операторное уравнение, где $L^{-1} = A$ — обратный оператор уравнения системы, $k(t, \tau)$ — ядро Коши.

Такая форма, т.е. форма, использующая обратный оператор $L^{-1} = A$, находит применение в задачах анализа и синтеза.

Здесь необходимо указать, что задание оператора A равносильно построению решения исходного уравнения системы, например (1.60). Это весьма сложная проблема (за исключением простейших случаев). Например, как указывалось выше, нахождение ядра Коши в общем случае возможно только численным методом.

Однако в теории управления часто используется именно операторное соотношение

$$x(t) = Ay(t),$$

причём A называется оператором системы (или звена). Он определяет соответствие между входным $y(t)$ и выходным $x(t)$ сигналами системы управления (каждому элементу $y(t)$ из множества Y входных сигналов $[y(t) \in Y]$ ставится в соответствие единственный, вполне определённый элемент $x(t)$ из множества X выходных сигналов $[x(t) \in X]$).

На структурных схемах используется следующее обозначение (рис. 1.54).

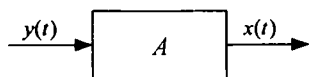


Рис. 1.54. Структурная схема системы с оператором A

Далее проведём обсуждение задачи синтеза регуляторов в терминах, использующих понятие оператора системы A в указанном выше смысле.

Рассмотрим систему (рис. 1.55).

На структурной схеме использованы обозначения: A_0 — оператор неизменяемой части системы (объекта управления), $A_{\text{кy}}$ — оператор регулятора, A_z — эталонный оператор замкнутой системы.

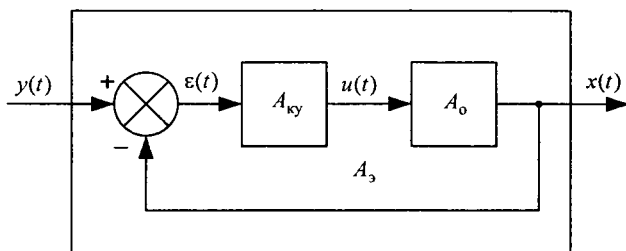


Рис. 1.55. Структурная схема системы

Далее будут использованы положения операторной алгебры, в соответствии с которой имеют место следующие действия:

- 1) сложение операторов, $A + B = C$;
- 2) умножение операторов, $AB = C$;
- 3) умножение оператора на скаляр, $Ak = B$ или $kA = B$.

Кроме этого, справедливы правила:

- 1) операция сложения коммутативна, $A + B = B + A$;
- 2) операция сложения и умножения ассоциативны, $A + (B + C) = (A + B) + C$ и $A(BC) = (AB)C$;
- 3) операция умножения не коммутативна, $AB \neq BA$.

Для системы (рис. 1.55) справедливы зависимости

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t), \quad x(t) = A_0 u(t), \quad u(t) = A_{\text{кy}} \varepsilon(t). \quad (1.65)$$

Из этих формул имеем

$$x(t) = A_0 A_{\text{кy}} \varepsilon(t),$$

или

$$x(t) = A_p \varepsilon(t), \quad (1.66)$$

где $A_p = A_0 A_{\text{кy}}$ — оператор разомкнутой системы.

Имеет место соотношение $\varepsilon(t) = y(t) - A_0 A_{\text{кy}} \varepsilon(t)$, и, следовательно,

$$\varepsilon(t) + A_0 A_{\text{кy}} \varepsilon(t) = (I + A_0 A_{\text{кy}}) \varepsilon(t) = y(t).$$

Отсюда находим

$$\varepsilon(t) = (I + A_0 A_{\text{кy}})^{-1} y(t).$$

Поскольку

$$x(t) = A_0 A_{\text{кy}} \varepsilon(t) = A_0 A_{\text{кy}} (I + A_0 A_{\text{кy}})^{-1} y(t), \quad (1.67)$$

то оператор замкнутой системы определяется формулой

$$A = A_0 A_{\text{кy}} (I + A_0 A_{\text{кy}})^{-1}. \quad (1.68)$$

Если предположить, что все линейные элементы, входящие в систему (рис. 1.55), нестационарны, то формулы (1.66), (1.67) и (1.68) можно записать через интегральные операторы Вольтерра:

$$x(t) = \int_0^t k_o(t, \tau) u(\tau) d\tau, \quad u(t) = \int_0^t k_{\text{кy}}(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau, \quad x(t) = \int_0^t k_p(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau$$

и

$$x(t) = A_o A_{\text{кy}} (I + A_o A_{\text{кy}})^{-1} y(t) = \int_0^t k(t, \tau) y(\tau) d\tau. \quad (1.69)$$

Из (1.63) следует

$$Lx = A^{-1}x = (I + A_o A_{\text{кy}}) A_{\text{кy}}^{-1} A_o^{-1} x(t) = y(t) \quad (1.70)$$

— операторное уравнение замкнутой системы, представленной на рис. 1.55.

Формулы (1.69) и (1.70) являются основными при проведении дальнейших рассуждений.

Изложим несколько общих принципов, связанных с решением задачи расчёта параметров регуляторов, не забывая при этом, что синтез является сложной и ответственной стадией проектирования системы. Напомним, что дальнейшее рассмотрение задачи направлено на разработку процедуры, позволяющей определить параметры регулятора из условия удовлетворения заданному комплексу требований (ТТТ).

Первый принцип (он реализует первый подход, рассмотренный выше), на основе теоретических положений которого разработана первая группа методов, состоит в следующем.

В его основе лежит условие точного равенства оператора замкнутой системы эталонному оператору A^3 . Как уже указывалось ранее, для класса стационарных систем в 1940 году В.С. Кулебакин впервые разделил задачу синтеза скалярных систем на два этапа:

- выбор эталонной ПФ, удовлетворяющей поставленным техническим требованиям;
- определение параметров элементов, входящих в систему управления, из условия равенства эталонной и реальной ПФ.

Далее используется именно этот подход, при этом в структуру системы вводится дополнительный элемент — корректирующее устройство, назначение которого — приведение динамических характеристик замкнутой системы к равенству некоторому эталону.

В операторных терминах задача формулируется так:

- 1) нахождение эталонного оператора A^3 ;
- 2) нахождение оператора регулятора, обеспечивающего равенство эталонного и реального операторов динамической системы.

Имеем

$$A(I + A_o A_{\text{кy}}) = A + A A_o A_{\text{кy}} = A_o A_{\text{кy}}.$$

Из последней зависимости следует

$$A = A_o A_{\text{кy}} - A A_o A_{\text{кy}} = (A_o - A A_o) A_{\text{кy}} = (I - A) A_o A_{\text{кy}}.$$

Отсюда находим

$$A_{\text{кy}} = [(I - A) A_o]^{-1} A = A_o^{-1} (I - A)^{-1} A.$$

Поскольку оператор замкнутой системы должен равняться эталонному оператору, т.е. $A = A^3$, то окончательная формула, определяющая оператор регулятора, запишется так:

$$A_{\text{кy}} = A_o^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3. \quad (1.71)$$

В последней формуле A^3 и A_o известны, поэтому принципиально возможен расчёт оператора $A_{\text{кy}}$, при этом определяются структура регулятора и численные значения его параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$.

Проверим анализ основной формулы (1.71). Из неё следует, что синтез регулятора в соответствии с рассматриваемым принципом предполагает компенсацию динамики объекта; процесс компенсации иллюстрирует рис. 1.56.

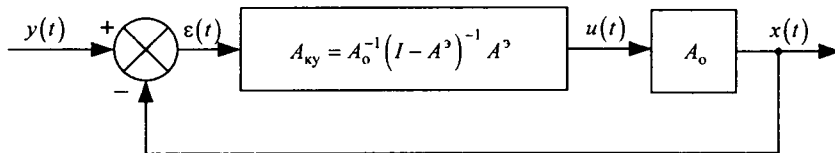


Рис. 1.56. Структурная схема скорректированной системы

Из рассмотрения схемы (рис. 1.56) можно записать

$$u(t) = \left[A_o^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3 \right] \varepsilon(t), \quad (1.72)$$

$$x(t) = A_o u(t) = \left[A_o A^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3 \right] \varepsilon(t) = A_o A_{кy} \varepsilon(t). \quad (1.73)$$

Поскольку оператор разомкнутой системы определяется формулой

$$A_p = A_o A_o^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3, \quad (1.74)$$

то из последней зависимости следует, что равенство оператора замкнутой системы эталонному оператору обеспечивается компенсацией влияния на A^3 оператора объекта A_o за счёт наличия обратного оператора A_o^{-1} .

Вообще говоря, такой результат не является неожиданным. Если, например, входной сигнал элемента $y(t)$ подвергается искажению в результате прохождения через элемент с оператором A , то восстановление первоначальной формы $y(t)$ этого сигнала может быть достигнуто с помощью динамической системы, каскадно соединённой с первой системой, как это показано на рис. 1.57, и имеющей оператор A^{-1} . В рассматриваемом выше методе данный подход используется для полной нейтрализации влияния динамических характеристик объекта на оператор замкнутой системы.

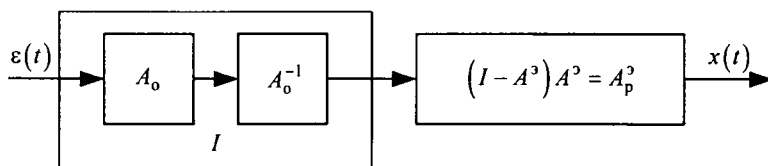


Рис. 1.57. К пояснению принципа компенсации

Принцип, содержание которого изложено выше, получил название **принципа динамической компенсации**.

Из формулы (1.74) следует, что основным содержанием принципа динамической компенсации является возможность не учитывать динамику объекта при синтезе регулятора.

Формально зависимость, определяющая $A_{кy}$, даёт точное решение задачи синтеза регулятора. В большинстве же случаев физически элемент с оператором $A_{кy}$ реализовать не удастся (тем более даже из физических соображений ясно, что математиче-

ские модели объектов задаются приближённо и сколь-нибудь точная компенсация динамики объекта труднодостижима. При расчёте мы вынуждены опираться лишь на соответствующие оценки. Любая же погрешность, несоответствие оценки и реальных значений могут привести к синтезу неработоспособной системы).

Важным является следующее положение: **содержание большого числа инженерных методов синтеза регуляторов сводится к той или другой форме аппроксимации соотношения**

$$A_{\text{кы}} = A_o^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3,$$

но не его точной реализации.

Такая аппроксимация направлена на:

- 1) *упрощения структуры регулятора;*
- 2) *возможность получения физически реализуемых элементов;*
- 3) *обеспечение устойчивости замкнутой системы;*
- 4) *повышение свойства грубости* (синтезированная система не обладает свойством грубости и является практически неработоспособной).

Вместе с тем необходимо помнить, что *многие используемые методы в неявной форме реализуют метод динамической компенсации.*

Второй принцип, на основе теоретических положений которого разработана вторая группа методов, состоит в следующем. *В основе решения задачи расчёта параметров регулятора лежит условие: наилучшее, в известном смысле, приближение за счёт выбора параметров регулятора реакции системы на заданное воздействие (например, $y(t) = 1(t)$) к некоторому эталону.*

В основе реализации этого принципа лежит аппарат нелинейного программирования.

Основное содержание этого принципа состоит в следующем: задаётся оператор регулятора, зависящий от параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$, т.е. $A_{\text{кы}}(p_1, p_2, \dots, p_r)$; задаются эталонное воздействие $y_3(t)$ и эталонная реакция на это воздействие $x_3(t)$. Проблема синтеза состоит в подборе таких значений параметров $p_1^*, p_2^*, \dots, p_r^*$, которые обеспечили бы близость, в известном смысле, реального выходного сигнала $x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)$ и эталона $x_3(t)$.

Обсудим этот подход; положим, что мерой близости выбрана метрика пространства $C[0, T]$. Тогда задача формулируется так:

$$I_1(p_1, p_2, \dots, p_r) = \max_{0 \leq t \leq T} |x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) - x_3(t)| \rightarrow \min_{p_i, i=1, r}. \quad (1.75)$$

Если же воспользоваться метрикой пространства $L^2[0, T]$, то

$$I_2(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^T [x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) - x_3(t)]^2 dt \rightarrow \min_{p_i, i=1, r}. \quad (1.76)$$

В функционалы I_1 и I_2 входит функция $x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)$. При проектировании же систем управления известным является уравнение системы

$$\begin{aligned} L(p_1, p_2, \dots, p_r) x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) &= \\ &= A^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = \\ &= \left[(I + A_o A_{\text{кы}}(p_1, p_2, \dots, p_r)) A_{\text{кы}}^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) A_o^{-1} \right] \times \\ &\times x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = y_3(t). \end{aligned} \quad (1.77)$$

Например, для класса линейных нестационарных систем методом уравнивающих операторов можно найти дифференциальное уравнение вида

$$\sum_{v=0}^n a_v(t, p_1, p_2, \dots, p_r) x_p^{(v)}(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = \sum_{v=0}^m b_v(t, p_1, p_2, \dots, p_r) y_p^{(v)}(t), \quad a_n(t) \equiv 1, \quad (1.78)$$

где $y_0(t)$ — эталонный входной сигнал, $x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)$ — реальный выходной сигнал, зависящий от параметров регулятора.

Для реализации процедур минимизации (1.75) и (1.76) необходимо знать формулу, определяющую реальный выходной сигнал, явно зависящий от параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$, т.е. необходимо иметь зависимость вида

$$x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = L^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) y_3(t) = A_0 A_{ky}(p_1, p_2, \dots, p_r) (I + A_0 A_{ky}(p_1, p_2, \dots, p_r))^{-1} y_3(t)$$

— решение уравнения (1.78), где $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$ — оператор замкнутой системы, зависящий от параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$ регулятора (в этих рассуждениях можно полагать, что $L(p_1, p_2, \dots, p_r)$ — как линейный, так и нелинейный оператор).

Тогда функционал (1.76), который далее будет широко использоваться, принимает вид

$$I_2(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^T \left\{ \left[A_0 A_{ky}(p_1, p_2, \dots, p_r) (I + A_0 A_{ky}(p_1, p_2, \dots, p_r))^{-1} \right] \times \right. \\ \left. \times \{ y_3(t) - x_3(t) \}^2 \right\} dt \rightarrow \min_{p_i, i=1, r}.$$

Полученная зависимость позволяет сделать следующий вывод: для реализации рассматриваемого принципа необходимо знать обратный оператор замкнутой системы, явно зависящий от параметров регулятора. Это — чрезвычайно сложная задача, решение которой возможно лишь в исключительно простых случаях. Реализация такого принципа возможна при использовании численных методов решения дифференциальных уравнений.

Третий принцип, на основе теоретических положений которого разработана третья группа методов, состоит в том, что в основе решения задачи лежит условие: достижение приближённого, в известном смысле (например, в $L^2[0, T]$ или $C[0, T]$), равенства правой и левой частей операторного уравнения замкнутой системы за счёт выбора параметров регулятора.

Содержание этого принципа состоит в следующем. Пусть $y_3(t)$ — заданное (эталонное) воздействие, $x_3(t)$ — желаемая реакция; тогда имеет место зависимость

$$\underbrace{(I + A_0 A_{ky}(p_1, p_2, \dots, p_r)) A_{ky}^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) A_0^{-1} x_3(t)}_{x(t, p_1, p_2, \dots, p_r)} \approx \underbrace{y_3(t)}_{y(t)}. \quad (1.79)$$

В более общем виде последнее уравнение системы можно записать так (оно всегда известно):

$$\underbrace{L(p_1, p_2, \dots, p_r) x_3(t)}_{x(t, p_1, p_2, \dots, p_r)} \approx \underbrace{y_3(t)}_{y(t)}.$$

В последних формулах стоит знак приближённого равенства. В идеальном случае, правильно подобрав структуру и значения параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$, мы при подстановке в операторное уравнение скорректированной системы эталонного воздействия $y_3(t)$ и желаемой реакции $x_3(t)$ получили бы тождество, т.е. $x_3(t)$ был бы решением операторного уравнения системы при правой части $y_3(t)$. Идеальный же подбор регулятора в общем случае невозможен, поэтому имеет место невязка

$$E(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = x(t, p_1, p_2, \dots, p_r) - y(t, p_1, p_2, \dots, p_r). \quad (1.80)$$

На основе невязки можно построить соответствующие функционалы и сформулировать задачу синтеза регулятора так:

$$I_3(p_1, p_2, \dots, p_r) = \max_{0 \leq t \leq T} |E(t, p_1, p_2, \dots, p_r)| \rightarrow \min_{p_i, i=1, r}; \quad (1.81)$$

$$I_4(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^T E^2(t, p_1, p_2, \dots, p_r) dt \rightarrow \min_{p_i, i=1, r} \quad (1.82)$$

— при соответствующих ограничениях, связанных с устойчивостью и качеством работы системы.

Достоинство последнего подхода состоит в том, что он не требует нахождения обратного оператора $L^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r)$. Это — принципиальное упрощение задачи.

Этот подход можно применить к широкому классу систем, включая линейные нестационарные и нелинейные системы, системы с запаздыванием и т.д. Как и в предыдущем случае, аппарат нелинейного программирования является основным инструментом реализации этого принципа.

Пример. Если методом уравнивающих операторов с учётом наличия регулятора с изменяемыми параметрами $p_1, p_2, \dots, p_r$ найдено дифференциальное уравнение нестационарной линейной системы (1.78), то легко записать эквивалентное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} x_3(t) + \underbrace{\int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[a_k(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r)(t-\tau)^{n-1} \right] \right\} x_3(\tau) d\tau}_{x(t, p_1, p_2, \dots, p_r)} \\ \approx \underbrace{\int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[b_k(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r)(t-\tau)^{n-1} \right] \right\} y_3(\tau) d\tau}_{y(t, p_1, p_2, \dots, p_r)}. \end{aligned}$$

Задача расчёта параметров регулятора сводится к реализации (1.81) или (1.82), при этом ввиду сложности ограничений, имеющих место на практике, при решении задачи нелинейного программирования может быть использована процедура численного направленного поиска, например процедура случайного поиска.

Пример. Положим, что нелинейная система, включающая регулятор с параметрами $p_1, p_2, \dots, p_r$, описывается векторно-матричным уравнением

$$\dot{X} = f(X, Y, P), \quad (1.83)$$

где X — n -мерный вектор состояния; Y — m -мерный входной вектор; f — n -мерный вектор, описывающий динамику объекта; P — r -мерный вектор неиз-

вестных параметров регулятора. Поскольку X и Y известны, то для расчёта параметров регулятора составляют функцию ошибки

$$\dot{X} - f(X, Y, P) = E(t, p_1, p_2, \dots, p_r).$$

Требуется найти значения неизвестного вектора параметров P так, чтобы критерий

$$I(P) = \int_0^T \|\dot{X} - f(X, Y, P)\| dt \rightarrow \min_P,$$

т.е. имел минимум по P на интервале $(0, T)$. Необходимое условие минимума

$$\nabla_P I(P) \Big|_{P=P^*} = 0$$

принимает в данном случае вид

$$\int_0^T \frac{\partial f}{\partial P} \dot{X} dt = \int_0^T \frac{\partial f}{\partial P} f(X, Y, P) dt,$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial P} = \left[\frac{\partial f_i}{\partial p_j} \right] = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial p_r} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial p_r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial p_r} \end{bmatrix}.$$

В заключение отметим, что в большинстве своём методы синтеза регуляторов не имеют строго математического обоснования. Построение вычислительной схемы (алгоритма), предназначенной для решения задачи синтеза регуляторов, есть лишь первый шаг в создании теории методов. За ним должно следовать выяснение условий сходимости алгоритма, определение скорости сходимости, нахождение оценки погрешности априорной и апостериорной, выработка способов улучшения сходимости, если последняя окажется недостаточно быстрой.

С указанной точки зрения, применяемые в инженерной практике методы в большинстве своём принадлежат к классу эвристических. В такой ситуации приходится прибегать к любому из методов, который выглядит полезным. Мы неизбежно обращаемся к проверке всяких догадок, удачных идей или любых разумных способов решения рассматриваемой задачи.

Другими словами, процесс синтеза регуляторов является творческим, поскольку в приведённых ниже методах описаны лишь вычислительные схемы: остальные же этапы обоснования можно рассмотреть лишь при решении конкретных задач синтеза регуляторов. Используемые в инженерной практике методы синтеза корректирующих устройств САУ можно условно отнести к одной из групп, реализующих идеологию указанных выше трех принципов, позволяющих решить задачу расчёта параметров регуляторов заданной структуры.

1.5. МЕТОДЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭТАЛОННЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ

Как было показано выше, задача синтеза регулятора может быть поставлена следующим образом.

Задана система автоматического управления (рис. 1.58). Заданы передаточные функции эталонной системы $W^*(s)$ и объекта управления $W_o(s)$.

Задача заключается в нахождении ПФ регулятора $W_{ky}(s)$.

Но прежде чем переходить к нахождению $W_{\text{кy}}(s)$, необходимо определить $W^3(s)$ — передаточную функцию эталонной системы, исходя из требований технического задания.

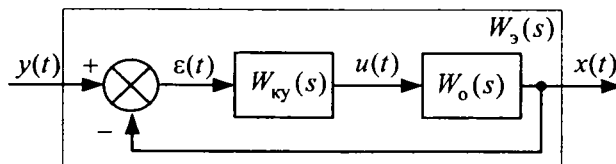


Рис. 1.58. К постановке задачи синтеза регулятора

Изложим некоторые подходы, связанные с определением $W^3(s)$.

Используя известные методы, можно построить $W^3(s)$ систем, удовлетворяющих заданным техническим условиям в режиме управления при подаче на вход следующих сигналов: единичная функция, гармоническая, линейно возрастающая или квадратичная функции, случай одновременного воздействия на вход нескольких из перечисленных процессов и др.

Часто при определении эталонной передаточной функции исходят из требований, предъявляемых к точности работы САУ при действии полезных и возмущающих сигналов.

Используется следующая постановка задачи при определении $W^3(s)$: на вход САУ действует сигнал вида $g(t) + n(t)$, где $g(t) = g_0 + g_1 t + \dots + g_p t^p$ — полезный сигнал, $n(t)$ — помеха.

Система, имеющая $W^3(s)$, должна фильтровать помеху с допустимой СКО и отработать полезный сигнал $g(t)$ без ошибки в установившемся режиме.

Условно можно рассматривать два класса $W^3(s)$:

- класс, связанный с детерминированной постановкой задачи;
- класс, направленный на решение задач статистической оптимизации.

Второй класс задач, основная цель которого — нахождение динамических характеристик статистически оптимальных систем (например, фильтрация), подробно рассмотрен в 1-м томе учебника.

В настоящем параграфе обсудим вопросы нахождения $W^3(s)$ в детерминированной постановке.

1.5.1. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЭТАЛОННОЙ СИСТЕМЫ В КЛАССЕ ОПТИМИЗАЦИОННЫХ ЗАДАЧ

Рассмотрим структурную схему замкнутой системы (рис. 1.58).

Сформулируем задачу нахождения эталонной ПФ замкнутой системы следующим образом [139]: *определить ПФ $W^3(s)$ замкнутой системы таким образом, чтобы показатель оптимальности вида*

$$I = \int_0^{\infty} [\varepsilon^2(t) + \lambda^2 u^2(t)] dt \quad (1.84)$$

достигал экстремума.

На первом этапе построим решение задачи без выполнения условия физической осуществимости.

Имеем

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |E(j\omega)|^2 + \lambda^2 |U(j\omega)|^2 \right\} d\omega. \quad (1.85)$$

Поскольку

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t),$$

$$E(j\omega) = Y(j\omega) - W(j\omega)Y(j\omega) = (1 - W(j\omega))Y(j\omega),$$

$$X(j\omega) = W_o(j\omega)U(j\omega),$$

$$U(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{W_o(j\omega)} = W(j\omega) \frac{Y(j\omega)}{W_o(j\omega)},$$

то функционал (1.85) принимает вид

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |1 - W(j\omega)|^2 |Y(j\omega)|^2 + \lambda^2 |W(j\omega)|^2 \left| \frac{Y(j\omega)}{W_o(j\omega)} \right|^2 \right\} d\omega. \quad (1.86)$$

Введем следующие обозначения для известных функций переменной ω :

$$S_y(\omega) = |Y(j\omega)|^2;$$

$$S_u(\omega) = \left| \frac{Y(j\omega)}{W_o(j\omega)} \right|^2. \quad (1.87)$$

Тогда соотношение, определяющее функционал, запишется так:

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |1 - W(j\omega)|^2 S_y(\omega) + |W(j\omega)|^2 S_u(\omega) \right\} d\omega. \quad (1.88)$$

Далее воспользуемся следующими зависимостями:

$$\begin{aligned} |1 - W(j\omega)|^2 &= (1 - W(j\omega))(1 - W(-j\omega)) = \\ &= [1 - W(-j\omega) - W(j\omega) + W(j\omega)W(-j\omega)] = \\ &= 1 - (W(-j\omega) + W(j\omega)) + W(j\omega)W(-j\omega) \end{aligned}$$

и

$$S_3(\omega) = S_y(\omega) + S_u(\omega). \quad (1.89)$$

С учетом (1.89) выражение под интегралом (1.88) можно записать так:

$$\begin{aligned} &[S_y(\omega) + W(j\omega)W(-j\omega)]S_3(\omega) - (W(j\omega) + W(-j\omega))S_y(\omega) + \\ &+ \frac{S_y^2(\omega)}{S_3(\omega)} - \frac{S_y^2(\omega)}{S_3(\omega)} = \left\{ |W(j\omega)S_3(\omega) - S_y(\omega)|^2 \frac{1}{S_3(\omega)} + \frac{S_y(\omega)S_u(\omega)}{S_3(\omega)} \right\}. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Преобразования, которые были приведены выше, позволили получить зависимость, в которой искомая частотная характеристика $W(j\omega)$ входит только в одно слагаемое.

Теперь функционал, экстремум которого требуется найти, принимает вид

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ |W(j\omega)S_3(\omega) - S_y(\omega)|^2 \frac{1}{S_3(\omega)} + \frac{S_y(\omega)S_u(\omega)}{S_3(\omega)} \right\} d\omega. \quad (1.91)$$

Поскольку слагаемые в подынтегральном выражении неотрицательны, то минимизация I сводится к минимизации слагаемого:

$$\left| W(j\omega)S_y(\omega) - S_y(\omega) \right|^2 \frac{1}{S_y(\omega)} = \frac{\Lambda(\omega)}{S_y(\omega)}. \quad (1.92)$$

Или, что то же самое,

$$\Lambda(\omega) = \left| W(j\omega)S_y(\omega) - S_y(\omega) \right|^2. \quad (1.93)$$

Очевидно, I достигает минимума, если

$$W(j\omega)S_y(\omega) - S_y(\omega) = 0.$$

Отсюда находим

$$W^3(j\omega) = \frac{S_y(\omega)}{S_y(\omega) + S_u(\omega)};$$

но

$$S_u(\omega) = \lambda^2 \frac{|Y(j\omega)|^2}{|W_o(j\omega)|^2};$$

тогда

$$W^3(j\omega) = \frac{|W_o(j\omega)|^2}{1 + |W_o(j\omega)|^2}, \quad (1.94)$$

$$I_{\min} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\lambda^2 |Y(j\omega)|^2}{|W_o(j\omega)|^2 + \lambda^2} d\omega. \quad (1.95)$$

Таким образом [139], оптимальная, в указанном смысле, частотная характеристика замкнутой системы определяется частотной характеристикой объекта управления и весовым множителем λ^2 .

При нахождении $k(t) = L^{-1}\{W^3(s)\}$, где $W^3(s)$ определяется (1.94), не выполняется условие физической реализуемости $k(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Например, если [139]

$$W_o(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1},$$

то

$$W^3(j\omega) = \frac{1}{1 + \lambda^2 |1 + T_1 j\omega|^2} = \frac{K_3^2}{1 + T_3^2 \omega^2} = \frac{K_3}{1 + T_3 j\omega} \cdot \frac{K_3}{1 - T_3 j\omega},$$

$$\left(K_3 = \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda^2}}, T_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{1 + \lambda^2}} T_1 \right).$$

Или, что то же самое,

$$W^3(s) = \frac{K_3}{2} \left[\frac{1}{T_3 s + 1} + \frac{1}{1 - T_3 s} \right].$$

Тогда

$$k(t) = \begin{cases} \frac{K_3}{2} e^{-\frac{t}{T_3}}, & t \geq 0, \\ \frac{K_3}{2} e^{\frac{t}{T_3}}, & t < 0. \end{cases} \quad (1.96)$$

Из последнего равенства следует, что ИПФ не удовлетворяет условию физической реализуемости $k(t) \equiv 0$ при $t < 0$.

Поэтому важной является задача определения таких $W^3(j\omega)$ и $W^3(s)$, которые удовлетворяли бы условию физической реализуемости.

Проведем соответствующие рассуждения, следуя [139].

Воспользуемся операцией факторизации

$$S_3(\omega) = |\Psi(j\omega)|^2 = \Psi(j\omega)\Psi(-j\omega),$$

где $\Psi(j\omega)$ имеет верхние нули и полюсы, а $\Psi(-j\omega)$ — нижние нули и полюсы.

Тогда

$$\Lambda(\omega) = \left| W(j\omega)\Psi(j\omega) - \frac{S_y(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right|^2 S_3(\omega). \quad (1.97)$$

Представим второе слагаемое в последней зависимости в виде (воспользуемся операцией расщепления)

$$\frac{S_y}{\Psi(-j\omega)} = \left\{ \frac{S_y(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+ + \left\{ \frac{S_y(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^-, \quad (1.98)$$

причем первое слагаемое имеет верхние полюсы, второе — нижние.

После проведенных преобразований следует зависимость

$$\Lambda(\omega) = \left| W(j\omega)\Psi(j\omega) - \left\{ \frac{S_y(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+ - \left\{ \frac{S_y(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^- \right|^2 S_3(\omega). \quad (1.99)$$

Отсюда имеем

$$W^3(j\omega) = \frac{1}{\Psi(j\omega)} \left\{ \frac{S_y(\omega)}{\Psi(-j\omega)} \right\}^+ \quad (1.100)$$

— оптимальная устойчивая частотная характеристика.

Так как

$$S_3(\omega) = \left| \frac{Y(j\omega)}{W_o(j\omega)} \right|^2 \left(|W_o(j\omega)|^2 + \lambda^2 \right),$$

то для устойчивого минимально-фазового объекта и типового задающего воздействия можно записать соотношения

$$\Psi(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{W_o(j\omega)} \left[|W_o(j\omega)|^2 + \lambda^2 \right]_+,$$

$$\Psi(-j\omega) = \frac{Y(-j\omega)}{W_o(-j\omega)} \left[|W_o(j\omega)|^2 + \lambda^2 \right]_-.$$

Зависимость, определяющая оптимальную реализуемую частотную характеристику, запишется так:

$$W^3(j\omega) = \frac{W_o(j\omega)}{Y(j\omega) \left[|W_o(j\omega)|^2 + \lambda^2 \right]_+} \left\{ \frac{Y(j\omega)W_o(-j\omega)}{\left[|W_o(j\omega)|^2 + \lambda^2 \right]_-} \right\}^+. \quad (1.101)$$

В [139] приведен пример и задачи, иллюстрирующие применение рассмотренного подхода.

1.5.2. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ЭТАЛОННОЙ СИСТЕМЫ В КЛАССЕ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ФИЛЬТРОВ БАТТЕРВОРСА

Предписанные или желаемые динамические свойства замкнутых систем задаются соответствующим положением нулей и полюсов ПФ замкнутой системы. Рассмотрим постановку задачи и методику выбора желаемой ПФ, основанную на использовании теории низкочастотных фильтров Баттерворса (Баттерворта). Проведем предварительные рассуждения с учетом принципа фильтрации [87].

Положим, что входной сигнал содержит гармонические составляющие в полосе $0 \leq \omega \leq \omega_0$.

Условия отработки воздействия без ошибки можно записать в форме

$$|W(j\omega)| = A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega \leq \omega_0, \\ 0 & \text{при } \omega > \omega_0. \end{cases} \quad (1.102)$$

Если факт, отраженный зависимостью (1.102), выразить терминами гармонического анализа, то система с ПФ (1.102) идеально пропускает гармоники с частотами, не превышающими ω_0 , и идеально подавляет гармоники с частотами $\omega > \omega_0$.

Известно, что система с АЧХ вида (1.102) физически нереализуема в классе систем, имеющих дробно-рациональные ПФ. Однако приближенно такую систему реализовать можно. Важно помнить о том, что «хорошая» замкнутая система, имеющая необходимую точность в установившемся режиме и заданные параметры переходного процесса, должна быть, как правило, близка по своим свойствам к идеальному низкочастотному фильтру с АЧХ вида (1.102) [87].

Выполним в (1.102) нормирование по частоте и положим $\omega_n = \omega / \omega_0$; тогда АЧХ идеального низкочастотного фильтра будет иметь вид (рис. 1.59). Поскольку, как уже говорилось, фильтр с АЧХ вида

$$A(\omega_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq \omega_n \leq 1, \\ 0 & \text{при } \omega_n > 1 \end{cases} \quad (1.103)$$

физически нереализуем, то его можно построить, если задать приближение $A^2(\omega_n)$ в виде (здесь и далее индекс «н» в ω_n будем опускать) [87]

$$|W_B(j\omega)|^2 = \tilde{A}_n^2(\omega) = \frac{1}{1 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + b_n\omega^{2n}} = \frac{1}{B_n(\omega^2)}. \quad (1.104)$$

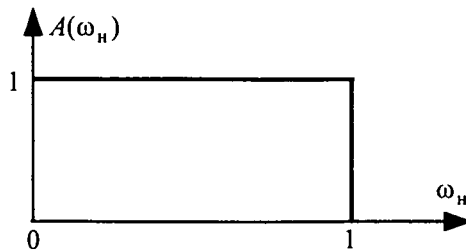


Рис. 1.59. АЧХ идеального фильтра

В последней зависимости требуется найти численные значения $b_1, b_2, \dots, b_n$ и n ; $b_0 = 1$, поскольку при этом условии

$$\tilde{A}_n(\omega) \Big|_{\omega=0} = A(\omega) \Big|_{\omega=0}.$$

Запишем формулу для ошибки в полосе частот $[0, 1]$

$$D_n(\omega) = 1 - \frac{1}{B_n(\omega^2)} = \frac{B_n(\omega^2) - 1}{B_n(\omega^2)}, \quad (1.105)$$

или, что то же самое,

$$D_n(\omega) = \frac{b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + b_n\omega^{2n}}{1 + b_1\omega^2 + b_2\omega^4 + \dots + b_n\omega^{2n}} = \frac{b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n}{1 + b_1z + b_2z^2 + \dots + b_nz^n}, \quad (1.106)$$

где $z = \omega^2$.

Теперь задача состоит в том, чтобы из условия обеспечения, в известном смысле, минимума $D_n(\omega)$ подобрать коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_n$. Например, таким условием может служить хорошее приближение АЧХ идеального фильтра функцией $\tilde{A}_n(\omega)$ в области $\omega = 0$ и менее точное воспроизведение спада частотной характеристики в области $\omega = 1$. Может быть поставлена задача найти такую аппроксимирующую функцию $\tilde{A}_n(\omega)$, которая носила бы колебательный характер с равными амплитудами колебаний около АЧХ идеального фильтра.

Для того чтобы обеспечить аппроксимацию АЧХ эталонного фильтра функцией $\tilde{A}_n(\omega)$ в области $\omega = 0$, необходимо воспользоваться разложением зависимости, определяющей ошибку $D(z)$, в ряд Тейлора при $z = 0$ и коэффициенты разложения приравнять нулю.

Запишем ряд Тейлора для функции $D(z)$:

$$D_n(z) = D_n(0) + D'_n(0)\frac{z}{1!} + D''_n(0)\frac{z^2}{2!} + \dots + D_n^{(n)}(0)\frac{z^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \quad (1.107)$$

Ряд (1.107) определяет ошибку приближения АЧХ идеального фильтра функцией (1.106); потребуем, чтобы ряд (1.107) при удержании n членов разложения был бы равен нулю, что равносильно

$$D_n(0) = D'_n(0) = D''_n(0) = \dots = D_n^{(n-1)}(0) = 0. \quad (1.108)$$

Вычисляя производные от функции (1.106) при $z = 0$, можно показать, что при аппроксимации $D_n(z)$ рядом Тейлора $(n-1)$ -го порядка все первые коэффициенты $b_1, b_2, \dots, b_{n-1}$ с учетом (1.108) обращаются в нуль, т.е. $b_1 = b_2 = \dots = b_{n-1} = 0$.

Тогда

$$\tilde{A}_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{1 + b_n\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}}. \quad (1.109)$$

Обычно полагают $b_n = 1$, поскольку в этом случае граница полосы пропускания фильтра соответствует значению 0,707. В этом случае аппроксимирующее выражение принимает вид

$$\tilde{A}_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} = |W_B(j\omega)|^2. \quad (1.110)$$

Фильтр, у которого квадрат АЧХ определяется последней формулой, называется фильтром Баттерворса. Комплексный коэффициент передачи фильтра Баттерворса будем обозначать через $W_B(j\omega)$.

На рис. 1.60 и 1.61 приведены АЧХ фильтров, передаточные функции которых определяются зависимостью (1.110) при различных значениях n .

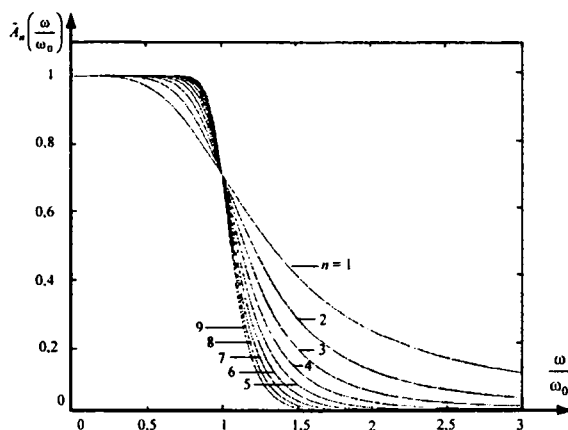


Рис. 1.60. Амплитудно-частотная характеристика фильтров Баттерворса

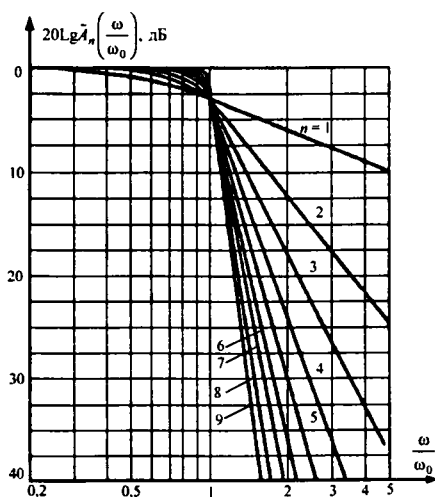


Рис. 1.61. Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика фильтров Баттерворса

Для нахождения ПФ фильтра воспользуемся леммой о факторизации [87]

$$|W_B(j\omega)|^2 = W_B(j\omega)W_B(-j\omega) = W_B(s)W_B(-s) \Big|_{s=j\omega}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \tilde{A}_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) &= \frac{1}{1 + \left(\frac{j\omega}{j\omega_0}\right)^{2n}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{(j)^{2n}} \frac{(j\omega)^{2n}}{\omega_0^{2n}}} = \frac{1}{1 + (-1)^n \left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2n}} \Bigg|_{s=j\omega} = \\ &= \frac{1}{1 + (-1)^n p^{2n}} \Bigg|_{p=\frac{s}{\omega_0}}, \end{aligned} \quad (1.111)$$

то полюсы последней зависимости определяются из уравнения

$$p^{2n} = \pm 1, \quad (1.112)$$

причем (+) соответствует нечетным значениям n , а (-) — четным.

Представляя единицу в комплексной форме, получим

$$p_k = \pm \cos \varphi_k \pm j \sin \varphi_k, \quad (1.113)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \text{при четном } n \quad \varphi_k &= (-1)^k \left(\frac{2k+1}{2n} \right) \pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1); \\ \text{при нечетном } n \quad \varphi_k &= (-1)^k \left(\frac{k}{n} \right) \pi; \quad k = 0, 1, 2, \dots, (n-1). \end{aligned} \right\} \quad (1.114)$$

Таким образом, полюсы лежат на окружности единичного радиуса с центром в начале координат.

Фильтр Баттерворса, из известных соображений, должен иметь полюсы в левой полуплоскости, поэтому полюсы такого фильтра определяются зависимостью

$$p_k = -\cos \varphi_k \pm j \sin \varphi_k. \quad (1.115)$$

Численные значения полюсов представлены в табл. 1.3.

Если $b_n \neq 1$, то $p^{2n} = \pm \frac{1}{b_n}$ и

$$p_k = \rho (-\cos \varphi_k \pm j \sin \varphi_k), \quad (1.116)$$

где $\rho = \sqrt[2n]{1/b_n}$.

Таблица 1.3

Численные значения полюсов

	Действительная часть полюса	Мнимая часть полюса
1	2	3
$n = 2$		
1	-0,7071067812	-0,7071067812j
2	-0,7071067812	-0,7071067812j
$n = 3$		
1	-1,0000000000	0,0000000000j
2	-0,5000000000	0,8660254038j
3	-0,5	-0,8660254038j
$n = 4$		
1	-0,9238795325	-0,3826834324j
2	-0,3826834324	0,9238795325j
3	-0,3826834324	-0,9238795325j
4	-0,9238795325	0,3826834324j
$n = 5$		
1	-1,0000000000	0,0000000000j
2	-0,8090169944	0,5877852523j
3	-0,3090169944	-0,9510565163j
4	-0,3090169944	0,9510565163j
5	-0,8090169944	-0,5877852523j
$n = 6$		
1	-0,9659258263	-0,2588190451j
2	-0,7071067812	0,7071067812j
3	-0,2588190451	-0,9659258263j
4	-0,2588190451	0,9659258263j
5	-0,7071067812	-0,7071067812j
6	-0,9659258263	0,2588190451j

Продолжение табл. 1.3

1	2	3
<i>n</i> = 7		
1	– 1,0000000000	0,0000000000 <i>j</i>
2	– 0,9009688679	0,4338837391 <i>j</i>
3	– 0,6234898019	– 0,7818314825 <i>j</i>
4	– 0,2225209340	0,9749279122 <i>j</i>
5	– 0,2225209340	– 0,9749279122 <i>j</i>
6	– 0,6234898019	0,7818314825 <i>j</i>
7	– 0,9009688679	– 0,4338837391 <i>j</i>
<i>n</i> = 8		
1	– 0,9807852804	– 0,1950903220 <i>j</i>
2	– 0,8314696123	0,5555702330 <i>j</i>
3	– 0,5555702330	– 0,8314696123 <i>j</i>
4	– 0,1950903220	0,9807852804 <i>j</i>
5	– 0,1950903220	– 0,9807852804 <i>j</i>
6	– 0,5555702330	0,8314696123 <i>j</i>
7	– 0,8314696123	– 0,5555702330 <i>j</i>
8	– 0,9807852804	0,1950903220 <i>j</i>
<i>n</i> = 9		
1	– 1,0000000000	0,0000000000 <i>j</i>
2	– 0,9396926208	0,3420201433 <i>j</i>
3	– 0,7660444431	– 0,6427876097 <i>j</i>
4	– 0,5000000000	0,8660254038 <i>j</i>
5	– 0,1736481777	– 0,9848077530 <i>j</i>
6	– 0,1736481777	0,9848077530 <i>j</i>
7	– 0,5000000000	– 0,8660254038 <i>j</i>
8	– 0,7660444431	0,6427876097 <i>j</i>
9	– 0,9396926208	– 0,3420201433 <i>j</i>
<i>n</i> = 10		
1	– 0,9876883406	– 0,1564344650 <i>j</i>
2	– 0,8910065242	0,4539904997 <i>j</i>
3	– 0,7071067812	– 0,7071067812 <i>j</i>
4	– 0,4539904997	0,8910065242 <i>j</i>
5	– 0,1564344650	– 0,9876883406 <i>j</i>
6	– 0,1564344650	0,9876883406 <i>j</i>
7	– 0,4539904997	– 0,8910065242 <i>j</i>
8	– 0,7071067812	0,7071067812 <i>j</i>
9	– 0,8910065242	– 0,4539904997 <i>j</i>
10	– 0,9876883406	0,1564344650 <i>j</i>

Величина неравномерности частотной характеристики учитывается множителем ρ .

Если известны полюсы $p_1, p_2, \dots, p_n$, то ПФ может быть представлена в виде

$$W_B(p) = \frac{1}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}. \quad (1.117)$$

При n четном последняя зависимость принимает вид

$$W_B(p) = \frac{1}{\prod_{i=1}^{n/2} (p^2 + q_{1i}p + q_{0i})} = \frac{1}{D_n(p)}, \quad (1.118)$$

а если n — нечетное, то

$$W_B(p) = \left((p + q_1) \prod_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} (p^2 + q_{1i}p + q_{0i}) \right)^{-1} = \frac{1}{D_n(p)}, \quad (1.119)$$

где

$$\begin{aligned}
 D_1(p) &= p+1; \\
 D_2(p) &= p^2+1,4142p+1; \\
 D_3(p) &= (p+1)(p^2+p+1); \\
 D_4(p) &= (p^2+0,7654p+1)(p+1,8478p+1); \\
 D_5(p) &= (p+1)(p^2+0,6180p+1)(p^2+1,6180p+1); \\
 D_6(p) &= (p^2+0,5176p+1)(p^2+1,4142p+1)(p^2+1,9319p+1); \\
 D_7(p) &= (p+1)(p^2+0,4450p+1)(p^2+1,2470p+1)(p^2+1,8019p+1); \\
 D_8(p) &= (p^2+0,3902p+1)(p^2+1,1111p+1) \times \\
 &\quad \times (p^2+1,1663p+1)(p^2+1,9616p+1); \\
 D_9(p) &= (p+1)(p^2+0,3473p+1)(p^2+p+1) \times \\
 &\quad \times (p^2+1,5321p+1)(p^2+1,8794p+1); \\
 D_{10}(p) &= (p^2+0,3129p+1)(p^2+0,9080p+1) \times \\
 &\quad \times (p^2+1,4142p+1)(p^2+1,7820p+1)(p^2+1,9754p+1).
 \end{aligned} \tag{1.120}$$

Зависимости, определяющие $D_1(p), D_2(p), \dots, D_{10}(p)$ можно переписать в виде

$$D_n(p) = 1 + d_1p + d_2p^2 + d_3p^3 + \dots + p^n, \tag{1.121}$$

причем $d_0 = d_n = 1$.

Полином $D_n(p)$ называется полиномом Баттерворса.

Коэффициенты полиномов Баттерворса $d_1, d_2, \dots, d_{n-1}$ вычислены; их значения до $n=10$ приведены в табл. 1.4.

Таблица 1.4

Коэффициенты полиномов Баттерворса

d_i	$n=2$	$n=3$	$n=4$	$n=5$	$n=6$	$n=7$	$n=8$	$n=9$	$n=10$
d_0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
d_1	1,41421	2	2,61313	3,23607	3,8637	4,49396	5,12583	5,75877	6,39245
d_2	1	2	3,41421	5,23607	7,4641	10,0978	13,1371	16,5817	20,4317
d_3		1	2,61313	5,23607	9,14162	14,5918	21,8462	31,1634	42,8021
d_4			1	3,23607	7,4641	14,5918	25,6884	41,9864	64,8824
d_5				1	3,8637	10,0978	21,8462	41,9864	74,2334
d_6					1	4,49396	13,1371	31,1634	64,8824
d_7						1	5,12583	16,5817	42,8021
d_8							1	5,75877	20,4317
d_9								1	6,39245
d_{10}									1

Из приведенных выше формул следует, что фильтр Баттерворса — каскадное соединение звеньев с ПФ вида [87]

$$W_{Bi}(p) = \frac{K_i \omega_{0i}}{p^2 + 2\xi_i \omega_{0i} p + \omega_{0i}^2}, \quad (1.122)$$

где ω_{0i} — собственная частота звена, ξ — коэффициент демпфирования, причем

$$\omega_{0i} = \sqrt{q_{0i}}, \quad \xi_i = \frac{q_{1i}}{2\sqrt{q_{0i}}}. \quad (1.123)$$

Для звена первого порядка можно записать

$$W_{Bi}(p) = \frac{K_i \omega_{0i}}{p + \omega_{0i}}, \quad \omega_{0i} = q_i. \quad (1.124)$$

Поскольку полюсы ПФ известны, то можно рассчитать и нормированные переходные процессы. Переходные функции фильтров Баттерворса показаны на рис. 1.62.

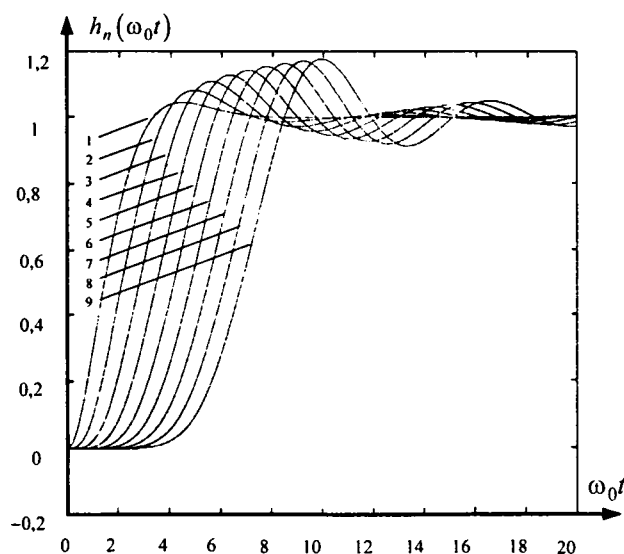


Рис. 1.62. Графики нормированных переходных характеристик фильтров Баттерворса

Ненормированное время определяется выражением $t = \tau/\omega_0$, и, следовательно, $T_p(n) = \tau_0(n)/\omega_0$ — время переходного процесса n -го фильтра Баттерворса.

Фильтры Баттерворса имеют АЧХ, близкую к идеальной низкочастотной (и быстро стремящуюся к ней при $n \rightarrow \infty$), причем граница, вплоть до которой АЧХ близка к единице, почти совпадает с частотой ω_0 (или равна единице, если частота нормированная). Однако с ростом n растут фазовые искажения.

Рассмотрим фазочастотные характеристики фильтров Баттерворса. Фазовые сдвиги, вносимые звеньями первого и второго порядка и определяющими фильтр Баттерворса как их каскадное соединение, могут быть представлены соотношениями

$$\varphi_i \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = -\arctg \frac{\omega/\omega_0}{\omega_{0i}}; \quad \varphi_j \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) = -\arctg \frac{2\xi_i \omega_{0i} \frac{\omega}{\omega_0}}{\omega_{0i}^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2}; \quad (1.125)$$

тогда, например, фазочастотная характеристика фильтра Баттерворса для четного n определяется зависимостью [87]

$$\varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) = -\sum_{i=1}^n \arctg \frac{2\xi_i \omega_{0i} \frac{\omega}{\omega_0}}{\omega_{0i}^2 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}. \quad (1.126)$$

Характеристикой фильтров Баттерворса является и время групповой задержки t_3 , определяемое формулой [87]

$$t_3 = \frac{d\varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}{d\omega}. \quad (1.127)$$

Соответствующие графики приведены на рис. 1.63 и 1.64.

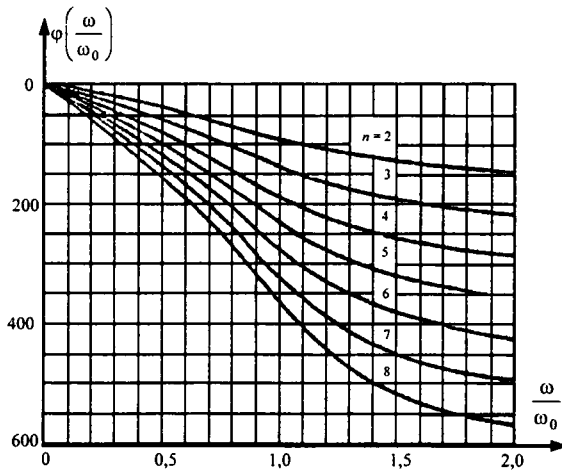


Рис. 1.63. ФЧХ фильтров Баттерворса

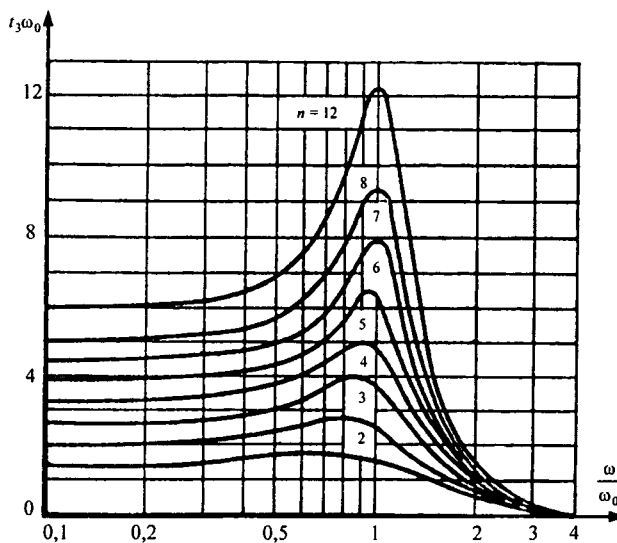


Рис. 1.64. Характеристики времени групповой задержки фильтров Баттерворса

Из рис. 1.63 следует, что с ростом n растут фазовые искажения и на частоте ω_0 $\varphi\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$ может существенно отличаться от нуля, что является отрицательным свойством фильтров Баттерворса.

В заключение отметим, что для аппроксимации АЧХ идеального фильтра могут быть использованы полиномы Чебышева (равноволновая аппроксимация) и полиномы Лежандра (фильтры класса L). О их возможностях можно судить по рис. 1.65–1.68, на которых представлены АЧХ и ФЧХ указанных фильтров [87].

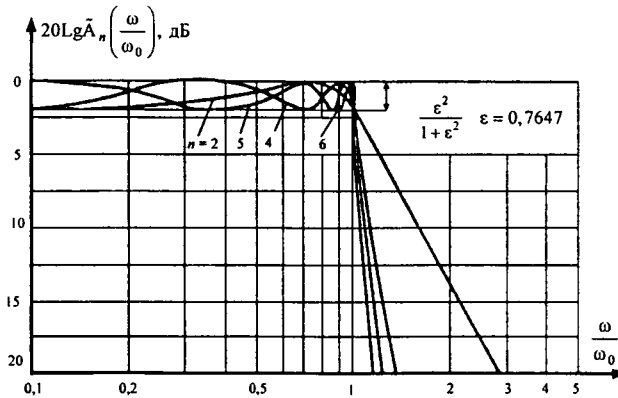


Рис. 1.65. АЧХ чебышевских фильтров

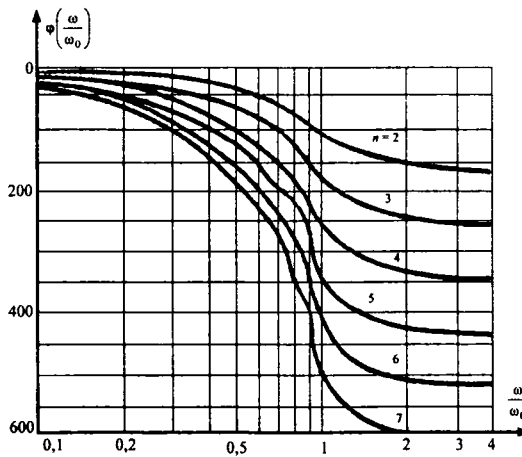


Рис. 1.66. ФЧХ чебышевских фильтров

Основы подхода к выбору n и ω_0 изложим, следуя [87].

Положим, что требования, связанные с качеством работы системы в установившемся режиме, т.е. с точностью отработки воздействия, сформулированы так:

1. Замкнутая система должна быть устойчивой.
2. Замкнутая система должна иметь заданную точность в установившемся режиме при обработке линейного сигнала: если $y(t) = y_0 + y_1 t$ и $|y_1| \leq y_1^d$ — предельная скорость изменения сигнала $y(t)$, то установившаяся ошибка не должна превы-

шать некоторого наперед заданного значения ε_1 , т.е. $|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_y^A$ при $t \geq T_p$, где ε_y^A — предельная допустимая ошибка обработки $y(t)$.

Аналогичные условия можно сформулировать для гармонического полезного сигнала и помехи, частоты которых заданы на промежутках Ω_m и Ω_n .

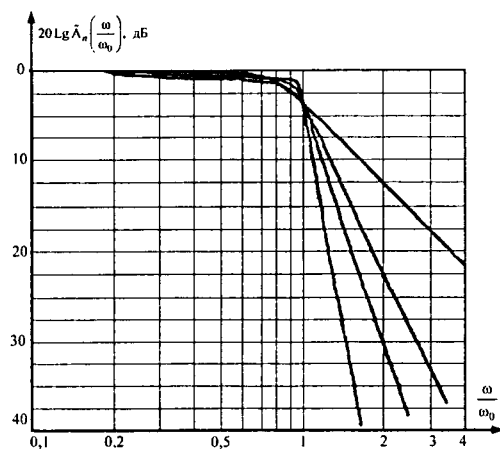


Рис. 1.67. АЧХ фильтров класса L

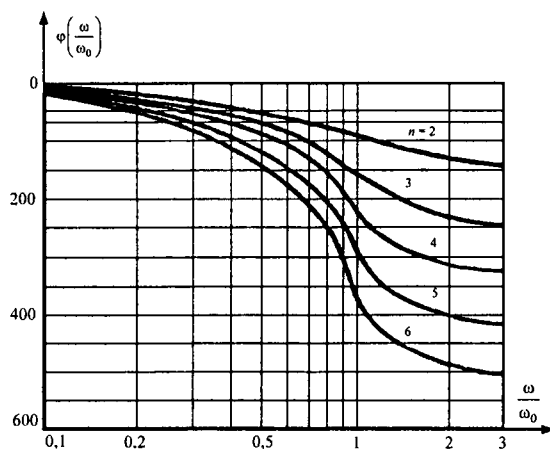


Рис. 1.68. ФЧХ фильтров класса L

3. Пусть обрабатываемое воздействие определяется формулой

$$m(t) = m \cos \omega t \quad \text{и} \quad m \leq m^A$$

для любых $\omega \in \Omega_m$; тогда

$$|\varepsilon(t)| \leq \varepsilon_m^A \quad \text{при} \quad t > T_p,$$

где m^A — заданная предельная амплитуда сигнала $m(t)$, а ε_m^A — заданная предельная допустимая ошибка.

4. Помеха определяется зависимостью

$$n(t) = n_n \cos \omega t, \quad \omega \in \Omega_n,$$

где $n_n < n_n^A$ — предельная амплитуда помехи, а на вызванную наличием $n(t)$ ошибку накладывается требование

$$|\varepsilon(t)| < \varepsilon_n^A \text{ при } t > T_p,$$

причем ε_n^A — заданная величина.

Условия 1–4 можно рассматривать как *требования к качеству системы*.

Выполнение указанных требований связано с рядом неравенств, вывод которых приводится в [87]:

$$\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^{2n}} \leq \left(\frac{\varepsilon_n^A}{n_n^A}\right)^2, \quad \omega \geq \bar{\omega}_n; \quad (1.128)$$

$$\left|1 - \frac{1}{D_n \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)}\right| \leq \left(\varepsilon_m^A (m^A)^{-1}\right)^2, \quad \omega \leq \bar{\omega}_m. \quad (1.129)$$

С учетом сказанного выше алгоритм выбора ω_0 и n в фильтрах Баттерворса заключается в том, чтобы выполнялись условия [87]

$$\left|\sin \frac{\pi}{2n}\right| \omega_0 \geq \max \left\{ \frac{y_1^A}{\varepsilon_y^A}, \frac{\bar{\omega}_m m^A}{\varepsilon_m^A} \right\}, \quad \omega_0 \leq \bar{\omega}_n \left(\frac{\varepsilon_n^A}{n_n^A} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (1.130)$$

причем величины y_1^A , $\bar{\omega}_m$, m^A , $\bar{\omega}_n$, n_n^A характеризуют допустимые по техническим условиям воздействия, а параметры ε_y^A и ε_m^A определяют требуемую точность.

Что касается требований к качеству работы системы в переходном режиме, то для фильтров Баттерворса значение для величины перерегулирования $\sigma_m(n) = \max_t h_n(t) - 1$ и времени переходного процесса $\tau_p(n) = \omega_0 T_p(n)$ можно определить по графикам, представленным на рис. 1.62.

При проведении расчетов необходимо помнить, что с увеличением n перерегулирование растет (см. рис. 1.62), но является практически удовлетворительным до $n = 5$; наименьшее время переходного процесса имеет место при $n = 2$ и

$$T_p(n) = \frac{2,5}{\omega_0}.$$

Дополнительное ограничение на выбор параметров вида

$$\omega_0 \geq \frac{\tau_p(n)}{T_p}$$

соответствует предельно допустимому времени переходного процесса.

1.5.3. МЕТОД СТАНДАРТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ПОСТРОЕНИЯ ЭТАЛОННОЙ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Между характером переходной и передаточной функций системы существует сложная, но тем не менее вполне определенная связь. Вид переходной функции определяется значением нулей (корней числителя) и полюсов (корней знаменателя) передаточной функции. Для любой конкретной формы передаточной функции может быть найдено некоторое «оптимальное» *распределение нулей и полюсов, при котором переходная функция будет наиболее благоприятной с точки зрения динамики*

рассматриваемой системы. Каждому такому оптимальному распределению нулей и полюсов соответствует вполне определенное значение коэффициентов полиномов числителя и знаменателя передаточной функции, которое назовем стандартным. Далее построим изложение, следуя [58].

Любой характеристический полином замкнутой САУ

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0 \quad (1.131)$$

можно записать в виде

$$D(s) = s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n \omega_0} \cdot \omega_0 s^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n \omega_0^2} \cdot \omega_0^2 s^{n-2} + \dots + \frac{a_1}{a_n \omega_0^{n-1}} \cdot \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n, \quad (1.132)$$

где $\omega_0 = \sqrt[n]{\frac{a_0}{a_n}}$.

Или, что то же самое,

$$D(s) = s^n + A_1 \omega_0 s^{n-1} + A_2 \omega_0^2 s^{n-2} + \dots + A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n,$$

где

$$A_1 = \frac{a_{n-1}}{a_n \omega_0}, \quad A_2 = \frac{a_{n-2}}{a_n \omega_0^2}, \quad \dots, \quad A_{n-1} = \frac{a_1}{a_n \omega_0^{n-1}}. \quad (1.133)$$

В качестве первой типовой функции можно взять передаточную функцию вида

$$W^3(s) = \frac{\omega_0^n}{s^n + A_1 \omega_0 s^{n-1} + A_2 \omega_0^2 s^{n-2} + \dots + A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n}. \quad (1.134)$$

Для системы с ПФ (1.134) можно получить переходный процесс без перерегулирования, когда корни знаменателя все вещественны. При всех вещественных корнях и при $\omega_0 = \text{const}$ *наименьшее время регулирования будет, если все корни будут кратными*. В этом случае коэффициенты $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ окажутся коэффициентами бинома Ньютона $(s+1)^n$. В табл. 1.5 приведено значение этих коэффициентов для n , равного 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Введем в рассмотрение безразмерное время переходного процесса $\tau_0 = \omega_0 T_p$. Действительное время переходного процесса определяется зависимостью $T_p = \tau_0 / \omega_0$. В табл. 1.5 приведено время переходного процесса τ_0 для систем различного порядка.

Таблица 1.5

Время переходного процесса τ_0 для систем различного порядка

n	Коэффициенты знаменателя	τ_0
1	1 · 1	3
2	1 · $A_1 = 2 \cdot 1$	4,8
3	1 · $A_1 = 3 \cdot A_2 = 3 \cdot 1$	6
4	1 · $A_1 = 4 \cdot A_2 = 6 \cdot A_3 = 4 \cdot 1$	7,9
5	1 · $A_1 = 5 \cdot A_2 = 10 \cdot A_3 = 10 \cdot A_4 = 5 \cdot 1$	9
6	1 · $A_1 = 6 \cdot A_2 = 15 \cdot A_3 = 20 \cdot A_4 = 15 \cdot A_5 = 6 \cdot 1$	10,6

На рис. 1.69 представлены графики переходных функций, ПФ которых определены стандартными коэффициентами, приведенными в табл. 1.5.

Если в переходной функции допустимо некоторое перерегулирование, то корни можно взять комплексными, благодаря чему сокращается также время управления.

Полином знаменателя передаточной функции $W(s)$ замкнутой системы представляется в форме произведения $n/2$ одинаковых квадратных трехчленов

$$D(s) = (s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2)^{n/2} = s^n + A_1\omega_0 s^{n-1} + \dots + A_{n-1}\omega_0^{n-1} s + \omega_0^n. \tag{1.135}$$

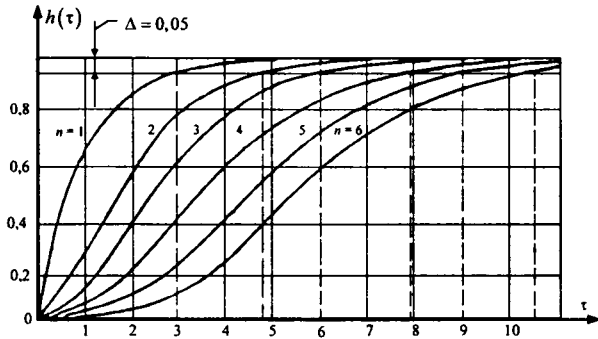


Рис. 1.69. Графики переходных функций для систем с передаточной функцией типа (1.134) и коэффициентами, определяемыми по табл. 1.5

Значение $\zeta = 0,75$. При n нечетном знаменатель передаточной функции $W(s)$ состоит из $(n-1)/2$ квадратных трехчленов и одного двучлена первой степени. Свободный член этого двучлена принимается равным единице. Значения коэффициентов $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ приведены в табл. 1.6.

Таблица 1.6

Значения коэффициентов $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$

n	Коэффициенты знаменателя	τ_0
2	1 1,5 1	2,9
3	1 2,5 2,5 1	4,4
4	1 3 4,25 3 1	5,15
5	1 4 7,25 7,25 4 1	6,20
6	1 4,5 9,75 12,375 9,75 4,5 1	6,7

В табл. 1.6 приведено безразмерное время регулирования τ_0 для систем различного порядка. Сравнивая это время с его значением для систем, имеющих коэффициенты, определяемые табл. 1.5, видим, что при одинаковых значениях n время регулирования в последнем случае существенно меньше.

На рис. 1.70 представлены графики переходных функций для систем, определенных стандартными коэффициентами, приведенными в табл. 1.6.

Рассмотрим передаточную функцию, имеющую один нуль:

$$W^3(s) = \frac{A_{n-1}\omega_0^{n-1}s + \omega_0^n}{s^n + A_1\omega_0 s^{n-1} + \dots + A_{n-1}\omega_0^{n-1}s + \omega_0^n}. \tag{1.136}$$

Чтобы уменьшить выброс, вызванный влиянием нуля, надо замедлять скорость нарастания переходной функции. Это можно сделать «разведением» корней полинома знаменателя по действительной оси.

При передаточной функции с одним нулем корни рекомендуется располагать на отрицательной вещественной полуоси по арифметической прогрессии. Значения коэффициентов полинома знаменателя в формуле (1.136) для такого распределения корней приведены в табл. 1.7.

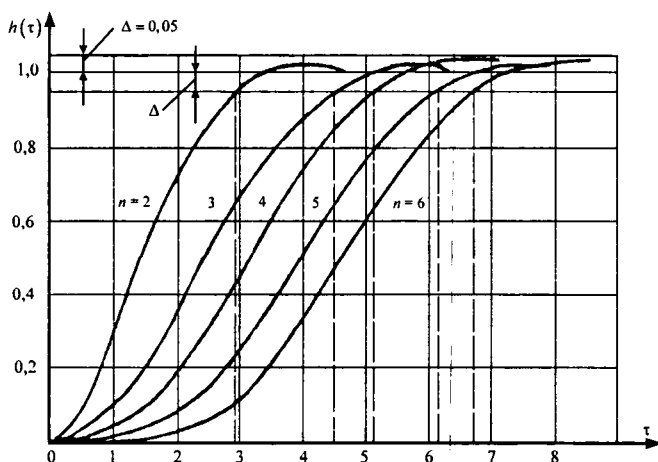


Рис. 1.70. Графики переходных функций для систем с передаточной функцией типа (1.134) и коэффициентами, определяемыми по табл. 1.6

Таблица 1.7

Значения коэффициентов полинома знаменателя

n	1-й член прогрессии	Разность прогрессии	Коэффициенты знаменателя
1	0,5	—	1 1
2	0,183	1,5	1 2,5 1
3	0,098	1,517	1 5,1 6,35 1
4	0,063	1,138	1 7,22 16,3 11,83 1
5	0,039	0,86685	1 9 29 38 18 1
6	0,039	0,717	1 11 45,8 92,3 82,3 27,7 1

На рис. 1.71 представлены графики переходных функций для систем, определяемых стандартными коэффициентами табл. 1.7.

Рассмотрим передаточную функцию с двумя нулями:

$$W^3(s) = \frac{A_{n-2}\omega_0^{n-2}s^2 + A_{n-1}\omega_0^{n-1}s + \omega_0^n}{s^n + A_1\omega_0s^{n-1} + \dots + A_{n-1}\omega_0^{n-1}s + \omega_0^n}. \quad (1.137)$$

Чтобы уменьшить влияние нулей, рекомендуется располагать корни полинома знаменателя на отрицательной вещественной полуоси по геометрической прогрессии. В табл. 1.8 приведены значения коэффициентов полинома знаменателя $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ для такого распределения корней.

Метод стандартных коэффициентов нашел широкое применение при решении задач проектирования систем управления летательными аппаратами [21, 41]; подробно с основными положениями метода можно познакомиться в [21, 41, 58] и др.

Таблица 1.8

Значения коэффициентов полинома знаменателя

n	1-й член прогрессии	Знаменатель прогрессии	Коэффициенты знаменателя	τ_0
3	0,182	5,5	1 6,7 6,7 1	1,5
4	0,185	3,08	1 7,9 15 7,9 1	3,3
5	0,075	3,63	1 18 69 69 18 1	9,2
6	0,038	3,7	1 36 251 485 251 36 1	—

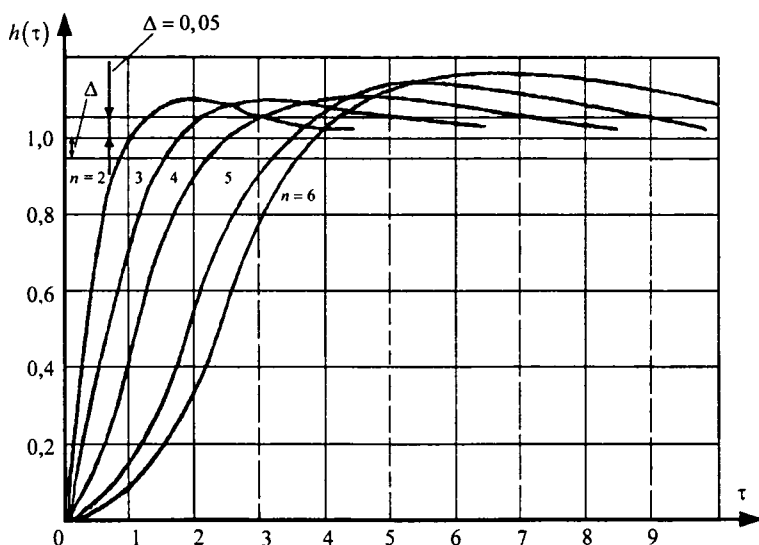


Рис. 1.71. Графики переходных функций для систем с передаточной функцией типа (1.136) и коэффициентами, определяемыми по табл. 1.7

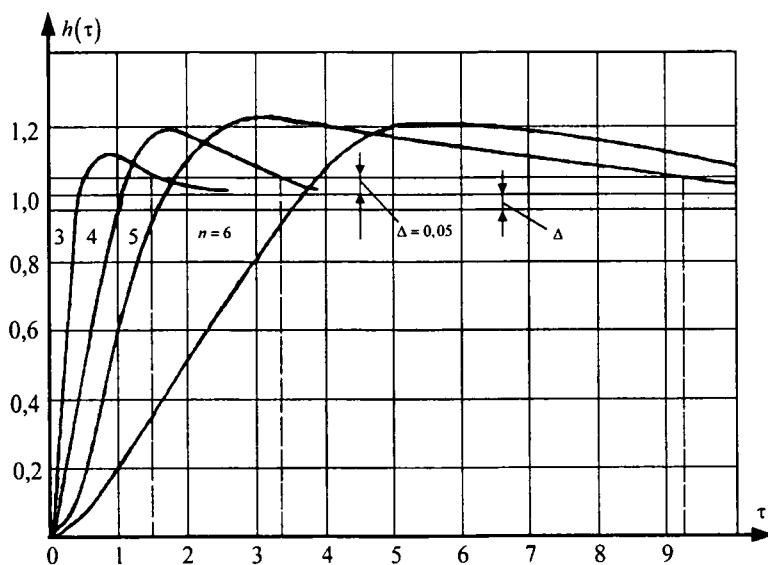


Рис. 1.72. Графики переходных функций для систем с передаточными функциями типа (1.137) и коэффициентами, определяемыми по табл. 1.8

В настоящем параграфе изложены лишь некоторые подходы к определению эталонных ПФ замкнутых систем. Следующей важной задачей является построение таких регуляторов с ПФ $W_{\text{кв}}(s)$, которые обеспечили бы приближенное в общем случае равенство реальной ПФ замкнутой системы $W(s)$ и заранее выбранной эталонной ПФ $W^3(s)$. Этот вопрос подробно рассмотрен ниже.

1.6. ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ И АНАЛИЗ ЕЕ ЭФФЕКТИВНОСТИ ДЛЯ КЛАССА СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В параграфе 1.3 было введено понятие принципа динамической компенсации. Основная формула, определяющая оператор регулятора, имеет вид

$$A_{\text{кв}} = A_o^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3. \quad (1.138)$$

В настоящем параграфе подробно обсудим вопрос применения принципа динамической компенсации к классу стационарных линейных скалярных систем.

Пусть $W^3(s)$ — эталонная передаточная функция замкнутой системы; она выбрана из условия обеспечения необходимого качества работы САУ в переходном и установившемся режимах.

Найдем передаточную функцию эталонной разомкнутой системы (рис. 1.73). Имеем

$$W^3(s) = \frac{W_p^3(s)}{1 + W_p^3(s)};$$

тогда

$$W^3(s)(1 + W_p^3(s)) = W_p^3(s).$$

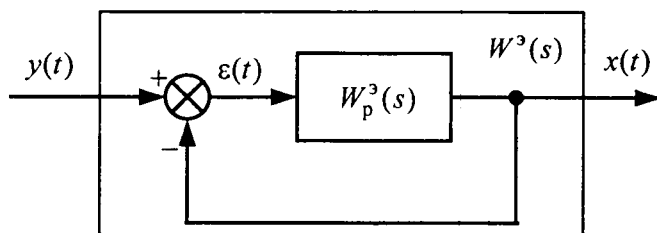


Рис. 1.73. Структурная схема эталонной системы

Отсюда находим

$$W^3(s) + W^3(s)W_p^3(s) = W_p^3(s),$$

или, что то же самое,

$$W^3(s) = W_p^3(s) - W^3(s)W_p^3(s) = W_p^3(s)(1 - W^3(s)).$$

Легко записать выражение для эталонной ПФ разомкнутой системы (рис. 1.74)

$$W_p^3(s) = \frac{W^3(s)}{1 - W^3(s)}. \quad (1.139)$$

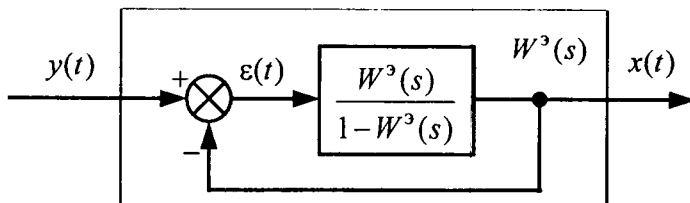


Рис. 1.74. Структурная схема эталонной системы

Задача синтеза регулятора иллюстрируется рис. 1.75.

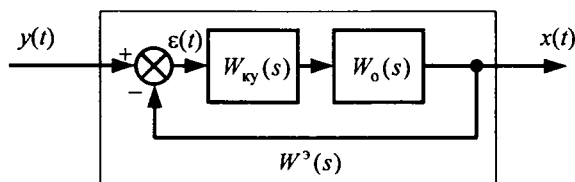


Рис. 1.75. К постановке задачи коррекции

Из анализа структурных схем 1.73 и 1.74 сразу же следует, что задача коррекции получает решение при выполнении условия

$$W_p^3(s) = W_{ky}(s) W_o(s). \quad (1.140)$$

Поставим следующий вопрос: при каких условиях имеет место равенство передаточных функций $W_p^3(s)$ и $W_{ky}(s)$? Очевидно, такое равенство справедливо, если ПФ объекта управления $W_o(s) = 1$, т.е. объект безынерционный. Равенство $W_o(s) = 1$ может быть достигнуто, если скомпенсировать динамику объекта, вводя в прямую цепь дополнительное звено, имеющее ПФ, обратную ПФ объекта управления (это звено называют компенсатором); тогда имеет место равенство

$$W_o(s) W_o^{-1}(s) = 1,$$

и структурная схема скорректированной системы принимает вид (рис. 1.76).

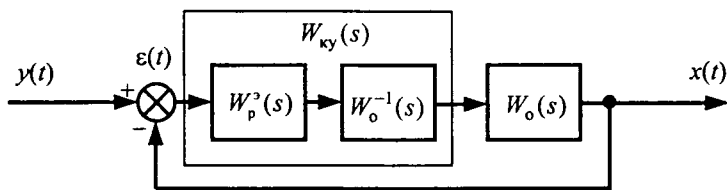


Рис. 1.76. Структурная схема скорректированной системы

Или, что то же самое (рис. 1.77).

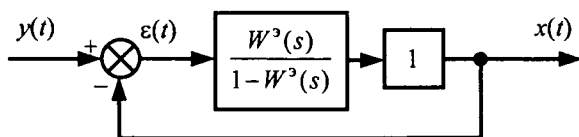


Рис. 1.77. Структурная схема скорректированной системы (динамика объекта скомпенсирована)

Таким образом, исходя из физических соображений, получено формальное решение задачи синтеза регулятора с эталонной передаточной функцией замкнутой системы $W^3(s)$ (ПФ компенсатора можно рассматривать как часть ПФ регулятора, тогда $W_{ky}(s) = W_p^3(s) W_o^{-1}(s)$ (рис. 1.76)). Формальные рассуждения приводят к тому же результату.

Поставим задачу так: полагая известными ПФ неизменяемой части $W_o(s)$ (как уже принято, $W_o(s)$ называют ПФ объекта; сюда же входят ПФ исполнительного элемента, усилительных устройств, измерительных систем и т.д.) и $W^3(s)$, найдем

ПФ $W_{\text{кy}}(s)$ *корректирующего устройства* (регулятора) (рис. 1.75). Справедлива зависимость для $W^3(s)$

$$W^3(s) = \frac{W_{\text{кy}}(s)W_o(s)}{1 + W_{\text{кy}}(s)W_o(s)}. \quad (1.141)$$

Тогда

$$W^3(s)(1 + W_{\text{кy}}(s)W_o(s)) = W_{\text{кy}}(s)W_o(s).$$

Отсюда получаем соотношение

$$-W_{\text{кy}}(s)W_o(s)W^3(s) + W_{\text{кy}}(s)W_o(s) = W^3(s),$$

или, что то же самое,

$$W_{\text{кy}}(s)[W_o(s) - W_o(s)W^3(s)] = W^3(s).$$

Из последней формулы следует

$$W_{\text{кy}}(s) = \frac{W^3(s)}{W_o(s)(1 - W^3(s))} = W_o^{-1}(s)W_p^3(s). \quad (1.142)$$

Из формулы (1.142) легко заключить, что ПФ *корректирующего устройства* (КУ) состоит из двух частей: первая часть включает $W_p^3(s)$ и определяется зависимостью (1.139); вторая же часть имеет ПФ, обратную передаточной функции объекта. Структурная схема системы с КУ, определяемым формулой (1.142), представлена на рис. 1.76.

Поскольку $W_p^3(s)$ определяется выражением (1.139), то окончательно структурная схема скорректированной системы имеет вид, представленный на рис. 1.78.

Так как $W_o^{-1}(s)W_o(s) = 1$, то имеет место структурная схема (рис. 1.77), которая совпадает со схемой, представленной на рис. 1.76.

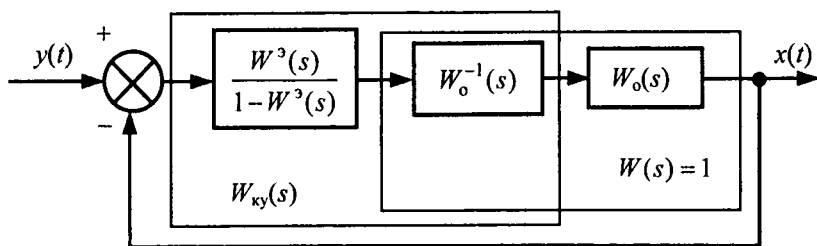


Рис. 1.78. Структура регулятора, имеющего ПФ $W_{\text{кy}}(s)$

Изложенный способ синтеза называют *методом динамической компенсации* [87]. Такое название обусловлено тем фактом, что ПФ *корректирующего устройства* содержит множитель $W_o^{-1}(s)$, обратный передаточной функции неизменяемой части.

За счет введения множителя $W_o^{-1}(s)$ компенсируются динамические свойства неизменяемой части (рис. 1.78).

Пример 1.3. Рассмотрим задачу синтеза регулятора на примере канала крена, полагая:

а) $K_{\text{Iy}} = 1$; $K_{\text{np}}K_{\gamma} = 62$; $T_{\gamma} = 0,3 \text{ с}$; $T_p = 2,4 \text{ с}$, $W_o(s) = \frac{K_{\text{np}}K_{\gamma}}{s(T_{\gamma}s + K_{\text{Iy}})}$;

б) Эталонную ПФ замкнутой системы найдем, воспользовавшись методом стандартных коэффициентов; она имеет вид (см. табл. 1.5)

$$W^3(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + A_1\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (1.143)$$

Поскольку $\omega_0 = \frac{\tau_0}{T_p} = \frac{4,8}{2,4} = 2$, то

$$W^3(s) = \frac{4}{s^2 + 4s + 4} \text{ — ПФ замкнутой системы.}$$

Учитывая, что

$$W_p^3(s) = \frac{4}{s(s+4)}, \text{ а } W_o^{-1}(s) = \frac{s(0,3s+1)}{62},$$

можно определить ПФ регулятора:

$$W_{xy}(s) = W_o^{-1}(s)W_p^3(s) = \frac{4s(0,3s+1)}{62s(s+4)} = \frac{1}{13} \cdot \frac{(0,3s+1)}{(s+4)}. \quad (1.144)$$

Пример 1.4 [58]. Положим, что

$$W_o(s) = \frac{K}{Ts+1}, \quad K > 0, \quad T > 0, \quad (1.145)$$

а эталонная ПФ определяется зависимостью

$$W^*(s) = \frac{K^*}{s+K^*}, \quad K^* > 0. \quad (1.146)$$

Тогда ПФ регулятора может быть записана в форме (1.142). Поскольку

$$W_p^3(s) = \frac{W^*(s)}{1 - W^3(s)} = \frac{\frac{K^*}{s+K^*}}{1 - \frac{K^*}{s+K^*}} = \frac{K^*}{s}, \quad (1.147)$$

то

$$W_{xy}(s) = \frac{Ts+1}{K} \cdot \frac{K^*}{s} = \frac{K^*}{K} T \left(1 + \frac{1}{Ts} \right). \quad (1.148)$$

Последняя ПФ определяет ПИ-управление

$$u(t) = \frac{K^*}{K} T \left(\varepsilon(t) + \frac{1}{T} \int_0^t \varepsilon(\tau) d\tau \right). \quad (1.149)$$

Обсудим полученный результат с точки зрения эффективности применения принципа динамической компенсации для синтеза корректирующих устройств.

1. КУ является весьма *сложным*, поскольку должно включать две части: *компенсирующую* (обратная передаточная функция объекта) и *эталонную* (ПФ разомкнутой эталонной системы).

2. Регулятор в общем случае *содержит дифференцирующие звенья*, входящие в составляющую $W_o^{-1}(s)$. Эти звенья физически труднореализуемы. Приведем один из вариантов реализации [87]. Найдем ПФ замкнутой системы, представленной на рис. 1.79:

$$\begin{aligned} W(s) &= \frac{K}{1 + KK_0/(T_0s+1)} = \frac{K(T_0s+1)}{T_0s+1 + KK_0} \\ &= \frac{K(T_0s+1)/(1 + KK_0)}{T_0s/(1 + KK_0) + 1} = \frac{K_3(T_0s+1)}{T_3s+1} \approx K_3(T_0s+1), \end{aligned} \quad (1.150)$$

поскольку $T_3 \rightarrow 0$ при $K \rightarrow \infty$. Отсюда легко сделать вывод: *охват усилительного звена с большим коэффициентом усиления инерционной отрицательной обратной связью с ПФ $W_{oc}(s) = K_0/(T_0s+1)$ позволяет получить реальное форсирующее звено, выходом которого является производная от входного сигнала.* Кроме того, отметим известный факт: *дифференцирующие звенья усиливают влияние помех на качество работы системы.*

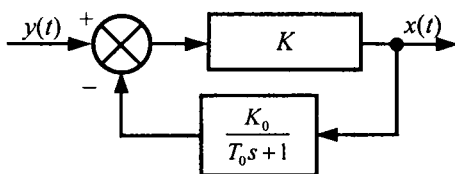


Рис. 1.79. К вопросу реализации форсирующего звена

Однако при некоторых условиях регулятор оказывается физически реализуемым, т.е. он не содержит дифференцирующих звеньев.

В самом деле, пусть

$$W_o(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad W_{\text{кy}}(s) = \frac{R(s)}{C(s)}. \quad (1.151)$$

Пусть m — степень полинома числителя передаточной функции $W_o(s)$;

n — степень полинома знаменателя передаточной функции $W_o(s)$;

p — степень полинома числителя передаточной функции $W_{\text{кy}}(s)$;

q — степень полинома знаменателя передаточной функции $W_{\text{кy}}(s)$.

Передаточная функция замкнутой эталонной системы

$$W^3(s) = \frac{P(s)}{D(s)}. \quad (1.152)$$

Пусть α — степень полинома числителя передаточной функции $W^3(s)$; β — степень полинома знаменателя передаточной функции $W^3(s)$.

Для реализуемой $W^3(s)$ должно быть $\beta \geq \alpha$.

Передаточная функция регулятора будет реализуема, если $q \geq p$. Пусть m и n фиксированы. Определим, какие условия надо наложить на α, β , чтобы $q \geq p$. Так как

$$W^3(s) = \frac{W_o(s)W_{\text{кy}}(s)}{1 + W_o(s)W_{\text{кy}}(s)}, \quad (1.153)$$

то

$$W_{\text{кy}}(s) = \frac{W^3(s)}{W_o(s)[1 - W^3(s)]} = \frac{P(s)A(s)}{B(s)[D(s) - P(s)]} = \frac{R(s)}{C(s)}. \quad (1.154)$$

Откуда

$$p = \alpha + n; \quad q = m + \beta; \quad p \leq q, \text{ если } \alpha + n \leq m + \beta, \\ \text{или } \beta - \alpha \geq n - m.$$

При таких условиях передаточная функция последовательного корректирующего устройства при заданной неизменяемой части системы будет реализуема [109].

3. Хорошее знание физических процессов, протекающих в конкретных достаточно сложных объектах, позволяет заключить, что компенсация динамических характеристик объектов с необходимой степенью «полноты» трудноосуществима, поскольку эта операция при её практической реализации опирается не на математическую модель, а на её оценку, известную со значительными погрешностями (степень неполноты математической модели, часто приводящая к практически неприемлемым результатам, имеет место как при её построении на основе изучения соответствующих физических процессов, так и путём решения задачи идентификации). В связи с этим

ключевым положением при решении задачи синтеза регуляторов является необходимость учёта того факта, что математические модели функционально необходимых элементов (измерительные, усилительные, исполнительные элементы, собственно объект управления) известны, как показывает практика решения конкретных инженерных задач, с недостаточной степенью полноты. В этом случае неправильно заложенные принципиальные положения при синтезе регуляторов приводят к неприятным последствиям, которые трудно исправляются даже на этапе проведения испытаний созданной системы.

Приведём некоторые из таких положений.

Формула (1.154) даёт формальное решение задачи, которое при её применении требует инженерной оценки. Действительно, в замкнутой системе, имеющей регулятор с передаточной функцией (1.154), имеет место сокращение нулей и полюсов $W_{\text{к}}(s)$ и $W_0(s)$. Поэтому система не обладает свойствами грубости и является практически неработоспособной. Чтобы синтезировать систему с желаемыми динамическими свойствами, необходимо специальным образом назначить структуру $W^3(s)$. Можно воспользоваться условием работоспособности, установленным для дискретных систем: ПФ $W_{\text{к}}(s)$, соответствующая закону управления, не должна содержать нулей и полюсов, близких к «правым» полюсам и нулям передаточной функции $W_0(s)$. Можно показать, что для непрерывных систем условие работоспособности сохраняется в такой же форме, что и для дискретных [59].

Приведём ещё одно важное положение, характеризующее принцип динамической компенсации. Синтезированная с его использованием система в некоторых случаях может оказаться неустойчивой [59].

Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Найдём характеристическое уравнение замкнутой системы.

Поскольку

$$W_{\text{к}}(s) = \frac{R(s)}{C(s)},$$

а

$$W_0(s) = \frac{B(s)}{A(s)},$$

то

$$W(s) = \frac{\frac{R(s)}{C(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s)}}{1 + \frac{R(s)}{C(s)} \cdot \frac{B(s)}{A(s)}} = \frac{R(s)B(s)}{C(s)A(s) + R(s)B(s)}. \quad (1.155)$$

Характеристическое уравнение имеет вид

$$N(s) = C(s)A(s) + R(s)B(s). \quad (1.156)$$

Так как

$$\frac{W^3(s)}{1 - W^3(s)} = W_p^3(s) = \frac{\frac{P(s)}{D(s)}}{1 - \frac{P(s)}{D(s)}} = \frac{P(s)}{D(s) - P(s)},$$

то ПФ регулятора определяется зависимостью

$$W_{\text{кз}}(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \cdot \frac{P(s)}{(D(s) - P(s))} = \frac{R(s)}{C(s)}$$

и, следовательно,

$$R(s) = A(s)P(s), \quad (1.157)$$

$$C(s) = B(s)(D(s) - P(s)). \quad (1.158)$$

Последние соотношения позволили выразить передаточную функцию регулятора через $A(s)$ — знаменатель ПФ объекта, и $B(s)$ — числитель ПФ объекта. Здесь необходимо обратить внимание на тот факт, что ПФ регулятора определяется через ПФ объекта управления, т.е. через полиномы $A(s)$ и $B(s)$ (это следует из формулы (1.158)).

Подставив (1.157) и (1.158) в зависимость, определяющую характеристическое уравнение замкнутой системы, найдем

$$N(s) = A(s)B(s)(D(s) - P(s)) + B(s)A(s)P(s) = A(s)B(s)D(s). \quad (1.159)$$

Отсюда следует: *поскольку характеристическое уравнение скорректированной системы содержит $A(s)$ и $B(s)$, определяющие ПФ объекта в соответствии с формулой (1.151), то наличие правых нулей и (или) полюсов объекта приводит к тому, что характеристическое уравнение скорректированной системы будет иметь правые полюсы и, таким образом, эта система при указанных условиях становится неустойчивой.*

Другими словами, метод динамической компенсации применим лишь в том случае, если объект не содержит правых нулей и (или) полюсов.

Область применимости метода, использующего принцип компенсации, можно расширить, если с помощью внутренней обратной связи провести стабилизацию объекта управления [59, 87].

Имеют место и другие «подводные камни», анализ которых проводится в []; там же рассмотрены специальные процедуры стабилизации и приведен общий алгоритм синтеза закона управления произвольными объектами, включая неминимально-фазовые.

Из сказанного выше следует, что применение принципа динамической компенсации требует при решении конкретных задач глубокого инженерного анализа и учёта тех факторов, о которых говорилось выше. Из изложенного можно сделать вывод, что практически эффективные методы решения инженерных задач синтеза регуляторов следует искать в классе *приближенных* (аппроксимационных) *методов*. Такой подход позволит получить методы, дающие хотя и *приближенное*, но *физически реализуемое решение, обеспечивающее качество работы САУ, близкое к заданному.*

В ряде работ предложен подход, позволяющий решить задачу синтеза регуляторов с устранением некоторых недостатков, присущих принципу динамической компенсации [59].

Идея подхода состоит в том, что передаточная функция замкнутой эталонной системы при предположении, что

$$W_o(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad (1.160)$$

должна удовлетворять следующим условиям [59]:

$$W^3(s) = \frac{R(s)B(s)}{D(s)} = \frac{P(s)}{D(s)} \text{ — ПФ замкнутой эталонной системы;} \quad (1.161)$$

$$1 - W^3(s) = \frac{C(s)A(s)}{D(s)} \text{ — ПФ ошибки замкнутой эталонной системы,} \quad (1.162)$$

где

$$D(s) = d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + \dots + d_{2n-1} s^{2n-1} + s^{2n}$$

— эталонный характеристический полином;

$$B(s) = b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_{n-1} s^{n-1};$$

$$A(s) = a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + s^n.$$

Полиномы $B(s)$ и $A(s)$ — известны, они определяют динамические свойства неизменяемой части; эталонный полином $D(s)$ выбирается специальным образом, например методом стандартных коэффициентов, но так, чтобы были реализованы предписанные динамические свойства замкнутой системы. Это достигается тем, что $D(s)$ является характеристическим уравнением замкнутой системы, а расположение корней характеристического уравнения $s_1, s_2, \dots, s_{2n}$ в левой полуплоскости комплексной области определяет параметры переходного процесса:

- быстродействие (время переходного процесса);
- колебательность (число колебаний и их частоту);
- перерегулирование ($\sigma\%$) и др.

Таким образом, в качестве эталона задается только полином $D(s)$, на числитель же соответствующие требования не накладываются. Вместе с тем изображение переходного процесса выражается зависимостью

$$H(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{R(s)B(s)}{D(s)} = \frac{P(s)}{sD(s)}. \quad (1.163)$$

Если корни характеристического уравнения простые, то зависимость для $h(t)$ — переходного процесса имеет вид

$$h(t) = \frac{P(0)}{D(0)} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{P(s_k)}{s_k D'(s_k)} e^{s_k t} = h_0 + \sum_{k=1}^{2n} h_k e^{s_k t}, \quad (1.164)$$

где s_k — корни уравнения $D(s) = 0$.

Как видно из (1.164), элементарные колебания $h_k(t) = e^{s_k t}$ определяются корнями $s_1, s_2, \dots, s_{2n}$ и полностью характеризуют структуру сигнала $h(t)$. Однако амплитуда элементарных колебаний определяется как полиномом $D(s)$, так и числителем $P(s)$; в связи с этим необходимо анализировать динамические свойства замкнутой системы после ее синтеза. Например, если решается задача коррекции в классе систем, не содержащих интегратор в прямой цепи, то найденный регулятор может обеспечить заданные быстродействие, степень колебательности и перерегулирование при наличии недопустимо большой установившейся ошибки.

ПФ корректирующего устройства определяется зависимостью

$$W_{\text{кy}}(s) = \frac{R(s)}{C(s)},$$

где

$$R(s) = r_0 + r_1 s + r_2 s^2 + \dots + r_{n-1} s^{n-1};$$

$$C(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + \dots + c_{n-1} s^{n-1} + s^n;$$

коэффициенты полиномов $R(s)$ и $C(s)$ подлежат определению.

Для ПФ замкнутой системы справедливо соотношение

$$W^3(s) = \frac{R(s)B(s)}{D(s)} = \frac{\frac{R(s)B(s)}{C(s)A(s)}}{1 + \frac{R(s)B(s)}{C(s)A(s)}} = \frac{R(s)B(s)}{C(s)A(s) + R(s)B(s)}. \quad (1.165)$$

Из зависимости (1.165) находим

$$D(s) = A(s)C(s) + B(s)R(s). \quad (1.166)$$

Последнее уравнение называется уравнением синтеза, поскольку оно позволяет найти неизвестные $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$ [59].

Уравнение синтеза при строгом рассмотрении вопроса находится из соотношений (1.161) и (1.162), поскольку

$$1 - \frac{R(s)B(s)}{D(s)} = \frac{C(s)A(s)}{D(s)}. \quad (1.67)$$

Отсюда сразу же следует (1.166). Синтезированная описанным методом система устраняет некоторые недостатки, присущие принципу динамической компенсации, и обладает свойством грубости [59].

Определим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных коэффициентов $r_0, r_1, \dots, r_{n-1}, c_0, c_1, \dots, c_{n-1}$. Из (1.166) имеем

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n)(c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_{n-1}s^{n-1} + s^n) + \\ & + (b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1})(r_0 + r_1s + r_2s^2 + \dots + r_{n-1}s^{n-1}) = \\ & = d_0 + d_1s + d_2s^2 + d_3s^3 + d_4s^4 + \dots + d_{2n-1}s^{2n-1} + s^{2n}; \end{aligned}$$

отсюда получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_0c_0 + b_0r_0 &= d_0; \\ a_0c_1 + a_1c_0 + b_0r_1 + b_1r_0 &= d_1; \\ a_0c_2 + a_1c_1 + a_2c_0 + b_0r_2 + b_1r_1 + b_2r_0 &= d_2; \\ a_0c_3 + a_1c_2 + a_2c_1 + a_3c_0 + b_0r_3 + b_1r_2 + b_2r_1 + b_3r_0 &= d_3. \end{aligned} \quad (1.168)$$

⋮

В линейной системе алгебраических уравнений $2n$ неизвестных; число уравнений также равно $2n$.

Решение системы (1.168) приводит к нахождению численных значений неизвестных коэффициентов ПФ регулятора. Назначая соответствующим образом корни характеристического уравнения $D(s) = 0$, можно добиться хорошего качества работы системы в переходном режиме. Для этой цели можно использовать метод стандартных коэффициентов или фильтры Баттерворса. Качество работы в установившемся режиме определяется наличием интеграторов в прямой цепи. В связи с этим введение интеграторов в прямую цепь изменяет структуру корректирующего устройства, и его передаточная функция будет выражаться зависимостью

$$W_{\text{к}}(s) = \frac{R(s)}{sC_1(s)}. \quad (1.169)$$

Для удобства проведения расчетов поступают так: интегратор (или интеграторы, в зависимости от порядка астатизма) вносят в структуру объекта (неизменяемой части), и тогда эквивалентная схема принимает вид (рис. 1.80).

Обозначим

$$sA(s) = A_1(s) = s(a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n) = \\ = a_0s + a_1s^2 + a_2s^3 + \dots + a_{n-1}s^n + s^{n+1}.$$

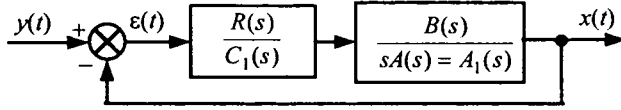


Рис. 1.80. Структурная схема эквивалентной системы

Степень $A_1(s)$ равна $n+1$. Запишем уравнение синтеза

$$A_1(s)C(s) + B(s)R(s) = D(s). \quad (1.170)$$

Для определения неизвестных коэффициентов c_i и r_j получим систему уравнений, аналогичную (1.168); для этой цели введем обозначения:

$$\begin{aligned} R(s) &= r_0 + r_1s + r_2s^2 + \dots + r_ns^n; \\ C(s) &= c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ns^n + \dots + s^{n+1}; \\ D(s) &= d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_{2n}s^{2n} + \dots + s^{2(n+1)}; \\ A_1(s) &= a_0s + a_1s^2 + a_2s^3 + \dots + a_{n-1}s^n + s^{n+1}; \\ B(s) &= b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1}. \end{aligned} \quad (1.171)$$

С учетом (1.171) уравнение синтеза принимает вид

$$\begin{aligned} (a_0s + a_1s^2 + a_2s^3 + \dots + a_{n-1}s^n + s^{n+1})(c_0 + c_1s + c_2s^2 + \dots + c_ns^n + s^{n+1}) + \\ + (b_0 + b_1s + b_2s^2 + \dots + b_{n-1}s^{n-1})(r_0 + r_1s + r_2s^2 + \dots + r_ns^n) = \\ = d_0 + d_1s + d_2s^2 + \dots + d_{2n}s^{2n} + s^{2(n+1)}. \end{aligned} \quad (1.172)$$

Можно видеть, что задача, когда в прямой цепи имеет место один интегратор, в точности совпадает с предыдущей, с тем лишь различием, что вместо степени n в уравнении синтеза берется степень $n+1$. Аналогично изложенному следует поступать и в тех случаях, когда требуется синтезировать систему, обладающую астатизмом более высокого порядка. Более детально с методом можно познакомиться в [59].

Пример 1.5 [117]. В системе, структурная схема которой представлена на рис. 1.81, обозначим

$$W_o(s) = W_y(s)W_{ny}(s)W_o^{-1}(s),$$

где

$$W_y(s) = K_2 \text{ — ПФ усилителя; } W_{cy}(s) = \frac{K_3}{s} \text{ — ПФ исполнительного устройства;}$$

$$W_o(s) = \frac{K_4}{T_4^2s^2 + 2T_4\xi_4s + 1} \text{ — ПФ объекта управления.}$$

Рассмотрим систему, в структурную схему которой не включено корректирующее устройство. Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K_2K_3K_4}{(T_4^2s^2 + 2T_4\xi_4s + 1)s + K_2K_3K_4}.$$

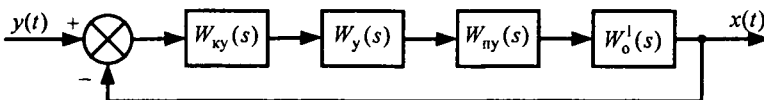


Рис. 1.81. Структурная схема системы автоматического управления

При конкретных значениях параметров можно исследовать устойчивость нескорректированной системы с помощью второй формулировки критерия Михайлова [117]. Имеем

$$W(j\omega) = \frac{a(\omega) + jb(\omega)}{c(\omega) + jd(\omega)},$$

где

$$c(\omega) = -2T_4\xi_4\omega^2 + K_2K_3K_4, \quad d(\omega) = \omega(-T_4^2\omega^2 + 1).$$

В соответствии с критерием Михайлова система устойчива, если $c(0) > 0$ и $d'(0) > 0$ и уравнения $c(\omega) = 0$ и $d(\omega) = 0$ имеют все действительные и перемежающиеся корни, т.е. если между каждыми двумя соседними корнями $d(\omega) = 0$ лежит корень уравнения $c(\omega) = 0$ или между двумя соседними корнями $c(\omega) = 0$ лежит корень уравнения $d(\omega) = 0$.

Критерий перемежаемости корней формулируется так: для устойчивости системы корни должны перемежаться и быть вещественными, а сумма корней должна быть равна порядку уравнения n .

Поскольку

$$W_p(s) = \frac{K_2K_3K_4}{s(T_4^2s^2 + 2T_4\xi_4s + 1)} = \frac{B(s)}{A(s)}; \quad B(s) = b_0; \quad A(s) = s(a_0 + a_1s + s^2),$$

то

$$D(s) = d_0 + d_1s + d_2s^2 + d_3s^3 + d_4s^4 + d_5s^5 + s^6; \quad W_{\text{кв}}(s) = \frac{r_0 + r_1s + r_2s^2}{c_0 + c_1s + c_2s^2 + s^3}.$$

Воспользовавшись методом стандартных коэффициентов, в качестве эталонной ПФ можно выбрать, например, ПФ вида

$$W^3(s) = \frac{\omega_0^6}{s^6 + 6\omega_0s^5 + 15\omega_0^2s^4 + 20\omega_0^3s^3 + 15\omega_0^4s^2 + 6\omega_0^5s + \omega_0^6};$$

$$W^3(s) = \frac{1}{s^6 + 6s^5 + 15s^4 + 20s^3 + 15s^2 + 6s + 1} = \frac{P(s)}{D(s)}.$$

Уравнение синтеза в развернутой форме имеет вид

$$(a_0s + a_1s^2 + s^3)(c_0 + c_1s + c_2s^2 + s^3) + b_0(r_0 + r_1s + r_2s^2) = d_0 + d_1s + d_2s^2 + d_3s^3 + d_4s^4 + d_5s^5 + s^6.$$

Отсюда получим систему линейных алгебраических уравнений для расчета неизвестных коэффициентов:

$$\begin{aligned} b_0r_0 &= d_0; \\ a_0c_0 + b_0r_1 &= d_1; \\ a_0c_1 + a_1c_0 + b_0r_2 &= d_2; \\ a_0c_2 + a_1c_1 + c_0 &= d_3; \\ a_0 + a_1c_2 + c_1 &= d_4; \\ a_1 + c_2 &= d_5. \end{aligned} \tag{1.173}$$

Если ввести в рассмотрение одно столбцовую матрицу

$$\mathbf{q} = (c_0, c_1, c_2, r_0, r_1, r_2),$$

то систему (1.173) для определения неизвестных коэффициентов можно переписать так:

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & b_0 \\ 1 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \\ r_0 \\ r_1 \\ r_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 - a_0 \\ d_5 - a_1 \\ d_0 \end{pmatrix}.$$

1.7. МЕТОД ЭТАЛОННЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Содержание этого метода заключается в следующем. Положим, что синтезируется последовательно включенный регулятор. ПФ объекта управления известна и равна

$$W_o(s) = \frac{B(s)}{A(s)}, \quad \text{а } W_{\text{кв}}(s) = \frac{R(s)}{C(s)} \quad \text{— передаточная функция регулятора, коэффициенты}$$

которой подлежат определению (на степени полиномов $R(s)$ и $C(s)$ никаких ограничений не накладывается).

Если структура регулятора выбрана таким образом, что ПФ замкнутой системы имеет вид

$$W(s) = \frac{b_0^p(p)}{s^n + a_{n-1}^p(p)s^{n-1} + a_{n-2}^p(p)s^{n-2} + \dots + a_0^p(p)}, \quad (1.174)$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ — неизвестные параметры регулятора, то выбирая эталонную ПФ вида (см. п. 1.5)

$$W^3(s) = \frac{\omega_0^n}{s^n + A_1\omega_0 s^{n-1} + A_2\omega_0^2 s^{n-2} + \dots + A_{n-1}\omega_0^{n-1} s + \omega_0^n}, \quad (1.175)$$

легко получить систему алгебраических уравнений для расчета неизвестных параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$:

$$a_{n-1}^p(p) = A_1\omega_0, a_{n-2}^p(p) = A_2\omega_0^2, \dots, a_0^p(p) = \omega_0^n. \quad (1.176)$$

Очевидными являются следующие недостатки метода [58]. Ключевое положение метода заключается в том, что *искомые параметры определяются при решении системы алгебраических уравнений, полученных путём приравнивания коэффициентов при соответствующих степенях s эталонной и реальной передаточных функций системы управления*. Требование $W(s) = W^3(s)$ является во многих случаях, как указывалось выше, трудновыполнимым, поэтому часто имеет место **неразрешимость системы уравнений, определяющей параметры регулятора** (физически это означает, что регулятор заданной структуры не способен выполнить поставленную задачу). Система уравнений оказывается несовместной или её корни комплексными (метод в неявной форме реализует принцип динамической компенсации).

Естественно, многие недостатки математического содержания (например, несовместность алгебраической системы) порождены неучётом многих физических факторов, определяющих физические процессы, протекающие в системе. Такое положение имеет место, как показывает практика, в том случае, если акцент сделан на формальное содержание поставленной задачи без глубокого учёта физических аспектов.

Рассматриваемый метод нашёл достаточно широкое применение при синтезе систем управления летательными аппаратами. *В.А. Боднером показано, что при включении определённым образом параллельных корректирующих устройств система уравнений становится разрешимой* [21]. Однако при этом возникают большие трудности, связанные с технической реализацией корректирующих устройств (необходимость, как указывалось в п. 1.6, иметь дифференцирующие звенья) [21]. *Э.Г. Удерман предложил сделать систему уравнений совместной путём введения соответствующего числа переменных полюсов в эталонную ПФ*.

При решении рассматриваемой задачи в основу необходимо положить её физическое содержание и учитывать связь структуры и параметров $W^3(s)$ со структурой выбираемого регулятора и его техническими возможностями. *Т.М. Соколовым предложено выбирать параметры корректирующего устройства по заданным характеристикам ошибок, при этом специальный подбор коэффициентов ПФ обеспечивает заданную форму переходного процесса, т.е. требуемые показатели колебательности и перерегулирования* [110].

Если процесс проектирования регулятора направлен на достижение высоких показателей, определяющих качество управления, то *часто при заданной $W_0(s)$ можно получить математическое решение, но техническая реализация полученных результатов может встретить трудно преодолимые проблемы, особенно для достаточно*

сложных систем, параметры которых в условиях эксплуатации имеют значительные отклонения от расчётных. Удачное сочетание многих факторов, имеющих место в процессе проектирования регуляторов, характеризующих математическую и физическую стороны проблемы, часто определяется опытом и интуицией разработчиков сложных автоматических систем.

Приведём элементарный пример, в котором поставленная задача имеет решение.

Пример 1.6 [58]. Рассмотрим систему стабилизации скорости вращения двигателя, структурная схема которой представлена на рис. 1.82.

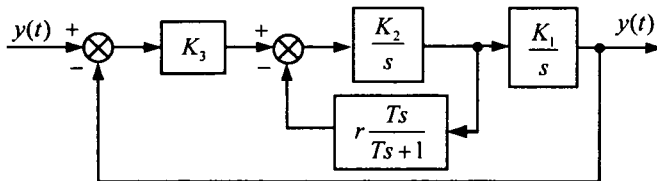


Рис. 1.82. Структурная схема системы стабилизации скорости вращения двигателя

Пусть $K_2 = 15 \text{ с}^{-1}$, $K_1 = 0,2 \text{ с}^{-1}$; задача состоит в нахождении K_3 , r и T .

ПФ разомкнутой и замкнутой системы соответственно имеют вид:

$$W_p(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 (Ts + 1)}{Ts^3 + (1 + rK_2 T)s^2};$$

$$W(s) = \frac{K_1 K_2 K_3 s + \frac{K_1 K_2 K_3}{T}}{s^3 + \left(\frac{1}{T} + rK_2\right)s^2 + K_1 K_2 K_3 s + \frac{K_1 K_2 K_3}{T}}.$$

Выберем эталонную ПФ вида

$$W^3(s) = \frac{\omega_0^3}{s^3 + A_1 \omega_0 s^2 + A_2 \omega_0^2 s + \omega_0^3} = \frac{\omega_0^3}{s^3 + 5,1 \omega_0 s^2 + 6,35 \omega_0^2 s + \omega_0^3}.$$

Если $T_p = 2,5$, $\tau_0 = 5$, то $\omega_0 = 2 \text{ с}^{-1}$.

Для вычисления K_3 , T и r имеет место система алгебраических уравнений:

$$A_1 \omega_0 = \frac{1}{T} + rK_2, \quad \text{или} \quad 5,1 \cdot 2 = \frac{1}{T} + r \cdot 15;$$

$$A_2 \omega_0^2 = K_1 K_2 K_3, \quad \text{или} \quad 6,36 \cdot 4 = 0,2 \cdot 15 \cdot K_3;$$

$$\omega_0^3 = \frac{K_1 K_2 K_3}{T}, \quad \text{или} \quad 8 = \frac{K_3 \cdot 15 \cdot 0,2}{T}.$$

Отсюда находим:

$$K_3 \approx 8,5;$$

$$T \approx 3,18;$$

$$r \approx 0,66.$$

Для устранения недостатков, присущих рассматриваемому методу, весьма эффективным является аппарат математического программирования.

В качестве эталонной ПФ не обязательно выбирать ПФ со стандартными коэффициентами. При проектировании конкретных систем управления эталонной ПФ может служить любая ПФ, обеспечивающая заданное качество управления в переходном и установившемся режимах.

Можно поставить задачу расчета параметров регулятора, обеспечивающего приближение ПФ замкнутой системы, содержащей q неизвестных, к эталонной ПФ $W^3(s)$, с ограничением: введением области заданного расположения полюсов изображения $W(s)$ синтезируемой системы такой, чтобы обеспечить необходимую степень и запас устойчивости и колебательности системы [81].

Пусть $W^3(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m_1} b_k^3 s^k}{\sum_{k=0}^{n_1} a_k^3 s^k}$ — эталонная передаточная функция; $W(s) = \frac{\sum_{k=0}^{m_2} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{n_2} a_k s^k}$ —

передаточная функция замкнутой системы управления, содержащая r искоемых параметров.

Часто целесообразно снять условие равенства $W(s) = W^3(s)$. Тогда из приближённого равенства

$$\sum_{k=0}^{m_1} b_k^3 s^k / \sum_{k=0}^{n_1} a_k^3 s^k \approx \sum_{k=0}^{m_2} b_k s^k / \sum_{k=0}^{n_2} a_k s^k \quad (1.177)$$

следует соотношение

$$\left(\sum_{k=0}^{m_1} b_k^3 s^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{n_2} a_k s^k \right) \approx \left(\sum_{k=0}^{n_1} a_k^3 s^k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{m_2} b_k s^k \right),$$

отсюда сразу же можно записать следующие зависимости:

$$\begin{cases} b_0^3 a_0 - a_0^3 b_0 = \varepsilon_1(p); \\ b_0^3 a_1 + b_1^3 a_0 - a_0^3 b_1 - a_1^3 b_0 = \varepsilon_2(p); \\ b_0^3 a_2 + b_1^3 a_1 + b_2^3 a_0 - a_0^3 b_2 - a_1^3 b_1 - a_2^3 b_0 = \varepsilon_3(p); \\ \dots\dots\dots \\ b_0^3 a_{n_2} + b_1^3 a_{n_2-1} + \dots + b_{m_1}^3 a_{n_2-m_1} - a_0^3 b_{m_2} - a_1^3 b_{m_2-1} - \dots - a_{n_1}^3 b_{m_2-n_2} = \varepsilon_{m_1+n_2-2}(p); \\ b_1^3 a_{n_2} + b_2^3 a_{n_2-1} + \dots + b_{m_1}^3 a_{n_2-m_1+1} - \dots - a_{n_1}^3 b_{m_2-n_2+1} = \varepsilon_{m_1+n_2-1}(p); \\ b_{m_1}^3 a_{n_2} - a_{n_2}^3 b_{m_2} = \varepsilon_{m_1+n_2}(p). \end{cases} \quad (1.178)$$

Параметры регулятора могут быть найдены решением задачи нелинейного программирования

$$I(p) = \sum_{k=1}^{m_1+n_2} \varepsilon_k^2(p) \rightarrow \min_p$$

при выполнении заданных ограничений.

Пример 1.7. Положим, что

$$W^3(s) = \frac{G_0(\alpha_1 s / 2 + 1)}{\alpha_0 s^2 + \alpha_1 s + 1}.$$

Тогда имеет место соотношение

$$W(s) = \frac{K_3 b_1 s + \frac{K_3}{T} b_0}{s^3 + \left(\frac{1}{T} + r K_2 \right) s^2 + K_3 a_1 s + \frac{K_3}{T} a_0} \quad \text{— реальная ПФ замкнутой системы, где } K_3, r \text{ и } T \text{ — пара-}$$

метры регулятора.

Имеем

$$\left(G_0 \frac{\alpha_1}{2} s + 1 \right) \left(s^3 + \left(\frac{1}{T} + r K_2 \right) s^2 + K_3 a_1 s + \frac{K_3}{T} a_0 \right) \approx (\alpha_0 s^2 + \alpha_1 s + 1) \left(K_3 b_1 s + \frac{K_3}{T} b_0 \right).$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} G_0 \frac{\alpha_1}{2} s^4 + G_0 \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{1}{T} + r K_2 \right) s^3 + G_0 \frac{\alpha_1}{2} K_3 a_1 s^2 + G_0 \frac{\alpha_1}{2} \frac{K_3}{T} a_0 s + s^3 + \left(\frac{1}{T} + r K_2 \right) s^2 + K_3 a_1 s + \frac{K_3}{T} a_0 \approx \\ \approx \alpha_0 K_3 b_1 s^3 + \alpha_1 K_3 b_1 s^2 + K_3 b_1 s + \alpha_0 \frac{K_3}{T} b_0 s^2 + \alpha_1 \frac{K_3}{T} b_0 s + \frac{K_3}{T} b_0. \end{aligned}$$

Далее имеем систему соотношений

$$\begin{cases} G_0 \frac{\alpha_1}{2} \left(\frac{1}{T} + rK_2 \right) + 1 - \alpha_0 K_3 b_1 = \varepsilon_1(K_3, r, T), \\ G_0 \frac{\alpha_1}{2} K_3 a_1 + \left(\frac{1}{T} + rK_2 \right) - \alpha_1 K_3 b_1 - \alpha_0 \frac{K_3}{T} b_0 = \varepsilon_2(K_3, r, T), \\ G_0 \frac{\alpha_1}{2} \frac{K_3}{T} a_0 + K_3 a_1 - K_3 b_1 - \alpha_1 \frac{K_3}{T} b_0 = \varepsilon_3(K_3, r, T), \\ \frac{K_3}{T} a_0 - \frac{K_3}{T} b_0 = \varepsilon_4(K_3, r, T). \end{cases}$$

В эталонной ПФ $W^3(s)$ G_0, α_1 и α_0 определяют статизм, время переходного процесса T_y и максимальное отклонение в переходном режиме.

Неизвестные параметры регулятора с использованием заданных ограничений, связанных как с качеством процессов управления, так и с физической реализуемостью системы и с выполнением условий работоспособности, можно найти, решая следующую задачу нелинейного программирования:

$$I(K_3, r, T) = \sum_{k=1}^4 \varepsilon_k^2(K_3, r, T) \rightarrow \min_{K_3, r, T}$$

при выполнении соответствующих ограничений.

При соответствующем обосновании можно полагать, что $W^3(s) = W(s)$; тогда $\varepsilon_i(p) \equiv 0$, $i = \overline{1, m_1 + n_1}$ и (1.178) представляет собой систему алгебраических уравнений, решение которой приводит к нахождению искомых параметров. Приведём соответствующий пример.

Пример 1.8 [81]. Изучим режим малых колебаний при регулировании возбуждения синхронного генератора. Генератор работает через дальнюю передачу на систему $U = \text{const}$. Используются уравнения генератора в упрощенной форме Лебедева–Жданова; учитывается постоянная времени цепи возбуждения. Постоянными времени возбудителя и дифференцирующих звеньев пренебрегаем.

Пусть $\theta(t)$ — угол между вектором ЭДС и вектором напряжения U ; изображение приращения $\theta(t)$ при внезапном малом изменении нагрузки записывается так [81]:

$$\Delta\theta(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

где

$$b_2 = 0,287 - 0,389\beta_2 - 0,632\gamma_2;$$

$$b_1 = 4,86 - 0,389\beta_1 - 0,632\gamma_1;$$

$$b_0 = 10,2;$$

$$a_4 = (1,21 - 1,63\beta_2 - 2,65\gamma_2) \cdot 10^{-2};$$

$$a_3 = (20,5 - 1,63\beta_1 - 0,124\beta_2 + 2,65\gamma_1 + 0,201\gamma_2) \cdot 10^{-2};$$

$$a_2 = (56,8 - 0,124\beta_1 + 29,3\beta_2 - 0,201\gamma_1 - 39,9\gamma_2) \cdot 10^{-2};$$

$$a_1 = 2,13 + 0,293\beta_1 - 0,399\gamma_1;$$

$$a_0 = 6,57.$$

Приведенные зависимости соответствуют номинальному режиму $\theta = 67^\circ$. Величины β_0 и γ_0 , являющиеся коэффициентами усиления при регулировании по отклонениям тока и напряжения от их номинальных значений, приняты равными $\beta_0 = 1,0$; $\gamma_0 = -15,0$.

Задача ставится следующим образом:

- 1) $\Delta\theta(s)$ должно быть близким к эталонному изображению

$$\Delta\theta^3(s) = \frac{62}{(s+2)(s+20)},$$

чем обеспечивается аperiodичность переходного процесса с $T_p = 2,5$ с при максимальной скорости протекания процесса, не превышающей 2,5 рад/с;

- 2) система должна быть слабоколебательной (при колебательности $\text{tg } \psi$, где $\psi < 70^\circ$).

Из соотношения

$$(b_2 s^2 + b_1 s + b_0)(s^2 + 22s + 40) = 62(a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)$$

получаем систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 62a_1 = 22b_0 + 40b_1; \\ 62a_2 = b_0 + 22b_1 + 40b_2; \\ 62a_3 = b_1 + 22b_2; \\ 62a_4 = b_2. \end{cases}$$

Из последней системы находим систему так называемых условных уравнений

$$\begin{cases} 0,6\gamma_1 = 287 - 33,65\beta_1; \\ 13,78\gamma_1 + 0,5\gamma_2 = 82,0 - 8,45\beta_1 - 33,7\beta_2; \\ 2,28\gamma_1 + 14,02\gamma_2 = -1,54 + 0,621\beta_1 - 8,63\beta_2; \\ -1,003\gamma_2 = -0,463 + 0,631\beta_2. \end{cases} \quad (1.179)$$

Воспользовавшись методом наименьших квадратов, получим решение системы (1.179) относительно γ_1 и γ_2 :

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 6,85 - 0,725\beta_1 - 2,44\beta_2; \\ \gamma_2 &= -1,25 + 0,167\beta_1 - 0,221\beta_2. \end{aligned}$$

Теперь характеристическое уравнение системы может быть записано в виде

$$D(s) = 6,57 + (-0,61 + 0,592\beta_1 + 0,975\beta_2)s + (1,052 - 0,0667\beta_1 + 0,386\beta_2)s^2 + \\ + (0,381 - 0,0352\beta_1 - 0,0667\beta_2)s^3 + (4,53 - 0,442\beta_1 - 1,045\beta_2) \cdot 10^{-2}s^4.$$

Исходя из обеспечения заданного запаса устойчивости, найдены численные значения параметров β_1 и β_2 ; они равны: $\beta_1 = 5,3$; $\beta_2 = 1,9$.

Отсюда получаем: $\gamma_1 = -1,63$; $\gamma_2 = -0,78$.

Далее рассмотрим пример, применяющий метод эталонных ПФ для решения достаточно сложной задачи, связанной с управлением летательными аппаратами.

Пример 1.9 [21]. Проведём синтез статической системы управления высотой самолёта, предполагая, что скорость полёта самолёта постоянна. Представим уравнение регулятора в виде

$$\delta_a = (k_{21} + \varepsilon_{21}s) + (k_{22} + \varepsilon_{22}s)\vartheta - k_{21}y. \quad (1.180)$$

На рис. 1.83 представлена структурная схема системы управления.

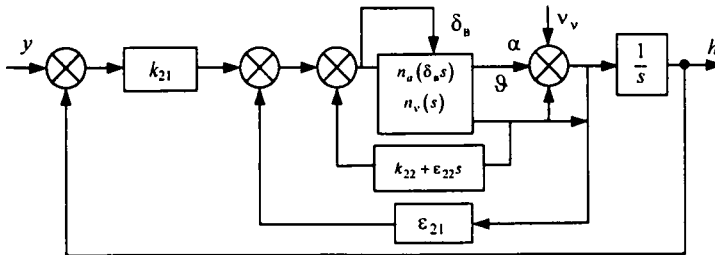


Рис. 1.83. Структурная схема системы управления высотой полёта при воздействии на руль высоты

Уравнения, описывающие поведение системы, имеют вид

$$\begin{aligned} (s^4 + \bar{a}_1 s^3 + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s + \bar{a}_4)\vartheta &= (\bar{b}_0 s + \bar{a}_4)sy, \\ (s^4 + \bar{a}_1 s^3 + \bar{a}_2 s^2 + \bar{a}_3 s + \bar{a}_4)h &= \bar{a}_4 y, \end{aligned} \quad (1.181)$$

где $\bar{a}_1 = c_1 + n_a \varepsilon_{22}$; $\bar{a}_2 = c_2 + n_a (k_{22} + n_{22} \varepsilon_{22})$; $\bar{a}_3 = n_a n_{22} (k_{22} + \varepsilon_{21})$; $\bar{a}_4 = n_a n_{22} k_{21}$; $\bar{b}_0 = n_a k_{21}$.

Устойчивость системы (1.181) следует из соотношения

$$\bar{a}_3 (\bar{a}_1 \bar{a}_2 - \bar{a}_3) - \bar{a}_1^2 \bar{a}_4 > 0, \quad (1.182)$$

причём критический коэффициент усиления k_{21} будет

$$k_{21} = (k_{22} + \varepsilon_{21}) \left[\frac{c_2 + n_a (k_{22} + n_{22} \varepsilon_{22})}{c_1 + n_a \varepsilon_{22}} - \frac{n_a n_{22} (k_{22} + \varepsilon_{21})}{(c_1 + n_a \varepsilon_{22})^2} \right]. \quad (1.183)$$

Отсюда следует, что для увеличения коэффициента k_{21} необходимо увеличить коэффициенты k_{22} , ε_{21} и ε_{22} .

Для выбора оптимальных параметров потребуем, чтобы переходные процессы в системе при возмущениях со стороны сигнала управления были заданными. Поскольку передаточная функция

$$\frac{h}{y} = \frac{\tilde{a}_4}{s^4 + \tilde{a}_1 s^3 + \tilde{a}_2 s^2 + \tilde{a}_3 s + \tilde{a}_4} \quad (1.184)$$

не имеет нулей, то её следует приблизить к передаточной функции

$$W^3(s) = \frac{\Omega^4}{s^4 + A_1 \omega_0 s^3 + A_2 \omega_0^2 s^2 + A_3 \omega_0^3 s + \omega_0^4}, \quad (1.185)$$

где A_1, A_2, A_3 и ω_0 — заданные числа.

Сравнивая соответствующие коэффициенты передаточных функций, находим значения передаточных чисел системы управления:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{1}{n_a} (A_1 \omega_0 - c_1); \\ k_{22} &= \frac{1}{n_a} (A_2 \omega_0^2 - c_2 + n_{22} c_1 - A_1 \omega_0 n_{22}); \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{n_a n_{22}} [A_3 \omega_0^3 - A_2 \omega_0^2 n_{22} + A_1 \omega_0 n_{22}^2 + (c_2 - n_{22} c_1) n_{22}]; \\ k_{21} &= \frac{\omega_0^4}{n_a n_{22}}. \end{aligned} \quad (1.186)$$

Если потребовать, чтобы переходный процесс был апериодическим ($A_1 = A_3 = 4, A_2 = 6$) с временем регулирования, соответствующим частоте $\omega_0 = 5$, для самолёта, имеющего данные $c_1 = 5,5$; $c_2 = 42,0$; $n_a = 46,0$; $n_{22} = 2,4$, то [21]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{4 \cdot 5 - 5,5}{46} = 0,31; \\ k_{22} &= \frac{6 \cdot 5^2 - 42 + 2,4 \cdot 5,5 - 4 \cdot 5 \cdot 2,4}{46} = 1,6; \\ \varepsilon_{21} &= \frac{4 \cdot 5^3 - 6 \cdot 5^2 \cdot 2,4 + 4 \cdot 5 \cdot 2,4^2 + 2,4(42 - 2,4 \cdot 5,5)}{46 \cdot 2,4} = 2,97; \\ k_{21} &= \frac{5^4}{46 \cdot 2,4} = 5,68. \end{aligned}$$

Время управления при выбранных параметрах системы не превышает 5 с. Действительно, так как $\omega_0 = 5$ (ω_0 — безразмерная частота; размерная частота будет $\omega_1 = \frac{\omega_0}{\tau_a}$; τ_a — аэродинамическая посто-

янная времени, которая для рассматриваемого режима полёта составляет 2,5 с), то $T_p = \frac{3\pi\tau_a}{\Omega} = 4,7$ с.

При том же законе управления рассмотрим поведение системы с учётом полных уравнений движения самолёта [21]

$$(s^5 + \tilde{a}_1 s^4 + \tilde{a}_2 s^3 + \tilde{a}_3 s^2 + \tilde{a}_4 s + \tilde{a}_5) y = (\tilde{b}_{0y} s^3 + \tilde{b}_{1y} s^2 + \tilde{b}_{2y} s) u, \quad (1.187)$$

$$(s^5 + \tilde{a}_1 s^4 + \tilde{a}_2 s^3 + \tilde{a}_3 s^2 + \tilde{a}_4 s + \tilde{a}_5) h = (\tilde{b}_{0h} s + \tilde{b}_{1h}) u, \quad (1.188)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{a}_1 &= c_1 + n_a \varepsilon_{22}; \\ \tilde{a}_2 &= c_2 + n_a \varepsilon_{22} + n_a (n_{11} + n_{22}) \varepsilon_{22}; \\ \tilde{a}_3 &= c_3 + n_a (n_{22} - n_{23}) \varepsilon_{21} + n_a (n_{11} + n_{22}) k_{22} + n_a (n_{11} n_{22} + n_{12} n_{21}) \varepsilon_{22}; \\ \tilde{a}_4 &= c_4 + n_a (n_{11} n_{22} + n_{12} n_{21}) k_{22} + n_a (n_{22} - n_{23}) k_{21} + n_a (n_{11} n_{22} + n_{12} n_{21} + n_{13} n_{21} - n_{11} n_{23}) \varepsilon_{21}; \\ \tilde{a}_5 &= n_a (n_{11} n_{22} + n_{12} n_{21} + n_{13} n_{21} - n_{11} n_{23}) k_{21}; \\ \tilde{b}_{0y} &= n_a k_{21}; \\ \tilde{b}_{1y} &= n_a (n_{11} + n_{22}) k_{21}; \end{aligned}$$

$$\tilde{b}_{20} = n_8(n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21})k_{21};$$

$$\tilde{b}_{0h} = n_8(n_{22} - n_{23})k_{21};$$

$$\tilde{b}_{1h} = \tilde{a}_5.$$

Рассмотрим передаточные функции

$$\frac{h}{y} = \frac{\tilde{b}_{0h}s + \tilde{b}_{1h}}{s^5 + \tilde{a}_1s^4 + \tilde{a}_2s^3 + \tilde{a}_3s^2 + \tilde{a}_4s + \tilde{a}_5}; \quad (1.189)$$

$$\frac{g}{y} = \frac{\tilde{b}_{0g}s^3 + \tilde{b}_{1g}s^2 + \tilde{b}_{2g}s}{s^5 + \tilde{a}_1s^4 + \tilde{a}_2s^3 + \tilde{a}_3s^2 + \tilde{a}_4s + \tilde{a}_5}. \quad (1.190)$$

В качестве эталонной принимаем ПФ, определяемую зависимостью (1.185). Воспользовавшись условиями точного совпадения функций, получим соотношения

$$\begin{aligned} \omega_0^4 &= \tilde{b}_{0h}; \\ \tilde{a}_1\omega_0^4 &= \tilde{b}_{0h}A_1\omega_0 + \tilde{b}_{1h}; \\ \tilde{a}_2\omega_0^3 &= \tilde{b}_{0h}A_2\omega_0 + \tilde{b}_{1h}A_1; \\ \tilde{a}_3\omega_0^2 &= \tilde{b}_{0h}A_3\omega_0 + \tilde{b}_{1h}A_2; \\ \tilde{a}_4\omega_0 &= \tilde{b}_{0h}\omega_0 + \tilde{b}_{1h}A_3. \end{aligned} \quad (1.191)$$

Следующий этап решения задачи содержит трудности, о которых говорилось выше. Они заключаются в следующем. Из пяти уравнений необходимо определить параметры регулятора $k_{22}, \varepsilon_{22}, k_{21}, \varepsilon_{21}$, число которых меньше числа уравнений. Ясно, что удовлетворить всем уравнениям (1.191) не представляется возможным, поэтому нельзя передаточную функцию (1.189) сделать в точности равной передаточной функции (1.185). Однако, удовлетворяя четырём уравнениям системы (1.191), мы получим значения параметров регулятора $k_{22}, \varepsilon_{22}, k_{21}, \varepsilon_{21}$, обеспечивающих достаточное приближение функций (1.189) и (1.185) [21].

Из первого уравнения (1.191) находим

$$k_{21} = \frac{\omega_0^4}{n_8(n_{22} - n_{23})}. \quad (1.192)$$

Если известен коэффициент k_{21} , то найдём также $\tilde{b}_{1h} = \tilde{a}_5$. В таком случае имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{22} &= \frac{1}{n_8} \left(A_1\omega_0 + \frac{\tilde{a}_5}{\omega_0^4} - c_1 \right); \\ k_{22} &= \frac{1}{n_8} \left(A_2\omega_0^2 + A_1 \frac{\tilde{a}_5}{\omega_0^3} - c_2 \right) - (n_{11} + n_{22})\varepsilon_{22}; \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{n_8(n_{22} - n_{23})} \left[A_3\omega_0^3 + A_2 \frac{\tilde{a}_5}{\omega_0^2} - c_3 - n_8(n_{11} + n_{22})k_{22} - n_8(n_{11}n_{22} + n_{12}n_{21})\varepsilon_{22} \right]. \end{aligned} \quad (1.193)$$

В качестве примера вычислим передаточные числа системы управления по формулам (1.192) и (1.193) при прежних требованиях к качеству управления ($A_1 = A_3 = 4$, $A_3 = 6$, $\Omega = 5$). Коэффициенты самолёта равны:

$$\tau_a = 4 \text{ с}; n_{11} = 0,048; n_{12} = -0,079; n_{13} = 0,17; n_{14} = -4,2 \cdot 10^{-4};$$

$$n_{21} = -0,68; n_{12} = 2,4; n_{23} = 0; n_{24} = -1,2 \cdot 10^{-2};$$

$$n_{31} = -1,2; n_{32} = 36,0; n_{33} = 2,42; n_{34} = -0,05;$$

$$n_0 = 0,68; n_8 = 46,0; n_p = 0,02.$$

Находим:

$$k_{21} = \frac{5^4}{46 \cdot 2,4} = 5,68; a_5 = 46 \cdot 5,68(0,048 \cdot 2,4 + 0,079 \cdot 0,68 - 0,17 \cdot 0,68) = 14,1;$$

$$\varepsilon_{22} = \frac{1}{46} \left(4 \cdot 5 + \frac{14,1}{5^4} - 5,55 \right) = 0,315;$$

$$k_{22} = \frac{1}{46} \left(6 \cdot 5^2 + 4 \cdot \frac{14,1}{5^3} - 42 \right) - (0,048 + 2,4) \cdot 0,315 = 1,58;$$

$$\varepsilon_{21} = \frac{1}{46 \cdot 2,4} \left[4 \cdot 5^3 + 6 \cdot \frac{14,1}{5^2} - 2,26 - 46 \cdot 2,448 \cdot 1,58 - 46(0,048 \cdot 2,4 + 0,079 \cdot 0,68) \cdot 0,315 \right] = 2,9.$$

Сравнение показывает, что как в системе (1.184), так и в системе (1.189) можно получить практически одни и те же переходные процессы. Так в чём же разница между этими системами? Ведь для одной из них порядок знаменателя передаточной функции равен 4, а для другой 5. Эта разница состоит в следующем. При выбранных параметрах системы управления передаточная функция (1.189) имеет четырёхкратный полюс — $\omega_0 = -5$, и однократный полюс — $\frac{a_5}{5^4} = -0,0226$ (рис. 1.84).



Рис. 1.84. График распределения нулей и полюсов

Этому последнему полюсу соответствует, вообще говоря, медленное аperiodическое движение, вызываемое медленным изменением скорости полёта самолёта. Если осуществить приближение передаточных функций (1.189) и (1.185), то нуль числителя (1.189) становится равным нулю знаменателя, т.е. полюсу — $-0,0226$, и указанное медленное движение не возникает (рис. 1.84). Если, однако, учесть, что точное приближение, а следовательно, точное совпадение полюса и нуля передаточной функции невозможно вследствие изменения коэффициентов самолёта в различных условиях полёта, то на переходный процесс, определяемый передаточной функцией (1.185), будет накладываться медленное движение, соответствующее малому полюсу $-0,0226$. Другими словами, процесс в системе (1.189) при одних и тех же передаточных числах будет хуже, чем в системе (1.184).

Кроме того, медленное движение, соответствующее малому полюсу $-0,0226$, будет проявляться и в том случае, когда на систему действуют другие возмущения, отличные от сигнала перенастройки.

Из рассмотренных положений следует, что принцип динамической компенсации при изменении условий работы системы, приводящих к неполной компенсации динамических характеристик из-за неточного совпадения значений нулей и полюсов, может приводить к появлению колебаний (в рассматриваемом случае на исходный процесс накладывается медленное движение).

Рассмотрим астатическую систему автоматического управления высотой полёта [21]. Сигнал рассогласования по высоте будем подавать в канал управления рулём высоты. Закон управления имеет вид

$$s\delta_a = (k_{22} + \varepsilon_{22}s + \eta_{22}s^2)\vartheta + (k_{21} + \varepsilon_{21}s + \eta_{21}s^2)h - k_{21}y. \quad (1.194)$$

На рис. 1.85 представлена структурная схема рассматриваемой системы управления.

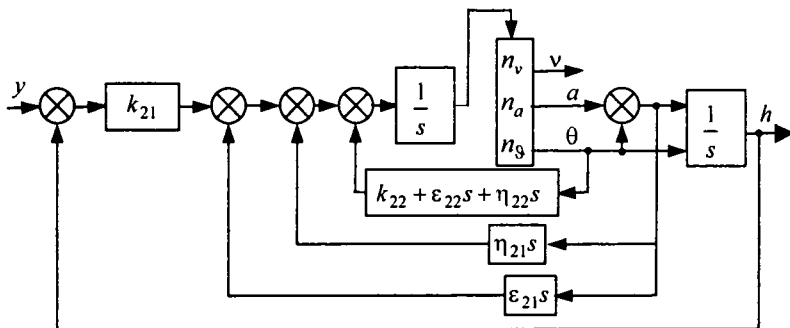


Рис. 1.85. Структурная схема астатической системы управления высотой полёта при воздействии на руль высоты

Уравнения системы имеют вид

$$(s^5 + \tilde{a}_1 s^4 + \tilde{a}_2 s^3 + \tilde{a}_3 s^2 + \tilde{a}_4 s + \tilde{a}_5)h = \tilde{a}_5 y; \quad (1.195)$$

$$(s^5 + \tilde{a}_1 s^4 + \tilde{a}_2 s^3 + \tilde{a}_3 s^2 + \tilde{a}_4 s + \tilde{a}_5)\vartheta = \tilde{a}_5 s y, \quad (1.196)$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{a}_1 &= c_1 + n_{\#} \eta_{22}; \\ \tilde{a}_2 &= c_2 + n_{\#} (\varepsilon_{22} + n_{22} \eta_{22}); \\ \tilde{a}_3 &= n_{\#} (k_{22} + n_{22} \varepsilon_{22} + n_{22} \eta_{21}); \\ \tilde{a}_4 &= n_{22} n_{\#} (k_{22} + \varepsilon_{21}); \\ \tilde{a}_5 &= n_{\#} n_{22} k_{21}.\end{aligned}$$

Выбор параметров системы осуществляется на основе приближения передаточной функции

$$\frac{h}{y} = \frac{\tilde{a}_5}{s^5 + \tilde{a}_1 s^4 + \tilde{a}_2 s^3 + \tilde{a}_3 s^2 + \tilde{a}_4 s + \tilde{a}_5} \quad (1.197)$$

к стандартной передаточной функции

$$W^3(s) = \frac{\Omega^5}{s^5 + A_1 \omega_0 s^4 + A_2 \omega_0^2 s^3 + A_3 \omega_0^3 s^2 + A_4 \omega_0^4 s + \omega_0^5}, \quad (1.198)$$

в которой A_1, A_2, A_3, A_4 и ω_0 — заданные числа, связанные с требованиями к качеству переходного процесса.

Из сравнения коэффициентов функций (1.197) и (1.198) находим

$$\begin{aligned}\eta_{22} &= \frac{1}{n_{\#}} (A_1 \omega_0 - c_1); \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{n_{\#}} (A_2 \omega_0^2 - c_2 - A_1 \omega_0 n_{22} + n_{22} c_1); \\ k_{22} &= \frac{1}{n_{\#}} [A_3 \omega_0^3 - A_2 \omega_0^2 n_{22} + A_1 \omega_0 n_{22}^2 + n_{22} (c_2 - n_{22} c_1) - n_{22} \eta_{21}]; \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{n_{\#} n_{22}} [A_4 \omega_0^4 - A_3 \omega_0^3 n_{22} + A_2 \omega_0^2 n_{22}^2 - A_1 \omega_0 n_{22}^3 - n_{22}^2 (c_2 - n_{22} c_1) + n_{22}^2 \eta_{21}]; \\ k_{21} &= \frac{\omega_0^5}{n_{\#} n_{22}}.\end{aligned} \quad (1.199)$$

Поскольку из пяти уравнений, получаемых из условий приближения, можно определить только пять передаточных чисел из шести неизвестных $\varepsilon_{21}, k_{21}, \eta_{21}, \varepsilon_{22}, k_{22}, \eta_{22}$, то одно передаточное число может быть выбрано произвольно. Будем полагать, что $\eta_{21} = 0$.

Задавая $A_1 = A_4 = 5$, $A_2 = A_3 = 10$ (кратные корни); $\omega_0 = 5$, найдём передаточные числа при значениях коэффициентов уравнения движения самолёта $c_1 = 5,5$; $c_2 = 42$; $n_{22} = 2,4$; $n_{\#} = 46$. Пользуясь выражениями (1.199), найдём

$$\begin{aligned}\eta_{22} &= \frac{1}{46} (5 \cdot 5 - 5,5) = 0,424; \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{46} (10 \cdot 5^2 - 42 - 5 \cdot 5 \cdot 2,4 + 2,4 \cdot 5,5) = 3,5; \\ k_{22} &= \frac{1}{46} [10 \cdot 5^3 - 10 \cdot 5^2 \cdot 2,4 + 5 \cdot 5 \cdot 2,4^2 + 2,4 (42 - 2,4 \cdot 55,5)] = 18,7; \\ \varepsilon_{21} &= \frac{1}{46 \cdot 2,4} [5 \cdot 5^4 - 2,4 \cdot 46 \cdot 18,7] = 9,7; \\ k_{21} &= \frac{5^5}{46 \cdot 2,4} = 28,4.\end{aligned}$$

1.8. МЕТОД ЭТАЛОННЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗОМКНУТЫХ СИСТЕМ

При рассмотрении принципа динамической компенсации были использованы взаимосвязанные соотношения

$$W_p^3(s) = W_{\text{кy}}(s) \cdot W_o(s)$$

и

$$W_{\text{кy}}(s) = W_o^{-1}(s) \cdot W_p^3(s).$$

В эти зависимости входит эталонная передаточная функция разомкнутой системы $W_p^3(s)$. Выше был рассмотрен метод стандартных коэффициентов построения эталонной передаточной функции $W^3(s)$ замкнутой системы. Алгоритм синтеза регулятора упрощается, если пользоваться эталонной (стандартной) передаточной функцией разомкнутой системы $W_p^3(s)$, которую легко найти, зная $W^3(s)$.

Если

$$W^3(s) = \frac{\omega_0^n}{s^n + A_1 \omega_0 s^{n-1} + A_2 \omega_0^2 s^{n-2} + \dots + A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n},$$

то

$$W_p^3(s) = \frac{W^3(s)}{1 - W^3(s)} = \frac{\omega_0^n}{s(s^{n-1} + A_1 \omega_0 s^{n-2} + \dots + A_{n-1} \omega_0^{n-1})}.$$

Последняя ПФ имеет один нулевой полюс, и, следовательно, реализуется система с астатизмом первого порядка.

Если же в качестве эталонной ПФ замкнутой системы имеет место ПФ вида

$$W^3(s) = \frac{A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n}{s^n + A_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n},$$

то эталонная ПФ разомкнутой системы запишется так:

$$W_p^3(s) = \frac{A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n}{s^2 (s^{n-2} + A_1 \omega_0 s^{n-3} + \dots + A_{n-2} \omega_0^{n-2})}$$

и, таким образом, система имеет астатизм второго порядка.

Аналогично, если

$$W^3(s) = \frac{A_{n-2} \omega_0^{n-2} s^2 + A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n}{s^n + A_1 \omega_0 s^{n-1} + \dots + A_{n-2} \omega_0^{n-2} s^2 + A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n},$$

то

$$W_p^3(s) = \frac{A_{n-2} \omega_0^{n-2} s^2 + A_{n-1} \omega_0^{n-1} s + \omega_0^n}{s^3 (s^{n-3} + A_1 \omega_0 s^{n-4} + \dots + A_{n-3} \omega_0^{n-3})}.$$

Пример 1.10. Найдем эталонную передаточную функцию разомкнутой системы при следующих условиях: первый член прогрессии равен 0,063; разность прогрессии 0,867 и $\tau_0 = 13$; система должна иметь астатизм второго порядка.

Из табл. 1.7 имеем

$$W^3(s) = \frac{18\omega_0^4 s + \omega_0^5}{s^5 + 9\omega_0 s^4 + 29\omega_0^2 s^3 + 38\omega_0^3 s^2 + 18\omega_0^4 s + \omega_0^5}.$$

Тогда формула, определяющая $W_p^3(s)$, имеет вид

$$W_p^3(s) = \frac{18\omega_0^4 s + \omega_0^5}{s^5 + 9\omega_0 s^4 + 29\omega_0^2 s^3 + 38\omega_0^3 s^2}.$$

Аналогичным образом можно рассчитать и построить таблицы, ориентированные на решение класса задач синтеза регуляторов. Приведем одну из таких таблиц (см. табл. 1.9, она составлена на основе данных, приведенных в табл. 1.7).

Перейдем к изложению содержания метода. Исходные данные:

- структурная схема системы ($W_0(s)$ — ПФ всех функционально необходимых элементов);
- порядок астатизма;

- величина перерегулирования $\sigma\%$;
- время переходного процесса T_y .

Таблица 1.9

Таблица, ориентированная на решение класса задач синтеза регуляторов

№ п/п	m	n	$\sigma, \%$	K	$W_p^3(s)$	τ_0
1	1	2	5	$\frac{\omega_0}{1,4}$	$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 1,4\omega_0 s}$	5
2	1	3	8	$\frac{\omega_0}{2}$	$\frac{\omega_0^3}{s^3 + 2\omega_0 s^2 + 2\omega_0^2 s}$	7
3	1	4	10	$\frac{\omega_0}{2,6}$	$\frac{\omega_0^4}{s^4 + 2,6\omega_0 s^3 + 3,4\omega_0^2 s^2 + 2,6\omega_0^3 s}$	9
4	2	2	10	ω_0^2	$\frac{2,5\omega_0 s + \omega_0^2}{s}$	7
5	2	3	10	$\frac{\omega_0^2}{5,1}$	$\frac{6,3\omega_0^2 s + \omega_0^3}{s^3 + 5,1\omega_0 s^2}$	9
6	2	4	10	$\frac{\omega_0^2}{16}$	$\frac{11,8\omega_0^3 s + \omega_0^4}{s^4 + 7,22\omega_0 s^3 + 16,3\omega_0^2 s^2}$	11
7	2	5	10	$\frac{\omega_0^2}{38}$	$\frac{18\omega_0^4 s + \omega_0^5}{s^5 + 9\omega_0 s^4 + 29\omega_0^2 s^3 + 38\omega_0^3 s^2}$	13
8	2	6	10	$\frac{\omega_0^2}{73}$	$\frac{25\omega_0^5 s + \omega_0^6}{s^6 + 11\omega_0 s^5 + 43\omega_0^2 s^4 + 83\omega_0^3 s^3 + 73\omega_0^4 s^2}$	15
9	2	7	10	$\frac{\omega_0^2}{163}$	$\frac{44\omega_0^6 s + \omega_0^7}{s^7 + 13\omega_0 s^6 + 66\omega_0^2 s^5 + 173\omega_0^3 s^4 + 238\omega_0^4 s^3 + 163\omega_0^5 s^2}$	17
10	2	8	10	$\frac{\omega_0^2}{313}$	$\frac{68\omega_0^7 s + \omega_0^8}{s^8 + 15\omega_0 s^7 + 92\omega_0^2 s^6 + 299\omega_0^3 s^5 + 554\omega_0^4 s^4 + 579\omega_0^5 s^3 + 313\omega_0^6 s^2}$	19
11	2	9	10	$\frac{\omega_0^2}{587}$	$\frac{106\omega_0^8 s + \omega_0^9}{s^9 + 17\omega_0 s^8 + 121\omega_0^2 s^7 + 476\omega_0^3 s^6 + 1114\omega_0^4 s^5 + 1581\omega_0^5 s^4 + 1320\omega_0^6 s^3 + 587\omega_0^7 s^2}$	21
12	2	10	10	$\frac{\omega_0^2}{988}$	$\frac{151\omega_0^9 s + \omega_0^{10}}{s^{10} + 19\omega_0 s^9 + 152\omega_0^2 s^8 + 691\omega_0^3 s^7 + 1941\omega_0^4 s^6 + 3464\omega_0^5 s^5 + 3908\omega_0^6 s^4 + 2666\omega_0^7 s^3 + 988\omega_0^8 s^2}$	23

Основной идеей метода является приближение с помощью подбора структуры и параметров КУ реальной ПФ к некоторой эталонной, причем последняя обладает необходимым порядком астатизма (что обеспечивает заданную точность в установившемся режиме работы) и включает параметр ω_0 , который обеспечивает необходимое быстродействие через нормированное время переходного процесса. Величина перерегулирования $\sigma\%$, не превышающая известной величины, заданной в процентах, обеспечена подбором коэффициентов эталонной ПФ.

Эталонная ПФ некоторых разомкнутых систем приведены в табл. 1.9. Если заданы: время переходного процесса T_y ; перерегулирование $\sigma\%$; порядок ПФ (согласуется с порядком ПФ неизменяемой части), то по таблице можно найти нужную эталонную ПФ разомкнутой системы, причем относительное время переходного процесса $\tau_0 = \omega_0 T_y$.

Поскольку $\omega_0 = \tau_0 / T_y$, τ_0 находится из таблицы, а T_y — задано, то можно рассчитать значение параметра ω_0 и, следовательно, ПФ разомкнутой системы. Таким образом, эталонная ПФ разомкнутой системы, обеспечивающая заданные параметры переходного процесса и значение динамической ошибки замкнутой системы, известна. Обозначим ее

$$W_p^3(s) = \frac{b_m^3 s^m + b_{m-1}^3 s^{m-1} + \dots + b_0^3}{a_n^3 s^n + a_{n-1}^3 s^{n-1} + \dots + a_0^3}. \quad (1.200)$$

В (1.200) все численные значения коэффициентов числителя $\{b_0^3, b_1^3, \dots, b_m^3\}$ и знаменателя $\{a_0^3, a_1^3, \dots, a_n^3\}$ известны.

Далее подбирается структура наиболее простого КУ таким образом, чтобы имело место равенство

$$W_o(s)W_{ky}(s, p) = W_p^3(s), \text{ где } W_{ky}(s, p) = \frac{b_{m_1}^{ky}(p)s^{m_1} + \dots + b_0^{ky}(p)}{a_{n_1}^{ky}(p)s^{n_1} + \dots + a_0^{ky}(p)}.$$

Пусть

$$W_o(s) \cdot W_{ky}(s, p) = \frac{b_m(p)s^m + b_{m-1}(p)s^{m-1} + \dots + b_0(p)}{a_n(p)s^n + a_{n-1}(p)s^{n-1} + \dots + a_0(p)}, \quad (1.201)$$

где p — параметры КУ, подлежащие определению. Для расчета p можно воспользоваться следующими соображениями.

Поскольку в идеальном случае справедливо равенство

$$\frac{b_m^3 s^m + b_{m-1}^3 s^{m-1} + \dots + b_0^3}{a_n^3 s^n + a_{n-1}^3 s^{n-1} + \dots + a_0^3} = \frac{b_m(p)s^m + b_{m-1}(p)s^{m-1} + \dots + b_0(p)}{a_n(p)s^n + a_{n-1}(p)s^{n-1} + \dots + a_0(p)},$$

то отсюда легко записать:

$$\begin{aligned} a_0(p) &= a_0^3, \quad a_1(p) = a_1^3, \quad \dots, \quad a_n(p) = a_n^3, \\ b_0(p) &= b_0^3, \quad b_1(p) = b_1^3, \quad \dots, \quad b_m(p) = b_m^3. \end{aligned} \quad (1.202)$$

В последней системе имеют место следующие факторы: система относительно $p_1, p_2, \dots, p_k$, как правило, нелинейна; число уравнений не всегда совпадает с числом неизвестных, что вызывает определенные трудности [19].

Метод можно применять лишь в простейших случаях, например на первом этапе решения задачи синтеза регулятора при значительном упрощении математических моделей. Часто целесообразно снять требование $W_p^3(s) = W_o(s)W_{ky}(s)$. С инженерной точки зрения и с учётом степени сложности вычислительной схемы, реализующей (1.202), более конструктивным является алгоритм вычисления неизвестных параметров $p_1, p_2, \dots, p_k$, сводящийся к оптимизационной процедуре

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \left[\sum_{k=0}^n (a_k^3 - a_k(p))^2 + \sum_{k=0}^m (b_k^3 - b_k(p))^2 \right] \rightarrow \min_{p_i, i=1, r}.$$

При таком подходе роль нелинейных зависимостей не всегда является определяющей, нет необходимости иметь равенство числа уравнений числу неизвестных $p_1, p_2, \dots, p_r$; более того, можно наложить некоторые ограничения на параметры, характеризующие качество управления в случае систем, описываемых ДУ высокого порядка.

Пример 1.11. Рассмотрим простейший пример, иллюстрирующий алгоритм расчета параметров регулятора методом эталонной ПФ разомкнутой системы.

Пусть ПФ разомкнутой системы имеет вид

$$W_p(s) = \frac{K_e(T_1 s + 1)}{s^2(T_2 s + 1)}.$$

Задача заключается в нахождении таких параметров K_e , T_1 , T_2 , которые обеспечили бы время переходного процесса $T_p \leq 1,5$ с, а величину перерегулирования $\sigma \leq 10\%$.

В качестве эталонной ПФ разомкнутой системы выберем ПФ вида

$$W_p^2(s) = \frac{\frac{\omega_0^2}{5,1} \left(1 + \frac{6,3}{\omega_0} s \right)}{s^2 \left(1 + \frac{1}{5,1\omega_0} s \right)}.$$

Из сравнения $W_p(s)$ и $W_p^2(s)$ легко получить следующие равенства:

$$K_e = \frac{\omega_0^2}{5,1}; \quad T_1 = \frac{6,3}{\omega_0}; \quad T_2 = \frac{1}{5,1\omega_0}.$$

Поскольку $\omega_0 = \frac{\tau_0}{T_p} = \frac{9}{1,5} = 6 \text{ с}^{-1}$, то $K_e = 7,05 \text{ с}^{-2}$, $T_1 = 1,05 \text{ с}$, $T_2 = 0,032 \text{ с}$.

Пример 1.12. Рассмотрим канал управления креном ракеты. ПФ замкнутой системы без регулятора определяется зависимостью

$$W(s) = \frac{K_{np} K_\gamma}{T_\gamma s^2 + s + K_{np} K_\gamma}.$$

Пусть $W_{xy}(s) = K + \frac{K_n}{s}$ — последовательный пропорционально-интегральный регулятор (положим, что $K_{I\gamma} = 1$). Тогда передаточная функция разомкнутой системы с регулятором определяется формулой

$$W_p(s) = \frac{(Ks + K_n) K_{np} K_\gamma}{s^2 (T_\gamma s + 1)} = \frac{K_{np} K_\gamma K s + K_{np} K_\gamma K_n}{T_\gamma s^3 + s^2} = \frac{\frac{K_{np} K_\gamma K}{T_\gamma} s + \frac{K_{np} K_\gamma K_n}{T_\gamma}}{s^3 + (s^2 / T_\gamma)}.$$

Положим, что порядок астатизма равен 2, $\sigma < 10\%$, а время переходного процесса T_γ — задано.

Как и в предыдущем примере, эталонная ПФ имеет вид

$$W_p^3(s) = \frac{6,3\omega_0^2 s + \omega_0^3}{s^3 + 5,1\omega_0 s^2}.$$

Из равенства $W_p(s) = W_p^3(s)$ следует система уравнений:

$$\frac{1}{T_\gamma} = 5,1\omega_0; \quad \frac{K_{np} K_\gamma K}{T_\gamma} = 6,3\omega_0^2; \quad \frac{K_{np} K_\gamma K_n}{T_\gamma} = \omega_0^3.$$

В рассматриваемом подходе величина ω_0 зависит от известной постоянной времени ракеты по каналу крена T_γ , из этого следует

$$\omega_0 = \frac{1}{5,1 T_\gamma}.$$

С другой стороны, через величину ω_0 определяется время переходного процесса T_γ ; оно равно

$$T_\gamma = \frac{\tau_0}{\omega_0} = 45,9 T_\gamma.$$

Последней формулой при принятой структуре регулятора определяется время переходного процесса канала управления креном.

Из соотношений, приведенных выше, сразу же находим численные значения параметров регулятора K и K_n ; они равны

$$K = \frac{6,3\omega_0^2 T_\gamma}{K_{\text{пр}} K_\gamma}; \quad K_n = \frac{\omega_0^3 T_\gamma}{K_{\text{пр}} K_\gamma}.$$

Если $T_\gamma = 0,03$ с; $K_{\text{пр}} K_\gamma = 300$, то

$$\omega_0 = \frac{1}{5,1 T_\gamma} = 6,5359; \quad K = 0,0269;$$

$$K_n = 0,0279; \quad T_\gamma = 45,9 \cdot 0,03 = 1,377 \text{ с}.$$

На рис. 1.86–1.89 приведены переходные характеристики и амплитудно-частотные характеристики системы управления каналом крена ракеты.

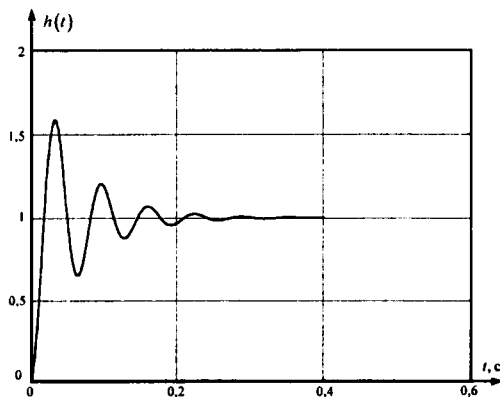


Рис. 1.86. График переходной характеристики нескорректированной системы

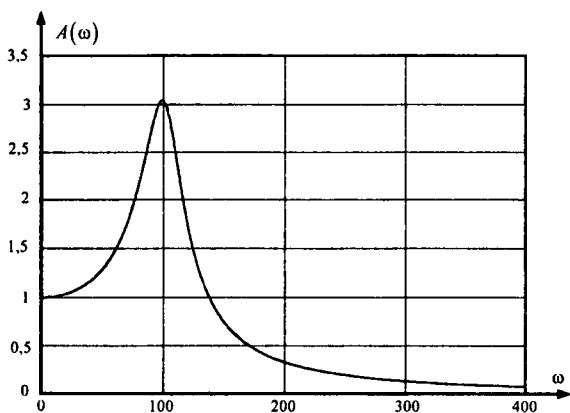


Рис. 1.87. АЧХ нескорректированной системы

Известно, что наиболее конструктивный путь решения задач синтеза регуляторов — это использование методов нелинейного программирования. При этом показатели качества стационарного и переходного режимов обеспечиваются приближенно при безусловном обеспечении устойчивости и грубости (по варьируемым параметрам) системы с синтезированными параметрами. Кроме этого, могут быть наложены ограничения на параметры, колебательность и др.

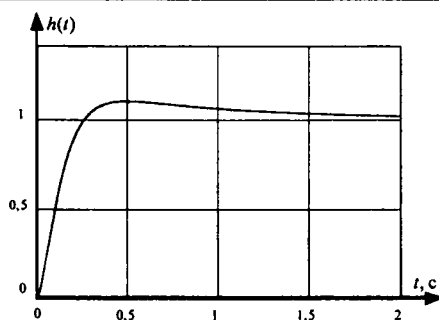


Рис. 1.88. График переходной характеристики системы с регулятором

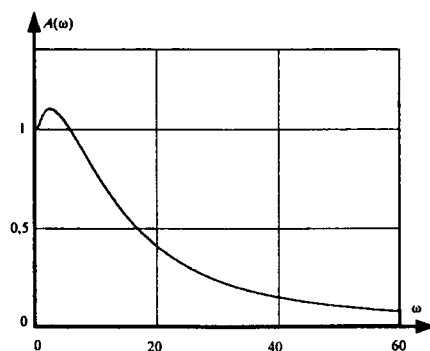


Рис. 1.89. АЧХ системы с регулятором

1.9. СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ЛЯГЕРРА

1.9.1. Постановка задачи

Пусть $\Phi(t) = (\varphi_1(t), \varphi_2(t), \dots, \varphi_l(t), \dots)$ — ортонормированный базис. Полагаем, что задана эталонная ПФ замкнутой системы $W_3(s)$ и ПФ объекта $W_o(s)$, причем $L^{-1}\{W_3(s)\} = k_3(\tau) \in L^2[0, \infty)$ и $L^{-1}\{W_o(s)\} = k_o(\tau) \in L^2[0, \infty)$. Представим $k_3(\tau)$ и $k_o(\tau)$ в виде разложения по ОНБ:

$$k_3(\tau) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^{k_3} \varphi_v(\tau) \quad \text{и} \quad k_o(\tau) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^{k_o} \varphi_v(\tau). \quad (1.203)$$

Матрицы $C^{k_3} = (c_1^{k_3}, c_2^{k_3}, \dots, c_l^{k_3}, \dots)^T$ и $C^{k_o} = (c_1^{k_o}, c_2^{k_o}, \dots, c_l^{k_o}, \dots)^T$ называются спектральными характеристиками соответственно эталонной системы и объекта управления в выбранном базисе $\Phi(t)$.

Положим, что построены алгоритмы, позволяющие рассчитать спектральную характеристику $C^{k_{\text{кн}}} = (c_1^{k_{\text{кн}}}, c_2^{k_{\text{кн}}}, \dots, c_l^{k_{\text{кн}}}, \dots)^T$ регулятора, если известны C^{k_3} и C^{k_o} при условии, что $k_{\text{кн}}(\tau) \in L[0, \infty)$, а все элементы $\varphi_i(t)$, $i = 1, 2, \dots$ преобразуемы по Лап-

ласу и возможна физическая реализация в аналоговой или цифровой форме элементов, имеющих ИПФ $\varphi_i(\tau)$, $i = 1, 2, \dots, l, \dots$. Если построена ИПФ регулятора в виде

$$k_{\text{кy}}(\tau) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^{k_{\text{кy}}} \varphi_v(\tau),$$

то ПФ регулятора может быть представлена так:

$$W_{\text{кy}}(s) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^{k_{\text{кy}}} \Phi_v(s). \quad (1.204)$$

Поскольку известна структура регулятора в форме (1.204), то структурную схему регулятора можно изобразить в виде (рис. 1.90).

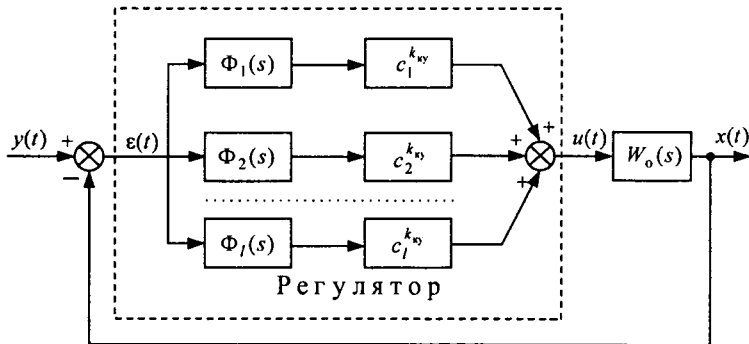


Рис. 1.90. Структурная схема системы

Далее рассмотрим алгоритм синтеза системы, структурная схема которой представлена на рис. 1.90, используя в качестве базиса функции Лягерра.

1.9.2. АЛГОРИТМ РАСЧЕТА СПЕКТРАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕГУЛЯТОРА

Положим, что задана эталонная ПФ замкнутой системы $W_3(s)$; тогда

$$W_3(s) = \frac{W_{\text{кy}}(s)W_o(s)}{1 + W_{\text{кy}}(s)W_o(s)}, \quad (1.205)$$

где $W_{\text{кy}}(s)$ — ПФ регулятора, $W_o(s)$ — ПФ объекта управления. Поскольку справедливы зависимости

$$W_3(s) + W_3(s)W_{\text{кy}}(s)W_o(s) = W_{\text{кy}}(s)W_o(s)$$

и

$$W_3(s) = W_{\text{кy}}(s)[W_o(s) - W_o(s)W_3(s)],$$

то

$$W_3(s) = W_{\text{кy}}(s)W_c(s), \quad (1.206)$$

где $W_c(s) = W_o(s) - W_o(s)W_3(s)$.

Обозначая

$$k_3(\tau) = L^{-1}\{W_3(s)\}, \quad k_c(\tau) = L^{-1}\{W_o(s) - W_o(s)W_3(s)\},$$

можно записать интегральное уравнение, определяющее ИПФ регулятора:

$$k_3(t) = \int_0^t k_c(t-\tau)k_{\text{кy}}(\tau)d\tau. \quad (1.207)$$

Предполагая, что

$$k_s(t) \in L^2[0, \infty), \quad k_c(t) \in L^2[0, \infty), \quad k_{ky}(t) \in L^2[0, \infty),$$

представляя их в виде разложения по функциям Лягерра

$$k_s(t) \approx \sum_{v=0}^l c_v^{k_s} L_v(t), \quad k_c(t) \approx \sum_{v=0}^l c_v^{k_c} L_v(t), \quad k_{ky}(t) \approx \sum_{v=0}^l c_v^{k_{ky}} L_v(t) \quad (1.208)$$

и подставляя последние зависимости в (1.203), получим систему алгебраических уравнений для расчета неизвестного вектора

$$C^{k_{ky}} = \left(c_0^{k_{ky}}, c_1^{k_{ky}}, c_2^{k_{ky}}, \dots, c_l^{k_{ky}} \right)^T.$$

Эта система имеет вид

$$c_p^{k_s} = \sum_{v_1=0}^l \sum_{v_2=0}^l c_{v_1}^{k_c} c_{v_2}^{k_{ky}} c_{v_1 v_2}^p, \quad p = \overline{0, l}, \quad (1.209)$$

где

$$\begin{aligned} c_{v_1 v_2}^p &= \int_0^t \int_0^t L_{v_1}(\tau) L_{v_2}(t-\tau) d\tau L_p(t) dt = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если } v_1 + v_2 = p+1 \text{ и } v_1 \leq p, v_2 \leq p; \\ -\frac{1}{\sqrt{k}}, & \text{если } v_1 + v_2 = p \text{ и } v_1 \leq p, v_2 \leq p; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases} \end{aligned} \quad (1.210)$$

Поскольку

$$\sum_{v=0}^{\infty} c_v^3 L_v(t) = \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_2=0}^{\infty} c_{v_1}^{k_c} c_{v_2}^{k_{ky}} \cdot \int_0^t L_{v_1}(\tau) L_{v_2}(t-\tau) d\tau, \quad (1.211)$$

а после умножения последнего равенства на $L_0(t), L_1(t), \dots, L_l(t), \dots$ и интегрирования на промежутке $[0, \infty)$ легко получить

$$c_p^3 = \sum_{v_1=0}^{\infty} \sum_{v_2=0}^{\infty} c_{v_1}^{k_c} c_{v_2}^{k_{ky}} \cdot \underbrace{\int_0^t \int_0^t L_{v_1}(\tau) L_{v_2}(t-\tau) d\tau L_p(t) dt}_{c_{v_1 v_2}^p}, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

отсюда следует (1.209). Последняя система является треугольной; в этой системе одностолбцовые матрицы

$$C^{k_s} = \left(c_0^{k_s}, c_1^{k_s}, c_2^{k_s}, \dots, c_l^{k_s} \right)^T$$

и

$$C^{k_c} = \left(c_0^{k_c}, c_1^{k_c}, c_2^{k_c}, \dots, c_l^{k_c} \right)^T$$

известны.

Таким образом, формулой

$$k_{ky}(\tau) = \sum_{v=0}^l c_v^{k_{ky}} L_v(\tau)$$

определены структура и параметры регулятора.

Метод можно применять в случае, если используется промежуток $[0, T]$; тогда в качестве базиса целесообразно использовать ортонормированные системы, определённые на $[0, T]$ (важно, чтобы ИПФ не содержали дельта-функций).

Пример 1.13. Пусть объект управления определяется ПФ

$$W_o(s) = \frac{1,4}{T_1 T_2 s^3 + (2T_1 T_2 \xi + T_2^2) s^2 + (T_1 + 2T_2 \xi) s + 1},$$

$$T_1 = 0,4; \quad T_2 = 0,3; \quad \xi = 0,4.$$

Переходная характеристика

$$h(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W_o(s)}{1 + W_o(s)} \frac{1}{s} \right\} \text{ и ИПФ } k(t) = L^{-1} \left\{ \frac{W_o(s)}{1 + W_o(s)} \right\}$$

нескорректированной системы представлены на рис. 1.91 и 1.92.

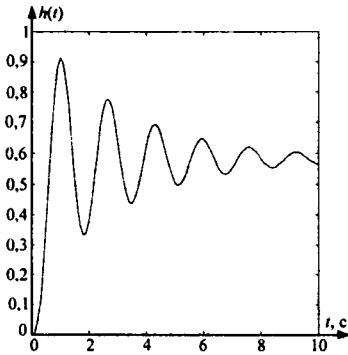


Рис. 1.91. График переходной характеристики нескорректированной системы

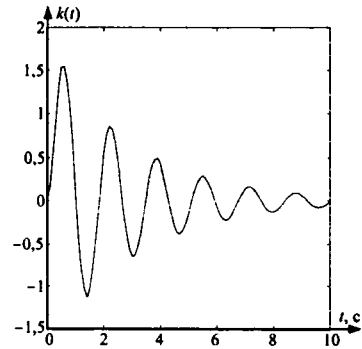


Рис. 1.92. ИПФ нескорректированной системы

В качестве эталонной выберем передаточную функцию замкнутой системы вида

$$W_z(s) = \frac{\omega_0}{s^2 + 1,4\omega_0 s + \omega_0},$$

причем $\omega_0 = \frac{5}{T_y}$; если $T_y = 5$, то $\omega_0 = 1$ и, следовательно,

$$W^3(s) = \frac{1}{s^2 + 1,4s + 1}.$$

Переходная характеристика эталонной системы имеет вид (рис. 1.93).

Спектральная характеристика ИПФ эталонной системы, найденная с помощью рассмотренного выше алгоритма, может быть записана так (масштабный множитель функций Лягерра выбран равным 6, т.е. $k = 6$, см. том 1):

$$C^k = \begin{pmatrix} 0,1724992 \\ -0,366864661 \\ 0,3429111181 \\ -0,236532666 \\ 0,126453367 \\ -0,045870733 \\ 0,000035366 \\ 0,018696084 \\ -0,021080456 \\ 0,016116197 \end{pmatrix}.$$

ИПФ $k_z(t)$ эталонной системы и ее аппроксимация $\bar{k}_z(t)$ с помощью функций Лягерра (удерживались 10 членов разложения) на промежутке $[0; 10]$ представлены на рис. 1.94.

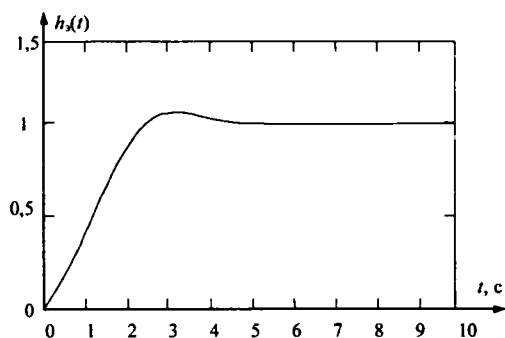
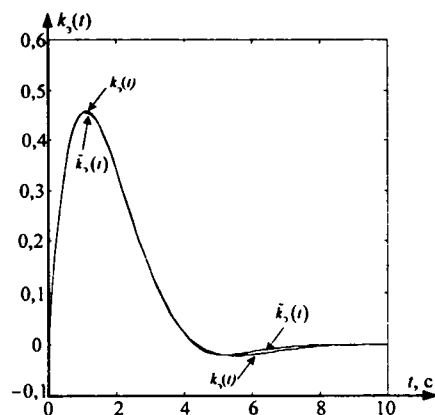


Рис. 1.93. Переходная характеристика эталонной системы

Рис. 1.94. Графики ИПФ эталонной системы $k_s(t)$ и ее аппроксимация $\bar{k}_s(t)$

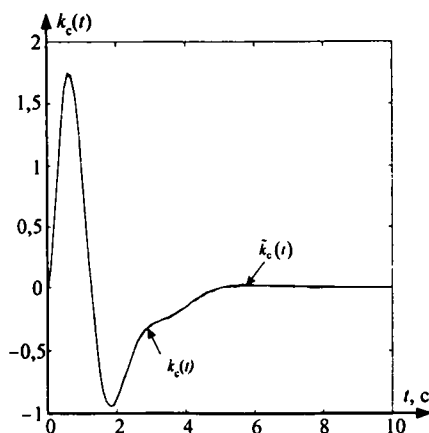
Для реализации алгоритма необходимо знать ПФ $W_c(s)$; она записывается в форме

$$W_c(s) = \frac{3500s^2 + 4900s}{90s^5 + 591s^4 + 2341s^3 + 5205s^2 + 5100s + 2500}.$$

Запишем спектральную характеристику $k_c(t) = L^{-1}\{W_c(s)\}$; она имеет вид

$$C^{k_c} = \begin{pmatrix} 0,572724874 \\ -0,975829066 \\ -0,173914715 \\ 1,012815751 \\ -0,39049937 \\ -0,067170956 \\ -0,070279766 \\ 0,100893516 \\ 0,045777287 \\ -0,070683042 \end{pmatrix}.$$

Графики $k_c(t)$ и $\bar{k}_c(t)$ на промежутке $[0;10]$ имеют вид (рис. 1.95).

Рис. 1.95. Графики функций $k_c(t)$ и $\bar{k}_c(t)$

Система алгебраических уравнений (1.209) для рассматриваемого примера запишется так:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_0^{k_{\text{с}}} \\ c_1^{k_{\text{с}}} \\ c_2^{k_{\text{с}}} \\ c_3^{k_{\text{с}}} \\ c_4^{k_{\text{с}}} \\ c_5^{k_{\text{с}}} \\ c_6^{k_{\text{с}}} \\ c_7^{k_{\text{с}}} \\ c_8^{k_{\text{с}}} \\ c_9^{k_{\text{с}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0^{k_1} \\ c_1^{k_1} \\ c_2^{k_1} \\ c_3^{k_1} \\ c_4^{k_1} \\ c_5^{k_1} \\ c_6^{k_1} \\ c_7^{k_1} \\ c_8^{k_1} \\ c_9^{k_1} \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{pmatrix} 0,23381 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,63219 & 0,23381 & 0 & 0 & 0 \\ 0,32738 & -0,63219 & 0,23381 & 0 & 0 \\ 0,48448 & 0,32738 & -0,63219 & 0,23381 & 0 \\ -0,5729 & 0,48448 & 0,32738 & -0,63219 & 0,23381 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{pmatrix} 0,132 & -0,5729 & 0,48448 & 0,32738 & -0,63219 \\ -0,0012692 & 0,132 & -0,5729 & 0,48448 & 0,32738 \\ 0,069881 & -0,0012692 & 0,132 & -0,5729 & 0,48448 \\ -0,022501 & 0,069881 & -0,0012692 & 0,132 & -0,5729 \\ -0,047545 & -0,022501 & 0,069881 & -0,0012692 & 0,132 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{pmatrix} 0,23381 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,63219 & 0,23381 & 0 & 0 & 0 \\ 0,32738 & -0,63219 & 0,23381 & 0 & 0 \\ 0,48448 & 0,32738 & -0,63219 & 0,23381 & 0 \\ -0,5729 & 0,48448 & 0,32738 & -0,63219 & 0,23381 \end{pmatrix}.$$

Однострочная матрица, определяющая спектральную характеристику регулятора, имеет вид

$$\mathbf{C}^{k_{\text{с}}} = \begin{pmatrix} 0,737762982 \\ 0,425744646 \\ 1,584745637 \\ 1,148445338 \\ 2,35263977 \\ 1,899905493 \\ 3,110075917 \\ 2,655168552 \\ 3,866129189 \\ 3,410934455 \end{pmatrix}.$$

Переходная характеристика и ИПФ скорректированной системы практически совпадает с переходной характеристикой и ИПФ эталонной системы (рис. 1.95).

Структурная схема скорректированной системы представлена на рис. 1.96.

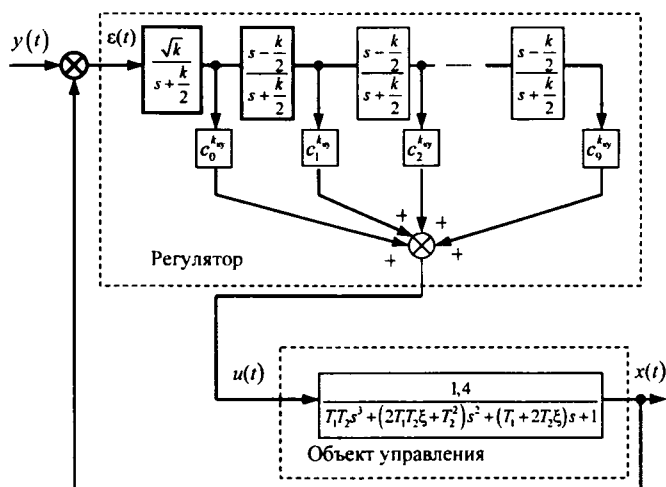


Рис. 1.96. Структурная схема САУ

1.10. МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Рассматриваемый ниже метод основан на использовании второго принципа, изложенного в п. 1.3. Этот принцип предполагает, что параметры регулятора, структура которого выбрана, рассчитываются из условия наилучшего приближения выходного сигнала $x(t)$ на заданное воздействие $y_3(t)$ к некоторому эталону $x_3(t)$. Критерием близости выбрана метрика пространства $L^2[0, \infty)$.

Основная формула имеет вид (см. п. 1.3)

$$\begin{aligned}
 I(p_1, p_2, \dots, p_r) &= \int_0^{\infty} [x_3(t) - x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)]^2 dt = \\
 &= \int_0^{\infty} [x_3(t) - L^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) y_3(t)]^2 dt = \\
 &= \int_0^{\infty} [x_3(t) - A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r) (I + A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r))^{-1} y_3(t)]^2 dt \rightarrow \min_{p_i, i=\overline{1, r}}.
 \end{aligned}$$

В последней зависимости:

A_0 — оператор объекта;

$A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r)$ — оператор регулятора (предполагается, что структура, имеющая соответствующие возможности, выбрана проектировщиком системы), зависящий от изменяемых параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$;

$y_3(t)$ — эталонный входной сигнал;

$x_3(t)$ — эталонный выходной процесс.

Принципиальная трудность применения рассматриваемого подхода заключается в том, что записанный выше функционал, подлежащий минимизации по параметрам регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$, требует знания обратного оператора замкнутой системы

$$L^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) = \left[A_0 A_{\text{кы}}(p_1, p_2, \dots, p_r) (I + A_0 A_{\text{кы}}(p_1, p_2, \dots, p_r))^{-1} \right]^{-1},$$

явно зависящего от параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$.

Как уже указывалось, реализация этого подхода возможна лишь в простейших случаях.

К таким случаям относится класс линейных стационарных систем, когда критерием, определяющим степень близости реального выходного сигнала $x_p(p_1, p_2, \dots, p_r)$ к эталонному процессу $x_s(t)$, служит функционал

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^{\infty} [x_s(t) - x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)]^2 dt. \quad (1.212)$$

Рассмотрим задачу синтеза регуляторов в общей постановке: заданы входной сигнал $y_s(t)$ и эталонная реакция на это воздействие $x_s(t)$; необходимо построить алгоритм расчета параметров регулятора (при известной структуре) исходя из следующих условий:

- $I(p_1, p_2, \dots, p_r) \rightarrow \min_{p_i, i=\overline{1, r}}$;
- $X(t) \in X^n \quad \forall t \in [0, T]$, где $X(t)$ — вектор-функция состояния системы; X^n — заданная область.

Частным случаем $X(t) \in X^n \quad \forall t \in [0, T]$ является принадлежность переходной характеристики $h(t)$ «коробочке» В.В. Солодовникова с ограничениями на соответствующие производные управляемой переменной:

- $u(t) \in U^1$, $u(t)$ — скалярное управление, поступающее на объект; U^1 — заданная область;
- $p_1^m \leq p_1 \leq p_1^M, \dots, p_r^m \leq p_r \leq p_r^M$, где p_i^m и p_i^M соответственно минимальное и максимальное значение i -го параметра регулятора (ограничения на параметры);
- $C_0 \leq C_{0 \text{ доп}}, C_1 \leq C_{1 \text{ доп}}, \dots$, где $C_0, C_1, \dots$ — коэффициенты ошибок.

Конкретная постановка задачи может быть сформулирована так: при заданной структуре регулятора найти параметры $p = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ из условия наилучшего приближения реального выходного сигнала $x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)$, являющегося реакцией на $y_s(t) = l(t)$, к эталонной переходной характеристике с заданными показателями качества: быстродействием, колебательностью, максимальным отклонением в переходном режиме при обеспечении устойчивости системы и приближенном обеспечении заданной точности в установившемся режиме.

Или, что то же самое, найти параметры $p_1, p_2, \dots, p_r$, обеспечивающие выполнение условий:

- 1) функционал (1.212) принимает минимальное значение;
- 2) обеспечивается устойчивость системы (в вычислительном отношении для проверки устойчивости системы наиболее удобен критерий Раунса);
- 3) если $y_s(t) = l(t)$, то $h_s(t)$ — эталонная переходная характеристика; функция $h_p(t, p)$ должна находиться в «коробочке» Солодовникова, т.е.
 - а) $|h_p(t, p) - h_{\text{уст}}| \leq \Delta$,

где Δ — постоянная величина, значение которой в техническом задании задается в процентах от установившегося значения выходного процесса

$$h_{уст} = h_p(t, p)|_{t=\infty};$$

$$б) \sigma\% = \frac{h_{p\max}(t, p) - h_{уст}}{h_{уст}} 100\% < \sigma\%_{\text{доп}},$$

т.е. перерегулирование не должно превышать допустимого значения (обычно $\sigma\%_{\text{доп}} = (10 - 30)\%$);

в) $T_y \leq T_{y\text{доп}}$, т.е. время переходного процесса не должно превышать допустимого значения $T_{y\text{доп}}$.

Кроме этого, могут быть заданы ограничения на производные выходного процесса, на число колебаний $h_p(t, p)$ (при проектировании систем допускают число колебаний равным (1–2), реже (3–4); иногда колебания недопустимы) и др.;

- 4) выполнены ограничения, обусловленные требованиями к точности системы в установившемся режиме. Требования к точности должны быть предъявлены в виде ограничений на коэффициенты ошибок:

$$C_0 \leq C_{0\text{доп}}; C_1 \leq C_{1\text{доп}}; \frac{C_2}{2!} \leq C_{2\text{доп}}; \frac{C_3}{3!} \leq C_{3\text{доп}}; \dots$$

Область допустимых значений варьируемых параметров обычно ограничена условием их технической реализации

$$p_{im} \leq p_i \leq p_{iM}, i = \overline{1, r}.$$

Еще более конкретизируем постановку задачи, рассматривая систему с ПФ вида

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}.$$

Переходная характеристика САУ имеет вид

$$h(t) = 1 - \frac{1}{\beta} e^{-\xi\omega_0 t} \sin(\omega_0 \beta t + \theta), \quad (1.213)$$

где $\beta = \sqrt{1 - \xi^2}$, $\theta = \arccos(\beta/\xi)$, $0 < \xi < 1$.

Важными являются следующие факторы:

- все характеристики системы полностью определяются значениями ξ, ω_0 ;
- постоянная времени $T = \frac{1}{\xi\omega_0}$ определяет процесс затухания колебаний, а $\beta\omega_0$ — их частоту;
- поскольку оценка качества работы САУ определяется по численным показателям, которые выбираются так, чтобы подчеркнуть наиболее важные требования, предъявляемые к системе, то для эффективного применения аппарата математического программирования большую роль играет возможность в явной форме выразить указанные показатели через параметры системы, например ξ и ω_0 . Соответствующие зависимости имеют вид (см. том 1):

а) время переходного процесса с ПФ $W(s)$ определяется формулой $T_y \approx \frac{4}{\xi\omega_0}$,

т.е. T_y можно считать равным четырем постоянным времени $T = \frac{1}{\xi\omega_0}$;

б) время максимума $h(t)$ определяется выражением

$$T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}};$$

в) для максимального значения переходной характеристики $h(T_{\max}) = h_{\max 1}$, определяющей перерегулирование $\sigma\%$, справедлива зависимость

$$h_{\max 1} = h(t) \Big|_{t=T_{\max}} = 1 + e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}};$$

тогда величина относительного перерегулирования находится так:

$$\sigma\% = \frac{h(T_{\max}) - h_{\text{уст}}}{h_{\text{уст}}} \cdot 100\% = 100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \%$$

(заметим, что перерегулирование не зависит от ω_0).

Из изложенного следует, что *быстродействие системы*, определяемое временем $T_{\max}$ и временем установления, и *степень близости к эталонному сигналу* $x_3(t)$, определяемое величиной перерегулирования и T_y , — это факторы, противоречащие друг другу, поэтому при проектировании САУ необходимо искать компромисс;

г) число различных колебаний n_c при $0,2 \leq \xi \leq 0,6$ можно рассчитать по формуле

$$n_c = \frac{4\beta}{2\pi\xi} = \frac{4\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi} \approx \frac{0,55}{\xi};$$

д) установившаяся ошибка при обработке, например, входного сигнала $y(t) = y_1(t)$ может быть определена с помощью зависимости

$$\varepsilon(t) = c_1 y_1 \left[\frac{d}{ds} (-W(s)) \right] \Big|_{s=0}.$$

С учетом сказанного задача математического программирования может быть сформулирована так: найти параметры ω_0 и ξ , обеспечивающие выполнение условий:

1. Функционал (1.212) принимает минимальное значение, причем в качестве эталонной переходной характеристики можно задавать процесс, изображение которого определяется зависимостью [5]:

$$H^3(s) = K_y \frac{\frac{\alpha_1}{2}s + 1}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1} \leftrightarrow h_3(t), \quad (1.214)$$

где K_y определяет астатизм системы, α_1 и α_2 — параметры, связанные с временем переходного процесса T_y и максимальным отклонением в переходном режиме $h_{\max 1}$ формулой

$$\alpha_2 = \frac{\left[\ln \left(\frac{h_{\max 1}}{K_y} - 1 \right) \right]^2}{\frac{9}{T_y^2} \left\{ \left[\ln \left(\frac{h_{\max 1}}{K_y} - 1 \right) \right]^2 + \pi^2 \right\}}, \quad \alpha_1 = \frac{6\alpha_2}{T_y}.$$

Задаваясь T_y и $h_{\max 1}$, легко найти изображение (1.214), а затем — эталонную переходную характеристику в виде

$$h_3(t) = K_y - K_y e^{-\alpha_3 t} \cos \beta_3 t. \quad (1.215)$$

2. Выполнены следующие ограничения:

$$а) T_y = \frac{4}{\xi \omega_0} \leq T_{y \text{ доп}};$$

$$б) T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \leq T_{\max \text{ доп}};$$

$$в) \sigma\% = 100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \% \leq \sigma\%_{\text{доп}};$$

$$г) n_c = \frac{4\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi} \leq n_{c \text{ доп}};$$

$$д) c_1 \leq c_{1 \text{ доп}}.$$

Рассмотрим решение поставленной задачи для частного случая, когда

$$y_3(t) = 1(t), \quad x_3(t) = K_y (1 - e^{-\alpha_3 t}). \quad (1.216)$$

Запишем формулу, определяющую переходный процесс через неизвестные параметры корректирующего устройства:

$$h_p(t, p) = L^{-1} \left\{ W(s, p) \frac{1}{s} \right\}, \quad (1.217)$$

где

$$W(s, p) = \frac{W_{ky}(s, p) W_o(s)}{1 + W_{ky}(s, p) W_o(s)} = W(s, p_1, p_2, \dots, p_r), \quad (1.218)$$

$W_o(s)$ — ПФ объекта; $W_{ky}(s, p)$ — ПФ регулятора. В формуле (1.218) $p_1, p_2, \dots, p_r$ — параметры корректирующего устройства; подбором этих параметров достигается заданное качество переходного процесса. Таким образом, реальный переходный процесс определяется зависимостью (1.218), в которую входят неизвестные параметры $p_1, p_2, \dots, p_r$.

Запишем формулу для невязки

$$\varepsilon(t, p) = x_3(t) - h_p(t, p).$$

Тогда функционал качества имеет вид

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^\infty [x_3(t) - h_p(t, p)]^2 dt. \quad (1.219)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (1.219) по Фурье

$$\begin{aligned} & [K_y (1 - e^{-\alpha_3 t}) - h_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)] \leftrightarrow \\ & \leftrightarrow \left[\frac{K_y}{j\omega} - \frac{K_y}{j\omega + \alpha_3} - \frac{W_{ky}(j\omega, p) W_o(j\omega)}{1 + W_{ky}(j\omega, p) W_o(j\omega)} \frac{1}{j\omega} \right] = E(j\omega, p). \end{aligned} \quad (1.220)$$

Воспользовавшись равенством Парсеваля, зависимость (1.219) перепишем в виде

$$\begin{aligned} I(p_1, p_2, \dots, p_r) &= \int_0^\infty [x_3(t) - h_p(t, p)]^2 dt = \\ &= \int_0^\infty \varepsilon^2(t, p) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty E(j\omega, p) E(-j\omega, p) d\omega. \end{aligned} \quad (1.221)$$

Преобразуем (1.221) следующим образом:

$$E(j\omega, p) = \frac{K_y}{j\omega} - \frac{K_y}{j\omega + \alpha_3} - \overbrace{\left[\frac{b_m(p)(j\omega)^m + \dots + b_0(p)}{a_n(p)(j\omega)^n + \dots + a_0(p)} \right]}^{W(j\omega)} \frac{1}{j\omega} = \quad (1.222)$$

$$= \frac{c_k(p)(j\omega)^k + c_{k-1}(p)(j\omega)^{k-1} + \dots + c_0(p)}{d_k(p)(j\omega)^k + d_{k-1}(p)(j\omega)^{k-1} + \dots + d_0(p)} = \frac{C(j\omega, p)}{D(j\omega, p)},$$

где

$$c_k(p) = c_{n+1}(p) = (a_n(p)K_y + a_n(p)), \dots, c_0(p) = K_y\alpha_3 a_0(p) + b_0(p)\alpha_3,$$

$$d_k(p) = d_{n+2}(p) = a_n(p), \dots, d_1(p) = a_0(p)\alpha_3, d_0(p) = 0.$$

Перепишем (1.221) в виде

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{C(j\omega, p)C(-j\omega, p)}{D(j\omega, p)D(-j\omega, p)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_k(j\omega, p)}{h_k(j\omega, p)h_k(-j\omega, p)} d\omega, \quad (1.223)$$

где

$$h_k(j\omega, p) = h_0(p)(j\omega)^k + h_1(p)(j\omega)^{k-1} + \dots + h_k(p);$$

$$g_k(j\omega, p) = g_0(p)(j\omega)^{2k-2} + g_1(p)(j\omega)^{2k-4} + \dots + g_{k-1}(p).$$

Принципиально важным является тот факт, что для значения интеграла (1.221) можно записать точную формулу. Таким образом, функционал (1.219) удастся представить в виде функции, явно зависящей от переменных $h_0(p), h_1(p), \dots, h_k(p), g_0(p), g_1(p), \dots, g_k(p)$ и, следовательно, явно зависящей от параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$, т.е. $I(p) = I(p_1, p_2, \dots, p_r)$.

Эта формула имеет вид (см. Приложение во втором томе)

$$I_k(p) = \frac{(-1)^{k+1} N_k}{2h_0(p)M_k},$$

где

$$M_k = \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & \dots & m_{1k} \\ m_{21} & m_{22} & \dots & m_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{k1} & m_{k2} & \dots & m_{kk} \end{vmatrix}, \quad m_{kr} = h_{2k-r}(p); \quad h_v(p) = 0 \quad (v < 0, v > k),$$

N_k — определитель, полученный из M_k заменой элементов первого столбца величинами $g_0(p), g_1(p), \dots, g_{k-1}(p)$.

Таким образом, здесь центральную роль играет равенство Парсеваля, позволяющее получить следующее основное соотношение:

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^{\infty} \left[x_3(t) - A_0 A_{ky}(p_1, p_2, \dots, p_r) (I + A_0 A_{ky}(p_1, p_2, \dots, p_r))^{-1} y_3(t) \right]^2 dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_k(j\omega, p_1, p_2, \dots, p_r)}{h_k(j\omega, p_1, p_2, \dots, p_r)h_k(-j\omega, p_1, p_2, \dots, p_r)} d\omega = \quad (1.224)$$

$$= \frac{(-1)^{k+1} N_k(p_1, p_2, \dots, p_r)}{2h_0(p_1, p_2, \dots, p_r)M_k(p_1, p_2, \dots, p_r)} \rightarrow \min_{(p_1, p_2, \dots, p_r)}$$

при указанных выше ограничениях.

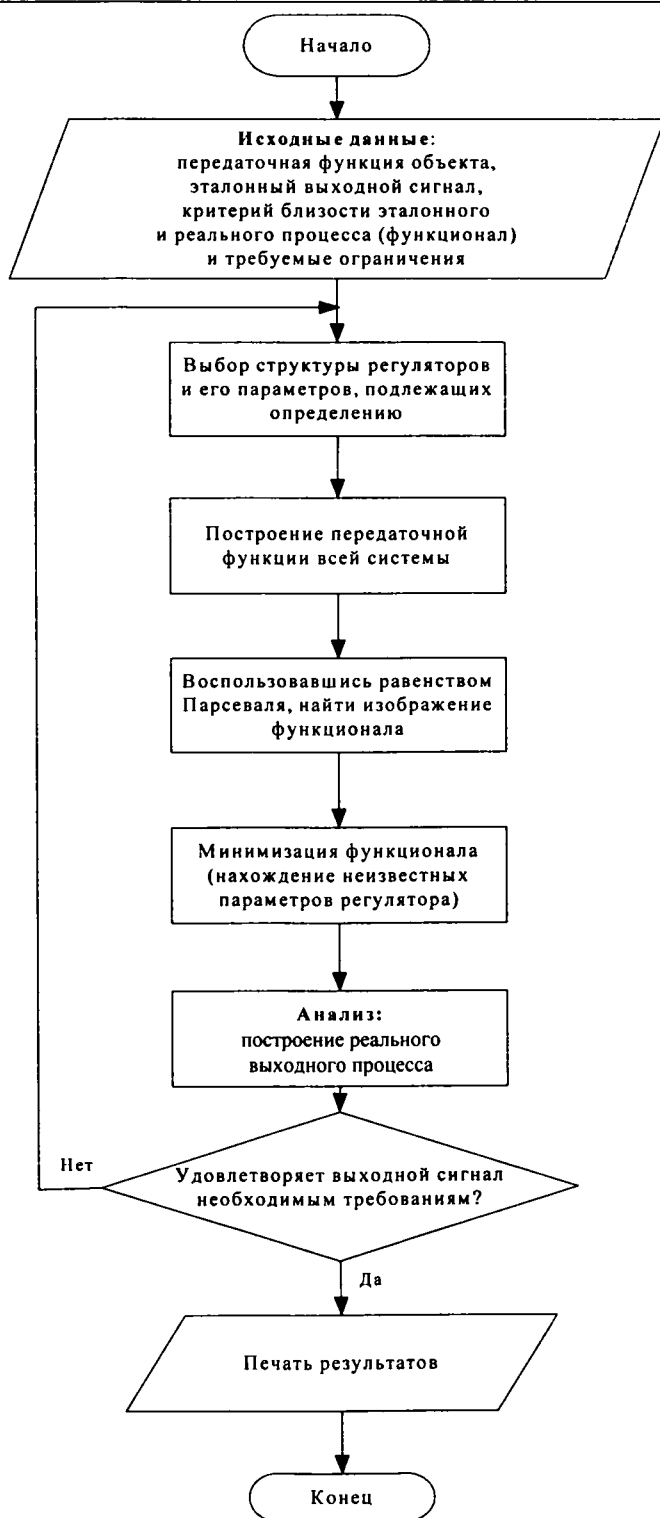


Рис. 1.97. Структурная схема алгоритма

Следует отметить, что определитель N_k в некоторых случаях может обращаться в нуль. Это происходит из-за того, что в знаменателе выражения $E(j\omega, p)$ коэффициент при нулевой степени $j\omega$ может равняться нулю (коэффициент $d_0(p)$). Этот факт будет иметь место в случаях, когда не происходит сокращения числителя и знаменателя выражения $E(j\omega, p)$ на $j\omega$. Если сказанное имеет место, то функционал качества (1.221) можно определить не через невязку переходных функций, а через невязку импульсных переходных характеристик, т.е.

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^{\infty} [k_o(t) - k_p(t, p)]^2 dt.$$

Сформулированная задача расчета p_i , $i = \overline{1, r}$ с помощью зависимости (1.224) при ограничениях, указанных в постановке задачи, является задачей нелинейного программирования и может быть решена с использованием известных методов (см. Приложение к тому 4).

Ввиду сложности приведенных выше ограничений для решения задачи нелинейного программирования можно использовать процедуру численного направленного поиска; в частности, может быть использована процедура случайного поиска [5].

Дополнительно может накладываться ограничение на колебательность системы. В [5] приведены зависимости, определяющие ограничения, накладываемые на коэффициенты характеристического уравнения.

В каждом конкретном случае проектирования регуляторов можно для некоторых ограничений записать явные соотношения, зависящие от параметров, для других же реализуется поиск параметров, удовлетворяющих нужным ограничениям, при этом показатели качества на каждом шаге направленного поиска могут определяться по результатам численного интегрирования дифференциальных уравнений, описывающих динамику системы.

Структурная схема алгоритма синтеза изображена на рис. 1.97.

Пример 1.14. Проиллюстрируем применение метода нелинейного программирования на примере синтеза системы управления креном ракеты (рис. 1.98).

ПФ замкнутой системы определяется формулой

$$W(s) = \frac{K_{np} K_{\gamma} K_{I\gamma}}{T_{\gamma} s^2 + s + K_{np} K_{\gamma} K_{I\gamma}}, \quad (1.225)$$

или, что то же самое,

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2},$$

$$\text{где } \omega_0 = \sqrt{\frac{K_{np} K_{\gamma} K_{I\gamma}}{T_{\gamma}}}, \quad \xi = \frac{1}{2\sqrt{K_{np} K_{\gamma} K_{I\gamma} T_{\gamma}}}.$$

Требуется найти такие ω_0, ξ , чтобы выполнялись следующие ограничения: $T_{\gamma} \leq 2$, $T_{\max} \leq 0,7$, $\sigma\% \leq 15\%$, $n_c \leq 1$, $c_1 \leq 0,5$.

В качестве эталонной переходной характеристики выберем следующий процесс:

$$h_s = 1 - e^{-\alpha_1 t} \cos \beta_1 t, \\ H^3(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \alpha_2}{(s + \alpha_2)^2 + \beta_2^2}.$$

Преобразование Фурье невязки примет вид

$$E(j\omega) = H^3(s) - W(s) \frac{1}{s} = \frac{\sum_{k=0}^4 c_k(p)(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^4 d_k(p)(j\omega)^k},$$

где

$p = \{\omega_0, \xi\}$ — искомые параметры,

$$c_0(p) = 2\alpha_3^2 \xi \omega_0 - \alpha_3 \omega_0^2 + 2\beta_3^2 \xi \omega_0,$$

$$c_1(p) = -\omega_0^2 + 2\alpha_3 \xi \omega_0 + \alpha_3^2 + \beta_3^2,$$

$$c_2(p) = \alpha_3,$$

$$c_3(p) = 0,$$

$$c_4(p) = 0,$$

$$d_0(p) = (\alpha_3^2 + \beta_3^2) \omega_0^2,$$

$$d_1(p) = 2\alpha_3^2 \xi \omega_0 + 2\beta_3^2 \xi \omega_0 + 2\alpha_3 \omega_0^2,$$

$$d_2(p) = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + 4\alpha_3 \xi \omega_0 + \omega_0^2,$$

$$d_3(p) = 2\alpha_3 + 2\xi \omega_0,$$

$$d_4(p) = 1.$$

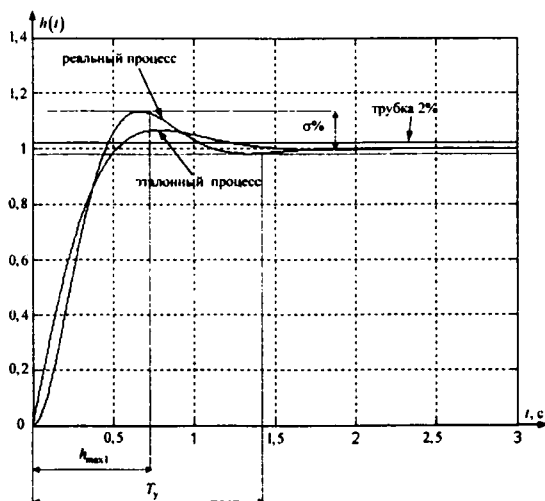


Рис. 1.98. Графики переходных процессов

Отсюда следует (см. формулу (1.223))

$$I(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_k(j\omega, p)}{h_k(j\omega, p)h_k(-j\omega, p)} d\omega,$$

где

$$g_0 = 2c_2c_4 - c_3^2 = 0; \quad g_1 = 2c_0c_4 + c_2^2 - 2c_1c_3 = c_2^2;$$

$$g_2 = 2c_0c_2 - 2c_1^2; \quad g_3 = c_0^2;$$

$$h_0 = d_4; \quad h_1 = d_3; \quad h_2 = d_2; \quad h_3 = d_1; \quad h_4 = d_0.$$

Функционал, подлежащий минимизации:

$$I(p) = \frac{-N_k(p)}{2h_0(p)M_k(p)},$$

где

$$M(p) = \begin{bmatrix} h_1(p) & h_3(p) & 0 & 0 \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) \end{bmatrix},$$

$$N(p) = \begin{bmatrix} g_0(p) & g_1(p) & g_2(p) & g_3(p) \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) \end{bmatrix};$$

тогда

$$I(p) = \left(-4\alpha_3\omega_0^4\beta_3^4 + 2\alpha_3\omega_0^6\beta_3^2 - 6\alpha_3^4\omega_0^3\xi\beta_3^2 - 12\omega_0^5\alpha_3^2\xi\beta_3^2 - 24\omega_0^4\alpha_3^2\xi^2\beta_3^2 + 24\alpha_3^5\xi^2\omega_0^3\beta_3^2 + 24\alpha_3^3\xi^2\omega_0^2\beta_3^4 + \right. \\ \left. + 64\alpha_3^4\xi^3\omega_0^3\beta_3^2 + 32\beta_3^4\xi^3\omega_0^2\alpha_3^2 - 16\xi^2\omega_0^6\alpha_3\beta_3^2 - 8\xi^3\omega_0^5\alpha_3^2\beta_3^2 + 64\xi^4\omega_0^4\alpha_3^3\beta_3^2 + 32\xi^4\omega_0^3\alpha_3^4\beta_3^2 + 8\alpha_3\beta_3^6\xi^2\omega_0^2 - \right. \\ \left. - 4\alpha_3^6\omega_0^3\xi + 4\alpha_3^5\omega_0^4 + 2\omega_0^6\alpha_3^3 + 2\omega_0^2\alpha_3^7 + 6\omega_0^2\alpha_3^3\beta_3^4 + 6\omega_0^2\alpha_3^5\beta_3^2 - 24\omega_0^4\alpha_3^5\xi^2 + 8\alpha_3^7\xi^2\omega_0^2 + 32\alpha_3^6\xi^3\omega_0^3 - \right. \\ \left. - 8\xi^2\omega_0^6\alpha_3^3 - 16\xi^3\omega_0^5\alpha_3^4 + 32\xi^4\omega_0^4\alpha_3^5 + 8\xi^3\omega_0^5\beta_3^4 + 4\xi\omega_0^7\alpha_3^2 + 2\xi\omega_0^7\beta_3^5 - 4\xi\omega_0^5\beta_3^4 + 2\xi\omega_0^3\beta_3^6 + 2\alpha_3\omega_0^2\beta_3^6 \right) / \\ / \left(+ 8\alpha_3^7\omega_0^3\xi + 24\alpha_3^5\omega_0^3\xi\beta_3^2 + 24\alpha_3^3\omega_0^3\beta_3^4\xi + 64\omega_0^4\alpha_3^4\xi^2\beta_3^2 + 32\alpha_3^2\beta_3^4\xi\omega_0^4 + 64\xi^3\omega_0^5\alpha_3^3\beta_3^2 + 32\xi^3\omega_0^5\alpha_3\beta_3^4 + \right. \\ \left. + 32\xi^2\omega_0^6\alpha_3^2\beta_3^2 + 8\xi\omega_0^7\alpha_3\beta_3^2 + 8\alpha_3\xi\omega_0^3\beta_3^6 - 16\omega_0^5\alpha_3\xi\beta_3^4 + 32\omega_0^4\alpha_3^6\xi^2 + 16\omega_0^5\alpha_3^5\xi + 32\xi^3\omega_0^5\alpha_3^5 + 32\xi^2\omega_0^6\alpha_3^4 + \right. \\ \left. + 8\xi\omega_0^7\alpha_3^3 \right).$$

Выберем $\alpha_3 = 3$, $\beta_3 = 3$. Минимизируя значения этого функционала в пакете *Matlab* с помощью функции *fmincon* с начальными условиями $\omega_0^0 = 0,5$, $\xi^0 = 0,5$ и со следующими ограничениями:

$$\text{а) } T_y = \frac{4}{\xi\omega_0} \leq 2; \text{ б) } T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \leq 0,7; \text{ в) } \sigma\% = 100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \% \leq 15\%; \\ \text{г) } n_c = \frac{4\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi} \leq 1; \text{ д) } c_1 = \left[\frac{d}{ds}(1-W(s)) \right]_{s=0} = \frac{2\xi}{\omega_0} \leq 0,3,$$

получим следующие значения:

$$\omega_0 = 5,6; \xi = 0,54,$$

$$\text{при этом } T_y = \frac{4}{\xi\omega_0} = 1,3228, \quad T_{\max} = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} = 0,6665,$$

$$\sigma\% = 100 \cdot e^{-\xi\pi/\sqrt{1-\xi^2}} \% = 11,324\%, \quad n_c = \frac{4\sqrt{1-\xi^2}}{2\pi\xi} = 0,9923, \quad c_1 = \frac{2\xi}{\omega_0} = 0,1929.$$

Пример 1.15 [см. том 1]. Система автоматического управления самолетом является типичным примером, когда используется обратная связь по нескольким переменным. В такой системе положение самолета в воздухе изменяется с помощью элеронов, рулей высоты и руля направления, как показано на рис. 1.99. Манипулируя этими органами управления, пилот устанавливает желаемую траекторию полета.

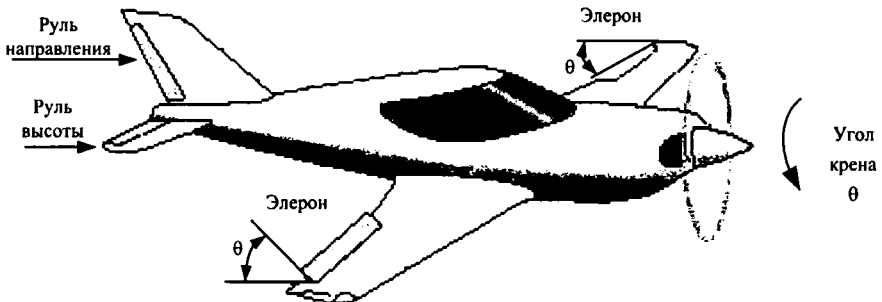


Рис. 1.99. Самолет и его органы управления

Автопилот, который мы рассмотрим в данной задаче, представляет собой автоматическую систему управления, изменяющую угол крена φ путем отклонения элеронов. Отклонение элеронов на угол θ приводит к возникновению вращающего момента благодаря давлению воздуха на поверхность. За счет этого момента происходит вращение самолета относительно горизонтальной оси. Элероны отклоняются с помощью гидравлического исполнительного механизма с передаточной функцией $1/s$.

Действительный угол крена измеряется и сравнивается с заданным значением φ_3 . Разность между φ_3 и φ усиливается и подается на вход исполнительного механизма, который управляет отклонением элеронов.

На рис. 1.100 приведена упрощенная схема, в которой вращение самолета относительно горизонтальной оси рассматривается независимо от движений в других направлениях. Предположим, что $K_1 = 1$, а скорость изменения угла φ измеряется гироскопическим датчиком и используется как дополнительный сигнал обратной связи. Необходимо выбрать параметры K_y и K_2 так, чтобы переходная характеристика имела перегуливание не более 10% и время регулирования (по критерию 2%) не более 9 с.

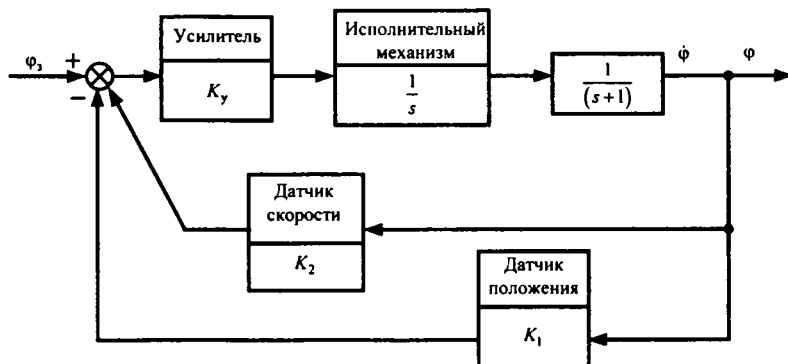


Рис. 1.100. Структурная схема системы управления углом крена (см. том 1)

В качестве эталонной переходной характеристики выберем процесс, определяемый формулами

$$h_3 = 1 - e^{-\alpha_3 t} \cos \beta_3 t,$$

$$H^3(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \alpha_3}{(s + \alpha_3)^2 + \beta_3^2},$$

где $\alpha_3 = 0,5$, $\beta_3 = 0,4$.

Передаточная функция системы имеет вид

$$W(s) = \frac{K_y}{s^3 + s^2 + K_y K_2 s + K_y}.$$

Преобразование Фурье невязки примет вид

$$E(j\omega) = H^3(s) - W(s) \Big|_{s=j\omega} = \frac{\sum_{k=0}^5 c_k (p)(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^5 d_k (p)(j\omega)^k},$$

где

$p = \{K_y, K_2\}$ — искомые параметры,

$$c_0(p) = -\alpha_3 K_y + \alpha_3^2 K_y K_2 + \beta_3^2 K_y K_2,$$

$$c_1(p) = \alpha_3 K_y K_2 - K_y + \alpha_3^2 + \beta_3^2,$$

$$c_2(p) = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + \alpha_3,$$

$$c_3(p) = \alpha_3,$$

$$c_4(p) = 0,$$

$$c_5(p) = 0,$$

$$d_0(p) = (\alpha_3^2 + \beta_3^2) K_y,$$

$$d_1(p) = \alpha_3^2 K_y K_2 + \beta_3^2 K_y K_2 + 2\alpha_3 K_y,$$

$$d_2(p) = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + 2\alpha_3 K_y K_2 + K_y,$$

$$d_3(p) = \alpha_3^2 + \beta_3^2 + 2\alpha_3 + K_y K_2,$$

$$d_4(p) = 2\alpha_3 + 1,$$

$$d_5(p) = 1.$$

Отсюда следует

$$I(p_1, p_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_k(j\omega, p)}{h_k(j\omega, p)h_k(-j\omega, p)} d\omega,$$

где

$$\begin{aligned} g_0 &= c_4^2 - 2c_3c_5 = 0; & g_1 &= 2c_2c_4 - 2c_1c_5 - c_3^2 = -c_3^2; \\ g_2 &= 2c_0c_4 + c_2^2 - 2c_1c_3 = c_2^2 - 2c_1c_3; & g_3 &= 2c_0c_2 - 2c_1^2; & g_4 &= c_0^2; \\ h_0 &= d_5; & h_1 &= d_4; & h_2 &= d_3; & h_3 &= d_2; & h_4 &= d_1; & h_5 &= d_0. \end{aligned}$$

Функционал, подлежащий минимизации, может быть записан так:

$$I(p) = \frac{N_k(p)}{2h_0(p)M_k(p)},$$

где

$$M(p) = \begin{bmatrix} h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 & 0 \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) \end{bmatrix}, \quad N(p) = \begin{bmatrix} g_0(p) & g_1(p) & g_2(p) & g_3(p) & g_4(p) \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) \end{bmatrix};$$

тогда

$$\begin{aligned} I(p) = & (2389508K_y + 49058714K_y^2 - 10958439K_y^2K_2^2 + 26279278K_y^2K_2 + 8712500K_y^3K_2^2 + 3246700K_y^3K_2 - \\ & - 19835800K_y^3K_2^2 + 123000000K_y^4K_2 - 43060000K_y^4K_2^2 - 30750000K_y^4K_2^3 + 16810000K_y^4K_2^4 + 141060000K_y^3 - \\ & - 66000000K_y^4) / (-21916878K_y - 93127400K_y^2K_2 - 179803122K_y^2 - 63140000K_y^3K_2^2 - 254708400K_y^3K_2 - \\ & - 29520000K_y^3 + 82000000K_y^4K_2^3 + 48380000K_y^4K_2^2 - 48380000K_y^4K_2 - 82000000K_y^4). \end{aligned}$$

Минимальное значение функционала с ограничениями $K_y > 0$, $K_y K_2 - K_y > 0$ (условия, налагаемые на устойчивость системы (см. том 1 табл. 1.4)) находилось с помощью функции *fmincom* пакета MATLAB. В результате получились следующие значения:

$$K_y = 1000, \quad K_2 = 2, 2.$$

На рис. 1.101 показаны графики эталонной и реальной переходных характеристик.

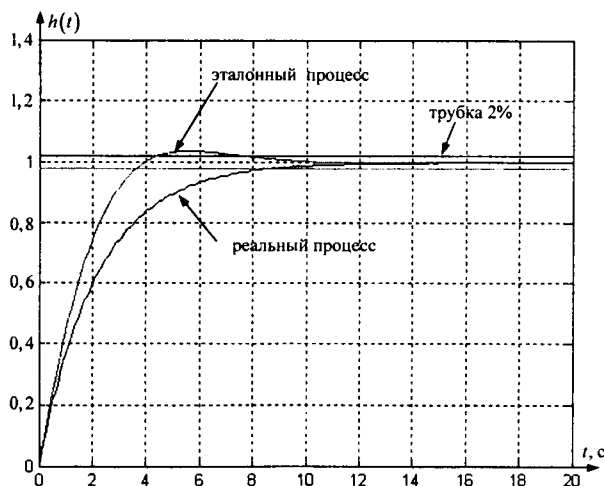


Рис. 1.101. Графики переходных процессов

Пример 1.16 [см. том 1]. В системе стабилизации скорости стола обрабатывающего станка используются прецизионный тахометр и двигатель постоянного тока прямого действия, как показано на рис. 1.102. При управлении скоростью желательно поддерживать высокую точность в установившемся режиме. Для получения нулевой установившейся ошибки при ступенчатом входном сигнале выберем ПИ-регулятор и определим надлежащие значения параметров, при которых система будет иметь перерегулирование около 10% и время регулирования (по критерию 2%) от 0,6 до 0,8 с.

В качестве эталонной переходной характеристики выберем процесс, определяемый формулами

$$h_2 = 1 - e^{-\alpha_2 t} \cos \beta_2 t,$$

$$H^2(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \alpha_2}{(s + \alpha_2)^2 + \beta_2^2},$$

где $\alpha_2 = 4,5$, $\beta_2 = 5$.

Передаточная функция ПИ-регулятора имеет вид

$$W_p(s) = K_n + \frac{K_n}{s} = \frac{K_n s + K_n}{s}.$$

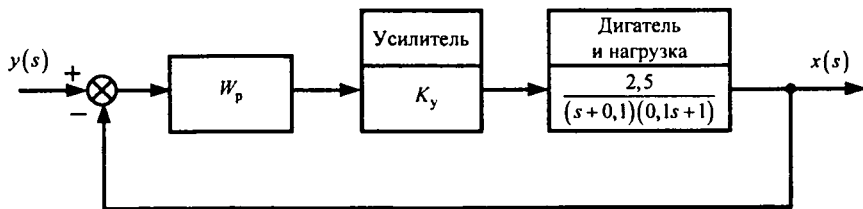


Рис. 1.102. Система управления скоростью стола

Передаточная функция всей системы имеет вид

$$W(s) = \frac{2,5K_n K_y s + 2,5K_n K_y}{0,1s^3 + 1,01s^2 + (2,5K_n K_y + 0,1)s + 2,5K_n K_y}.$$

Введем обозначения: $K_1 = K_n K_y$, $K_2 = K_n K_y$; тогда

$$W(s) = \frac{2,5K_1 s + 2,5K_2}{0,1s^3 + 1,01s^2 + (2,5K_1 + 0,1)s + 2,5K_2}.$$

Преобразование Фурье невязки примет вид

$$E(j\omega) = H^2(s) - W(s) \frac{1}{s} = \frac{\sum_{k=0}^5 c_k(p)(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^5 d_k(p)(j\omega)^k},$$

где

$$p = \{K_1, K_2\} \text{ — искомые параметры,}$$

$$c_0(p) = -1810 - 4500K_2,$$

$$c_1(p) = 18461 - 4500K_1 - 1000K_2,$$

$$c_2(p) = 3628 - 1000K_1,$$

$$c_3(p) = 180, \quad c_4(p) = 0, \quad c_5(p) = 0,$$

$$d_0(p) = 45250K_2, \quad d_1(p) = 45250K_1 + 1810 + 9000K_2,$$

$$d_2(p) = 18641 + 9000K_1 + 1000K_2, \quad d_3(p) = 5486 + 1000K_1,$$

$$d_4(p) = 764, \quad d_5(p) = 40.$$

Отсюда следует

$$I(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_k(j\omega, p)}{h_k(j\omega, p)h_k(-j\omega, p)} d\omega,$$

где

$$g_0 = c_4^2 - 2c_3c_5 = 0; \quad g_1 = 2c_2c_4 - 2c_1c_5 - c_3^2 = -c_3^2;$$

$$g_2 = 2c_0c_4 + c_2^2 - 2c_1c_3 = c_2^2 - 2c_1c_3; \quad g_3 = 2c_0c_2 - 2c_1^2; \quad g_4 = c_0^2;$$

$$h_0 = d_5; \quad h_1 = d_4; \quad h_2 = d_3; \quad h_3 = d_2; \quad h_4 = d_1; \quad h_5 = d_0.$$

Функционал, подлежащий минимизации:

$$I(p) = \frac{N_k(p)}{2h_0(p)M_k(p)},$$

где

$$M(p) = \begin{bmatrix} h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 & 0 \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) \end{bmatrix},$$

$$N(p) = \begin{bmatrix} g_0(p) & g_1(p) & g_2(p) & g_3(p) & g_4(p) \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) \end{bmatrix};$$

тогда

$$I(p) = (43,623K_1 + 21976K_2 + 4,7648K_1^2 - 8402,2K_1K_2 - 345,40K_2K_1^2 + 491,33K_1K_2^2 - 248,55K_2^3 + 87,833K_2^3 + 272,53K_2K_1^3 - 4,1420K_2^2K_1^2 + 7,6688K_1K_2^3 - 1,0480K_2^4 + 69,912) / (36001K_2 + 39845K_1K_2 - 25738K_2^2 + 13299K_2K_1^2 - 6449,4K_1K_2^2 + 390,60K_2^3 + 1184,6K_2K_1^3 - 515,81K_2^2K_1^2 + 54,083K_1K_2^3 - 1,4480K_2^4).$$

Минимальное значение функционала можно найти, как и в предыдущем примере, или следующим образом: найдем производные $\frac{dI^2(p)}{dK_1}$ и $\frac{dI^2(p)}{dK_2}$ и приравняем их к нулю. Получим систему из двух нели-

нейных уравнений, решить которую можно с помощью функции *solve* пакета MATLAB. В результате решения системы получаем несколько пар значений искомых параметров, из которых в силу физической реализуемости выберем следующие:

$$K_1 = 3, \quad K_2 = 0,4.$$

На рис. 1.103 показаны графики эталонной и реальной переходных характеристик.

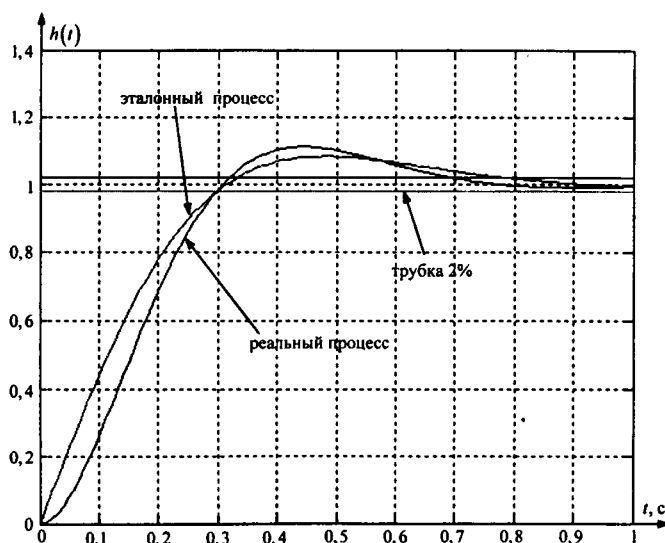


Рис. 1.103. Графики переходных процессов

Пример 1.17 [81]. Рассмотрим режим малых колебаний при перерегулировании возбуждения синхронного генератора. Генератор работает через дальнюю передачу на систему $U = \text{const}$. Используется уравнение генератора в упрощенной форме Лебедева–Жданова; учитывается постоянная времени возбуждения. Постоянными времени возбудителя и дифференцирующих звеньев пренебрегаем. Пусть $\theta(t)$ — угол между вектором ЭДС и вектором напряжения U . Изображение приращения $\theta(t)$ при внезапном малом изменении нагрузки записывается так:

$$W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

где

$$b_0 = 10,2; \quad b_1 = 4,86 - 0,389\beta_1 - 0,632\gamma_1; \quad b_2 = 0,287 - 0,389\beta_2 - 0,632\gamma_2;$$

$$a_0 = 6,57; \quad a_1 = 2,13 + 0,293\beta_1 - 0,399\gamma_1;$$

$$a_2 = (56,8 - 0,124\beta_1 + 29,3\beta_2 - 0,201\gamma_1 - 39,9\gamma_2) \cdot 10^{-2};$$

$$a_3 = (20,5 - 1,63\beta_1 - 0,124\beta_2 + 2,65\gamma_1 + 0,201\gamma_2) \cdot 10^{-2};$$

$$a_4 = (1,21 - 1,63\beta_1 - 2,65\gamma_2) \cdot 10^{-2};$$

где $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ — соответственно коэффициенты усиления по первой и второй производным тока и напряжения. Определим их, исходя из следующих требований: переходный процесс должен быть близким к эталонному при времени протекания переходного режима в пределах 2,5 с и максимальной скорости протекания процесса 2,5 рад/с.

Для реализации этого условия потребуем, чтобы колебания угла $\Delta\theta$ происходили по закону, близкому к $\Delta\theta^0(t) = h_3(t) = 1,55 - 1,72e^{-2t} + 0,17e^{-20t}$, чем определяется монотонность процесса, время его протекания и максимальная скорость. Преобразование Лапласа $h_3(t)$

$$H^3(s) = \frac{s + 1550}{25s^3 + 550s^2 + 1000s}.$$

Преобразование Фурье невязки примет вид

$$E(j\omega) = H^3(s) - W(s) = \frac{1}{s} \frac{\sum_{k=0}^5 c_k(p) \chi(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^7 d_k(p) \chi(j\omega)^k},$$

где

$$p = \{\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2\} \text{ — искомые параметры,}$$

$$c_0(p) = 1650000, \quad d_0(p) = 0.$$

Определим невязку $E(j\omega)$ как разность изображений эталонной и реальной ИПФ:

$$E(j\omega) = K^3(s) - W(s),$$

$$E(j\omega) = \frac{H^3(s)}{s} - W(s) = \frac{\sum_{k=0}^6 c_k(p) \chi(j\omega)^k}{\sum_{k=0}^6 d_k(p) \chi(j\omega)^k},$$

где

$$c_0(p) = 1650000; \quad c_1(p) = -84315000\beta_1 - 1355000\gamma_1 + 716193000;$$

$$c_2(p) = -233247000 - 1355000\gamma_2 - 34408550\gamma_1 - 84315000\beta_2 - 21232100\beta_1;$$

$$c_3(p) = -3896800 - 35031650\gamma_2 - 21232100\beta_2 - 5687299\gamma_1 + 1554124\beta_1;$$

$$c_4(p) = 2527299\gamma_2 - 1178500 + 1554124\beta_2 + 1630\beta_1 - 2650\gamma_1;$$

$$c_5(p) = -1210 + 1630\beta_2 + 2650\gamma_2; \quad c_6(p) = 0;$$

$$d_0(p) = -657000000; \quad d_1(p) = -574350000 - 29300000\beta_1 + 39900000\gamma_1;$$

$$d_2(p) = -190375000 - 15991000\beta_1 - 29300000\beta_2 + 22146000\gamma_1 + 39900000\gamma_2;$$

$$d_3(p) = -15991000\beta_2 - 1541950\gamma_1 + 21744000\gamma_2 + 965700\beta_1 - 57065000;$$

$$d_4(p) = -13905000 + 965700\beta_2 + 3536950\gamma_2 - 1452475\gamma_1 + 899600\beta_1;$$

$$d_5(p) = -1178000 + 899600\beta_1 + 1452475\gamma_2 - 66250\gamma_1 + 40750\beta_1;$$

$$d_6(p) = -30250 + 40750\beta_2 + 66250\gamma_2.$$

Отсюда следует

$$I(p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{g_k(j\omega, p)}{h_k(j\omega, p)h_k(-j\omega, p)} d\omega,$$

где

$$g_0 = -c_5^2; g_1 = -2c_3c_5 + c_4^2; g_2 = -2c_1c_5 - c_3^2 + 2c_2c_4;$$

$$g_3 = 2c_0c_4 + c_2^2 - 2c_1c_3; g_4 = 2c_0c_2 - c_1^2; g_5 = c_0^2;$$

$$h_0 = d_6; h_1 = d_5; h_2 = d_4; h_3 = d_3; h_4 = d_2; h_5 = d_1; h_6 = d_0.$$

Функционал, подлежащий минимизации, может быть записан так:

$$I(p) = \frac{(-1)^{k+1} N(p)}{2h_0(p)M(p)},$$

где

$$M(p) = \begin{bmatrix} h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 & 0 & 0 \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & h_6(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & h_6(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & h_6(p) \end{bmatrix};$$

$$N(p) = \begin{bmatrix} g_0(p) & g_1(p) & g_2(p) & g_3(p) & g_4(p) & g_5(p) \\ h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & h_6(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 & 0 \\ 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & h_6(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_1(p) & h_3(p) & h_5(p) & 0 \\ 0 & 0 & h_0(p) & h_2(p) & h_4(p) & h_6(p) \end{bmatrix}.$$

Минимальное значение функционала вычислялось с помощью функции *fmincom* пакета Matlab. В результате получены следующие значения:

$$\beta_1 = 8,3, \beta_2 = 2, \gamma_1 = -1,9, \gamma_2 = -0,78.$$

На рис. 1.104 показаны графики эталонной и реальной переходных характеристик:

$$h(t) = 1,55 + 0,0196e^{-43,164t} \cos(79,936t) - 0,0146e^{-43,164t} \sin(79,936t) -$$

$$- 1,572e^{-1,871t} \cos(1,086t) - 0,852e^{-1,871t} \sin(1,086t).$$

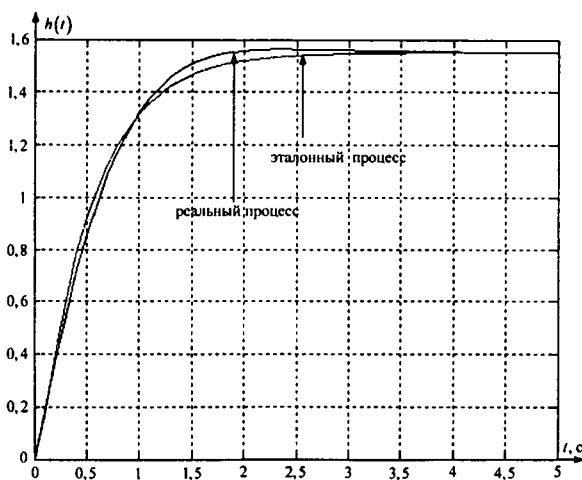


Рис. 1.104. Графики переходных процессов

1.11. МЕТОД МОМЕНТОВ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Напомним некоторые теоретические положения, определяющие содержание метода моментов (см. том 1).

Из уравнения

$$\sum_{v=0}^n a_v(t) x^{(v)} = \sum_{v=0}^m b_v(t) y^{(v)} \quad (1.226)$$

после умножения обеих частей на порождающую функцию $p_i(t)$ можно найти зависимость

$$\int_0^T x(t) h_i(t) dt = \mu_i, \quad i = \overline{1, l}, \quad (1.227)$$

где

$$h_i(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{dt^k} \left[a_k(t) p_i(t) (T-t)^n \right], \quad (1.228)$$

$$\mu_i = \int_0^T y(t) \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{dt^k} \left[b_k(t) p_i(t) (T-t)^n \right] \right\} dt. \quad (1.229)$$

Если в уравнениях (1.227) и (1.229) положить $T = \infty$, $p_i(t) = e^{-st}$, то формула (1.227) при $a_v = \text{const}$, $v = \overline{0, n}$ и $b_k = \text{const}$, $k = \overline{0, m}$ принимает вид

$$\int_0^{\infty} x(t) h_i(t) dt = \mu_i, \quad (1.230)$$

где

$$h_i(t) = \left[\sum_{k=0}^n a_k s_i^k \right] e^{-s_i t};$$

$$\mu_i = \int_0^{\infty} y(t) \left[\sum_{k=0}^m b_k s_i^k \right] e^{-s_i t} dt. \quad (1.231)$$

Легко видеть, что если рассматривать стационарную систему, а порождающие функции — экспоненциальная система, то основным является аппарат преобразования Лапласа. В самом деле, если в (1.226) $a_v = \text{const}$, $v = \overline{0, n}$, $b_v = \text{const}$, $v = \overline{0, m}$, $p(t) = e^{-st}$, то

$$X(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_0},$$

откуда находим (1.230), придавая переменной s конкретные значения: $s = s_1, s_2, \dots, s_i$.

i -м моментом функции $x(t)$ относительно $h_i(t)$ системы H называется интеграл вида

$$\mu_i = \int_{\Omega} x(t) h_i(t) dt, \quad i = \overline{1, l}, \quad (1.232)$$

где $H(t) = \{h_i(t), i = \overline{1, l}\}$ — моментная система функций, Ω — множество, на котором определены функции $h_i(t)$ и $x(t)$ (далее будем полагать $\Omega = [0, T]$ или $[0, \infty)$).

Множество $M = \{\mu_k : k = \overline{1, l}\}$ называется множеством моментов. Очевидно, моменты $\mu_i, i = 1, 2, \dots$ функции $x(t)$ относительно моментной системы $H = \{h_i(t), i = 1, 2, \dots\}$ характеризуют функцию $x(t)$. Однако это качественная оценка. Можно привести весьма важный факт, характеризующий количественную сторону вопроса: если известно необходимое число моментов функции $x(t)$ относительно моментной системы H , то функцию $x(t)$ можно восстановить с любой степенью точности (например, в метрике $L^2[0, \infty)$), т.е. знание моментов функции $x(t)$ дает возможность ее восстановления с необходимой точностью.

Приведем соответствующие примеры.

Пример 1.18 [81]. Восстановить функцию $x(t) \in L^2[0, \infty)$ моментами в виде разложения по экспоненциальной системе $H = \{e^{-q_k t}, k = 1, 2, \dots\}$.

Известна следующая теорема (теорема Сакса): положим, что $Kc = q_k$ — комплексные показатели, обладающие свойством: $\operatorname{Re} q_k > -\frac{1}{2}$, и среди них нет равных. Тогда система $F = \{\xi^{q_k} : k = 1, 2, \dots\}$ полна в $L^2[0, 1]$ в том и только том случае, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}\left(q_k + \frac{1}{2}\right)}{1 + \left|q_k + \frac{1}{2}\right|^2} = \infty. \quad (1.233)$$

Если воспользоваться заменой $\xi = e^{-t}$, то из теоремы Сакса следует утверждение: система $H\{e^{-q_k t} : k = 1, 2, \dots; \operatorname{Im} q_k > 0\}$ полна в $L^2[0, \infty)$ в том случае, если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} q_k}{1 + |q_k|^2} = \infty.$$

Ортонормированную систему, порожденную системой экспоненциальных функций, можно записать в виде

$$\varphi_1(t) = c_{11}e^{-q_1 t}; \quad \varphi_2(t) = c_{21}e^{-q_1 t} + c_{22}e^{-q_2 t}; \quad (1.234)$$

...

$$\varphi_l(t) = c_{l1}e^{-q_1 t} + c_{l2}e^{-q_2 t} + \dots + c_{ll}e^{-q_l t},$$

или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \dots \\ \varphi_l(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & & 0 \\ c_{21} & c_{22} & \\ \dots & & \\ c_{l1} & c_{l2} & \dots & c_{ll} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-q_1 t} \\ e^{-q_2 t} \\ \dots \\ e^{-q_l t} \end{pmatrix}. \quad (1.235)$$

Поскольку в разложении

$$x(t) = \sum_{v=1}^{\infty} c_v^x \varphi_v(t)$$

коэффициенты Фурье c_v^x определяются формулой

$$c_v^x = \int_0^{\infty} x(t) \left[\sum_{k=1}^v c_{vk} e^{-q_k t} \right] dt = \sum_{k=1}^v c_{vk} \int_0^{\infty} x(t) e^{-q_k t} dt,$$

то знание численных значений моментов вида $\mu_k = \int_0^{\infty} x(t) e^{-q_k t} dt$ дает возможность построить $x(t)$ с необходимой точностью, определяемой числом удерживаемых членов разложения.

Далее рассмотрим **вопрос применения метода моментов для решения задачи синтеза регуляторов.**

Согласно постановке задачи, известна эталонная динамическая характеристика: или $W^3(s)$ — эталонная передаточная функция, или $h_3(t)$ — эталонная переходная характеристика. В первом приближении в качестве $W^3(s)$ или $h_3(t)$ можно принять характеристики системы второго порядка, что равноценно аппроксимации сложного процесса основной составляющей второго порядка.

В необходимых случаях в качестве эталонного может быть принят процесс более сложного вида.

Поскольку задача синтеза при регулярных воздействиях заключается в выборе структуры и параметров САУ, которые обеспечивают заданные показатели качества и точности, то исходя из известных соображений определяются типы и варьируемые параметры последовательных, параллельных или последовательно-параллельных корректирующих устройств. Так как $W_o(s)$ и структура $W_{\text{к}}(s, p)$ известны, то легко найти ПФ замкнутой системы в виде

$$W(s, p) = \frac{b_m(p)s^m + b_{m-1}(p)s^{m-1} + \dots + b_0(p)}{a_n(p)s^n + a_{n-1}(p)s^{n-1} + \dots + a_0(p)}, \quad (1.236)$$

где $p = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ — варьируемые параметры корректирующих устройств, относящиеся к одному или нескольким звеньям и подлежащие определению.

Теперь постановка задачи синтеза регулятора методом моментов может быть сформулирована так [5]:

необходимо минимизировать целевую функцию вида

$$I(p) = \min_{p_k} \sum_{i=1}^l \left[\frac{b_m(p)s_i^m + b_{m-1}(p)s_i^{m-1} + \dots + b_0(p)}{a_n(p)s_i^n + a_{n-1}(p)s_i^{n-1} + \dots + a_0(p)} - W^3(s_i) \right]^2 \rho(s_i), \quad (1.237)$$

где $s_i = ic$ — показатели экспоненциальной системы

$$H = \{e^{-ic} : i = \overline{1, l}; c > 0\},$$

l — число моментов, $\rho(s_i)$ — весовые множители, при следующих ограничениях:

- 1) $p_{im} \leq p_i \leq p_{iM}$, $i = \overline{1, r}$ — ограничения на значения варьируемых параметров p_i , обусловленные условиями их физической реализуемости;
- 2) $\Delta_i > 0$, где Δ_i — определители Гурвица ($i = \overline{1, n-1}$) — ограничения на устойчивость системы;
- 3) $C_0 \leq C_{0\text{доп}}$; $C_1 \leq C_{1\text{доп}}$; ... — ограничения на коэффициенты ошибок, обеспечивающие требуемую точность системы в стационарных режимах при произвольных медленно изменяющихся воздействиях;
- 4) $a_i > 0$, $i = \overline{0, n}$; $\gamma(n, \psi) = \frac{a_i^2}{a_{i-1}a_{i+1}} \geq \gamma(n, \psi^0)$, $i = \overline{1, n-1}$, где $\gamma(n, \psi)$ — параметр,

характеризующий колебательность (см. табл. 1.10).

Это ограничение обеспечивает колебательность $\text{tg } \psi$ не выше заданной $\text{tg } \psi^0$.

Легко заметить, что поскольку

$$W(s_i, p) = \frac{b_m(p)s_i^m + b_{m-1}(p)s_i^{m-1} + \dots + b_0(p)}{a_n(p)s_i^n + a_{n-1}(p)s_i^{n-1} + \dots + a_0(p)} =$$

$$= \int_0^\infty K(\tau, p) e^{-s_i \tau} d\tau = \int_0^\infty K(\tau, p) e^{-ic\tau} d\tau = \mu_i(p),$$

а $W^3(s_i) = \int_0^\infty K_3(\tau) e^{-ic\tau} d\tau = \mu_i^3$; $\mu_i(p)$, $i = \overline{1, l}$ — моменты ИПФ замкнутой системы с регулятором, а μ_i^3 — моменты ИПФ эталонной системы, то зависимость (1.237) может быть переписана в виде

$$I(p) = \min_{p_k} \sum_{i=1}^l [\mu_i(p) - \mu_i^3]^2 \rho(s_i). \quad (1.238)$$

Таблица 1.10

Значения параметра, характеризующего колебательность

n	ψ , град				
	0	30	45	60	90
2	4	3	2	1	0
3	4	3	2,41	2	1
4	4	3	2,41	2	1,41
≥ 5	4	3	2,41	2	1,465

Итак, в сформулированной постановке задачи исходными данными для решения задачи синтеза регулятора являются: *параметры эталонного процесса* (эталонная ПФ $W^3(s)$); *ПФ замкнутой системы, включающая ПФ $W_0(s)$ объекта управления и ПФ $W_{\text{к}}(s)$ регулятора с варьируемыми параметрами $p_i, i = \overline{1, r}$; ограничения на устойчивость* (реализуется критерий Раусса); *ограничения на искомые параметры p_i ; заданная колебательность и, наконец, заданные коэффициенты ошибок.*

Если в качестве эталонной динамической характеристики задается $h_3(t)$, то левая функция принимает вид

$$I(p) = \min_{p_k} \sum_{i=1}^l \left[\frac{b_m(p_i)s_i^m + b_{m-1}(p)s_i^{m-1} + \dots + b_0(p)}{a_n(p_i)s_i^n + a_{n-1}(p)s_i^{n-1} + \dots + a_0(p)} \frac{1}{s_i} - H^3(s_i) \right]^2 \rho(s_i), \quad (1.239)$$

или, что то же самое,

$$I(p) = \min_{p_k} [\mu_i^h(p) - \mu_i^{h_3}]^2 \rho(s_i), \quad (1.240)$$

где $\mu_i^h(p)$ и $\mu_i^{h_3}$ — моменты переходных характеристик синтезируемой и эталонной систем.

В простейших случаях можно получить систему алгебраических уравнений вида

$$\frac{b_m(p)s_i^m + b_{m-1}(p)s_i^{m-1} + \dots + b_0(p)}{a_n(p)s_i^n + a_{n-1}(p)s_i^{n-1} + \dots + a_0(p)} = W^3(s_i), \quad i = \overline{1, l}, \quad (1.241)$$

причем $l > r$, и решить последнюю методом наименьших квадратов относительно неизвестных коэффициентов ПФ $W(s)$.

Поскольку $s_i = ic$, то важным является вопрос выбора численного значения c (в общем случае можно выбирать значения $s_1, s_2, s_3, \dots, s_l$, не подчиняя закону $s_i = ic$).

В [5] рекомендуется следующий подход к выбору значений $s_1, s_2, s_3, \dots, s_l : s_l$ предлагается располагать по закону геометрической прогрессии

$$s_v = s_1 q^{-v}$$

со знаменателем прогрессии $q = 2$. При этом основная часть значений $s_1, s_2, s_3, \dots, s_l$ должна входить в промежуток $0 \leq s_i \leq s_1$, где $W^3(s_1)$ может быть выражена в долях $W^3(s_1)_{\max} : W^3(s_1) = kW^3(s_i)_{\max}$. Как правило, $k = 0,2 \div 0,3$, если $W^3(s_i)$ — функция убывающая, и $k = 0,7 \div 0,8$ — если возрастающая.

Рассмотренная задача синтеза регуляторов решается методом нелинейного программирования. Варьируемые параметры регулятора определяются решением задачи нелинейного программирования, заключающейся в минимизации функционала (1.238) (или функционала (1.239)) при ограничениях 1), 2), 3) и 4) при выполнении критерия устойчивости Рауса, применяемого к характеристическому уравнению замкнутой системы. Алгоритм имеет алгебраический характер и нет необходимости интегрировать дифференциальные уравнения системы для каждого сочетания варьируемых параметров или решать систему в конечно-разностной форме (рис. 1.105).

В [5] детально рассмотрены методы синтеза нелинейных систем, использующих описанный выше подход, а в [117, 124] в рамках метода моментов построены алгоритмы идентификации класса линейных стационарных объектов. Этот метод целесообразно применять и при решении задачи синтеза регуляторов, когда ПФ объекта неизвестна.

Если на вход объекта подать ступенчатое воздействие $y(t) = 1(t)$ и зафиксировать в какой-либо форме реакцию $h(t)$, а также положить, что ПФ объекта имеет вид

$$W_o = \frac{b_{m_o}^o s^{m_o} + b_{m_o-1}^o s^{m_o-1} + b_0^o}{a_{n_o}^o s^{n_o} + a_{n_o-1}^o s^{n_o-1} + a_0^o}, \quad (1.242)$$

причем коэффициенты $b_i^o, i = \overline{0, m_o}$ и $a_j^o, j = \overline{0, n_o}$ подлежат определению, то указанные коэффициенты могут быть рассчитаны путем решения следующей моментной системы алгебраических уравнений:

$$\frac{b_{m_o}^o s_i^{m_o} + b_{m_o-1}^o s_i^{m_o-1} + b_0^o}{a_{n_o}^o s_i^{n_o} + a_{n_o-1}^o s_i^{n_o-1} + a_0^o} = \frac{\int_0^\infty h(t) e^{-s_i t} dt}{\int_0^\infty \frac{1}{s_i} e^{-s_i t} dt}, \quad i = \overline{1, l}. \quad (1.243)$$

Моменты

$$\begin{aligned} \mu_i^x &= \int_0^\infty h(t) e^{-s_i t} dt, \quad i = \overline{1, l}, \\ \mu_i^x &= \int_0^\infty \frac{1}{s_i} e^{-s_i t} dt, \quad i = \overline{1, l} \end{aligned} \quad (1.244)$$

легко рассчитать, если с необходимой точностью зафиксирована переходная характеристика $h(t)$ (в общем случае вход $y(t)$ может отличаться от ступеньки и выбран в классе наиболее информативных процессов).

Поскольку $l > n_o + m_o + 1$, то систему (1.244) с целью исключения влияния шумов и других факторов целесообразно решать методом наименьших квадратов.

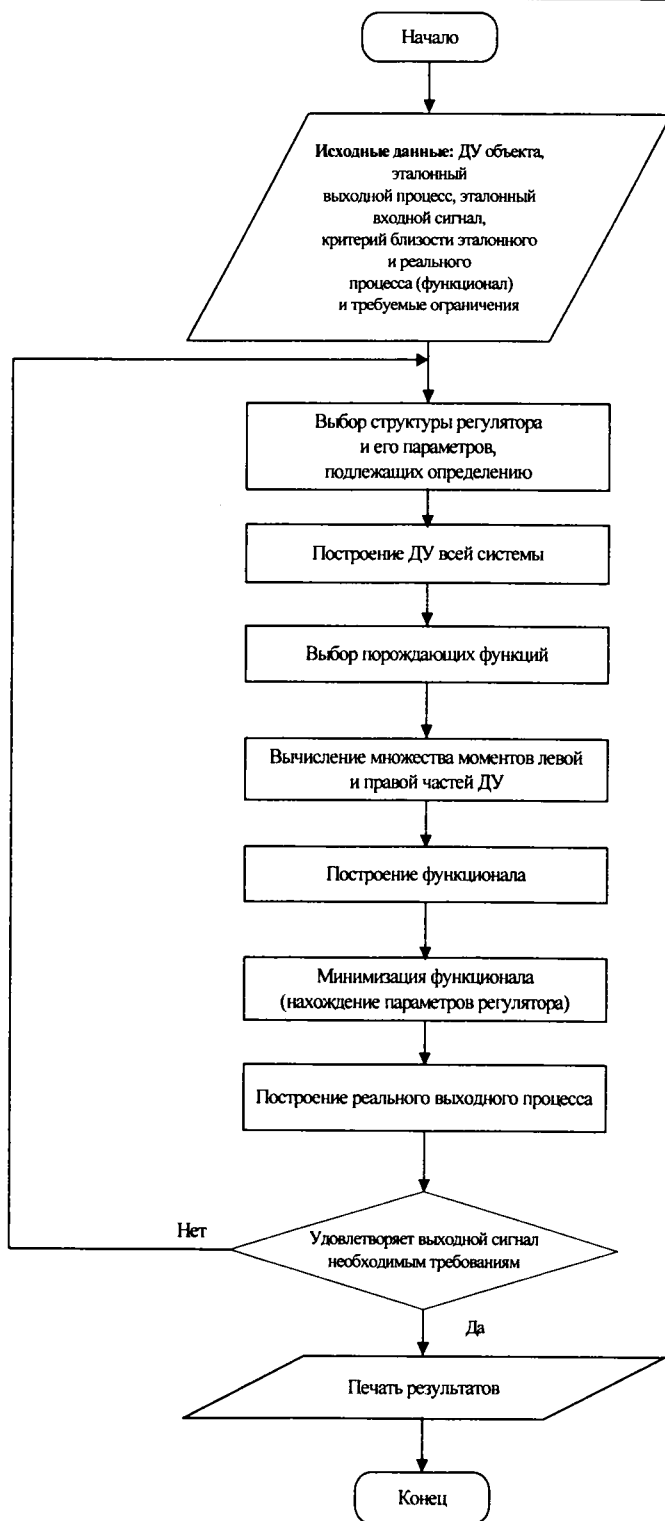


Рис. 1.105. Структурная схема алгоритма синтеза регуляторов

Пример 1.19. Приведем решение задачи синтеза регулятора методом моментов, рассмотренное в [5, 81].

Положим, что заданно изображение вида

$$X(s) = \frac{1,6}{0,4s^3 + p_2s^2 + p_1s + 5}, \quad (1.245)$$

где p_1 и p_2 — варьируемые параметры. Эталонный процесс задается формулой

$$X_3(s) = \frac{0,32}{a_2^3s^3 + a_1^3s + 1}. \quad (1.246)$$

Полагаем, что $x(\infty) = x_3(\infty)$, а в изображении, определяющем эталонный процесс, коэффициенты a_2^3 и a_1^3 также могут меняться исходя из необходимости расположения полюсов изображения $X(s)$ внутри заданной области, чем обеспечивается необходимая степень и запас устойчивости, а также колебательность системы.

Из (1.245) и (1.246) имеем

$$0,32(0,4s^3 + p_2s^2 + p_1s + 5) = 1,6(a_2^3s^3 + a_1^3s + 1).$$

Отсюда получаем

$$0,4s^3 + p_2s^2 + p_1s + 5 = 5a_2^3s^3 + 5a_1^3s + 5,$$

или, что то же самое,

$$p_2s + p_1 = 5a_2^3s + 5a_1^3 - 0,4s^2.$$

В соответствии с методом моментов комплексному переменному s будем придавать действительные значения

$$s_1 = 0; s_2 = 0,1; s_3 = 0,2; s_4 = 0,3;$$

$$s_5 = 0,4; s_6 = 0,5; s_7 = 0,7; s_8 = 1,0;$$

$$s_9 = 1,5; s_{10} = 2,0; s_{11} = 5,0;$$

$$s_{12} = 7,0; s_{13} = 10,0.$$

Отсюда получаем системы уравнений (первые пять уравнений снабжены весовыми множителями, равными соответственно 10, 10, 5, 3, 2):

$$\begin{aligned} 10p_1 &= 50a_1^3; \\ 10p_1 + p_2 &= 50a_1^3 + 5a_2^3 - 0,04; \\ 5p_1 + p_2 &= 25a_1^3 + 5a_2^3 - 0,08; \\ 3p_1 + 0,9p_2 &= 15a_1^3 + 4,5a_2^3 - 0,108; \\ 2p_1 + 0,8p_2 &= 10a_1^3 + 4a_2^3 - 0,128; \\ p_1 + 0,5p_2 &= 5a_1^3 + 2,5a_2^3 - 0,1; \\ p_1 + 0,7p_2 &= 5a_1^3 + 3,5a_2^3 - 0,196; \\ p_1 + p_2 &= 5a_1^3 + 5a_2^3 - 0,4; \\ p_1 + 1,5p_2 &= 5a_1^3 + 7,5a_2^3 - 0,9; \\ p_1 + 2p_2 &= 5a_1^3 + 10a_2^3 - 1,6; \\ p_1 + 3p_2 &= 5a_1^3 + 25a_2^3 - 10,0; \\ p_1 + 7p_2 &= 5a_1^3 + 35a_2^3 - 19,6; \\ p_1 + 10p_2 &= 5a_1^3 + 50a_2^3 - 40,0. \end{aligned} \quad (1.247)$$

Из последней системы можно получить следующие уравнения [81]:

$$\begin{aligned} 24,7p_1 + 5,0p_2 &= 123,5a_1^3 + 25,0a_2^3 - 7,778; \\ 5,0p_1 + 19,44p_2 &= 25,0a_1^3 + 97,22a_2^3 - 60,33; \end{aligned} \quad (1.248)$$

отсюда следует

$$p_1 = 5a_1^3 + 0,328;$$

$$p_2 = 5a_2^3 - 3,18.$$

Теперь характеристический полином изображения, определяющего эталонный процесс, принимает вид

$$N(s) = 0,4s^3 + (5a_2^3 - 3,18)s^2 + (5a_1^3 + 0,328)s + 5.$$

Таким образом, характеристический полином эталонного изображения зависит от двух коэффициентов a_1^3 и a_2^3 , которые можно менять из условия обеспечения заданного качества управления.

Уравнения

$$a_2^* = \frac{3,04 + 15,9a_1^*}{25a_1^* + 1,64}; \quad a_1^* = -0,064; \quad a_2^* = 0,636$$

определяют соответственно границы области устойчивости и двух асимптот этой границы (рис. 1.106).

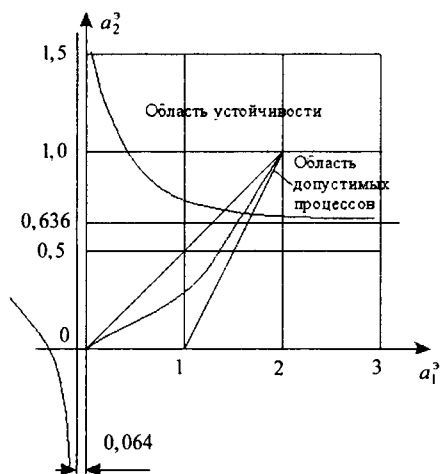


Рис. 1.106. Плоскость в координатах a_1^* и a_2^* , на которой показана граница области устойчивости и область допустимых процессов

Значения коэффициентов $a_1^* = 1,8$ и $a_2^* = 0,8$ обеспечивают монотонный процесс, при этом $p_1^* = 9,33$; $p_2^* = 0,82$.

Переходные процессы приведены на рис. 1.107.

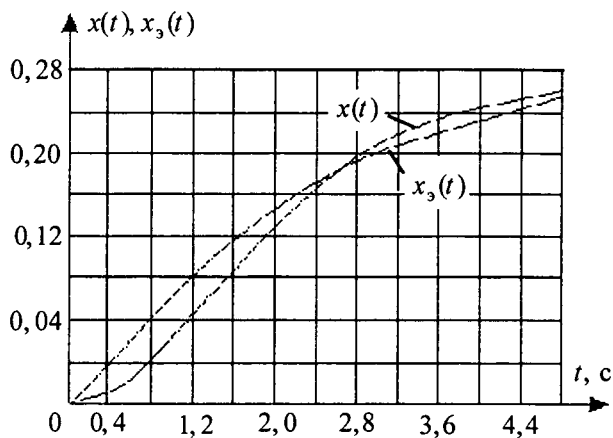


Рис. 1.107. Графики процессов $x_3(t)$ и $x(t)$

Рассмотрим другие приложения метода моментов.

Пример 1.20 [см. том I]. На рис. 1.108 изображена упрощенная модель системы управления скоростью самолета F-94 или X-15. При скорости полета, в 4 раза превышающей скорость звука, на высоте 10 000 м передаточная функция самолета имеет следующие параметры: $1/\tau = 1$, $K_1 = 1$, $\zeta\omega = 1$, $\omega = 4$. Требуется синтезировать корректирующее устройство $W_{\text{к}}$ так, чтобы реакция системы на ступенчатый входной сигнал имела перерегулирование менее 5% и время установления (по критерию 2%) менее 5 с.

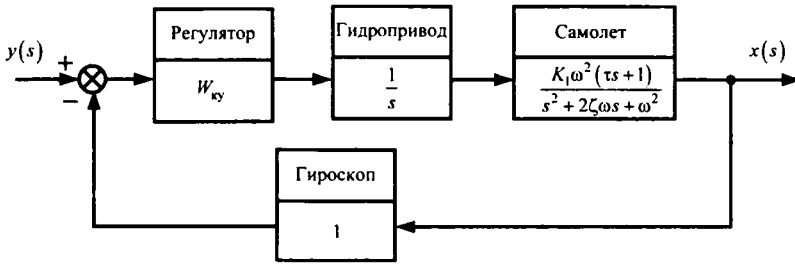


Рис. 1.108. Система управления положением самолета

В качестве корректирующего устройства выберем ПИД-регулятор:

$$W_p(s) = K_n + \frac{K_n}{s} + K_d s.$$

Тогда передаточная функция замкнутой системы определяется формулой

$$W(s) = \frac{16K_d s^3 + (16K_d + 16K_n)s^2 + (16K_n + 16K_n)s + 16K_n}{s^4 + (16K_d + 2)s^3 + (16 + 16K_d + 16K_n)s^2 + (16K_n + 16K_n)s + 16K_n}.$$

Выберем следующую эталонную характеристику:

$$h_s = 1 - e^{-\alpha_s t} \cos \beta_s t, \quad H^3(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + \alpha_s}{(s + \alpha_s)^2 + \beta_s^2},$$

где $\alpha_s = 1,5$, $\beta_s = 1,2$.

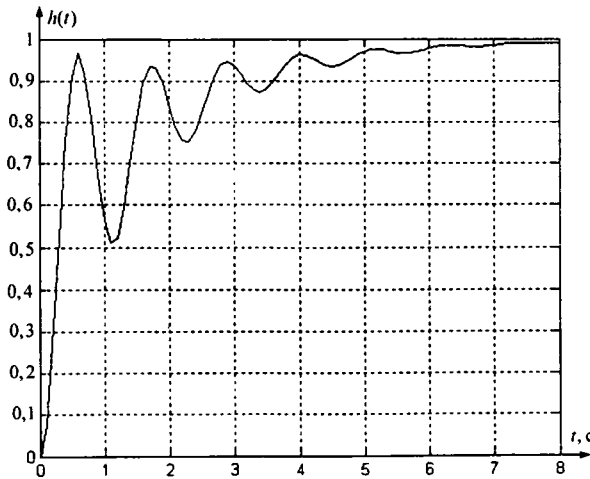


Рис. 1.109. Переходная характеристика нескорректированной системы

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{W(s, p)}{s} - H^3(s) = & (1600K_d - 150)s^4 + (-669 + 1600K_n + 4000K_d)s^3 + (1600K_n + 2400K_d - 3138 + 4000K_n)s^2 + \\ & + (2400K_n + 4000K_n - 5904)s + 2400K_n/100s^6 + (1600K_d + 500)s^5 + \\ & + (2569 + 6400K_d + 1600K_n)s^4 + (6400K_n + 1600K_n + 5538 + 10704K_d)s^3 + \\ & + (6400K_n + 10704K_n + 5904 + 5904K_d)s^2 + (10704K_n + 5904K_n)s + 5904K_n. \end{aligned}$$

$$I(p) = \sum_{i=0}^{14} \left[\frac{W(s_i, p)}{s_i} - H^3(s_i) \right]^2,$$

где $p = \{K_n, K_n, K_d\}$ — искомые параметры, $s_i = 10 \cdot 2^{-i}$, $i = \overline{0, 14}$.

Минимум функционала $I(p)$ вычислялся в пакете Matlab с помощью функции *fmincon* (функция поиска минимума нелинейной задачи с ограничениями). В результате получены следующие значения параметров:

$$K_n = 230, K_n = 200, K_d = 0,3.$$

На рис. 1.110 представлены графики эталонной и реальной переходных характеристик.

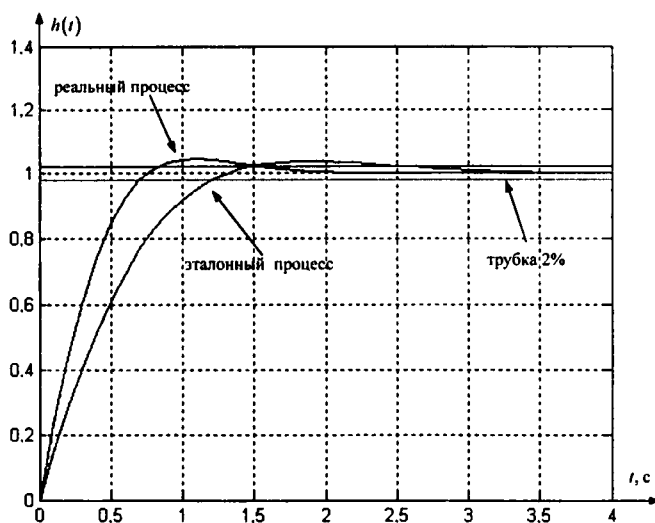


Рис. 1.110. Графики переходных процессов

Пример 1.21 [50]. Рассмотрим решение задачи синтеза регулятора системы промышленного назначения. Бурное развитие газового промысла на Севере, в Западной Сибири и в других регионах России потребовало передачи огромных количеств природного газа в центр страны и за рубеж. Газ должен быть доставлен потребителям самым оптимальным и экономически эффективным путем с соблюдением все возрастающих требований по повышению надежности и безопасности поставок. Он транспортируется по магистральным газопроводам под высоким давлением (от 50 до 75 кг/см²). Для этого на расстоянии 100–150 км устанавливаются промежуточные компрессорные станции (рис. 1.111), которые восстанавливают давление газа на участке газопровода до расчетного значения. При этом пропускная способность газопровода возрастает в несколько раз, а капитальные затраты увеличиваются лишь на 25–30%.

Каждая станция содержит комплекс технических средств, обеспечивающих надежную и экономичную работу основного оборудования: нагнетателей природного газа — устройства, которые создают степень давления от 1,1 до 1,8 п. Они являются основным энергетическим элементом компрессорных станций магистральных газопроводов. Нагнетатель представляет собой лопаточную машину сжатия, в которой энергия внешнего источника (привода) сообщается газу, за счет чего и повышается давление. Привод и нагнетатель представляют собой газоперекачивающий агрегат (ГПА) (рис. 1.112). В ГПА в качестве привода используются газотурбинные установки (ГТУ).

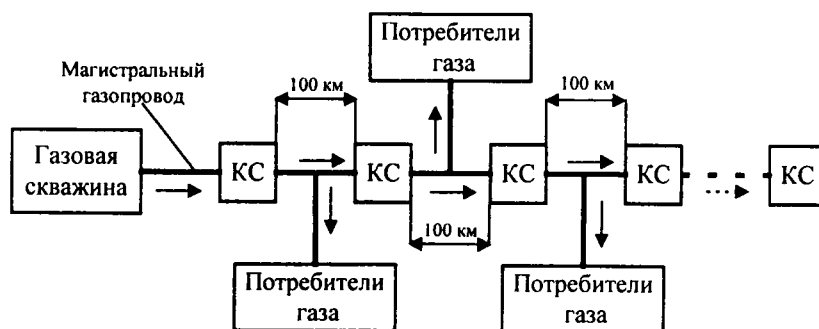


Рис. 1.111. Установка промежуточных компрессорных станций

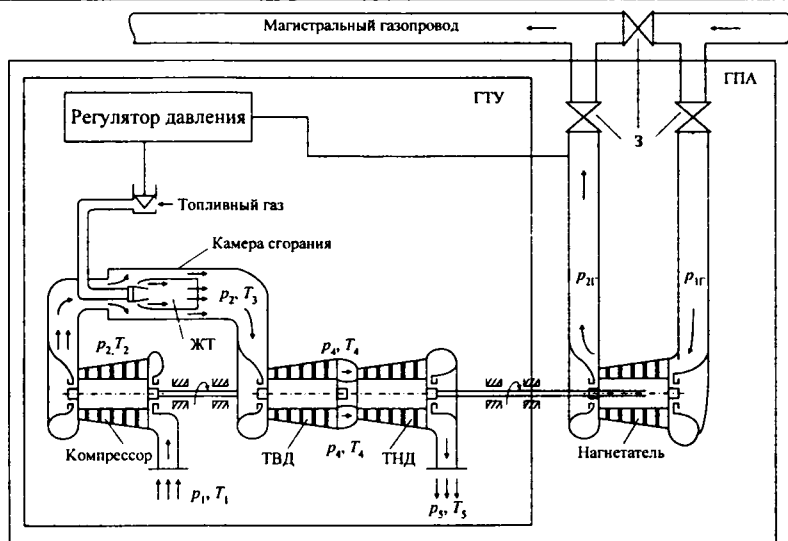


Рис. 1.112. Газоперекачивающий агрегат

Эффективная эксплуатация этого комплекса возможна при безотказном функционировании автоматизированной системы управления технологическими процессами компрессорной станции, в состав которой входит и система автоматического регулирования ГПА. Задачей системы регулирования является поддержание одного или нескольких параметров на требуемом уровне. В ГПА регулируемые параметрами являются либо частота вращения нагнетателя, либо давление газа на выходе из КС.

Рассмотрим принцип работы ГПА с двухвальной ГТУ и регулятором давления (рис. 1.112).

Двухвальная газотурбинная установка состоит из воздушного компрессора, камеры сгорания и газовой турбины, которая состоит из двух частей: турбины высокого давления (ТВД) и турбины низкого давления (ТНД). Компрессор состоит из ротора, укрепленного на одной оси с ТВД, и неподвижного направляющего аппарата. При работе турбины ротор компрессора вращается. Лопатки ротора имеют такую форму, что при их вращении давление перед компрессором понижается, а за компрессором повышается. Атмосферный воздух с давлением p_1 и температурой T_1 засасывается в компрессор, несколько ступеней лопаток компрессора повышают давление воздуха в 5–7 раз. Процесс сжатия протекает адиабатно, поэтому температура воздуха повышается до температуры 200°C и более.

Сжатый воздух с давлением p_2 и температурой T_2 поступает в камеру сгорания. Одновременно через форсунку в нее впрыскивается топливо. В камере сгорания воздух разделяется на два потока: один поток в количестве, необходимом для сгорания топлива, поступает внутрь жаровой трубы (ЖТ); второй поток обтекает жаровую трубу снаружи и подмешивается к продуктам сгорания для понижения их температуры. Этим достигается уменьшение начальной температуры газа перед турбиной до значений, приемлемых с точки зрения длительной и надежной работы вращающихся горячих элементов газовой турбины (рабочие лопатки, диски и др.). При горении топлива воздух, служащий рабочим телом, получает некоторое количество тепла и нагревается до температуры 1500–2200°C. Нагревание воздуха происходит при постоянном давлении, поэтому воздух расширяется и скорость его движения увеличивается.

Движущийся с огромной скоростью воздух и продукты горения с давлением p_2 и температурой T_3 направляются в турбину. Переходя от ступени к ступени, они отдают свою кинетическую энергию сначала лопаткам ТВД, передавая ее валу механическую энергию для привода компрессора, а затем лопаткам ТНД, которая является приводом нагнетателя. Часть полученной турбиной энергии расходуется на вращение компрессора, а остальная часть используется для вращения винта самолета, винта морского корабля или колес автомобиля. После ТНД газ с давлением p_5 и температурой T_5 выбрасывается в атмосферу.

К нагнетателю от входного участка магистрального газопровода с помощью запорных органов 3 подается природный газ с давлением p_{1r} . Рабочее колесо нагнетателя имеет определенное количество лопаток, загнутых в сторону, противоположную вращению колеса. С помощью их происходит передача механической энергии от колеса газу, что сопровождается повышением давления до p_{2r} и скоростного напора.

Увеличением (уменьшением) числа оборотов нагнетателя n_2 можно добиться расчетного давления p_{2r0} . Далее газ с p_{2r0} возвращается в газопровод, к потребителям. Расчетное значение p_{2r0} достигается

ется с помощью регулятора давления, который изменяет подачу топлива в камеру сгорания, тем самым увеличивая или уменьшая частоту вращения нагнетателя.

В системе регулирования ГПА используется не прямое регулирование (рис. 1.113): в цепь чувствительный элемент—регулируемый объект вводят усилительные устройства, работающие, как правило, на энергии жидкости (масла), получаемой от системы маслоснабжения. Такие усилительные устройства, имеющие выходной координатой механическое перемещение, применительно к энергетическим объектам называют сервомоторами. Заданный режим работы объекта нарушается вследствие возмущающих воздействий. Для ГПА это в основном изменение потребления газа, приводящее к изменениям крутящего момента нагнетателя и связанной с ним турбины. К возмущающим воздействиям для ГПА следует отнести и изменения температуры и давления окружающей среды. Возмущением системы является относительное изменение потребления газа λ в выходном участке газопровода. Регулируемой величиной является относительное изменение давления газа на выходе нагнетателя $\delta_{2г}$, а регулирующим воздействием является относительное открытие топливного клапана μ .

Несмотря на конструктивные различия, у сервомоторов всех типов можно выделить два элемента: 1) устройство, вырабатывающее силовое воздействие за счет энергии постороннего источника; 2) устройство управления (золотник), воспринимающее сигнал от чувствительного элемента или предшествующего усилительного устройства.

Основной характеристикой сервомотора является коэффициент усиления по мощности, определяемый отношением выходной мощности к входной. Поскольку перестановочные силы регулирующих органов турбин значительны и могут достигать десятков тысяч ньютонов, в схемах регулирования ГТУ обычно используют несколько каскадов усиления.

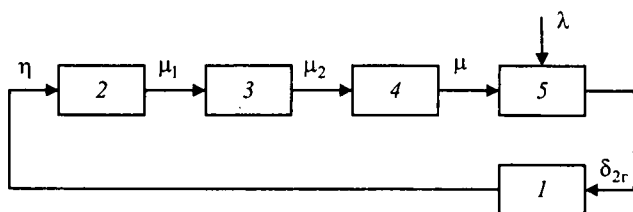


Рис. 1.113. Функциональная схема системы автоматического регулирования ГПА:

1 — чувствительный элемент; 2 — промежуточный усилитель;
3 — промежуточный сервомотор; 4 — главный сервомотор; 5 — ГПА

В ГТУ для перемещения регулирующего и стопорного клапанов в основном применяют сервомоторы с поступательным движением поршня и отсечными золотниками (рис. 1.114).

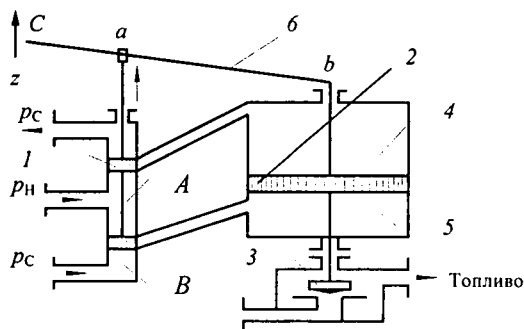


Рис. 1.114. Схема сервомотора двойного действия:

1 — золотник; 2 — поршень; 3 — регулирующий клапан;
4 — полость над поршнем; 5 — полость под поршнем; 6 — рычаг

Принцип действия сервомотора заключается в следующем. Точка C получает перемещение z от чувствительного элемента или промежуточного усилителя. В камеру A золотника 1 (см. рис. 1.114) подается жидкость, которая может поступать в полости под поршнем 5 и над поршнем 4 попеременно, при этом если одна полость соединяется с напорной камерой A , то другая — со сливной B . Равновесие системы возможно только в одном положении, когда золотник перекрывает напорную и сливную линии, т.е. при неизменном положении точки a . Перемещаясь, поршень 2 меняет проходное сечение регулирующего клапана 3, чем определяет

подачу топлива и соответственно режим работы ГТУ. Хотя точка a в равновесных состояниях неподвижна, точки c и b могут занимать различные положения в соответствии с требуемой нагрузкой турбины. Обратная связь осуществляется с помощью рычага b , обеспечивая выключающее воздействие на сервомотор.

Газотурбинная установка с нагнетателем и газопровод представляет собой динамическую систему (объект регулирования), которую можно представить в виде отдельных элементов или звеньев. Уравнения движения элементов ГПА составляют, исходя из условий баланса мощностей (моментов) и законов сохранения массы, энергии или других свойств. Основными характеристиками любого звена являются динамические константы, определяемые расчетным или экспериментальным способом.

Применительно к решению задач устойчивости и определения качества переходного процесса на первом этапе будем рассматривать только малые колебания динамической системы около равновесного положения. Это означает, что математическая модель включает только линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, или, что то же самое, из-за малости отклонений параметров от состояния равновесия нелинейную зависимость при разложении в ряд Тейлора представляют только первыми членами разложения (учитываются только линейные члены). Например, при известной зависимости мощности турбины низкого давления от давления и температуры газов перед ней приращение мощности при малых приращениях температуры и давления перед турбиной определяется зависимостью

$$\Delta N_2 = \left(\frac{\partial N_2}{\partial T_4} \right) \Delta T_4 + \left(\frac{\partial N_2}{\partial p_4} \right) \Delta p_4,$$

а сама мощность

$$N_2(p, T) = N_{20}(p_{40}, T_{40}) + \Delta N_2,$$

где T_{40}, p_{40} — значения температуры и давления перед турбиной в равновесном состоянии.

Изменение искоемых величин и независимых параметров удобно представить в безразмерном виде в относительных координатах. В качестве масштабов приведения величин к безразмерному виду целесообразно принимать их значения в равновесном состоянии. При таком подходе, например, уравнение для мощности ТНД запишется так:

$$\frac{\Delta N_2}{N_{20}} = 1 + a_1 \tau_4 + a_2 \delta_4,$$

где

$$a_1 = \left(\frac{\partial N_2}{\partial T_4} \right) \frac{T_{40}}{N_{20}}, \quad a_2 = \left(\frac{\partial N_2}{\partial p_4} \right) \frac{p_{40}}{N_{20}}$$

— безразмерные постоянные;

$$\tau_4 = \frac{\Delta T_4}{T_{40}}, \quad \delta_4 = \frac{\Delta p_4}{p_{40}}$$

— относительные координаты.

Основные элементы ГТУ как динамической системы можно разделить на две группы. Равновесный режим работы элементов первой группы обеспечивается равенством крутящих моментов или балансом мощностей машин-двигателей и машин-потребителей. Объекты второй группы представляют собой ресивер с коммуникациями подвода и отвода теплоты или массы (в качестве ресивера могут выступать камера сгорания, переходный патрубок между ТВД и ТНД и др.). В равновесном состоянии скорости подвода и отвода массы газа его энергия и теплота равны. Из этих условий и получаются уравнения движения элементов ГПА [50]:

- уравнение движения ротора ТВД и компрессора

$$T_{a1} \dot{\varphi}_1 + a_{11} \varphi_1 = a_{12} \delta_2 - a_{13} \delta_4 + a_{14} \tau_3;$$

- уравнение движения ротора ТНД и нагнетателя

$$T_{a2} \dot{\varphi}_2 + a_{21} \varphi_2 = a_{22} \delta_4 - a_{23} \delta_{2r} + a_{24} \delta_{1r} + a_{25} \tau_4;$$

- уравнение процессов в камере сгорания

$$a_{31} \tau_3 = a_{32} \varphi_2 + a_{33} \delta_2 + a_{34} \tau_2 + a_{35} \mu + a_{36} \delta_4;$$

- уравнение для объема компрессор-турбина

$$T_r \dot{\delta}_2 + a_{41} \delta_2 = a_{42} \varphi_1 + a_{43} \tau_3 + a_{44} \delta_4 + a_{45} \dot{\tau}_3 + a_{46} \dot{\tau}_2;$$

- уравнение для объема между турбинами высокого и низкого давления

$$T_n \dot{\delta}_4 + a_{51} \delta_4 = a_{52} \delta_2 - a_{53} \tau_3 + a_{54} \tau_4;$$

- уравнение объема между газопроводом и нагнетателем на входе

$$A_3 \dot{\delta}_{1r} + a_{61} \delta_{1r} = -a_{62} \delta_{2r} - a_{63} \varphi_2;$$

- уравнение объема между газопроводом и нагнетателем на выходе

$$A_4 \dot{\delta}_{2r} + a_{71} \delta_{2r} = -a_{72} \delta_{1r} + a_{73} \varphi_2 - \lambda;$$

$$\tau_4 = \tau_3 - b_{21}(\delta_2 - \delta_4); \tau_2 = b_{11}\delta_2,$$

где изменение искомым величин удобно представлены в безразмерном виде в относительных координатах:

$$\delta_1 = \frac{P_{10} - P_1}{P_{10}}; \delta_2 = \frac{P_{20} - P_2}{P_{20}}; \delta_{1r} = \frac{P_{1r0} - P_{1r}}{P_{1r0}}; \delta_{2r} = \frac{P_{2r0} - P_{2r}}{P_{2r0}}$$

— относительные изменения давления на входе и выходе из компрессора (или нагнетателя). Индекс «0» обозначает значение параметра в установившемся режиме.

$$\delta_4 = \frac{P_{40} - P_4}{P_{40}}; \delta_5 = \frac{P_{50} - P_5}{P_{50}}$$

— относительные изменения давления на входе и выходе ТНД;

$$\tau_3 = \frac{T_{30} - T_3}{T_{30}}; \tau_4 = \frac{T_{40} - T_4}{T_{40}}; \tau_5 = \frac{T_{50} - T_5}{T_{50}}$$

— относительные изменения температур перед ТВД и на входе и выходе ТНД.

Коэффициенты a_{ij} — безразмерные величины; T_{a1}, T_{a2} — постоянные времени ТВД и ТНД, которые зависят от размеров и форм роторов, их мощностей и угловых скоростей вращения; A_3, A_4 — постоянные времени в подводящей и отводящей ветках газопровода; T_r, T_n — постоянные времени, зависящие от объема патрубков между камерой сгорания и ТВД, между ТВД и ТНД. Для ГТН-16 коэффициенты математической модели имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 2,1; a_{12} = 1,12; a_{13} = 0,7; a_{14} = 0,5; \\ a_{21} &= 15,3; a_{22} = 2; a_{23} = -19; a_{24} = -19; a_{25} = 0,5; \\ a_{31} &= 0,5 \text{ с}; a_{32} = 1; a_{33} = -1,1; a_{34} = 0,5; a_{35} = 0,35; a_{36} = 0,07; \\ T_r &= 0,03 \text{ с}; a_{41} = 1,16; a_{42} = 2,1; a_{43} = 0,5; a_{44} = 0,07; a_{45} = 0,02; a_{46} = 0,04; \\ T_n &= 0,02 \text{ с}; a_{51} = 1,01; a_{52} = 1,08; a_{53} = 0,5; a_{54} = 0,5; \\ A_3 &= 14 \text{ с}; a_{61} = 21,7; a_{62} = -20,5; a_{63} = 15,1; \\ A_4 &= 9,54 \text{ с}; a_{71} = 24,8; a_{72} = -20,5; a_{73} = 15,1; \\ b_{11} &= 0,314; b_{21} = 0,201. \end{aligned}$$

Уравнения регулятора давления газа для компрессорной станции [50]:

- уравнение измерительного органа регулятора

$$\delta_p \eta = -\delta_{2r};$$

- уравнение промежуточного усилителя

$$(T_{s1}s + 1)\mu_1 = \eta;$$

- уравнение сервомотора регулятора

$$(T_{s2}s + 1)\mu_2 = \mu_1;$$

- уравнение главного сервомотора

$$(T_{s3}s + 1)\mu = \mu_2,$$

где δ_p — степень неравномерности чувствительного органа; η — относительное смещение чувствительного элемента; μ_1 — относительное смещение промежуточного усилителя; μ_2 — относительное смещение сервомотора регулятора; μ_3 — относительное смещение главного сервомотора; T_{s1}, T_{s2}, T_{s3} — постоянные времени усилителя, сервомотора регулятора и главного сервомотора.

Передаточная функция регулятора имеет вид

$$W_p(s) = \frac{\mu(s)}{\delta_{2r}(s)} = \frac{-1}{T_{s1}T_{s2}T_{s3}\delta_p s^2 + (T_{s1} + T_{s2} + T_{s3})\delta_p s + \delta_p}.$$

Структурная схема системы представлена на рис. 1.115.

Исключая промежуточные переменные из уравнений математической модели ГПА и регулятора давления, можно получить ПФ замкнутой системы, коэффициенты которой зависят от параметров системы $p = \{T_{s1}, T_{s2}, T_{s3}, \delta_p\}$:

$$W(s) = \frac{\delta_{2r}}{\lambda} = \frac{x}{y} = \frac{\sum_{m=0}^8 b_m(p) \cdot s^m}{\sum_{n=0}^9 a_n(p) \cdot s^n}, \quad (*)$$

где

$$\begin{aligned}
 b_0 &= -26,72018_p, \\
 b_1 &= -26,72018_p T_{s2} - 26,72018_p T_{s3} - 264,9118_p - 26,72018_p T_{s1}, \\
 b_2 &= -26,72018_p T_{s1} T_{s2} - 264,9118_p T_{s2} - 264,9118_p T_{s3} - 645,7428_p - \\
 &\quad - 264,9118_p T_{s1} - 26,72018_p T_{s2} T_{s3} - 26,72018_p T_{s1} T_{s3}, \\
 b_3 &= -264,9118_p T_{s2} T_{s3} - 645,7428_p T_{s1} - 645,7428_p T_{s2} - 264,9118_p T_{s1} T_{s3} - \\
 &\quad - 26,72018_p T_{s2} T_{s3} \delta_p - 645,7428_p T_{s3} - 264,9118_p T_{s1} T_{s2} - 123,5068_p, \\
 b_4 &= -5,015648_p - 123,5068_p T_{s1} - 645,7428_p T_{s2} T_{s3} - 123,5068_p T_{s2} - 123,5068_p T_{s3} - \\
 &\quad - 645,7428_p T_{s1} T_{s2} - 264,9118_p T_{s2} T_{s3} \delta_p - 645,7428_p T_{s1} T_{s3}, \\
 b_5 &= -5,015648_p T_{s2} - 123,5068_p T_{s1} T_{s3} - 123,5068_p T_{s1} T_{s2} - 5,015648_p T_{s3} - \\
 &\quad - 5,015648_p T_{s1} - 0,05705868_p - 645,7428_p T_{s2} T_{s3} \delta_p - 123,5068_p T_{s2} T_{s3}, \\
 b_6 &= -0,05705868_p T_{s3} - 0,05705868_p T_{s2} - 0,05705868_p T_{s1} - \\
 &\quad - 5,015648_p T_{s1} T_{s2} - 5,015648_p T_{s1} T_{s3} - \\
 &\quad - 5,015648_p T_{s2} T_{s3} - 123,5068_p T_{s2} T_{s3} \delta_p, \\
 b_7 &= -0,05705868_p T_{s1} T_{s2} - 0,05705868_p T_{s1} T_{s3} - 0,05705868_p T_{s2} T_{s3} - \\
 &\quad - 5,015648_p T_{s2} T_{s3} \delta_p, \\
 b_8 &= -0,05705868_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} \delta_p, \\
 a_0 &= 10,7437 + 133,9118_p, \\
 a_1 &= 133,9118_p T_{s1} + 148,616 + 1730,358_p + 133,9118_p T_{s3} + 133,9118_p T_{s2}, \\
 a_2 &= 133,9118_p T_{s1} T_{s3} + 1730,358_p T_{s1} + 6806,038_p + 1730,358_p T_{s3} + \\
 &\quad + 1730,358_p T_{s2} + 133,9118_p T_{s1} T_{s2} + 133,9118_p T_{s2} T_{s3} + 272,416, \\
 a_3 &= 1730,358_p T_{s1} T_{s3} + 133,9118_p T_{s2} T_{s3} \delta_p + 6806,038_p T_{s1} + 8639,588_p + \\
 &\quad + 6806,038_p T_{s3} + 6806,038_p T_{s2} + 10,5508 + 1730,358_p T_{s1} T_{s2} + 1730,358_p T_{s2} T_{s3}, \\
 a_4 &= 6806,038_p T_{s1} T_{s3} + 1730,358_p T_{s2} T_{s3} \delta_p + 8639,588_p T_{s1} + 1295,478_p + \\
 &\quad + 8639,588_p T_{s3} + 8639,588_p T_{s2} + 0,0244553 + 6806,038_p T_{s1} T_{s2} + 6806,038_p T_{s2} T_{s3}, \\
 a_5 &= 1295,478_p T_{s3} + 8639,588_p T_{s1} T_{s2} + 8639,588_p T_{s2} T_{s3} + 1295,478_p T_{s1} + \\
 &\quad + 49,26428_p + 8639,588_p T_{s1} T_{s3} + 1295,478_p T_{s2} + 6806,038_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} \delta_p, \\
 a_6 &= 49,26428_p T_{s1} + 49,26428_p T_{s2} + 0,5443398_p + 1295,478_p T_{s1} T_{s2} + \\
 &\quad + 1295,478_p T_{s1} T_{s3} + 49,26428_p T_{s3} + 8639,588_p T_{s2} T_{s3} \delta_p + 1295,478_p T_{s2} T_{s3}, \\
 a_7 &= 49,26428_p T_{s1} T_{s3} + 49,26428_p T_{s2} T_{s3} + 49,26428_p T_{s1} T_{s2} + \\
 &\quad + 1295,478_p T_{s2} T_{s3} \delta_p + 0,5443398_p T_{s1} + 0,5443398_p T_{s3} + 0,5443398_p T_{s2}, \\
 a_8 &= 49,26428_p T_{s2} T_{s3} \delta_p + 0,5443398_p T_{s1} T_{s3} + 0,5443398_p T_{s1} T_{s2} + 0,5443398_p T_{s2} T_{s3}, \\
 a_9 &= 0,5443398_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} \delta_p.
 \end{aligned}$$

Перепишем ДУ замкнутой системы ГПД (*) с использованием зависимостей (1.226)–(1.229) и воспользуемся обозначениями

$$\mu_i^x(p) = f_i^x(p) = \int_0^T x_s(t) \left[\sum_{k=0}^9 \frac{(-1)^k}{k!} a_k(p) \frac{d^k}{d\tau^k} \{ p_i(t)(T-\tau)^n \} \right] dt, \quad (1.249)$$

$$\mu_i^y(p) = f_i^y(p) = \int_0^T y_s(t) \left[\sum_{k=0}^8 \frac{(-1)^k}{k!} b_k(p) \frac{d^k}{d\tau^k} \{ p_i(t)(T-\tau)^n \} \right] dt. \quad (1.250)$$

Зависимости (1.249) и (1.250) определяют моменты входного и выходного сигналов $y_s(t) = \lambda(t)$, $x_s(t) = \delta_{2r}(t)$, порожденные функциями p_i (порождающими функциями $p_i(t)$, $i=1,2,\dots$, которые выбираются проектировщиком из условия построения вычислительной схемы, удовлетворяющей известным требованиям). Здесь используется моментная система, отличная от экспоненциальной (1.230).

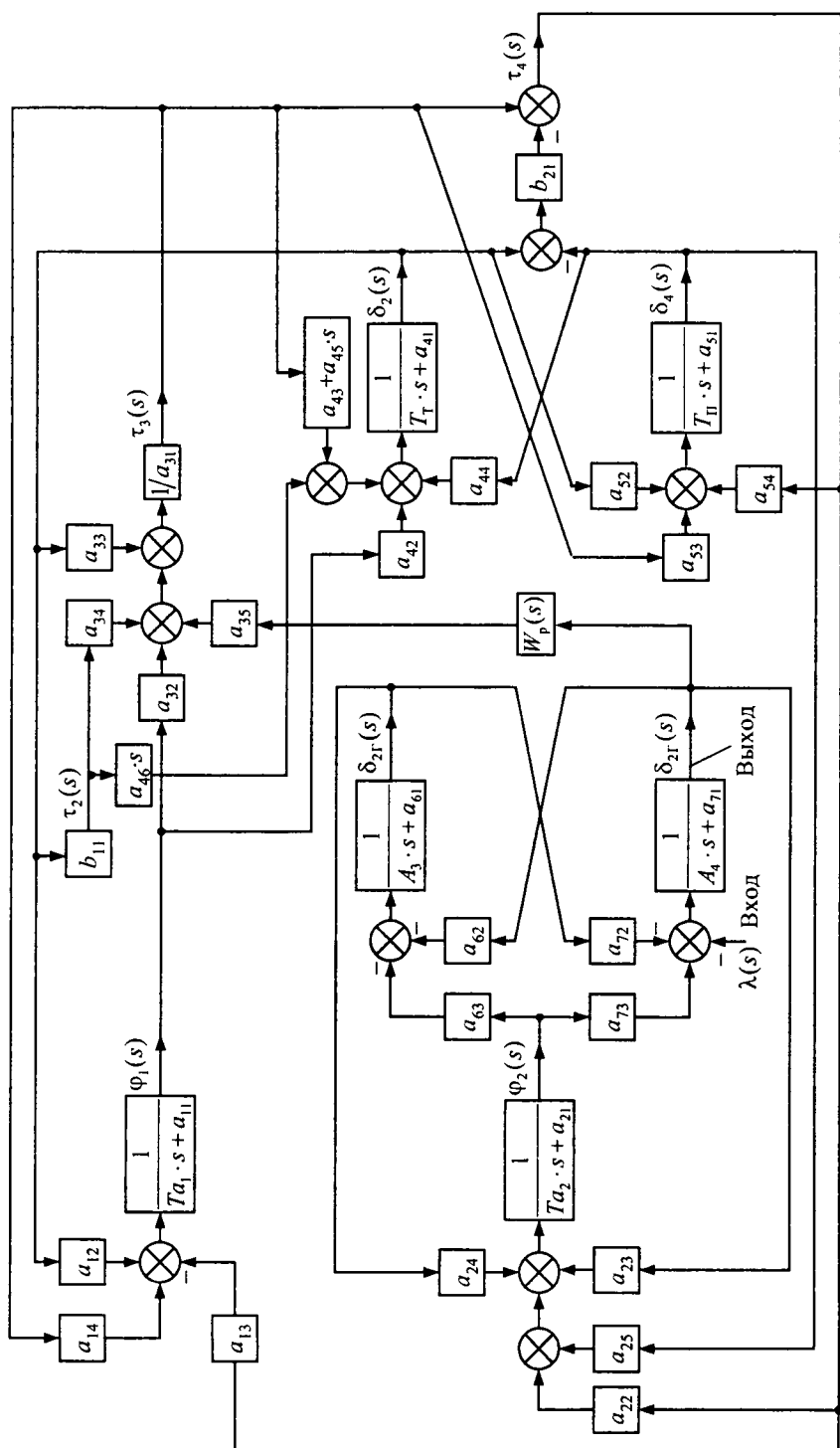


Рис. 1.115. Структурная схема ГПА

Невязка для порождающей функции $p_i(t)$ определяется формулой

$$E_i(p) = f_i^x(p) - f_i^y(p) = \mu_i^x(p) - \mu_i^y(p),$$

а минимизируемый функционал принимает вид (он совпадает с (1.238))

$$I(p) = \sum_{i=1}^l [\mu_i^x(p) - \mu_i^y(p)] p_i.$$

Положим в (1.249) и (1.250) $T = 100$ с, а в качестве порождающих функций выберем полиномы Лежандра, ортонормированные на промежутке $[0, 100]$ (см. том 1). Зададим желаемую реакцию системы на эталонное воздействие $\lambda(t) = y_3(t) = 0,1(t)$ в виде

$$\delta_{2r}(t) = x_3(t) = -0,006(1 - e^{0,2t}),$$

т.е. при изменении потребления газа на 10% давление газа в газопроводе должно меняться на 0,6%.

Вычислим 15 моментов:

$$\begin{aligned} f_0^x(p) = & -47878099206\delta_p T_{s1}T_{s3} - 47878099206\delta_p T_{s1}T_{s2} - 47878099206\delta_p T_{s2}T_{s3} - \\ & -562744313693\delta_p T_{s2} - 562744313693\delta_p T_{s1} - 562744313693\delta_p T_{s3} - \\ & -443200060804 - 3614340265\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} - 5942949641244\delta_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^x(p) = & 112013048203\delta_p T_{s1}T_{s3} + 112013048203\delta_p T_{s1}T_{s2} + 112013048203\delta_p T_{s2}T_{s3} + \\ & + 1083996402103\delta_p T_{s2} + 1083996402103\delta_p T_{s1} + 1083996402103\delta_p T_{s3} + \\ & + 10325239103\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} + 9440467407581\delta_p + 681097818571, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2^x(p) = & -229121360224\delta_p T_{s1}T_{s3} - 229121360224\delta_p T_{s1}T_{s2} - 229121360224\delta_p T_{s2}T_{s3} - \\ & -1692252941004\delta_p T_{s2} - 1692252941004\delta_p T_{s1} - 1692252941004\delta_p T_{s3} - \\ & -26896779450\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} - 10624919687447\delta_p - 708859244173, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3^x(p) = & 450230921385\delta_p T_{s1}T_{s3} + 450230921385\delta_p T_{s1}T_{s2} + 450230921385\delta_p T_{s2}T_{s3} + \\ & + 2553748207116\delta_p T_{s2} + 2553748207116\delta_p T_{s1} + 2553748207116\delta_p T_{s3} + \\ & + 645862785582 + 66216873751\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} + 11110753656761\delta_p, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4^x(p) = & -847134156431\delta_p T_{s1}T_{s3} - 847134156431\delta_p T_{s1}T_{s2} - 847134156431\delta_p T_{s2}T_{s3} - \\ & -3797541039285\delta_p T_{s3} - 3797541039285\delta_p T_{s2} - 3797541039285\delta_p T_{s1} - \\ & -11984058044770\delta_p - 153017656463\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} - 575871023114, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5^x(p) = & 1528566690330\delta_p T_{s1}T_{s3} + 1528566690330\delta_p T_{s1}T_{s2} + 1528566690330\delta_p T_{s2}T_{s3} + \\ & + 536888292557 + 13735271273491\delta_p + 5567842717674\delta_p T_{s2} + \\ & + 5567842717674\delta_p T_{s1} + 5567842717674\delta_p T_{s3} + 333390365387\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_6^x(p) = & -2656405897666\delta_p T_{s1}T_{s3} - 2656405897666\delta_p T_{s1}T_{s2} - 2656405897666\delta_p T_{s2}T_{s3} - \\ & -689408746970\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} - 16388293162668\delta_p - 8039732740012\delta_p v - \\ & -8039732740012\delta_p T_{s3} - 8039732740012\delta_p T_{s1} - 529250592716, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_7^x(p) = & 4465740976732\delta_p T_{s1}T_{s3} + 4465740976732\delta_p T_{s2}T_{s3} + 11428951754297\delta_p T_{s2} + \\ & + 4465740976732\delta_p T_{s1}T_{s2} + 11428951754297\delta_p T_{s1} + 11428951754297\delta_p T_{s3} + \\ & + 1361500438196\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} + 19823909225130\delta_p + 540342487685, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_8^x(p) = & -7290199150970\delta_p T_{s1}T_{s3} - 7290199150970\delta_p T_{s1}T_{s2} - 7290199150970\delta_p T_{s2}T_{s3} - \\ & -16000145958882\delta_p T_{s2} - 16000145958882\delta_p T_{s1} - 16000145958882\delta_p T_{s3} - \\ & -2581746468636\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} - 23982176283138\delta_p - 560479123961, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_9^x(p) = & 11593624234367\delta_p T_{s1}T_{s3} + 11593624234367\delta_p T_{s2}T_{s3} + 11593624234367\delta_p T_{s1}T_{s2} + \\ & + 28889689067682\delta_p + 22074843178148\delta_p T_{s1} + 22074843178148\delta_p T_{s3} + \\ & + 22074843178148\delta_p T_{s2} + 4722177073984\delta_p T_{s1}T_{s2}T_{s3} + 585329585356, \end{aligned}$$

$$f_{10}^x(p) = -300397341152898_p T_{s1} - 300397341152898_p T_{s2} - 300397341152898_p T_{s3} - \\ -180092017163258_p T_{s1} T_{s3} - 180092017163258_p T_{s1} T_{s2} - 180092017163258_p T_{s2} T_{s3} - \\ -83632204221498_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 346201104560978_p - 613214427240,$$

$$f_{11}^x(p) = 273872101901448_p T_{s1} T_{s3} + 273872101901448_p T_{s1} T_{s2} + 273872101901448_p T_{s2} T_{s3} + \\ +403555877345698_p T_{s2} + 403555877345698_p T_{s1} + 403555877345698_p T_{s3} + \\ +143887499834168_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 412650435548878_p + 643179058809,$$

$$f_{12}^x(p) = -408527065808368_p T_{s1} T_{s3} - 408527065808368_p T_{s2} T_{s3} - 408527065808368_p T_{s1} T_{s2} - \\ -535670124879168_p T_{s1} - 535670124879168_p T_{s3} - 489250017995538_p - \\ -535670124879168_p T_{s2} - 241156867606328_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 674496836827,$$

$$f_{13}^x(p) = 394678724687328_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 598746060407558_p T_{s1} T_{s3} + 598746060407558_p T_{s1} T_{s2} + \\ +598746060407558_p T_{s2} T_{s3} + 703132125248838_p T_{s3} + 703132125248838_p T_{s2} + \\ +703132125248838_p T_{s1} + 577087515651898_p + 706661489463,$$

$$f_{14}^x(p) = 394678724687328_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 598746060407558_p T_{s1} T_{s3} + 598746060407558_p T_{s1} T_{s2} + \\ +598746060407558_p T_{s2} T_{s3} + 703132125248838_p T_{s3} + 703132125248838_p T_{s2} + \\ +703132125248838_p T_{s1} + 577087515651898_p + 706661489463,$$

$$f_{15}^y(p) = -1808829566818_p T_{s1} T_{s3} - 1808829566818_p T_{s1} T_{s2} - 1808829566818_p T_{s2} T_{s3} - \\ -21541281333678_p T_{s2} - 21541281333678_p T_{s1} - 21541281333678_p T_{s3} - \\ -134692519148_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 230371115183688_p,$$

$$f_{16}^y(p) = 4329134034058_p T_{s1} T_{s3} + 4329134034058_p T_{s1} T_{s2} + 4329134034058_p T_{s2} T_{s3} + \\ +42492301488838_p T_{s2} + 42492301488838_p T_{s1} + 42492301488838_p T_{s3} + \\ +393302655838_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 375240243994998_p,$$

$$f_{17}^y(p) = -9142285498198_p T_{s1} T_{s3} - 9142285498198_p T_{s1} T_{s2} - 9142285498198_p T_{s2} T_{s3} - \\ -68946805251828_p T_{s2} - 68946805251828_p T_{s1} - 68946805251828_p T_{s3} - \\ -1053454885588_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 444346964388218_p,$$

$$f_{18}^y(p) = 18584748316768_p T_{s1} T_{s3} + 18584748316768_p T_{s1} T_{s2} + 18584748316768_p T_{s2} T_{s3} + \\ +108702108810238_p T_{s2} + 108702108810238_p T_{s1} + 108702108810238_p T_{s3} + \\ +2669768282018_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 498349141411428_p,$$

$$f_{19}^y(p) = -36182075878048_p T_{s1} T_{s3} - 36182075878048_p T_{s1} T_{s2} - 36182075878048_p T_{s2} T_{s3} - \\ -168792706269988_p T_{s2} - 168792706269988_p T_{s1} - 168792706269988_p T_{s3} - \\ -6354333162208_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 576887492203208_p,$$

$$f_{20}^y(p) = 67516991621088_p T_{s1} T_{s3} + 67516991621088_p T_{s1} T_{s2} + 67516991621088_p T_{s2} T_{s3} + \\ +257700412041488_p T_{s2} + 257700412041488_p T_{s1} + 257700412041488_p T_{s3} + \\ +14261038639388_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 699033784249368_p,$$

$$f_{21}^y(p) = -121206472330858_p T_{s1} T_{s3} - 121206472330858_p T_{s1} T_{s2} - 121206472330858_p T_{s2} T_{s3} - \\ -386147179684628_p T_{s2} - 386147179684628_p T_{s1} - 386147179684628_p T_{s3} - \\ -30366054877568_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 868182092717258_p,$$

$$f_{22}^y(p) = 210161309290458_p T_{s1} T_{s3} + 210161309290458_p T_{s1} T_{s2} + 210161309290458_p T_{s2} T_{s3} + \\ +567672481296858_p T_{s2} + 567672481296858_p T_{s1} + 567672481296858_p T_{s3} + \\ +61703473394058_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 1083047296349968_p,$$

$$f_8^y(p) = -353210145205008_p T_{s1} T_{s3} - 353210145205008_p T_{s1} T_{s2} - 353210145205008_p T_{s2} T_{s3} - \\ - 819174907351478_p T_{s2} - 819174907351478_p T_{s1} - 819174907351478_p T_{s3} - \\ - 120258686457098_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 1344516293086818_p,$$

$$f_9^y(p) = 577162887540838_p T_{s1} T_{s3} + 577162887540838_p T_{s1} T_{s2} + 577162887540838_p T_{s2} T_{s3} + \\ + 1161472892316598_p T_{s2} + 1161472892316598_p T_{s1} + 1161472892316598_p T_{s3} + \\ + 225784221975678_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 1656620172943408_p,$$

$$f_{10}^y(p) = -919393041603358_p T_{s1} T_{s3} - 919393041603358_p T_{s1} T_{s2} - 919393041603358_p T_{s2} T_{s3} - \\ - 1619909910691898_p T_{s2} - 1619909910691898_p T_{s1} - 1619909910691898_p T_{s3} - \\ - 409878717449068_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 2025262908453938_p,$$

$$f_{11}^y(p) = 1431027121968458_p T_{s1} T_{s3} + 1431027121968458_p T_{s1} T_{s2} + 1431027121968458_p T_{s2} T_{s3} + \\ + 2225019851059318_p T_{s2} + 2225019851059318_p T_{s1} + 2225019851059318_p T_{s3} + \\ + 721760500281058_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 2457286988652538_p,$$

$$f_{12}^y(p) = -2180840207835888_p T_{s1} T_{s3} - 2180840207835888_p T_{s1} T_{s2} - 2180840207835888_p T_{s2} T_{s3} - \\ - 3013264499280328_p T_{s2} - 3013264499280328_p T_{s1} - 3013264499280328_p T_{s3} - \\ - 1236274747824188_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 2960208523371088_p,$$

$$f_{13}^y(p) = 3259969406745198_p T_{s1} T_{s3} + 3259969406745198_p T_{s1} T_{s2} + 3259969406745198_p T_{s2} T_{s3} + \\ + 4027853448450238_p T_{s2} + 4027853448450238_p T_{s1} + 4027853448450238_p T_{s3} + \\ + 2064799784042638_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + 3542234124772458_p,$$

$$f_{14}^y(p) = -4787571320071578_p T_{s1} T_{s3} - 4787571320071578_p T_{s1} T_{s2} - 4787571320071578_p T_{s2} T_{s3} - \\ - 5319656087845318_p T_{s2} - 5319656087845318_p T_{s1} - 5319656087845318_p T_{s3} - \\ - 3369866442090208_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} - 4212332124891968_p.$$

Теперь можно записать квадратичный функционал, подлежащий минимизации:

$$I(p) = \min_p \sum_{i=0}^{14} E_i^2(p) = \min_p \sum_{i=0}^{14} [\mu_i^x(p) - \mu_i^y(p)]^2.$$

Тогда

$$I(p) \cdot 10^{-25} = -156,046938_p T_{s1} T_{s3} - 156,046938_p T_{s1} T_{s2} - 156,046938_p T_{s2} T_{s3} - \\ - 217,781158_p T_{s2} - 217,781158_p T_{s1} - 217,781158_p T_{s3} - 93,0807178_p T_{s1} T_{s2} T_{s3} + \\ + 80724,33682_p^2 T_{s2}^2 - 246,251228_p + 148614,2982_p^2 T_{s2} T_{s3} + 68702,31682_p^2 T_{s2}^2 T_{s3}^2 + \\ + 68702,31682_p^2 T_{s2}^2 T_{s3} + 27838,69182_p^2 T_{s2}^2 T_{s3}^2 + 148614,2982_p^2 T_{s1} T_{s2} + \\ + 68702,31682_p^2 T_{s1} T_{s2} + 68702,31682_p^2 T_{s1} T_{s2}^2 + 27838,69182_p^2 T_{s1}^2 T_{s2}^2 + \\ + 148614,2982_p^2 T_{s1} T_{s3} + 68702,31682_p^2 T_{s1} T_{s3}^2 + 68702,31682_p^2 T_{s1}^2 T_{s3}^2 + \\ + 27838,69182_p^2 T_{s1}^2 T_{s3}^2 + 43353,51182_p^2 T_{s2}^2 + 39660,34682_p + 80724,33682_p^2 T_{s3} + \\ + 43353,51182_p^2 T_{s3}^2 + 80724,33682_p^2 T_{s1} + 43353,51182_p^2 T_{s1}^2 + 0,57193577 + \\ + 35962,53682_p^2 T_{s2}^2 T_{s3}^2 T_{s1} + 35962,53682_p^2 T_{s1}^2 T_{s2}^2 T_{s3} + 99331,37382_p^2 T_{s1} T_{s2}^2 T_{s3}^2 + \\ + 35962,53682_p^2 T_{s1}^2 T_{s3}^2 T_{s2} + 244578,1782_p^2 T_{s1} T_{s3} + 99331,37382_p^2 T_{s1} T_{s3}^2 T_{s2} + \\ + 99331,37382_p^2 T_{s1}^2 T_{s3}^2 T_{s2} + 11759,33882_p^2 T_{s1}^2 T_{s2}^2 T_{s3}^2.$$

В результате минимизации при ограничениях на устойчивость системы, а также при соблюдении условий физической реализуемости регулятора ($T_{s1} < T_{s2} < T_{s3}$) были получены следующие параметры регулятора:

$$T_{s1} = 0,05, \quad T_{s2} = 0,15, \quad T_{s3} = 0,2, \quad \delta_p = 0,0345.$$

Графики переходных процессов представлены на рис. 1.116.

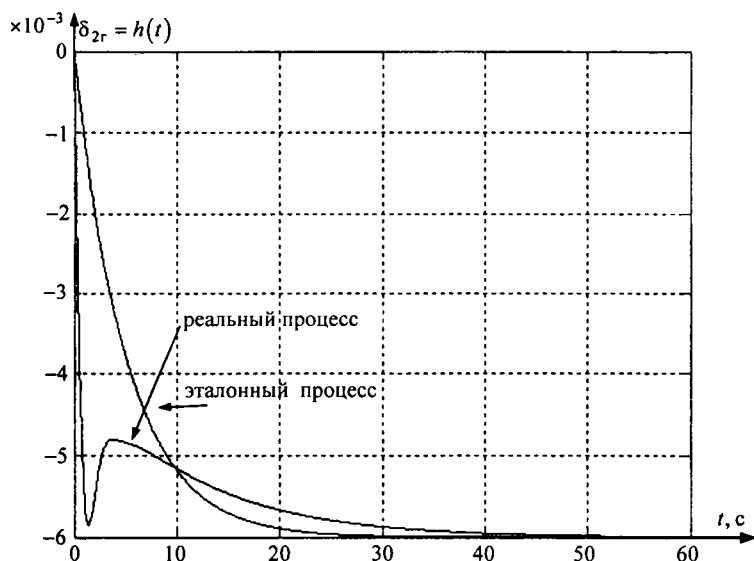


Рис. 1.116. Графики переходных процессов

1.12. МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Сделаем предварительные замечания. Ранее рассматривался третий принцип решения задачи расчета параметров регулятора, *не требующий знания обратного оператора замкнутой системы*. Общая формула, определяющая решение задачи, имеет вид

$$\int_0^T \left\{ \left[\left(I + A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r) \right) A_{\text{кy}}^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) A_0^{-1} \right] x_3(t) - y_3(t) \right\}^2 dt =$$

$$= \int_0^T \left[L(p_1, p_2, \dots, p_r) x_3(t) - y_3(t) \right]^2 dt \rightarrow \min_{p_i, i=1, r}, \quad (1.251)$$

где A_0 — оператор объекта управления,

$A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r)$ — оператор регулятора,

$y_3(t)$ — заданный вход, $x_3(t)$ — эталонный (желаемый) выход.

Еще раз подчеркнем, что оператор

$$L(p_1, p_2, \dots, p_r) = \left[\left(I + A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r) \right) A_{\text{кy}}^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) A_0^{-1} \right],$$

как правило, известен, что, при использовании этого оператора, приводит к достаточно простым и эффективным с инженерной точки зрения вычислительным алгоритмам решения задачи расчета параметров $(p_1, p_2, \dots, p_r)$.

В настоящем параграфе изложим этот подход применительно к решению задачи синтеза регуляторов в классе линейных одномерных стационарных систем (рис. 1.117).

Постановка задачи: пусть заданы: $W_0(s)$ — передаточная функция неизменяемой части САУ; место включения и тип корректирующего устройства; $W_{\text{кy}}(s, p)$ —

передаточная функция корректирующего устройства; $p_1, p_2, \dots, p_r$ — параметры КУ, подлежащие определению в результате решения задачи синтеза. Постановка задачи полностью совпадает с той, которая приведена в п. 1.9; в результате решения задачи синтеза необходимо обеспечить следующее:

- нулевую установившуюся ошибку на класс ступенчатых входных сигналов;
- перерегулирование $\sigma_{\max}$ в системе не должно превышать $\sigma_{\max \text{ доп}}$;
- время переходного процесса T_y не должно превышать $T_{y \text{ доп}}$;
- максимальное ускорение управляемой величины должно иметь заданное значение при известном начальном рассогласовании и др.

Имеем $W_p(s, p) = W_{\text{ку}}(s, p)W_0(s)$ — передаточная функция разомкнутой системы.

Отсюда находим ПФ замкнутой САУ:

$$W(s, p) = \frac{W_p(s, p)}{1 + W_p(s, p)} = \frac{b_m(p)s^m + \dots + b_0(p)}{a_n(p)s^n + \dots + a_0(p)}, \quad (1.252)$$

$p = \{p_1, \dots, p_r\}$ — вектор неизвестных параметров КУ.

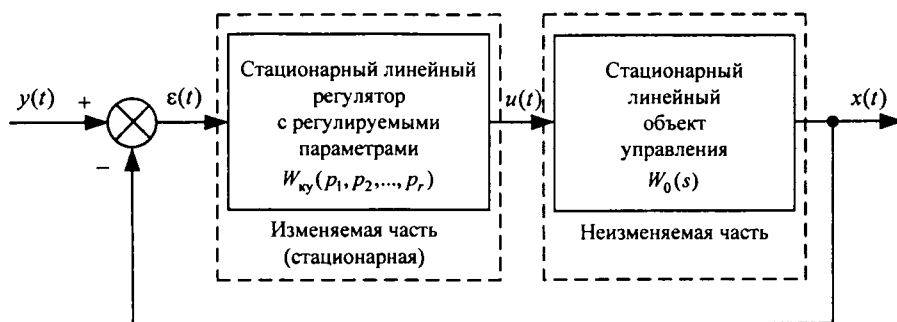


Рис. 1.117. Структурная схема линейной стационарной системы

Перейдем от передаточной функции к дифференциальному уравнению системы

$$\sum_{v=0}^n a_v(p)x^{(v)} = \sum_{k=0}^m b_k(p)y^{(k)}. \quad (1.253)$$

Коэффициенты уравнения зависят только от p_i — параметров корректирующего устройства.

Рассматриваемый метод принадлежит к классу методов, использующих приближение к эталонному выходному сигналу $x_3(t)$, являющемуся реакцией на заданное воздействие $y_3(t)$.

Для класса стационарных систем $y_3(t)$ может быть единичной ступенькой, т.е. $y_3(t) = 1(t)$, а $x_3(t) = h_3(t)$ — эталонная переходная характеристика.

При идеальном выборе структуры и параметров регулятора должна иметь место зависимость

$$\sum_{v=0}^n a_v(p)x_3^{(v)}(t) = \sum_{k=0}^m b_k(p)y_3^{(k)}(t). \quad (1.254)$$

Другими словами, при подстановке в ДУ скорректированной системы $y(t) = y_3(t)$ ее частным решением при $\mathbf{X}^0 = (x(0), x'(0), \dots, x^{(n-1)}(0))$ должна быть функция

$x(t) = x_3(t)$ и, таким образом, должно быть выполнено тождество (1.254). Однако идеальный выбор КУ практически невозможен. Поэтому задача синтеза КУ состоит в том, чтобы подобрать параметры КУ, обеспечивающие минимальное значение невязки между правой и левой частями ДУ (1.253) при подстановке в него желаемых воздействия и реакции [5].

Пусть $y_3(t)$ — заданное воздействие, $x_3(t)$ — желаемая реакция; тогда уравнению (1.253) эквивалентно интегральное уравнение вида (см. том 1)

$$\int_0^t k_x(t, \tau, p) x_3(\tau) d\tau \approx \int_0^t k_y(t, \tau, p) y_3(\tau) d\tau, \quad (1.255)$$

где

$$\begin{aligned} k_x(t, \tau, p) &= \sum_{k=0}^n a_k(p) \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [p_i(\tau)(t-\tau)^n], \\ k_y(t, \tau, p) &= \sum_{k=0}^m b_k(p) \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [p_i(\tau)(t-\tau)^n], \end{aligned} \quad (1.256)$$

$p_i(\tau)$ — порождающие функции.

С учетом (1.256) интегральное уравнение (1.255) можно переписать так:

$$\begin{aligned} E_i(t, p_1, p_2, \dots, p_r) &= \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^n a_k(p_1, p_2, \dots, p_r) \int_0^t \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [p_i(\tau)(t-\tau)^n] x_3(\tau) d\tau}_{f_i^x(t, p_1, p_2, \dots, p_r)} - \\ &- \underbrace{\sum_{k=0}^m b_k(p_1, p_2, \dots, p_r) \int_0^t \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [p_i(\tau)(t-\tau)^n] y_3(\tau) d\tau}_{f_i^y(t, p_1, p_2, \dots, p_r)}. \end{aligned} \quad (1.257)$$

Или, что то же самое,

$$E_i(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = f_i^x(t, p_1, p_2, \dots, p_r) - f_i^y(t, p_1, p_2, \dots, p_r). \quad (1.258)$$

Величина невязки, определяемая, например, в $C[0, T]$ или $L^2[0, T]$, зависит от двух факторов:

- от динамических возможностей регулятора, которые диктуются его структурой (он включает, например, дифференцирующие и интегрирующие звенья, элементы, охваченные обратными связями и др.);
- численных значений параметров регулятора.

Положим, что конфигурация регулятора, исходя из известных соображений, выбрана. Формула (1.255) дает возможность построить несколько достаточно эффективных методов расчета параметров регулятора.

Кратко изложим их содержание.

1. Метод наименьших квадратов. Изложим положения этого метода на примере.

Пример 1.22. Система автоматического управления технологическим процессом имеет следующую передаточную функцию:

$$W(s) = \frac{b_3 s^3 + b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}, \quad (1.259)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= 1,22 p_4, \quad b_1 = 1,22 p_3, \quad b_2 = 1,22 p_2, \quad b_3 = 1,22 p_1; \\ a_0 &= 1,22 p_4, \quad a_1 = 1,22 p_3, \quad a_2 = 1 + 1,22 p_2, \end{aligned}$$

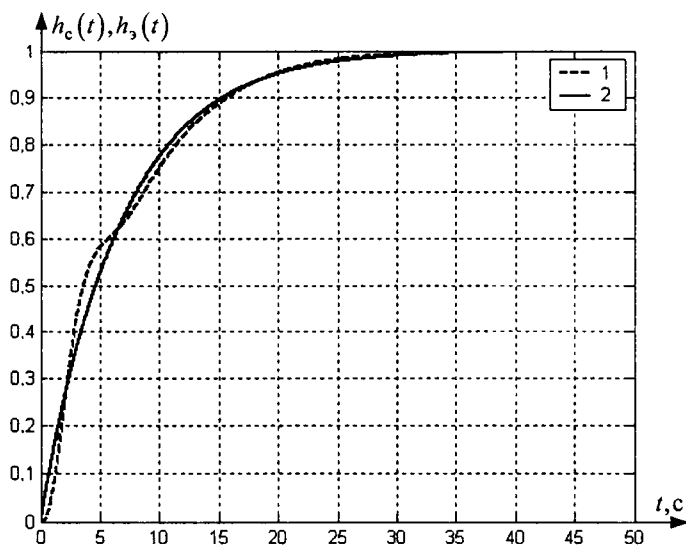


Рис. 1.118. Эталонная переходная характеристика (2) и переходная характеристика скорректированной системы (1)

- Минимизация функционала, порожденного невязкой между левой и правой частями интегрального уравнения системы.

Функционал, подлежащий минимизации, записывается так:

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^T \sum_{i=1}^N E_i^2(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r) d\tau \rightarrow \min_{p_1, p_2, \dots, p_r} \quad (1.265)$$

при ограничениях, которые характеризуют качество работы системы в переходном и установившемся режимах. Число N и конкретная система порождающих функций выбирается из условия быстрой сходимости процесса поиска параметров решения p_i^* задачи с заданной степенью точности (часто при $N=1$ достигается необходимая точность расчета параметров регулятора, однако от N зависят свойства функционала (1.265), определяющие скорость сходимости процедуры поиска).

Сформулированная задача относится к классу задач нелинейного программирования [5]. Зависимость, определяющая $I(p_1, p_2, \dots, p_r)$, является многоэкстремальной, поэтому расчет глобального экстремума встречает большие трудности.

Минимизация $I(p)$ может быть выполнена с помощью программ поиска экстремумов функций, которые присутствуют в научно ориентированных пакетах прикладных программ. Предпочтительнее выбирать программы, специально предназначенные для минимизации квадратичных функций.

К ограничениям, обусловленным требованиями устойчивости системы, добавляются ограничения, обусловленные требованиями точности работы системы в установившемся режиме.

Минимизация функционала $I(p)$ не гарантирует принадлежности реального переходного процесса «коробочке» В.В. Солодовникова, поэтому дополнительно добавляются соответствующие ограничения.

Ввиду того что рассмотренный метод не требует знания обратного оператора, а система невязок $E(t, p_1, p_2, \dots, p_r)$ порождается разностью между левой и правой частями дифференциального уравнения системы при различных порождающих

функциях $p_i(t)$, он обобщается на нестационарные, нелинейные и многомерные системы, системы с запаздыванием; дает возможность учитывать ограничения как на параметры системы, так и на характеристики процессов на выходе; при попадании в область неустойчивости процесс расчета продолжается. Метод позволяет учитывать требования, связанные с устойчивостью и точностью работы в установившемся режиме, и использовать разные критерии качества, в том числе и логические. Метод может быть использован при решении задач синтеза регуляторов сложных автоматических систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка. При этом необходимо учитывать такие важные факторы, как динамические свойства регулятора, определяющие возможность обеспечения требуемого качества работы синтезируемой системы, анализ условий работоспособности, учитывающие расположение нулей и полюсов регулятора и объекта управления. Если в результате синтеза при принятых условиях работы системы имеет место сокращение полюса и нуля передаточной функции, а условия меняются, то требуется проведение соответствующих мероприятий. Например, когда точное совпадение полюса и нуля передаточной функции самолета вследствие изменения параметров самолета в различных условиях полета не достигалось, на переходный процесс, определяемый ПФ системы, накладывались медленные колебания, соответствующие указанному полюсу [21].

Анализ синтезированной системы должен включать не только расчет выходных процессов и проверку выполнения требуемых ограничений, определяющих качество работы САУ, но и исследование динамических характеристик элементов системы, выявление факторов, влияющих на качество процессов, анализ проблем, связанных с физической реализуемостью регулятора, рассмотрение свойства грубости и др.

Пример 1.23. Рассмотрим решение задачи нахождения оптимальных, в известном смысле, параметров стационарной системы 2-го порядка:

$$W(s) = \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi\omega_0 s + \omega_0^2}. \quad (1.266)$$

Считая параметры ω_0 и ξ заданными ($W(s) = W(s, \omega_0, \xi)$), задачу синтеза сформулируем следующим образом: *определить параметры ω_0 и ξ так, чтобы система $W(s, \omega_0^*, \xi^*)$ удовлетворяла следующим требованиям:*

- время управления $T_y \leq 0,5$ с;
- время первого перерегулирования $T_{\max} \leq 0,3$ с;
- перерегулирование $\sigma \leq 30\%$;
- число колебаний $n_c \leq 3$ с;
- коэффициент ошибки по ускорению $c_1 \leq 0,05$.

Метод порождающих функций дает следующий алгоритм решения поставленной задачи:

1. Задаются эталонные входной и выходной сигналы в виде $y_2(t) = l(t)$ и $x_3(t) = h_3(t)$.

Эталонная переходная характеристика выбирается исходя из требований, предъявляемых к системе:

$$h_3(t) \leftrightarrow H_3(s) = \frac{1}{s} \cdot k_y \frac{\alpha_1 s + 1}{\alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + 1}, \quad (1.267)$$

где

$$\alpha_2 = -\frac{\left[\ln \left(\frac{h_{\max 1}}{k_y} - 1 \right) \right]^2}{\frac{9}{T_y^2} \left\{ \left[\ln \left(\frac{h_{\max 1}}{k_y} - 1 \right) \right]^2 + \pi^2 \right\}}; \quad \alpha_1 = \frac{6\alpha_2}{T_y};$$

$$h_{\max 1} = 1,3; \quad k_y = 1; \quad T_y = 0,5.$$

Тогда эталонная переходная характеристика запишется следующим образом:

$$h_s(t) = 1 - e^{-6t} \cos(14,3963 \cdot t).$$

2. Составляется функционал, подлежащий минимизации:

$$I(p_1, p_2) = \int_0^1 \sum_{i=1}^3 \left\{ \int_0^t x_i(\tau) \left[\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{2!} a_k(p_1, p_2) \frac{d^k}{d\tau^k} \{ p_i(\tau)(t-\tau)^2 \} \right] d\tau - \right. \\ \left. - \int_0^t y_s(\tau) \left[\frac{1}{2!} b_0(p_1, p_2) \cdot p_i(\tau)(t-\tau)^2 \right] d\tau \right\}^2 d\tau = \\ = 13,743 \cdot p_2 p_1 - 0,4579 \cdot p_1^2 + 0,001124 \cdot p_1^4 + 1,38 \cdot p_2^2 p_1^2 - 0,07467 \cdot p_2 p_1^3 + 50,4962,$$

где $a_0 = p_1^2$; $a_1 = 2p_2 p_1$; $a_2 = 1$; $b_0 = p_1^2$ — коэффициенты дифференциального уравнения, $\{p_1, p_2\} = \{\omega_0, \xi\}$ — параметры системы, подлежащие расчету, $p_i(\tau)$ — порождающие функции (многочлены Лежандра).

3. Записываются необходимые ограничения на параметры $T_y, T_{\max}, \sigma\%, n_c, c_1$, исходя из требований, предъявляемых к системе:

$$T_y = \frac{4}{p_2 p_1} \leq 0,5; \quad T_{\max} = \frac{\pi}{p_2 \sqrt{1-p_2^2}} \leq 0,2; \\ \sigma = e^{\frac{-p_2 \pi}{\sqrt{1-p_2^2}}} \leq 0,3; \\ n_c = \frac{4\sqrt{1-p_2^2}}{2\pi p_2} \leq 3; \\ c_1 = 2 \frac{p_2}{p_1} \leq 0,05. \quad (1.269)$$

4. С учетом сказанного выше, задача расчета параметров p_1, p_2 сводится к решению задачи математического программирования, которая формулируется так: необходимо найти точку минимума (p_1^*, p_2^*) функционала (1.268), удовлетворяющую ограничениям (1.269).

С использованием специализированного математического пакета *Matlab* 6.0 было получено следующее решение задачи:

$$p_1^* = \omega_0^* = 21,6651; \quad p_2^* = \xi^* = 0,3693.$$

Ниже приведен график реальной и эталонной переходной характеристики (рис. 1.119).

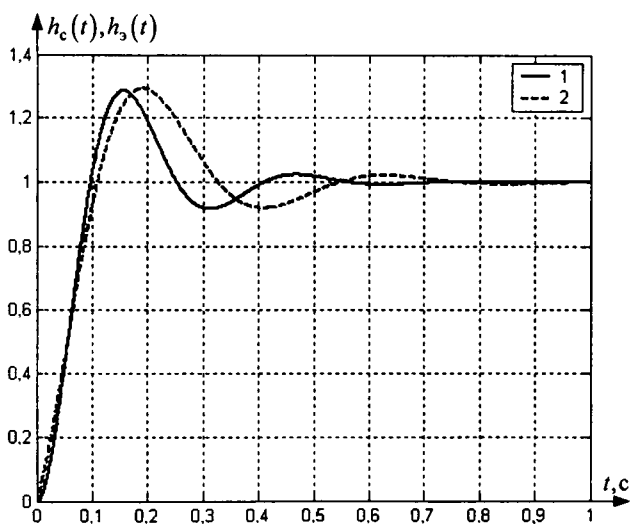


Рис. 1.119. Эталонная переходная характеристика (2) и переходная характеристика скорректированной системы (1)

Несмотря на то что аналитические зависимости для параметров переходной характеристики, определяющие ограничения (1.269), удается получить только для систем 1-го и 2-го порядков, метод остается эффективным для систем и более высоких порядков. Однако в этом случае необходимо учитывать ближайшую к мнимой оси пару комплексно сопряженных полюсов (например, реакцию системы третьего порядка можно аппроксимировать с помощью доминирующих корней системы второго порядка, если только действительная часть этих корней меньше 0,1 действительной части третьего корня) или самостоятельно реализовывать алгоритмы поиска минимума функционала (1.268) и на каждом шаге итерационной процедуры решать соответствующее дифференциальное уравнение системы с текущими значениями неизвестных параметров и проверять выполнение соответствующих ограничений.

Пример 1.24 [41]. Рассмотрим задачу управления центром тяжести крестовидного снаряда в боковом движении. В отношении снарядов как объектов управления движения относительно центра тяжести протекают значительно быстрее, чем движения центра тяжести. Это обстоятельство позволяет выбрать параметры автопилота отдельно для управления движением центра тяжести снаряда и относительно центра тяжести.

В качестве примера выбора параметров автопилота для управления движением центра тяжести рассмотрим крестовидный снаряд, стабилизированный по углу крена (рис. 1.120).

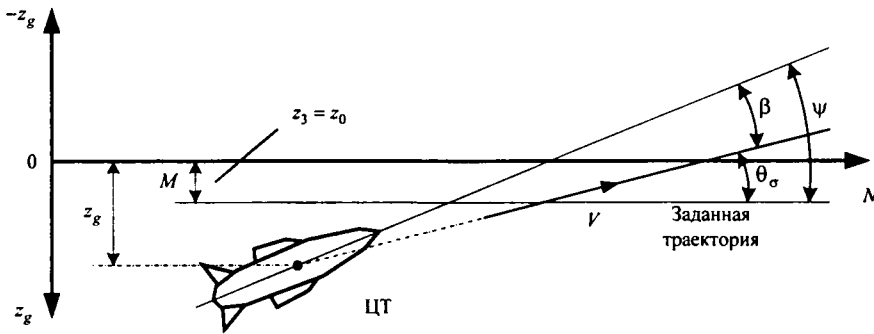


Рис. 1.120. Схема угловых и линейных координат, характеризующих положение снаряда относительно прямолинейной траектории в боковом движении

Пусть MN — заданная прямолинейная траектория, по которой должен двигаться снаряд. В этом случае заданное значение координаты центра тяжести снаряда по оси $0z_g$ есть $z_3 = z_0$.

Рассмотрим систему управления боковым отклонением центра тяжести крестовидного снаряда, учитывая переходные процессы в угловом движении снаряда. Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \frac{d\beta}{dt} + k_\beta \beta - \frac{d\psi}{dt} = 0; \\ \frac{d^2\psi}{dt^2} + n_\psi \frac{d\psi}{dt} + n_\beta \frac{d\beta}{dt} + n_\beta \beta = n_{\delta_H} \delta_H + \frac{\Delta M_y}{J_y}; \\ \frac{dz_g}{dt} = V_e (\psi - \beta); \\ \delta_H = i_z \left(\frac{dz_3}{dt} - \frac{dz_g}{dt} \right) + i_z (z_3 - z_g) + q_z \int_0^t (z_3 - z_g) dt - i_\psi \frac{d\psi}{dt} - i_\psi \psi. \end{cases} \quad (1.270)$$

В правой части уравнения моментов введен возмущающий момент ΔM_y . В законе управления автопилота, кроме основного, позиционного сигнала $(z_3 - z_g)$, введены также корректирующие сигналы, пропорциональные производной от этого сигнала, и сигнал от угла рыскания и его производной. Также в закон управления введен сигнал, пропорциональный интегралу от рассогласования по боковому отклонению. Назначение этого сигнала — обеспечить астатизм системы при внешних воздействиях.

Исключая из уравнений (1.270) все переменные, кроме z_g , найдем следующее уравнение системы управления боковым отклонением центра тяжести снаряда:

$$\begin{aligned} \frac{d^5 z_g}{dt^5} + (a_1 + i_\psi b_1) \frac{d^4 z_g}{dt^4} + (a_2 + i_\psi b_2 + i_\psi b_1) \frac{d^3 z_g}{dt^3} + (i_\psi b_2 + i_z b_2 V_e) \frac{d^2 z_g}{dt^2} + \\ + i_z b_2 V_e \frac{dz_g}{dt} + q_z b_2 V_e z_g = i_z b_2 V_e \frac{d^2 z_3}{dt^2} + i_z b_2 V_e \frac{dz_3}{dt} + q_z b_2 V_e z_3 - \frac{k_\beta V_e}{J_y} \cdot \frac{d\Delta M_y}{dt}. \end{aligned} \quad (1.271)$$

Структурная схема системы представлена на рис. 1.121 [41].

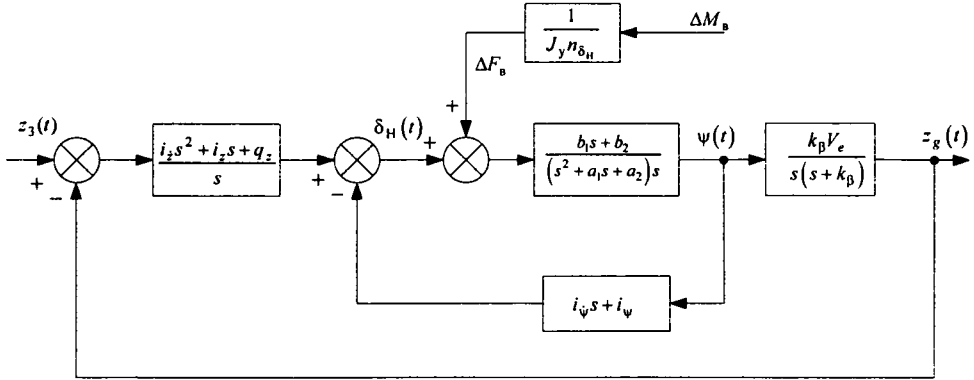


Рис. 1.121. Структурная схема, соответствующая системе уравнений (1.270)

Структура уравнения (1.271) позволяет сделать следующие выводы о свойствах рассматриваемой системы. Прежде всего, эта система имеет астатизм к постоянному возмущающему моменту ΔM_n , так как производная от такого момента будет равна нулю. Астатизм системы также имеет место по отношению к внешнему постоянному сигналу z_3 и к сигналу, зависящему от времени линейно. Лишь при внешнем сигнале, пропорциональном квадрату времени ($z_3 = k_2 t^2$), в установившемся режиме появляется погрешность, определяемая формулой [41]

$$z_{\text{уст}} = \frac{2k_2 i_\psi}{q_z V_e}.$$

Выбор параметров автопилота (передаточных чисел) сведем к задаче синтеза регулятора (нахождению его неизвестных параметров). Синтез проведем методом порождающих функций, основанным на минимизации функционала невязки. В качестве порождающих функций будем использовать базис многочленов Лежандра.

В качестве объекта управления возьмем снаряд, параметры которого приведены в табл. 1.11.

Таблица 1.11

Параметры снаряда

k_β	n_β	$n_{\dot{\beta}}$	n_ψ	n_{δ_n}	a_1	a_2	b_1	b_2	i_ψ	T_y	K_c	T_ω	ξ
$1/c$	$1/c^2$	$1/c$	$1/c$	$1/c^2$	$1/c$	$1/c^2$	$1/c^2$	$1/c^2$	c	c	$1/c$	c	
0,34	13,5	0,1	0,205	5,6	0,645	13,6	5,6	1,9	0,865	2,95	0,124	0,256	0,707

Пусть скорость снаряда $V_e = 300$ м/с.

Необходимо выбрать параметры системы управления так, чтобы время переходного процесса не превышало заданного значения: $T_y \leq 15$ с.

Передаточная функция для системы управления центром тяжести имеет вид

$$W_{z_g/z_3}(s) = \frac{i_z b_2 V_e s^2 + i_z b_2 V_e s + q_z b_2 V_e}{s^5 + (a_1 + i_\psi b_1) s^4 + (a_2 + i_\psi b_2 + i_\psi b_1) s^3 + (i_\psi b_2 + i_z b_2 V_e) s^2 + i_z b_2 V_e s + q_z b_2 V_e}. \quad (1.272)$$

В качестве эталонного выходного сигнала возьмем аperiodический переходной процесс:

$$x_3(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T_y}} = 1 - e^{-\frac{1}{5}t}. \quad (1.273)$$

Запишем ДУ, описывающее поведение системы управления центром тяжести снаряда:

$$\sum_{k=0}^5 a_k(p) x^{(k)} = \sum_{k=0}^2 b_k(p) y^{(k)}, \quad (1.274)$$

где

$$a_0 = 114000 p_5, \quad a_1 = 114000 p_4, \quad a_2 = 380 p_2 + 114000 p_3,$$

$$a_3 = 380p_1 + 1120p_2 + 2720, \quad a_4 = 1120p_1 + 129, \quad a_5 = 200,$$

$$b_0 = 114000p_5, \quad b_1 = 114000p_4, \quad b_2 = 114000p_3.$$

Параметрами регулятора являются передаточные числа автопилота, которые необходимо определить:

$$p_1 = i_\psi, \quad p_2 = i_\varphi, \quad p_3 = i_z, \quad p_4 = i_x, \quad p_5 = q_z.$$

В соответствии с методом порождающих функций перейдем от дифференциального уравнения (1.274) к эквивалентному интегральному:

$$\begin{aligned} \int_0^t x_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{5!} a_k(p_1, \dots, p_5) \frac{d^k}{d\tau^k} \{L_i(\tau) \cdot (t-\tau)^5\} \right] d\tau = \\ = \int_0^t y_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{5!} b_k(p_1, \dots, p_5) \frac{d^k}{d\tau^k} \{L_i(\tau) \cdot (t-\tau)^5\} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (1.275)$$

где $L_i(\tau)$ — i -й многочлен Лежандра.

Тогда i -я невязка между левой и правой частями уравнения (1.275) имеет вид

$$E_i(t, p_1, \dots, p_5) = f_i^x(t, p_1, \dots, p_5) - f_i^y(t, p_1, \dots, p_5), \quad (1.276)$$

где $f_i^x(t, p_1, \dots, p_5)$ и $f_i^y(t, p_1, \dots, p_5)$ определяют левую и правую часть уравнения (1.275) соответственно:

$$f_i^x(t, p_1, \dots, p_r) = \int_0^t x_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{5!} a_k(p_1, \dots, p_5) \frac{d^k}{d\tau^k} \{L_i(\tau)(t-\tau)^5\} \right] d\tau, \quad (1.277)$$

$$f_i^y(t, p_1, \dots, p_r) = \int_0^t y_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{5!} b_k(p_1, \dots, p_r) \frac{d^k}{d\tau^k} \{L_i(\tau)(t-\tau)^5\} \right] d\tau. \quad (1.278)$$

Запишем функционал, подлежащий минимизации:

$$I(p_1, \dots, p_r) = \int_0^{T=50} \sum_{i=0}^l E_i^2(\tau, p_1, \dots, p_5) d\tau. \quad (1.279)$$

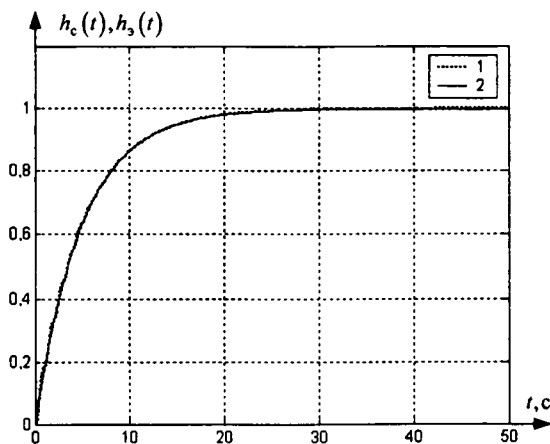


Рис. 1.122. Графики эталонного (2) и реального (1) переходных процессов

При решении задачи было принято $l = 3$ и проведена безусловная минимизация с нулевыми начальными условиями. Синтез проводился на интервале $[0, 50]$ с. При этом были получены следующие результаты:

- минимизируемый функционал:

$$\begin{aligned} I(p_1, \dots, p_5) = & -0,1749e21 \cdot p_3 p_2 - 0,2749e20 \cdot p_3 p_1 + 0,1918e23 p_4^2 + 0,6334e21 \cdot p_3^2 + \\ & + 0,6826e22 \cdot p_3 p_4 + 0,2933e23 \cdot p_3 p_5 + 0,1759e24 \cdot p_3 p_4 + 0,4436e24 \cdot p_3^2 - \\ & - 0,6096e19 \cdot p_3 - 0,1410e21 \cdot p_3 - 0,3284e20 \cdot p_4 - 0,6490e19 \cdot p_4 p_1 + \\ & + 0,5850e16 \cdot p_1 + 0,3387e17 \cdot p_2 - 0,3899e20 \cdot p_4 p_2 + 0,6715e16 \cdot p_1 p_2 + \\ & + 0,5847e15 \cdot p_1^2 - 0,7040e19 \cdot p_3 p_2 + 0,1991e17 \cdot p_2^2 - 0,1216e19 \cdot p_3 p_1 + 0,1467e17; \end{aligned}$$

- передаточные числа автопилота:

$$p_1^* = 0,078 \text{ с}, \quad p_2^* = 4,704, \quad p_3^* = 0,0141 \text{ рад} \cdot \text{с} / \text{м},$$

$$p_4^* = 0,00312 \text{ рад} / \text{м}, \quad p_5^* = 18,56 \cdot 10^{-8} \text{ рад} / \text{м} \cdot \text{с};$$

- передаточная функция скорректированной системы:

$$W(s) = \frac{1614,3s^2 + 356,6211s + 0,02115}{200s^5 + 216,364s^4 + 8018,2264s^3 + 3401,856s^2 + 356,6211s + 0,02115}. \quad (1.280)$$

На рис. 1.122 изображены графики эталонного и реального переходных процессов (при найденных значениях передаточных чисел автопилота).

Время переходного процесса скорректированной системы составило $T_y \approx 15 \text{ с}$, перерегулирование $\sigma \approx 0\%$.

Пример 1.25 [128]. Рассмотрим систему автоматического управления перегрузкой летательного аппарата с перестройкой параметров регулятора в зависимости от высоты и скорости полета (рис. 1.123).

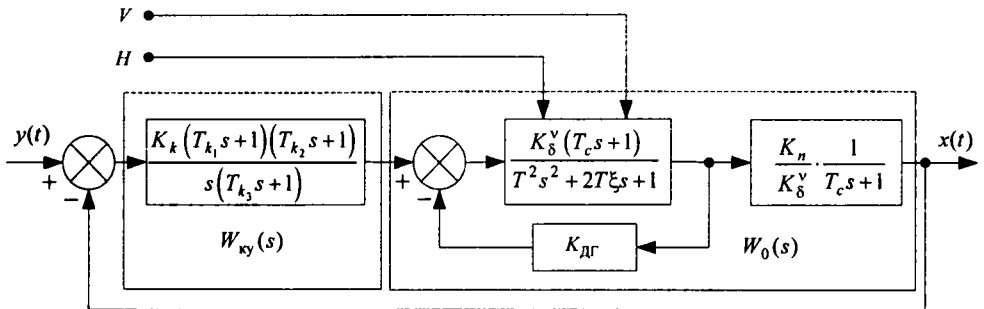


Рис. 1.123. Структурная схема системы автоматического управления перегрузкой летательного аппарата

Постановка задачи: рассчитать параметры последовательно включенного регулятора системы автоматического управления перегрузкой летательного аппарата в зависимости от высоты и скорости полета, обеспечивающие устойчивость и заданные показатели качества в различных режимах полета.

ПФ объекта управления может быть представлена в виде [128]

$$W_0(s) = \frac{K_H}{(T_1s+1)(T_2s+1)} = \frac{b_0^0}{a_2^0s^2 + a_1^0s + a_0^0}. \quad (1.281)$$

Положим, что $K_{ДГ} = 0,8$ — глубина обратной связи по угловой скорости тангажа; численные значения T_1, T_2, K_H для всех режимов полета приведены в табл. 1.12 [128].

Таблица 1.12

Численные значения T_1, T_2, K_H

Режим полета	K_H	$T_1, \text{ с}$	$T_2, \text{ с}$
1	0,0463	2,02	0,068
2	0,175	1,78	0,081
3	0,204	0,63	0,050
4	0,191	0,96	0,068

ПФ регулятора, включенного в прямую цепь, будем находить в виде

$$W_{ky}(s) = \frac{K_k(T_{k1}s+1)(T_{k2}s+1)}{s(T_{k3}s+1)} = \frac{p_1s^2 + p_2s + p_3}{p_4s^2 + s}, \quad (1.282)$$

где

$$p_1 = K_k T_{k1} T_{k2}, \quad p_2 = K_k (T_{k1} + T_{k2}), \quad p_3 = K_k, \quad p_4 = T_{k3}. \quad (1.283)$$

С учетом всего вышесказанного структурная схема скорректированной системы может быть представлена так (рис. 1.124).

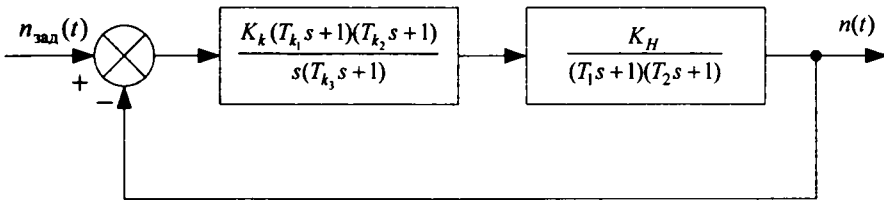


Рис. 1.124. Структурная схема системы управления ЛА

Передаточная функция системы с регулятором запишется в виде

$$W(s) = \frac{p_1 b_0^0 s^2 + p_2 s + p_3 b_0^0}{p_4 a_2^0 s^4 + (a_2^0 + a_1^0 p_4) s^3 + (a_1^0 + a_0^0 p_4 + p_1 b_0^0) s^2 + (a_0^0 s + p_2 b_0^0) s + p_3 b_0^0}. \quad (1.284)$$

Задачу синтеза регулятора будем решать методом порождающих функций, используя в качестве порождающих функций многочлены Лежандра. При этом переходной процесс скорректированной системы должен удовлетворять следующим требованиям: время переходного процесса $T_y \leq 5$ с, перерегулирование $\sigma \leq 20\%$ во всех режимах полета.

В качестве эталонной переходной характеристики возьмем аperiодический сигнал:

$$x_3(t) = 1 - e^{-0.6t}. \quad (1.285)$$

Получим необходимое число невязок между левой и правой частями интегрального уравнения, соответствующего системе (1.284) для каждого из режимов полета летательного аппарата и будем решать задачу синтеза для каждого режима полета. Функционалы невязок и результаты их безусловной минимизации с нулевыми начальными условиями для каждого из режимов приведены ниже:

$$f_i^x(t, p_1, \dots, p_4) = \int_0^t x_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{4!} a_k(p_1, \dots, p_4) \frac{d^k}{d\tau^k} \{L_i(\tau)(t-\tau)^4\} \right] d\tau, \quad (1.286)$$

$$f_i^y(t, p_1, \dots, p_4) = \int_0^t y_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{4!} b_k(p_1, \dots, p_4) \frac{d^k}{d\tau^k} \{L_i(\tau)(t-\tau)^4\} \right] d\tau, \quad (1.287)$$

$$E_i(t, p_1, \dots, p_4) = f_i^x(t, p_1, \dots, p_4) - f_i^y(t, p_1, \dots, p_4), \quad (1.288)$$

$$I(p_1, \dots, p_4) = \int_0^{T=15} \sum_{i=0}^l E_i^2(\tau, p_1, \dots, p_4) d\tau \rightarrow \min_{p_1, \dots, p_4}. \quad (1.289)$$

Режим 1 (при составлении функционала использовалось 2 невязки).

Результаты расчетов:

- функционал:

$$I_1(p_1, \dots, p_4) = 0,2509e12 \cdot p_1^2 - 0,4943e15 \cdot p_3 + 0,9959e13 \cdot p_3^2 - 0,1922e15 \cdot p_3 p_4 + \\ + 0,4885e16 \cdot p_4 + 0,2964e13 \cdot p_3 p_1 - 0,3142e14 \cdot p_4 p_1 + 0,9927e15 \cdot p_4^2 - \\ - 0,7602e14 \cdot p_1 - 0,2154e15 \cdot p_2 + 0,8535e13 \cdot p_3 p_2 - 0,8641e14 \cdot p_4 p_2 + \\ + 0,1357e13 \cdot p_1 p_2 + 0,1892e13 \cdot p_2^2 + 0,6185e16;$$

- значения найденных параметров регулятора:

$$p_1^* = 19,9551, p_2^* = 34,8775, p_3^* = 13,0200, p_4^* = 0,6338; \quad (1.290)$$

- передаточная функция скорректированной системы:

$$W(s) = \frac{46196,0565s^2 + 80741,4125s + 30141,3}{4352,9384s^4 + 73036,72s^3 + 182286,057s^2 + 130741,413s + 30141,3}.$$

Режим 2 (при составлении функционала использовалось 3 невязки).

Результаты расчетов:

- функционал:

$$I_2(p_1, \dots, p_4) = -0,3410e16 \cdot p_3 - 0,1099e16 \cdot p_1 - 0,2167e16 \cdot p_2 + 0,1466e17 \cdot p_4 + \\ + 0,2669e14 \cdot p_1^2 + 0,9677e14 \cdot p_1 p_2 - 0,6835e15 \cdot p_1 p_4 + 0,9222e14 \cdot p_2^2 - \\ - 0,1269e16 \cdot p_2 p_4 + 0,4427e16 \cdot p_4^2 + 0,1328e15 \cdot p_3 p_1 + 0,2320e15 \cdot p_3^2 + \\ + 0,2748e15 \cdot p_3 p_2 - 0,1815e16 \cdot p_3 p_4 + 0,1303e17;$$

- значения найденных параметров регулятора:

$$p_1^* = 0,4928, p_2^* = 6,3821, p_3^* = 3,4281, p_4^* = 0,0003; \quad (1.290')$$

- передаточная функция скорректированной системы:

$$W(s) = \frac{46196,0565s^2 + 80741,4125s + 30141,3}{4352,9384s^4 + 73036,72s^3 + 182286,057s^2 + 130741,413s + 30141,3}.$$

Режим 3 (при составлении функционала использовалось 3 невязки).

Результаты расчетов:

- функционал:

$$\begin{aligned} I_3(p_1, \dots, p_4) = & 0,1019e14 \cdot p_4 - 0,4190e13 \cdot p_3 - 0,1281e13 \cdot p_1 - 0,2579e13 \cdot p_2 + \\ & + 0,3237e13 \cdot p_4^2 - 0,2345e13 \cdot p_4 p_3 - 0,8555e12 \cdot p_4 p_1 - 0,1608e13 \cdot p_4 p_2 + \\ & + 0,5045e12 \cdot p_3^2 + 0,2888e12 \cdot p_3 p_1 + 0,5976e12 \cdot p_3 p_2 + 0,2005e12 \cdot p_2^2 + \\ & + 0,5802e11 \cdot p_1^2 + 0,2104e12 \cdot p_1 p_2 + 0,8800e13; \end{aligned}$$

- значения найденных параметров регулятора:

$$p_1^* = 12,2624, p_2^* = 18,7386, p_3^* = 2,9899, p_4^* = 5,7841; \quad (1.291)$$

- передаточная функция скорректированной системы:

$$W(s) = \frac{5003,06s^2 + 7645,3488s + 1219,8792}{364,398s^4 + 7929,376s^3 + 17931,2592s^2 + 9645,3488s + 1219,8792}.$$

Режим 4 (при составлении функционала использовалось 3 невязки).

Результаты расчетов:

- функционал:

$$\begin{aligned} I_4(p_1, \dots, p_4) = & 0,2114e16 \cdot p_4 - 0,2206e15 \cdot p_1 - 0,4404e15 \cdot p_2 - 0,7066e15e15 \cdot p_3 + 0,6911e14 \cdot p_3^2 + \\ & + 0,6583e15 \cdot p_4^2 - 0,1432e15 \cdot p_4 p_1 - 0,2680e15 \cdot p_4 p_2 - 0,3880e15 \cdot p_4 p_3 + 0,7948e13 \cdot p_1^2 + \\ & + 0,2882e14 \cdot p_1 p_3 + 0,2746e14 \cdot p_2^2 + 0,8185e14 \cdot p_2 p_3 + 0,1844e16; \end{aligned}$$

- значения найденных параметров регулятора:

$$p_1^* = 14,4074, p_2^* = 15,7016, p_3^* = 3,2173, p_4^* = 4,1063; \quad (1.292)$$

- передаточная функция скорректированной системы:

$$W(s) = \frac{68760s^2 + 74967,5s + 15327,75}{6691,2s^4 + 107002s^3 + 196960s^2 + 99967,5s + 15327,75}.$$

На рис. 1.125–1.128 приведены графики переходных характеристик.

Переходные процессы для каждого режима полета имеют нулевое перерегулирование и длительность $T_y \approx 5$ с, что полностью удовлетворяет поставленным требованиям.

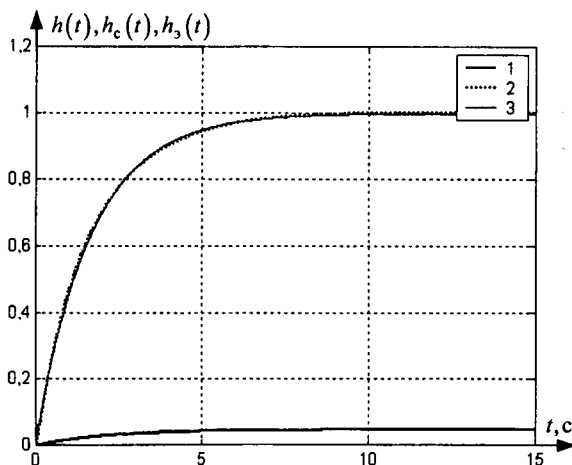


Рис. 1.125. Переходная характеристика нескорректированной системы (1), эталонная переходная характеристика (3) и переходная характеристика скорректированной системы (2) для 1-го режима полета летательного аппарата

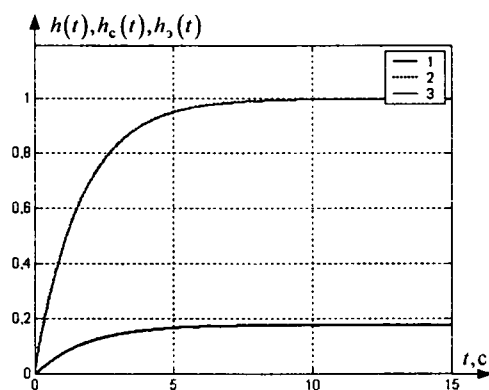


Рис. 1.126. Переходная характеристика нескорректированной системы (1), эталонная переходная характеристика (3) и переходная характеристика скорректированной системы (2) для 2-го режима полета летательного аппарата

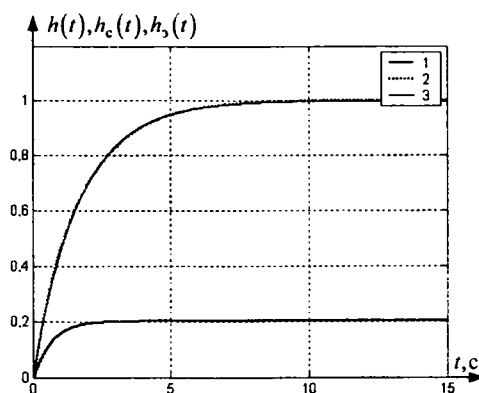


Рис. 1.127. Переходная характеристика нескорректированной системы (1), эталонная переходная характеристика (3) и переходная характеристика скорректированной системы (2) для 3-го режима полета летательного аппарата

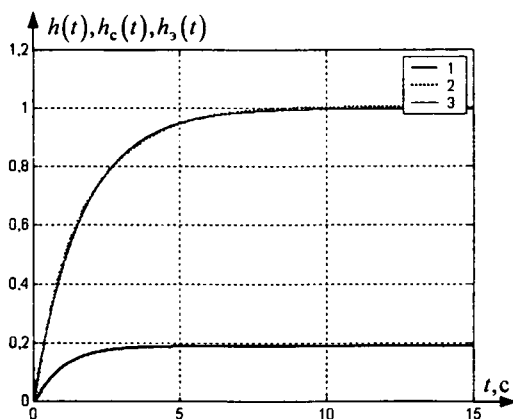


Рис. 1.128. Переходная характеристика нескорректированной системы (1), эталонная переходная характеристика (3) и переходная характеристика скорректированной системы (2) для 4-го режима полета летательного аппарата

Пример 1.26 [124]. Универсальные летучие ножницы производят автоматическое резание выходящего из прокатного стана сортового металла на определенные мерные длины с различными скоростями движения полос. Для обеспечения различных режимов резания с высокой точностью по длине отрезаемых полос применяются две синхронно следящие системы для управления приводами барабанов и эксцентриковых валов.

Следящие системы приводов барабанов и эксцентриковых валов не только синхронизируют скорости их вращения, но и обеспечивают вполне определенное положение ножей, исключая при этом накопление ошибки следящей системы.

Принципиальная схема следящих систем для управления летучими ножницами показана на рис. 1.130. Полоса металла 2 с помощью подающих роликов 1 движется к барабанам 4 с двумя режущими ножами 5. Барабаны приводятся во вращение через силовой редуктор 8 от электродвигателя главного привода 23, имеющего обмотку возбуждения 22. Оба барабана установлены на двух эксцентриковых валах 3, синхронизация вращения которых обеспечивается специальным редуктором. Эксцентриковые валы приводятся во вращение от электродвигателя 27 с независимой обмотки возбуждения 28.

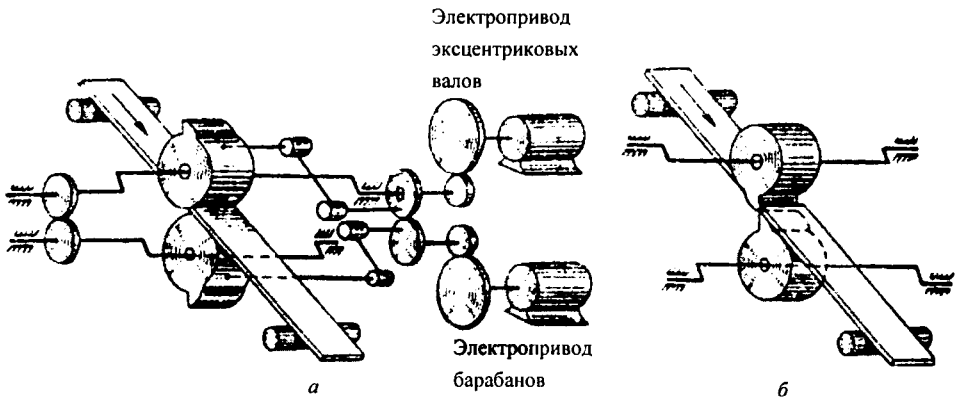


Рис. 1.129. Упрощенная кинематическая схема универсальных летучих ножниц при двух положениях барабанов и ножей

Рассмотрим синхронно следящую систему привода эксцентриковых валов. В ее состав входят генератор 29 с обмоткой возбуждения 33; электромашинный усилитель 35 с обмотками управления 41, 47, 49; магнитный усилитель 46; тахогенераторы 37 и 39, сельсин-датчик 20; дифференциальный сельсин 19 и два сельсина-приемника 12 и 13. Статорные обмотки сельсин-приемников присоединяются к обмоткам сельсин-датчика через контакты K_3 и K_4 , а дифференциальный сельсин подключается с помощью контактов K_5 .

Сельсины 16 и 18 включены в трансформаторном режиме и напряжение рассогласования через выпрямитель 10 поступает на вход магнитного усилителя. При отсутствии на подающих роликах металлической полосы сельсин-приемник 18 и электромагнитная муфта 15 отключаются. Тогда сельсин-датчик 16 подключается к стопорному сельсину 11, за счет чего осуществляется фиксация пространственного положения ножей.

После поступления полосы на подающие ролики контакты K_2 отключают сельсин 11 и подключают через контакты K_1 сельсин-датчик 16 к цепям сельсина-приемника 18. И снова сельсин 16 и 18 включаются в трансформаторный режим. Сельсины 12 и 20 также включены в трансформаторном режиме и обеспечивают строгое соотношение между скоростями вращения барабанов и эксцентриков. Сигнал от сельсинов поступает на магнитный усилитель через выпрямитель 14.

Переключением четырехступенчатого кинематического редуктора 25 изменяется передаточное число к сельсину 20, а соответственно с этим меняется соотношение между скоростями вращения барабанов и эксцентриковых валов, за счет чего обеспечивается резание металла на различные длины.

Этап 1. Построение структурной схемы системы, выбор структуры регулятора и места включения

Пусть динамика системы корректируется двумя корректирующими устройствами, одно из которых имеет ПФ $W_1(s)$ и находится в прямой цепи, а второе с ПФ $W_2(s)$ — в цепи местной обратной связи (рис. 1.131).

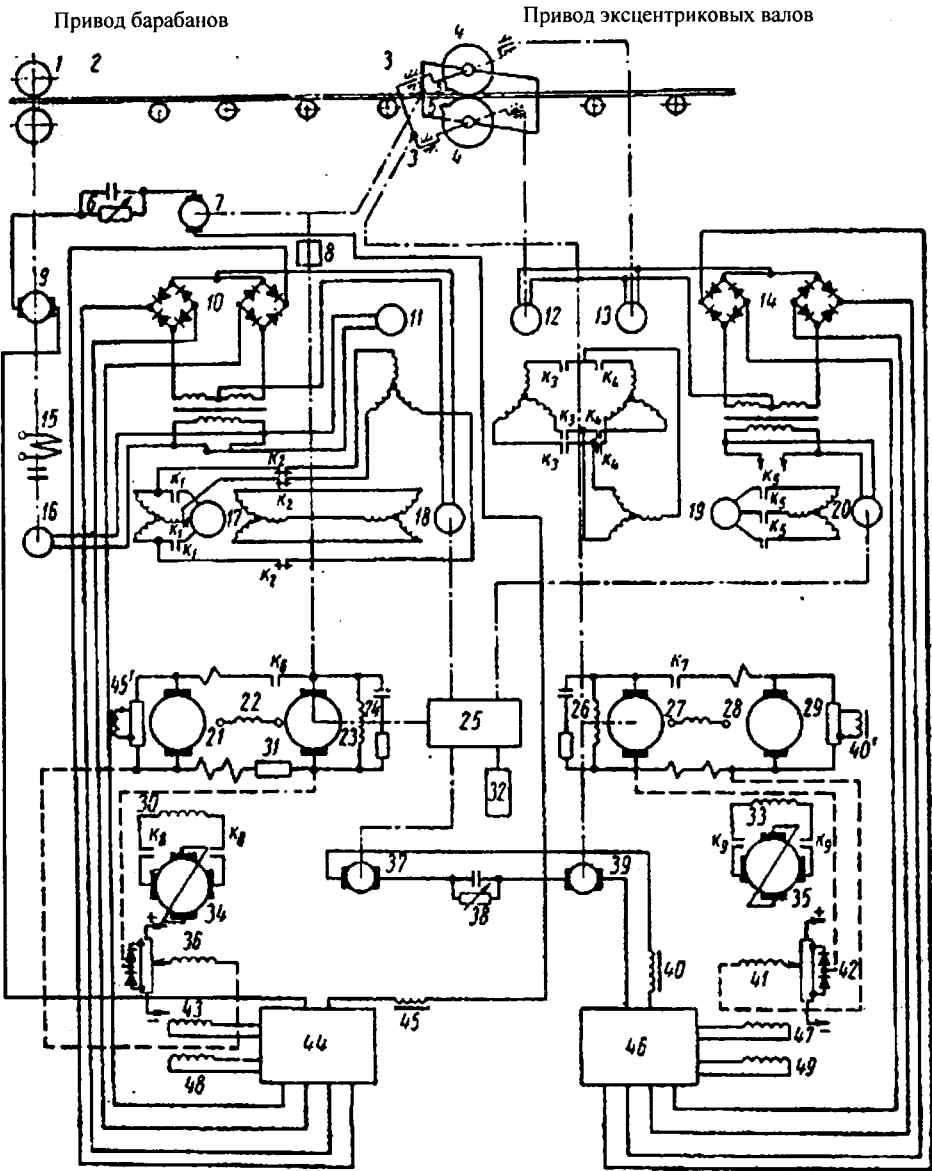


Рис. 1.130. Принципиальная схема следящих систем универсальных летучих ножиц

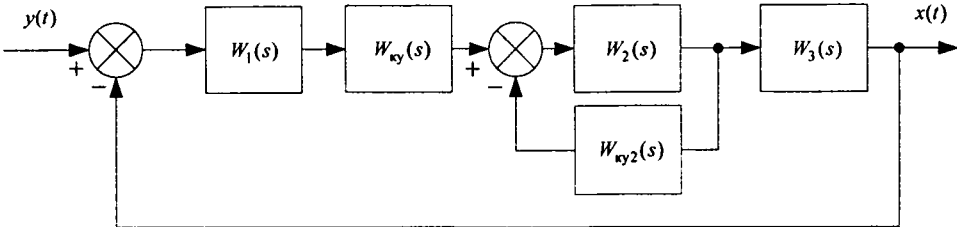


Рис. 1.131. Структурная схема следящей системы летучих ножиц

Передаточные функции, входящие в неизменяемую часть системы:

1. $W_1(s) = K_1$, где K_1 — отношение постоянной сельсинов, приведенной к валу эксцентриков, к передаточному числу четырехступенчатого редуктора.

$$\frac{K_m K_I K_{II} K_r}{R_b}$$

$$2. W_2(s) = \frac{R_b}{(T_r s + 1)(T_q s + 1)(T_f s + 1)(T_m s + 1)},$$

где

K_m — коэффициент усиления магнитного усилителя,

K_I — коэффициент усиления I каскада электромашинного усилителя по напряжению,

K_{II} — коэффициент усиления II каскада электромашинного усилителя по напряжению,

R_b — омическое сопротивление обмотки возбуждения генератора,

T_r — постоянная времени генератора,

T_q и T_f — постоянные времени для поперечной цепи якоря и дополнительной обмотки (в управляющей обмотке),

T_m — постоянная времени управляющей обмотки магнитного усилителя.

$$3. W_3(s) = \frac{K_{qb}}{s(T_{qb} s + 1)(T_g s + 1)},$$

где

K_{qb} — коэффициент передачи главного привода эксцентриковых валов,

T_{qb} и T_g — постоянные времени главного привода эксцентриков.

Примем следующие численные значения параметров неизменяемой части системы:

$$K_m = 31,4 \text{ Н/А}; K_{qb} = 0,65 \text{ рад/(с} \cdot \text{В)}; T_f = 0,002 \text{ с}; K_I \cdot K_{II} = 3,9; T_{qb} = 0,085 \text{ с}; T_m = 0,02 \text{ с}; K_1 = 0,0394;$$

$$K_r = 2,8 \text{ В/А}; T_r = 0,69 \text{ с}; T_g = 0,0068 \text{ с}; R_b = 1,8 \text{ Ом}; T_q = 0,0525 \text{ с}.$$

Тогда передаточная функция следящей системы без корректирующих устройств будет иметь вид

$$W_0(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)W_3(s)}{1 + W_1(s)W_2(s)W_3(s)} = \frac{73178014}{0,01256s^7 + 9,16s^6 + 1616,07s^5 + 91458,16s^4 + 1850386,5s^3 + 12844500s^2 + 1,5 \cdot 10^7 s + 73178014}.$$

Переходная характеристика нескорректированной системы определяется зависимостью

$$h_0(t) = 1 - 3,6 \cdot 10^{-7} \cdot e^{-500t} + 3,1 \cdot 10^{-6} e^{-147t} - 9,2 \cdot 10^{-4} \cdot e^{-50t} + 0,26 \cdot e^{-17t} - \\ - 0,385 \cdot e^{-14,8t} - 0,9 \cdot e^{-0,15t} \cos(2,49t) - 0,4340,9 \cdot e^{-0,15t} \sin(2,49t),$$

а ее график представлен на рис. 1.132.

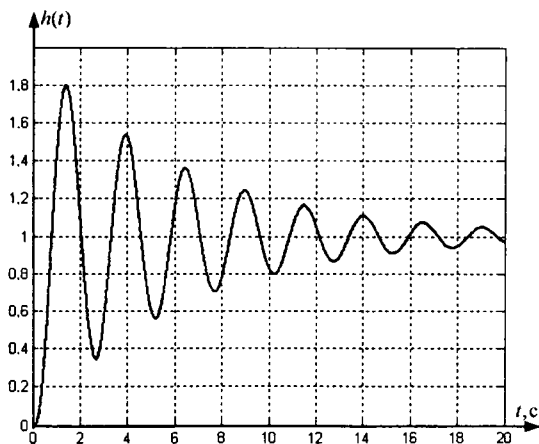


Рис. 1.132. График переходной характеристики нескорректированной системы

В качестве корректирующих устройств выберем пропорционально-интегральный регулятор в прямой цепи (ПИ-регулятор)

$$W_{\text{кп1}}(s) = K + \frac{K_{\text{и}}}{s}$$

и инерционную жесткую обратную связь в местной обратной связи

$$W_{\text{кп2}}(s) = \frac{K_{\text{р}}}{T_{\text{р}}s + 1}.$$

Этап 2. Нахождение ПФ замкнутой системы с учетом включения в ее структуру корректирующих устройств

Обозначим $K_{\text{р}} = p_1$, $T_{\text{р}} = p_2$, $1/K_{\text{и}} = p_3$, $K = 1$, тогда передаточная функция скорректированной следящей системы летучих ножиц принимает вид

$$W(s) = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{a_9 s^9 + a_8 s^8 + a_7 s^7 + a_6 s^6 + a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0},$$

где

$$b_0 = 73178014;$$

$$b_1 = 73178014 \cdot p_3 + 73178014 \cdot p_2;$$

$$b_2 = 73178014;$$

$$a_0 = 73178014; a_1 = 73178014 \cdot p_3 + 73178014 \cdot p_2;$$

$$a_2 = 2857400000 \cdot p_3 p_1 + 73178014 \cdot p_3 p_2 + 15000000 \cdot p_3;$$

$$a_3 = 262309320 \cdot p_3 p_1 + 15000000 \cdot p_3 p_2 + 12844500 \cdot p_3;$$

$$a_4 = 1651577,2 \cdot p_3 p_1 + 12844500 \cdot p_3 p_2 + 1850386,5 \cdot p_3;$$

$$a_5 = 91458,165 \cdot p_3 + 1850386,5 \cdot p_3 p_2;$$

$$a_6 = 1616,074 \cdot p_3 + 91458,165 \cdot p_3 p_2;$$

$$a_7 = 9,1623 \cdot p_3 + 1616,074 \cdot p_3 p_2;$$

$$a_8 = 0,0125 \cdot p_3 + 9,16 \cdot p_3 p_2;$$

$$a_9 = 0,0125 \cdot p_3 p_2.$$

Этап 3. Выбор эталонного переходного процесса

Пусть требуется, чтобы переходная характеристика скорректированной следящей системы имела время управления $T_y \leq 5$ с и перерегулирование $\sigma \leq 20\%$.

Исходя из этих требований, выберем эталонный переходной процесс, определяемый следующей зависимостью:

$$h_s(t) = 1 - e^{-0,6t} \cos(0,9t).$$

Этап 4. Построение функционала качества системы

Для построения функционала качества воспользуемся методом порождающих функций. В качестве порождающих функций будем использовать ортонормированные на интервале $[0; 20]$ многочлены Лежандра и в искомый функционал включим 3 невязки:

$$\begin{aligned} I(p_1, p_2, p_3) &= \int_0^{T=20} \sum_{i=0}^3 E_i^2(\tau, p_1, p_2, p_3) d\tau = \\ &= -8579571,866 \cdot p_2 p_3 p_1 + 104022,85 \cdot p_3 + 182823,634 \cdot p_2 + \\ &+ 195608,613 \cdot p_3 p_2 - 4376047,203 \cdot p_3^2 p_2 p_1 + 92071,869 \cdot p_3 p_2^2 + \\ &+ 90197,15 \cdot p_2^2 + 23563,244 \cdot p_3^2 p_2^2 - 8701148,276 \cdot p_3 p_1 + 29166,43 \cdot p_3^2 + \\ &+ 204053678,806 \cdot p_3^2 p_1^2 + 52321,913 \cdot p_3^2 p_2 - 4879179,83 \cdot p_3^2 p_1 + 92934,677. \end{aligned}$$

Этап 5. Минимизация функционала качества по неизвестным параметрам корректирующих устройств

Полученный функционал качества представляет собой функцию 3-х переменных $I(p_1, p_2, p_3)$, минимум которой необходимо определить:

$$I(p_1, p_2, p_3) \rightarrow \min_{p_1, p_2, p_3}.$$

Приведем результаты безусловной минимизации функционала:

$$p_1^* = 0,0125; p_2^* = 0,0088; p_3^* = 49,87.$$

Значение функционала в этой точке $I(p_1^*, p_2^*, p_3^*) = 175,1297$.

Этап 6. Анализ скорректированной системы слежения
График переходной характеристики представлен на рис. 1.133.

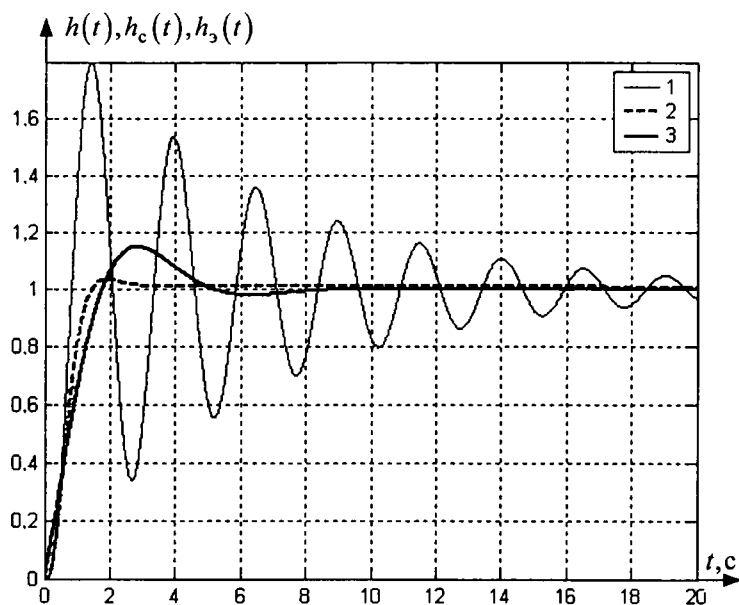


Рис. 1.133. Переходная характеристика нескорректированной системы (1), эталонной (3) и скорректированной (2)

Перерегулирование составило $\sigma \approx 3,92735$, время переходного процесса $T_y \approx 1,342$.

1.13. ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ

Частотные методы синтеза корректирующих устройств относятся к числу наиболее разработанных и широко применяемых на практике. Это объясняется, прежде всего, их физической прозрачностью, гибкостью и инженерной направленностью. Среди ряда частотных методов синтеза (см., например, [124]) мы рассмотрим частотный метод синтеза последовательных корректирующих устройств, базирующийся на концепции желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристике, предложенной В.В. Солодовниковым [124]. Данный метод широко используется для синтеза следящих систем. Основная идея метода — это связать логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы, вещественную частотную характеристику замкнутой и показатели качества переходного процесса (перерегулирование и время переходного процесса), формирующие «коробочку Солодовникова». Наиболее просто эта связь находится для минимально-фазовых систем, поэтому нами будет рассматриваться только такой класс систем. В первой части параграфа будут получены соотношения, определяющие данную связь, далее рассмотрен алгоритм синтеза желаемой логарифмической амплитудно-частотной характеристики и, наконец, подробно разобран пример.

1.13.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ИМПУЛЬСНОЙ ПЕРЕХОДНОЙ ФУНКЦИИ (ИПФ) ПО ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

Пусть $W(s)$ — передаточная функция замкнутой устойчивой системы. По определению ее ИПФ имеет вид

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s)e^{st} ds. \quad (1.293)$$

Так как по условию все полюсы левые, абсциссу сходимости c в интеграле (1.293) можно принять равной нулю ($c = 0$), тогда

$$k(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} W(s)e^{st} ds. \quad (1.294)$$

Сделаем в (1.294) замену переменной $s = j\omega$. В этом случае интеграл (1.294) можно представить в виде

$$k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} W(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.295)$$

Выражение (1.295) представляет собой обратное преобразование Фурье. Оно определяет функцию $k(t)$ на интервале $0 < t < \infty$, если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} k(t)dt$ абсолютно сходится. Это условие для устойчивой системы выполняется.

Представим комплексную частотную характеристику $W(j\omega)$ в виде

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega), \quad (1.296)$$

где $P(\omega)$, $Q(\omega)$ — вещественная и мнимая частотные характеристики соответственно.

Подставляя (1.296) в (1.295) и учитывая, что $e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$, получим

$$\begin{aligned} k(t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (P(\omega) \cos \omega t - Q(\omega) \sin \omega t) d\omega + \\ & + j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (P(\omega) \sin \omega t + Q(\omega) \cos \omega t) d\omega. \end{aligned} \quad (1.297)$$

Функции $P(\omega)$, $\cos \omega t$ являются четными функциями от ω , а $Q(\omega)$, $\sin \omega t$ — нечетными функциями от ω [], поэтому подынтегральная функция во втором интеграле (1.297) является нечетной функцией ω и ее интеграл в симметричных пределах равен нулю. В первом интеграле подынтегральная функция является четной функцией, поэтому выражение (1.297) можно окончательно записать в виде

$$k(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega - \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (1.298)$$

Необходимо отметить, что преобразование Фурье (1.298) определяет $k(t)$ в пределах $-\infty < t < \infty$, а по условию физической реализуемости $k(t) = 0$ при $t < 0$. Учтем этот факт следующим образом. Пусть $t = -\tau$. Выражение (1.295) в этом случае имеет вид

$$k(-\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} W(j\omega)e^{-j\omega\tau} d\omega, \quad 0 < \tau < \infty. \quad (1.299)$$

Согласно сделанного замечания $k(-\tau) = 0$, поэтому (1.299) можно представить в виде

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (P(\omega) + jQ(\omega))(\cos \omega\tau - j \sin \omega\tau) d\omega.$$

Или, используя факт четности и нечетности соответствующих функций, получим

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega. \quad (1.300)$$

С учетом (1.298) и (1.300) получим следующее окончательное выражение для ИПФ устойчивых физически реализуемых систем:

$$k(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \cos \omega t d\omega = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \sin \omega t d\omega, \quad t \geq 0. \quad (1.301)$$

1.13.2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ

После нахождения выражений, связывающих вещественную или мнимую частотные характеристики с ИПФ, важно получить аналогичную связь и для переходной характеристики, так как чаще всего при синтезе систем определяющим является вид желаемой переходной характеристики.

Пусть, как и прежде, $W(s)$ — передаточная функция устойчивой физически реализуемой системы. По определению переходная характеристика данной системы может быть найдена из выражения

$$h(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W(s)}{s} e^{st} ds. \quad (1.302)$$

Наличие одного нулевого корня в выражении $\frac{W(s)}{s}$ не позволяет нам ввести абсциссу сходимости $c=0$, поэтому сделаем следующие тождественные преобразования формулы (1.302):

$$h(t) = W(0) + \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{W(s) - W(0)}{s} e^{st} ds, \quad (1.303)$$

где $W(0)$ — статический коэффициент передачи.

Подынтегральное изображение $(W(s) - W(0))/s$ имеет все полюсы в левой полуплоскости, что проверяется непосредственной подстановкой вместо $W(s)$ дробно-рационального выражения

$$W(s) = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i} = \frac{B(s)}{D(s)}, \quad W(0) = \frac{b_0}{a_0}. \quad (1.304)$$

Представление (1.303) позволяет использовать абсциссу сходимости $c=0$, сделать замену переменных $s = j\omega$ и с учетом (1.296) получить следующее выражение для $h(t)$:

$$\begin{aligned} h(t) &= W(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{W(j\omega) - W(0)}{j\omega} e^{j\omega t} d\omega = \\ &= P(0) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t + \frac{P(\omega) - P(0)}{\omega} \sin \omega t \right) d\omega + \\ &+ j \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{P(0) - P(\omega)}{\omega} \cos \omega t + \frac{Q(\omega)}{\omega} \sin \omega t \right) d\omega, \end{aligned} \quad (1.305)$$

где учтено, что $W(0) = P(0)$. Ранее было отмечено, что $P(\omega)$, $\cos \omega t$ — четные функции, $Q(\omega)$, $\sin \omega t$ — нечетные функции частоты ω , функция $\frac{1}{\omega}$ является нечетной функцией ω , поэтому первый интеграл в формуле (1.305) имеет четную подынтегральную функцию, а второй — нечетную. Это позволяет представить (1.305) в виде

$$h(t) = P(0) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t + \frac{P(\omega) - P(0)}{\omega} \sin \omega t \right) d\omega. \quad (1.306)$$

Условие физической причинности, определяющее, что $h(t) = 0$, $t < 0$, по аналогии с формулой (1.300) приводит нас к следующему соотношению:

$$h(-\tau) = 0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega \tau - \frac{P(\omega) - P(0)}{\omega} \sin \omega \tau \right) d\omega, \quad 0 < \tau < \infty,$$

или

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega \tau d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) - P(0)}{\omega} \sin \omega \tau d\omega. \quad (1.307)$$

Подставляя (1.307) в (1.306), получим

$$\begin{aligned} h(t) &= P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega) - P(0)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = P(0) + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{Q(\omega)}{\omega} \cos \omega t d\omega, \end{aligned} \quad (1.308)$$

где использована формула

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{\pi}{2}, \quad t \geq 0.$$

Выражение (1.308) определяет связь между частотными характеристиками замкнутой системы и ее переходной характеристикой. Из этого следует, что для устойчивых систем переходная характеристика определена либо вещественной $P(\omega)$, либо мнимой $Q(\omega)$ частотными характеристиками системы, поэтому между этими характеристиками, в свою очередь, также должна быть определенная зависимость и она определяется преобразованиями Гильберта [117, 124]:

$$\begin{cases} P(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{Q(u)}{u - \omega} du, \\ Q(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(u)}{u - \omega} du. \end{cases} \quad (1.309)$$

Обозначая через $A(\omega)$ модуль функции $W(j\omega)$, а через $\varphi(\omega)$ ее аргумент, будем иметь

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\varphi(\omega)}, \quad (1.310)$$

откуда следует

$$\ln W(j\omega) = \ln A(\omega) + j\varphi(\omega). \quad (1.311)$$

Функции $\ln A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ связаны с функцией $\ln W(j\omega)$ таким же образом, как $P(\omega)$ и $Q(\omega)$ связаны с функцией $W(j\omega)$ (формула (1.296)). Поэтому аналогично формуле (1.309) можно утверждать, что *если все полюсы функции $\ln W(s)$ располо-*

жены в левой полуплоскости комплексной переменной s , то функции $\ln A(\omega)$ и $\varphi(\omega)$ также связаны преобразованием Гильберта:

$$\begin{cases} \ln A(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(u)}{u - \omega} du, \\ \varphi(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln A(u)}{u - \omega} d\omega. \end{cases} \quad (1.312)$$

Так как

$$\ln W(s) = \ln \frac{B(s)}{D(s)} = \ln B(s) - \ln D(s), \quad (1.313)$$

то к числу особых точек функции $\ln W(s)$ относятся не только нули функции $D(s)$ (полюсы передаточной функции $W(s)$), но и нули $B(s)$ (т.е. нули $W(s)$).

Таким образом, формулы (1.312), позволяющие определить $A(\omega)$ через $\varphi(\omega)$ и наоборот, будут иметь место лишь в том случае, если все нули и полюсы $W(s)$ располагаются в левой полуплоскости, т.е. $W(s)$ является передаточной функцией минимально-фазовой системы (МФС). МФС отличаются тем, что из всех систем, имеющих одну и ту же амплитудно-частотную характеристику, они дают наименьший сдвиг фаз между входными и выходными сигналами, при этом существует взаимно однозначное соответствие между амплитудно-частотной и фазочастотной характеристиками, определяемое формулами (1.312). Далее мы будем рассматривать только минимально фазовые системы.

1.13.3. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА ПЕРЕХОДНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПО ЧАСТОТНЫМ ХАРАКТЕРИСТИКАМ

При оценки качества переходного процесса в некоторой системе автоматического регулирования воспользуемся полученной ранее интегральной зависимостью между переходной характеристикой $h(t)$ и вещественной частотной характеристикой $P(\omega)$

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega. \quad (1.314)$$

В работах В.В. Солодовникова получены наиболее важные оценки качества переходной характеристики $h(t)$, связанные с формой вещественной частотной характеристики $P(\omega)$. Основными из них являются следующие:

1. Установившееся значение h_{∞} переходной характеристики определяется начальным значением вещественной частотной характеристики:

$$h(\infty) = P(0). \quad (1.315)$$

Это легко доказывается по теореме о предельном значении оригинала

$$h(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sH(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{W(s)}{s} \right) = W(0) = P(0).$$

2. Начальное значение $h_0 = h(0)$ переходной характеристики определяется конечным значением вещественной частотной характеристики:

$$h(0) = P(\infty). \quad (1.316)$$

Доказывается аналогично на основании свойства о начальном значении оригинала.

3. Следующее соотношение базируется на теореме о масштабировании (теореме подобия): двум вещественным частотным характеристикам, сходным по форме, но отличающимся масштабом по оси абсцисс в Ω_0 раз ($\Omega_0 > 0$), соответству-

ют переходные характеристики, также сходные по форме и отличающиеся масштабом по оси абсцисс в $\frac{1}{\Omega_0}$ раз. Покажем это.

Пусть известна некоторая переходная характеристика $\tilde{h}(\tau)$, связанная с вещественной частотной характеристикой $\tilde{P}(\omega')$ зависимостью

$$\tilde{h}(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{P}(\omega')}{\omega'} \sin(\omega' \tau) d\omega'.$$

Введем новую переменную ω по формуле
 $\omega' = \Omega_0 \omega,$

получим

$$\tilde{h}(\tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\tilde{P}(\Omega_0 \omega)}{\Omega_0 \omega} \sin(\omega \Omega_0 \tau) \Omega_0 d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin(\omega t) d\omega = h(t) = \tilde{h}\left(\frac{t}{\Omega_0}\right),$$

где введены новая переменная

$$t = \Omega_0 \tau$$

и масштабированная вещественная частотная характеристика

$$P(\omega) = \tilde{P}(\Omega_0 \omega).$$

Если $\Omega_0 > 1$, то $P(\omega)$ определяется сжатием в Ω_0 раз по оси абсцисс вещественной частотной характеристики $\tilde{P}(\omega)$ (для $\Omega_0 < 1$ соответственно растяжение). При этом масштаб по оси абсцисс для $h(t)$ (переходная характеристика для $P(\omega)$) увеличивается в Ω_0 раз (см. рис. 1.134).

4. Двум вещественным частотным характеристикам, сходным по форме, но отличающимся масштабом по оси ординат в β раз, соответствуют переходные характеристики, также сходные по форме и отличающиеся масштабом по оси ординат в β раз.

Это очевидно и непосредственно определяется формулой (1.314).

5. Разрыв непрерывности вещественной частотной характеристики свидетельствует о том, что система находится на границе устойчивости. Разрыву при $\omega = 0$ соответствует апериодическая граница устойчивости (наличие нулевого корня характеристического уравнения, т.е. интегратора) и разрыву при $\omega \neq 0$ — колебательная граница устойчивости (наличие пары чисто мнимых корней характеристического уравнения, т.е. консервативного звена).

6. Острый пик вещественной частотной характеристики при угловой частоте ω_0 (с^{-1}) свидетельствует о медленно затухающих колебаниях переходной характеристики с частотой, близкой к $\frac{\omega_0}{2\pi}$ (Гц) (наличие резонанса).

7. Если вещественная частотная характеристика является непрерывной положительной функцией ($P(\omega)$), ее производная — неположительной функцией $\left(\frac{dP}{d\omega} \leq 0\right)$, то время переходного процесса определяется неравенством

$$\frac{\pi}{\omega_n} < t_{\text{пн}} < \frac{4\pi}{\omega_n}, \quad (1.317)$$

а перерегулирование не превышает 18%,

$$\sigma\% < 18\%, \quad (1.318)$$

где ω_n — интервал частот, в котором $P(\omega) > 0$ (интервал положительности вещественной частотной характеристики) (рис. 1.135 б, в).

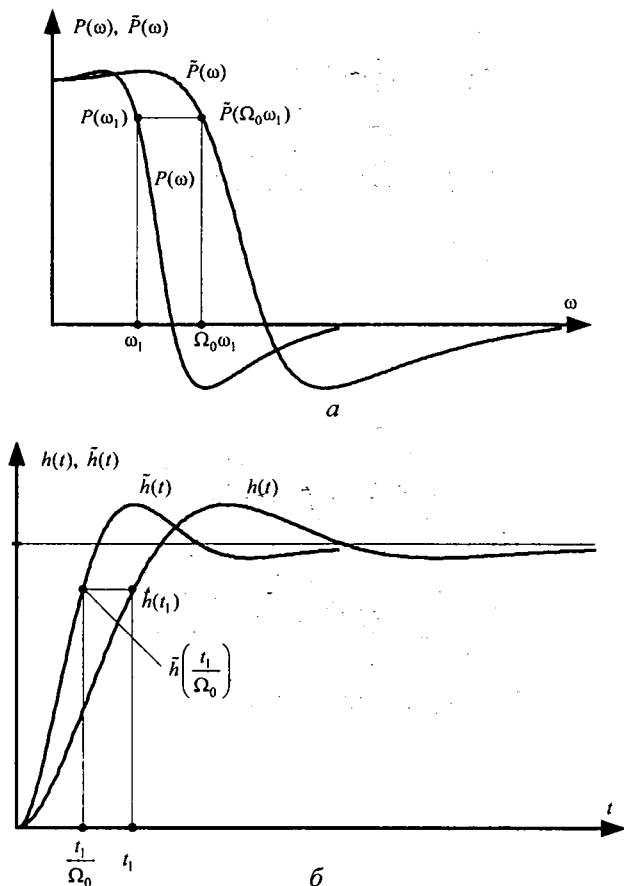


Рис. 1.134. Масштабированные вещественные частотные характеристики (а) и их переходные характеристики (б)

На рис. 1.135 представлены типичные вещественные частотные характеристики. Частота ω_c ограничивает так называемый интервал существенных частот. При $\omega > \omega_c$ ординаты функции $P(\omega)$ пренебрежимо малы и при расчетах не учитываются. Отбрасываемая часть вещественной частотной характеристики на рис. 1.135 показана пунктиром. Для монотонных функций вида (рис. 1.135, в), где на интервале $0 \leq \omega \leq \omega_c = \omega_n$, $P(\omega) > 0$, $\frac{dP}{d\omega} < 0$, имеет место следующий результат: $\sigma\% = 0\%$, т.е. переходная характеристика монотонна. Для характеристики общего вида (рис. 1.135, а) оценка времени переходного процесса может быть получена только снизу:

$$t_{\text{пн}} > \pi / \omega_n, \quad (1.319)$$

а перерегулирование может быть приближенно оценено по формуле [124]

$$\sigma\% < \frac{1,18P_{\text{max}} + 0,277P_{\text{min}} - P(0)}{P(0)} 100\%, \quad (1.320)$$

причем для $P_{\min} = 0$, $P_{\max} = P(0)$ имеем оценку (1.318).

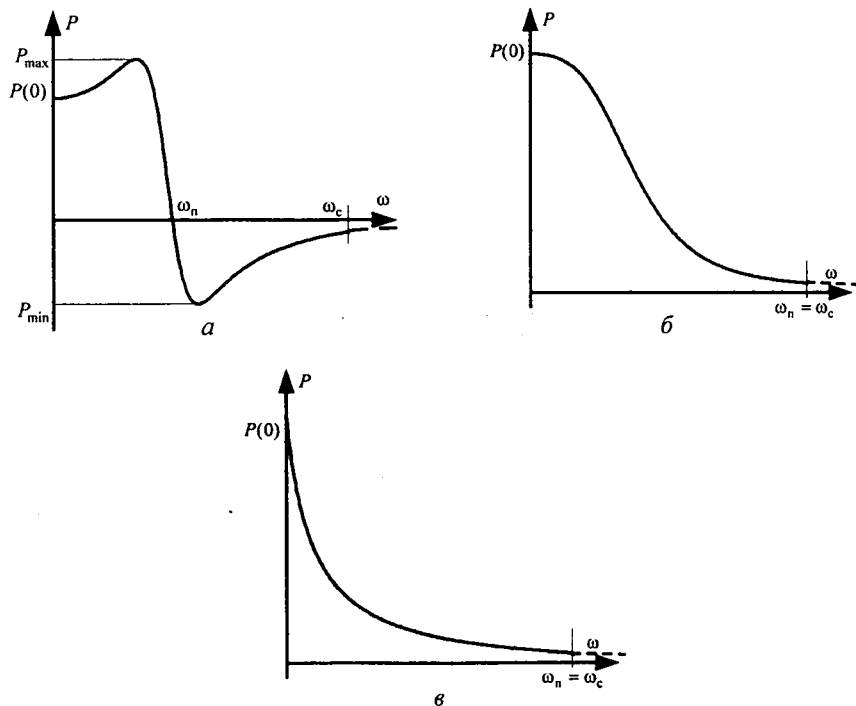


Рис. 1.135. Типичные вещественные частотные характеристики

Чтобы пояснить свойство 7, рассмотрим следующую идеализированную вещественную частотную характеристику:

$$P(\omega) = \begin{cases} P_0, & 0 \leq \omega \leq \omega_n, \\ 0, & \omega > \omega_n. \end{cases}$$

В этом случае переходная характеристика принимает вид

$$h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{P(\omega)}{\omega} \sin \omega t d\omega = \frac{2}{\pi} P_0 \int_0^{\omega_n} \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega = \frac{2}{\pi} P_0 \int_0^{\omega_n t} \frac{\sin u}{u} d(u t). \quad (1.321)$$

Интеграл

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du \quad (1.322)$$

называется *интегральным синусом*, который имеет следующее свойство [117, 124]:

$$\text{Si}(\infty) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{\pi}{2}. \quad (1.323)$$

Из выражений (1.320), (1.323) видно, что

$$h(\infty) = \text{Si}(\infty) = P_0,$$

что было получено ранее (см. свойство 1). С учетом обозначения (1.322) и соотношения (1.323) формула (1.321) примет вид

$$h(t) = \frac{2}{\pi} P_0 \text{Si}(\omega_n t).$$

Если обозначить $\omega_n t = \tau$ и принять $P_0 = 1$, $\omega_n = 1$, то получим следующую формулу:

$$h(\tau / \omega_n) = \tilde{h}(\tau) = \frac{2}{\pi} \text{Si}(\tau), \quad (1.324)$$

где назовем $\tilde{h}(\tau)$ *нормированной переходной характеристикой*, или *h-функцией*, при этом график $\tilde{h}(\tau)$ имеет вид (рис. 1.136).

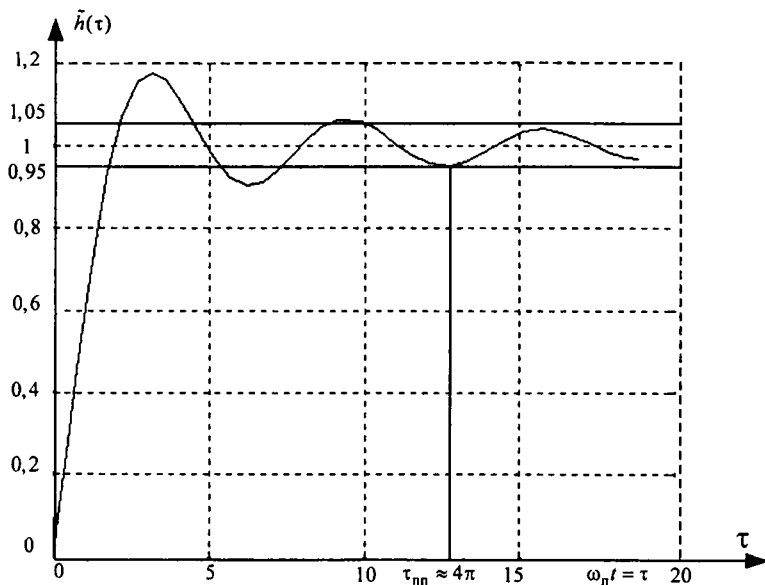


Рис. 1.136. График h -функции для $P_0 = 1$, $P(\omega) = \begin{cases} P_0, & 0 \leq \omega \leq 1, \\ 0, & \omega > 1 \end{cases}$

Для данной вещественной частотной характеристики ($P_0 = 1$, $\omega_n = 1$) h -функция имеет следующие показатели: $\sigma\% < 18\%$, $t_{nn} < 4\pi$ (это будет показано ниже).

В.В. Солодовников [117, 124] ввел более общий вид базовых вещественных частотных характеристик — единичную трапецеидальную вещественную характеристику $\tilde{P}(\omega)$ (рис. 1.137).

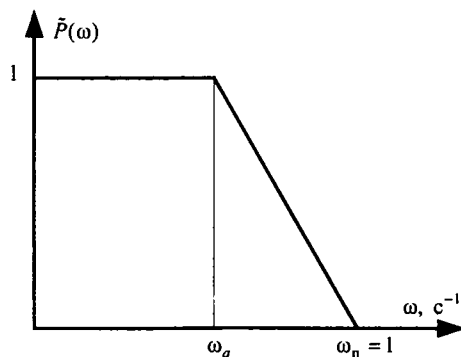


Рис. 1.137. Единичная трапецеидальная вещественная характеристика

Здесь параметр только один:

$$\chi = \frac{\omega_a}{\omega_n}, \quad \begin{cases} 0 \leq \chi \leq 1 \\ \chi = \omega_a \end{cases},$$

называемый *коэффициентом наклона* (выше была рассмотрена единичная трапеция с $\chi = 1$). Имеем

$$\bar{P}_\chi(\omega) = \begin{cases} 1, & 0 \leq \omega \leq \omega_a = \chi, \\ \frac{1-\omega}{1-\chi}, & \chi < \omega \leq 1, \\ 0, & \omega > 1. \end{cases} \quad (1.325)$$

Для единичной вещественной трапецеидальной частотной характеристики (далее просто единичная трапеция) h -функция принимает вид (см. формулу (1.321))

$$\begin{aligned} \tilde{h}_\chi(\tau) &= \frac{2}{\pi} \int_0^\chi \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\omega + \frac{2}{\pi} \int_\chi^1 \frac{1-\omega}{1-\chi} \frac{\sin \omega \tau}{\omega} d\omega = \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\text{Si}(\chi\tau) - \frac{1}{1-\chi} \left(\text{Si}(\tau) - \text{Si}(\chi\tau) + \frac{\cos \tau - \cos \chi\tau}{\tau} \right) \right], \end{aligned} \quad (1.326)$$

где индекс χ для $\tilde{h}_\chi(\tau)$, $\bar{P}_\chi(\omega)$ показывает зависимость h -функции, $\bar{P}(\omega)$ от одного параметра χ . h_χ -функция (1.326) затабулирована и имеется во многих работах (см., например, [117, 124]). Графики h_χ -функций при различных коэффициентах наклона χ приведены на рис. 1.138.

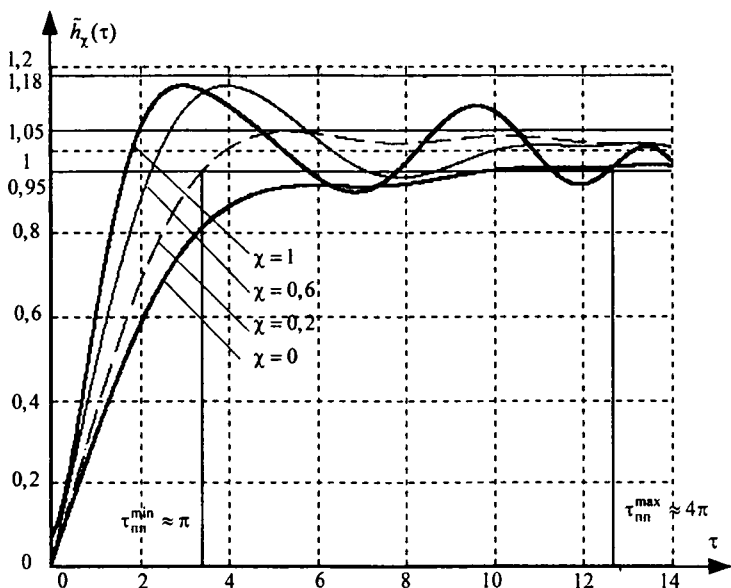


Рис. 1.138. Графики h_χ -функций при различных коэффициентах наклона χ

Из рис. 1.138 видно, что для типовой единичной трапеции при изменении $0 \leq \chi \leq 1$ нормированное время переходного процесса находится в пределах $(\chi = 0,2) \pi < \tau_{\text{пн}} < 4\pi$ ($\chi = 1$), при этом $0 \leq \sigma < 18\%$.

Если аппроксимировать заданную вещественную частотную характеристику $P(\omega)$ совокупностью трапецидальных характеристик, т.е.

$$P(\omega) \approx \sum_{i=1}^m \tilde{P}_i(\omega) = \sum_{i=1}^m P_{0i} \tilde{P}_{\chi_i}(\omega), \quad (1.327)$$

где $\chi_i = \frac{\omega_{ai}}{\omega_{ni}}$, $i = \overline{1, m}$ — коэффициент наклона i -й трапеции, m — число трапеций,

P_{0i} — высота i -й трапеции, то на основании свойств 3 и 4 получим

$$h(t) = h \left(\frac{\tau}{\omega_n} \right) \approx \sum_{i=1}^m P_{0i} \tilde{h}_{\chi_i}(\tau),$$

где τ — нормированное время, т.е. время для $\omega_n = 1$.

Как следует из формулы (1.320), величина перерегулирования тем больше, чем больше максимальная ордината $P_{\max}$. В случае, когда система находится на колебательной границе устойчивости, величина $P_{\max} = \infty$ и вещественная характеристика при $\omega = \omega_0$ (см. свойство 5) терпит разрыв.

Из соотношений (1.319), (1.320) следует, что при использовании для оценки качества системы автоматического регулирования вещественной частотной характеристики $P(\omega)$ быстродействие системы характеризуется интервалом положительности ω_n , а запас устойчивости — максимальной ординатой $P_{\max}$. Для увеличения быстродействия следует увеличивать интервал положительности ω_n , а для увеличения запаса устойчивости — уменьшать максимальную ординату $P_{\max}$.

Эти качественные выводы широко используются при синтезе корректирующих устройств частотным методом, о котором речь пойдет ниже.

1.13.4. СВЯЗЬ ПОКАЗАТЕЛЕЙ КАЧЕСТВА ЗАМКНУТОЙ СИСТЕМЫ С ЧАСТОТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ РАЗОМКНУТОЙ

При синтезе корректирующих устройств частотным методом используются логарифмические частотные характеристики разомкнутой системы, поэтому важно найти соотношения, связывающие показатели качества (в частности, перерегулирование, время переходного процесса) замкнутой системы с логарифмическими амплитудно-частотными и фазочастотными характеристиками (ЛАЧХ, ЛФЧХ), частотой среза разомкнутой системы.

Пусть $W_p(s)$, $W(s)$ — передаточные функции соответственно разомкнутой и замкнутой систем, причем

$$W(s) = \frac{W_p(s)}{1 + W_p(s)}. \quad (1.328)$$

Пусть

$$W_p(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = Z(\omega)e^{j\theta(\omega)}, \quad (1.329)$$

$$W(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = \frac{W_p(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)}. \quad (1.330)$$

Из (1.328)–(1.330) получим

$$W(j\omega) = \frac{Z(\omega)\cos\theta(\omega) + jZ(\omega)\sin\theta(\omega)}{1 + Z(\omega)\cos\theta(\omega) + jZ(\omega)\sin\theta(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega). \quad (1.331)$$

Из выражения (1.331) найдем:

а) вещественная частотная характеристика замкнутой системы

$$P(\omega) = \frac{Z^2(\omega) + Z(\omega) \cos \theta(\omega)}{Z^2(\omega) + 2Z(\omega) \cos \theta(\omega) + 1}; \quad (1.332)$$

б) мнимая частотная характеристика замкнутой системы

$$Q(\omega) = \frac{Z(\omega) \sin \theta(\omega)}{Z^2(\omega) + 2Z(\omega) \cos \theta(\omega) + 1}. \quad (1.333)$$

Геометрическое место точек $P(\omega) = \text{const} = P_c$, согласно (1.332), определяет уравнение

$$\frac{Z^2(\omega) + Z(\omega) \cos \theta(\omega)}{Z^2(\omega) + 2Z(\omega) \cos \theta(\omega) + 1} = P_c,$$

или

$$Z(\omega) \cos \theta(\omega) (1 - 2P_c) = Z^2(\omega) (P_c - 1) + P_c. \quad (1.334)$$

Аналогично для мнимой части

$$Z(\omega) \sin \theta(\omega) - 2Q_c Z(\omega) \cos \theta(\omega) = Q_c + Q_c Z^2(\omega). \quad (1.335)$$

В соответствии с выражениями (1.334), (1.335) можно построить номограммы: (1.334) — для определения $P(\omega)$, (1.335) — для определения $Q(\omega)$ по амплитудно-частотной $Z(\omega)$ и фазочастотной $\theta(\omega)$ характеристикам разомкнутой системы, причем по оси абсцисс — фаза $\theta(\omega)$ в градусах, по оси ординат — амплитуда $Z(\omega)$ в децибелах (номограмма приведена во многих учебниках и справочниках, в частности, см. [117, 124]).

На рис. 1.139 представлен фрагмент данной номограммы.

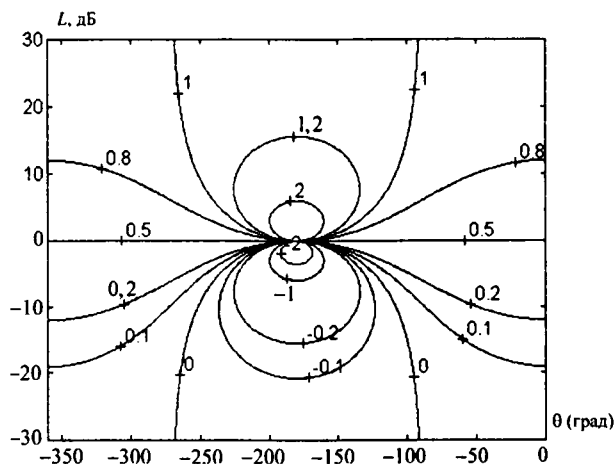


Рис. 1.139. Номограмма для определения $P(\omega)$ замкнутой системы по ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы. Цифры при кривых определяют P_c

В формуле (1.334) $Z(\omega) = 10^{0,05L(\omega)}$, $L(\omega) = 20 \lg Z(\omega)$. Ось абсцисс данной номограммы охватывает значения θ от 0 до -60° , ось ординат охватывает значения от -28 дБ до $+28$ дБ. При $L > 28$ дБ $P \approx 1$ и при $L < -28$ дБ $P \approx 0$; при $P_c = 0,5$ имеем $L(\omega) = 0$ для любых частот ω и любого угла $\theta(\omega)$.

Чтобы выяснить связь показателей качества замкнутой системы с частотными характеристиками разомкнутой, рассмотрим вещественную частотную характеристику, аппроксимируемую двумя трапециями. Для удобства представим ее в масштабированном виде (рис. 1.140), где индекс 1 определяет первый вариант трапеции. $\tilde{P}_1(\tilde{\omega})$ характеризуется тремя параметрами: основным коэффициентом наклона $\chi = \frac{\omega_d}{\omega_n}$, коэффициентом формы $\lambda = \frac{\omega_b}{\omega_n}$ и дополнительным коэффициентом наклона $\chi_a = \frac{\omega_a}{\omega_b}$. Из характера данной трапеции видно, что система с такой вещественной характеристикой имеет астатизм первого порядка $P_0 = 1$, кроме того, мы далее предполагаем (как было сказано выше), что она является еще минимально-фазовой.

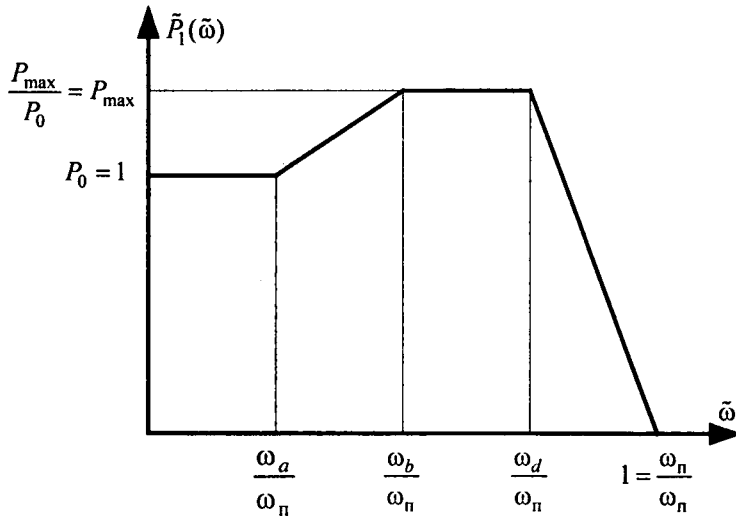


Рис. 1.140. Вещественная (нормированная) частотная характеристика, аппроксимируемая двумя трапециями

Рассмотрим второй вариант трапеции $\tilde{P}_2(\tilde{\omega})$, который отличается от $\tilde{P}_1(\tilde{\omega})$ тем, что интервал положительности $\tilde{P}(\tilde{\omega})$ определяется частотой среза ω_{cp} , причем, как было показано выше, $\tilde{P}(\omega_{cp}) = 1/2$. Для масштабированной трапеции $\tilde{P}_2(\tilde{\omega})$ введем еще один параметр (относительную частоту среза) χ_c :

$$\chi_c = \frac{\omega_{cp}}{\omega_n}, \quad (1.336)$$

где частота среза ω_{cp} определяется следующим выражением:

$$\omega_{cp} = \chi_c \omega_n, \quad \tilde{P}(\chi_c) = \frac{1}{2}.$$

Масштабированная трапеция $\tilde{P}_2(\tilde{\omega})$ имеет следующий вид (рис. 1.141). Из геометрических построений (рис. 1.141) получим

$$\chi_c = \chi + \frac{(P_{\max} - 0,5)(1 - \chi)}{P_{\max}}. \quad (1.337)$$

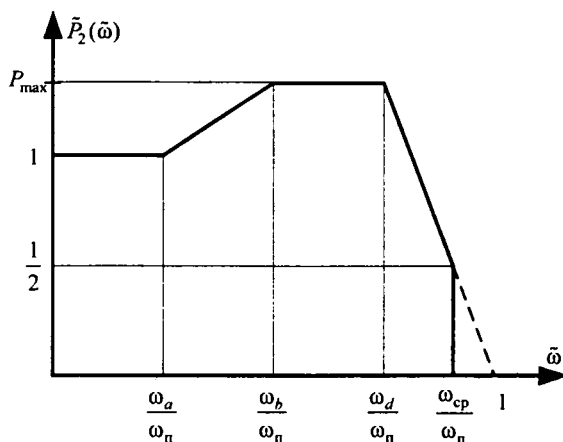


Рис. 1.141. Вещественная (нормированная) аппроксимированная частотная характеристика $\tilde{P}_2(\tilde{\omega})$

Данный вид трапеции позволяет определить погрешность, вносимую заменой $\omega_n \rightarrow \omega_{cp}$.

И, наконец, введем еще один вид трапеции $\tilde{P}_3(\tilde{\omega})$, который учитывает реальный вид вещественных частотных характеристик. Для большого количества минимально-фазовых объектов вещественная частотная характеристика имеет следующий вид (рис. 1.142), где ω_c — полоса существенных частот.

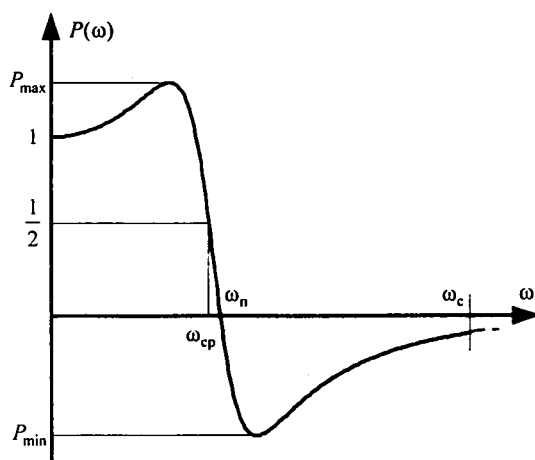


Рис. 1.142. Типовая вещественная частотная характеристика

Из данного графика следует, что в реальных условиях необходимо учитывать и отрицательную часть вещественной частотной характеристики. Мы рассмотрим следующую трапецию $\tilde{P}_3(\tilde{\omega})$ (рис. 1.143), где $\beta \geq 1$ — коэффициент, определяющий интервал существенных частот ω_c , $\omega_c = \beta \omega_{cp}$.

Проведем сравнение переходных характеристик для 3-х масштабированных вещественных аппроксимированных частотных характеристик: $\tilde{P}_1(\tilde{\omega})$, ..., $\tilde{P}_3(\tilde{\omega})$.

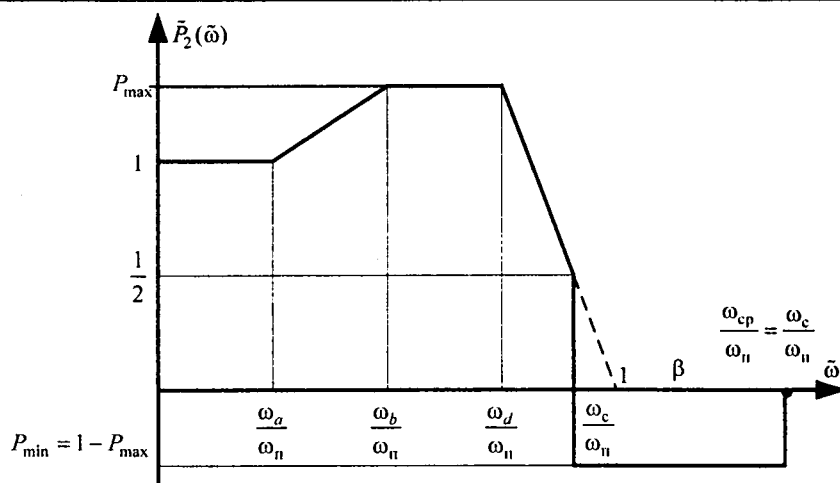


Рис. 1.143. Аппроксимация типовой вещественной характеристики

На рис. 1.144 представлены графики $\tilde{h}(\tau)$ для следующих параметров: $\lambda = \chi = 0,8$, $\chi_a = 1$, $\chi_c = 0,9091$, $\beta = 2$, $P_{\max} = 1,1$.

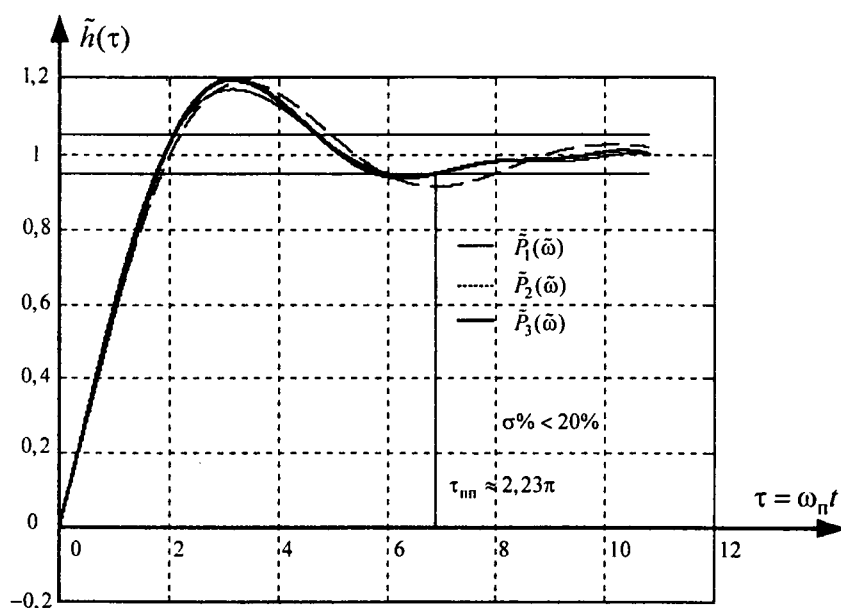


Рис. 1.144. Переходные характеристики для трех видов вещественных частотных характеристик

Расширим полосу существенных частот, сделав $\beta = 4$, при сохранении остальных параметров неизменными. Получим следующие переходные процессы (рис. 1.145).

Из сравнения этих графиков видно, что ошибка в переходных характеристиках, вызванная аппроксимацией трапеций $\tilde{P}_1(\tilde{\omega})$, $\tilde{P}_3(\tilde{\omega})$ трапецией $\tilde{P}_2(\tilde{\omega})$, как по перегулированию, так и по времени переходного процесса незначительна.

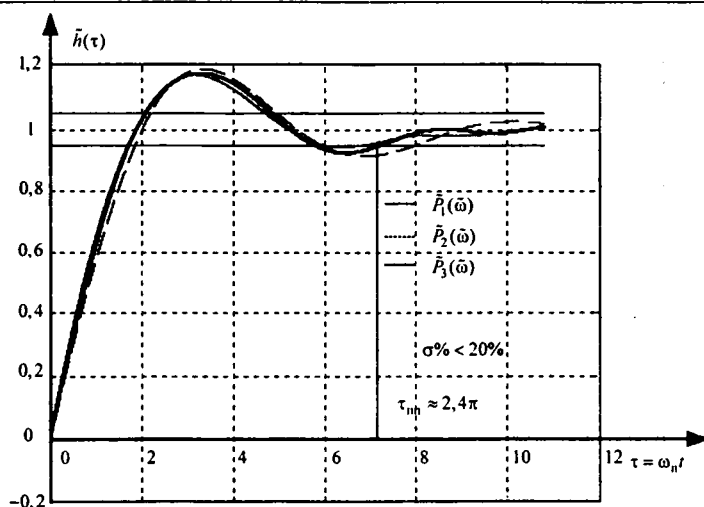


Рис. 1.145. Переходные характеристики с параметрами рис. 1.144, но с расширением полосы существенных частот ($\beta = 4$)

Оценим влияние других параметров. На рис. 1.146 представлены переходные процессы для $\lambda = 0,7$, $\chi = 0,7$, $\chi_a = 0,6$, $\chi_c = 0,8636$, $\beta = 2$, $P_{\max} = 1,1$.

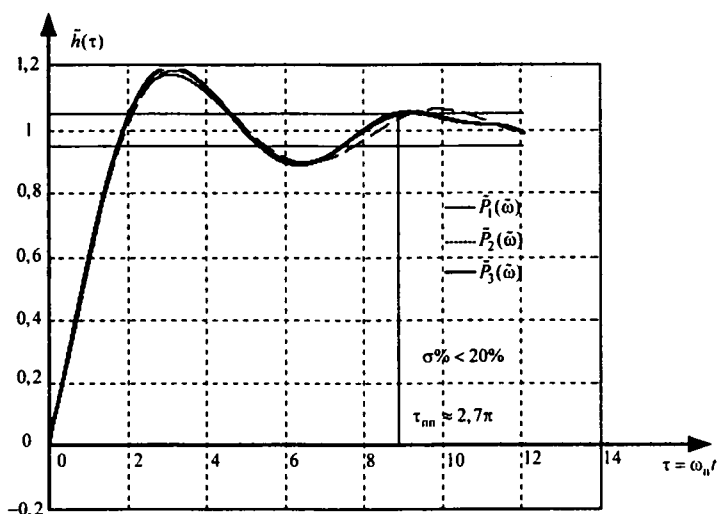


Рис. 1.146. Переходные характеристики вещественных частотных характеристик $\tilde{P}_1(\omega)$, ..., $\tilde{P}_3(\omega)$ для $\lambda = 0,7$, $\chi = 0,7$, $\chi_a = 0,6$, $\chi_c = 0,8636$, $\beta = 2$, $P_{\max} = 1,1$

Из сравнения графиков (рис. 1.144–1.146) видно, что при значительных изменениях отдельных параметров перерегулирования $\sigma\%$ остается практически неизменным, лишь незначительно изменяется время переходного процесса $\tau_{\text{пн}}$.

Оценим теперь влияние $P_{\max}$. Сохраним все параметры предыдущего примера неизменными, но $P_{\max}$ возьмем равным 1,2 (т.е. увеличим по сравнению с предыдущим вариантом). Получим следующие переходные процессы (рис. 1.147).

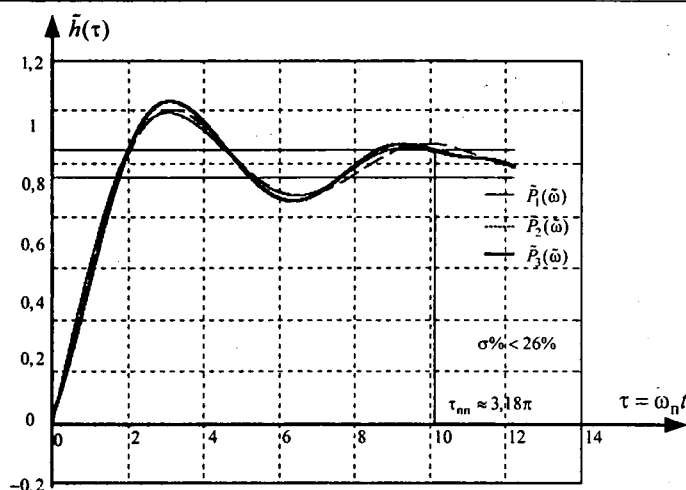


Рис. 1.147. Переходные характеристики вещественных частотных характеристик

$\tilde{P}_1(\tilde{\omega}), \dots, \tilde{P}_3(\tilde{\omega})$ для $\lambda = 0,7$, $\chi = 0,7$, $\chi_a = 0,6$, $\chi_c = 0,8636$, $\beta = 2$, $P_{\max} = 1,2$

Данные графики показывают, что изменение $P_{\max}$ существенно влияет как на перерегулирование, так и на время переходного процесса: при увеличении $P_{\max}$ растет $\sigma\%$ и $\tau_{пп}$. На основании многочисленных исследований были получены усредненные графики, характеризующие собой зависимость относительного времени переходного процесса $\tau_{пп}$ и перерегулирования $\sigma\%$ от максимального значения вещественной частотной характеристики $P_{\max}$, так как переходные процессы для $\tilde{P}_1(\tilde{\omega})$ и $\tilde{P}_2(\tilde{\omega})$ отличаются незначительно, то принято $\omega_{ср} = \omega_n$. Данные зависимости приведены на рис. 1.148 [117, 124].

Из рассмотренных выше графиков можно сделать следующий вывод: если реальная масштабированная вещественная частотная характеристика $\dot{P}(\tilde{\omega})$ не превышает по абсолютной величине графика $\tilde{P}_3(\tilde{\omega})$, то переходной процесс реальной системы будет удовлетворять следующим условиям:

$$t_{пп} \leq t_{пп}^*, \quad \sigma\% < \sigma^*\%,$$

где $(\cdot)^*$ — значения σ и $t_{пп}$, полученные из графиков (рис. 1.148).

Это приводит нас к следующему заключению: если характеристика $L(\theta(\omega))$ разомкнутой системы не заходит в прямоугольник, включающий линии уровня $P_{c1} = P_{\max}$ и $P_{c2} = 1 - P_{\max}$ на номограмме для определения $P(\omega)$ замкнутой системы по ЛАЧХ и ФЧХ разомкнутой системы (рис. 1.139), то замкнутая система будет иметь показатели качества не хуже $t_{пп}^*$, $\sigma^*\%$. На рис. 1.149 это показано для $P_{\max} = 1,2$, $P_{\min} = -0,2$.

Обозначим одну сторону прямоугольника через 2γ , а вторую — $2q$ и определим q как запас устойчивости по амплитуде (в дБ), а γ — запас устойчивости по фазе (в град).

Из графика (рис. 1.149) видно, что прямоугольник огибает так называемая среднечастотная, т.е. в окрестности частоты среза $\omega_{ср}$ часть кривой $L(\theta(\omega))$.

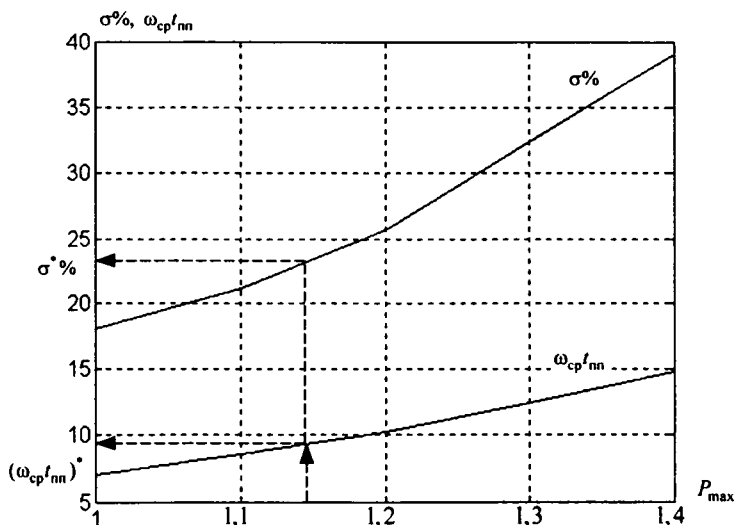


Рис. 1.148. Графики зависимости относительного времени переходного процесса $\tau_{\text{нп}} = \omega_{\text{ср}} t_{\text{нп}}$ и перерегулирования $\sigma\%$ от максимального значения $P_{\max}$ вещественной частотной характеристики при $\chi \leq 0,8$, $\lambda \geq 0,5$, $\chi_a \leq 0,4$

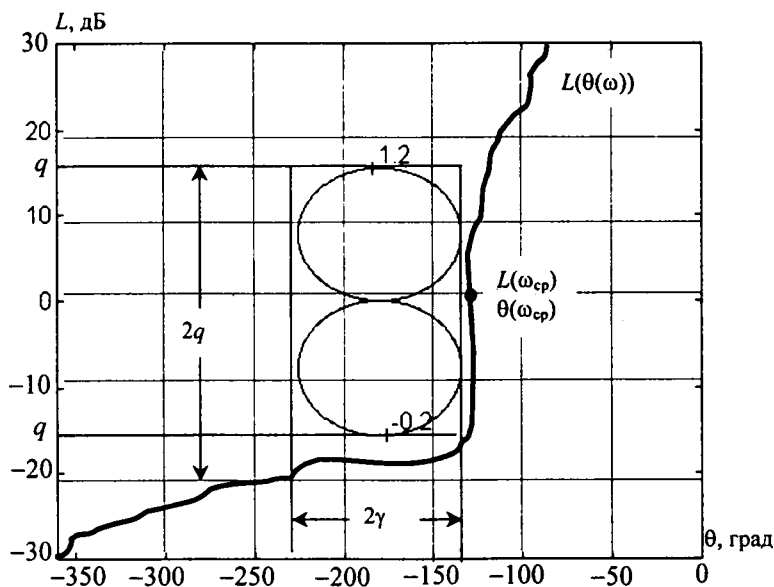


Рис. 1.149. График $L(\theta(\omega))$ разомкнутой системы, у которой переходной процесс удовлетворяет показателям качества ($t_{\text{нп}} \leq t_{\text{нп}}^*$, $\sigma\% < \sigma^*\%$)

Построением прямоугольников, включающих в себя различные линии уровня $P_{c1} = P_{\max}$, $P_{c2} = 1 - P_{\max}$, были получены следующие графики для определения необходимых запасов по амплитуде q (дБ) и фазе γ (град) (в зависимости от $P_{\max}$), которые обеспечивают требуемые показатели качества (рис. 1.150) [117, 124].

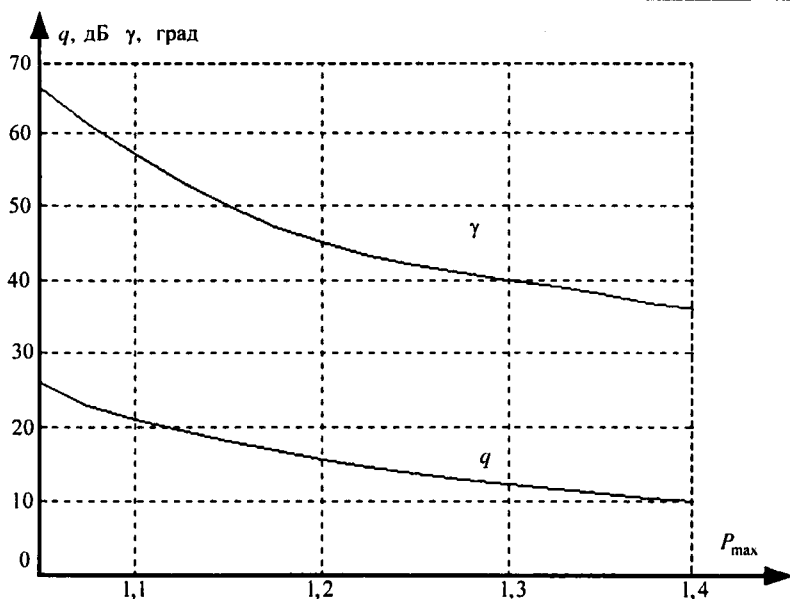


Рис. 1.150. Графики определения минимальных запасов устойчивости по амплитуде q (дБ) и фазе γ (град.)

Из графика (рис. 1.149) можно сделать следующий вывод: для того, чтобы кривая $L(\theta(\omega))$ не заходила в прямоугольник со сторонами $2q$ и 2γ , необходимо и достаточно, чтобы избыток фазы

$$\mu(\omega) = 180^\circ + \theta(\omega)$$

на интервале $q \geq L(\omega) \geq -q$ изменения ЛАЧХ разомкнутой системы был не менее γ , т.е.

$$\mu(\omega) \geq \gamma, \quad \forall \omega: q \geq L(\omega) \geq -q.$$

1.13.5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ СРЕЗА ЛАЧХ РАЗОМКНУТОЙ СИСТЕМЫ ПРИ НАЛИЧИИ ОГРАНИЧЕНИЙ НА МАКСИМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ В СИСТЕМЕ [117, 124]

Во многих практических задачах объект управления является инерционным механическим объектом и подчиняется второму закону Ньютона. Для такого класса объектов можно решать задачу оптимального по быстродействию перевода системы из одного состояния в другое при ограничении на максимальное ускорение (в терминах теории оптимального управления — при ограничении на управление). Пусть объект управления описывается системой второго порядка:

$$\ddot{x} = u, \quad |u| \leq w_{\max}, \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0, \quad x(t_1) = x_{11} > 0, \quad \dot{x}(t_1) = 0. \quad (1.338)$$

Необходимо определить структурную схему оптимальной по быстродействию системы управления данным объектом.

Решим первую часть задачи с использованием принципа максимума Понтрягина.

Для этого представим уравнение (1.338) в форме Коши:

$$\left. \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= u \end{aligned} \right\}, \quad |u| \leq w_{\max}, \quad (1.339)$$

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad (1.340)$$

$$x_1(t_1) = x_{11}, \quad x_2(t_1) = 0. \quad (1.341)$$

Требуется найти оптимальное ограниченное управление $u^0(t)$, переводящее систему из состояния (1.340) в (1.341) и минимизирующее функционал

$$I = \min_u t_1. \quad (1.342)$$

Данная задача имеет простое графическое решение и определяет следующее оптимальное управление:

$$u^0(t) = \begin{cases} w_{\max}, & 0 \leq t \leq \frac{T_{\min}}{2}, \\ -w_{\max}, & \frac{T_{\min}}{2} < t \leq T_{\min}, \\ 0, & t > T_{\min}, \end{cases} \quad (1.343)$$

где $T_{\min} = \min_u t_1$ — оптимальное по быстродействию время перехода. Переходной процесс имеет следующий вид (рис. 1.151).

Данный переходной процесс аналитически можно представить следующим образом:

$$x_0(t) = \frac{1}{2} w_{\max} t^2 1[t] - w_{\max} \left(t - \frac{T_{\min}}{2} \right)^2 1 \left[t - \frac{T_{\min}}{2} \right] + \frac{1}{2} w_{\max} (t - T_{\min})^2 1[t - T_{\min}], \quad (1.344)$$

где $1[t]$ — функция Хависайда.

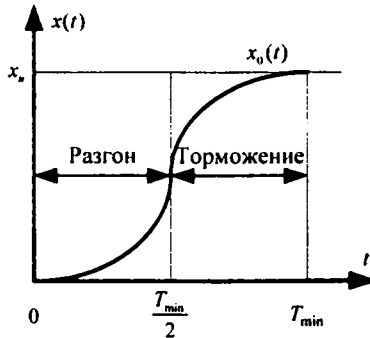


Рис. 1.151. Оптимальный по быстродействию переходной процесс при $w = w_{\max}$

Найдем преобразования Лапласа для (1.344). Имеем

$$\begin{aligned} X_0(s) &= \frac{w_{\max}}{s^3} - \frac{2w_{\max}e^{-\frac{T_{\min}}{2}s}}{s^3} + w_{\max} \frac{e^{-T_{\min}s}}{s^3} = \\ &= \frac{w_{\max}}{s^3} \left(1 - 2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + e^{-T_{\min}s} \right). \end{aligned} \quad (1.345)$$

По теории о предельном значении оригинала найдем x_u :

$$x_u = x_0(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} s X_0(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{w_{\max} T_{\min}^2}{4s} = \frac{w_{\max} T_{\min}^2}{4}. \quad (1.346)$$

Последнее выражение получено разложением $e^{-\frac{T_{\min}}{2}s}$ и $e^{-T_{\min}s}$ в ряд Тейлора до второго порядка включительно в окрестности $s = 0$. Итак, для того чтобы система обладала астатизмом первого порядка, при условии, что объект переводится из со-

стояния $x(0) = 0$ в состояние $x(T_{\min}) = x_{11}$ за минимальное время, необходимо, чтобы на ее вход подавалась ступенька с амплитудой $\frac{w_{\max} T_{\min}^2}{4}$:

$$g(t) = \frac{w_{\max} T_{\min}^2}{4} 1[t] = g_0 1[t]. \quad (1.347)$$

По определению

$$X_0(s) = W_0(s)G(s) = W_0(s) \frac{w_{\max} T_{\min}^2}{4}. \quad (1.348)$$

Сравнивая (1.348) и (1.345), получим оптимальную передаточную функцию (она является трансцендентной)

$$W_0(s) = \frac{4}{T_{\min}^2} \frac{1 - 2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + e^{-T_{\min}s}}{s^2}, \quad (1.349)$$

причем выполнено условие астатизма

$$\lim_{s \rightarrow 0} W_0(s) = 1.$$

Найдем частотные характеристики для $W_0(s)$: $W_0(j\omega) = P_0(\omega) + jQ_0(\omega)$. Имеем:

$$P_0(s) = \frac{4}{T_{\min}^2} \left(\frac{1 - 2\cos\left(\frac{T_{\min}}{2}\omega\right) + \cos(T_{\min}\omega)}{-\omega^2} \right), \quad (1.350)$$

$$Q_0(s) = \frac{4}{T_{\min}^2} \left(\frac{2\sin\left(\frac{T_{\min}}{2}\omega\right) - \sin(T_{\min}\omega)}{-\omega^2} \right). \quad (1.351)$$

Если передаточная функция $W_0(s)$ имеет единичную обратную отрицательную связь, то оптимальная передаточная функция разомкнутой системы определится как

$$W_{p_0}(s) = \frac{W_0(s)}{1 - W_0(s)} = \frac{\frac{4}{T_{\min}^2} \left(1 - 2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + e^{-T_{\min}s} \right)}{s^2 - \frac{4}{T_{\min}^2} \left(1 - 2e^{-\frac{T_{\min}}{2}s} + e^{-T_{\min}s} \right)}. \quad (1.352)$$

Выражение (1.352) позволяет построить ЛАЧХ и ЛФЧХ разомкнутой системы, но нашей задачей будет найти частоту среза $\omega_{\text{ср опт}}$ для данной ЛАЧХ. Легко находим, что для системы с единичной отрицательной обратной связью справедливы соотношения (об этом уже говорилось выше, см. п 1.12.4):

$$\left| W_{p_0}(j\omega_{\text{ср опт}}) \right| = 1, \quad L(\omega_{\text{ср опт}}) = 0, \quad (1.353)$$

$$P_0(\omega_{\text{ср опт}}) = 0,5. \quad (1.354)$$

Подставив (1.354) в (1.350), получим следующее трансцендентное уравнение:

$$\frac{1}{8} T_{\min}^2 \omega_{\text{ср опт}}^2 + \cos(T_{\min} \omega_{\text{ср опт}}) - 2 \cos\left(\frac{T_{\min}}{2} \omega_{\text{ср опт}}\right) + 1 = 0, \quad (1.355)$$

из которого находим

$$\omega_{\text{ср опт}} = \frac{2}{T_{\min}}. \quad (1.356)$$

Используя выражения (1.357) и (1.356), получим окончательную формулу, связывающую частоту среза $\omega_{\text{ср опт}}$, максимальное ускорение w_{max} и величину отрабатываемой ступеньки g_0 , при которых переходной процесс имеет максимальное быстроедействие и астатизм 1-го порядка:

$$\omega_{\text{ср опт}} = \sqrt{\frac{w_{\text{max}}}{g_0}}. \quad (1.357)$$

1.13.6. МЕТОД ЛОГАРИФИЧЕСКИХ АМПЛИТУДНО-ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК (ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ В.В. СОЛОДОВНИКОВА)

Как уже было показано выше, свойства систем автоматического регулирования (САР) полностью определяются частотными характеристиками ее разомкнутой цепи. Если все элементы системы минимально-фазовые, то достаточно рассмотреть только амплитудно-частотную характеристику (АЧХ) (см. п. 1.13.2) или ЛАЧХ. Построить ЛАЧХ несложно, поэтому метод синтеза САР, использующий ЛАЧХ, широко применяется в инженерной практике.

Рассмотрим один из подходов синтеза последовательных корректирующих устройств (ПКУ), использующий желаемые ЛАЧХ, разработанный В.В. Солодовниковым для следящих систем с астатизмом 1-го порядка [117, 124].

Содержание этого метода заключается в следующем. Сначала строят асимптотическую ЛАЧХ $L_n(\omega)$ неизменяемой (основной) части системы. Затем составляют желаемую ЛАЧХ $L_ж(\omega)$ разомкнутой системы. Разность

$$L_ж(\omega) - L_n(\omega) = L_{\text{кп}}(\omega)$$

определяет ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства (ПКУ).

Построение желаемой ЛАЧХ $L_ж(\omega)$ осуществляют, исходя из графиков и соотношений, полученных нами ранее (см. пп. 1.13.2–1.13.5), и требований, предъявляемых к синтезируемой системе.

Желаемую ЛАЧХ условно разделяют на три части: низкочастотную, среднечастотную и высокочастотную. Низкочастотная часть определяет статическую точность системы — точность в установившемся режиме. Среднечастотная часть является наиболее важной, так как определяет устойчивость, запас устойчивости по фазе и амплитуде и, следовательно, качество переходных процессов, о чем мы подробно говорили выше. Основные параметры среднечастотной асимптоты — это ее наклон и частота среза $\omega_{\text{ср}}$. Чем больше наклон среднечастотной асимптоты, тем труднее обеспечить хорошие динамические свойства системы. Поэтому наиболее целесообразен наклон -20 дБ/дек.

Частота среза $\omega_{\text{ср}}$ определяет быстроедействие системы. Чем больше $\omega_{\text{ср}}$, тем выше быстроедействие, тем меньше время переходного процесса $t_{\text{ин}}$.

Высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ незначительно влияет на динамические свойства системы (см. п. 1.13.5, варьирование частоты $\omega_c = \beta \omega_{\text{ср}}$). Вообще говоря, лучше иметь возможно больший наклон ее асимптот, что уменьшает требуемую мощность исполнительного органа и влияние высокочастотных помех. Иногда при расчете высокочастотную ЛАЧХ не принимают во внимание (что будет использовано в примере, см. ниже).

Построение желаемой асимптотической ЛАЧХ по В.В. Солодовникову (для следящих систем с астатизмом 1-го порядка) [117, 124].

Предположим, что низкочастотная асимптота желаемой ЛАЧХ $L_*(\omega)$ совпадает с ЛАЧХ $L_n(\omega)$ и имеет наклон -20 дБ/дек (т.е. неизменяемая часть имеет астатизм 1-го порядка) и необходимый статический коэффициент усиления K ; в этом случае может быть реализовано пассивное ПКУ с $K_{\text{кв}} \leq 1$; в противном случае ПКУ должно включать усилитель.

Исходными данными при синтезе ПКУ могут быть следующие требования. По заданной передаточной функции $W_n(s)$ неизменяемой части разомкнутой системы требуется выбрать ПКУ, обеспечивающее получение следующих характеристик качества замкнутой системы в переходном и установившемся режимах:

- 1) система должна обладать астатизмом 1-го порядка;
- 2) коэффициенты ошибок по скорости C_1 и ускорению C_2 не должны превышать C_1^*, C_2^* ;
- 3) длительность переходного процесса $t_{\text{пн}}$ не должна превышать заданного значения $t_{\text{пн}}^*$;
- 4) перерегулирование $\sigma\%$ в системе также должно быть ограничено некоторой величиной $\sigma^*\%$;
- 5) максимальное ускорение в системе (для инерционных механических объектов) не должно превышать w_{max} при начальном рассогласовании g_0 .

Построение желаемой ЛАЧХ $L_*(\omega)$, отвечающей 4-м из 5 вышеуказанных требований по правилам связи между ЛЧХ разомкнутой системы, вещественной частотной характеристикой замкнутой системы и показателями качества замкнутой, мы уже можем осуществить на основании проведенного выше анализа. Единственным не охваченным пунктом остается пункт 2, т.е. обеспечение заданной точности в установившемся режиме. Здесь необходимо найти частоту сопряжения ω_1 низкочастотной асимптоты. Рассмотрим один из вариантов решения этой задачи. Пусть для определенности низкочастотная и среднечастотные части желаемой ЛАЧХ разомкнутой астатической системы имеют вид (рис. 1.152).

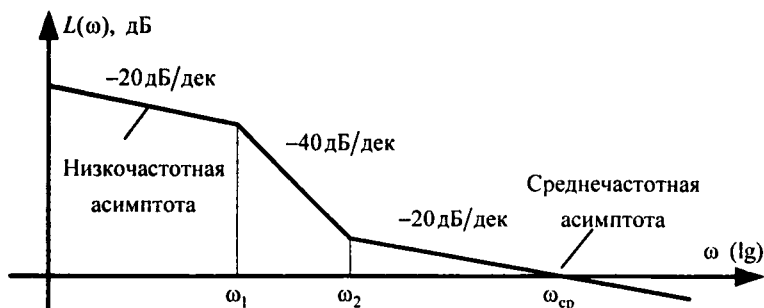


Рис. 1.152. ЛАЧХ разомкнутой системы

Если среднечастотная ЛАЧХ достаточно велика, тогда для низких частот можно записать следующую передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W_p(s) \approx \frac{K(\tau s + 1)}{s(Ts + 1)}, \quad (1.358)$$

причем $\omega_1 = \frac{1}{T}$, $\omega_2 = \frac{1}{\tau}$. Коэффициенты ошибок для замкнутой системы имеют вид:

$$C_0 = 0, C_1 = \frac{1}{K}, C_2 = \frac{T - \tau}{K} - \frac{1}{K^2}. \quad (1.359)$$

Если K достаточно велико, то членом $\frac{1}{K^2}$ можно пренебречь. Тогда из соотношения (1.359) получим:

$$K \geq \frac{1}{C_1^*}, \quad (C_1 \leq C_1^*), \quad (1.360)$$

$$C_2^* \leq (T - \tau)C_1^*, \quad (C_2 \leq C_2^*),$$

или

$$\frac{C_2^*}{C_1^*} \leq \frac{1}{\omega_1} - \frac{1}{\omega_2}. \quad (1.361)$$

При $\omega_1 \ll \omega_2$ частоту ω_1 можно найти по следующей приближенной формуле:

$$\omega_1 = C_1^* / C_2^*. \quad (1.362)$$

Теперь рассмотрим алгоритм построения желаемой ЛАЧХ $L_{\text{ж}}(\omega)$.

1. *Выбирают частоту среза $\omega_{\text{ср}}$, обеспечивающую получение требуемых динамических характеристик.* Она должна удовлетворять неравенству

$$\omega_{\text{ср}}(t_{\text{пп}}^*) \leq \omega_{\text{ср}} \leq \omega_{\text{ср опт}}(w_{\text{max}}). \quad (1.363)$$

Здесь $\omega_{\text{ср}}(t_{\text{пп}}^*)$ — значение частоты среза, при которой время переходного процесса не превышает заданного значения $t_{\text{пп}}^*$. Значение $\omega_{\text{ср}}(t_{\text{пп}}^*)$ определяют из графиков (рис. 1.148); по заданному значению $\sigma^{\%}$ определяют P_{max} , а затем по P_{max} находят $(\omega_{\text{ср}} t_{\text{пп}})^*$, после чего определяют $\omega_{\text{ср}}(t_{\text{пп}}^*)$:

$$\omega_{\text{ср}}(t_{\text{пп}}^*) = \frac{(\omega_{\text{ср}} t_{\text{пп}})^*}{t_{\text{пп}}^*}, \quad (1.364)$$

где $(\omega_{\text{ср}} t_{\text{пп}})^*$ — значение $\omega_{\text{ср}} t_{\text{пп}}$, полученное для найденного P_{max} .

Правая часть неравенства (1.363) — это максимально допустимое значение частоты среза при заданных значениях максимального ускорения w_{max} регулируемой координаты и начального рассогласования g_0 (напомним, что рассматриваются следящие системы). $\omega_{\text{ср опт}}(w_{\text{max}})$ находится из формулы (1.357).

Если окажется, что $\omega_{\text{ср опт}}(w_{\text{max}}) < \omega_{\text{ср}}(t_{\text{пп}}^*)$, то нужно выбирать

$$\omega_{\text{ср}} \leq \omega_{\text{ср опт}}(w_{\text{max}}),$$

конечно, заданное время переходного процесса в этом случае не будет получено, но максимальное ускорение w не превысит w_{max} .

Выбранное значение $\omega_{\text{ср}}$ наносят на график (рис. 1.153).

2. *Строят среднечастотную асимптоту.* Ее проводят через точку $\omega_{\text{ср}}$ с наклоном -20 дБ/дек. Меньший наклон трудно осуществить, а при большем наклоне трудно обеспечить требуемый запас устойчивости (рис. 1.153).

3. Среднечастотную асимптоту сопрягают с низкочастотной. По графикам (рис. 1.150), используя найденное значение $P_{\max}$, определяют необходимые запасы устойчивости по амплитуде q и фазе γ , чтобы обеспечить требуемые динамические характеристики. Определяют частоты $\omega_2: L_{\text{ж}}(\omega_2) = q$; $\omega_3: L_{\text{ж}}(\omega_3) = -q$. Через точку $(L_{\text{ж}}(\omega_2), \omega_2)$ проводят асимптоту с наклоном -40 дБ/дек или -60 дБ/дек до пересечения с низкочастотной асимптотой в точке $(L_{\text{ж}}(\omega_1), \omega_1)$. Если в точке $(L_{\text{ж}}(\omega_1), \omega_1)$ имеем $C_1^*/C_2^* < \omega_1$, то условия пункта 2 по точности в установившемся режиме будут выполнены.
4. Среднечастотную асимптоту сопрягают с высокочастотной частью ЛАЧХ $L_{\text{н}}(\omega)$ неизменяемой части системы. Сопряжение осуществляют через точку $(L_{\text{ж}}(\omega_3), \omega_3)$ прямыми с наклонами -40 дБ/дек, -60 дБ/дек, -80 дБ/дек так, чтобы высокочастотная часть желаемой ЛАЧХ мало отличалась от высокочастотной асимптоты $L_{\text{н}}(\omega)$.

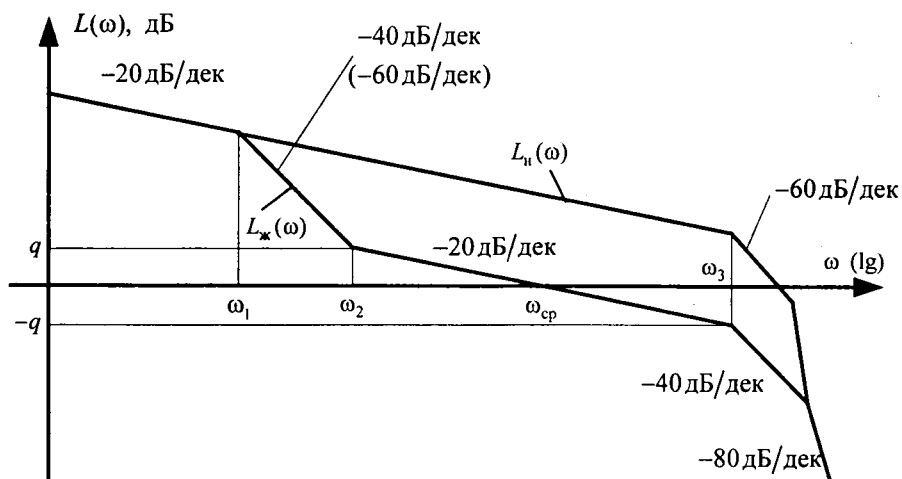


Рис. 1.153. Построение желаемой ЛАЧХ

5. Проводят проверку правильности выбора среднечастотной асимптоты, частот сопряжения и асимптот сопряжения $L_{\text{ж}}(\omega)$, что должно обеспечить выполнение требований по переходному процессу. Это условие определяется требованием, чтобы кривая $L_{\text{ж}}(\theta_{\text{ж}}(\omega))$ не заходила в прямоугольник со сторонами 2γ и $2q$ (см. рис. 1.149), что будет выполнено, если избыток фазы $\mu(\omega)$ будет больше γ в диапазоне $\forall \omega: L_{\text{ж}}(\omega_2) = q \geq L_{\text{ж}}(\omega) \geq -q = L_{\text{ж}}(\omega_3)$, $\mu(\omega) > \gamma$.

Если при выбранном сопряжении избыток фазы $\mu(\omega_2) < \gamma$, $\mu(\omega_3) < \gamma$, то сопряженную частоту ω_2 смещают влево, ω_3 вправо или уменьшают наклоны асимптот сопряжения. При больших запасах $\mu(\omega)$ изменения проводят в противоположном направлении.

Замечание. При сопряжении следует стремиться к тому, чтобы $L_{\text{ж}}(\omega)$ возможно меньше отличалась от $L_{\text{н}}(\omega)$. Чем меньше различие между формой этих ЛАЧХ, тем проще необходимое корректирующее устройство.

После построения $L_{\text{ж}}(\omega)$ находят ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства

$$L_{\text{кy}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{н}}(\omega).$$

Если ПКУ получилось пассивным, то для многих характеристик $L_{\text{кy}}(\omega)$ существуют готовые схемы (R -, C -четырёхполосники), которые можно использовать для практических реализаций синтезируемого ПКУ.

Рассмотрим пример.

Пример 1.27. Передаточная функция неизменяемой части позиционной системы автоматического регулирования с механическим инерционным объектом имеет вид

$$W_{\text{н}}(s) = \frac{300}{s(0,1s+1)(0,003s+1)}.$$

Требуется выбрать ПКУ, обеспечивающее получение следующих показателей качества замкнутой системы:

- 1) система должна обладать астатизмом 1-го порядка ($C_0 = 0$);
- 2) коэффициенты ошибок по скорости и ускорению не должны превышать: $C_1^* = 0,004$ с, $C_2^* = 0,02$ с²;
- 3) длительность переходного процесса $t_{\text{nn}} \leq t_{\text{nn}}^* = 0,4$ с;
- 4) перерегулирование $\sigma\% \leq \sigma^*\% = 25\%$;
- 5) максимальное ускорение регулируемой величины должно составлять 250 рад/с² при начальном рассогласовании $g_0 = 0,15$ рад.

Решение.

Рассмотрим исходную систему. Передаточная функция замкнутой системы при отсутствии ПКУ ($W_{\text{кy}}(s) = 1$) имеет вид

$$W(s) = \frac{W_{\text{н}}(s)}{1 + W_{\text{н}}(s)} = \frac{300}{0,0003s^3 + 0,103s^2 + s + 300}.$$

Полюса замкнутой системы: $s_1 = -342,13$; $s_{2,3} = -0,6 \pm j54,06$. Из чего можно заключить, что исходная система имеет высокую колебательность. На рис. 1.154–1.156 показаны ее временные и частотные характеристики. Заметим, что вещественная частотная характеристика $P_{\text{н}}(\omega)$ (рис. 1.155) имеет скачок на частоте $\omega_0 = 54,06$ с⁻¹. Перерегулирование составляет $\sigma\% = 95,2\%$, время переходного процесса $t_{\text{nn}} = 4,89$ с, что значительно превышает требуемые показатели. Поэтому требуется синтезировать ПКУ.

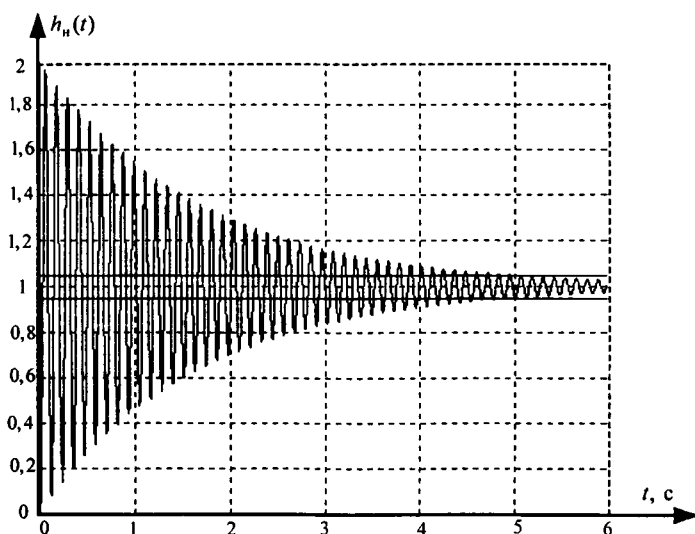


Рис. 1.154. Переходной процесс для некорректированной системы: $t_{\text{nn}} = 4,89$ с, $\sigma\% = 95,2\%$

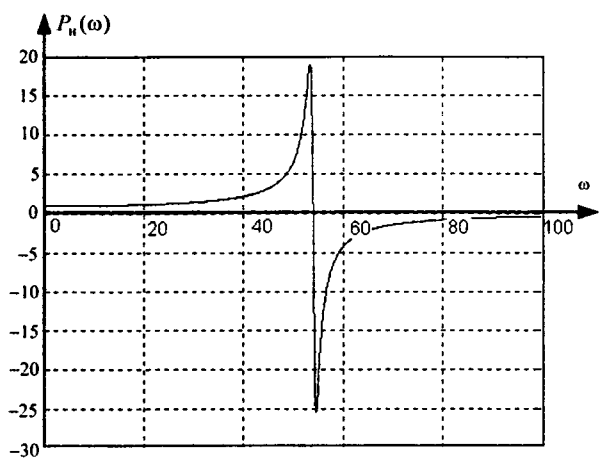


Рис. 1.155. Вещественная частотная характеристика $P_n(\omega)$ некорректированной системы

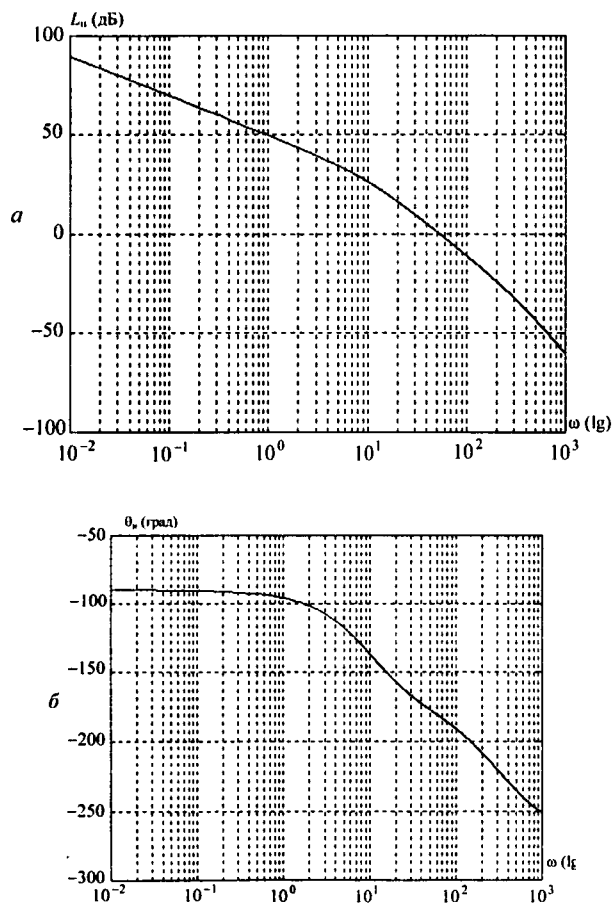


Рис. 1.156.

a — ЛАЧХ некорректированной системы; b — ЛФЧХ некорректированной системы

Строим асимптотическую ЛАЧХ неизменяемой части $L_n(\omega)$ (рис. 1.157).

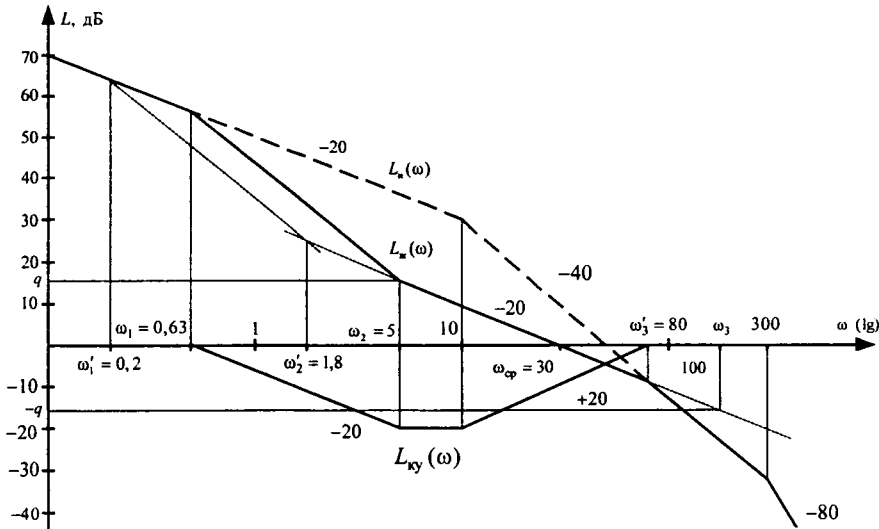


Рис. 1.157. Определение ЛАЧХ последовательного корректирующего устройства

Построим желаемую асимптотическую ЛАЧХ. Прежде всего найдем частоту среза ω_{cp} . Из графиков (рис. 1.148) имеем: для $\sigma^* \% = 25\%$ получим $P_{max} = 1,18$, что соответственно дает $(\omega_{cp} t_{nn})^* = 10$. Откуда для $t_{nn}^* = 0,4$ с находим

$$\omega_{cp}(t_{nn}^*) = \frac{(\omega_{cp} t_{nn})^*}{t_{nn}^*} = \frac{10}{0,4} = 25 \text{ с}^{-1}.$$

Получена левая граница возможных значений ω_{cp} . Правая граница определяется из выражения (1.356):

$$\omega_{cp \text{ опт}}(w_{max}) = \sqrt{\frac{w_{max}}{g_0}} = \sqrt{\frac{250}{0,15}} = 40,82 \text{ с}^{-1}.$$

Выбираем $\omega_{cp} = 30 \text{ с}^{-1}$ и наносим на график (рис. 1.157) среднечастотную асимптоту с наклоном -20 дБ/дек .

По графику (рис. 1.150) для $P_{max} = 1,18$ получаем необходимые запасы устойчивости: $q = 17 \text{ дБ}$, $\gamma = 46^\circ$. Определяем по q и $-q$ точки сопряжения $\omega_2 = 5 \text{ с}^{-1}$ и $\omega_3 \cong 200 \text{ с}^{-1}$. Асимптотой сопряжения с наклоном -40 дБ/дек сопрягаем среднечастотную асимптоту с низкочастотной. Получаем частоту сопряжения $\omega_1 = 0,625 \approx 0,63 \text{ с}^{-1}$. Заметим, что данная частота позволяет удовлетворить требованиям по коэффициентам ошибок C_1^* и C_2^* , так как минимальная требуемая частота в этом случае

$$\omega_1' = \frac{C_1^*}{C_2^*} = \frac{0,004}{0,02} = 0,2 \text{ с}^{-1},$$

а частота сопряжения $\omega_2' = 1,8 \text{ с}^{-1}$.

Для того чтобы упростить ПКУ, выбираем правую границу среднечастотной асимптоты $\omega_3' = 80 \text{ с}^{-1}$ (а не 200 с^{-1}), что, конечно, приводит к пересечению кривой $L_{ж}(\theta_{ж}(\omega))$ прямоугольника со сторонами 2γ и $2q$, но в силу малости коэффициентов передачи системы для $\omega \geq \omega_3' (-10 \text{ дБ и менее})$ это не окажет заметного влияния на переходной процесс. Итак, считаем, что $L_{ж}(\omega) = L_n(\omega)$ для $\omega \geq \omega_3' = 80 \text{ с}^{-1}$.

Разность

$$L_{ку}(\omega) = L_{ж}(\omega) - L_n(\omega)$$

дает следующую передаточную функцию ПКУ:

$$W_{\text{кп}}(s) = \frac{\left(\frac{1}{5}s + 1\right)\left(\frac{1}{10}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{0,63}s + 1\right)\left(\frac{1}{80}s + 1\right)}.$$

Передаточная функция разомкнутой системы с ПКУ имеет следующий вид:

$$W_{\text{рп}}(s) = \frac{300\left(\frac{1}{5}s + 1\right)}{s(0,003s + 1)\left(\frac{1}{0,63}s + 1\right)\left(\frac{1}{80}s + 1\right)}.$$

Соответственно замкнутой системы

$$W_{\text{зп}}(s) = \frac{60s + 300}{0,0001s^4 + 0,0246s^3 + 1,6028s^2 + 61s + 300},$$

полюса которой: $s_1 = -173,22$; $s_2 = -5,7$; $s_{3,4} = -33,54 \pm j43,75$.

Коэффициенты ошибок: $C_1 = 0,0033 < C_1^* = 0,004$, $C_2 = 0,0094 < C_2^* = 0,02$.

Временные и частотные характеристики замкнутой системы с ПКУ приведены на рис. 1.158–1.161.

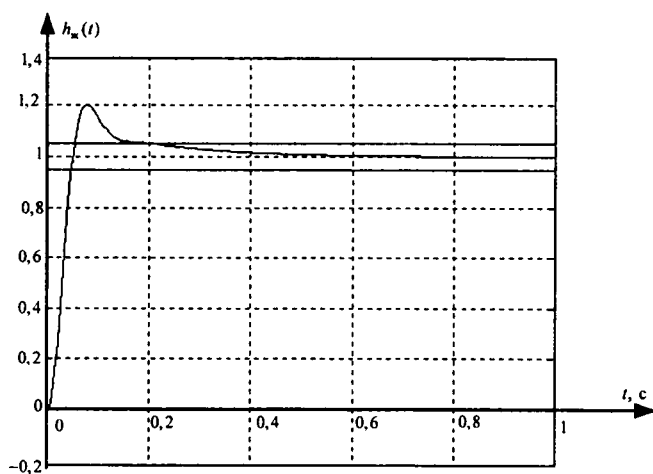


Рис. 1.158. Переходная характеристика скорректированной системы: $t_{\text{нн}} = 0,205$ с; $\sigma\% = 20,5\%$

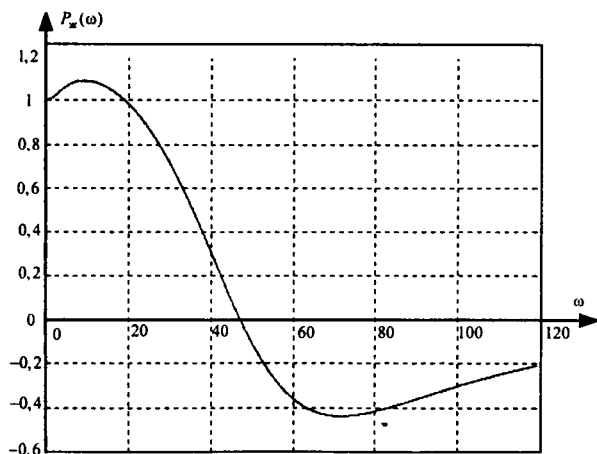


Рис. 1.159. Вещественная частотная характеристика $P_{\text{н}}(\omega)$ скорректированной системы

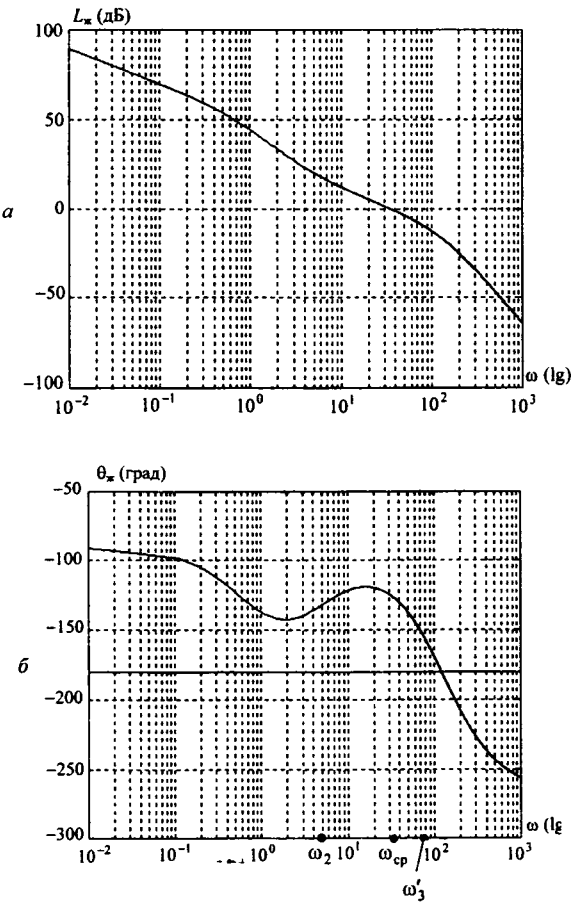


Рис. 1.160.
а — ЛАЧХ скорректированной системы; б — ЛФЧХ скорректированной системы

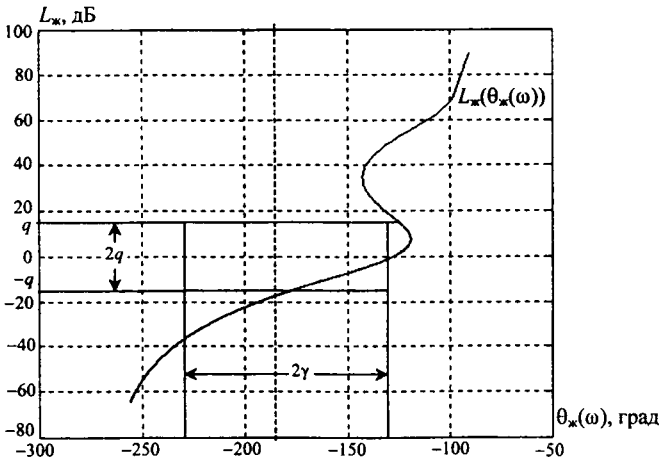


Рис. 1.161. График зависимости $L_{\text{ж}}(\theta_{\text{ж}}(\omega))$ для скорректированной системы. Прямоугольник отображает область, куда не должен входить данный график при идеальной коррекции

Из рис. 1.160, б имеем следующие избытки фаз: $\mu(\omega_2) \cong 50^\circ$, $\mu(\omega_{cp}) \cong 50^\circ$, $\mu(\omega'_3) = 15^\circ$. Недостаток избытка фазы для $\omega = \omega'_3$ приводит к пересечению кривой $L_{ж}(\theta_{ж}(\omega))$ прямоугольника (см. рис. 1.161). Однако при этом $t_{nn} = 0,205 \text{ с} < t_{nn}^* = 0,4 \text{ с}$, $\sigma\% = 20,5\% < \sigma^*\% = 25\%$, т.е. все требования к системе полностью выполнены.

Перейдем к практической реализации данного ПКУ. Из [117, 124] находим, что пассивное интегро-дифференцирующее звено вида (рис. 1.162) имеет следующую асимптотическую ЛАЧХ (рис. 1.163), что совпадает с видом $L_{кy}(\omega)$ и имеет передаточную функцию

$$W_{кy}(s) = \frac{(T'_1 s + 1)(T'_2 s + 1)}{T'_1 T'_2 s^2 + \left(T'_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + T'_2\right)s + 1},$$

где $T'_1 = R_1 C_1$, $T'_2 = R_2 C_2$.

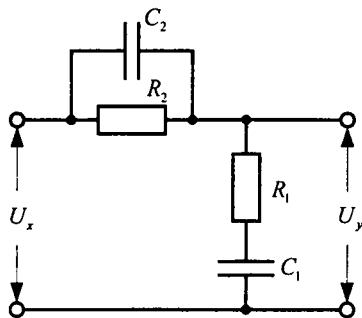


Рис. 1.162. Электрическая схема ПКУ

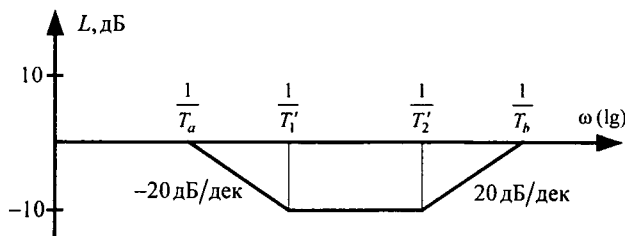


Рис. 1.163. Асимптотическая ЛАЧХ интегро-дифференцирующего звена

Для выбора параметров RC -цепочки ПКУ необходимо использовать следующее равенство:

$$\frac{(T'_1 s + 1)(T'_2 s + 1)}{T'_1 T'_2 s^2 + \left(T'_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + T'_2\right)s + 1} = \frac{\left(\frac{1}{5}s + 1\right)\left(\frac{1}{10}s + 1\right)}{\left(\frac{1}{0,63}s + 1\right)\left(\frac{1}{80}s + 1\right)} = W_{кy}(s).$$

Отсюда получаем следующие уравнения:

$$T'_1 = R_1 C_1 = \frac{1}{5} \text{ с}, \quad T'_2 = R_2 C_2 = \frac{1}{10} \text{ с}, \quad (1.365)$$

$$T'_1 T'_2 = R_1 C_1 R_2 C_2 = \frac{1}{0,625 \cdot 80} = \frac{1}{5 \cdot 10}, \quad (1.366)$$

$$T'_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + T'_2 = R_1 C_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + R_2 C_2 = \frac{1}{0,625} + \frac{1}{80}. \quad (1.367)$$

Уравнения (1.365)–(1.367) имеют 4 неизвестные, поэтому один параметр выбираем произвольно. Пусть емкость $C_1 = 10 \text{ мкФ}$, тогда сопротивление $R_1 = (1/5) / (10 \cdot 10^{-6}) = 20 \text{ кОм}$.

Из уравнений

$$R_2 C_2 = \frac{1}{10},$$
$$R_1 C_1 \left(1 + \frac{R_2}{R_1} \right) + R_2 C_2 = \frac{1}{0,625} + \frac{1}{80}$$

получаем $R_2 = 131,25 \text{ к}\Omega$, $C_2 = 0,7619 \text{ }\mu\text{F} \approx 0,76 \text{ }\mu\text{F}$.

1.14. СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Получившие в последние годы широкое распространение микропроцессоры в системах управления открывают практически неограниченные возможности для реализации сколь угодно сложных алгоритмов управления. Недорогие и компактные цифровые устройства стали неотъемлемой частью систем управления как в простейших бытовых приборах, так и в сложнейших технологических, энергетических и других комплексах.

Вместе с тем вычислительные устройства в контуре управления переводят исходный непрерывный объект в новый класс непрерывно-дискретных систем, обладающий по сравнению с непрерывными системами качественно новыми свойствами и особенностями, которые должны быть учтены при проектировании алгоритмов управления.

Далее приводятся методы проектирования алгоритмов управления детерминированными линейными стационарными объектами, реализуемых микропроцессорными устройствами. Приводятся расчетные схемы для синтеза цифровых регуляторов как в пространстве состояний, так и при описании в пространстве «вход–выход». При синтезе дискретных регуляторов используется опыт, накопленный при проектировании аналоговых регуляторов.

Обсуждаются вопросы реализации синтезированных регуляторов и выбора основных конструктивных параметров, таких как период квантования, разрядности преобразователей, необходимые разрядности арифметических устройств и памяти. Анализируются основные источники погрешностей реализации регуляторов и их влияние на характеристики замкнутых систем.

1.14.1. Модели управляемых объектов с ЭВМ

Системы управления динамическими объектами с цифровыми регуляторами представляют собой достаточно сложный для описания класс. Непрерывная часть системы (объект управления) задается дифференциальными уравнениями, тогда как микропроцессоры, реализующие алгоритмы управляющих устройств, представлены разностными уравнениями. Смешанное описание в виде дифференциальных и разностных уравнений, дополненных соотношениями для преобразователей аналог–код и код–аналог, создает значительные трудности как при решении типовых задач анализа и синтеза (см. том 1). Поэтому в практике управления получили распространение модели, которые описывают поведение систем лишь в дискретные (тактовые) моменты времени. При этом удастся ограничиться лишь разностными уравнениями, что радикально упрощает описание рассматриваемых систем и решение соответствующих задач синтеза регуляторов.

Альтернативный подход напротив предлагает ограничиться исходным описанием системы дифференциальными уравнениями и синтезировать непрерывные регуляторы, которые уже после синтеза реализуются на микропроцессорах. Оба этих подхода широко используются в практике управления, хотя каждый из них имеет свои методические погрешности. Поэтому проектировщик систем управления, руководствуясь личными предпочтениями и личным опытом, может выбирать тот инструментарий, который для него оказывается удобным.

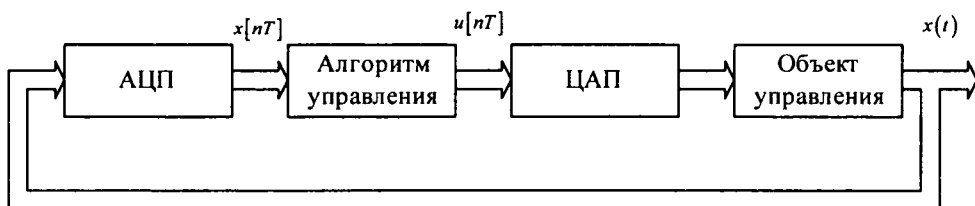


Рис. 1.164. Структурная схема САУ

На рис. 1.164 представлена схема процесса, управляемого с помощью цифровой машины, реализующей алгоритм управления. Преобразователь аналог–код (АЦП) осуществляет квантование непрерывного сигнала по времени и по уровню, формируя дискретный сигнал $x(kT)$, который обрабатывается микропроцессором с целью получения управляющего воздействия $u(kT)$. Преобразователь код–аналог (ЦАП), называемый также экстраполятором, формирует из дискретной управляющей последовательности непрерывный сигнал управления, *воздействующий* на управляемый объект. Динамические характеристики преобразователей приведены в томе 1.

В настоящем разделе не учитывается квантование по уровню, поскольку его учет предполагает нелинейное описание системы, существенно усложняющее решение задач управления. Заметим, что *в практике проектирования систем управления принято для определения алгоритмов управления использовать линейные модели, а влияние квантования по уровню, включая выбор уровня квантования, оценивать по результатам анализа замкнутых (скорректированных) систем.*

Напомним некоторые существенные для последующего изложения соотношения [38]. Квантование по времени с постоянным шагом T заменяет непрерывный сигнал $x(t)$ импульсной последовательностью

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT). \quad (1.368)$$

Применив к импульсному сигналу преобразование Лапласа, получим формулу прямого дискретного преобразования Лапласа

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT}. \quad (1.369)$$

Более удобную формулу для вычисления последнего можно записать, если (1.168) представить как произведение непрерывной функции $x(t)$ и последовательности дельта-функций, которому в области изображений отвечает интеграл свертки в области изображений:

$$X^*(s) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} \frac{X(p)}{1 - e^{-(s-p)T}} dp. \quad (1.370)$$

Ось интегрирования разделяет особенности изображений функций, участвующих в произведении. Интегрирование с помощью вычетов в полюсах $X(s)$ слева от оси интегрирования дает рабочую формулу для вычисления дискретного преобразования Лапласа

$$x^*(s) = \sum_i \operatorname{Res} \left\{ \frac{X(s)}{1 - e^{-(s-p)T}} \right\} \text{ в полюсах } X(p). \quad (1.371)$$

Справа от оси интегрирования счетное число простых полюсов $p = s + j \frac{2\pi}{T} n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ приводит к важному соотношению

$$X^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(s + j \frac{2\pi}{T} k\right), \quad (1.372)$$

из которого, в частности, следует, что изображение дискретного сигнала является периодической функцией с периодом $j2\pi/T$. Спектр непрерывного сигнала $X(j\omega)$ после квантования меняется кардинально:

$$X^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x\left(j\left(\omega + \frac{2\pi}{T} k\right)\right). \quad (1.373)$$

Заметим, что отсюда, в частности, следует теорема Котельникова, известная также как теорема отсчетов Шеннона. А именно, исходный непрерывный сигнал, ограниченный частотой ω_0 , можно выделить из квантованной последовательности, если выполняется соотношение

$$\omega_k = \frac{2\pi}{T} \geq 2\omega_0, \quad (1.374)$$

т.е. частота квантования $\omega_k = 2\pi/T$ должна быть по меньшей мере вдвое больше максимальной частоты непрерывного сигнала. *При этом частные спектры в соотношении (1.373) не пересекаются и исходный сигнал принципиально может быть отфильтрован из импульсной последовательности.*

Соотношение (1.373) характеризует эффект транспонирования или переноса частот. В частности, высокочастотная помеха, не проявляющая себя в непрерывных системах из-за фильтрующих свойств объекта управления, после квантования может проявиться в виде низкочастотной помехи в полосе пропускания системы. Это обстоятельство приходится учитывать при проектировании введением дополнительных фильтров.

Подстановка

$$z = e^{sT} \quad (1.375)$$

в соотношение (1.369) дает формулу прямого Z-преобразования

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}, \quad (1.376)$$

для вычисления которого удобнее пользоваться интегральным соотношением, которое получается из (1.371) подстановкой (1.375):

$$X(z) = \sum_i \operatorname{Res} \left\{ \frac{X(p)}{1 - z^{-1} e^{pT}} \right\} \text{ в полюсах } X(p). \quad (1.377)$$

Для вычисления временной последовательности $x(kT)$ пользуются формулой обратного Z-преобразования

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz. \quad (1.378)$$

Дискретные модели непрерывных объектов получают, рассматривая непрерывные реакции в тактовые моменты времени kT , $k = 0, 1, 2, \dots$

Ограничимся рассмотрением экстраполяторов нулевого порядка, запоминающих значение поступающего на вход сигнала в течение тактового периода. Такой преобразователь описывается передаточной функцией

$$W_{zo}(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}. \quad (1.379)$$

Для непрерывного объекта, описание которого в пространстве «вход–выход» задано передаточной функцией $W_o(s)$, расчетную дискретную модель найдем, вычисляя z -передаточную функцию соединения экстраполятора и объекта:

$$W_o(z) = Z\{W_{zo}(s)W_o(s)\}, \quad (1.380)$$

где через $Z\{\}$ обозначено Z -преобразование выражения в фигурных скобках.

Учитывая известное свойство Z -преобразования, последнюю формулу удобно переписать в виде

$$W_o(z) = (1 - z^{-1})Z\left\{\frac{W_o(s)}{s}\right\}. \quad (1.381)$$

Передаточная функция $W_o(z)$ описывает поведение непрерывного объекта в тактовые моменты времени. При необходимости из передаточной функции легко находится соответствующее разностное уравнение.

Если объект управления задан непрерывными уравнениями состояния с матрицами A_n , B_n и C , то разностные уравнения найдем с помощью матрицы перехода. Запишем уравнение связи «вход–выход» по вектору состояния для одного шага через матричную экспоненту

$$x((k+1)T) = e^{A_n((k+1)T - nT)}x(kT) + \int_{kT}^{(k+1)T} e^{A_n((k+1)T - \tau)}B_n u(\tau) d\tau.$$

Поскольку внутри интервала квантования значение управления с выхода экстраполятора нулевого порядка остается постоянным, уравнения состояния непрерывного объекта с дискретным временем можно сразу записать в привычном для дискретных систем виде:

$$\begin{aligned} x((k+1)T) &= Ax(kT) + Bu(kT), \\ y(kT) &= Cx(kT), \end{aligned} \quad (1.382)$$

где

$$A = e^{A_n T}, \quad (1.383)$$

$$B = \int_0^T e^{A_n \tau} B_n d\tau. \quad (1.384)$$

Если матрица состояния непрерывной системы имеет обратную, то для интеграла можно записать явное выражение

$$B = A_n^{-1} [e^{A_n T} - I]. \quad (1.385)$$

Заметим, что разностные модели (1.381) и (1.382)–(1.384) дают точные представления поведения непрерывных объектов в тактовые моменты. Вместе с тем они не содержат информации о движении системы между тактовыми точками, из-за чего в ряде случаев могут возникнуть нежелательные явления, известные, например, как скрытые раскачивания. Существует несколько путей [60], чтобы вскрыть и исключить такие проблемы (изменение шага квантования по времени, применение модифицированного Z -преобразования, использование бичастотных передаточных функций и др.). Поэтому упрощения, открываемые применением разностных моделей непрерывных объектов при решении задач синтеза, делают привлекательным их использование при проектировании цифровых систем управления.

Альтернативный подход к синтезу дискретных регуляторов предлагает решать задачи управления, оставаясь в рамках непрерывных систем. При этом синтезируется непрерывный регулятор, который затем реализуется цифровыми методами. Физически ясно, что поведение дискретной системы будет приближаться к поведению непрерывной с уменьшением периода квантования. Чтобы оценить изменения, вносимые в динамику непрерывных систем применением микропроцессоров, рассмотрим сначала частотные характеристики экстраполятора нулевого порядка

$$W_{\infty}(j\omega) = \frac{1 - e^{-j\omega T}}{j\omega}. \quad (1.386)$$

Заменяя экспоненту тригонометрическими функциями, после простых преобразований найдем

$$W_{\infty}(j\omega) = T \frac{\sin \frac{\omega T}{2}}{\frac{\omega T}{2}} e^{-j\omega \frac{T}{2}}. \quad (1.387)$$

Из последнего соотношения видно, что коэффициент передачи экстраполятора равен периоду квантования. Экстраполятор создает чистое запаздывание, величина которого равна половине периода квантования. При проектировании частота квантования выбирается существенно большей диапазона рабочих частот системы. Поэтому в этом диапазоне отношение $\sin \frac{\omega T}{2} / \left(\frac{\omega T}{2} \right)$ близко к единице, и характеристики экстраполятора хорошо аппроксимируются звеном чистого запаздывания с коэффициентом усиления T .

Сигнал с частотной характеристикой $U(j\omega)$ после квантования, согласно (1.373), будет иметь частотную характеристику

$$U^*(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} U\left(j\omega + j\frac{2\pi}{T}k\right).$$

Полоса пропускания объекта управления с передаточной функцией $W(s)$, как правило, существенно меньше частоты квантования. Поэтому все составляющие в последней сумме при $n \neq 0$ отфильтровываются, сигнал $U(j\omega)$ после прохождения через АЦП, экстраполятор и объект будет иметь следующую частотную характеристику:

$$X(j\omega) = W_0^1(j\omega) e^{-j\omega \frac{T}{2}} U(j\omega).$$

Другими словами, преобразователи вносят в систему дополнительное запаздывание, равное половине периода квантования. Поэтому синтез регуляторов при их последующей реализации на микропроцессоре следует выполнять для модифицированного объекта, отличающегося от исходного наличием звена чистого запаздывания

$$W_0(s) = W_0^1(s) e^{-s \frac{T}{2}}. \quad (1.388)$$

Трансцендентную функцию в этой формуле часто заменяют дробно-рациональными функциями с неминимально-фазовыми звеньями, что соответствует разложению передаточной функции звена чистого запаздывания в ряд Паде.

1.14.2. СВОЙСТВА МНОГОМЕРНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

При решении задач синтеза учитываются некоторые фундаментальные свойства динамических систем, которые не использовались в классической теории управле-

ния. Свойства управляемости, достижимости, стабилизируемости позволяют сформулировать условия, при которых задачи синтеза могут быть решены. Своим появлением эти свойства обязаны представлению систем в пространстве состояний, т.е. «внутреннему» описанию в отличие от внешнего — в пространстве «вход–выход». По сравнению с непрерывными системами проблема оценки управляемости и наблюдаемости имеет некоторые особенности, требующие уточнения.

Система называется управляемой, если существует управляющая последовательность, которая переводит систему из произвольного состояния в начало координат за конечное время.

Говорят, что система обладает свойством достижимости, если можно найти управляющую последовательность, которая переводит систему из любого начального состояния в желаемое состояние за конечное время.

В стационарных системах достижимость и управляемость не зависят от времени. Управляемые непрерывные системы всегда будут и достижимыми. Поэтому в непрерывных системах обычно говорят только об управляемости, поскольку соответствующим выбором управляющего сигнала начальное состояние управляемой непрерывной системы может быть переведено в любое другое состояние за конечное время. Для дискретной системы с уравнениями (1.382) различий между управляемостью и достижимостью не будет, если матрица состояния будет невырожденной, т.е.

$$\det[A] = |A| \neq 0. \quad (1.389)$$

У дискретной системы, описывающей непрерывную систему в тактовые моменты времени, как видно из соотношения (1.383), это условие всегда выполняется. Однако для произвольной дискретной системы, например некоторого цифрового фильтра, условие (1.389) выполняется не всегда.

Критерий достижимости найдем непосредственно из уравнений состояния. Рекуррентной процедурой (1.381) выразим состояние системы через управляющую последовательность (для простоты обозначений будем опускать параметр T)

$$X(n) = A^n X(0) + A^{n-1} B u(0) + \dots + B u(n-1) = A^n X(0) + Q_c U, \quad (1.390)$$

где

$$Q_c = [B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B], \quad (1.391)$$

$$U = [u(n-1) \quad u(n-2) \quad \dots \quad u(0)]^T. \quad (1.392)$$

Если ранг матрицы Q_c равен n , то можно найти n линейно независимых уравнений, чтобы найти управляющую последовательность управлений, которые переводят вектор состояния в желаемую точку. Следовательно, система будет достижимой, если матрица Q_c имеет ранг n , равный размерности вектора состояния.

По аналогии с непрерывными системами матрицу Q_c часто тоже называют матрицей управляемости. Заметим, однако, что управляемость не означает достижимости. Если

$$A^n X(0) = 0,$$

то система переводится в начало координат при нулевом воздействии, но она не обязана быть достижимой.

Пример 1.28. Пусть $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Тогда матрица $Q_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ имеет полный ранг и система достижима. Изменив матрицу B , например, $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, найдем $Q_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, и, следовательно, система

оказывается недостижимой. Система, однако, управляема, поскольку $A^2 = 0$ и в отсутствие управляющего воздействия система из любого начального состояния в два шага попадает в начало координат.

Заметим, что дискретная система, полученная в результате квантования непрерывной системы, на вход которой поступает ступенчатая функция с экстраполятора, может оказаться недостижимой, даже если непрерывная система управляема. Это, в частности, будет иметь место, если непрерывная система имеет пару комплексных корней $\alpha \pm j\omega$ и при дискретизации период квантования удовлетворяет условию $T\omega = k\pi$, $k = 1, 2, 3, \dots$

Система, которая не является достижимой, с помощью управляющего устройства, а именно обратной связи по вектору состояния вида $u = Kx$, может при некоторых условиях быть работоспособной и обеспечивать устойчивый процесс управления. В этом смысле говорят о стабилизируемой системе. Более точно система (A, B) является стабилизируемой, если существует такая действительная матрица K , что матрица $A - BK$ будет устойчивой, т.е. для всех собственных значений матрицы $A - BK$ имеет место выполнение условий $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

Свойство достижимости не зависит от выбранных координат и сохраняется, когда матрица преобразования является неособенной. Если переход к новым координатам $\bar{x}$ выполняется с помощью преобразования $\bar{x} = Px$, то в новых координатах для матрицы управляемости найдем

$$\bar{Q}_c = [\bar{B} \quad \bar{A}\bar{B} \quad \dots \quad \bar{A}^{n-1}\bar{B}] = [PB \quad PAP^{-1}PB \quad \dots \quad PA^{n-1}P^{-1}PB] = PQ_c. \quad (1.393)$$

Матрица P является неособенной, и ранги матрицы управляемости в старых и новых координатах совпадают. Естественно поэтому выбрать такое представление уравнений состояния, в котором матрица управляемости вычисляется проще. Такому представлению отвечает управляемая каноническая форма записи уравнений состояния

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} U(k); \quad (1.394)$$

$$X_b(k) = [b_1 \quad \dots \quad b_n] X(k).$$

Этой форме отвечает характеристическое уравнение

$$|\lambda I - A| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.395)$$

Непосредственно проверяется, что уравнения состояния (1.395) могут быть представлены в виде структурной схемы (рис. 1.165), которой соответствует передаточная функция вида

$$W(z) = C[zI - A]^{-1}B = \frac{b_1 z^{n-1} + \dots + b_n}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (1.396)$$

Как следует из (1.393), матрица преобразования P для получения канонической формы может быть выбрана в виде

$$P = \bar{Q}_c \bar{Q}_c^{-1}, \quad (1.397)$$

где $\bar{Q}_c$ — матрица управляемости для канонической формы (1.394).

Состояние системы непосредственно не измеряется, поэтому реализовать обратную связь по координатам вектора состояния непосредственно не удастся. В этой связи возникает вопрос, можно ли по измеряемым выходам объекта и по известным входным воздействиям определить вектор состояния? Говорят, что состоя-

ние системы $X(k_0)$ наблюдаемо, если оно может быть определено по будущим значениям $X_B(k)$, $k > k_0$ выходной переменной и если интервал $k - k_0$ конечен. Близкое к наблюдаемости понятие *восстанавливаемости* оперирует с прошлыми значениями. Состояние системы $X(k_0)$ восстанавливаемо, если оно может быть определено по прошлым значениям выходной переменной $X_B(k)$, $k < k_0$ и если интервал $k_0 - k$ конечен.

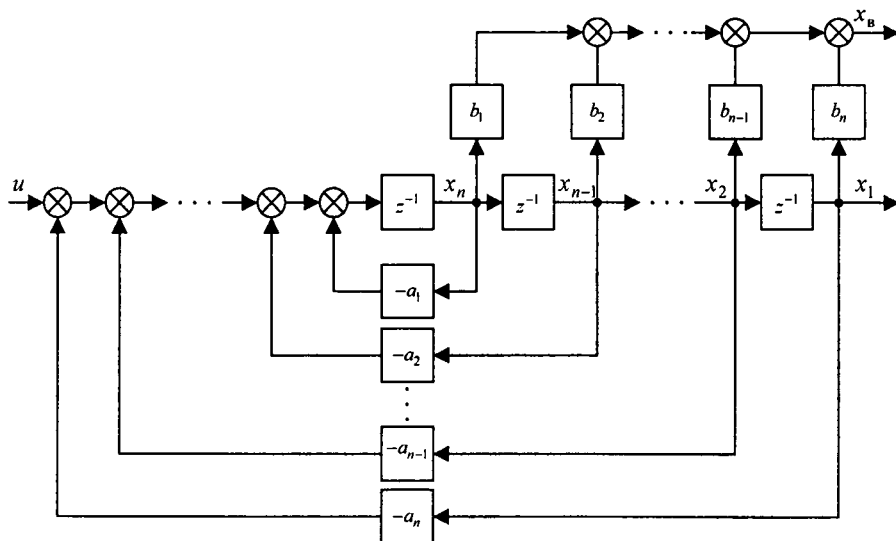


Рис. 1.165. Структурная схема системы

Поскольку входной сигнал считается известным, для оценки наблюдаемости можно управление считать равным нулю. Последовательно применяя уравнения (1.382), найдем:

$$\begin{aligned} X_B(0) &= CX(0), \\ X_B(1) &= CX(1) = CAX(0), \\ &\vdots \\ X_B(n-1) &= CA^{n-1}X(0). \end{aligned}$$

Начальное состояние из последней системы можно определить, если матрица этой системы имеет ранг n . Отсюда следует критерий наблюдаемости.

Система (1.382) наблюдаема тогда и только тогда, когда матрица наблюдаемости

$$Q_o = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad (1.398)$$

имеет ранг n , равный размерности вектора состояния.

Сходными рассуждениями устанавливаются правила проверки восстанавливаемости. Если матрица A имеет обратную, то можно построить матрицу восстанавливаемости

$$Q_r = \begin{bmatrix} CA^{-n} \\ CA^{-(n-1)} \\ \vdots \\ CA^{-1} \end{bmatrix}. \quad (1.399)$$

Система будет восстанавливаема, если матрица (1.399) имеет ранг, равный размерности вектора состояния n .

Если дискретная система получена квантованием по времени непрерывной, то в соответствии с выражением (1.383) матрица A всегда будет невырожденной. Умножая матрицу (1.399) справа на A^n , получим матрицу наблюдаемости. Для таких систем условия наблюдаемости и восстанавливаемости совпадают.

Если некоторые компоненты системы ненаблюдаемы, но устойчивы, то такую систему называют детектируемой. Иначе говоря, система детектируема, если состояния, связанные с неустойчивыми модами, наблюдаемы. Этому соответствует следующее определение. Пара (C, A) системы детектируема, если существует действительная матрица R такая, что матрица $A - RC$ устойчива, т.е. для всех собственных значений λ_i матрицы $A - RC$ справедливо условие $|\lambda_i| < 1$, $i = \overline{1, n}$.

Можно предложить формы представления системы в пространстве состояний, для которых матрица наблюдаемости вычисляется проще. Такую форму называют наблюдаемой канонической формой, а уравнения состояния при этом записываются в виде

$$X(k+1) = \begin{bmatrix} -a_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_2 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} X(k) + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_{n-1} \\ b_n \end{bmatrix} U(k), \quad (1.400)$$

$$X_b(k) = [1 \ 0 \ \cdots \ 0] X(k).$$

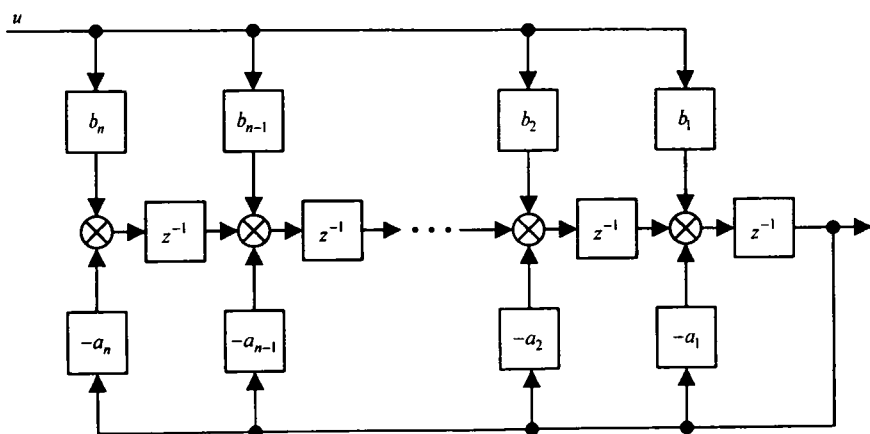


Рис. 1.166. Структурная схема системы

Если в системе с одним входом и одним выходом матрица наблюдаемости неособенная, то матрицу преобразования к каноническому виду можно представить в виде

$$P = \bar{Q}_0^{-1} Q_0, \quad (1.401)$$

где $\bar{Q}_0$ — матрица наблюдаемости для представления (1.400).

Преимущества этой канонической формы — в простоте записи передаточной функции моделей «вход–выход». Она же оказывается удобной при построении наблюдателей.

Схема на рис. 1.166 отвечает канонической форме (1.400) и передаточной функции (1.396).

В дискретной системе, полученной квантованием непрерывной системы, выход в тактовые моменты может быть равен нулю, тогда как непрерывная система находится в колебательном режиме. При этом дискретная система будет ненаблюдаемой, даже если соответствующая непрерывная система наблюдаема.

Пример 1.29. Непрерывное колебательное звено с нулевым демпфированием и передаточной функцией

$$W(s) = \frac{\omega^2}{s^2 + \omega^2}$$

в пространстве состояний задается уравнениями

$$\frac{dX}{dt} = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u, \\ X_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X.$$

Уравнения системы с дискретным временем по соотношениям (1.382)–(1.384) записываются в виде

$$X(kT + T) = \begin{bmatrix} \cos \omega T & \sin \omega T \\ -\sin \omega T & \cos \omega T \end{bmatrix} X(kT) + \begin{bmatrix} 1 - \cos \omega T \\ \sin \omega T \end{bmatrix} U(kT), \\ X_0(kT) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X(kT).$$

Вычисляя определители матриц управляемости и наблюдаемости, найдем

$$|Q_c| = -2 \sin \omega T (1 - \cos \omega T); \quad |Q_0| = \sin \omega T.$$

При $T = k\pi$ оба определителя равны нулю и, таким образом, система теряет и достижимость, и наблюдаемость, тогда как непрерывная система этими свойствами обладает.

1.14.3. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В задаче модального управления решается частная задача выбора регулятора, который обеспечивает желаемое расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы. Как и в непрерывных системах, модами называют компоненты движения λ_i^{kT} , определяемые корнями λ_i характеристического уравнения. Отсюда и возникло название метода. Очевидная связь собственных значений с характером движений в системе делает важной задачу перемещения корней в желаемые точки.

При относительной простоте постановки задачи в ней отражены все особенности, присущие решению задач синтеза в пространстве состояний, включая методы оптимального управления при детерминированных и случайных воздействиях. Структура и характеристики модального регулятора поэтому отражают структуру и особенности построения регуляторов при других, существенно более сложных постановках задачи.

Будем считать известными уравнения состояния (1.382), а систему — достижимой. Желаемое расположение корней отвечает желаемому характеристическому уравнению замкнутой системы

$$\lambda^n + p_1 \lambda^{n-1} + \dots + p_n = 0. \quad (1.402)$$

Управление сначала будем считать скалярной функцией, т.е. матрица управления является столбцом.

Регулятор замыкает объект управления по вектору состояния, или, что то же самое, управление ищется в виде линейной комбинации состояний

$$u = KX = \sum_{i=1}^n k_i x_i. \quad (1.403)$$

Коэффициенты искомого регулятора K можно отыскать непосредственным вычислением характеристического уравнения замкнутой системы и отождествлением его с желаемым. Для этого, размыкая систему на выходе регулятора, запишем передаточную функцию разомкнутой системы, считая входным воздействием управление, а выходным сигналом — реакцию регулятора:

$$W_p(z) = K[zI - A]^{-1}B. \quad (1.404)$$

Передаточная функция (1.404) является скалярной. Поэтому характеристическое уравнение $D(z)$ замкнутой системы найдем как сумму числителя и знаменателя передаточной функции (1.404):

$$D(z) = |zI - A| + K \text{Adi}[zI - A]B = z^n + p_1 z^{n-1} + \dots + p_n; \quad (1.405)$$

здесь через $\text{Adi}[zI - A]$ обозначена соответствующая присоединенная матрица, а $|zI - A|$ — определитель этой матрицы.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z , из (1.405) получим систему уравнений для определения неизвестных коэффициентов регулятора. Поскольку искомая матрица K в выражение (1.405) входит линейно, ее элементы определяются без труда.

Пример 1.30. Пусть объект управления описывается двойным интегрирующим звеном с уравнениями состояния

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= u. \end{aligned}$$

По соотношениям (1.383) и (1.384) найдем соответствующие матрицы для уравнений с дискретным временем

$$A = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0,5T^2 \\ T \end{bmatrix}.$$

Разомкнутая система описывается передаточной функцией (1.404)

$$W(z) = K[zI - A]^{-1}B = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \frac{\begin{bmatrix} z-1 & T \\ 0 & z-1 \end{bmatrix}}{(z-1)^2} \begin{bmatrix} 0,5T^2 \\ T \end{bmatrix}.$$

Приравнивая характеристическое уравнение замкнутой системы желаемому

$$(z-1)^2 + k_1 0,5T^2(z+1) + k_2(z-1) = z^2 + p_1 z + p_2$$

и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях, найдем искомые коэффициенты:

$$k_1 = \frac{p_1 + p_2 + 1}{T^2}, \quad k_2 = \frac{p_1 - p_2 + 3}{2T}. \quad (1.406)$$

Если система недостижима, то решить задачу не удастся.

Пример 1.31. Рассмотрим пример недостижимой системы с матрицами

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} T \\ T \end{bmatrix}.$$

Такой системе отвечают два параллельных интегрирующих звена, на вход которых поступает один и тот же управляющий сигнал. Вычислим характеристическое уравнение замкнутой системы при замыкании по состоянию $u = -k_1 x_1 - k_2 x_2$:

$$(z-1)(z-1+Tk_1+Tk_2) = 0.$$

Один из кратных корней может быть изменен, но другой остается равным единице при любых значениях коэффициентов регулятора.

Решение задачи может быть записано в явной форме. Причем наиболее просто его получить, если уравнения объекта записаны в канонической управляемой форме (1.394). Если $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $p_1, p_2, \dots, p_n$ — соответственно коэффициенты характеристических полиномов объекта и желаемой замкнутой системы, то легко показать, что матрица искомого регулятора должна быть следующего вида:

$$\bar{\mathbf{K}} = [p_1 - a_1, p_2 - a_2, \dots, p_n - a_n]. \quad (1.407)$$

Для доказательства достаточно заметить, что матрица состояния замкнутой системы представляется в виде $\mathbf{A} - \mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}$. Учитывая каноническую форму уравнений, в матрице $\mathbf{B}\bar{\mathbf{K}}$ отлична от нуля лишь первая строка, в точности повторяющая строку регулятора.

Если исходные уравнения состояния заданы в произвольной форме, то явное представление регулятора найдем с помощью матрицы преобразования уравнений к канонической форме (1.397):

$$u = -\bar{\mathbf{K}}\bar{\mathbf{X}} = -\bar{\mathbf{K}}\mathbf{P}\mathbf{X} = -\mathbf{K}\mathbf{X}, \quad (1.408)$$

откуда, учитывая соотношения для регулятора (1.407) и матрицы преобразования (1.397), получим искомую формулу для матрицы регулятора

$$\mathbf{K} = [p_1 - a_1, p_2 - a_2, \dots, p_n - a_n] \bar{\mathbf{Q}}_c \mathbf{Q}_c^{-1}. \quad (1.409)$$

При вычислениях по формуле (1.409) полезным оказывается представление матрицы, обратной к матрице управляемости канонической формы:

$$\bar{\mathbf{Q}}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ 0 & 1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}. \quad (1.410)$$

Регулятор (1.409) можно записать в другой форме, называемой формулой Аккермана:

$$\mathbf{K} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_c^{-1} D(\mathbf{A}). \quad (1.411)$$

Здесь через $D(\mathbf{A})$ обозначен матричный полином, полученный подстановкой в характеристическое уравнение желаемой системы матрицы состояния $\mathbf{A}$.

Пример 1.32. Решим задачу примера 1.30 для двойного интегратора, используя соотношения (1.409) и (1.411). Учитывая описание объекта, имеем

$$|z\mathbf{I} - \mathbf{A}| = z^2 - 2z + 1, \\ \bar{\mathbf{Q}}_c^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \bar{\mathbf{Q}}_c = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_c = \begin{bmatrix} \frac{T^2}{2} & \frac{3T^2}{2} \\ T & T \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_c^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T^2} & \frac{1,5}{T} \\ \frac{1}{T^2} & -\frac{0,5}{T} \end{bmatrix}.$$

Соотношение (1.409) приводит к решению

$$\mathbf{K} = [p_1 - a_1, p_2 - a_2, \dots, p_n - a_n] \bar{\mathbf{Q}}_c \mathbf{Q}_c^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{p_1 + p_2 + 1}{T^2} & \frac{p_1 - p_2 + 3}{2T} \end{bmatrix},$$

совпадающему с (1.406).

Используя соотношение (1.411), для матричного полинома $D(\mathbf{A})$ имеем

$$D(\mathbf{A}) = \mathbf{A}^2 + p_1 \mathbf{A} + p_2 \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 + p_1 + p_2 & 2T + p_1 T \\ 0 & 1 + p_1 + p_2 \end{bmatrix};$$

и для регулятора получим уже найденные значения (1.406)

$$\mathbf{K} = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] \mathbf{Q}_c^{-1} D(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{p_1 + p_2 + 1}{T^2} & \frac{p_1 - p_2 + 3}{2T} \end{bmatrix}.$$

Объем вычислений во всех случаях оказывается близким.

В модальном управлении задаются желаемыми корнями характеристического уравнения замкнутой системы, выбор которых диктуется целями управления и характеристиками объекта. Особый интерес представляют нулевые собственные значения. При этом характеристический полином замкнутой системы записывается в виде

$$D(z) = z^n, \quad (1.412)$$

и из теоремы Кэли–Гамильтона нетрудно заключить, что матрица состояния замкнутой системы удовлетворяет соотношению

$$[A - BK]^n = 0. \quad (1.413)$$

Такой выбор регулятора обеспечивает конечное время переходных процессов при обработке ненулевых начальных условий или импульсных возмущений. Единственным свободным параметром оказывается период квантования. Переходной процесс заканчивается за n шагов.

Из формулы Аккермана следует, что регулятор, обеспечивающий конечное время переходных процессов, может быть выбран таким:

$$K = [0 \ \dots \ 0 \ 1] Q_c^{-1} A^n. \quad (1.414)$$

Если матрица состояния объекта обратима, то это соотношение можно переписать в другом виде:

$$K = [0 \ \dots \ 0 \ 1] [A^{-n}B \ A^{-n+1}B \ \dots \ A^{-1}B]^{-1}. \quad (1.415)$$

В системе с таким регулятором время переходного процесса при обработке начальных условий пропорционально шагу квантования по времени nT . Однако *желание ускорить переходные процессы за счет уменьшения шага квантования приводит к увеличению коэффициентов регулятора (1.406) и, как следствие, к увеличению уровня управляющих воздействий*. Это обстоятельство не является неожиданным. Сходные свойства имеют и непрерывные системы с модальными регуляторами, хотя для непрерывных систем нельзя обеспечить конечное время переходных процессов.

Реализация законов управления вида (1.403) в приложениях практически невозможна, поскольку вектор состояния целиком никогда не измеряется и его приходится восстанавливать по измеренным выходным координатам. Ясно, что для этого система должна быть наблюдаемой.

Итак, для системы с уравнениями состояния (1.382) будем искать оценку вектора состояния по выходным координатам как реакцию динамической системы

$$\hat{X}(k+1) = F\hat{X}(k) + RX_v(k) + Bu(k),$$

или, что то же самое,

$$\hat{X}(k+1) = F\hat{X}(k) + RCX(k) + Bu(k). \quad (1.416)$$

Потребуем, чтобы выполнялось условие

$$F = A - RC, \quad (1.417)$$

и найдем ошибку оценки $X - \hat{X}$. Вычитая из (1.382) уравнение (1.416), с учетом (1.417) получим

$$X(k+1) - \hat{X}(k+1) = (A - RC)(X(k) - \hat{X}(k)). \quad (1.418)$$

Если матрица $A - RC$ отвечает устойчивой системе, то оценка сходится к искомому состоянию. Таким образом, *наблюдающее устройство, или оценщик, является динамической системой и описывается уравнениями состояния*

$$\hat{X}(k+1) = (A - RC)\hat{X}(k) + RX_v(k) + Bu(k). \quad (1.419)$$

Выбором матрицы R можно обеспечить желаемую скорость сходимости. Задаваясь корнями наблюдателя, нетрудно найти элементы матрицы R прямыми вычислениями.

Для определения матрицы R можно также воспользоваться результатами уже решенной задачи модального управления. Поскольку транспонированная матрица имеет те же собственные значения, как и исходная, то можно потребовать, чтобы матрица $A^T - C^T R^T$ имела заданные значения. Такая постановка в точности совпадает с задачей модального управления. При этом матрица наблюдаемости

$$\mathbf{Q}_0^T = \begin{bmatrix} \mathbf{C}^T & \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T & \dots & (\mathbf{A}^{n-1})^T \mathbf{C}^T \end{bmatrix}$$

должна иметь полный ранг.

Возвращаясь к решению задачи модального управления, из формулы Аккермана получим явное представление для матрицы наблюдателя. Для этого нужно произвести следующие замены:

$$\mathbf{K} \rightarrow \mathbf{R}^T, \quad \mathbf{Q}_c \rightarrow \mathbf{Q}_0^T, \quad \mathbf{A} \rightarrow \mathbf{A}^T,$$

и тогда из (1.411) найдем

$$\mathbf{R}^T = [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1] (\mathbf{Q}_0^T)^T D (\mathbf{A}^T).$$

Транспонируя последнее выражение, получим искомую зависимость

$$\mathbf{R}^T = D(\mathbf{A}) \mathbf{Q}_0^{-1} [0 \quad \dots \quad 0 \quad 1]^T. \quad (1.420)$$

Заметим, что задача выбора наблюдателя имеет наиболее простое решение для канонической наблюдаемой формы. Как и в модальном управлении, оценивание может быть завершено за конечное число шагов. Для этого собственные значения наблюдателя выбираются нулевыми.

Пример 1.33. Найдем наблюдающее устройство для объекта, заданного двойным интегратором. Учитывая значения матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ из примера 1.30 и $\mathbf{C} = [1 \quad 0]$, найдем матрицу наблюдателя

$$\mathbf{A} - \mathbf{RC} = \begin{bmatrix} 1 - r_1 & T \\ -r_2 & 1 \end{bmatrix}$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$z^2 - (2 - r_1)z + 1 - r_1 + r_2 T = 0.$$

Отождествляя коэффициенты этого уравнения с коэффициентами желаемого характеристического уравнения наблюдателя

$$z^2 + p_1 z + p_2 = 0,$$

найдем искомые коэффициенты

$$r_1 = 2 + p_1, \quad r_2 = \frac{1 + p_1 + p_2}{T}.$$

В частности, для наблюдателя с конечным временем переходного процесса эти коэффициенты имеют значения

$$r_1 = 2, \quad r_2 = \frac{1}{T}.$$

Устройство оценки состояния является динамической системой того же порядка, что и объект управления. Поскольку наблюдатель оказывается составной частью регулятора, желательно по возможности упростить его, не снижая точности оценок. Некоторые компоненты состояния могут быть получены непосредственно из выходных координат, поэтому нет необходимости использовать специальные средства для их измерения. Иначе говоря, порядок устройств оценивания состояния всегда может быть уменьшен на величину ранга матрицы $\mathbf{C}$.

Наблюдатель, как новое звено в контуре управления, меняет динамику системы. Поэтому на первый взгляд кажется, что характеристики системы с наблюдателем должны отличаться от характеристик системы, замкнутой непосредственно по вектору состояния. Рассмотрим этот вопрос более подробно. Уравнения состояния замкнутой системы с наблюдателем и регулятором таковы:

$$\text{объект: } \mathbf{X}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{X}(k) + \mathbf{B}u(k), \quad \mathbf{X}_s(k) = \mathbf{C}\mathbf{X}(k);$$

$$\text{наблюдатель: } \hat{\mathbf{X}}(k+1) = (\mathbf{A} - \mathbf{RC})\hat{\mathbf{X}}(k) + \mathbf{R}\mathbf{X}_s(k) + \mathbf{B}u(k);$$

$$\text{регулятор: } u(k) = -\mathbf{K}\hat{\mathbf{X}}(k).$$

Оценим собственные значения замкнутой системы. Для этого преобразуем последние уравнения, используя замену $\tilde{X} = X - \hat{X}$. В преобразованных уравнениях

$$\begin{aligned} X(k+1) &= (A - BK)X(k) + BK\tilde{X}(k), \\ \tilde{X}(k+1) &= (A - RC)\tilde{X}(k) \end{aligned} \quad (1.421)$$

матрица состояния имеет блочную треугольную структуру. При этом корни характеристического уравнения замкнутой системы разбиваются на две группы: корни наблюдателя и корни объекта, замкнутого регулятором непосредственно по вектору состояния. Отсюда следует важный для практического применения метода вывод, что проектирование регулятора и устройства оценки можно производить независимо. Другими словами, регулятор выбирается так, как если бы вектор состояния был известен, а синтез наблюдателя оказывается самостоятельной задачей. Отмеченное свойство часто называют теоремой разделения. Принцип разделения общей задачи синтеза регулятора на частные задачи выбора регулятора и оценки состояния оказывается справедливым и во многих других случаях, например в оптимальном управлении при детерминированных и случайных воздействиях.

До сих пор управление подразумевалось скалярным. Если объект управления оказывается управляемым и наблюдаемым, то можно обеспечить желаемое расположение характеристических значений замкнутой системы при минимальной размерности вектора управления.

При расширении числа компонент управления соответственно увеличивается число свободных параметров регулятора. Уравнений, определяющих собственные значения замкнутого регулятором объекта, оказывается недостаточно для однозначного выбора коэффициентов регулятора. Ясно, что возможности проектировщика при этом расширяются. Кроме исходной задачи выбора корней, можно потребовать выполнения дополнительных условий по подавлению нежелательных воздействий, по качеству процессов и т.п.

При векторном управлении удастся воспользоваться прежними результатами, представив регулятор как произведение матриц, у которых ранги равны единице:

$$K = K_1 K_2. \quad (1.422)$$

Здесь K_1 — столбец с размерностью вектора управления, а K_2 — строка «старого» регулятора. Число свободных параметров при этом существенно сокращается.

1.14.4. АЛГЕБРАИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ В ПРОСТРАНСТВЕ «ВХОД–ВЫХОД»

Исходное описание объекта управления обычно задано уравнениями, отличными от уравнений состояния, а сам объект характеризуется дробно-рациональной передаточной функцией. Цели синтеза регуляторов близки к рассмотренным выше. В частности, регулятор должен, например, обеспечить заданные значения характеристического полинома замкнутой системы. В более общей постановке требуется с помощью регулятора получить заданную передаточную функцию замкнутой системы.

Объект управления описывается передаточной функцией $W_o(z)$ и включает в себя экстраполятор, необходимые измерители, исполнительные элементы и дополнительные фильтры, призванные исключить влияние транспонированных возмущений.

Традиционный подход предполагает выбор регулятора $W_{\text{к}}(z)$ в прямой цепи (рис. 1.167) так, чтобы замкнутая система отвечала эталонной передаточной функции $W^3(z)$

$$W^3(z) = \frac{W_{\text{к}}(z)W_o(z)}{1 + W_{\text{к}}(z)W_o(z)}. \quad (1.423)$$

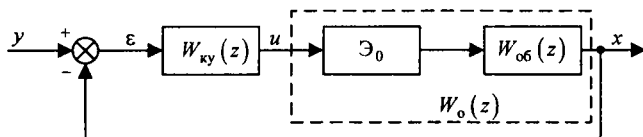


Рис. 1.167. Структурная схема системы

Разрешая последнее выражение относительно передаточной функции регулятора $W_{\text{кy}}(z)$, получим

$$W_{\text{кy}}(z) = \frac{1}{W(z)} \frac{W^3(z)}{1 - W^3(z)}. \quad (1.424)$$

Синтез регулятора выполняется на первый взгляд тривиально. Однако следует соблюдать осторожность при выборе эталонной системы. Проблемы, возникающие при назначении обладающей желаемыми свойствами передаточной функции, связаны, с одной стороны, с известными трудностями при попытках связать прямые показатели качества систем с видом передаточных функций. С другой стороны, нельзя просто компенсировать нули и полюсы объекта управления вне круга единичного радиуса. Иначе говоря, при выборе $W^3(z)$ приходится учитывать ряд ограничений.

Регулятор должен быть физически реализуемым, порядок числителя его передаточной функции не может быть больше порядка знаменателя. Поэтому у эталонной передаточной функции разность порядков знаменателя и числителя не должна быть меньше соответствующей разности тех же порядков объекта.

Если объект содержит нули или полюсы вне единичного круга, то простое сокращение их с помощью регулятора недопустимо, поскольку гарантированно приводит к появлению таких корней в характеристическом уравнении замкнутой системы, а следовательно, к неустойчивости системы. Поэтому при синтезе приходится принимать меры к исключению такого сокращения.

В частности, как видно из (1.423), эталонная система $W^3(z)$ должна содержать в качестве своих нулей все нули объекта $W_o(z)$ вне единичного круга. Сходным образом из (1.424) следует, что неустойчивые полюсы объекта управления должны быть нулями функции $1 - W^3(z)$.

Пример 1.34. Пусть объект управления задан передаточной функцией вида

$$W(z) = \frac{(z-2)(z-0,5)}{(z-1,5)(z-0,6)} = \frac{(z-2)}{(z-1,5)} W_1(z).$$

Тогда при выборе желаемой системы должны быть выполнены условия

$$W^3(z) = (1 - 2z^{-1})Q(z),$$

$$1 - W^3(z) = (1 - 1,5z^{-1})R(z),$$

так что регулятор

$$W_{\text{кy}}(z) = \frac{Q(z)}{W_1(z)R(z)}$$

не будет содержать нежелательных нулей и полюсов объекта.

К эталонной системе могут предъявляться требования по статической точности. Установившуюся ошибку при ступенчатом воздействии легко оценить по теореме о конечном значении:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(kT) = \lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1}) (1 - W^3(z)) \frac{1}{1 - z^{-1}}.$$

Чтобы установившаяся ошибка при ступенчатом воздействии была нулевой, желаемую систему выбирают так, чтобы выполнялось условие

$$1 - W^3(z) = (1 - z^{-1}) W_1^3(z), \quad (1.425)$$

где $W_1^3(z)$ не содержит полюсов при $z = 1$. Обобщая этот результат, найдем, что нулевая установившаяся ошибка при полиномиальном воздействии y степени k

$$Y(z) = \frac{F(z)}{(1 - z^{-1})^{k+1}}$$

достигается, если

$$1 - W^3(z) = (1 - z^{-1})^{k+1} W_1^3(z) \quad (1.426)$$

и $W_1^3(z)$ не содержит полюсов при $z = 1$.

Переходные процессы в системе завершаются за конечное время, если передаточная функция системы описывается полиномом аргумента z^{-1}

$$W^3(z) = \sum_{k=0}^N K^3(kT) z^{-k}. \quad (1.427)$$

Перечень формализованных требований к желаемой системе может быть продолжен. При этом всегда выбирают минимальную реализацию системы, удовлетворяющую исходным условиям.

Пример 1.35. Для рассмотренного выше двойного интегрирующего звена (объекта) выберем регулятор, обеспечивающий конечное время переходных процессов и нулевую установившуюся ошибку на линейное воздействие.

Объект с экстраполятором нулевого порядка описывается передаточной функцией

$$W_0(z) = \frac{T^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}$$

с разностью порядков знаменателя и числителя, равной единице.

Чтобы установившаяся ошибка на линейное воздействие была нулевой, потребуем выполнения условия

$$1 - W^3(z) = (1 - z^{-1})^2 W_1^3(z).$$

Точно такое же равенство придется записать, чтобы избежать сокращения кратного полюса $z = 1$. Нуль объекта $z = -1$ добавляет еще одно условие:

$$W^3(z) = (1 + z^{-1}) W_2^3(z).$$

Выберем неизвестные функции так, чтобы порядок полинома передаточной функции желаемой системы был минимальный:

$$W^3(z) = (a_0 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}) z^{-1},$$

$$W_1^3(z) = (b_0 z^{-1} + 1),$$

$$W_2^3(z) = (c_0 + c_1 z^{-1}) z^{-1}.$$

Подставляя последние равенства в ограничивающие условия для желаемой системы и отождествляя коэффициенты при одинаковых степенях z , получим систему уравнений для вычисления неизвестных коэффициентов:

$$-a_0 = b_0 - 2, \quad -a_1 = 1 - 2b_0, \quad a_2 = -b_0, \quad a_1 = c_1 + c_0, \quad a_2 = c_1.$$

Решив эти уравнения, находим искомые коэффициенты:

$$a_0 = 1,25, \quad a_1 = 0,5, \quad a_2 = -0,75, \quad b_0 = 0,75, \quad c_0 = 1,25, \quad c_1 = -0,75.$$

Итак, желаемая передаточная функция будет равной

$$W^3(z) = (1,25 + 0,5z^{-1} - 0,75z^{-2}) z^{-1},$$

а для регулятора, согласно (1.424), получим передаточную функцию

$$W_{\text{кв}}(z) = \frac{2}{T^2} \frac{1,25 - 0,75z^{-1}}{1 + 0,75z^{-1}}.$$

Можно убедиться, что, как и следовало ожидать, найденный регулятор обладает форсирующими свойствами.

Алгебраические методы синтеза в пространстве «вход–выход», появившись заметно раньше тех же методов в пространстве состояний, интенсивно развивались в последние десятилетия параллельно с методами пространства состояний. Они эффективно дополняют друг друга при решении сколь угодно сложных задач управления. Показательным примером служат, например, получившие распространение в последние десятилетия методы, описанные в главе 5 данного тома.

Приведем поэтому некоторые отличные от рассмотренных выше подходы к синтезу регуляторов в более общей постановке.

Объект управления описывается моделью в пространстве «вход–выход»

$$A(z)x_{\text{в}}(z) = B(z)u(z), \quad (1.428)$$

где $A(z)$ и $B(z)$ — полиномы от z , обозначающего оператор сдвига на один шаг.

Полиномы не имеют общих множителей, степень числителя соответствующей передаточной функции (полинома $B(z)$) меньше степени полинома $A(z)$ (знаменателя).

Регулятор воспринимает задающий сигнал y и измеряемый выход объекта $x_{\text{в}}$ в соответствии с уравнением

$$R(z)u(z) = T(z)y(z) - S(z)x_{\text{в}}(z). \quad (1.429)$$

Здесь $R(z)$, $T(z)$, $S(z)$ — полиномиальные операторы. Исключая из последних двух уравнений сигнал управления, операторное уравнение замкнутой системы запишем в виде

$$(A(z)R(z) + B(z)S(z))x_{\text{в}}(z) = B(z)T(z)g(z), \quad (1.430)$$

откуда видно, что характеристическое уравнение замкнутой системы

$$A_{\text{кл}}(z) = A(z)R(z) + B(z)S(z) \quad (1.431)$$

может иметь желаемые свойства соответствующим выбором полиномов $R(z)$ и $S(z)$.

Полином $T(z)$ связан с прохождением задающего воздействия и при его выборе проектировщик имеет практически неограниченную свободу. Регулятор, а с ним и замкнутая система могут иметь высокий порядок, который увеличивается с ростом числа дополнительных требований к замкнутой системе, например типа условий (1.426).

Соотношение (1.431), известное как диофантово уравнение, восходит к решению древней алгебраической задачи нахождения решений в целых числах уравнения

$$AX + BY = C, \quad (1.432)$$

а применительно к задачам синтеза требуется для известных полиномов A , B и C определить неизвестные полиномы X и Y , удовлетворяющие уравнению (1.432). Для решения уравнения (1.432) часто используют алгоритм Евклида (см. том 1).

Для исходного объекта с передаточной функцией $B(z)/A(z)$ можно указать целый класс стабилизирующих регуляторов. А именно, если $S^0(z)/R^0(z)$ — один из таких регуляторов, то непосредственно проверяется, что и все другие стабилизирующие регуляторы описываются соотношением

$$\frac{S(z)}{R(z)} = \frac{S^0(z) + Q(z)A(z)}{R^0(z) - Q(z)B(z)}, \quad (1.433)$$

где $Q(z)$ — произвольная устойчивая передаточная функция.

Соотношение (1.433) носит название параметризации Юлы–Кучеры и является дискретным аналогом соответствующего результата Д. Юлы и Д. Бонжиорно.

Указанное соотношение играет важную роль в синтезе систем управления, поскольку дает возможность представления всех стабилизирующих регуляторов.

Не останавливаясь подробно на решении задачи синтеза регулятора (1.429), отметим, что это решение в значительной степени воспроизводит рассмотренные выше особенности учета свойств объекта и требований к качеству замкнутой системы. Для упрощения решений диофантовых уравнений передаточная функция объекта факторизуется с выделением множителей, которые могут компенсироваться регулятором (нули и полюсы внутри единичного круга).

1.14.5. ДИСКРЕТНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

Необходимость реализации аналоговых регуляторов на микропроцессорах возникает, например, при модернизации эксплуатируемых технических средств. Расширение или изменение области и условий применения оборудования заставляет менять непрерывные управляющие устройства на компьютерные системы. С другой стороны, проектирование непрерывных регуляторов десятки лет производилось классическими методами с использованием частотных характеристик и прозрачной физической интерпретацией результатов. Представляется естественным использование накопленного опыта проектирования аналоговых регуляторов при синтезе цифровых управляющих устройств.

Напомним, что регулятор выбирается для модифицированного объекта (1.388), где учитывается влияние запаздывания в цепях преобразователей и счетно-решающих устройств. Поэтому выбор периода квантования предшествует синтезу управляющего устройства. При выборе частоты квантования ориентируются на теорему Котельникова. Известно [38] достаточно большое число рекомендаций по назначению периода квантования, зависящее от физического характера управляемых процессов и особенностей системы. В практике управления получило распространение следующее правило: *частота квантования должна быть на порядок больше полосы существенных частот объекта*. Поскольку построение логарифмических частотных характеристик управляемого объекта при проектировании систем частотными методами является необходимым этапом, можно считать известными и полосу пропускающей системы, и определяемый ею диапазон рабочих частот.

Период квантования является конструктивным параметром, и при его выборе принимают компромиссные решения из-за многих противоречивых факторов. Уменьшение периода квантования ограничивает допустимую сложность алгоритма и число обслуживаемых каналов управления (при работе в режиме разделения времени). Увеличение периода квантования увеличивает временное запаздывание в каналах преобразования и обработки сигналов и приводит к возрастанию информационных потерь, что приводит к ухудшению качества управления.

Быстродействие цифровых устройств постоянно растет, поэтому выполнение условий, определяемых теоремой Котельникова, не вызывает каких-либо трудностей. Вместе с тем увеличение частоты квантования приводит к удорожанию системы управления, поскольку почти всегда требует одновременного повышения разрядности арифметических устройств.

При выборе периода квантования приходится учитывать возможное появление дополнительных возмущений при дискретизации аналоговых сигналов. Высокочастотная помеха, не проявляющая себя в непрерывной системе благодаря фильтрующим свойствам объекта, из-за эффекта переноса частот может превратиться в заметное низкочастотное воздействие. Для исключения вредного воздействия высокочастотных помех перед квантованием приходится применять низкочастотные фильтры,

которые должны включаться в описание объекта управления. Звено чистого запаздывания часто заменяют дробно-рациональной аппроксимацией

$$e^{-sT} = \frac{1 - sT/2}{1 + sT/2}. \quad (1.434)$$

Итак, для модифицированного непрерывного объекта синтезируется регулятор, описываемый передаточной функцией $W_{\text{кв}}(s)$. Заметим, что при синтезе частотным методом следует помнить об известных ограничениях на объект, затрудняющих использование этого метода для неминимально-фазовых, слабодемпфированных и неустойчивых объектов. Вместе с тем *частотный метод, фактически реализующий компенсационные способы исключения нежелательных полюсов, получил самое широкое распространение и благодаря простоте и наглядности является до настоящего времени одним из самых популярных в практике проектирования систем управления.*

Непрерывный регулятор, заданный своей передаточной функцией $W_{\text{кв}}(s)$, реализуется в виде численного алгоритма микропроцессора. Кроме уже описанных подходов (1.381)–(1.384), известно большое число способов дискретизации, основанных на замене производных разностными схемами и методах численного интегрирования. Наибольшее распространение на практике получил подход, основанный на численном интегрировании методом трапеций, известный в западной литературе как преобразование Тастина. Разностная схема интегрирования ошибки $\varepsilon(t)$ методом трапеций представляется разностной схемой

$$u(kT) = u((k-1)T) + \frac{T}{2}(\varepsilon(kT) + \varepsilon((k-1)T)), \quad (1.435)$$

которой отвечает Z-преобразование

$$U(z) = \frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} E(z). \quad (1.436)$$

Другими словами, непрерывному оператору интегрирования $\frac{1}{s}$ соответствует

дискретная аппроксимация $\frac{T}{2} \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$. Отсюда следует простое правило вычисления дискретной реализации непрерывных фильтров

$$W_{\text{кв}}(z) = W_{\text{кв}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}. \quad (1.437)$$

Это преобразование отличает легкость применения и ряд полезных свойств, обеспечивших его популярность среди проектировщиков. Отметим, в частности, что левая полуплоскость при этом отображается в круг единичного радиуса.

Пример 1.36. Пусть объект задан двойным интегрирующим звеном

$$W_o(s) = \frac{10}{s^2}.$$

Из частотных характеристик объекта нетрудно заключить, что период квантования может быть назначен $T = 0,02$ с. Выбирая простую дифференцирующую цепочку в качестве непрерывного регулятора

$$W_{\text{кв}}(s) = \frac{0,5s+1}{0,05s+1},$$

подстановкой (1.437) получим дискретную передаточную функцию регулятора

$$W_{\text{кв}}(z) = W_{\text{кв}}(s) \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{51-49z^{-1}}{6-4z^{-1}},$$

которой соответствует разностное уравнение

$$u(kT) = \frac{2}{3} u((k-1)T) + \frac{51}{6} \varepsilon(kT) - \frac{49}{6} \varepsilon((k-1)T).$$

Близкий к рассмотренному подходу метод z -форм заметно сложнее в реализации. Для аппроксимации интегрирующих звеньев порядка выше первого там используются разложения в ряд $\ln z$

$$\frac{1}{s^n} = \left(\frac{T}{\ln z} \right)^n, \quad \ln z = 2\left(v + \frac{1}{3}v^3 + \frac{1}{5}v^5 + \dots\right),$$

$$v = \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \quad (1.438)$$

При использовании z -форм передаточная функция представляется в виде выражения от $1/s$ и степени интегрирующих звеньев заменяются их дискретными представлениями, полученными на основе соотношений (1.438) [60].

Билинейное преобразование (1.437) при всех своих достоинствах тем не менее искажает исходную частотную характеристику регулятора. Оценим изменение частотных свойств в этом преобразовании. Полагая в подстановке

$$s = \frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}},$$

$$s = j\nu, \quad z = e^{j\omega T}, \quad \text{после тригонометрических преобразований найдем}$$

$$\nu = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2}. \quad (1.439)$$

При малых значениях $\frac{\omega T}{2}$, когда $\omega \ll \omega_k$,

$$\nu \approx \omega. \quad (1.440)$$

На низких частотах частотные искажения практически отсутствуют, но по мере увеличения частоты искажения увеличиваются, достигая сколь угодно больших значений. Соответственно частотная характеристика непрерывного фильтра и его дискретного аналога, полученного преобразованием (1.437), различаются. Как видно из (1.439), бесконечная полуось $0 < \nu < \infty$ отображается в ограниченный интервал $0 < \omega T < \pi$. Поэтому, чтобы цифровой фильтр точнее воспроизводил характеристики непрерывного, целесообразно изменить характеристики непрерывного фильтра (постоянные времени или сопрягающие частоты), стремясь по возможности скомпенсировать искажения в результате билинейного преобразования. Иначе говоря, перед применением билинейного преобразования исходная характеристика непрерывного фильтра искажается. Поэтому в западной литературе этот метод частотной коррекции получил название частотных предискажений (frequency prewarping). Такая предварительная коррекция предполагает выполнение двухэтапной процедуры. На первом шаге для всех желаемых нулей и полюсов $(s+a)$ сопрягающая частота a заменяется на a'

$$s+a \Rightarrow s+a', \quad \text{где } a' = \frac{2}{T} \operatorname{tg} \frac{aT}{2}. \quad (1.441)$$

При этом сопрягающие частоты сдвигаются в область высоких частот тем больше, чем ближе сопрягающая частота к частоте квантования. На втором шаге выполняется билинейное преобразование для скорректированного фильтра

$$W_{ky}(z, a) = W_{ky}(s, a') \Big|_{s=\frac{2}{T} \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}. \quad (1.442)$$

Заметим, что при этом коэффициент передачи меняется и его следует изменить до желаемой величины.

Другой подход, эксплуатирующий опыт синтеза непрерывных регуляторов, носит название метода W -преобразования. Исходное описание объекта при этом задано дискретной передаточной функцией $W_o(z)$. Частотная характеристика, соответствующая дискретной передаточной функции $W_o(z)$ при $z = e^{j\omega T}$, оказывается трансцендентной функцией, построение которой намного сложнее привычных для непрерывных систем логарифмических амплитудных характеристик. W -преобразование заменяет трансцендентные функции дробно-рациональными. При этом у новых системных характеристик свойства оказываются близки к свойствам передаточных функций непрерывных систем.

W -преобразование — это билинейное преобразование

$$w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}, \quad z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}, \quad (1.443)$$

которое отображает круг единичного радиуса z -плоскости на всю левую полуплоскость.

Подстановка (1.443) является взаимно однозначным отображением и изменяет частотную характеристику согласно следующему соотношению:

$$\left. \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1} \right|_{e^{j\omega T}} = \frac{2}{T} j \operatorname{tg} \frac{\omega T}{2} = j\nu. \quad (1.444)$$

При значениях частоты, много меньших частоты квантования, соответствующей рабочему диапазону частот системы,

$$\nu \approx \omega. \quad (1.445)$$

Частотная характеристика $W_o(z)$ есть $W_o(e^{j\omega T})$, тогда как частотной характеристикой $W_o(w)$ будет $W_o(jw)$.

Процедура синтеза с помощью W -преобразования состоит из пяти этапов.

1. Для непрерывного объекта и экстраполятора по соотношению (1.381) назначают период квантования и вычисляют соответствующую дискретную передаточную функцию $W_o(z)$.
2. Подстановкой (1.443) находят $W_o(w)$:

$$W_o(w) = W_o(z) \Big|_{z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}}. \quad (1.446)$$

3. Частотным методом, используя логарифмические частотные характеристики, определяется корректирующее устройство $W_{\text{кy}}(w)$.
4. Подстановкой (1.443) определяют дискретную передаточную функцию корректирующего фильтра $W_{\text{кy}}(z)$:

$$W_{\text{кy}}(z) = W_{\text{кy}}(w) \Big|_{w = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}}. \quad (1.447)$$

5. По передаточной функции составляют вычислительный алгоритм для микропроцессора.

Пример 1.37. Вернемся к последнему примеру и найдем корректирующее устройство для объекта, заданного двойным интегрирующим звеном с передаточной функцией

$$W_o(s) = \frac{10}{s^2}.$$

Динамика объекта позволяет назначить период квантования $T = 0,02$ с.

Дискретная передаточная функция объекта с экстраполятором нулевого порядка, вычисленная по соотношению (1.381), будет равна

$$W_o(z) = \frac{kT^2}{2} \frac{z+1}{(z-1)^2}.$$

Применяя к последнему соотношению W -преобразование (1.446), найдем отвечающую ему передаточную функцию $W_o(w)$:

$$W_o(w) = k \frac{1 - \frac{T}{2}w}{w^2}.$$

Заметим, что в отличие от исходной передаточной функции объекта, заданного двойным интегрирующим звеном, передаточная функция $W_o(w)$ содержит неминимально-фазовое звено, учитывающее прохождение сигнала через преобразователи. Принимая во внимание значения коэффициента усиления и периода квантования, выберем дифференцирующее корректирующее устройство с передаточной функцией

$$W_{\kappa y}(w) = \frac{0,5w+1}{0,05w+1}.$$

Возвращаясь к Z -преобразованию (1.447), получим передаточную функцию дискретного корректирующего устройства

$$W_{\kappa y}(z) = W_{\kappa y}(w) \Big|_{w=\frac{21-z^{-1}}{1+z^{-1}}} = \frac{51-49z^{-1}}{6-4z^{-1}},$$

что в точности совпадает с результатом предыдущего примера. Такое совпадение не случайно и свидетельствует о близости соответствующих методов синтеза.

1.14.6. АНАЛИЗ РЕАЛИЗАЦИИ ЧИСЛЕННЫХ АЛГОРИТМОВ

Алгоритмы, рассмотренные выше, получены для линейных моделей управляемых объектов без учета особенностей реализации. Конкретные цифровые устройства, используемые в качестве регулятора, добавляют в динамику системы целый ряд неучтенных факторов, которые могут оказывать влияние на качество системы. Преобразователи, процессор и память имеют ограниченную разрядную сетку. Сигналы в этих устройствах отличаются от расчетных сигналов на величины, зависящие от шага квантования по уровню. По этой же причине коэффициенты регулятора не могут в точности совпадать со значениями, назначенными при расчете регулятора.

Итак, можно указать три главных источника численных ошибок при реализации регуляторов. *Во-первых, при преобразовании аналоговых величин в дискретные из-за конечного числа разрядов преобразователя появляются ошибки, оказывающие заметное влияние на точностные характеристики системы. Во-вторых, при арифметических операциях в процессоре конечной разрядности цифровые значения округляются в зависимости от числа учитываемых разрядов. Наконец, при хранении в памяти коэффициентов регулятора их приходится округлять соответственно числу разрядов запоминающих устройств.*

На рис. 1.168 показана идеальная (а) реализация регулятора

$$W_{\kappa}(z) = \frac{u(z)}{\epsilon(z)} = \frac{a_0 + a_1 z^{-1}}{1 + b z^{-1}}$$

и схема, учитывающая ошибки реализации, (б).

На рисунке через ϵ_{κ} и ϵ_y обозначены ошибки квантования (преобразования) и умножения соответственно.

Ошибки преобразователя вызывают дополнительные шумы (квантования), но не влияют на устойчивость. Вместе с тем квантование сигналов измерителей оказывает заметное влияние на точность системы. Погрешности в реализации коэффициентов регулятора меняют ожидаемые динамические характеристики и потому влияют на динамику системы, в том числе на устойчивость. Происхождение оши-

$$S_{\text{вых}}(z) = W(z)W(z^{-1})S_{\text{вх}}(z). \quad (1.450)$$

Дисперсии соответствующих случайных сигналов получают интегрированием их спектральных плотностей

$$\sigma^2 = \frac{1}{1\pi j} \oint_{|z|=1} S(z)z^{-1} dz. \quad (1.451)$$

Разрядность преобразователя аналог–код, равная $C+1$ (число и знак), определяется диапазоном изменения аналогового сигнала и шумами квантования. Этот диапазон зависит от соотношения минимального $e_{\min}$ и максимального $e_{\max}$ значений аналогового сигнала. Уровень квантования зависит от отношения этих величин и определяется разрядностью преобразователя

$$q = \frac{e_{\min}}{e_{\max}} = 2^{-C}.$$

Решая это уравнение относительно C , найдем минимальное значение C :

$$C = \log_2 \frac{e_{\max}}{e_{\min}}. \quad (1.452)$$

Разрядность преобразователя код–аналог, управляющего работой исполнительных устройств, оказывает существенно меньшее влияние на точность системы. На низких частотах коэффициенты передачи практически постоянны, но фазовые запаздывания могут быть значительны. Разрядность, как и выше, определяется диапазоном изменения сигнала

$$C = \log_2 \frac{u_{\max}}{u_{\min}}. \quad (1.453)$$

Влияние шума квантования на систему:

$$\text{при усечении } \sigma_y^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2C_y}}{3}, \quad (1.454)$$

$$\text{при округлении } \sigma_o^2 = \frac{q^2}{12} = \frac{2^{-2(C_{oy}+1)}}{3}, \quad (1.455)$$

где $C_y = C_o + 1$.

Шумы квантования должны быть много меньше уровня полезного сигнала, поэтому отношение сигнал/шум следует ограничивать. Считая, что входной аналоговый сигнал имеет нормальное распределение с максимальным значением 1 (так что $3\sigma_e = 1$), дисперсию этого сигнала следует принять равной $1/9$. Тогда отношение сигнал/шум

$$\frac{1/9}{(2^{-2C_y})/3} = \frac{2^{2C_y}}{3}.$$

Выражая это отношение в децибелах F и разрешив его относительно искомого числа разрядов, получим

$$C_y \approx \frac{F}{6} + 0,8. \quad (1.456)$$

Из двух чисел (1.452) и (1.456) выбирают наибольшее.

Шум квантования преобразуется арифметическим устройством процессора и при реализации алгоритмов может подчеркиваться. Отношение уровней шумов на выходе и входе арифметического устройства зависит от передаточной функции алгоритма $W(z)$

$$k_m = \frac{1}{1\pi j} \oint_{|z|=1} W(z)W(z^{-1})z^{-1}dz. \quad (1.457)$$

Обозначая требуемое отношение сигнала к шуму через F , для разрядности арифметического устройства получим соотношение [117]

$$C \geq \frac{F}{6} + 0,8 + \frac{5}{6} \lg k_m. \quad (1.458)$$

Изменение коэффициентов уравнений из-за ограниченной разрядности слов в памяти меняет динамические свойства системы. Оценим влияние коэффициентов на изменение положения корней. Пусть максимально допустимое изменение корня P в s -плоскости ограничено значением ΔP . Соответственно найдем перемещение корня в z -плоскости, которое соответствует наименьшему разряду:

$$\Delta z = e^{-(P+\Delta P)T} - e^{-(P-\Delta P)T} = 2^{-C}.$$

Разрешая последнее соотношение относительно C , найдем

$$C = -\log_2 P T e^{-PT} - \log_2 \frac{2\Delta P}{P}. \quad (1.459)$$

Разрядность, определяемая соотношением (1.450), зависит как от абсолютного значения полюса P , так и от отношения $\frac{\Delta P}{P}$. Очевидна также зависимость разрядности от периода квантования: с уменьшением периода разрядность увеличивается.

Синтез регуляторов в классе дискретных автоматических систем, включая в первую очередь системы с постоянными параметрами, а также некоторые системы с переменными параметрами и системы, включающие нелинейные элементы, — весьма трудная задача, требующая не только серьезного математического образования, но и, как любая задача синтеза, хорошего знания физических процессов, протекающих в системе. Важные положения, связанные с решением рассматриваемой задачи, получены и сформулированы в удобной для практического использования форме в известных в инженерных кругах работах* Я.З. Цыпкина, Л.Т. Кузина, Э. Джури, В.А. Бесекерского, Р. Изермана, В. Стрейца, Р. Katz, К. Astrem, В. Wittenmark, Б.М. Шамрикова, В.В. Солодовникова, В.Н. Плотникова, А.В. Яковлева и др.

Основные положения этих работ, имеющих инженерную направленность и важность с практической точки зрения, нашли отражение в настоящем параграфе.

* См. библиографию 1-го тома.

ГЛАВА 2. МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

В главе рассматриваются методы синтеза линейных нестационарных скалярных систем автоматического управления. Ввиду большого многообразия возможных постановок задач основное внимание уделено решению узловых вопросов синтеза в различных подходах. Методы, рассматриваемые в главе, позволяют решать задачи синтеза весьма сложных систем с переменными параметрами, используя в качестве регуляторов как нестационарные, так и стационарные корректирующие фильтры. Обсуждаются «подводные камни», которые имеют место в весьма сложной рассматриваемой проблеме, решение которой ещё далеко от завершения. Несмотря на большую сложность задачи синтеза регуляторов в классе нестационарных систем, помещенный в главе материал позволяет на инженерном уровне решать задачи синтеза, требуя от проектировщика наличия опыта, хорошего знания физических процессов, протекающих в системе, и необходимой математической подготовки.

Необходимо обратить внимание на важный факт, имеющий место в рассматриваемой задаче. Содержание этого факта состоит в том, что многие положения, лежащие в основе методов синтеза регуляторов в классе стационарных систем, на класс систем с переменными параметрами не обобщаются. Это очевидно при рассмотрении физической стороны вопроса. Например, опытный проектировщик, анализируя ПФ неизменяемой части системы, сразу же может сделать вывод о необходимости введения в структуру системы корректирующего звена, создающего опережение по фазе, если для неизменяемой части системы в области частоты среза имеется отрицательный запас по фазе.

Аналогично может быть поставлен вопрос об использовании в качестве корректирующего устройства такого фильтра, который способен подавлять высокие или средние частоты, создающие отрицательный фазовый сдвиг (фазосдвигающие КУ без изменения АЧХ), если неизменяемая часть системы содержит слабодемпфированные или консервативные элементы.

Такой простой анализ для нестационарных систем удается сделать лишь в простейших случаях.

2.1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ПРИНЦИПА ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ ПРИ ОПИСАНИИ СИСТЕМЫ И ЕЕ ЭЛЕМЕНТОВ ИМПУЛЬСНЫМИ ПЕРЕХОДНЫМИ ФУНКЦИЯМИ [37, 39, 75, 76, 111, 124]

В п. 1.5 значительное внимание было уделено изложению теоретических положений принципа динамической компенсации в терминах, использующих понятие оператора и передаточной функции системы и ее элементов. Важность этого принципа состоит в том, что его применение приводит к точному решению задачи (этот результат используется достаточно редко и в простейших случаях), и, что особенно ценно, этот рецепт позволяет при выполнении соответствующих условий разработать подходы, пригодные для решения инженерных задач. Речь идет о методах, когда структура и параметры регулятора выбираются с учетом хорошего знания физики работы систем, опыта проектирования подобных систем и влияния конкретных, физически

реализуемых элементов регулятора, используемых при решении задач синтеза рассматриваемого класса систем (например, систем управления летательными аппаратами), на динамику замкнутой системы. Видоизмененный рецепт принципа динамической компенсации используют методы эталонных ПФ замкнутых и разомкнутых систем, спектральный метод с той лишь разницей, что в указанных методах структура регулятора выбирается заранее, а не определяется ПФ $W_o(s)$ и $W^3(s)$, как это имеет место в принципе динамической компенсации. Формула имеет вид

$$W_{\text{кн}}(s) = W_o^{-1}(s) \frac{W^3(s)}{1 - W^3(s)}.$$

Как указывалось выше, *приведенная формула, определяющая $W_{\text{кн}}(s)$, представляет интерес с точки зрения выявления тех трудностей, которые необходимо преодолеть при решении задачи синтеза.* Если построить частотные характеристики (например, ЛАЧХ), соответствующие $W_{\text{кн}}(s)$, то можно в правильном направлении решать задачи выбора элементов регулятора (например, если есть необходимость повышения частоты среза, увеличения коэффициента усиления по скорости и обеспечения достаточного значения избытка фазы в окрестности точки, соответствующей частоте среза, то в структуру регулятора целесообразно ввести дифференцирующие звенья), учитывая такой важный фактор, как *приемлемая физическая реализуемость.* Кроме того, можно учесть с использованием известных подходов некоторые ограничения, например, связанные с расположением полюсов системы в заданной области комплексной плоскости.

Для класса нестационарных систем решение задачи синтеза регуляторов определяет формула (2.5) (см. п. 1.5).

Формула (2.5) — общий результат, использующий понятие оператора системы. Далее рассмотрим его в терминах ИПФ и выявим соответствующие особенности. Сразу же отметим, что *приведенные ниже положения в основном имеют теоретическое значение и практически не используются при решении конкретных инженерных задач.*

Рассмотрим дифференциальное уравнение системы с переменными коэффициентами

$$\sum_{v=0}^n a_v(t) x^{(v)} = \sum_{v=0}^m b_v(t) y^{(v)}. \quad (2.1)$$

Введем в рассмотрение линейные дифференциальные операторы

$$L_x = \sum_{v=0}^n a_v(t) \frac{d^v}{dt^v} = a_n(t) p^n + \dots + a_1(t) p + a_0(t) = L_x(p, t)$$

и

$$L_y = \sum_{v=0}^m b_v(t) \frac{d^v}{dt^v} = b_m(t) p^m + \dots + b_1(t) p + b_0(t) = L_y(p, t), \quad p = \frac{d}{dt}.$$

Тогда уравнение (2.1) можно записать так:

$$L_x(p, t) x(t) = L_y(p, t) y(t). \quad (2.2)$$

Последнее уравнение принимает вид

$$x(t) = L_x^{-1}(p, t) L_y(p, t) y(t) = Ay(t). \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что *выход системы $x(t)$ является результатом воздействия оператора A на вход $y(t)$.*

Оператор $E_1 = L_x^{-1}(p, t) = \frac{1}{L_x(p, t)}$ обычно называют интегрирующим, а оператор $E_2 = L_y(p, t)$ — дифференцирующим.

Можно ввести в рассмотрение обратные операторы. Если $AB = I$, где I — единичный оператор, то оператор B называют обратным по отношению к оператору A ; тогда

$$AA^{-1} = I. \quad (2.4)$$

В частности, обратными друг другу являются операторы интегрирования и дифференцирования.

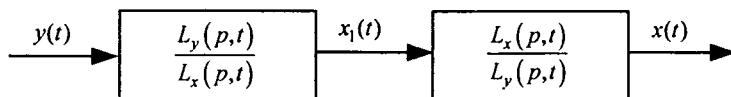


Рис. 2.1. Последовательное соединение обратных друг другу операторов

Если два нестационарных элемента описываются уравнениями (рис. 2.1)

$$L_x(p, t)x_1(t) = L_y(p, t)y(t) \text{ и } L_y(p, t)x(t) = L_x(p, t)x_1(t),$$

то первому из них соответствует оператор $A = \frac{L_y(p, t)}{L_x(p, t)}$, а второму — оператор

$A^{-1} = \frac{L_x(p, t)}{L_y(p, t)}$. Тогда $x_1(t) = Ay(t)$ и $x(t) = A^{-1}x_1(t) = A^{-1}Ay(t) = Iy(t)$; отсюда $x(t) = y(t)$.

После введения понятия оператора системы с переменными параметрами легко сделать постановку проблемы синтеза регулятора нестационарной системы, рассматривая в качестве примера конкретную задачу.

На вход системы (рис. 2.2) поступает полезный нестационарный случайный сигнал $m(t)$ и нестационарная помеха $n(t)$.

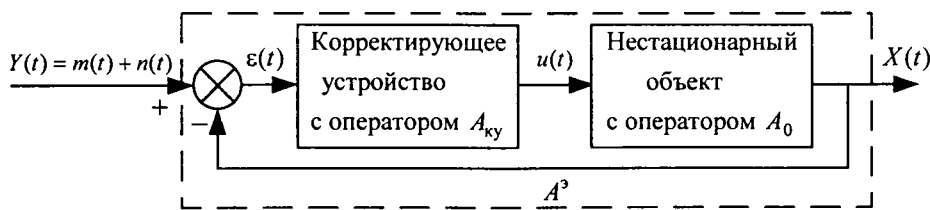


Рис. 2.2. Структурная схема системы

Статистические характеристики сигналов $m(t)$ и $n(t)$ известны: $R_{mm}(t_1, t_2)$, $R_{nn}(t_1, t_2)$ — корреляционные функции соответственно полезного сигнала $m(t)$ и помехи $n(t)$ (положим, что $m(t)$ и $n(t)$ — не коррелированы).

В рассматриваемой задаче полагаем известными и уравнения, описывающие динамику нестационарного объекта. Задача заключается в нахождении структуры и параметров нестационарного корректирующего устройства такого, которое обеспечивало бы выполнение следующего условия:

$$M \left[(m(t) - X(t))^2 \right] \rightarrow \min.$$

Решая уравнение Винера–Хопфа, можно найти эталонный оператор A^3 замкнутой нестационарной системы.

Таким образом, в рассматриваемой постановке задачи A^3 и A_0 — известны, а $A_{\text{кy}}$ подлежит определению.

В п. 1.5 приведено решение поставленной задачи в терминах принципа динамической компенсации; оно имеет вид

$$A_{\text{кy}} = A_0^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3. \quad (2.5)$$

С использованием введенных выше дифференциальных операторов, определяющих оператор A , задача синтеза сводится к нахождению $L_u(p, t)$ и $L_\varepsilon(p, t)$, определяющих дифференциальное уравнение

$$L_u(p, t)u(t) = L_\varepsilon(p, t)\varepsilon(t). \quad (2.6)$$

Тогда

$$u(t) = A_{\text{кy}}\varepsilon(t) = L_u^{-1}(p, t)L_\varepsilon(p, t)\varepsilon(t). \quad (2.7)$$

Реализация рассмотренного подхода связана с преодолением значительных трудностей; получение конструктивных результатов возможно лишь в простейших случаях.

Рассмотрим решение поставленной задачи с использованием аппарата импульсных переходных функций.

ИПФ разомкнутой системы, включающей последовательное соединение регулятора и объекта управления, определяется зависимостью

$$k_p(t, \tau) = \int_{\tau}^t k_{\text{кy}}(\mu, \tau) k_o(t, \mu) d\mu, \quad (2.8)$$

где

$k_{\text{кy}}(t, \tau)$ — ИПФ регулятора;

$k_o(t, \tau)$ — ИПФ объекта управления.

Предварительно отметим, что наряду с обратными операторами можно ввести в рассмотрение и обратные ИПФ (рис. 2.3).

Имеем

$$x(t) = \int_0^t k^-(t, \tau) x_1(\tau) d\tau = \int_{\tau}^t k^{-1}(t, \eta) k(\eta, \tau) d\eta. \quad (2.9)$$

Поскольку элементы являются обратными, то

$$x(t) = \int_{\tau}^t k^{-1}(t, \eta) k(\eta, \tau) d\eta = \delta(t - \tau),$$

следовательно,

$$\int_{\tau}^t k(t, \eta) k^-(\eta, \tau) d\eta = \delta(t - \tau).$$

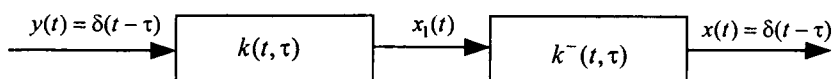


Рис. 2.3. К определению понятия обратной ИПФ

Из (2.8), умножая обе части на $k_o^-(t, \tau)$ и интегрируя, найдем

$$\int_{\tau}^t k_p(\eta, \tau) k_o^-(t, \eta) d\eta = \int_{\tau}^t k_o^-(t, \eta) d\eta \int_{\tau}^{\eta} k_o(\eta, \mu) k_{ky}(\mu, \tau) d\mu,$$

или

$$k_{ky}(t, \tau) = \int_{\tau}^t k_p(\eta, \tau) k_o^-(t, \eta) d\eta. \quad (2.10)$$

Соответствующая структурная схема имеет вид (рис. 2.4).

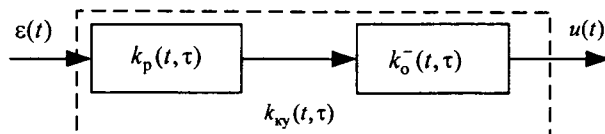


Рис. 2.4. К задаче нахождения ИПФ регулятора

В задаче синтеза в качестве эталонной задается ИПФ замкнутой системы $k(t, \tau)$; она связана с ИПФ $k_p(t, \tau)$ очевидной зависимостью

$$k(t, \tau) = k_p(t, \tau) - \int_{\tau}^t k_p(t, \eta) k(\eta, \tau) d\eta. \quad (2.11)$$

Последнее соотношение представляет собой интегральное уравнение, позволяющее найти ИПФ $k(t, \tau)$ замкнутой системы по ИПФ $k_p(t, \tau)$ разомкнутой системы управления.

Алгоритм синтеза регулятора включает следующие этапы:

- задание из соображений обеспечения заданного качества работы системы эталонной ИПФ $k_3(t, \tau)$ замкнутой САУ (например, она может быть найдена путем решения уравнения Винера–Хопфа);
- нахождение эталонной ИПФ $k_p^3(t, \tau)$ разомкнутой системы путем решения интегрального уравнения

$$k_3(t, \tau) = k_p^3(t, \tau) - \int_{\tau}^t k_p^3(t, \eta) k_3(\eta, \tau) d\eta; \quad (2.12)$$

- расчет ИПФ регулятора по формуле

$$k_{ky}(t, \tau) = \int_{\tau}^t k_p^3(\eta, \tau) k_o^{-1}(t, \eta) d\eta. \quad (2.13)$$

С учетом сказанного структурная схема системы с регулятором может быть представлена так (рис. 2.5).

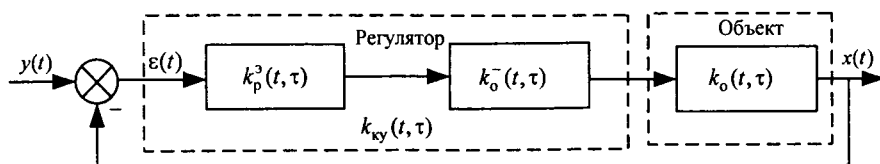


Рис. 2.5. Структурная схема нестационарной системы с регулятором с ИПФ $k_{ky}(t, \tau)$

Как и в предыдущих случаях, в которых рассматривались стационарные системы (п. 1.5), при решении задачи синтеза регуляторов в классе нестационарных систем имеет место *принцип динамической компенсации*.

Трудности реализации подхода, использующего аппарат ИПФ, состоят как в необходимости решения достаточно сложных интегральных уравнений, так и в отыскании и реализации обратных импульсных переходных функций. При разработке конкретных систем автоматического управления с переменными параметрами аппарат ИПФ используется редко и в основном на этапе предварительного проектирования.

2.2. РЕАЛИЗАЦИЯ ПРИНЦИПА ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ МЕТОДОМ МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Из изложенных в первой главе положений можно заключить, что имеют место два подхода к выбору структуры регулятора:

- *подход, использующий аппарат операторной алгебры (см. п. 1.5); результатом применения этого аппарата для нахождения оператора регулятора является уже неоднократно обсуждаемая зависимость*

$$\mathbf{A}_{\text{кп}} = \mathbf{A}_0^{-1}(\mathbf{I} - \mathbf{A}^3)^{-1} \mathbf{A}^3. \quad (2.14)$$

Последняя зависимость точно определяет структуру и параметры регулятора из условия равенства оператора замкнутой системы эталонному оператору $\mathbf{A}^3$ (в терминах ИПФ этот подход для класса нестационарных систем изложен в п. 2.1 настоящей главы);

- *подход, предполагающий выбор структуры регулятора разработчиком системы, исходя из анализа динамических свойств неизменяемой части системы, простоты аппаратной или программной реализации корректирующего устройства и из необходимости выполнения цели управления и обеспечения заданного качества работы системы.*

В этом параграфе рассмотрим содержание первого подхода.

В терминах метода матричных операторов задача синтеза может быть сформулирована так: *найти матричный оператор корректирующего устройства из условия равенства матричного оператора замкнутой системы эталонному матричному оператору.*

Приведем основные этапы синтеза системы методом матричных операторов:

- *определение эталонного матричного оператора $\mathbf{A}^3$ замкнутой системы;*
- *определение эталонного матричного оператора $\mathbf{A}_p^3$ разомкнутой системы и матричного оператора корректирующего устройства;*
- *точная или приближенная (аппаратная или программная) реализация корректирующего устройства, имеющего требуемый матричный оператор, с учетом положений, характеризующих принцип динамической компенсации (см. главу 1).*

В общем же случае эталонный оператор замкнутой системы $\mathbf{A}^3$ выбирается из условия обеспечения необходимого качества работы САУ.

Найдем матричный оператор эталонной разомкнутой системы, полагая, что известен матричный оператор эталонной замкнутой системы (рис. 2.6). Имеем

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}_p^3 (\mathbf{I} + \mathbf{A}_p^3)^{-1}. \quad (2.15)$$

Умножим левую и правую части последнего выражения справа на матрицу $\mathbf{I} + \mathbf{A}_p^3$

и, приняв, что $(\mathbf{I} + \mathbf{A}_p^3)^{-1} (\mathbf{I} + \mathbf{A}_p^3) = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица), получим

$$A^3(I + A_p^3) = A_p^3.$$

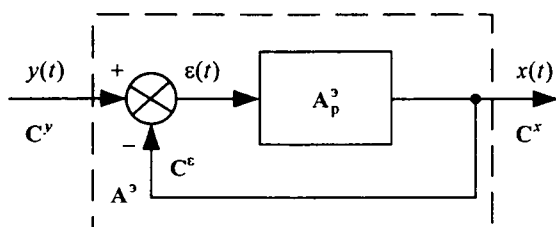


Рис. 2.6. Структурная схема эталонной нестационарной системы

Отсюда находим

$$A^3 + A^3 A_p^3 = A_p^3,$$

или, что то же самое,

$$A^3 = A_p^3 - A^3 A_p^3 = (I - A^3) A_p^3.$$

Теперь легко записать выражение для эталонного матричного оператора разомкнутой системы

$$A_p^3 = (I - A^3)^{-1} A^3. \quad (2.16)$$

Теперь структурная схема эталонной системы принимает вид, представленный на рис. 2.7.

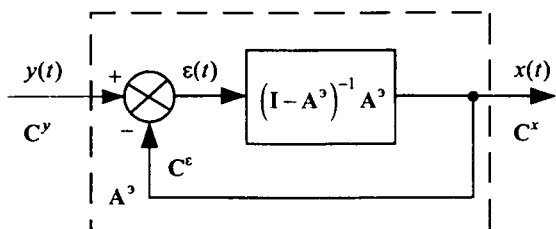


Рис. 2.7. Структурная схема эталонной системы

На рис. 2.8 представлена структурная схема нестационарной системы, включающая объект и регулятор.

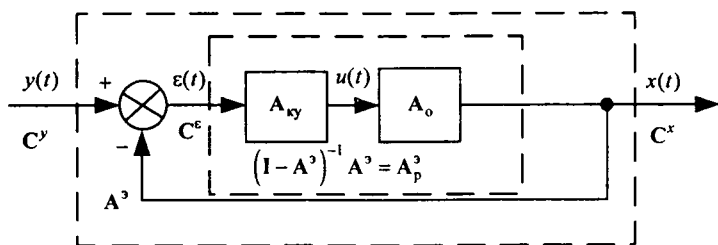


Рис. 2.8. К постановке задачи коррекции

Пользуясь структурными преобразованиями, получим зависимость (рис. 2.8)

$$A_o A_{кy} = (I - A^3)^{-1} A^3. \quad (2.17)$$

Отсюда находим

$$A_{ky} = (A_o)^{-1} (I - A^3)^{-1} A^3 = (A_o)^{-1} A_p^3. \quad (2.18)$$

Из последней формулы легко заключить, что *матричный оператор корректирующего устройства состоит из двух частей: первая часть включает A_p^3 и определяется зависимостью (2.16); вторая же часть имеет оператор, обратный оператору объекта.* Поскольку для A_p^3 справедлива формула (2.16), то структурная схема скорректированной системы может быть представлена в виде, изображенном на рис. 2.9.

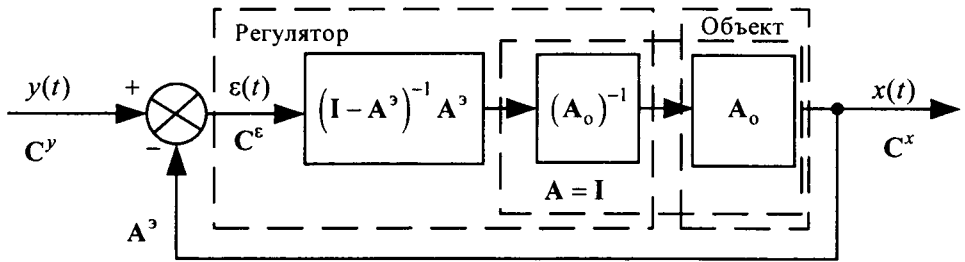


Рис. 2.9. Структурная схема скорректированной системы

Изложенный метод синтеза регуляторов реализует *принцип динамической компенсации.*

О степени эффективности принципа динамической компенсации применительно к классу нестационарных систем можно отметить следующее: КУ является всегда сложным, поскольку должно включать две части: компенсирующую, описываемую оператором, обратным оператору объекта, и эталонную (описывается оператором разомкнутой эталонной системы).

При его реализации необходимо учитывать не только формальное описание, но и физику процессов, протекающих в объекте. Оператор $(A_o)^{-1}$ в общем случае включает в себя матричные операторы дифференцирующих звеньев и операторы умножения (другие факторы, характерные для принципа динамической компенсации, отражены в главе 1).

Для простого случая, если $K_{ky}(t, \tau) \in L^2[(0, T) \times (0, T)]$, то знание матричного оператора A_{ky} равносильно тому, что ИПФ КУ представляется в виде

$$K(t, \tau) = \sum_{v_1=1}^l \sum_{v_2=1}^l C_{v_1 v_2}^{ky} \varphi_{v_1}(t) \varphi_{v_2}(\tau). \quad (2.19)$$

Тогда справедливо интегральное соотношение

$$\begin{aligned} u(t) &= \int_0^t K(t, \tau) \varepsilon(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l C_{ij}^{ky} \varphi_i(t) \int_0^t \varphi_j(\tau) \varepsilon(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^l C_{ij} \varphi_i(t) \varphi_j^\varepsilon(t), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\text{где } \varphi_j^\varepsilon(t) = \int_0^t \varphi_j(\tau) \varepsilon(\tau) d\tau.$$

Последними зависимостями определена структура регулятора (рис. 2.10).

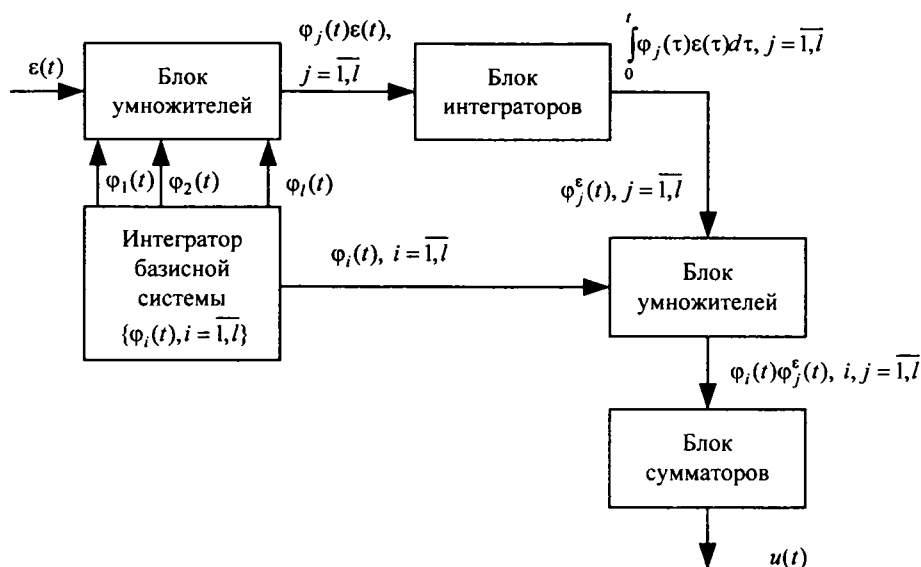


Рис. 2.10. Структурная схема регулятора нестационарной системы

2.3. МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи. Полагаем известными:

- ДУ объекта управления;
- эталонные входной $y_3(t)$ и выходной $x_3(t)$ сигналы (в рассматриваемом случае в отличие от стационарных систем, когда, как правило, $y_3(t) = 1(t)$, $x_3(t) = h(t)$ — переходная характеристика, $y_3(t)$ и $x_3(t)$ определяются содержанием задачи и назначением системы управления (см. пример 2.3)).

Если дифференциальное уравнение регулятора записать в виде

$$\sum_{v=0}^{n_1} a_v^{ky}(t) u^{(v)} = \sum_{v=0}^{m_1} b_v^{ky}(t) \varepsilon^{(v)}, \quad (2.21)$$

где

$$\begin{aligned} a_i^{ky}(t) &= \sum_{v=1}^l c_v^{a_i^{ky}} \varphi_v(t), \quad i = \overline{0, n_1}, \\ b_i^{ky}(t) &= \sum_{v=1}^l c_v^{b_i^{ky}} \varphi_v(t), \quad i = \overline{0, m_1}, \end{aligned} \quad (2.22)$$

то параметрами $p_i, i = \overline{1, r}$, подлежащими расчету, являются

$$\begin{aligned} c_v^{a_i^{ky}}, \quad i = \overline{0, n_1}; \quad v = \overline{1, l}; \\ c_v^{b_i^{ky}}, \quad i = \overline{0, m_1}; \quad v = \overline{1, l}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Другими словами, задачей синтеза регулятора является определение его дифференциального уравнения, такого, что замкнутая нестационарная система управле-

ния с регулятором, имеющим математическую модель (2.21), имеет реакцию $x_p(t, p_1, \dots, p_r)$ на воздействие $y_3(t)$ такую, что $\rho(x_p(t, p_1, \dots, p_r), x_3) \leq \epsilon_{\text{доп}}$, где ρ — метрика выбранного пространства, $\epsilon_{\text{доп}}$ — допустимое расстояние между x_p и x_3 .

Могут быть наложены ограничения, диктуемые содержанием задачи и сформулированные в терминах математического программирования.

Таким образом, задача сводится к расчету параметров $p_i, i = \overline{1, r}$, причем число параметров определяется зависимостью

$$r = l \times (n_1 + 1) + l \times (m_1 + 1).$$

Если A_0 — оператор объекта, $A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r)$ — оператор последовательно включенного регулятора, то выходной сигнал системы при подаче на вход $y_3(t)$ определяется зависимостью (см. п. 1.5)

$$\begin{aligned} x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) &= L^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r) y_3(t) = \\ &= \left[A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r) (I + A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r))^{-1} \right] y_3(t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

Тогда неизвестные параметры регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$ могут быть определены путем минимизации квадратичного функционала, т.е.

$$\begin{aligned} I(p_1, p_2, \dots, p_r) &= \int_0^T \{x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) - x_3(t)\}^2 dt = \\ &= \int_0^T \left\{ x_3(t) - \underbrace{\left[A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r) (I + A_0 A_{\text{кy}}(p_1, p_2, \dots, p_r))^{-1} \right] y_3(t)}_{x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r)} \right\}^2 dt \rightarrow \\ &\rightarrow \min_{p_1, p_2, \dots, p_r}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Алгоритм, реализующий зависимость (2.25), требует знания обратного оператора $L^{-1}(p_1, p_2, \dots, p_r)$. Если для класса стационарных систем при использовании квадратичного функционала рассматриваемый подход с помощью формулы Парсевала позволяет построить конструктивный алгоритм расчета неизвестных параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$ (см. п. 1.10), то применение его к обсуждаемой задаче к положительному результату в общем случае не приводит.

В связи с указанными обстоятельствами в данном случае невязка $E(t, p_1, p_2, \dots, p_r)$ определяется соотношением, не требующим знания обратного оператора:

$$L(p_1, p_2, \dots, p_r) x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = y_3(t). \quad (2.26)$$

Если в последнюю зависимость подставить

$$x_p(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = x_3(t),$$

то получим приближенное равенство

$$L(p_1, p_2, \dots, p_r) x_3(t) - y_3(t) = E(t, p_1, p_2, \dots, p_r).$$

Далее важным является положение, требующее знания дифференциального уравнения замкнутой нестационарной системы

$$\sum_{v=0}^n a_v(t, p_1, p_2, \dots, p_r) x^{(v)} = \sum_{v=0}^m b_v(t, p_1, p_2, \dots, p_r) y^{(v)}. \quad (2.27)$$

Для нахождения ДУ (2.27), если известны ДУ объекта и ДУ регулятора, можно воспользоваться методом уравнивающих операторов (см. главу 2, том 1). Реализация метода уравнивающих операторов теоретически проста, но требует внимания при проведении большого числа достаточно простых операций.

Если известно ДУ (2.27), то далее легко записать эквивалентное интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \int_0^t x_p(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r) \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[a_k(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r) P_i(\tau)(t-\tau)^n \right] \right\} d\tau = \\ = \int_0^t y_s(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[b_k(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r) P_i(\tau)(t-\tau)^n \right] \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (2.28)$$

где $P_i(t)$ — порождающие функции.

Подставив в последнее равенство $x_p(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r) = x_s(t)$, получим зависимость, определяющую невязку:

$$\begin{aligned} E_i(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = \underbrace{\int_0^t x_s(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[a_k(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r) P_i(\tau)(t-\tau)^n \right] \right\} d\tau}_{f_i^x(t, p_1, p_2, \dots, p_r)} - \\ - \underbrace{\int_0^t y_s(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[b_k(\tau, p_1, p_2, \dots, p_r) P_i(\tau)(t-\tau)^n \right] \right\} d\tau}_{f_i^y(t, p_1, p_2, \dots, p_r)} = \\ = f_i^x(t, p_1, p_2, \dots, p_r) - f_i^y(t, p_1, p_2, \dots, p_r). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Для нахождения неизвестных параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$ можно воспользоваться методами нелинейного программирования; алгоритм имеет вид

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^T \sum_{i=1}^N E_i^2(t, p_1, p_2, \dots, p_r) dt = \min_{p_k, k=1, r} \quad (2.30)$$

при ограничениях, определяемых содержанием рассматриваемой задачи.

Многие положения, изложенные в п. 1.12, справедливы и для рассматриваемого случая. В некоторых случаях приемлемое решение задачи достигается при использовании одной порождающей функции. Как указывалось в п. 1.12, порождающие функции часто приводят к ускорению процедуры поиска экстремума многоэкстремальной функции $I(p_1, p_2, \dots, p_r)$.

Далее приведем примеры, иллюстрирующие основные теоретические положения метода, содержание вычислительной схемы, а также те трудности, которые сопровождают процесс расчета рассмотренным методом.

Предварительно отметим, что регулятор может иметь как переменные, так и постоянные параметры. Выбор конфигурации регулятора определяется содержанием задачи, и в общем случае регулятор должен быть нестационарным при, например, быстром и в большом диапазоне изменении параметров объекта.

Естественно, в этом случае задача значительно усложняется, так как функция $I(p_1, p_2, \dots, p_r)$ является многоэкстремальной и поиск оптимальных значений параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$ при $r = l + (n_1 + 1) + (m_1 + 1)$ представляет собой самостоятельную проблему. Поэтому часто при соответствующем обосновании на синтезируемый корректирующий фильтр накладывается условие стационарности. При синтезе ста-

ционального фильтра последний может определяться в виде приближения нестационарного корректирующего фильтра, однако задача обоснованного, имеющего практическую направленность приближения нестационарного звена стационарным имеет самостоятельное значение.

Пример 2.1. Решим задачу синтеза методом порождающих функций с использованием аппарата обратных задач динамики [59].

Объект управления (рис. 2.11) описывается дифференциальным уравнением вида

$$x''(t) + \left((0,1 - 0,2 \cdot e^{-0,1t}) \cdot t + 0,5 \right) x'(t) + x(t) = u(t).$$

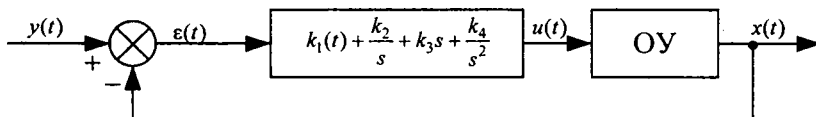


Рис. 2.11. Нестационарный объект управления с регулятором

Пусть $x_s(t) = 1 + 0,1 \cdot t - e^{-0,5t}$ — желаемая реакция замкнутой системы на эталонное линейно возрастающее воздействие $y_s(t) = 1 + 0,1t$.

Задача синтеза состоит в отыскании таких параметров регулятора $\{k_1(t), k_2, k_3, k_4\}$ в прямой цепи, чтобы реальный выходной сигнал скорректированной системы $x_p(t)$ был близок к эталонному. При этом переменный коэффициент усиления регулятора $k_1(t)$ должен скомпенсировать изменение коэффициента демпфирования объекта управления.

Неизвестный коэффициент усиления $k_1(t)$ представим в виде частичной суммы по базису многочленов Лежандра (при этом ограничимся первыми 3 членами ряда):

$$k_1(t) = \sum_{i=1}^3 c_i L_i(t).$$

Корректирующее устройство в этом случае примет вид

$$W_{\text{к}}(s) = (p_1 L_1(t) + p_2 L_2(t) + p_3 L_3(t)) + \frac{p_4}{s} + p_5 \cdot s + \frac{p_6}{s^2},$$

где $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6\}$ — параметры, подлежащие определению.

Решение обратной задачи динамики для объекта управления даст аналитическое выражение для управления, при подаче которого на вход ОУ, на выходе будет иметь место эталонный сигнал:

$$u^*(t) = 1,05 + 0,11 \cdot t - e^{-0,5t} + 0,05 \cdot t \cdot e^{-0,5t} - 0,02 \cdot t \cdot e^{-0,1t} - 0,1 \cdot t \cdot e^{-0,6t}.$$

Воспользовавшись методом порождающих функций, запишем функционал, зависящий от параметров $\{p_1, p_2, p_3, p_4, p_5\}$:

$$I(p_1, \dots, p_5) = \int_0^{1,5} \sum_{i=1}^4 E_i^2(\tau, p_1, \dots, p_5) d\tau \rightarrow \min_{p_i, i=1,5},$$

где

$$E_i(\tau, p_1, \dots, p_5) = u_p(\tau, p_1, \dots, p_5) - u^*(\tau),$$

причем

$$u_p(\tau, p_1, \dots, p_5) = A_{\text{к}}(y_s(\tau) - x_s(\tau)).$$

При безусловной минимизации функционала были получены следующие оптимальные параметры регулятора:

$$p_1^* = -0,0037; p_2^* = 0,0034; p_3^* = 0,0574; p_4^* = 0,5810; p_5^* = 0,0037; p_6^* = 0,0530.$$

Графики изменения коэффициентов ОУ представлены на рис. 2.12, 2.13. Реакция скорректированной системы на эталонный входной сигнал, а также выход регулятора представлены на рис. 2.14 и рис. 2.15.

Как указывалось выше, применение метода уравнивающих операторов для нахождения ДУ замкнутой системы — это достаточно трудоемкий этап. Поэтому в настоящем примере невязка рассматривалась как разность между эталонным и реальным сигналами, поступающими на объект управления, чем удалось избежать необходимости нахождения ДУ замкнутой САУ. Однако такой подход часто приводит к значительным погрешностям, вполне объяснимым даже с физической точки зрения.

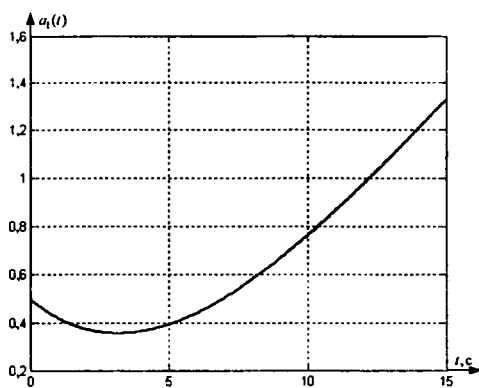


Рис. 2.12. График изменения коэффициента a_1 объекта управления

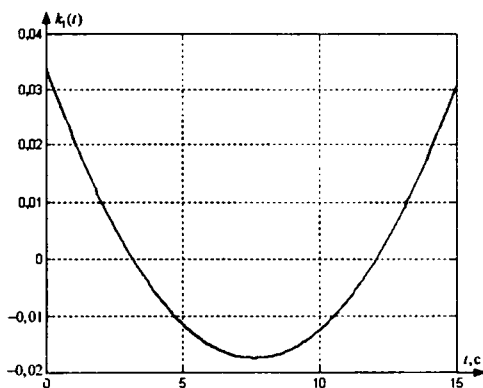


Рис. 2.13. График изменения коэффициента усиления регулятора в прямой цепи

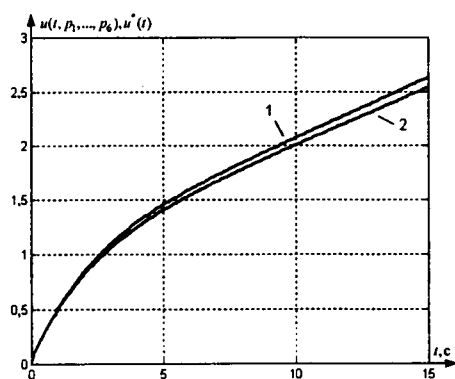


Рис. 2.14. Полученное при решении обратной задачи динамики (1) и реальное (2) управление, поступающее с регулятора на ОУ

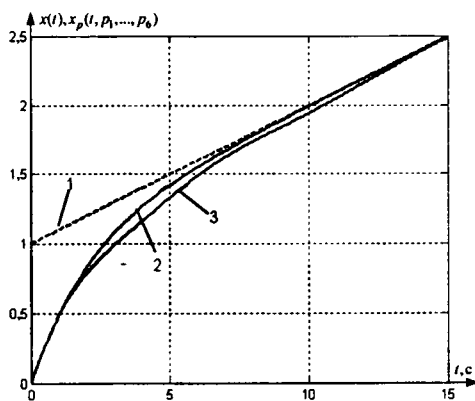


Рис. 2.15. Эталонный (2) и реальный (3) выход скорректированной системы ((1) — эталонный сигнал, поступающий на вход системы — $y_3(t)$)

Пример 2.2. В предыдущем примере задача синтеза регулятора решена с использованием аппарата обратных задач динамики, что позволило избежать необходимости получения дифференциального уравнения, описывающего поведение замкнутой системы.

Найдем решение задачи синтеза при следующих условиях:

- объект управления описывается дифференциальным уравнением с укороченной правой частью:

$$x''(t) + a_1(t)x'(t) + x(t) = u(t),$$

где $a_1(t) = 10 \cdot (0,1 - 0,2e^{-0,2t})t + 0,5$;

- корректирующее устройство описывается дифференциальным уравнением

$$p_6 \varepsilon(t) + p_4 \varepsilon'(t) + (p_1 L_1(t) + p_2 L_2(t) + p_3 L_3(t)) \varepsilon''(t) + p_5 \varepsilon'''(t) = u''(t).$$

Тот факт, что объект описывается дифференциальным уравнением с укороченной правой частью, позволяет существенно упростить процедуру нахождения дифференциального уравнения замкнутой системы.

Получим дифференциальное уравнение замкнутой системы с регулятором. Имеем [75]

$$u''(t) = (x''(t) + a_1(t)x'(t) + x(t))'' = x^{(4)}(t) + a_1(t)x''(t) + (2a_1'(t) + 1)x'(t) + a_1''(t)x(t).$$

ДУ замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} x^{(4)} + (a_1(t) + p_5)x''(t) + (2a_1'(t) + 1 + p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3)x'(t) + (a_1''(t) + p_4)x(t) + p_6 x(t) = \\ = p_5 y''(t) + (p_1 L_1 + p_2 L_2 + p_3 L_3)y'(t) + p_4 y(t) + p_6 y(t). \end{aligned}$$

Пусть $y_s(t) = 5 \cdot (1 + 0,1 \cdot t)$ — эталонное задающее воздействие, а $x_s(t) = 5 + 5 \cdot (0,1 \cdot t - e^{-0,2t})$ — желаемый выход скорректированной системы. Тогда, воспользовавшись формулой (2.30), найдем параметры регулятора.

Оптимальные параметры регулятора равны:

$$p_1^* = -0,86; p_2^* = -0,04; p_3^* = -0,5514; p_4^* = 0,4722; p_5^* = 0,7736; p_6^* = 0,0432.$$

Поведение скорректированной системы с регулятором представлено на рис. 2.16–2.19.

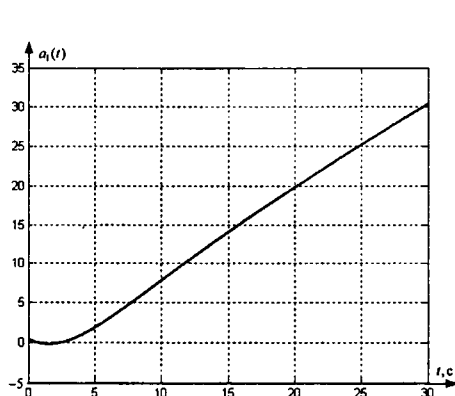


Рис. 2.16. График изменения коэффициента a_1 объекта управления

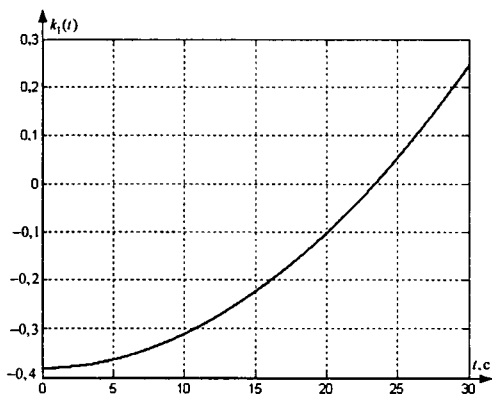


Рис. 2.17. График изменения коэффициента усиления регулятора в прямой цепи

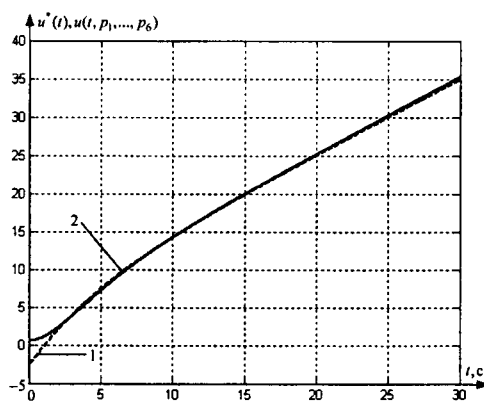


Рис. 2.18. Полученное при решении обратной задачи динамики (1) и реальное (2) управление, поступающее с регулятора на ОУ

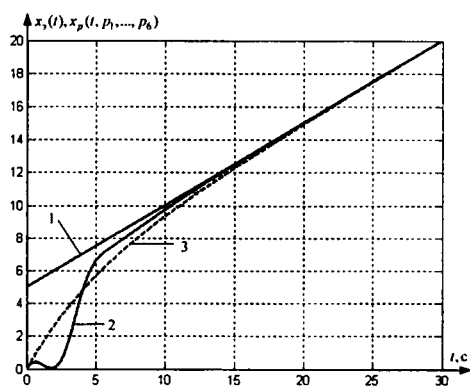


Рис. 2.19. Эталонный (2) и реальный (3) выход скорректированной системы ((1) — эталонный сигнал, поступающий на вход системы — $y_s(t)$)

Пример 2.3. Задача синтеза регулятора в системе самонаведения состоит в нахождении оптимального значения константы навигации λ^* . При методе пропорционального сближения ракеты и цели в режиме движения на встречных курсах структурная схема системы управления самонаводящейся ракетой имеет вид (рис. 2.20, 2.21) [66, 118]. В этом случае линеаризованное уравнение относительно движения ракеты запишется так [66, 118]:*

$$r(t)\Delta\dot{\varphi}(t) + \dot{r}(t)\Delta\varphi(t) = -V(t)\Delta\theta(t) + V_u(t)\Delta\theta_u(t),$$

* Здесь, чтобы изложение положений метода сделать независимым от материала, изложенного в 1 томе учебника, имеет место некоторое повторение описания работы системы самонаведения.

где V — скорость ракеты; V_u — скорость цели; $\Delta\varphi$ — приращение угла линии визирования цели; $\Delta\dot{\varphi}$ — скорость вращения линии визирования; $\Delta\theta$ — приращение угла траектории ракеты; $\Delta\theta_u$ — приращение угла траектории цели; r — расстояние между ракетой и целью на опорной траектории, причем $\dot{r}(t) = V_u(t) - V(t)$, $n(t)$ — помеха.

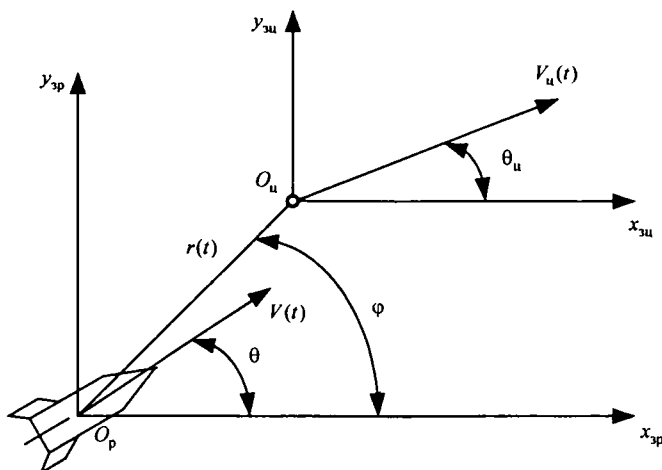


Рис. 2.20. Основные геометрические соотношения при параллельном методе наведения

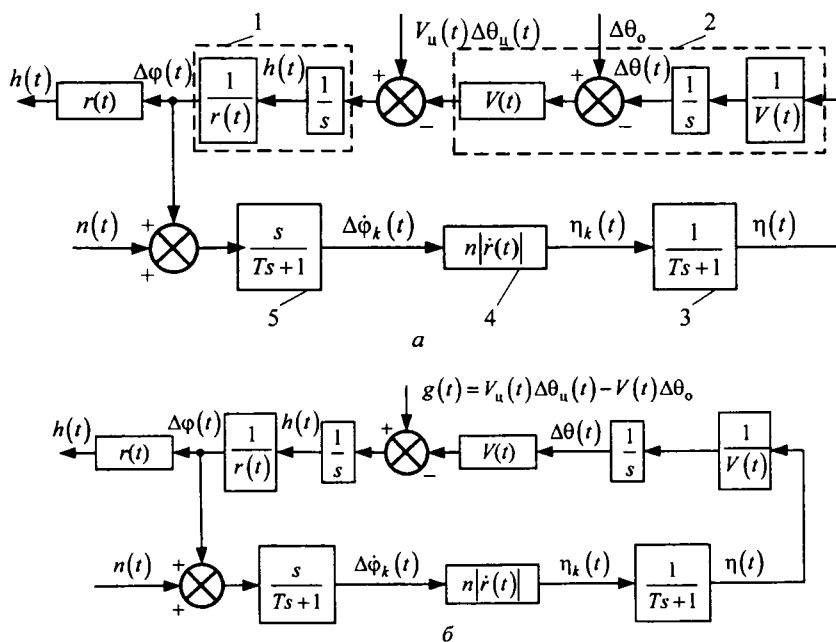


Рис. 2.21. Структурные схемы системы управления самонаводящейся ракетой: а — исходная схема; б — преобразованная схема

Выходной сигнал системы — линейное смещение ракеты $h(t)$ относительно опорной невращающейся линии визирования цели (линия, соединяющая центры масс ракеты и цели):

$$h(t) = r(t)\Delta\varphi(t).$$

За величину промаха (ошибки) h принимается значение $h(t)$ в момент выключения координатора $t = t_{\text{вык}}$. При исследовании систем управления целесообразно также пользоваться понятием о текущем промахе $h(t)$, характеризующем величину отклонения ракеты от цели в картинной плоскости при предположении о том, что, начиная с данного момента времени t , процесс наведения прекращается и векторы скоростей цели и ракеты остаются неизменными (рис. 2.22).

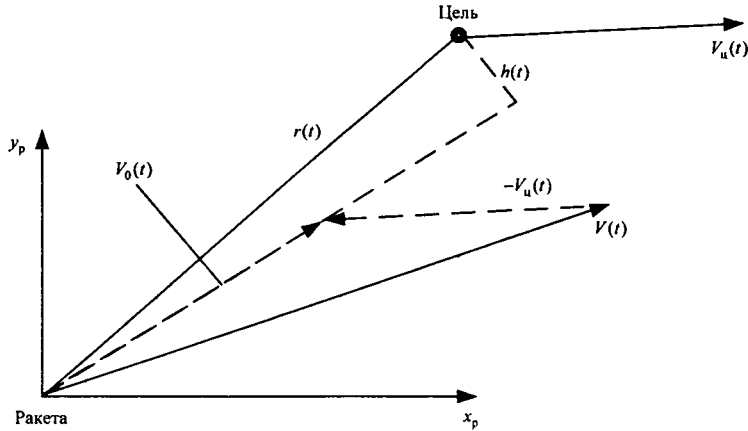


Рис. 2.22. К определению промаха ракеты ($V_0(t)$ — скорость ракеты относительно цели)

Из внешних воздействий системы учтены: маневр цели, описываемый функцией $V_u(t)\Delta\theta_u$, начальная ошибка прицеливания $\Delta\theta_0 = \text{const}$ и помеха $n(t)$.

С помощью структурного преобразования, заключающегося в переносе воздействия $\Delta\theta_0$ к точке приложения воздействия $V_u(t)\Delta\theta_u(t)$, исходная схема (рис. 2.21, а) примет вид (рис. 2.21, б). На этой схеме $g(t) = V_u(t)\Delta\theta_u(t) - V(t)\Delta\theta_0$ — внешнее воздействие, эквивалентное маневру цели и начальной ошибке прицеливания.

Скалярное дифференциальное уравнение системы самонаведения при отсутствии помехи имеет вид (см. том 1)

$$l_4(t) \frac{d^4 h(t)}{dt^4} + l_3(t) \frac{d^3 h(t)}{dt^3} + l_2(t) \frac{d^2 h(t)}{dt^2} + l_1(t) \frac{dh(t)}{dt} + l_0(t) h(t) = \\ = d_3(t) \frac{d^3 g(t)}{dt^3} + d_2(t) \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + d_1(t) \frac{dg(t)}{dt} + d_0(t) g(t).$$

Решим задачу расчета оптимальной константы навигации n для следующих параметров движения ракеты и цели:

- скорость ракеты $V(t) = 200(1+t)$ м/с;
- скорость цели $V_u(t) = 400$ м/с;
- изменение расстояния между ракетой и целью $r(t) = 100(45 - 6t - t^2)$;
- задающее воздействие

$$g(t) = g_3(t) = V_u \Delta\theta_u(t) - V(t) \Delta\theta_0(t) = V_u \cdot 0,05 - V(t) \cdot 0,05;$$

- эталонный промах системы наведения

$$h_s(t) = (45 - 6t - t^2) \cdot \left\{ \eta_u (-0,00055 + 0,00539t - 0,00116t^2 + 0,01198t^3 - 0,00386t^4 + 0,00051t^5) + \right. \\ \left. + \Delta\theta_0 (0,03958 - 4,77453t - 2,14545t^2 - 0,60758t^3 + 0,20813t^4 - 0,02878t^5) \right\},$$

где

$$\eta_u = V_u(t) \Delta\theta_u.$$

Коэффициенты дифференциального уравнения в этом случае будут иметь вид:

$$\begin{pmatrix} l_0(t) \\ l_1(t) \\ l_2(t) \\ l_3(t) \\ l_4(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0,54/n & 2,16/n & 3,42/n & 2,72/n & \\ -17,31 + 4,05n & -44,89 + 14,31n & -29,87 + 18,63n & 2,7 + 10,41n & \\ 17,31 & 62,21 & 74,77 & 27,17 & \\ 10,935 & 34,55 & 35,89 & 10,45 & \\ 0,911 & 2,79 & 2,81 & 0,78 & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,14/n & 0,24/n & 0,02/n & 0,00/n & 0,00/n \\ 3,56 + 1,79n & -0,0125 - 0,39n & -0,0815 - 0,15n & -0,005 - 0,01n & 0,00 \\ -6,26 & -3,55 & 0,094 & 0,087 & 0,005 \\ -3,27 & -1,42 & 0,055 & 0,036 & 0,002 \\ -0,26 & -0,11 & 0,0045 & 0,0027 & 0,00015 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \\ \vdots \\ t^8 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} d_0(t) \\ d_1(t) \\ d_2(t) \\ d_3(t) \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} -17,3 & -44,89 & -29,87 & 2,7 & 3,56 & -0,0125 & -0,082 & -0,005 & 0,00 \\ 17,31 & 62,2 & 74,77 & 27,17 & -6,26 & -3,55 & 0,094 & 0,087 & 0,005 \\ 10,935 & 34,55 & 35,89 & 10,45 & -3,27 & -1,42 & 0,055 & 0,0357 & 0,002 \\ 0,911 & 2,79 & 2,81 & 0,775 & -0,261 & -0,11 & 0,0045 & 0,0027 & 0,00015 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \vdots \\ t^8 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, система управления самонаводящейся ракеты описывается скалярным дифференциальным уравнением 4-го порядка с переменными коэффициентами:

$$\sum_{k=0}^4 l_k(t, n) h^{(k)} = \sum_{k=0}^3 d_k(t, n) g^{(k)}(t),$$

где $g(t)$ — входной сигнал, пропорциональный маневру цели и начальной ошибке прицеливания, $h(t)$ — выход системы, характеризующий текущее значение промаха. Коэффициенты уравнения системы самонаведения зависят от величины n (константы навигации), существенным образом влияющей на скорость наведения и, как следствие, на значение промаха в момент выключения координатора. *Задачу синтеза системы самонаведения можно сформулировать как задачу нахождения такого параметра n , при котором реальный промах ракеты $h(t)$ и эталонный $h_s(t)$ будут близки.*

Рассмотрим решение поставленной задачи методом порождающих функций.

Интегральное уравнение, эквивалентное дифференциальному уравнению, имеет вид

$$\int_0^t h(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [l_k(\tau, n) P_i(\tau)(t-\tau)^n] \right\} d\tau = \int_0^t g(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [d_k(\tau, n) P_i(\tau)(t-\tau)^n] \right\} d\tau,$$

где $P_i(\tau)$ — порождающие функции. Пусть $g_s(t)$ — эталонный входной сигнал, а $h_s(t)$ — эталонный промах. Тогда, обозначив левую и правую часть интегрального уравнения $f_i^h(t, n)$ и $f_i^g(t, n)$ соответственно

$$f_i^h(t, n) = \int_0^t x_s(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^4 \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [l_k(\tau, n) P_i(\tau)(t-\tau)^n] \right\} d\tau,$$

$$f_i^g(t, n) = \int_0^t y_s(\tau) \left\{ \sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [d_k(\tau, n) P_i(\tau)(t-\tau)^n] \right\} d\tau,$$

можно записать соотношение для i -ой невязки:

$$E_i(t, n) = f_i^x(t, n) - f_i^y(t, n).$$

Неизвестный параметр системы n будем искать из условия минимума квадратичного функционала вида

$$I(n) = \int_0^T E_i^2(\tau, n) d\tau \rightarrow \min_n.$$

Пусть $\{\varphi_i(\tau)\}_{i=0}^l$ — некоторая линейно независимая система. Количество невязок, которое необходимо брать в функционале, во многом зависит от конфигурации исходной системы управления и выбранной структуры регулятора. *При использовании нескольких невязок можно снизить зависимость решения, получаемого в результате минимизации, от выбора начальных условий в стартовой точке при реализации процесса поиска оптимальных в указанном выше смысле параметров (в данном случае параметра n).* Однако следует отметить, что увеличение числа невязок в функционале иногда не приводит к повышению точности расчета параметров.

В рассматриваемой задаче используем в качестве порождающих функций первые 3 члена полиномов Лежандра. Исходный функционал запишется так:

$$I(n) = \int_0^4 \sum_{i=0}^2 E_i^2(\tau, n) d\tau = 0,244 \cdot 10^7 n^2 - 0,957 \cdot 10^7 n + 0,941 \cdot 10^7.$$

Безусловный минимум функционала достигается в точке $n^* = 1,963787$.

Эталонный промах и промах системы наведения с полученным параметром навигации приведены на рис. 2.23.

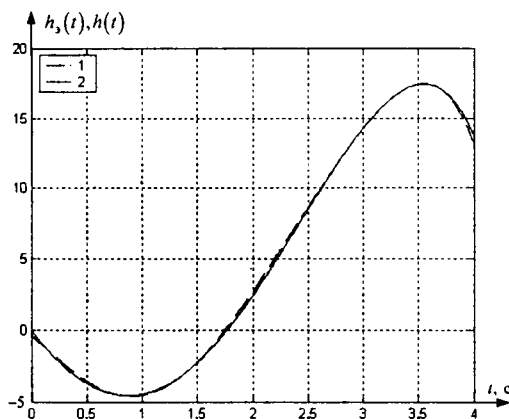


Рис. 2.23. Эталонный (1) и реальный (2) промах системы самонаведения

2.4. МЕТОД МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЙ ВЫБОР ЕГО СТРУКТУРЫ И ИЗМЕНЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ

Рассматриваемый в этом параграфе метод устраняет недостатки, присущие методам, содержание которых изложено в параграфах 2.2 и 2.3.

Принцип динамической компенсации (см. п. 2.2) детально рассмотрен и его недостатки отражены в главе 1.

Метод порождающих функций эффективен с инженерной точки зрения, но необходимость знания ДУ замкнутой нестационарной системы принципиально затрудняет его применение при проектировании САУ высокого порядка (см. главу 2, том 1).

Одно из важнейших достоинств метода матричных операторов — возможность нахождения матричного оператора замкнутой системы практически любой степени сложности и заданной как с помощью скалярных дифференциальных уравнений или их систем, так и сложными структурными схемами. Таким образом, метод матричных операторов приводит к инженерному решению задачи построения оператора сложной САУ по операторам её элементов и практически дословно повторяет положения, связанные с определением ПФ сложной стационарной системы, если известна её структурная схема и ПФ всех её элементов. Аппарат матричных операторов даже имеет определенные преимущества: он ориентирован на применение ЭВМ (операции с матрицами) и одинаково эффективен как для класса стационарных, так и нестационарных систем.

Рассмотрим основные положения метода. Он предполагает выбор проектировщиком структуры и его изменяемых параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$ из соображений степени сложности его реализации и возможности обеспечения заданного качества управления. С инженерной точки зрения такой подход является более практичным и

дает возможность учесть опыт расчета ранее проектируемых систем аналогичного назначения.

Если $p_1, p_2, \dots, p_r$ — изменяемые параметры регулятора, то матричный оператор замкнутой системы определяется формулой

$$A(p) = A_o A_{ky}(p) (I + A_o A_{ky}(p))^{-1} = (a_{ij}(p))_{i,j=1}^l. \quad (2.31)$$

Из последней зависимости следует, что для получения матрицы оператора $A(p)$ (нахождение элементов $a_{ij}(p)$, зависящих от параметров КУ) необходимо обратить символьную матрицу, что представляет в общем случае (при больших значениях l) достаточно сложную задачу.

Задача значительно упрощается, если использовать разложение обратной матрицы в матричный ряд, представляющий собой геометрическую прогрессию со знаменателем $(-A_o A_{ky}(p))$ [118].

С учетом сказанного (2.31) принимает вид [118]

$$A(p) = A_o A_{ky}(p) (I + A_o A_{ky}(p))^{-1} = A_o A_{ky}(p) \left[\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v (A_o A_{ky}(p))^v \right]. \quad (2.32)$$

Поскольку реальный выходной сигнал, являющийся реакцией на эталонное воздействие $y(t)$, определяется зависимостью $x_p(t, p) = [C^x(p)]^T \Phi(t)$, где

$$\begin{aligned} C^x(p) &= \left[A_o A_{ky}(p) (I + A_o A_{ky}(p))^{-1} \right] C^y = \\ &= \left\{ A_o A_{ky}(p) \left[\sum_{v=0}^{\infty} (-1)^v (A_o A_{ky}(p))^v \right] \right\} C^y, \end{aligned} \quad (2.33)$$

а эталонный выход имеет вид

$$x_3(t) = \Phi^T(t) C_3^x = [C_3^x]^T \Phi(t),$$

то функционал, определяемый соотношением

$$I(p) = \int_0^T [x_p(t, p) - x_3(t)]^2 dt \rightarrow \min_p, \quad (2.34)$$

в терминах матричных операторов можно записать так:

$$I(p) = \int_0^T [C^x(p) - C_3^x]^T \cdot \Phi(\tau) \cdot \Phi^T(\tau) \cdot [C^x(p) - C_3^x] d\tau.$$

Отсюда имеем

$$I(p) = [C^x(p) - C_3^x]^T \cdot [C^x(p) - C_3^x] \rightarrow \min_p. \quad (2.35)$$

Таким образом, в результате перехода к матричному оператору системы автоматического управления функционал (2.34) свелся к виду (2.35). Это значительно упрощает вычисления, поскольку операции над матрицами и векторами значительно проще реализовать на ЭВМ, чем операции над функциями.

В пространстве состояний задача формулируется так:

- 1) заданы векторно-матричные ДУ объекта и регулятора и структурная схема системы (рис. 2.24):

$$\dot{X}(t) = A_o(t)X + B_o(t)u; \quad x = C_o(t)X; \quad (2.36)$$

$$\dot{X}_{\text{кy}}(t) = A_{\text{кy}}(t, p)X_{\text{кy}} + B_{\text{кy}}(t, p)\varepsilon; \quad u = C_{\text{кy}}(t, p)X_{\text{кy}}; \quad (2.37)$$

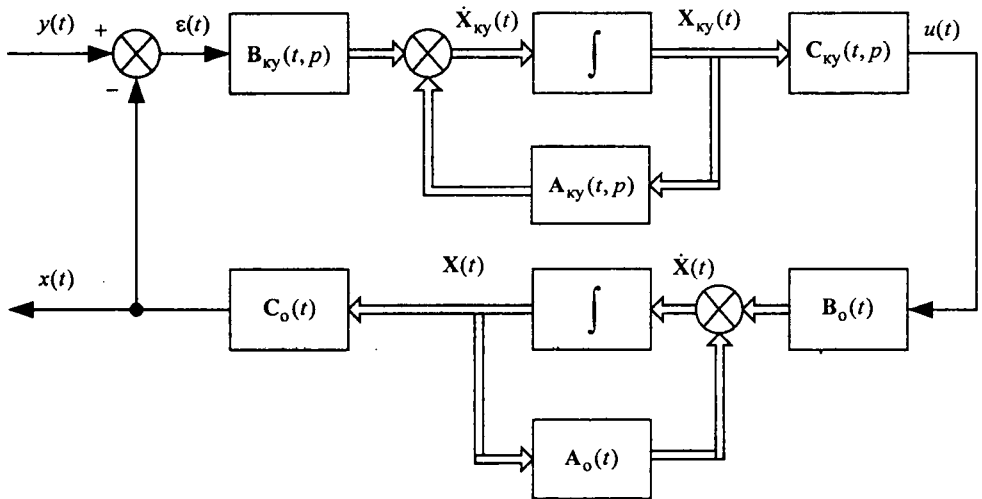


Рис. 2.24. Структурная схема системы автоматического управления

2) численные значения параметров регулятора находятся из условия

$$I(p) = \int_0^T [x_p(t, p) - x_s(t)]^2 dt \rightarrow \min_p$$

при следующих ограничениях:

- обеспечивается устойчивость системы (см. главу 2, том 1);
- $X(t) \in X^{n_0} \quad \forall t \in [0, T]$, X^{n_0} — заданная область;
- $u(t) \in U^1 \quad \forall t \in [0, T]$, U^1 — заданная область;
- $p_i^m \leq p_i \leq p_i^M, \quad i = \overline{1, r}$;
- $C_i < C_{i \text{ доп}}$, где C_i — коэффициенты ошибок (для стационарной системы).

Сформулированные задачи решаются методами нелинейного программирования.

Пример 2.4. Процедуру решения задачи синтеза проиллюстрируем на примере стационарной системы, структурная схема которой представлена на рис. 2.25.

Поведение САУ описывается следующей системой дифференциальных уравнений:

$$a_1^{\text{кy}} u'(t) + a_0^{\text{кy}} u(t) = b_2^{\text{кy}} \varepsilon''(t) + b_1^{\text{кy}} \varepsilon'(t) + b_0^{\text{кy}} \varepsilon(t),$$

где входной сигнал регулятора $\varepsilon(t)$ определяется зависимостью

$$\varepsilon(t) = y(t) - x(t);$$

$y(t)$ и $x(t)$ — соответственно входной и выходной сигналы системы управления. При этом выходной сигнал определяется дифференциальным уравнением

$$a_3^o x''(t) + a_2^o x'(t) + a_1^o x(t) = b_1^o u'(t) + b_0^o u(t).$$

Коэффициенты дифференциального уравнения объекта имеют следующие значения:

$$a_3^o = 1; a_2^o = 3,1; a_1^o = 2,9; a_0^o = 3; b_1^o = 2; b_0^o = 3; a_1^{\text{кy}} = 1; a_0^{\text{кy}} = 0.$$

Требуется определить оптимальные значения коэффициентов $b_2^{\text{кy}}, b_1^{\text{кy}}, b_0^{\text{кy}}$ дифференциального уравнения корректирующего устройства, которым соответствуют параметры K_d, K, K_i ПИД-регулятора, исходя из условия обеспечения минимального отклонения выходного сигнала системы $x_p(t, p)$ от

эталонного $x_s(t)$. Эталонный процесс $x_s(t) = 1 - e^{-3t}$ задан как желаемая реакция на ступенчатый входной сигнал $y_s(t) = 1(t)$.

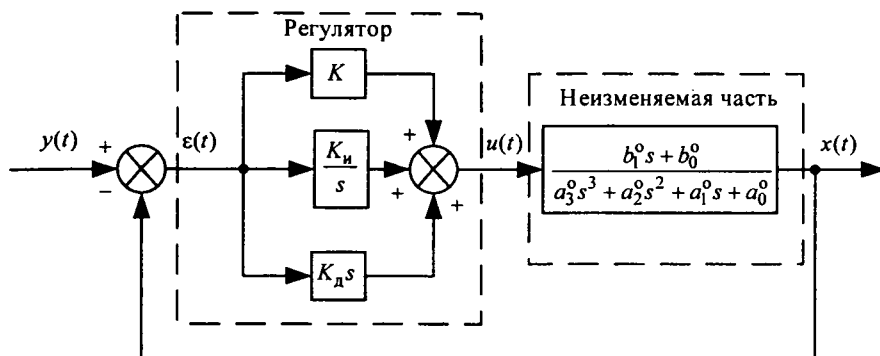


Рис. 2.25. Структурная схема системы

С помощью метода матричных операторов определены следующие оптимальные значения параметров регулятора:

$$K_n^* = (b_0^{xy})^* = 2,4810;$$

$$K^* = (b_1^{xy})^* = 1,4669;$$

$$K_d^* = (b_2^{xy})^* = 1,5697.$$

В качестве стартовой точки поиска экстремума были взяты следующие значения параметров:

$$K_n = 0,1;$$

$$K = 1;$$

$$K_d = 0.$$

На рис. 2.26 представлены графики эталонного и реального переходных процессов до выполнения оптимизации (стартовая точка) и график для найденных оптимальных значений параметров ПИД-регулятора.

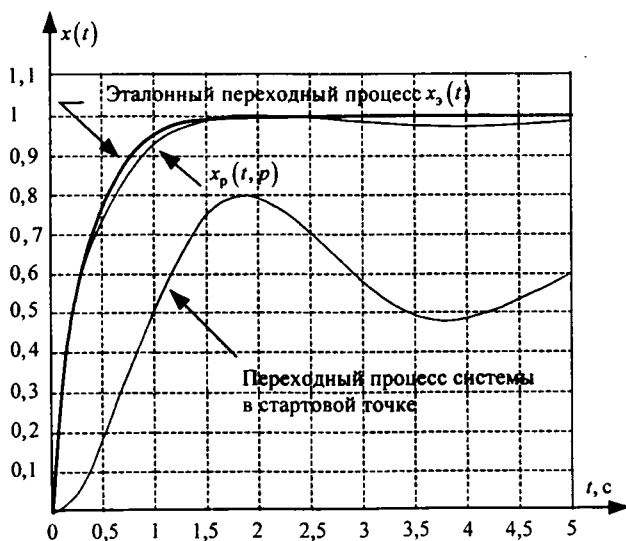


Рис. 2.26. Эталонный и реальный выходные сигналы системы до оптимизации параметров регулятора и после оптимизации

Пример 2.5. Синтез системы самонаведения методом матричных операторов.

Этап 1. Получение матричного оператора замкнутой системы.

Представим структурную схему системы самонаведения при пропорциональном методе наведения на цель с учетом того, что сближение идет на встречных курсах (рис. 2.27).

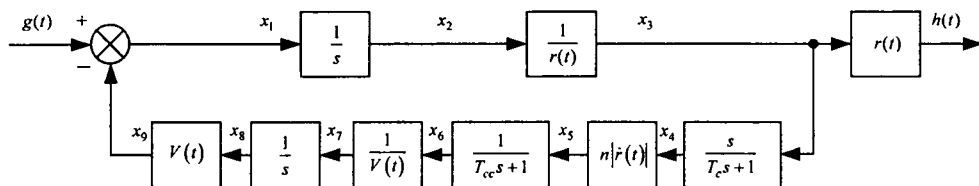


Рис. 2.27. Структурная схема системы самонаведения

На схеме: 1, 2 — кинематические звенья; 3 — система стабилизации; 4 — блок выработки команд, реализующий алгоритм наведения; 5 — координатор цели, измеряющий скорость вращения линии визирования; $h(t)$ — выходной сигнал системы (характеризует промах ракеты в каждый момент времени); линейное смещение ракеты относительно опорной невращающейся линии визирования; $g(t) = V_u(t)\Delta\theta_u(t) - V(t)\Delta\theta_0$ — задающее воздействие, учитывающее маневр цели $\Delta\theta_u(t)$ и начальную ошибку прицеливания $\Delta\theta_0$; T_{cc} — постоянная времени системы стабилизации; T_c — постоянная времени координатора цели; n — константа навигации.

Существенно улучшить динамические характеристики системы самонаведения, а следовательно, и качество процесса наведения, позволяет включение в контур наведения дополнительного корректирующего устройства — ПИД-регулятора, как это показано на рис. 2.28.

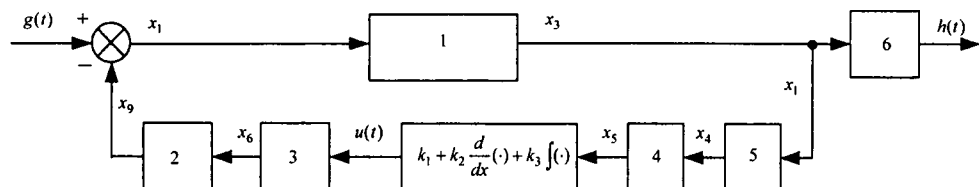


Рис. 2.28. Структурная схема системы самонаведения с ПИД-регулятором

Перейдем от описания системы самонаведения в виде структурной схемы к описанию матричными операторами на конечном интервале времени $[0, T]$. Для этого запишем соотношения, связывающие вход и выход каждого из функциональных блоков системы:

$$\begin{aligned} x_2(t) &= \int_0^t x_1(\tau) d\tau + x_2(0), \\ x_3(t) &= \frac{1}{r(t)} x_2(t), \\ x_4(t) &= \frac{1}{T_c} \int_0^t \dot{x}_3(\tau) d\tau - \frac{1}{T_c} \int_0^t x_4(\tau) d\tau + x_4(0) = \\ &= \frac{x_3(t)}{T_c} - \frac{1}{T_c} \int_0^t x_4(\tau) d\tau + x_4(0), \\ x_5(t) &= n|\dot{r}(t)| x_4(t), \\ u(t) &= k_3 \int_0^t x_5(\tau) d\tau + k_1 x_5(t) + k_2 x_5'(t) + u(0), \\ x_6(t) &= \frac{1}{T_{cc}} \int_0^t u(\tau) d\tau - \frac{1}{T_{cc}} \int_0^t x_6(\tau) d\tau + x_6(0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 x_7(t) &= \frac{1}{V(t)} x_6(t), \\
 x_8(t) &= \int_0^t x_7(\tau) d\tau + x_8(0), \\
 x_9(t) &= V(t) x_8(t), \\
 x_{10}(t) &= g(t) - x_9(t), \\
 h(t) &= r(t) x_3(t).
 \end{aligned}$$

Пусть $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированный базис, $\Phi(t) = [\varphi_1(t), \dots, \varphi_l(t)]^T$ — вектор-столбец базисных функций. Тогда, согласно методу матричных операторов, векторы коэффициентов Фурье разложений входных и выходных сигналов каждого из функциональных блоков системы по базису $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ будут связаны следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}
 C^{x_2} &= A_n C^{x_1} + x_2(0) \Phi_N, \\
 C^{x_3} &= A(1/r(t)) C^{x_2}, \\
 C^{x_4} &= [I - a_3 A_n]^{-1} a_4 C^{x_3} + [I - a_3 A_n]^{-1} x_4(0) \Phi_N, \\
 C^{x_5} &= A(n|\dot{r}(t)|) C^{x_4}, \\
 C^{u(t)} &= [k_3 A_n + k_1 I + k_2 A_d] C^{x_4} + u(0) \Phi_N, \\
 C^{x_6} &= [I - a_6 A_n]^{-1} a_5 C^{u(t)} + [I - a_6 A_n]^{-1} x_6(0) \Phi_N, \\
 C^{x_7} &= A(1/V(t)) C^{x_6}, \\
 C^{x_8} &= A_n C^{x_7} + x_8(0) \Phi_N, \\
 C^{x_9} &= A(V(t)) C^{x_8}, \\
 C^{x_{10}} &= C^g - C^{x_9}, \\
 C^h &= A(r(t)) C^{x_3},
 \end{aligned} \tag{2.38}$$

где

A_n — матричный оператор интегрирования в базисе $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^l$;

A_d — матричный оператор дифференцирования в базисе $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^l$;

$A(f(t))$ — матричный оператор умножения на функцию $f(t)$ в базисе $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^l$;

I — единичная матрица размерностью $l \times l$;

$$\Phi_N^T = \begin{bmatrix} \int_0^T \varphi_0(t) dt & \dots & \int_0^T \varphi_l(t) dt \end{bmatrix};$$

$$a_3 = -\frac{1}{T_c}, \quad a_4 = \frac{1}{T_c}, \quad a_5 = \frac{1}{T_{cc}}, \quad a_6 = -\frac{1}{T_{cc}}.$$

На основе соотношений (2.38) можно записать матричный оператор для каждого блока системы:

$$\begin{aligned}
 A_1 &= A_n, \\
 A_2 &= A(1/r(t)), \\
 A_3 &= [I - a_3 A_n]^{-1} a_4, \\
 A_4 &= n \cdot A(|\dot{r}(t)|), \\
 A_{xy} &= [k_1 I + k_2 A_d + k_3 A_n], \\
 A_5 &= [I - a_6 A_n]^{-1} a_5 A_n, \\
 A_6 &= A(1/V(t)),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_7 &= A_n, \\ A_8 &= A(V(t)), \\ A_9 &= A(r(t)). \end{aligned}$$

Структурная схема системы самонаведения в терминах матричных операторов представлена на рис. 2.29.

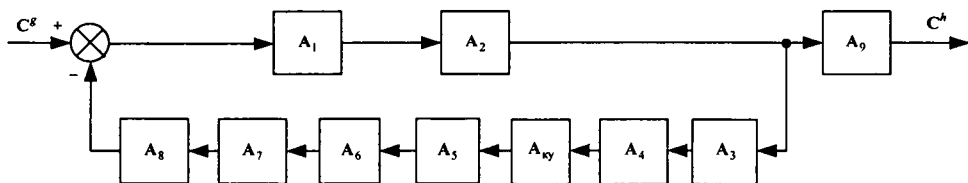


Рис. 2.29. Структурная схема системы самонаведения

Воспользовавшись аппаратом структурных преобразований, получим матричный оператор замкнутой системы:

$$A_{10} = A_2 \cdot A_1, \quad A_{11} = A_8 \cdot A_7 \cdot A_6 \cdot A_5 \cdot A_{xy} \cdot A_4 \cdot A_3. \quad (2.39)$$

Преобразованная структурная схема системы самонаведения с учетом (2.39) изображена на рис. 2.30.

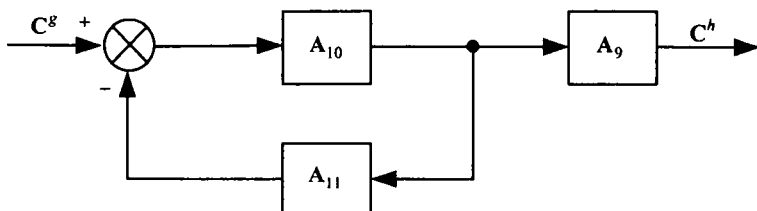


Рис. 2.30. Преобразованная структурная схема системы самонаведения

Выражение для матричного оператора замкнутой системы имеет вид

$$A = A_9 \cdot A_{10} [I + A_{11} \cdot A_{10}]^{-1}. \quad (2.40)$$

При его получении следует учесть, что параметры корректирующего устройства и блока выработки команд не заданы $A = A(p) = A(k_1, k_2, k_3, n)$, т.е. каждый из элементов матрицы оператора A будет представлять собой функцию четырех переменных.

Этап 2. Формирование функционала качества и его минимизация.

Пусть $h_s(t)$ — эталонный промах системы самонаведения при заданном входном воздействии $g(t)$. Задача синтеза состоит в отыскании таких параметров $p = \{k_1, k_2, k_3, n\}$, чтобы обеспечивалась максимальная близость реального выходного сигнала системы $h(t)$ и эталонного на временном интервале $\Omega = [0, T]$ по норме пространства $L^2(\Omega)$, т.е.

$$I(p) = \|h_s(t) - h_p(t, p)\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_0^T \|h_s(t) - h_p(t, p)\|^2 dt \rightarrow \min_p. \quad (2.41)$$

В соответствии с методом матричных операторов представим входной сигнал $g(t)$, реальный выходной сигнал $h(t)$ и эталонный выходной сигнал $h_s(t)$ в виде разложений по базису $\{\varphi_k(t)\}$:

$$g(t) \approx \tilde{g}_I(t) = \sum_{k=1}^l c_k^g \varphi_k(t), \quad (2.42)$$

$$h_p(t, p) \approx \tilde{h}_p(t, p) = \sum_{k=1}^l c_k^h \varphi_k(t), \quad (2.43)$$

$$h_s(t) \approx \tilde{h}_s(t) = \sum_{k=1}^l c_k^h \varphi_k(t). \quad (2.44)$$

Вектор коэффициентов Фурье сигнала на выходе системы самонаведения определяется через матричный оператор системы:

$$C^h(p) = A(p)C^g. \quad (2.45)$$

Подставим (2.44), (2.45) в функционал (2.41):

$$\begin{aligned} I(p) &= \int_0^T \|\tilde{h}_s(t) - \tilde{h}_p(t, p)\|^2 dt = \int_0^T \left\| \sum_{k=1}^l c_k^h \varphi_k(t) - \sum_{k=1}^l c_k^h(p) \varphi_k(t) \right\|^2 dt = \\ &= \int_0^T \left\| \sum_{k=1}^l [c_k^h - c_k^h(p)] \varphi_k(t) \right\|^2 dt = \sum_{k=1}^l [c_k^h - c_k^h(p)]^2 \|\varphi_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

Поскольку базис $\{\varphi_k(t)\}$ — ортонормированный, то

$$\int_0^T \varphi_k^2(t) dt = \|\varphi_k(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 = 1 \quad \forall k = \overline{1, l}$$

и

$$I(p) = \sum_{k=1}^l [c_k^h - c_k^h(p)]^2 \rightarrow \min_p. \quad (2.46)$$

Задача поиска минимума квадратичного функционала (2.46) решается методами математического программирования. Следует отметить, что функционал качества $I(p)$ представляет собой «существенно» многоэкстремальную функцию четырех переменных. Этот факт говорит о значительной сложности задачи поиска глобального минимума и, как следствие, большой вероятности попадания в локальные минимумы. Имеет место зависимость процесса поиска от выбора начальной точки p_0 (стартовая точка). Для нахождения оптимальных параметров необходимо проводить процедуру минимизации функционала с различными начальными условиями, а затем из полученной последовательности выбрать те параметры, которые обеспечивают наилучшее приближение реального промаха к эталонному.

Необходимо отметить, что для получения соотношения, определяющего функционал $I(p)$, в явной форме зависящего от неизвестных параметров, используется разложение обратной матрицы в формуле (2.40) в матричный ряд.

Этап 3. Решение задачи синтеза при конкретных исходных данных.

Рассмотрим пример решения задачи синтеза системы самонаведения методом матричных операторов при следующих исходных данных:

- скорость ракеты $V(t) = 200(1+t)$ м/с;
- скорость цели $V_u(t) = 400$ м/с;
- изменение расстояния между ракетой и целью: $r(t) = 100(45 - 6t - t^2)$;
- задающее воздействие (начальная ошибка прицеливания отсутствует)
 $g(t) = g_s(t) = V_u \Delta \theta_u(t) - V(t) \Delta \theta_o(t) = V_u \cdot 0,05 - V(t) \cdot 0$;
- эталонный промах системы наведения

$$\begin{aligned} h_s(t) &= 0,0052273 - 0,14704t - 0,1316 \cdot t^2 + 0,2623 \cdot t^3 - 0,34316 \cdot t^4 + \\ &+ 0,2289 \cdot t^5 - 0,087269 \cdot t^6 + 0,019583 \cdot t^7 - 0,0024174 \cdot t^8 + 0,0001267 \cdot t^9. \end{aligned}$$

Решение проведем на интервале времени $[0, 4]$ с, а в качестве ортонормированного базиса $\{\varphi_k(t)\}_{k=1}^\infty$ будем использовать полиномы Лежандра, ортонормированные на интервале $[0, 4]$. При расчете матричных операторов учитывалось 7 базисных функций, т.е. $l = 7$. Функционал в этом случае имеет вид

$$I(p) = \sum_{k=1}^7 [c_k^h - c_k^h(p)]^2 \rightarrow \min_p.$$

В результате минимизации функционала получены следующие параметры (минимизация проводилась с использованием специализированных процедур поиска точек экстремума математического пакета *Matlab 6.0*):

$$p_1^* = k_1^* = 0,91340;$$

$$p_2^* = k_2^* = 9,36500;$$

$$p_3^* = k_3^* = 21,1821;$$

$$p_4^* = n^* = 50,2110,$$

$$I(p^*) = 0,0138.$$

Графики эталонного промаха и промаха синтезированной системы представлены на рис. 2.31.

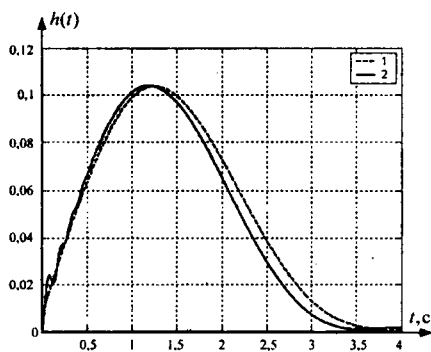


Рис. 2.31. Эталонный (1) и реальный (2) промах системы самонаведения

На рис. 2.31 в качестве реального промаха системы самонаведения была взята реакция модели, построенной в системе *Simulink* (*Matlab* 6.0), с соответствующими параметрами ПИД-регулятора и устройства формирования команд.

ГЛАВА 3. МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В двух предыдущих главах рассматривались положения, связанные с ключевой проблемой теории автоматического управления — *синтезом регуляторов*. Указанная проблема по известным причинам становится более сложной для класса нелинейных систем. В настоящей главе изложены некоторые подходы к решению проблемы синтеза регуляторов, причём учитывались следующие обстоятельства:

- наличие хорошо обоснованных теоретических положений;
- наличие алгоритмов, направленных на решение достаточно сложных инженерных задач, и подтверждение их эффективности.

3.1. ПРИНЦИП ДИНАМИЧЕСКОЙ КОМПЕНСАЦИИ

Здесь рассматривается класс систем, задачи синтеза которого излагаются на единой методологической основе, какой является описание систем функциональными рядами Вольтерра [26, 51, 92, 93, 101, 134, 140]. Теория, в основе которой лежат ряды Вольтерра, называемая обычно *аналитической теорией нелинейных систем*, имеет целый ряд привлекательных черт: *она применима для решения широкого круга нелинейных задач и опирается на строгий математический аппарат*. Понятия ИПФ и ПФ, которые являются эффективным инструментом анализа и синтеза линейных систем, распространяются и на нелинейные системы — *тем самым вносится методологическое единообразие при построении методов расчета и проектирования систем в рамках аналитической теории*.

Рассмотрим основные положения задачи синтеза регуляторов, пользуясь аналитической теорией нелинейных систем (детальное изложение этой теории можно найти в [26, 51, 92, 93, 101, 134, 140]). Структурная схема нелинейной системы автоматического управления представлена на рис. 3.1.

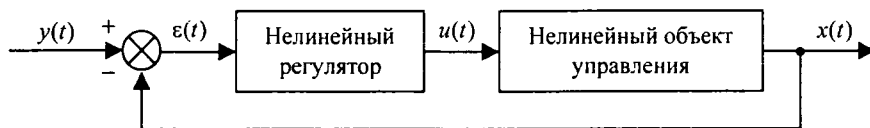


Рис. 3.1. Структурная схема САУ

Положим, что элементы САУ (рис. 3.1) описываются рядами Вольтерра:

$$u(t) = \sum_{v=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t k_{\text{кв}}^v(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_v) \varepsilon(t-\tau_1) \varepsilon(t-\tau_2) \dots \varepsilon(t-\tau_v) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_v$$

— ряд Вольтерра, описывающий поведение регулятора;

$$x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t k_o^i(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_i) \varepsilon(t-\tau_1) \varepsilon(t-\tau_2) \dots \varepsilon(t-\tau_i) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_i$$

— ряд Вольтерра, описывающий поведение объекта;

$$x(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t k_p^j(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j) \varepsilon(t - \tau_1) \varepsilon(t - \tau_2) \dots \varepsilon(t - \tau_j) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_j,$$

$$x(t) = \sum_{p=1}^{\infty} \int_0^t \dots \int_0^t k^p(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_p) y(t - \tau_1) y(t - \tau_2) \dots y(t - \tau_p) d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_p$$

— соответственно ряды Вольтерра, описывающие поведение разомкнутой и замкнутой системы.

Воспользовавшись понятием многомерной передаточной функции (см. Приложение 1, том 2), определяемой зависимостью

$$W(s_1, s_2, \dots, s_n) = \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} k(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n) e^{-s_1 \tau_1} e^{-s_2 \tau_2} \dots e^{-s_n \tau_n} d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n,$$

можно заключить, что в рассматриваемой задаче имеют место следующие передаточные функции:

$W_{\text{кв}}^1(s_1), W_{\text{кв}}^2(s_1, s_2), W_{\text{кв}}^3(s_1, s_2, s_3), \dots, W_{\text{кв}}^v(s_1, s_2, \dots, s_v)$ — ПФ регулятора;

$W_o^1(s_1), W_o^2(s_1, s_2), W_o^3(s_1, s_2, s_3), \dots, W_o^i(s_1, s_2, \dots, s_i)$ — ПФ объекта управления;

$W_p^1(s_1), W_p^2(s_1, s_2), W_p^3(s_1, s_2, s_3), \dots, W_p^j(s_1, s_2, \dots, s_j)$ — ПФ разомкнутой системы;

$W^1(s_1), W^2(s_1, s_2), W^3(s_1, s_2, s_3), \dots, W^p(s_1, s_2, \dots, s_p)$ — ПФ замкнутой системы.

Задача синтеза регулятора заключается в нахождении передаточных функций регулятора таких, чтобы замкнутая система обладала эталонными динамическими характеристиками. Таким образом, постановка рассматриваемой задачи полностью совпадает с задачей синтеза регуляторов в классе линейных систем. Предполагается, что неизменяемые элементы системы (объект управления) представляют собой соединение линейных инерционных и нелинейных безынерционных звеньев. При этом линейные элементы предполагаются минимально-фазовыми, а нелинейные — аналитическими функциями, имеющими обратные для всех возможных входных воздействий. Такое предположение обусловлено положениями принципа динамической компенсации.

Поскольку предполагается, что заданы эталонная система, имеющая ПФ $W_s^1(s_1), W_s^2(s_1, s_2), W_s^3(s_1, s_2, s_3), \dots, W_s^k(s_1, s_2, \dots, s_k)$, и объект управления, описываемый ПФ $W_o^1(s_1), W_o^2(s_1, s_2), \dots$, то задача синтеза сводится к нахождению ПФ регулятора $W_{\text{кв}}^i(s_1, s_2, \dots, s_i), i = 1, 2, \dots$. Сказанное иллюстрирует рис. 3.2.

В [26, 93, 101] разработан аппарат структурных преобразований на основе многомерных передаточных функций, аналогичный тому, который широко используется для решения линейных задач.

Запишем формулы, связывающие ПФ замкнутой и разомкнутой систем:

$$W^1(s_1) = \frac{W_p^1(s_1)}{1 + W_p^1(s_1)},$$

$$W^2(s_1, s_2) = \frac{W_p^2(s_1, s_2)}{[1 + W_p^1(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 + W_p^1(s_r)]},$$

.....

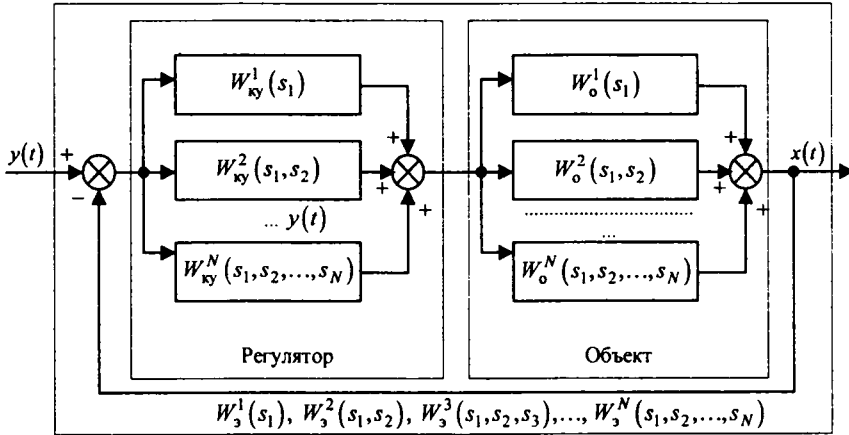


Рис. 3.2. К постановке задачи синтеза регулятора

Учитывая, что в задаче синтеза регулятора для ПФ замкнутой системы должны быть выполнены равенства

$$W^1(s_1) = W_з^1(s_1), W^2(s_1, s_2) = W_з^2(s_1, s_2), \dots, W^N(s_1, s_2, \dots, s_N) = W_з^N(s_1, s_2, \dots, s_N),$$

находим

$$W_з^1(s_1) = \frac{W_p^1(s_1)}{1 + W_p^1(s_1)},$$

$$W_з^2(s_1, s_2) = \frac{W_p^2(s_1, s_2)}{\left[1 + W_p^1(s_1 + s_2)\right] \prod_{r=1}^2 \left[1 + W_p^1(s_r)\right]},$$

.....

Из последних соотношений легко получить формулы, определяющие ПФ разомкнутой системы через ПФ замкнутой системы:

$$W_p^1(s_1) = \frac{W_з^1(s_1)}{1 - W_з^1(s_1)},$$

$$W_p^2(s_1, s_2) = \frac{W_з^2(s_1, s_2)}{\left[1 - W_з^1(s_1 + s_2)\right] \prod_{r=1}^2 \left[1 - W_з^1(s_r)\right]},$$

.....

Поскольку разомкнутая система представляет собой последовательное соединение регулятора и объекта управления, то справедливы зависимости:

$$W_{кy}^1(s_1) W_o^1(s_1) = \frac{W_з^1(s_1)}{1 - W_з^1(s_1)},$$

$$W_o^2(s_1, s_2) W_{кy}^1(s_1) W_{кy}^1(s_2) + W_o^1(s_1 + s_2) W_{кy}^2(s_1, s_2) = \frac{W_з^2(s_1, s_2)}{\left[1 - W_з^1(s_1 + s_2)\right] \prod_{r=1}^2 \left[1 - W_з^1(s_r)\right]},$$

.....

Теперь легко найти соотношения, определяющие ПФ регулятора:

$$W_{\text{ку}}^1(s_1) = \frac{W_o^1(s_1)}{1 - W_o^1(s_1)} \cdot (W_o^1(s_1))^{-1},$$

$$W_{\text{ку}}^2(s_1, s_2) = \frac{W_o^2(s_1, s_2)}{[1 - W_o^1(s_1 + s_2)] \prod_{r=1}^2 [1 - W_o^1(s_r)]} \cdot (W_o^1(s_1 + s_2))^{-1} -$$

$$- \frac{W_o^2(s_1, s_2) \prod_{r=1}^2 W_o^1(s_r)}{\prod_{r=1}^2 [1 - W_o^1(s_r)]} \cdot \left(W_o^1(s_1 + s_2) \prod_{r=1}^2 W_o^1(s_r) \right)^{-1},$$

.....

Полученные формулы представляют собой решение поставленной задачи. По поводу рассмотренного выше подхода необходимо сделать следующие замечания:

- как и в линейных стационарных и нестационарных задачах, в классе аналитических нелинейных систем имеет место компенсация динамических характеристик объекта за счет его обратных ПФ, т.е. принцип динамической компенсации справедлив и для рассматриваемого случая;
- реализованная система не будет в точности совпадать с эталонной ввиду того, что при определении ПФ регулятора дважды производилось усечение ряда Вольтерра;
- совершенно аналогично решается задача синтеза регулятора и в случае, если последний включен в цепь обратной связи.

Рассмотрим систему, структурная схема которой имеет вид (рис. 3.3).

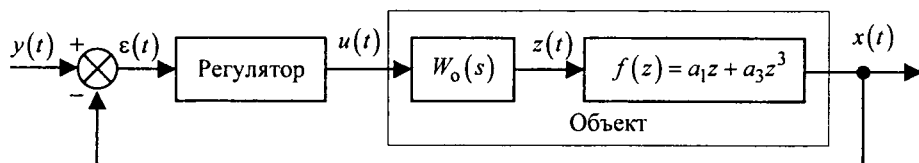


Рис. 3.3. Структурная схема САУ

Для последовательного соединения регулятора и линейного звена с ПФ $W_o(s)$ имеют место зависимости

$$W_{\text{ку}}^1(s_1) W_o(s_1), W_{\text{ку}}^3(s_1, s_2, s_3) W_o\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right), \dots$$

ПФ разомкнутой системы можно записать так:

$$a_1 W_{\text{ку}}^1(s_1) W_o(s_1);$$

$$a_3 \prod_{r=1}^3 \{W_{\text{ку}}^1(s_r) W_o(s_r)\} + a_1 W_{\text{ку}}^3(s_1, s_2, s_3) W_o\left(\sum_{r=1}^3 s_r\right), \dots$$

Далее легко получить равенства:

$$a_1 W_{\text{ку}}^1(s_1) W_o(s_1) = \frac{W_o^1(s_1)}{1 - W_o^1(s_1)},$$

$$a_3 \prod_{r=1}^3 \{W_{\text{к}}^1(s_r) W_o(s_r)\} + a_1 W_{\text{к}}^3(s_1, s_2, s_3) W_o \left(\sum_{r=1}^3 s_r \right) = \frac{W_3^3(s_1, s_2, s_3)}{\left[1 - W_3^1 \left(\sum_{r=1}^3 s_r \right) \right] \prod_{r=1}^3 [1 - W_3^1(s_r)]},$$

Из последних соотношений получаем ПФ регулятора:

$$W_{\text{к}}^1(s_1) = \frac{W_3^1(s_1)}{a_1 W_o(s_1) [1 - W_3^1(s_1)]},$$

$$W_{\text{к}}^3(s_1, s_2, s_3) = \frac{W_3^3(s_1, s_2, s_3)}{a_1 W_o \left(\sum_{r=1}^3 s_r \right) \left[1 - W_3^1 \left(\sum_{r=1}^3 s_r \right) \right] \prod_{r=1}^3 [1 - W_3^1(s_r)]} - \frac{a_3 \prod_{r=1}^3 W_3^1(s_r)}{a_1^4 W_o^1 \left(\sum_{r=1}^3 s_r \right) \prod_{r=1}^3 [1 - W_3^1(s_r)]},$$

Если эталонная система линейна, то ПФ регулятора определяется так:

$$W_{\text{к}}^1(s_1) = \frac{W_3^1(s_1)}{[1 - W_3^1(s_1)]} \cdot (a_1 W_o(s_1))^{-1},$$

$$W_{\text{к}}^3(s_1, s_2, s_3) = \frac{-a_3 \prod_{r=1}^3 W_3^1(s_r)}{\prod_{r=1}^3 [1 - W_3^1(s_r)]} \left(a_1^4 W_o^1 \left(\sum_{r=1}^3 s_r \right) \right)^{-1},$$

Из последних зависимостей легко сделать вывод, что в соответствии с принципом динамической компенсации регулятор можно рассматривать как последовательное соединение безынерционной нелинейности f^{-1} , обратной к f , и инерционных линейных звеньев с ПФ

$$\tilde{W}_{\text{к}}(s) = \frac{W_3^1(s_1)}{1 - W_3^1(s_1)} \text{ и } \tilde{\tilde{W}}_{\text{к}}(s) = W_o^{-1}(s).$$

Соответствующая структурная схема представлена на рис. 3.4.

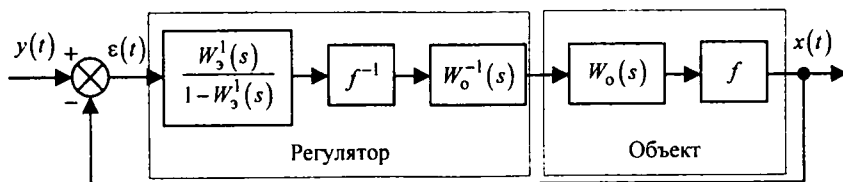


Рис. 3.4. Структурная схема САУ с регулятором, реализующим принцип динамической компенсации

В заключение рассмотрим систему, структурная схема которой имеет вид (рис. 3.5).

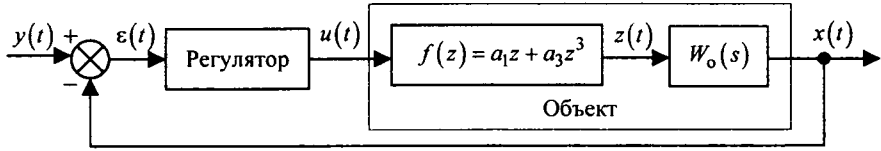


Рис. 3.5. Структурная схема САУ

Пользуясь рассуждениями, которые были приведены выше, легко получить зависимости, определяющие ПФ регулятора при условии, что эталонная система является линейной:

$$W_{\text{кв}}^1(s_1) = \frac{W_3^1(s_1)}{[1 - W_3^1(s_1)]} \cdot (a_1 W_o(s_1))^{-1},$$

$$W_{\text{кв}}^3(s_1, s_2, s_3) = \frac{-a_3 \prod_{r=1}^3 W_3^1(s_r)}{\prod_{r=1}^3 [1 - W_3^1(s_r)]} \left(a_1^4 \prod_{r=1}^3 W_o(s_r) \right)^{-1},$$

.....
Структурная схема системы с регулятором, реализующим положения принципа динамической компенсации, представлена на рис. 3.6.

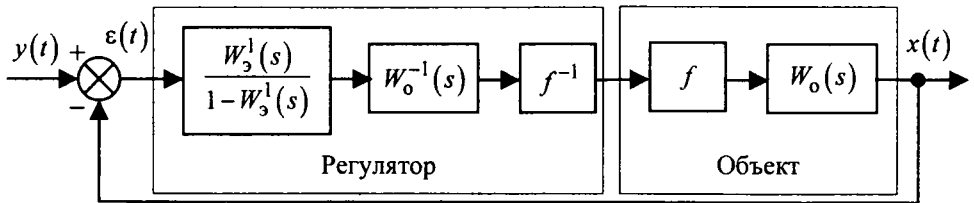


Рис. 3.6. Структурная схема скорректированной системы

Таким образом, если неизменяемая часть системы представляет собой последовательное соединение линейного инерционного звена и безынерционной нелинейности, а эталонная система линейна, то регулятор реализуется последовательным соединением инерционных и нелинейных безынерционных звеньев.

Если $f(z)$ задана степенным рядом, т.е. $f(z) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i$, то коэффициенты ряда, описывающего функцию f^{-1} , определяются с помощью формул обращения степенного ряда [101]:

$$b_1 = \frac{1}{a_1}, \quad b_2 = -\frac{a_2}{a_1^2}, \quad b_3 = \frac{2a_2^2 - a_1 a_3}{a_1^3}, \quad \dots$$

Достоинства и недостатки принципа динамической компенсации для линейного случая обсуждались выше. Возможности принципа динамической компенсации для систем, рассматриваемых аналитической теорией, учитывая известные факторы,

ограничены. Например, рассмотренный метод трудно реализовать для достаточно сложных систем. Его можно применять для определения ядер невысокого порядка, поскольку соответствующие уравнения получаются очень сложными. Самостоятельной задачей является проблема аппаратной или программной реализации регулятора.

3.2. МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Задачу синтеза регулятора будем рассматривать для нелинейных систем, примеры структурных схем которых представлены на рис. 3.7–3.9. Особенностью этих систем является наличие одного нелинейного элемента в прямой цепи или цепи обратной связи.

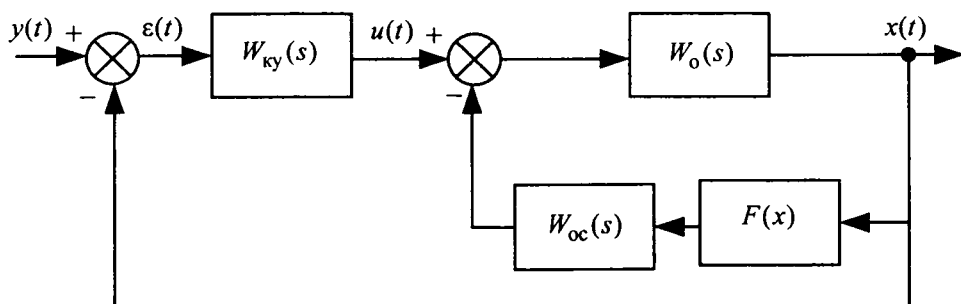


Рис. 3.7. Структурная схема системы с нелинейным элементом в цепи местной ОС

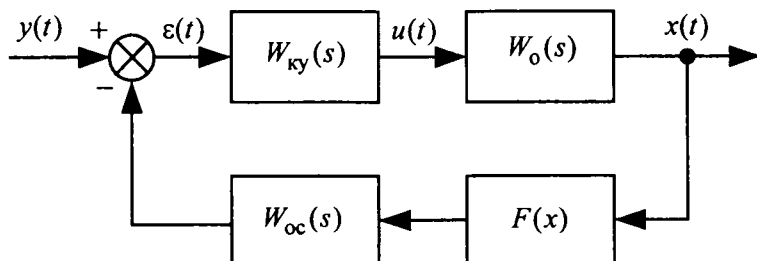


Рис. 3.8. Структурная схема системы с нелинейным элементом в цепи главной ОС

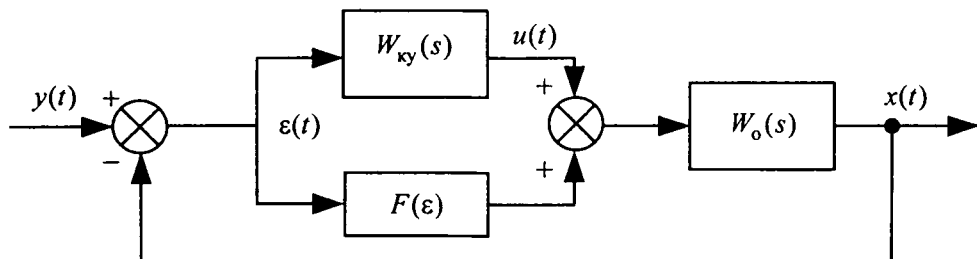


Рис. 3.9. Структурная схема системы с нелинейным элементом в прямой цепи

Полагая, что $W_{\text{кы}} = \frac{B_{\text{кы}}(s)}{A_{\text{кы}}(s)}$, $W_o = \frac{B_o(s)}{A_o(s)}$, $W_{\text{ос}} = \frac{B_{\text{ос}}(s)}{A_{\text{ос}}(s)}$ — передаточные функции

корректирующего устройства, объекта и обратной связи соответственно, по структурным схемам легко записать дифференциальное уравнение системы: для систем, структурные схемы которых представлены на рис. 3.7 и 3.8, — относительно выходной координаты $x(t)$, а для системы на рис. 3.9 — относительно сигнала ошибки $\varepsilon(t)$:

$$(A_o A_{\text{ос}} A_{\text{кы}} + B_{\text{кы}} B_o A_{\text{ос}}) X + B_o B_{\text{ос}} A_{\text{кы}} F(X) = B_{\text{кы}} B_o A_{\text{ос}} Y, \quad (3.1)$$

$$A_{\text{ос}} A_{\text{кы}} A_o X + B_{\text{ос}} B_{\text{кы}} B_o F(X) = B_{\text{кы}} B_o A_{\text{ос}} Y, \quad (3.2)$$

$$(A_o A_{\text{кы}} + B_o B_{\text{кы}}) E + B_o A_{\text{кы}} F(E) = A_o A_{\text{кы}} Y. \quad (3.3)$$

Анализируя (3.1), (3.2) и (3.3), можно сделать вывод, что после нормировки относительно коэффициента при старшей производной движение рассматриваемых нелинейных систем описывается дифференциальными уравнениями вида

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^l c_j F^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^m b_k y^{(k)}(t), \quad (3.4)$$

где $l \leq n-1$, $m < n$, $y(t)$ — входное воздействие, $x(t)$ — реакция системы, $F(x)$ — нелинейная функция.

Далее будем полагать, что поведение замкнутой нелинейной системы с регулятором, имеющим варьируемые параметры $p_1, p_2, \dots, p_r$, описывается уравнением

$$\sum_{v=0}^n a_v(p_1, \dots, p_r) x^{(v)} + F(x) = \sum_{k=0}^m b_k(p_1, \dots, p_r) y^{(k)}. \quad (3.5)$$

Этому уравнению эквивалентно интегральное уравнение

$$\begin{aligned} & \int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[a_k(p_1, \dots, p_r) p_i(\tau) (t-\tau)^n \right] x(\tau) \right\} d\tau + \\ & + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-\tau)^n p_i(\tau) F(x(\tau)) d\tau = \\ & = \int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} \left[b_k(p_1, \dots, p_r) p_i(\tau) (t-\tau)^n \right] y(\tau) \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $p_i(t)$ — порождающие функции.

Очевидно, методы синтеза регуляторов в классе нелинейных систем, требующие знания обратного оператора замкнутой системы с целью нахождения зависимости, определяющей выходной сигнал в функции параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$, практического интереса не представляют (см. главу 1). При решении конкретных задач весьма конструктивные алгоритмы можно разработать, пользуясь *оптимизационным принципом синтеза регуляторов, предполагающим достижение приближенного равенства правой и левой частей операторного уравнения, описывающего поведение замкнутой скорректированной системы с неизвестными параметрами регулятора*. Такое равенство достигается за счет изменения параметров регулятора при подстановке в операторное уравнение эталонных входного $y_3(t)$ и выходного $x_3(t)$ сигналов.

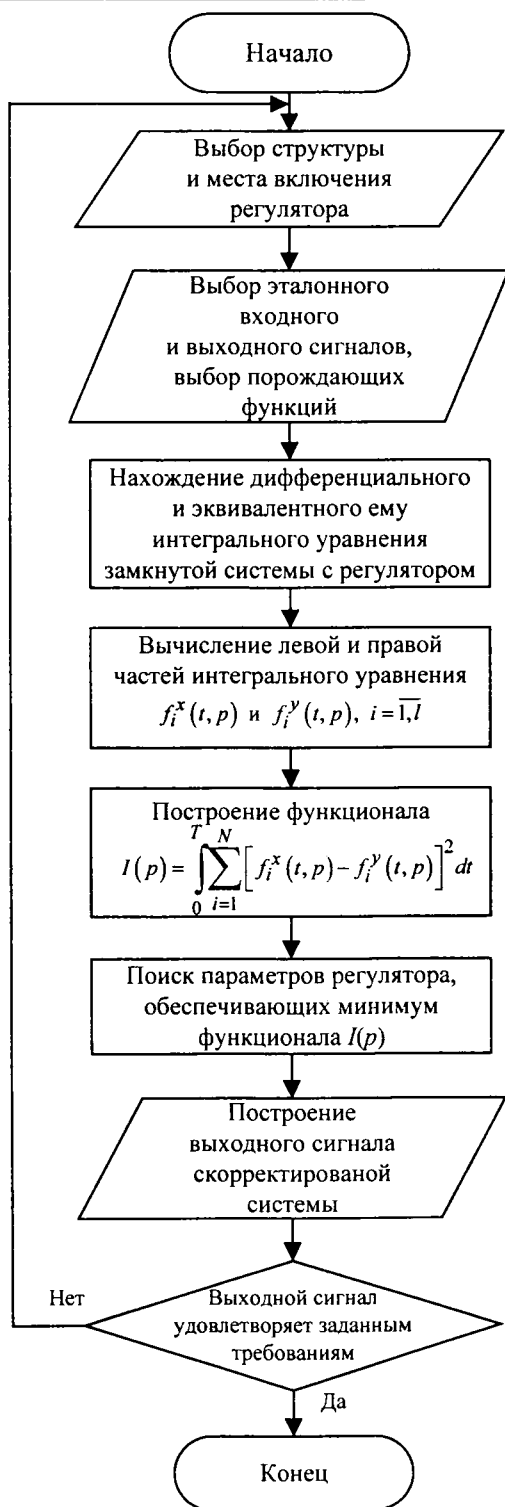


Рис. 3.10. Структурная схема алгоритма

Излагаемые ниже положения совпадают со случаем, когда рассматривались линейные системы (см. главы 1 и 2).

Пусть $y_3(t)$ — эталонный входной сигнал, а $x_3(t)$ — эталонный выходной процесс. Тогда, воспользовавшись обозначениями

$$f_i^x(t, p_1, \dots, p_r) = \int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [a_k(p_1, \dots, p_r) p_i(\tau)(t-\tau)^n] x_3(\tau) \right\} d\tau + \\ + \frac{1}{n!} \int_0^t (t-\tau)^n p_i(\tau) F(x_3(\tau)) d\tau, \quad (3.7)$$

$$f_i^y(t, p_1, \dots, p_r) = \int_0^t \left\{ \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{n!} \frac{d^k}{d\tau^k} [b_k(p_1, \dots, p_r) p_i(\tau)(t-\tau)^n] y_3(\tau) \right\} d\tau,$$

можно записать соотношение для i -ой невязки

$$E_i(t, p_1, p_2, \dots, p_r) = f_i^x(t, p_1, p_2, \dots, p_r) - f_i^y(t, p_1, p_2, \dots, p_r) \quad (3.8)$$

и формулу для функционала, подлежащего минимизации:

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \int_0^T \sum_{k=1}^N E_k^2(t, p_1, p_2, \dots, p_r) dt. \quad (3.9)$$

Структурная схема алгоритма представлена на рис. 3.10.

Поскольку метод порождающих функций достаточно просто реализуется на ЭВМ при расчёте регуляторов сложных САУ, на примерах проиллюстрируем вычислительную технологию метода.

Пример 3.1 [5]. Структурная схема нелинейной стационарной системы автоматического управления приведена на рис. 3.11.

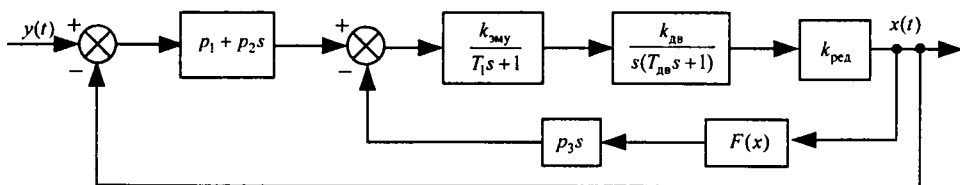


Рис. 3.11. Структурная схема нелинейной системы автоматического управления с регулятором

Заданы значения параметров системы:

$$k_{зму} k_{дв} k_{ред} = k_3 = 240; T_{дв} = 0,5 \text{ с}; T_1 = 0,165 \text{ с}.$$

Нелинейный элемент $F(x)$ типа «зона нечувствительности без насыщения» (рис. 3.12) в местной обратной связи имеет следующие параметры: $b = 0,4$; $k_F = \tan \alpha = 1,0$.

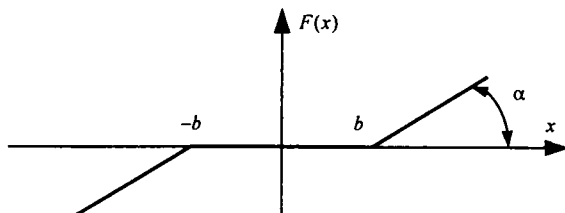


Рис. 3.12. Нелинейный элемент $F(x)$, входящий в состав системы

Дифференциальное уравнение системы имеет вид

$$(T_1 T_{\text{дв}} s^3 + (T_1 + T_{\text{дв}}) s^2 + (1 + k_3 k_2) s + k_3 k_1) x(t) + k_3 k_3 s F(x) = (k_3 k_1 + k_3 k_2 s) y(t),$$

где $k_3 = k_{\text{зму}} k_{\text{дв}} k_{\text{рел}}$.

С учетом численных значений параметров системы дифференциальное уравнение запишется так:

$$(0,0825 s^3 + 0,665 s^2 + (1 + 240 p_2) s + 240 p_1) x(t) + 240 p_3 s F(x) = (240 p_1 + 240 p_2 s) y(t).$$

Задача синтеза состоит в определении положительных параметров системы p_1, p_2, p_3 таким образом, чтобы синтезированная система обладала абсолютной устойчивостью, а переходная характеристика системы удовлетворяла требованиям: перерегулирование $\sigma \leq 20\%$, время управления $T_y \approx 1$ с.

Решение будем проводить на интервале времени $\Omega = [0, 5]$ методом порождающих функций. В качестве порождающих функций возьмем многочлены Лежандра. В функционале будем учитывать 3 невязки. Имеем

$$\begin{aligned} f_i^x(t, p_1, \dots, p_3) &= \int_0^t x_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{n!} a_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{p_i(\tau)(t-\tau)^n\} \right] d\tau + \\ &+ \int_0^t F'(x_3(\tau)) \left[\sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{n!} c_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{p_i(\tau)(t-\tau)^n\} \right] d\tau, \\ f_i^y(t, p_1, \dots, p_3) &= \int_0^t y_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^3 \frac{(-1)^k}{n!} b_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{p_i(\tau)(t-\tau)^n\} \right] d\tau, \end{aligned}$$

где функция $F(x_3(t))$ была аппроксимирована 7 многочленами Лежандра (рис. 3.13):

$$F'(x_3(t)) = \sum_{k=0}^7 C_k^x L_k(t).$$

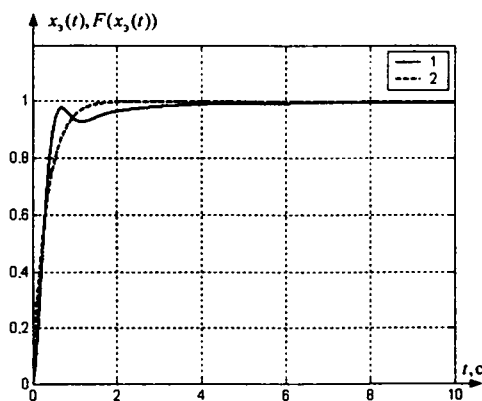


Рис. 3.13. Графики функций $x_3(t)$ (1), $F(x_3(t))$ (2)

Определим i -ю невязку как разность между левой и правой частями интегрального уравнения системы:

$$E_i(t, p_1, \dots, p_3) = f_i^x(t, p_1, \dots, p_3) - f_i^y(t, p_1, \dots, p_3), \quad i = \overline{1, 3}.$$

Функционал, подлежащий минимизации, запишется так:

$$\begin{aligned} I(p_1, \dots, p_3) &= \int_0^5 \sum_{i=0}^3 E_i^2(\tau, p_1, \dots, p_3) d\tau = \\ &= -0,1332e23 p_1 - 0,22629e23 p_2 - 0,57789e22 p_3 - 0,36639e22 p_1 p_3 + \\ &+ 0,10108e21 p_3 + 0,24328e24 p_1^2 + 0,7576e24 p_1 p_2 + 0,68044e24 p_2^2 + 0,13812e20 p_3^2 + 0,1921e21. \end{aligned}$$

В результате условной минимизации функционала (с нулевыми начальными условиями) были получены следующие значения параметров регулятора:

$$p_1^* = 0,0112; \quad p_2^* = 0,0104; \quad p_3^* = 0,0001.$$

На рис. 3.14 приведена реакция нелинейной системы с рассчитанными параметрами регулятора на единичное ступенчатое воздействие.

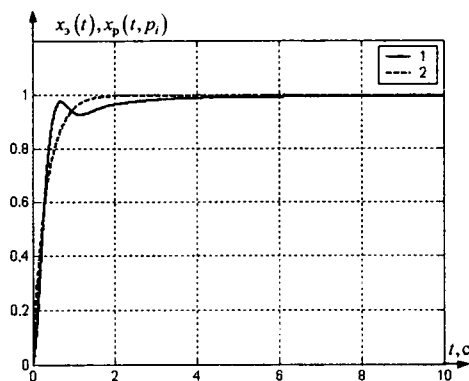


Рис. 3.14. Эталонная переходная характеристика (2) и переходная характеристика скорректированной системы (1)

Пример 3.2 [5]. Уравнение движения нелинейной САУ, записанное относительно выходной координаты, имеет вид

$$(T_1 s^2 + (1 + k_1 p_2) s + k_1 p_1) x(t) + k_1 p_3 F(x) = k_1 (p_1 + p_2 s) y(t),$$

где $F(x)$ — нелинейность типа «насыщение» (рис. 3.15), для которой $k_F = 1$:

$$F(x) = \begin{cases} c, & x \geq b, \\ kx, & -b < x < b, \\ -c, & x \leq -b. \end{cases}$$

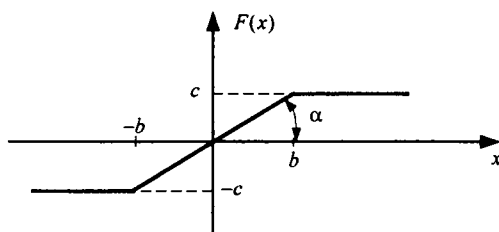


Рис. 3.15. Нелинейный элемент $F(x)$, входящий в состав системы

Параметры нелинейности: $\operatorname{tg}(\alpha) = k = 1$; $b = c = 0,5$.

Параметры системы: $T_1 = 0,15$; $k_1 = 10$.

Требуется определить параметры системы p_1, p_2, p_3 , обеспечивающие в синтезируемой системе монотонный переходной процесс с временем $T_y \approx 0,5$ с. Необходимо обеспечить также устойчивость системы и статическую ошибку не более 5%. На искомые параметры наложены ограничения $p_1 > 0$, $p_2 > 0$, $p_3 > 0$.

Задачу синтеза будем решать на интервале времени $\Omega = [0; 1,5]$ методом порождающих функций. В качестве порождающих функций возьмем многочлены Лежандра. В искомый функционал включим 6 невязок:

$$\begin{aligned} f_i^x(t, p_1, \dots, p_3) = & \int_0^t x_s(\tau) \left[\sum_{k=0}^2 \frac{(-1)^k}{n!} a_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{ p_i(\tau)(t-\tau)^n \} \right] d\tau + \\ & + \frac{(-1)^k}{n!} c_0(p_1, \dots, p_3) \int_0^t (t-\tau)^n F'(x_s(\tau)) p_i(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

$$f_i^y(t, p_1, \dots, p_3) = \int_0^t y_3(\tau) \left[\sum_{k=0}^7 \frac{(-1)^k}{k!} b_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{p_i(\tau)(t-\tau)^n\} \right] d\tau,$$

где функция $F(x_3(t))$ была аппроксимирована 20 многочленами Лежандра (рис. 3.16):

$$F^l(x_3(t)) = \sum_{k=0}^7 C_k^{x_3} L_k(t).$$

Определим i -ю невязку как разность между левой и правой частями интегрального уравнения системы:

$$E_i(t, p_1, \dots, p_3) = f_i^x(t, p_1, \dots, p_3) - f_i^y(t, p_1, \dots, p_3), \quad i = \overline{1, 6}.$$

Функционал, подлежащий минимизации, определяется зависимостью

$$\begin{aligned} I(p_1, \dots, p_3) &= \int_0^{1.5} \sum_{i=0}^6 E_i^2(\tau, p_1, \dots, p_3) d\tau = \\ &= 0,5e - 15(-0,10877e35 p_1 - 0,20411e36 p_2 + 0,76160e32 p_3 + 0,39143e34 p_1^2 + \\ &+ 0,68668e35 p_1 p_2 + 0,90508e36 p_2^2 + 0,70378e31 p_3^2 + 0,51729e33 p_3 p_2 - \\ &- 0,20453e33 p_3 p_1 + 0,12448e35). \end{aligned}$$

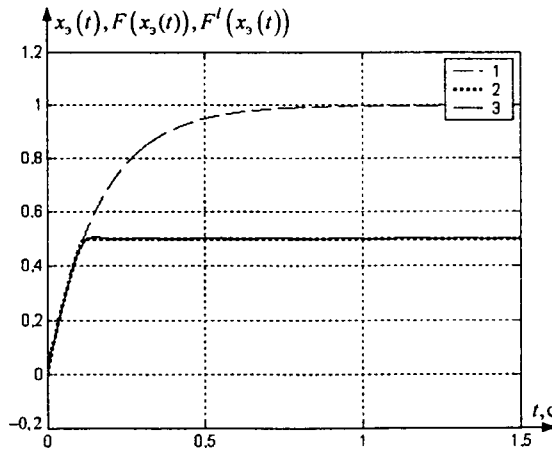


Рис. 3.16. Графики функций $x_3(t)$ (1), $F(x_3(t))$ (2) и $F^l(x_3(t))$ (3)

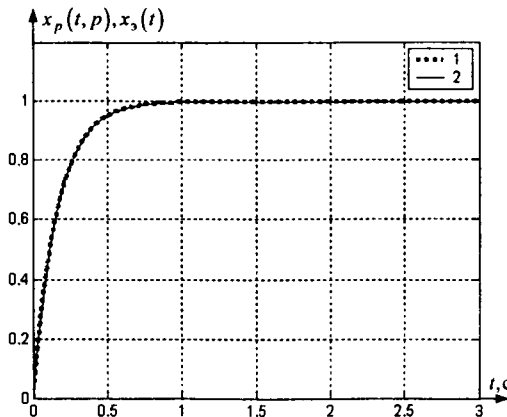


Рис. 3.17. Эталонная переходная характеристика (2) и переходная характеристика скорректированной системы (1)

В результате условной минимизации функционала (с нулевыми начальными условиями) были получены следующие оптимальные параметры регулятора:

$$p_1^* = 0,6; p_2^* = 0,09; p_3^* = 0,001. \quad (3.10)$$

На рис. 3.17 приведена реакция нелинейной скорректированной системы на единичное ступенчатое воздействие.

Пример 3.3 [5]. Рассмотрим задачу синтеза параметров нелинейной САУ, структурная схема которой представлена на рис. 3.18.

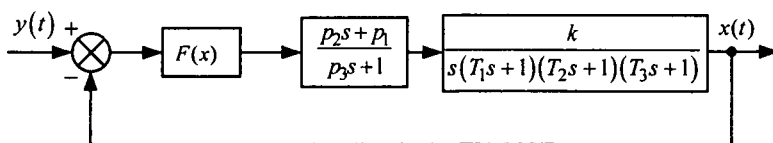


Рис. 3.18. Структурная схема нелинейной САУ

Параметры неизменяемой части системы: $T_1 = 0,1$; $T_2 = 0,01$; $T_3 = 0,15$; $k = 5$.

Нелинейный элемент системы $F(x)$ типа «переменный коэффициент усиления» (рис. 3.19) имеет следующие значения параметров:

$$\operatorname{tg}(\alpha) = k_1 = 0,5; \operatorname{tg}(\beta) = k_2 = 1,0; b = 0,2; k_F = 1,0.$$

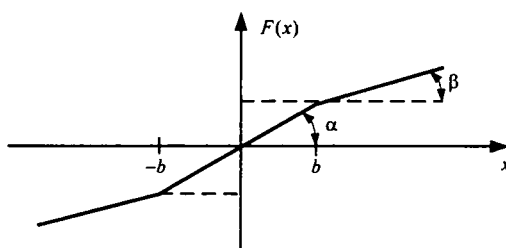


Рис. 3.19. Нелинейный элемент $F(x)$, входящий в состав системы

Требуется определить положительные параметры регулятора системы $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0$ из следующих условий:

- 1) скорректированная система должна быть устойчивой;
- 2) переходной процесс в системе при $y(t) = 1(t)$ должен быть монотонным, причем время переходного процесса должно быть $T_y \leq 4$ с.

Решим задачу синтеза на интервале времени $\Omega = [0, 7]$ методом порождающих функций, используя в качестве порождающих функций многочлены Лежандра. В искомый функционал включим 4 невязки:

$$\begin{aligned} f_i^x(t, p_1, \dots, p_3) &= \int_0^t x_1(\tau) \left[\sum_{k=0}^5 \frac{(-1)^k}{n!} a_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{p_i(\tau)(t-\tau)^n\} \right] d\tau + \\ &+ \int_0^t F'(x_2(\tau)) \left[\sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{n!} c_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{p_i(\tau)(t-\tau)^n\} \right] d\tau, \\ f_i^y(t, p_1, \dots, p_3) &= \int_0^t y_2(\tau) \left[\sum_{k=0}^1 \frac{(-1)^k}{n!} b_k(p_1, \dots, p_3) \frac{d^k}{d\tau^k} \{p_i(\tau)(t-\tau)^n\} \right] d\tau. \end{aligned}$$

Функцию $F(x_2(t))$ заменим ее разложением в ряд по многочленам Лежандра (удерживаем 15 членов ряда) (рис. 3.20):

$$F'(x_2(t)) = \sum_{k=0}^{15} C_k^x L_k(t).$$

Функционал, подлежащий минимизации, определяется формулой

$$\begin{aligned}
 I(p_1, \dots, p_3) &= \int_0^{1.5} \sum_{i=0}^4 (f_i^x(t, p_1, \dots, p_3) - f_i^y(t, p_1, \dots, p_3))^2 d\tau = \\
 &= 0,2e - 9 \cdot (0,1286e33 - 0,2701e34 p_1 - 0,5490e34 p_2 + 0,4821e33 p_3 + \\
 &+ 0,5178e33 p_3^2 + 0,6351e35 p_2^2 - 0,1143e35 p_2 p_3 + 0,1467e35 p_1^2 + \\
 &+ 0,5453e35 p_1 p_2 - 0,4701e34 p_1 p_3).
 \end{aligned}$$

В результате условной минимизации функционала (с нулевыми начальными условиями) были получены следующие оптимальные параметры регулятора:

$$p_1^* = 0,276; \quad p_2^* = 0,263; \quad p_3^* = 1,031. \quad (3.11)$$

На рис. 3.21 приведена реакция нелинейной скорректированной системы на единичное ступенчатое воздействие.

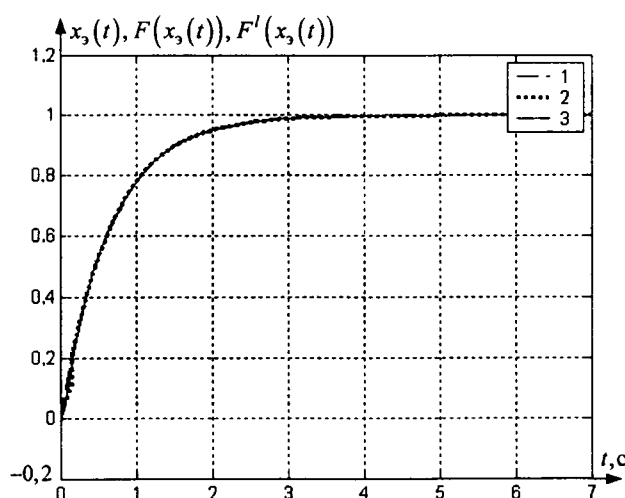


Рис. 3.20. Графики функций $x_3(t)$ (1), $F(x_3(t))$ (2) и $F'(x_3(t))$ (3)

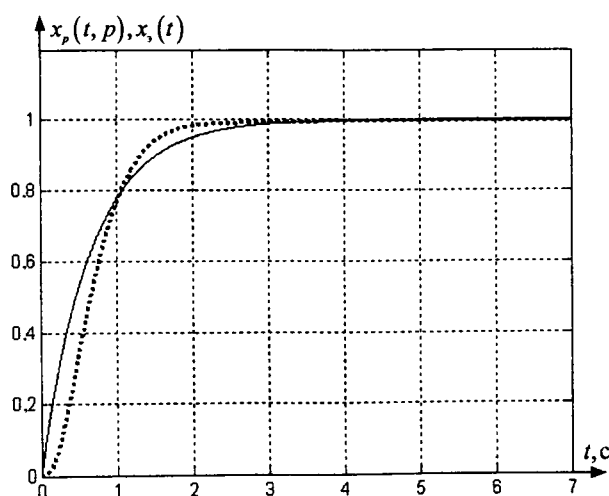


Рис. 3.21. Графики эталонной переходной характеристики и переходной характеристики скорректированной системы

3.3. ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ

Задачу синтеза регулятора будем рассматривать для нелинейных следящих систем, примеры структурных схем которых представлены на рис. 3.22–3.23. Особенностью этих систем является наличие одного нелинейного элемента в прямой цепи или цепи обратной связи.

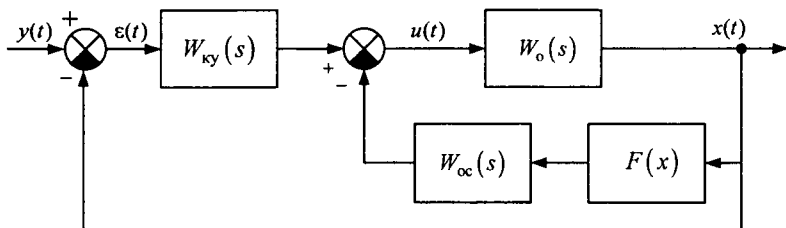


Рис. 3.22. Структурная схема системы с нелинейным элементом в цепи местной ОС

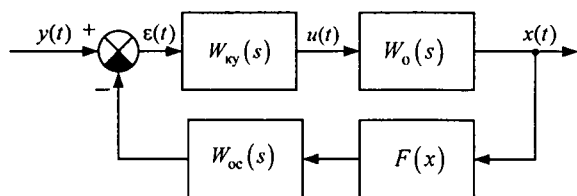


Рис. 3.23. Структурная схема системы с нелинейным элементом в цепи главной ОС

Полагая, что $W_{\text{кy}} = \frac{B_{\text{кy}}(s)}{A_{\text{кy}}(s)}$, $W_o = \frac{B_o(s)}{A_o(s)}$, $W_{\text{oc}} = \frac{B_{\text{oc}}(s)}{A_{\text{oc}}(s)}$ — передаточные функции

корректирующего устройства, объекта и обратной связи соответственно, по структурным схемам легко записать дифференциальное уравнение системы: для систем, структурные схемы которых представлены на рис. 3.22 и 3.23, — относительно выходной координаты $x(t)$, а для системы на рис. 3.24 — относительно сигнала ошибки $\varepsilon(t)$:

$$(A_o A_{\text{oc}} A_{\text{кy}} + B_{\text{кy}} B_o A_{\text{oc}}) X + B_o B_{\text{oc}} A_{\text{кy}} F(X) = B_{\text{кy}} B_o A_{\text{oc}} Y, \quad (3.12)$$

$$A_{\text{oc}} A_{\text{кy}} A_o X + B_{\text{oc}} B_{\text{кy}} B_o F(X) = B_{\text{кy}} B_o A_{\text{oc}} Y, \quad (3.13)$$

$$(A_o A_{\text{кy}} + B_o B_{\text{кy}}) E + B_o A_{\text{кy}} F(E) = A_o A_{\text{кy}} Y. \quad (3.14)$$

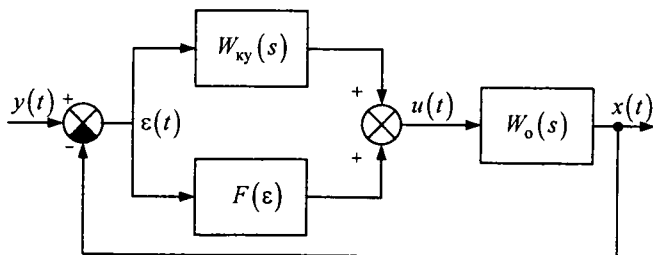


Рис. 3.24. Структурная схема системы с нелинейным элементом в прямой цепи

Анализируя (3.12), (3.13) и (3.14), можно сделать вывод, что после нормировки относительно коэффициента при старшей производной движение рассматриваемых нелинейных систем описывается дифференциальными уравнениями вида

$$x^{(n)}(t) + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^{(i)}(t) + \sum_{j=0}^u c_j F^{(j)}(x) = \sum_{k=0}^m b_k y^{(k)}(t), \quad (3.15)$$

где $u \leq n-1$, $m < n$, $y(t)$ — входное воздействие, $x(t)$ — реакция системы или ошибка слежения, $F(x)$ — аналитическая нелинейная функция.

Задачу синтеза регулятора нелинейных систем будем решать в следующей постановке. Движение нелинейной системы задается уравнением (3.15), причем коэффициенты уравнения $a_i(p)$, $c_j(p)$, $b_k(p)$ зависят от p — параметров регулятора системы. Далее факт зависимости коэффициентов уравнения системы от параметров регулятора указывать не будем. Требуется определить параметры регулятора системы, исходя из условий приближенного обеспечения заданных показателей качества работы системы. Решение задачи разбивается на ряд этапов.

На *первом этапе* определяется структура и место включения корректирующего устройства.

На *втором этапе* в соответствии с требуемыми показателями качества работы системы выбирается *желаемое движение системы* $x_3(t)$ при заданном *входном воздействии* $y_3(t)$. В качестве желаемого движения обычно выбирается эталонный переходный процесс. Далее полагаем, что желаемое движение — это переходная характеристика, т.е. $x_3(t) = h_3(t)$, а $y_3(t) = 1(t)$. Для большинства задач синтеза регулятора в качестве эталонной переходной характеристики можно выбрать зависимость вида

$$h_3(t) = k_3 (1 - e^{-\alpha_3 t} \cos \omega_3 t),$$

причем

$$\alpha_3 \approx \frac{3}{T_p},$$

где T_p — время переходного процесса.

На *третьем этапе* выполняется построение *невязки* эквивалентного (3.15) интегрального уравнения:

$$\begin{aligned} x_3(t) + \int_0^t K_x(t, \tau, p) x_3(\tau) d\tau + \int_0^t K_n(t, \tau, p) F(x_3(\tau)) d\tau = \\ = \int_0^t K_y(t, \tau, p) y_3(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где

$$\begin{aligned} K_x(t, \tau, p) &= \sum_{v=0}^{n-1} a_v \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \frac{d}{d\tau^v} [(t-\tau)^{n-1}], \\ K_n(t, \tau, p) &= \sum_{v=0}^u c_v \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \frac{d}{d\tau^v} [(t-\tau)^{n-1}], \\ K_y(t, \tau, p) &= \sum_{v=0}^m b_v \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \frac{d}{d\tau^v} [(t-\tau)^{n-1}]. \end{aligned}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned} f_{x1}(t, p) &= x_3(t) + \int_0^t K_x(t, \tau, p) x_3(\tau) d\tau, \\ f_{x2}(t, p) &= \int_0^t K_n(t, \tau, p) F(x_3(\tau)) d\tau, \\ f_x(t, p) &= f_{x1}(t, p) + f_{x2}(t, p) \end{aligned} \quad (3.17)$$

и

$$f_y(t, p) = \int_0^t K_y(t, \tau, p) y_3(\tau) d\tau. \quad (3.18)$$

Тогда невязку (3.16) можно записать в виде

$$E(t, p) = f_x(t, p) - f_y(t, p). \quad (3.19)$$

Содержанием *четвертого этапа* является построение функционала от невязки (3.19) $I(p)$ и оценка вектора искомых параметров p^* путем его минимизации:

$$p^* = \min_p I(p). \quad (3.20)$$

В качестве функционала $I(p)$ удобно использовать метрику пространства $L^q[0, T]$:

$$I(p) = \rho_{L^q[0, T]} = \left(\int_0^T |E(t, p)|^q dt \right)^{1/q}. \quad (3.21)$$

Параметр T в (3.21) выбирается исходя из длительности T_p . Пактика показывает, что удовлетворительные результаты могут быть получены при $T \approx (3-5)T_p$.

На *пятом этапе* выполняется проверка найденного решения, и, если это необходимо, изменяется структура корректирующего устройства с возвратом к первому этапу решения задачи синтеза.

Проблема нахождения p^* для класса нелинейных систем может, как и для класса линейных систем, сводиться к задаче аппроксимации $x_3(t)$ в пространстве $L^2[0, T]$, а минимизация функционала при отсутствии ограничений на искомые параметры — к задаче решения переопределенной системы линейных алгебраических уравнений. Покажем это.

Введем в рассмотрение вспомогательный вектор параметров

$$\tilde{p} = \{a_i(p), i = \overline{0, n-1}, c_j(p), j = \overline{0, u}, b_k(p), k = \overline{0, m}\}, \quad (3.22)$$

элементами которого являются коэффициенты уравнения (3.15), и построим, используя невязку эквивалентного интегрального уравнения, функционал вида

$$I(\tilde{p}) = \int_0^T \left(x_3(t) - \sum_{v=0}^{n+m+u+1} \tilde{p}_v \phi_v(t) \right)^2 dt,$$

где $\phi_v(t)$ — порождаются функциями невязки (3.19), а $\tilde{p}_v$ — параметры вектора $\tilde{p}$.

Оценив вспомогательный вектор $\tilde{p}$, можно оценить параметры корректирующего устройства.

В такой постановке задача синтеза эквивалентна задаче аппроксимации в пространстве $L^2[0, T]$. Методы синтеза, основанные на минимизации функционалов типа метрик функциональных пространств по параметрам вспомогательного вектора $\tilde{p}$, по своему содержанию являются аппроксимационными или проекционными.

Покажем, как можно определить функции $\phi_v(t)$, $v = \overline{0, n+m+u+1}$.

Положим, что эталонные входной и выходной сигналы системы аппроксимируются ортонормированными полиномами

$$y_3(t) = (C^y)^T \Phi(t); \quad x_3(t) = (C^x)^T \Phi(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.23)$$

где $\Phi(t) = \{\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_{l-1}(t)\}^T$ — используемый ортонормированный базис.

После группировки членов относительно $1, t, t^2, \dots, t^{l-1}$ зависимость (3.23) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} y_3(t) &= \sum_{i=0}^{l-1} c_i^y t^i = (C^y)^T \Theta(t); \\ x_3(t) &= \sum_{i=0}^{l-1} c_i^x t^i = (C^x)^T \Theta(t), \end{aligned} \quad (3.24)$$

где

$$\Theta(t) = \{\vartheta_0(t), \vartheta_1(t), \dots, \vartheta_{l-1}(t)\}^T, \quad (3.25)$$

причем $\vartheta_i(t) = t^i$, $i = \overline{0, l-1}$. Данное предположение не ограничивает общности рассуждений, поскольку существует матричный оператор, позволяющий переходить от базиса $\Phi(t)$ к базису $\Theta(t)$.

Прежде всего найдем выражения для слагаемых, определяющих линейные составляющие невязки (3.8). Имеем

$$\frac{d^v}{d\tau^v} \left[(t-\tau)^{n-1} \right] = \sum_{j=0}^{n-v-1} (-1)^{j+v} \frac{(j+v)!}{j!} C_{n-1}^{j+v} t^{n-j-v-1} \tau^j. \quad (3.26)$$

Для $f_{xл}(t, p)$ можно записать

$$f_{xл}(t, p) = x_3(t) + \int_0^t \sum_{v=0}^{n-1} a_v \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \frac{d^v}{d\tau^v} \left[(t-\tau)^{n-1} \right] x_3(\tau) d\tau,$$

или

$$f_{xл}(t, p) = x_3(t) + \sum_{v=0}^{n-1} a_v \alpha_v(t), \quad (3.27)$$

где

$$\alpha_v(t) = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{n-v-1} \frac{(-1)^j}{(i+j+1)j!(n-j-v-1)!} c_i^x t^{n+i-v}. \quad (3.28)$$

Аналогично для $f_y(t, p)$ имеем

$$f_y(t, p) = \sum_{v=0}^m b_v \beta_v(t), \quad (3.29)$$

где

$$\beta_v(t) = \sum_{i=0}^{l-1} \sum_{j=0}^{n-v-1} \frac{(-1)^j}{(i+j+1)j!(n-j-v-1)!} c_i^y t^{n+i-v}. \quad (3.30)$$

Отметим, что если заданным сигналом $y_3(t)$ является воздействие $y_3(t) = 1(t)$, формула для расчета функций $\beta_v(t)$ принимает вид

$$\beta_v(t) = t^{n-v} \sum_{j=0}^{n-v-1} \frac{(-1)^j}{(j+1)j!(n-j-v-1)!} = \frac{t^{n-v}}{\Gamma(n-v+1)}. \quad (3.31)$$

Перейдем к нелинейным составляющим невязки (3.19). Для случая, когда $F(x(\tau))$ — кусочно-линейная функция, ее можно представить так:

$$F(x_3(\tau)) = F_{+0}(\tau)1(\tau) + \sum_{i=1}^s [F_{+i}(\tau) - F_{-i}(\tau)]1(\tau - \tau_i), \quad (3.32)$$

где τ_i — моменты переключения кусочно-линейной нелинейности; $F_{+i}(\tau)$, $F_{-i}(\tau)$ — аналитические выражения нелинейной характеристики звена до и после момента переключения нелинейности τ_i ; s — число переключений, которое зависит от вида характеристики $F(x)$ и процесса на входе звена $x_3(\tau)$.

Тогда

$$\begin{aligned} f_{xh}(t, p) &= \sum_{v=0}^u \sum_{i=0}^s \frac{(-1)^v}{(n-1)!} c_v \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d^v}{d\tau^v} [(t-\tau)^{n-1}] F_{+i}(\tau) d\tau = \\ &= \sum_{v=0}^u \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^{n-v-1} \frac{(-1)^j c_v C_{n-1}^{j+v} (j+v)!}{(n-1)! j!} t^{n-j-v-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} \tau^j F_{+i}(\tau) d\tau, \quad t_0 = 0, \quad t_{s+1} = t. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Очевидно, что реакция нелинейного элемента после i -го момента переключения может быть записана в виде линейной комбинации

$$F_{+i}(\tau) = k_i x(\tau) + d_i = k_i \sum_{r=0}^{l-1} c_r^x \tau^r + d_i. \quad (3.34)$$

Подставляя (3.34) в (3.33), получим окончательное выражение для $f_{xh}(t, p)$:

$$f_{xh}(t, p) = \sum_{v=0}^u c_v \gamma_v(t), \quad (3.35)$$

где

$$\gamma_v(t) = \sum_{i=0}^s \sum_{j=0}^{n-v-1} \frac{(-1)^j t^{n-j-v-1}}{j!(n-v-j-1)!} \left\{ \sum_{r=0}^{l-1} \frac{k_i c_r^x}{j+r+1} [t_{i+1}^{j+r+1} - t_i^{j+r+1}] + \frac{d_i}{j+1} [t_{i+1}^{j+1} - t_i^{j+1}] \right\}.$$

Учитывая, что $t_{s+1} = t$, перепишем последнюю формулу в виде

$$\gamma_v(t) = \gamma_{v_1}(t) + \gamma_{v_2}(t) + \gamma_{v_3}(t), \quad (3.36)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma_{v_1}(t) &= \sum_{j=0}^{n-v-1} \frac{(-1)^j t^{n-j-v-1}}{j!(n-v-j-1)!} \left\{ \sum_{i=0}^{s-1} \left\{ \sum_{r=0}^{l-1} \frac{k_i c_r^x}{(j+r+1)} [t_{i+1}^{j+r+1} - t_i^{j+r+1}] \right\} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{d_i}{j+1} [t_{i+1}^{j+1} - t_i^{j+1}] \right\} - \sum_{r=0}^{l-1} \frac{k_s c_r^x}{(j+r+1)} t_s^{j+r+1} - t_i^{j+r+1} - \frac{d_s t_s^{j+1}}{j+1}; \end{aligned}$$

$$\gamma_{v_2}(t) = \sum_{j=0}^{n-v-1} \sum_{r=0}^{l-1} \frac{(-1)^j k_s c_r^x t^{n+r-v}}{j!(n-v-j-1)!(j+r+1)};$$

$$\gamma_{v_3}(t) = \sum_{j=0}^{n-v-1} \frac{(-1)^j t^{n-v} d_s}{j!(n-v-j-1)!(j+1)}.$$

Далее рассмотрим вариант, когда $F(x(\tau))$ — аналитическая функция и представляема рядом

$$F(x_3(t)) = \sum_{k=2}^r f_k x_3^k(t). \quad (3.37)$$

Необходимо записать нелинейную функцию как функцию времени. Для этого воспользуемся матрицей умножения для полиномиального базиса. Найдем эту матрицу.

Пусть $z(t) = x(t)f(t)$ и $x(t) = (C^x)^T \Theta(t)$, $f(t) = (C^f)^T \Theta(t)$. Тогда для $z(t)$ справедливо

$$z(t) = (C^x)^T \Theta(t) \Theta^T(t) C^f = (C^x)^T \Omega(t) C^f,$$

где

$$\Omega(t) = \begin{bmatrix} \omega_{0,0} & \omega_{0,1} & \dots & \omega_{0,l-1} \\ \omega_{1,0} & \omega_{1,1} & \dots & \omega_{1,l-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{l-1,0} & \omega_{l-1,1} & \dots & \omega_{l-1,l-1} \end{bmatrix},$$

причем

$$\omega_{i,j} = \omega_{j,i} = \vartheta_i \vartheta_j = \vartheta_{i+j}; \quad i, j = \overline{0, l-1}. \quad (3.38)$$

В (3.38) аргумент опущен для краткости. Учитывая (3.38) и отбрасывая элементы матрицы $\Omega(t)$ с индексами, большими чем $l-1$, имеем

$$\Omega(t) C^f = \begin{bmatrix} \vartheta_0 & \vartheta_1 & \dots & \vartheta_{l-1} \\ \vartheta_1 & \vartheta_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vartheta_{l-1} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0^f \\ c_1^f \\ \vdots \\ c_{l-1}^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^f \vartheta_0 + c_1^f \vartheta_1 + \dots + c_{l-1}^f \vartheta_{l-1} \\ c_0^f \vartheta_1 + c_1^f \vartheta_2 + \dots + c_{l-1}^f \vartheta_{l-2} \\ \vdots \\ c_0^f \vartheta_{l-1} \end{bmatrix} = \Xi(t).$$

Но аналогичный по структуре вектор $\Xi(t)$ можно получить иначе:

$$\Xi(t) = \begin{bmatrix} c_0^f & c_1^f & \dots & c_{l-1}^f \\ 0 & c_0^f & \dots & c_{l-2}^f \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_0^f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \vartheta_0 \\ \vartheta_1 \\ \vdots \\ \vartheta_{l-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_0^f \vartheta_0 + c_1^f \vartheta_1 + \dots + c_{l-1}^f \vartheta_{l-1} \\ c_0^f \vartheta_1 + c_1^f \vartheta_2 + \dots + c_{l-2}^f \vartheta_{l-1} \\ \vdots \\ c_0^f \vartheta_{l-1} \end{bmatrix} = A_y(f) \Theta(t),$$

следовательно,

$$z(t) = (C^z)^T \Theta(t) = (C^x)^T A_y(f) \Theta(t) \text{ и } C^z = A_y^T(f) C^x.$$

$A_y(f)$ определяет структуру искомой матрицы умножения для степенного базиса.

Теперь можно записать выражения для коэффициентов разложений старших степеней функции $x(t)$:

$$\begin{aligned}
x^2(t) &= (C^x)^T A_y(x) \Theta(t) = (C^{x^2})^T \Theta(t), \\
x^3(t) &= (C^{x^2})^T A_y(x) \Theta(t) = (C^x)^T A_y(x) A_y(x) \Theta(t) = \\
&= (C^x)^T (A_y(x))^2 \Theta(t) = (C^{x^3})^T \Theta(t), \\
&\vdots \\
x^k(t) &= (C^x)^T (A_y(x))^{k-1} \Theta(t) = (C^{x^k})^T \Theta(t).
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Полученные равенства (3.39) позволяют представить нелинейную функцию в виде

$$F(x_3(\tau)) = \sum_{k=2}^r \sum_{i=0}^{l-1} f_k c_i^{x^k} \tau^i. \tag{3.40}$$

Заметим, что выражение (3.40) дает возможность достаточно просто вычислять производные любого порядка от нелинейной функции:

$$\frac{d^j F(x_3(\tau))}{d\tau^j} = \sum_{k=2}^r \sum_{i=0}^{l-1} f_k c_i^{x^k} \frac{d^j \tau^i}{d\tau^j} = \sum_{k=2}^r \sum_{i=0}^{l-1} f_k c_i^{x^k} \frac{i!}{(i-j)!} \tau^{i-j}.$$

Принимая во внимание (3.40) и (3.37), найдем требуемые выражения для $f_{\text{хн}}(t, p)$:

$$\begin{aligned}
f_{\text{хн}}(t, p) &= \int_0^t \sum_{v=0}^u c_v \frac{(-1)^v}{(n-1)!} \frac{d^v}{d\tau^v} [(t-\tau)^{n-1}] F(x_3(\tau)) d\tau = \\
&= \sum_{v=0}^u c_v \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=2}^r \frac{(-1)^v}{(n-1)!} C_{n-1}^i f_k c_j^{x^k} t^{n-i-1} \int_0^t \tau^j \tau^i d\tau = \\
&= \sum_{v=0}^u c_v \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=2}^r \frac{(-1)^v}{(n-1)!} C_{n-1}^i f_k c_j^{x^k} \frac{t^{n+j}}{(i+j)},
\end{aligned}$$

или

$$f_{\text{хн}}(t, p) = \sum_{v=0}^u c_v \gamma_v(t),$$

где

$$\gamma_v(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{l-1} \sum_{k=2}^r \frac{(-1)^v}{(n-1)!} C_{n-1}^i f_k c_j^{x^k} \frac{t^{n+j}}{(i+j)}. \tag{3.41}$$

Таким образом, все аналитические выражения, определяющие невязку (3.19), найдены для линейных, кусочно-линейных и аналитических нелинейных элементов систем вида (3.15).

Используя полученные выше зависимости для невязки, функционал (3.19) можно представить в виде

$$I(p) = \int_0^T \left(x_3(t) + \sum_{v=0}^{n-1} a_v(p) \alpha_v(t) - \sum_{v=0}^m b_v(p) \beta_v(t) + \sum_{v=0}^u c_v(p) \gamma_v(t) \right)^2 dt, \quad (q=2). \tag{3.42}$$

Функционал (3.42) относительно вспомогательного вектора $\tilde{p}$ может быть записан так:

$$I(\tilde{p}) = \int_0^T \left(x_3(t) - \sum_{v=0}^{n+m+u+1} \tilde{p}_v \phi_v(t) \right)^2 dt, \tag{3.43}$$

где $\tilde{p}_v$ — компоненты вспомогательного вектора; параметры $\tilde{p}_v$ и функции $\phi_v(t)$ определяются следующим образом:

$$\tilde{p}_v = \begin{cases} -a_v, & v = \overline{0, n-1}, \\ b_{v-n}, & v = \overline{n, n+m}, \\ -c_{v-n-m-1}, & v = \overline{n+m+1, n+m+u+1}; \end{cases} \quad (3.44)$$

$$\phi_v(t) = \begin{cases} \alpha_v(t), & v = \overline{0, n-1}, \\ \beta_{v-n}(t), & v = \overline{n, n+m}, \\ \gamma_{v-n-m-1}(t), & v = \overline{n+m+1, n+m+u+1}. \end{cases} \quad (3.45)$$

Анализируя выражение для функционала, записанного в форме (3.43), можно сделать вывод, что рассматриваемая задача успешно сведена к задаче аппроксимации функции $x_3(t)$ линейной комбинацией функций

$$\phi_0(t), \phi_1(t), \dots, \phi_k(t), \quad k = n+m+u+1.$$

Такой подход, в частности, позволяет свести задачу определения неизвестных параметров вспомогательного вектора к решению переопределенной системы линейных алгебраических уравнений.

Действительно, учитывая, что

$$\frac{\partial I(\tilde{p})}{\partial \tilde{p}_i} = -2 \int_0^T \left(x_3(t) - \sum_{v=0}^k \tilde{p}_v \phi_v(t) \right) \phi_i(t) dt, \quad i = \overline{0, k},$$

требуемую систему алгебраических уравнений запишем в виде

$$W\tilde{p} = R, \quad (3.46)$$

где $W = \{w_{ij}, i, j = \overline{0, k}\}$ — матрица, элементы которой определяются формулами

$$w_{ij} = (\phi_i, \phi_j) = \int_0^T \phi_i(t) \phi_j(t) dt,$$

а $R = \{r_i, i = \overline{0, k}\}$ — вектор-столбец правой части:

$$r_i = (\phi_i, x_3) = \int_0^T \phi_i(t) x_3(t) dt.$$

При синтезе корректирующего устройства часть параметров системы известна априори и система уравнений (3.45) получается переопределенной. Компоненты вектора $\tilde{p}$ можно оценить или минимизирова квадратичную функцию стоимости от невязки (3.46):

$$\tilde{p}^* = \min_{\tilde{p}} \{ [W\tilde{p} - R][W\tilde{p} - R]^T \}, \quad (3.47)$$

или с помощью метода наименьших квадратов, применяя технологию псевдообратных матриц:

$$\tilde{p}^* = (W^T W)^{-1} W^T R. \quad (3.48)$$

Зная вспомогательный вектор $\tilde{p}^*$, можно оценить параметры корректирующего устройства p^* .

Структурная схема алгоритма представлена на рис. 3.25.

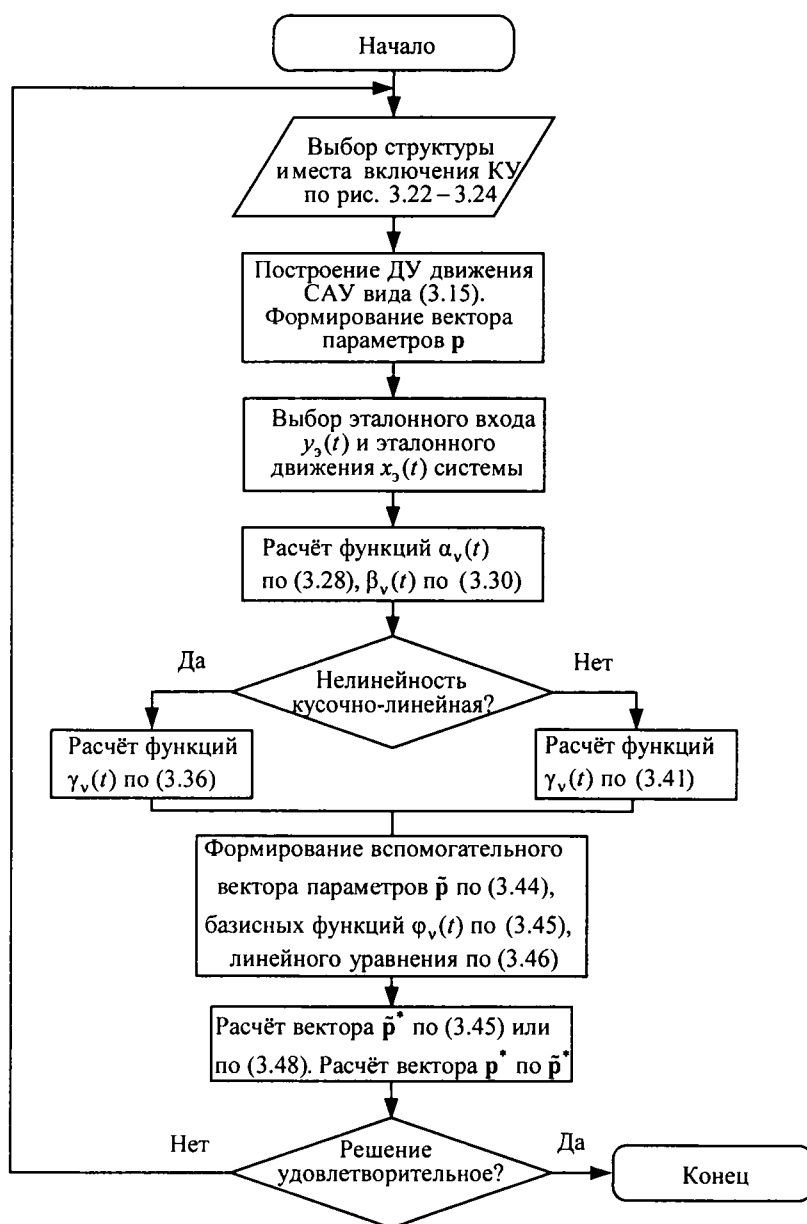


Рис. 3.25. Структурная схема алгоритма

Пример 3.4 [5]. Структурная схема статической нелинейной системы имеет вид, представленный на рис. 3.26. Нелинейный элемент типа «насыщение» находится в цепи местной обратной связи:

$$F(x) = \begin{cases} 0,5 & \text{при } x \geq 0,5, \\ x & \text{при } |x| < 0,5, \\ -0,5 & \text{при } x \leq -0,5. \end{cases}$$

Известны параметры звеньев системы, относящихся к функционально-необходимым элементам: $T_1 = 0,15 \text{ с}$, $k_1 = 10 \text{ с}^{-1}$. Требуется определить параметры регулятора: k_2, k_3, k_4 , которые обеспечивают в системе апериодический переходный процесс $x_s(t)$ — реакцию на $y_s(t) = 1(t)$ при нулевых начальных

условиях, причем время переходного процесса должно составлять $T_p \approx 0,5$ с при статической ошибке не превышающей 5%.

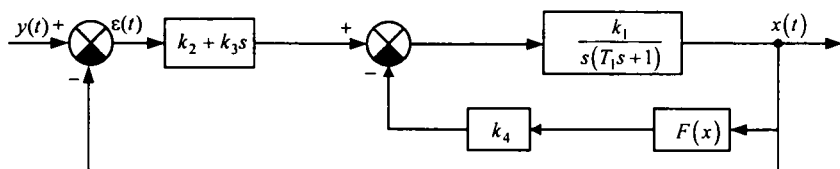


Рис. 3.26. Структурная схема нелинейной системы

Прежде всего запишем дифференциальное уравнение, описывающее движения САУ. Это уравнение имеет вид

$$T\ddot{x}(t) + (1 + k_1k_3)\dot{x}(t) + k_1k_2x(t) + k_1k_4F(x(t)) = k_1k_2y(t) + k_1k_3\dot{y}(t),$$

или, с учетом известных параметров и нормировки,

$$\ddot{x}(t) + (6,66 + 66,66k_3)\dot{x}(t) + 66,66k_2x(t) + 66,66k_4F(x(t)) = 66,66k_2y(t) + 66,66k_3\dot{y}(t).$$

Выберем желаемый переходный процесс $x_s(t)$. По условию задачи он должен быть апериодическим, амплитуда процесса при $t \rightarrow \infty$ равна единице. Этим условиям удовлетворяет процесс вида

$$x_s(t) = (1 - e^{-\alpha t}).$$

Показатель экспоненты α , определим, исходя из заданного времени переходного процесса и статической ошибки

$$1 - e^{-\alpha \cdot 0,5} \geq 0,95;$$

откуда $\alpha \geq 6$. Выбираем $\alpha = 6$.

В системе во время переходного процесса будет иметь место один момент переключения нелинейности при $x_s(t) = 0,5$. Момент переключения найдем из уравнения

$$1 - e^{-0,5} = 0,5,$$

откуда $t_1 = 0,116$ с. Следовательно, нелинейная функция $F(x(t))$ для $x_s(t)$, согласно (3.32), представима в виде

$$F(t) = (1 - e^{-6t})1(t) - (1 - e^{-6t})1(t - t_1) + 0,5[1(t - t_1)].$$

Квадратичный функционал типа (3.42) имеет вид

$$I(p) = \int_0^{0,5} \left(x_s(\tau) + \sum_{v=0}^1 a_v \alpha_v(\tau) - \sum_{v=0}^1 b_v \beta_v(\tau) + c_0 \gamma_0(\tau) \right)^2 d\tau, \quad (3.49)$$

где

$$\alpha_0(\tau) = 0,999923\tau^3 - 1,498680\tau^4 + 1,789349\tau^5 - 1,750703\tau^6 + \\ + 1,399029\tau^7 - 0,878324\tau^8 + 0,400624\tau^9 - 0,115882\tau^{10} + 0,015705\tau^{11};$$

$$\alpha_1(\tau) = 2,999769\tau^2 - 5,994723\tau^3 + 8,946747\tau^4 - 10,504223\tau^5 + \\ + 9,793208\tau^6 - 7,026594\tau^7 + 3,605518\tau^8 - 1,158823\tau^9 + 1,727650\tau^{10};$$

$$\beta_0(\tau) = 0,5\tau^2; \quad \beta_1(\tau) = \tau;$$

$$\gamma_0(\tau) = 9,253338 \cdot 10^{-4} - 2,557094 \cdot 10^{-2}\tau + 0,250000\tau^2.$$

Решая задачу аппроксимации функции $x_s(t)$ элементами $\phi_0(\tau) = \alpha_0(\tau)$, $\phi_1(\tau) = \alpha_1(\tau)$, $\phi_2(\tau) = \beta_0(\tau)$, $\phi_3(\tau) = \beta_1(\tau)$, $\phi_4(\tau) = \gamma_0(\tau)$, получим

$$k_2^* = p_2^* = 0,606847, \quad k_3^* = p_3^* = 0,0907425, \quad k_4^* = p_4^* = 0,003054.$$

Анализ полученного решения показал, что в данном случае обеспечивается 10%-я грубость по варьируемым параметрам.

На рис. 3.27 показаны эталонная переходная характеристика и переходная характеристика скорректированной системы, а на рис. 3.28 — абсолютная погрешность $\varepsilon(t) = h_s(t) - h_p(t)$. Легко заключить, что погрешность не превышает 0,25%.

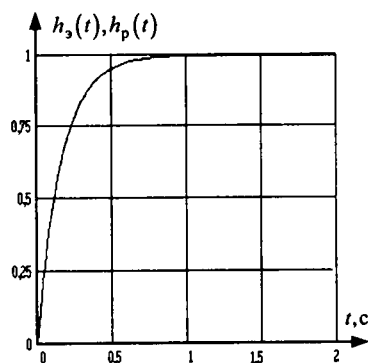
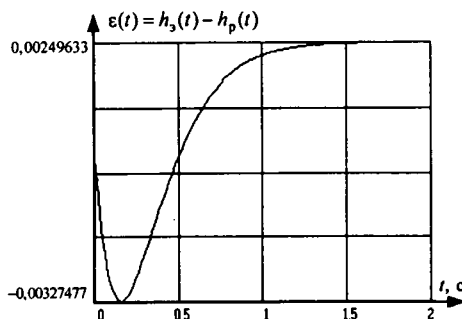
Рис. 3.27. Эталонная ПХ $h_s(t)$ и ПХ скорректированной САУ $h_p(t)$ 

Рис. 3.28. Ошибка приближения эталонного процесса

Пример 3.5 [5]. Структурная схема нелинейной САУ приведена на рис. 3.29. Заданы значения параметров системы:

$T_{\text{дв}} = 0,5$ с, $T_1 = 0,165$ с, $k = k_{\text{эму}} k_{\text{дв}} k_{\text{ред}} = 240$. Нелинейный элемент в системе реализует квадратичную зависимость $F(x) = x^2(t)$.

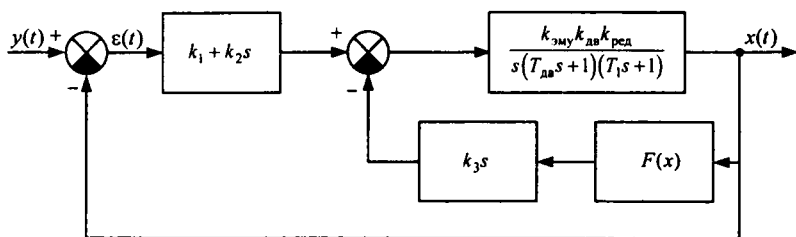


Рис. 3.29. Нелинейная следящая система

Необходимо определить значения параметров нелинейной системы k_1 , k_2 , k_3 таким образом, чтобы удовлетворялись следующие требования:

- 1) при скачкообразном внешнем воздействии $y(t) = 1(t)$ время переходного процесса в системе должно составлять $T_p \approx 1$ с, а перерегулирование $\sigma \leq 23\%$;
- 2) обеспечивалась грубость системы по параметрам не менее десяти процентов.

Структурная схема системы, представленная на рис. 3.29, относится к схемам с нелинейным элементом в цепи местной ОС. Дифференциальное уравнение системы относительно выходной координаты запишется так:

$$T_1 T_{\text{дв}} \ddot{x}(t) + (T_1 + T_{\text{дв}}) \dot{x}(t) + (1 + k k_2) \dot{x}(t) + k k_1 x(t) + k k_3 \frac{d}{dt}[F(x)] = k k_1 y(t) + k_1 k_2 \dot{y}(t). \quad (3.50)$$

После нормировки уравнение принимает вид

$$\ddot{x}(t) + 8,0606 \dot{x}(t) + k_4 (1 + k k_2) \dot{x}(t) + k k_1 k_4 x(t) + k k_3 k_4 \frac{d}{dt}[F(x)] = k k_1 k_4 y(t) + k k_2 k_4 \dot{y}(t), \quad k_4 = 12,1212. \quad (3.51)$$

Выберем желаемый переходный процесс в виде $h_s(t) = k_y (1 - e^{-\alpha_s t} \cos \omega t)$. Параметры процесса найдем, исходя из предъявленных требований к показателям его качества.

Полагая, что $T = 2\pi/\omega$ — период собственных колебаний процесса, можно записать выражение для максимального отклонения переходной характеристики

$$h_{\max} = k_y \left(1 - e^{-\alpha_s \frac{T}{2}} \right) = k_y \left(1 - e^{-\frac{\pi \alpha_s}{\omega}} \right) = k_y \left(1 - e^{-\frac{\pi}{\mu}} \right);$$

откуда легко определяется колебательность процесса и его частота:

$$\mu = \frac{\omega}{\alpha_s} = \frac{\pi}{|\ln \Delta|}, \quad \omega = \frac{\pi \alpha_s}{|\ln \Delta|},$$

где $\Delta = \left(\frac{h_{\max}}{k_y} - 1 \right)$.

Известно, что время переходного процесса T_p связано с коэффициентом затухания приближенным равенством

$$\alpha_s \approx 3/T_p.$$

Из приведенных выше зависимостей следует:

$$\alpha_s \approx 3/T_p \approx 3,$$

$$\omega \approx \frac{\pi \alpha_s}{|\ln \Delta|} \approx 6,093 \approx 6.$$

Пользуясь описанным выше методом, определяем искомые параметры:

$$k_1^* = 0,0417862, \quad k_2^* = 0,0176393, \quad k_3^* = 0,00095812.$$

Эталонный переходный процесс и процесс в системе при найденных параметрах показаны на рис. 3.30, а ошибка приближения эталонного процесса $h_s(t)$ на рис. 3.31. Анализ полученного решения подтвердил, что при этих параметрах заданная грубость обеспечивается.

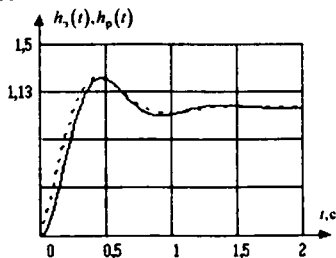


Рис. 3.30. Эталонный $h_s(t)$ и реальный $h_p(t)$ переходные процессы

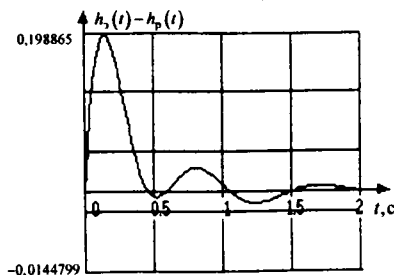


Рис. 3.31. Ошибка приближения эталонного процесса $h_s(t)$

3.4. СЕТОЧНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ АППАРАТ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассматриваемый в этом параграфе метод применяется при проектировании сложных автоматических систем, включающих нелинейные элементы, а также звенья, параметры которых изменяются в процессе функционирования САУ. Другими словами, *задача синтеза регуляторов рассматривается в классе нелинейных нестационарных систем, поведение которых описывается дифференциальными уравнениями высокого порядка*. Степень эффективности метода в основном определяется возможностями используемой ЭВМ, поскольку его базовое положение — численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений.

В последние десятилетия прошлого века имело место бурное развитие отдельных разделов численных методов, особенно тех, которые связаны с проблемами управления и оптимального поиска, а также тех, которые посвящены методам решения дискретных задач. В этой связи большое значение приобрели разностные методы решения многих типов задач, в том числе нелинейных ДУ высокого порядка, описывающих поведение сложных автоматических систем. Важная особенность разностных (сеточных) методов состоит в том, что они, как правило, допускают простую алгоритмизацию, причем полученные алгоритмы могут быть эффективно реализованы на ЭВМ.

Что касается дискретных методов решения ДУ, то для них построены не только вычислительные схемы, но исследованы такие важные для практики вопросы, как сходимость и устойчивость, оценка погрешности, реализация алгоритмов на ЭВМ. Разработаны методы решения жестких задач, которые имеют прямое отношение к исследованию сложных автоматических систем: применяются неявные методы Рунге–Кутты, многошаговые методы, методы экстраполяции и др.

Одним из важных направлений является решение ДУ в частных производных, которые описывают поведение систем с распределенными параметрами. Необходимо указать и краевые задачи, играющие важную роль в теории оптимального управления.

Численные методы решения ДУ (методы Эйлера, Рунге–Кутты и др.) являются основным инструментом исследования и анализа САУ: они являются универсальными и эффективными, так как позволяют находить приближенное решение для широкого класса как систем, так и задач расчета и проектирования. Отмечается и следующий недостаток: они не позволяют непосредственно, как аналитические методы, вскрыть причины того или иного поведения системы, поскольку они позволяют лишь получить конкретный результат (числовые значения) для конкретных исходных данных.

Сказанное можно рассматривать как общее свойство численных методов в сравнении их с аналитическими подходами. *При решении же таких задач, как синтез регуляторов, построение оптимальных программ и оптимальных программных управлений численные методы в инженерном содержании оказываются весьма эффективными, поскольку позволяют построить не только алгоритмы решения задач (иногда достаточно сложные), но и охватить широкий класс систем, включая нелинейные и нестационарные.*

Изложим основное содержание метода синтеза регуляторов, в качестве примера используя метод Эйлера. Первый этап на пути построения численного метода решения задачи Коши состоит в замене отрезка $[0, T]$ — области непрерывного изменения аргумента множеством, которое представляет собой конечное число точек $t_0 < t_1 < \dots < t_N = T$ и называется сеткой. Сами точки $t_i, i = \overline{0, N}$ называются узлами

Таким образом, задача анализа получила решение (рис. 3.32).



Рис. 3.32. К иллюстрации постановок задач анализа и синтеза регуляторов методом Эйлера

Задача синтеза регулятора. Положим, что найдена система ДУ (3.54) скалярной автоматической системы с включенным последовательно и параллельно регулятором, численные значения параметров которого $p_1, p_2, \dots, p_r$ подлежат расчету (ос- тальные параметры САУ известны).

Используя очевидные преобразования (весьма громоздкие в общем случае), из (3.54) можно получить формулы, определяющие дискретные значения выходного сигнала скалярной системы, зависящие не только от t_k , но и от параметров регулятора, т.е. $x(t_0, p), x(t_1, p), x(t_2, p), \dots, x(t_N, p)$ (рис. 3.32).

Оптимальные значения параметров находятся минимизацией, например, функционала вида

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \sum_{k=1}^N [x(t_k, p) - x_s(t_k)]^2 \rightarrow \min_p.$$

Если же, например, система (3.54) описывает линейную многомерную стационарную САУ, т.е.

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}(t, p) &= \mathbf{A}(p)\mathbf{X}(t, p) + \mathbf{B}(p)\mathbf{Y}(t), \\ \mathbf{X}_b(t, p) &= \mathbf{C}(p)\mathbf{X}(t, p), \end{aligned} \quad (3.56)$$

то численные значения параметров регулятора находятся путем минимизации функционала вида

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \sum_{i=1}^{\bar{p}} \left\{ \sum_{k=1}^N [x_i^p(t_k, p) - x_{is}^p(t_k)]^2 \right\} \rightarrow \min_p,$$

где $x_i^p(t, p)$ и $x_{is}^p(t, p)$ — соответственно реальные и эталонные выходные сигналы системы.

Рассмотрим систему, поведение которой описывается ДУ

$$x'(t) + a_0 x(t) = \cos(t) + 25 \sin(t), \quad x(0) = 1. \quad (3.57)$$

Задача анализа. Положим, что $a_0 = 25$, поскольку в задачах анализа все параметры известны. Задача анализа заключается в построении сигнала $x(t)$. Формула, реализующая метод Эйлера, для данного уравнения запишется так:

$$x_{n+1} = x_n + h(-25x_n + \cos(t_n) + 25 \sin(t_n)).$$

Результаты расчетов по последней формуле приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Результаты расчетов значений x_{n+1}

t	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$x(t_k)$	0,205	0,287	0,404	0,460	0,597	0,600	0,787	0,983	0,99

А теперь обратимся к рассматриваемой в данном параграфе задаче синтеза, предполагая, что уравнение системы имеет вид (3.57), где a_0 — параметр, который можно изменять (параметр регулятора).

Задача заключается в нахождении a_0 такого, чтобы выполнялось соотношение

$$I(a_0) = \int_0^T [x_p(a_0) - x_s(t)]^2 dt \rightarrow \min_{a_0}, \quad (3.58)$$

где $x_s(t)$ — эталонный выходной сигнал, $x_p(a_0)$ — реальный выходной сигнал, зависящий от параметра a_0 .

Ключевое положение вычислительной схемы заключается в следующем. Найдем формулу, определяющую x_1 ; имеем ($n = 0$)

$$x_1(a_0) = x_0 + h(-a_0 x_0 + \cos t_0 + 25 \sin t_0) = x_0 + h(-a_0 x_0 + 1).$$

Таким образом, найдено значение сеточной функции при $t = 1$ в зависимости от параметра системы a_0 . Поступая аналогичным образом, находим ($n = 1$)

$$\begin{aligned} x_2(a_0) &= x_1(a_0) + h(-a_0 x_1(a_0) + \cos t_1 + 25 \sin t_1) = \\ &= x_0 - ha_0 x_0 + h - ha_0 x_0 - h^2 a_0^2 x_0 - h^2 a_0 + \cos t_1 + 25 \sin t_1 = \\ &= x_0 (1 - 2ha_0 - h^2 a_0^2) - h^2 a_0 + \cos t_1 + 25 \sin t_1. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Для нахождения $x_3(a_0)$ необходимо в формулу

$$x_3(a_0) = x_2(a_0) + h(-a_0 x_2(a_0) + \cos t_2 + 25 \sin t_2)$$

подставить зависимость (3.59), определяющую $x_2(a_0)$.

Продолжая рассмотренный выше процесс, можно получить зависимости, определяющие $x_4(a_0), x_5(a_0), \dots, x_N(a_0)$.

Теперь задача минимизации функционала (3.58) может быть аналитически представлена так:

$$I(a_0) = \sum_{k=1}^N [x_p(t_k, a_0) - x_z(t_k)]^2 \rightarrow \min_{a_0}.$$

Важным является то факт, что задача нахождения a_0 может быть поставлена с включением соответствующих ограничений, диктуемых содержанием конкретной задачи синтеза. В этом случае задача решается методами нелинейного программирования.

Как показала практика применения такого подхода, при решении с его помощью инженерных задач необходимо обратить внимание на следующие факторы, имеющие принципиальное значение.

1. Даже при рассмотрении простейшего примера формулы, определяющие дискретные значения $x_1(a_0), x_2(a_0), \dots$, зависящие только от одного параметра a_0 , становятся громоздкими, а их получение — утомительной процедурой. При рассмотрении сложных многомерных САУ, когда число изменяемых параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$, особенно для нестационарных систем, велико (часто более 10), а порядок дифференциальных уравнений достигает нескольких десятков, задача получения дискретных значений вектор-функции выхода $X_b(t, p)$ $X_b(t_k, p) = (x_1^b(t_k, p), x_2^b(t_k, p), \dots, x_i^b(t_k, p), \dots)$, зависящих от параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$, становится трудно реализуемой даже с помощью современных ЭВМ. В этом случае необходимо пользоваться *символьными вычислениями* [1]. Первые системы символьных вычислений появились в середине 60-х годов прошлого столетия, но только в начале 70-х годов несколько таких различных систем стали доступными для широкого круга пользователей. В настоящее время прилагаются значительные усилия на усовершенствование существующих и разработку новых систем. Символьные вычисления дают возможность работать с математическими выражениями в символьной форме. Системы символьных вычислений могут, например, складывать, умножать и делить многочлены, рациональные выражения, дифференцировать функции, находить интегралы от многих функций, которые допускают интегрирование в замкнутой форме. Эти возможности являются многообещающими как средство избавления от утомительных преобразований алгебраических выражений, что нередко оказывается необходимой предварительной работой перед проведением численных расчетов, связанных с рассматриваемой задачей синтеза регуляторов.

2. При расчете дискретных значений выходного сигнала $x_p(t_i, p)$ (например, для простейшего случая по формуле (3.53)) число слагаемых с увеличением i быстро растет. Это приводит к тому, что выражение $x_p(t_i, p)$ после определенного количества шагов становится громоздким (особенно, если имеет место большое число неизвестных параметров регулятора) и дальнейшие вычисления требуют больших ресурсов ЭВМ. В этом случае целесообразно применить следующий прием. Интервал $[0, T]$, на котором строится решение $x_p(t, p)$, разбивается на частичные интервалы $\{[0, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_{l-1}, T_l], [T_l, T]\}$, число которых зависит как от сложности синтезируемой системы, так и от мощности ЭВМ, выполняющей расчеты. Затем выходной сигнал $x(t, p)$ строится на первом частичном интервале — $x_p(t, p)$. По найденному решению на $[0, T_1]$ составляется функционал; полученные в результате его миними-

зации параметры p при подстановке в $x_{1p}(t, p)$ дают в узлах сетки $t_i \in [0, T_1]$ уже численные значения выходного сигнала, которые используются для построения решения $x_{2p}(t, p)$ на следующем частичном интервале, и т.д. Решение на всем интервале $[0, T]$ представляет собой совокупность решений на каждом из частичных интервалов: $x_p(t, p) = \{x_{1p}(t, p), \dots, x_{l+1p}(t, p)\}$. Поскольку на каждом из промежутков $[0, T_1], [T_1, T_2], \dots, [T_l, T]$ построены функции $x_{1p}(t, p), x_{2p}(t, p), \dots, x_{l+1p}(t, p)$ (т.е. на каждом из этих участков $x_{ip}(t, p)$ зависят от параметров регулятора), то численные значения параметров регулятора $p_1^*, p_2^*, \dots, p_r^*$ на промежутке $[0, T]$ находятся путем минимизации функционала

$$I(p_1, p_2, \dots, p_r) = \sum_{k=1}^{l+1} \left\{ \sum_{i=1}^N x_{kp}(t_i, p) - x_3(t_i) \right\}^2 \rightarrow \min_p.$$

Такой прием позволяет существенно упростить и соответственно ускорить процедуру построения $x(t, p)$. Необходимо учитывать тот факт, что на точность получаемого таким способом решения в сильной степени влияет выбор начальных условий $p = p^0$ при минимизации функционала на каждом из частичных интервалов. Как показали расчеты, наиболее эффективно использовать p^0 на всех интервалах одни и те же и как можно ближе к желаемым p^* .

3. Поскольку при решении задачи минимизации (3.58) используется аппарат нелинейного программирования, то на параметры выходного сигнала и на устойчивость системы можно накладывать соответствующие ограничения.

Если рассматривается линейная стационарная система, описываемая векторно-матричным уравнением

$$\dot{X}(t, p) = A(p)X(t, p) + Y(t),$$

где $Y(t)$ — вектор-функция внешних воздействий, то формула, определяющая $X(t_k)$, может быть представлена так [122]:

$$X_{k+1}(p) = \left(I + A(p)h + \frac{A^2(p)h^2}{2!} \right) [X_k(p) + hY(kh)]. \quad (3.60)$$

Последовательные значения искомого вектора выхода находятся с помощью зависимостей

$$\begin{aligned} X_1(p) &= \left(I + A(p)h + \frac{A^2(p)h^2}{2!} \right) [X_0(p) + hY(0)]; \\ X_2(p) &= \left(I + A(p)h + \frac{A^2(p)h^2}{2!} \right) [X_1(p) + hY(h)]; \\ X_3(p) &= \left(I + A(p)h + \frac{A^2(p)h^2}{2!} \right) [X_2(p) + hY(2h)]; \\ &\dots \end{aligned}$$

Как указано в [122], приведенный алгоритм может использоваться для построения выходных сигналов в линейных системах при внешних воздействиях, меняющихся в

широком диапазоне; они могут иметь разрывы. Алгоритм не накладывает каких-либо принципиальных ограничений на шаг построения процессов, кроме условия нахождения спектра s_i матрицы A внутри круга с центром в точке $[-R, 0]$ в левой полуплоскости. Процесс численно устойчив, если шаг выбрать кратным величине h , $h = 1/R$ (в задаче синтеза о R можно судить по эталонным операторам или эталонным выходным сигналам).

Поскольку численные методы решения ДУ — основной инструмент исследования нелинейных задач, то изложенный подход обобщается на класс нелинейных систем.

Положим, что нелинейная САУ описывается векторно-матричным ДУ вида [122]

$$\dot{X}(t, p) = A(p)X(t, p) + F(X(t, p), t, p). \quad (3.61)$$

Алгоритм построения сеточной вектор-функции выхода записывается так [122]:

$$X_{k+1}(p) = e^{A(p)h} \left[X_k(p) + h \left(I - \frac{A(p)h}{2!} + \frac{A^2(p)h^2}{3!} - \dots \right) F(X_k(p), kh, p) \right].$$

Алгоритм предполагает расположение спектра матрицы $A(p)$ слева от мнимой оси.

Выбор шага осуществляется по линейной части системы. В случае сильного влияния нелинейностей выбор шага осуществляется другими методами [122]; метод обобщается на линейные нестационарные системы. Кроме указанных методов могут быть использованы стандартные численные методы интегрирования: Рунге-Кутта, Адамса, Хемминга, Гира и др.

Использование разностных схем решения ДУ иногда встречает определенные трудности:

- стремление уменьшить ошибку с использованием сеточного представления функции за счет других, более точных представлений производных (вместо, например, $f''(t) = 1/h^2 (f(t_{i-1}) + 2f(t_i) - f(t_{i+1})) + \varepsilon_i(h)$ можно использовать другие соотношения) может привести к системе уравнений с несимметричной матрицей. Отсутствие симметрии может повлечь ряд трудностей при численной реализации алгоритма решения ДУ;
- свойства оператора при переходе к разностному уравнению часто теряются. Если рассматривать краевую задачу

$$-\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} = y(t), 0 \leq t \leq 1; x(0) = x(1) = 0, \quad (3.62)$$

то уравнению (3.62) соответствует дискретный эквивалент

$$\frac{-x_{i-1} + 2x_i - x_{i+1}}{h^2} + a_1 \frac{x_{i+1} - x_i}{h} = y(t_i), x_0 = x_N = 0, i = \overline{1, N-1},$$

для которого характерно следующее: если постоянная a_1 и шаг сетки h таковы, что $2 < ha_1$, то матрица, определяющая $x_1, x_2, \dots, x_{N-1}$, заведомо не является положительно определенной, хотя оператор исходной задачи обладает этим свойством.

Во многих задачах синтеза регуляторов весьма конструктивные алгоритмы могут быть получены с использованием квадратурных формул и аппарата интегральных уравнений (см. гл. 2, т. 1). На практике широко используются квадратурные формулы, реализующие приближенное равенство

$$\int_0^T f(t) dt = \sum_{i=0}^N A_i f(t_i),$$

в числе которых формула трапеций, формула Симпсона (с оценкой погрешности), квадратурные формулы интерполяционного типа (квадратурные формулы интерполяционного типа, построенные на основе равноотстоящих значений $t_0, t_1, \dots, t_N$, называются формулами Ньютона–Котеса) с оценкой погрешности и с рассмотрением вопросов вычислительной устойчивости, квадратурные формулы Гаусса с их хорошей обусловленностью. При построении алгоритмов синтеза регуляторов используются квадратурные формулы для случая, когда имеет место текущий верхний предел интегрирования

$x(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau$; весьма подходящим для интерполяции на каждом

элементарном отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ является кубический многочлен Эрмита. Использование этого способа интерполяции позволяет находить значения $x(t)$ с довольно высокой точностью по сравнительно редкой таблице значений, что упрощает вычислительную схему синтеза регуляторов сложных САУ.

Рассмотрим основные положения обсуждаемого подхода применительно к решению задачи синтеза регулятора в классе скалярных стационарных систем.

Положим, что $p_1, p_2, \dots, p_r$ — параметры регулятора; ДУ замкнутой САУ с регулятором записываются в виде

$$x^{(n)} + \sum_{v=0}^{n-1} a_v(p) x^{(v)} = \sum_{k=0}^m b_k(p) y^{(k)}. \quad (3.63)$$

Так как последнему ДУ эквивалентно интегральное уравнение

$$\begin{aligned} x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(p) \int_0^t \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} [(t-\tau)^{n-1}] x(\tau) d\tau = \\ = \sum_{k=0}^m b_k(p) \int_0^t \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} [(t-\tau)^{n-1}] y(\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3.64)$$

то, учитывая зависимости

$$\frac{d^k}{d\tau^k} [(t-\tau)^{n-1}] = (n-1)(n-2)\dots(n-k)(-1)^k (t-\tau)^{n-k-1}$$

и

$$\sum_{k=0}^{n-1} a_k(p) \int_0^t \frac{(-1)^k}{(n-1)!} \frac{d^k}{d\tau^k} [(t-\tau)^{n-1}] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(p)(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!},$$

(3.64) принимает вид

$$x(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(p) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} x(\tau) d\tau = \sum_{k=0}^m b_k(p) \int_0^t \frac{(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} y(\tau) d\tau. \quad (3.65)$$

Поскольку в рассматриваемой постановке система линейна и стационарна, то $y(t) = 1(t)$ (эталонный входной сигнал) и (3.65) можно переписать в виде

$$x(t) - \int_0^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau = f(t),$$

где $K(t, \tau) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k(p)(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}$, $f(t) = \int_0^t \left[\sum_{k=0}^m b_k(p) \frac{(t-\tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} \right] d\tau$.

Для решения уравнения (3.65) применим метод квадратур. Пусть $t_i = \Delta(i-1)$, $i = \overline{1, N}$; воспользуемся формулой трапеций. Тогда можно записать зависимости, определяющие сеточную функцию $x(t_k, p)$:

$$x_1(p) = x(t_1, p) = \sum_{k=0}^m b_k(p) \int_0^{t_1} \frac{(t_1 - \tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} d\tau,$$

$$x_i(p) = x(t_i, p) = h \left[-\sum_{j=1}^{i-1} \sum_{k=0}^{n-1} A_j a_k(p) \frac{(t_i - \tau_j)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} x(t_j, p) \right] + \sum_{k=0}^m b_k(p) \int_0^{t_i} \frac{(t_i - \tau)^{n-k-1}}{(n-k-1)!} d\tau,$$

где

$$t_i = h(i-1), \quad i = \overline{1, N}; \quad N = \frac{T}{h} + 1; \quad A_j = \begin{cases} 1/2 & \text{при } j = 1, \\ 1 & \text{при } j > 1. \end{cases}$$

Пользуясь символьными вычислениями, можно найти аналитические зависимости, определяющие значения функции $x(t)$ в узлах сетки через параметры регулятора, т.е. $x(t_1, p) = x_1(p)$, $x(t_2, p) = x_2(p)$, ..., $x(t_N, p) = x_N(p)$. Параметры $p_1, p_2, \dots, p_r$ определяются таким образом, чтобы:

- 1) воспроизводился заданный переходной процесс $x_3(t)$, относящийся к координате $x(t)$ при возмущениях определенного вида; при этом с допустимой погрешностью должна воспроизводиться кривая $x_3(t)$, ее экстремальные значения, скорость и время протекания переходного процесса;
 - 2) обеспечивалась заданная степень устойчивости* и колебательность** системы.
- Пункт 1 обеспечивается приближением кривой реального переходного процесса $x_p(t, p)$ к заданной кривой $x_3(t)$.

Пункт 2 обеспечивается введением в расчет условий, определяющих нахождение корней характеристического уравнения внутри области, заданной на плоскости комплексного переменного σ и называемой областью заданного расположения полюсов (или областью заданного качества), для чего используется, как предложено Ю.И. Неймарком, D -разбиение плоскости одного или двух параметров.

Наиболее целесообразной формой области заданного расположения полюсов следует считать шестиугольник $a\sigma_1\mu\mu_1\eta'a$ (рис. 3.33), дающий предельные значения вещественных частей корней характеристического уравнения, степень устойчивости R_1 , предельные значения частот H и колебательность системы $\text{tg}(\psi)$ [81]. Вследствие наличия определенных зависимостей между параметрами, отсеченная область $\mu\eta q$ для варьирования параметров, как правило, не существенна. Параметры заданной прямой $x_3(t)$ должны быть согласованы с параметрами области R_1, R_2, ψ, H . Должно быть $R_1 = 1/\tau_{\max}$, $\tau_{\max}$ — максимальная постоянная времени составляющих

* Под степенью устойчивости понимается абсолютное значение вещественной части полюса, ближайшего к мнимой оси.

** Колебательностью системы называется $\text{tg}(\psi)$, где ψ — угол между отрицательной вещественной полуосью и полубесконечной прямой, проведенной из начала координат во втором квадранте комплексной плоскости s .

переходного процесса $x_p(t, p)$. Угол ψ ограничивает колебательность процесса $x_s(t)$, величина H — его высокочастотные составляющие. Выбор R_2 в значительной мере произволен, однако наличие несоизмеримых по величине модуля корней характеристического уравнения нежелательно ввиду снижения точности определения некоторых параметров системы в процессе синтеза из-за диспропорции в значениях коэффициентов изображения.

Подробно соответствующие положения изложены в [5, 81]. Там же рассмотрен подход, использующий квадратурные формулы для решения задач синтеза регуляторов.

Задача синтеза на основе сказанного формулируется так:

- для обеспечения приближения кривой реального переходного процесса $x_p(t, p)$ к эталонной кривой $x_s(t)$ параметры $p_1, p_2, \dots, p_r$ регулятора выбираются исходя из условия

$$\sum_{i=1}^N [x(t_i, p) - x_s(t_i)]^2 \rightarrow \min_{p_i, i=1, N};$$

- для обеспечения условий, определяющих нахождение корней характеристического уравнения внутри заданной области, составляются соответствующие ограничения.

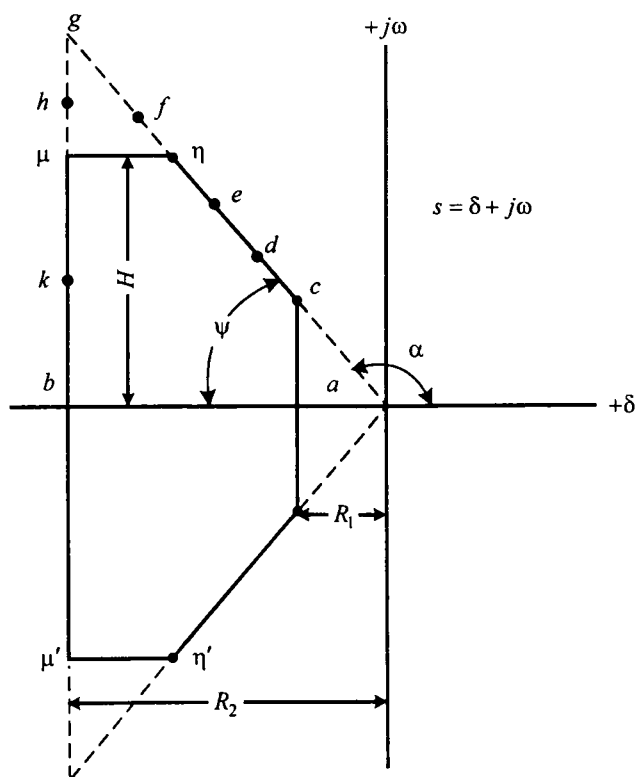


Рис. 3.33. Область заданного расположения полюсов на комплексной плоскости

Задача решается методом нелинейного программирования. Структурная схема алгоритма решения задачи представлена на рис. 3.34.

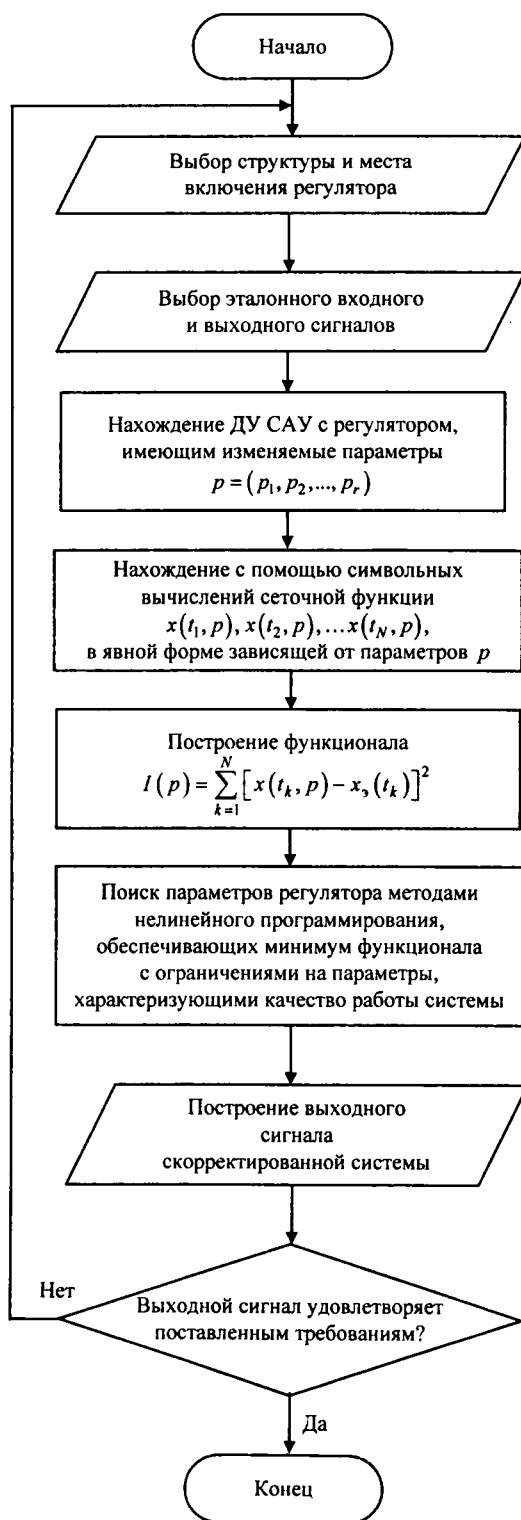


Рис. 3.34. Структурная схема алгоритма

Пример 3.6. В качестве примера рассмотрим решение задачи синтеза оптимальной константы навигации n в системе самонаведения (см. пример 2.3) для следующих параметров движения ракеты и цели:

- скорость ракеты $V(t) = 200(1+t)$ м/с;
- скорость цели $V_u(t) = 400$ м/с;
- изменение расстояния между ракетой и целью $r(t) = 100(45 - 6t - t^2)$;
- задающее воздействие $g(t) = g_3(t) = V_u \Delta \theta_u(t) - V(t) \Delta \theta_0(t) = V_u \cdot 0,05 - V(t) \cdot 0,05$;
- эталонный промах системы определим так:

$$h_3(t) = (45 - 6t - t^2) \cdot \left\{ \eta_u \left(-0,00055 + 0,00539t - 0,00116t^2 + 0,01198t^3 - 0,00386t^4 + 0,00051t^5 \right) + \right. \\ \left. + \Delta \theta_0 \left(0,03958 - 4,77453t - 2,14545t^2 - 0,60758t^3 + 0,20813t^4 - 0,02878t^5 \right) \right\},$$

где $\eta_u = V_u(t) \Delta \theta_u$.

Система самонаведения в нормальной форме Коши имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) + F_1(t) \cdot g(t), \\ \dot{x}_2(t) = \dot{x}_3(t) + F_2(t) \cdot g(t), \\ \dot{x}_3(t) = \dot{x}_4(t) + F_3(t) \cdot g(t), \\ \dot{x}_4(t) = -a_4(t)x_4(t) - a_3(t)x_3(t) - a_2(t)x_2 - a_1(t)x_1(t) + F_4(t) \cdot g(t), \end{cases} \quad (3.66)$$

где

$$a_1(t) = l_0(t)/l_4(t); \quad a_2(t) = l_1(t)/l_4(t); \quad a_3(t) = l_2(t)/l_4(t); \quad a_4(t) = l_3(t)/l_4(t), \\ F_0(t) = 0; \quad F_1(t) = 1; \quad F_2(t) = 0; \quad F_3(t) = 0; \quad F_4(t) = 200/3 \cdot n \cdot (3+t)/(-45+6t+t^2).$$

Метод Эйлера для системы (3.66) дает следующую схему:

$$\begin{cases} x_1(t_{i+1}, n) = x_1(t_i, n) + h \cdot (x_2(t_i, n) + F_1(t_i, n) \cdot g(t_i)), \\ x_2(t_{i+1}, n) = x_2(t_i, n) + h \cdot (x_3(t_i, n) + F_2(t_i, n) \cdot g(t_i)), \\ x_3(t_{i+1}, n) = x_3(t_i, n) + h \cdot (x_4(t_i, n) + F_3(t_i, n) \cdot g(t_i)), \\ x_4(t_{i+1}, n) = x_4(t_i, n) + h \cdot (-a_4(t_i, n)x_4(t_i, n) - a_3(t_i, n)x_3(t_i, n) - \\ - a_2(t_i, n)x_2(t_i, n) - a_1(t_i, n)x_1(t_i, n) + F_4(t_i, n) \cdot g(t_i)). \end{cases} \quad (3.67)$$

Для сетки $t_i = 0,05 \cdot i$, $i = 0, 1, 2, 3, \dots$ с использованием символьных вычислений были получены следующие дискретные значения $h(t_k, n)$, явно зависящие от параметра навигации n :

$$\begin{aligned} h(t_0, n) &= 0; \\ h(t_1, n) &= -0,475; \\ h(t_2, n) &= -0,925; \\ h(t_3, n) &= -1,35; \\ h(t_4, n) &= -1,75000 + 0,271948e - 3n; \\ h(t_5, n) &= -2,12500 + 0,117533e - 2n; \\ h(t_6, n) &= -2,47500 + 0,307864e - 2n - 0,161957e - 6n^2; \\ h(t_7, n) &= -2,80000 + 0,632746e - 2n - 0,109246e - 5n^2; \\ h(t_8, n) &= -3,10000 + 0,112329e - 1n - 0,417927e - 5n^2 + 0,100981e - 9n^3; \\ h(t_9, n) &= -3,37500 + 0,180684e - 1n - 0,119331e - 4n^2 + 0,930956e - 9n^3; \\ h(t_{10}, n) &= -3,62500 + 0,270706e - 1n - 0,283069e - 4n^2 + 0,471244e - 8n^3 - 0,659e - 13n^4. \end{aligned}$$

Безусловная минимизация функционала, при составлении которого было использовано 80 точек сетки:

$$I(n) = \sum_{k=0}^{80} [h_p(t_k, n) - h_s(t_k)]^2 \rightarrow \min_n,$$

позволила получить оптимальное значение константы навигации $n^* = 2,1986$. Промах системы при данном значении n представлен на рис. 3.35.

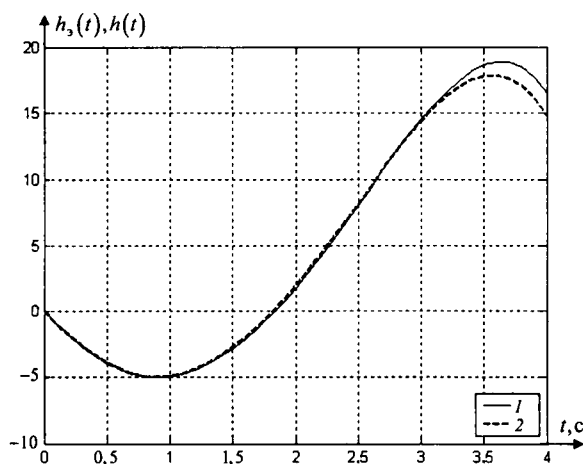


Рис. 3.35. Эталонный (1) и реальный (2) (при $n = n^*$) промах системы самонаведения

Пример 3.7. Приведем результаты решения примера 3.6 сеточно-параметрическим методом, но уже основанным на квадратурной схеме.

В качестве квадратурной схемы при построении выходного сигнала $x(t, p)$ была использована формула трапеций с шагом дискретизации $h = 0,2$ с. Сначала задача была решена без разбиения на интервалы, затем с разбиением на четыре интервала $\{[0,1], [1,2], [2,3], [3,4]\}$.

1. Приведем результаты решения задачи без разбиения на частичные интервалы.

Значения выходного сигнала системы самонаведения в узлах сетки в зависимости от n определяются соотношениями:

$$x(t_1) = 0;$$

$$x(t_2) = -1,91714;$$

$$x(t_3) = -3,24481 + 0,16396e - 1n;$$

$$x(t_4) = -4,21432 + 0,711415e - 1n - 0,15311e - 3n^2;$$

$$x(t_5) = -4,78874 + 0,17264n - 0,11023e - 2n^2 + 0,15612e - 5n^3;$$

$$x(t_6) = -4,96974 + 0,32361n - 0,41950e - 2n^2 + 0,16092e - 4n^3 - 0,17398e - 7n^4;$$

$$x(t_7) = -4,75415 + 0,52105n - 0,11531e - 1n^2 + 0,85910 - 4n^3 - 0,23832e - 6n^4 + 0,21211e - 9n^5;$$

$$x(t_8) = -4,14055 + 0,75694n - 0,25963e - 1n^2 + 0,32199e - 3n^3 -$$

$$-0,16752e - 5n^4 + 0,36948e - 8n^5 - 0,28338e - 11n^6;$$

$$x(t_9) = -3,12791 + 1,01803n - 0,51029e - 1n^2 + 0,96206e - 3n^3 -$$

$$-0,81532e - 5n^4 + 0,32877e - 7n^5 - 0,61012e - 10n^6 + 0,41587e - 13n^7;$$

$$x(t_{10}) = 0,96719e - 1 + 1,53276n - 0,14981n^2 + 0,55731e - 2n^3 - 0,10034e - 3n^4 +$$

$$+0,95852e - 6n^5 - 0,50371e - 8n^6 + 0,14450e - 10n^7 - 0,21013e - 13n^8 + 0,12023e - 16n^9.$$

Функционал в этом случае имеет вид

$$\begin{aligned} I(n) = & 59,960374n^3 + 0,85295n^6 + 0,14477e - 14n^{18} + 0,22665e - 5n^{12} - 567,53169n + 93,79479n^2 - \\ & - 0,28319n^7 + 1,10632n^5 - 21,22838n^4 - 0,23053e - 16n^{19} + 0,49871e - 1n^8 - 0,10561e - 6n^{13} - \\ & - 0,60661e - 2n^9 + 0,40523e - 8n^{14} - 0,12909e - 9n^{15} + 0,55415e - 3n^{10} + 0,34367e - 11n^{16} - \\ & - 0,39594e - 4n^{11} - 0,76831e - 13n^{17} - 0,35501e - 20n^{21} + 0,34363e - 22n^{22} - 0,28160e - 24n^{23} + \\ & + 0,31079e - 18n^{20} + 0,19502e - 26n^{24} - 0,11380e - 28n^{25} + 0,55735e - 31n^{26} - 0,21378e - 38n^{29} + \\ & + 0,47956e - 41n^{30} + 0,77069e - 36n^{28} - 0,2277e - 33n^{27} - 0,12034e - 49n^{33} - 0,85389e - 44n^{31} + \\ & + 0,11755e - 46n^{32} - 0,38237e - 56n^{35} + 0,79376e - 60n^{36} + 0,8603e - 53n^{34} + 556,7433. \end{aligned}$$

Минимум функционала достигается в точке $n^* = 1,9447$. Промах системы при найденном значении константы навигации представлен на рис. 3.36.

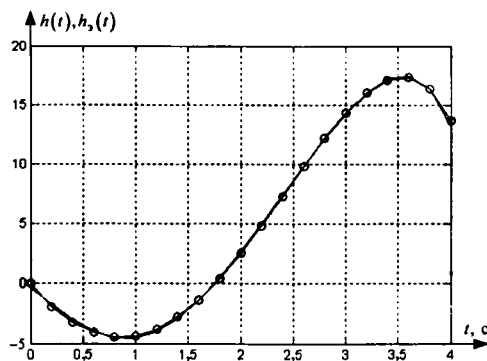


Рис. 3.36. Эталонный (1) и реальный (2) промах системы самонаведения, полученный при решении задачи синтеза без разбиения на частичные интервалы

2. Проведем анализ результатов решения задачи при разбиении на четыре частичных интервала. Формулы для дискретных значений выходного сигнала системы в зависимости от n имеют вид:

$$x(t_1) = 0;$$

$$x(t_2) = -1,91714;$$

$$x(t_3) = -3,24481 + 0,016397n;$$

$$x(t_4) = -4,21432 + 0,071140n - 0,000153106n^2;$$

$$x(t_5) = 4,78874 + 0,17264n - 0,0011023n^2 + 0,0000015612n^3;$$

$$x(t_6) = -5,69889 + 0,71321n;$$

$$x(t_7) = -4,49164 + 0,37311n - 0,00869515n^2;$$

$$x(t_8) = 4,10431 + 0,73780n - 0,02592n^2 + 0,00011617n^3;$$

$$x(t_9) = 3,06996 + 0,98546n - 0,0499479n^2 + 0,00065878n^3 - 0,00000170485n^4;$$

$$x(t_{10}) = 1,67164 + 1,25875n - 0,088788n^2 + 0,0020748n^3 - 0,000014720n^4 + 275 \cdot 10^{-8}n^5.$$

Выражение для функционала запишется так:

$$I(n) = 57,90447n^3 - 3431,02255n - 0,074317n^5 + 743,67454n^2 - 7,35805n^4 + \\ + 3537,12143 + 2146 \cdot 10^{-8}n^{10} - 0,47086 \cdot 10^{-5}n^9 - 0,01155n^7 + 0,00036152n^8 + 0,1452n^6.$$

Оптимальное значение константы навигации составило в этом случае $n^* = 1,9887$. Промах системы при найденном значении константы навигации представлен на рис. 3.37.

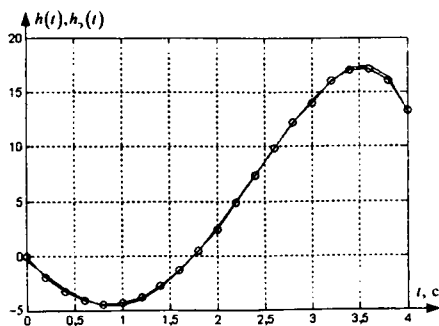


Рис. 3.37. Эталонный (1) и реальный (2) промах системы самонаведения, полученный при решении задачи синтеза с разбиением на четыре частичных интервала

Пример 3.8. Структурная схема нелинейной САУ приведена на рис. 3.38.

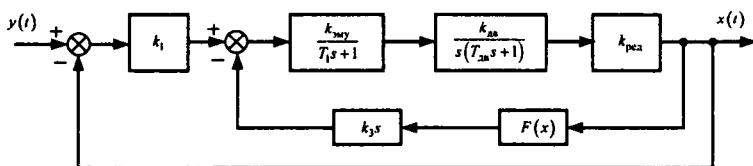


Рис. 3.38. Структурная схема нелинейной САУ

Дифференциальное уравнение движения системы, записанное относительно выходной координаты, имеет вид [5]

$$[T_1 T_{\text{дв}} s^3 + (T_1 + T_{\text{дв}}) s^2 + (1 + k_3 k_2) s + k_3 k_1] x + k_3 k_3 F(x) = k_3 k_1 y(t),$$

где $k_3 = k_{3\mu} k_{\text{дв}} k_{\text{ред}}$.

Заданы значения параметров системы: $T_{\text{дв}} = 0,5$ с, $T_1 = 0,165$ с, $k_3 = 240$. Характеристика нелинейного элемента $F(x)$ типа «зона нечувствительности без насыщения» изображена на рис. 3.39 и имеет следующие значения параметров: $b = 0,4$, $k = \text{tg} \alpha = 1,0$, $k_F = 1,0$,

$$F(x) = \begin{cases} x - 0,4 & \text{при } x \geq b, \\ 0 & \text{при } -b < x < b, \\ x + 0,4 & \text{при } x \leq -b. \end{cases}$$

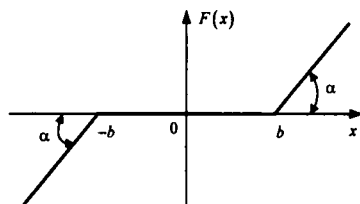


Рис. 3.39. Характеристика нелинейного элемента

Требуется определить положительные значения параметров нелинейной системы k_1, k_2, k_3 таким образом, чтобы при скачкообразном внешнем воздействии $y(t) = 1(t)$ переходный процесс был монотонным, время переходного процесса в системе составляло $T_y \approx 4$ с.

Зададимся следующим эталонным переходным процессом:

$$x_3(t) = 1 - e^{1,4t}.$$

Перейдем от исходного уравнения к системе дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = x_3, \\ \dot{x}_3 = [- (T_1 + T_{\text{дв}}) s^2 - (1 + k_3 k_2) s - k_3 k_1 - k_3 k_3 F(x) + k_3 k_1 y(t)] / (T_1 T_{\text{дв}}). \end{cases}$$

Для построения сеточной функции воспользуемся методом Рунге–Кутты 4-го порядка точности:

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{6} [K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где

$$K_1 = h \cdot f(x_n, t_n),$$

$$K_2 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2} K_1(h), t_n + \frac{h}{2}\right),$$

$$K_3 = h \cdot f\left(x_n + \frac{1}{2} K_2(h), t_n + \frac{h}{2}\right),$$

$$K_4 = h \cdot f(x_n + K_3(h), t_n + h).$$

Для сетки $t_i = 0,4 \cdot h$, $i = 0, 1, 2, \dots$ была получена сеточная функция, значения которой явно зависят от параметров $p = \{k_1, k_2, k_3\}$ (приводятся первые четыре значения):

$$x_1(t_0, p) = 0;$$

$$x_1(t_1, p) = 6,02k_1;$$

$$x_1(t_2, p) = -234274,20k_3F(x_1)k_1k_2 + 62,41k_1 - 1199,53k_3k_1F(x_1) - 1199,53k_1k_2 - 946,06k_1^2 - \\ - 117137,10k_1k_2^2 + 56022,09k_2k_1^2 - 117137,10k_3^2F(x_1)^2k_1 + 56022,09k_3F(x_1)k_1^2,$$

$$x_1(t_3, p) = -127751,56k_3F(x_1)k_1k_2 + 3034267620,61k_3^2F(x_1)^2k_2k_1^2 - 10420717080,88k_3^3F(x_1)^3k_1^2k_2 - \\ - 15631075621,33k_3^2F(x_1)^2k_1k_2^2 + 584728,65k_3F(x_1)k_1^3 + 1011422540,20k_3^3F(x_1)^3 \cdot k_1^2 - \\ - 2605179270,22k_3^4F(x_1)^4k_1 - 10420717080,88k_3F(x_1)k_1^3k_2^2 + 3034267620,61k_3F(x_1)k_2^2k_1^2 + \\ + 584728,65k_2k_1^3 + 1011422540,20k_2^3k_1^2 - 2605179270,22k_1k_2^4 + 204750771,98k_3F(x_1)k_1k_2^2 + \\ + 204750771,98k_3^2F(x_1)^2k_1k_2 - 86919,12 \cdot k_1^4 + 141,12k_1 - 82908393,59k_3F(x_1)k_2k_1^2 - \\ - 9567,91k_3k_1F(x_1) - 9567,91k_1k_2 - 4023,73k_1^2 - 63875,78k_1k_2^2 + 519421,16k_2k_1^2 + \\ + 68250257,32k_1k_2^3 - 63875,78k_3^2F(x_1)^2k_1 + 519421,16k_3F(x_1)k_1^2 + 68250257,32k_3^3F(x_1)^3k_1 - \\ - 41454196,79k_3^2F(x_1)^2k_1^2 - 41454196,79k_2^2k_1^2 + 14014,40k_1^3.$$

При условной минимизации функционала ($k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $k_3 > 0$), учитывающего 11 значений сеточной функции:

$$I(p) = \sum_{k=0}^{10} [x_1(t_k, p) - x_s(t_k)]^2 \rightarrow \min_p,$$

были получены следующие значения коэффициентов:

$$k_1 = 0,06, \quad k_2 = 0,03, \quad k_3 = 0,08.$$

На рис. 3.40 представлены реальный и эталонный переходные процессы.

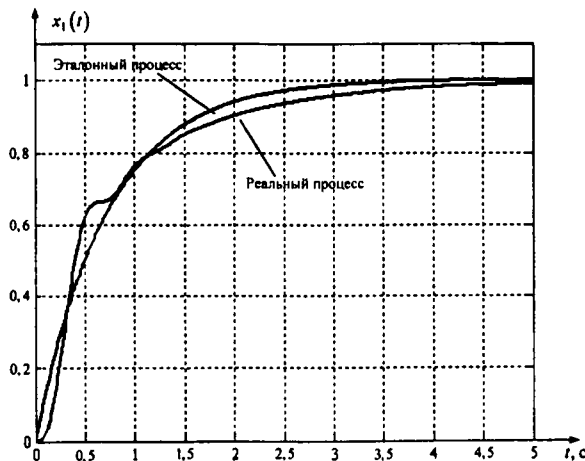


Рис. 3.40. Реальный и эталонный переходные процессы

Пример 3.9. Рассмотрим еще один подход, позволяющий решить задачу синтеза регуляторов. Нелинейная система описывается интегральным уравнением

$$\int_0^t k_x(t, \tau)x(\tau) d\tau + \int_0^t k_f(t, \tau)F(x(\tau)) d\tau = \int_0^t k_y(t, \tau)y(\tau) d\tau, \quad (3.68)$$

где

$$k_x(t, \tau) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} a_k(p_1, \dots, p_r) \frac{d^k}{d\tau^k} \{(t-\tau)^n\},$$

$$k_f(t, \tau) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{n!} c_k(p_1, \dots, p_r) \frac{d^k}{d\tau^k} \{(t-\tau)^n\},$$

$$k_v(t, \tau) = \sum_{k=0}^m \frac{(-1)^k}{n!} b_k(p_1, \dots, p_r) \frac{d^k}{d\tau^k} \{(t-\tau)^n\}.$$

С помощью формулы трапеций от (3.68) легко перейти к зависимости

$$\sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^i k_{ij}^x x_j + \sum_{j=1}^i k_{ij}^f F(x_j) \right\} = \sum_{i=1}^N \left\{ \sum_{j=1}^i k_{ij}^y y_j \right\}, \quad (3.69)$$

где N — число точек дискретизации.

Невязка между левой и правой частями интегрального уравнения (3.69) имеет вид

$$E_i = \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}^x x_j + \sum_{j=1}^{i-1} K_{ij}^f F(x_j) \right\} - \left\{ \sum_{j=1}^{i-1} k_{ij}^y y_j \right\} = f_i^x - f_i^y;$$

тогда функционал запишется следующим образом:

$$I(p) = \sum_{i=1}^N \{E_i^2\} \rightarrow \min_p.$$

Преимуществом такого подхода является то, что значение левой и правой частей интегрального уравнения в i -й точке не зависит от значений, найденных в предыдущих точках, а значит, отсутствует накопление ошибок. Немаловажно также то, что число точек сетки $t_i, i = \overline{1, N}$ в малой степени влияет на сложность вычислений, и как следствие — невысокие требования к ресурсам ЭВМ по сравнению с подходами, где функционал находится как норма разности между эталонным и реальным выходными сигналами системы.

Рассмотрим следующий пример. Уравнение движения нелинейной САУ, записанное относительно выходной координаты, имеет вид

$$(T_1 s^2 + (1 + k_1 p_2)s + k_1 p_1)x(t) + k_1 p_3 F(x) = k_1(p_1 + p_2 s)y(t),$$

где $F(x)$ — нелинейность типа «насыщение» (см. рис. 3.41), для которой $k_F = 1$:

$$F(x) = \begin{cases} c, & x \geq b, \\ kx, & -b < x < b, \\ -c, & x \leq -b. \end{cases}$$

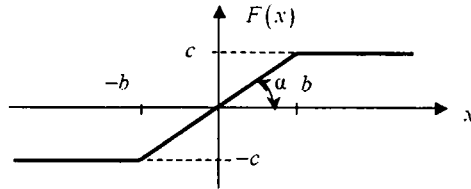


Рис. 3.41. Нелинейный элемент $F(x)$, входящий в состав системы

Параметры нелинейности: $\operatorname{tg}(\alpha) = k = 1, b = c = 0,5$.

Параметры системы: $T_1 = 0,15, k_1 = 10$.

Требуется определить параметры системы p_1, p_2, p_3 , обеспечивающие в синтезируемой системе монотонный переходной процесс с временем управления $T_y \approx 0,5$ с.

Пусть $h = 0,025$. В табл. 3.2 приведены зависимости, определяющие функции $f^x(t_i, p_1, p_2, p_3)$ и $f^y(t_i, p_1, p_2, p_3)$.

Пользуясь символьными вычислениями, получим формулу, определяющую функционал:

$$I(p) = -0,27825 \cdot 10^8 p_1 - 0,50840 \cdot 10^8 p_2 + 0,2 \cdot 10^8 p_1^2 + 0,18407 \cdot 10^7 p_3 + 0,72230 \cdot 10^8 p_1 p_2 - \\ - 0,26635 \cdot 10^7 p_1 p_3 + 0,69154 \cdot 10^8 p_2^2 - 0,46555 \cdot 10^7 p_2 p_3 + 90362 p_3^2 + 0,96990 \cdot 10^7.$$

Условный минимум функционала достигается в точке

$$p_1^* = 0,5572, p_2^* = 0,0766, p_3^* = 0,005.$$

Таблица 3.2

Зависимости, определяющие функции $f^x(t_i, p_1, p_2, p_3)$ и $f^y(t_i, p_1, p_2, p_3)$

t_i	$f_i^x = f^x(t_i, p_1, p_2, p_3)$	$f_i^y = f^y(t_i, p_1, p_2, p_3)$
0	0	0
0,0250	0,41788	0,062500 p_1 +5,0000 p_2
0,0500	0,0087058 p_1 +1,2651+0,69646 p_2 +0,00043529 p_3	0,31250 p_1 +15,000 p_2
0,0750	0,051022 p_1 +2,5514+2,6888 p_2 +0,0025511 p_3	0,87500 p_1 +30,000 p_2
0,1000	016580 p_1 +4,2854+6,4931 p_2 +0,0082898 p_3	1,8750 p_1 +50,000 p_2
0,1250	0,40387 p_1 +6,4743+12,553 p_2 +0,020194 p_3	3,4375 p_1 +75,000 p_2
0,1500	0,2643 p_1 +9,1244+21,252 p_2 +0,041235 p_3	5,6875 p_1 +105,00 p_2
0,1750	1,5035 p_1 +12,241+32,917 p_2 +0,074540 p_3	8,7500 p_1 +140,00 p_2
0,2000	2,5129 p_1 +15,829+47,833 p_2 +0,12323 p_3	12,750 p_1 +180,00 p_2
0,2250	3,9389 p_1 +19,892+66,243 p_2 +0,19044 p_3	17,813 p_1 +225,00 p_2
0,2500	5,8713 p_1 +24,434+88,356 p_2 +0,27928 p_3	24,063 p_1 +275,00 p_2
0,2750	8,4052 p_1 +29,458+114,35 p_2 +0,39288 p_3	31,625 p_1 +330,00 p_2
0,3000	11,640 p_1 +34,966+144,39 p_2 +0,53438 p_3	40,625 p_1 +390,00 p_2
0,3250	15,677 p_1 +40,960+178,60 p_2 +0,70688 p_3	51,188 p_1 +455,00 p_2
0,3500	20,623 p_1 +47,443+217,10 p_2 +0,91353 p_3	63,438 p_1 +525,00 p_2
0,3750	26,587 p_1 +54,415+259,99 p_2 +1,1574 p_3	77,500 p_1 +600,00 p_2
0,4000	33,679 p_1 +61,879+307,35 p_2 +1,4417 p_3	93,500 p_1 +680,00 p_2
0,4250	42,011 p_1 +69,836+359,26 p_2 +1,7695 p_3	111,56 p_1 +765,00 p_2
0,4500	51,699 p_1 +78,286+415,77 p_2 +2,1440 p_3	131,81 p_1 +855,00 p_2
0,4750	62,858 p_1 +87,230+476,96 p_2 +2,5682 p_3	154,38 p_1 +950,00 p_2
0,5000	75,606 p_1 +96,670+542,85 p_2 +3,0453 p_3	179,38 p_1 +1050,0 p_2
0,5250	90,060 p_1 +106,61+613,49 p_2 +3,5784 p_3	206,94 p_1 +1155,0 p_2
0,5500	106,34 p_1 +117,04+688,92 p_2 +4,1706 p_3	237,19 p_1 +1265,0 p_2
0,5750	124,57 p_1 +127,97+769,16 p_2 +4,8251 p_3	270,25 p_1 +1380,0 p_2
0,6000	144,86 p_1 +139,39+854,25 p_2 +5,5450 p_3	306,25 p_1 +1500,0 p_2
0,6250	167,34 p_1 +151,32+944,19 p_2 +6,3334 p_3	345,31 p_1 +1625,0 p_2
0,6500	192,13 p_1 +163,74+1039,0 p_2 +7,1935 p_3	387,56 p_1 +1755,0 p_2
0,6750	219,35 p_1 +176,66+1138,8 p_2 +8,1283 p_3	433,13 p_1 +1890,0 p_2
0,7000	249,13 p_1 +190,08+1243,4 p_2 +9,1410 p_3	482,13 p_1 +2030,0 p_2
0,7250	281,58 p_1 +204,00+1353,0 p_2 +10,235 p_3	534,69 p_1 +2175,0 p_2
0,7500	316,84 p_1 +218,42+1467,5 p_2 +11,413 p_3	590,94 p_1 +2325,0 p_2
0,7750	355,02 p_1 +233,33+1586,9 p_2 +12,678 p_3	651,00 p_1 +2480,0 p_2
0,8000	396,25 p_1 +248,75+1711,3 p_2 +14,033 p_3	715,00 p_1 +2640,0 p_2
0,8250	440,65 p_1 +264,66+1840,7 p_2 +15,482 p_3	783,06 p_1 +2805,0 p_2
0,8500	488,34 p_1 +281,08+1975,0 p_2 +17,028 p_3	855,31 p_1 +2975,0 p_2
0,8750	539,46 p_1 +297,99+2114,3 p_2 +18,673 p_3	931,88 p_1 +3150,0 p_2
0,9000	594,12 p_1 +315,40+2258,6 p_2 +20,422 p_3	1012,9 p_1 +3330,0 p_2
0,9250	652,45 p_1 +333,31+2407,8 p_2 +22,276 p_3	1098,4 p_1 +3515,0 p_2
0,9500	714,57 p_1 +351,73+2562,0 p_2 +24,239 p_3	1188,7 p_1 +3705,0 p_2
0,9750	780,61 p_1 +370,64+2721,2 p_2 +26,315 p_3	1283,8 p_1 +3900,0 p_2
1,0000	850,69 p_1 +390,05+2885,4 p_2 +28,506 p_3	1383,8 p_1 +4100,0 p_2
1,0250	924,95 p_1 +409,96+3054,6 p_2 +30,816 p_3	1488,8 p_1 +4305,0 p_2
1,0500	1003,5 p_1 +430,37+3228,8 p_2 +33,247 p_3	1599,1 p_1 +4515,0 p_2
1,0750	1086,4 p_1 +451,29+3407,9 p_2 +35,803 p_3	1714,6 p_1 +4730,0 p_2
1,1000	1173,9 p_1 +472,70+3592,1 p_2 +38,487 p_3	1835,6 p_1 +4950,0 p_2
1,1250	1266,1 p_1 +494,61+3781,2 p_2 +41,302 p_3	1962,2 p_1 +5175,0 p_2
1,1500	1363,1 p_1 +517,02+3975,4 p_2 +44,251 p_3	2094,4 p_1 +5405,0 p_2
1,1750	1464,9 p_1 +539,93+4174,5 p_2 +47,337 p_3	2232,5 p_1 +5640,0 p_2
1,2000	1571,9 p_1 +563,34+4378,6 p_2 +50,564 p_3	2376,5 p_1 +5880,0 p_2
1,2250	1683,9 p_1 +587,25+4587,8 p_2 +53,934 p_3	2526,6 p_1 +6125,0 p_2
1,2500	1801,3 p_1 +611,66+4801,9 p_2 +57,451 p_3	2682,8 p_1 +6375,0 p_2
1,2750	1924,1 p_1 +636,57+5021,0 p_2 +61,118 p_3	2845,4 p_1 +6630,0 p_2
1,3000	2052,4 p_1 +661,98+5245,1 p_2 +64,937 p_3	3014,4 p_1 +6890,0 p_2
1,3250	2186,4 p_1 +687,89+5474,2 p_2 +68,913 p_3	3189,9 p_1 +7155,0 p_2
1,3500	2326,2 p_1 +714,30+5708,4 p_2 +73,047 p_3	3372,2 p_1 +7425,0 p_2
1,3750	2471,9 p_1 +741,22+5947,5 p_2 +77,344 p_3	3561,3 p_1 +7700,0 p_2
1,4000	2623,6 p_1 +768,63+6191,6 p_2 +81,806 p_3	3757,3 p_1 +7980,0 p_2
1,4250	2781,5 p_1 +796,54+6440,7 p_2 +86,437 p_3	3960,3 p_1 +8265,0 p_2
1,4500	2945,7 p_1 +824,95+6694,8 p_2 +91,240 p_3	4170,6 p_1 +8555,0 p_2
1,4750	3116,3 p_1 +853,86+6953,9 p_2 +96,217 p_3	4388,1 p_1 +8850,0 p_2
1,5000	3293,5 p_1 +883,27+7218,0 p_2 +101,37 p_3	4613,1 p_1 +9150,0 p_2

На рис. 3.42 приведены эталонная и реальная переходные характеристики.

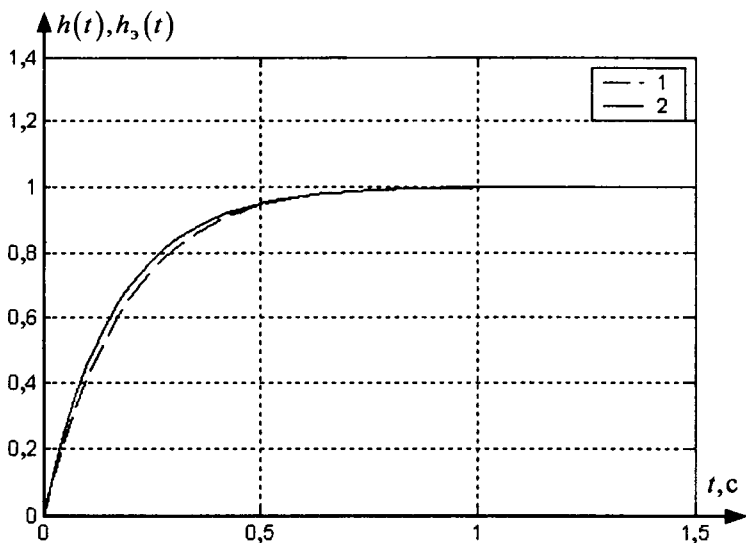


Рис. 3.42. Переходная характеристика скорректированной нелинейной системы (2) и эталонный переходный процесс (1)

3.5. ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ: ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Многие задачи аналитической механики (задачи определения сил, вызывающих движение планет Солнечной системы; определение силовых функций по заданным интегралам и др.), механики управляемого полета (определение закона изменения массы материальной точки из условия, чтобы движение точки совершалось по заданному закону и др.), теории автоматического управления относятся к классу задач, получивших название «обратные задачи динамики» [59]. В [59] приведены примеры обратных задач динамики, а также работы, в которых получены ценные результаты, относящиеся к этому направлению.

Цель настоящего параграфа — изложение основных положений и некоторых методов, а также алгоритмов решения обратных задач динамики.

3.5.1. СОДЕРЖАНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДИНАМИКИ И ПРИМЕРЫ ИХ РЕШЕНИЯ

Приведем некоторые положения, составляющие содержание понятия «обратные задачи динамики».

Рассмотрим линейную стационарную систему, описываемую уравнением вида

$$x'' + a_1 x' + a_0 x = b_0 u(t), \quad X^0 = (x(0), x'(0)). \quad (3.70)$$

Задача заключается в нахождении такого входного сигнала (управления) $u^*(t)$, чтобы выходной процесс $x(t)$ совпадал или был, в известном смысле, близок к некоторой эталонной функции $x_3(t)$. Это — основное положение рассматриваемой задачи. Управление $u^*(t)$ будем называть оптимальным.

Такие задачи часто встречаются на практике. К ним можно отнести задачу управления движением манипуляционных роботов по назначенным траекториям и задачу управления посадкой спускаемого аппарата. Широкий спектр задач, относящихся к классу обратных задач динамики, приведен в [59].

Рассматриваемый подход широко используется, например, при проектировании систем нагружения для исследования и испытаний машин и механизмов. С помощью систем нагружения должны быть созданы условия, которые соответствуют реальной эксплуатации [13]. К таким системам следует отнести системы вибрационных испытаний. В общем случае наиболее адекватным представлением вибрационных нагружений являются случайные функции времени, например, нагружения, действующие на изделия при их транспортировке автомобильным, железнодорожным или водным транспортом. При проектировании этого класса систем имеет место обратная задача статистической динамики: необходимо на вход системы вибрационных испытаний подавать случайный сигнал с такими статистическими характеристиками, чтобы на выходе этой системы сигнал, воздействующий на объект, имел заданные (эталонные) статистические параметры. Под эталонными здесь понимаются статистические характеристики сигнала, действующие на объект в реальных условиях эксплуатации.

Чрезвычайно важным является достижение наибольшей степени адекватности параметров нагружения тем параметрам, которые имеют место в реальных условиях эксплуатации. Во многих случаях этим определяется степень безопасности проектируемого изделия при его эксплуатации [13].

В задачах испытаний на основе математической обработки исходной информации получают эталонный процесс нагружения $x_3(t)$. Тогда в системе нагружения, используемой для испытаний изделия, необходимо построить такое управление $U^*(t)$, чтобы для физически реализуемого $X(t)$ и эталонного $X_3(t)$ процессов было выполнено условие

$$\|X_3(t) - X(t)\| \rightarrow \min$$

либо $\|X_3(t) - X(t)\| \leq \varepsilon$.

А теперь вернемся к уравнению (3.70) и рассмотрим подходы к решению задачи построения $u^*(t)$.

Положим, что $x_3(t)$ — осуществимая системой (3.70) траектория. Поскольку $x_3(t)$ известна, то подставляя ее в уравнение (3.70), получим

$$u^*(t) = b_0^{-1} [x_3''(t) + a_1 x_3'(t) + a_0 x_3(t)]. \quad (3.71)$$

Последняя формула определяет оптимальное программное управление $u^*(t)$.

Построим систему, работающую по принципу обратной связи [59].

Пусть

$$x_3(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t}, \quad t > 0, \quad (3.72)$$

λ_1, λ_2 — известны.

Постоянные c_1 и c_2 находятся из условия

$$x_3(0) = x(0), \quad \dot{x}_3(0) = \dot{x}(0).$$

Подставляя (3.72) в (3.71), найдем

$$u^*(t) = b_0^{-1} [A(\lambda_1) c_1 e^{\lambda_1 t} + A(\lambda_2) c_2 e^{\lambda_2 t}], \quad (3.73)$$

где

$$A(\lambda_k) = \lambda_k^2 + a_1 \lambda_k + a_0, \quad k = 1, 2.$$

На основе (3.73) можно построить систему, реализующую принцип обратной связи, т.е. найти u^* , зависящее от $x(t)$ и $\dot{x}(t)$.

Имеем

$$c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = x(t), \quad \lambda_1 c_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 c_2 e^{\lambda_2 t} = \dot{x}(t). \quad (3.74)$$

В формулу, определяющую $u^*(t)$, входят сомножители $c_1 e^{\lambda_1 t}$ и $c_2 e^{\lambda_2 t}$. Из зависимостей (3.74), представляющих собой линейную систему алгебраических уравнений относительно $c_1 e^{\lambda_1 t}$ и $c_2 e^{\lambda_2 t}$ при условии $\lambda_1 \neq \lambda_2$, легко найти соотношения

$$c_1 e^{\lambda_1 t} = \frac{\lambda_2 x - \dot{x}}{\lambda_2 - \lambda_1}, \quad c_2 e^{\lambda_2 t} = -\frac{\lambda_1 x - \dot{x}}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Подставляя полученные формулы в (3.73), получим искомое управление $u^*(x, \dot{x})$, реализующее принцип обратной связи:

$$u^*(x, \dot{x}) = p_1 x + p_2 \dot{x},$$

где

$$p_1 = \frac{\lambda_2 A(\lambda_1) - \lambda_1 A(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_0}, \quad p_2 = -\frac{A(\lambda_1) - A(\lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1) b_0}.$$

Из рассмотренных положений ясно, что дифференциальное уравнение замкнутой системы должно иметь частные решения вида $e^{\lambda_i t}$. Следовательно, *реализовать предписанные требования можно только в том случае, когда с помощью алгоритма управления замкнутой системе придается соответствующая структура, отвечающая виду назначенной траектории $x_s(t)$, причем замкнутая система принадлежит к классу стационарных.*

Существуют и другие постановки задач [59].

Часто вместо $x_s(t)$ можно задавать эталонную систему. *Принципиальная особенность этого направления заключается в том, что искомые законы управления строятся из условия, чтобы замкнутая система была асимптотически устойчивой, а траектория ее движения следовала бы за траекторией движения некоторой системы сравнения* [59]. При таком подходе задача синтеза решается по неполной информации о математической модели объекта, а построенные законы управления обеспечивают выполнение заданных требований при параметрических и координатных возмущениях [59]. Это направление разработано С.В. Емельяновым и его сотрудниками. Идея этого направления состоит в следующем [43, 44].

Объект управления описывается векторно-матричным уравнением вида

$$\dot{X}(t) = \mathfrak{Z}(X(t), t) + BU(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3.75)$$

где $X(t)$ и $U(t)$ — n -мерные векторы координат состояния и управления. На функцию $\mathfrak{Z}$ наложены известные ограничения: она непрерывна и по X удовлетворяет условию Липшица.

Кроме модели объекта (3.75), задается модель системы сравнения

$$\dot{X}_s(t) = GX_s(t), \quad X_s(0) = X_{s0}, \quad (3.76)$$

движение которой соответствует требованиям замкнутой синтезированной системы.

Задача заключается в построении закона управления $U^*(X, t)$, при котором замкнутая система

$$\dot{X}(t) = \mathfrak{Z}(X(t), t) + BU(t), \quad X(0) = X_0$$

асимптотически устойчива в целом, а траектория $X(t, X_0)$ ее движения из точки X_0 в начало координат $X = 0$ проходит в окрестности траектории $X_s(t, X_0)$ движения системы (3.76) из точки $X_{s0} = X_0$.

3.5.2. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПРОГРАММНЫХ УПРАВЛЕНИЙ ДВИЖЕНИЕМ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ (ЗАДАЧА Е.А. БАРБАШИНА)

Рассмотрим объект, поведение которого описывается уравнением

$$\dot{X}(t) = F(X, t) + U(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.77)$$

или в развернутой форме

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= f_1(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) + u_1(t), \\ \dot{x}_2(t) &= f_2(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) + u_2(t), \\ &\dots \\ \dot{x}_n(t) &= f_n(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t), t) + u_n(t). \end{aligned}$$

Пусть $X_s(t) = \Psi(t) = (\psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_n(t))^T$ — вектор-функция — заданная траектория в фазовом пространстве (эталонный процесс).

Задача заключается в нахождении такого управления $U^*(t)$, которое обеспечивало бы минимальное, в известном смысле, расстояние между вектор-функциями $\Psi(t)$ и $X^*(t)$. Очевидно, эта задача относится к классу обратных задач динамики. Для линейных стационарных и нестационарных объектов эта задача в терминах математического программирования и матричного представления операторов формулируется так:

$$\begin{aligned} I(C^X, C^U) &= \int_0^T (X(t) - \Psi(t))^T (X(t) - \Psi(t)) dt = \|X(t) - \Psi(t)\|^2 = \\ &= \|Z(t)\|^2 = \int_0^T \left[\sum_{v=1}^n z_v^2(t) \right] dt = \sum_{v=1}^n \sum_{r=1}^l (c_r^{xv})^2 = \sum_{v=1}^n \sum_{r=1}^l (c_r^{xv} - c_r^{\psi})^2 \rightarrow \min_{C^X} \end{aligned} \quad (3.78)$$

при ограничениях

$$\begin{cases} C^X = A^X B^Y C^U + A^X \Phi_N^0, \\ \bar{\Phi}(t) C^U \in U^n \text{ — ограничения на управление.} \end{cases} \quad (3.79)$$

Рассмотрим решение той же задачи для класса нелинейных объектов, описываемых (3.77).

Поскольку $Z(t) = X(t) - \Psi(t)$, то

$$X(t) = Z(t) + \Psi(t), \text{ а } \dot{Z}(t) = \dot{X}(t) - \dot{\Psi}(t)$$

и, следовательно,

$$\dot{X}(t) = F(X(t), t) = F(Z(t) + \Psi(t), t) + U(t);$$

для $\dot{Z}(t)$ имеем уравнение

$$\dot{Z}(t) = \dot{X}(t) - \dot{\Psi}(t) = F(Z(t) + \Psi(t), t) + U(t) - \dot{\Psi}(t).$$

Прибавим к последнему равенству и вычтем из него функцию $F(\Psi(t), t)$; результат имеет вид

$$\dot{Z}(t) = F(Z(t) + \Psi(t), t) + U(t) - \dot{\Psi}(t) + F(\Psi(t), t) - F(\Psi(t), t). \quad (3.80)$$

Воспользуемся обозначениями:

$$\begin{aligned} F_z(Z(t), t) &= F(Z(t) + \Psi(t), t) - F(\Psi(t), t), \\ \Delta(t) &= U(t) + F(\Psi(t), t) - \dot{\Psi}(t). \end{aligned}$$

Тогда имеет место дифференциальное уравнение, определяющее меру близости $\mathbf{X}(t)$ к $\Psi(t)$:

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{F}_z(\mathbf{Z}(t), t) + \Delta(t). \quad (3.81)$$

Если объект описывается линейным векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{X}(t) + \mathbf{U}(t),$$

то

$$\mathbf{F}_z(\mathbf{Z}(t), t) = \mathbf{A}(t)(\mathbf{Z}(t) + \Psi(t)) - \mathbf{A}(t)\Psi(t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{Z}(t),$$

$$\Delta(t) = \mathbf{U}(t) + \mathbf{A}(t)\Psi(t) - \dot{\Psi}(t),$$

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} \dot{z}_1(t) \\ \dot{z}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{z}_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ \vdots \\ z_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \\ \vdots \\ \psi_n(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \dot{\psi}_1(t) \\ \dot{\psi}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{\psi}_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_n(t) \end{pmatrix}. \quad (3.82)$$

Зависимость (3.81) является уравнением относительно $\mathbf{Z}(t)$, определяющим меру близости эталонного $\mathbf{X}_s(t) = \Psi(t)$ и реального $\mathbf{X}(t)$ процессов на выходе объекта. В (3.81) $\Delta(t)$ — управление, определяющее процесс изменения функции $\mathbf{Z}(t)$.

Положим

$$\mathbf{R}(t) = \dot{\Psi}(t) - \mathbf{F}(\Psi(t), t) = \dot{\mathbf{X}}_s(t) - \mathbf{F}(\mathbf{X}_s(t), t). \quad (3.83)$$

В последнее выражение входит только известная функция $\mathbf{X}_s(t) = \Psi(t)$, в связи с чем функция $\mathbf{R}(t)$ является известной.

Отсюда можно записать

$$\Delta(t) = \mathbf{R}(t) - \mathbf{U}(t). \quad (3.84)$$

Поскольку, с одной стороны, $\mathbf{Z}(t)$ определяет меру близости реальной траектории $\mathbf{X}(t)$ к эталонному процессу $\Psi(t)$, с другой стороны, $\mathbf{Z}(t)$ — решение уравнения (3.83), имеющего правую часть $\Delta(t)$, то, очевидно, что для уменьшения

$$\delta_z = \left(\int_0^T \|\mathbf{Z}(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

необходимо выбрать управление $\Delta(t)$ из некоторого класса вектор-функций так, чтобы величина

$$\delta = \left(\int_0^T \|\Delta(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

имела минимальное значение. Указанная задача минимизации с учетом (3.84) может быть поставлена так:

$$\delta^2 = \int_0^T \|\mathbf{R}(t) - \mathbf{U}(t)\|^2 dt \rightarrow \min. \quad (3.85)$$

Последнюю зависимость можно рассматривать как задачу аппроксимации в пространстве квадратично-интегрируемых вектор-функций. В самом деле, если $\Phi(t)$ ОНБ, то (3.85) можно переписать в виде

$$\delta_l^2 = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^n \left(r_i(t) - \sum_{k=1}^l c_k^{u_i} \varphi_k(t) \right)^2 \right] dt \rightarrow \min_{c_k^{u_i}}.$$

Эта задача равносильна следующей: подобрать коэффициенты $c_k^{u_i}$, $k = \overline{1, l}$, $i = \overline{1, n}$ так, чтобы величины

$$\delta_{li}^2 = \int_0^T \left(r_i(t) - \sum_{k=1}^l c_k^{u_i} \varphi_k(t) \right)^2 dt, \quad i = \overline{1, n} \quad (3.86)$$

принимали наименьшее значение; такой подход используется в силу того, что выбор $c_k^{u_i}$ при одном значении i не влияет на выбор их при других значениях этого индекса.

Если на компоненты вектора управления не наложены ограничения, т.е. имеет место задача безусловной минимизации, то ее решение определяется зависимостями

$$c_k^{u_i} = \int_0^T r_i(t) \varphi_k(t) dt, \quad i = \overline{1, n}; \quad k = \overline{1, l}.$$

Если же на компоненты $\mathbf{U}(t)$ наложены ограничения, например

$$u_{i \max} - |u_i(t)| \geq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n},$$

или в общем виде

$$\overline{\Phi}(t) \mathbf{C}^U \in U^n \quad \forall t \in [0, T],$$

то задача расчета $c_k^{u_i}$, $k = \overline{1, l}$; $i = \overline{1, n}$ может быть сформулирована как задача математического программирования:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^l \left[(c_k^{r_i})^2 - 2 \cdot c_k^{r_i} \cdot c_k^{u_i} + (c_k^{u_i})^2 \right] &\rightarrow \min_{c_k^{u_i}}, \quad k = \overline{1, l}, \quad i = \overline{1, n}, \\ u_{i \max} - \left| \sum_{k=1}^l c_k^{u_i} \varphi_k(t) \right| &\geq 0 \quad \forall t \in [0, T], \quad i = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (3.87)$$

В рассмотренном случае компоненты $\mathbf{U}^*(t)$ определяются формулами

$$u_i^*(t) = \sum_{k=1}^l c_k^{u_i} \varphi_k(t), \quad i = \overline{1, n}. \quad (3.88)$$

Структурная схема системы, управления $\mathbf{U}^*(t)$ которой найдены изложенным выше методом, представлена на рис. 3.43.

Напомним, что формулой (3.88) определено оптимальное управление $\mathbf{U}^*(t)$, а на структурной схеме (рис. 3.43) представлена система программного управления.

Пример 3.10. Рассмотрим задачу синтеза управляющего сигнала изложенным выше методом на примере электрогидравлического следящего вибратора (ЭГСВ). На рис. 3.44 представлена функциональная

схема ЭГСВ с электрогидравлическим усилителем (ЭГУ). На рис. 3.45 представлена принципиальная схема ЭГСВ. Здесь обозначены: ЭМП — электромагнитический преобразователь; C_1, C_2 — сопла; Др1, Др2, Др3 — дроссели; L_1, L_2 — катушки индуктивности датчика; R_1, R_2 — сопротивление.

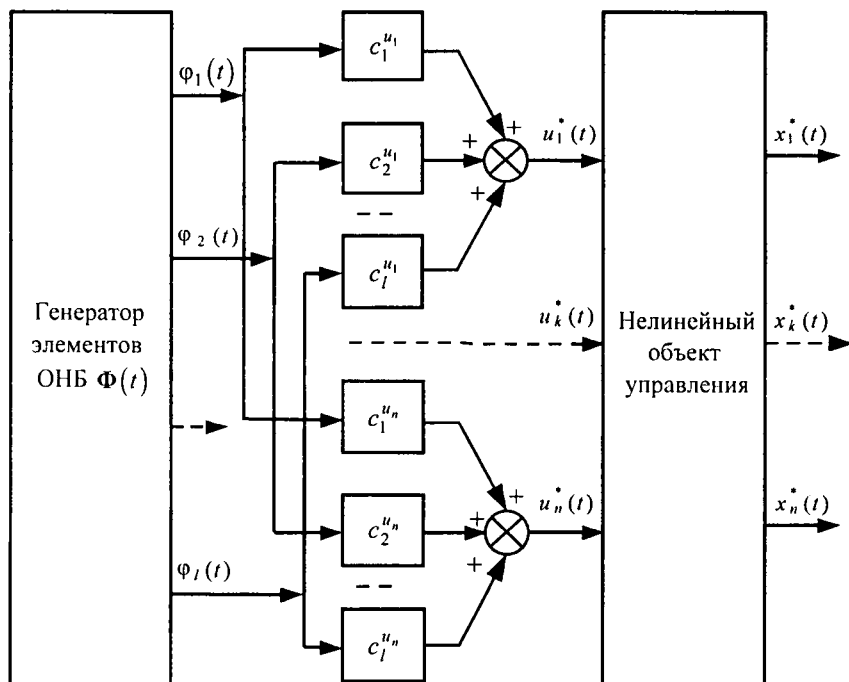


Рис. 3.43. Структурная схема системы

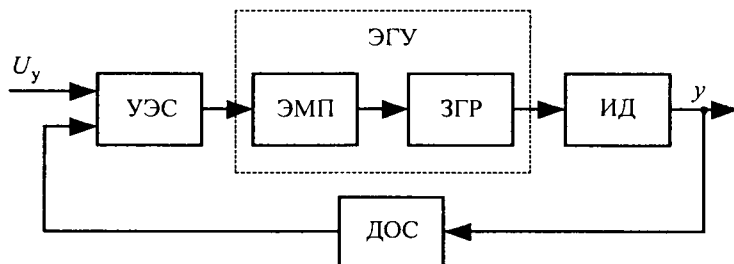


Рис. 3.44. Функциональная схема электрогидравлического вибратора:

УЭС — усилитель электрических сигналов; ЭМП — электромагнитный преобразователь; ЗГР — золотниковый гидравлический распределитель; ЭГУ — электрогидравлический усилитель; ИД — исполнительный двигатель; ДОС — датчик обратной связи

Вибраторы такого типа работают следующим образом [13]. При подаче управляющего напряжения на вход усилителя 1 возникает ток в обмотке катушки управления электромагнитического преобразователя (ЭМП) и якорь вместе с заслонкой 2 отклоняются от нейтрального положения, что приводит к повышению управляющего давления на одном торце золотника 3 и понижению на противоположном. В результате появившегося перепада давлений на торцах золотник 3 гидроусилителя смещается от нейтрального положения, соединяя одну полость гидроцилиндра 4 с напорной линией, а другую — со сливной. Поршень 5 под действием разности давлений в полостях гидроцилиндра перемещается до тех пор, пока управляющее напряжение не будет скомпенсировано напряжением, подводимым к усилителю с выхода датчика 6 обратной связи. После этого ток в обмотке управления ЭМП становится равным нулю, якорь, заслонка и золотник приходят в нейтральное положение, а поршень гидроцилиндра занимает новое установив-

шее положение. Таким образом, при подаче на вход усилителя 1 синусоидального напряжения заданной частоты, благодаря наличию электрической обратной связи, поршень 5 будет отслеживать заданный закон управления.

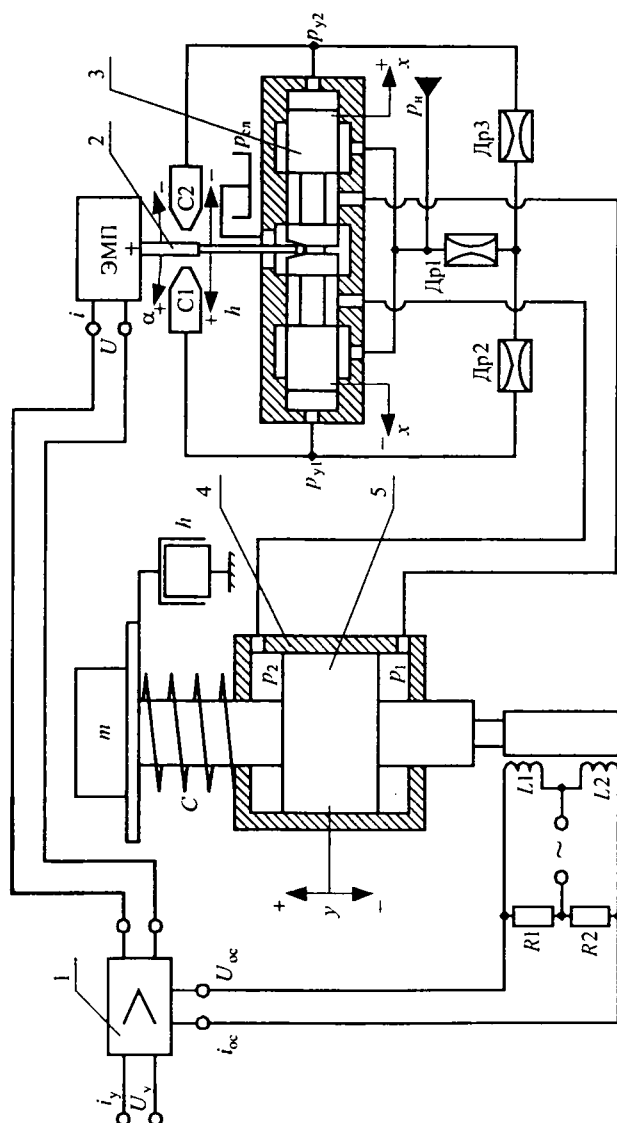


Рис. 3.45. Принципиальная схема ЭГСВ

При аналитическом описании вибратора были сделаны следующие упрощающие допущения, обоснованные опытом исследования электрогидравлических усилителей и поршневых следящих гидравлических исполнительных механизмов [13]:

- внешние утечки, гидравлическое сопротивление трубопроводов, нулевое (начальное) перекрытие рабочих окон золотника пренебрежимо малы;
- нагрузка на поршень вибратора состоит из сил инерции, позиционной нагрузки и сил вязкого трения;
- пренебрегаем волновыми процессами в трубопроводах;
- давление нагнетания постоянно;
- давление и скорость в живых сечениях потоков сопел ЭГУ распределены равномерно.

При сделанных допущениях структурную схему можно представить в следующем виде (рис. 3.46).

$$\begin{aligned}
 a_3 &= T_{ry} \cdot T_r^2 = 3,235 \cdot 10^{-4} \cdot 0,05^2 = 8,08 \cdot 10^{-7}; \\
 a_2 &= T_r^2 + 2T_{ry}\xi_r T_r = 0,05^2 + 2 \cdot 3,235 \cdot 10^{-4} \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,05 = 2,5 \cdot 10^{-3}; \\
 a_1 &= K_{ry}K_r\tau_{ry} + T_{ry} + 2\xi_r T_r = 4,3 \cdot 10^{10} \cdot 9,95 \cdot 10^{-10} \cdot 4,628 \cdot 10^{-4} + \\
 &\quad + 3,235 \cdot 10^{-4} + 2 \cdot 5 \cdot 10^{-5} \cdot 0,05 = 2,045 \cdot 10^{-2}; \\
 a_0 &= 1.
 \end{aligned}$$

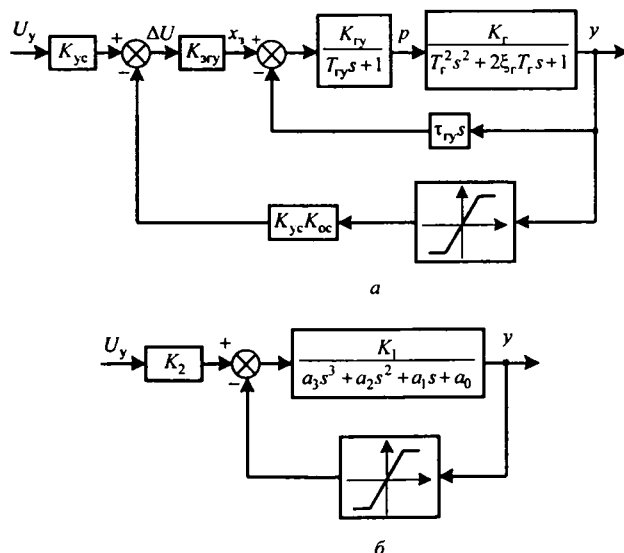


Рис. 3.47. Упрощенные структурные схемы

Согласно рис. 3.47, б, можно записать дифференциальное уравнение, описывающее работу вибратора:

$$a_3 \ddot{x}(t) + a_2 \dot{x}(t) + a_1 x(t) + a_0 x(t) = K_1 [K_0 u(t) - F(x(t))], \quad (3.89)$$

где

$$F(x(t)) = \begin{cases} -B, & x < -b, \\ \frac{B}{b}x, & -b \leq x \leq b, \\ B, & x > b, \end{cases}$$

а коэффициенты нелинейной функции имеют следующие численные значения:

$$b = 0,005 \text{ м}; B = 0,005 \text{ м}.$$

В (3.89) обозначено $x(t) = y(t)$ и $u(t) = U_y(t)$.

Допустим, что на выходе системы необходимо получить гармонический закон

$$\psi(t) = A \cdot \sin(\omega t), \quad (3.90)$$

где A — амплитуда выходного сигнала, $A = 0,06$; ω — его циклическая частота, $\omega = 2\pi$.

Необходимо определить входной сигнал $u(t)$, при подаче которого на вход системы (3.89) на выходе получили бы сигнал, максимально, в известном смысле, приближенный к эталонному (3.90).

Разделим обе части уравнения (3.89) на коэффициент a_3 . В результате получим

$$\ddot{x}(t) + a_{23}\dot{x}(t) + a_{13}x(t) + a_{03}x(t) = K_{013}u(t) - K_{13}F(x(t)), \quad (3.91)$$

где

$$a_{23} = \frac{a_2}{a_3} = 3094,06; \quad a_{13} = \frac{a_1}{a_3} = 25309,41; \quad a_{03} = \frac{a_0}{a_3} = 8,08 \cdot 10^7;$$

$$K_{013} = \frac{K_0 \cdot K_1}{a_3} = 16396,04; \quad K_{13} = \frac{K_1}{a_3} = 81980,2.$$

Введя в рассмотрение следующие две переменные: $x_1(t) = \dot{x}(t)$ и $x_2(t) = \ddot{x}(t)$, дифференциальное уравнение третьего порядка (3.91) можно записать в виде системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x_1(t), \\ \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = K_{013}u(t) - a_{23}x_2(t) - a_{13}x_1(t) - a_{03}x(t) - K_{13}F(x(t)). \end{cases} \quad (3.92)$$

Обозначая

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ -a_{23}x_2(t) - a_{13}x_1(t) - a_{03}x(t) - K_{13}F(x(t)) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ K_{013}u(t) \end{bmatrix},$$

систему (3.92) можно записать в векторно-матричной форме

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{U}(t). \quad (3.93)$$

Определим следующую вектор-функцию:

$$\mathbf{Z}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{\Psi}(t), \quad (3.94)$$

где

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{bmatrix} \psi(t) \\ \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix}, \quad \psi_1(t) = \dot{\psi}(t) = A\omega \cos(\omega t), \quad \psi_2(t) = \ddot{\psi}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t).$$

Произведем замену в уравнении (3.93) вектор-функции $\mathbf{X}(t)$ вектор-функцией $\mathbf{Z}(t)$, после несложных преобразований получим уравнение

$$\dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{F}_z(\mathbf{Z}(t), t) + \Delta(t), \quad (3.95)$$

в котором

$$\mathbf{F}_z(\mathbf{Z}(t), t) = \mathbf{F}(\mathbf{Z}(t) + \mathbf{\Psi}(t), t) - \mathbf{F}(\mathbf{\Psi}(t), t),$$

$$\Delta(t) = \mathbf{F}(\mathbf{\Psi}(t), t) - \dot{\mathbf{\Psi}}(t) + \mathbf{U}(t).$$

Решение $\mathbf{Z}(t)$ уравнения (3.95) представляет собой отклонение решения $\mathbf{X}(t)$ уравнения (3.93) от заданной вектор-функции $\mathbf{\Psi}(t)$. Вектор-функция $\mathbf{Z}(t)$ в уравнении (3.94) определяется членом $\Delta(t)$. Следовательно, управление $\mathbf{U}(t)$ необходимо подобрать таким, чтобы величина

$$\delta = \left(\int_0^T \|\Delta(t)\|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

имела бы наименьшее значение. Если положить $\dot{\mathbf{\Psi}}(t) - \mathbf{F}(\mathbf{\Psi}(t), t) = \mathbf{R}(t)$, то получим следующую постановку задачи: подобрать такое управление $\mathbf{U}(t)$, при котором величина

$$\delta^2 = \int_0^T \|\mathbf{R}(t) - \mathbf{U}(t)\|^2 dt \quad (3.96)$$

имеет минимальное значение.

Представим компоненты вектора управления $\mathbf{U}(t)$ в следующем виде:

$$u_i(t) = \sum_{k=0}^9 c_k^{u_i} P_k(t), \quad i = 1, 2, 3, \quad t \in [0, 2],$$

где $P(t) = \{P_k(t) : k = \overline{0, 9}\}$ — полиномы Лежандра.

Тогда вектор управления $\mathbf{U}(t)$ можно записать в виде

$$\mathbf{U}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & K_{013} \sum_{k=0}^9 c_k^{u_3} P_k(t) \end{bmatrix}^T. \quad (3.97)$$

Следовательно, необходимо подобрать числа $c_k^{u_3}$ такими, чтобы

$$\delta^2 = \int_0^2 \left[r_1^2(t) + r_2^2(t) + \left(r_3(t) - K_{013} \sum_{k=0}^9 c_k^{u_3} P_k(t) \right)^2 \right] dt \rightarrow \min_{c_k^{u_3}}.$$

Минимум функционала (3.96) будем искать с использованием алгоритма Нелдера–Мида безусловной оптимизации функции многих переменных. В качестве начальных значений искомых параметров $c_k^{\text{нач}}$, $k = \overline{0,9}$, примем, например, единичные, т.е.

$$c_{u_3}^{\text{нач}} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]^T.$$

При этих значениях искомых коэффициентов функционал (3.96) равен $\delta^2(c_{u_3}^{\text{нач}}) = 4,3671 \cdot 10^5$.

Минимум функционала (3.96) при точности расчета $\varepsilon = 0,0001$ достигается в точке

$$c_{u_3}^* = [-0,0004 \ 2,0858 \ 0,2190 \ 3,0213 \ 0,9690 \ -8,0219 \ -0,8173 \ 3,6015 \ 0,2258 \ -0,7194]^T,$$

при этом значение функционала (3.96) $\delta^2(c_{u_3}^*) = 2,9493 \cdot 10^3$.

Подставляя найденные оптимальные значения $c_{u_3}^*$, $k = \overline{0,9}$ в (3.97), найдем компоненты вектора управления $U(t)$, первые два элемента которого — нулевые, а график третьего представлен на рис. 3.48.

На рис. 3.49 представлены эталонный сигнал выходной $\psi(t)$ и оптимальный сигнал на выходе $x^*(t)$.

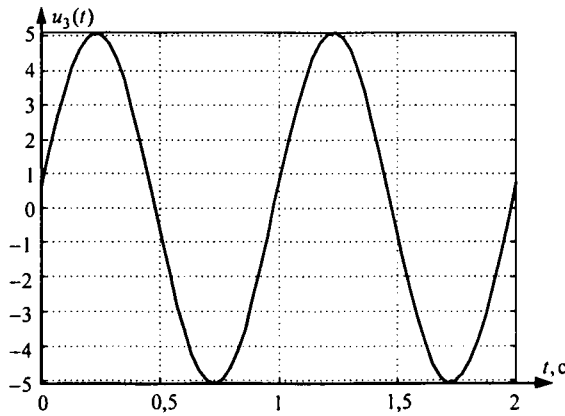


Рис. 3.48. Сигнал управления

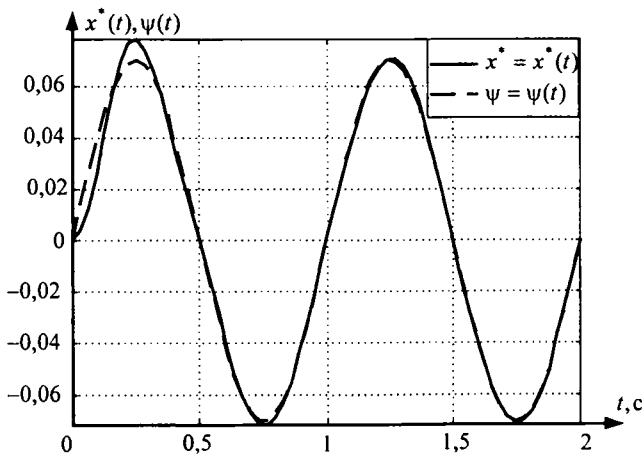


Рис. 3.49. Графики эталонного выходного сигнала $\psi(t)$ и оптимального $x^*(t)$

В некоторых случаях на выходе вибратора необходимо реализовать сигналы треугольной формы (такие колебания часто используются в отсадочных машинах). Поэтому рассмотрим задачу синтеза входного

сигнала системы (3.89) при заданном эталонном выходном сигнале треугольной формы с амплитудой $A = 0,06$ и частотой $\nu = 1$ Гц

$$\psi(t) = \begin{cases} 4A\nu t, & 0 \leq t \leq \frac{1}{4\nu}; \\ A(2 - 4\nu t), & \frac{1}{4\nu} < t \leq \frac{3}{4\nu}; \\ A(4\nu t - 4), & \frac{1}{4\nu} < t \leq \frac{1}{\nu}. \end{cases}$$

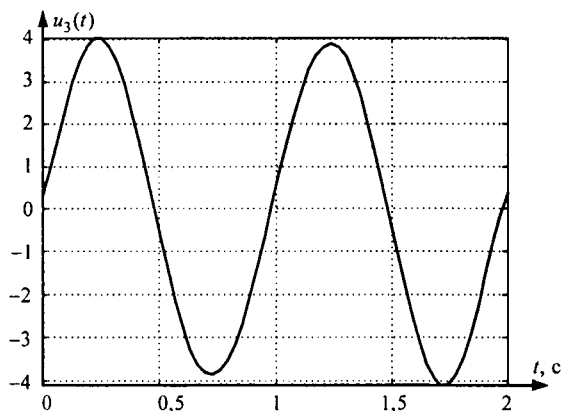


Рис. 3.50. Сигнал управления $u_3(t)$

В этом случае, решая задачу рассмотренным выше методом и удерживая десять полиномов Лежандра, при той же точности расчета и тех же начальных значениях искомых коэффициентов $c_k^{u_3}$, $k = \overline{0,9}$ (значение функционала (3.96) в этом случае $\delta^2(c_{u_3}^{\text{нач}}) = 4,0664 \cdot 10^5$) находим следующие значения $c_k^{u_3}$:

$$c_{u_3}^* = [-0,0046 \ 1,8110 \ 0,1575 \ 2,5676 \ 0,7987 \ -7,3447 \ -0,6946 \ 3,2222 \ 0,0676 \ -0,2798]^T,$$

при этом $\delta^2(c_{u_3}^*) = 4,5552 \cdot 10^4$.

На рис. 3.50 и 3.51 представлены графики найденного компонента $u_3(t)$ вектора управления $U(t)$ и сигналов на выходе: эталонного $\psi(t)$ и оптимального сигнала $x^*(t)$.

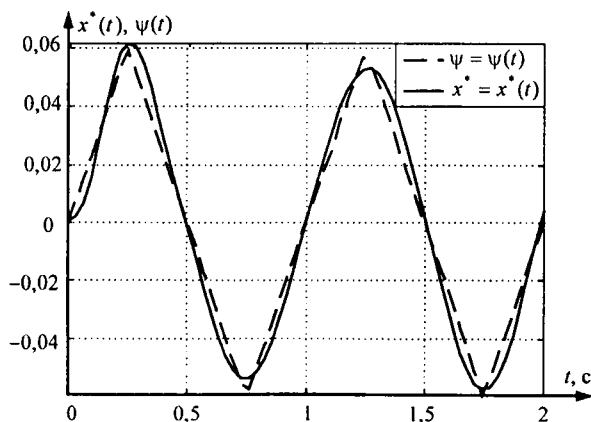


Рис. 3.51. Графики эталонного выходного сигнала $\psi(t)$ и оптимального $x^*(t)$

3.5.3. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СЛЕЖЕНИЯ: ВОСПРОИЗВЕДЕНИЕ ЭТАЛОННОЙ ВЫХОДНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИИ

Одной из важных в теории управления является задача слежения [59].

Рассмотрим стационарную линейную систему

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \\ X_{\text{в}}(t) = CX(t), \end{cases} \quad (3.98)$$

где $X(t)$ — n -мерный вектор состояния системы, $U(t)$ — m -мерный вектор управления, $X_{\text{в}}(t)$ — p -мерный вектор выхода.

Предполагается, что система вполне наблюдаема.

Через $X_{\text{в}}^3(t)$ обозначим p -мерный вектор, закон изменения которого во времени задается извне, представляющий собой желаемый (эталонный) выход системы. Вектор

$$E(t) = X_{\text{в}}^3(t) - X_{\text{в}}(t)$$

является рассогласованием, или ошибкой системы.

Предписанный процесс может быть задан или в виде вектора $X_{\text{в}}^3(t)$, или в форме эталонной системы, описываемой уравнением вида

$$\dot{X}_3(t) = A_3 X_3(t), \quad X_{\text{в}}^3(t) = C_3 X_3(t), \quad X(0) = X_3(0). \quad (3.99)$$

Задача осуществления эталонной (назначенной) траектории $X_{\text{в}}^3(t)$ сводится к определению вектора управления $U(t)$ из условия наилучшего приближения $X_{\text{в}}(t)$ к $X_{\text{в}}^3(t)$. В качестве меры близости принимается функционал

$$I = \int_0^T \left\{ [X_{\text{в}}(t) - X_{\text{в}}^3(t)]^T V [X_{\text{в}}(t) - X_{\text{в}}^3(t)] \right\} dt, \quad (3.100)$$

где $V = V^T > 0$ — матрица, методика выбора которой изложена, например, в [59].

Постоянные матрицы A, B, C, A_3, C_3 считаются заданными.

Положим, что с помощью измерителя измеряются сигналы $z_1(t), z_2(t), \dots, z_r(t)$, которые представляют собой или часть компонент вектора состояния или компонент вектора $Z(t)$, функционально связанного с вектор-функцией $X(t)$.

Для вектор-функции $Z(t)$ имеет место зависимость

$$Z(t) = HX(t),$$

где

$$H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \cdots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \cdots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r1} & h_{r2} & \cdots & h_{rn} \end{pmatrix} \text{ — } (r \times n) \text{ известная матрица.}$$

В общем случае полагается, что $r \leq n$.

Если имеется возможность измерить вектор $X(t)$, то

$$H = I,$$

где I — единичная матрица.

Закон управления строится в соответствии с зависимостью

$$U(t) = CZ(t) = CHX(t), \quad (3.101)$$

где C — неизвестная матрица.

Если воспользоваться обозначениями

$$\mathbf{CH} = (\mathbf{C}_1, \mathbf{C}_2, \dots, \mathbf{C}_r) \cdot (\mathbf{h}_1^T, \mathbf{h}_2^T, \dots, \mathbf{h}_r^T) = \sum_{k=1}^r \mathbf{C}_k \mathbf{h}_k^T,$$

где

$$\mathbf{C}_1 = \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{C}_2 = \begin{pmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{C}_r = \begin{pmatrix} c_{1r} \\ c_{2r} \\ \vdots \\ c_{mr} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{h}_1 = \begin{pmatrix} h_{11} \\ h_{12} \\ \vdots \\ h_{1n} \end{pmatrix}, \mathbf{h}_2 = \begin{pmatrix} h_{21} \\ h_{22} \\ \vdots \\ h_{2n} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{h}_r = \begin{pmatrix} h_{r1} \\ h_{r2} \\ \vdots \\ h_{rn} \end{pmatrix},$$

то в развернутой форме (3.101) запишется так:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(\mathbf{X}) &= \mathbf{U}(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = \\ &= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1r} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2r} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \dots & c_{mr} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ h_{r1} & h_{r2} & \dots & h_{rn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \left(\sum_{\mu=1}^r \mathbf{C}_{\mu} \mathbf{h}_{\mu}^T \right) \mathbf{X}(t). \end{aligned} \quad (3.102)$$

Задача заключается в нахождении матрицы $\mathbf{C}$, реализующей закон управления $\mathbf{U}(\mathbf{X}(t))$, такой, которая обеспечила бы минимум функционала (3.100).

Другими словами, поскольку

$$\mathbf{X}_B = \mathbf{X}_B(t, \mathbf{C}),$$

то задача в конечном итоге сводится к отысканию минимума функционала

$$I(\mathbf{C}) = \int_0^T \left\{ [\mathbf{X}_B(t, \mathbf{C}) - \mathbf{X}_B^3(t)]^T \mathbf{V} [\mathbf{X}_B(t, \mathbf{C}) - \mathbf{X}_B^3(t)] \right\} dt$$

по элементам матрицы $\mathbf{C}$.

Если найдена оптимальная, в известном смысле, матрица $\mathbf{C}^*$, то структурная схема системы слежения может быть представлена в следующем виде (рис. 3.52).

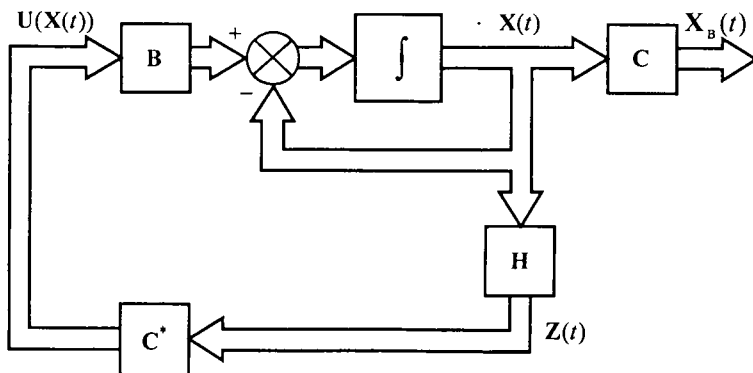


Рис. 3.52. Структурная схема системы слежения по выходу

Далее для упрощения рассуждений с целью изложения идеи метода положим, что $u(t)$ и $x_b(t)$ — скалярные функции.

Тогда уравнения (3.98) принимают вид [59]

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + b \cdot u(t), \quad x_b(t) = q^T \cdot X(t) = x(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3.103)$$

где $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ — вектор-функция состояния системы.

Здесь введены обозначения:

$$b = b, \quad C = q^T, \quad x_b(t) = x(t),$$

причем

$$q^T = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n], \quad b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m]^T.$$

Эталонная система в рассматриваемом случае имеет вид

$$\dot{X}_3(t) = F \cdot X_3(t), \quad x_b^3(t) = q_3^T \cdot X_3(t) = y(t),$$

$$X_3(t) = [x_1^3(t) \ x_2^3(t) \ \dots \ x_n^3(t)]^T, \quad X_3(0) = X(0) = X_0.$$

В случае скалярного выходного сигнала мера близости реального процесса $x(t)$ к эталонному выходному сигналу $y(t)$ определяется функционалом

$$I = \int_0^T (x(t) - y(t))^2 dt. \quad (3.104)$$

Запишем уравнение измерителя при предположении, что измерения являются идеальными:

$$Z(t) = [z_1(t) \ z_2(t) \ \dots \ z_r(t)]^T = H \cdot X(t),$$

где H — $(r \times n)$ заданная матрица.

Как уже отмечалось, с помощью измерителя измеряется часть компонент вектора состояния или некоторых сигналов, функционально связанных с компонентами вектора $X(t)$, причем $r \leq n$.

Закон управления имеет вид

$$u(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) = C^T \cdot Z(t) = C^T \cdot H \cdot X(t), \quad (3.105)$$

где, в связи с тем что u — скалярная функция, C — r -мерный вектор неизвестных параметров. Элементы этой однострочной матрицы $c_1, c_2, \dots, c_r$ подлежат определению.

Учитывая, что $x(t)$ — выходной сигнал — зависит от компонент вектора C , то функционал (3.104) можно записать в виде

$$I(C) = \int_0^T [x(t, C) - y(t)]^2 dt, \quad (3.106)$$

а задача слежения формулируется как задача минимизации функционала (3.106), т.е.

$$I(C) \rightarrow \min_C.$$

Сделаем важное замечание, связанное с вопросом точности решения поставленной задачи [59]. В связи с предположением, что $r \leq n$, т.е. измеряется лишь часть координат вектора состояния, выходная переменная $x(t)$ может быть с какой-то степенью точности приближена к эталонному сигналу $y(t)$. Точное совпадение $x(t) = y(t)$ возможно лишь тогда, когда для построения $u(t)$ используются все компоненты век-

тора состояния $X(t)$, т.е. $r = n$. В частности, это достигается при единичной матрице H . В этом случае значение функционала (3.104) теоретически равно нулю.

Следующим важным фактом является то, что в отличие от решения задачи Е.А. Барбашина, в которой $U^*(t)$ — программное управление, в рассматриваемой задаче система строится по принципу обратной связи (рис. 3.53).

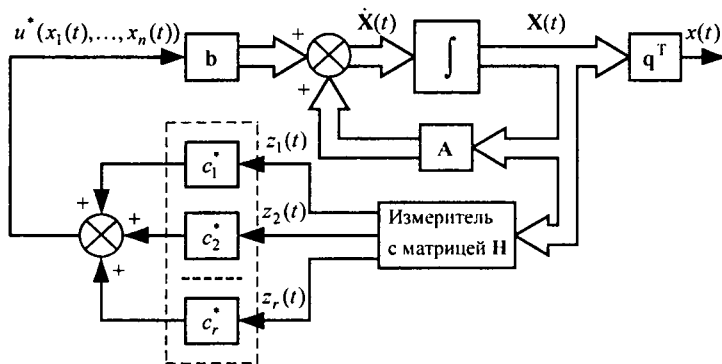


Рис. 3.53. Структурная схема системы слежения

Таким образом, решение поставленной задачи слежения свелось к отысканию минимума функционала (3.106) по параметрам c_k , $k = 1, r$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся аппаратом матричного представления операторов и конечномерной оптимизацией.

Если задачу сформулировать так:

$$I(C) = \int_0^T [x(t, C) - y(t)]^2 dt \rightarrow \min_C$$

при ограничениях

$$\dot{X}(t) = (A + b \cdot C^T \cdot H) \cdot X(t), \quad x(t) = q^T \cdot X(t),$$

$$\dot{X}_3(t) = F X_3(t), \quad y(t) = q_3^T X_3(t), \quad X(0) = X_3(0),$$

то матричный эквивалент этой задачи имеет вид

$$I(c) = \sum_{k=1}^l [(c_k^x)^2 - 2c_k^x c_k^y + (c_k^y)^2] \rightarrow \min_{c_k^x}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} C^X &= (A + b C^T H) A_n C^X + \Phi_N^0, \\ C^{X_3} &= F A_n C^{X_3} + \Phi_N^0, \quad C^y = q_3^T C^{X_3}, \end{aligned} \quad (3.107)$$

где A_n — матричный оператор интегрирования.

Если накладываются ограничения на управление $u(t)$, то к (3.107) следует добавить ограничение $u(t) \in U^1$.

Эта задача относится к классу задач математического программирования.

Далее рассмотрим конкретные примеры, приведенные в [59], но решенные методом, изложенным в настоящем параграфе.

Пример 3.11. Векторно-матричное уравнение системы имеет вид [59]

$$\dot{X}(t) = A \cdot X(t) + b \cdot u(t), \quad x(t) = q^T \cdot X(t), \quad X(0) = X_0, \quad (3.108)$$

где $X(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ x_3(t)]^T$ — вектор координат состояния, $u(t)$ — управляющая функция, $x(t)$ — скалярная выходная функция,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Формула, определяющая закон управления, имеет вид

$$u(t) = c^T \cdot H \cdot X(t), \quad (3.109)$$

где $c = [c_1 \ c_2 \ c_3]^T$ — вектор неизвестных параметров, которые подлежат определению;

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Задано векторно-матричное дифференциальное уравнение, описывающее эталонный процесс:

$$\dot{X}_y(t) = F \cdot X_y(t), \quad y(t) = q_y^T \cdot X_y(t), \quad X_y(0) = X(0), \quad (3.110)$$

где

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}; \quad q_y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Необходимо определить искомые параметры c_1, c_2, c_3 такие, при которых значение функционала ($T = 12$ с)

$$I = \int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt \quad (3.111)$$

принимает минимальное значение, т.е. необходимо определить искомые параметры из условия, чтобы выходная переменная $x(t)$ максимально приближалась к эталонному процессу $y(t)$ в смысле среднего квадрата.

Поставленную задачу будем решать методом, рассмотренным в этом параграфе. В качестве базисных функций $\Phi(t) = [\varphi_1(t) \ \varphi_2(t) \ \dots \ \varphi_l(t)]^T$ выберем функции Уолша, упорядоченные по Уолшу, и будем удерживать $l = 32$ члена разложения. Функционал (3.111) можно переписать следующим образом:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^T [x^2(t) + y^2(t) - 2x(t)y(t)] dt = (C^x)^T \cdot \int_0^T \Phi(t) \cdot \Phi^T(t) dt \cdot C^x + \\ &+ (C^y)^T \cdot \int_0^T \Phi(t) \cdot \Phi^T(t) dt \cdot C^y - 2(C^x)^T \cdot \int_0^T \Phi(t) \cdot \Phi^T(t) dt \cdot C^y = \\ &= (C^x)^T \cdot C^x + (C^y)^T \cdot C^y - 2(C^x)^T \cdot C^y = \sum_{k=1}^{32} [(c_k^x)^2 + (c_k^y)^2 - 2c_k^x c_k^y], \end{aligned} \quad (3.112)$$

где C^x — спектральная характеристика скалярного сигнала $x(t)$; C^y — спектральная характеристика скалярного сигнала $y(t)$.

Найдем спектральную характеристику C^y выходного сигнала эталонной модели. Интегрируя дифференциальное уравнение (3.110), получим

$$X_y(t) = F \cdot \int_0^t X_y(\tau) d\tau + X_y(0),$$

или в развернутом виде

$$\begin{cases} x_1^y(t) = \sum_{i=1}^3 f_{1i} \cdot \int_0^t x_i^y(\tau) d\tau + x_1^y(0), \\ x_2^y(t) = \sum_{i=1}^3 f_{2i} \cdot \int_0^t x_i^y(\tau) d\tau + x_2^y(0), \\ x_3^y(t) = \sum_{i=1}^3 f_{3i} \cdot \int_0^t x_i^y(\tau) d\tau + x_3^y(0). \end{cases}$$

Используя понятие спектральных характеристик сигналов, последнюю систему уравнений можно записать в виде

$$\begin{cases} C^{x_1} = \sum_{i=1}^3 f_{i1} \cdot A_{\Pi} \cdot C^{x_i} + C^{x_1^0}, \\ C^{x_2} = \sum_{i=1}^3 f_{i2} \cdot A_{\Pi} \cdot C^{x_i} + C^{x_2^0}, \\ C^{x_3} = \sum_{i=1}^3 f_{i3} \cdot A_{\Pi} \cdot C^{x_i} + C^{x_3^0}, \end{cases}$$

или

$$\begin{bmatrix} I - f_{11} \cdot A_{\Pi} & -f_{12} \cdot A_{\Pi} & -f_{13} \cdot A_{\Pi} \\ -f_{21} \cdot A_{\Pi} & I - f_{22} \cdot A_{\Pi} & -f_{23} \cdot A_{\Pi} \\ -f_{31} \cdot A_{\Pi} & -f_{32} \cdot A_{\Pi} & I - f_{33} \cdot A_{\Pi} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C^{x_1} \\ C^{x_2} \\ C^{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{x_1^0} \\ C^{x_2^0} \\ C^{x_3^0} \end{bmatrix}, \quad (3.113)$$

где I — единичная матрица размерностью $l \times l$; A_{Π} — матрица оператора интегрирования в базисе функций Уолша размерностью $l \times l$, клетка размерностью 8×8 которой будет выглядеть следующим образом:

$$A_{\Pi} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,75 \\ -3 & 0 & 1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 \\ 0 & -1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 \\ -1,5 & 0 & 0 & 0 & 0,75 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,75 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$C^{x_i^0}$ — вектор спектральной характеристики i -го ($i=1,2,3$) начального условия, первые элементы которого будут соответственно равны элементам $x_i^0(0)$ вектора $X_3(0)$, а остальные элементы — нулевые.

Из уравнения (3.113) с учетом числовых значений матрицы F находим

$$\begin{bmatrix} C^{x_1} \\ C^{x_2} \\ C^{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -A_{\Pi} & 0 \\ 0 & I & -A_{\Pi} \\ -6 \cdot A_{\Pi} & -11 \cdot A_{\Pi} & I - 6 \cdot A_{\Pi} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C^{x_1^0} \\ C^{x_2^0} \\ C^{x_3^0} \end{bmatrix}.$$

Теперь можно определить спектральную характеристику скалярного выходного сигнала $y(t)$:

$$C^y = \sum_{i=1}^3 q_i^y \cdot C^{x_i}.$$

Приведем первые восемь значений спектральной характеристики

$$C^y = [0,1528 \quad 0,1516 \quad 0,1293 \quad 0,1303 \quad 0,0585 \quad 0,0579 \quad 0,0721 \quad 0,0728]^T.$$

Полагая известным вектор C^y , можно построить выходной сигнал эталонной модели $y(t)$, который представлен на рис. 3.54.

Найдем спектральную характеристику скалярной выходной функции $x(t)$. Подставляя (3.109) в (3.108), получим

$$\dot{X}(t) = (A + b \cdot c^T \cdot H) \cdot X(t) = D(c) \cdot X(t), \quad (3.114)$$

где $D(c) = A + b \cdot c^T \cdot H$.

Матричный эквивалент (3.114) имеет вид

$$\begin{bmatrix} C^{x_1} \\ C^{x_2} \\ C^{x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I - d_{11}(c) \cdot A_{\Pi} & -d_{12}(c) \cdot A_{\Pi} & -d_{13}(c) \cdot A_{\Pi} \\ -d_{21}(c) \cdot A_{\Pi} & I - d_{22}(c) \cdot A_{\Pi} & -d_{23}(c) \cdot A_{\Pi} \\ -d_{31}(c) \cdot A_{\Pi} & -d_{32}(c) \cdot A_{\Pi} & I - d_{33}(c) \cdot A_{\Pi} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} C^{x_1^0} \\ C^{x_2^0} \\ C^{x_3^0} \end{bmatrix}. \quad (3.115)$$

Отсюда находим спектральную характеристику скалярного сигнала $x(t)$:

$$C^x(c) = \sum_{i=1}^3 q_i^x \cdot C^{x_i}(c).$$

С учетом последнего соотношения легко видеть, что функционал (3.112) будет зависеть от искомого вектора $\mathbf{c}$, т.е.

$$I(\mathbf{c}) = (\mathbf{C}^x(\mathbf{c}))^T \cdot \mathbf{C}^x(\mathbf{c}) + (\mathbf{C}^y)^T \cdot \mathbf{C}^y - 2 \cdot (\mathbf{C}^x(\mathbf{c}))^T \cdot \mathbf{C}^y. \quad (3.116)$$

Поскольку с помощью матричных операторов представилась возможность в явной форме найти зависимости, определяющие спектральные характеристики сигналов $x(t)$ и $y(t)$, то это привело к упрощению задачи — она формулируется как задача на безусловный экстремум.

Естественно, такое упрощение невозможно при наличии ограничений на управление $u(t)$.

Минимум функционала (3.116) будем искать с использованием алгоритма Нелдера–Мида безусловной оптимизации функции многих переменных. В качестве начальных значений искомых параметров c_1, c_2, c_3 примем нулевые, т.е. $\mathbf{c}_0 = [0 \ 0 \ 0]^T$. В этом случае матрица $\mathbf{D}(\mathbf{c}_0)$ имеет вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{c}_0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix},$$

а спектральная характеристика $\mathbf{C}^x(\mathbf{c}_0)$ с удержанием первых восьми элементов запишется так:

$$\mathbf{C}^x(\mathbf{c}_0) = [0,3225 \ 0,2246 \ 0,0932 \ 0,1327 \ 0,0281 \ 0,0199 \ 0,0455 \ 0,0660]^T;$$

функционал (3.116) имеет значение

$$I(\mathbf{c}_0) = 3,9567 \cdot 10^{-2}.$$

Минимум функционала (3.116) при точности расчета $\varepsilon = 0,0001$ достигается в точке

$$\mathbf{c}^* = [-5,0 \ -7,0 \ -4,0]^T.$$

При $\mathbf{c}^*$ матрица $\mathbf{D}(\mathbf{c})$ принимает вид

$$\mathbf{D}(\mathbf{c}^*) = \begin{bmatrix} 0 & 1,00 & 0 \\ 0 & 0 & 1,00 \\ -6,00 & -11,0 & -6,00 \end{bmatrix},$$

причем

$$\mathbf{C}^x(\mathbf{c}^*) = [0,1528 \ 0,1516 \ 0,1293 \ 0,1303 \ 0,0585 \ 0,0579 \ 0,0721 \ 0,0728]^T.$$

Значение функционала (3.116) в точке $\mathbf{c}^*$ $J(\mathbf{c}^*) = 1,8319 \cdot 10^{-15}$.

На рис. 3.54 показаны выходные $y(t)$ и $x^*(t, \mathbf{c}^*)$. Результаты совпали с результатами, полученными в [59].

Структурная схема системы представлена на рис. 3.55.

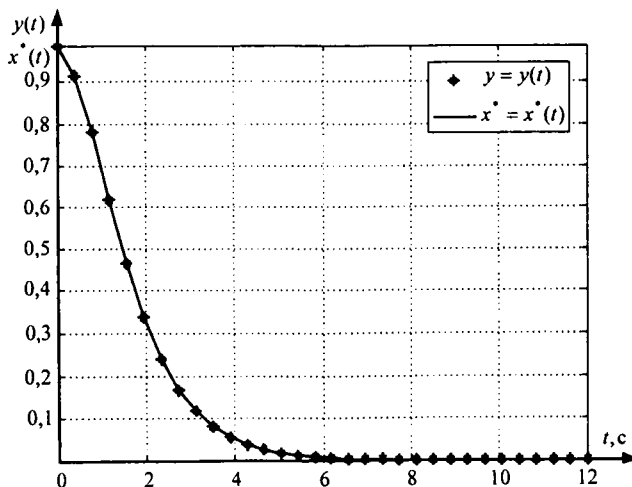


Рис. 3.54. Графики скалярных сигналов $y(t)$ и $x^*(t, \mathbf{c}^*)$

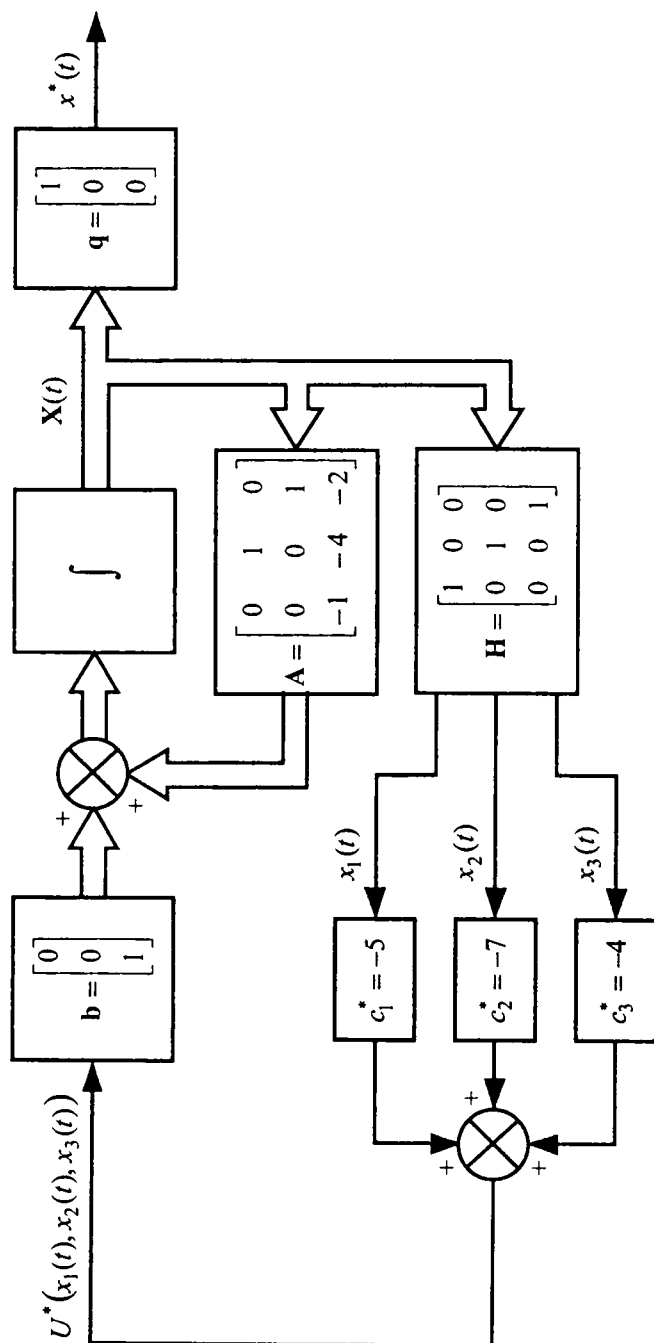


Рис. 3.55. Структурная схема системы

ГЛАВА 4. МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ)

В предыдущих главах было изложено содержание методов синтеза для случая, когда объект имеет один вход и один выход (одномерные объекты).

В этом случае ставится задача синтеза регуляторов в классе одномерных систем. Задача принципиально усложняется, если объект управления имеет m входов и n выходов и, таким образом, имеет $m \times n$ каналов.

Например, в системе управления турбореактивным двигателем можно указать следующие каналы [50]: управления скоростью вращения турбины; управления количеством подаваемого топлива; управления температурой газов перед турбиной и др. При применении методов синтеза регуляторов в классе одномерных систем должно быть выполнено условие: *каждый канал должен быть «развязан» от остальных каналов, независим, автономен* — и только в этом случае можно применить описанные выше методы.

Но через объект — турбину — эти каналы влияют друг на друга. Такая взаимозависимость, *неавтономность каналов*, порождают принципиальные трудности при синтезе систем управления многомерными объектами.

Центральной проблемой при синтезе регуляторов в классе многомерных систем является «развязка» каналов. Если эта проблема в каждом конкретном случае получила решение, то на следующем этапе применяются методы синтеза регуляторов в классе одномерных систем.

В этой главе кратко рассмотрим вопросы математического описания многомерных объектов, постановку задачи синтеза регуляторов и подходы к ее решению.

4.1. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Многомерными называются системы, у которых вход и выход — вектор-функции. Проиллюстрируем сказанное на примере.

В системе автоматического управления турбореактивным двигателем управляемыми переменными являются: скорость вращения турбины, количество подаваемого топлива, температура газов после турбины и др.

Для управления каждой из переменных конструируется свой канал. Эту систему можно представить структурной схемой, показанной на рис. 4.1. На схеме $Y(t)$ — векторный входной сигнал. В данном случае

$$Y(t) = (y_1(t), y_2(t), y_3(t), \dots),$$

где, например, $y_1(t)$ — заданное значение скорости вращения турбины и т.п.;

$$X_b(t) = (x_1^b(t), x_2^b(t), x_3^b(t), x_4^b(t), \dots) \text{ — векторный выходной сигнал,}$$

где $x_1^b(t)$ — реальное значение скорости вращения турбины и т.д.

Для упрощения рассуждений рассмотрим всего два канала; тогда более развернуто схему можно представить в виде, изображенном на рис. 4.2. Здесь $y_1(t)$ и $y_2(t)$ — управляющие сигналы; $x_1^b(t)$ и $x_2^b(t)$ — реальные значения управляемых величин.

В хорошо спроектированной системе каналы $y_1(t) \rightarrow x_1^B(t)$ и $y_2(t) \rightarrow x_2^B(t)$ — независимы, т.е. выход $x_1^B(t)$ управляется только сигналом $y_1(t)$ и $x_2^B(t)$ — сигналом $y_2(t)$ (сигнал $y_1(t)$ не влияет на $x_2^B(t)$ и $y_2(t)$ не воздействует на $x_1^B(t)$).

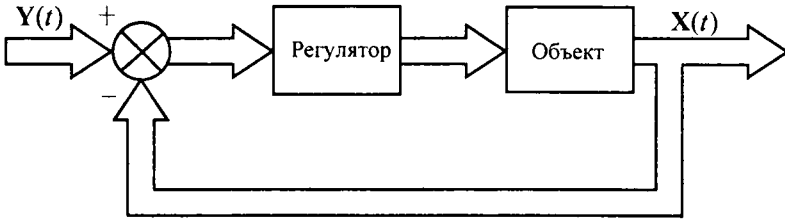


Рис. 4.1. Структурная схема системы управления турбореактивным двигателем

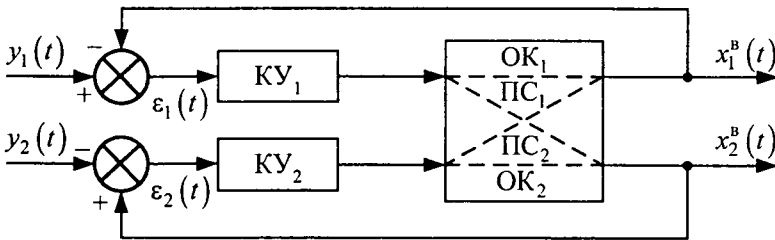


Рис. 4.2. Структурная схема двумерной системы

В реальных же системах наряду с основными каналами $ОК_1$ и $ОК_2$ часто имеют место перекрестные связи $ПК_1$ (сигнал $y_1(t)$ воздействует на выход $x_2^B(t)$) и $ПК_2$ (сигнал $y_2(t)$ воздействует на выход $x_1^B(t)$).

При исследовании подобного рода систем, а также при синтезе регуляторов (корректирующих устройств $КУ_1$ и $КУ_2$) необходимо учитывать перекрестные связи $ПК_1$ и $ПК_2$.

Объект называется автономным, если за счет налагаемых дополнительных связей исключается взаимное влияние каналов ($ПК_1$ и $ПК_2$ отсутствуют).

Рассмотрим методы математического описания многомерных систем с помощью дифференциальных уравнений. Эти уравнения можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{11}x_1^B + \dots + L_{1p}x_p^B &= \tilde{L}_{11}y_1 + \dots + \tilde{L}_{1m}y_m; \\ L_{21}x_1^B + \dots + L_{2p}x_p^B &= \tilde{L}_{21}y_1 + \dots + \tilde{L}_{2m}y_m; \\ &\vdots \\ L_{p1}x_1^B + \dots + L_{pp}x_p^B &= \tilde{L}_{p1}y_1 + \dots + \tilde{L}_{pm}y_m, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где L_{ij} , $\tilde{L}_{ij}$ — линейные дифференциальные операторы:

$$\begin{aligned} L_{ij} &= a_n^{ij} \frac{d^n}{dt^n} + a_{n-1}^{ij} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} + \dots + a_0^{ij}, \quad i, j = \overline{1, p}; \\ \tilde{L}_{ij} &= b_r^{ij} \frac{d^r}{dt^r} + b_{r-1}^{ij} \frac{d^{r-1}}{dt^{r-1}} + \dots + b_0^{ij}, \quad i = \overline{1, p}, \quad j = \overline{1, m}. \end{aligned}$$

Каждый оператор действует на функцию x_k следующим образом:

$$L_{ij}x_k^B = a_n^{ij} \frac{d^n}{dt^n} x_k^B + a_{n-1}^{ij} \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} x_k^B + \dots + a_0^{ij} x_k^B.$$

Положим, что коэффициенты линейных дифференциальных операторов не зависят от времени, т.е. имеет место *стационарная линейная многомерная система*.

Преобразуя по Лапласу обе части (4.1), находим

$$L_{11}(s)X_1^B(s) + \dots + L_{1p}(s)X_p^B(s) = \tilde{L}_{11}(s)Y_1(s) + \dots + \tilde{L}_{1m}(s)Y_m(s);$$

$$L_{21}(s)X_1^B(s) + \dots + L_{2p}(s)X_p^B(s) = \tilde{L}_{21}(s)Y_1(s) + \dots + \tilde{L}_{2m}(s)Y_m(s);$$

$$\vdots$$

$$L_{p1}(s)X_1^B(s) + \dots + L_{pp}(s)X_p^B(s) = \tilde{L}_{p1}(s)Y_1(s) + \dots + \tilde{L}_{pm}(s)Y_m(s),$$

или, что то же самое,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} L_{11}(s) & L_{12}(s) & \dots & L_{1p}(s) \\ L_{21}(s) & L_{22}(s) & \dots & L_{2p}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{p1}(s) & L_{p2}(s) & \dots & L_{pp}(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{L}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} X_1^B(s) \\ X_2^B(s) \\ \vdots \\ X_p^B(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} \tilde{L}_{11}(s) & \tilde{L}_{12}(s) & \dots & \tilde{L}_{1m}(s) \\ \tilde{L}_{21}(s) & \tilde{L}_{22}(s) & \dots & \tilde{L}_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \tilde{L}_{p1}(s) & \tilde{L}_{p2}(s) & \dots & \tilde{L}_{pm}(s) \end{pmatrix}}_{\tilde{\mathbf{L}}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}(s)}. \quad (4.2)$$

С учетом введенных обозначений (4.2) запишется в виде

$$\mathbf{L}(s)\mathbf{X}_B(s) = \tilde{\mathbf{L}}(s)\mathbf{Y}(s). \quad (4.3)$$

Из (4.3) сразу же следует

$$\mathbf{X}_B(s) = \mathbf{L}^{-1}(s)\tilde{\mathbf{L}}(s)\mathbf{Y}(s),$$

где

$$\mathbf{L}^{-1}(s) = \frac{1}{|\mathbf{L}(s)|} \begin{pmatrix} a_{11}(s) & \dots & a_{1p}(s) \\ a_{21}(s) & \dots & a_{2p}(s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(s) & \dots & a_{pp}(s) \end{pmatrix}^T;$$

$a_{ij}(s)$ — алгебраическое дополнение $A_{ij}(s)$ матрицы $\mathbf{L}(s)$; $\|a_{ij}(s)\|^T$ — присоединенная матрица.

Или, что то же самое,

$$\underbrace{\begin{pmatrix} X_1^B(s) \\ X_2^B(s) \\ \vdots \\ X_p^B(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_B(s)} = \underbrace{\begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{p1}(s) & W_{p2}(s) & \dots & W_{pm}(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{W}(s)} \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}(s)}. \quad (4.4)$$

С учетом введенных обозначений (4.4) принимает вид

$$\mathbf{X}_B(s) = \mathbf{W}(s)\mathbf{Y}(s), \quad (4.5)$$

где $\mathbf{W}(s)$ — *матричная ПФ* (передаточная матрица).

Переходя в (4.4) во временную область, получим

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^B(t) \\ x_2^B(t) \\ \vdots \\ x_p^B(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_B(t)} = \int_0^t \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11}(t-\tau) & \dots & k_{1m}(t-\tau) \\ k_{21}(t-\tau) & \dots & k_{2m}(t-\tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1}(t-\tau) & \dots & k_{pm}(t-\tau) \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}(t-\tau)} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \\ \vdots \\ y_m(\tau) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}(\tau)} d\tau. \quad (4.6)$$

Из последней формулы следует

$$\mathbf{X}_B(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t-\tau) \mathbf{Y}(\tau) d\tau, \quad (4.7)$$

где $\mathbf{K}(\tau)$ — матричная ИПФ многомерной системы.

Так же как и для одномерных систем, можно ввести понятие частотных характеристик.

Если САУ нестационарна, зависимость (4.6) принимает вид

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^B(t) \\ x_2^B(t) \\ \vdots \\ x_p^B(t) \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_B(t)} = \int_0^t \underbrace{\begin{pmatrix} k_{11}(t, \tau) & \dots & k_{1m}(t, \tau) \\ k_{21}(t, \tau) & \dots & k_{2m}(t, \tau) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{p1}(t, \tau) & \dots & k_{pm}(t, \tau) \end{pmatrix}}_{\mathbf{K}(t, \tau)} \underbrace{\begin{pmatrix} y_1(\tau) \\ y_2(\tau) \\ \vdots \\ y_m(\tau) \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}(\tau)} d\tau, \quad (4.8)$$

или, что то же самое,

$$\mathbf{X}_B(t) = \int_0^t \mathbf{K}(t, \tau) \mathbf{Y}(\tau) d\tau. \quad (4.9)$$

Пример 4.1. Рассмотрим систему, описываемую уравнениями вида

$$\ddot{x}_1^B + \dot{x}_1^B + x_2^B = y_1;$$

$$\dot{x}_1^B + x_1^B + \dot{x}_2^B = y_2.$$

Перейдем к изображениям

$$(s^2 + s) X_1^B(s) + X_2^B(s) = Y_1(s);$$

$$(s+1) X_1^B(s) + s X_2^B(s) = Y_2(s).$$

Или в матричной форме

$$\begin{pmatrix} s^2 + s & 1 \\ s+1 & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1^B(s) \\ X_2^B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}.$$

Найдем $\mathbf{L}^{-1}(s)$; имеем

$$|\mathbf{L}(s)| = (s^2 + s)s - (s+1) = s^3 + s^2 - s - 1 = (s+1)(s^2 - 1);$$

$$a_{11}(s) = s; \quad a_{12}(s) = -(s+1); \quad a_{21}(s) = -1; \quad a_{22}(s) = s^2 + s.$$

Отсюда находим

$$\mathbf{L}^{-1}(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 - 1)} \begin{pmatrix} s & -1 \\ -(s+1) & s^2 + s \end{pmatrix}.$$

Выражение для изображения выхода принимает вид

$$\begin{pmatrix} X_1^B(s) \\ X_2^B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{s}{(s+1)(s^2 - 1)} & \frac{-1}{(s+1)(s^2 - 1)} \\ -\frac{s+1}{(s+1)(s^2 - 1)} & \frac{s^2 + s}{(s+1)(s^2 - 1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{pmatrix}.$$

Из последней формулы находим

$$\begin{aligned} X_1^*(s) &= \frac{s}{(s+1)(s^2-1)} Y_1(s) - \frac{1}{(s+1)(s^2-1)} Y_2(s); \\ X_2^*(s) &= -\frac{1}{s^2-1} Y_1(s) - \frac{s^2+s}{(s+1)(s^2-1)} Y_2(s), \end{aligned} \quad (4.10)$$

или

$$\begin{aligned} X_1^*(s) &= W_{11}(s) Y_1(s) + W_{12}(s) Y_2(s); \\ X_2^*(s) &= W_{21}(s) Y_1(s) + W_{22}(s) Y_2(s). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Зависимости (4.10) и (4.11) учитывают не только прямые (основные) каналы, но и перекрестные связи (рис. 4.3).

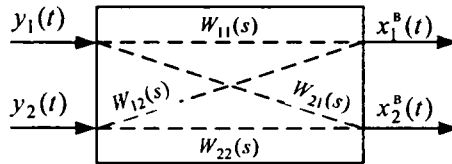


Рис. 4.3. К описанию многомерных систем с помощью передаточных функций

4.2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ

Многомерная система автоматического управления, реализующая принцип обратной связи, показана на рис. 4.4. Здесь $X \in R^n$ — вектор состояния объекта; $U(t)$ — вектор управления объекта; $Y(t)$ — задание регулятору (уставка); $\varepsilon(t) = (\varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_m(t))$ — вектор рассогласования (ошибка управления), компоненты которого определяются формулой $\varepsilon_k(t) = y_k(t) - x_k^B(t)$, $k = \overline{1, m}$.

Объект управления объединяет всю неизменяемую часть системы: исполнительный элемент, объект, измерительную систему и т.д.

Положим, что объект описывается дифференциальным уравнением состояния

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t), \quad (4.12)$$

где $A = \text{const}$; $B = \text{const}$, и уравнением выхода

$$X_B(t) = CX(t). \quad (4.13)$$

Пользуясь приведенными выше методами, связь между входом и выходом можно представить в матричной форме

$$X_B(s) = W(s)Y(s),$$

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} X_1^B(s) \\ X_2^B(s) \\ \vdots \\ X_m^B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1m}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2m}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{m1}(s) & W_{m2}(s) & \dots & W_{mm}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ \vdots \\ Y_m(s) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

Проведем некоторые рассуждения, касающиеся качества управления в классе стационарных систем.

В одномерных системах критерий качества характеризовался параметрами переходного процесса, такими как время управления, перерегулирование, точность работы системы в установившемся режиме и др.

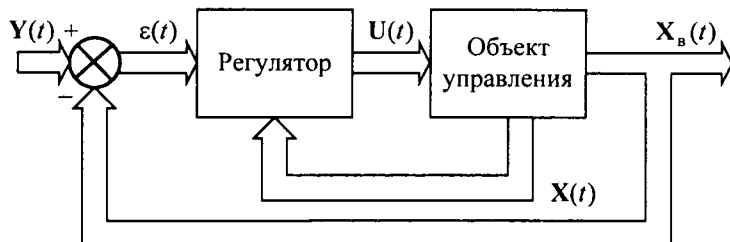


Рис. 4.4. Структурная схема многомерной системы

В многомерных объектах не удастся найти единый критерий, который бы наиболее полно и всесторонне характеризовал систему.

В одномерных системах для оценки качества работы САУ достаточно провести один эксперимент.

В многомерных САУ, если представление о качестве будет строиться на концепции проведения одного эксперимента (на все каналы одновременно подаются ступенчатые воздействия и анализируются соответствующие реакции), то разработка методов синтеза, использующая такую концепцию, к удовлетворительному результату не приводит.

В большинстве своем многомерные системы имеют m выходов и m входов. Каждая входная уставка (воздействие) предназначена для отработки «своим» каналом.

Что касается идеальной системы, в которой все каналы развязаны, в ней осуществляется управление по каждому каналу автономно, т.е. каждому индивидуальному скалярному выходу соответствует свой индивидуальный вход $y_i(t)$ (своя уставка).

Таким образом, размерность входа $Y(t)$ всегда совпадает с размерностью выходного процесса $X_B(t)$.

Отсюда легко сделать вывод: любую замкнутую систему управления многомерным объектом можно рассматривать как квадратную систему (рис. 4.5).

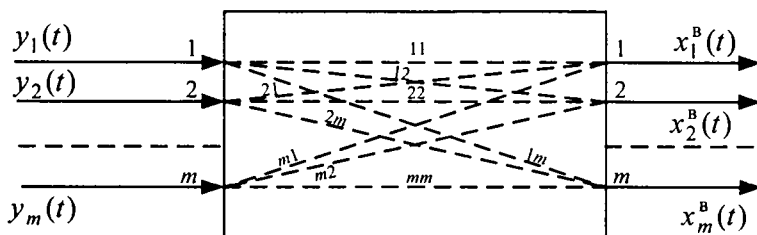


Рис. 4.5. Квадратная система

В квадратной системе имеют место m^2 одномерных каналов (с учетом взаимозависимости каналов), соответствующих всевозможным парам $(y_i x_j^B)$, $i, j = \overline{1, m}$.

Важным является следующее положение: m параллельно работающих каналов $y_1(t) \rightarrow x_1^B(t)$, $y_2(t) \rightarrow x_2^B(t)$, ..., $y_m(t) \rightarrow x_m^B(t)$, т.е. «вход $y_i(t)$ — выход $x_i^B(t)$ » являются собственно каналами управления выходом, а остальные перекрестные каналы $y_i(t) \rightarrow x_j^B(t)$, $(i \neq j)$ следует рассматривать как возмущения.

При таком рассмотрении вопроса динамическая точность и качество многомерной системы тем выше, чем точнее и качественнее в системе по каждой выходной

переменной $x_i^B(t)$, $i = \overline{1, m}$ обрабатывается свой индивидуальный вход $y_i(t)$ и чем меньше при этом на нее влияют другие входы (чем меньше влияют перекрестные связи).

Исходя из предыдущих рассуждений, качество управления может характеризовать критерий, предложенный В.В. Солодовниковым и Н.Б. Филимоновым. Этот критерий наиболее адекватно отражает динамическое поведение многомерных систем [119].

Динамическое качество многомерной САУ тем выше, чем точнее она обрабатывает входной сигнал $y_i(t)$ для каждой выходной переменной $x_i^B(t)$, $i = \overline{1, m}$ и чем меньше при этом влияние на другие выходные переменные $x_i^B(t)$, $i \neq j$ объекта. Качество управления определяется матрицей переходных характеристик $\mathbf{H} = (h_{ij}(t))_{i,j=1}^m$ системы посредством задания областей допустимых значений выходных переменных.

Переходный процесс $h_{ii}(t)$, $i = \overline{1, m}$ по каждому каналу, являющийся реакцией на $l(t)$, ограничивается такой же областью, как это принято в теории одномерных систем, причем параметры этих областей для каждого канала — свои (рис. 4.6, а).

Переходный процесс $h_{ij}(t)$ (влияние $y_i(t)$ на выход $x_j^B(t)$) ограничивается областью, симметричной относительно оси времени, причем высота ее определяется допустимым взаимным влиянием каналов $\sigma_{ij \max}$ ($i \neq j$); ширина одна и та же для всех выходов и определяется наиболее инерционным перекрестным каналом (рис. 4.6, б).

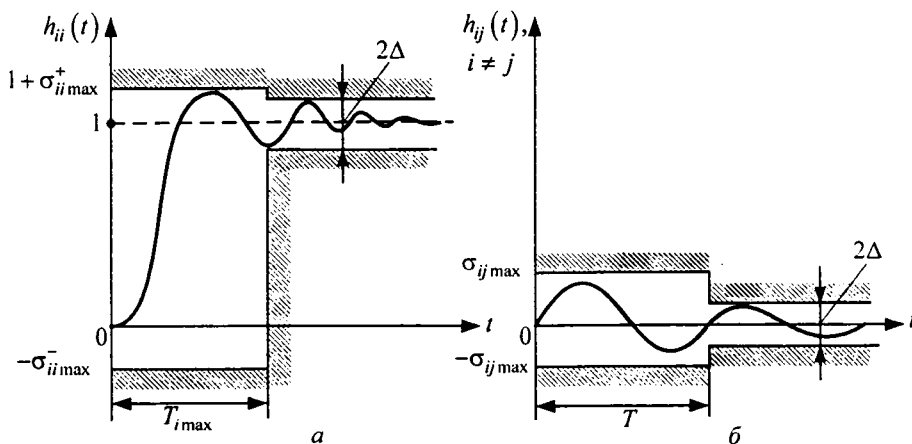


Рис. 4.6. К определению критерия качества многомерных систем

Сказанное выше математически можно выразить следующим образом [119]:

$$-\sigma_{ii}^+ \max \leq h_{ii}(t) \leq 1 + \sigma_{ii}^+ \max, \quad 0 \leq t \leq T_{i \max}; \quad (4.15)$$

$$|h_{ii}(t) - 1| \leq \Delta, \quad t > T_{i \max}; \quad (4.16)$$

$$|h_{ij}(t)| \leq \sigma_{ij \max}, \quad i \neq j, \quad 0 \leq t \leq T; \quad (4.17)$$

$$|h_{ij}(t)| \leq \Delta, \quad i \neq j, \quad t > T; \quad (4.18)$$

$$h_{ij}(\infty) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases} \quad (4.19)$$

где Δ — малая постоянная величина; $T = \max_{1 \leq i \leq m} T_{i \max}$; $\sigma_{ii \max}^+$, $\sigma_{ii \max}^-$, $T_{i \max}$, $\sigma_{ij \max}$ ($i \neq j$)

— заданные максимально допустимые значения прямых показателей качества управления: максимально допустимое положительное перегулирование, отрицательное перегулирование и время регулирования i -го выхода, максимально допустимая величина влияния i -го входа на j -й выход системы (влияние перекрестных связей).

$H(t)$ — матричная переходная характеристика, представляющая собой квадратную функциональную матрицу с элементами $h_{ij}(t)$.

Такой подход к формированию критерия качества учитывает, с одной стороны, качество отработки системой воздействия собственно по каждому каналу, с другой стороны — допустимое взаимное влияние всех перекрестных связей.

Кроме ограничений на процессы $h_{ii}(t)$ и $h_{ij}(t)$, часто необходимо накладывать ограничения на их производные соответствующего порядка, например, типа модульных ограничений:

$$\left| \dot{h}_{ij}^{(k)}(t) \right| \leq \tilde{h}_{ii}^{(k)}, \quad i = \overline{1, m}; \quad k = \overline{1, n_i - 1}.$$

Если объект описывается уравнением (4.12), то ограничения можно записать в виде

$$X_b(t) \in X^m \quad \forall t \in [0, T],$$

$$U(t) \in U^m \quad \forall t \in [0, T],$$

где X^m и U^m — допустимые области.

Могут быть наложены ограничения и на вектор-функцию $X(t)$. В установившемся режиме каждый канал должен обеспечивать заданную точность воспроизведения входных сигналов, что достигается заданием допустимых значений коэффициентов ошибок по каждому каналу.

Сделаем постановку задачи, пользуясь описанием объекта управления и регулятора в пространстве состояний:

$$\dot{X}(t) = A_o X(t) + B_o U(t), \quad X_b(t) = C_o X(t) \quad \text{— уравнение объекта,}$$

$$\dot{X}_{ky}(t) = A_{ky} X_{ky}(t) + B_{ky} \varepsilon(t), \quad U(t) = C_{ky} X_{ky}(t) \quad \text{— уравнения регулятора,}$$

$$\varepsilon(t) = Y(t) - X_b(t).$$

Структурная схема многомерной системы автоматического управления представлена на рис. 4.7.

Общая постановка задачи: необходимо найти матрицы A_{ky} , B_{ky} , C_{ky} такие, которые обеспечили бы заданное, в известном смысле, качество управления (например, с учетом ограничений на управление $U(t)$ и переменные состояния).

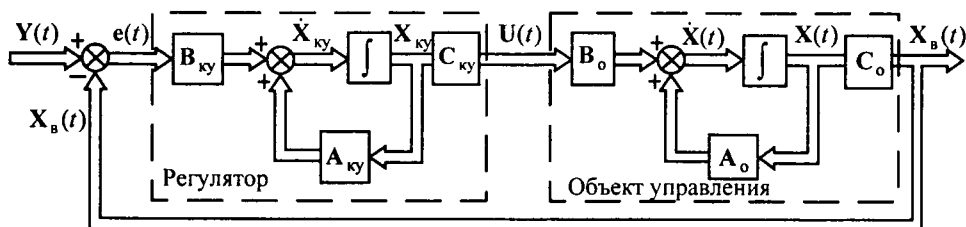


Рис. 4.7. Структурная схема многомерной системы автоматического управления

Можно сформулировать конкретную постановку задачи синтеза системы управления многомерным объектом: *требуется синтезировать устойчивую систему, удовлетворяющую требованиям (4.15)–(4.19) и требованиям точности в установившемся режиме* [69, 119].

Наиболее простая структура реализуется безынерционными звеньями или звеньями, описываемыми передаточными функциями, степень полинома числителя которых меньше степени полинома знаменателя.

Задача синтеза в сформулированной постановке разрешима при условии функциональной управляемости объекта по выходу, т.е. должны быть выполнены требования [69]:

- 1) размерность выхода объекта не должна превышать размерности его входа;
- 2) передаточная матрица объекта должна иметь полный ранг;
- 3) объект не должен иметь правых передаточных нулей.

Требования 1 и 2 тесно связаны с возможностью выполнения условий автономности контуров объекта.

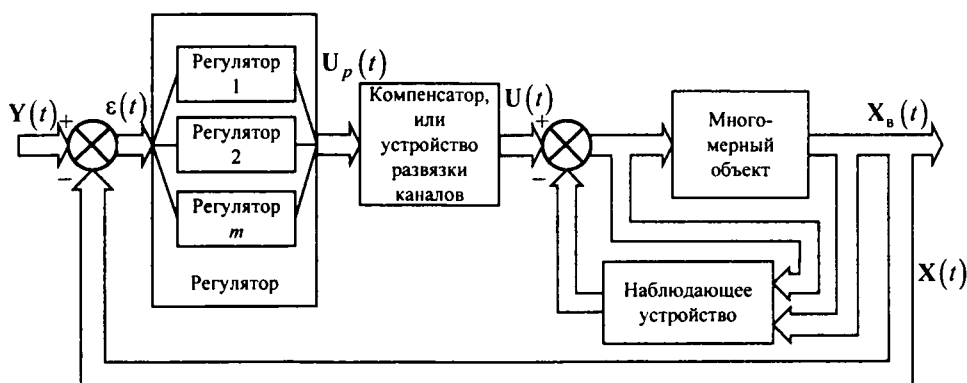


Рис. 4.8. Структурная схема многомерной системы с регулятором, устройством развязки каналов и стабилизирующим устройством

В структурную схему многомерной системы (рис. 4.8) входят следующие элементы: *стабилизирующее устройство, необходимое для решения задачи стабилизации исходного объекта управления, компенсатор, или устройство развязки каналов, предназначенный для решения задачи динамической развязки контуров управления каждой выходной переменной объекта, и, наконец, регулятор, цель которого — решение задачи коррекции показателей динамического качества отдельных контуров регулирования.*

4.3. ДИНАМИЧЕСКАЯ И СТАТИЧЕСКАЯ РАЗВЯЗКА КАНАЛОВ (ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ)

Для асимптотической устойчивости линейной системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами необходимо и достаточно, чтобы вещественные части корней характеристического уравнения были отрицательны, или собственные значения матрицы A должны располагаться в левой полуплоскости комплексной плоскости.

Справедливость этого положения вытекает из равенства, определяющего свободные колебания систем. Если же система неустойчива, то ее необходимо стабилизировать.

Пусть объект описывается уравнениями

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t); \quad (4.20)$$

$$X_B(t) = CX(t). \quad (4.21)$$

Воспользуемся стационарной обратной связью вида [6]

$$U(t) = -KX, \quad (4.22)$$

где K — матрица размерности $m \times n$.

С учетом (4.22) уравнение объекта запишется так:

$$\dot{X}(t) = AX(t) - BKX(t) = [A - BK] X(t). \quad (4.23)$$

Задачу стабилизации одномерного стационарного объекта можно решить с помощью введения отрицательной обратной связи по производным до $(n-1)$ порядка.

Аналогично для многомерного стационарного объекта введение обратной связи по состоянию и соответствующий выбор матрицы K может обеспечить любое заранее заданное расположение собственных значений матрицы $[A - BK]$ на комплексной плоскости [6].

Практический интерес представляют такие характеристические многочлены, корни которых расположены слева от мнимой оси. В этом случае замкнутая система является асимптотически устойчивой.

Таким образом, сказанное кратко формулируется так: если задан вещественный характеристический многочлен

$$\Delta(\lambda) = \lambda^n + C_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + C_0, \quad (4.24)$$

то с помощью выбора линейной обратной связи $U(t) = -KX(t)$, где K — действительная постоянная матрица размером $m \times n$, можно обеспечить равенство характеристического многочлена $A - BK$ с многочленом (4.24).

Необходимым и достаточным условием разрешимости проблемы размещения собственных значений с помощью линейной обратной связи является выполнение условия [6]

$$\text{rank} \begin{Bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{Bmatrix} = n. \quad (4.25)$$

Поскольку с помощью выбора матрицы K можно обеспечивать любое наперед заданное размещение собственных значений, то отсюда легко сделать вывод: указанной процедурой можно обеспечить не только устойчивость, но и качество свободных колебаний системы.

Однако здесь необходимо учесть появление ряда *нежелательных факторов*, таких как *возможность появления большого уровня управляющих воздействий*; могут также иметь место большие «забросы» значений некоторых переменных при большом смещении собственных значений в левую полуплоскость [6].

Уравнение стабилизированного объекта можно принять следующим:

$$\dot{X}(t) = [A - BK] X(t) + U(t). \quad (4.26)$$

Структурная схема объекта показана на рис. 4.9.

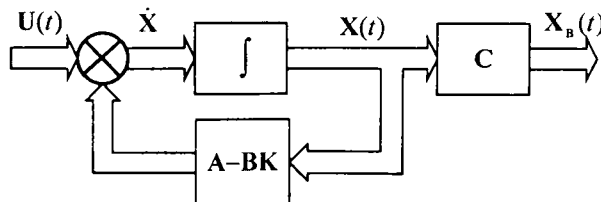


Рис. 4.9. Структурная схема стабилизированного объекта

Можно вводить и другие обратные связи. Однако во всех случаях необходимо помнить о том, что для замыкания обратной связи необходимо знать вектор состояния $X(t)$.

Последний же оценивается с помощью наблюдающих устройств. В связи с этим реализация рассматриваемого принципа тесно связана с задачей получения приемлемой оценки вектора состояния.

Существует направление в теории автоматического управления, изучающее вопросы построения наблюдающих устройств. В этом направлении рассматриваются критерии идентифицируемости, асимптотические наблюдающие устройства, идентификаторы Люенбергера и др. Приведем лишь некоторые сведения об асимптотических идентификаторах состояния (см. том 2).

Асимптотическое наблюдающее устройство определяется векторно-матричным дифференциальным уравнением

$$\dot{\hat{X}}(t) = A\hat{X}(t) + BU(t) + L(X_b(t) - C\hat{X}_b(t)), \quad \hat{X}_b(0) = \hat{X}_b^0. \quad (4.27)$$

Входными воздействиями здесь являются измеряемый выход $\hat{X}_b(t) = CX(t)$ и вход $U(t)$.

Если матрицы A^T и C^T невырождены, то матрица L может быть выбрана так, что будет выполняться условие

$$\hat{e}(t) = |X(t) - \hat{X}(t)| \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$$

при любой ограниченной начальной ошибке.

В векторно-матричном уравнении (4.27) появление последнего слагаемого $L(X_b(t) - C\hat{X}_b(t))$ связано с обеспечением работоспособности идентификатора при неизвестном начальном состоянии X^0 .

Идентификатор может быть реализован на интеграторах и усилительных элементах.

Полезен и следующий факт [87]: если оценка вектора состояния $\hat{X}(t)$ находится как решение уравнения (4.27) и объект

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BU(t); \quad X(t) = CX(t); \quad X(0) = X^0$$

замкнут обратной связью

$$U(t) = -K\hat{X}(t),$$

то при выполнении условий

$$\text{rank}\{B \ AB \dots A^{n-1}B\} = n \text{ и } \text{rank}\{C^T \ A^T C^T \dots (A^T)^{n-1} C^T\} = n$$

возможен выбор матриц K и L таких, что замкнутая система будет устойчивой.

Структурная схема стабилизированного объекта представлена на рис. 4.10.

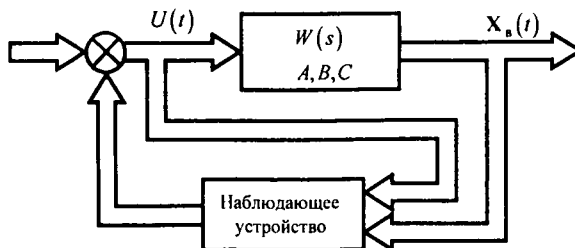


Рис. 4.10. Структурная схема стабилизированного объекта

Пример 4.2. Рассмотрим задачу стабилизации объекта управления [69]. Пусть многомерный объект описывается уравнением вида

$$\dot{X} = AX + BU,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1,0 & 0,0438 & 0 \\ -1,2155 & -0,7923 & 0,1306 & 0 & 0 \\ 0,4304 & 0,021 & -0,0152 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,0402 & 1,5671 \\ 0,3807 & -0,0671 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристическое уравнение матрицы A определяется формулой

$$\Delta(\lambda) = \lambda^5 + C_4\lambda^4 + C_3\lambda^3 + C_2\lambda^2 + C_1\lambda + C_0.$$

Корни характеристического уравнения:

$$\lambda_1 = -0,95; \lambda_2 = 0,59; \lambda_3 = -0,45; \lambda_4 = -0,06; \lambda_5 = 0.$$

Из анализа корней очевидно, что объект неустойчив и его необходимо стабилизировать.

Построим линейную обратную связь по состоянию

$$U = -KX$$

такую, чтобы имел место следующий характеристический многочлен (некоторый гурвицев полином стандартного вида):

$$\Delta(\lambda) = \lambda^5 + 2,8\lambda^4 + 5,0\lambda^3 + 5,5\lambda^2 + 3,4\lambda + 1. \quad (4.28)$$

Корни последнего полинома представляют желаемый спектр Δ^* замкнутой системы

$$\Delta^* = \{-0,895, -0,376 \pm j1,292, -0,576 \pm j0,534\}.$$

Матрица K выбирается из следующего условия: она должна иметь минимальную первую норму

$$\|K\|_1 = \min_{1 \leq j \leq 5} \sum_{i=1}^2 |k_{ij}|. \quad (4.29)$$

Пользуясь алгоритмом, изложенным в [69], получим следующую матрицу:

$$K = \begin{pmatrix} 5,864 & -0,536 & 2,23 & 0,098 & 0,0 \\ 6,817 & 0,806 & 2,79 & 1,019 & -5,78 \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

С помощью введения обратной связи по состоянию корни характеристического уравнения перемещаются следующим образом:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -0,95 \rightarrow \lambda_1^* = -0,895; \\ \lambda_2 &= 0,59 \rightarrow \lambda_2^* = -0,376 + j1,209; \\ \lambda_3 &= -0,45 \rightarrow \lambda_3^* = -0,376 - j1,209; \\ \lambda_4 &= -0,006 \rightarrow \lambda_4^* = -0,576 + j0,534; \\ \lambda_5 &= 0,0 \rightarrow \lambda_5^* = -0,576 - j0,534. \end{aligned}$$

Матрица стабилизированной системы будет иметь вид

$$\tilde{A} = A - BK. \quad (4.31)$$

Матрицы A , B , K — известны. В [69] показано, что матрица

$$K = \begin{pmatrix} -48,35 & 7,089 & 4,1 & 4,67 & 54,294 \\ 3,221 & -0,828 & -0,014 & 0,328 & 5,273 \end{pmatrix}$$

также решает задачу стабилизации, но последняя матрица имеет большее значение нормы (4.29), чем матрица (4.30).

Далее положим, что объект управления является асимптотически устойчивым. Изложим некоторые положения, касающиеся развязки каналов.

Связь между входом и выходом объекта задана формулой

$$\begin{pmatrix} X_1^B(s) \\ X_2^B(s) \\ \vdots \\ X_n^B(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) & \dots & W_{1n}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) & \dots & W_{2n}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1}(s) & W_{n2}(s) & \dots & W_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{pmatrix}. \quad (4.32)$$

Рассмотрим 1-й выход объекта

$$X_1^a(s) = W_{11}(s)U_1(s) + \dots + W_{1n}(s)U_n(s). \quad (4.33)$$

В многомерных объектах 1-й выход определяется 1-м входом (основным входом), и, кроме этого, на 1-й выход оказывают возмущающее воздействие 2-й, ... и, наконец, n -й вход.

Независимость выходных переменных от других входов, кроме соответствующих входных воздействий, т.е. $u_i(t) \rightarrow x_i(t)$, $i = \overline{1, n}$ означает, что передаточные функции перекрестных каналов должны обращаться в нуль.

Таким образом, *необходимым и достаточным условием автономности* (независимости каналов) *является диагональность передаточной матрицы объекта*, т.е. должна иметь место зависимость [1]

$$\begin{pmatrix} X_1^a(s) \\ X_2^a(s) \\ \vdots \\ X_n^a(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{22}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{nn}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ \vdots \\ U_n(s) \end{pmatrix}. \quad (4.34)$$

В реальных же системах перекрестные связи отличны от нуля и, следовательно, качество работы каждого канала зависит как от свойств собственно канала, так и от характера перекрестных связей.

В связи с этим при постановке задачи синтеза регуляторов в многомерных системах предъявляются требования не только к процессам в каждом основном канале, но и требования, регламентирующие взаимные влияния каналов.

На практике применяются несколько путей «развязки» каналов.

Один из них — создание специальных устройств (компенсаторов), которые включаются на входе многомерного объекта. Передаточные функции компенсаторов (устройств динамической развязки каналов) выбираются таким образом, чтобы получить или строго диагональные передаточные матрицы, или матрицы с доминирующей в том или ином смысле диагональю. Матрица с доминирующей диагональю позволяет ослабить взаимодействие между контурами управления. Условие диагональной доминантности можно записать так [1]:

$$|W_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |W_{ij}(s)|; \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.35)$$

или

$$|W_{ii}(s)| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |W_{ji}(s)|; \quad i = \overline{1, m} \quad (4.36)$$

для всех $s \in D$.

Например, если $i = 1$, то условием диагональной доминантности является неравенство

$$|W_{11}(s)| > |W_{12}(s)| + |W_{13}(s)| + \dots + |W_{1n}(s)|, \quad (4.37)$$

или

$$|W_{11}(s)| > |W_{21}(s)| + |W_{31}(s)| + \dots + |W_{n1}(s)|. \quad (4.38)$$

Матрицы, удовлетворяющие условиям (4.36) и (4.37), называются *диагонально-доминантными матрицами* [1].

Степень связности в многомерных объектах может быть охарактеризована и другими способами. Одним из таких способов является использование матрицы Бристоля [103]. Эта матрица определяет степень связности в статике и имеет вид

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \dots & \lambda_{1n} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \dots & \lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{n1} & \lambda_{n2} & \dots & \lambda_{nn} \end{pmatrix}, \quad (4.39)$$

где

$$\lambda_{ij} = \frac{(\partial x_i / \partial u_j) \text{ все контуры разомкнуты}}{(\partial x_i / \partial u_j) \text{ все контуры замкнуты, кроме } u_j, i, j = \overline{1, n}}.$$

Здесь λ_{ij} определяется как отношения производных: числитель — производная установившегося значения выхода x_i разомкнутой системы по управлению u_j ; знаменатель — производная установившегося значения выхода x_i замкнутой системы по тому же управлению u_j .

Если взаимное влияние каналов отсутствует, то как матричная передаточная функция разомкнутой системы, так и матричная передаточная функция замкнутой системы, связывающие вход $Y(t)$ и выход $X_b(t)$ системы, будут диагональными. Этот факт чрезвычайно важен с той точки зрения, что *каждый канал может корректироваться независимо от других каналов и, таким образом, могут быть использованы методы синтеза корректирующих устройств одномерных систем.*

Рассмотрим систему, показанную на рис. 4.11. Для нее можно записать следующие равенства [103]:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= Y(t) - X_b(t); \quad Z(s) = W_{\text{к}}(s) E(s); \\ U(s) &= W_{\text{к}}(s) Z(s); \quad X_b(s) = W_o(s) U(s). \end{aligned}$$

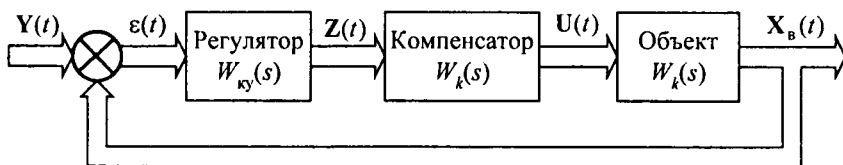


Рис. 4.11. Структурная схема системы

Отсюда следует

$$X_b(s) = W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) E(s). \quad (4.40)$$

Тогда, подставляя $E(s) = Y(s) - X_b(s)$ в последнюю зависимость, получим

$$\begin{aligned} X_b(s) &= W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) [Y(s) - X_b(s)] = \\ &= W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) Y(s) - W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) X_b(s). \end{aligned} \quad (4.41)$$

Из (4.41) следует

$$X_b(s) + W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) X_b(s) = W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) Y(s),$$

или, что то же самое,

$$[I + W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s)] X_b(s) = W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) Y(s). \quad (4.42)$$

Из последней формулы находим основную зависимость

$$X_b(s) = [I + W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s)]^{-1} W_o(s) W_{\text{к}}(s) W_{\text{к}}(s) Y(s). \quad (4.43)$$

Условием воспроизведения y имеет вид сигнала $Y(t)$ без ошибки (идеальная система), очевидно, является

$$[I + W_o(s) W_k(s) W_{ky}(s)]^{-1} W_o(s) W_k(s) W_{ky}(s) = I, \quad (4.44)$$

где I — единичная матрица.

Это тот идеальный случай, к которому стремятся приблизиться проектировщики систем управления.

Теперь с учетом (4.44) и предыдущих рассуждений рассмотрим выбор передаточной функции компенсатора.

Пусть передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} W_{11}^o(s) & W_{12}^o(s) & \dots & W_{1n}^o(s) \\ W_{21}^o(s) & W_{22}^o(s) & \dots & W_{2n}^o(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1}^o(s) & W_{n2}^o(s) & \dots & W_{nn}^o(s) \end{pmatrix}. \quad (4.45)$$

Передаточная функция регулятора является диагональной матрицей

$$W_{ky}(s) = \begin{pmatrix} W_{11}^{ky}(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{22}^{ky}(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{nn}^{ky}(s) \end{pmatrix}. \quad (4.46)$$

Ясно, что если передаточная функция последовательного соединения «компенсатор–объект» будет диагональной, то это будет означать, что каналы «развязаны», передаточные функции как разомкнутой, так и замкнутой систем будут иметь диагональный вид.

Задача состоит в том, что надо подобрать передаточную функцию компенсатора таким образом, чтобы было выполнено условие

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} W_{11}^o(s) & W_{12}^o(s) & \dots & W_{1n}^o(s) \\ W_{21}^o(s) & W_{22}^o(s) & \dots & W_{2n}^o(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1}^o(s) & W_{n2}^o(s) & \dots & W_{nn}^o(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11}^k(s) & W_{12}^k(s) & \dots & W_{1n}^k(s) \\ W_{21}^k(s) & W_{22}^k(s) & \dots & W_{2n}^k(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ W_{n1}^k(s) & W_{n2}^k(s) & \dots & W_{nn}^k(s) \end{pmatrix} = \\ & = \begin{pmatrix} W_{11}^o(s) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_{22}^o(s) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & W_{nn}^o(s) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

В последней формуле $W_o^p(s)$ — передаточная функция объекта с «развязанными» каналами.

Перепишем (4.47) в виде

$$W_o(s) W_k(s) = \text{diag } W_o(s) = W_o^p(s). \quad (4.48)$$

Зависимость (4.48) сразу же позволяет найти передаточную функцию компенсатора

$$W_k(s) = W_o^{-1}(s) \text{diag } W_o(s). \quad (4.49)$$

Критический анализ изложенного подхода проведем на конкретном примере.

Пример 4.3. Пусть передаточная функция объекта имеет вид [103]

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} \frac{0,7}{1+9s} & 0 & 0 \\ \frac{2,0}{1+8s} & \frac{0,4}{1+6s} & 0 \\ \frac{2,0}{1+10s} & \frac{2,3}{1+8s} & \frac{2,1}{1+7s} \end{pmatrix}. \quad (4.50)$$

Динамический компенсатор будем строить таким образом, чтобы последовательное соединение компенсатора и объекта имело диагональную матричную передаточную функцию

$$W_o^p(s) = \begin{pmatrix} \frac{0,7}{1+9s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{0,4}{1+6s} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2,1}{1+7s} \end{pmatrix}. \quad (4.51)$$

В соответствии с формулой (4.49) найдем обратную передаточную функцию объекта

$$W_o^{-1}(s) = \begin{pmatrix} \frac{1,43(1+9s)}{-7,14(1+9s)(1+6s)} & 0 & 0 \\ \frac{2,5(1+6s)}{1+8s} & 0 & 0 \\ \frac{7,82(1+9s)(1+6s)(1+7s)}{(1+8s)^2} - \frac{-1,56(1+9s)(1+7s)}{1+10s} & \frac{-2,74(1+6s)(1+7s)}{1+8s} & 0,48(1+7s) \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

Далее по формуле (4.49) находим передаточную функцию компенсатора

$$W_k(s) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{-7,14(1+9s)(1+6s)}{1+8s} & 1 & 0 \\ \frac{7,82(1+9s)(1+6s)(1+7s)}{(1+8s)^2} - \frac{-1,56(1+9s)(1+7s)}{1+10s} & \frac{-2,74(1+6s)(1+7s)}{1+8s} & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Структурная схема с динамическим компенсатором показана на рис. 4.12.

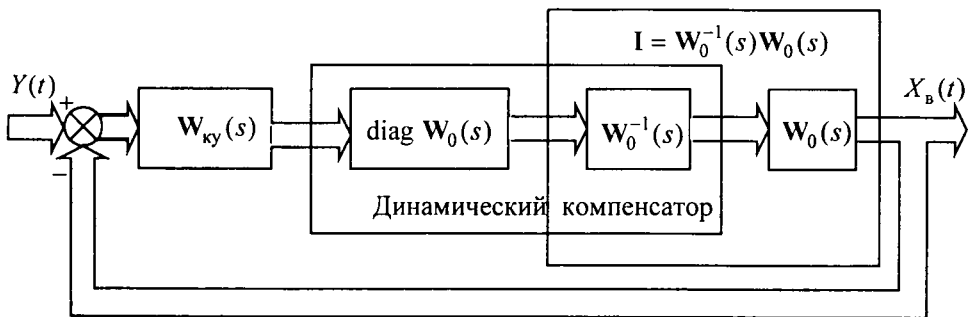


Рис. 4.12. Структурная схема системы с динамическим компенсатором

Передаточная функция замкнутой системы имеет вид

$$\begin{aligned} W(s) &= [I + W_o(s) W_o^{-1}(s) \text{diag } W_o(s) W_{ky}(s)]^{-1} \times \\ &\times W_o(s) W_o^{-1}(s) \text{diag } W_o(s) W_{ky}(s) = \\ &= [I + \text{diag } W_o(s) W_{ky}(s)] \text{diag } W_o(s) W_{ky}(s). \end{aligned} \quad (4.54)$$

Из последнего выражения видно, что $W_o^{-1}(s)W_o(s) = I$ и, таким образом, динамика объекта компенсирована обратной передаточной функцией, передаточная матрица прямой цепи является диагональной

$$W_p(s) = \text{diag } W_o(s)W_{ky}(s). \quad (4.55)$$

Передаточная матрица замкнутой системы также будет диагональной, и, следовательно, *синтез регуляторов можно проводить по каждому каналу самостоятельно, пользуясь теорией одномерных систем.*

Все недостатки принципа динамической компенсации рассматривались в главах 1 и 2, они же имеют место и в настоящем случае. Напомним их:

1. Подход требует точного знания передаточной матрицы объекта, что не всегда возможно.
2. Для реализации передаточной функции компенсатора необходимо иметь дифференцирующие звенья, которые точно физически не реализуются.
3. Если объект имеет звено запаздывания, то для реализации компенсатора необходимо иметь звенья опережения, которые так же, как и дифференцирующие звенья, точно не реализуются.
4. Если система работает в условиях помех, то дифференцирующие звенья будут усиливать их влияние.
5. Если передаточная функция объекта управления содержит нули в правой полуплоскости комплексной плоскости, то в компенсаторе эти нули оказываются неустойчивыми полюсами и их неточная компенсация приводит к тому, что в передаточной матрице замкнутой системы появляются неустойчивые полюса, что приводит к неустойчивости системы.

Часто для упрощения конструкции компенсатора применяют компенсацию в статическом режиме.

В этом случае компенсатор будет включать лишь безынерционные элементы (усилители). В самом деле, формула (4.49) будет иметь вид

$$W_k(0) = W_o^{-1}(0)\text{diag } W_o(0). \quad (4.56)$$

Пример 4.4 [103]. Рассмотрим пример для статического режима работы системы. Имеем

$$W_o(0) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0 \\ 2,0 & 0,4 & 0 \\ 2,3 & 2,3 & 2,1 \end{pmatrix};$$

$$\text{diag } W_o(0) = \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1 \end{pmatrix}.$$

Тогда, рассчитав передаточную функцию $W_o^{-1}(0)$, получим

$$W_o^{-1}(0) = \begin{pmatrix} 1,43 & 0 & 0 \\ -7,14 & 2,5 & 0 \\ 6,26 & -2,74 & 0,48 \end{pmatrix}.$$

Теперь легко найти передаточную матрицу компенсатора

$$W_k(0) = \begin{pmatrix} 1,43 & 0 & 0 \\ -7,14 & 2,5 & 0 \\ 6,26 & -2,74 & 0,48 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,7 & 0 & 0 \\ 0 & 0,4 & 0 \\ 0 & 0 & 2,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -7,14 & 1 & 0 \\ 6,26 & -2,74 & 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью компенсатора $W_k(0)$ оказываются скомпенсированными все перекрестные связи в статическом режиме. В переходном же режиме имеет место период заметного влияния динамических связей.

Построим структурную схему с динамическим компенсатором [103].

С учетом того что

$$\mathbf{W}_k(s) \mathbf{W}_{ky}(s) = \begin{pmatrix} W_{11}^k(s) & 0 & 0 \\ W_{21}^k(s) & W_{22}^k(s) & 0 \\ W_{31}^k(s) & W_{32}^k(s) & W_{33}^k(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11}^{ky}(s) & 0 & 0 \\ 0 & W_{22}^{ky}(s) & 0 \\ 0 & 0 & W_{33}^{ky}(s) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} W_{11}^k(s) W_{11}^{ky}(s) & 0 & 0 \\ W_{21}^k(s) W_{11}^{ky}(s) & W_{22}^k(s) W_{22}^{ky}(s) & 0 \\ W_{31}^k(s) W_{11}^{ky}(s) & W_{32}^k(s) W_{22}^{ky}(s) & W_{33}^k(s) W_{33}^{ky}(s) \end{pmatrix},$$

а также принимая во внимание зависимость

$$\mathbf{U}(s) = \mathbf{W}_k(s) \mathbf{W}_{ky}(s) \mathbf{E}(s),$$

т.е.

$$\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^k(s) W_{11}^{ky}(s) & 0 & 0 \\ W_{21}^k(s) W_{11}^{ky}(s) & W_{22}^k(s) W_{22}^{ky}(s) & 0 \\ W_{31}^k(s) W_{11}^{ky}(s) & W_{32}^k(s) W_{22}^{ky}(s) & W_{33}^k(s) W_{33}^{ky}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \\ \varepsilon_3(s) \end{pmatrix},$$

получаем

$$U_1(s) = W_{11}^k(s) W_{11}^{ky}(s) \varepsilon_1(s);$$

$$U_2(s) = W_{21}^k(s) W_{11}^{ky}(s) \varepsilon_1(s) + W_{22}^k(s) W_{22}^{ky}(s) \varepsilon_2(s);$$

$$U_3(s) = W_{31}^k(s) W_{11}^{ky}(s) \varepsilon_1(s) + W_{32}^k(s) W_{22}^{ky}(s) \varepsilon_2(s) + W_{33}^k(s) W_{33}^{ky}(s) \varepsilon_3(s).$$

Теперь легко изобразить структурную схему (рис. 4.13).

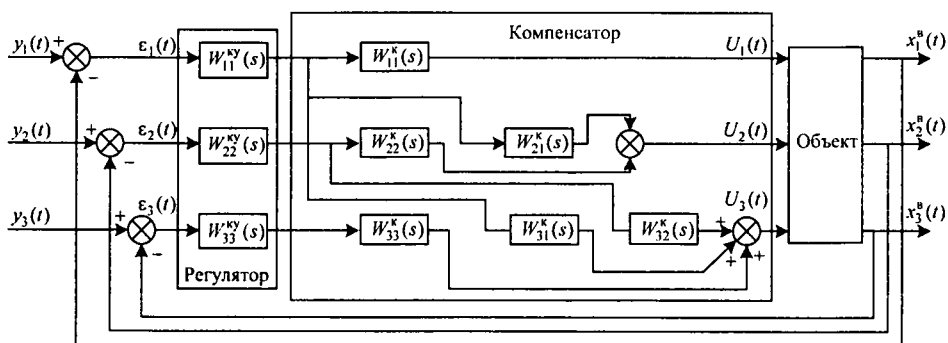


Рис. 4.13. Структурная схема трехмерной системы с компенсатором

Структурная схема системы со статическим компенсатором следует из схемы рис. 4.13 при $s = 0$.

В [69] предложен метод, позволяющий осуществить полную динамическую развязку всех скалярных компонент вектора выхода, при этом не используется компенсация передаточных полюсов и нулей объекта управления.

В соответствии с [69] к объекту со стороны его входа подключается специальное звено, названное *звеном динамической развязки* (естественно, при $t \rightarrow \infty$ и $s \rightarrow 0$ это звено может быть использовано и как развязка каналов в статическом режиме). Указанное звено состоит из двух блоков: стабилизации и диагонализации передаточной матрицы стабилизированного объекта, формирующего новые развязанные каналы регулирования.

Пример 4.5 [69]. Матричная передаточная функция объекта управления имеет вид

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 & \frac{1}{s+1} \\ \frac{1}{s+1} & \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{s+3} \end{pmatrix}.$$

Матричная передаточная функция диагонализатора запишется так:

$$W_k(s) = \begin{pmatrix} -s^2 - 2s - 2 & -1 \\ 2s^2 + 8s + 8 & -s - 2 \\ -s^2 - 6s - 10 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{s^2 + 8s + 15} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+7} \end{pmatrix}.$$

Передаточная функция последовательного соединения «диагонализатор–объект» имеет диагональную передаточную функцию

$$W_{k+o}(s) = \begin{pmatrix} \frac{-2s^2 - 8s - 12}{(s+1)(s^2 + 8s + 15)} & 0 \\ 0 & \frac{-s^2 - 4s - 6}{(s+1)(s+3)(s+7)} \end{pmatrix}.$$

Пример 4.6 [69]. Рассмотрим систему, описываемую уравнением вида

$$\dot{X} = AX + BU; \quad X_b = CX,$$

где

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T; \quad U = (u_1, u_2)^T; \quad X_b = (x_1^*, x_2^*)^T;$$

$$A = \begin{pmatrix} -0,16 & 0,177 & -0,984 & 0,104 \\ -18,191 & -1,162 & 0,82 & 0 \\ -0,158 & -0,04 & -0,279 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0,18 & 0 \end{pmatrix};$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0,02 \\ -14,131 & -0,554 \\ -0,432 & -0,966 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем многомерную передаточную матрицу объекта

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} \frac{-14,21s^2 - 6,56s - 6,4}{s^4 + 1,6s^3 + 3,65s^2 + 3,41s + 0,53} & \frac{0,38s^2 - 1,15s - 18,18}{s^4 + 1,6s^3 + 3,65s^2 + 3,41s + 0,53} \\ \frac{-2,08s^2 - 2,3s - 0,45}{s^4 + 1,6s^3 + 3,65s^2 + 3,41s + 0,53} & \frac{0,02s^3 + 1,08s^2 + 1,06s - 0,09}{s^4 + 1,6s^3 + 3,65s^2 + 3,41s + 0,53} \end{pmatrix}.$$

Передаточная функция блока диагонализации, найденная по методу [69], имеет вид

$$W_k(s) = \begin{pmatrix} \frac{-0,03s^3 - 1,58s^2 - 1,56s + 0,13}{s^3 + 3,41s^2 + 0,91s} & \frac{0,23s^2 - 0,69s - 10,95}{s^2 + 0,12s} \\ \frac{-3,05s^2 - 3,38s - 0,66}{s^3 + 3,41s^2 + 0,91s} & \frac{8,56s^2 + 3,95s + 3,86}{s^2 + 0,12s} \end{pmatrix}.$$

Введем обозначения:

$$W_o(s) = \begin{pmatrix} W_{11}^o(s) & W_{12}^o(s) \\ W_{21}^o(s) & W_{22}^o(s) \end{pmatrix}; \quad W_k(s) = \begin{pmatrix} W_{11}^k(s) & W_{12}^k(s) \\ W_{21}^k(s) & W_{22}^k(s) \end{pmatrix};$$

$$W_{ky}(s) = \begin{pmatrix} W_{11}^{ky}(s) & 0 \\ 0 & W_{22}^{ky}(s) \end{pmatrix}.$$

Тогда справедлива зависимость

$$U(s) = W_k(s) W_{ky}(s) E(s),$$

или в развернутом виде

$$\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^K(s) & W_{12}^K(s) \\ W_{21}^K(s) & W_{22}^K(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_{11}^{KY}(s) & 0 \\ 0 & W_{22}^{KY}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \end{pmatrix},$$

или, что то же самое,

$$\begin{pmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W_{11}^K(s)W_{11}^{KY}(s) & W_{12}^K(s)W_{22}^{KY}(s) \\ W_{21}^K(s)W_{11}^{KY}(s) & W_{22}^K(s)W_{22}^{KY}(s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_1(s) \\ \varepsilon_2(s) \end{pmatrix}.$$

Для каждой из компонент вектора управления можно записать:

$$\begin{aligned} U_1(s) &= W_{11}^K(s)W_{11}^{KY}(s)\varepsilon_1(s) + W_{12}^K(s)W_{22}^{KY}(s)\varepsilon_2(s); \\ U_2(s) &= W_{21}^K(s)W_{11}^{KY}(s)\varepsilon_1(s) + W_{22}^K(s)W_{22}^{KY}(s)\varepsilon_2(s). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Последние две формулы определяют структуру системы от сигнала ошибки $\varepsilon(t)$ до сигнала управления, поступающего на вход объекта. Эта структура показана на рис. 4.14 и 4.15.

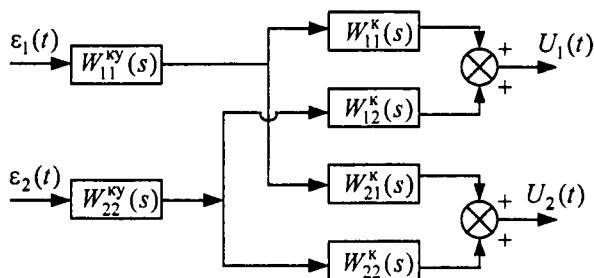


Рис. 4.14. Структурная схема корректирующего устройства с диагонализатором

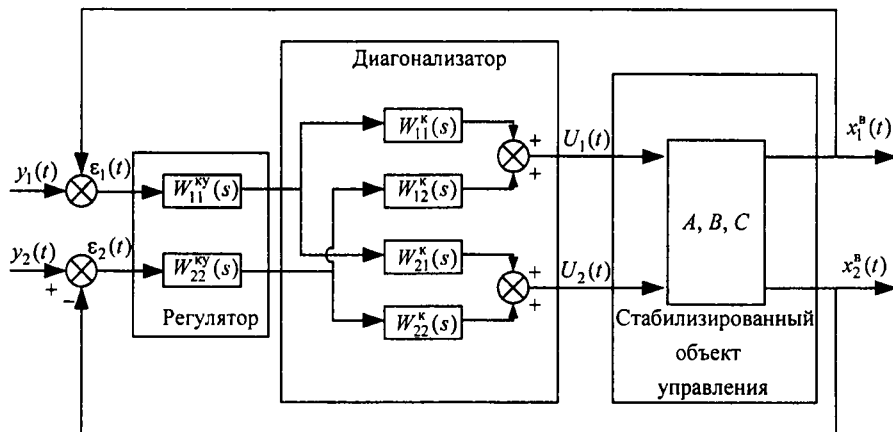


Рис. 4.15. Структурная схема двухмерной системы управления

4.4. МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА УСТРОЙСТВ РАЗВЯЗКИ КАНАЛОВ И РЕГУЛЯТОРОВ

Рассмотрим решение задачи синтеза компенсаторов и корректирующих устройств.

Неизвестными являются параметры корректирующих устройств (или коэффициенты дифференциальных уравнений, описывающих поведение корректирующих устройств).

Поскольку дифференциальные уравнения неизменяемой части и корректирующих устройств известны, то можно записать систему дифференциальных уравнений, связывающих векторный вход системы $Y(t)$ с ее векторным выходом $X_B(t)$. Естественно-

но, эта система уравнений включает неизвестные коэффициенты, определяющие поведение регуляторов. Их надо подобрать таким образом, чтобы обеспечить заданное качество управления в многомерной системе.

Положим, что двухмерная система описывается системой дифференциальных уравнений вида

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n a_v^{11} x_1^{(v)} + \sum_{v=0}^n a_v^{12} x_2^{(v)} &= \sum_{v=0}^m b_v^{11} y_1^{(v)} + \sum_{v=0}^m b_v^{12} y_2^{(v)}; \\ \sum_{v=0}^n a_v^{21} x_1^{(v)} + \sum_{v=0}^n a_v^{22} x_2^{(v)} &= \sum_{v=0}^m b_v^{21} y_1^{(v)} + \sum_{v=0}^m b_v^{22} y_2^{(v)}. \end{aligned} \quad (4.58)$$

В последней системе предполагается, что коэффициенты $a_v^{11}(p)$, $a_v^{12}(p)$, $b_v^{11}(p)$, $b_v^{12}(p)$, $a_v^{21}(p)$, $a_v^{22}(p)$, $b_v^{21}(p)$, $b_v^{22}(p)$ зависят от параметров компенсатора и регулятора; n — максимальный порядок линейных дифференциальных операторов L_{ij} , $i, j = \overline{1, 2}$; m — максимальный порядок линейных дифференциальных операторов $\tilde{L}_{ij}$, $i, j = \overline{1, 2}$.

Наложим ограничения на переходные процессы $h_{ii}(t)$, $i = \overline{1, 2}$ по всем каналам системы ($h_{ii}(t)$ ограничиваются такой же областью, как это принято в теории скалярных систем; параметры областей — свои для каждого канала). Наложим также ограничения на процессы $h_{ij}(t)$ (влияние входного сигнала $y_i(t)$ на выход $x_j^{(B)}(t)$). Качество многомерной системы тем выше, чем точнее по каждому выходу $x_i^{(B)}$, $i = \overline{1, 2}$ отрабатывается свой индивидуальный вход $y_i(t)$ и чем меньше влияют на него другие входы. Подадим на первый вход системы единичную ступенчатую функцию $y_1(t) = 1(t)$; при этом $y_2(t) \equiv 0$. На выходе получим реакции $h_{11}(t)$ и $h_{12}(t)$.

В эталонной системе должна иметь место следующая ситуация:

$$x_1(t) = h_{11}^3(t), \quad x_2(t) = h_{12}^3(t).$$

Тогда система уравнений (4.58) приближенно принимает вид

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n a_v^{11}(p) h_{11}^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^n a_v^{12}(p) h_{12}^{(v)}(t) &= \sum_{v=0}^m b_v^{11}(p) 1^{(v)}(t); \\ \sum_{v=0}^n a_v^{21}(p) h_{11}^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^n a_v^{22}(p) h_{12}^{(v)}(t) &= \sum_{v=0}^m b_v^{21}(p) 1^{(v)}(t). \end{aligned} \quad (4.59)$$

Последняя система уравнений является приближенной, если положить $h_{11}(t) = h_{11}^3(t)$, $h_{12}(t) = h_{12}^3(t)$, поскольку в общем случае невозможно подобрать параметры $p = (p_1, p_2, \dots, p_r)$ корректирующего фильтра, обеспечивающие равенство

$$x_1^{(B)}(t) = h_{11}^3(t), \quad x_2^{(B)}(t) = h_{12}^3(t).$$

Параметры корректирующего устройства необходимо подобрать таким образом, чтобы при подаче на первый вход сигнала $y_1(t) = 1(t)$ ее выходной сигнал $x_1^{(B)}(t)$ возможно меньше отличался от $h_{11}^3(t)$, а $x_2^{(B)}(t)$ — от $h_{12}^3(t)$.

Повторим приведенные выше рассуждения применительно ко второму входу, принимая $y_2(t) = 1(t)$ (при этом $y_1(t) \equiv 0$). На выходе получим реакции $h_{21}(t)$ и $h_{22}(t)$. В эталонной системе при соответствующем подборе параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$ должны быть выполнены условия

$$x_1(t) = h_{21}(t) \approx h_{21}^3(t), \quad x_2(t) = h_{22}(t) \approx h_{22}^3(t).$$

Можно записать следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \sum_{v=0}^n a_v^{11}(p) h_{21}^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^n a_v^{12}(p) h_{22}^{(v)}(t) &= \sum_{v=0}^m b_v^{12}(p) l^{(v)}(t); \\ \sum_{v=0}^n a_v^{21}(p) h_{21}^{(v)}(t) + \sum_{v=0}^n a_v^{22}(p) h_{22}^{(v)}(t) &= \sum_{v=0}^m b_v^{22}(p) l^{(v)}(t). \end{aligned} \quad (4.60)$$

От уравнений (4.59) и (4.60) перейдем к эквивалентным интегральным уравнениям и заменим $h_{ij}(t)$ на $h_{ij}^3(t)$. В этом случае получим соотношения

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(t, p) &= \int_0^T K_{11}^x(t, \tau, p) h_{11}^3(\tau) d\tau + \int_0^T K_{12}^x(t, \tau, p) h_{12}^3(\tau) d\tau - \int_0^T K_{11}^y(t, \tau, p) l(\tau) d\tau; \\ \varepsilon_2(t, p) &= \int_0^T K_{21}^x(t, \tau, p) h_{11}^3(\tau) d\tau + \int_0^T K_{22}^x(t, \tau, p) h_{12}^3(\tau) d\tau - \int_0^T K_{21}^y(t, \tau, p) l(\tau) d\tau; \\ \varepsilon_3(t, p) &= \int_0^T K_{11}^x(t, \tau, p) h_{21}^3(\tau) d\tau + \int_0^T K_{12}^x(t, \tau, p) h_{22}^3(\tau) d\tau - \int_0^T K_{12}^y(t, \tau, p) l(\tau) d\tau; \\ \varepsilon_4(t, p) &= \int_0^T K_{21}^x(t, \tau, p) h_{21}^3(\tau) d\tau + \int_0^T K_{22}^x(t, \tau, p) h_{22}^3(\tau) d\tau - \int_0^T K_{22}^y(t, \tau, p) l(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Важным является тот факт, что компенсатор и регулятор должны иметь такую структуру, подбор параметров которой $p_1, p_2, \dots, p_r$ должен обеспечить малость в известном смысле функций $\varepsilon_i(t, p)$, $i = \overline{1, 4}$.

Введем в рассмотрение функционал

$$I(p) = \int_0^T [\varepsilon_1^2(t, p) + \varepsilon_2^2(t, p) + \varepsilon_3^2(t, p) + \varepsilon_4^2(t, p)] dt. \quad (4.61)$$

Будем выбирать вектор параметров p таким образом, чтобы обеспечить минимум функционала (4.61), т.е.

$$I(p) \rightarrow \min_p$$

при соответствующих ограничениях.

Нахождение оптимальных значений параметров $p_1^*, p_2^*, \dots$ по указанному алгоритму обеспечивает приближение переходных процессов $h_{11}(t)$ и $h_{22}(t)$ в двухмерной системе к эталонным, т.е.

$$h_{11}(t) \approx h_{11}^3(t), \quad h_{22}(t) \approx h_{22}^3(t),$$

а также приближенную развязку каналов двухмерной системы (при этом предполагается, что корректирующее устройство обладает необходимыми возможностями). Если анализ скорректированной системы покажет, что качество ее работы является неудовлетворительным (в известном смысле), тогда необходимо использовать более сложные компенсаторы и регуляторы, обладающие большими возможностями как в плане реализации развязки каналов, так и в плане обеспечения качества переходных процессов по ее каналам и качества работы в установившемся режиме.

Проиллюстрируем сказанное на примере. Системы управления современных газотурбинных двигателей (ГТД) имеют несколько регулируемых параметров и обычно столько же регуляторов. Так, в авиационных однокаскадных турбореактивных двигателях (ТРД) регулируемыми величинами являются частота вращения вала n и тем-

пература газов перед турбиной T , требуемые значения которых поддерживаются соответственно изменением подачи топлива G и площади критического сечения реактивного сопла $F_{кр}$. При наличии форсажной камеры для сжигания топлива за турбиной число контуров регулирования увеличивается до трех. Добавится еще один регулируемый параметр — температура газов в форсажной камере и соответственно новое управляющее воздействие — расход топлива для сжигания в форсажной камере.

Введение корректирующих устройств в контур систем автоматического управления обеспечивает достижение заданных динамических свойств [50].

Приведем конкретные уравнения многомерного объекта. Так, ТРД без учета инерционных свойств газозвдушного тракта описывается уравнениями

$$\begin{aligned} T_g \dot{\varphi} + \varphi &= a_{n,T} \tau_3 + a_{n,F} f_{кр} + a_{n,\lambda_n} \lambda_n; \\ \tau_3 &= a_{T,G} \mu - a_{T,n} \varphi + a_{T,\lambda_T} \lambda_T, \end{aligned} \quad (4.62)$$

где

$$\tau_3 = \Delta T_3 / T_3; \quad \varphi = \Delta \omega / \omega; \quad f_{кр} = \Delta F_{кр} / F_{кр}; \quad \mu = \Delta G / G$$

— относительные изменения величин; λ_n и λ_T — внешние возмущения по частоте вращения и температуре; $a_{n,T} \dots a_{T,\lambda_T}$ — коэффициенты усиления. Применив преобразование Лапласа, получим

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= a_{n,T} W_T(s) \tau_3(s) + a_{n,F} W_p(s) F_{кр}(s) + a_{n,\lambda_n} W_\lambda(s) \lambda_n(s); \\ \tau_3(s) &= a_{T,G} W_{кc}(s) \mu(s) - a_{T,n} W_{кc}(s) \Phi(s) + a_{T,\lambda_T} W_{кc}(s) \lambda_T(s), \end{aligned} \quad (4.63)$$

где $W_T(s) = 1/(T_g s + 1)$; $W_{кc}(s) = 1$; $W_T(s) = W_p(s) = W_\lambda(s)$; $W_T(s)$ — передаточная функция ротора, $W_{кc}(s)$ — передаточная функция камеры сгорания.

Структурная схема объекта показана на рис. 4.16.

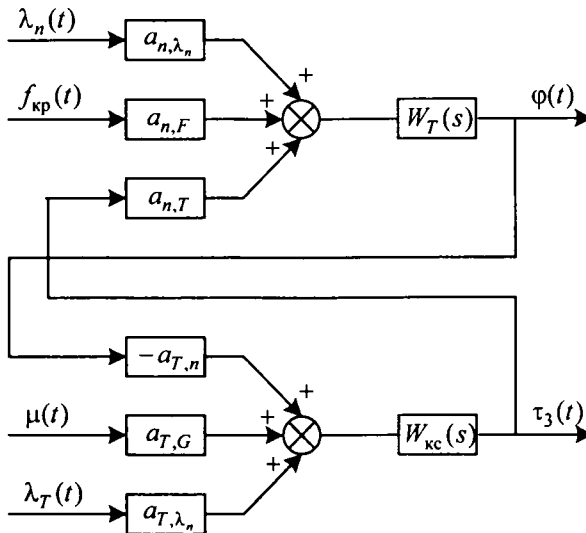


Рис. 4.16. Структурная схема двухмерного объекта управления (ТРД)

В качестве управляющего воздействия по частоте вращения можно использовать интенсивность подачи топлива (ΔG), а по температуре газов за камерой сгорания —

изменение площади критического сечения сопла ($\Delta F_{кр}$). Тогда передаточные функции регуляторов при наличии измерительного, усилительного и исполнительного устройств (их передаточные функции равны единице) обозначим через $W_{pT}(s)$ и $W_{pn}(s)$.

Структурная схема двухмерной системы, включающей регуляторы и неизменяемую часть (объект управления), показана на рис. 4.17.

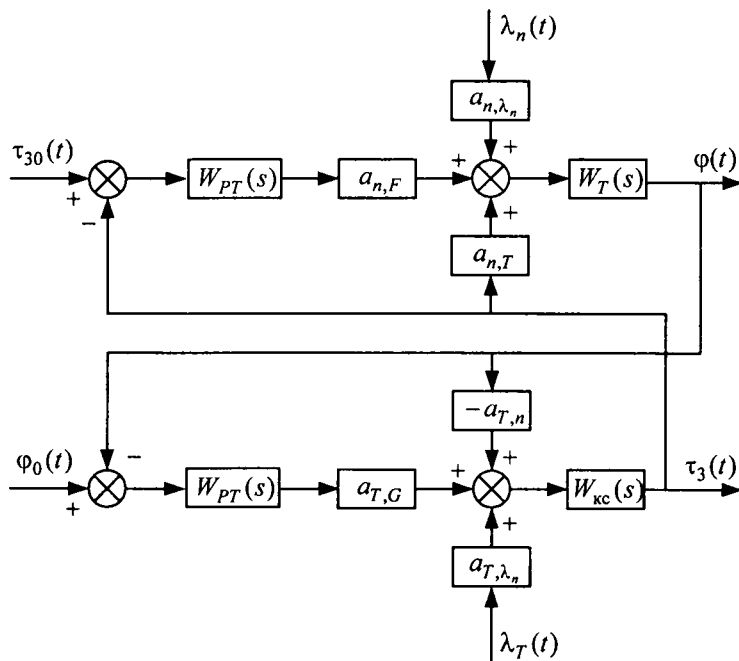


Рис. 4.17. Структурная схема системы управления турбореактивного двигателя

Задача синтеза регуляторов с передаточными функциями $W_{pT}(s)$ и $W_{pn}(s)$ заключается в выборе таких параметров $p_1, p_2, \dots, p_r$, которые обеспечили бы независимость каналов управления (развязка каналов) и требуемое качество переходных процессов по каждому каналу.

Пример 4.7. Проиллюстрируем применение метода на примере синтеза многомерной системы автоматического управления. Рассмотрим *двухканальную систему автоматического управления силовой установкой летательного аппарата* [69].

В двухмерной САУ двухконтурного форсированного турбореактивного двигателя (ТРДДФ) управляемыми переменными являются частота вращения η_1 ротора низкого давления и суммарная степень расширения газов на турбине $\pi_{т2}$, а управляющими переменными — расход топлива G_T в основной камере сгорания и площадь F_C выходного сечения реактивного сопла.

Математическая модель ТРДДФ задается матричной передаточной функцией следующего вида:

$$W(s) = \begin{pmatrix} \frac{3,4(0,4s+1)}{0,38s^2+1,1s+1} & \frac{6,8(0,55s+1)}{0,38s^2+1,1s+1} \\ \frac{0,18(1,13s+1)}{0,38s^2+1,1s+1} & \frac{0,9(1,1s+1)}{0,38s^2+1,1s+1} \end{pmatrix}.$$

Необходимо синтезировать корректирующее устройство, обеспечивающее заданное качество переходных процессов по каждому из каналов, а также их развязку.

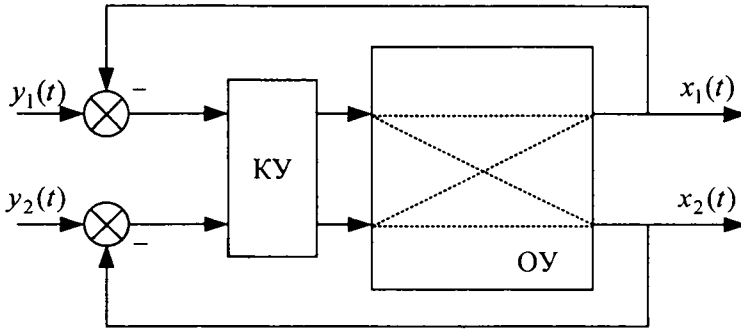


Рис. 4.18. Двухмерная система управления с регулятором

При этом к качеству системы по основным каналам предъявляются следующие требования:

- время установления $T_y \leq 2$ с;
- перерегулирование $\sigma = 0\%$;
- влияние перекрестных связей не более 5%.

Выберем следующую структуру устройства, которое будет совмещать регулятор и компенсатор:

$$W_{\text{ку}}(s) = \begin{pmatrix} p_1 + \frac{p_2}{s} + \frac{p_3 \cdot s}{0,1s + 1} & p_7 + \frac{p_8}{s} + \frac{p_9 \cdot s}{0,1s + 1} \\ p_4 + \frac{p_5}{s} + \frac{p_6 \cdot s}{0,1s + 1} & p_{10} + \frac{p_{11}}{s} + \frac{p_{12} \cdot s}{0,1s + 1} \end{pmatrix}.$$

Задача синтеза состоит в отыскании таких параметров $p = \{p_1, \dots, p_{12}\}$, при которых скорректированная система автоматического управления имеет качество, определяемое указанными выше требованиями.

Эталонные переходные процессы по основным каналам определим формулами

$$h_5^{11}(t) = h_5^{22}(t) = 1 - e^{-5/2t},$$

а их взаимное влияние определяется так: $h_5^{12}(t) = h_5^{21}(t) \approx 0$.

Для решения поставленной задачи синтеза применим метод порождающих функций, при этом в качестве порождающих функций будем использовать на интервале $\Omega = [0 \ 5]$ полиномы Лежандра. В функционал (4.61) включим 3 невязки.

В результате решения задачи условной минимизации (условия накладывались на физическую реализуемость регулятора) были получены следующие значения параметров регулятора:

$$\begin{aligned} p_1^* &= 0,95, & p_2^* &= 1,89, \\ p_3^* &= 0,001, & p_4^* &= -0,05, \\ p_5^* &= -0,5, & p_6^* &= -0,01, \\ p_7^* &= -3,5, & p_8^* &= -7,51, \\ p_9^* &= 0, & p_{10}^* &= 1,21, \\ p_{11}^* &= 3,72, & p_{12}^* &= 0,001. \end{aligned}$$

Анализ переходных процессов по каждому из каналов скорректированной системы показывает, что полученное решение удовлетворяет поставленным требованиям:

- 1) если $y_1 = 1(t)$, $y_2(t) = 0$, то
 - время управления $T_y \approx 1$ с,
 - перерегулирование $\sigma \approx 0\%$,
 - влияние на канал $x_2 \approx 3,1\%$;
- 2) если $y_2 = 1(t)$, $y_1(t) = 0$, то
 - время управления $T_y \approx 1,1$ с,
 - перерегулирование $\sigma \approx 0\%$,
 - влияние на канал $x_2 \approx 4,7\%$.

Переходные характеристики скорректированной системы представлены на рис. 4.19 и 4.20.

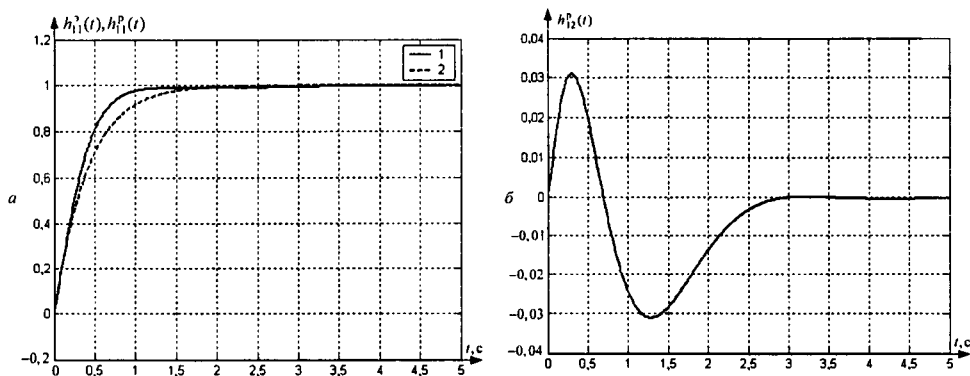


Рис. 4.19. Графики реакций системы по первому (а: 1 — реальная, 2 — эталонная) и второму (б) каналам при подаче на вход y_1 и y_2 сигналов $y_1(t) = 1(t)$, $y_2(t) = 0$

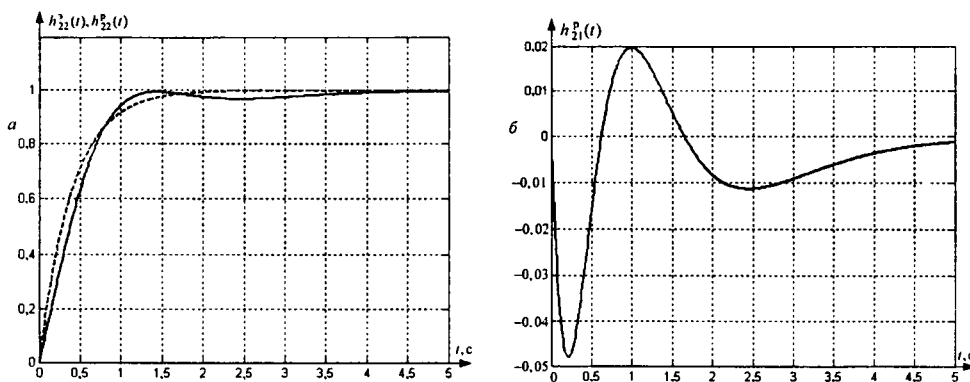


Рис. 4.20. Графики реакций системы по первому (а: 1 — реальная, 2 — эталонная) и второму (б) каналам при $y_1(t) = 0$, $y_2(t) = 1(t)$

4.5. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В данном параграфе изложены основные принципы модального управления.

4.5.1. Постановка задачи

Задача синтеза систем управления является одной из важнейших в теории управления. Среди многочисленных подходов к решению поставленной проблемы рассмотрим метод, использующий результаты линейной алгебры, а именно: синтез на основе модального управления. *Модальное управление* (синтез модальных регуляторов) можно определить как задачу управления, в которой изменяются моды (собственные числа матрицы объекта) с целью достижения желаемых целей управления. При этом необходимо определить матрицу коэффициентов K динамической обратной связи, обеспечивающей замкнутой системе требуемое расположение мод.

Часто управляемые объекты имеют лишь небольшое число собственных чисел, которые с помощью обратной связи требуется сдвинуть в желаемые точки, оставляя остальные собственные числа без изменения. В этом случае говорят об управлении отдельными модами. Этот сдвиг подчас проще вычислить и обеспечить, чем реализо-

вать сдвиг всех характеристических чисел объекта. Такого рода задачи часто возникают при управлении многомерными объектами.

При синтезе важную роль играет информация о векторе состояния объекта. Вначале будут рассмотрены алгоритмы модального управления с полностью измеряемым вектором состояния, а затем выявлены особенности, которые вносит наблюдатель при неполных измерениях. Нельзя не отметить и различия в алгоритмах синтеза скалярного и векторного управлений, о которых будет сказано ниже.

Рассмотрим формальную постановку задачи модального управления при *полностью измеряемом векторе состояния*.

Пусть $G_s = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_s^*\}$, $s \leq n$ — произвольный набор комплексных чисел, в котором каждое комплексное число представлено вместе со своим сопряженным. Пусть $\Lambda_A = \{\lambda_1, \dots, \lambda_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n\}$ — спектр матрицы A линейной системы управления

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BY(t), \quad X \in R^n, Y \in R^m. \quad (4.64)$$

Пусть $\Lambda^* = \{G_s, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n\} = \{\lambda_1^*, \dots, \lambda_s^*, \lambda_{s+1}, \dots, \lambda_n\}$ — некоторый желаемый спектр, сформированный из набора G_s и $(n-s)$ корней матрицы A . Назовем систему (4.64) *модально управляемой* по отношению к желаемому спектру Λ^* , если существует матрица коэффициентов обратной связи K

$$Y(t) = KX(t) \quad (4.65)$$

размерности $m \times n$ такая, что матрица $(A + BK)$ замкнутой системы

$$\dot{X}(t) = (A + BK)X(t) \quad (4.66)$$

имеет спектр Λ^* .

Очевидно, что если $s < n$, т.е. когда необходимо перевести только часть корней, оставляя остальные на месте, не требуется, чтобы объект (4.64) обладал свойством полной управляемости. Достаточно, чтобы он был модально управляем, т.е. допускал бы закон управления $Y(t) = KX(t)$, изменяющий заданные моды объекта (4.64).

Если $s = n$ и система (4.64) модально управляема по отношению к любому спектру Λ^* , то она называется *полностью модально управляемой*.

Ясно, что полная модальная управляемость и управляемость системы (4.64) тесно связаны друг с другом, о чем свидетельствуют алгоритмы, которые будут рассмотрены ниже. И, более того, эти два понятия эквивалентны, о чем говорит следующая теорема.

Теорема 4.1. Пара матриц $\{A, B\}$ управляема тогда и только тогда, когда она полностью модально управляема.

Данная теорема говорит о том, что при полной управляемости можно получить любой наперед заданный желаемый спектр замкнутой системы, и наоборот, если можно выбором матрицы обратной связи K обеспечить любой желаемый спектр, то система (4.64) полностью управляема.

Рассмотрим отдельные алгоритмы модального управления.

4.5.2. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ ПОЛНОСТЬЮ ИЗМЕРЯЕМОМ ВЕКТОРЕ СОСТОЯНИЯ. УПРАВЛЕНИЕ ВСЕМИ МОДАМИ

4.5.2.1. СКАЛЯРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ($m = 1$)

Рассмотрим сначала случай скалярного управления, т.е. $B = b$, где b — n -мерный вектор-столбец. Для решения поставленной задачи модального управления (всеми модами) необходимо перейти от исходного описания объекта управления

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{b}y(t) \quad (4.67)$$

к преобразованной системе (новому базису)

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{X}}(t) + \tilde{\mathbf{b}}y(t), \quad (4.68)$$

причем матрица $\tilde{\mathbf{A}}$ является *сопровождающей матрицей* характеристического полинома $\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda)$ матрицы $\mathbf{A}$, т.е. если

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0, \quad (4.69)$$

то

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix}.$$

При этом $\tilde{\mathbf{b}} = [0 \ 0 \ \dots \ 1]^T$. Представление исходной системы в виде (4.68) называется каноническим представлением. Связь между описаниями (4.67) и (4.68) в случае полной управляемости объекта (4.67) определяется матрицей перехода $\mathbf{S}$

$$\tilde{\mathbf{X}} = \mathbf{S}\mathbf{X}, \quad (4.70)$$

где матрица $\mathbf{S}$ определяется из следующего соотношения:

$$\mathbf{S} = [\tilde{\mathbf{b}}, \tilde{\mathbf{A}}\tilde{\mathbf{b}}, \dots, \tilde{\mathbf{A}}^{n-1}\tilde{\mathbf{b}}] [\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{b}]^{-1} = \tilde{\mathbf{M}}_y \mathbf{M}_y^{-1}, \quad (4.71)$$

где $\tilde{\mathbf{M}}_y$, $\mathbf{M}_y$ — соответственно матрицы управляемости в новом и старом базисах.

Напомним, что по условию полной управляемости $\det \mathbf{M}_y \neq 0$. Рассмотрим пример.

Пример 4.8. Пусть матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ объекта управления (4.67) имеют вид

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Ранг матрицы управляемости

$$\mathbf{M}_y = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}$$

равен 2, поэтому для $\mathbf{A}$ и $\mathbf{b}$ существует каноническое представление. Найдем матрицу преобразования $\mathbf{S}$. Характеристический полином для матрицы $\mathbf{A}$

$$\varphi_{\mathbf{A}}(\lambda) = \lambda^2 - 7\lambda - 2 = 0.$$

Тогда

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 7 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

и

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 2 & 14 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

При этом непосредственной проверкой получаем

$$\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{S}\mathbf{A}\mathbf{S}^{-1}, \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{S}\mathbf{b}.$$

После предварительных обсуждений мы можем сформулировать алгоритм модального управления.

Пусть линейная стационарная система (4.67) управляема и пусть

$$\varphi^*(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (4.72)$$

— произвольный нормированный полином с желаемым спектром Λ^* . Тогда существует вектор обратной связи $\tilde{\mathbf{K}} = [\tilde{K}_1 \dots \tilde{K}_n]^T$ такой, что замкнутая система в преобразованном виде

$$\dot{\tilde{\mathbf{X}}}(t) = [\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{K}}^T] \tilde{\mathbf{X}}(t) \quad (4.73)$$

имеет $\varphi^*(\lambda)$ своим характеристическим полиномом. Покажем это. Пусть

$$\varphi_A(\lambda) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

— характеристический полином матрицы $\mathbf{A}$. Поскольку по условию пара $\{\mathbf{A}, \mathbf{B}\}$ управляема, то, согласно рассмотренному выше представлению, существует базис, в котором эта пара имеет канонический вид $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\mathbf{b}}$. Выберем компоненты матрицы обратной связи по формуле

$$\tilde{K}_{i+1} = a_i - \alpha_i, \quad i = \overline{0, n-1}. \quad (4.74)$$

Подставляя выражение (4.74) в (4.73), получим

$$\begin{aligned} [\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{K}}^T] &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & -a_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \times \\ &\times [a_0 - \alpha_0, a_1 - \alpha_1, \dots, a_{n-1} - \alpha_{n-1}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -\alpha_0 & -\alpha_1 & -\alpha_2 & \dots & -\alpha_{n-1} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (4.75)$$

а это значит, что характеристический полином замкнутой системы

$$\varphi_{\tilde{\mathbf{A}} + \tilde{\mathbf{b}}\tilde{\mathbf{K}}^T}(\lambda) = \lambda^n + \alpha_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + \alpha_1\lambda + \alpha_0 \quad (4.76)$$

совпадает с полиномом $\varphi^*(\lambda)$.

Теперь необходимо найти связь между коэффициентами регулятора $\tilde{\mathbf{K}}$ в преобразованном базисе с коэффициентами $\mathbf{K}$ исходного. Используя соотношения (4.67), (4.68), (4.70) и учитывая, что $\mathbf{A} = \mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{S}$, $\mathbf{b} = \mathbf{S}^{-1}\tilde{\mathbf{b}}$, получим

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\tilde{\mathbf{K}}^T\mathbf{S})\mathbf{X}(t) = (\mathbf{A} + \mathbf{b}\mathbf{K}^T)\mathbf{X}(t), \quad (4.77)$$

откуда

$$\mathbf{K}^T = \tilde{\mathbf{K}}^T\mathbf{S}. \quad (4.78)$$

Итак, процедура синтеза модального регулятора в случае полностью управляемой системы со скалярным входом $u(t)$ следующая:

- 1) вычисляем матрицу перехода $\mathbf{S}$, связывающую исходную систему (4.67) с ее каноническим представлением (4.68) (формула (4.71));
- 2) находим коэффициенты модального регулятора $\tilde{\mathbf{K}}^T$ в преобразованном базисе (формула (4.74));
- 3) определяем коэффициенты обратной связи $\mathbf{K}^T$ для исходной системы (формула (4.78)).

Пример 4.9. Пусть уравнение состояния объекта управления 2-го порядка со скалярным управлением имеет вид

$$\dot{X}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} X(t) + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} y(t).$$

Необходимо синтезировать для заданной системы модальный регулятор, который бы обеспечивал замкнутой системе желаемый спектр $\Lambda^* = \{-3; -1\}$.

Решение.

1. Проверяем управляемость системы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_y = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 20 \end{bmatrix};$$

$\text{rank } M_y = 2 = n$, следовательно исходная система полностью управляема и для нее можно синтезировать требуемый регулятор.

2. Характеристический полином матрицы A

$$\varphi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 9\lambda - 10 = \lambda^2 + a_1\lambda + a_0;$$

$$\lambda_1 = 10; \lambda_2 = -1.$$

3. Сопровождающая матрица полинома $\varphi_A(\lambda)$

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 9 \end{bmatrix},$$

при этом

$$\tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \tilde{M}_y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix}.$$

4. Находим матрицу преобразования S согласно формуле (4.71)

$$S = \tilde{M}_y M_y^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 20 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{11}{35} & \frac{11}{35} \end{bmatrix}.$$

5. Определяем желаемый характеристический полином

$$\varphi^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*)(\lambda - \lambda_2^*) = (\lambda + 3)(\lambda + 1) = \lambda^2 + 4\lambda + 3 = \lambda^2 + \alpha_1\lambda + \alpha_0.$$

6. Вычисляем коэффициенты регулятора для преобразованной системы $\tilde{K}^T = [\tilde{K}_1 \quad \tilde{K}_2]$:

$$\tilde{K}_1 = a_0 - \alpha_0 = -10 - 3 = -13,$$

$$\tilde{K}_2 = a_1 - \alpha_1 = -9 - 4 = -13.$$

7. Находим коэффициенты модального регулятора в исходном базисе

$$K^T = \tilde{K}^T S = \begin{bmatrix} -13 & -13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{35} & \frac{2}{35} \\ \frac{11}{35} & \frac{11}{35} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{26}{7} & -\frac{39}{7} \end{bmatrix}.$$

8. Проверяем, что замкнутая система имеет требуемый спектр. Имеем

$$A + bK^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{26}{7} & -\frac{39}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{45}{7} & \frac{57}{7} \\ \frac{16}{7} & \frac{17}{7} \end{bmatrix}.$$

Убеждаемся, что $\varphi_{A+bK^T}(\lambda) = \lambda^2 + 4\lambda + 3$ и $\Lambda_{A+bK^T} = \{-3; -1\} = \Lambda^*$, т.е. регулятор спроектирован верно.

Замечание. Здесь и далее всюду под обозначением L^T понимается транспонированная матрица, если L — матрица, и вектор-строка — если L — вектор-столбец.

4.5.2.2. ВЕКТОРНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

В этом случае задача модального управления имеет, в общем, неединственное решение и при этом могут быть предложены различные алгоритмы вычисления матрицы K . Один из подходов предполагает приведение системы с многомерным

управлением к одномерному. Назовем этот подход *алгоритмом 1*. Он состоит из трех частей.

Алгоритм 1

Находим матрицу обратной связи K_j размерности $m \times n$ такую, чтобы система

$$\dot{X}(t) = (A + BK_j)X(t) + b_j y_j(t) \quad (4.79)$$

(где b_j — n -мерный j -й столбец ($j = \overline{1, m}$) матрицы B , y_j — j -я компонента вектора управления Y) была полностью управляема. Для этого необходимо и достаточно, чтобы пара $\{A + BK_j; b_j\}$ была управляемой и любые две жордановы клетки матрицы A имели различные собственные значения. Далее предполагается, что это условие выполнено, так как в противном случае скалярное управление недостаточно и необходимо увеличивать размерность управления. Для существования такой матрицы K_j необходимо и достаточно, чтобы пара $\{A, B\}$ была полностью управляема и $b_j \neq 0$.

Без потери общности можно рассмотреть случай $j = 1$ (об особенностях алгоритма для $j \neq 1$ будет сказано ниже).

Для нахождения матрицы K_1 сформируем матрицу управляемости

$$M_y = [b_1, \dots, b_m, Ab_1, \dots, Ab_m, \dots, A^{n-1}b_1, \dots, A^{n-1}b_m]. \quad (4.80)$$

Выберем из $n \times m$ столбцов этой матрицы n линейно независимых. Такие независимые столбцы матрицы M_y существуют в силу полной управляемости объекта (4.67). Имеется несколько способов такого выбора. Рассмотрим один из них. Будем перебирать столбцы $b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1$ до тех пор, пока вектор $A^{v_1}b_1$ не будет выражаться в виде линейной комбинации векторов $b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1$. Эта процедура легко реализуется проверкой соотношений:

$$\text{rank } B_1 = \text{rank} [b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1] = v_1, \quad (4.81)$$

$$\text{rank} [b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1}b_1] = v_1. \quad (4.82)$$

Если $v_1 = n$, то объект (4.67) полностью управляем с помощью управления $y_1(t)$, и тогда переходят ко второй части *алгоритма 1*. Если $v_1 < n$, то будем последовательно присоединять к полученному набору (4.81) столбцы матрицы

$$B_2 = [b_2, Ab_2, \dots, A^{v_2-1}b_2]$$

до тех пор, пока вектор $A^{v_2}b_2$ не будет выражаться как линейная комбинация векторов $b_1, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, b_2, Ab_2, \dots, A^{v_2-1}b_2$, т.е.

$$\text{rank} [B_1; B_2] = v_1 + v_2, \quad (4.83)$$

$$\text{rank} [B_1; B_2; A^{v_2}b_2] = v_1 + v_2. \quad (4.84)$$

Если $v_1 + v_2 < n$, продолжается процедура присоединения к полученному набору $[B_1; B_2]$ векторов $b_3, Ab_3, \dots, A^{v_3-1}b_3$ и т.д.

Предположим, что для некоторого v_3 имеем $v_1 + v_2 + v_3 = n$, т.е. получена совокупность n линейно независимых векторов матрицы управляемости (4.80) и, следовательно, матрица

$$T = [b_1, \dots, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, b_2, \dots, Ab_2, \dots, A^{v_2-1}b_2, b_3, \dots, Ab_3, \dots, A^{v_3-1}b_3], T \subseteq M_y \quad (4.85)$$

невырождена ($\det T \neq 0, \dim T = n \times n$).

Сформируем матрицу P размерности $m \times n$ следующим образом:

$$P = [0, 0, \dots, 0, e_2, 0, \dots, 0, e_3, 0, \dots, 0], \quad (4.86)$$

где e_2 — v_1 -й столбец, e_3 — $(v_1 + v_2)$ -столбец этой матрицы, общее число которых равно $v_1 + v_2 + v_3 = n$, а через e_i ($i = 2, 3$) обозначен i -й столбец единичной матрицы размерности $m \times m$.

Теперь искомая матрица K_1 может быть найдена из выражения

$$K_1 = -PT^{-1}. \quad (4.87)$$

Для того чтобы показать, что полученная матрица (4.87) определяет управляемую пару $\{A + BK_1; b\}$, перепишем матрицу $P = -K_1T$ в виде

$$\begin{aligned} P &= -K_1 [b_1, \dots, Ab_1, \dots, A^{v_1-1}b_1, b_2, \dots, Ab_2, \dots, A^{v_2-1}b_2, b_3, \dots, Ab_3, \dots, A^{v_3-1}b_3] = \\ &= [0, 0, \dots, 0, e_2, 0, \dots, 0, e_3, 0, \dots, 0]. \end{aligned}$$

Это матричное равенство соответствует следующему набору векторных равенств:

$$\begin{cases} K_1 b_1 = 0, K_1 A b_1 = 0, K_1 A^2 b_1 = 0, \dots, -K_1 A^{v_1-1} b_1 = e_2, \\ K_1 b_2 = 0, K_1 A b_2 = 0, K_1 A^2 b_2 = 0, \dots, -K_1 A^{v_2-1} b_2 = e_3, \\ K_1 b_3 = 0, K_1 A b_3 = 0, K_1 A^2 b_3 = 0, \dots, -K_1 A^{v_3-1} b_3 = 0. \end{cases} \quad (4.88)$$

Используя векторные равенства (4.88), легко показать, что пара $\{A + BK_1; b\}$ управляема, т.е. векторы $b_1, [A + BK_1]b_1, \dots, [A + BK_1]^{n-1}b_1$ — линейно независимы.

Переходим ко второй части алгоритма 1.

2. Применяя к объекту управления

$$\dot{X}(t) = (A + BK_1)X(t) + b_1 y_1(t) \quad (4.89)$$

процедуру синтеза, рассмотренную ранее для скалярного управления, и вводя обратную связь для (4.89) в виде

$$b_1 y_1(t) = BG(t)X(t) = b_1 g_1^T X(t), \quad (4.90)$$

где матрица G имеет вид ($\dim G = m \times n$)

$$G = \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \dots & g_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

и $g_1^T = [g_{11} \ g_{12} \ \dots \ g_{1n}]$, получим

$$\dot{X}(t) = (A + BK_1 + BG)X(t). \quad (4.91)$$

Таким образом, полная матрица коэффициентов обратной связи K , т.е.

$$Y(t) = KX(t), \quad (4.92)$$

будет иметь вид

$$K = K_1 + G. \quad (4.93)$$

Приведенный алгоритм 1 представляется наиболее простым как с точки зрения компактности его изложения, так и с точки зрения удобства для практических вы-

числений. Однако при таком подходе исключается значительная часть решений, которая может быть получена при проектировании систем управления. Ниже будет рассмотрен алгоритм 2, который решает более общую задачу модального управления. Но сначала рассмотрим пример.

Пример 4.10 ($n=3$, $m=2$).

Пусть матрицы A и B имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Спектр матрицы A : $\Lambda_A = \{0; 1; 2\}$. Необходимо, если это возможно, синтезировать модальный регулятор так, чтобы спектр матрицы замкнутой системы $A + BK$ был равен $\Lambda^* = \{-1; -2; -3\}$.

Решение.

1. Проверяем управляемость системы:

$$M_y = [b_1, Ab_1, A^2b_1, b_2, Ab_2, A^2b_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$\text{rank } M_y = 3$, т.е. система полностью управляема и, значит, модально управляема.

2. Считаем, что будем управлять с помощью первого столбца b_1 матрицы B , поэтому из матрицы M_y выбираем 3 линейно независимых вектора, начиная с b_1 . Отсюда получаем $v_1 = 2$, $v_2 = 1$. Формируем матрицу T :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow T^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Формируем матрицу P (размерность 2×3):

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

где пунктирная черта отсекает часть координат единичных векторов, длина которых превышает размерность вектора управления ($m=2$).

4. Определяем матрицу K_1 :

$$K_1 = -PT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Матрица объекта с частично замкнутой обратной связью:

$$A^{(1)} = A + BK_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Спектр матрицы $A^{(1)}$ такой же, как у A , т.е.

$$\Lambda_{A^{(1)}} = \{0; 1; 2\}.$$

6. Приходим к объекту со скалярным управлением:

$$\dot{X}(t) = (A + BK_1)X(t) + b_1 u_1(t) = A^{(1)}X(t) + b_1 u_1(t).$$

7. Проверяем управляемость полученной системы:

$$M_y^{(1)} = \{b_1; A^{(1)}b_1; (A^{(1)})^2b_1\} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\text{rank } M_y^{(1)} = 3 \Rightarrow \text{пара } \{A^{(1)}, b_1\} \text{ управляема.}$$

8. Синтезируем матрицу коэффициентов обратной связи G :

а) Характеристический полином матрицы $A^{(1)}$:

$$\varphi_{A^{(1)}}(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 2\lambda = \lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda.$$

б) Сопровождающая матрица полинома $\varphi_{A^{(1)}}(\lambda)$:

$$\tilde{A}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}, \tilde{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

в) Желаемый характеристический полином:

$$\varphi^*(\lambda) = (\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = \lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6.$$

г) Матрица управляемости для пары $\{\tilde{A}^{(1)}, \tilde{b}\}$:

$$\tilde{M}_y = \{\tilde{b}, \tilde{A}^{(1)}\tilde{b}, (\tilde{A}^{(1)})^2\tilde{b}\} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}.$$

д) Находим матрицу S :

$$S = \tilde{M}_y (M_y^{(1)})^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

е) Вычисляем коэффициенты регулятора $\tilde{g}_1$ для преобразованной системы:

$$\tilde{g}_1^T = [\tilde{g}_{11}, \tilde{g}_{12}, \tilde{g}_{13}],$$

$$\tilde{g}_{11} = a_0 - \alpha_0 = 0 - 6 = -6,$$

$$\tilde{g}_{12} = a_1 - \alpha_1 = 2 - 11 = -9,$$

$$\tilde{g}_{13} = a_2 - \alpha_2 = -3 - 6 = -9.$$

ж) Матрица (строка) коэффициентов регулятора в исходном базисе:

$$g_1^T = \tilde{g}_1 S = \begin{bmatrix} -6 & -9 & -9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 24 & -27 \end{bmatrix}.$$

9. Формируем матрицу коэффициентов обратной связи G :

$$G = \begin{bmatrix} g_1^T \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 & 24 & -27 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Искомая матрица коэффициентов обратной связи:

$$K = K_1 + G = \begin{bmatrix} -9 & 24 & -27 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

11. Проверяем корни у матрицы замкнутой системы:

$$A + BK = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -9 & -24 & -27 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -24 & -26 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\Lambda_{A+BK} = \{-1; -2; -3\},$$

т.е. модальный регулятор спроектирован верно.

Замечание 4.1. В случае выбора произвольного столбца матрицы $B(b_j)$ в алгоритм 1 вносятся следующие изменения:

1) после проверки полной управляемости ($\text{rank } M_y = n$) формируют матрицу T ,

начиная с b_j до $A^{v_1-1}b_j$, затем идет столбец b_1 до $A^{v_2-1}b_1$ и т.д., пока

$v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$, где $k \leq m$;

2) матрица P выглядит следующим образом:

$$P = \begin{bmatrix} 0, 0, \dots, 0, e_1, 0, \dots, 0, e_2, 0, \dots, 0, e_{j-1}, 0, \dots, 0, e_{j+1}, 0, \dots, 0, e_k, 0, 0 \end{bmatrix},$$

где единичный вектор e_1 стоит на v_1 месте, e_2 — $(v_1 + v_2)$ и т.д. Если $c = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_i > m$, тогда все единичные орты, стоящие правее столбца e_i , будут нулевыми, так как единицы в них появляются ниже m -й строки (см. пример выше);

3) матрица G имеет вид

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ - & - & - & - \\ g_{j1} & g_{j2} & \dots & g_{jm} \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

причем $\dim G = m \times n$.

Теперь рассмотрим другой подход модального управления для $m > 1$.

Алгоритм 2

В данном алгоритме модального управления, где исходная система (4.67) имеет векторное управление ($m > 1$), используется каноническое преобразование замкнутой системы. Предположим, что система (4.67) полностью управляема и в желаемом спектре Λ^* выполняется условие $\lambda_j^* \neq \lambda_i$ для $i \neq j$, $i, j = \overline{1, n}$, т.е. жордановые клетки матрицы замкнутой не имеют одинаковых собственных значений. Кроме того, естественно потребовать, чтобы матрица B была матрицей полного ранга, т.е. $\text{rank } B = m$.

Напомним некоторые определения. Вектор R_j (соответственно L_j) называется *правым (левым) собственным вектором* матрицы A , если справедливы соотношения

$$AR_j = \lambda_j R_j, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.94)$$

$$L_j^T A = \lambda_j L_j^T, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.95)$$

где λ_j — собственное значение матрицы A . Сформируем 2 матрицы

$$R = [R_1, R_2, \dots, R_n]$$

и

$$L = \begin{bmatrix} L_1^T \rightarrow \\ \dots \\ L_n^T \rightarrow \end{bmatrix},$$

которые соответственно состоят из правых и левых собственных векторов, причем эти матрицы связаны условием

$$LR = RL = I, \quad (4.96)$$

где I — единичная матрица размерности $n \times n$.

Стрелка $\rightarrow$ подчеркивает, что левый собственный вектор L_j в матрицу L входит вектор-строкой.

Пусть $\Theta = \text{diag}\{\lambda_1 \dots \lambda_n\}$ — диагональная матрица, состоящая из собственных чисел матрицы A . Тогда выражения (4.94), (4.95) можно записать следующим образом:

$$R\Theta = AR, \quad (4.97)$$

$$\Theta L = LA. \quad (4.98)$$

Умножая (4.97) слева на L , а (4.98) на R , с учетом (4.96) получим следующие соотношения:

$$\theta = LAR, \quad (4.99)$$

$$R\theta L = A. \quad (4.100)$$

Из формул (4.97)–(4.100) получим для исходной системы (4.67) преобразованную. Сделав замену переменных

$$X = R\tilde{X}, \quad (4.101)$$

подставляя в (4.67) и учитывая из (4.96), что

$$L = R^{-1}, \quad (4.102)$$

имеем

$$\dot{\tilde{X}}(t) = \theta \tilde{X}(t) + LB Y(t). \quad (4.103)$$

Из условий управляемости следует, что в каждой строке матрицы LB существует хотя бы один ненулевой элемент. Ненулевые элементы в строке $L_j^T B$ информируют нас о том, какими управлениями из $y_1, y_2, \dots, y_m$, образующими вектор Y , можно изменять собственное значение λ_i матрицы A , соответствующее собственному вектору L_j .

Пусть $\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*$ — желаемые собственные значения замкнутой системы

$$\dot{X}(t) = (A + BK)X(t) \quad (4.104)$$

и $R_1^*, R_2^*, \dots, R_n^*$ — соответствующие им правые собственные векторы. Тогда для матрицы $A + BK$ замкнутой системы имеем

$$(A + BK)R_i^* = \lambda_i^* R_i^*, \quad (4.105)$$

или

$$(A - \lambda_j^* I)R_j^* = -B P_j^*, \quad j = \overline{1, n}, \quad (4.106)$$

где

$$P_j^* = K R_j^*, \quad j = \overline{1, n} \quad (4.107)$$

— столбец размерности $m \times 1$.

Из уравнений (4.106), (4.107) определим неизвестные собственные векторы $R_1^*, R_2^*, \dots, R_n^*$, предварительно задавшись столбцами $P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*$. Нахождение векторов R_j^* и P_j^* , $j = \overline{1, n}$ зависит от того, является ли желаемое собственное значение λ_j^* собственным значением матрицы A или нет. Поэтому рассмотрим каждый случай отдельно.

1. Желаемое собственное значение λ_j^* не является собственным значением матрицы

A , т.е. $\det(A - \lambda_j^* I) \neq 0$. Тогда взяв любой ненулевой столбец $P_j^* \neq 0$, но так, чтобы матрица P была матрицей полного ранга ($\text{rank } P = m$), и учитывая, что матрица B — матрица полного ранга ($\text{rank } B = m$), имеем

$$R_j^* = -(A - \lambda_j^* I)^{-1} B P_j^*, \quad j = \overline{1, n}, \quad P_j^* \neq 0. \quad (4.108)$$

2. λ_j^* является собственным значением матрицы A , т.е. $\det(A - \lambda_j^* I) = 0$. Тогда уравнение (4.106) будет иметь ненулевое решение относительно R_j^* , если ранг

ее исходной системы будет равен рангу расширенной (теорема Кронекера–Капелли), т.е.

$$\text{rank}(A - \lambda_j^* I) = \text{rank}(A - \lambda_j^* I; -B P_j^*). \quad (4.109)$$

Если L_j — левый собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_j^* , то, умножив слева (4.106) на L_j^T , получим

$$L_j^T (A - \lambda_j^* I) R_j^* = -L_j^T B P_j^*. \quad (4.110)$$

Учитывая (4.95), имеем

$$L_j^T A = \lambda_j^* L_j^T,$$

а

$$L_j^T (\lambda_j^* I) = \lambda_j^* L_j^T.$$

Тогда соотношение (4.110) примет вид

$$L_j^T B P_j^* = 0, \quad (4.111)$$

или

$$Q_j^T P_j^* = 0, \quad (4.112)$$

где $Q_j^T = L_j^T B$.

Таким образом, все m -столбцы P_j^* должны для этого случая удовлетворять соотношениям (4.112). В частности, здесь можно брать $P_j^* = 0$. Это означает, что при сохранении λ_j^* в спектре замкнутой системы сохраняется и соответствующий собственный вектор R_j^* . Для систем со скалярным управлением ($m = 1$) это имеет место всегда.

Получив весь набор собственных векторов R_j^* ($j = \overline{1, n}$) и столбцов P_j^* ($j = \overline{1, n}$), находим матрицу модального регулятора

$$K = P^* (R^*)^{-1}, \quad (4.113)$$

где $P^* = [P_1^*, P_2^*, \dots, P_n^*]$.

Рассмотрим пример, который был решен ранее с использованием алгоритма 1.

Пример 4.11 (Алгоритм 2) ($n = 3, m = 2$).

Итак, даны матрицы:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Спектр матрицы A : $\Lambda_A = \{0; 1; 2\}$. Желаемый спектр $\Lambda^* = \{-1; -2; -3\}$.

Пара $\{A, B\}$ управляема. Это уже было показано. Так как все собственные значения Λ_A и Λ^* различны, то для нахождения правых собственных векторов R_j^* ($j = 1, 2, 3$) используем формулу (4.105).

Пусть $P_j^* = [1 \ 0]^T$, $j = 1, 2$. Тогда для $\lambda_1^* = -1$ имеем

$$R_1^* = -(A - \lambda_1^* I)^{-1} B P_1^* = \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,6667 \\ 0 \\ 0,3333 \end{bmatrix}.$$

Аналогично для $\lambda_2^* = -2$ получим

$$\mathbf{R}_2^* = \begin{bmatrix} -0,375 \\ 0 \\ 0,125 \end{bmatrix}.$$

Для $\lambda_3^* = -3$ примем $\mathbf{P}_3^* = [0 \ 1]^T$, чтобы матрица $\mathbf{P}$ имела полный ранг 2. Тогда имеем

$$\mathbf{R}_3^* = \begin{bmatrix} 0 \\ -0,25 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{R}^* = \begin{bmatrix} -0,6667 & -0,375 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 \\ 0,3333 & 0,125 & 0 \end{bmatrix}.$$

Окончательно получим следующую матрицу коэффициентов:

$$\mathbf{K} = \mathbf{P}^* (\mathbf{R}^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,6667 & -0,375 & 0 \\ 0 & 0 & -0,25 \\ 0,3333 & 0,125 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Проверим полученный результат. Матрица системы с обратной связью:

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) = \begin{bmatrix} -4 & 0 & -6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Спектр $\Lambda_{\mathbf{A}+\mathbf{BK}} = \{-1; -2; -3\} = \Lambda^*$, т.е. модальный регулятор спроектирован верно.

4.5.3. УПРАВЛЕНИЕ ОТДЕЛЬНЫМИ МОДАМИ ПРИ ПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотрим задачу модального управления, в которой необходимо обеспечить сдвиг собственного значения λ_k матрицы $\mathbf{A}$ к λ_k^* , причем остальные собственные значения остаются без изменения. Такая техника полезна при решении таких задач, когда объект не является полностью управляемым, но он модально (по отношению к λ_k) управляем и может быть стабилизирован с помощью модальной обратной связи. Предположим, что все собственные значения матрицы $\mathbf{A}$ различны.

Алгоритм сдвига собственного значения λ_k к желаемому λ_k^* основан на следующей теореме.

Теорема 4.2. Для того чтобы в спектре матрицы $\mathbf{A}$ изменился корень λ_k , а все остальные собственные значения и правые собственные векторы, в том числе и $\mathbf{R}_k$, остались без изменения, необходимо и достаточно, чтобы строки матрицы модального регулятора $\mathbf{K}$ были пропорциональны левому собственному вектору $\mathbf{L}_k^T$ матрицы $\mathbf{A}$, т.е.

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_k \mathbf{L}_k^T, \quad (4.114)$$

где $\mathbf{F}_k$ — некоторый ненулевой столбец размерности $m \times 1$.

Доказательство. Нам необходимо показать, что существует непрерывный путь, соединяющий матрицу $\mathbf{A}$ с $\mathbf{A}^* = \mathbf{A} + \mathbf{BK}$, если матрица $\mathbf{K}$ определяется выражением (4.114), при этом $\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k^*$. Обозначим через $\mathbf{R}_k^{(1)} = \mathbf{R}_k$ правый собственный вектор собственных значений λ_k матрицы $\mathbf{A}$, а $\mathbf{R}_k^{(q)} = \mathbf{R}_k$ — соответственно матрицы $\mathbf{A}^*$ для λ_k^* ($q > 1$).

По определению

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \mathbf{R}_k^* = \lambda_k^* \mathbf{R}_k^*. \quad (4.115)$$

Умножим слева левую и правую части (4.115) на левый собственный вектор $\mathbf{L}_k^T$ матрицы $\mathbf{A}$

$$\mathbf{L}_k^T (\mathbf{A} + \mathbf{BK}) \mathbf{R}_k^* = \lambda_k^* \mathbf{L}_k^T \mathbf{R}_k^*. \quad (4.116)$$

Так как $L_k^T A = \lambda_k L_k^T$, имеем

$$(\lambda_k^* - \lambda_k) L_k^T R_k^* = L_k^T B K R_k^*. \quad (4.117)$$

Если в выражение (4.117) подставить формулу (4.114), то получим

$$(\lambda_k^* - \lambda_k) L_k^T R_k^* = L_k^T B F_k L_k^T R_k^*. \quad (4.118)$$

Когда $\lambda_k^* = \lambda_k$, то $R_k^* = R_k$ и $L_k^T R_k = 1$. Но тогда в правой части (4.118) имеем $F_k = 0$, что даст в соответствии с (4.114) $K = 0$.

При изменении $\lambda_k^* (\lambda_k^* \neq \lambda_k)$ произведение $L_k^T R_k^{(i)} = 1$ ($1 < i \leq q$) будет постоянным согласно (4.96). Соотношение (4.118) будет выполнено, если можно подобрать такой ненулевой столбец F_k , чтобы

$$\lambda_k^* - \lambda_k = L_k^T B F_k. \quad (4.119)$$

Это всегда можно сделать, если $L_k^T B \neq 0$, что имеет место при модальной управляемости по моде λ_k . Таким образом, при выборе структуры регулятора вида (4.114) все правые собственные вектора, включая R_k , остаются неизменными, мода λ_k сдвигается к значению λ_k^* , если столбец F_k для (4.114) определяется из условия (4.119).

Пример 4.12. Рассмотрим пример, когда не имеет место полная управляемость, но существует модальная управляемость. Итак, дано ($n = 3$, $m = 2$)

$$A = \begin{bmatrix} 0,8571 & 8,8571 & 9,000 \\ -0,8571 & -4,8571 & -3,000 \\ 0,5714 & 2,5714 & 1,000 \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,3 & -0,2631 \\ 0,2 & 0,0526 \end{bmatrix}.$$

Спектр матрицы A : $\Lambda_A = \{0; -1; -2\}$.

Необходимо сдвинуть корень $\lambda_1 = 0$ к $\lambda_1^* = -3$.

Составляем матрицу управляемости:

$$M_y = [b_1; A b_1; A^2 b_1; b_2; A b_2; A^2 b_2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -0,2631 \\ 0 & 0 & 0 & 0,0526 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2631 \\ 0,0526 \end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -0,2631 \\ 0,0526 \end{bmatrix}.$$

Ранг $M_y = 1$, т.е. система не является полностью управляемой.

Находим правые собственные вектора матрицы A и составляем матрицу R :

$$R = \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & R_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ -0,3 & -0,2631 & -1 \\ 0,2 & 0,0526 & 0,6667 \end{bmatrix}.$$

В соответствии с формулой (4.102) находим матрицу левых собственных векторов L :

$$L = R^{-1} = \begin{bmatrix} 1,4287 & 7,1441 & 8,5727 \\ 0 & -5,4293 & -8,1434 \\ -0,4286 & -1,7148 & -0,4243 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow L_1^T \\ \leftarrow L_2^T \\ \leftarrow L_3^T \end{matrix}.$$

Проверяем модальную управляемость:

$$L_1^T B = [1,4287 \quad 7,1441 \quad 8,5727] \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -0,3 & -0,2631 \\ 0,2 & 0,0526 \end{bmatrix} = [1 \quad 0];$$

т.е. система модально управляема, так как $L_1^T B \neq 0$. Подставим найденные матричные данные в формулу (4.119):

$$(-3) - (0) = [1 \ 0] F_1 = [1 \ 0] \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{21} \end{bmatrix} = F_{11}.$$

Откуда $F_{11} = -3$, а F_{21} может быть любым, например $F_{21} = 0$, тогда столбец F_1 имеет вид

$$F_1 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Полученный столбец F_1 позволяет найти матрицу модального регулятора

$$\begin{aligned} K = F_1 L_1^T &= \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \end{bmatrix} [1, 4287 \quad 7, 1441 \quad 8, 5727] = \\ &= \begin{bmatrix} -4, 2861 & -21, 4323 & -25, 7181 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

что определяет матрицу замкнутой системы

$$A^* = A + BK = \begin{bmatrix} -3, 4290 & -12, 5752 & -16, 7181 \\ 0, 4287 & 1, 5725 & 4, 7154 \\ -0, 2850 & -1, 7150 & -4, 1436 \end{bmatrix},$$

которая имеет следующий спектр: $\Lambda_{A^*} = \{-3; -1; -2\}$; Λ_{A^*} совпадает с желаемым спектром Λ^* .

Замечание 4.2. Если необходимо сдвинуть две и более моды, процедуру, рассмотренную выше, необходимо проводить итеративно, сдвигая каждый раз по одной моде, т.е.

$$A \rightarrow A_1^* = A + BK_1 \rightarrow A_2^* = A_1^* + BK_2 \rightarrow \dots \rightarrow A_p^* = A_{p-1}^* + BK_p,$$

и общая матрица модального регулятора K определяется выражением

$$K = \sum_{i=1}^p K_i, \quad (4.120)$$

где $1 \leq p \leq n$ — число сдвигаемых мод.

4.5.4. ОПТИМАЛЬНОЕ МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ОДНОЙ МОДОЙ ПРИ ПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Если в строке $L_k^T B$ имеется более одного ненулевого элемента, при сдвиге моды $\lambda_k = \lambda_k^*$ возникает неоднозначность в выборе столбца F_k . Эту неоднозначность можно использовать для вывода оптимального модального управления с точки зрения минимизации энергетических затрат по переводу моды λ_k в λ_k^* . В качестве целевой функции используем следующую квадратичную функцию:

$$J = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} K_{ij}^2, \quad (4.121)$$

где $\alpha_{ij} \geq 0$ — весовые коэффициенты матрицы усиления K модального регулятора.

Необходимо минимизировать функцию J по K_{ij} ($i = \overline{1, m}, j = \overline{1, m}$) при соблюдении линейного ограничения

$$\lambda_k^* - \lambda_k = L_k^T B F_k. \quad (4.122)$$

В выражении (4.121) число оптимизируемых параметров K_{ij} равно $m \times n$. Но, с другой стороны, матрица K определяется из соотношения (4.114)

$$K = F_k L_k^T. \quad (4.123)$$

Так как левый собственный вектор L_k^T матрицы A определяется самой матрицей, то число оптимизируемых параметров в выражении (4.123) остается равным $\dim F_k$, т.е. m . В соответствии с этим, подставив формулу (4.123) в (4.121), получим

$$J = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (F_{ik} L_{kj})^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 F_{ik}^2. \quad (4.124)$$

Ограничение (4.122) представим в следующем развернутом виде:

$$\lambda_k^* - \lambda_k = \sum_{i=1}^m Q_{ki} F_{ik}, \quad (4.125)$$

где

$$Q_k^T = L_k^T B. \quad (4.126)$$

После этих преобразований задача оптимизации состоит в следующем: необходимо найти столбец $(m+1)$ коэффициентов F_{ik}^* ($i = \overline{1, m}$), минимизирующий функцию (4.124) при линейных ограничениях (4.125).

Эту задачу решим методом неопределённых множителей Лагранжа. Составим функцию Лагранжа:

$$\mathcal{L} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 F_{ik}^2 + \psi \left(\lambda_k^* - \lambda_k - \sum_{i=1}^m Q_{ki} F_{ik} \right), \quad (4.127)$$

где ψ — множитель Лагранжа для ограничения (4.125).

Условие минимума (4.124) при ограничении (4.125) — стационарность функции $\mathcal{L}$ по оптимизируемым параметрам F_{ik} , т.е.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial F_{ik}} = 0, \quad i = \overline{1, m}. \quad (4.128)$$

Формула (4.128) и ограничение (4.125) дают следующую систему $(m+1)$ линейных уравнений относительно F_{ik}^* ($i = \overline{1, m}$) и ψ :

$$\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 2 F_{ik}^* - \psi Q_{ki} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad (4.129)$$

$$\lambda_k^* - \lambda_k = \sum_{i=1}^m Q_{ki} F_{ik}^*. \quad (4.130)$$

Учитывая простоту этих уравнений, их решение можно получить аналитически. Пусть в m -й строке Q_k^T для некоторого $i = l$ ($1 \leq l \leq m$) элемент $Q_{kl} \neq 0$. Выразим из (4.129) для $i = l$ множитель ψ :

$$\psi = \frac{2 \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} L_{kj}^2 F_{lk}^*}{Q_{kl}}. \quad (4.131)$$

Подставляя вместо ψ правую часть (4.131) в уравнение (4.129), получим

$$2 \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 F_{ik}^* - \frac{2 \sum_{j=1}^n \alpha_{lj} L_{kj}^2}{Q_{kl}} F_{lk}^* Q_{ki} = 0, \quad (4.132)$$

где $i = \overline{1, m}$; $i \neq l$.

Из (4.132) найдём оптимальные значения параметров в m -столбце F_k^* :

$$F_{ik}^* = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 Q_{ki}}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 Q_{kl}} F_{lk}^2 = \beta_{ik} F_{lk}^*, \quad (4.133)$$

где $i = \overline{1, m}$ и $i \neq l$, а

$$\beta_{ik} = \frac{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 Q_{ki}}{\sum_{j=1}^n \alpha_{ij} L_{kj}^2 Q_{kl}}, \quad (4.134)$$

причём $\beta_{lk} = 1$.

Из выражения (4.133) видим, что $(m-1)$ коэффициент F_k^* линейно зависит от коэффициента F_{lk}^* , который мы определим из линейного ограничения (4.130).

Подставляя в уравнение (4.130) вместо F_{lk}^* правую часть (4.133), получим

$$\lambda_k^* - \lambda_k = \sum_{i=1}^m Q_{ki} \beta_{ik} F_{lk}^*; \quad (4.135)$$

откуда

$$F_{lk}^* = \frac{\lambda_k^* - \lambda_k}{\sum_{i=1}^m Q_{ki} \beta_{ik}}. \quad (4.136)$$

Таким образом, алгоритм нахождения оптимального столбца F_k^* и соответственно оптимальной матрицы K^* при переводе моды λ_k матрицы A к моде λ_k^* следующий.

Шаг 1. По заданным матрицам A и B определяем левый собственный вектор L_k^T матрицы A и условие модальной управляемости по моде λ_k : $L_k^T B = Q_k^T \neq 0$.

Шаг 2. Выбираем произвольный ненулевой элемент строки $Q_{kl} \neq 0$. Заметим, что если такой элемент *единственный*, то задача оптимизации отсутствует, так как F_k определяется *однозначно*.

Шаг 3. Из соотношений (4.134) находятся элементы β_{ik} , $i = \overline{1, m}$, $i \neq l$, $\beta_{lk} = 1$.

Шаг 4. Из формулы (4.136) находим F_{lk}^* .

Шаг 5. Из выражения (4.133) находим F_{ik}^* , $i = \overline{1, m}$, $i \neq l$.

Шаг 6. По формуле (4.123) определяем K^* .

Пример 4.13. Пусть матрицы A и B объекта управления имеют вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Кроме того, заданы весовые коэффициенты матрицы K :

$$\| \alpha_{ij} \| = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0,3 \\ 1 & 0,5 & 8 \end{bmatrix}.$$

Спектр матрицы $A : \Lambda_A = \{0; 1; 2\}$. Необходимо перевести корень $\lambda_3 = 2$ в $\lambda_3^* = -2$ и при этом минимизировать функцию (4.124).

Решение.

1. Находим матрицу левых собственных векторов

$$L = \begin{bmatrix} L_1^T \\ L_2^T \\ L_3^T \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & -0,5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix}$$

и проверяем условие λ_3 — модальной управляемости

$$L_3^T B = Q_k^T = [0,5 \quad 1] \neq 0,$$

т.е. объект модально управляем, причём оптимизация по примеру (4.124) возможна, так как строка Q_k^T имеет несколько (в данном случае 2) ненулевых элемента.

2. Выбираем элемент $Q_{31} = 0,5$, т.е. $l = 1$.

3. $\beta_{13} = 1$,

$$\beta_{23} = \frac{\sum_{j=1}^3 \alpha_{1j} L_{3j}^2}{\sum_{j=1}^3 \alpha_{2j} L_{3j}^2} \frac{Q_{32}}{Q_{31}} = \frac{(1 \cdot 0,5^2 + 2 \cdot 0^2 + 0,3 \cdot 0,5^2)}{(1 \cdot 0,5^2 + 0,5 \cdot 0^2 + 8 \cdot 0,5^2)} \frac{1}{0,5} = 0,2889.$$

4. Определяем F_{13}^* :

$$F_{13}^* = \frac{\lambda_3^* - \lambda_3}{\beta_{13} \cdot Q_{31} + \beta_{23} \cdot Q_{32}} = \frac{-2 - 4}{1 \cdot 0,5 + 0,2889 \cdot 1} = -5,0704.$$

5. Находим оставшиеся элементы столбца F_3^* :

$$F_{23}^* = \beta_{23} \cdot F_{13}^* = 0,2889 \cdot (-5,0704) = -1,4648.$$

6. Определяем матрицу оптимальных коэффициентов модального регулятора:

$$K^* = F_3^* \cdot L_k^T = \begin{bmatrix} -5,0704 \\ -1,4648 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2,5352 & 0 & -2,5352 \\ -0,7324 & 0 & -0,7324 \end{bmatrix}.$$

Проверим, что модальное управление проведено правильно. Матрица

$$A^* = A + BK^* = \begin{bmatrix} -2,2676 & 0 & -2,2676 \\ -2,5352 & 1 & -2,5352 \\ 0,2676 & 0 & 0,2676 \end{bmatrix}$$

имеет спектр $\Lambda_{A^*} = \{0; 1; -2\}$, т.е. матрица K^* найдена верно. Определим значение функции J для найденной матрицы K^* :

$$J^* = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^3 \alpha_{ij} K_{ij}^* = 13,1831.$$

Заметим, что если для выданных весовых коэффициентов $\|a_{ij}\|$ и матрицы Q_3^T выбрать другой неоптимальный столбец $\tilde{F}_3$, также переводящий $d_3 \rightarrow d_3^*$, то значение целевой функции J будет больше. Например, если

$$\tilde{F}_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ -2 \end{bmatrix}, \text{ то } \tilde{J} = 14,2 > J^*.$$

4.5.5. МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРИ НЕПОЛНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

Рассмотренные выше алгоритмы модального управления получены из условия, что доступны для измерения *все* коэффициенты вектора состояния, что на практике случается редко. Поэтому важно получить алгоритмы модального управления для объектов, где не все компоненты вектора X доступны непосредственному измерению. Ясно, что в этих случаях необходимо синтезировать устройство для получения оценок $\hat{X}$ вектора состояния, т.е. построить наблюдатель.

Модальное управление с наблюдателем полного порядка. Рассматривается задача модального управления для объекта управления с уравнением состояния

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BY(t), X \in R^n, Y \in R^m \quad (4.137)$$

и уравнением выхода

$$X_b(t) = CX(t), \quad (4.138)$$

$$X_b \in R^l, l < n;$$

требуется построить модальный регулятор

$$Y(t) = K\hat{X}(t), \quad (4.139)$$

который обеспечит заданное расположение корней замкнутой системе (4.137), (4.138). Оценку $\hat{X}(t)$ вектора состояния получим на выходе наблюдателя полного порядка, динамика которого описывается уравнением

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A - K_n C)\hat{X}(t) + K_n X_b(t) + BY(t), \quad (4.140)$$

где K_n — матрица $(n \times l)$ коэффициентов наблюдателя. Обозначим выбранный характеристический полином наблюдателя полного порядка $\varphi_n^*(\lambda)$:

$$\varphi_n^*(\lambda) = \det(A - K_n C - \lambda I). \quad (4.141)$$

Так как вектор $X(t)$ недоступен для измерения, то попробуем заменить в цепи обратной связи вектор $X(t)$ на его оценку $\hat{X}(t)$. Многочлен $\varphi_n^*(\lambda)$ можно выбрать по своему усмотрению и тем самым получить произвольную динамику стремления оценки $\hat{X}(t)$ к $X(t)$ при $t \rightarrow \infty$. При такой замене основной интерес представляют два вопроса:

1. Матрица K выбрана в предположении, что известно состояние $X(t)$, а потом вектор состояния заменим его оценкой $\hat{X}(t)$. Получится ли прежний регулятор? Другими словами, будет ли система с обратной связью по-прежнему иметь желаемый характеристический полином $\varphi^*(\lambda)$?
2. Какой эффект вносит в систему наблюдатель? Оказывается, что выбранные характеристические числа системы с обратной связью по состоянию и характеристические числа (собственные значения) наблюдателя войдут в замкнутую систему без изменения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть дана полностью управляемая и наблюдаемая система (4.137), (4.138). Пусть матрица K выбрана так, что спектр матрицы $A + BK$ совпадает с желаемым Λ^* , т.е. характеристический полином $\varphi_{A+BK}(\lambda) = \varphi^*(\lambda)$, и пусть выбрана матрица коэффициентов наблюдателя K_n такая, что характеристический полином матрицы $A - K_n C$ совпадает с желаемым полиномом $\varphi_n^*(\lambda)$. Тогда характеристический полином замкнутой системы (4.137), (4.140) (с учетом (4.138) и (4.139)) $2n$ -порядка

$$\dot{X}(t) = AX(t) + BK\hat{X}(t), \quad (4.142)$$

$$\dot{\hat{X}}(t) = (A - K_n C)\hat{X}(t) + BK\hat{X}(t) + K_n C\hat{X}(t), \quad (4.143)$$

который обозначим через $\varphi_0(\lambda)$, совпадает с произведением выбранных многочленов

$$\varphi_0(\lambda) = \varphi^*(\lambda) \cdot \varphi_n^*(\lambda). \quad (4.144)$$

Доказательство. Представим уравнения (4.142), (4.143) в виде системы $2n$ -порядка

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}(t) \\ \dot{\hat{\mathbf{X}}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{K}_n \mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_n \mathbf{C} + \mathbf{BK} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \hat{\mathbf{X}}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{A}^0 \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \hat{\mathbf{X}}(t) \end{bmatrix}. \quad (4.145)$$

Сделаем следующую невырожденную замену координат:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{E}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \hat{\mathbf{X}}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{I} & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \hat{\mathbf{X}}(t) \end{bmatrix}, \quad (4.146)$$

где $\mathbf{E}(t) = \mathbf{X}(t) - \hat{\mathbf{X}}(t)$, $\mathbf{I}$ — единичная матрица размерности $n \times n$. В новых переменных

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{X}}(t) \\ \dot{\mathbf{E}}(t) \end{bmatrix} &= \mathbf{P} \mathbf{A}^0 \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{E}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{BK} \\ \mathbf{K}_n \mathbf{C} & \mathbf{A} - \mathbf{K}_n \mathbf{C} + \mathbf{BK} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{E}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{BK} & -\mathbf{BK} \\ 0 & \mathbf{A} - \mathbf{K}_n \mathbf{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{E}(t) \end{pmatrix} = \mathbf{A}^{00} \begin{pmatrix} \mathbf{X}(t) \\ \mathbf{E}(t) \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.147)$$

Так как матрица преобразования $\mathbf{P}$ невырожденная, то матрицы $\mathbf{A}^{00}$ и $\mathbf{A}^0$, связанные выражением

$$\mathbf{A}^{00} = \mathbf{P} \mathbf{A}^0 \mathbf{P}^{-1}, \quad (4.148)$$

подобны и, следовательно, имеют одинаковый характеристический полином, т.е.

$$\varphi_{\mathbf{A}^{00}}(\lambda) = \varphi_{\mathbf{A}^0}(\lambda) = \varphi_0(\lambda) = \varphi^*(\lambda) \varphi_n^*(\lambda). \quad (4.149)$$

Что и требовалось доказать.

Формула (4.149) имеет важное значение, так как позволяет задачу модального управления с наблюдателем разделить на две независимые подзадачи:

- 1) построение модального регулятора;
- 2) построение наблюдателя полного порядка.

Решение 1-й подзадачи было рассмотрено выше, где можно использовать алгоритмы 1 или 2 или провести оптимальный выбор коэффициентов $\mathbf{K}$ модального регулятора. Что же касается 2-й подзадачи, то здесь для нахождения матрицы $\mathbf{K}_n$ можно воспользоваться принципом дуальности для управляемости и наблюдаемости, установленным Р. Калманом.

Пусть даны две системы, из которых одна описывается уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}\mathbf{Y}(t), \\ \mathbf{X}_b(t) = \mathbf{C}\mathbf{X}(t), \end{cases} \quad (4.150)$$

а другая уравнениями

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{Z}}(t) = \mathbf{A}^T \mathbf{Z}(t) + \mathbf{C}^T \mathbf{V}(t), \\ \mathbf{G}(t) = \mathbf{B}^T \mathbf{Z}(t). \end{cases} \quad (4.151)$$

Такие системы называют двойственными, или сопряженными друг другу. Очевидно, что условие

$$\text{rank} [\mathbf{B}; \mathbf{AB}; \dots; \mathbf{A}^{n-1} \mathbf{B}] = n$$

является условием полной управляемости системы (4.150) и одновременно условием полной наблюдаемости системы (4.151), а равенство

$$\text{rank} [\mathbf{C}^T; \mathbf{A}^T \mathbf{C}^T; \dots; (\mathbf{A}^T)^{n-1} \mathbf{C}^T] = n$$

— условием полной наблюдаемости системы (4.150) и одновременно условием полной управляемости системы (4.151).

Воспользуемся этим принципом дуальности, чтобы задачу нахождения коэффициентов K_n наблюдателя свести к задаче модального управления. Для этого во вспомогательной задаче (4.151) необходимо найти такую матрицу коэффициентов обратной связи K_n

$$V(t) = -K_n^T Z(t), \quad (4.152)$$

чтобы матрица $(A^T - C^T K_n^T)$ имела характеристический полином

$$\varphi_{A^T - C^T K_n^T}(\lambda) = \varphi_{A - K_n C}(\lambda),$$

совпадающий с желаемым $\varphi_n^*(\lambda)$. А это и есть задача модального управления. И к ней можно применить все рассмотренные выше алгоритмы синтеза.

Таким образом, задача синтеза алгоритмов модального управления с наблюдателем полного порядка сведена к двум независимым подзадачам модального управления:

- 1) нахождение матрицы коэффициентов K управления с обратной связью $Y(t) = KX(t)$ системы (4.150), обеспечивающие желаемый полином замкнутой системы $\varphi^*(\lambda)$;
- 2) определение матрицы коэффициентов K_n управления с обратной связью $V(t) = -K_n^T Z(t)$ системы (4.151), обеспечивающей желаемый полином замкнутой системы $\varphi_n^*(\lambda)$.

Большинство математических положений, на которых основывается изложение материала в данном параграфе, изложено в соответствующих книгах по линейной алгебре и ее применению в теории САУ (Л. Ланкастер «Теория матриц»; Ю.Н. Андреев «Управление конечномерными линейными объектами»; У.Х. Рей «Методы управления технологическими процессами», Х. Квакуернаак, Р. Сиван «Линейные оптимальные системы управления» и др.), ссылки на которые можно взять из библиографии к первому тому.

ГЛАВА 5. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РОБАСТНОГО И СТОХАСТИЧЕСКОГО РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Теория автоматического управления развивается как в направлении более полного и глубокого анализа функционирования и эффективности автоматических систем и устройств при учете реальных режимов работы и действующих возмущений, так и в направлении разработки методов синтеза оптимальных систем управления. Эти общие направления теории систем управления получили особое развитие с появлением быстродействующих электронных вычислительных машин, позволяющих реализовать сложные вычислительные алгоритмы анализа и синтеза систем управления.

Развитие теории автоматического управления с конца 50-х годов в значительной мере связаны с работами Р. Калмана и Р. Бьюси [166] по оптимальной линейной фильтрации, а также А.М. Летова [67] и Р. Калмана [49] по синтезу линейных динамических систем, оптимальных по квадратичному критерию качества. Данные работы сформировали теоретические основы для широкого применения теории в различных областях науки и техники и позволили решить принципиально новые теоретические и прикладные задачи.

В то же время, практика применения теории оптимальных систем при решении конкретных технических задач показала, что оптимальные системы, синтезированные по квадратичному критерию качества, являются чувствительными к параметрам модели реального объекта и характеристикам входных воздействий, т.е. являются не грубыми, и иногда теряют не только оптимальность, но и работоспособность в тех случаях, когда априорная информация об объекте и внешней среде известна не точно, а лишь с некоторой достоверностью, задаваемой интервалами принадлежности (классами неопределенности).

Это привело к тому, что в начале 80-х годов стали возникать постановки оптимальных задач управления, которые смогли бы избежать указанных выше недостатков.

Современный период развития теории управления характеризуется постановкой и решением задач, учитывающих неточность наших знаний об объектах управления и действующих на них внешних возмущений. Задачи синтеза регулятора и оценивания состояния с учетом неопределенности в модели объекта и характеристиках входных воздействий являются одними из центральных в современной теории управления. Их важность обусловлена прежде всего тем, что практически в любой инженерной задаче конструирования системы управления присутствует неопределенность (или ошибка) в модели объекта (математическая модель объекта, полученная на основе теории или в результате идентификации, отличается от реальной технической системы) и в знании класса входных возмущений.

Основная и принципиально новая идея по синтезу робастного управления состояла в том, чтобы единственным регулятором обеспечить устойчивость замкнутой системы не только для номинального (без учета ошибок модели) объекта, но и для любого объекта, принадлежащего множеству «возмущенных» объектов, определяемых классом неопределенности.

Началом построения более строгой классической теории робастного управления, распространенной на многомерные системы, послужила статья Зеймса [197], в кото-

рой был предложен новый критерий оптимальности на основе H_∞ -нормы многомерной передаточной функции замкнутой системы. Использование H_∞ -нормы в качестве критерия оптимальности при синтезе многомерных систем основано на том факте, что H_∞ -норма может служить мерой усиления системы. H_∞ -норма передаточной функции есть энергия выхода системы при подаче на вход сигнала с единичной энергией. Если выходом является ошибка, а входом возмущение, то минимизируя H_∞ -норму передаточной функции, мы минимизируем энергию ошибки для наихудшего случая входного возмущения. В скалярном случае норма такой функции конечна и равна максимальному значению амплитудно-частотной характеристики.

Таким же важным первоисточником для сегодняшнего уровня понимания проблемы является статья Дойла и Стейна [156], которая положила начало проблеме грубого или робастного управления для модели, заданной в условиях неопределенности.

Появившиеся в начале 80-х годов новые постановки задач синтеза систем управления, сводящиеся к задаче H_∞ -оптимизации [156, 197] и учитывающие неопределенности в системе, информация о которых минимальна, получили свои первые решения к середине 80-х годов на базе сразу нескольких подходов [158, 170, 196].

Однако эти работы имели скорее теоретическое значение, поскольку процедуры синтеза регуляторов были достаточно трудоемкими и громоздкими. Порой процедуры синтеза приводили к курьезным результатам. Так, для системы второго порядка оптимальный H_∞ -регулятор имел десятый порядок [84]. И тем не менее мы считаем, что эти подходы должны быть освещены в учебной литературе, так как связывают современные проблемы математики с физическими принципами построения робастных регуляторов.

Многие работы, опубликованные после 1984 года, развивали так называемый «подход 1984», предложенный Дж. Дойлом [154], в котором на основе теории ганкелевской аппроксимации Гловера [159] дана процедура в пространстве состояний решения проблемы H_∞ -оптимизации для случая конечномерных линейных систем.

В 1989 году на основе ряда ключевых результатов в фундаментальной работе [153] была сформулирована новая концепция подхода к решению задачи H_∞ -оптимизации, получившая название «2-Риккати подхода». Суть подхода заключалась в том, что оптимальная задача заменялась субоптимальной. Метод «2-Риккати подхода» сочетает в себе классическую теорию автоматического управления и метод пространства состояний, а именно: постановка задачи производится в частотной области, а ее решение осуществляется с использованием метода пространства состояний. Кроме того, данный подход позволяет разработчикам в процессе проектирования задавать требуемые характеристики качества и робастной устойчивости замкнутой системы.

В рамках этого подхода процедура синтеза H_∞ -субоптимального управления была похожа на процедуру синтеза H_2 -оптимального управления. Применяя этот подход, удалось сформулировать принцип разделения в H_∞ -теории управления, аналогичный хорошо известному принципу разделения в LQG -теории. Было показано, что при определенных условиях H_2 -теория управления является предельным случаем H_∞ -теории. Была существенно упрощена процедура нахождения субоптимальных регуляторов [161]. Выявлено, что степень регулятора для объекта порядка n не превосходит n [171].

В рамках «2-Риккати подхода» искомый оптимальный регулятор в форме наблюдателя определяется на основе решения двух многомерных уравнений Лурье–Риккати для фильтрации (восстановление состояния) и оптимального управления в смысле минимума H_∞ -нормы замкнутой системы. Регуляторы, синтезированные с использованием этого критерия оптимальности, обеспечивают устойчивость замкнутой системы и минимальную чувствительность к возмущениям.

В настоящее время процедуры синтеза H_∞ -регуляторов в рамках «2-Риккати подхода» приняты в качестве стандарта. В этой главе мы только приводим алгоритм решения задачи с помощью этого подхода, так как его строгое изложение требует большого объема и достаточно сложно для неподготовленного читателя.

После создания H_∞ -теории для стационарных непрерывных систем эта теория была распространена и на другие классы систем. Так, в работе [164] описано решение задачи H_∞ -оптимизации для линейных дискретных систем, а в статье [185] сформулирована и решена задача H_∞ -оптимизации для нестационарных систем. Однако практическое применение нестационарной теории затруднено отсутствием эффективных алгоритмов решения нестационарных уравнений Риккати.

Явные успехи линейной H_∞ -теории управления привлекли внимание специалистов по нелинейной теории управления. В рамках нелинейной теории появились постановки задач, аналогичные задачам в линейной теории. Получены и числовые алгоритмы их решений [149, 190]. Однако, как показали результаты практического применения нелинейной H_∞ -теории [152], она представляет собой пока теоретический интерес. H_∞ -теория рассмотрена также и с игровой точки зрения [150, 172].

Изложению различных подходов по синтезу систем управления для систем с различными видами представления неопределенности (параметрическими, непараметрическими, структурированными и неструктурированными) посвящены сборники статей [157, 186, 187]. Существуют опубликованные обзоры [12, 54, 63, 79] и монографии [90] по H_∞ -теории и в отечественной литературе.

Появление новых просто алгоритмизируемых процедур нахождения регуляторов вызвало большой интерес к этой проблематике в среде инженеров — разработчиков систем управления. Были созданы пакеты прикладных программ для разработчиков робастных систем управления. Наиболее популярным пакетом программ считается *Robust Control Toolbox* для пакета *Matlab* [96].

В этом введении авторы не ставят своей целью осветить достаточно полно приложения H_∞ -теории. По этому поводу есть большое количество литературы за рубежом, есть и работы на русском языке. Нам бы хотелось обратить внимание специалистов на некоторые работы в традиционной области приложения теории управления — управлении движущимися объектами, а более конкретно — летательными аппаратами, где применение новой теории продвинулось достаточно далеко.

Еще в начале 90-х годов появился ряд работ (см. [163, 182]), посвященных применению H_∞ -теории в задачах управления движением. Одной из такого рода задач является задача построения управления, минимизирующего действие внешнего возмущения на систему.

Одним из таких внешних возмущений является микропорыв ветра — внезапный порыв ветра большой интенсивности. Особенно опасен микропорыв ветра при взлете и посадке самолета, полете на низких высотах. Предложенные в [152, 167] алгоритмы показали принципиальную возможность применить H_∞ -методы для уменьшения влияния микропорыва ветра на траекторию полета.

Предлагаемый в этой главе материал организован следующим образом. В первых 5 параграфах в основном излагаются фундаментальные понятия и результаты робастной теории, разработанные для систем с одним входом и одним выходом.

Основные понятия и необходимый математический аппарат, необходимый для формулировки задач робастного управления, изложены в параграфе 5.6.

В седьмом параграфе изложен стохастический подход к H_∞ -оптимизации систем автоматического управления, основанный на использовании критерия качества стохастической нормы системы. Такая норма количественно характеризует чувствительность выхода системы к случайным входным возмущениям, вероятностное распределение которых известно не точно. Конкретизация этого подхода, получаемая комбинированием понятия стохастической нормы системы и средней анизотропии сигнала [28], приводит к специальному варианту стохастической нормы — анизотропийной норме.

Средняя анизотропия представляет собой характеристику пространственно-временной окрашенности стационарного гауссовского сигнала, которая тесно связана, с одной стороны, с теоретико-информационным подходом к количественному описанию хаоса с помощью колмогоровской ε -энтропии вероятностных распределений [33, 125], а с другой — с принципом изотропности конечномерного евклидова пространства [28].

Анизотропийная норма системы характеризует ее чувствительность к входным гауссовским шумам, средняя анизотропия которых ограничена сверху неким неотрицательным параметром a .

В параграфе 5.7 излагаются методы анизотропийного анализа и синтеза систем. Приводятся и обсуждаются результаты по решению конкретной задачи построения регулятора для управления самолетом в условиях действия на систему внешних возмущений.

Построению различных робастных регуляторов в задаче посадки самолета в условиях действия внешних неконтролируемых возмущений, посвящен параграф 5.8. Результаты применения H_∞ -регуляторов в задаче посадки самолета в условиях микропорыва ветра показали, что эти регуляторы наряду с рядом неоспоримых достоинств имеют и недостатки. Основной особенностью H_∞ -регуляторов является тот факт, что в процессе функционирования робастной системы используется только априорная информация о возможных внешних возмущениях. Это приводит к тому, что робастные системы управления отличаются некоторым консерватизмом. Это объясняется тем, что робастные системы должны оставаться работоспособными (сохранять робастную устойчивость и заданный уровень качества) при максимально допустимых возмущениях, не «имея информации» о том, когда это возмущение произойдет, т.е. регулятор «всегда готов» к наихудшему случаю. Это общая характерная особенность всех минимаксных регуляторов (к которым относятся и H_∞ -регуляторы).

В параграфе 5.8 также построены анизотропийные регуляторы. Приводятся сравнения применения этих анизотропийных регуляторов, построенных для разных уровней средней анизотропии входного сигнала с применением H_2/LQG и H_∞ -регуляторов для этой задачи. Показано, что при применении анизотропийных регуляторов, построенных при соответствующем уровне средней анизотропии входного сигнала, существенно меньшим по величине управлением достигается практически одинаковое качество переходных процессов по управляемым переменным по сравнению с H_∞ -субоптимальным регулятором.

Авторы предполагают, что читатель хорошо знаком с линейной алгеброй, теорией матриц, теорией линейных дифференциальных уравнений, с курсом классической теории регулирования.

5.1. НОРМЫ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ

Один из путей описать качество системы управления — описать его в терминах некоторых сигналов. Например, качество системы слежения может быть измерено размером сигнала ошибки. Этот параграф рассматривает некоторые способы определения величины сигнала, т.е. некоторые нормы для сигналов. Вводятся также нормы для передаточных функций системы. Приводятся две полезные таблицы, показывающие вход-выходные соотношения. Приводятся алгоритмы вычисления определяемых норм. Определенные понятия для одномерного случая распространяются на многомерный.

5.1.1. НОРМЫ СИГНАЛОВ

Рассмотрим сигналы (функции), определенные на интервале $(-\infty, \infty)$. Предполагается, что они кусочно непрерывны. Сигналы могут быть равны нулю для $t < 0$, т.е. мы можем начинать со времени $t = 0$.

Напомним следующие аксиомы нормы:

- 1) $\|u(t)\| \geq 0$ для любого t ;
- 2) $\|u(t)\| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0$;
- 3) $\|au\| = |a|\|u\|$ для любого $a \in \mathbb{R}$;
- 4) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$.

Последнее неравенство известно как неравенство треугольника.

Определение 5.1. 1-норма сигнала $u(t)$ определяется формулой

$$\|u(t)\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt. \quad (5.1)$$

Определение 5.2. 2-норма сигнала $u(t)$ определяется формулой

$$\|u(t)\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u^2(t) dt \right)^{1/2}. \quad (5.2)$$

Определение 5.3. ∞ -норма сигнала $u(t)$ определяется как верхняя грань его абсолютной величины

$$\|u(t)\|_{\infty} = \sup_t |u(t)|. \quad (5.3)$$

Например, ∞ -норма $(1 - e^{-t})1(t)$ равна 1.

Определение 5.4. Усредненная мощность сигнала $u(t)$ определяется как усреднение во времени мгновенной мощности

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) dt.$$

Сигнал $u(t)$, для которого этот предел существует, называется сигналом ограниченной мощности. Квадратный корень из усредненной мощности обозначим через $\text{pow}(u)$:

$$\text{pow}(u) = \left(\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) dt \right)^{1/2}. \quad (5.4)$$

Заметим, что ненулевой сигнал может иметь нулевую усредненную мощность, таким образом, $\text{row}(u)$ не является нормой.

Ниже мы рассмотрим вопрос, влечет ли конечность одной нормы конечность других.

Предложение 5.1. Если $\|u(t)\|_2 \leq \infty$, тогда если $u(t)$ — сигнал ограниченной мощности, то $\text{row}(u) = 0$.

Доказательство.

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) dt \leq \frac{1}{2T} \|u(t)\|_2^2,$$

откуда следует утверждение предложения.

Предложение 5.2. Если $u(t)$ — сигнал ограниченной мощности и $\|u(t)\|_\infty < \infty$, тогда $\text{row}(u) \leq \|u(t)\|_\infty$ и, следовательно, $\text{row}(u) < \infty$.

Доказательство.

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^T u^2(t) dt \leq \|u(t)\|_\infty^2 \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt = \|u(t)\|_\infty^2.$$

Предложение 5.3. Если $\|u(t)\|_1 < \infty$ и $\|u(t)\|_\infty < \infty$, тогда

$$\|u(t)\|_2 \leq (\|u(t)\|_\infty \|u(t)\|_1)^{1/2}$$

и, следовательно, $\|u(t)\|_2 < \infty$.

Доказательство аналогично доказательству предложений 5.1 и 5.2.

Диаграмма Венна (рис. 5.1) частично иллюстрирует вышесказанное.

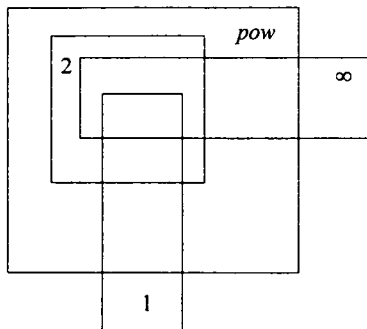


Рис. 5.1. Диаграмма Венна

На этой диаграмме множество, отмеченное row , содержит все сигналы $u(t)$, для которых величина $\text{row}(u)$ конечна, множество 1 содержит все сигналы, для которых 1-норма конечна и т.д.

Можно привести примеры функций, принадлежащих каждому из указанных на диаграмме множеств и не принадлежащих другим.

5.1.2. НОРМЫ СИСТЕМ

Мы рассматриваем системы, являющиеся линейными, стационарными, каузальными (причинными) и конечномерными. Во временной области вход-выходная модель для таких систем имеет форму уравнения свертки

$$x = k * y,$$

т.е.

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} k(t-\tau)y(\tau)d\tau.$$

Каузальность означает, что $k(t) = 0$ для $t < 0$. Через $W(s)$ обозначим передаточную функцию, преобразование Лапласа от k .

Определение 5.5. Будем говорить, что $W(s)$ является устойчивой, если она аналитическая в замкнутой правой полуплоскости ($\operatorname{Re} s \geq 0$), правильной, если $W(j\infty)$ конечна (степень знаменателя больше или равна степени числителя), строго правильной, если $W(j\infty) = 0$ (степень знаменателя больше степени числителя), и биправильной, если W и W^{-1} — обе правильные (степень знаменателя равна степени числителя).

Далее введем две нормы для передаточной функции W .

Определение 5.6. 2-норма передаточной функции определяется равенством

$$\|W\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}. \quad (5.5)$$

Определение 5.7. ∞ -норма передаточной функции определяется равенством

$$\|W\|_{\infty} = \sup_{\omega} |W(j\omega)|. \quad (5.6)$$

Заметим, что если W устойчива, то в соответствии с равенством Парсеваля

$$\|W\|_2^2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega \right) = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |k(t)|^2 dt \right)^{1/2}.$$

Заметим, что ∞ -норма равна расстоянию от начала координат до наиболее удаленной точки диаграммы Найквиста для W на комплексной плоскости. Эта величина также появляется как наибольшее значение графика Боде для W . Отметим важное свойство ∞ -нормы:

$$\|W_1 W_2\|_{\infty} \leq \|W_1\|_{\infty} \|W_2\|_{\infty}.$$

Приведенная ниже лемма устанавливает, когда эти две нормы конечны.

Лемма 5.1. 2-норма W конечна тогда и только тогда, когда W является строго правильной и не имеет полюсов на мнимой оси; ∞ -норма W конечна тогда и только тогда, когда W не имеет полюсов на мнимой оси.

Как вычислять 2-норму

Предположим, что W строго правильная и не имеет полюсов на мнимой оси, т.е. ее 2-норма конечна. Мы имеем

$$\|W\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{2\pi j} \int_{-j\infty}^{j\infty} W(-s)W(s)ds = \frac{1}{2\pi j} \oint W(-s)W(s)ds.$$

Последний интеграл является контурным интегралом вдоль мнимой оси вокруг бесконечной полуокружности в левой полуплоскости, значение интеграла из этой полуокружности равно нулю, потому что W является строго правильной. По теореме о вычетах $\|W\|_2^2$ равна сумме вычетов $W(-s)W(s)$ их полюсов в левой полуплоскости.

Пример 5.1. Возьмем $W = 1/(\tau s + 1)$, $\tau > 0$. Нулем в левой полуплоскости передаточной функции $W(-s)W(s)$ является $s = -1/\tau$. Вычет в этом полюсе равен

$$\lim_{s \rightarrow -1/\tau} \left(s + \frac{1}{\tau} \right) \frac{1}{-\tau s + 1} \frac{1}{\tau s + 1} = \frac{1}{2\tau}.$$

Следовательно, $\|W\|_2 = 1/\sqrt{2\tau}$.

Как вычислять ∞ -норму

Выберем конечную последовательность частот

$$\{\omega_1, \dots, \omega_N\}.$$

Тогда оценка для $\|W\|_\infty$ равна

$$\max_{1 \leq k \leq N} |W(j\omega_k)|.$$

С другой стороны, мы можем найти, где $|W(j\omega)|$ максимален, решая уравнение

$$\frac{d|W^2|}{d\omega}(j\omega) = 0.$$

Пример 5.2. Рассмотрим

$$W(s) = \frac{as + 1}{bs + 1},$$

$c, a, b > 0$. Рассмотрим график Боде: для $a \geq b$ он возрастает, в противоположном случае — убывает. Таким образом,

$$\|W\|_\infty = \begin{cases} a/b, & a \geq b, \\ 1, & a < b. \end{cases}$$

5.1.3. Вход-выходные соотношения

В этом разделе мы будем исследовать вопрос: какова величина выходного сигнала, если известна величина входного.

Мы будем рассматривать линейную систему, имеющую вход u , выход x и передаточную функцию W , которую будем предполагать устойчивой и строго правильной. Результаты приведены в двух таблицах. В первой таблице представлен случай, когда на вход системы подаются фиксированные сигналы, единичный импульс $y(t) = \delta(t)$ и синусоида $y(t) = \sin(\omega t)$.

В табл. 5.2 представлен случай, когда входной сигнал $y(t)$ не фиксирован, а известно, что он по какой-либо из норм меньше 1. Например, если на входе может быть произвольный сигнал по 2-норме ≤ 1 , то табл. 5.2 показывает, что верхняя граница 2-нормы выхода, т.е.

$$\sup \{ \|x\|_2 : \|y\|_2 \leq 1 \},$$

которую можно назвать коэффициентом усиления системы, равна ∞ -норме W . Это соответствует клеточке (1,1) во второй таблице. Другие входы являются другими реакциями системы.

Применение этих таблиц состоит в следующем. Предположим, наш анализ или синтез системы управления включает среди прочих вещей требование понижения влияния возмущений: управляемая система имеет зашумленный вход u , влияние которого на выход x должно быть мало. Пусть k обозначает импульсную переходную функцию от u к x . Система предполагается устойчивой, т.е. W устойчива. Таблицы показывают, как сильно u влияет на x в соответствии с различными мерами (нормами). Например, если известно, что u является синусоидой определенной частоты, тогда второй столбец табл. 5.1 дает соответственный размер x в зависимости от трех мер.

Таблица 5.1

Выходные нормы для двух входов

	$u(t) = \delta(t)$	$y(t) = \sin(\omega t)$
$\ x\ _2$	$\ W\ _2$	∞
$\ x\ _\infty$	$\ W\ _\infty$	$ W(j\omega) $
$\text{pow}(y)$	0	$\frac{1}{\sqrt{2}} W(j\omega) $

Таблица 5.2

Связь норм сигналов и систем

	$\ y\ _2$	$\ y\ _\infty$	$\text{pow}(y)$
$\ x\ _2$	$\ W\ _\infty$	∞	∞
$\ x\ _\infty$	$\ W\ _2$	$\ W\ _1$	∞
$\text{pow}(x)$	0	$\leq \ W\ _\infty$	$\ W\ _\infty$

Выведем соотношения между входом и выходом системы, соответствующие входу и выходу, характеризуемым 2-нормой.

Сначала мы покажем, что в этом случае $\|W\|_\infty$ является верхней границей коэффициента усиления:

$$\begin{aligned}\|x\|_2^2 &= \|X\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 |Y(j\omega)|^2 d\omega \leq \\ &\leq \|W(j\omega)\|^2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |Y(j\omega)|^2 d\omega = \|W\|_\infty^2 \|Y\|_2^2 = \|W\|_\infty^2 \|y\|_2^2.\end{aligned}$$

Для того чтобы показать, что $\|W\|_\infty$ является наименьшей верхней границей, сначала выберем частоту ω_0 , где $|W(j\omega)|$ является максимальным, т.е.

$$|W(j\omega_0)| = \|W\|_\infty.$$

Выберем вход y такой, что

$$|Y(j\omega_0)| = \begin{cases} c, & \text{если } |\omega - \omega_0| < \varepsilon \text{ или } |\omega + \omega_0| < \varepsilon, \\ 0 & \text{в другом случае,} \end{cases}$$

где ε — малое положительное число, а c выбирается так, что y имеет 2-норму, т.е. $c = \sqrt{\pi/2\varepsilon}$. Далее

$$\begin{aligned}\|Y\|_\infty^2 &\approx \frac{1}{2\pi} \left[|W(-j\omega_0)|^2 + |W(j\omega_0)|^2 \right] = \\ &= |W(j\omega_0)|^2 = \|W\|_\infty^2.\end{aligned}$$

Таким образом, мы показали, что ∞ -норма является коэффициентом усиления при 2-нормах входного и выходного сигнала.

Заметим, что ∞ -норма несколько раз появляется в этих таблицах, таким образом, эта норма является важной мерой качества системы.

Все представленные в таблицах соотношения нетрудно вывести, используя определения норм и несложные оценки.

Рекомендуется получить эти соотношения самостоятельно.

5.1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ 2- и ∞ -НОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Цель этого раздела — показать, как 2- и ∞ -нормы можно вычислять методами пространства состояний. Этот раздел важен еще и тем, что предложенные в нем методы могут быть использованы и в многомерном случае.

Рассмотрим модель в пространстве состояний

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{X}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{X}(t) + \mathbf{B}y(t), \\ x_b(t) &= \mathbf{C}\mathbf{X}(t).\end{aligned}$$

Здесь $y(t)$ и $x_b(t)$ — соответственно скалярные вход и выход, $\mathbf{X}(t)$ — вектор-функция. Размерности $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ соответственно $n \times n$, $n \times 1$ и $1 \times n$.

Передаточная функция от $Y(s)$ к $X_b(s)$ равна

$$W(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}$$

и предполагается устойчивой. Мы хотим вычислить $\|W\|_2$ и $\|W\|_\infty$, используя $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$.

Вычисление 2-нормы

Определим

$$\mathbf{L} = \int_0^\infty e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A} t} dt,$$

где матричная экспонента определяется как

$$e^{\mathbf{A} t} = \mathbf{I} + t\mathbf{A} + \frac{t^2}{2!} \mathbf{A}^2 + \dots$$

$\mathbf{L}$ называется грамианом управляемости.

Предложение 5.4. $\mathbf{L}$ удовлетворяет уравнению

$$\mathbf{A}\mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}.$$

Доказательство. Интегрируя обе части уравнения

$$\frac{d}{dt} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} = \mathbf{A} e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} + e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{A}^T$$

от 0 до ∞ и учитывая, что $\exp(\mathbf{A} t)$ стремится к 0, так как $\mathbf{A}$ устойчива, получаем

$$-\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}\mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{A}^T.$$

Предложение 5.5. 2-норма W вычисляется по формуле

$$\|W\|_2 = (\mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{C}^T)^{1/2}. \quad (5.7)$$

Доказательство. Импульсная переходная функция равна

$$k(t) = \mathbf{C}e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B}, \quad t > 0.$$

Используя равенство Парсеваля, получаем

$$\|W\|_2^2 = \|k\|_2^2 = \int_0^\infty \mathbf{C}e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} \mathbf{C}^T dt = \mathbf{C} \left(\int_0^\infty e^{\mathbf{A} t} \mathbf{B} \mathbf{B}^T e^{\mathbf{A}^T t} dt \right) \mathbf{C}^T = \mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{C}^T.$$

Таким образом, процедура вычисления 2-нормы состоит в следующем.

Шаг 1. Решаем уравнение

$$\mathbf{A}\mathbf{L} + \mathbf{L}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{0}$$

относительно матрицы $\mathbf{L}$.

Шаг 2. Вычисляем 2-норму по формуле (5.7).

Вычисление ∞ -нормы

Вычисление ∞ -нормы является более трудоемким процессом и связан с процедурой поиска. Определим $2n \times 2n$ матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}\mathbf{C}^T & -\mathbf{A}^T \end{bmatrix}.$$

Теорема 5.1. $\|\mathbf{W}\|_\infty < 1$ тогда и только тогда, когда матрица $\mathbf{H}$ не имеет собственных значений на мнимой оси.

Доказательство этой теоремы достаточно сложно и здесь мы его опускаем.

Теорема предлагает следующий алгоритм вычисления ∞ -нормы: выбираем положительное число γ ; проверяем выполнение условия $\|\mathbf{W}\|_\infty < \gamma$ (т.е. выполнение условия $\|\gamma^{-1}\mathbf{W}\|_\infty < 1$) посредством вычисления собственных значений соответствующей матрицы; увеличиваем или уменьшаем γ соответственно; повторяем процедуру. На самом деле, в результате этого алгоритма мы получаем оценку γ .

5.1.5. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА И ХАРДИ

В этом разделе мы обобщим на многомерный случай те понятия и определения, которые были введены выше для систем с одним входом и одним выходом. Материал этого параграфа представляет собой некоторые определения из курса функционального анализа и является хорошо известным читателям, знакомым с функциональным анализом. Однако мы считаем необходимым привести его, чтобы изложение материала было достаточно замкнутым.

5.1.5.1. ПРОСТРАНСТВА ЛЕБЕГА

Определение 5.8. Пространство Лебега $L_p(\mathbb{R})$, $(1 \leq p < \infty)$ есть пространство комплекснозначных функций $f(t)$ (со значениями в $\mathbb{C}^1$) действительного аргумента $t \in \mathbb{R}$ с p -интегрируемым (по Лебегу) модулем, или, более точно,

$$L_p(\mathbb{R}) = \left\{ f(t) : f(t) \in \mathbb{C}^1, t \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} [f^*(t)f(t)]^{p/2} dt < \infty \right\},$$

$f^*(t)$ — функция, эрмитово сопряженная к $f(t)$.

Норма функции $f(t)$ в пространстве $L_p(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\|f\|_{L_p(\mathbb{R})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [f^*(t)f(t)]^{p/2} dt \right)^{1/p}.$$

Определение 5.9. Пространство Лебега $L_\infty(\mathbb{R})$ задается в виде

$$L_\infty(\mathbb{R}) = \left\{ f(t) : f(t) \in \mathbb{C}^1, t \in \mathbb{R}, \operatorname{ess\,sup}_t (f^*(t)f(t)) < \infty \right\},$$

где

$$\operatorname{ess\,sup}_t (f^*(t)f(t)) = \left\{ \inf c : f^*(t)f(t) < c \text{ почти всюду} \right\}.$$

Норма функции $f(t) \in L_\infty(\mathbb{R})$ определяется равенством

$$\|f\|_{L_\infty(\mathbb{R})} = \operatorname{ess\,sup}_t \sqrt{f^*(t)f(t)}.$$

В случае векторных и матричных комплекснозначных функций пространства Лебега $L_p^m(\mathbb{R})$, $L_p^{m \times k}(\mathbb{R})$, $L_\infty^m(\mathbb{R})$, $L_\infty^{m \times k}(\mathbb{R})$ и нормы в них задаются следующим образом.

Определение 5.10.

$$L_p^m(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{f}(t) : \mathbf{f}(t) \in \mathbb{C}^m, t \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t)]^{p/2} dt < \infty \right\},$$

$$\mathbf{f}^{\sim} = [\mathbf{f}^*]^T, 1 \leq p < \infty,$$

$$\|\mathbf{f}\|_{L_p^m(\mathbb{R})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t)]^{p/2} dt \right)^{1/p}.$$

Определение 5.11.

$$L_p^{m \times k}(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{f}(t) : \mathbf{f}(t) \in \mathbb{C}^{m \times k}, t \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{\infty} [\text{tr} \{ \mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t) \}]^{p/2} dt < \infty \right\},$$

$$\|\mathbf{f}\|_{L_p^{m \times k}(\mathbb{R})} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} [\text{tr} \{ \mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t) \}]^{p/2} dt \right)^{1/p}.$$

Определение 5.12.

$$L_\infty^m(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{f}(t) : \mathbf{f}(t) \in \mathbb{C}^m, t \in \mathbb{R}, \text{ess sup}_t (\mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t)) < \infty \right\},$$

$$\|\mathbf{f}\|_{L_\infty^m(\mathbb{R})} = \text{ess sup}_t \sqrt{\mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t)}.$$

Определение 5.13.

$$L_\infty^{m \times k}(\mathbb{R}) = \left\{ \mathbf{f}(t) : \mathbf{f}(t) \in \mathbb{C}^{m \times k}, t \in \mathbb{R}, \text{ess sup}_t \text{tr} \{ \mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t) \} < \infty \right\},$$

$$\|\mathbf{f}\|_{L_\infty^{m \times k}(\mathbb{R})} = \text{ess sup}_t \sqrt{\lambda_{\max} \mathbf{f}^{\sim}(t) \mathbf{f}(t)}.$$

Предыдущие определения относились к комплекснозначным функциям действительного аргумента. Далее приведем определения пространств Лебега и норм в них для комплекснозначных функций комплексного аргумента.

Определение 5.14. Пространство Лебега $L_p(\mathbb{C})$, $(1 \leq p < \infty)$ есть пространство комплекснозначных функций $F(s)$ комплексного аргумента s с p -интегрируемым по мнимой оси модулем

$$L_p(\mathbb{C}) = \left\{ F(s) : F(s), s \in \mathbb{C}^1, \int_{-\infty}^{\infty} [F(-j\omega) F(j\omega)]^{p/2} d\omega < \infty \right\}.$$

Норма в $L_p(\mathbb{C})$ определяется равенством

$$\|F\|_{L_p(\mathbb{C})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(-j\omega) F(j\omega)]^{p/2} d\omega \right)^{1/p}.$$

Определение 5.15. Пространство Лебега $L_\infty(\mathbb{C})$ задается в виде

$$L_\infty(\mathbb{C}) = \left\{ F(s) : F(s), s \in \mathbb{C}^1, \text{ess sup}_\omega (F(-j\omega) F(j\omega)) < \infty \right\}.$$

Норма функции $F(s) \in L_\infty(\mathbb{C})$ определяется равенством

$$\|F\|_{L_\infty(\mathbb{C})} = \operatorname{ess\,sup}_\omega |F(j\omega)|$$

по аналогии с определениями для функций действительного аргумента.

Определение 5.16.

$$L_p^m(\mathbb{C}) = \left\{ F(s) : F(s) \in \mathbb{C}^m, s \in \mathbb{C}^1, \int_{-\infty}^{\infty} [F^T(-j\omega)F(j\omega)]^{p/2} d\omega < \infty \right\}.$$

Норма в $L_p^m(\mathbb{C})$ определяется равенством

$$\|F\|_{L_p^m(\mathbb{C})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F^T(-j\omega)F(j\omega)]^{p/2} d\omega \right)^{1/p}.$$

Определение 5.17.

$$L_\infty^m(\mathbb{C}) = \left\{ F(s) : F(s) \in \mathbb{C}^m, s \in \mathbb{C}^1, \operatorname{ess\,sup}_\omega (F^T(-j\omega)F(j\omega)) < \infty \right\}.$$

Норма функции $F(s) \in L_\infty^m(\mathbb{C})$ определяется равенством

$$\|F\|_{L_\infty^m(\mathbb{C})} = \operatorname{ess\,sup}_\omega |F(j\omega)|,$$

где

$$|F(j\omega)| = \sqrt{F^T(-j\omega)F(j\omega)}.$$

Определение 5.18.

$$L_p^{m \times k}(\mathbb{C}) = \left\{ F(s) : F(s) \in \mathbb{C}^{m \times k}, s \in \mathbb{C}^1, \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{tr}\{F^-(j\omega)F(j\omega)\}]^{p/2} d\omega < \infty \right\}.$$

Норма в $L_p^{m \times k}(\mathbb{C})$ определяется равенством

$$\|F\|_{L_p^{m \times k}(\mathbb{C})} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [\operatorname{tr}\{F^-(j\omega)F(j\omega)\}]^{p/2} d\omega \right)^{1/p},$$

где $F^-(s) = [F^*(-s^*)]^T$.

Определение 5.19.

$$L_\infty^{m \times k}(\mathbb{C}) = \left\{ F(s) : F(s) \in \mathbb{C}^{m \times k}, s \in \mathbb{C}^1, \operatorname{ess\,sup}_\omega \operatorname{tr}\{F^-(j\omega)F(j\omega)\} < \infty \right\}.$$

Норма функции $F(s) \in L_\infty^{m \times k}(\mathbb{C})$ определяется равенством

$$\|F\|_{L_\infty^{m \times k}(\mathbb{C})} = \operatorname{ess\,sup}_\omega \sqrt{\lambda_{\max} F^-(j\omega)F(j\omega)}.$$

Определение 5.20. Величину, равную

$$\bar{\sigma}(F(j\omega)) = \sqrt{\lambda_{\max} F^-(j\omega)F(j\omega)},$$

будем называть максимальным сингулярным значением матрицы $F(s)$.

5.1.5.2. ПРОСТРАНСТВА ХАРДИ

Под пространствами Харди понимают пространства комплекснозначных функций комплексного аргумента, аналитичных в правой открытой полуплоскости. Ниже дадим краткие определения этих пространств.

Определение 5.21. Пространство Харди H_p определяется так:

$$H_p = \left\{ F(s) : F(s), s \in \mathbb{C}^1, F(s) \text{ — аналитичны в области } \operatorname{Re} s > 0, \right. \\ \left. \int_{-\infty}^{\infty} [F(-j\omega)F(j\omega)]^{p/2} d\omega < \infty \right\}.$$

Норма в H_p определяется равенством

$$\|F\|_{H_p} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} [F(-j\omega)F(j\omega)]^{p/2} d\omega \right)^{1/p}.$$

Как видно из приведенного определения, пространство Харди H_p является подпространством пространства Лебега $L_p(\mathbb{C})$. Аналогично вводятся пространства $H_\infty, H_p^m, H_p^{m \times k}, H_\infty^m, H_\infty^{m \times k}$ и нормы в них.

В данной главе наибольший интерес будут представлять пространства $L_p, H_p, L_\infty, H_\infty$, поэтому остановимся на рассмотрении этих пространств более подробно.

Как уже отмечалось выше, H_p является подпространством L_p с той же нормой. Аналогичное утверждение справедливо и относительно H_∞ и L_∞ . Для общности все дальнейшие результаты мы будем приводить для пространств $L_2^{m \times k}$ и $H_2^{m \times k}$.

Замечание. Пространства Лебега при $p = 2$ являются гильбертовыми со скалярным произведением

$$(F, G) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{tr} \{ F^T(-j\omega) G(j\omega) \} d\omega;$$

здесь $F(s), G(s) \in L_2^{m \times k}$. Для этих пространств можно ввести понятие ортогонального дополнения. Через $(H_2^{m \times k})^\perp$ обозначим ортогональное дополнение пространства $H_2^{m \times k}$ в пространстве $L_2^{m \times k}$, т.е.

$$L_2^{m \times k} = H_2^{m \times k} \oplus (H_2^{m \times k})^\perp.$$

Замечание. Пространства Лебега при $p = \infty$ являются банаховыми (линейными, нормированными, полными). Для этих пространств также вводится понятие ортогонального дополнения и справедливо тождество

$$L_\infty^{m \times k} = H_\infty^{m \times k} \oplus (H_\infty^{m \times k})^\perp.$$

Префикс R в дальнейших рассмотрениях предполагает ограничение на вещественно рациональный случай, например, RH_∞ — подпространство пространства H_∞ , состоящее из вещественных рациональных ограниченных аналитических в правой полуплоскости функций.

5.2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

В этом параграфе будут введены фундаментальные понятия теории робастного управления. Как и в предыдущем параграфе, основным будет рассмотрение систем с

одним входом и одним выходом. Определяются понятия хорошей определенности, внутренней устойчивости.

5.2.1. ПРОСТЕЙШИЙ КОНТУР С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

Самая элементарная система управления с обратной связью имеет три компонента: объект управления, сенсор, измеряющий выход объекта, и регулятор, формирующий вход объекта. Обычно исполнительный механизм присоединяют к объекту управления. Эта простейшая система управления представлена на рис. 5.2. Заметим, что каждая из трех компонент имеет два входа, один внутренний и один внешний. Сигналы на рис. 5.2 имеют следующую интерпретацию:

- y — задающий входной сигнал;
- v — выход сенсора;
- u — вход объекта;
- d — внешнее возмущение;
- x — выход объекта и измеряемый сигнал;
- n — шумы измерения.

Три сигнала извне — y, d, n — называются внешними входами.

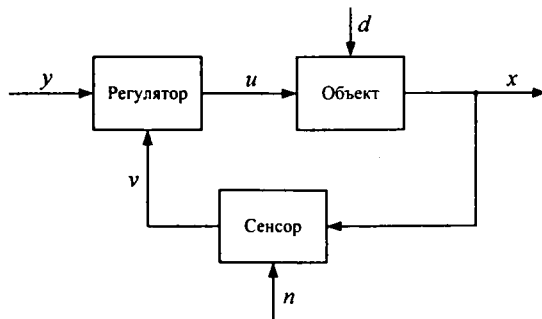


Рис. 5.2. Простейшие системы управления

Мы будем рассматривать различные показатели качества, но общее во всех этих показателях — x должен аппроксимировать некоторую функцию от y в присутствии возмущения d , шума измерения n и неопределенности объекта.

Каждая из трех компонент на рис. 5.2 предполагается линейной, т.е. их выходы являются линейными функциями входов. Мы можем записать это в виде

$$x = W_0(d + u),$$

$$v = F(x + n),$$

$$u = W_{\text{кy}}(y - v).$$

Структурная схема этих уравнений представлена на рис. 5.3.

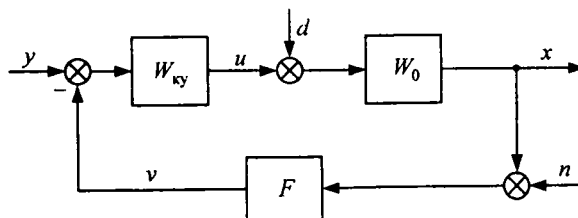


Рис. 5.3. Базовый контур обратной связи

В этом разделе вводится понятие хорошо определенной системы.

Определение 5.22. Система на рис. 5.3 называется хорошо определенной, если все передаточные функции в замкнутой системе существуют, т.е. существуют передаточные функции от внешних входов y , d , n к внутренним сигналам x , u , v .

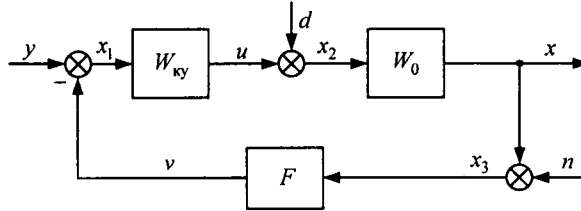


Рис. 5.4. Базовый контур обратной связи

На рис. 5.4 изображена структурная схема, на которой отмечены выходы узлов суммирования. Для определения хорошей определенности рассмотрим девять передаточных функций от y , d , n к x_1 , x_2 , x_3 (другие передаточные функции определяются этими). Запишем уравнения для узлов суммирования:

$$X_1(s) = Y(s) - F(s)X_3(s),$$

$$X_2(s) = D(s) - W_{ky}(s)X_1(s),$$

$$X_3(s) = N(s) - W_0(s)X_2(s),$$

или в матричном виде

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -W_{ky} & 1 & 0 \\ 0 & -W_0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ D \\ N \end{bmatrix}.$$

Таким образом, система будет хорошо определена, если изображенная выше 3×3 матрица будет невырожденной, т.е. детерминант $1 + W_0 W_{ky} F$ не равен нулю. Например, система с $W_0(s) = 1$, $W_{ky}(s) = 1$, $F(s) = -1$ не является хорошо определенной. Далее, девять передаточных функций могут быть получены из уравнения

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & F \\ -W_{ky} & 1 & 0 \\ 0 & -W_0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ D \\ N \end{bmatrix},$$

или

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{1 + W_0 W_{ky} F} \begin{bmatrix} 1 & -W_0 F & -F \\ W_{ky} & 1 & -W_{ky} F \\ W_0 W_{ky} & W_0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Y \\ D \\ N \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Более строгое понятие хорошо определенной системы, которое имеет смысл, когда W_0 , W_{ky} и F являются правильными, заключается в том, что девять вышеуказанных функций являются правильными. Необходимым и достаточным условием для этого является тот факт, что $1 + W_0 W_{ky} F$ не является строго правильной, т.е. $W_0 W_{ky} F(\infty) \neq -1$. Заметим, что система автоматически будет хорошо определенной, если одна из передаточных функций W_0 , W_{ky} или F будет строго правильной.

5.2.2. ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Определение 5.23. Система, изображенная на рис. 5.4, называется *внутренне устойчивой*, если девять передаточных функций в (5.8) являются устойчивыми.

Таким образом, если система внутренне устойчива, то из ограниченности внешних входов следует ограниченность и внутренних состояний системы.

Идея, лежащая в основе понятия внутренней устойчивости, состоит в том, что недостаточно только рассматривать вход-выходные передаточные функции, например от y к x . Эта передаточная функция может быть устойчива, а внутренние сигналы в системе могут быть неограниченными.

Пример 5.3. Возьмем в системе на рис. 5.4

$$W_{ky}(s) = \frac{s-1}{s+1}, \quad W_0(s) = \frac{1}{s^2-1}, \quad F(s) = 1.$$

Легко проверить, что передаточная функция от y к x является устойчивой, а от d к x — нет.

Далее будет представлен тест на внутреннюю устойчивость, который легче, чем проверка девяти передаточных функций. Запишем W_0 , W_{ky} и F как отношение взаимно простых полиномов, т.е. полиномов, которые не имеют общих делителей:

$$W_0 = \frac{A_{W_0}}{B_{W_0}}, \quad W_{ky} = \frac{A_{W_{ky}}}{B_{W_{ky}}}, \quad F = \frac{A_F}{B_F}.$$

Характеристический полином системы будет равен

$$A_{W_0} A_{W_{ky}} A_F + B_{W_0} B_{W_{ky}} B_F.$$

Полюса замкнутой системы являются нулями характеристического полинома.

Теорема 5.2. Система является внутренне устойчивой тогда и только тогда, когда полюса замкнутой системы не лежат в области $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Доказательство. Для простоты предположим, что $F = 1$. Доказательство в общем случае аналогично. Из (5.8) имеем

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{A_{W_0} A_{W_{ky}} + B_{W_0} B_{W_{ky}}} \begin{bmatrix} B_{W_0} B_{W_{ky}} & -A_{W_0} B_{W_{ky}} & -B_{W_0} B_{W_{ky}} \\ B_{W_0} A_{W_{ky}} & B_{W_0} B_{W_{ky}} & -B_{W_0} A_{W_{ky}} \\ A_{W_0} A_{W_{ky}} & A_{W_0} B_{W_{ky}} & B_{W_0} B_{W_{ky}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ D \\ N \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Заметим, что характеристический полином равен $A_{W_0} A_{W_{ky}} + B_{W_0} B_{W_{ky}}$. Достаточность очевидна, система внутренне устойчива, если характеристический полином не имеет корней в правой полуплоскости.

Докажем необходимость. Предположим, что система внутренне устойчива. Тогда девять передаточных функций в (5.8) являются устойчивыми, они не имеют полюсов в правой полуплоскости. Используя тот факт, что передаточные функции — отношения взаимно простых полиномов, легко показать, что у характеристического полинома нет корней в правой полуплоскости.

По теореме 5.2 внутренняя устойчивость может быть определена проверкой нулей полинома. Существует другой тест для проверки внутренней устойчивости.

Теорема 5.3. Система, изображенная на рис. 5.2, будет внутренне устойчивой тогда и только тогда, когда выполняются два условия:

- 1) передаточная функция $1 + W_0 W_{ky} F$ не имеет нулей в $\operatorname{Re} s \geq 0$;
- 2) в произведении $W_0 W_{ky} F$ нет сокращения нулей и полюсов в $\operatorname{Re} s \geq 0$.

Мы опускаем доказательство, так как его можно провести самостоятельно в качестве упражнения, используя теорему 5.2.

5.2.3. КАЧЕСТВО

В этом разделе будет рассматриваться множество задающих входных сигналов и ограничение на ошибку на выходе. Это качество будет оценено в терминах границы взвешенной нормы.

Определение 5.24. *Передачная функция от задающего входного сигнала к ошибке слежения*

$$S = \frac{1}{1 + W_p}$$

называется *функцией чувствительности*.

Напомним, что $W_p = W_0 W_{ky}$. В дальнейшем будем предполагать, что система внутренне устойчива, так что S является правильной устойчивой передачной функцией.

Термин «функция чувствительности» имеет следующее происхождение. Пусть T будет передачной функцией от y к x :

$$T = \frac{W_0 W_{ky}}{1 + W_0 W_{ky}}.$$

Она также называется *функцией дополнительной чувствительности*. Один из путей оценить, как чувствительна T к изменению — поделить относительное изменение $\Delta T/T$ на относительное изменение $\Delta W_0/W_0$. Полагая W_0 независимой переменной а T — функцией, имеем

$$\lim_{\Delta W_0 \rightarrow 0} \frac{\Delta T/T}{\Delta W_0/W_0} = \frac{dT}{dW_0} \frac{W_0}{T}.$$

Легко показать, что правая часть равна S . Таким образом, S есть чувствительность передачной функции замкнутой системы к малым возмущениям в W_0 .

Одним из самых важных качеств системы является способность системы отслеживать входной сигнал. Ниже мы введем качество, меру «хорошести» слежения. Эта мера зависит, во-первых, от входного сигнала и, во-вторых, от меры, которой мы будем измерять ошибку слежения. Обычно входной сигнал неизвестен заранее — мало систем управления конструируется под один конкретный входной сигнал. Скорее известно множество входных сигналов.

Пусть y будет синусоидальным сигналом амплитуды ≤ 1 и мы хотим получить ошибку ε по амплитуде $\leq E$. Тогда качество кратко может быть выражено так:

$$\|S\|_\infty < E.$$

Здесь мы использовали табл. 5.1: максимальная амплитуда ε равна ∞ -норме передачной функции. Если же мы определим (в нашем случае тривиальную) весовую функцию $W_1(s) = 1/E$, тогда критерий качества может быть выражен неравенством $\|W_1 S\|_\infty < 1$.

Ситуация становится более реалистичной и более интересной, когда весовая функция зависит от частоты. Предположим, что $W_1(s)$ является дробно-рациональной. Рассмотрим два примера.

1. Предположим, что семейство входных сигналов является множеством сигналов вида $W_1(s)u_1$, где u_1 — множество синусоидальных сигналов с амплитудой, меньшей 1 на входе фильтра. Тогда максимальная амплитуда ε равна $\|W_1 S\|_\infty$.

2. В некоторых приложениях, например при конструировании систем управления самолетом, конструктор опытным путем знает желаемую форму для амплитудной характеристики S . В частности, предположим, что известно — хорошее качество достигается, когда график $|S(j\omega)|$ лежит под некоторой кривой. Перепишем это условие в виде

$$|S(j\omega)| < |W_1(j\omega)|^{-1} \quad \forall \omega,$$

или, другими словами, $\|W_1 S\|_\infty < 1$.

Существует наглядная графическая интерпретация ограничения $\|W_1 S\|_\infty < 1$. Заметим, что

$$\|W_1 S\|_\infty < 1 \Leftrightarrow \left| \frac{W_1(j\omega)}{1 + W_p(j\omega)} \right| < 1 \Leftrightarrow |W_1(j\omega)| < |1 + W_p(j\omega)| \quad \forall \omega.$$

Последнее неравенство говорит, что на любой частоте точка $W_p(j\omega)$ на диаграмме Найквиста лежит вне диска с центром -1 и радиусом $|W_1(j\omega)|$ (см. рис. 5.5).

В конце этого раздела хотелось бы сказать несколько слов об обобщениях, введенных в разделе определений на многомерный случай. Система управления называется хорошо обусловленной, если матрица передаточных функций от внешних входов к выходам блоков существует и является правильной (ограниченной при $s \rightarrow \infty$), и называется внутренне устойчивой, если эта матрица асимптотически устойчива. К сожалению, в рамках вышеизложенного материала невозможно привести критерии хорошей обусловленности и внутренней устойчивости, так как они требуют введения понятия факторизации. Это понятие будет изложено в последующем материале.

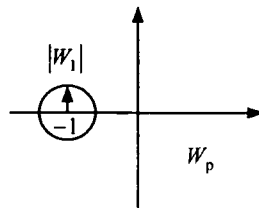


Рис. 5.5. Диаграмма Найквиста, демонстрирующая ограничение $\|W_1 S\|_\infty < 1$

5.3. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И РОБАСТНОСТЬ

Ни одна математическая система не может точно моделировать физическую систему. По этой причине мы должны знать, как ошибки модели могут повлиять на качество управляемой системы. Этот параграф начинается с обсуждения различных моделей неопределенности. Далее рассматривается робастная устойчивость (устойчивость для класса объектов) и робастное качество (гарантированное слежение для класса объектов).

5.3.1. НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ ОБЪЕКТА

Интуитивно понятно, что вкладывается в понятие неопределенности объекта: это либо неточно заданные коэффициенты уравнения, либо неучтенные производные в описании, или что-либо другое, соответствующее различию выбранной математической модели и реальной системы. Неопределенность объекта удобно выражать в тер-

минах принадлежности объекта к некоторому множеству. Множество неопределенностей объекта можно разделить на структурную и неструктурную.

Для примера структурного множества рассмотрим следующую модель объекта:

$$\frac{1}{s^2 + as + 1}.$$

Предположим, что константа известна с точностью до принадлежности некоторому интервалу $[a_{\min}, a_{\max}]$. Тогда объект принадлежит структурному множеству

$$\mathbb{P} = \left\{ \frac{1}{s^2 + as + 1} : a_{\min} \leq a \leq a_{\max} \right\}.$$

Таким образом, один из типов структурной неопределенности параметризован конечным числом скалярных параметров (в этом примере один параметр a). Другим типом структурной неопределенности может быть дискретное множество объектов, не обязательно параметризованное.

Однако для нас более важным типом неопределенности является неструктурная определенность, и вот по каким двум причинам. Во-первых, нам кажется, что все модели, используемые при синтезе управления с обратной связью, должны включать некоторую неструктурную неопределенность, для того чтобы учесть немоделируемую динамику, особенно на высоких частотах. Во-вторых, для специального типа неопределенности, неопределенности в диске, можно получить простые, достаточно общие методы анализа. Таким образом, основным взглядом на неструктурную неопределенность будет рассмотрение неопределенности в диске; мультипликативная неопределенность в диске выбрана для детального изучения. Это лишь один тип неструктурной неопределенности.

5.3.1.1. МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЕ ВОЗМУЩЕНИЕ

Предположим, что передаточная функция номинального объекта равна W_0 , и рассмотрим возмущенный объект, передаточная функция которого равна $\hat{W}_0 = (1 + \Delta W_2) W_0$. Здесь W_2 является фиксированной устойчивой передаточной функцией (весовой функцией), а Δ является произвольной устойчивой передаточной функцией, удовлетворяющей неравенству $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$. Такое возмущение Δ будем называть *допустимым*.

Из определения $\hat{W}_0$ получаем

$$\frac{\hat{W}_0}{W_0} - 1 = \Delta W_2.$$

Следовательно, если $\|\Delta\|_{\infty} \leq 1$, то

$$\left| \frac{\hat{W}_0(j\omega)}{W_0(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_2(j\omega)| \quad \forall \omega,$$

таким образом, $|W_2(j\omega)|$ обеспечивает профиль неопределенности. Это неравенство описывает диск в комплексной плоскости: на каждой частоте точка $\hat{W}_0/W_0$ лежит внутри круга с центром 1 и радиусом $|W_2(j\omega)|$.

Обычно $|W_2(j\omega)|$ — возрастающая функция частоты: неопределенность возрастает с возрастанием частоты.

Таким образом, модель неопределенности характеризуется номинальным объектом W_0 вместе с весовой передаточной функцией W_2 .

Мультипликативная модель возмущения не всегда удобна для практики, так как диск порой бывает слишком грубой аппроксимацией реальной неопределенности. В этом случае синтезированный для такой модели регулятор будет достаточно консервативным. Вполне естественно, что чем точнее известна неопределенность в объекте, тем лучшее качество системы можно обеспечить построенным регулятором. Мультипликативная модель возмущения иногда является консервативной, но платой за это будет несколько теоретических результатов.

5.3.1.2. ДРУГИЕ ВОЗМУЩЕНИЯ

Другие модели неопределенности могут быть получены с помощью модели мультипликативных возмущений.

Пример 5.4. Рассмотрим семейство объектов, представленных в начале параграфа и описываемых следующим образом:

$$\frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad 0,4 \leq a \leq 0,8.$$

Можно представить

$$a = 0,6 + 0,2\Delta, \quad -1 \leq \Delta \leq 1,$$

таким образом, семейство может быть описано как

$$\frac{W_0(s)}{1 + \Delta W_2(s)W_0(s)}, \quad -1 \leq \Delta \leq 1,$$

где

$$W_0(s) = \frac{1}{s^2 + as + 1}, \quad W_2(s) = 0,2s.$$

Заметим, что W_0 является номинальным объектом при значении $a = 0,6$.

Ниже приведем различные варианты моделей неопределенности:

$$(1 + \Delta W_2)W_0, \quad W_0 + \Delta W_2, \quad \frac{W_0}{(1 + \Delta W_2)W_0}, \quad \frac{T}{1 + \Delta W_2}.$$

Соответствующие предположения должны быть сделаны на Δ и W_2 в каждом случае. Можно ослабить предположение о том, что Δ должна быть устойчива, но тогда сложнее доказывать теоремы в следующих параграфах.

5.3.2. РОБАСТНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Понятие робастности может быть описано следующим образом. Предположим, что передаточная функция объекта W_0 принадлежит множеству $\mathbb{P}$, как в предыдущем разделе. Рассмотрим некоторую характеристику системы с обратной связью, например внутреннюю устойчивость.

Определение 5.25. Регулятор $W_{\text{кy}}$ называется робастным относительно выбранной характеристики, если эта характеристика присуща любому объекту в множестве $\mathbb{P}$.

Таким образом, понятие робастности подразумевает наличие регулятора, множества объектов и характеристики системы. Для разработчиков систем управления наиболее интересными являются характеристики робастной устойчивости и робастного качества, которое будет обсуждаться в следующем параграфе.

Определение 5.26. Регулятор $W_{\text{кy}}$ обеспечивает робастную устойчивость, если он обеспечивает внутреннюю устойчивость для любого объекта из $\mathbb{P}$.

Хотелось бы иметь критерий робастной устойчивости, критерий, включающий $W_{\text{кy}}$ и $\mathbb{P}$. Если $\mathbb{P}$ имеет соответствующий размер, тогда максимальный размер, такой, что $W_{\text{кy}}$ стабилизирует любой объект из $\mathbb{P}$, может быть использован как характеристика области устойчивости.

Об области устойчивости дает информацию критерий Найквиста. Заметим, что расстояние от критической точки -1 до ближайшей точки диаграммы Найквиста W_p равно $\frac{1}{\|S\|_\infty}$:

$$\begin{aligned} \text{расстояние от } -1 \text{ до диаграммы Найквиста} &= \inf \left| -1 - W_p(j\omega) \right| = \\ &= \inf_\omega \left| 1 + W_p(j\omega) \right| = \left[\sup_\omega \frac{1}{\left| 1 + W_p(j\omega) \right|} \right]^{-1} = \|S\|_\infty^{-1}. \end{aligned}$$

Таким образом, если $\|S\|_\infty \gg 1$, тогда диаграмма Найквиста подходит близко к критической точке и система с обратной связью близка к неустойчивой. Однако как мера области устойчивости это расстояние не является полностью адекватным, так как оно не содержит информацию о частотах. Более точно: если номинальный объект W_0 возмущен до $\hat{W}_0$, имеющего такое же количество неустойчивых полюсов, что и W_0 , и удовлетворяющего неравенству

$$\left| \hat{W}_0(j\omega)W_{\text{к}}(j\omega) - W_0(j\omega)W_{\text{к}}(j\omega) \right| < \|S\|_\infty^{-1} \quad \forall \omega,$$

тогда внутренняя устойчивость сохраняется (число оборотов вокруг критической точки диаграммы Найквиста не меняется). Но это условие достаточно консервативно, так как могут допускаться большие по величине возмущения на частотах, где $W_0(j\omega)W_{\text{к}}(j\omega)$ находятся дальше от критической точки.

Более точными области устойчивости получаются, когда мы располагаем более определенной моделью возмущений, зависящей от частоты. Например, мультипликативной моделью возмущения $\hat{W}_0 = (1 + \Delta W_2)W_0$. Зафиксируем положительное число β и рассмотрим семейство объектов

$$\{\hat{W}_0 : \Delta \text{ является устойчивой и } \|\Delta\|_\infty \leq \beta\}.$$

Регулятор, который обеспечивает внутреннюю устойчивость для номинального объекта W_0 , будет стабилизировать и все множество при достаточно малом β . Обозначим через β_{sup} наибольшее значение β , при котором $W_{\text{к}}$ обеспечивает устойчивость всего семейства. Тогда β_{sup} может быть характеристикой области устойчивости (в соответствии с моделью неопределенности). Аналогично область устойчивости может быть определена для других моделей неопределенности.

Вернемся сейчас к двум классическим мерам области устойчивости: запасу по амплитуде и запасу по фазе. Предположим, что система, состоящая из объекта W_0 и регулятора $W_{\text{к}}$, является внутренне устойчивой. Возмутим объект положительным действительным коэффициентом k : $\hat{W}_0 = kW_0$. Верхняя граница запаса по амплитуде, обозначаемая k_{max} , является наименьшей величиной k , большей 1, когда система с обратной связью теряет внутреннюю устойчивость. Если такого числа не существует, то положим $k_{\text{max}} = \infty$. Аналогично определим k_{min} . Эти два числа могут быть получены из диаграммы Найквиста разомкнутой системы W_p ; например, $-1/k_{\text{max}}$ является точкой, где диаграмма Найквиста пересекает сегмент $(-1, 0)$ действительной оси, ближайшей точкой к -1 , если существуют несколько точек пересечения.

Пусть возмущенный объект имеет вид $\hat{W}_0 = e^{-j\phi} W_0$, где ϕ — положительное число. Запас по фазе $\phi_{\max}$ является максимальным числом (обычно выраженным в степенях), таким, что внутренняя устойчивость сохраняется для всех $0 \leq \phi \leq \phi_{\max}$. Можно увидеть, что $\phi_{\max}$ является углом, на который надо повернуть диаграмму Найквиста, пока она не пройдет через критическую точку -1 , или, в радианах, $\phi_{\max}$ равна длине дуги вдоль единичной окружности от диаграммы Найквиста до критической точки.

Таким образом, запас по амплитуде и фазе измеряет расстояние от критической точки до диаграммы Найквиста в некоторых специальных направлениях. Запасы по амплитуде и фазе традиционно были важными показателями робастности: если каждый из них становился малым, то система приближалась к неустойчивой.

Ниже рассмотрим критерий робастной устойчивости на примере мультипликативной модели возмущения. Предположим, что номинальная система (объект плюс регулятор) является внутренне устойчивой. Напомним, что дополнительной функцией чувствительности T мы называем

$$T = 1 - S = \frac{W_p}{1 + W_p} = \frac{W_0 W_{ky}}{1 + W_0 W_{ky}}.$$

Теорема 5.4. Для мультипликативной модели неопределенности регулятор W_{ky} обеспечивает робастную устойчивость тогда и только тогда, когда $\|W_2 T\|_{\infty} < 1$.

Доказательство. Предположим, что $\|W_2 T\|_{\infty} < 1$. Построим диаграмму Найквиста. Так как номинальный объект внутренне устойчив, из критерия Найквиста заключаем, что диаграмма Найквиста W_p не проходит через -1 и число ее полных оборотов против часовой стрелки равно числу полюсов W_0 в правой полуплоскости плюс число полюсов W_{ky} в правой полуплоскости.

Фиксируем допустимую Δ . Построим диаграмму Найквиста $\hat{W}_0 W_{ky} = (1 + \Delta W_2) W_p$. Не требуется никаких дополнительных вырезаний, так как ΔW_2 не вводит дополнительных полюсов на мнимой оси. Нам надо показать, что диаграмма Найквиста для $(1 + \Delta W_2) W_p$ не проходит через -1 и число полных оборотов против часовой стрелки равно числу полюсов в правой полуплоскости плюс число полюсов $(1 + \Delta W_2) W_0$ в правой полуплоскости. Другими словами, надо показать, что диаграмма Найквиста $(1 + \Delta W_2) W_p$ не проходит через -1 и количество оборотов совпадает с количеством оборотов диаграммы Найквиста для W_0 .

Запишем тождество

$$1 + (1 + \Delta W_2) W_p = (1 + W_p)(1 + \Delta W_2 T). \quad (5.10)$$

Так как

$$\|\Delta W_2 T\|_{\infty} \leq \|W_2 T\|_{\infty} < 1,$$

точка $1 + \Delta W_2 T$ лежит в некотором замкнутом диске с центром 1 и радиусом < 1 для всех точек s на плоскости. Таким образом, из (5.10) следует, что как только s делает один оборот в плоскости, сдвиг в угле $1 + (1 + \Delta W_2) W_p$ равен сдвигу в угле $1 + W_p$. Это дает желаемый результат.

Докажем обратное. Предположим, что $\|W_2 T\|_\infty \geq 1$. Построим допустимое возмущение Δ , которое делает систему неустойчивой. Так как T является строго правильной, на некоторой частоте ω

$$|W_2(j\omega)T(j\omega)| = 1. \quad (5.11)$$

Предположим, что $\omega = 0$. Тогда $W_2(0)T(0)$ является действительным числом, равным либо $+1$, либо -1 . Если $\Delta = -W_2(0)T(0)$, тогда Δ является допустимой и

$$1 + \Delta W_2(0)T(0) = 0.$$

Из (5.10) следует, что диаграмма Найквиста $(1 + \Delta W_2)W_p$ проходит через критическую точку, таким образом, возмущенная система не является внутренне устойчивой.

Эта теорема может быть эффективно применена к определению характеристики области устойчивости β_{sup} , определенной выше. Используя простое масштабирование, имеем

$$\begin{aligned} \{\hat{W}_0 = (1 + \Delta W_2)W_0 : \|\Delta\|_\infty \leq \beta\} &= \{\hat{W}_0 = (1 + \beta^{-1}\Delta\beta W_2)W_0 : \|\beta^{-1}\Delta\|_\infty \leq 1\} = \\ &= \{\hat{W}_0 = (1 + \Delta_1\beta W_2)W_0 : \|\Delta_1\|_\infty \leq 1\}. \end{aligned}$$

Далее, используя теорему 5.4, имеем

$$\beta_{\text{sup}} = \sup\{\beta : \|\beta W_2 T\|_\infty < 1\} = \frac{1}{\|W_2 T\|_\infty}.$$

Условие $\|W_2 T\| < 1$ имеет наглядную графическую интерпретацию (см. рис. 5.6). Заметим, что

$$\|W_2 T\| < 1 \Leftrightarrow |W_2(j\omega)W_p(j\omega)| < |1 + W_p(j\omega)| \quad \forall \omega.$$

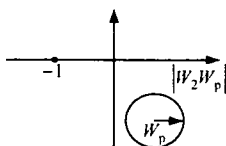


Рис. 5.6. Графическая интерпретация условия $\|W_2 T\|$

Последнее неравенство утверждает, что на всех частотах критическая точка -1 лежит вне диска с центром радиуса.

5.3.2.1. КРИТЕРИИ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Приведенная ниже таблица обобщает критерии робастной устойчивости для различных моделей неопределенности.

Таблица 5.3

Критерии робастной устойчивости

Модель неопределенности	Критерий робастной устойчивости
$(1 + \Delta W_2)W_0$	$\ W_2 T\ _\infty < 1$
$W_0 + \Delta W_2$	$\ W_2 W_{ky} S\ _\infty < 1$
$\frac{W_0}{1 + \Delta W_2 W_0}$	$\ W_2 W_0 S\ _\infty < 1$
$\frac{W_0}{1 + \Delta W_2}$	$\ W_2 S\ _\infty < 1$

5.3.3. РОБАСТНОЕ КАЧЕСТВО

В этом разделе рассмотрим качество возмущенного объекта. Предположим, что передаточная функция объекта принадлежит множеству $\mathbb{P}$. Общее понятие робастного качества подразумевает, что внутренняя устойчивость и качество определенного типа должно иметь место для всех объектов из $\mathbb{P}$. Снова рассмотрим случай мультипликативных возмущений.

Напомним, что если номинальная система внутренне устойчива, то условием номинального качества является условие $\|W_1 S\|_\infty < 1$, а условием робастной устойчивости является условие $\|W_2 S\|_\infty < 1$. Если W_0 возмущается до $(1 + \Delta W_2)W_0$, то S возмущается до

$$\frac{1}{1 + (1 + \Delta W_2)W_p} = \frac{S}{1 + \Delta W_2 T}.$$

Следовательно, условие робастного качества должно быть

$$\|W_2 T\|_\infty < 1 \text{ и } \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1 \quad \forall \Delta.$$

Здесь Δ должна быть допустимой. Следующая теорема дает критерий робастного качества.

Теорема 5.5. *Необходимое и достаточное условие робастного качества есть*

$$\|W_1 S\| + \|W_2 T\|_\infty < 1. \quad (5.12)$$

Доказательство. Предположим, что выполнено (5.12), или, что эквивалентно,

$$\|W_2 T\|_\infty < 1 \text{ и } \left\| \frac{W_1 S}{1 - \Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1. \quad (5.13)$$

Зафиксируем Δ . Справедливы соотношения

$$1 = |1 + \Delta W_2 T - \Delta W_2 T| \leq |1 + \Delta W_2 T| + |\Delta W_2 T|,$$

откуда

$$1 - |\Delta W_2 T| \leq |1 + \Delta W_2 T|.$$

Из предыдущего неравенства следует

$$\left\| \frac{W_1 S}{1 - |\Delta W_2 T|} \right\|_\infty \geq \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1.$$

Последнее неравенство и (5.13) приводят к соотношению

$$\left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_\infty < 1.$$

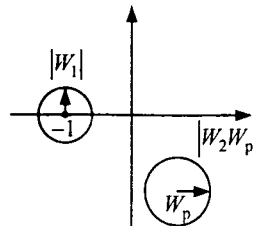


Рис. 5.7. Графическая интерпретация условия (5.12)

Обратно, предположим,

$$\|W_2 T\|_{\infty} < 1 \text{ и } \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_{\infty} < 1 \quad \forall \Delta. \quad (5.14)$$

Выберем частоту, на которой

$$\left\| \frac{W_1 S}{1 - |\Delta W_2 T|} \right\|_{\infty}$$

максимальна. Выберем Δ так, чтобы выполнялось

$$1 - |W_2 T| = |1 + \Delta W_2 T|.$$

При этом

$$\left\| \frac{W_1 S}{1 - |\Delta W_2 T|} \right\|_{\infty} = \frac{|W_1 S|}{1 - |\Delta W_2 T|} = \frac{|W_1 S|}{|1 + \Delta W_2 T|} \leq \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_{\infty}.$$

Из этого неравенства, а также из (5.14) следует (5.13).

Условие (5.12) имеет графическую интерпретацию (см. рис. 5.7). Для каждой частоты ω построим два замкнутых диска: один с центром -1 и радиусом $|W_1(j\omega)|$, другой с центром $W_p(j\omega)$ и радиусом $|W_2(j\omega)W_p(j\omega)|$. Тогда условие (5.12) будет иметь место, если для каждой частоты ω эти два диска не пересекаются.

Определение 5.27. Будем говорить, что обеспечивается робастное качество уровня α , если выполняются два условия

$$\|W_2 T\|_{\infty} < 1 \text{ и } \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_{\infty} < \alpha \quad \forall \Delta.$$

Таким образом, критерий робастного качества обеспечивает робастное качество уровня 1. Заметим, что на каждой частоте

$$\max_{|\Delta| \leq 1} \left| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right| = \frac{|W_1 S|}{1 - |W_2 T|},$$

откуда мы можем получить, что

$$\alpha_{\min} = \left\| \frac{W_1 S}{1 - |\Delta W_2 T|} \right\|_{\infty}.$$

Обратно, естественно желание узнать, при какой величине неопределенности робастное качество все еще будет сохраняться. Для того чтобы определить это, промасштабируем уровень неопределенности, т.е. пусть $\|\Delta\|_{\infty} < \beta$. Применение теоремы 5.5 показывает, что внутренняя устойчивость сохраняется тогда и только тогда, когда $\|\beta W_2 T\| < 1$. Будем говорить, что уровень неопределенности β является допустимым, если

$$\|\beta W_2 T\|_{\infty} < 1 \text{ и } \left\| \frac{W_1 S}{1 + \Delta W_2 T} \right\|_{\infty} < 1 \quad \forall \Delta.$$

Снова, принимая во внимание, что

$$\max_{|\Delta| \leq 1} \left| \frac{W_1 S}{1 + \beta \Delta W_2 T} \right| = \frac{|W_1 S|}{1 - \beta |W_2 T|} = 1,$$

мы получаем, что

$$\beta_{\max} = \left\| \frac{1 - |W_1 S|}{W_2 T} \right\|_{\infty}.$$

В этом параграфе мы коснулись основополагающих понятий теории робастного управления — понятий неопределенности и робастности. На примере систем с одним входом и одним выходом были введены понятия робастной устойчивости и робастного качества, обсуждались критерии робастной устойчивости для различных типов неопределенности, критерий робастного качества для мультипликативного описания неопределенности. Конечно, все эти понятия вводятся и в многомерном случае, однако для строгого их изложения необходимо изложить основные понятия теории взаимно простой факторизации. Это будет сделано в следующем разделе, а затем в новых терминах будут изложены критерии робастной устойчивости и робастного качества.

5.4. СТАБИЛИЗАЦИЯ

Этот параграф будет посвящен изучению системы управления с единичной обратной связью. Предполагается, что W_0 — строго правильная, а $W_{\text{кв}}$ — правильная передаточные функции.

Большинство задач синтеза могут быть сформулированы следующим образом: задан объект W_0 ; построить регулятор $W_{\text{кв}}$ такой, чтобы, во-первых, система с обратной связью была внутренне устойчива и, во-вторых, получено некоторое дополнительное желаемое свойство, например выход x асимптотически отслеживал вход y . Методом решения этой задачи является параметризация всех регуляторов, обеспечивающих внутреннюю устойчивость, а затем исследование наличия такого конкретного значения параметра, при котором имеет место желаемое свойство системы. В этом разделе дается указанная выше параметризация. Для того чтобы это сделать, необходимо ввести понятие взаимно простой факторизации.

5.4.1. ВЗАИМНО ПРОСТАЯ ФАКТОРИЗАЦИЯ

Рассмотрим следующую задачу. Предположим, что W_0 устойчив и мы хотим найти внутренне стабилизирующий регулятор $W_{\text{кв}}$. Мы можем поступить следующим образом. Запишем W_0 как отношение взаимно простых полиномов

$$W_0 = \frac{N}{M}.$$

С помощью алгоритма Евклида мы можем получить полиномы X , Y , удовлетворяющие уравнению

$$NX + MY = 1.$$

Вспоминая теорему о том, что система внутренне устойчива, если характеристический полином не имеет нулей в правой полуплоскости, мы можем попытаться сделать левую часть равной характеристическому полиному, положив

$$W_{\text{кв}} = \frac{X}{Y}.$$

Однако проблема заключается в том, что Y может быть равным 0. И даже если это не так, регулятор $W_{\text{кв}}$ может не быть правильным.

Пример 5.5. Для $W_0(s) = 1/s$ мы можем взять $N(s) = 1$, $M(s) = s$. Одно решение уравнения $NX + MY = 1$ находится сразу: $X(s) = 1$, $Y(s) = 0$, но отношение X/Y не определено. Другое решение $X(s) = -s + 1$, $Y(s) = 1$, но X/Y не является правильной.

Однако, если сделать некоторые дополнительные предположения, приведенной выше ситуации можно избежать. Введем символ $\mathbb{S}$ для обозначения семейства всех устойчивых, правильных дробно-рациональных функций. Заметим, что $\mathbb{S}$ является

замкнутым множеством над операциями сложения и умножения: если $W_1, W_2 \in \mathbb{S}$, тогда $W_1 + W_2, W_1 W_2 \in \mathbb{S}$, $1 \in \mathbb{P}$. Таким образом, $\mathbb{P}$ является коммутативным кольцом с единицей. Подробнее с этим понятием можно познакомиться в книгах по алгебре. Далее будем предполагать, что N, M, X, Y — все принадлежат $\mathbb{S}$, а не являются полиномами.

Определение 5.28. Две функции N и M из $\mathbb{S}$ называются взаимно простыми, если существует две другие функции X и Y также из $\mathbb{S}$, которые удовлетворяют уравнению

$$NX + MY = 1.$$

Заметим, что из этого уравнения следует, что N и M не имеют общих корней в правой полуплоскости. Можно также доказать, что это условие является достаточным для взаимной простоты.

Определение 5.29. Пусть W будет дробно-рациональной передаточной функцией; представление

$$W = \frac{N}{M}, N, M \in \mathbb{S},$$

где N и M являются взаимно простыми, называется взаимно простой факторизацией W над $\mathbb{S}$.

Цель этого раздела — представить методы для определения четырех функций из $\mathbb{S}$, удовлетворяющих двум уравнениям

$$W = \frac{N}{M}, \quad NX + MY = 1. \quad (5.15)$$

Построить N и M просто.

Пример 5.6. Пусть $W(s) = 1/(s-1)$. Для того чтобы определить N и M , разделим числитель и знаменатель на один и тот же полином, не имеющий корней в правой полуплоскости, например $s+1$:

$$\frac{1}{s-1} = \frac{N(s)}{M(s)}, \quad N(s) = \frac{1}{s+1}, \quad M(s) = \frac{s-1}{s+1}.$$

В более общем случае, для того чтобы получить N и M , мы должны поделить числитель и знаменатель W на $(s+1)^k$, где k равно максимуму их степеней. Не так просто получить две другие функции, X и Y . Для этого нужен алгоритм Евклида. Мы не будем здесь излагать этот алгоритм, так как его можно найти в любой книге по алгебре, например в курсе А.Г. Куроша. Алгоритм Евклида вычисляет наибольший общий делитель двух полиномов, например $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$. Если $n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ являются взаимно простыми, с помощью этого алгоритма можно вычислить $x(\lambda)$ и $y(\lambda)$, удовлетворяющие уравнению

$$nx + my = 1.$$

Далее представим процедуру для получения взаимно простой факторизации W . Главная идея состоит в преобразовании переменных ($s \rightarrow \lambda$) так, чтобы полиномы от λ были функциями в $\mathbb{S}$.

5.4.1.1. АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ВЗАИМНО ПРОСТЫХ СОМНОЖИТЕЛЕЙ

Имеем на входе W .

Шаг 1. Если W устойчива, то положим $N = W$, $M = 1$, $X = 0$, $Y = 1$, и на этом алгоритм закончен; если нет, то алгоритм требует следующего шага.

Шаг 2. Преобразуем $W(s)$ в $\hat{W}(\lambda)$ преобразованием $s = (1-\lambda)/\lambda$. Запишем $\hat{W}$ как отношение взаимно простых полиномов

$$\hat{W} = \frac{n(\lambda)}{m(\lambda)}.$$

Шаг 3. Используя алгоритм Евклида, находим полиномы $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ такие, что

$$nx + my = 1.$$

Шаг 4. Преобразуем $n(\lambda)$, $m(\lambda)$, $x(\lambda)$, $y(\lambda)$ в $N(s)$, $M(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ преобразованием $\lambda = 1/(s+1)$.

Пример 5.7. Для

$$W(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}$$

алгоритм дает

$$\begin{aligned}\hat{W}(\lambda) &= \frac{\lambda^2}{6\lambda^2 - 5\lambda + 1}, \\ n(\lambda) &= \lambda^2, \quad m(\lambda) = 6\lambda^2 - 5\lambda + 1, \\ x(\lambda) &= -30\lambda + 19, \quad y(\lambda) = 5\lambda + 1, \\ N(s) &= \frac{1}{(s+1)^2}, \quad M(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2}, \\ X(s) &= \frac{19s-11}{s+1}, \quad Y(s) = \frac{s+6}{s+1}.\end{aligned}$$

5.4.2. ФАКТОРИЗАЦИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

В этом разделе представлена процедура вычисления взаимно простых факторов правильной передаточной функции над $\mathbb{S}$. Эта процедура является более эффективной, чем полиномиальный метод, описанный в предыдущем параграфе.

Введем некоторые обозначения. Предположим, что A , B , C , D являются действительными матрицами размерностей соответственно $n \times n$, $n \times 1$, $1 \times n$, 1×1 . Передаточная функция, задаваемая этой четверкой, есть

$$D + C(sI - A)^{-1}B.$$

Удобно писать

$$\left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right]$$

вместо

$$D + C(sI - A)^{-1}B.$$

Цель этого параграфа — дать реализацию в пространстве состояний для функций N , M , X , Y , удовлетворяющих соотношениям (5.15).

Сначала рассмотрим, как получить N и M . Если вход и выход W обозначить y и x_b соответственно, то модель W в пространстве состояний имеет вид

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + By, \\ x_b = CX + Dy. \end{cases} \quad (5.16)$$

Выберем действительную матрицу F , $\dim F = 1 \times n$, такую, чтобы $A + BF$ была устойчива. Определим сигнал $v = y - FX$. Тогда из (5.16) получаем

$$\begin{aligned}\dot{X} &= (A + BF)X + Bv, \\ y &= FX + v, \quad x_b = (C + DF)X + Dv.\end{aligned}$$

Непосредственно из этих уравнений передаточная функция от v к y будет

$$M(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{BF} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{F} & 1 \end{array} \right], \quad (5.17)$$

и от v к x_b —

$$N(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{BF} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C} + \mathbf{DF} & \mathbf{D} \end{array} \right]. \quad (5.18)$$

Справедливо

$$Y(s) = M(s)V(s), \quad X_b(s) = N(s)V(s),$$

так что $X_b = NM^{-1}$, т.е. $W = N/M$. Ясно, что N и M являются правильными и устойчивыми, так как $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$ устойчива.

Для нахождения X и Y необходимо выбрать действительную матрицу $\mathbf{H}$, $\dim \mathbf{H} = n \times 1$, такую что $\mathbf{A} + \mathbf{HC}$ является устойчивой; тогда

$$X(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{HC} & \mathbf{H} \\ \hline \mathbf{F} & 0 \end{array} \right], \quad (5.19)$$

$$Y(s) = \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} + \mathbf{HC} & -\mathbf{B} - \mathbf{HD} \\ \hline \mathbf{F} & 1 \end{array} \right]. \quad (5.20)$$

Суммируя вышесказанное, процедуру для взаимно простой факторизации можно описать следующим образом:

Шаг 1. Получить реализацию $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ передаточной функции W .

Шаг 2. Вычислить матрицы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{H}$ такие, чтобы $\mathbf{A} + \mathbf{BF}$ и $\mathbf{A} + \mathbf{HC}$ были устойчивы.

Шаг 3. Используя формулы (5.16)–(5.20), вычисляем N, M, X, Y .

5.4.3. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ РЕГУЛЯТОРОВ

Пусть W_0 — передаточная функция объекта, не обязательно устойчивая. Пусть $W_0 = N_0/M_0$ будет взаимно простая факторизация W_0 над $\mathbb{S}$ и пусть X и Y — две функции из $\mathbb{S}$, удовлетворяющие уравнению

$$N_0X + M_0Y = 1. \quad (5.21)$$

Теорема 5.6. Множество всех регуляторов, которые обеспечивают внутреннюю устойчивость системы, задается множеством

$$\left\{ \frac{X + M_0Q}{Y - N_0Q} : Q \in \mathbb{S} \right\}.$$

Если $W_0 \in \mathbb{S}$, тогда

$$N_0 = W_0, \quad M_0 = 1, \quad X = 0, \quad Y = 1$$

и

$$\frac{X + M_0Q}{Y - N_0Q} = \frac{Q}{1 - W_0Q}.$$

Доказательство теоремы требует предварительного результата.

Лемма 5.2. Пусть $W_{ky} = N_{ky}/M_{ky}$ будет взаимно простой факторизацией над $\mathbb{S}$. Тогда замкнутая система устойчива тогда и только тогда, когда

$$(N_0N_{ky} + M_0M_{ky})^{-1} \in \mathbb{S}.$$

Доказательство леммы 5.2 идентично доказательству теоремы в параграфе 5.2.

Доказательство теоремы 5.6. Предположим, что $Q \in \mathbb{S}$ и

$$W_{\text{кy}} = \frac{X + M_0 Q}{Y - N_0 Q}.$$

Для того чтобы показать, что замкнутая система внутренне устойчива, определим

$$N_{\text{кy}} = X + M_0 Q, \quad M_{\text{кy}} = Y - N_0 Q.$$

Тогда из уравнения (5.21) следует, что

$$NN_{\text{кy}} + MM_{\text{кy}} = 1.$$

Следовательно, $W_{\text{кy}} = N_{\text{кy}} / M_{\text{кy}}$ является взаимно простой факторизацией и, по лемме 5.2, система внутренне устойчива.

Обратно, пусть $W_{\text{кy}}$ будет регулятором, обеспечивающим внутреннюю устойчивость. Нам надо найти $Q \in \mathbb{S}$ такую, что

$$W_{\text{кy}} = \frac{X + M_0 Q}{Y - N_0 Q}.$$

Пусть $W_{\text{кy}} = N_{\text{кy}} / M_{\text{кy}}$ будет взаимно простой факторизацией. Определим

$$V = (N_0 N_{\text{кy}} + M_0 M_{\text{кy}})^{-1} \quad (5.22)$$

так, что

$$N_0 N_{\text{кy}} V + M_0 M_{\text{кy}} V = 1.$$

По лемме 5.2, $V \in \mathbb{S}$. Пусть Q будет решением уравнения

$$M_{\text{кy}} V = Y - N_0 Q. \quad (5.23)$$

Подставим (5.23) в (5.22). Получим

$$N_0 N_{\text{кy}} V + M_0 (Y - N_0 Q) = 1. \quad (5.24)$$

Добавляя и вычитая $N_0 M_0 Q$ в (5.24), получим

$$N_0 (X + M_0 Q) + M_0 (Y - N_0 Q) = 1. \quad (5.25)$$

Сравнивая (5.24) и (5.25), видим, что

$$N_{\text{кy}} V = X + M_0 Q. \quad (5.26)$$

Отсюда, учитывая (5.23), получаем

$$W_{\text{кy}} = \frac{N_{\text{кy}}}{M_{\text{кy}}} = \frac{X + M_0 Q}{Y - N_0 Q}.$$

Осталось доказать, что $Q \in \mathbb{S}$. Умножая (5.23) на X , а (5.26) на Y , затем вычитая, получим

$$(N_0 X + M_0 Y) Q = Y N_{\text{кy}} V - X M_{\text{кy}} V.$$

Но левая часть равна Q , следовательно и правая часть принадлежит $\mathbb{S}$.

Теорема дает способ стабилизации объекта.

Пример 5.8. Пусть

$$W_0(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)}.$$

В соответствии с описанной выше процедурой

$$W_0 = N_0 / M_0, \quad N_0 X + M_0 Y = 1,$$

$$N_0(s) = \frac{1}{(s+1)^2}, \quad M_0(s) = \frac{(s-1)(s-2)}{(s+1)^2},$$

$$X(s) = \frac{19s-11}{s+1}, \quad Y(s) = \frac{s+6}{s+1}.$$

В соответствии с теоремой 5.6

$$W_{\text{кн}}(s) = \frac{X(s)}{Y(s)} = \frac{19s-11}{s+6}$$

обеспечивает внутреннюю устойчивость.

Для вышеизложенного примера можно найти множество регуляторов, стабилизирующих объект. Степень свободы в выборе стабилизирующего регулятора естественно использовать для обеспечения дополнительного желаемого свойства. Можно предложить различные способы подбора Q , обеспечивающие желаемые свойства. К сожалению, подробное изложение этого результата достаточно громоздко и мы отсылаем интересующихся к соответствующей литературе.

5.4.4. СТРОГАЯ И ОДНОВРЕМЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ

На практике разработчики неохотно используют неустойчивые регуляторы, тем более, когда сам объект является устойчивым. Одной из причин этого является тот факт, что если исполнительные механизмы или сенсоры выходят из строя, то разомкнутая система становится неустойчивой. Другой причиной является построение регулятора, стабилизирующего одновременно, например, два объекта.

Определение 5.30. Будем говорить, что объект является строго стабилизируемым, если регулятор $W_{\text{кн}}$, обеспечивающий внутреннюю устойчивость замкнутой системы, сам является устойчивым.

Любой ли объект может быть строго стабилизируем? Рассмотрим пример.

Пример 5.9. Пусть объект задается передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{s-1}{s(s-1)}.$$

Покажем, что каждый регулятор, обеспечивающий внутреннюю устойчивость этого объекта, является неустойчивым. Для доказательства начнем с взаимно простой факторизации:

$$N_0(s) = \frac{s-1}{(s+1)^2}, \quad M_0(s) = \frac{s(s-1)}{(s+1)^2},$$

$$X(s) = \frac{14s-1}{s+1}, \quad Y(s) = \frac{s-9}{s+1}.$$

В соответствии с теоремой 5.6 множество всех стабилизирующих регуляторов задается формулой

$$W_{\text{кн}} = \frac{X + M_0 Q}{Y - N_0 Q}.$$

Так как $X + M_0 Q$ и $Y - N_0 Q$ также являются взаимно простыми, справедливо

$$N_0(X + M_0 Q) + M_0(Y - N_0 Q) = 1$$

и они не имеют общих множителей в правой полуплоскости. Для того чтобы показать, что все регуляторы являются неустойчивыми, достаточно показать, что $Y - N_0 Q$ имеет нуль в замкнутой правой полуплоскости для любого Q из $\mathbb{S}$. Легко видеть, что

$$(Y - N_0 Q)(1) = Y(1) = -4, \quad (Y - N_0 Q)(\infty) = Y(\infty) = 1.$$

Эти два числа имеют разные знаки, поэтому в любом случае при изменении s от 1 до ∞ существует точка s , в которой $(Y - N_0 Q)(s)$ равна нулю.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.7. W_0 является строго стабилизируемым тогда и только тогда, когда он имеет четное число действительных полюсов между каждой парой действительных нулей в замкнутой правой полуплоскости.

Доказательство. Необходимость. Доказательство необходимости похоже на доказательство в предыдущем примере. Для того чтобы показать, что каждый стаби-

лизирующий регулятор является неустойчивым, начнем с взаимно простой факторизации W_0 . Достаточно показать, что $Y - N_0 Q$ имеет нули в замкнутой правой полуплоскости. По предположению, существует некоторая пара действительных нулей N_0 в правой замкнутой полуплоскости, $s = \alpha_1, \alpha_2$, с нечетным числом нулей M_0 между ними. Отсюда следует, что $M_0(\alpha_1)$ и $M_0(\alpha_2)$ имеют разные знаки. Таким же свойством обладают $Y(\alpha_1)$ и $Y(\alpha_2)$, так как $M_0 Y = 1$ на нулях N_0 в правой полуплоскости. Следовательно, функция $Y - N_0 Q$ имеет действительный нуль где-то между $s = \alpha_1$ и $s = \alpha_2$.

Достаточность. Для доказательства достаточности приведем процедуру построения $W_{\text{кв}}$. Будем предполагать, что W_0 не имеет кратных нулей.

Шаг 1. Запишем $W_0 = N_0/M_0$, где N_0 и M_0 взаимно просты. Упорядочим отрицательные действительные нули N_0 :

$$0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_m = \infty.$$

Определим $r_i = 1/M_0(\alpha_i)$, $i = 1, \dots, m$. В таком случае W_0 строго стабилизируема тогда и только тогда, когда $r_1, r_2, \dots, r_m$ все имеют одинаковый знак. Если это условие выполняется, продолжим процедуру.

Шаг 2. Положим $U_1(s) = r_1$.

Предположим, что U_k сконструировано так, что выполняются условия

$$U_k, U_k^{-1} \in \mathbb{S}, \quad U_k(\alpha_i) = r_i, \quad i = 1, \dots, k.$$

Шаг $k+1$. Выбираем F в $\mathbb{S}$ так, чтобы она имела нули при $s = \alpha_1, \dots, \alpha_k$. Выбираем $l \geq 1$ и a так, чтобы

$$\begin{aligned} [1 + aF(\alpha_{k+1})]^l U_k(\alpha_{k+1}) &= r_{k+1}, \\ |a| &< 1/\|F\|_\infty. \end{aligned}$$

Положим $U_{k+1} = (1 + aF)^l U_k$.

Продолжаем до шага m .

Шаг $m+1$. Положим $U = U_m$ и $W_{\text{кв}} = (1 - M_0 U)/(N_0 M_0)$.

Вернемся сейчас к проблеме совместной стабилизации и посмотрим, как она сводится к проблеме строгой стабилизации.

Определение 5.31. Два объекта W_{01} и W_{02} называются одновременно стабилизируемыми, если их внутренняя устойчивость обеспечивается общим регулятором.

Пусть

$$W_{0i} = \frac{N_{0i}}{M_{0i}}, \quad N_{0i}X_i + M_{0i}Y_i = 1, \quad i = 1, 2.$$

Определим

$$N_0 = N_{02}M_{01} - N_{01}M_{02}, \quad M_0 = N_{02}X_1 + M_{02}Y_1, \quad W_0 = \frac{N_0}{M_0}. \quad (5.27)$$

Справедлива

Теорема 5.8. W_{01} и W_{02} одновременно стабилизируемы тогда и только тогда, когда W_0 , определенная в (5.27), является строго стабилизируемой.

Доказательство этой теоремы достаточно громоздко, и мы его опускаем.

5.5. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Этот параграф изучает гипотетическую задачу управления, названную *задачей построения модели (model matching problem)*. Для решения этой задачи используется техника теории интерполяции.

5.5.1. ЗАДАЧА ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ

Пусть $T_1(s)$ и $T_2(s)$ будут устойчивые правильные передаточные функции. Задача построения модели заключается в нахождении функции Q , оптимизирующей H_∞ -норму матрицы $T_1 - T_2 Q$. Интерпретация такова: T_1 — это модель, T_2 является объектом, а Q является последовательно присоединенным регулятором, который выбирается из соображений того, что $T_2 Q$ аппроксимирует T_1 . Таким образом, $T_1 - T_2 Q$ является передаточной функцией ошибки. Передаточная функция Q должна быть устойчивой, но не обязательно правильной (это упрощает проблему). Мы будем предполагать, что T_2 не имеет нулей на мнимой оси.

Определим минимальную ошибку построения модели

$$\gamma_{\text{opt}} \triangleq \min \|T_1 - T_2 Q\|_\infty,$$

где минимум берется по всем устойчивым Q . Q , при которой этот минимум достигается, называется оптимальной.

Рассмотрим тривиальный случай, когда T_1/T_2 является устойчивым. Тогда единственный оптимальный регулятор будет $Q = T_1/T_2$. Для решения проблемы в общем случае введем некоторые математические понятия.

5.5.2. ПРОБЛЕМА НЕВАНЛИННЫ–ПИКА

Напомним, что $\mathbb{S}$ обозначает пространство устойчивых, правильных, рациональных функций с действительными коэффициентами. Пусть $\mathbb{S}_\mathbb{C}$ обозначает пространство правильных дробно-рациональных функций с комплексными коэффициентами. ∞ -норма определяется для таких функции также как максимум модуля на мнимой оси.

Пусть $\{a_1, \dots, a_n\}$ будет множеством точек в открытой правой полуплоскости, $\text{Re } s > 0$, и $\{b_1, \dots, b_n\}$ — множество точек в $\mathbb{C}$. Для простоты будем считать, что точки $a_1, \dots, a_n$ различны.

Интерполяционная проблема Неванлинны–Пика заключается в нахождении функции $G \in \mathbb{S}_\mathbb{C}$, удовлетворяющей двум условиям:

$$\|G\|_\infty \leq 1,$$

$$G(a_i) = b_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Последнее уравнение говорит, что график функции G проходит через точки (a_i, b_i) . Важные ограничения — G должна быть устойчивой, правильной и удовлетворять соотношению $\|G\|_\infty \leq 1$. Говорят, что проблема Неванлинны–Пика разрешима, если такая функция G существует. Удобно записывать данные для проблемы Неванлинны–Пика как массив

$$\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

В действительности проблема Неванлинны–Пика разрешима не при любых данных. Необходимым условием для разрешимости является условие $|b_i| \leq 1$, $i = \overline{1, n}$. Это следует из теоремы о максимуме модуля: G принадлежит S_C , и удовлетворяет соотношению $G(a_i) = b_i$, и ее значение равно $|b_i|$ в точке $s = a_i$; тогда ее максимальное значение в правой полуплоскости будет $\geq |b_i|$ (т.е. $\|G\|_\infty \geq |b_i|$); но еще справедливо соотношение $\|G\|_\infty \leq 1$, следовательно, $|b_i| \leq 1$.

Для того чтобы установить точные условия, когда проблема Неванлинны–Пика разрешима, нам понадобятся некоторые факты из теории комплексных матриц. Пусть M будет квадратная комплексная матрица. Матрицу комплексно сопряженную и транспонированную к ней обозначим через M^* . Если $M = M^*$, то M называется эрмитовой матрицей. Если M — действительная матрица, тогда она эрмитова тогда и только тогда, когда она симметрична. Можно показать, что собственные числа также все действительны. Если M — эрмитова, то говорят, что она положительно полуопределена, если $x^* M x \geq 0$ для всех комплексных векторов x , и положительно определена, если $x^* M x > 0$. Эти факты обозначаются $M \geq 0$ и $M > 0$ соответственно. Имеет место факт $M \geq 0$ (соответственно $M > 0$) тогда и только тогда, когда все ее собственные значения ≥ 0 (соответственно > 0).

Сопоставим массиву данных

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{array}$$

$n \times n$ -матрицу Q с элементами

$$\frac{1 - b_i \bar{b}_j}{a_i + \bar{a}_j}.$$

Заметим, что матрица Q — эрмитова.

Известна следующая теорема Пика.

Теорема 5.9. Проблема Неванлинны–Пика разрешима тогда и только тогда, когда $Q \geq 0$.

5.5.3. АЛГОРИТМ НЕВАНЛИННЫ

В этом разделе мы приведем конструктивный алгоритм для решения проблемы Неванлинны–Пика в случае существования ее решения. Процедура развивается индуктивно: сначала решается случай $n = 1$, затем случай n точек сводится к случаю $n - 1$ точки.

Обозначим через $\mathbb{D}$ открытый единичный диск, $|z| < 1$, а через $\bar{\mathbb{D}}$ — замкнутый единичный диск, $|z| \leq 1$. Функция Мебиуса определяется как

$$M_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{z}b},$$

где $|b| < 1$. Ниже приведены некоторые свойства функции Мебиуса.

1. M_b имеет ноль при $z = b$ и полюс при $z = 1/\bar{b}$. Таким образом, M_b является аналитической в $\mathbb{D}$.
2. Величина M_b равна 1 на единичной окружности.
3. M_b отображает $\mathbb{D}$ в $\mathbb{D}$ и единичную окружность на единичную окружность.

4. Обратное преобразование

$$M_b^{-1}(z) = \frac{z+b}{1+zb},$$

т.е. $M_b^{-1} = M_{-b}$. Это значит, что обратное отображение также является функцией Мебиуса.

Нам также надо ввести так называемую функцию полного пропускания (*all-pass*)

$$A_a(s) = \frac{s-a}{s+\bar{a}}, \operatorname{Re} a > 0.$$

С помощью этих функций мы сможем решить проблему Неванлинны–Пика для массива данных

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}.$$

Существуют два случая.

Случай 1. $|b_1| = 1$. Решение задается соотношением $G(s) = b_1$. По теореме о максимуме модуля, это решение единственно.

Случай 2. $|b_1| < 1$. В этом случае существует бесконечное множество решений.

Лемма 5.3. Множество всех решений задается формулой

$$\left\{ G : G(s) = M_{-b_1} \left[G_1(s) A_{a_1}(s) \right], G_1 \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \|G_1\|_{\infty} \leq 1 \right\}.$$

Если G_1 является функцией полного пропускания, G также является функцией полного пропускания.

Доказательство. Пусть $G_1 \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \|G_1\|_{\infty} \leq 1$. Определим G следующим образом:

$$G(s) = M_{-b_1} \left[G_1(s) A_{a_1}(s) \right].$$

Таким образом, G является композицией двух отображений

$$s \mapsto G_1(s) A_{a_1}(s), \quad z \mapsto M_{-b_1}(z).$$

Первое является аналитическим в замкнутой правой полуплоскости и отображает ее внутрь замкнутого диска $\bar{\mathbb{D}}$; второе является аналитическим в $\bar{\mathbb{D}}$ и отображает его в себя. Это означает, что $G_1 \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ и $\|G_1\|_{\infty} \leq 1$. К тому же G удовлетворяет уравнению

$$G(a_1) = M_{-b_1} \left[G_1(a_1) A_{a_1}(a_1) \right] = M_{-b_1}(0) = b_1.$$

Таким образом, G решает проблему Неванлинны–Пика. Более того, если G_1 является функцией полного пропускания, такой же является и $G_1 A_{a_1}$, следовательно, такой же является и G (потому, что M_{-b_1} отображает единичную окружность в себя).

Обратно, предположим, что G решает проблему Неванлинны–Пика. Определим G_1 таким образом, что

$$G(s) = M_{-b_1} \left(G_1(s) A_{a_1}(s) \right);$$

это значит, что

$$G_1(s) = \frac{M_{b_1}(G(s))}{A_{a_1}(s)}.$$

Функция $M_{b_1}(G(s))$ принадлежит $\mathbb{S}_{\mathbb{C}}$, имеет ∞ -норму ≤ 1 и равна нулю при $s = a_1$. Следовательно, $G_1 \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$ и $\|G_1\|_{\infty} \leq 1$. Теорема доказана.

Вернемся к проблеме Неванлинны–Пика, когда данные состоят из n точек. Предположим, что проблема решена для случая $n-1$ точки. Здесь опять возможны два случая.

Случай 1. $|b_1| = 1$. Так как проблема разрешима, в соответствии с теоремой о максимуме модуля должно быть, что $G(s) = b_1$ является единственным решением и, следовательно, $b_1 = b_2 = \dots = b_n$.

Случай 2. $|b_1| < 1$. Сформулируем новую задачу, определенную как проблему Неванлинны–Пика для $n-1$ точки:

$$\begin{matrix} a_2 & \dots & a_n \\ b'_2 & \dots & b'_n \end{matrix},$$

где $b'_i \triangleq M_{b_i}(b_i)/A_{a_i}$.

Лемма 5.4. Множество всех решений проблемы Неванлинны–Пика для n точек задается формулой

$$G(s) = M_{-b_1} [G_1(s) A_{a_1}(s)],$$

где G_1 определяет все решения проблемы Неванлинны–Пика для $n-1$ точки. Если G_1 является функцией полного пропуска, G также будет функцией полного пропуска.

Доказательство. G решает проблему Неванлинны–Пика тогда и только тогда, когда $G \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}$, $\|G\|_{\infty} \leq 1$, $G(a_1) = b_1$ и $G(a_i) = b_i$, $i = \overline{2, n}$. Из леммы 5.3 множество всех функций G , удовлетворяющих первым трем условиям, представляется в виде

$$\{G: G(s) = M_{-b_1} [G_1(s) A_{a_1}(s)], G_1 \in \mathbb{S}_{\mathbb{C}}, \|G_1\|_{\infty} \leq 1\}.$$

Тогда G удовлетворяет четвертому условию, если

$$G_1(s) = \frac{M_{b_1}(b_i)}{A_{a_1}(a_i)}, \quad i = 2, \dots, n.$$

Из приведенной выше индукции следует, что проблема Неванлинны–Пика всегда имеет решение как функцию полного пропуска.

В нашем применении теории Неванлинны–Пика к проблеме построения модели данные

$$\begin{matrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_1 & \dots & b_n \end{matrix}$$

являются сопряженными, т.е. если появляется пара (a_i, b_i) , то будет сопряженная пара $(\bar{a}_i, \bar{b}_i)$.

5.5.4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ

Рассмотрим, как можно использовать теорию Неванлинны–Пика для решения задачи построения модели. Для простоты будем считать, что T_2 не имеет кратных нулей в правой полуплоскости. Минимальная ошибка γ_{opt} равна минимальной γ такой, что

$$\|T_1 - T_2 Q\|_{\infty} \leq \gamma$$

для некоторой устойчивой Q . Зафиксируем $\gamma > 0$ и рассмотрим отображение $Q \mapsto G$, определяемое следующим образом:

$$G = \frac{1}{\gamma} (T_1 - T_2 Q).$$

Если Q устойчивая, то и G устойчивая. Обратное неверно. Устойчивая функция G должна удовлетворять некоторым условиям, для того чтобы Q была устойчива. Чтобы их рассмотреть, обозначим $\{z_i : i = \overline{1, n}\}$ нули T_2 в открытой правой полуплоскости. Если Q устойчива, то G удовлетворяет интерполяционным условиям

$$G(z_i) = \frac{1}{\gamma} T_1(z_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Легко проверить обратное, если G устойчива и удовлетворяет этим интерполяционным условиям, тогда Q устойчива.

Таким образом, γ_{opt} равна минимальной γ такой, что существует функция $G \in \mathbb{S}$, удовлетворяющая условиям

$$\|G\|_{\infty} \leq 1,$$

$$G(z_i) = \frac{1}{\gamma} T_1(z_i), \quad i = \overline{1, n}.$$

Это и есть проблема Неванлинны–Пика с данными

$$\begin{array}{ccc} a_1 & \cdots & a_n \\ \gamma^{-1} b_1 & \cdots & \gamma^{-1} b_n \end{array},$$

где $a_i \triangleq z_i$ и $b_i \triangleq T_1(z_i)$. Соответствующая матрица Пика равна

$$A - \gamma^{-2} B,$$

где ij -ые элементы A и B равны соответственно

$$\frac{1}{a_i + \bar{a}_j}, \quad \frac{b_i \bar{b}_j}{a_i + \bar{a}_j}.$$

Из теоремы Пика мы можем заключить, что γ_{opt} равна минимальной γ такой, что $A - \gamma^{-2} B \geq 0$. Обе матрицы A и B являются эрмитовыми. Более того, A положительно определена, так как все a_i являются различными. Такая матрица имеет положительно определенный квадратный корень $A^{1/2}$. Обратная к этому квадратному корню матрица будет $A^{-1/2}$.

Следующая лемма из теории матриц дает метод вычисления γ_{opt} .

Лемма 5.5. γ_{opt} равна квадратному корню из максимального собственного значения матрицы $A^{-1/2} B A^{-1/2}$.

Обобщая все выше сказанное, мы получаем следующий алгоритм для решения задачи построения модели.

5.5.4.1. АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ

На входе процедуры имеем T_1 и T_2 .

Шаг 1. Определяем $\{z_i : i = \overline{1, n}\}$ нули T_2 в открытой правой полуплоскости $\text{Re } s > 0$.

Шаг 2. Определяем

$$b_i \triangleq T_1(z_i), \quad i = \overline{1, n}$$

и формируем матрицы

$$A \triangleq \frac{1}{z_i + \bar{z}_j}, \quad B \triangleq \frac{b_i \bar{b}_j}{z_i + \bar{z}_j}.$$

Шаг 3. Вычисляем γ_{opt} как квадратный корень из наибольшего собственного значения матрицы $A^{-1/2}BA^{-1/2}$.

Шаг 4. Решаем проблему Неванлинны–Пика с данными

$$\begin{matrix} a_1 & \dots & a_n \\ \gamma_{\text{opt}}^{-1} b_1 & \dots & \gamma_{\text{opt}}^{-1} b_n \end{matrix}.$$

Обозначаем решение через G .

Шаг 5. Искомая функция Q определяется выражением

$$Q \triangleq \frac{T_1 - \gamma_{\text{opt}} G}{T_2}.$$

5.5.5. ПРИЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧИ ПОСТРОЕНИЯ МОДЕЛИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ H_∞ -ОПТИМИЗАЦИИ

В предыдущих разделах главы мы определили понятия качества и робастного качества. В п. 5.2.3 был введен критерий робастного качества $\|W_1 S\|_\infty < 1$. Соответствующая этому понятию задача обеспечения заданного качества заключается в нахождении правильного регулятора $W_{\text{кв}}$ такого, чтобы система с обратной связью была бы внутренне устойчива и выполнялось неравенство $\|W_1 S\|_\infty < 1$. Возникают вопросы существования и определения такого регулятора $W_{\text{кв}}$. Ответы на эти вопросы легко получить, когда передаточная функция W_0^{-1} , обратная к передаточной функции объекта W_0 , является устойчивой. Когда W_0^{-1} является неустойчивой, вопрос построения регулятора $W_{\text{кв}}$ становится более интересным. Решения этой задачи, представленное ниже, использует теорию построения модели и соответственно теорию интерполяции Неванлинны–Пика.

Введем некоторые предположения:

- W_0 не имеет полюсов на мнимой оси, не имеет кратных нулей и полюсов в правой полуплоскости, имеет по крайней мере один нуль в правой полуплоскости (т.е. W_0^{-1} является неустойчивой);
- W_1 является устойчивой и строго правильной.

Возможно отказаться от этих предположений, но изложение в таком случае будет очень громоздким.

Для обоснования предложенной ниже процедуры необходимо кратко просмотреть нахождение внутренне стабилизирующего регулятора $W_{\text{кв}}$ такого, что $\|W_1 S\|_\infty < 1$ может быть сведена к проблеме Неванлинны–Пика. Напомним, что

$$S = \frac{1}{1 + W_0 W_{\text{кв}}}.$$

Для того, чтобы $W_{\text{кв}}$ была внутренне устойчива, необходимо и достаточно, чтобы $S \in \mathcal{S}$ и $W_0 W_{\text{кв}}$ не имела сокращения нулей и полюсов в правой полуплоскости. Та-

ким образом, S должна принимать значение 1 в нулях в правой полуплоскости и значение 0 в полюсах правой полуплоскости. То есть S должна удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} S(z) &= 1 \text{ для } z, \text{ являющегося нулем } W_0 \text{ в } \operatorname{Re} s > 0, \\ S(p) &= 0 \text{ для } p, \text{ являющегося полюсом } W_0 \text{ в } \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Следовательно, функция взвешенной чувствительности $G \triangleq W_1 S$ должна удовлетворять соотношениям

$$\begin{aligned} G(z) &= W_1(z) \text{ для } z, \text{ являющегося нулем } W_0 \text{ в } \operatorname{Re} s > 0, \\ G(p) &= 0 \text{ для } p, \text{ являющегося полюсом } W_0 \text{ в } \operatorname{Re} s > 0. \end{aligned}$$

Таким образом, требование внутренней устойчивости включает интерполяционные условия на G . Критерий качества $\|W_1 S\|_\infty < 1$ преобразуется в $\|G\|_\infty < 1$.

Один из подходов к синтезу управления заключается в нахождении функции G , затем получению функции S и в конце — получении $W_{\text{кв}}$ с помощью обратной подстановки. Однако этот подход наталкивается на некоторые трудности, так как требование правильности $W_{\text{кв}}$ накладывает дополнительные ограничения на G , не учтенные в рассмотренной нами задаче Неванлинны–Пика. Поэтому мы воспользуемся параметризацией регуляторов (см. п. 5.4.3).

Представим W_0 в виде взаимно простой факторизации

$$W_0 = \frac{N_0}{M_0}, \quad N_0 X + M_0 Y = 1. \quad (5.28)$$

Напомним формулу общего вида регулятора

$$W_{\text{кв}} = \frac{X + M_0 Q}{Y - N_0 Q}, \quad Q \in \mathbb{S}.$$

Для такого регулятора функция взвешенной чувствительности будет

$$W_1 S = W_1 M_0 (Y - N_0 Q).$$

Параметр Q должен быть выбран правильным и устойчивым. Сначала можно отказаться от требования правильности, построить удобную устойчивую функцию $Q_{\text{им}}$, которая не обязательно правильная. А затем преобразовать $Q_{\text{им}}$ в Q с помощью добавления размерности, как показано ниже.

Опишем процедуру по шагам.

Шаг 1. Производим взаимно простую факторизацию и находим четыре функции, удовлетворяющие уравнениям (5.28).

Шаг 2. Находим устойчивую функцию $Q_{\text{им}}$ такую, что

$$\|W_1 M_0 (Y - N_0 Q_{\text{им}})\|_\infty < 1.$$

Шаг 3. Определим

$$J(s) \triangleq \frac{1}{(\tau s + 1)^k},$$

где k выбирается достаточно большим, чтобы $Q_{\text{им}} J$ была правильной и τ было настолько мало, чтобы выполнялось

$$\|W_1 M_0 (Y - N_0 Q_{\text{им}})\|_\infty < 1.$$

Шаг 4. Обозначаем $Q_{\text{им}} J = Q$.

Шаг 5. Определяем

$$W_{\text{кy}} = \frac{X + M_0 Q}{Y - N_0 Q}, \quad Q \in \mathbb{S}.$$

Шаг 3 следует из уравнения

$$W_1 M_0 (Y - N_0 Q_{\text{im}} J) = W_1 M_0 (Y - N_0 Q_{\text{im}}) J + W_1 M_0 Y (I - J).$$

Первый член правой части имеет H_∞ -норму, меньшую единицы (следует из шага 2 и того, что $\|J\|_\infty < 1$), в то время как H_∞ -норма второго члена стремится к нулю в то время, как τ стремится к нулю.

Шаг 2 представляет собой задачу построения модели: найти устойчивую функцию Q_{im} , минимизирующую

$$\|T_1 - Q T_2\|_\infty,$$

где $T_1 \triangleq W_1 M_0 Y$ и $T_2 \triangleq W_1 M_0 N_0$. Шаг 2 осуществим тогда и только тогда, когда $\gamma_{\text{opt}} < 1$.

Ранее мы установили, что проблема робастного качества состоит в построении правильного регулятора $W_{\text{кy}}$, обеспечивающего внутреннюю устойчивость системы с обратной связью и выполнения неравенства

$$\| |W_1 S| + |W_2 T| \|_\infty < 1. \quad (5.29)$$

Эта проблема точно не разрешена. Однако возможно приближенное решение этой проблемы. Нетрудно показать, что достаточным условием для выполнения неравенства (5.29) является выполнение неравенства

$$\| |W_1 S|^2 + |W_2 T|^2 \|_\infty < \frac{1}{2}. \quad (5.30)$$

Таким образом, мы получили так называемую модифицированную задачу робастного качества: найти правильный внутренне стабилизирующий регулятор, который обеспечивает выполнение неравенства (5.30). Эта новая модифицированная задача может быть решена с применением задачи построения модели. Ее решение мы не будем здесь приводить, так как такого рода задачи в многомерном случае решаются гораздо более эффективными методами. Этим методам будут посвящены следующие параграфы.

5.6. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МНОГОМЕРНОЙ ТЕОРИИ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ

5.6.1. СТАНДАРТНАЯ ЗАДАЧА H_∞ -УПРАВЛЕНИЯ

Стандартная задача H_∞ -управления (которая часто называется задачей минимизации энергии выхода) связана со следующей структурной схемой многомерной системы управления, изображенной на рис. 5.8.

На этой схеме вектор f представляет собой вектор внешних возмущений, вектор $X_{\text{в2}}$ является вектором измеряемого выхода, вектор U является выходным вектором регулятора и $X_{\text{в1}}$ — вектор ошибки, который мы будем стараться сделать минимальным в определенном смысле. Матрица передаточных функций W_0 представляет не только сам объект, которым надо управлять, но и весовые функции, которые включены для обеспечения желаемого качества. Такого рода объект W_0 называется обобщенным объектом.

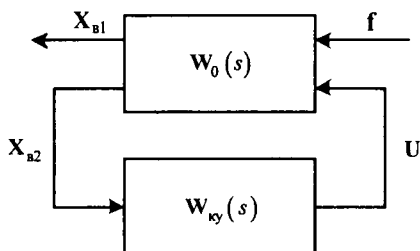


Рис. 5.8. Стандартная задача

Стандартная задача построения H_∞ -оптимального управления состоит в построении управления U , минимизирующего H_∞ -норму передаточной функции $W_{X_{b1}f}$ замкнутой системы от входа f к выходу X_{b1} , т.е.

$$\|W_{X_{b1}f}\|_\infty \rightarrow \min.$$

Часто оптимальную задачу заменяют субоптимальной: построить управление U , обеспечивающее выполнение неравенства

$$\|W_{X_{b1}f}\|_\infty < \gamma_{\text{opt}},$$

где γ_{opt} — минимальное из значений γ в неравенстве

$$\|W_{X_{b1}f}\|_\infty < \gamma.$$

Вход-выходное соотношение можно записать выражением

$$\begin{bmatrix} X_{b1} \\ X_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f \\ U \end{bmatrix}. \quad (5.31)$$

С другой стороны, во временной области минимальную реализацию объекта можно записать в виде системы уравнений

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_1 f + B_2 U, \\ X_{b1} = C_1 X + D_{11} f + D_{12} U, \\ X_{b2} = C_2 X + D_{21} f + D_{22} U. \end{cases} \quad (5.32)$$

Здесь X — вектор состояния, X_{b2} — вектор измерений, X_{b1} — вектор контролируемых выходов, U — вектор управления, f — внешний вход системы.

Соответствие матричной передаточной функции W_0 минимальной ее реализации в пространстве состояний записывается следующим образом:

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right].$$

Нетрудно видеть, что

$$W_{ij} = C_i (sI - A)^{-1} B_j + D_{ij},$$

где $i, j = 1, 2$.

5.6.2. ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ФАКТОРИЗАЦИИ

В данном разделе мы приведем некоторые математические понятия, которые составляют основу изложения теории многомерного робастного управления в частот-

ной области и являются обобщениями на многомерный случай определений, введенных в предыдущих разделах. Для удобства изложения мы будем опускать индексы размерностей в указании пространств, которым принадлежат матричные передаточные функции, т.е. мы будем писать RH_∞ вместо $RH_\infty^{m \times n}$ (см. п. 5.1.5).

Определение 5.32. Пусть $\tilde{M}$ и $\tilde{N} \in RH_\infty$ имеют одинаковое число строк. $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ являются левыми взаимно простыми факторами, если существуют T и $V \in RH_\infty$ такие, что выполняется следующее равенство:

$$\tilde{M}T - \tilde{N}V = I.$$

Определение 5.33. Пара $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ называется левым взаимно простым разложением матрицы G , если:

- 1) $\tilde{M}$ — квадратная и $\det \tilde{M} \neq 0$,
- 2) $G = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$,
- 3) $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ — левые взаимно простые.

Аналогично левой факторизации естественно ввести и правую факторизацию.

Определение 5.34. Пусть M и N принадлежат RH_∞ и имеют одинаковое число столбцов. M и N являются правыми взаимно простыми факторами, если существуют $\tilde{T}$ и $\tilde{V}$, принадлежащие RH_∞ , такие, что выполняется следующее равенство:

$$\tilde{T}M - \tilde{V}N = I.$$

Определение 5.35. Пара M и N называется правым взаимно простым разложением матрицы G , если:

- 1) M — квадратная и $\det M \neq 0$,
- 2) $G = NM^{-1}$,
- 3) M и N — правые взаимно простые.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.6. Для любой $G \in RH_\infty$ существуют левая и правая взаимно простые факторизации, т.е. существуют восемь матриц

$$M, N, T, V, \tilde{M}, \tilde{N}, \tilde{T}, \tilde{V}$$

таких, что

$$G = NM^{-1} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$$

и выполняется равенство

$$\begin{bmatrix} \tilde{T} & -\tilde{V} \\ -\tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M & V \\ N & T \end{bmatrix} = I.$$

Возникает вопрос об однозначности таких представлений.

Определение 5.36. Любая квадратная передаточная матрица $T \in RH_\infty$, у которой $T^{-1} \in RH_\infty$, называется единицей в RH_∞ .

Ответ на вопрос об однозначности представления матрицы в виде произведения левых (правых) взаимно простых факторов дает следующая лемма.

Лемма 5.7 [191]. Левые (правые) взаимно простые множители $\tilde{M}$ и $\tilde{N}$ единственны с точностью до единицы в RH_∞ .

Чтобы уменьшить неоднозначность представления матричной передаточной функции в виде произведения взаимно простых факторов, вводится понятие нормализованной взаимно простой факторизации.

Определение 5.37. Пара матриц $(\tilde{N}, \tilde{M})$, где $\tilde{N}, \tilde{M} \in RH_\infty$, будет называться нормализованной левой взаимно простой факторизацией, если она является левой взаимно простой факторизацией и

$$\tilde{N}\tilde{N}^* + \tilde{M}\tilde{M}^* = 1.$$

Определение 5.38. Устойчивая $r \times t$ -матрица G называется внешней, если

$$GG^* = 1.$$

Таким образом, если пара $(\tilde{N}, \tilde{M})$ является нормализованной внешней взаимно простой факторизацией, то матрица $\begin{bmatrix} \tilde{N} & \tilde{M} \end{bmatrix}$ является внешней.

Введение нормализованной взаимно простой факторизации значительно сужает неоднозначность.

Определение 5.39. Матрица A называется унитарной, если $A^*A = AA^* = I$. В этом случае $A^{-1} = A^*$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.8. Нормализованные левые взаимно простые факторы $(\tilde{N}$ и $\tilde{M})$ передаточной функции G существуют и единственны внутри унитарной матрицы.

Таким образом, представление матрицы в виде произведения нормализованных взаимно простых факторов однозначно с точностью до умножения на унитарную матрицу.

Возникает вопрос — как вычислить нормализованные взаимно простые факторы, если система описывается в пространстве состояний уравнениями вида

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ X_b = CX + DU. \end{cases} \quad (5.33)$$

Ниже мы приведем формулы для вычисления нормализованных взаимно простых факторов в пространстве состояний.

Введем сначала два очень важных уравнения — обобщенное алгебраическое уравнение Риккати по управлению и обобщенное алгебраическое уравнение Риккати по наблюдению.

Определение 5.40. Обобщенным алгебраическим уравнением Риккати по управлению для системы (5.33) называется уравнение

$$(A - BS^{-1}D^*C)^*Y + Y(A - BS^{-1}D^*C) - YBS^{-1}B^*Y + C^*R^{-1}C = 0, \quad (5.34)$$

где $R = I + DD^*$ и $S = I + D^*D$.

Если $D = 0$, то уравнение (5.34) принимает вид

$$A^*Y + YA - YBV^*Y + C^*C = 0. \quad (5.35)$$

Определение 5.41. Обобщенным алгебраическим уравнением Риккати по наблюдению для системы (5.33) называется уравнение

$$(A - BS^{-1}D^*C)^*Z + Z(A - BS^{-1}D^*C) - ZC^*R^{-1}CZ + BS^{-1}B^* = 0, \quad (5.36)$$

где $R = I + DD^*$ и $S = I + D^*D$.

Если $D = 0$, то уравнение (5.36) принимает вид

$$A^*Z + ZA - ZC^*CZ + BV^* = 0. \quad (5.37)$$

Важно выяснить, когда выше определенные уравнения Риккати имеют решения. Ответ на этот вопрос дает приведенная ниже теорема.

Теорема 5.9. Если система (5.33) управляема и наблюдаема, тогда существует единственное решение $Y = Y^* > 0$ ($Z = Z^* > 0$) для обобщенного уравнения Риккати по управлению (обобщенного уравнения Риккати по наблюдению). Если обозначить $F \equiv -S^{-1}(D^*C + B^*Y)$ и $H \equiv -(BD^* + ZC^*)R^{-1}$, тогда собственные числа матриц $A + BF$ и $A + HC$, соответствующие этим решениям, имеют строго отрицательные действительные части.

Теперь, используя введенные выше термины, можно привести результаты, позволяющие вычислять нормализованную левую взаимно простую факторизацию матрицы в пространстве состояний.

Теорема 5.10 [192]. Пусть (A, B, C, D) является минимальной реализацией, соответствующей матричной передаточной функции $W = C(sI - A)^{-1}B + D$, тогда

$$\tilde{N} = \begin{bmatrix} A + HC & B + HD \\ R^{\frac{1}{2}}C & R^{\frac{1}{2}}D \end{bmatrix}, \quad \tilde{M} = \begin{bmatrix} A + HC & H \\ R^{\frac{1}{2}}C & R^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix},$$

где $R = I + DD^*$, $H = -(BD^* + ZC^*)R^{-1}$ и Z — единственное положительно определенное решение обобщенного уравнения Риккати по наблюдению.

5.6.3. ХОРОШАЯ ОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И ВНУТРЕННЯЯ УСТОЙЧИВОСТЬ

Рассмотрим систему управления, схема которой изображена на рис. 5.9. Эта система отличается от системы на рис. 5.8 тем, что сюда добавлены n — шумы измерений и Y — задающий сигнал.

Определение 5.42. Система на рис. 5.9 называется хорошо определенной, если передаточные функции от входов $[f \ n \ Y]^T$ к выходам $[X_{B1} \ U \ X_{B2}]^T$ существуют и являются правильными.

Существует критерий хорошей определенности системы.

Лемма 5.9 [155]. Система является хорошо определенной тогда и только тогда, когда $(I - W_{22}W_{ky})(\infty)$ является обратимой или, эквивалентно, $(\tilde{M}V - \tilde{N}T)(\infty)$ обратима. Здесь $W_{22} = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$, $W_{ky} = VT^{-1}$.

Определение 5.43. Система на рис. 5.9 называется внутренне устойчивой, если любой элемент матричной передаточной функции от входов $[f \ n \ Y]^T$ к выходам $[X_{B1} \ U \ X_{B2}]^T$ асимптотически устойчив.

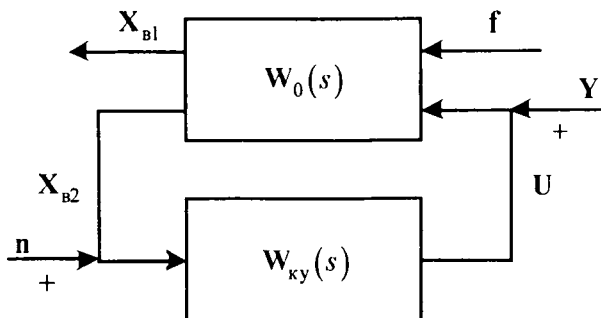


Рис. 5.9. Стандартная задача при наличии шумов

Рассмотрим систему с обобщенным объектом W_0 , имеющую следующую минимальную реализацию

$$\begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & D_{22} \end{array} \right]. \quad (5.38)$$

Теорема 5.11 [155]. Система (5.38) внутренне устойчива тогда и только тогда, когда:

- 1) пара (A, B_2) стабилизируема, а пара (A, C_2) — детектируема;
- 2) $(\tilde{M}V - \tilde{N}T)$ является единицей (является обратимой) в RH_∞ .

5.6.4. РЕЗУЛЬТАТЫ ПО УСТОЙЧИВОСТИ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ

В этом разделе приведем два результата, постоянно используемых при анализе устойчивости замкнутых систем. Теорема о малом коэффициенте усиления, впервые предложенная Зеймсом [198], является предельно простым, но в то же время очень глубоким результатом для определения устойчивости замкнутых систем.

Рассмотрим систему на рис. 5.10.

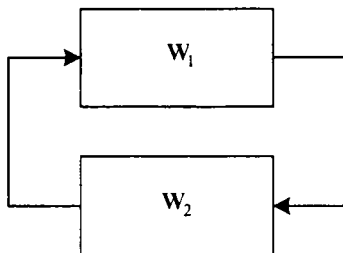


Рис. 5.10. Замкнутая система

Теорема 5.12. Теорема о малом коэффициенте усиления. Система на рис. 5.10, где $W_1, W_2 \in RH_\infty$, является внутренне устойчивой, если

$$\|W_1\|_\infty \|W_2\|_\infty < 1.$$

Далее, для W_1 и W_2 , возможно неустойчивых, мы имеем следующий результат, который расширяет критерий Найквиста на многомерные системы.

Теорема 5.13. Обобщенный критерий Найквиста. Если на рис. 5.10 W_1 имеет η_{W_1} полюсов в правой полуплоскости и W_2 имеет η_{W_2} полюсов в правой полуплоскости, то замкнутая система внутренне устойчива тогда и только тогда, когда годограф Найквиста определителя $\det(I - W_1 W_2)(j\omega)$:

- 1) не проходит через начало координат, т.е. $\det(I - W_1 W_2)(j\omega) \neq 0$ для всех ω ;
- 2) делает $\eta_{W_1} + \eta_{W_2}$ оборотов против часовой стрелки при возрастании ω от $-\infty$ до $+\infty$.

5.6.5. МОДЕЛИ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЕЙ И ВОЗМУЩЕНИЙ

Математическая модель неопределенности в описании объекта непосредственно связана с математической моделью объекта. Однако при одном и том же описании объекта неопределенность может характеризоваться различными способами. Например, как аддитивная и мультипликативная, параметрическая и непараметрическая,

структурная и неструктурная, детерминированная (установившаяся) и случайная. В этом разделе мы проиллюстрируем вышесказанное примерами описания неопределенностей во временной и частотной областях.

5.6.5.1. МОДЕЛИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Пусть линейная система управления имеет минимальную реализацию в пространстве состояний в виде

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{U}, \\ \mathbf{X}_b = \mathbf{C}\mathbf{X} + \mathbf{D}\mathbf{U}. \end{cases} \quad (5.39)$$

Здесь матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ имеют соответствующие размерности. Неопределенность объекта может быть задана следующим образом:

- a) $\mathbf{A}\mathbf{X} \rightarrow (\mathbf{A} + \Delta\mathbf{A})\mathbf{X}$, где $\Delta\mathbf{A}$ ограничена по норме: $\|\Delta\mathbf{A}\| \leq a$;
- b) $\mathbf{A}\mathbf{X} \rightarrow (\mathbf{A} + \sum_i q_i \mathbf{A}_i)\mathbf{X}$, где $-1 \leq q_i \leq 1$;
- c) $\mathbf{A}\mathbf{X} \rightarrow \mathbf{A}\mathbf{X} + \sum_i x_i \mathbf{G}_i n$, где n — белый шум.

Случаи a) и b) представляют модели параметрических неопределенностей, причем $\Delta\mathbf{A}$ является неструктурной неопределенностью, а неопределенность в b) является структурной. В общем случае структурная неопределенность определенным образом входит в матрицу $\mathbf{A}$.

В случае c) неопределенность моделируется как стохастическая неопределенность в виде белого шума.

Модели использования неопределенностей a) и b) описаны, например, в [151]. Неопределенность вида c) рассматривалась, например, в работе [195]. Однако в управлении рассматриваются неопределенности и в матрицах $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ (например, в [183, 189]).

5.6.5.2. МОДЕЛИ ВОЗМУЩЕНИЙ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

Ниже мы перейдем к описанию неопределенности передаточной функции в частотной области, но сначала введем некоторые определения.

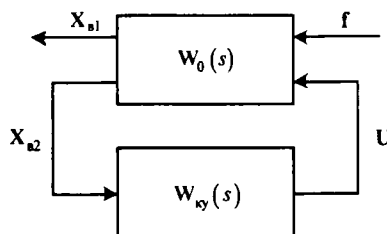


Рис. 5.11. Стандартная система

Определение 5.44. Пусть матрица $\mathbf{W}_0$ представляет собой передаточную матрицу от вектора обобщенных входов $[\mathbf{f} \ \mathbf{U}]^T$ к вектору обобщенных выходов $[\mathbf{X}_{a1} \ \mathbf{X}_{b2}]^T$ (рис. 5.11):

$$\mathbf{W}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix}, \quad (5.40)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_{a1} \\ \mathbf{X}_{b2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_{11} & \mathbf{W}_{12} \\ \mathbf{W}_{21} & \mathbf{W}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{U} \end{bmatrix}. \quad (5.41)$$

Нижним дробно-линейным преобразованием называется передаточная функция

$$\mathcal{L}(W_0, W_{ky}) \equiv W_{11} + W_{12} W_{ky} (I - W_{22} W_{ky})^{-1} W_{21}, \quad (5.42)$$

где $\det(I - W_{22} W_{ky}) \neq 0$.

Заметим, что $\mathcal{L}(W_0, W_{ky})$ является передаточной функцией от входа f к выходу X_b на рис. 5.11.

Определение 5.45. Рассмотрим схему на рис. 5.12.

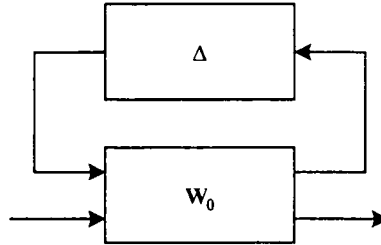


Рис. 5.12. $W_0 - \Delta$ -конфигурация

Верхним дробно-линейным преобразованием называется передаточная функция

$$\mathcal{U}(W_0, \Delta) \equiv W_{22} + W_{21} \Delta (I - W_{11} \Delta)^{-1} W_{12}, \quad (5.43)$$

где $\det(I - W_{11} \Delta) \neq 0$.

Передаточная функция $W(s)$, соответствующая системе (5.39), представляется в виде

$$W(s) = D + C(sI - A)^{-1} B. \quad (5.44)$$

Неопределенность в передаточной функции W может быть смоделирована следующим образом:

d) $W \rightarrow W_\Delta = W + \Delta_A$, где Δ_A ограничена по норме: $\|\Delta_A\| \leq a$;

e) $W \rightarrow W_\Delta = (I + \Delta_{W_0}) W$, где Δ_{W_0} ограничена по норме: $\|\Delta_{W_0}\| \leq b$.

В d) неопределенность Δ_A представляет собой аддитивную неструктурную непараметрическую неопределенность. Схематическое ее изображение представлено на рис. 5.13.

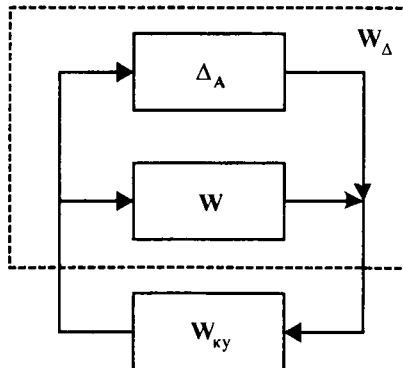


Рис. 5.13. Аддитивная неопределенность

В *e)* неопределенность Δ_{w_0} представляет собой мультипликативную (пропорциональную) неструктурную непараметрическую неопределенность. Ее схематическое изображение представлено на рис. 5.14.

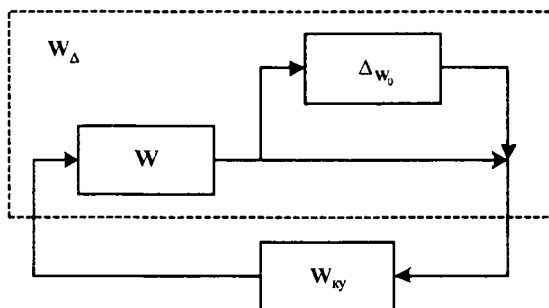


Рис. 5.14. Мультипликативная неопределенность

В предыдущем разделе было рассказано о представлении передаточных матриц систем автоматического управления в виде взаимно простых факторизаций.

Если передаточная функция W системы задается в виде взаимно простой факторизации $W = \tilde{M}^{-1}\tilde{N}$, то естественно ввести и соответствующую неопределенность:

ж) $W \rightarrow W_\Delta = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1} (\tilde{N} + \Delta_N)$, где $\Delta_D = [\Delta_M, \Delta_N]$ представляет неопределенность взаимно простых факторов (дробно-рациональная неопределенность).

Схематическое изображение этого типа неопределенности представлено на рис. 5.15.

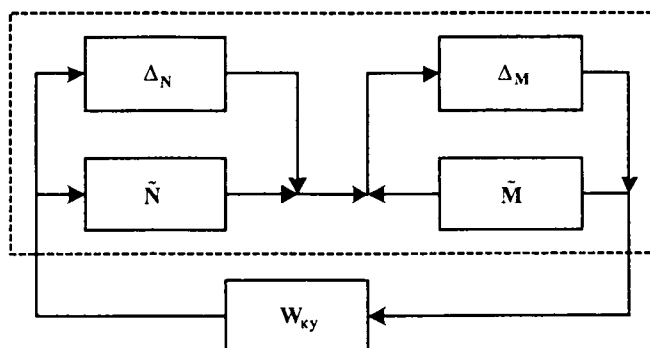


Рис. 5.15. Дробно-рациональная неопределенность

Справедлива теорема, которая позволяет взглянуть на неопределенности *d)*, *e)* и *ж)* с единых позиций.

Теорема 5.14 [191]. Три типа неопределенностей Δ_A, Δ_{w_0} и Δ_D могут быть представлены в виде неопределенности Δ в верхней цепи обратной связи некоторого объекта с передаточной функцией W_0 (см. рис. 5.16). При этом в случае аддитивной неопределенности $\Delta = \Delta_A$

$$W_0 = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ I & W \end{bmatrix}, \quad (5.45)$$

в случае мультипликативной неопределенности $\Delta = \Delta_{w_0}$

$$w_0 = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & w \\ I & w \end{bmatrix}, \quad (5.46)$$

в случае дробно-рациональной неопределенности $\Delta = \Delta_D$

$$w_0 = \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|c} 0 & I \\ \hline \tilde{M}^{-1} & w \\ \hline \tilde{M}^{-1} & w \end{array} \right]. \quad (5.47)$$

Во всех случаях

$$w_\Delta = \mathcal{U}(w_0, \Delta), \quad w = \mathcal{U}(w_0, 0). \quad (5.48)$$

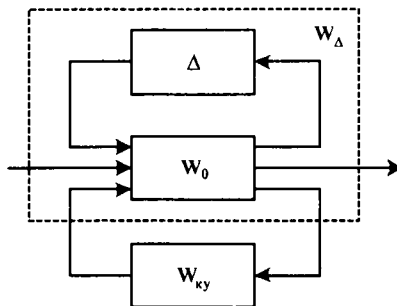


Рис. 5.16. Обобщенное представление системы с неопределенностью и регулятором в обратной связи

Достаточно часто при построении систем управления рассматривается неопределенность в виде немоделируемой динамики (неопределенность в порядке системы дифференциальных уравнений, описывающих движение системы в пространстве состояний). Мы не ставим своей целью дать полное описание неопределенностей, используемых при описании моделей объекта управления. Мы обратили внимание на те описания неопределенностей, которые используются в дальнейшем в этой главе. Описание других видов неопределенности можно найти в [187].

В литературе по теории автоматического управления возникновение неопределенности в системе часто связывают с действием возмущений. В частности, параметрическую неопределенность в системе Δ_A обычно называют параметрическим возмущением (возмущением параметров) и относят к так называемым внутренним возмущениям, имея в виду, что существуют внешние возмущения, действующие на систему извне. Функционирование реальных управляемых объектов происходит в условиях действия внешних возмущений, которые сильно влияют на критерий качества системы управления. Учет влияния внешних возмущений, действующих на систему, привел к постановке и решению задач синтеза систем автоматического управления, функционирующих при наличии внешних возмущений.

Внешние возмущения, действующие на систему, часто имеют случайный характер. Так, при движении самолета в атмосфере возникают аэродинамические силы, зависящие от скоростей воздушных потоков, которые изменяются случайно. Случайными являются и помехи, возникающие в электронных измерительных устройствах. Поэтому естественно для описания таких возмущений привлекать аппарат теории случайных процессов [97, 120]. В данной главе также используется статистическое описание внешнего возмущения.

Однако не все внешние возмущения имеют случайную природу. Существует ряд примеров, когда внешнее возмущение имеет постоянное, ограниченное, но неизвестное значение. Такое описание внешних возмущений как сигнала, ограниченного по H_∞ -норме, принято в H_∞ -теории робастного управления.

5.6.6. АНАЛИЗ РОБАСТНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

Робастная устойчивость есть способность регулируемого процесса сохранять устойчивость в присутствии неопределенностей. В терминах обозначений, например, на рис. 5.16, регулятор робастно стабилизирует процесс, если он стабилизирует любую возмущенную модель W_Δ , которая есть комбинация номинальной модели W и модели неопределенности $\Delta \in \mathbb{D}$, где $\mathbb{D}$ является классом возможных неопределенностей, который включает и случай $\Delta = 0$.

В этом разделе мы установим достаточные условия для робастной стабилизации объекта W регулятором W_{ky} .

Напомним, что аддитивная, мультипликативная неопределенности и неопределенность взаимно простых факторов может быть записана как нижнее дробно-линейное преобразование

$$W_\Delta = \mathcal{U}(W_0, \Delta), \quad (5.49)$$

причем номинальный объект также выражается через это преобразование:

$$W = \mathcal{U}(W_0, 0). \quad (5.50)$$

Сначала введем определения допустимого множества возмущений.

Определение 5.46. Допустимыми неопределенностями Δ мы будем считать неопределенности, принадлежащие классу $\mathbb{D}_\varepsilon$, т.е. $\Delta \in \mathbb{D}_\varepsilon$, где

$$\mathbb{D}_\varepsilon \triangleq \mathbb{D}_{S_\varepsilon} \cup \mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon}$$

и

$$\mathbb{D}_{S_\varepsilon} \triangleq \{\Delta : \Delta \in RH_\infty; \quad \|\Delta\|_\infty < \varepsilon\},$$

$$\mathbb{D}_{\mathcal{U}_\varepsilon} \triangleq \{\Delta : \Delta \in RL_\infty; \quad \eta(\mathcal{U}(W_0, 0)) = \eta(\mathcal{U}(W_0, \Delta)); \quad \|\Delta\|_\infty < \varepsilon\},$$

где W_0 — обобщенный (стандартный) объект, η — число полюсов передаточной функции в правой полуплоскости.

Достаточные условия робастной устойчивости для неопределенной модели можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 5.15. Регулятор W_{ky} стабилизирует $\mathcal{U}(W_0, \Delta)$, изображенное на рис. 5.16, для любого $\Delta \in \mathbb{D}_\varepsilon$ и любого стандартного объекта W_0 , удовлетворяющего предположению 1 в теореме 5.11 тогда и только тогда, когда

$$1) \quad W_{ky} \text{ стабилизирует } \mathcal{U}(W_0, 0);$$

$$2) \quad \|\mathcal{L}(W_0, W_{ky})\|_\infty \leq \varepsilon^{-1}.$$

Доказательство этой теоремы опирается существенным образом на приведенные выше теоремы о малом коэффициенте усиления и на обобщенный критерий Найквиста (теоремы 5.12, 5.13). Оно не сложно, но достаточно громоздко. Подробное доказательство этих теорем можно найти в работах [161, 191].

Предыдущая теорема дает наиболее общее условие для робастной устойчивости. Аналогичные достаточные условия можно получить как следствия из этой теоремы для схем неопределенностей, изображенных на рис. 5.13, 5.14, 5.15.

Следствие 5.1. Регулятор $W_{\text{кy}}$ стабилизирует $W_{\Delta} = W + \Delta_A$, изображенную на рис. 5.13, для любого $\Delta_A \in \mathbb{D}_{\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда:

- 1) $W_{\text{кy}}$ стабилизирует W ;
- 2) $\left\| W_{\text{кy}} (I - WW_{\text{кy}})^{-1} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon^{-1}$.

Следствие 5.2. Регулятор $W_{\text{кy}}$ стабилизирует $W_{\Delta} = W + \Delta_{W_0} W$, изображенную на рис. 5.14, для любого $\Delta_{W_0} \in \mathbb{D}_{\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда:

- 1) $W_{\text{кy}}$ стабилизирует W ;
- 2) $\left\| WW_{\text{кy}} (I - WW_{\text{кy}})^{-1} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon^{-1}$.

Следствие 5.3. Регулятор $W_{\text{кy}}$ стабилизирует $W_{\Delta} = (\tilde{M} + \Delta_M)^{-1} (\tilde{N} + \Delta_N)$, изображенную на рис. 5.15, для любого $\Delta_D \triangleq [\Delta_M, \Delta_N] \in \mathbb{D}_{\varepsilon}$ тогда и только тогда, когда:

- 1) $W_{\text{кy}}$ стабилизирует W ;
- 2) $\left\| \begin{bmatrix} W_{\text{кy}} (I - WW_{\text{кy}})^{-1} \\ (I - WW_{\text{кy}})^{-1} \end{bmatrix} \right\|_{\infty} \leq \varepsilon^{-1}$.

Доказательства этих следствий можно легко получить из теоремы 5.15, подставляя выражения для обобщенного объекта в трех случаях (5.45), (5.46), (5.47) в выражение $\left\| \mathcal{L}(W_0, W_{\text{кy}}) \right\|_{\infty}$.

5.6.7. ПРОБЛЕМА РОБАСТНОЙ СТАБИЛИЗАЦИИ

Результаты предыдущего раздела могут быть привлечены для построения регуляторов, которые обеспечивают определенный уровень робастной устойчивости в замкнутой системе. Такие регуляторы называются робастными стабилизирующими регуляторами. Естественно использовать результаты теоремы 5.15 для постановки следующей проблемы робастной стабилизации.

Предложение 5.6. Наибольшее положительное число $\varepsilon = \varepsilon_{\max}$ такое, что для всех $\Delta \in \mathbb{D}_{\varepsilon}$ существует единственный регулятор, который стабилизирует $\mathcal{U}(W_0, \Delta)$, задается выражением

$$\varepsilon_{\max} = \left(\inf_{W_{\text{кy}}} \left\| \mathcal{L}(W_0, W_{\text{кy}}) \right\|_{\infty} \right)^{-1},$$

где $W_{\text{кy}}$ выбирается из всех регуляторов, которые стабилизируют $\mathcal{U}(W_0, \Delta)$.

В этом предложении мы имеем проблему робастной стабилизации как проблему H_{∞} -оптимизации, где регулятор выбирается из соображений минимизации H_{∞} -нормы передаточной функции замкнутой системы с ограничением, что он должен стабилизировать также номинальный объект. Стабилизирующий регулятор, обеспечивающий вышеуказанный минимум, называется оптимальным регулятором.

5.6.8. «2-РИККАТИ ПОДХОД» ДЛЯ РЕШЕНИЯ СТАНДАРТНОЙ ЗАДАЧИ

В этом разделе мы опишем метод решения стандартной задачи минимизации энергии выхода, которую мы описали в п. 5.6.1. Этот метод на сегодня является стандартом решения задач H_{∞} -оптимизации. К сожалению, аккуратный вывод алгоритма

является достаточно сложной и длительной процедурой, и мы его не приводим. В настоящее время есть книги, в которых этот вывод сделан строго математически ([160, 200]), но, к сожалению, они почти недоступны для российского читателя. В России также изданы работы, излагающие суть «2-Риккати подхода» ([56], [106]). Они не столь хорошо методологически выстроены, как работы [160] и [200], но дают достаточно полное представление об этом методе решения задач H_∞ -оптимизации.

Пусть некий объект управления описывается линейной системой уравнений

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = A\tilde{X} + B_1\tilde{Y} + B_2\tilde{U}, \\ \dot{\tilde{X}}_{b1} = C_1\tilde{X} + D_{11}\tilde{Y} + D_{12}\tilde{U}, \\ \dot{\tilde{X}}_{b2} = C_2\tilde{X} + D_{21}\tilde{Y} + D_{22}\tilde{U}. \end{cases} \quad (5.51)$$

Здесь $\tilde{X}$ — вектор состояния, $\tilde{X}_{b2}$ — вектор измерений, $\tilde{X}_{b1}$ — вектор контролируемых выходов, $\tilde{U}$ — вектор управления, $\tilde{Y}$ — внешний вход системы.

Пусть удовлетворяются следующие предположения:

- 1) (A, B_1, C_1) является стабилизируемой и детектируемой;
- 2) (A, B_2, C_2) является стабилизируемой и детектируемой;
- 3) $D_{12}^T [C_1 \ D_{12}] = [0 \ 1]$;
- 4) $\begin{bmatrix} B_1 \\ D_{21} \end{bmatrix} D_{21}^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.16 [153]. Регулятор для системы (5.51), который гарантирует выполнение неравенства

$$\|W_{\tilde{X}_{b1}, \tilde{Y}}\|_\infty < \gamma,$$

существует тогда и только тогда, когда:

- 1) $\exists X_\infty \geq 0$ — решение Обобщенного Алгебраического Уравнения Риккати Управления (по-английски Generalized Control Algebraic Riccati Equation — GCARE)

$$A^T X_\infty + X_\infty A - X_\infty [B_2 B_2^T - \gamma^{-2} B_1 B_1^T] X_\infty + C_1^T C_1 = 0;$$

- 2) $\exists Y_\infty \geq 0$ — решение Обобщенного Алгебраического Уравнения Риккати Фильтрации (по-английски Generalized Filtering Algebraic Equation — GFARE)

$$A Y_\infty + Y_\infty A^T - Y_\infty [C_2^T C_2 - \gamma^{-2} C_1^T C_1] Y_\infty + B_1 B_1^T = 0;$$

- 3) Спектральный радиус $\rho(X_\infty, Y_\infty) < \gamma^2$.

При этом регулятор получается в форме наблюдателя

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}}_c = A_c \tilde{X}_c + B_c \tilde{X}_{b2}, \\ \tilde{U} = C_c \tilde{X}_c, \end{cases} \quad (5.52)$$

где

$$\begin{cases} A_c = A - B_2 B_2^T X_\infty - [I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty]^{-1} Y_\infty C_2^T C_2 + \gamma^{-2} B_1 B_1^T X_\infty, \\ B_c = [I - \gamma^{-2} Y_\infty X_\infty]^{-1} Y_\infty C_2^T, \\ C_c = -B_2^T X_\infty. \end{cases} \quad (5.53)$$

Для построения субоптимального регулятора применяется итерационная процедура по γ . На каждом шаге решается субоптимальная задача, т.е. определяется регулятор $W_{\text{к}}^{(i)}(s)$, для которого

$$\|W_{\tilde{x}, \tilde{y}}\|_{\infty} < \gamma,$$

где i — номер шага. Затем величина γ уменьшается, субоптимальная задача решается до тех пор, пока существуют неотрицательно определенные решения алгебраических уравнений Риккати *GCARE*, *GFARE* и выполняется условие на ограничение спектрального радиуса. Полученное в результате итерационной процедуры минимальное значение γ , близкое к $\gamma_{\min}$ с заданной степенью точности, а также решения X_{∞} и Y_{∞} используются для синтеза робастного H_{∞} -субоптимального регулятора в соответствии с формулами в формулировке теоремы 5.16.

5.7. ПОСТРОЕНИЕ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ

В этом параграфе кратко излагаются концепция и математические основы стохастической теории H_{∞} -оптимизации конечномерных линейных стационарных систем автоматического управления с дискретным временем.

Как известно, H_2 - и H_{∞} -теории оптимизации линейных стационарных систем автоматического управления (см., например, [153, 158, 164]) основаны на использовании H_2 - и H_{∞} -норм (в соответствующих пространствах Харди матричных передаточных функций) как критериев качества, которые обусловлены различными гипотезами относительно природы поступающих на вход системы возмущений. Первая из них (называемая также стохастической теорией фильтрации управления Винера–Хопфа–Калмана) предполагает, что входное возмущение является случайным белым шумом, тогда как вторая (H_{∞} -теория управления) считает входное возмущение детерминированным квадратично суммируемым сигналом.

Как следствие, использование H_2 -оптимального регулятора в контуре обратной связи приводит к плохому функционированию замкнутой системы автоматического управления в случае, если на вход такой системы поступает сильно окрашенный случайный шум. В то же время H_{∞} -оптимальный регулятор проявляет консервативность (излишнюю перестраховочность), если входное возмущение является все же белым или слабо окрашенным шумом. Все эти положения полностью подтверждаются результатами моделирования.

Стохастический подход к H_{∞} -оптимизации систем автоматического управления, предложенный в [29, 188] и основанный на использовании как критерия качества стохастической нормы системы, представляет собой альтернативу упомянутым выше классическим подходам. Конкретизация этого подхода, получаемая комбинированием понятия стохастической нормы системы и средней анизотропии сигнала [28], приводит к специальному варианту стохастической нормы — анизотропийной норме.

В этом параграфе излагается анизотропийный анализ систем (вычисление анизотропийной нормы) и анизотропийный синтез систем (задача построения регулятора, при котором минимальна анизотропийная норма замкнутой системы при действии на ее вход окрашенного сигнала с уровнем анизотропии α).

Решение задачи анализа сводится, в силу результатов работ [193, 194], к решению системы алгебраических матричных уравнений Риккати и Ляпунова, а также уравне-

ния специального вида. Решение основной задачи синтеза также сводится к решению трех перекрестно связанных алгебраических матричных уравнений Риккати, уравнения Ляпунова, а также уравнения специального вида. Эти уравнения решаются с помощью метода гомотопии [173], заключающегося в сведении этих уравнений к системам нелинейных неавтономных дифференциальных уравнений по параметру.

5.7.1. АНИЗОТРОПИЙНЫЙ АНАЛИЗ СИСТЕМ

5.7.1.1. СРЕДНЯЯ АНИЗОТРОПИЯ ГАУССОВСКОГО СИГНАЛА

Определение и основные свойства средней анизотропии. Пусть $V \equiv (v_k)_{-\infty < k < +\infty}$ — дискретный m -мерный гауссовский белый шум с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей:

$$E v_k = 0, E(v_k v_k^T) = I_m, -\infty < k < +\infty.$$

Рассмотрим m -мерную стационарную гауссовскую последовательность

$$N \equiv (n_k)_{-\infty < k < +\infty} \equiv W_\Phi \otimes V,$$

получаемую из белого шума V посредством формирующего фильтра W_Φ с импульсной переходной характеристикой $k_i \in \mathbb{R}^{m \times m}$, $i \geq 0$ (рис. 5.17):

$$n_j = \sum_{i=0}^{+\infty} k_i v_{j-i}, -\infty < j < +\infty.$$

Такой фильтр отождествляется со своей передаточной функцией

$$W_\Phi(z) \equiv \sum_{i=0}^{+\infty} k_i z^i, \quad (5.54)$$

которая предполагается лежащей в пространстве Харди $H_2^{m \times m}$. Последнее означает, что функция (5.54) аналитична в открытом единичном круге $\{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ на комплексной плоскости и имеет конечную H_2 -норму

$$\|W_\Phi\|_2 \equiv \left(\sum_{i=0}^{+\infty} \text{tr} \{k_i k_i^T\} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \text{tr} \left\{ \hat{W}_\Phi(\omega) [\hat{W}_\Phi(\omega)]^* \right\} d\omega \right)^{1/2},$$

где через

$$\hat{W}_\Phi(\omega) \equiv \lim_{r \rightarrow 1-0} W_\Phi(re^{i\omega}), \quad \omega \in [-\pi; \pi]$$

обозначено угловое граничное значение функции (5.54).

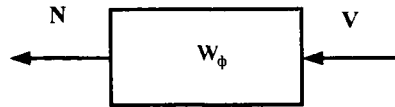


Рис. 5.17. Получение m -мерной стационарной гауссовской последовательности N

Средняя анизотропия [28] последовательности $N = W_\Phi \otimes V$ определяется как величина

$$\bar{A}(W_\Phi) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left\{ \frac{m}{\|W_\Phi\|_2^2} \hat{W}_\Phi(\omega) [\hat{W}_\Phi(\omega)]^* \right\} d\omega, \quad (5.55)$$

принимаяющая неотрицательное значение, как только формирующий фильтр $\mathbf{W}_\Phi \in H_2^{m \times m}$ имеет максимальный ранг, т.е.

$$\text{rank } \hat{\mathbf{W}}_\Phi = m, \quad \omega \in [-\pi; \pi],$$

и полагаемая равной $+\infty$, если фильтр $\mathbf{W}_\Phi$ — не максимального ранга.

Заметим, что $\bar{A}(\mathbf{W}_\Phi) = 0$ в том и только в том случае, если формирующий фильтр $\mathbf{W}_\Phi$ является с точностью до ненулевого постоянного множителя системой полного пропуска, т.е. если последовательность $\mathbf{N}$ — гауссовский белый шум с единичной ковариационной матрицей.

Свойства функционала средней анизотропии (5.55) можно найти в работах [49, 67, 156, 166, 170, 197], где содержатся также указания на его связи, с одной стороны, с теоретико-информационным подходом к количественному описанию хаоса, основанном на колмогоровской ϵ -энтропии вероятностных распределений [30, 107], а с другой — с принципом изотропности конечномерного евклидова пространства.

Формулы для средней анизотропии в пространстве состояний. Пусть фильтр $\mathbf{W}_\Phi \in H_2^{m \times m}$, формирующий из белого шума $\mathbf{V}$ гауссовскую последовательность $\mathbf{N} = \mathbf{W}_\Phi \otimes \mathbf{V}$, имеет n -мерное внутреннее состояние $\mathbf{X}$, связанное с входом $\mathbf{V}$ и выходом $\mathbf{N}$ фильтра уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{X}_{k+1} &= \mathbf{A}\mathbf{X}_k + \mathbf{B}\mathbf{v}_k, \\ \mathbf{n}_k &= \mathbf{C}\mathbf{X}_k + \mathbf{D}\mathbf{v}_k, \end{aligned} \right\} \quad -\infty < k < +\infty,$$

где $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ — постоянные матрицы соответствующих размеров, причем матрица $\mathbf{A}$ асимптотически устойчива (т.е. для ее спектрального радиуса выполнено строгое неравенство $\rho(\mathbf{A}) < 1$), а матрица $\mathbf{D}$ невырождена. Иными словами, формирующий фильтр $\mathbf{W}_\Phi$ имеет реализацию

$$\mathbf{W}_\Phi \sim \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

в пространстве состояний. Рассмотрим связанное с фильтром (5.56) уравнение Риккати относительно матрицы $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

$$\mathbf{R} = \mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{A}^T + \mathbf{B}\mathbf{B}^T - \mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{L}^T, \quad (5.57)$$

$$\mathbf{T} \equiv \mathbf{C}\mathbf{R}\mathbf{C}^T + \mathbf{D}\mathbf{D}^T, \quad (5.58)$$

$$\mathbf{L} \equiv (\mathbf{A}\mathbf{R}\mathbf{C}^T + \mathbf{B}\mathbf{D}^T)\mathbf{T}^{-1}. \quad (5.59)$$

Решение $\mathbf{R}$ уравнения (5.57)–(5.59) называется допустимым, если эта матрица симметрична, неотрицательно определена, а матрица $\mathbf{A} - \mathbf{L}\mathbf{C}$ асимптотически устойчива.

Известно [146, 162], что при сделанных предположениях об асимптотической устойчивости матрицы $\mathbf{A}$ и невырожденности матрицы $\mathbf{D}$ уравнение Риккати (5.57)–(5.59) имеет единственное допустимое решение.

Теорема 5.17 [107]. Пусть формирующий фильтр $\mathbf{W}_\Phi \in H_2^{m \times m}$ имеет реализацию в пространстве состояний (5.56) с асимптотически устойчивой матрицей $\mathbf{A}$ и невырожденной матрицей $\mathbf{D}$. Тогда средняя анизотропия (5.55) последовательности $\mathbf{N} \equiv \mathbf{W}_\Phi \otimes \mathbf{V}$ вычисляется по формуле

$$\bar{A}(\mathbf{W}_\Phi) = -\frac{1}{2} \ln \det \left[\frac{m\mathbf{T}}{\text{tr} \{ \mathbf{C}\mathbf{P}\mathbf{C}^T + \mathbf{D}\mathbf{D}^T \}} \right],$$

где $\mathbf{T}$ — матрица, связанная посредством (5.58) с допустимым решением $\mathbf{R}$ уравнения Риккати (5.57)–(5.59); $\mathbf{P}$ — граниан управляемости фильтра $\mathbf{W}_\Phi$, являющийся решением уравнения Ляпунова

$$\mathbf{P} = \mathbf{A}\mathbf{P}\mathbf{A}^\top + \mathbf{B}\mathbf{B}^\top. \quad (5.60)$$

По поводу численного решения уравнений Риккати типа (5.57)–(5.59) заметим, что существует эффективный алгоритм Шура, сводящий такое решение к отысканию обобщенных собственных векторов, специальным образом строящихся по параметрам уравнения пучков симплектических матриц, тесно связанный с так называемым QZ -разложением пары матриц [174].

Что касается уравнений Ляпунова вида (5.60), то наиболее экономичным представляется алгоритм решения, основанный на теореме Шура об унитарной триангуляризации матриц [138]. Альтернативный метод (менее эффективный в смысле «экономики размерности», но дающий явное выражение для решения уравнения Ляпунова) основан на идее разворачивания матрицы в вектор-столбец и описывается ниже.

Пример 5.10. Ниже приведен пример вычисления средней анизотропии для дискретной системы $\mathbf{W}_\Phi$, заданной $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ -представлением:

$$\mathbf{W}_\Phi \sim \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cc} 0,4501 & -0,0140 & -0,0435 & 0,2382 & 0,4355 \\ -0,2689 & 0,3913 & -0,4815 & -0,3237 & 0,4169 \\ 0,1068 & 0,2621 & 0,3214 & -0,0943 & -0,0897 \\ \hline 0,3936 & -0,1471 & -0,4901 & -0,2972 & 0,1038 \\ -0,4421 & 0,3132 & -0,3611 & -0,3013 & -0,2278 \end{array} \right],$$

с трехмерным внутренним состоянием и спектральным радиусом матрицы $\mathbf{A}$
 $\rho(\mathbf{A}) = 0,4962$.

Вычисление средней анизотропии, соответствующей двухмерной гауссовской последовательности, дает

$$\bar{A}(\mathbf{W}_\Phi) = 0,6389.$$

5.7.1.2. АНИЗОТРОПИЙНАЯ НОРМА ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Определение и основные свойства анизотропийной нормы. Пусть $\mathbf{W}$ — физически реализуемая линейная стационарная система, функционирующая в дискретном времени и имеющая m -мерный вход $\mathbf{Y}$ и p -мерный выход $\mathbf{X} = \mathbf{W} \otimes \mathbf{Y}$. Предположим, что ее передаточная функция лежит в пространстве Харди $H_\infty^{p \times m}$, т.е. аналитична в открытом единичном круге на комплексной плоскости и имеет конечную H_∞ -норму

$$\|\mathbf{W}\|_\infty \equiv \sup_{|z| < 1} \bar{\sigma}(\mathbf{W}(z)) = \text{ess} \sup_{-\pi \leq \omega \leq \pi} \bar{\sigma}(\hat{\mathbf{W}}(\omega)),$$

где $\bar{\sigma}(\cdot)$ обозначает максимальное сингулярное значение матрицы. Введем множество

$$\mathbb{W}_a \equiv \{ \mathbf{W}_\Phi \in H_2^{m \times m} : \bar{A}(\mathbf{W}_\Phi) \leq a \} \quad (5.61)$$

формирующих фильтров, генерирующих гауссовские последовательности, средняя анизотропия (5.55) которых ограничена сверху заданным неотрицательным параметром a . Соответственно a -анизотропийная норма системы $\mathbf{W}$ определяется как

$$\|\mathbf{W}\|_a \equiv \sup \left\{ \frac{\|\mathbf{W}\mathbf{W}_\Phi\|_2}{\|\mathbf{W}_\Phi\|_2} : \mathbf{W}_\Phi \in \mathbb{W}_a \right\} \quad (5.62)$$

и характеризует чувствительность системы в среднем к случайным входным возмущениям с уровнем средней анизотропии a .

Использование анизотропийной нормы системы $\mathbf{W}$ является важным в ситуации, проиллюстрированной на рис. 5.18, где о входном сигнале $\mathbf{Y}$ известно только, что он сгенерирован из гауссовского белого шума с помощью неизвестного фильтра $\mathbf{W}_\Phi \in \mathbb{W}_a$.

Для фиксированной системы $W \in H_{\infty}^{p \times m}$ ее a -анизотропийная норма (5.62) представляет собой неубывающую непрерывную функцию параметра $a \geq 0$, причем выполнены следующие соотношения:

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|W\|_2 = \|W\|_0 \leq \lim_{a \rightarrow +\infty} \|W\|_a = \|W\|_{\infty}, \quad (5.63)$$

в силу которых стандартные H_2 - и H_{∞} -нормы системы являются двумя предельными случаями анизотропийной нормы.

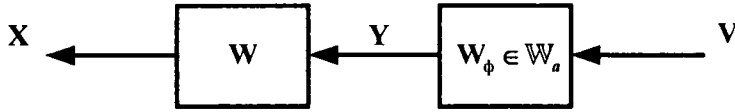


Рис. 5.18. Система W с выходом X и входным возмущением Y , генерированным неизвестным фильтром $W_{\phi} \in W_a$ из гауссовского белого шума V с единичной ковариационной матрицей

Как показывают соотношения (5.63), вычисление a -анизотропийной нормы $\|W\|_a$ представляет интерес лишь для положительных значений параметра a и систем $W \in H_{\infty}^{p \times m}$, удовлетворяющих строгому неравенству

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|W\|_2 \leq \|W\|_{\infty}. \quad (5.64)$$

Последнее нарушается лишь в том случае, если система W является внутренней с точностью до ненулевого постоянного множителя (т.е. если существует число $\alpha \neq 0$ такое, что $[\hat{W}(\omega)]^* \hat{W}(\omega) = \alpha^2 I_m$ для почти всех $\omega \in [-\pi; \pi]$). Если система W не является нулевой, то при соотношении $p < m$ между размерностями ее выхода и входа условие (5.64) выполняется автоматически.

Формулы для анизотропийной нормы в пространстве состояний. Пусть система $W \in H_{\infty}^{p \times m}$ имеет n -мерное внутреннее состояние X , связанное с m -мерным входом Y и p -мерным выходом $X_b = W \otimes Y$ системы уравнениями

$$\left. \begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k + BY_k, \\ X_{bk} &= CX_k + DY_k \end{aligned} \right\} -\infty < k < +\infty, \quad (5.65)$$

где A, B, C, D — постоянные матрицы соответствующих размеров, причем матрица A асимптотически устойчива. Таким образом, система W имеет реализацию

$$W \sim \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

в пространстве состояний.

Схематически система (5.66) изображена на рис. 5.19.

Рассмотрим следующее уравнение Риккати относительно матрицы $R \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$R = A^T R A + q C^T C - L^T \Sigma^{-1} L, \quad (5.67)$$

$$\Sigma \equiv (I_m - q D^T D - B^T R B)^{-1}, \quad (5.68)$$

$$L \equiv \Sigma (B^T R A + q D^T C). \quad (5.69)$$

Решение R уравнения Риккати (5.67)–(5.69) называется допустимым, если эта матрица симметрична, матрица Σ положительно определена, а матрица $A + BL$ асимптотически устойчива.

Заметим, что при любом $q \in [0; \|W\|_{\infty}^{-2}]$ уравнение (5.67)–(5.69) имеет единственное допустимое решение, причем последнее является неотрицательно определенной матрицей.

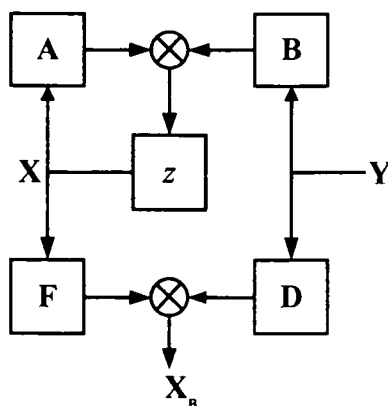


Рис. 5.19. Схематическое представление системы W :

Y , X и X_B — вход, внутреннее состояние и выход соответственно; z — оператор сдвига

Следующая теорема дает представление в пространстве состояний как для наилучшего формирующего фильтра, так и для анизотропийной нормы системы.

Теорема 5.18 [193]. Пусть заданы асимптотически устойчивая система (5.66), удовлетворяющая строгому неравенству (5.64), и уровень средней анизотропии входа $a > 0$. Тогда найдется единственная пара (q, R) параметра $q \in [0; \|W\|_{\infty}^{-2}]$ и допустимого решения R уравнения Риккати (5.67)–(5.69) (с сопутствующими матрицами Σ и L) такая, что

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left[\frac{m\Sigma}{\text{tr} \{LPL^T + \Sigma\}} \right] = a, \quad (5.70)$$

где P — грамиан управляемости формирующего фильтра

$$W_{\phi} \sim \begin{bmatrix} A + BL & b\Sigma^{1/2} \\ L & \Sigma^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (5.71)$$

удовлетворяющий уравнению Ляпунова

$$P = [A + BL]P[A + BL]^T + B\Sigma B^T. \quad (5.72)$$

При этом фильтр (5.71) является наилучшим формирующим фильтром, и a -анизотропийная норма (5.62) системы W определяется выражением

$$\|W\|_a = \left\{ \frac{1}{q} \left[1 - \frac{m}{\text{tr} \{LPL^T + \Sigma\}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.73)$$

Представление в пространстве состояний наилучшего входного генерирующего фильтра (5.71) для системы (5.66) схематически представлено на рис. 5.20.

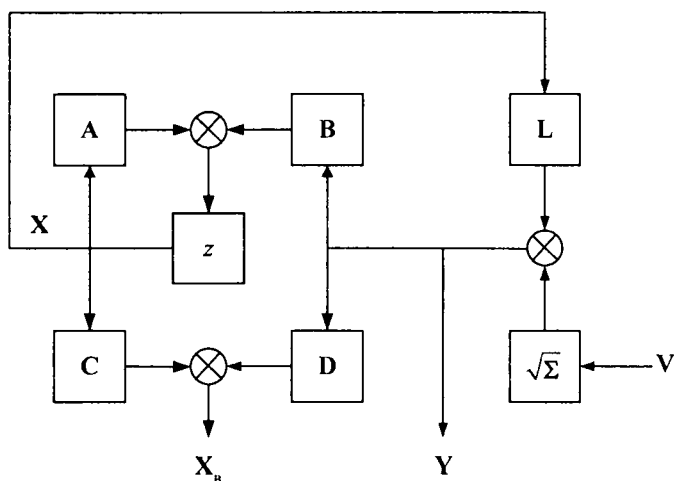


Рис. 5.20. Представление в пространстве состояний наилучшего входного генерирующего фильтра W_Φ для системы W

5.7.1.3. ВЫЧИСЛЕНИЕ АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ МЕТОДОМ ГОМОТОПИИ

Сведение к системе дифференциальных уравнений. Предполагая асимптотически устойчивую систему (5.66) фиксированной, введем для каждого значения параметра $q \in [0; \|W\|_\infty^{-2})$ следующее непустое множество:

$$\mathbb{R}(q) \equiv \{R \in \mathbb{R}^{n \times n} : R = R^T,$$

матрица Σ положительно определена,

матрица $A + BL$ асимптотически устойчива}.

Тем самым посредством соотношений (5.68) и (5.69) на множестве

$$\Pi \equiv \{(q, R) : q \in [0; \|W\|_\infty^{-2}), R \in \mathbb{R}(q)\} \quad (5.74)$$

определены матричнозначные отображения

$$\Sigma : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{m \times m},$$

$$L : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{m \times n},$$

бесконечно дифференцируемые по своим аргументам q и R . Последним свойством (как композиция гладких отображений) обладает и связанная уравнением Ляпунова (5.72) с Σ и L матрица P , которую тоже можно рассматривать как матричнозначное отображение:

$$P : \Pi \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}.$$

Далее, под $R : [0; \|W\|_\infty^{-2}) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ понимается матричнозначное отображение, сопоставляющее каждому значению параметра q из указанного полуинтервала допустимое решение $R(q)$ уравнения Риккати (5.67)–(5.69). Введем функции

$$\mathcal{A}, \mathcal{N} : [0; \|W\|_\infty^{-2}) \rightarrow \mathbb{R}$$

(первая из которых принимает неотрицательные значения, а вторая — значения из полуинтервала $[m^{-1/2}\|\mathbf{W}\|_2; \|\mathbf{W}\|_x]$), определив их посредством левой и правой частей соотношений (5.70) и (5.73) соответственно:

$$\mathcal{A}(q) \equiv -\frac{1}{2} \ln \det \left[\frac{m\Sigma}{\text{tr}\{\mathbf{LPL}^T + \Sigma\}} \right],$$

$$\mathcal{N}(q) \equiv \left\{ \frac{1}{q} \left[1 - \frac{m}{\text{tr}\{\mathbf{LPL}^T + \Sigma\}} \right] \right\}^{1/2}.$$

Теорема 5.18 приводит к следующему выражению для α -анизотропийной нормы системы $\mathbf{W}$ в терминах функций $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$:

$$\|\mathbf{W}\|_\alpha = \mathcal{N}(\mathcal{A}^{-1}(\alpha)). \quad (5.75)$$

Иными словами, параметрически заданная кривая, построенная на плоскости путем откладывания по оси абсцисс значений функции $\mathcal{A}$, а по оси ординат — функции $\mathcal{N}$ (при пробегании параметром q значений из полуинтервала $[0; \|\mathbf{W}\|_x^{-2}]$), представляет собой график зависимости α -анизотропийной нормы фиксированной системы $\mathbf{W}$ от уровня средней анизотропии входа $\alpha \geq 0$.

Построение такой кривой сводится в конечном итоге к решению уравнения Риккати (5.67)–(5.69) при различных значениях параметра q .

Гладкая зависимость правой части рассматриваемого уравнения от параметра q и использование результатов [184] приводит к следующим двум наблюдениям: во-первых, при малом приращении этого параметра слабо возмущается и решение $\mathbf{R}(q)$ уравнения, поэтому можно вычислить поправку, описывающую возмущенное решение с точностью до o -малого относительно такого приращения, не решая «заново» модифицированное уравнение; во-вторых, при $q = 0$ уравнение Риккати (5.67)–(5.69) имеет простое явное решение $\mathbf{R}(0) = \mathbf{0}$. Сказанное представляет собой неформальное описание метода гомотопии [173], строгая реализация которого в рассматриваемом случае основана на следующей лемме.

Лемма 5.10. Для заданной асимптотически устойчивой системы (5.66) допустимое решение уравнения Риккати (5.67)–(5.69) и соответствующие матрицы (5.68), (5.69) и (5.72) аналитичны по $q \in [0; \|\mathbf{W}\|_x^{-2}]$ и удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\dot{\mathbf{R}} = [\mathbf{A} + \mathbf{BL}]^T \dot{\mathbf{R}} [\mathbf{A} + \mathbf{BL}] + [\mathbf{C} + \mathbf{DL}]^T [\mathbf{C} + \mathbf{DL}], \quad (5.76)$$

$$\dot{\mathbf{P}} = [\mathbf{A} + \mathbf{BL}] \dot{\mathbf{P}} [\mathbf{A} + \mathbf{BL}]^T + \mathbf{B} \dot{\mathbf{L}} \mathbf{P} [\mathbf{A} + \mathbf{BL}]^T + [\mathbf{A} + \mathbf{BL}] \mathbf{P} \dot{\mathbf{L}}^T \mathbf{B}^T + \mathbf{B} \dot{\Sigma} \mathbf{B}^T, \quad (5.77)$$

$$\dot{\mathbf{L}} = \Sigma [\mathbf{B}^T \dot{\mathbf{R}} [\mathbf{A} + \mathbf{BL}] + \mathbf{D}^T [\mathbf{C} + \mathbf{DL}]], \quad (5.78)$$

$$\dot{\Sigma} = \Sigma [\mathbf{D}^T \mathbf{D} + \mathbf{B}^T \dot{\mathbf{R}} \mathbf{B}] \Sigma. \quad (5.79)$$

Поскольку функция $\mathcal{A}$ строго возрастает и выпукла, вычисление α -анизотропийной нормы по формуле (5.75) может осуществляться с помощью ньютоновских итераций, сходимость которых обеспечивается строгой монотонностью и выпуклостью функции $\mathcal{A}$. Именно, рекуррентная последовательность

$$q_{k+1} = \begin{cases} \frac{\|\mathbf{W}\|_{\infty}^{-2} + q_k}{2}, & \mathcal{A}(q_k) < a, \\ q_k + \frac{a - \mathcal{A}(q_k)}{\mathcal{A}(q_k)}, & \mathcal{A}(q_k) \geq a, \quad k \geq 0 \end{cases} \quad (5.80)$$

с начальным условием $q_0 = 0$ сходится к пределу

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} q_k = \mathcal{A}^{-1}(a).$$

Эта сходимость монотонна в том смысле, что при

$$\mathcal{A}\left((1 - 2^{-k})\|\mathbf{W}\|_{\infty}^{-2}\right) \geq a$$

последовательность q_k убывает. При этом в качестве практического условия окончания описанных итераций можно использовать выполнение неравенства

$$(\mathcal{A}(q_k) - a) \max \left\{ 1, \frac{\dot{\mathcal{N}}(q_k)}{\mathcal{A}(q_k)\mathcal{N}(q_k)} \right\} < \varepsilon, \quad (5.81)$$

обеспечивающего вычисление a -анизотропийной нормы системы с относительной погрешностью ε . Производные функций $\mathcal{A}$ и $\mathcal{N}$, участвующие в (5.80) и (5.81), рассчитываются по формулам

$$\dot{\mathcal{A}}(q) = -\frac{1}{2} \left[\frac{m\dot{\Psi}}{\Psi} + \text{tr} \{ \dot{\Sigma} \Sigma^{-1} \} \right],$$

$$\dot{\mathcal{N}}(q) = -\frac{1}{2} \mathcal{N}(q) \left[\frac{1}{q} + \frac{\dot{\Psi}}{1 - \Psi} \right],$$

где

$$\Psi = \frac{m}{\Phi}, \quad (5.82)$$

$$\dot{\Psi} = -\frac{m\dot{\Phi}}{\Phi^2}, \quad (5.83)$$

$$\Phi = \text{tr} \{ \mathbf{LPL}^T + \Sigma \}, \quad (5.84)$$

$$\dot{\Phi} = \text{tr} \{ \mathbf{L}\dot{\mathbf{P}}\mathbf{L}^T + 2\dot{\mathbf{L}}\mathbf{P}\mathbf{L}^T + \dot{\Sigma} \}, \quad (5.85)$$

которые дополняются уравнениями (5.76)–(5.79).

Пример 5.11. Вычисление анизотропийной нормы. Пусть задана дискретная система, $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D})$ -представление которой имеет вид

$$\mathbf{W} \sim \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 0,4501 & -0,0140 & -0,0435 & -0,0553 & 0,4218 & -0,0943 & -0,0897 \\ -0,2689 & 0,3913 & -0,4815 & 0,1154 & 0,2382 & 0,4355 & 0,3936 \\ 0,1068 & 0,2621 & 0,3214 & 0,2919 & -0,3237 & 0,4169 & -0,4421 \\ -0,3012 & 0,2468 & 0,4318 & -0,0814 & 0,0252 & 0,1721 & -0,4804 \\ -0,4847 & -0,0549 & -0,0340 & 0,3462 & -0,2974 & 0,3381 & 0,1813 \end{array} \right],$$

с трехмерным внутренним состоянием и спектральным радиусом матрицы $\mathbf{A}$

$$\rho(\mathbf{A}) = 0,4962.$$

Вычисление ее H_2 - и H_{∞} -норм дает

$$\|\mathbf{W}\|_2 = 0,9454, \quad \|\mathbf{W}\|_{\infty} = 1,0591.$$

Результаты вычисления анизотропийной нормы системы при некоторых значениях уровня анизотропии сведены в табл. 5.4.

Соответствие между уровнем средней анизотропии входного сигнала и анизотропийной нормой системы

a	$\ W\ _a$	a	$\ W\ _a$	a	$\ W\ _a$
0	0,4730	0,1	0,5800	2	0,9161
0,01	0,5064	0,2	0,6254	3	0,9751
0,02	0,5204	0,3	0,6597	4	1,0091
0,03	0,5313	0,4	0,6886	5	1,0291
0,04	0,5404	0,5	0,7137	6	1,0410
0,05	0,5483	0,6	0,7362	7	1,0482
0,06	0,5555	0,7	0,7564	8	1,0525
0,07	0,5622	0,8	0,7748	9	1,0551
0,08	0,5689	0,9	0,7917	10	1,0567
0,09	0,5745	1	0,8074	11	1,0576

5.7.2. АНИЗОТРОПИЙНЫЙ СИНТЕЗ СИСТЕМ

5.7.2.1. ЗАДАЧА ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПО КРИТЕРИЮ МИНИМУМА АНИЗОТРОПИЙНОЙ НОРМЫ

Постановка задачи. Рассмотрим физически реализуемую линейную стационарную систему W (не предполагаемую устойчивой, т.е. ее передаточная функция не обязательно аналитична в единичном круге на комплексной плоскости), которая имеет два входа: m_1 -мерное возмущение Y и m_2 -мерное управление U ; два выхода: p_1 -мерный управляемый сигнал X_{b1} и p_2 -мерное наблюдение X_{b2} . Перечисленные сигналы представляют собой двусторонние последовательности векторов указанных размерностей. В соответствии с этим система W имеет блочную структуру

$$W = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ W_{21} & W_{22} \end{bmatrix}. \quad (5.86)$$

Если управляющий сигнал U формируется по наблюдению X_{b2} регулятором W_{ky} , являющимся физически реализуемой линейной стационарной (не обязательно устойчивой) системой, т.е. $U = W_{ky} \otimes X_{b2}$, то передаточная функция от Y к X_{b1} получающейся замкнутой системы представляет собой нижнее дробно-линейное преобразование пары (W, W_{ky}) :

$$\mathcal{L}(W, W_{ky}) \equiv W_{11} + W_{12} W_{ky} [I_{p_2} - W_{22} W_{ky}]^{-1} W_{21}. \quad (5.87)$$

Предположим теперь, что входное возмущение Y является случайным сигналом, априорная информация о вероятностном распределении которого исчерпывается следующим: Y — m_1 -мерная стационарная гауссовская последовательность, средняя анизотропия которой ограничена сверху известным неотрицательным параметром a . Точнее, последнее означает, что Y генерируется из m_1 -мерного гауссовского белого шума V с нулевым математическим ожиданием и единичной ковариационной матрицей

$$E v_k = 0, \quad E [v_k v_k^T] = I_{m_1}, \quad -\infty < k < +\infty$$

посредством неизвестного формирующего фильтра W_ϕ , лежащего в семействе

$$W_a \equiv \{W_\phi \in H_2^{m_1 \times m_1} : \bar{A}(W_\phi) \leq a\}, \quad (5.88)$$

где

$$\bar{A}(\mathbf{W}_\Phi) \equiv -\frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \left\{ \frac{m_1}{\|\mathbf{W}_\Phi\|_2^2} \hat{\mathbf{W}}_\Phi(\omega) [\hat{\mathbf{W}}_\Phi(\omega)]^* \right\} d\omega \quad (5.89)$$

— функционал средней анизотропии.

Учитывая прикладной аспект проблемы, следует ограничиться рассмотрением лишь строго неупреждающих регуляторов $\mathbf{W}_{\text{кy}}$, для которых управление u_k зависит в каждый момент времени k только от предшествующих наблюдений $u_j, j < k$.

Регулятор $\mathbf{W}_{\text{кy}}$ называется допустимым, если он является строго неупреждающим и внутренне стабилизирует [158] замкнутую систему (5.87). Множество всевозможных допустимых регуляторов для заданной системы $\mathbf{W}$ обозначается далее через $\mathbb{W}_{\text{кy}}$.

Сформулируем стохастическую проблему H_∞ -оптимизации, основанную на понятии анизотропии сигналов [107, 108, 194]: для заданных системы (5.86) и уровня $a \geq 0$ средней анизотропии (5.89) входного возмущения $\mathbf{Y}$ найти допустимый регулятор $\mathbf{W}_{\text{кy}}$, минимизирующий a -анизотропийную норму замкнутой системы (5.87):

$$\|\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{W}_{\text{кy}})\|_a \equiv \sup \left\{ \frac{\|\mathcal{L}(\mathbf{W}, \mathbf{W}_{\text{кy}}) \mathbf{W}_\Phi\|_2}{\|\mathbf{W}_\Phi\|_2} : \mathbf{W}_\Phi \in \mathbb{W}_a \right\} \searrow \inf, \mathbf{W}_{\text{кy}} \in \mathbb{W}_{\text{кy}}. \quad (5.90)$$

Сформулированная выше задача проиллюстрирована на рис. 5.21.

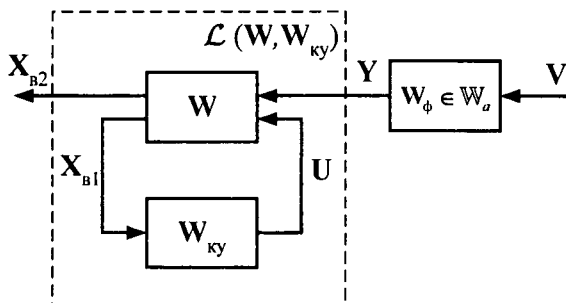


Рис. 5.21. Структурная схема системы

Сформулированная проблема (как и всякая минимаксная задача) представляет собой антагонистическую игру двух игроков, в качестве первого из которых выступаем мы (множеством наших стратегий в этой игре является множество $\mathbb{W}_{\text{кy}}$ внутренне стабилизирующих регуляторов), а в качестве второго — природа (множеством ее стратегий является семейство (5.88) формирующих фильтров с ограниченной известным параметром a средней анизотропией). Заметим, что в случае нулевого уровня $a = 0$ средней анизотропии задача (5.90) совпадает со стандартной проблемой H_2 -оптимизации, решение которой составляет основу стохастической теории фильтрации-управления Винера–Хопфа–Калмана.

Уравнения для оптимального регулятора в пространстве состояний. Пусть разомкнутая система $\mathbf{W}$ имеет n -мерное внутреннее состояние $\mathbf{X}$, связанное с m_1 -мерным возмущением $\mathbf{Y}$, m_2 -мерным управлением $\mathbf{U}$, p_1 -мерным управляемым сигналом $\mathbf{X}_{v1}$ и p_2 -мерным наблюдением $\mathbf{X}_{v2}$ уравнениями

$$\left. \begin{aligned} X_{k+1} &= AX_k + B_1 Y_k + B_2 U_k, \\ X_{b1k} &= C_1 X_k + D_{11} Y_k + D_{12} U_k, \\ X_{b2k} &= C_2 X_k + D_{21} Y_k, \end{aligned} \right\} -\infty < k < +\infty, \quad (5.91)$$

где A , C_i , B_j и D_{ij} — постоянные матрицы соответствующих размеров. Иными словами, система W , а также ее подсистемы W_{ij} в (5.86) имеют следующие реализации в пространстве состояний:

$$W \sim \left[\begin{array}{c|cc} A & B_1 & B_2 \\ \hline C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{array} \right], \quad (5.92)$$

$$W_{ij} \sim \left[\begin{array}{cc} A & B_j \\ \hline C_i & D_{ij} \end{array} \right], \quad 1 \leq i, j \leq 2 \quad (5.93)$$

(без ограничения общности полагается $D_{22} = 0$).

Ниже для системы (5.92) приводятся уравнения для решения сформулированной в предыдущем разделе стохастической проблемы (5.90) H_∞ -оптимизации по критерию минимума анизотропийной нормы. При этом используются следующие стандартные предположения:

- (A1) подсистема W_{22} в (5.93) стабилизируема и детектируема (чтобы обеспечить непустоту множества W_{ky} допустимых регуляторов);
- (A2) размерность управляемого сигнала X_{b1} меньше размерности входного возмущения Y : $p_1 < m_1$ (чтобы замкнутая система $\mathcal{L}(W, W_{ky})$ не была внутренней с точностью до ненулевого постоянного множителя);
- (A3) матрица D_{21} в (5.92) имеет полный строчный ранг: $\text{rank } D_{21} = p_2 \leq m_1$ (во избежание вырожденности в уравнении Риккати для оценивающего регулятора);
- (A4) матрица D_{12} в (5.92) имеет полный столбцовый ранг: $\text{rank } D_{12} = m_2 \leq p_1$ (во избежание вырожденности в уравнении Риккати для оптимального регулятора).

Пусть W_{ky} — допустимый регулятор, имеющий n -мерное внутреннее состояние H , связанное с сигналами наблюдения X_{b2} и управления U уравнениями

$$\left. \begin{aligned} H_{k+1} &= \hat{A} H_k + \hat{B} X_{b2k}, \\ U_k &= \hat{C} H_k, \end{aligned} \right\} -\infty < k < +\infty, \quad (5.94)$$

где $\hat{A}$, $\hat{B}$ и $\hat{C}$ — постоянные матрицы соответствующих размеров и, следовательно, W_{ky} имеет реализацию

$$W_{ky} \sim \left[\begin{array}{cc} \hat{A} & \hat{B} \\ \hline \hat{C} & 0 \end{array} \right] \quad (5.95)$$

в пространстве состояний. Тогда реализация замкнутой системы (5.87) в пространстве состояний имеет вид

$$\mathcal{L}(W, W_{ky}) \sim \left[\begin{array}{cc} \bar{A} & \bar{B} \\ \hline \bar{C} & D_{11} \end{array} \right] \equiv \left[\begin{array}{cc|c} A & B_2 \hat{C} & B_1 \\ \hline \hat{B} C_2 & \hat{A} & \hat{B} D_{21} \\ \hline C_1 & D_{12} \hat{C} & D_{11} \end{array} \right], \quad (5.96)$$

причем матрица $\bar{A}$ асимптотически устойчива. Учитывая (5.96), рассмотрим уравнение Риккати

$$R = \bar{A}^T R \bar{A} + q \bar{C}^T \bar{C} + L^T \Sigma^{-1} L; \quad (5.97)$$

$$\Sigma \equiv [I_{m_1} - q D_{11}^T D_{11} - \bar{B}^T R \bar{B}]^{-1}; \quad (5.98)$$

$$L \equiv [L_1 \quad L_2] \equiv \Sigma [\bar{B}^T R \bar{A} + q D_{11}^T \bar{C}], \quad (5.99)$$

где q — скалярный параметр, принимающий значения из полуоткрытого интервала $[0; \|\mathcal{L}(W, W_{ky})\|_{\infty}^{-2})$, а матрица L разбита на блоки $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n}$.

Решение $R = R^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ уравнения (5.97)–(5.99) называется допустимым, если матрица Σ положительно определена, а матрица $\bar{A} + \bar{B}L$ асимптотически устойчива.

Каков бы ни был допустимый регулятор (5.95), уравнение (5.97)–(5.99) имеет для любого $q \in [0; \|\mathcal{L}(W, W_{ky})\|_{\infty}^{-2})$ единственное допустимое решение, причем это решение является неотрицательно определенной матрицей.

Теорема 5.19 [107, 194]. Пусть система (5.92) удовлетворяет предположениям A1 и A2. Тогда, каковы бы ни были допустимый регулятор (5.95) и уровень $a > 0$ средней анизотропии входа, существует единственная пара (q, R) параметра $q \in [0; \|\mathcal{L}(W, W_{ky})\|_{\infty}^{-2})$ и допустимого решения R уравнения Риккати (5.97)–(5.99) такая, что

$$-\frac{1}{2} \ln \det \left[\frac{m_1 \Sigma}{\text{tr} \{LPL^T + \Sigma\}} \right] = a, \quad (5.100)$$

где $P \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ — грамиан управляемости формирующего фильтра

$$W_{\phi} \sim \begin{bmatrix} \bar{A} + \bar{B}L & \bar{B}\Sigma^{1/2} \\ L & \Sigma^{1/2} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_1 L_1 & B_1 L_2 + B_2 \hat{C} & B_1 \Sigma^{1/2} \\ \hline \hat{B} [C_2 + D_{21} L_1] & \hat{A} + \hat{B} D_{21} L_2 & \hat{B} D_{21} \Sigma^{1/2} \\ \hline L_1 & L_2 & \Sigma^{1/2} \end{array} \right], \quad (5.101)$$

удовлетворяющий уравнению Ляпунова

$$P = [\bar{A} + \bar{B}L] P [\bar{A} + \bar{B}L]^T + \bar{B} \Sigma \bar{B}^T. \quad (5.102)$$

Этот фильтр является наилучшим формирующим фильтром, и a -анизотропная норма замкнутой системы (5.96) вычисляется по формуле

$$\|\mathcal{L}(W, W_{ky})\|_a = \left\{ \frac{1}{q} \left[1 - \frac{m_1}{\text{tr} \{LPL^T + \Sigma\}} \right] \right\}^{1/2}. \quad (5.103)$$

Рассмотрим уравнение Риккати

$$S = [A + B_1 L_1] S [A + B_1 L_1]^T + B_1 \Sigma B_1^T - \Lambda \Theta \Lambda^T; \quad (5.104)$$

$$\Theta \equiv [C_2 + D_{21} L_1] S [C_2 + D_{21} L_1]^T + D_{21} \Sigma D_{21}^T; \quad (5.105)$$

$$\Lambda \equiv [A + B_1 L_1] S [C_2 + D_{21} L_1]^T + B_1 \Sigma D_{21}^T \Theta^{-1}, \quad (5.106)$$

где матрицы Σ и L определены в теореме 5.19.

Решение $S = S^T \in \mathbb{R}^{n \times n}$ уравнения (5.104)–(5.106) называется допустимым, если матрица S неотрицательно определена, а матрица $A + B_1 L_1 - \Lambda[C_2 + D_{21} L_1]$ асимптотически устойчива.

Заметим, что уравнения (5.104)–(5.106) имеют не более одного допустимого решения. Наконец, рассмотрим уравнение Риккати

$$T = \underline{A}^T T \underline{A} + \underline{C}^T \underline{C} - N^T \Pi N; \quad (5.107)$$

$$\Pi \equiv \underline{B}^T T \underline{B} + D_{12}^T D_{12}; \quad (5.108)$$

$$N \equiv [N_1 \quad N_2] \equiv -\Pi^{-1} (\underline{B}^T T \underline{A} + D_{12}^T \underline{C}), \quad (5.109)$$

где матрица N разбита на блоки $N_1, N_2 \in \mathbb{R}^{m_2 \times n}$, а матрицы $\underline{A} \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{2n \times m_2}$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{p_1 \times 2n}$ имеют вид

$$\begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{B} \\ \underline{C} & * \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{cc|c} A & B_1 M & B_2 \\ \hline 0 & A + B_1 M + B_1 \hat{C} & 0 \\ \hline C_1 & D_{11} M & * \end{array} \right], \quad (5.110)$$

где, в свою очередь, через

$$M \equiv L_1 + L_2 \quad (5.111)$$

обозначена сумма блоков матрицы (5.99).

Решение $T = T^T \in \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ уравнения (5.107)–(5.109) называется допустимым, если матрица T неотрицательно определена, а матрица $\underline{A} + \underline{B} N$ асимптотически устойчива.

Заметим, что уравнения (5.107)–(5.109) имеют не более одного допустимого решения.

Теорема 5.20 [107, 194]. Пусть система (5.92) удовлетворяет предположениям A1–A4, и пусть матрицы реализации допустимого регулятора (5.93) подчиняются соотношениям

$$\hat{A} = B_2 \hat{C} + [I_n - \Lambda] \begin{bmatrix} A & B_1 \\ C_2 & D_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n \\ M \end{bmatrix}, \quad (5.112)$$

$$\hat{B} = \Lambda, \quad (5.113)$$

$$\hat{C} = N_1 + N_2, \quad (5.114)$$

где матрицы N_1, N_2 связаны с допустимым решением уравнения Риккати (5.107)–(5.109). Тогда этот регулятор является решением задачи (5.90).

Теоремы 5.19 и 5.20 дают полный набор нелинейных уравнений для отыскания матриц реализации в пространстве состояний оптимального регулятора (5.95) в задаче стохастической H_∞ -оптимизации (5.90) по критерию минимума анизотропийной нормы для n -мерной системы (5.92). Этот набор состоит из следующих перекрестно связанных уравнений: три алгебраических матричных уравнения Риккати (два $(2n \times 2n)$ -уравнения Риккати (5.97)–(5.99) и (5.107)–(5.109) и $(n \times n)$ -уравнение Риккати (5.105)–(5.106)), уравнение Ляпунова (5.102), уравнение специального вида (5.100), уравнения (5.112)–(5.114), а также обозначения (5.96), (5.111) и (5.110). Удовлетворение этой системе соотношений является достаточным условием для оптимальности n -мерного регулятора (5.95).

5.7.2.2. ВЫЧИСЛЕНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО РЕГУЛЯТОРА МЕТОДОМ ГОМОТОПИИ

Векторизация матриц. Введем оператор векторизации $\text{col} : \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^{pq}$, сопоставляющий матрице $\mathbf{X} = [x_{jk}]_{1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq q}$ вектор

$$\text{col}(\mathbf{X}) = \left[x_{\text{mod}(l-1, p) + 1, \left\lfloor \frac{l-1}{p} \right\rfloor + 1} \right]_{1 \leq l \leq pq},$$

образованный последовательно выписанными столбцами матрицы $\mathbf{X}$, где $\text{mod}(a, b)$ — остаток от деления a на b , а $\lfloor \cdot \rfloor$ — нижняя целая часть числа. Очевидно, что отображение col является линейной биекцией пространств $\mathbb{R}^{p \times q}$ и $\mathbb{R}^{pq}$.

Лемма 5.11.

а) Для любых матриц $\alpha \in \mathbb{R}^{r \times p}$, $\beta \in \mathbb{R}^{p \times q}$ и $\gamma \in \mathbb{R}^{s \times q}$

$$\text{col}(\alpha \beta \gamma^T) = (\gamma \otimes \alpha) \text{col}(\beta),$$

где $\otimes$ — кронекерово произведение матриц [78].

б) Для любой матрицы $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times q}$

$$\text{col}(\mathbf{X}^T) = \gamma_{p,q} \text{col}(\mathbf{X}),$$

где

$$\gamma_{p,q} = \left[\delta_{p \text{ mod } (j-1, q) + \left\lfloor \frac{j-1}{q} \right\rfloor + 1, k} \right]_{1 \leq j \leq pq, 1 \leq k \leq pq} \quad (5.115)$$

и δ_{jk} — символ Кронекера.

Заметим, что матрица (5.115) ортогональна для любых p, q , причем $\gamma_{p,q} = \gamma_{q,p}^T$, откуда, в частности, вытекает симметричность и идемпотентность матрицы $\gamma_{p,p}$.

Лемма 5.12. Векторизованное решение $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ уравнения Ляпунова

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} \mathbf{X} \mathbf{A}^T + \mathbf{Y} + \mathbf{Y}^T,$$

где $\mathbf{A}, \mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ — заданные матрицы, причем $\mathbf{A}$ асимптотически устойчива, имеет вид

$$\text{col}(\mathbf{X}) = [\mathbf{I}_{p^2} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A}]^{-1} [\mathbf{I}_{p^2} + \mathbf{g}_{p,p}] \text{col}(\mathbf{Y}).$$

Далее, под производной $\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{X}}$ гладкого матричнозначного отображения

$\mathbf{Y} : \mathbb{R}^{p \times q} \rightarrow \mathbb{R}^{r \times s}$ понимается $(rs) \times (pq)$ -матрица Якоби $\frac{\partial \text{col}(\mathbf{Y})}{\partial \text{col}(\mathbf{X})^T}$ соответствующе-

го векторизованного отображения. Более того, для упорядоченного набора матрично-значных отображений $\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_b$, зависящих от матриц $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_a$, полагается

$$\frac{\partial(\mathbf{Y}_1, \dots, \mathbf{Y}_b)}{\partial(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_a)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial \mathbf{X}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{Y}_1}{\partial \mathbf{X}_a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{Y}_b}{\partial \mathbf{X}_1} & \dots & \frac{\partial \mathbf{Y}_b}{\partial \mathbf{X}_a} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что для любых гладких отображений $X: \mathbb{R}^{s \times t} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times q}$ и $Y: \mathbb{R}^{s \times t} \rightarrow \mathbb{R}^{q \times r}$, зависящих от матрицы Z , справедливо

$$\frac{\partial(XY)}{\partial Z} = (Y^T \otimes I_p) \frac{\partial X}{\partial Z} + (I_p \otimes X) \frac{\partial Y}{\partial Z}.$$

Дифференцирование решений уравнений Риккати. Рассмотрим уравнение Риккати относительно матрицы $S \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$S = ASA^T + BB^T - \Lambda \Theta \Lambda^T; \quad (5.116)$$

$$\Theta = C^T SC + DD^T; \quad (5.117)$$

$$\Lambda = (ASC^T + BD^T) \Theta^{-1}, \quad (5.118)$$

где $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{R}^{p \times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $D \in \mathbb{R}^{p \times m}$ — заданные матрицы, называя его решение допустимым, если матрица

$$F = A - \Lambda C \quad (5.119)$$

асимптотически устойчива. Такое решение единственно и гладким образом зависит от матриц A , B , C , D в окрестности тех их значений, где оно существует [184].

Лемма 5.13. Производные допустимого решения уравнения Риккати (5.116)–(5.118) и сопутствующих ему матриц имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial(A, B, C, D)} &= (I_{n^2} - F \otimes F)^{-1} (I_{n^2} + \gamma_{n,n}) \times \\ &\times \left[[FS | B - \Lambda D] \otimes I_n - [FS | B - \Lambda D] \otimes \Lambda \right], \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial(A, B, C, D)} &= (C \otimes C) \frac{\partial S}{\partial(A, B, C, D)} \times \\ &\times \left[0_{p^2 \times n(n+m)} \mid (I_{n^2} + \gamma_{p,p}) ([CS | D] \otimes I_p) \right], \end{aligned} \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Lambda}{\partial(A, B, C, D)} &= (\Theta^{-1} \otimes I_n) \left((C \otimes A) \frac{\partial S}{\partial(A, B, C, D)} \times \right. \\ &\times \left. \left[[CS | D] \otimes I_n \mid \gamma_{p,n} ([AS | D] \otimes I_p) \right] - (I_p \otimes \Lambda) \frac{\partial \Theta}{\partial(A, B, C, D)} \right). \end{aligned} \quad (5.122)$$

Нулевая анизотропия: H_2 -оптимальный регулятор. Далее предполагается, что разомкнутая система W с реализацией (5.92) в пространстве состояний удовлетворяет условиям A1–A4 и фиксирована. При нулевой средней анизотропии $a = 0$ набор уравнений для оптимального регулятора сводится к двум независимым $(n \times n)$ -уравнениям Риккати

$$S = ASA^T + B_1 B_1^T - \Lambda \Theta \Lambda^T, \quad (5.123)$$

$$\Theta = C_2 S C_2^T + D_{21} D_{21}^T, \quad (5.124)$$

$$\Lambda = [ASC_2^T + B_1 D_{21}^T] \Theta^{-1} \quad (5.125)$$

и

$$T = A^T T A + C_1^T C_1 - N^T P N, \quad (5.126)$$

$$P = B_2^T T B_2 + D_{12}^T D_{12}, \quad (5.127)$$

$$N = -P^{-1} [B_2^T T A + D_{12}^T C_1], \quad (5.128)$$

что приводит к известным выражениям для матриц реализации H_2 -оптимального регулятора в пространстве состояний

$$\hat{A} = A + B_2 N - \Lambda C_2, \quad \hat{B} = \Lambda, \quad \hat{C} = N \quad (5.129)$$

(при этом матрицы $A - \hat{B}C_2$ и $A + B_2 \hat{C}$ асимптотически устойчивы). Этот регулятор обозначается далее через W_{ky0} , а его матрицы (5.129) — через $\hat{A}_0$, $\hat{B}_0$ и $\hat{C}_0$ соответственно.

Метод гомотопии с ньютоновскими итерациями. Сопоставим всякому регулятору W_{ky} вида (5.95) результат векторизации его матриц реализации в пространстве состояний

$$Q = \begin{bmatrix} \text{col}(\hat{A}) \\ \text{col}(\hat{B}) \\ \text{col}(\hat{C}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^r,$$

где

$$r = n(n + p_2 + m_2),$$

и обозначим

$$\gamma(Q) = \left\| \mathcal{L}(W, W_{ky}) \right\|_{\infty}^{-2}.$$

Уравнения для оптимального регулятора зависят от параметра q и могут быть записаны в виде

$$Q = F(q, Q), \quad (5.130)$$

$$A(q, Q) = a. \quad (5.131)$$

На решении (q, Q) системы (5.130), (5.131) вычисляется некоторая функция $N(q, Q)$, дающая минимальную a -анизотропийную норму $\min_{W_{ky} \in W_{ky}} \left\| \mathcal{L}(W, W_{ky}) \right\|_a$ замкнутой системы (с оптимальным регулятором). Гладкая ветвь $Q: [0, q_*] \rightarrow \mathbb{R}^r$ решений уравнения (5.130), где $\left\{ \inf_{W_{ky} \in W_{ky}} \left\| \mathcal{L}(W, W_{ky}) \right\|_{\infty} \right\}^{-2}$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{Q} = G \frac{\partial F}{\partial q}, \quad (5.132)$$

где

$$G = \left\{ I_r - \frac{\partial F}{\partial Q} \right\}^{-1}$$

с начальным условием $Q(0)$, получаемым векторизацией матриц H_2 -оптимального регулятора (5.129). Поэтому численная реализация метода гомотопии для решения системы уравнений (5.130), (5.131) сводится к построению последовательности (q_k, Q_k) , $k \geq 0$ с начальным условием $(0, Q(0))$, подчиняющейся следующему рекуррентному правилу. Пусть уже построен k -й элемент последовательности (q_k, Q_k) . При фиксированном q_k производится серия ньютоновских итераций

$$Q_{k,l+1} = Q_{k,l} + G(q_k, Q_{k,l})(F(q_k, Q_{k,l}) - Q_{k,l}), \quad 1 \leq l \leq l_k$$

с начальным условием $Q_{k,0} = Q_k$ и условием окончания $|Q_{k,l_k} - Q_{k,l_k-1}|/|Q_{k,l_k}| < \varepsilon$, где ε — задаваемое малое число, после чего следующий элемент вычисляется как

$$q_{k+1} = q_k + \Delta q_k, \quad Q_{k+1} = Q_{k,l_k} + \Delta Q_k,$$

где

$$\Delta q_k = \begin{cases} \frac{\gamma(Q_{k,l_k}) - q_k}{2}, \\ \frac{a - A(q_k, Q_{k,l_k})}{\left(\frac{\partial A}{\partial q} + \frac{\partial A}{\partial Q} G \frac{\partial F}{\partial q}\right)(q_k, Q_{k,l_k})}, \end{cases} \quad \max_{0 \leq j \leq k} A(q_j, Q_{j,m_j}) < a,$$

$$\Delta Q_k = G(q_k, Q_{k,l_k}) \frac{\partial F}{\partial q}(q_k, Q_{k,l_k}) \Delta q_k.$$

В качестве практического условия остановки при вычислении последовательности (q_k, Q_k) можно использовать неравенство

$$\max \left\{ \frac{|A(q_k, Q_{k,l_k}) - a|}{a}, \frac{\Delta |Q_k|}{|Q_k|} \right\} < \varepsilon.$$

Лежащие в основе алгоритма выражения для матрицы производных $\frac{\partial(F, A)}{\partial(q, Q)}$ полу-

чаются применением лемм 5.12 и 5.13 и здесь не приводятся в силу их чрезвычайной громоздкости.

5.8. ПОСТРОЕНИЕ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ САМОЛЕТА НА РЕЖИМЕ ПОСАДКИ

В данном параграфе мы на конкретном примере построения регуляторов для самолета на режиме посадки продемонстрируем изложенные выше методы построения робастных регуляторов, минимизирующих влияние внешних ветровых возмущений, действующих на самолет, на интересующие пилотов характеристики самолета, коими являются высота самолета на траектории посадки и его скорость.

Данная задача является чрезвычайно актуальной, так как неожиданно возникающие при посадке самолета ветровые возмущения атмосферы привели к известным катастрофам [176].

Ввиду большой актуальности проблемы, построением автоматизированных систем управления полетом, способствующих предотвращению такого рода катастроф, занимались разработчики в разных странах мира. Были предложены различные алгоритмы управления, основанные на различных физических принципах и математических концепциях, построенные для различных моделей локального состояния атмосферы, которые так или иначе решали эту задачу [163, 175, 177, 178, 179, 182].

В данном параграфе исследуется применение H_∞ -теории управления и анизотропной теории построения регуляторов для решения задачи построения регулятора, минимизирующего влияние действия микропорыва ветра на выходные параметры системы (воздушную скорость и высоту самолета). Для исследований была выбрана математическая модель микропорыва ветра в форме вихревого кольца.

Для сравнения полученных в работе регуляторов построен также H_2/LQG -оптимальный алгоритм управления для того же самолета. Приведены сравнения поведения замкнутых различными регуляторами систем управления.

5.8.1. ЗАДАЧИ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ САМОЛЕТОМ

В данном параграфе будет дано математическое описание постановок различных задач робастного управления самолетом.

5.8.1.1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОДОЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ САМОЛЕТА

Кинематические и динамические переменные для уравнений движения центра масс самолета представлены на рис. 5.22.

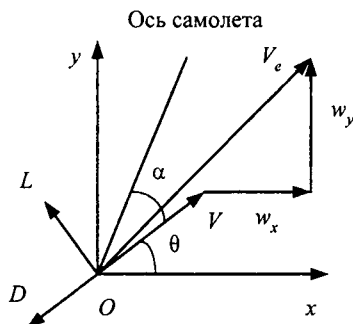


Рис. 5.22. Система координат и переменных самолета

На рис. 5.22: D — сила лобового сопротивления; x, y — оси системы координат; L — подъемная сила; O — центр масс самолета; V — воздушная скорость самолета; V_e — скорость самолета относительно земли; w_x — горизонтальная составляющая скорости ветра; w_y — вертикальная составляющая скорости ветра; α — угол атаки; θ — угол наклона траектории в воздушной системе координат.

Динамические уравнения движения самолета в вертикальной плоскости с учетом ветровых возмущений в проекциях на оси воздушной системы координат задаются следующей системой нелинейных дифференциальных уравнений [25]:

$$\begin{cases} m\dot{V} = T \cos \alpha - D - mg \sin \theta - m(\dot{w}_x \cos \theta + \dot{w}_y \sin \theta); \\ mV\dot{\theta} = T \sin \alpha + L - mg \cos \theta + m(\dot{w}_x \sin \theta - \dot{w}_y \cos \theta); \\ J_z \dot{\omega}_z = M_z; \\ \dot{\vartheta} = \omega_z, \end{cases} \quad (5.133)$$

где m — масса самолета, J_z — момент инерции самолета относительно поперечной оси z , T — сила тяги двигателей, M_z — момент сил относительно оси z , $\vartheta = \theta_b + \alpha$ — угол тангажа, ω_z — угловая скорость относительно оси z .

Управляющими переменными являются сила тяги T и угол атаки α , которые зависят соответственно от отклонения сектора газа и руля высоты.

Эти уравнения справедливы в предположении, что направление силы тяги совпадает с осью самолета, масса самолета постоянна, Земля плоская, ветер стационарный. Вращением Земли также пренебрегаем.

Дифференциальное уравнение для высоты центра масс h записывается в виде

$$\dot{h} = V \sin \theta + w_y. \quad (5.134)$$

Уравнение в приращениях, описывающее динамику двигателя, приведено ниже:

$$\Delta \dot{T} = \frac{1}{T_{\text{дв}}} (-\Delta T + K_{\text{дв}} \Delta \delta_t); \quad (5.135)$$

здесь $\Delta \delta_t$ — отклонение сектора газа от заданного значения.

Формирование отклонения руля высоты δ_e с учетом контура короткопериодического движения осуществляется в следующем виде:

$$\delta_e = K_{\omega_z} \Delta \omega_z + K_{\vartheta} \Delta \vartheta + K_{\vartheta_{\text{cy}}} \Delta \vartheta_{\text{cy}},$$

где K_{ω_z} , K_{ϑ} и $K_{\vartheta_{\text{cy}}}$ — числовые коэффициенты, $\Delta \vartheta_{\text{cy}}$ — управление, формируемое робастным регулятором.

В результате линеаризации нелинейной модели самолета система нелинейных дифференциальных уравнений (5.133) с учетом (5.134), (5.135) и предыдущего уравнения сводится к линейной системе обыкновенных дифференциальных уравнений в приращениях, которая в матричной форме имеет вид

$$\dot{X} = AX + B_{1n}Y + B_{2n}U, \quad (5.136)$$

где

$X = [\Delta V \quad \Delta \theta \quad \Delta w_z \quad \Delta \vartheta \quad \Delta h \quad \Delta T]^T$ — вектор состояния;

$Y = [w_y \quad \dot{w}_x \quad \dot{w}_y]^T$ — вектор ветровых возмущений;

$U = [\Delta \vartheta_{\text{cy}} \quad \Delta \delta_t]^T$ — вектор управления.

Уравнение для измеряемого выхода X_b в пространстве состояний в присутствии шумов измерений N_b записывается в виде

$$X_b = C_{X_b} X + I_{X_b} N_b,$$

где C_{X_b} — матрица измеряемых выходов, а I_{X_b} — единичная матрица соответствующей размерности.

Таким образом, математическая модель продольного движения самолета с учетом внешних ветровых возмущений в пространстве состояний описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_{1n}Y + B_{2n}U, \\ X_b = C_{X_b} X + I_{X_b} N_b. \end{cases} \quad (5.137)$$

5.8.1.2. Постановка задач управления

Рассмотрим задачу управления полетом самолета в вертикальной плоскости (рис. 5.23) при посадке в условиях неопределенных ветровых возмущений Y . Ветровое возмущение приводит к отклонению воздушной скорости V и высоты полета h от заданных значений, определяемых траекторией снижения (глиссадой). Задача системы управления (регулятора) состоит в том, чтобы поддерживать постоянную воздушную скорость V и заданную высоту h . Данная задача является классической задачей слежения в теории автоматического управления.

Для линейной модели продольного движения самолета с учетом внешних ветровых возмущений в пространстве состояний (5.137) вектор управляемых выходов X_{b1} может быть записан в виде

$$X_{b1} = C_{X_{b1}} X, \quad (5.138)$$

где матрица

$$C_{X_{b1}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.139)$$

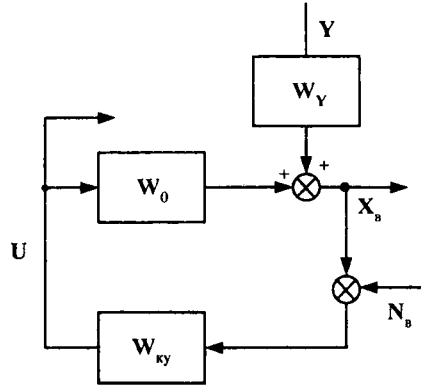


Рис. 5.23. Система управления с расширенными векторами входа и выхода

Рассмотрим вектор контролируемых выходов $\bar{X}_b$, определенный следующим образом:

$$\bar{X}_b = \begin{bmatrix} X_{b1} \\ X_{b2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X_{b1} \\ U \end{bmatrix}. \quad (5.140)$$

Объединяя (5.137), (5.138), (5.139) и (5.140), получаем систему уравнений, описывающую управляемую систему:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_{1n}Y + B_{2n}U; \\ X_{b1} = C_{X_{b1}}X; \\ X_{b2} = I_U U; \\ X_b = C_{X_b}X + I_{X_b}N_b. \end{cases} \quad (5.141)$$

Рассмотрим расширенный вектор входных возмущений

$$\bar{Y} = \begin{bmatrix} Y \\ N_b \end{bmatrix}. \quad (5.142)$$

Учитывая (5.142), систему (5.141) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + B_1\bar{Y} + B_{2n}U; \\ X_{b1} = C_{X_{b1}}X; \\ X_{b2} = I_U U; \\ X_b = C_{X_b}X + D_{\bar{Y}}\bar{Y}, \end{cases} \quad (5.143)$$

где $B_1 = \begin{bmatrix} B_{1n} & 0^{n_{X_b}} \end{bmatrix}$, $D_{\bar{Y}} = \begin{bmatrix} 0^Y & I_{X_b} \end{bmatrix}$. Здесь $0^{n_{X_b}}$ и 0^Y — нулевые матрицы соответствующих размерностей, I_U — единичная матрица.

Если ввести обозначения

$$\tilde{X} \equiv X, \quad \tilde{X}_{b1} \equiv X_{b1},$$

$$\tilde{Y} \equiv Y, \quad \tilde{X}_{b2} \equiv X_{b2},$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{1n} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = B_{2n},$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} C_{x_{s1}} \\ 0 \end{bmatrix}, C_2 = C_{x_{s1}},$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, D_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ I_U \end{bmatrix}, D_{21} = \begin{bmatrix} 0 & I_{x_s} \end{bmatrix}, D_{22} = 0,$$

где 0 — нулевые матрицы соответствующих размерностей, то система (5.143) принимает вид (5.51).

Для этой системы (с матрицами $A, B_1, B_2, C_1, C_2, D_{11}, D_{12}, D_{21}, D_{22}$, представленными выше) предположения 1–4, которые необходимы для построения робастного регулятора в соответствии с теоремой 5.16, выполняются, и мы можем воспользоваться этим алгоритмом построения субоптимального H_∞ -регулятора.

Ниже сформулируем задачи управления самолетом при наличии внешних возмущений, решаемые в этом параграфе. В общем их все можно сформулировать как построение для системы (5.141) (или (5.143)) линейного управления U , которое минимизирует влияние возмущения $\bar{Y}$ на выход системы $\bar{X}_b$.

Рассмотрим схему системы управления, изображенную на рис. 5.24. На этом рисунке обобщенный объект W_0 имеет реализацию в пространстве состояний, выраженную уравнением (5.51).

В зависимости от предположений о внешнем возмущении $\bar{Y}$ и о критерии качества получаем разные оптимальные задачи теории управления.

Предполагая, что $\bar{Y}$ является гауссовым белым шумом, и выбирая в качестве критерия оптимальности функционал

$$J(W_{ky}) = \lim_{t \rightarrow \infty} M \left[\int_0^t \bar{X}_b^T \bar{X}_b dt \right], \quad (5.144)$$

где M — символ математического ожидания, получаем LQG -задачу — построение для системы (5.141) линейного управления в виде обратной связи

$$U(s) = W_{ky}(s) X_b(s), \quad (5.145)$$

минимизирующего критерий (5.144).

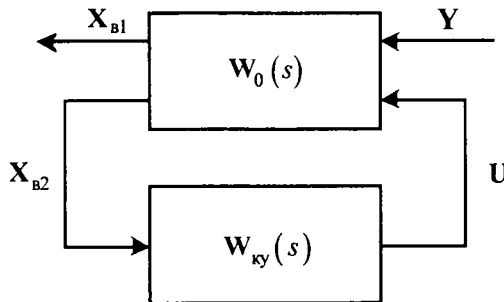


Рис. 5.24. Система управления

Предполагая, что $\bar{Y}$ является квадратично интегрируемой функцией, и выбирая в качестве критерия оптимальности H_2 -норму передаточной функции $W_{\bar{Y}\bar{X}_b}$ от входа $\bar{Y}$ к выходу $\bar{X}_b$, получаем формулировку задачи построения H_2 -оптимального регулятора: для системы управления, математическая модель которой описывается сис-

темой (5.143), требуется найти закон управления в виде линейной обратной связи (5.145), минимизирующий вышеописанный критерий, т.е.

$$\|W_{\bar{Y}\bar{X}_*}\|_2 \rightarrow \min. \quad (5.146)$$

Напомним, что H_2 -норма передаточной функции $W(s)$, аналитичной в правой полуплоскости $\operatorname{Re} s > 0$, определяется следующим образом:

$$\|W\|_2 = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{tr} \left\{ W(j\omega) [W(j\omega)]^* \right\} d\omega \right\}^{1/2},$$

где $\operatorname{tr} \{\cdot\}$ — след матрицы.

Предполагая, что $\bar{Y}$ является квадратично интегрируемой функцией, и выбирая в качестве критерия оптимальности H_∞ -норму передаточной функции $W_{\bar{Y}\bar{X}_*}$, получаем задачу построения H_∞ -оптимального регулятора: для системы управления, математическая модель которой описывается системой (5.143), требуется найти закон управления в виде линейной обратной связи (5.145), минимизирующий вышеописанный критерий, т.е.

$$\|W_{\bar{Y}\bar{X}_*}\|_\infty \rightarrow \min. \quad (5.147)$$

Напомним, что H_∞ -норма передаточной функции $W(s)$ определяется следующим образом:

$$\|W\|_\infty \equiv \sup_{\omega} \bar{\sigma}(W(j\omega)), \quad \omega \in [0, \infty),$$

где $\bar{\sigma}(\cdot)$ обозначает максимальное сингулярное значение матрицы.

Минимизируя H_∞ -норму передаточной функции $W_{\bar{Y}\bar{X}_*}$, мы минимизируем энергию сигнала ошибки сближения.

И, наконец, предполагая, что $\bar{Y}$ является квадратично интегрируемой функцией и выбирая в качестве критерия оптимальности анизотропийную норму передаточной функции $W_{\bar{Y}\bar{X}_*}$ с заданным уровнем анизотропии a , получаем задачу построения оптимального регулятора по критерию минимума анизотропийной нормы замкнутой системы: для системы управления, математическая модель которой описывается системой (5.143), требуется найти закон управления в виде линейной обратной связи (5.145), минимизирующий критерий

$$\|W_{\bar{Y}\bar{X}_*}\|_a \rightarrow \min. \quad (5.148)$$

5.8.2. РЕЗУЛЬТАТЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ

В данном разделе приводятся результаты моделирования (приводятся параметры построенных на основании изложенных выше теорий для задачи управления самолетом конкретных регуляторов). Проводится сравнение характеристик переходных процессов замкнутых систем и управлений, синтезированных полученными ниже тремя типами регуляторов, при воздействии на замкнутую систему четырех различных видов входных сигналов, которые характеризуются различным уровнем пространственно-временной окрашенности (цветности).

5.8.2.1. ПАРАМЕТРЫ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ И РЕГУЛЯТОРОВ

Матрицы стандартного объекта для дискретной модели при шаге дискретизации 0,01 с имеют вид

$$A_{st} = \begin{bmatrix} 0,9994 & -0,0008 & 0,0000 & -0,0009 & 0,0000 & 0,0009 \\ 0,0022 & 0,9938 & 0,0011 & 0,0072 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0052 & 0,9842 & -0,0154 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0099 & 0,9999 & 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0005 & 0,0124 & 0,0000 & 0,0000 & 1,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,9960 \end{bmatrix}, \quad (5.149)$$

$$B_{st1} = \begin{bmatrix} 0,0000 & -0,0100 & 0,0005 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & -0,0004 & -0,0080 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0100 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, \quad (5.150)$$

$$B_{st2} = \begin{bmatrix} 0,0000 & 0,0000 \\ -0,0012 & 0,0000 \\ 0,0117 & 0,0000 \\ 0,0001 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 0,0040 \end{bmatrix}, \quad (5.151)$$

$$C_{st1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.152)$$

$$C_{st2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.153)$$

$$D_{st11} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.154)$$

$$D_{st12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.155)$$

$$D_{st21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (5.156)$$

$$D_{st22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.157)$$

Параметры ветровых возмущений (графики вертикальной w_y и горизонтальной составляющих w_x профиля ветра относительно центра вихря в зоне микропорыва ветра на высоте полета в 400 м) приведены на рис. 5.25.

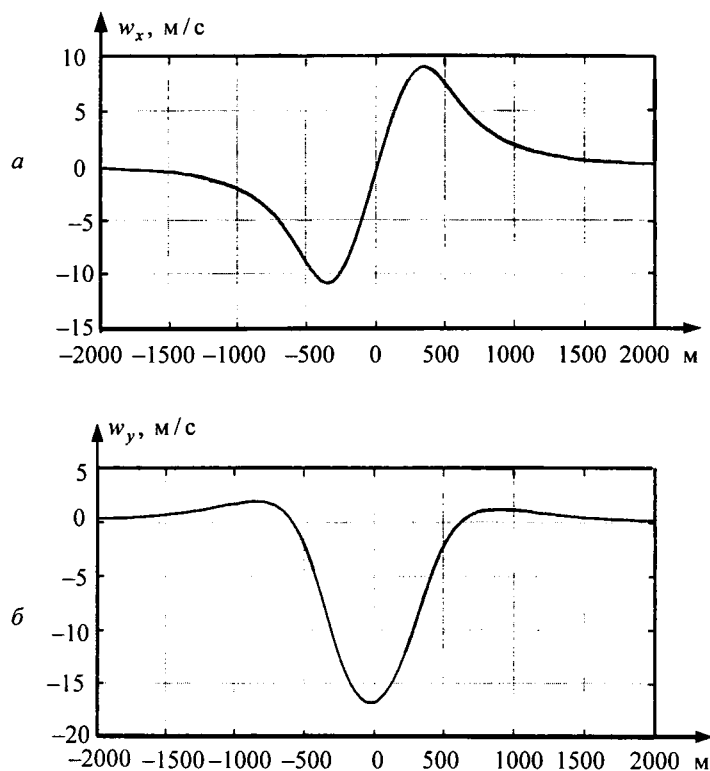


Рис. 5.25. Графики вертикальной (а) и горизонтальной (б) составляющих профиля ветра относительно центра вихря

В результате применения описанной выше процедуры построения анизотропного регулятора для многомерного входного сигнала, средний уровень анизотропии которого не превышает 0,05, получен анизотропный регулятор, (A, B, C, D) -представление которого представлено ниже:

$$A_{con}^{a=0,05} = \begin{bmatrix} 0,9880 & 0,0000 & 0,0002 & -0,0006 & -0,0020 & 0,0017 \\ 0,0015 & 0,9973 & 0,0023 & 0,0091 & -0,0035 & 0,0004 \\ -0,0170 & -0,0229 & 0,9741 & -0,0312 & -0,0149 & -0,0026 \\ -0,0004 & -0,0001 & 0,0099 & 0,9998 & -0,0014 & 0,0000 \\ -0,0025 & 0,0130 & 0,0002 & 0,0003 & 0,9842 & 0,0001 \\ -0,0148 & -0,0033 & -0,0007 & -0,0007 & -0,0025 & 0,9926 \end{bmatrix}, \quad (5.158)$$

$$B_{con}^{a=0,05} = \begin{bmatrix} 0,0149 & 0,0026 \\ 0,0030 & 0,0053 \\ 0,0004 & 0,0006 \\ 0,0004 & 0,0013 \\ 0,0027 & 0,0162 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, \quad (5.159)$$

$$C_{con}^{a=0,05} = \begin{bmatrix} -1,4210 & -2,3935 & -0,8618 & -1,3472 & -1,2199 & -0,2247 \\ -3,7006 & -0,8298 & -0,1630 & -0,1853 & -0,6201 & -0,8441 \end{bmatrix}, \quad (5.160)$$

$$D_{con}^{a=0,05} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.161)$$

При моделировании также рассматривались следующие типы регуляторов: H_2/LQG -регулятор, анизотропный регулятор с уровнем средней анизотропии входного сигнала $a = 0,5$ и H_∞ -регулятор, которые были синтезированы для приведенной выше дискретной системы управления, матрицы стандартного объекта которой представлены выражениями (5.149)–(5.157).

Матрицы (A,B,C,D)-представлений соответствующих регуляторов представлены ниже.

Обозначение $A_{con}^{a=0,5}$ соответствует матрице A в (A,B,C,D)-представлении анизотропного регулятора с уровнем средней анизотропии, равным 0,5, обозначение $A_{con}^{H_\infty}$ соответствует матрице A в (A,B,C,D)-представлении H_∞ -регулятора и обозначение $A_{con}^{H_2}$ соответствует матрице A в (A,B,C,D)-представлении H_2 -регулятора. Аналогичные обозначения справедливы и для матриц B, C, D в (A,B,C,D)-представлении всех полученных регуляторов.

Матрицы анизотропного регулятора с уровнем средней анизотропии входного сигнала $a = 0,5$ имеют вид

$$A_{con}^{a=0,5} = \begin{bmatrix} 0,9816 & 0,0005 & 0,0003 & -0,0005 & -0,0052 & 0,0022 \\ -0,0005 & 0,9975 & 0,0024 & 0,0092 & -0,0046 & 0,0006 \\ -0,0224 & -0,0240 & 0,9738 & -0,0314 & -0,0159 & -0,0038 \\ -0,0009 & -0,0001 & 0,0099 & 0,9998 & -0,0016 & 0,0000 \\ -0,0057 & 0,0130 & 0,0002 & 0,0003 & 0,9827 & 0,0002 \\ -0,0232 & -0,0051 & -0,0010 & -0,0011 & -0,0039 & 0,9907 \end{bmatrix}, \quad (5.162)$$

$$B_{con}^{a=0,5} = \begin{bmatrix} 0,0234 & 0,0062 \\ 0,0058 & 0,0065 \\ 0,0008 & 0,0008 \\ 0,0008 & 0,0015 \\ 0,0062 & 0,0177 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, \quad (5.163)$$

$$C_{con}^{a=0,5} = \begin{bmatrix} -1,8508 & -2,4923 & -0,8810 & -1,3699 & -1,2944 & -0,3255 \\ -5,8054 & -1,2797 & -0,2443 & -0,2761 & -0,9674 & -1,3399 \end{bmatrix}, \quad (5.164)$$

$$D_{con}^{a=0,5} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.165)$$

Матрицы H_∞ -регулятора имеют вид

$$A_{con}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 0,9818 & -0,0024 & 0,0063 & -0,0053 & 0,0055 & -0,0702 \\ -0,0013 & 0,9909 & 0,0020 & -0,0014 & 0,0105 & 0,0767 \\ -0,0294 & -0,0085 & 0,9824 & 0,0130 & 0,0363 & -0,1515 \\ -0,0124 & -0,0039 & -0,0079 & 0,9937 & 0,0116 & -0,0338 \\ -0,0131 & -0,0054 & 0,0050 & -0,0053 & 0,9838 & 0,0165 \\ 0,0107 & 0,0001 & -0,0046 & 0,0062 & -0,0044 & 0,8742 \end{bmatrix}, \quad (5.166)$$

$$\mathbf{B}_{con}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} -0,0040 & 0,0112 \\ -0,0022 & 0,0032 \\ 0,0002 & -0,0022 \\ -0,0002 & 0,0031 \\ -0,0058 & 0,0198 \\ -0,0360 & -0,0192 \end{bmatrix}, \quad (5.167)$$

$$\mathbf{C}_{con}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 1,9057 & 0,4677 & 0,0362 & 0,1127 & -3,1338 & 13,6706 \\ 0,8359 & -0,9483 & -0,0038 & -0,0069 & 2,0728 & 25,3549 \end{bmatrix}, \quad (5.168)$$

$$\mathbf{D}_{con}^{H_\infty} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.169)$$

Матрицы H_2/LQG -регулятора имеют вид

$$\mathbf{A}_{con}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,9901 & -0,0008 & 0,0000 & -0,0009 & -0,0001 & 0,0009 \\ 0,0021 & 0,9963 & 0,0020 & 0,0087 & -0,0025 & 0,0001 \\ -0,0079 & -0,0186 & 0,9753 & -0,0294 & -0,0120 & -0,0007 \\ -0,0001 & -0,0001 & 0,0099 & 0,9999 & -0,0011 & 0,0000 \\ -0,0006 & 0,0124 & 0,0000 & 0,0001 & 0,9862 & 0,0000 \\ -0,0030 & -0,0007 & -0,0002 & -0,0002 & -0,0005 & 0,9954 \end{bmatrix}, \quad (5.170)$$

$$\mathbf{B}_{con}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0,0093 & 0,0001 \\ 0,0009 & 0,0037 \\ 0,0002 & 0,0004 \\ 0,0000 & 0,0010 \\ 0,0001 & 0,0138 \\ 0,0000 & 0,0000 \end{bmatrix}, \quad (5.171)$$

$$\mathbf{C}_{con}^{H_2} = \begin{bmatrix} -0,6669 & -2,0266 & -0,7570 & -1,1921 & -0,9890 & -0,0624 \\ -0,7478 & -0,1772 & -0,0396 & -0,0446 & -0,1246 & -0,1565 \end{bmatrix}, \quad (5.172)$$

$$\mathbf{D}_{con}^{H_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.173)$$

5.8.2.2. СРАВНЕНИЕ СИСТЕМ С РАЗЛИЧНЫМИ РЕГУЛЯТОРАМИ

Для сравнения свойств регуляторов на многомерный вход каждой из четырех замкнутых систем с соответствующими регуляторами подавались тестовые входные сигналы, моделирующие ветровое возмущение, следующих видов:

- на входы подавался гауссовский белый шум, который представлен на рис. 5.26 (сигнал с нулевой средней анизотропией);
- окрашенный сигнал, полученный в результате прохождения белого шума через формирующий фильтр, на выходе которого формируется сигнал с уровнем средней анизотропии, равным 0,05;
- более окрашенный сигнал, полученный в результате прохождения белого шума через формирующий фильтр, на выходе которого формируется сигнал с уровнем средней анизотропии, равным 0,5;
- на входы подавался одинаковый детерминированный сигнал в виде единичного ступенчатого сигнала (сигнал с бесконечной средней анизотропией).

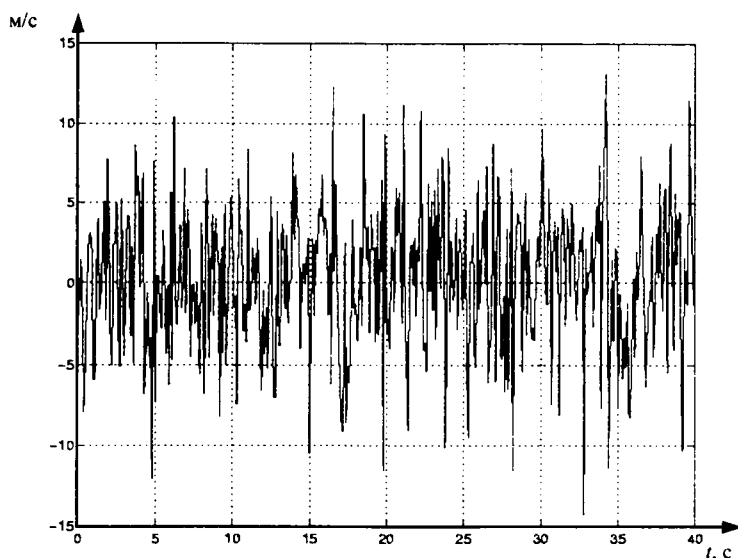


Рис. 5.26. Реализация белого шума, подаваемого на вход регуляторов

Формирующие фильтры с уровнями средней анизотропии, равными соответственно $a = 0,05$ и $a = 0,5$, были получены при синтезе соответствующих анизотропийных регуляторов.

Два многомерных окрашенных сигнала были получены из одной и той же последовательности, моделирующей гауссовский белый шум.

В результате моделирования были получены реакции замкнутых систем по управляемым переменным (отклонения воздушной скорости и высоты) и управления (управление ϑ_{cy} и отклонение ручки сектора газа), формируемые соответствующими регуляторами, на различные виды внешнего ветрового возмущения.

Полученные результаты моделирования представлены на графиках и сведены в таблицы следующим образом:

- на рис. 5.27–5.30 и табл. 5.5–5.8 приведены результаты моделирования для случая входного возмущения в виде белого шума;
- на рис. 5.31–5.35 и табл. 5.9–5.12 приведены результаты моделирования для случая, когда на вход подавался входной сигнал, сгенерированный формирующим фильтром со средним уровнем анизотропии, равным 0,05;
- на рис. 5.36–5.39 и табл. 5.13–5.16 приведены результаты моделирования для случая, когда на вход подавался входной сигнал, сгенерированный формирующим фильтром со средним уровнем анизотропии, равным 0,5;
- на рис. 5.40–5.42 и табл. 5.17–5.20 приведены результаты моделирования для случая, когда на вход подавался детерминированный единичный ступенчатый сигнал.

На рисунках и в таблицах приняты следующие обозначения: H_2/LQG -регулятор — H_2 ; анизотропийный регулятор, синтезированный при уровне средней анизотропии входного сигнала, равном 0,05, — Anisotropy $a = 0,05$; анизотропийный регулятор, синтезированный при уровне средней анизотропии входного сигнала, равном 0,5, — Anisotropy $a = 0,5$; H_∞ -субоптимальный регулятор — H_∞ ; ϑ_{cy} — *TetaCY*; сектор газа — *DLsg*.

5.8.2.3. ВНЕШНЕЕ ВОЗМУЩЕНИЕ — БЕЛЫЙ ШУМ

Проанализируем поведение замкнутых систем при моделировании ветрового возмущения гауссовским белым шумом.

Графики переходных процессов (рис. 5.27) и диапазоны изменения отклонений воздушной скорости и высоты (табл. 5.9 и 5.10) для всех регуляторов практически не отличаются друг от друга. Но H_∞ -субоптимальный регулятор все же обеспечивает наилучшее качество подавления ветрового возмущения по управляемым переменным.

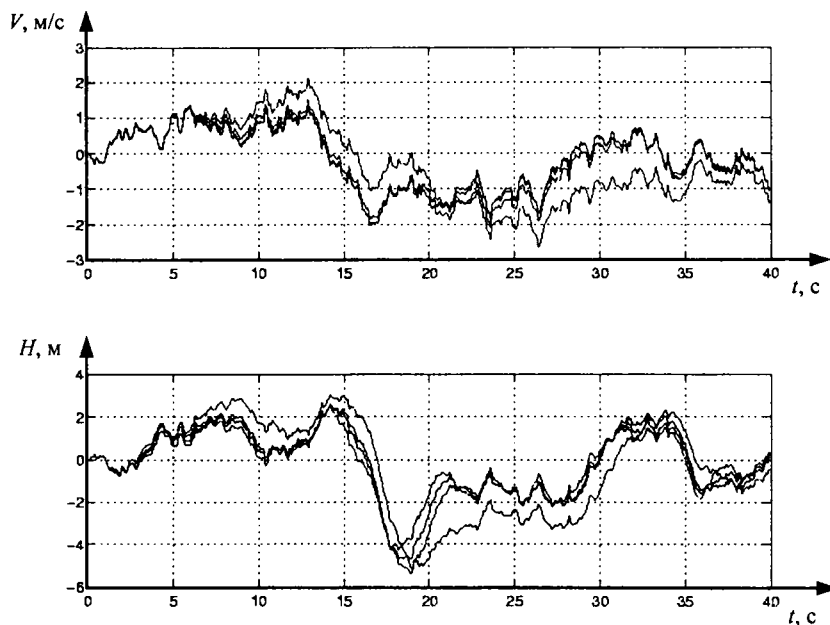


Рис. 5.27. Совместные графики отклонения воздушной скорости V и высоты H при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами белого шума

Таблица 5.5
Отклонение от номинального значения воздушной скорости V при действии белого шума на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — белый шум			
Тип регулятора	$V_{\min}$	$V_{\max}$	$V_{\max} - V_{\min}$
H_2	-2,7446	2,1409	4,9055
Анизотропный $a = 0,05$	-2,1839	1,5279	3,7118
Анизотропный $a = 0,5$	-2,0807	1,4036	3,4843
H_∞	-2,0921	1,3675	3,4596

Совершенно другая картина наблюдается по виду и величинам синтезируемых регуляторами управлений (рис. 5.28–5.30 и табл. 5.11, 5.12). Наихудшими показателями по величинам и производным по управлениям обладает H_∞ -субоптимальный регулятор, а наилучшими — H_2 -регулятор (поскольку по управлению ϑ_{cy} диапазон изменения для H_2 -регулятора примерно в 6,3 раза меньше, чем для H_∞ -субоптимального регулятора).

Таблица 5.6

Отклонение от номинального значения высоты H при действии белого шума на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — белый шум			
Тип регулятора	$H_{\min}$	$H_{\max}$	$H_{\max} - H_{\min}$
H_2	- 5,2361	3,1526	8,3888
Анизотропийный $a = 0,05$	- 5,4079	2,7074	8,1153
Анизотропийный $a = 0,5$	- 4,7440	2,7195	7,4636
H_{∞}	- 4,3424	2,6048	6,9472

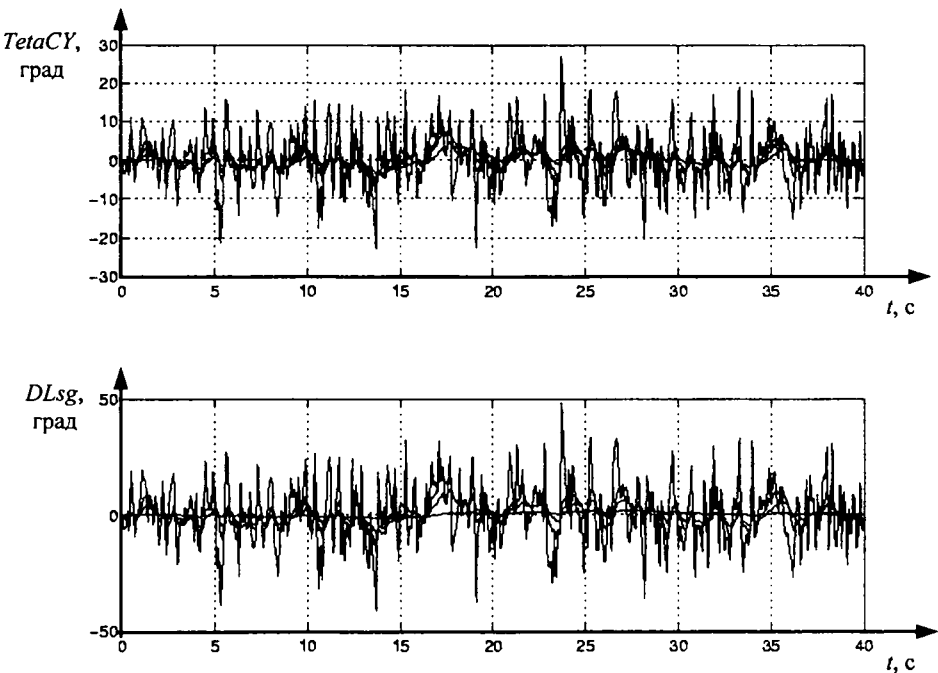


Рис. 5.28. Совместные графики управления ϑ_{cy} и сектора газа при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами белого шума

Таблица 5.7

Отклонение от номинального значения управления $TetaCY$ при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — белый шум			
Тип регулятора	$TetaCY_{\min}$	$TetaCY_{\max}$	$TetaCY_{\max} - TetaCY_{\min}$
H_2	- 3,8987	4,8061	8,4049
Анизотропийный $a = 0,05$	- 6,4245	8,7425	15,1670
Анизотропийный $a = 0,5$	- 8,7093	10,0284	18,7376
H_{∞}	- 25,8491	29,1145	54,9636

Анизотропийные регуляторы занимают промежуточное положение между H_2 - и H_{∞} -субоптимальными регуляторами. Причем при увеличении уровня анизотропии увеличивается амплитуда управлений и ухудшается их «гладкость».

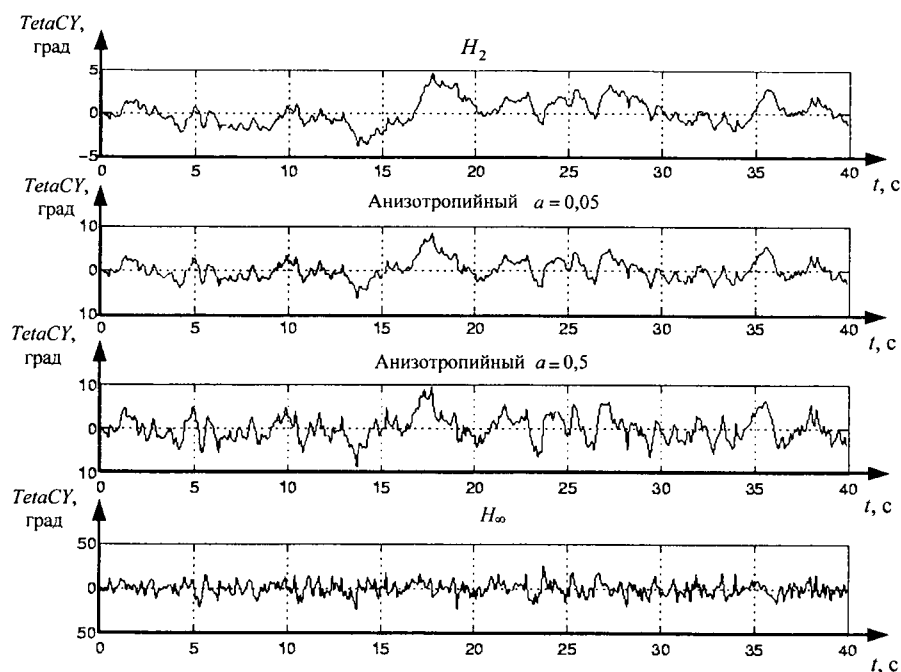


Рис. 5.29. Раздельные графики управления ϑ_{cy} при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами белого шума

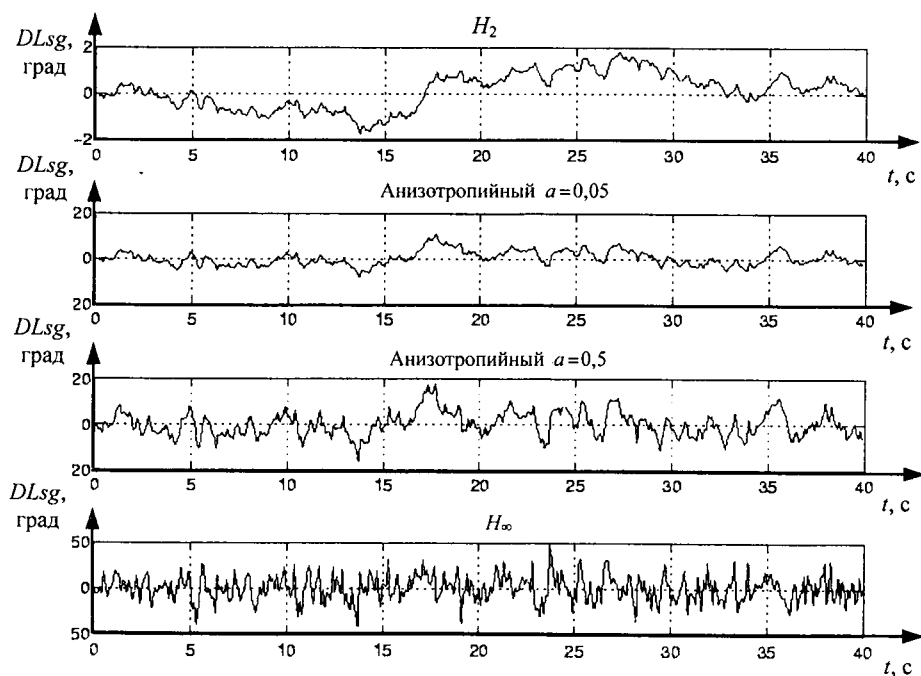


Рис. 5.30. Раздельные графики сектора газа при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами белого шума

Гораздо более существенное различие наблюдается по отклонению сектора газа (обозначение $DLsg$). Диапазон изменения отклонения сектора газа для H_2 -регулятора примерно в 26 раз меньше, чем для H_∞ -регулятора. Это объясняется тем, что H_∞ -регулятор в силу своей динамичности (перестраховочности) не обладает сглаживающим свойством, как H_2 -регулятор, и, воспринимая белый шум как детерминированный сигнал, пытается его парировать.

Таблица 5.8

Отклонение от номинального значения сектора газа $DLsg$
при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — белый шум			
Тип регулятора	$DLsg_{\min}$	$DLsg_{\max}$	$DLsg_{\max} - DLsg_{\min}$
H_2	-1,7300	2,0312	3,7612
Анизотропный $a = 0,05$	-8,4345	11,3490	19,7835
Анизотропный $a = 0,5$	-16,0535	19,0867	35,1403
H_∞	-46,3739	52,0337	98,4076

Отношение диапазонов изменения управления ϑ_{cy} и отклонения сектора газа для анизотропного регулятора при уровне $a = 0,05$ и H_2 -регулятора составляют соответственно 1,7 и 5,3. Аналогичные соотношения для анизотропного регулятора при уровне $a = 0,5$ равны 2,1 и 9,3.

Таким образом, при входном воздействии в виде белого шума H_2 -регулятор является наилучшим. В то же время при заданных уровнях средней анизотропии входного сигнала анизотропные регуляторы парируют белый шум с гораздо меньшими энергетическими затратами по управлению по сравнению с H_∞ -субоптимальным регулятором.

5.8.2.4. ВНЕШНЕЕ ВОЗМУЩЕНИЕ — ЦВЕТНОЙ ШУМ

Рассмотрим более реальные внешние возмущения в виде цветного белого шума с двумя разными «уровнями цветности», которые моделируются двумя формирующими фильтрами, описанными выше.

Анализ рис. 5.31 и 5.35 показывает, что сравнительное поведение замкнутых систем по отклонениям воздушной скорости и высоты примерно одинаково и отличается только масштабом. Величины отклонений (см. табл. 5.9, 5.10 и 5.13, 5.14) для H_∞ -субоптимального регулятора и двух анизотропных регуляторов отличаются незначительно.

Таблица 5.9

Отклонение от номинального значения воздушной скорости V
при действии цветной помехи на систему,
замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,05			
Тип регулятора	$V_{\min}$	$V_{\max}$	$V_{\max} - V_{\min}$
H_2	-3,1483	3,0725	6,2208
Анизотропный $a = 0,05$	-1,9381	2,1209	4,0591
Анизотропный $a = 0,5$	-1,6930	1,8612	3,5541
H_∞	-1,6076	1,7383	3,3458

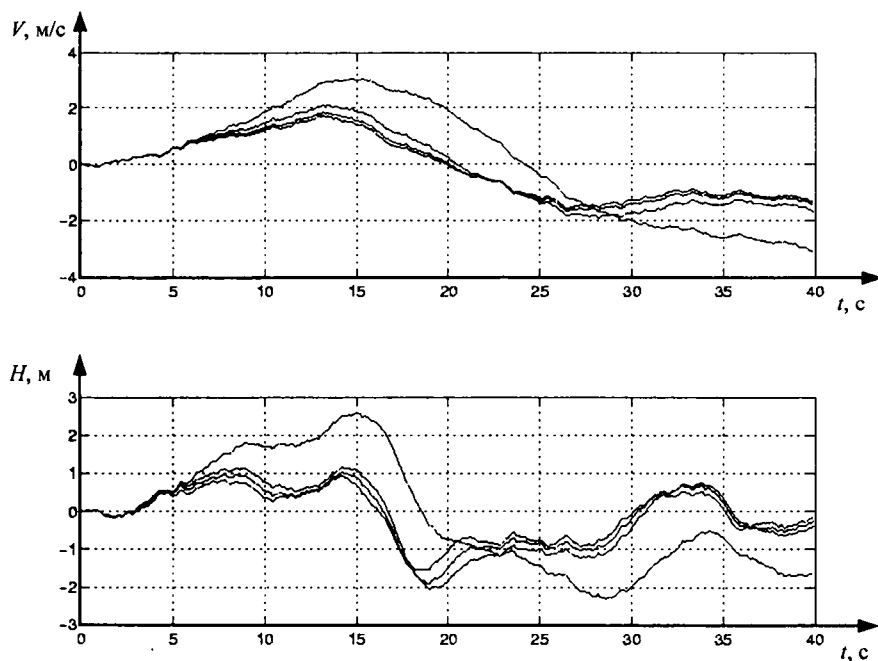


Рис. 5.31. Совместные графики отклонения воздушной скорости V и высоты H при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,05$

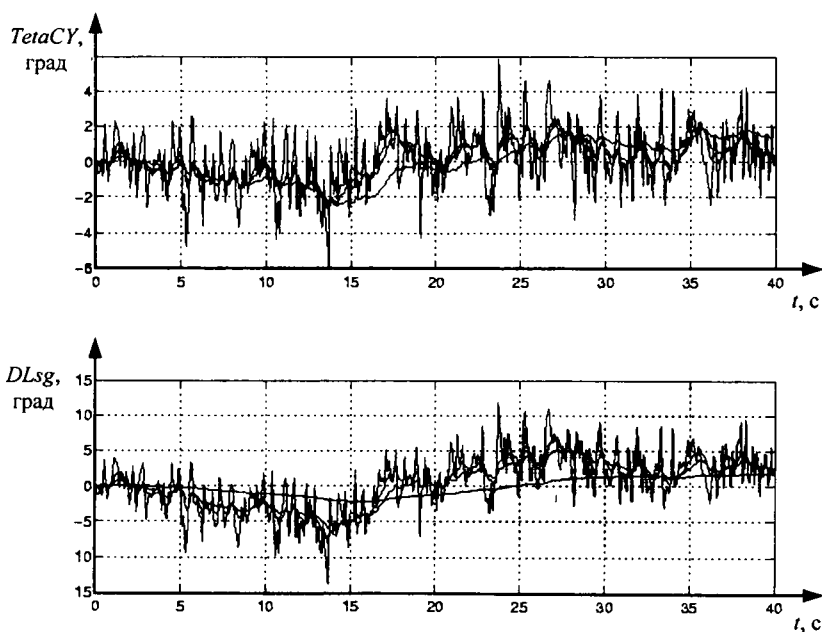


Рис. 5.32. Совместные графики управления Θ_{cy} и отклонения ручки сектора газа при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,05$

При этом с ростом уровня средней анизотропии максимальные амплитуды отклонений и диапазоны изменений уменьшаются и приближаются по реакции к замкнутой системе с H_∞ -регулятором. Так, в случае входного сигнала с уровнем анизотропии $a = 0,05$ диапазон изменения воздушной скорости для анизотропийного регулятора ($a = 0,05$) только в 1,2 раза больше, чем для H_∞ -регулятора. Для высоты это соотношение равно 1,3. В случае цветного сигнала с уровнем анизотропии $a = 0,5$ данные соотношения незначительно больше и составляют 1,25 и 1,35 соответственно.

Тогда как для H_2 -регулятора по сравнению с H_∞ -регулятором в случае входного сигнала с уровнем анизотропии $a = 0,05$ отношение диапазонов изменения по скорости составляют 1,8, а по высоте 1,95. Аналогичные соотношения в случае входного сигнала с уровнем анизотропии $a = 0,5$ равны соответственно 2 и 2,6.

Характер синтезируемых управлений при двух различных цветных возмущениях также аналогичен (при $a = 0,05$ см. рис. 5.32–5.34, а при $a = 0,5$ см. рис. 5.36–5.38) и также отличается только масштабом (при $a = 0,05$ см. табл. 5.11, 5.12, а при $a = 0,5$ см. табл. 5.15, 5.16). Самое слабое по величине и самое гладкое управление формируется H_2 -регулятором. В противоположность ему H_∞ -субоптимальный регулятор формирует самое сильное по амплитуде управление с большой величиной производной по управлению, что является существенным недостатком. Анизотропийные регуляторы как по амплитуде, так и по «гладкости» управлений занимают промежуточное значение, что видно из табл. 5.11, 5.12 и 5.15, 5.16.

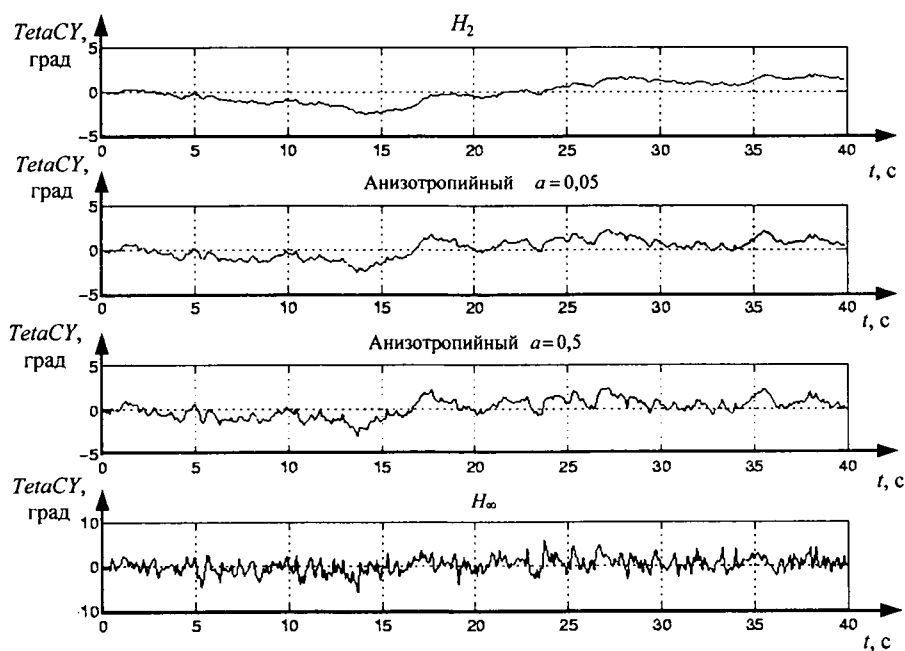


Рис. 5.33. Раздельные графики управления Θ_{cy} при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,05$

Таким образом, одним из основных достоинств синтезированных в данной работе анизотропийных регуляторов является то, что существенно меньшим по величине

управлением достигаются практически одинаковые (лишь с незначительным ухудшением) переходные процессы для отклонений воздушной скорости и высоты по сравнению с H_∞ -субоптимальным регулятором.

Таблица 5.10

Отклонение от номинального значения высоты H при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,05			
Тип регулятора	$H_{\min}$	$H_{\max}$	$H_{\max} - H_{\min}$
H_2	-2,3017	2,6180	4,9196
Анизотропийный $a = 0,05$	-2,0763	1,1909	3,2672
Анизотропийный $a = 0,5$	-1,9275	1,0600	2,9875
H_∞	-1,5534	0,9733	2,5267

Таблица 5.11

Отклонение от номинального значения управления $TetaCY$ при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,05			
Тип регулятора	$TetaCY_{\min}$	$TetaCY_{\max}$	$TetaCY_{\max} - TetaCY_{\min}$
H_2	-2,5906	1,9499	4,5405
Анизотропийный $a = 0,05$	-2,6848	2,5365	5,2214
Анизотропийный $a = 0,5$	-3,0811	3,0039	6,0850
H_∞	-5,9990	6,2844	12,2833

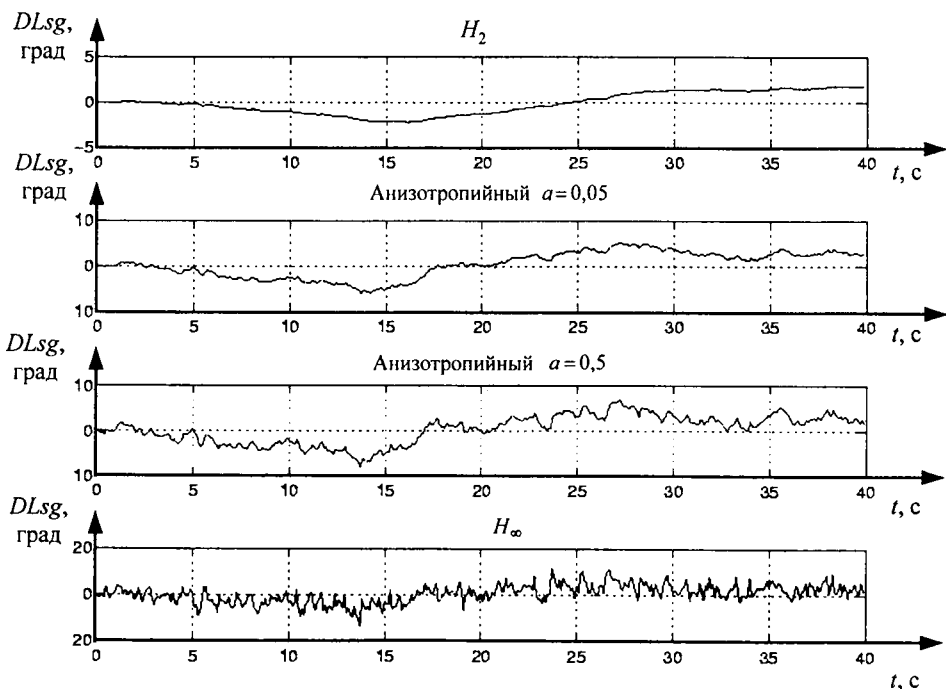


Рис. 5.34. Раздельные графики управления $DLsg$ при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,05$

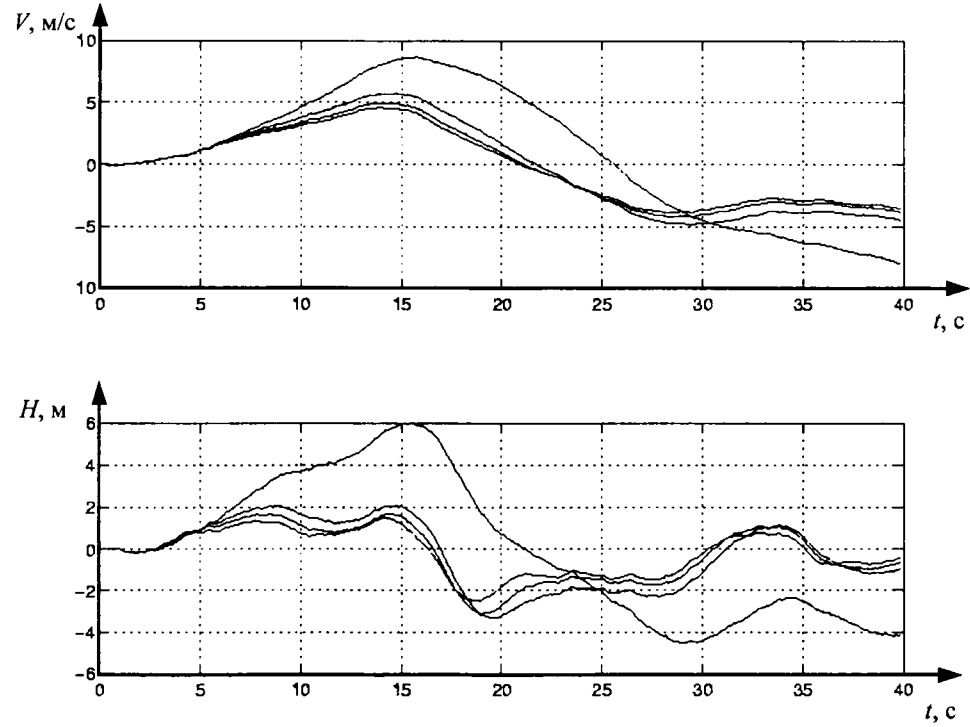


Рис. 5.35. Совместные графики отклонения воздушной скорости V и высоты H при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,5$

Таблица 5.12
Отклонение от номинального значения управления $DLsg$ при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,05			
Тип регулятора	$DLsg_{\min}$	$DLsg_{\max}$	$DLsg_{\max} - DLsg_{\min}$
H_2	-2,1901	1,8319	4,0220
Анизотропийный $a = 0,05$	-5,9787	5,6191	11,5978
Анизотропийный $a = 0,5$	-8,1486	7,8866	16,0352
H_{∞}	-13,7717	13,6505	27,4222

Таблица 5.13
Отклонение от номинального значения воздушной скорости при действии цветной помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,5			
Тип регулятора	$V_{\min}$	$V_{\max}$	$V_{\max} - V_{\min}$
H_2	-8,1184	8,6577	16,7761
Анизотропийный $a = 0,05$	-4,8519	5,7701	10,6219
Анизотропийный $a = 0,5$	-4,1898	4,9786	9,1683
H_{∞}	-3,8827	4,6070	8,4896

Таблица 5.14

Отклонение от номинального значения высоты при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,5			
Тип регулятора	$H_{\min}$	$H_{\max}$	$H_{\max} - H_{\min}$
H_2	- 4,5573	6,0100	10,5673
Анизотропийный $a = 0,05$	- 3,3589	2,1177	5,4766
Анизотропийный $a = 0,5$	- 3,1698	1,7270	4,8969
H_{∞}	- 2,5141	1,5566	4,0707

Таблица 5.15

Отклонение от номинального значения управления $TetaCY$ при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,5			
Тип регулятора	$TetaCY_{\min}$	$TetaCY_{\max}$	$TetaCY_{\max} - TetaCY_{\min}$
H_2	- 5,8544	4,5034	10,3578
Анизотропийный $a = 0,05$	- 5,3089	4,4107	9,7196
Анизотропийный $a = 0,5$	- 5,4796	4,8613	10,3410
H_{∞}	- 8,5715	7,8705	16,4420

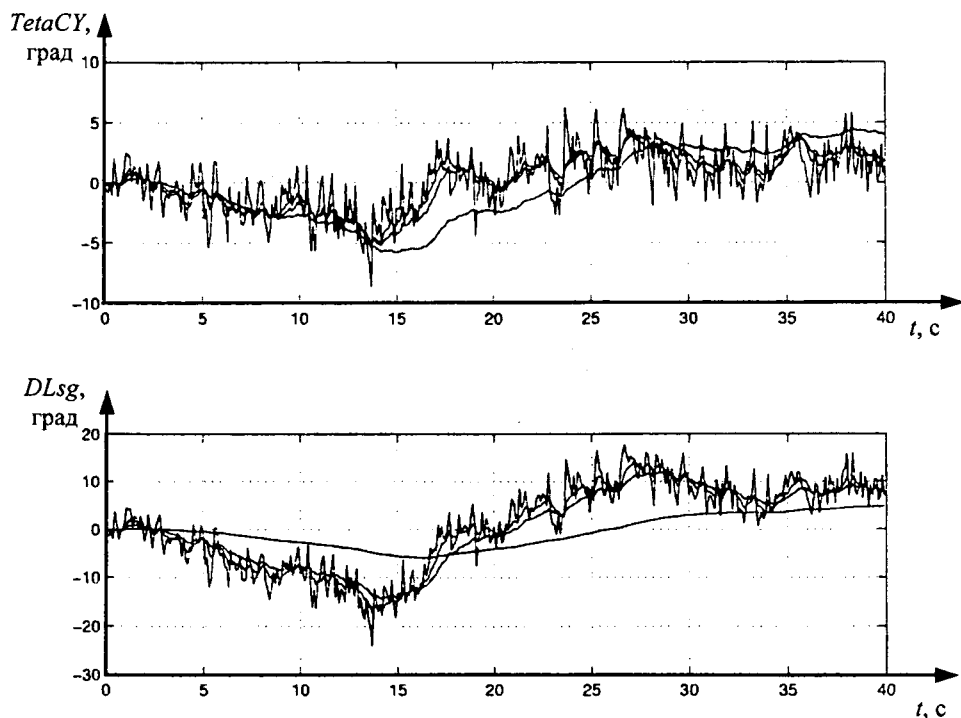


Рис. 5.36. Совместные графики управления ϑ_{cy} и отклонения сектора газа при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,5$

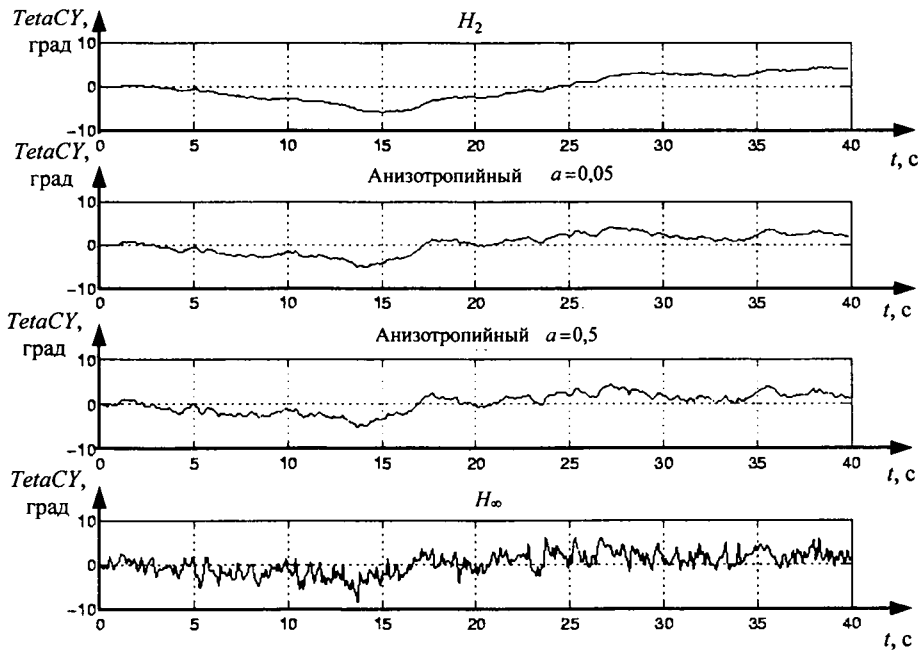


Рис. 5.37. Раздельные графики управления ϑ_{cy} при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,5$

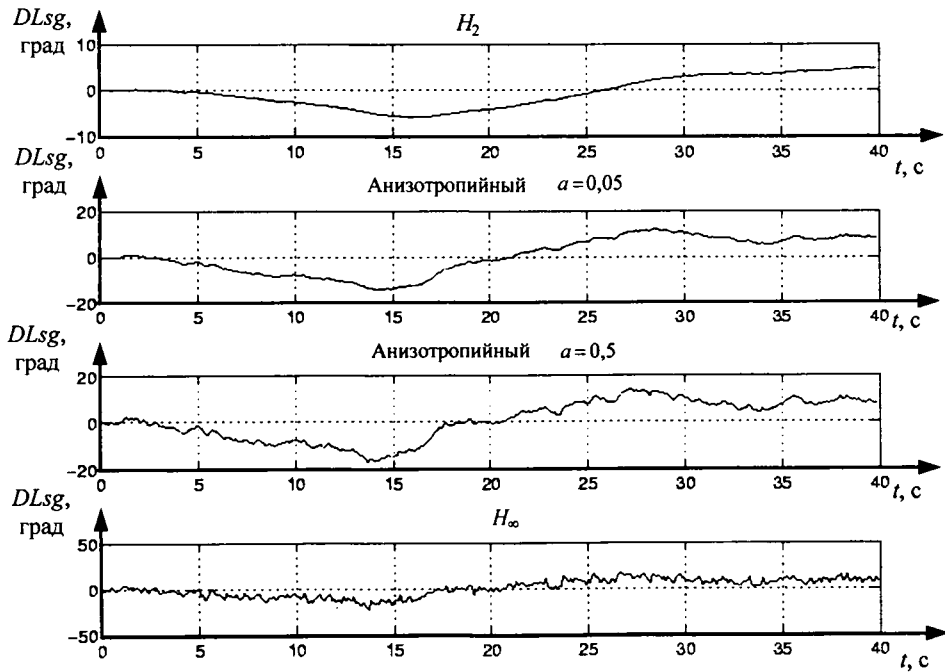


Рис. 5.38. Раздельные графики управления $DLsg$ при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами сигнала со средним уровнем анизотропии $a = 0,5$

Таблица 5.16

Отклонение от номинального значения управления $DLsg$ при действии помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — сигнал с уровнем анизотропии 0,5			
Тип регулятора	$DLsg_{\min}$	$DLsg_{\max}$	$DLsg_{\max} - DLsg_{\min}$
H_2	- 5,9413	4,7944	10,7357
Анизотропийный $a = 0,05$	- 14,5751	11,9413	26,5163
Анизотропийный $a = 0,5$	- 17,2360	15,0450	32,2810
H_{∞}	- 24,0006	21,3063	45,3070

5.8.2.5. ВНЕШНЕЕ ВОЗМУЩЕНИЕ — ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ ВХОДНОЙ СИГНАЛ

Рассмотрим другой, крайний с точки зрения средней анизотропии входного сигнала случай, когда входное воздействие является детерминированным сигналом. Как отмечалось выше, он задается единичным ступенчатым сигналом. Как видно из графиков переходных процессов (см. рис. 5.39) и установившихся состояний отклонений воздушной скорости и высоты (см. табл. 5.17 и 5.18), H_2 -регулятор обеспечивает наихудшую реакцию на детерминированный ступенчатый сигнал. Его установившиеся значения по высоте и скорости примерно в 2 раза больше по сравнению с H_{∞} -субоптимальным регулятором. Реакция обоих анизотропийных регуляторов по высоте и скорости практически совпадают с H_{∞} -субоптимальным регулятором. Вид управления и их диапазоны изменения показаны на рис. 5.40–5.42 и сведены в табл. 5.19 и 5.20. В установившемся состоянии величины управлений у анизотропийных регуляторов также практически совпадают с H_{∞} -субоптимальным регулятором. Как видно из графиков, управления отличаются только во время переходного процесса и иллюстрируют различную скорость реакции (динамичность) на входной сигнал. Наименьшей скоростью реакции обладает H_2 -регулятор, а наибольшей — H_{∞} -субоптимальный регулятор. Скорость реакции у анизотропийных регуляторов увеличивается с ростом уровня средней анизотропии входного сигнала, для которого он был синтезирован.

Таблица 5.17

Отклонение от номинального значения воздушной V скорости при действии детерминированной помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — детерминированный сигнал			
Тип регулятора	$V_{\min}$	$V_{\max}$	$V_{\max} - V_{\min}$
H_2	- 10,5557	0	10,5557
Анизотропийный $a = 0,05$	- 4,7143	0	4,7143
Анизотропийный $a = 0,5$	- 3,9916	0	3,9916
H_{∞}	- 3,8048	0	3,8048

Таким образом, в случае детерминированного возмущения оба анизотропийных регулятора обеспечивают качество переходных процессов по управляемым переменным и управлению, близкое к H_{∞} -субоптимальному регулятору. H_2 -регулятор достаточно вяло реагирует на детерминированный сигнал, так как он воспринимает его белым шумом в силу предположений о входном сигнале в процедуре синтеза.

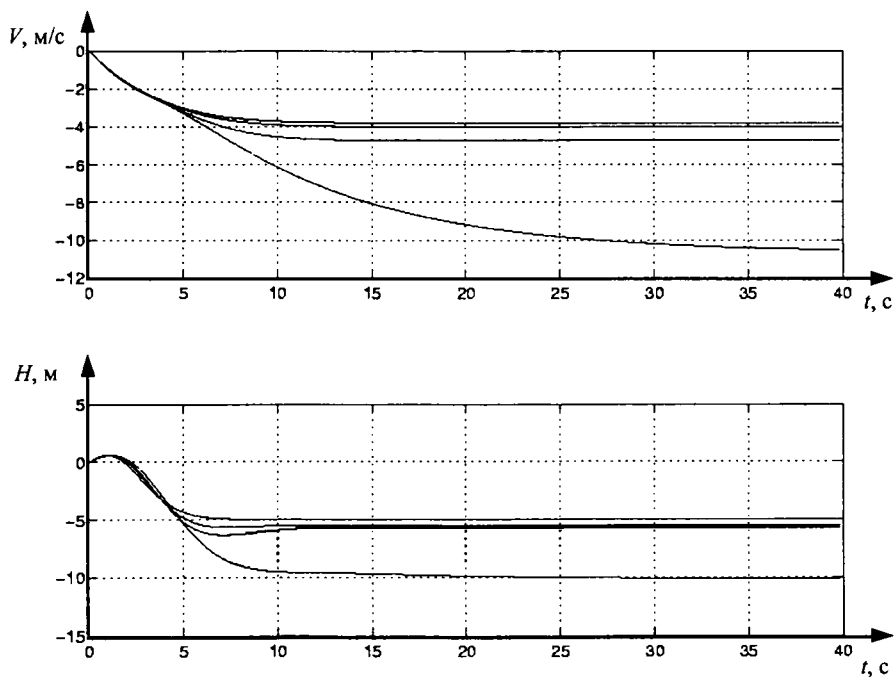


Рис. 5.39. Совместные графики отклонения воздушной скорости V и высоты H при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами детерминированного сигнала

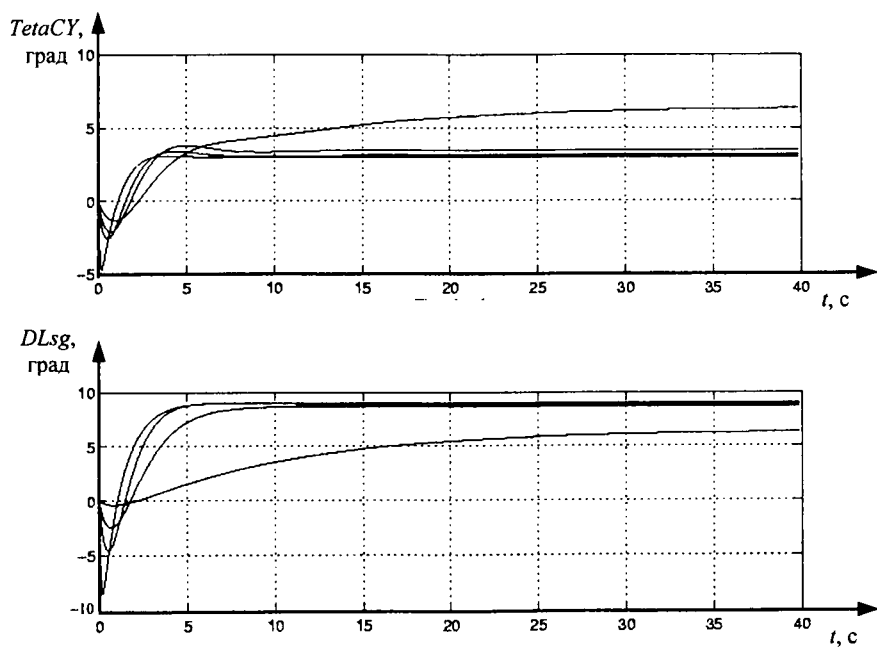


Рис. 5.40. Совместные графики управлений Θ_{cy} и сектора газа при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами детерминированного сигнала

Таблица 5.18

Отклонение от номинального значения высоты H
при действии детерминированной помехи на систему,
замкнутую различными регуляторами

Вход — детерминированный сигнал			
Тип регулятора	$H_{\min}$	$H_{\max}$	$H_{\max} - H_{\min}$
H_2	-10,1441	0,5926	10,7367
Анизотропийный $a = 0,05$	-6,3245	0,6070	6,9315
Анизотропийный $a = 0,5$	-5,6498	0,6123	6,2622
H_{∞}	-4,9393	0,6103	5,5496

Таблица 5.19

Отклонение от номинального значения управления $TetaCY$
при действии детерминированной помехи на систему,
замкнутую различными регуляторами

Вход — детерминированный сигнал			
Тип регулятора	$TetaCY_{\min}$	$TetaCY_{\max}$	$TetaCY_{\max} - TetaCY_{\min}$
H_2	-1,3533	6,3396	7,6930
Анизотропийный $a = 0,05$	-2,1398	3,8159	5,9556
Анизотропийный $a = 0,5$	-2,6321	3,4150	6,4070
H_{∞}	-4,7789	3,1027	7,8816

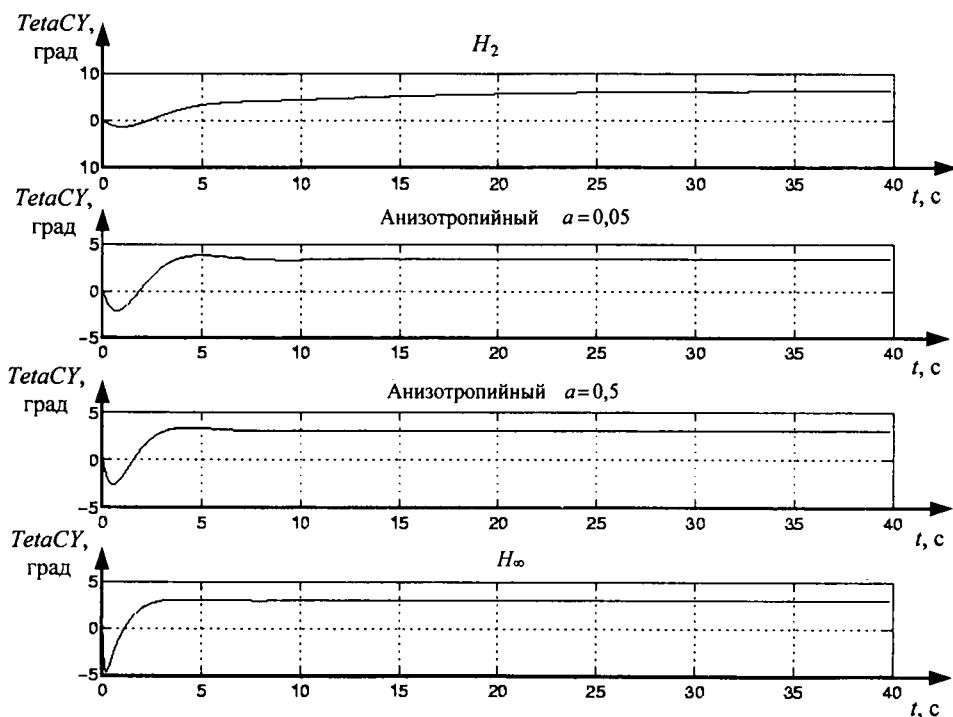


Рис. 5.41. Раздельные графики управления ϑ_{cy} при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами детерминированного сигнала

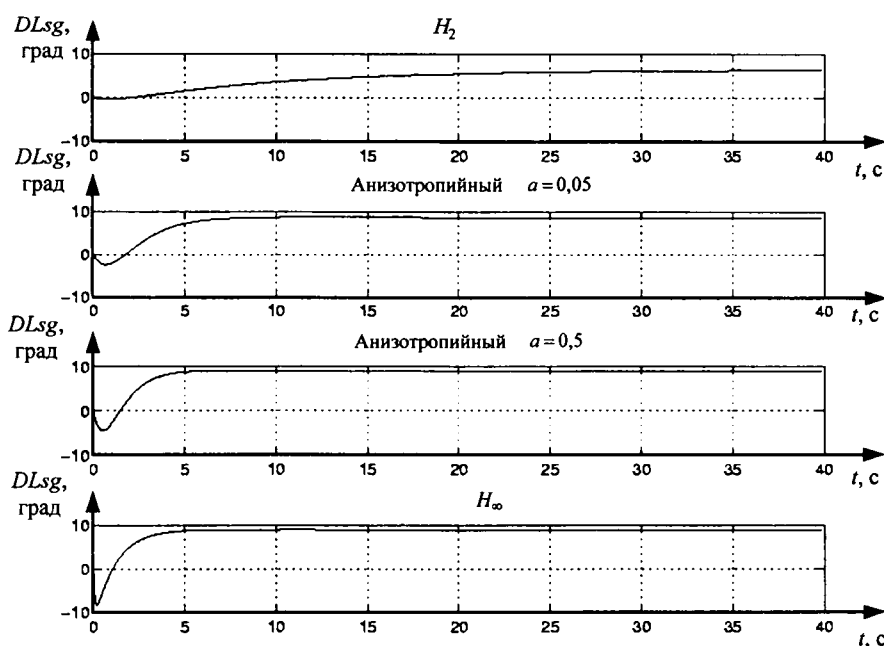


Рис. 5.42. Раздельные графики управления $DLsg$ при воздействии на вход замкнутых систем с соответствующими регуляторами детерминированного сигнала

Таблица 5.20

Отклонение от номинального значения управления $DLsg$ при действии детерминированной помехи на систему, замкнутую различными регуляторами

Вход — детерминированный сигнал			
Тип регулятора	$DLsg_{\min}$	$DLsg_{\max}$	$DLsg_{\max} - DLsg_{\min}$
H_2	-0,3700	6,3304	6,7005
Анизотропный $a=0,05$	-2,4761	8,6888	11,1649
Анизотропный $a=0,5$	-4,5492	9,0034	13,5526
H_∞	-8,4532	9,0225	17,4757

5.8.2.6. Выводы по результатам моделирования

Обобщая результаты сравнительного моделирования, можно констатировать, что H_∞ -субоптимальный регулятор обеспечивает наилучшее отклонение координат управляемого объекта при любом входном сигнале. Так, в табл. 5.5, 5.9, 5.13, 5.17 можно проследить отклонение координаты приращения скорости в результате применения различных регуляторов к системе, на которую поступают различные входные возмущения. То же можно сказать и об отклонении координаты приращения высоты (см. табл. 5.6, 5.10, 5.14, 5.18). Это вполне понятно из физических соображений — являясь регулятором, обеспечивающим компенсацию наихудшего случая входных возмущений, он хорошо справляется и с другими случаями.

Но совершенно другая картина возникает, если посмотреть, какой ценой достигаются эти наименьшие отклонения. Так, в табл. 5.7 и 5.8 наглядно видно, что для улучшения отклонения воздушной скорости на 40 процентов (из табл. 5.5), которое

обеспечивает H_∞ -субоптимальный регулятор по сравнению с H_2 -оптимальным регулятором, нужно увеличить интенсивность одного управляющего сигнала почти в 7 раз, а второго более чем в 20 раз. Естественно, применение H_∞ -субоптимального регулятора в случае помехи, являющейся белым шумом, не имеет никакого смысла, так как иметь такую мощность управляющих сигналов в реальной системе управления невозможно.

Другая крайность — применение H_2 -регулятора в случае цветной помехи. Из табл. 5.5, 5.9, 5.13 и 5.17 видно, что H_2 -регулятор удовлетворительно работает только при входном воздействии в виде белого шума или в случае слабо окрашенного сигнала (низкого уровня средней анизотропии). Из приведенных в тексте предыдущего параграфа таблиц видно, что H_∞ -субоптимальный регулятор дает наибольший эффект (соотношение между обеспечением минимального отклонения требуемых координат объекта регулирования и затрачиваемой на это величиной управляющего сигнала) при детерминированном сигнале.

Анизотропийный же регулятор (см. табл. 5.17 и 5.20) может быть синтезирован для произвольного уровня цветности входного сигнала и обеспечивать высокий уровень подавления внешнего возмущения (близкий к H_∞ -субоптимальному регулятору) при существенно меньшей величине управления.

Приведенные результаты моделирования показывают перспективность применения анизотропийных регуляторов в системах автоматического управления.

ГЛАВА 6. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В АТОМНОЙ И РАКЕТНОЙ ТЕХНИКЕ, А ТАКЖЕ ПРИ СОЗДАНИИ ПРОТИВОСАМОЛЕТНОЙ И ПРОТИВОРАКЕТНОЙ ОБОРОНЫ

В томе 1 сказано: «4 декабря 1996 г. с помощью ракетносителя Дельта-II был запущен космический аппарат «Патфайндер», который в течение семи месяцев должен был достичь красной планеты — Марса. Спустя 20 лет после того, как со своей задачей успешно справился «Викинг», это был первый из запланированных НАСА запусков аппарата с посадкой на Марс. Пролетев более 497 418 000 км, космический аппарат 4 июля 1997 года столкнулся с поверхностью Марса при скорости около 18 м/с...

В успешном выполнении программы исследований планет ведущая роль принадлежит управлению. По мере совершенствования аппаратной части и операционных систем бортовых компьютеров будет постоянно возрастать и роль систем управления автономных космических станций — зондов.

Сформулированные выше положения можно значительно расширить. Ключевым звеном при создании баллистических ракет, высокоточного оружия, систем противосамолетной и противоракетной обороны (ПСО и ПРО), атомных электростанций (АЭС) и других сложнейших комплексов являются системы автоматического управления соответствующего назначения.

В настоящее время созданы военные комплексы фантастических возможностей, использующие высокоточное оружие и спутниковые информационно-управляющие системы, системы определения точных координат целей и детальной разведки в реальном масштабе времени; в эти комплексы могут входить самолеты-носители высокоточных бомб и ракет (истребители-бомбардировщики, самолеты-«невидимки», тяжелые стратегические машины и др.), самолеты дальнего радарного обнаружения и радиоэлектронного подавления, командные пункты типа «АВАКС» и др.

Созданы автоматизированные сети разведки и управления боевыми действиями. Можно говорить об ударных воздушно-космических структурах.

Наступила эра крылатых ракет. И там, где идет речь о масштабных военных комплексах, их ключевой элемент — системы автоматического управления.

Если рассматривать крылатые ракеты, то ее ключевой элемент — корреляционно-экстремальная система наведения, в которой используются корреляционные критериальные функции (основаны на вычислении взаимной корреляционной функции текущей и эталонной карт местности), спектральные критериальные функции (основаны на использовании спектров эталонного и текущего изображения местности) и др.

Если в предыдущих главах рассматривались теоретические положения, то в настоящей главе — конкретные автоматические системы, показавшие высокую эффективность при их применении. Такой методический подход позволяет «привязать» теоретические результаты, алгоритмы и программы к решению инженерных задач.

Материал, изложенный ниже, преследует несколько целей. *Первая и основная — показать лишь незначительную часть содержания сложнейших военно-технических проблем 20-го столетия. Стержнем этих проблем является тематика, относящая-*

ся к реализации всех этапов создания систем автоматического управления. Другими словами — это проблематика, изучаемая в настоящем учебнике. Кроме того, это показывает, какую фантастическую сложность могут иметь реальные системы и какой многопрофильный коллектив принимает участие в создании сложных автоматических систем.

Вторая цель — назвать имена первопроходцев, которые по зову Отечества во имя его защиты создавали новое оружие, например «противоядие» от самого грозного оружия XX века — баллистических ракет с ядерными боеголовками (система ПРО). Как пишет Генеральный конструктор систем ПРО Г.В. Кисунько, в день первого в истории перехвата баллистической ракеты противоракетой создатели экспериментального комплекса ПРО «продолжали свое будничное дело, вдохновленные чувством глубокого морального удовлетворения от добротной сделанной работы, от успехов, выстраданных в творческих научных поисках, в самозабвенном труде в НИИ, КБ, на заводах, забытой Богом пустыни*, без отпусков и выходных, сутками напролет без сна и отдыха» [52].

И, наконец, третья цель — показать, что «фактически мы первыми начали еще в 1950-х годах реализацию программы, которую американцы в 1980-х громозгласно называли «стратегической оборонной инициативой» — СОИ. Многие идеи у нас рассматривались со значительным опережением, показательно, что повторить наш опыт уничтожения противоракетой боевой головки баллистической ракеты им удалось, только в 1984 году, через 23 года после эксперимента Кисунько–Грушина!» [141].

А теперь вернемся к существу проблемы. В первое пятилетие после Великой Отечественной войны (в период «холодной войны») в СССР было создано три главных управления, решавших три главные для обороны страны проблемы. Для достижения поставленных целей каждому из трех главных управлений требовалось решить огромной трудности научные и технологические задачи. По образному выражению Б.Е. Чертока, «маршалами», возглавившими работы, были [141]:

- по атомной тематике — Борис Львович Ванников;
- по ракетной тематике — Дмитрий Федорович Устинов;
- по тематике противовоздушной обороны — Василий Михайлович Рябиков.

1. Первое главное управление при СНК СССР (ПГУ) было создано 20 августа 1945 года и, таким образом, в 1945 году в СССР под научным руководством Игоря Васильевича Курчатова и организационном — Бориса Ванникова с большим размахом начались работы по атомной тематике.

Результаты работ:

1. **Оборонные:** 29 августа 1949 года состоялось первое испытание советской атомной бомбы; испытание первого советского заряда с термоядерным усилением РДС-6 прошло 12 августа 1953 года на Семипалатинском полигоне (важно отметить, что испытан был заряд в виде бомбы, практически готовый к применению в качестве оружия; американцы же в это время располагали лишь экспериментальным устройством весом в несколько десятков тонн).
2. **Научно-технические:** по инициативе И.В. Курчатова были созданы Институт теоретической и экспериментальной физики (ИТЭФ) в Москве, Физико-энергетический институт (ФЭИ) в Обнинске, НИКИЭТ в Москве, НИИ атомных реакторов в Димитровграде, Институт ядерной физики при Сибирском отделении АН СССР и др.

Указанные институты стали центрами развития ядерной физики, науки и техники.

* Имеется в виду пустыня Бет-Пак-Дала в районе озера Балхаш, в которой был построен противоракетный полигон Сары-Шаган, строительством которого руководил полковник А.А. Губенко, а начальником строящегося полигона был назначен генерал-майор С.Д. Дорохов [52].

В 1954 году в Обнинске, Калужской области, была пущена первая в мире атомная электростанция (АЭС); в 1958 году сдан в эксплуатацию первый в мире атомный ледокол «Ленин». Полным ходом шло проектирование блоков Белоярской АЭС на быстрых нейтронах, энергоблоков с реакторами на тепловых нейтронах типа ВВЭР и РБМК. Ныне АЭС работают почти в 30 странах мира.

И.В. Курчатов в памяти потомков останется первым создателем именно мирного атома; он стоял у истоков атомной промышленности.

II. 13 мая 1946 года было создано Второе главное управление при СНК СССР, целью которого было ведение работ в ракетно-космической отрасли. Как пишет один из крупных ученых и конструкторов Б.Е. Черток, «сумма мероприятий, предусмотренных Постановлением от 13 мая 1946 года, по масштабам, организационным взаимосвязям и общему размаху работ не имела аналогов в нашей истории» [141].

Результаты работ:

1. *Оборонные:* были созданы средства доставки атомных и термоядерных зарядов, в первую очередь баллистические ракеты.

Была порождена ситуация: война, предполагающая использование ядерного оружия и соответствующих средств доставки, — это война без победителей. Именно высокая уязвимость обеих сторон в отношении ответного удара создала ситуацию, при которой резко снижалась вероятность ядерного конфликта, обеспечивалась действенность концепции ядерного сдерживания, укреплялась стратегическая стабильность.

Можно выделить несколько основных этапов создания боевых ракетных комплексов стратегического назначения.

Первый этап (1959–1965 гг.) характеризуется созданием и развертыванием ракетных комплексов с ракетами средней и межконтинентальной дальности с моноблочными головными частями и групповыми стартовыми комплексами.

Второй этап (1965–1973 гг.) — масштабное развертывание межконтинентальных ракет шахтного базирования.

Третий этап (1973–1985 гг.) — развертывание МБР, оснащенных разделяющимися головными частями индивидуального наведения, а также развертывание мобильных комплексов с ракетами средней дальности.

Четвертый этап (1985–1991 гг.) — введение новых стационарных и мобильных комплексов, имеющих повышенную боевую эффективность и живучесть.

Пятый этап — создание МБР пятого поколения на твердом топливе, обладающих высокой степенью боеготовности и эффективностью.

2. *В интересах научно-технического прогресса и народного хозяйства были созданы:* спутники связи, геофизические ракеты, пилотируемые космические корабли «Восток» и «Восход», на которых впервые в истории совершен космический полет человека и выход человека в космическое пространство. Ракетно-космические системы позволили впервые в мире осуществить запуск искусственных спутников Земли и Солнца, полеты автоматических межпланетных станций к Луне, Венере, Марсу, произвести мягкую посадку на поверхность Луны.

III. 9 августа 1950 года было создано Третье главное управление при Совете Министров СССР с целью создания противовоздушной обороны Москвы.

Результаты работ: 7 мая 1955 г. система «С-25» была принята на вооружение Советской Армии, она представляла собой непроницаемую стену, защищающую Москву от налета любого количества самолетов с любого направления. Система прослужила более 30 лет. В [141] факт создания С-25 характеризуется так: «В короткий срок была создана и в мае 1955 года принята на вооружение стационарная зенитная ракетная система С-25 для обороны Москвы. С тех пор прошло много времени, но и

десятилетия спустя специалисты будут изумляться и восхищаться величием, силой разума и талантом конструкторов, инженеров и рабочих — творцов оружия, опередившего время. В мире не было столь масштабных проектов, включающих атрибуты полностью автоматизированных больших технических систем, территориально разнесенные объекты и комплексы, находящиеся под единым управлением общего алгоритма и боевой программы реального времени. Создание боевой системы С-25 сделало бессмысленными планы воздушного нападения вероятного противника на Москву... Всего за десять послевоенных лет страна прошла огромный путь: были созданы важнейшие отрасли оборонной промышленности — радиоэлектроники, ракетной техники, автоматизированных систем управления, средств связи и передачи данных».

Ракетный щит от самолетов для Москвы был создан. В 1955 году в КБ-1, которым была разработана система «С-25», было организовано подразделение, цель которого — **изучение и экспериментальное исследование, а в дальнейшем и создание систем противоракетной обороны (ПРО) Москвы** (инициативу по созданию ПРО проявил Генеральный штаб). Что касается создания ПРО Москвы, то информация по поводу решения этой сложнейшей военно-технической проблемы содержится в следующих сообщениях: «Работы по созданию аванпроекта советской ПРО под кодовым названием «А-35» начались в 1958 г. Но только к 1994 г., после серии доработок и модернизаций, второй вариант российской ПРО — «Система А-135» — был принят на вооружение. Его ядром стали многофункциональная радиолокационная станция «Дон» и командно-вычислительный пункт, совмещенные в едином здании в форме четырехгранной усеченной пирамиды... Шахтные пусковые установки противоракет большой дальности «А-350» были размещены на 6 позициях вдоль московского большого кольца...» [86].

О степени сложности системы говорит тот факт, что более сорока лет потребовалось для того, чтобы система была принята на вооружение.

Далее приведем слова генерального конструктора системы А-135 А.Г. Басистова: «Система «А-135» ... гарантированно защищает столицу от группы баллистических ракет и их ядерных блоков... Ни одного атомного взрыва в опасной близости от Москвы система не допустит...».

Сказанное выше подтверждает заключение Б.Е. Чертока: «Не только в области науки, но и техники как таковой, но и в размахе, методах организации работ общенационального оборонного значения мы создали свои методы и школы, во многих отношениях опередив противостоящего нам в «холодной войне» противника».

В успешное решение сложнейших проблем специалисты названных выше трех Главных управлений внесли большой вклад в области систем автоматического управления.

Далее с целью изучения конкретных сложных систем автоматического управления опишем концептуальные теоретические положения, принципы построения, функциональные и некоторые структурные схемы систем, созданных в интересах обороны страны. Эти системы начали разрабатываться с 50-х годов и по многим направлениям разработки продолжают до настоящего времени. О степени сложности систем говорит тот факт, что над их созданием трудились сотни тысяч ученых, конструкторов, инженеров, рабочих высшей квалификации. Это привело к появлению десятков и сотен лабораторий в конструкторских бюро, на серийных заводах, в научно-исследовательских институтах и вузах Министерства обороны, а также в гражданских вузах страны.

Создатели этой техники — гордость нашей страны. Сегодня они конструируют зенитные ракетные системы XXI века, передают свой огромный опыт и знания последующим поколениям [86]. Имена многих из них названы в настоящем учебнике.

Поскольку учебник предназначен для студентов, хотелось бы, чтобы молодое поколение, изучив содержание данной главы, сделало для себя основной вывод о том, «что создавать оборонительное оружие в нашей стране было и остается почетной обязанностью гражданина России..., именно эта сфера деятельности в наиболее полной мере предоставляет каждому реализовать право служения Отчизне. Вряд ли есть более высокое предназначение каждого из нас» [86].

6.1. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ [21, 41, 57, 70, 121]

Баллистическими снарядами или баллистическими ракетами называются такие снаряды, у которых траектория полета (за исключением начального участка, который ракета проходит с работающим двигателем) представляет собой траекторию свободно брошенного тела. Это значит, что после выключения двигателя снаряд не управляется, а его траектория зависит только от силы тяжести и аэродинамических сил и представляет собой так называемую баллистическую кривую. Исключение может составлять лишь заключительный этап полета ракеты, когда она, приближаясь к своей цели, входит в плотные слои атмосферы. На этом этапе вновь может включаться в работу система управления с целью компенсации ошибок, накопившихся за время неуправляемого полета по баллистической кривой.

Баллистические ракеты основной участок своей траектории проходят на очень большой высоте, где плотность воздуха очень мала, т.е. практически в безвоздушном космическом пространстве.

Траекторию баллистической ракеты можно разбить на три характерных участка [121].

На первом так называемом *активном участке* осуществляется разгон ракеты до требуемой по величине и направлению скорости. Он располагается в той части пространства, где нельзя пренебречь аэродинамическим влиянием среды. Активный участок формирует всю траекторию полета ракеты, а случайные факторы, действующие на его протяжении, оказывают преобладающее влияние на рассеивание параметров движения и точки падения. Он является в некоторых случаях *единственным участком, на котором управляют движением ракеты.*

Так как баллистические ракеты дальнего действия имеют, как правило, две активные ступени, то и активных участков на траектории может быть два и более.

Второй участок траектории — баллистический — пролегает на значительных удалениях от Земли, где влиянием среды можно пренебречь. Он самый протяженный и самый удаленный от Земли; длина баллистической траектории и время движения по ней почти равны полной длине траектории и времени полета баллистической ракеты.

Последний (третий) участок полета непродолжителен и вновь проходит в атмосфере. Наиболее характерно для этого этапа движения влияние атмосферы.

Плоское движение ракеты описывается в системе полярных координат, показанных на рис. 6.1 [121].

Проекция полной дальности полета ракеты на поверхность Земли $L = L_A + L_B + L_B$, где L_A , L_B , L_B соответственно проекции на поверхность Земли активного, баллистического и заключительного участков траектории.

Заключительный этап движения ракеты проходит снова в атмосфере. Он характеризуется большими перегрузками и высокой температурой поверхности баллистической головки. Учет этих явлений и, в случае необходимости, уменьшение их до приемлемых величин является одним из требований, предъявляемых при выборе этой траектории. Два других требования состоят в уменьшении ошибок движения, накопившихся как на предыдущих этапах полета, так и возникающих вследствие случай-

ных воздействий на этом этапе, а также в выборе такого маневра или в выборе такой траектории, которые позволили бы уменьшить или исключить вовсе возможное противодействие противника.

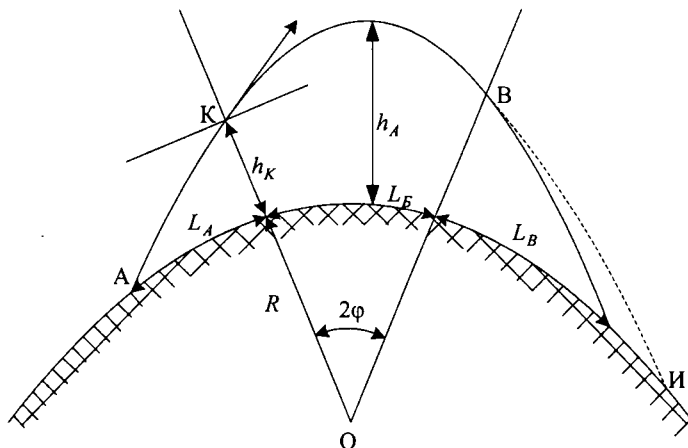


Рис. 6.1. Параметры полета баллистической ракеты:

A — точка старта; K — конец активного участка; И — точка фиктивного приземления (без учета влияния атмосферы); R — средний радиус Земли; h_K — высота ракеты в момент отсечки двигателей;

h_A — высота ракеты в апогее; L_A — дальность полета на активном участке;

L_B — дальность баллистического полета; L_B — дальность полета на атмосферном участке

Дадим определение углов, которые используются при рассмотрении вопросов управления летательными аппаратами (ЛА) (рис. 6.2).

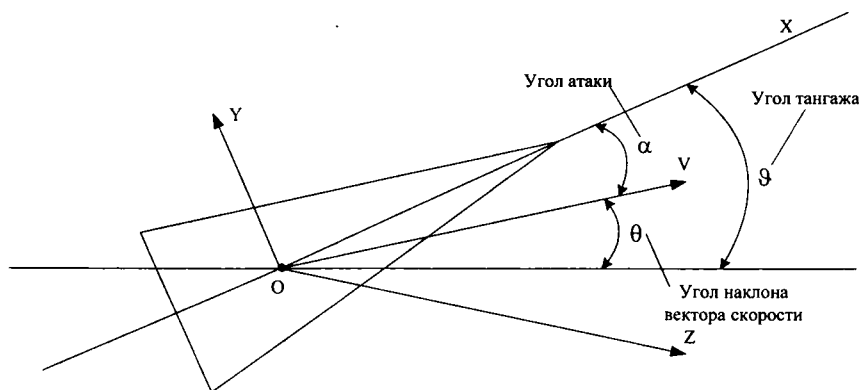


Рис. 6.2. К пояснению параметров, характеризующих движение летательного аппарата

Система координат OXYZ называется связанной (с корпусом ЛА) системой. Угол между продольной осью ЛА и горизонтальной плоскостью называется углом тангажа ϑ (угол тангажа возникает при поворотах ракеты вокруг оси OZ); угол между вектором скорости V и горизонтальной плоскостью называется углом наклона траектории θ ; угол между продольной осью и проекцией воздушной скорости на плоскость OXY связанной системы координат называется углом атаки α (можно считать, что $\alpha = \vartheta - \theta$).

Угол, который имеет место при поворотах ракеты вокруг оси ОУ, называется углом рыскания ψ .

Угол между воздушной скоростью и плоскостью симметрии ЛА называется углом скольжения β ($\beta = \psi - \sigma$, где σ — угол между вектором скорости и плоскостью стрельбы ОХсУс).

При построении САУ баллистическими ракетами часто используется принцип управления по схеме «наведение–стабилизация». Суть данного принципа управления заключается в разделении общей задачи управления движением на две взаимосвязанные задачи — задачу программирования движения центра масс объекта управления и задачу отработки найденных программ управления в процессе движения путем соответствующего воздействия на органы управления.

Задача программирования движения состоит в определении закона движения центра масс объекта управления из условия достижения конечной цели управления. Для летательных аппаратов закон движения задается чаще всего в опосредованной форме в виде программ изменения во времени (или в функции другой подходящей переменной, например, скорости, пройденного пути) тех величин, которыми определяется управляющее силовое воздействие на объект управления, формирующее требуемую траекторию его движения. Такими величинами являются углы тангажа и рыскания баллистической ракеты, определяющие направление вектора тяги двигательной установки, углы атаки и скольжения летательного аппарата, определяющие величину и направление вектора полной аэродинамической силы и т.д. [121].

Задание закона движения будем называть программой управления движением центра масс объекта управления или, коротко, программой управления.

В системах автоматического управления движением ракет и других летательных аппаратов данная задача называется задачей наведения и ее решение возлагается на соответствующую часть общей системы управления, называемую системой наведения.

Рассмотрим теперь вторую часть общей задачи управления движением, состоящую в реализации программ управления путем выработки команд, подаваемых на органы управления движущегося объекта.

На ракетах эту часть системы управления движением принято называть системой стабилизации движения, или автопилотом [121].

Системы стабилизации движения строятся и функционируют как замкнутые системы автоматического управления, целью которых является сведение к нулю рассогласования между заданным значением входной величины, изменяющейся по некоторому закону (такой входной величиной и является программа управления, формируемая системой наведения), и измеренными значениями соответствующего параметра движения. Выходом системы стабилизации являются команды управления, подаваемые на силовые приводы (рулевые машины), которые в свою очередь приводят в действие органы управления ЛА (рули), в результате чего формируется необходимое силовое воздействие на ЛА.

Структурная схема системы управления, функционирующая по принципу «наведение–стабилизация», изображена на рис. 6.3.

Совместно с соответствующими исполнительными органами и объектом управления имеют место две функциональные подсистемы управления — системы наведения и стабилизации.

На данной схеме через $U^{np}(t)$ обозначены программы управления, формируемые системой наведения; $Y_1(t)$, $Y_2(t)$ — фактические значения соответствующих пара-

метров движения, определяемые с помощью измерительной системы; $J_j(t_k^j)$ — разовые команды наведения; t_k^j — моменты исполнения разовых команд; $\Delta U(t)$ — команды управления, подаваемые с выхода системы стабилизации на рулевые машины; $\delta(t)$ — отклонения органов управления.

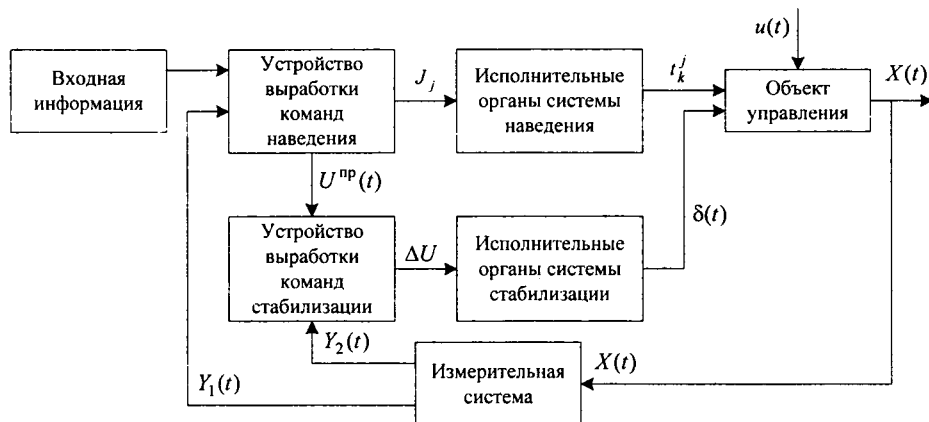


Рис. 6.3. Структурная схема САУ БР

Выше были рассмотрены общие принципы построения САУ баллистическими ракетами. Далее более подробно обсудим общие характеристики систем управления БР.

Система управления баллистической ракетой — это комплекс приборов, устройств и агрегатов, предназначенных для контроля состояния, поддержания боевой готовности, подготовки, пуска и управления полетом БР с целью поражения запланированных объектов противника с заданной эффективностью. В состав системы управления БР включаются следующие приборы, устройства и агрегаты [121]:

- комплекс командно-измерительных приборов инерциальной навигационной системы;
- бортовой цифровой вычислительный комплекс;
- комплекс преобразующей, коммутационной и распределительной аппаратуры;
- бортовые источники электропитания приборов СУ;
- силовые приводы с необходимыми источниками энергии, предназначенные для приведения в действие органов управления ракеты;
- бортовая кабельная сеть.

Роль и место современной системы управления в обеспечении качественных характеристик ракетных комплексов определяется следующими ее основными функциями.

1. Управление движением ракеты на всех этапах активного участка полета. Эта часть общей СУ ракеты называется *системой управления движением (СУД) ракеты*.
2. Управление процессом расходования запасов компонентов топлива на ракетах с ЖРД.
3. Управление подготовкой и проведением пуска ракеты.
4. Контроль технического состояния аппаратуры СУ.
5. Контроль состояния командно-измерительных приборов (КИП).
6. Контроль параметров движения ракеты и параметров работы двигательных установок в процессе полета.

7. Хранение рассчитанных плановых полетных заданий или целеуказаний и ввод их в аппаратуру СУ при смене плана боевого применения. Расчет или дорасчет непланового полетного задания по целеуказаниям, поступающим из высших звеньев управления.
8. Информационное взаимодействие со смежными системами управления и информационного обеспечения.

Основным предметом нашего рассмотрения является система наведения [121].

Системой наведения называется функциональная подсистема СУД, предназначенная для формирования программ управления движением центра масс БР на активном участке траектории АУТ и выработки разовых команд управления из условия достижения конечной цели управления движением БР — выведение моноблочной головной части или боевых блоков разделяющейся головной части (РГЧ) на траектории, проходящие через точки прицеливания.

В качестве дополнительных или промежуточных целей, достижение которых может быть возложено на систему наведения, является совершение баллистической ракетой защитного противоракетного маневра.

Входной информацией для системы наведения служат данные о параметрах движения ракеты, получаемые в полете от навигационно-измерительной системы, а также данные полетного задания на пуск, содержащие формализованную информацию о координатах точки пуска, координатах точек целей и другие сведения, необходимые для решения задач наведения.

Выходом системы наведения являются сформированные ею программы управления движением ракеты и разовые команды управления.

Программы управления движением являются входной командной информацией для системы стабилизации и играют по отношению к этой системе роль входных задающих воздействий, необходимых для последующей выработки системой стабилизации команд управления, подаваемых через исполнительные устройства (рулевые машины) на органы управления ракетой.

В теории управления движением ЛА принято различать два основных принципа программирования движения — принцип предварительного программирования движения и принцип текущего программирования движения.

Принцип предварительного программирования движения заключается в том, что программы управления определяются до момента пуска ракеты, вводятся в аппаратуру СУ в составе данных полетного задания и в процессе полета ракеты не изменяются и не корректируются.

Данный принцип программирования движения широко применялся на ракетах ряда поколений, в том числе на самых ранних образцах ракет.

Принцип текущего программирования движения (называемый также принципом непрерывного программирования) состоит в том, что программы управления определяются непосредственно в процессе полета на основе информации о текущих параметрах движения ракеты и данных полетного задания, содержащих информацию о координатах точки пуска и координатах точек прицеливания.

Рассмотрим вопрос о возможном составе и форме задания программ управления. Данный вопрос имеет непосредственное отношение не только к системе наведения ракеты, но и к системе стабилизации движения, на которую возложена функция отработки программ управления и обеспечения устойчивого полета ракеты на активном участке траектории.

Как сказано выше, *требуемое силовое управляющее воздействие на ракету, необходимое для обеспечения полета по заданной траектории, формируется путем придания корпусу ракеты соответствующей ориентации по углам тангажа, рыскания, чем достигается требуемое направление вектора тяги ДУ. Это обстоятельство*

предопределяет целесообразность задания программы движения БР в виде функций изменения во времени углов тангажа и рыскания. При таком задании программ управления наряду с решением задачи наведения решается и вторая часть общей задачи управления движением — обеспечение устойчивого полета ракеты на АУТ, так как при отработке программ тангажа и рыскания системой стабилизации на параметры углового движения ракеты накладываются непосредственные управляющие связи.

Система стабилизации предназначена для отработки программ управления движением ракеты и обеспечения устойчивого полета. Ее цель *состоит в сведении к нулю рассогласований между программными значениями параметров движения ракеты и их текущими измеренными значениями при соблюдении требований, предъявляемых к системе стабилизации по точности управления и запасам устойчивости.*

Часть системы стабилизации, решающая задачу отработки программ углового движения ракеты, называется системой угловой стабилизации (СУС). В соответствии с принципом автономного (независимого) управления СУС строится в виде совокупности трех независимых каналов, называемых каналами стабилизации движения по углам тангажа, рыскания и крена. Исполнительными элементами СУС являются рулевые органы управления, формирующие необходимое силовое воздействие на ракету путем отклонения их на углы δ_t (канал тангажа), δ_r (канал рыскания) и $\delta_{кр}$ (канал крена или собственного вращения) [121].

Вторая часть системы стабилизации носит название системы стабилизации движения центра масс ракеты. Данная часть системы стабилизации также включает в общем случае три канала стабилизации движения центра масс ракеты в продольном направлении (по величине скорости продольного движения), в направлении нормали (по нормальной составляющей вектора скорости) и в направлении бинормали (по боковой составляющей вектора скорости). Канал стабилизации продольного движения получил название регулятора кажущейся скорости (РКС). Два других канала носят названия каналов нормальной стабилизации (НС) и боковой стабилизации (БС).

Исполнительным органом для РКС служит двигательная установка ракеты, поэтому данный канал строится и функционирует как полностью независимый от других каналов стабилизации. Каналы НС и стабилизации движения по углу тангажа имеют общий исполнительный рулевой орган, формирующий силовое управляющее воздействие на ракету путем отклонения рулевого органа на угол δ_t по каналу тангажа. Вследствие этого процессы стабилизации вращательного движения ракеты по углу тангажа и ее поступательного движения по нормали к траектории динамически связаны между собой. Аналогичным образом связаны каналы БС и стабилизации движения по углу рыскания, поскольку эти каналы имеют общий рулевой орган, формирующий силовое управляющее воздействие на ракету путем отклонения рулевого органа на угол δ_r по каналу рыскания. Эти связи отражены схемой на рис. 6.4, где показано подразделение системы стабилизации ракеты на ее подсистемы и каналы.

Оснащение баллистических ракет управляемыми головными частями (УГЧ) преследует две главные цели — повышение точности стрельбы путем коррекции траектории движения при подлете к точке прицеливания и повышение вероятности преодоления ПРО за счет совершения головной частью маневров уклонения от средств перехвата.

К числу наиболее характерных вариантов построения управляемых боевых блоков (УББ), прототипы которых либо уже созданы, либо являются объектом опытно-конструкторских разработок, можно отнести УББ следующих типов:

- УББ баллистического типа (рис. 6.5, а);
- УББ планирующего типа (рис. 6.5, б);
- УББ азробаллистического типа (рис. 6.5, в).

Основным видовым признаком перечисленных УББ является форма траектории их полета после отделения от ракеты-носителя (см. рис. 6.5).

Принципы построения систем управления движением управляемых ГЧ в целом совпадают с принципами СУ БР.

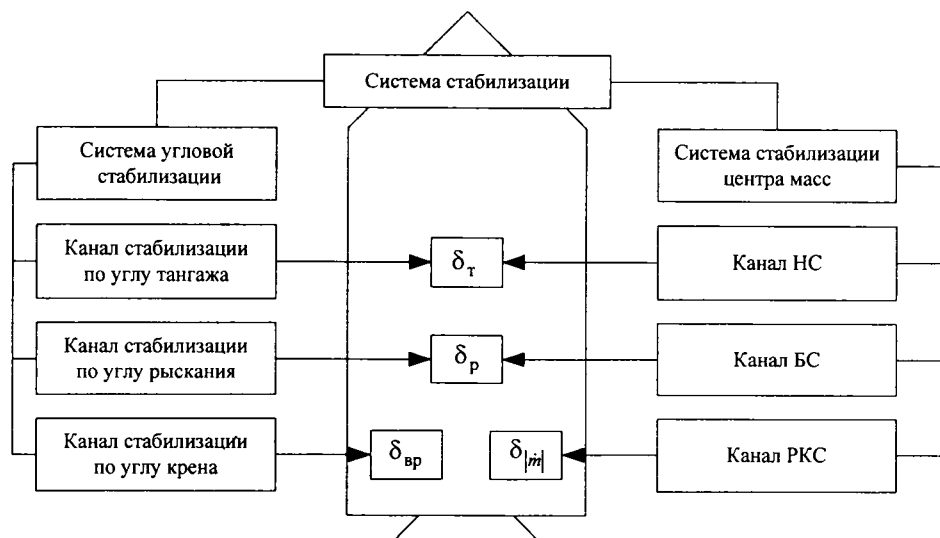


Рис. 6.4. Структурная схема системы

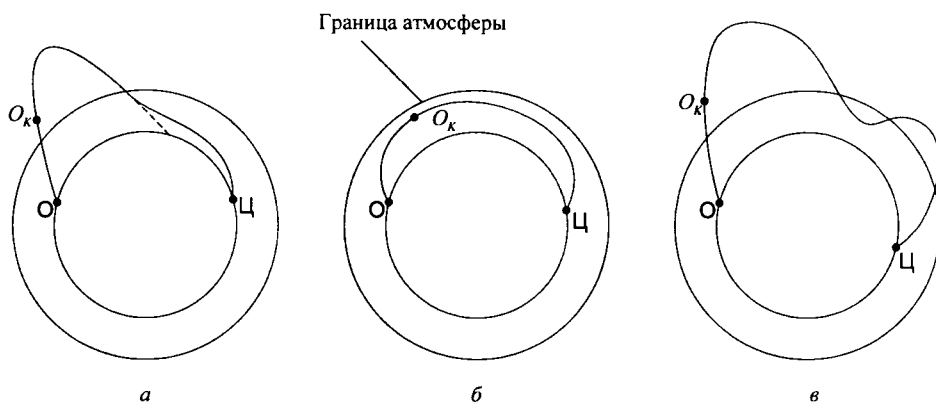


Рис. 6.5. Траектории УББ

Выдающийся вклад в развитие ракетно-космической техники внесли Д.Ф. Устинов (курировал от руководства страны ракетно-космическую тематику), М.В. Келдыш (внес выдающийся вклад в разработку эффективных методов решения задач космической техники, развертывания и проведения космических исследований), С.П. Королев (конструктор ракетно-космических систем), М.К. Янгель (конструктор ракетных комплексов), В.Н. Челомей (конструктор ракетной техники), В.П. Глушко (основоположник отечественного ракетного двигателестроения), А.М. Исаев (конструктор авиационных и ракетных двигателей), Г.Н. Бабакин (специалист в области авиационной и космической техники), Н.А. Пилugin (главный конструктор систем управления ракет-носителей), А.Д. Надирадзе (конструктор ракетных комплексов,

в том числе мобильного базирования, а также на твердом топливе), В.Ф. Уткин (конструктор ракетных комплексов), В.М. Макеев (конструктор баллистических ракет морского базирования), Б.Е. Черток (видный ученый и конструктор ракетно-космических систем), В.П. Бармин (конструктор стартового оборудования), Б.В. Раушенбах (видный ученый и конструктор ракетно-космических систем) и др.

6.2. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОТОЧНЫМ ОРУЖИЕМ [23, 34, 83, 121, 132, 137]

В современных войнах главная роль все чаще отводится высокоточному оружию. Высокоточное оружие — это бомбы, оснащенные головками самонаведения, крылатые ракеты с обычными зарядами и др., которые попадают в наиболее уязвимые точки цели. В 1990 годы имел место скачок в применении высокоточного оружия в различных вооруженных конфликтах. В войне в Ираке (март–апрель 2003 г.) доля использованного США высокоточного оружия составила 90 процентов, т.е. **высокоточное оружие становится основным. Ключевым элементом высокоточного оружия являются системы автоматического управления.**

Изложим принципы построения САУ высокоточным оружием (ВТО), использующим новейшие достижения теории и аппаратной реализации их элементов. ВТО — это оружие, которое обеспечивает попадание в цель с высокой точностью. *ВТО — это комплекс, в составе которого имеется система разведки, система наведения и система поражения. Комплексы основаны на различных физических принципах. Они могут поражать цели самого различного характера: движущиеся и неподвижные, крупноразмерные и точечные, находящиеся на земле, в воздухе, на воде и под водой. Комплексы ВТО базируются на земле, на воздушных и морских объектах.*



Рис. 6.6. Функциональная схема комплекса ВТО

Функциональная связь между системами комплекса ВТО показана на рис. 6.6. Система обнаружения производит поиск целей, находящихся в зоне ее действия, определяет их положение в пространстве и проводит предварительный анализ. Сюда могут входить наземные, корабельные и авиационные РЛС обнаружения, станции

оптической, инфракрасной и телевизионной разведки, лазерные и звуковые средства обнаружения и др.

Информация от системы обнаружения поступает в систему принятия решения и целераспределения; основу этой системы составляет командный пункт, оснащенный вычислительными средствами и средствами отображения информации.

Результаты решения в виде целеуказания поступают в систему наведения оружия, которая производит захват выбранных целей, уточняя их координаты, тип и другие параметры, определяет точку встречи (если цель движущаяся) и момент пуска (выстрела) исполнительной системы.

После пуска система наведения управляет исполнительной системой и обеспечивает наведение ее поражающей части на цель. В состав системы наведения могут входить радиолокационные, оптические, инфракрасные, лазерные и другие средства слежения за целями.

Исполнительная система состоит из устройства запуска (выстрела) и движущей части. В большинстве типов комплексов ВТО движущейся частью является ракета, несущая боевой заряд для поражения цели.

Далее основное внимание будем уделять принципам построения САУ.

Под системой управления ракетой понимается комплекс аппаратуры и устройств, предназначенных для управления ракетой или ее головной частью в полете.

САУ называется автономной, если информация о требуемом движении ракеты вводится в систему один раз до момента пуска и в течении полета не меняется.

В системе командного телеуправления информация о требуемом движении формируется с помощью устройств, следящих за целью и расположенных на ПУ, а затем передается на ракету. В системах самонаведения информация о цели формируется с помощью устройств, следящих за целью и расположенных на ракете.

Управление полетом крылатых ракет осуществляется с использованием корреляционно-экстремальных систем наведения (КЭСН).

Рассмотрим основные способы построения КЭСН.

1. Доплеровские автономные навигационные системы (доплеровские КЭСН).

Эти системы необходимы для вычисления путевой скорости в земной системе координат. Навигационная система летательного аппарата позволяет путем интегрирования составляющих вектора скорости определить местоположение в любой момент времени.

2. Система навигации по рельефу местности.

Метод навигации и наведения посредством сопоставления профилей рельефа местности предназначен для применения на борту различных КР. В основу метода построения такой системы положен следующий принцип: географическое положение любой точки земной поверхности (суши) описывается с помощью вертикальных профилей. Система требует предварительного картографирования или иного определения характеристик профилей поверхности того района, над которым она будет использоваться. Это может быть сделано, например, по стереоскопическим аэроснимкам местности. Предварительно определенные данные о рельефе района полетов записываются в цифровом виде в бортовом запоминающем устройстве.

Находит применение беспойсковая система навигации по рельефу местности; она обеспечивает непрерывную коррекцию инерциальной системы навигации на основе карты рельефа местности *с использованием фильтра Калмана*. В этой системе сравнение данных о рельефе местности, получаемых от радиовысотомера в текущий момент времени, и коррекция инерциальной системы происходит непрерывно с использованием дополнительной информации о наклонах рельефа, вычисляемых в блоке памяти.

Активная радиолокационная корреляционная система определяет положение движущегося объекта по времени отраженных радиолокационных импульсов, формируемых по четырем симметричным направлениям и по вертикали.

Процессор содержит быстродействующий цифровой коррелятор, который решает задачу определения координат путем сравнения обработанных отраженных радиолокационных импульсов с соответствующими данными эталонных карт. Полученная информация поступает в вычислительное устройство инерциальной системы с целью формирования сигналов коррекции ее работы (разработан фирмой *Coodyear Aerospace*, США).

Кадровая радиолокационная КЭСН использует для управления радиолокационную карту местности.

В пассивных радиометрических КЭСН с помощью коррелятора сравнивается радиотепловая карта местности, получаемая радиометром при сканировании антенной системы по азимуту и по углу места, с эталонной картой данного участка, заложенной в память коррелятора. В корреляторе на основании информации высотомера, инерциальной системы навигации и других датчиков осуществляется преобразование сигнала радиометра в форму, удобную для сравнения с эталонной картой: дискретизация, квантование в соответствии с хранимой в запоминающем устройстве информацией и условием наблюдения — высотой, направлением движения. Устройство сравнения изображений осуществляет выбор возможных положений объекта на эталонной карте и для каждого такого положения вычисляет меру сходства наблюдаемого (текущего) изображения с эталонным, полученным из блока памяти. В качестве меры сходства используется нормированный коэффициент корреляции. Подготовка эталонной карты производится с помощью ЭВМ по аэрофотоснимкам автоматически с использованием кодов.

Рассмотрим принцип действия комплексной инфракрасной КЭСН.

Принцип действия системы состоит в том, что входная информация в виде сигналов теплового излучения местности, формируемых инфракрасным радиометром, преобразуется в цифровую форму в специальном блоке преобразователя сигналов. После калибровки входного сигнала определяется выходной сигнал коррекции путем сравнения преобразованного в цифровую форму текущего сигнала с эталонной тепловой картой (матрицей) данного участка местности, хранящейся в БЦВМ.

В СССР работы по созданию цифровых карт велись в 70-х годах; в 1978 году такая карта была создана.

На основе использования КЭСН разрабатываются всепогодные и не зависящие от времени суток системы самонаведения (активные радиолокационные головки самонаведения в миллиметровом диапазоне). Помимо высокоточного наведения необходимо высокоточное целеуказание, для чего используется космическая, воздушная и наземная разведка. Таким образом, **действия по уничтожению цели превращаются в единую воздушно-космическо-наземную операцию.** Вопрос о выдаче точных целеуказаний является одним из решающих факторов, от которого зависит успех операции. В результате деятельности различных эшелонов разведки создается образ цели (оптический, радиолокационный и др.), после обработки информации с помощью специальных цифровых технологий создается комплексное изображение цели с конкретными координатами и «привязываются» к реальной компьютерной (объемно-цифровой) карте. После этого производится разработка полетного задания для управляемых боеприпасов. Время получения точных целеуказаний не должно превышать нескольких минут.

Высокоточное оружие (ВТО) в современных войнах предназначено для уничтожения промышленной инфраструктуры, атомных электростанций, химических пред-

приятый, гидросооружений, энергетики, систем связи, узлов коммуникаций, мостов и др.; оно по последствиям воздействия на противника становится соизмеримым с ядерным и по своему статусу относится к потенциалу стратегического сдерживания. Применение ВТО предполагает ведение постоянного наблюдения за местностью и воздушным пространством; в соответствующих подразделениях разворачиваются и действуют РЛС разведки, автоматизированные системы обработки информации, управления огнем, целеуказания. Имеет место широкая интеграция на поле боя средств поражения с разведывательными системами.

Высокая степень связи между разведкой и выполнением ударных задач создает на поле боя единый разведывательно-ударный комплекс, работающий в реальном масштабе времени.

Примером ВТО является крылатые ракеты «Томагавк». Ракеты запускаются с кораблей, подводных лодок, самолетов тактической и стратегической авиации.

Дальность полета — от 1 до 2 тыс. километров, снаряжается КР как обычной, так и ядерной боевой частью (БЧ) весом от 200 до 350 кг.

Ракета идет на цель, «читая» заложенный в ее программу портрет рельефа местности. Ракета попадает в цель с точностью до 10–15 метров.

Скорость полета ракеты — до 900 км/час. Она способна разрушить многоэтажное капитальное здание, сделанное из суперпрочного железобетона.

Условная функциональная схема системы автоматического управления ракетой, поясняющая принципы управления и основные элементы системы, представлена на рис. 6.7.

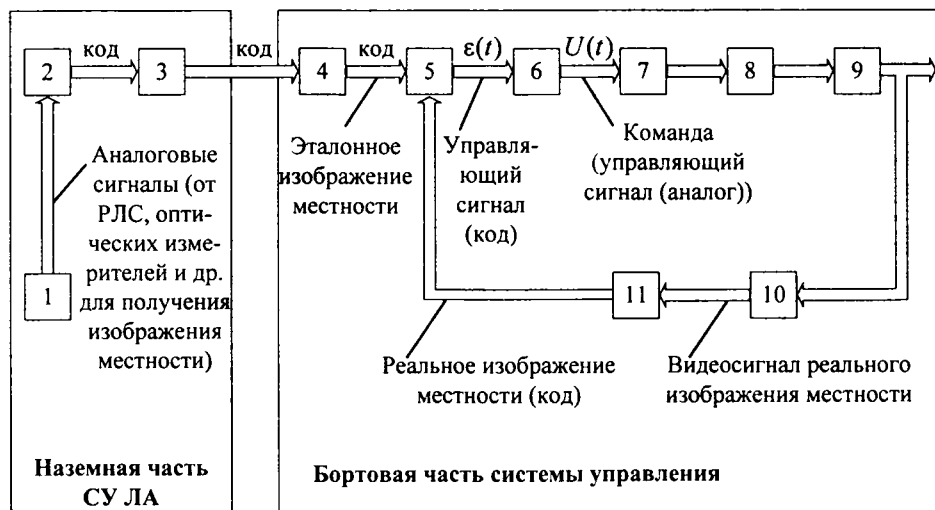


Рис. 6.7. Структурная схема САУ с КЭСН:

- 1 — устройства для получения изображения местности (РЛС и др.); 2 — цифровой комплекс для получения изображения местности; 3 — кассета с изображением местности; 4 — БЭВМ; 5 — БЭВМ для сравнения и выработки команд управления; 6 — цифро-аналоговые преобразователи; 7 — рулевой привод; 8 — рули аэродинамические; 9 — головная часть; 10 — измерительная система; 11 — аналого-цифровой преобразователь

1. Авиационное высокоточное оружие.

Авиационное ВТО — это авиационные боеприпасы, оснащенные системами командного наведения, самонаведения или их комбинацией и обеспечивающие поражение цели. На рис. 6.8 представлена классификация ВТО, а на рис. 6.9 — средства, обеспечивающие применение ВТО.



Рис. 6.8. Классификация авиационного высокоточного оружия

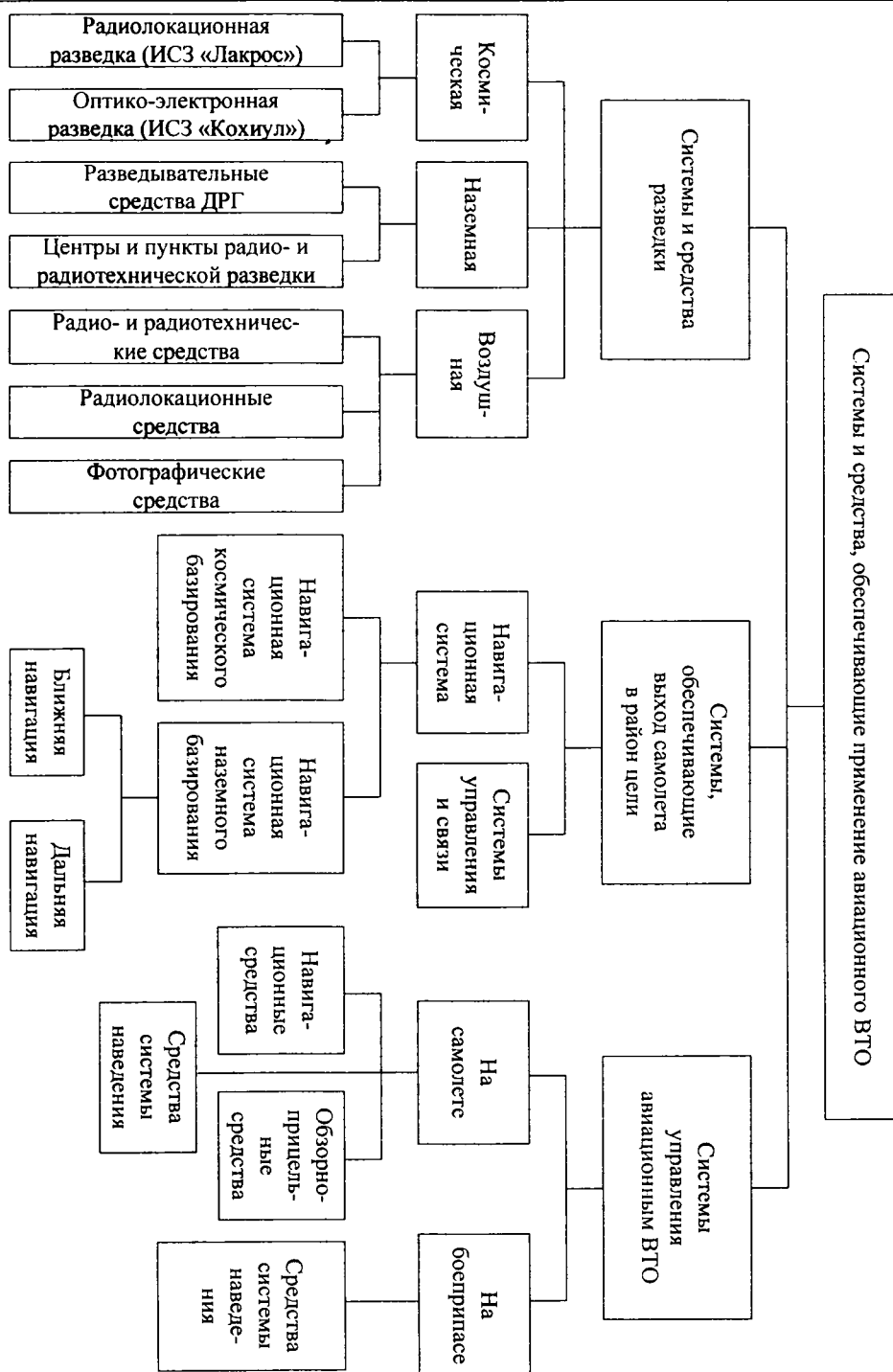


Рис. 6.9. Системы и средства, обеспечивающие применение авиационного ВТО

Далее положения, связанные с изложением принципов наведения, представлены на рис. 6.10, 6.11.



Рис. 6.10. Классификация систем наведения авиационного ВТО по типу используемой аппаратуры, установленной на боеприпасе:
 ССН — система самонаведения, СН — система наведения, ГСН — головка самонаведения, КСН — командные системы наведения

На авиационных боеприпасах устанавливаются в основном системы и средства, непосредственно обеспечивающие наведение боеприпасов на цель. Поэтому системы управления, установленные на боеприпасах, часто называют системами наведения. Однако понятие «система наведения» — более широкое. Оно включает не только системы и средства, установленные на боеприпасе, но и ряд средств, устанавливаемых на самолете.

Таким образом, под системой наведения понимаются системы и средства управления, устанавливаемые как на боеприпасе, так и на самолете и обеспечивающие непосредственное наведение боеприпаса на цель. Структурная схема системы наведения представлена на рис. 6.11.

Задачей системы наведения является измерение параметров управления и создание управляющей силы для устранения ошибок наведения путем сведения к нулю параметров управления.

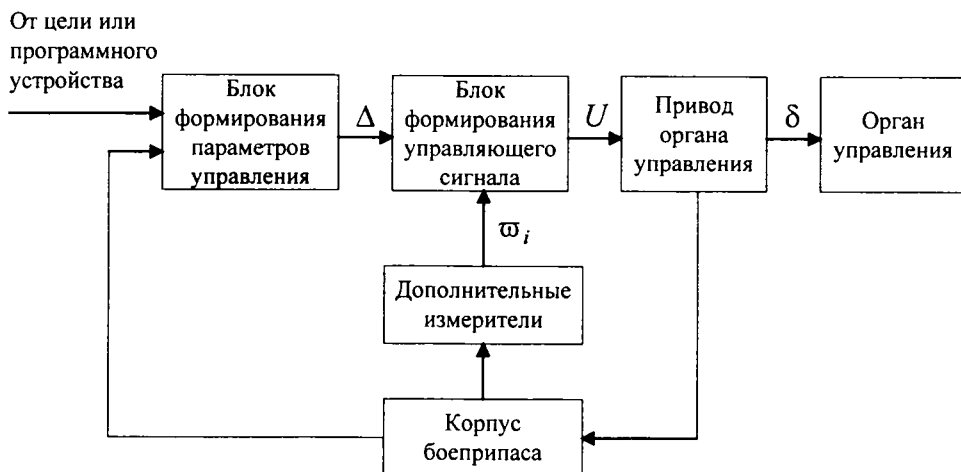


Рис. 6.11. Обобщенная структурная схема системы наведения, установленной на боеприпасе

Для улучшения качества процесса наведения, стабилизации свойств управляемого боеприпаса как объекта управления и уменьшения зависимости от условий боевого применения в состав системы управления входят дополнительные измерители, измеряющие такие параметры движения боеприпаса, как ускорения, угловые скорости вращения его корпуса и т.д. Дополнительными измерителями являются скоростные гироскопы, акселерометры и др. Сигналы дополнительных измерителей суммируются с сигналами устройств, формирующих параметры управления. Этот суммарный сигнал управления, подаваемый на привод руля или другого управляющего органа (крыла, элевона или элерона), называется управляющим сигналом или командой.

Аппаратура, которая формирует управляющий сигнал (команду) для данного исполнительного органа, называется каналом управления. Каждому каналу присваивается соответствующее наименование, например, канал управления по тангажу (по высоте), канал управления по углу рысканья (по курсу). Исполнительными органами в этих каналах соответственно являются руль высоты и руль поворота. Некоторые элементы системы управления могут быть общими для нескольких каналов.

Под действием управляющего сигнала (команды) исполнительные органы, например рулевые машины, поворачивают рули. Зависимость отклонения рулей от параметров управления и сигналов, поступающих от дополнительных измерителей, называют законом управления.

Информация о цели в неавтономных системах наведения поступает в блок формирования параметров управления, а в случае автономного управления сигналы в этот блок поступают от программного устройства.

Сигналы, пропорциональные параметрам управления, а также сигналы от дополнительных измерителей ω_i поступают в блок формирования управляющего сигнала (автопилот). Сформированный управляющий сигнал поступает на привод, меняющий положение управляющего органа. Это, в свою очередь, приводит к появлению управляющей силы, под действием которой корпус боеприпаса изменяет траекторию своего движения так, чтобы выполнялся заданный метод наведения.

О степени эффективности ВТО можно судить по данным в табл. 6.1.

2. Высокоточные ракетные комплексы сухопутных войск [83].

Информационное обеспечение высокоточных ракет включает в себя такие основные составляющие, как получение и дешифрирование разведывательной информа-

ции; выработка целеуказания; доведение информации целеуказания до комплексов ракетного оружия.

Таблица 6.1

Степень эффективности применения авиационного ВТО

Войны	Тип самолета	Количество самолетов-вылетов для поражения цели	Количество бомб для уничтожения цели	Тип авиационных бомб	Круговое вероятное отклонение точки попадания от точки прицеливания, м
Вторая мировая война (1941–1945 гг.)	B-17	4500	900	Неуправляемые авиационные бомбы	3000
Война во Вьетнаме (1964–1973 гг.)	F-105	95	190	Неуправляемые авиационные бомбы	300
Война в Персидском заливе (1991 г.)	F-117A	1	1	УАБ GBU-10, GBU-27 с лазерной полуактивной системой наведения	1–3

Каждая из них реализуется соответственно системами разведки, целеуказания и передачи данных, из которых складывается система информационного обеспечения.

Решение ранее указанных задач позволяет реализовать целевую функцию создания систем информационного обеспечения и наведения высокоточного ракетного оружия.

При этом суммарная ошибка наведения ракеты на цель включает ошибки системы наведения, системы разведки, системы целеуказания и системы передачи данных.

Важной функцией системы информационного обеспечения высокоточного ракетного оружия является обеспечение требуемой оперативности нанесения ракетного удара путем минимизации времени от момента обнаружения цели до момента ее поражения. Для баллистических ракетных комплексов общее время работы определяется временем, затрачиваемым на разведку, целеуказание и передачу данных подразделениям ракетных войск.

Высокоточное ракетное оружие предполагает наличие на борту ракеты системы наведения (СН) или системы самонаведения (ССН), обеспечивающей как определение местоположения ракеты и коррекцию ее траектории, так и наведение ракеты непосредственно на цель.

В основу работы таких систем, как указывалось ранее, обычно закладываются принципы сравнения текущей информации (изображение земной поверхности, специфические изображения объектов на фоне земной поверхности и т.п.), получаемой на борту, с эталонной информацией того же класса, создаваемой заранее на основании соответствующей обработки первичных информационных материалов (ПИМ).

В зависимости от решаемой задачи (коррекция траектории или наведение на цель) меняется и вид информационных сигналов, подлежащих сравнению. Это могут быть изображения местности в виде фотографий, радиолокационные изображения, идентичные фотографическим, изображения в виде пространственного распределения отсчетов (дискрет) каких-либо информационных величин (радиотеней, ярких точек и т.п.), пространственные сигнатуры отражающих (рассеивающих) свойств тех или иных предметов с учетом отражений от подстилающей поверхности и т.п.

«Высокоточное оружие — управляемое на траектории средство поражения в неядерном снаряжении, функционально объединенное в едином процессе с системами информационного обеспечения, избирательно и эффективно уничтожающее, подавляющее или дезорганизующее цели противника во всем диапазоне дальностей стрельбы и условий его боевого применения» [83].

ВТО часто не может функционировать без систем самонаведения (ССН), обеспечивающих определение координат местоположения ракеты и наведение ее на цель, и соответствующих систем информационного обеспечения. Таким образом, главными отличительными признаками ВТО являются:

- наличие на борту ракеты активной и (или) пассивной ССН, обеспечивающей как коррекцию траектории полета, так и непосредственное наведение ракеты на цель с помощью эталонной информации;
- наличие специальной системы информационного обеспечения.

Под бортовыми ССН, обеспечивающими автономность выработки сигналов управления полетом и работающим по изображению земной поверхности или образа цели, понимается совокупность специального бортового оборудования и программного обеспечения ракеты для решения задачи высокоточного наведения на цель путем использования на определенных участках траектории полета ракеты дополнительной информации как от внешних источников, так и от самой бортовой системы, использующей различные информационные поля (поле рельефа, поле яркости и др.).

Поскольку ЦУ — процедура определения координат точки прицеливания, попадания в которую — достижение максимального уровня поражения объекта, то к основным элементам технологии ЦУ можно отнести получение разведывательной информации; ввод данных из разведывательных документов в вычислительную аппаратуру; ввод исходных данных из базы данных; решение оптимизационных задач ЦУ.

По приведенной информации готовится полетное задание, оно готовится непосредственно перед стартом за ограниченное время. Отсюда следуют и требования, предъявляемые к расчету ПЗ: высокая точность вычисления и представления чисел ПЗ и постоянных величин, обеспечивающая предельно малые ошибки стрельбы из-за подготовки ПЗ; минимальное время подготовки, ввода и контроля ПЗ; инвариантность алгоритмов подготовки ПЗ к изменению исходных данных по ракете и системе управления; минимальное время, затрачиваемое на подготовку постоянных величин и чисел ПЗ при проектировании и изменении исходных данных по ракете и СУ.

При подготовке ПЗ в ЭВМ системы управления необходимо ввести исходные данные (ИД), которые, как показал анализ методов автономного управления и стабилизации, должны включать координаты точки старта; координаты точки ЦУ; высоты точек старта и цели над уровнем моря; тип головной части и установки, характеризующие ее боевую часть. ПЗ для крылатых ракет (КР) включает координаты точек коррекции инерциальной СУ; координаты, характерные для запретных зон; конфигурация запретных зон и их геометрические характеристики; цифровые карты местности заданного района функционирования ракетного комплекса СВ.

Важную роль при реализации ПЗ играет метод автономного управления и стабилизации ракет Сухопутных войск. Используются методы программного управления (они предполагают необходимость вычисления и ввода в бортовую ЭВМ большого объема априорной информации (полетное задание) и др.), а также программно-терминальные методы управления.

Функциональная схема аппаратуры системы управления и стабилизации изображена на рис. 6.12, где КГП — комплекс гидростатических приборов; БДУС — блок датчиков угловой скорости; НАП — навигационная аппаратура потребителя; ГСН — головка самонаведения; ОУ — оконечное устройство; $A_{1, 2, 3}$ — акселерометры; РМ — рулевая машинка; ЦАП — цифро-аналоговые преобразователи.

Принципы программирования движения определяют три типа траекторий: жесткие, гибкие и свободные [83]. *Принцип жесткого программирования состоит в предварительном (до начала движения) составлении модели движения с разработ-*

кой программы управления. Эти программы в составе полетного задания вводятся в контур управления, и СУ обрабатывает их в реальных условиях полета. «Жесткость» программы определяется ее зависимостью от одного переменного — времени.

Используются и другие принципы программирования.

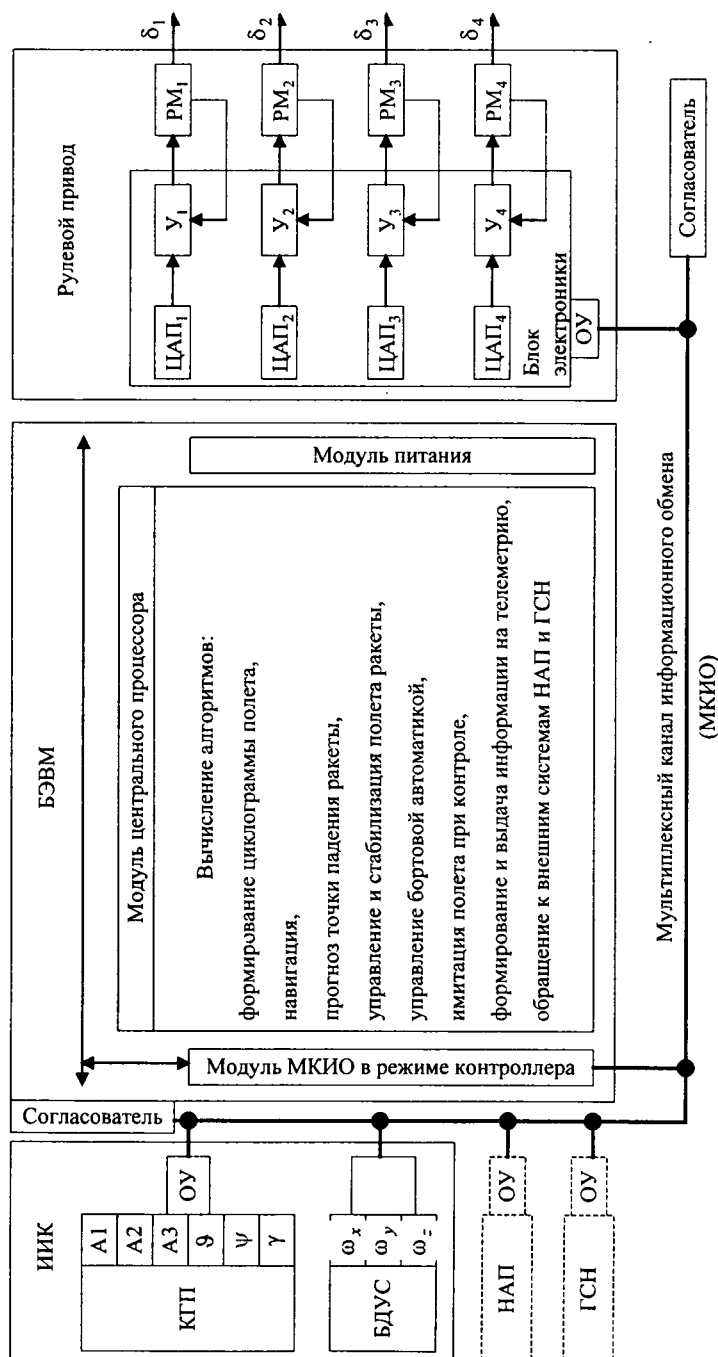


Рис. 6.12. Функциональная схема системы автоматического управления высокоточных ракетных комплексов Сухопутных войск

Вся информация из информационно-измерительного комплекса поступает в БЭВМ. В высокоточных СУ ракет Сухопутных войск используется малогабаритная высокопроизводительная ЭВМ, предназначенная для решения задач управления и стабилизации ракеты в реальном масштабе времени.

Системное программное обеспечение ЭВМ содержит текстовые и технологические компоненты. Текстовое программное обеспечение представляет собой систему встроенного тестового контроля. *Технологическое программное обеспечение выполняет запись полетных программ систем управления и стабилизации с помощью операционной системы реального времени (ОСРВ). Полетные программы можно многократно изменить в ходе эксплуатации ракеты при ее модернизации. ОСРВ основана на концепции многозадачности и их взаимодействии. Многозадачная среда позволяет конструировать приложения реального времени из независимых задач, выполняющихся параллельно и имеющих собственный набор системных ресурсов.* Средства взаимодействия задач обеспечивают синхронизацию и обмен сообщениями, необходимыми для координации их работы.

Исполнительным элементом системы управления и стабилизации является рулевой привод, с помощью которого рули ракеты отклоняются таким образом, чтобы была выполнена цель управления — поражение объектов вероятного противника.

С целью повышения точности доставки ракет к цели в процессе полета используется коррекция по информации от систем наведения. Коррекция — это изменение в полете координат ракеты или цели по информации от дополнительных аппаратных средств: головки самонаведения, наземных систем радиосвязи, космических навигационных систем и др.

6.3. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ПРОТИВОСАМОЛЕТНОЙ ОБОРОНЕ [4, 41, 52, 57, 70, 85, 136, 141]

6.3.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Ракеты класса «земля–воздух» чаще называют зенитными. Они занимают ведущее место в системе современной противовоздушной обороны, составляя основу ее огневой мощи. Зенитные управляемые ракеты (ЗУР) предназначены для борьбы с воздушными целями: самолетами, вертолетами и крылатыми ракетами классов «земля–земля» и «воздух–земля», дистанционно-пилотируемыми летательными аппаратами, а также оперативно-тактическими баллистическими ракетами этих же классов. Задача боевого применения всякой зенитной ракеты — доставка в заданную точку пространства боевой части и ее подрыв с целью уничтожения того или иного средства воздушного нападения противника.

Система противосамолетной обороны (ПСО) должна обеспечить, как правило, пересечение траекторий цели (самолёт, вертолёт, крылатая ракета и др.) и ракеты. Для этого служит система наведения, принципы построения которой далее рассмотрим на физическом уровне, хотя процесс обеспечения встречи ракеты с целью имеет весьма строгую математическую модель [136]. Рассмотрим схему (рис. 6.13). Её можно в первом приближении рассматривать как функциональную схему, иллюстрирующую командное телеуправление зенитно-ракетным комплексом (ЗРК), включающую:

- зенитную управляемую ракету (ЗУР);
- пусковую установку;
- систему управления стартом;
- средства связи;
- систему наведения ЗУР на цель;

- систему управления ЗРК (комплексом в целом);
- систему обнаружения и опознавания целей и др.

Если в систему управления ЗРК:

- поступила информация, что в зону обнаружения вошла цель;
- произведено опознавание цели (свой или чужой);
- определены характеристики цели (дальность до цели, направление, высота и скорость полёта, состав цели и др.),

то включается аппаратура и производится подготовка к пуску.

При получении системой управления ЗРК целеуказания и необходимых данных о цели и достижении целью соответствующей дальности производится пуск ЗУР. Далее реализуется процесс наведения ЗУР на цель [57].

На основе схемы, представленной на рис. 6.13, легко изобразить функциональную схему системы командного наведения (рис. 6.14) [57].

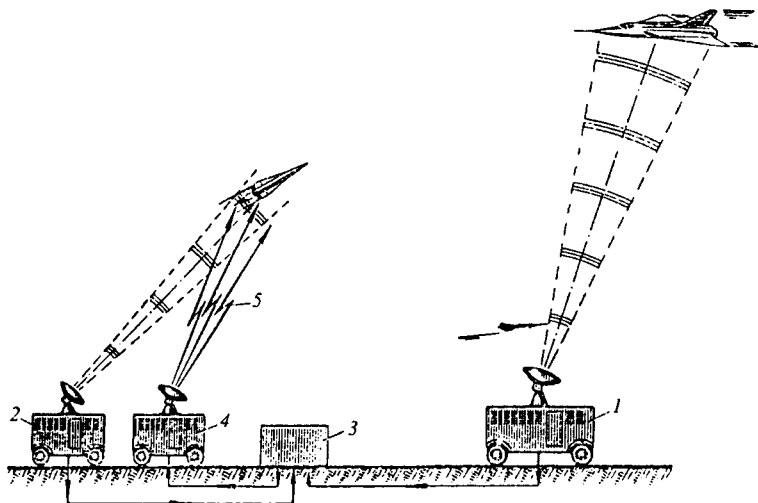


Рис. 6.13. Схема работы системы командного телеуправления:

1 — станция сопровождения цели; 2 — станция сопровождения ЗУР; 3 — ЭВМ наведения;
4 — станция передачи команд; 5 — команды на борт ЗУР

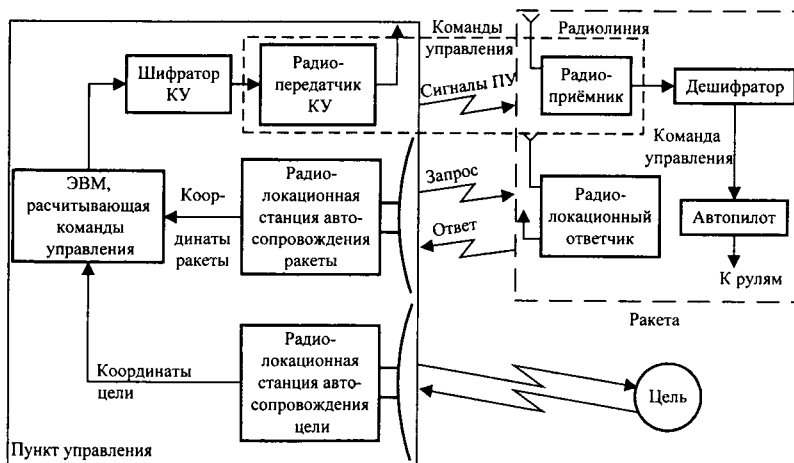


Рис. 6.14. Функциональная схема системы командного телеуправления

Передатчик станции сопровождения ракеты через передающую антенну излучает импульсы электромагнитной энергии, которые активизируют радиолокационный ответчик, расположенный на ракете. Принятые сигналы включают передатчик ответчика ракеты, и на приёмник радиолокационной станции сопровождения ракеты поступают ответные импульсы. Благодаря этому обеспечивается непрерывное сопровождение ракеты по угловым координатам и дальности. Полученные координаты ракеты по отношению к командному пункту поступают в ЭВМ, также в ЭВМ поступают координаты цели. ЭВМ решает задачу встречи ракеты с целью и вырабатывает сигналы управления; эти сигналы преобразуются, кодируются и излучаются командной радиолинией управления (КРУ). На ракете эти сигналы принимаются приемником и после дешифрации в виде команд управления поступают на автопилот, который с помощью рулей управления изменяет траекторию полета ракеты.

Отдельную линию связи системы телеуправления можно объединить с радиолокационной станцией автоматического сопровождения ракеты, посылая в промежутках между зондирующими импульсами кодированные импульсы управления [57].

Система стабилизации ЗУР, или автопилот, путём отклонения органов управления ракетой сохраняет нужное угловое положение ЗУР в полёте при воздействии различных возмущений, а также управляет угловыми движениями ЗУР в соответствии с командами наведения и сигналами стабилизации. Создавая углы атаки и скольжения ракеты или изменяя направление равнодействующей тяги, автопилот обеспечивает формирование управляющих сил, которые корректируют траекторию полёта таким образом, чтобы обеспечить встречу ракеты с целью.

Вся аппаратура автопилота размещается на борту ракеты. В её состав входят различного рода чувствительные элементы, усилительные устройства, исполнительные, или силовые, механизмы и др.

Чувствительные элементы обнаруживают и измеряют такие характеристики полёта ЗУР, как угловые отклонения осей ракеты, угловые скорости и ускорения, линейные ускорения центра тяжести ракеты в соответствующих плоскостях и др.

Исполнительные механизмы осуществляют отклонение органов управления — рулей, элеронов, поворотных крыльев, сопел реактивных микродвигателей или сопла маршевого двигателя и других — по отношению к корпусу планера.

Система наведения ЗУР непрерывно определяет взаимное положение ракеты и цели, а также характеристики их движения. Путём выработки команд наведения и передачи их на автопилот она обеспечивает введение поправок в траекторию полёта, которые приводят к встрече ракеты с целью при допустимом промахе. Система наведения современной ЗУР включает наземную и бортовую аппаратуру.

В системах телеуправления, т.е. управления ракетой на расстоянии, выработка команд наведения осуществляется за счёт энергии, затрачиваемой на наземном пункте. Основная часть аппаратуры таких систем располагается на земле. Бортовая аппаратура отличается сравнительной простотой и небольшим весом. Недостаток этих систем — **зависимость точности наведения** (величины промаха) **от дальности стрельбы**. Величина промаха примерно пропорциональна дальности полёта ЗУР, т.е. с увеличением дальности растёт и промах.

Комплекс приборов, осуществляющих наведение ракеты на цель, называется системой наведения.

Что же является основой работы системы наведения, обеспечивающей встречу ракеты с целью?

Важным является следующее фундаментальное положение: *система в процессе наведения постоянно контролирует значение параметра рассогласования, характеризующего взаимное положение ракеты и цели и его отклонение от заданного значения. Если имеет место такое отклонение, то подаются сигналы на органы управления ракеты, т.е. на рули. Отклонение последних приводит к изменению углового*

положения ракеты, которое должно быть таким, чтобы контролируемый параметр рассогласования стремился к нулю.

Параметр рассогласования — это базовое понятие в теории систем автоматического управления и соответственно систем наведения ракет на цель. Поэтому сделаем более подробные пояснения [70].

Математическая модель, обеспечивающая сближение ракеты с целью, называется методом наведения ЗУР (она устанавливает связь между прогнозируемыми траекториями движения цели и ракеты).

Такие факторы, как перемещение воздушных масс, изменение атмосферного давления с высотой полета ракеты, изменение скорости полета и др. приводят к нарушению закона сближения, а мера степени нарушения представляет собой параметр рассогласования $\Delta(t)$.

Методы наведения ЗУР можно разделить на две группы: 1 группа — двухточечные: они определяют взаимное положение ракеты и цели и используются в системах командного телеуправления и системах самонаведения; 2 группа — трехточечные: они определяют взаимное положение ракеты, цели и пункта управления и используются в системах командного телеуправления.

Учитывая сказанное выше, рассмотрим конкретные методы определения параметра рассогласования, характеризующего относительное расположение ракеты и цели.

Для двухточечного метода наведения можно потребовать, чтобы вектор скорости ракеты, летящей в атмосферу, был направлен на цель в течение всего времени наведения. Если $\theta \neq \varepsilon$ (рис. 6.15), то с помощью соответствующих приборов измеряется величина и устанавливается знак разности $\Delta_u = \varepsilon - \theta$, после чего вырабатываются команды, под действием которых соответствующим образом меняется траектория полета ЗУР.

Прямой метод наведения, который относится к числу двухточечных, требует, чтобы в течение всего времени полета ракеты её продольная ось совпала с линией ракета–цель. При прямом методе наведения связь накладывается на положение продольной оси ракеты (рис. 6.16).

В соответствии с определением метода наведения параметр рассогласования в одной из плоскостей запишется в виде $\Delta_\gamma = \gamma = \varepsilon - \vartheta$.

Очевидно, что параметр рассогласования может быть определен:

- непосредственно измерением угла γ ;
- раздельным измерением углов ε и ϑ и вычислением $\Delta_\gamma(t) = \varepsilon(t) - \vartheta(t)$.

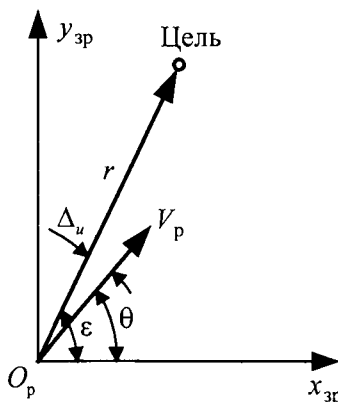


Рис. 6.15. К пояснению процесса наведения

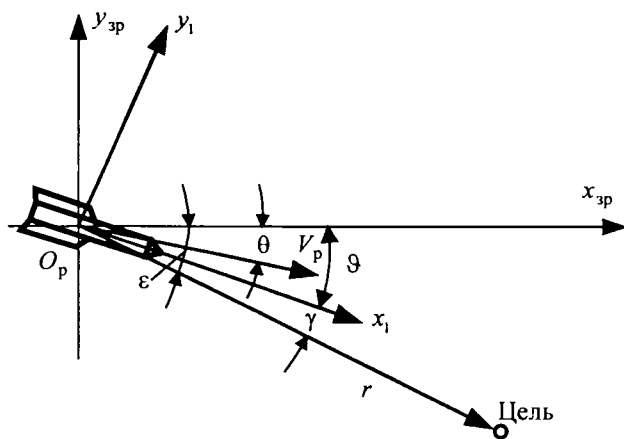


Рис. 6.16. К пояснению процесса наведения прямым методом

Если Δ_γ отличен от 0, то формируются сигналы, подаваемые на рули ракеты, что приводит к изменению углового положения продольной оси ракеты таким образом, чтобы параметр рассогласования $\Delta_\gamma(t)$ стремился к 0.

Разработаны и другие методы наведения [70]. Функциональная схема САУ ракетой представлена на рис. 6.17. Система автоматического управления, функциональная схема которой представлена на рис. 6.17, является весьма сложной и относится к классу нелинейных с переменными параметрами. Особенности САУ и ее степень сложности определяет в первую очередь объект управления (в данном случае ракета). Для того чтобы достаточно ясно судить о динамических свойствах объекта управления и связанного с ним процесса наведения, приведем некоторые сведения, следуя [136].

В полете на ракету действует несколько сил.

Первая из них — это *тяга двигателя* P (рис. 6.18). Она направлена по продольной оси ракеты, если не используется изменение ее направления для управления полетом.

Сила веса Q приложена к центру тяжести ракеты и направлена к центру Земли.

Полная аэродинамическая сила R , приложенная к центру тяжести, в полете все время несколько изменяет свое направление и величину. Она действует на ракету лишь в плотных слоях атмосферы. С увеличением высоты она убывает. Считается, что аэродинамические силы заметно действуют на ракету только до высоты примерно 50 км.

Подъемная сила ЗУР создается в основном крыльями и в меньшей степени рулями и корпусом. Кроме зависимости от скорости и плотности воздуха, формы и размеров ракеты, ее величина прямо пропорциональна углу атаки. В меньшей степени влияет на нее угол отклонения рулей.

Боковая сила по характеру аналогична подъемной, а по направлению перпендикулярна ей. Ее величина зависит не от угла атаки, а от угла скольжения. Обычно ЗУР имеют такую аэродинамическую форму, при которой подъемная и боковая силы равны нулю, если отсутствуют углы атаки и скольжения.

Полный аэродинамический момент M может быть разложен по составляющим относительно осей OX , OY , OZ (см. рис. 6.19). Эти составляющие M_x , M_y , M_z изменяют угловое положение ракеты в пространстве (углы α , β , γ).

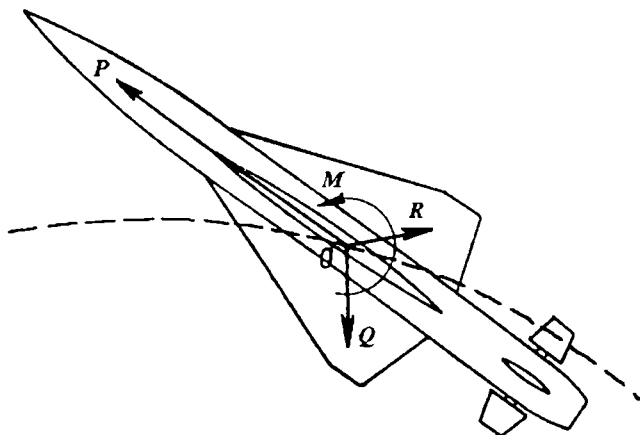


Рис. 6.18. Силы, приведенные к центру тяжести, и моменты, действующие на ракету в полете

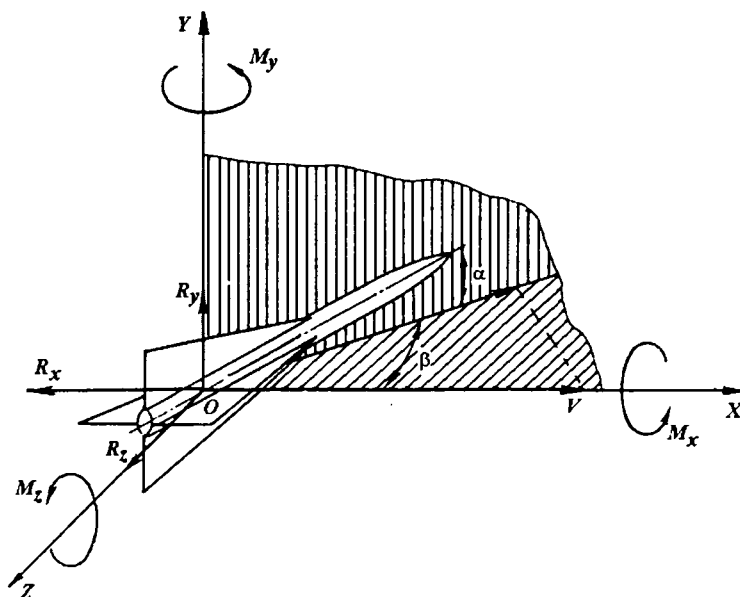


Рис. 6.19. Скоростная система координат

Полный аэродинамический момент, исходя из природы вызывающих его сил, складывается из трех моментов: стабилизирующего, демпфирующего и управляющего.

Стабилизирующий момент $M_{ст}$ возникает при отклонении продольной оси ракеты от вектора скорости, т.е. при появлении углов атаки и скольжения. Он создается относительно центра тяжести аэродинамическими силами, возникающими на стабилизаторах, крыльях, корпусе и рулях при их обтекании воздушным потоком под некоторыми углами. Его величина зависит от формы и размеров ракеты, скорости и высоты полета. Величина момента пропорциональна углу атаки (скольжения) и плечу действия аэродинамических сил. **Стабилизирующий момент стремится повернуть ракету так, чтобы углы атаки и скольжения стали равными нулю, т.е. чтобы ее продольная ось совпала с осью OX .**

Демпфирующий момент M_d возникает при вращении ракеты относительно какой-либо оси. Он создается сопротивлением воздуха повороту ракеты. Его величина зависит от размеров и формы ракеты, скорости и высоты полета и прямо пропорциональна угловой скорости вращения ракеты. Демпфирующий момент всегда направлен в сторону, противоположную угловой скорости ракеты. Он стремится воспрепятствовать любому вращению ракеты.

Управляющий момент $M_{упр}$ возникает при отклонении рулей или иных органов управления. Он создается аэродинамическими силами, появляющимися на рулях при их обтекании воздушным потоком под углом. Его величина зависит от размеров и формы ракеты, скорости и высоты полета и прямо пропорциональна углу отклонения рулей и плечу действия аэродинамических сил. Управляющий момент стремится отклонить продольную ось ракеты от вектора скорости, т.е. обеспечить создание углов атаки и скольжения.

Управляемый полет ЗУР совершает под действием сил P, Q, R и момента M . Центр тяжести ракеты описывает в полете сложную пространственную кривую. Чтобы эта кривая имела требуемую форму, т.е. чтобы ракета была наведена на цель в соответствии с выбранным методом, необходимо воздействовать на центр тяжести управляющими силами. Этими силами являются подъемная и боковая сила, которые представляют собой проекции на оси OY и OZ полной аэродинамической силы, если полет совершается в плотных слоях атмосферы и используются аэродинамические средства управления, или же проекции на эти оси силы тяги, если полет происходит за пределами атмосферы и применяются газодинамические органы управления. Могут быть случаи, когда используется сочетание этих способов.

Поскольку аэродинамические подъемная и боковая силы зависят от углов атаки и скольжения, для их создания используется управляющий момент. Для создания управляющего момента применяются органы управления в виде рулей, крыльев, элеронов. Они являются исполнительными органами системы управления, задающей ракете требуемую траекторию.

В состав момента M , кроме управляющего, входит также стабилизирующий момент. Он служит для обеспечения определенного углового положения ракеты в пространстве, т.е. для ее угловой стабилизации. Стабилизация необходима потому, что на ракету в полете действуют возмущения, вызванные неточностью в изготовлении планера (несимметричностью его формы), отклонениями вектора тяги от продольной оси и воздействием неспокойной атмосферы. При случайном отклонении оси ракеты от вектора скорости возникает стабилизирующий момент, который стремится вернуть ракету в прежнее положение. Но так будет только в том случае, если центр давления расположен позади центра тяжести по полету. Если же он будет находиться впереди, то возникающий момент будет стремиться еще больше увеличить угол отклонения оси ракеты от оси OX , что приведет к опрокидыванию ракеты. В первом случае говорят, что ракета аэродинамически устойчива, во втором — аэродинамически неустойчива. ЗУР должна быть устойчивой в полете.

Демпфирующий момент, третья составная часть момента M , противодействует всякому вращению ракеты около центра тяжести. Он стремится демпфировать, затормозить угловые отклонения ракеты, вызванные случайными возмущениями или командами управления. Его гасящее действие сказывается в уменьшении угловой скорости вращения ракеты, в более медленном и плавном изменении ее углового положения в пространстве, в быстром затухании периодических колебаний около центра тяжести.

Важными свойствами, характеризующими ЗУР, являются ее *устойчивость и управляемость в полете*. Эти свойства тесно взаимосвязаны.

Под устойчивостью ракеты в полете понимают ее способность возвращаться к движению по требуемой траектории наведения на цель после того, как прекращается действие возмущающих причин, вызвавших отклонение от этих траекторий. Чем быстрее ракета возвращается к заданному движению после случайного возмущения, тем выше ее устойчивость. Необходимые условия устойчивости — наличие восстанавливающих сил и моментов, а также демпфирование возмущенного движения. Устойчивость обеспечивается различными мерами стабилизации.

Управляемостью ракеты называется ее способность реагировать формированием и изменением управляющих сил на команды, вырабатываемые системой управления. Чем быстрее возникают требуемые управляющие силы в ответ на команды, поступившие на органы управления, тем выше управляемость ракеты. Условием, обеспечивающим хорошие характеристики ракеты по управляемости, является достаточная эффективность органов управления.

Взаимосвязь понятий устойчивости и управляемости ясна из такого примера. Допустим, ракета летит при нулевых углах атаки и скольжения. При появлении необходимости изменить траекторию в плоскости $ХОУ$ на рули поступает команда, и они отклоняются в соответствии с ее величиной на некоторый угол. Возникший управляющий момент, зависящий от угла отклонения рулей, вызовет появление угла атаки. По мере увеличения угла атаки будет возрастать и стабилизирующий момент, который зависти от этого угла и направлен прямо противоположно управляющему моменту. Когда величины моментов сравняются, ракета будет иметь определенный угол атаки, который в свою очередь вызовет появление управляющей подъемной силы требуемой величины. Демпфирующий момент, казалось бы, ухудшает ее управляемость. Однако при его отсутствии ракета совершала бы незатухающие колебания около требуемого угла атаки и вместе с этим колебательный характер имела бы и управляющая сила. Центр тяжести ракеты описывал бы периодическую кривую около заданной траектории. Наличие демпфирующего момента приводит к быстрому затуханию угловых колебаний ракеты, к равновесию $M_{упр}$ и $M_{ст}$, к определенному значению угла атаки и подъемной силы.

При конструировании ЗУР стремление получить хорошие характеристики ракеты по аэродинамической устойчивости могут привести к значительному снижению управляемости. Ракета станет чрезмерно стабилизированной. Управляемость может снизиться настолько, что выполнить наведение ракеты на цель, имеющую заданные летные характеристики, окажется невозможным.

Автопилот должен обеспечивать устойчивость движения ЗУР с учетом ее собственной аэродинамической устойчивости независимо от режима полета. Кроме того, он должен допускать возможность изменения режима полета и траектории ракеты, т.е. обеспечивать достаточную управляемость ЗУР. Таким образом, противоречивость требований устойчивости и управляемости ракеты находит свое разрешение в автопилоте, конструкция которого в сочетании с аэродинамическими характеристиками ЗУР позволяет добиться повышения устойчивости при хорошей управляемости.

Свойства управляемости определяют такое важное свойство ракеты, как маневренность. Маневренностью ракеты называют быстроту изменения скорости полета по направлению и величине. Перегрузкой называется отношение подъемной (боковой) силы к весу ракеты. Она показывает, во сколько раз ускорение ракеты в данном направлении больше или меньше ускорения силы тяжести. Сравнивая вели-

чину перегрузки, получаемой при наибольшей возможной команде, с требуемой для выполнения заданной траектории, можно установить, способна ли ракета данной конструкции описать траекторию нужной кривизны.

Выше был детально рассмотрен ключевой элемент системы наведения — летательный аппарат. Остальные звенья, так же как РЛС, ЭВМ, исполнительные элементы (рулевые машинки) и др., подробно изучаются в соответствующих дисциплинах, и их математические модели в контуре наведения широко используются при решении сложных задач расчета и проектирования этого класса систем, а также их моделирования на ЭВМ.

Пример 6.1. Для иллюстрации приведённых выше положений рассмотрим простейший пример.

Положим, что для наведения ракеты на цель используется трёхточечный метод наведения — метод совмещения.

При методе совмещения требуется, чтобы в процессе наведения центр масс ракеты оставался на линии, соединяющей пункт управления с целью. На рис. 6.20 показана невращающаяся система координат $O_C X_{zc} Y_{zc}$, расположенная в вертикальной плоскости, т.е. решение задачи наведения приводится в упрощённом варианте, когда движение цели и ракеты рассматривается не в пространстве, а в вертикальной плоскости.

При малых углах ε_1 справедливо следующее приближённое равенство: $\Delta h \approx \varepsilon_1 r_p$. Все пояснения, связанные с процессом наведения, приведены на функциональной схеме.

Ракета или не имеет крыльев, или они малой протяжённости. Различают полярное рулевое управление ракетой и управление в прямоугольной системе координат с основными рулями: тангажа (1, 2) и курса (3, 4). Эти рули могут быть аэродинамическими (реагирующими на воздушные потоки) (1, 3) и газовыми (2, 4) (реагирующие на струи газов, выходящих из сопла двигателя). Для управления в прямоугольной системе координат характерно также, что элероны (5, 6) только стабилизируют крен; если же элеронов, как и крыльев, на ракете нет, то появляющийся крен компенсируется поворотом рулей (3, 4) в разные стороны от нейтрального положения.

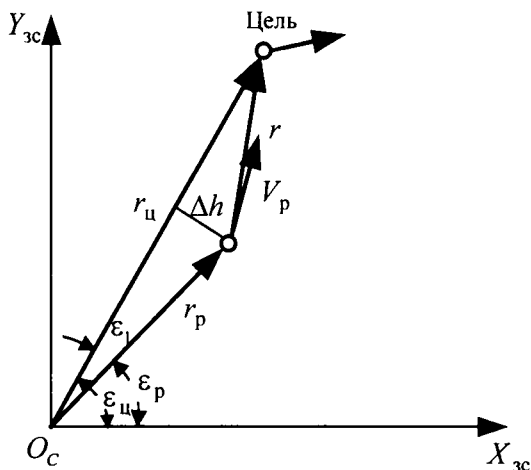


Рис. 6.20. К пояснению процесса наведения методом совмещения

Автопилот ЗУР, представляющий собой часть всей системы управления ЗУР, как говорилось выше, предназначен для стабилизации угловых движений ЗУР относительно центра массы и управления движением самого центра массы. Команды на автопилот поступают по КРУ — командной радиолонии управления. Каждый автопилот имеет три канала управления: тангаж, курс, крен; он непосредственно через исполнительные органы (рулевые машинки) воздействует на рули ЗУР. При отклонении рулей происходит изменение углов атаки, крена и скольжения, что приводит к смещению направления и величины суммарной управляющей силы, вектор скорости ракеты поворачивается, чем обеспечивается искривление траектории полёта и встреча ракеты с целью при допустимом промахе. Подрыв боевой части осуществляется или по команде с ПУ или с помощью взрывателя, вырабатывающего команду на борту ЗУР.

Функциональная схема системы наведения представлена на рис. 6.21.

6.3.2. КОНКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ ПСО И ТАКТИЧЕСКОЙ ПРО

Далее приведём основные положения, связанные с созданием первой системы ПСО Москвы. В конце 40-х годов руководством страны была поставлена задача незамедлительно приступить к созданию ПВО Москвы, рассчитанной на отражение массированного налёта авиации противника с любых направлений. Для этого было создано при Совете Министров СССР Третье главное управление. Новый главк при Совмине имел право привлекать к выполнению работ любые организации любых министерств и ведомств. При этом главке планировалось создать мощную научно-конструкторскую организацию — головную по всей проблеме, и эта организация получила наименование «Конструкторское бюро №1» (в сентябре 1947 г. было создано Специальное бюро №1 (п/я 1323), в августе 1950 г. оно было переименовано в КБ-1, в 1966 г. КБ-1 преобразовано в Московское КБ «Стрела» Минрадиопрома, в 1971 г. образовано Центральное КБ «Алмаз», в 1992 г. сформировалось научно-производственное КБ «Алмаз», с 1996 г. — ОАО «ЦКБ «Алмаз»). Эта организация определила структуру ПСО Москвы, состав её средств и предложения по разработкам этих средств.

«Беркут» — такое условное название получил первый зенитно-ракетный комплекс, который в последующем был наименован как «С-25». День рождения — 9 августа 1950 года. Тогда было образовано Третье главное управление (ТГУ) при СМ СССР, выступившее заказчиком создаваемого ЗРК. Для этого в ТГУ создавалась своя собственная военная приёмка, свой зенитно-ракетный полигон в районе Капустина Яра, а по мере создания объектов — и войсковые формирования для их боевой эксплуатации.

Далее кратко рассмотрим конкретные ЗРК и в первую очередь ЗРК «С-25», разработанные в нашей стране. Необходимо обратить внимание на тот факт, что **задача создания ЗРК в истории военной техники ставилась и решалась впервые**, поэтому проблемы, подлежащие решению, не имели прямых аналогов в прошлом.

Основными проблемами были:

- создание зенитной управляемой ракеты;
- создание системы наведения ракеты на цель;
- разработка и производство наземной пусковой установки;
- разработка радиотехнических систем и др.

Для испытаний ЗРК необходимо было иметь полигон с соответствующим оборудованием, вычислительной техникой и др.

Было принято концептуальное положение — система «Беркут» должна обеспечивать возможность одновременного обстрела до 20 целей на каждом 10–15 километровом участке обороны. Определился облик системы ПВО Москвы: РЛС кругового обзора для дальнего обнаружения подлетающих целей (А-100), обеспечивавшие целеуказание для огневых средств системы и два кольца РЛС наведения (Б-200) с ЗУР В-300. Управление осуществлялось центральным и четырьмя секторными командными пунктами (КП).

Для реализации ПВО Москвы на двух кольцевых рубежах (50–70 км и 100–120 км от Москвы) размещались 66 многоканальных ЗРК [141].

Возможности ЗРК: каждый из них мог стрелять 20 ракетами по 20 целям. Цели (самолёты) засекались РЛС обнаружения. Ракеты имели дальность полёта 25 километров и могли сбивать самолёты на высотах до 18 км.

Реализацией планов создания «Беркута» занимались крупные специалисты и выдающиеся организаторы, а также предприятия [52, 85]:

- радиотехническая лаборатория чл.-корр. АН СССР А.Л. Минца, в которой под руководством Н.И. Оганова для РЛС наведения ракет разрабатывались мощные передающие устройства;

- НИИ-244 (рук. Л.В. Леонов), которому было поручено создание РЛС кругового обзора для раннего обнаружения подлетающих к московской зоне целей;
- ОКБ-301 — известное самолётное КБ С.А. Лавочкина, в котором разрабатывались зенитные управляемые ракеты (группа П.Д. Грушина);
- предприятия, на которых А.М. Исаеву было поручено создание двигателя ЗУР, а В.П. Бармину — стартового оборудования.

За главным конструктором системы ПСО «С-25» А.А. Расплетиным, главным конструктором ЗУР В-300 С. Лавочкиным, начальником испытательного полигона в Капьяре, генералом С.Ф. Ниловским и главным инженером этого полигона Я. Трегубом, главным конструктором автопилота ЗУР В-300 П. Кирилловым, главным конструктором наземной пусковой установки В. Барминым, заместителями начальника Третьего главного управления В. Калмыковым и С. Ветошкиным стояли многотысячные коллективы учёных, инженеров и рабочих.

Бывший командующий войсками ПРО и ПКО, генерал-полковник в отставке Ю.В. Вотинцев следующим образом отразил факт создания «С-25»: «За пять лет вокруг Москвы были сооружены два кольца бетонированных дорог на расстоянии 50 и 100 км от центра города общей протяжённостью до 2000 км, развёрнуты две зоны дальнего радиолокационного обнаружения на удалении 25–30 и 200–250 км от Москвы на станциях А-100, 56 зенитных ракетных полков со стационарными в железобетонных укрытиях станциями наведения ракет (СНР) Б-200, построены стартовые позиции и специальные технические базы для содержания ракет.

Создание в начале 50-х годов системы «С-25», способной одновременно уничтожить до 1000 самолётов противника, с пуском по каждому их них до трёх ракет, являлось поистине научно-техническим подвигом» [85].

Разработка системы ПСО «С-25» была начата 9 августа 1950 года (в этот день было создано уже упоминавшееся главное управление при Совете Министров СССР, выступившее заказчиком этой системы), а 7 мая 1955 г. *эта система была принята на вооружение Советской Армии и представляла собой непроницаемую ракетную стену, защищающую Москву от налёта любого количества самолётов с любого направления. Система «С-25» прослужила более 30 лет.* На базе системы «С-25» была развёрнута отдельная армия особого назначения (1-ая отдельная армия), в командование которой вступил К.П. Казаков. Её офицерские кадры комплектовались в основном выпускниками военных академий, Бауманского высшего технического училища, Авиационного института, других технических вузов. В армию ПВО входили 4 корпуса ПВО, в каждом из которых было 14 полков (полк обеспечивал обстрел до 20 целей).

Главным конструктором двигателей ЗУРов был А.М. Исаев (А.М. Исаев — Герой Социалистического Труда (1956 г.), лауреат Государственных (1948 г., 1986 гг.) и Ленинской (1958 г.) премий; под руководством А.М. Исаева была создана серия двигателей, установленных на космических кораблях «Восток», «Восход», «Союз» и автоматических межпланетных станциях). Проблемами радиотракта занимался отдел, руководимый Г.В. Кисунько.

Учёные, специалисты, инженерно-технические работники за трудовой подвиг, результатом которого стало создание ЗРК ПВО Москвы, были награждены: А.А. Расплетин, С.И. Ветошкин (заместители начальника ТГУ В. Калмыков и С. Ветошкин осуществляли общее руководство), А.М. Исаев, Г.В. Кисунько, А.Л. Минц, А.Н. Щукин стали Героями Социалистического Труда (С.А. Лавочкин — дважды Герой Социалистического Труда). Начальник ТГУ В.М. Рябиков, его заместители В.Д. Калмыков, П.Н. Кулешов, начальник полигона С.Ф. Ниловский, главный инженер полигона Я.И. Трегуб и др. были удостоены ордена Ленина.

Разработка системы «С-25» стала школой подготовки целой плеяды учёных, конструкторов, инженеров, квалифицированных рабочих, перепрофилирования заводов.

В некоторых публикациях указывается на важную роль немецких специалистов в создании ракетной техники СССР. Выводы, что это не соответствует действительности, можно сделать в первую очередь из книг Б.Е. Чертока. В. Комаров, директор музея ЦНИИмаш, почетный член Академии космонавтики РФ, имевший возможность изучить соответствующие материалы, делает вывод: *«За время работы у нас немецкие специалисты в силу невысокого уровня квалификации большинства из них не создали ни одного образца ракетной техники.... Развитие советской ракетной техники в послевоенный период пошло самостоятельным путем».*

Приведем и высказывание Б.Е. Чертока: *«Когда я знакомился с техникой «С-25», а затем и ее модификаций, невольно вспоминались проекты военного времени: создать непроницаемую для авиации ракетную оборону Германии с помощью ракет «Вассерфаль». Чтобы от деревянного, обтянутого кожей щита дойти до идей Вассерфалья человечеству потребовалось две тысячи лет. А чтобы от нереальной еще в 1945 году идеи «Вассерфалья» дойти до «С-25» — настоящего ракетного щита огромного города — ушло 10 лет» [141].*

Главный конструктор С-25 ЗУР В-300 — С.А. Лавочкин. Он участвовал в создании ракет для «С-25» и «С-75». Средства раннего обнаружения воздушных целей были созданы под руководством Л.В. Леонова.

Главный конструктор системы «С-25» Александр Андреевич Расплетин родился 25 августа 1908 года в Рыбинске.

В августе 1950 года Расплетин переведен в КБ-1 и назначен заместителем главного конструктора зенитной ракетной системы «Беркут». С 1953 года он главный конструктор системы С-25. В 1954 году назначен главным инженером КБ-1, в 1955 году — начальником ОКБ-31 и главным конструктором КБ-1. В декабре 1960 года назначен техническим руководителем КБ-1.

Герой Социалистического Труда (1956 год), лауреат Ленинской (1958 год) и Сталинской (1951 год) премий, доктор технических наук. В 1964 году избран действительным членом Академии наук СССР. Александр Расплетин скончался 5 марта 1967 года [85].

Главный конструктор по ракете системы «С-25» Семен Алексеевич Лавочкин родился 11 сентября 1900 года в Смоленске.

8 августа 1945 года Семен Лавочкин назначен главным конструктором и директором завода №301 в Химках. Здесь под его руководством создаются реактивные истребители. 17 августа 1950 года ему поручена разработка зенитной управляемой ракеты Г-300 для самолетов-перехватчиков ТУ-4, в 1954 году — разработка стратегической крылатой ракеты «Буря» и зенитного ракетного комплекса «Даль». В 1954 году генерал-майор инженерно-авиационной службы Лавочкин назначен генеральным конструктором, в 1958 году избран членом-корреспондентом АН СССР. В 1956 году за создание ракеты В-300 удостоен звания дважды Героя Социалистического Труда. Лауреат Сталинских премий (1941, 1943, 1946, 1948 годы) Семен Лавочкин скончался в 1960 году [85].

В 1953 году был поставлен вопрос о модификации многоканального ЗРК «С-25» в одноканальный под автомобильный вариант. Основная концепция была сформулирована так [52]:

«Перевозимый зенитно-ракетный комплекс, в отличие от стационарного «С-25», должен был решать задачу поражения одной цели, налетающей с любого направления. Каким он должен быть? Решение было однозначным — *перевозимый комплекс следует строить, как и «С-25», на основе радиолокатора с линейным сканированием пространства. При этом сохранялись обеспечиваемые таким радиолокатором вы-*

сокая точность наведения ракеты на цель и дополнительные возможности по обстрелу цели в сложных условиях, в том числе плотной групповой цели. В то же время такое построение комплекса было наиболее простым. Для безусловного поражения цели должна предусматриваться возможность её обстрела по крайней мере двумя ракетами».

Были созданы СЗК «С-75» и «С-125». Разработку ракет для систем «С-75», «С-125» и многих последующих систем ПВО, а затем и систем противоракетной обороны осуществляло ОКБ главного конструктора Петра Грушина (главный конструктор систем — академик А.А. Расплетин, главный конструктор по ракете — академик П.Д. Грушин).

Разработчик ЗРК «С-25» К.С. Альперович пишет: *«Прорыв, совершённый в ходе работ над «С-25» в науке, технике и технологии, промышленности, созданные квалифицированные коллективы разработчиков, эффективная кооперация промышленности, прекрасно оснащённый испытательный полигон, специальные ракетные войска стали фундаментом для развития зенитно-ракетного оружия»* [4].

Идеи, положенные в основу «С-25», получили своё развитие в созданных в короткие сроки перевозимых зенитных ракетных системах «С-75» и «С-125». «С-75» и «С-125» хорошо зарекомендовали себя во Вьетнаме и на Ближнем Востоке.

В 1958–1966 гг. под руководством академика А.А. Расплетина была разработана зенитная ракетная система другого типа — «С-200» дальнего действия с полуактивным самонаведением на цели зенитными ракетами.

Высокие потенциальные возможности «С-25» по совершенствованию её характеристик позволили провести в ходе её эксплуатации ряд модернизаций радиолокатора наведения и ввести новые модификации зенитных управляемых ракет. При этом тактико-технические характеристики системы существенно расширились.

Незадолго до своей скоропостижной кончины А.А. Расплетин выступил с инициативой и начал работать над унифицированной многоканальной системой нового поколения — С-300. Успехи микроэлектроники, вычислительной техники, развитие антенных фазированных решёток позволили в этой системе, осуществлённой под руководством преемника Расплетина Генерального конструктора академика Б.В. Бункина (Генеральный конструктор ракеты — академик П.Д. Грушин), решить задачи, аналогичные стоявшим перед создателями «С-25», на качественно новом техническом уровне и с характеристиками, обеспечивающими поражение самых разнообразных средств воздушного нападения на всех высотах, в том числе предельно малых [4]. Итак, путь от «С-25» к «С-300» во многом определился благодаря созданию ЗРК «С-25».

Создание эффективных средств противовоздушной обороны и расширение их возможностей привело к поиску **новых средств преодоления ПВО**. Одним из наиболее существенных шагов в этом направлении стало *размещение на бомбардировщиках крылатых ракет большой дальности*. Стоящие на вооружении к 60-м годам отечественные ЗРК не были приспособлены для решения возникших задач, так как использование крылатых ракет многократно увеличивало количество подлежащих уничтожению целей, приводя к перегрузке системы ПВО. Кроме этого, *крылатые ракеты могли осуществлять прорыв противовоздушной обороны на предельно малых высотах, не доступных для поражения с помощью существовавших средств ПВО*. Стратегические бомбардировщики также были оснащены средствами, позволявшими им действовать на предельно малых высотах. В связи с этим перед зенитно-ракетными комплексами следующего поколения ставилась задача обеспечения возможности одновременного перехвата нескольких целей в широком диапазоне высот.

Для войск ПВО страны разработана зенитно-ракетная система (ЗРС) С-300П. В 1980 году многоканальная зенитная система С-300П с зенитной ракетой 5В55 прошла испытания и была принята на вооружение. Первые системы развертывались в системе ПВО Московского региона взамен устаревших ЗРК «С-25».

В конце 80-х годов стало ясно, что для защиты объектов территориальной ПВО от оперативно-тактических баллистических ракет требуется мобильная универсальная ЗРС. После этого начались работы по созданию такой системы, получившей название «С-300ПМУ»; затем — работы по созданию «С-300ПМУ1» (Генеральный конструктор систем — академик Б.В. Бункин, Главный конструктор по ракете — П.Д. Грушин).

Генеральный конструктор Борис Васильевич Бункин родился в 1922 г. В сентябре 1953 года назначен начальником тематической лаборатории КБ-1, где занимался разработкой комплекса С-75. В 1958 году за создание комплекса С-75 удостоен звания Героя Социалистического Труда. В 1961 году, после назначения Расплетина техническим руководителем КБ-1, Бункин становится его преемником на посту начальника ОКБ-31. В это время идут модернизации системы С-75, разворачивается крупносерийное производство системы С-125. С 21 мая 1998 года Бункин является научным руководителем ОАО «ЦКБ «Алмаз».

В 1974 году Борис Бункин избран действительным членом АН СССР. В 1982 году удостоен звания дважды Героя Социалистического Труда. В 1970 году ему присуждена Государственная премия, в 1980 году Ленинская премия, в 1997 — Государственная премия России [85].

Главный конструктор Петр Дмитриевич Грушин родился 15 января 1906 года в городе Вольске. С начала 1953 года работает в КБ-1.

В 1958 году за создание ракеты В-750 комплекса «Двина» Грушин был удостоен звания Героя Социалистического Труда. В 1959 году назначен генеральным конструктором — ответственным руководителем ОКБ-2 ГКАТ. В 1963 году за создание ракеты В-600П комплекса «Нева» ему присуждена Ленинская премия. В июне 1966 года избран действительным членом АН СССР.

В дальнейшем под руководством Грушина разработаны ракеты комплексов Войск ПВО страны «Ангара», «Вега», «Дубна», С-300П, комплексов Сухопутных войск «Оса», «Тор», комплексов ВМФ «Волхов», «Волна», «Шторм», «Оса-М», «Клинок», «Форт», их модификации, а также противоракеты экспериментального комплекса «А» и комплексов Войск РКО А-35 и А-135. В 1981 году за создание ракеты комплекса С-300П удостоен звания дважды Героя Социалистического Труда. С 1991 года работал советником МКБ «Факел». Петр Грушин скончался 29 ноября 1993 года [85].

В настоящее время противовоздушная оборона России носит так называемый объектово-зональный характер. Ныне имеющиеся в наличии зенитные системы «С-300ПМУ1» и «С-300ПМУ2» защищают только важнейшие государственные, военные и промышленные объекты. Создается новейшая система С-400 «Триумф». «Триумф» в автоматическом режиме сможет уничтожать воздушные цели над морской поверхностью, сбивать самолеты, крылатые ракеты, которые летят с огибанием рельефа местности, в том числе над лесом или в горах, а также баллистические ракеты определенных классов. (Генеральный конструктор системы — академик А.А. Леманский, Генеральный конструктор по ракете — академик В.Г. Светлов) [85].

Генеральный конструктор Александр Алексеевич Леманский родился в 1935 году в Москве. После окончания в 1958 году факультета радиотехники и кибернетики Московского физико-технического института был направлен в ЦКБ «Алмаз». Работал техником, инженером, старшим инженером, начальником груп-

пы, отдела, научно-исследовательского отделения, заместителем главного конструктора, заместителем начальника ОКБ. С 1986 года — начальник ОКБ-31, главный конструктор ЦКБ «Алмаз», первый заместитель генерального конструктора. С мая 1998 года — генеральный конструктор ОАО «ЦКБ «Алмаз».

За участие в комплексе работ по созданию фазированных антенных решеток для вооружения ПВО в 1978 году удостоен звания лауреата Государственной премии СССР [85].

Генеральный конструктор по ракете Владимир Григорьевич Светлов родился в 1935 году в Москве. После окончания в 1958 году факультета ракетной техники МВТУ имени Н.Э. Баумана был направлен в ОКБ-2. Принимал участие в создании всех ракет МКБ «Факел».

25 сентября 1991 года назначен генеральным конструктором — руководителем МКБ «Факел». За участие в создании ракеты для системы С-300П в 1980 году удостоен звания лауреата Государственной премии СССР. За участие в разработке ракеты для системы А-135 в 1997 году удостоен звания лауреата Государственной премии РФ [85].

ЗРС большой и средней дальности «Триумф» является единой системой ПВО и нестратегической ПРО для Военно-Воздушных сил, Военно-Морского Флота, Сухопутных войск.

Зенитно-ракетная система «С-300В» «Антей» (Генеральный конструктор В.П. Ефремов) создавалась как фронтовое средство ПВО поражения баллистических ракет наземного и воздушного базирования, крылатых ракет, самолётов стратегической и тактической авиации, барражирующих постановщиков помех, боевых вертолётов в условиях массированного применения средств воздушного нападения, в сложной воздушной обстановке при ведении прикрываемыми войсками активных боевых действий. С появлением зенитной ракетной системы С-300В возможности системы ПВО значительно возрастают и обеспечивают прикрытие целых районов ПВО. За разработку «С-300В» лауреатами Ленинской и Государственной премий стали В.П. Ефремов, В.Н. Щебеко, В.А. Смирнов, Д.И. Прокофьев, В.Н. Елифанов, Г.И. Чекин, В.А. Винокуров и др.

В середине 90-х годов была разработана модернизированная система «С-300В» («Антей-2500»). «Антей-2500» относится к новому поколению систем; она предназначена для обороны важных государственных, военных и промышленных объектов, группировок войск от ударов БР с дальностями пуска до 2500 км, а также для уничтожения тактических БР и оперативно-тактических БР средней дальности и аэродинамических целей на удалении до 200 км (ракета управляется на всем участке траектории полета), включая интенсивно маневрирующие цели.

Таблица 6.2

Сравнительные характеристики противоракетных систем

Основные характеристики	ЗРС		
	С-300В	«Антей-2500»	«Патриот-ПАК-3»
Дальность поражаемых целей, км: аэродинамических баллистических	100 до 40	200 до 40	150 до 40
Высота поражаемых целей, км: аэродинамических баллистических	0,025–30 до 25	0,025–30 до 30	до 5 до 20
Максимальная скорость поражения БР, м/с	3000	4500	3000
Максимальная дальность старта поражаемых БР, км	1100	2500	1000

Возможность борьбы с высокоскоростными баллистическими целями с малой отражающей поверхностью достигнута за счет повышения характеристик радио-

локационных и информационных средств и оптимизации способов обработки радиолокационных сигналов.

Создание ЗРС «С-300В» и «Антей-2500» явилось значительным отечественным научно-техническим достижением, опережающим зарубежные замыслы и использующим современные результаты, полученные в области теории автоматического управления, радиолокационных информационных систем и ракетостроения.

Для интересующегося читателя приведем сравнительные характеристики тактических противоракетных систем в табл. 6.2.

6.4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПРО — КОМПЛЕКС АВТОМАТИЧЕСКИ ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ [17, 35, 52, 55, 70, 85, 86, 141]

В настоящем параграфе авторы поставили перед собой цель показать изучающим теорию автоматического управления концептуальные положения, масштабы научных, конструкторских и технологических проблем, степень сложности элементов, которые имели место при создании одной из сложнейших автоматических систем 20-го столетия — экспериментальной системы противоракетной обороны (система «А»).

Как указано генеральным директором ЦНПО «Вымпел», профессором Н.В. Михайловым, «ракетно-космическая оборона включает в себя автоматически функционирующие информационные системы предупреждения о ракетном нападении (СПРН) и контроля космического пространства (СККП), а также поражающие автоматические системы противоракетной (ПРО) и противокосмической (ПКО) обороны...» и представляет собой сложнейший автоматический комплекс [86]. Рассмотрению вопросов, связанных как с созданием системы «А», так и изучением ее как автоматической системы, посвящен настоящий параграф. С содержанием проблем, недостаточно глубоко рассмотренных здесь, детально можно познакомиться в [35, 52, 55, 85, 86].

Генеральный конструктор экспериментальной системы ПРО (система «А») пишет: «... первопроходцы ПРО хорошо понимали, что создание и успешные испытания системы «А» — это всего лишь первый шаг, хотя и основополагающий, на пути к решению наисложнейшей военно-технической проблемы 20-го столетия».

Приведем высказывание зам министра обороны РФ, генерал-полковника А.М. Московских [86]: «Оглядываясь на путь, пройденный многотысячными коллективами организаций разработчиков, предприятий промышленности, военных строителей, военных ученых и испытателей, даже мы, участники этих событий, поражаемся масштабам решения военно-стратегических, научно-технических и технологических задач, смелостью первопроходцев, достигнутыми результатами. Благодаря их неустанной деятельности получили развитие не имеющие аналогов вычислительная, лазерная, оптическая и инфракрасная техника, информатика, программирование и обработка информации, конструкционные материалы и пороха скоростного горения, техника связи, а также другие направления науки и техники... В результате титанической работы этих коллективов и была решена главная геополитическая задача второй половины XX века — задача обеспечения стратегической стабильности на планете».

Перейдем к изложению основных положений рассматриваемой проблемы.

На рис. 6.22 представлен вид траектории МБР.

Условия входа боеголовки в атмосферу, в частности скорость и угол входа, определяют перегрузки и тепловой режим головки. Для получения приемлемых значений

угла и скорости входа может быть применена коррекция траектории перед входом в атмосферу.

Температурные напряжения могут снижаться также уменьшением времени движения головки в атмосфере.

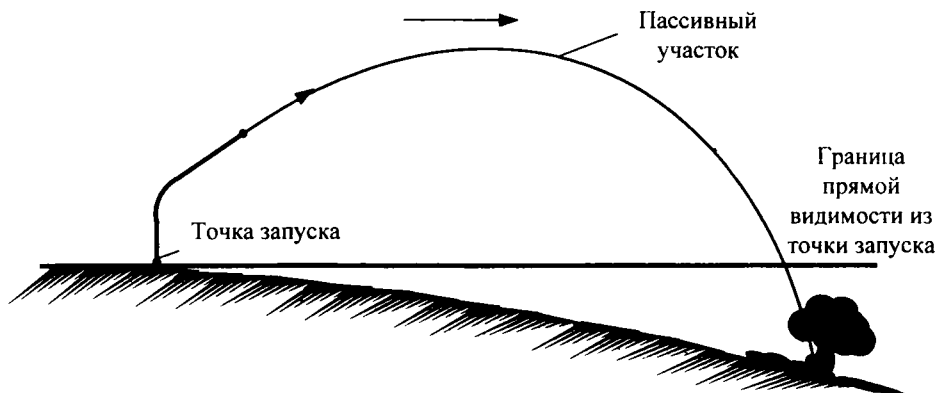


Рис. 6.22. График траектории баллистической ракеты

Маневр на траектории с целью затруднить противнику ПРО осуществляется с помощью аэродинамических сил. Примерный вид траектории в атмосфере показан на рис. 6.23.

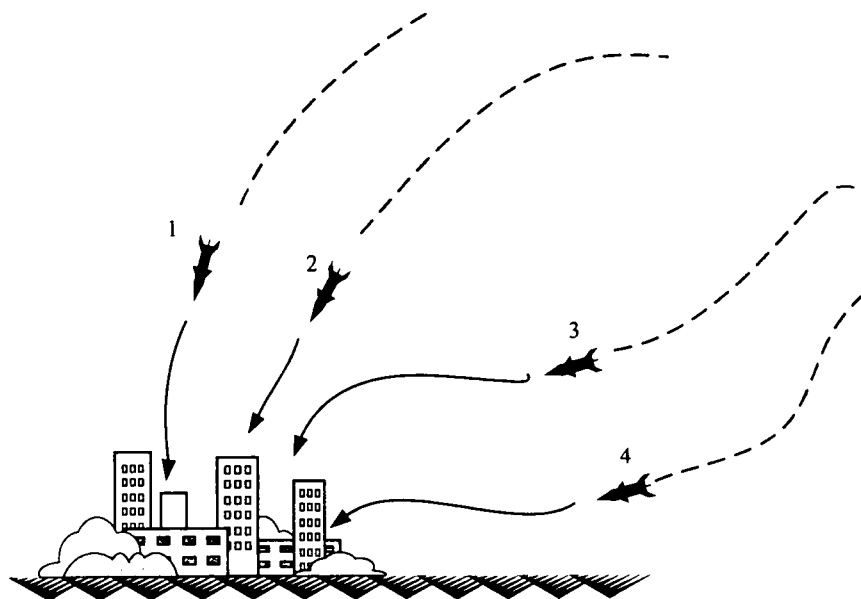


Рис. 6.23. Траектории движения различных носовых конусов баллистических ракет на атмосферном участке:

- 1 — носовой конус, летящий по отвесной траектории; время полета в атмосфере до цели 8–15 с;
- 2 — маневрирующий носовой конус; время полета 20–30 с;
- 3 — носовой конус с силовой установкой, обеспечивающей большое ускорение на конечном участке движения; время полета 5–10 с;
- 4 — планирующий носовой конус; время полета 2–3 мин

Как видно, планирующий конус, движущийся по траектории с наименьшими перегрузками и температурными напряжениями, проходит путь до цели за наибольшее время. Это облегчает его обнаружение и перехват средствами ПВО. Те траектории, которые реализуются за меньшее время, не обладают преимуществами планирующей траектории. Маневрирование же на траектории усложняет систему наведения и управления.

С точки зрения противоракетной обороны, основными особенностями ракеты, возвращающейся в плотные слои атмосферы, являются [17]:

- высокая средняя скорость полета, что обуславливает краткость времени предупреждения о нападении;
- гладкая поверхность и небольшие размеры ракеты, что обуславливает трудность ее обнаружения;
- весьма высокая прочность ракеты, что серьезно затрудняет её уничтожение.

Система противоракетной обороны должна учитывать возможность применения эффективных мер радиопротиводействия, а также возможность программных изменений в траектории атакующей ракеты на заключительном участке ее траектории. Кроме того, высокая скорость ракеты сокращает время, которым располагает система обороны. Радиопомехи и программные изменения в траектории ракеты затрудняют наблюдение за ракетой и определение точки перехвата.

Анализ траектории баллистической ракеты позволяет сделать вывод, что точка перехвата принципиально может располагаться на одном из 4-х участков траектории: на взлете, в космосе на участке разведения боеголовок, на заатмосферном участке и в атмосфере непосредственно над охраняемым объектом.

В связи со сказанным возможен вариант построения четырехшелонной системы ПРО (табл. 6.3) [17].

Баллистические ракеты — грозное современное оружие: они управляемы, имеют дальность действия до 16000 км и более, полет ракеты совершается преимущественно в разреженной атмосфере со скоростью 6,8-7,9 км/с на высоте 1300–1400 км; головная часть ракеты имеет сравнительно малую поверхность и может появиться с любого направления. Поэтому перехват такой цели — чрезвычайно трудная задача.

Из табл. 6.3 следует, что четырехрубежная ПРО США предполагает вывод на околоземную орбиту боевых спутников, снабженных мощными лазерными пушками, а также спутники раннего обнаружения и спутники связи. Смысл этой сложнейшей системы сводится к тому, чтобы осуществить перехват ракет на одном из четырех участков траектории: на взлете, в космосе, на заатмосферном участке или в атмосфере над обороняемым объектом [17]. Чем раньше будет обнаружен факт ракетного нападения, тем успешнее осуществляется перехват.

Условная функциональная схема системы ПРО представлена на рис. 6.24.

РЛС опознавания целей служат для выделения (селекции) целей, подлежащих обстрелу, из числа всех обнаруженных.

Работа средств опознавания (распознавания) целей функционально тесно увязана с работой средств предупреждения. В условиях радиоэлектронного противодействия противника их работу бывает даже трудно разграничить.

Задача оценки возможностей создания средств ПРО на базе современной техники радиолокации и достижений в области ЗУР решалась в КБ-1 с начала 1954 года. Работы велись в системно-теоретической лаборатории, возглавляемой профессором Н.А. Лившицем, консультантом был В.С. Пугачев, крупный специалист в области ТАУ. В сводном отчете по проблеме ПРО, выпущенном в августе 1954 года системно-теоретической лабораторией, конфигурация реальной системы ПРО еще не вырисовывалась, поскольку не было четких представлений о требуемой эффективности системы [35].

Таблица 6.3

Вариант гипотетической эшелонированной системы ПРО США

Эшелоны	Компоненты	Принцип действия	Примечание
<i>Первый эшелон</i> — перехват МБР на участке разгона и в период разведения боеголовок (БГ)	Высокоэнергетические лазеры: эксимерные и на свободных электронах — наземного базирования с направлением излучений на цель с помощью зеркал, расположенных в космосе. Спутники системы раннего предупреждения	Обеспечивается перехват МБР с помощью лазерного оружия наземного базирования, лучи которого направляются на цель с помощью зеркал. С помощью инфракрасных (ИК) и ультрафиолетовых (УФ) лазерных локаторов определяются данные о цели и характер ее поражения	Необходима весьма надежная система управления боевыми средствами. Оценка поражения целей необходима для первого и последующих эшелонов ПРО
<i>Второй эшелон</i> — перехват на среднем участке траектории полета МБР	Кроме указанных выше компонентов должны также использоваться: УФ лазерный локатор; высокоэффективная система управления боевыми действиями; оружие кинетической энергии; мощные источники энергии	УФ лазерный локатор используется для получения изображения целей, которые сравниваются с эталонами БГ и ложных целей (ЛЦ) противника. Выделенные цели атакуются кинетическим оружием космического базирования. Совместно с третьим и четвертым эшелонами обеспечивает перехват всех БГ	Для своевременного выделения истинных целей и дальнейшего их сопровождения лазерный локатор должен иметь разрешающую способность не менее 1 м, а система наведения кинетического оружия иметь точность с отклонением 1 м
<i>Третий эшелон</i> — перехват на среднем участке траектории боеголовок. Наличие дополнительного эшелона для выделения БГ на фоне ЛЦ и их перехвата вне атмосферы	Антиракеты для перехвата БГ вне атмосферы на дальностях в несколько сот километров; ИК датчики космического базирования	Дополнительно к средствам первого и второго эшелонов используются ИК датчики, выводимые ракетами на большие высоты в сторону атакующих объектов; перехватчики большой дальности; обеспечение защиты некоторых районов	ИК датчики используются для выделения БГ на фоне ЛЦ; необходимы данные о характерных признаках БГ и ЛЦ
<i>Четвертый эшелон</i> — перехват на конечном участке траектории МБР; оборона особо важных объектов с использованием противоракет ближнего перехвата	Спутники предупреждения; наземные РЛС; оптические датчики наземного базирования; система управления боевыми действиями; скоростные противоракеты для действий в атмосфере	Предупреждение об атаке обеспечивается спутниками на высоких орбитах; выделение БГ среди ЛЦ в результате фильтрации в атмосфере; наземные РЛС обнаруживают БГ; оценка результатов перехвата; наведение противоракет	Необходимо большое количество относительно недорогих антиракет с ИК или радиолокационным наведением; головная часть противоракеты в обычном или ядерном оснащении

Для создания системы ПРО в 1955 году в составе КБ-1 было создано СКБ-30, которое возглавил 36-летний доктор технических наук Г.В. Кисунько.

Конечно, то, что ведение разработок по тематике ПРО было возложено на КБ-1, объясняется тем фактом, что разработка ЗРК «С-25», «С-75», «С-125» и др. позволила воспитать плеяду молодых, талантливых инженеров, имеющих огромный опыт в разработках в области ПВО.

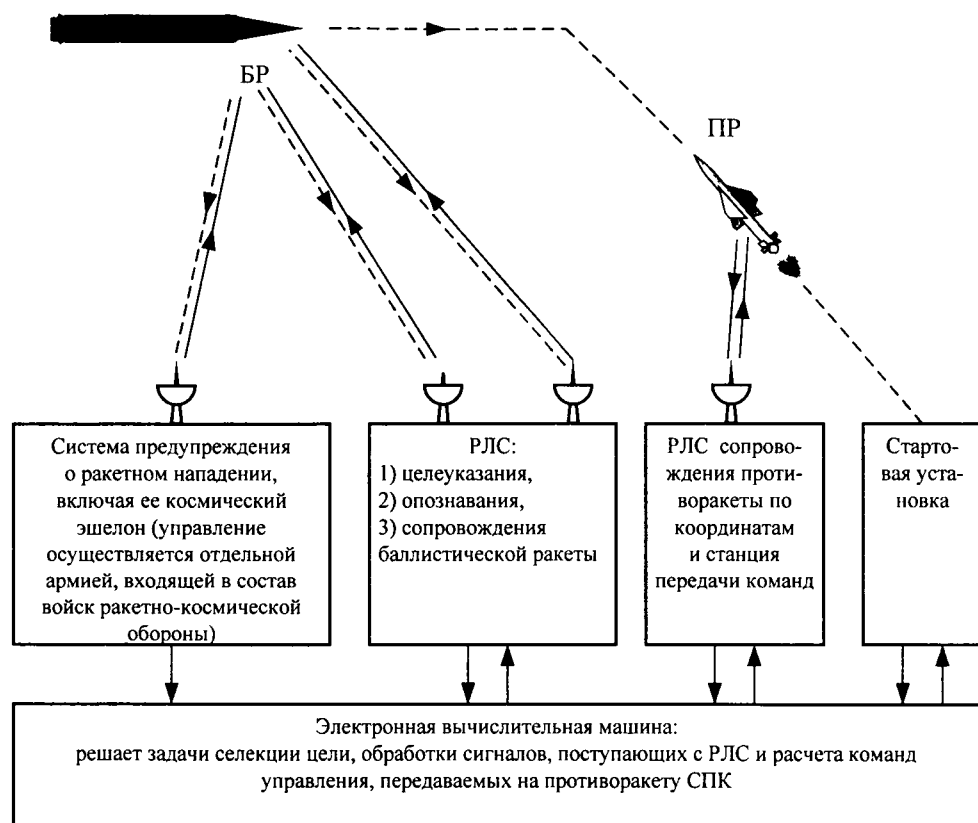


Рис. 6.24. Упрощенная функциональная схема системы ПРО

Процесс создания системы ПРО в СССР можно условно разбить на несколько этапов. На первой стадии, или первом этапе, необходимо было получить ответ на основной вопрос: *возможно ли создание боееспособной системы ПРО и подтверждение факта такой возможности разработкой экспериментального комплекса ПРО с целью его проверки в полигонных условиях*. В [86] приведено высказывание бывшего помощника министра обороны СССР И.В. Илларионова по поводу возможности создания системы ПРО: «Главный конструктор А.А. Расплетин завершал работы по созданию системы ПВО, и его кандидатура на должность главного конструктора ПРО была рассмотрена в первую очередь. Расплетин заявил, что ... считает задачу неосуществимой ... что уже советовался по этому вопросу с М.В. Келдышем и С.П. Королевым. Келдыш выразил большие сомнения в достижении необходимой надежности системы, а Королев был полностью уверен в том, что любая система ПРО может быть легко преодолена баллистическими ракетами». *Целью второго этапа являлось создание системы ПРО Москвы*. Содержание третьего этапа заключалось в создании системы ПРО Москвы, обладающей соответствующими возможностями (о них будет сказано ниже).

Постановление Совмина, связанное с системой ПРО, вышло 17 августа 1956 г.: экспериментальному комплексу был присвоен шифр система «А», по которому были подготовлены предложения на полигонный экспериментальный образец. Основные проблемы создания системы ПРО обусловлены многими факторами, приведем лишь некоторые из них. Если истребители середины 50-х годов развивали скорость

(300–400) м/с, то первые баллистические ракеты имели скорость до 3000 м/с, а позже — до 7000 м/с. *Проблема обеспечения встречи ЗУР с объектом, летящим со скоростью ≈ 400 м/с, и проблема обеспечения встречи с объектом, имеющим скорость более 7000 м/с, — проблемы принципиально разной степени сложности.*

Противоракета (перехватчик) должна использовать газодинамические органы управления, поскольку обеспечение встречи противоракеты с целью происходит в заатмосферной зоне. Такие свойства противоракеты, как высокоманевренность, возможность развивать высокую скорость (договором ПРО-72 скорость противоракеты не должна превышать 3000 м/с) в системах ПРО обязательны.

Функционирование современных ПРО, использующих военные спутники, достаточно просто нарушается (на параметры, характеризующие степень их работоспособности, оказывают влияние взрывы ядерных зарядов, что является обязательным атрибутом в ядерной войне).

При создании советской ПРО (конечно, без использования спутников) на полигоне Сары-Шаган проводились соответствующие эксперименты. Как указано в [52], «В экспериментах с подрывом ядерных зарядов участвовали специально привлеченные технические средства, сосредоточенные вдоль трассы полета баллистических ракет (БР запускались с полигона Капустин Яр и поражались над полигоном Сары-Шаган, Балхаш), здесь же работали ионосферные станции, производились запуски метеозондов и геофизических ракет. На всех радиоэлектронных средствах фиксировались нарушения их работы, вызванные ядерными взрывами».

Уже первый анализ показал, что система ПРО, о которой шла речь, представляет собой гигантский по степени сложности элементов, по масштабам их взаимодействия, по степени насыщенности при их создании самыми современными достижениями в большом числе научных направлений (радиолокация, физика, теория автоматического управления, теория передачи информации, ракетостроение и др.) технический комплекс, в создании которого должны принять участие сотни тысяч ученых, инженерно-технических работников и рабочих, а также сотни предприятий.

К середине 1956 г. исследования в области ПРО были проведены во многих направлениях, были начаты экспериментальные работы по ряду важнейших задач, получены предварительные результаты. В июле 1956 года военные строители приступили к созданию нового полигона в Казахстане в пустыне Бетпак-дала. На берегу озера Балхаш был создан научно-технический центр полигона и командный пункт экспериментальной системы ПРО [52, 86].

Определилась конфигурация (структура) системы «А»; в ее состав входили [52, 86]:

- РЛС дальнего обнаружения баллистических ракет (БР);
- три радиолокатора точного наведения (РТН) противоракеты на цель, каждый из которых состоял из радиолокатора определения координат цели и координат противоракеты (ПР);
- РЛС вывода (визирования) ПР (РСВПР) и станции передачи команд (СПК) на ПР;
- стартовая позиция (СП), на которой размещались пусковые установки (ПУ) и технические позиции ПР;
- главный командно-вычислительный пункт системы (ГКВП) и центральная вычислительная станция (ЦВС).

К созданию экспериментальной системы ПРО были привлечены крупнейшие ученые страны, задачами которых было:

- Г.В. Кисунько (Генеральный конструктор системы «А»): радиолокатор точного наведения (РТН);

- С.А. Лебедев (главный конструктор): центральная вычислительная станция;
- В.П. Сосульников (главный конструктор): РЛС дальнего обнаружения;
- П.Д. Грушин (главный конструктор): ракета-перехватчик (противоракета);
- И.И. Иванов (главный конструктор): пусковая установка противоракеты;
- С.П. Рабинович (главный конструктор): РЛС визирования ракет-перехватчиков и станция передачи команд;
- Ф.П. Липсман (главный конструктор): система передачи данных;
- П.М. Кириллов (главный конструктор): автопилот;
- И.Д. Омельченко (главный конструктор): бортовая радиоаппаратура, в состав которой входят блок визирования и блок наведения;
- К.И. Козорезов (главный конструктор): боевая часть противоракеты.

Далее приведем высказывания выдающихся конструкторов и ученых, которые играли ключевую роль в коллективе создателей системы «А», и читатель получит представление о проблемах исследования, проектирования, реализации и испытаний экспериментальной системы «А» [55].

С.И. Шамаев, труды которого посвящены решению сложнейшей проблемы селекции целей, говорит [55]:

«В проблеме ПРО, первым этапом решения которой было создание системы «А», были сформулированы наиболее трудные задачи этой проблемы:

- *создание средств РЛ обнаружения целей с очень малой отражающей поверхностью;*
- *создание сверхбыстродействующих средств обработки информации ввиду высоких скоростей движения целей, на порядок превышающих скорости самолетов;*
- *разработка методов, алгоритмов и средств селекции головных частей (ГЧ) на фоне ложных целей».*

Вот как формулирует положение дел в самом начале работ по созданию системы «А» академик Российской академии космонавтики, генерал-лейтенант в отставке Г.С. Легасов [55]:

«Только Григорий Васильевич Кисунько к этому времени уже имел предварительные, пока еще чисто умозрительные математические проработки. Они показывали, что в принципе проблема может быть решена.

Очевидные для всех трудности в создании средств ПРО заключались в следующем:

1. *Баллистическая цель, несущая ядерный заряд, должна быть уничтожена на значительном расстоянии от обороняемого города.*
2. *Баллистические цели — ядерные боеголовки БР, обладают высокой прочностью, поэтому противоракета должна наводиться на цель с высокой точностью.*
3. *Система ПРО должна быть всепогодной. Поэтому ее средства наблюдения за баллистической целью должны базироваться на радиолокации.*
4. *Малые размеры боеголовки БР делают ее труднонаблюдаемой для радиолокатора на требуемых дальностях обнаружения в сотни километров.*
5. *Наконец, весь процесс стрельбы чрезвычайно скоротечен, баланс располагаемого времени крайне мал, а потому к противоракете предъявляются непомерно высокие требования по скорости полета и маневренности (опять же для сверхточного попадания в цель)».*

Из предыдущего изложения следует, что планы создания системы «А» предусматривали проведение работ, связанных с исследованием, проектированием, реализацией и испытаниями ее основных элементов.

Результаты создания элементов системы «А» состоят в следующем:

1. Радиолокационные средства [86]

Одним из основных элементов системы «А» являются радиолокаторы дальнего обнаружения (РЛС ДО) баллистических ракет и других радиолокационных средств (РТН, РСВПР, СПК). Проблема формулировалась как **проблема создания радиолокационных средств**, решением которой руководили В.П. Сосульников, С.П. Рабинович и Г.В. Кисунько (его ближайшими помощниками были Б.М. Шаулов и И.И. Захаров).

Требуемая большая дальность действия системы ПРО по малоразмерной цели должна достигаться за счет большой мощности излучения радиолокатора, выбора оптимальной рабочей длины волны, высокой чувствительности приемных устройств и достаточно больших размеров антенных устройств.

Радиолокатор ПРО должен быть крупногабаритным и энергоемким [86].

В состав системы «А» входили три радиолокатора точного наведения противоракеты на цель, радиолокаторы дальнего обнаружения баллистических ракет, радиолокационная станция визирования ПРО (РСВПР) и станция передачи команд (СПК) управления ПРО и подрыва ее боевой части [86]. Усилиями соответствующих организаций планировалось создание радиолокаторов и станций, обладающих необходимыми возможностями.

Эскизный проект РЛС дальнего обнаружения «Дунай-2» предлагал РЛС непрерывного излучения с линейной частотной модуляцией (ЛЧМ). ЛЧМ предлагалось использовать не только для измерения дальности и разрешения по дальности, но и для обзора заданного сектора по азимуту. Техническое задание на РЛС дальнего обнаружения «Дунай-2» требовало:

- дальность обнаружения головных частей баллистических ракет типа Р-5 — 1500 км в секторе наблюдения, охватывающем всю траекторию движения цели;
- точность выдачи координат — 1 км по дальности и $0,5^\circ$ по углам.

Уже в августе 1958 года РЛС «Дунай-2» вышла в эфир, и впервые в Советском Союзе было осуществлено дальнее обнаружение баллистической ракеты Р-5 и ее головной части на расстоянии больше 1000 км, а 6 ноября 1958 года состоялась первая проводка ГЧ БР типа Р-5 в режиме автосопровождения с измерением координат.

Передающая и приемная антенны РЛС находились на расстоянии один километр друг от друга. Станция обладала максимальной дальностью обнаружения 1200 км и точностью 1 км по дальности. Антенна передающей части имела размеры (150×8) м, антенна приемной части — (150×25) метров.

В технологическом здании приемной части размещались комплекс аппаратуры обнаружения, захвата и автоматического сопровождения целей, а также пункт управления [86].

Радиолокаторы РТН-1, РТН-2 и РТН-3 предназначались для точного определения координат БР и для осуществления точного наведения ПРО на цель [86]. В составе каждого РТНа были большая антенна РС-10 диаметром 15 м (предназначалась для работы по баллистической цели), малая антенна РС-11 диаметром 4,6 метра (обеспечивала работу с ПРО), два передатчика и один приемник [86]. Радиолокаторы РТН предназначались для работы по одиночной баллистической цели.

Радиолокационная станция визирования ПРО (РСВПР) и станция передачи команд (СПК) должны были обеспечить автоматический захват стартовавшей ПРО на начальном участке ее полета во всем диапазоне возможных отклонений от номинальной траектории и автоматическое сопровождение по углам и дальности во всей верхней полусфере, передавать на борт команды управления, формируемые СПК, работать в боевом цикле автоматически [86]. Для совместной работы с РСВПР и СПК на борту ПРО были установлены приемоответчик и станция приема команд.

2. Центральная вычислительная станция [55, 86]

По известным причинам (скоротечность процесса перехвата БР, высокие требования к точности наведения ПР на цель, невозможность вмешательства человека в процесс наведения) при создании системы «А» важным было требование *полной автоматизации процесса перехвата на базе обладающей соответствующим быстродействием вычислительной машины*. Такая электронная вычислительная машина (ЭВМ М-40) была создана Институтом точной механики и вычислительной техники АН СССР, возглавляемым академиком С.А. Лебедевым. В состав ЦВС входили ЭВМ М-40 и М-50. Производительность М-40 составляла 40 тысяч операций в секунду, объем ОЗУ — 4 тысячи слов, объем внешней памяти — 150 тысяч слов. ЭВМ М-50 предназначалась для обработки записанной в ходе боевой работы цифровой и аналоговой информации и являлась модификацией М-40.

Определяющую роль в решении этой задачи сыграл академик РАН В.С. Бурцев, один из крупнейших специалистов в области вычислительной техники. О научно-техническом значении проблемы ПРО в развитии вычислительной техники академик В.С. Бурцев говорит следующее [55]: «Создание экспериментального комплекса ПРО потребовало от вычислительных средств не только повышенного быстродействия, но и возможности работы в системе реального времени в комплексе вычислительных средств, разнесенных на большие расстояния (создание вычислительных сетей), построения мощных вычислительных комплексов обработки эксперимента, вычислительных комплексов крупных систем управления и информационных вычислительных центров, таких как центр контроля космического пространства и др. ...Опыт эксплуатации экспериментального комплекса показал, что его вычислительные средства можно рассматривать как «мозг» всей системы, малейшие отклонения от нормы их функционирования приводят к нарушению работы всего комплекса, что может вызвать опасные ситуации...»

В процессе создания вычислительных средств системы ПРО СССР занимал передовые позиции в мире в области развития архитектуры супер-ЭВМ и схемотехнических решений вычислительной техники, таких как:

- организация мультиплексных каналов связи;
- создание вычислительных систем, объединяющих далеко разнесенные объекты;
- создание высокоскоростных самовосстанавливающихся вычислительных комплексов сначала на базе машинных, а затем на базе функциональных модулей (центральных процессоров (ЦП), оперативной памяти (ОП), процессоров ввода-вывода (ПВВ), процессора приема-передачи данных (ППД));
- повышение производительности многопроцессорного комплекса за счет сложения производительности процессоров;
- организация работы комплекса на общем поле внешней памяти;
- обеспечение высокой достоверности выдаваемой информации и аппаратно-программной диагностики;
- обезличенная работа модулей центральных и специализированных процессоров и возможность адаптации комплекса к решаемым задачам за счет подключения специализированных процессоров;
- решение проблемы когерентности кэша с минимальными потерями.

Таким образом, именно система ПРО дала мощный толчок внедрения высокопроизводительных вычислительных средств в народное хозяйство. Именно под эту систему впервые были созданы коллективы разработчиков и конструкторских бюро по созданию высокопроизводительных комплексов в Москве, Загорске, Пензе и других городах СССР. Именно эти коллективы, имея опыт создания вычислительных средств ПРО, успешно справились с созданием в кратчайшие сроки вычислительных средств для системы С-300 генерального конструктора, академика Б.В. Бункина.

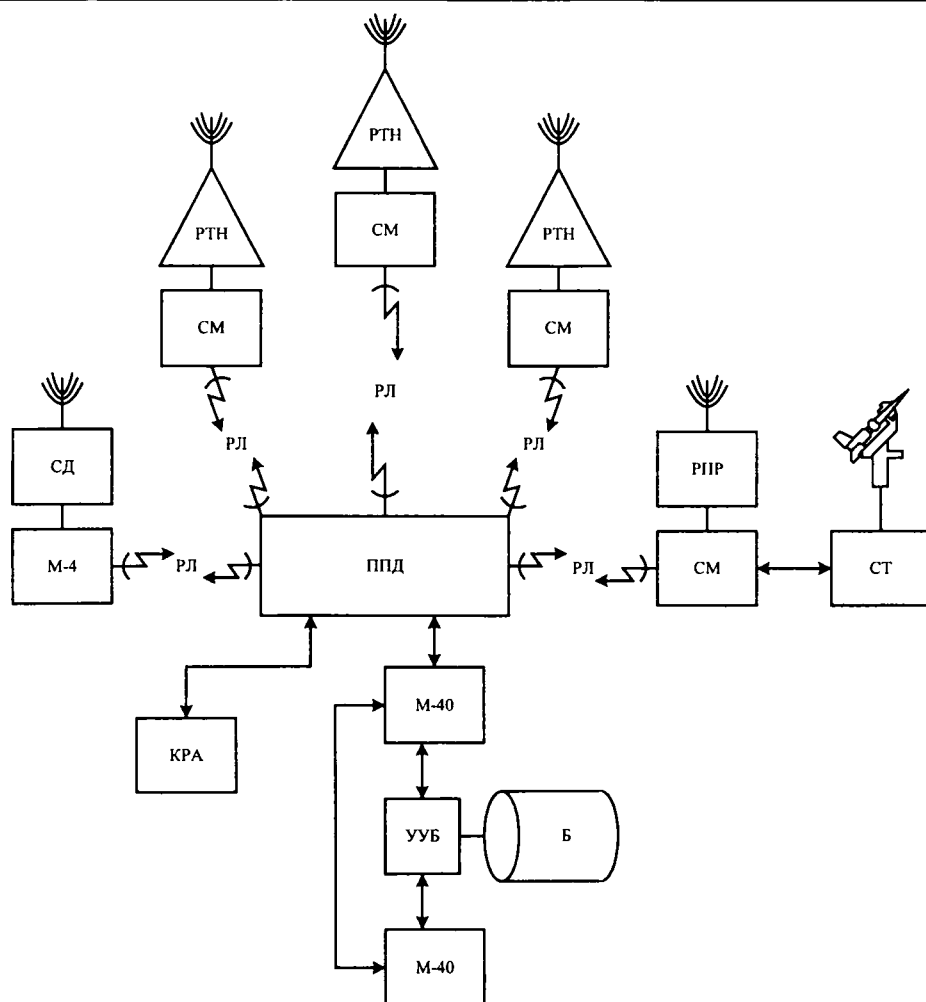


Рис. 6.25. Вычислительная сеть экспериментальной системы ПРО:

РТН — радиолокаторы точного наведения, СМ — специальные вычислительные машины, СД — РЛС дальнего обнаружения, М-4 — электронная вычислительная машина, РПР — радиолокатор противоракеты (передача сигналов управления на противоракету), СТ — стартовая установка противоракет, ППД — процессор приема и передачи данных, М-40 и М-50 — универсальные электронные вычислительные машины, Б — запоминающее устройство на магнитном барабане, УУБ — устройство управления барабаном, КРА — контрольно-регистрающая аппаратура, РЛ — радиорелейные линии

Системы вооружения, создаваемые на базе вычислительных средств, были конкурентоспособны зарубежным аналогам. Был период, когда мы в области ПРО опередили Америку более чем на 10 лет.

Поэтому, отвечая на вопрос о значении необходимости работ по ПРО, я считаю, что значение этого направления работ в создании передовой технологии по многим ведущим направлениям науки и техники громадно.»

3. Противоракета В-1000

Противоракета В-1000 создавалась в ОКБ-2, выделенного из КБ-1; руководитель — академик П.Д. Грушин.

Вот что сказано о ПР В-1000 в [86]: «Это была двухступенчатая ракета с мощным твердотопливным ускорителем и управляемой второй ступенью с ЖРД. Сред-

няя скорость ПР В-1000 достигала небывалой по тем временам величины, равной 1000 м/с, а ее высокая управляемость позволила осуществлять перехват целей на высотах до 25 км. ПР была оснащена осколочной боевой частью.»

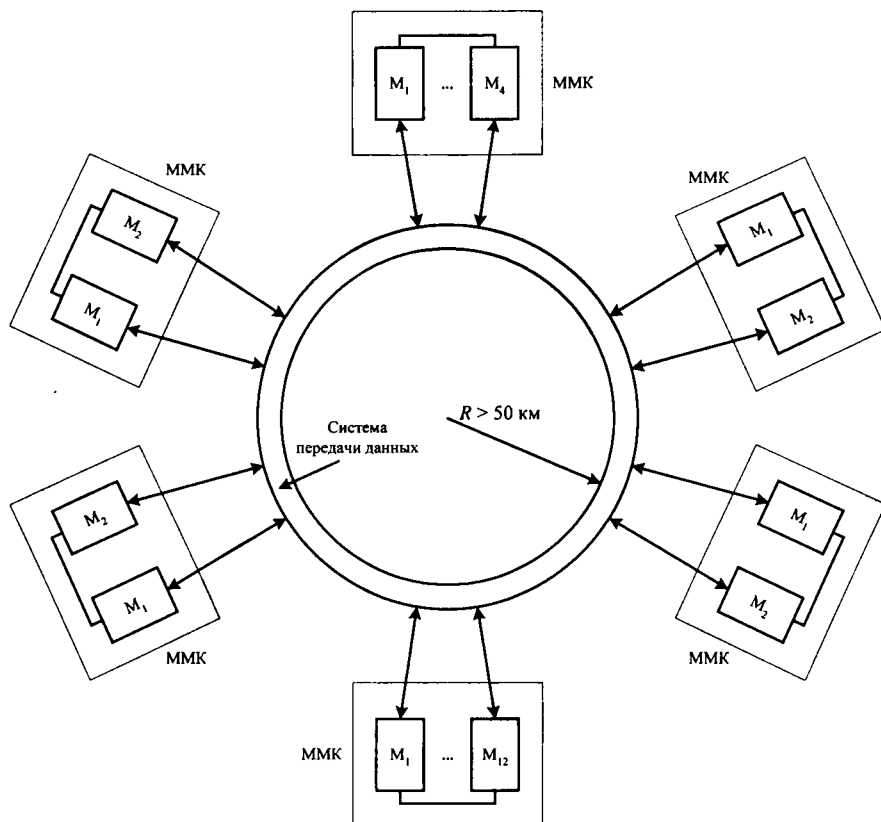


Рис. 6.26. Вычислительная сеть ПРО. ММК — многомашинный комплекс

4. Система передачи данных [86]

Поскольку средства экспериментальной системы «А» располагались на полигоне на значительном удалении друг от друга и было намечено размещение большого количества малых средств, действующих только сообща, то появилась проблема создания системы передачи данных (например, расстояние от РЛС до командного пункта (КП) и стрельбовых комплексов — несколько сот километров). Была выбрана *радиорелейная связь*. Требования к системе передачи данных (СПД) были очень жесткими. Например, из миллиарда импульсов можно «потерять» только один. Главный сигнал по системе «А» на подрыв боевой части необходимо было передать с точностью до трех тысячных долей секунды [86]. Каждая из станций радиорелейной связи имела мачту высотой от 50 до 80 метров. На мачте устанавливались рупорно-параболические антенны.

5. Система наведения [35, 86]

Одной из центральных при создании системы «А» была проблема проектирования системы наведения (системы автоматического управления ракетой).

Средства наведения ПР служат для непрерывного определения взаимного положения летящих ПР и цели, выработки и реализации с требуемой точностью команд наведения ПР на цель.

Наведение ПР на цель включает два взаимно обусловленных и увязанных процесса: управление траекторией перемещения центра масс (собственно наведение) и управление поворотами вокруг центра масс (ориентация). Средства наведения определяют ошибки в реальной траектории движения ПР относительно идеальной траектории и устраняют те из них, которые превосходят пределы, обеспечивающие требуемую точность наведения ПР.

В системе «А» необходимая высокая точность определения координат баллистической цели достигалась отказом от традиционного для радиолокации метода определения координат цели по двум измеряемым углам и дальности. Оказалось необходимым перейти к методу триангуляции цели по трем дальностям, измеренным тремя радиолокаторами, разнесенными на местности. Трудности триангуляции сверхскоростной цели в реальном масштабе времени преодолевались с помощью высокопроизводительных электронно-вычислительных машин, имеющих соответствующее сложное программно-алгоритмическое обеспечение. Радиолокаторы и ЭВМ были соединены между собой с помощью широкополосных линий связи.

Средства наведения ПР системы «А» включали следующие элементы:

- три радиолокатора точного наведения ПР на цель для непрерывного определения координат цели и координат ракеты;
- электронная вычислительная машина (ЭВМ) для расчета ошибок наведения и выработки по ним команд управления;
- станция передачи команд (СПК) управления ПР;
- приемник и преобразователь команд, принятых с СПК на борту ПР;
- автопилот и исполнительные органы на борту ПР, назначение которых — реализация команд наведения. Приемники и преобразователи команд наведения, как и исполнительные органы, были реализованы в виде автопилота, обеспечивающего требуемую ориентацию ПР в пространстве и непосредственное воздействие на органы ее управления, изменяющие траекторию полета в соответствии с командами наведения (автопилот включает датчики, преобразовательно-усилительные устройства и исполнительные устройства — рулевые машинки).

Подробно рассмотрим работу системы автоматического управления противоракетой. РЛС «Дунай-2» дальнего обнаружения БР при появлении баллистической цели в рабочей зоне захватывала ее на автоматическое сопровождение, определяла текущие координаты и передавала данные по линии радиорелейной связи для обработки на ЭВМ М-40; далее обработанные данные через специальные ЭВМ поступали на РТН-1, РТН-2 и РТН-3, которые размещались в вершинах правильного треугольника со сторонами около 150 км. Такое количество и размещение РТН было вызвано применением метода «трех дальностей» для определения координат цели и ПР.

Этот метод был предложен Г.В. Кисунько для достижения высокой точности определения координат цели и ПР при наведении последней на цель, что требовало повышения точности измерения дальностей и очень высокой точности привязки к местности всех РТН, участвовавших в процессе наведения ПР [86]. На основе данных РЛС «Дунай-2» и расчетов на ЭВМ с помощью РТН-1, РТН-2 и РТН-3 с высокой точностью определялись координаты баллистической ракеты [86]. В [86] алгоритм работы описан так: «Цифровые данные о положении баллистической цели, передаваемые по радиорелейной линии с ЭВМ М-40, поступали на вспомогательную следящую систему, а силовой следящий привод обрабатывал суммарный сигнал ошибки. Захват цели и противоракеты на сопровождение осуществлялся операторами вручную. После захвата дальнейшее сопровождение цели велось в автоматическом режиме при управлении от ЭВМ.»

Далее алгоритм работы системы «А» предполагает реализацию следующих операций:

А. С помощью ЭВМ М-40 (на основе данных от РТНов):

- уточняются параметры траектории цели;
- проверяется факт возможности попадания условной точки цели в зону обороны стартовой позиции;
- вычисляются параметры вывода ПР на цель;
- рассчитываются и выдаются на стартовую позицию углы разворота антенных устройств и пусковых установок;
- определяется момент пуска и в автоматическом режиме выдается команда на пуск ПР.

Б. Радиолокационная станция визирования ПР:

- с помощью малой антенны захватывала противоракету спустя несколько секунд после старта;
- «передавала» ее большой антенне сопровождения;
- осуществляла автоматическое сопровождение ПР, определяла ее текущие координаты и с высокой частотой передавала информацию о координатах В-1000 на центральную вычислительную станцию (ЦВС), созданную на базе ЭВМ М-40.

В. Центральная вычислительная станция:

- рассчитывала траекторию баллистической ракеты на основе непрерывно поступающей информации от РТНов;
- рассчитывала траекторию ПР на основе непрерывно поступающей информации о ее полете от РСВПР;
- вычисляла команды управления;
- посредством станции передачи команд, подавала команды управления на борт ПР для ее вывода в точку начала точного наведения на цель.

Г. Радиолокаторы точного наведения:

- на основе данных, полученных от М-40, РТНы захватывали ПР на автоматическое сопровождение;
- после вывода ПР на прогнозируемую траекторию полета БР начинался этап точного наведения ПР на цель по методу трех дальностей. С переходом на этап точного наведения возможность вмешательства оператора в ход боевого цикла исключалась, т.е. функционировала система автоматического управления противоракетой (этот этап длился 12–14 секунд).

Напомним, что РТНы осуществляли точное наведение ПР на баллистическую цель (антенна РС-11 предназначалась для работы с ПР). РТНы передавали данные измерений трех дальностей до цели и ПР на ЭВМ М-40, которая рассчитывала команды управления, передаваемые на борт ПР с помощью СПК.

В качестве метода наведения ПР было выбрано сближение ее с целью на строго встречном курсе. Это уменьшало требование к динамическим характеристикам ПР. Вывод ПР на траекторию метода наведения осуществляли по регулярной кривой, параметры которой определялись прогнозируемой траекторией цели [35, 86]. Как отмечено в [35], учитывая наличие в системе ЭВМ, было решено значительную часть операций в САУ перенести в алгоритмы наземной ЭВМ. В результате была спроектирована и реализована оригинальная система наведения, в которой многие задачи решались более просто и не менее точно, чем это делалось бы бортовой аппаратурой ПР. Это также повышало точность наведения ПР на цель.

Д. Автопилот

Рассказывает главный конструктор автопилота [86]:

«Для обеспечения перехвата головной части баллистической ракеты предстояло довести среднюю скорость ПР до максимально возможной в то время величины — 1000 м/с. При этом ПР должна была иметь хорошую управляемость на малой, средней и большой высоте, в том числе на огромной высоте перехвата 25 км...

Наш новый автопилот должен был соответствовать этому уровню... В ПР мы применили демпфирующие гироскопы, измеряющие угловые скорости движения по курсу, тангажу и крену, а также свободный гироскоп, измеряющий углы крена. Необходимо было обеспечить скорость вращения гироскопов 30–40 тысяч оборотов в секунду уже через 30 секунд после подачи напряжения на вход... *нам удалось впервые создать электронику автопилота только на полупроводниках с применением печатных плат...* В автопилот вошел рулевой привод для отклонения рулей ПР. Были созданы рулевые машины с использованием сжатого воздуха. Команды управления и стабилизации вокруг центра массы ПР отрабатывались рулевыми машинами и связанными с ними рулями...

Упрощенные функциональные схемы экспериментальной системы ПРО представлены на рис. 6.27 и 6.28.

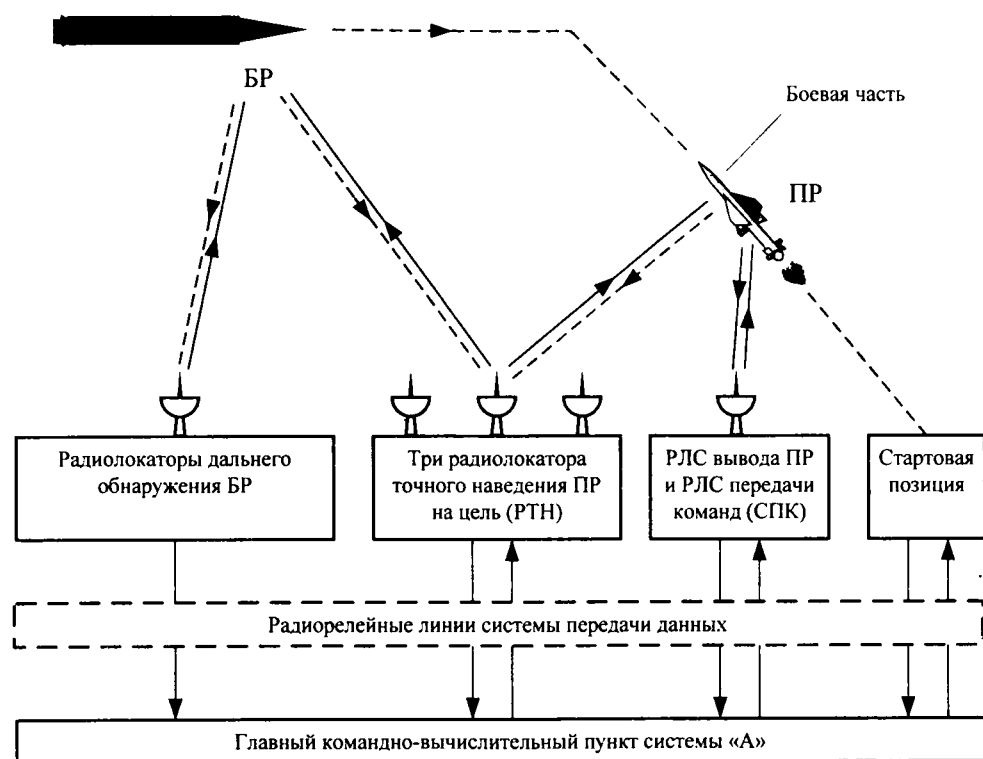


Рис. 6.27. Упрощенная функциональная схема экспериментальной системы ПРО (система «А»)

Средства экспериментальной системы «А» были размещены на площадках полигона Сары-Шаган и начались ее испытания [86].

Перед рассмотрением вопроса, связанного с испытаниями системы «А», целесообразно отразить роль ЭВМ.

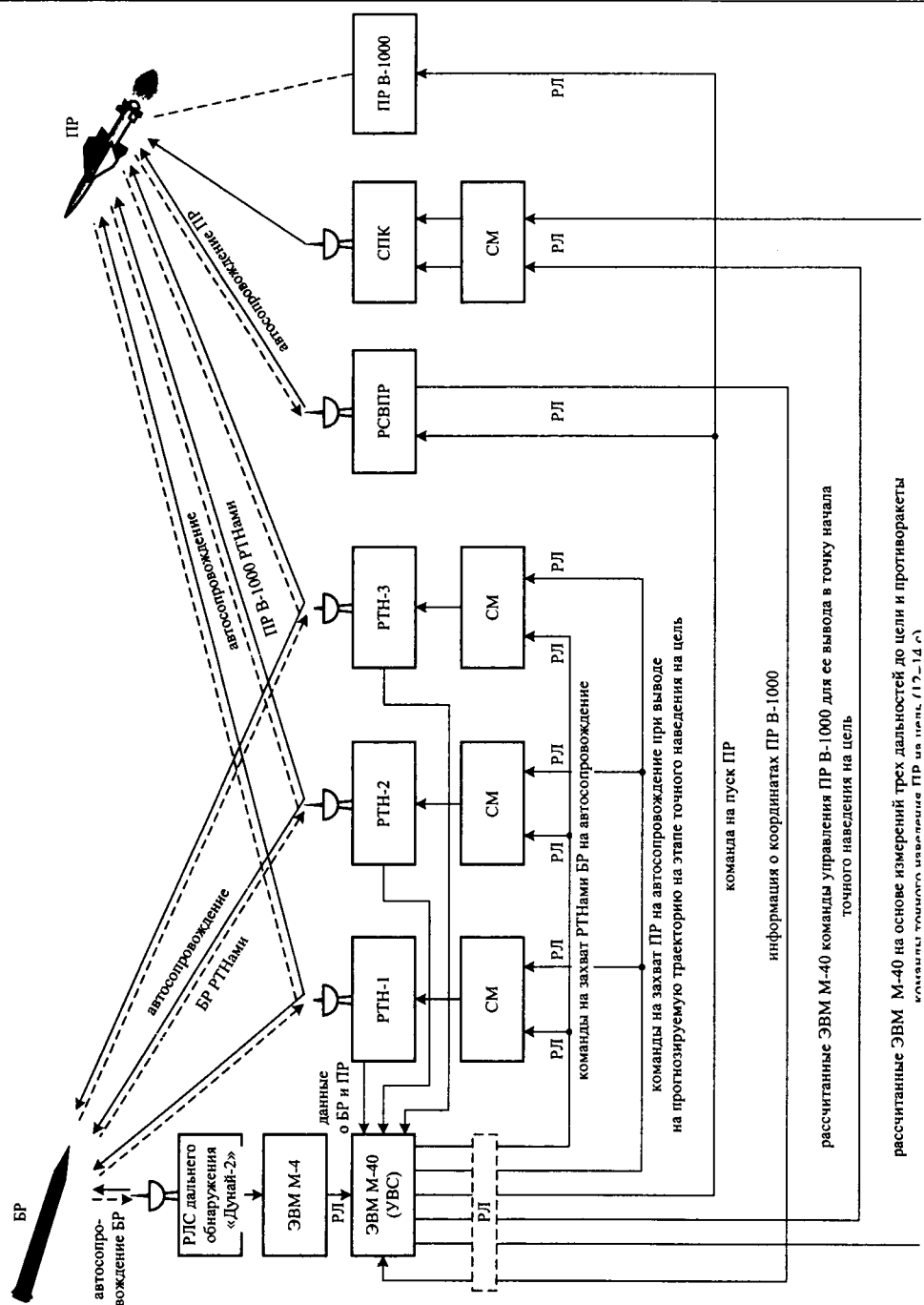


Рис. 6.28. Упрощенная функциональная схема системы «А»

Первым ключевым положением, определившим возможность применения ЭВМ для решения задачи расчета и проектирования сложных оборонных комплексов, в том числе и систем наведения, является тот факт, что *все элементы системы наведения (ПР, автопилот, кинематические звенья, РЛС и др.) описываются математи-*

ческими зависимостями, которые в результате многолетних исследований найдены и описывают реальные процессы с необходимой точностью. Указанные математические зависимости определяют математическую модель конкретной системы.

Второе ключевое положение можно сформулировать так: все математические зависимости (например, дифференциальные уравнения) могут быть исследованы на ЭВМ (практически любой степени сложности). Процесс исследования конкретных систем на ЭВМ называют моделированием.

Таким образом, сущность моделирования заключается в замене исходной системы (например, системы наведения, включающей РЛС, ПР, цель, автопилот и др.) другой системой, называемой моделью, которая исследуется на ЭВМ.

При создании экспериментального образца ПРО — системы «А» — также весьма широко использовалось математическое моделирование на ЭВМ. Модели, имеющие высокую степень адекватности по отношению к реальным процессам, были созданы не только на полигоне Сары-Шаган, но и в других структурах (например, в НИИ Министерства обороны), связанных с созданием системы «А». Моделирование проводилось как на аналоговых вычислительных машинах (широко использовалась АВМ «Электрон», которая позволяла проводить исследование сложных систем, описываемых нелинейными дифференциальными уравнениями высокого порядка), так и на ЦВМ (цифровых вычислительных машинах).

На полигоне Сары-Шаган для целей моделирования был создан аналого-цифровой моделирующий стенд [55]. Радиолокаторы вывода и наведения, СПК, радиолинии «земля–борт», противоракета с бортовой радиоаппаратурой и автопилотом реализовывались на аналоговой части стенда (на АВМ), а на цифровой части, представляющей цифровую ЭВМ М-40, были реализованы алгоритмы наведения.

Как указано в [55], такой стенд был создан впервые и позволил в сжатые сроки проверить правильность выбранных принципов построения системы наведения, уточнить параметры основных ее элементов, оценить точность наведения на «уловную цель».

Вот что пишет по поводу моделирования на ЭВМ академик РАН В.С. Бурцев [55]:

«Главным конструктором РЛС дальнего действия В.П. Сосульниковым впервые в мире была создана станция обзорного действия с селекцией сигнала в цифровом виде. Заставили лететь такую ракету-спринт (фактически снаряд), которую не могли заставить лететь в контуре управления на базе непрерывной техники.

Существенное развитие получили цифровые системы моделирования. Натурным испытаниям предшествовало исследование контуров управления с достоверными цифровыми моделями поведения ракет. Помню, как ежедневно по ночам все машинное время вычислительного комплекса использовалось для отработки системы управления всего комплекса. И действительно, через некоторое время ракета-спринт полетела.

Новое развитие получили комплексы обработки натурных испытаний. Каждый удачный или неудачный «пуск» мы имели возможность полностью повторить и исследовать поведение системы в любой момент времени как на боевом комплексе, так и на специальном вычислительном комплексе обработки экспресс-информации. На базе мощных вычислительных комплексов в ряде институтов развивались исследовательские центры моделирования различных ситуаций поведения систем военного назначения, а также комплексы контроля космоса и состояния самого земного шара на основании данных со спутников».

Этапы проведения испытаний [52]:

- 1957 год — начало автономных испытаний радиолокационных средств (включая натурные, т.е. по БР и головным частям);
- 1958 год — начало летных испытаний противоракеты ПР В-1000.

Первая комплексная работа системы «А» была осуществлена в ночь с 24 на 25 ноября 1960 года; все средства системы работали нормально, цель — головная часть баллистической ракеты Р-5 с грузовым макетом заряда — была перехвачена ракетой-перехватчиком В-1000 (она «прошла» в пределах радиуса поражения осколочно-фугасной боевой части) [52].

К 1961 году было подготовлено все необходимое для натуральных испытаний системы «А».

Головная часть баллистической ракеты средней дальности Р-12, запущенной с полигона Капустин Яр 4 марта 1961 года, летящая со скоростью 4 км/с, была уничтожена противоракетой В-1000, снаряженной осколочно-фугасной боевой частью, на высоте 25 км. В районе падения были найдены остатки боевого блока, разрушенного прямым попаданием. РЛС «Дунай-2» системы «А» обнаружила цель на дальности 975 км от пролонгированной точки ее падения на высоте свыше 450 км и захватила цель на автосопровождение. ЭВМ рассчитала параметры траектории Р-12, выдала ЦУ радиолокаторам точного наведения и пусковым установкам (рис. 6.29–6.32). Вывод противоракеты В-1000 на траекторию осуществлялся по регулярной кривой, параметры которой определялись прогнозируемой траекторией цели. Команды «Пуск» и «Подрыв» прошли в штатном режиме (команда «Подрыв» была дана на дальности 26,1 км от условной точки падения головной части БР) [55, 86]. Перехват произошел на дальности около 60 км от стартовой позиции, на промахе 32 метра. Скорость головной части БР Р-12 перед поражением была 2,5 км/с, а скорость ПР — 1 км/с [55, 86].

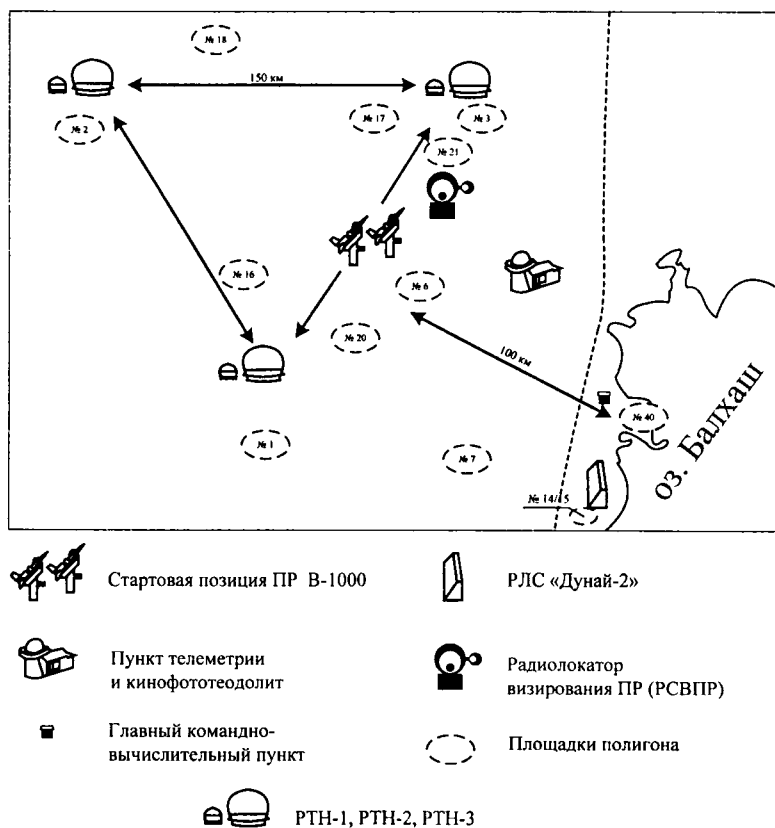


Рис. 6.29. Схема расположения экспериментальной системы «А» на полигоне Сары-Шаган [86]

Так 4 марта 1961 года средствами экспериментальной системы «А» был осуществлен первый в мире перехват головной части баллистической ракеты.

Насколько потрясающим было это достижение, подтверждает тот факт, что в США безъядерное поражение баллистической ракеты осуществили только 23 года спустя. Всего системой «А» за период испытаний было проведено 11 перехватов реальных целей (с уничтожением боеголовок БР), а также испытания ПР с тепловой головкой самонаведения (ТГС), с радиовзрывателем, с оптическим взрывателем. В 1961 году были проведены летные испытания ПР В-1000 с ядерной боевой частью.



Рис. 6.30. Пуск противоракеты В-1000 [86]

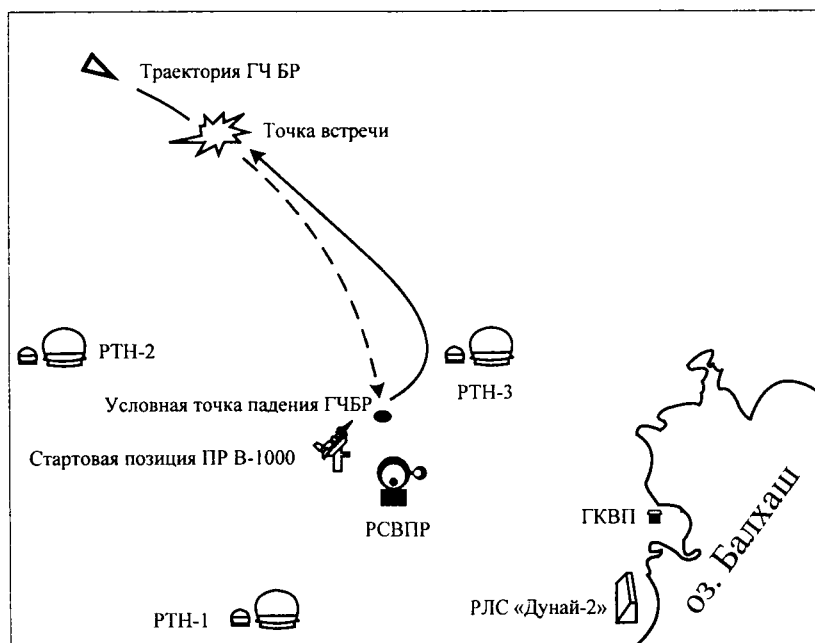


Рис. 6.31. Взаимодействие средств системы «А» на полигоне Сары-Шаган при перехвате 4 марта 1961 г. [86]

26 марта 1961 года ПР уничтожила боеголовку Р-5, а 9 июня 1961 года — боеголовку Р-12. Таким образом, созданная на полигоне система «А», генеральным конструктором которой был Г.В. Кисунько, экспериментально подтвердила принципиальную возможность осуществления перехвата баллистических целей; впервые в истории была показана возможность реализации встречи «снаряда со снарядом».

Вот что сообщалось в Интернет-сайте РСАУ по этому поводу спустя 40 лет: «Сорок лет назад, 4 марта 1961 года, в Советском Союзе впервые в мире противоракетой В-1000 экспериментального комплекса противоракетной обороны системы «А» были осуществлены перехват и поражение головной части ракеты Р-12. Это событие встало в один ряд с запуском первого спутника, полетом первого космонавта, стало свидетельством высочайшего уровня науки, техники, промышленности, военной инфраструктуры того времени».

Следующим этапом разработки систем ПРО является этап создания ПРО Москвы. Система получила условное название: система А-35. В 1975 году перед системой А-35 была поставлена задача перехвата многоэлементной сложной цели, содержащей наряду с боевыми блоками легкие и тяжелые ложные цели [86]. Генеральным конструктором был назначен Г.В. Кисунько.

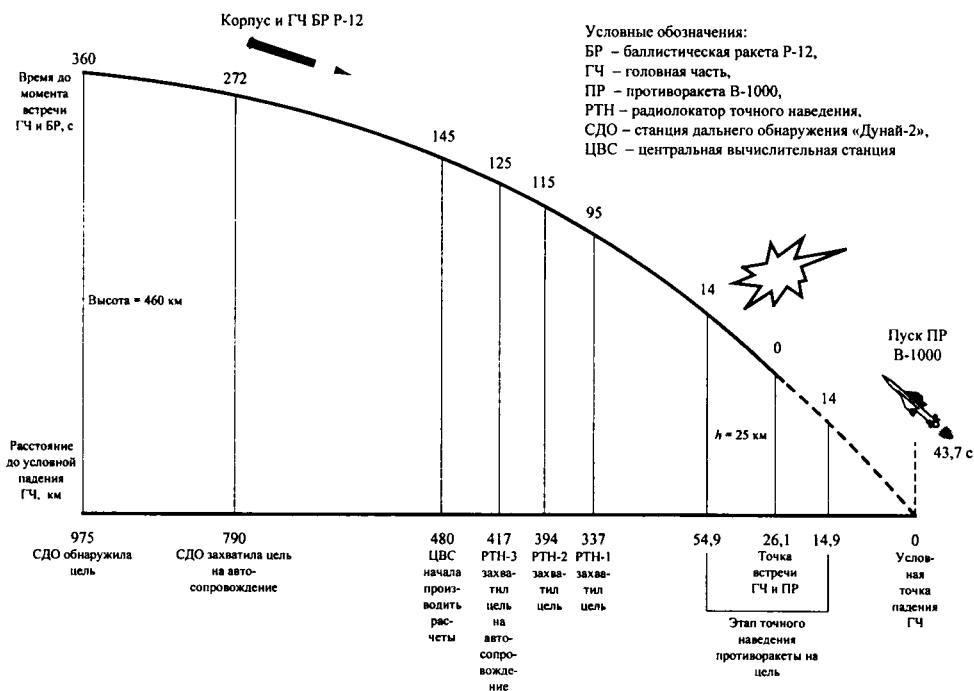


Рис. 6.32. Схема уничтожения средствами системы «А» головной части баллистической ракеты Р-12 4 марта 1961 года [86]

После завершения работ по модернизации системы А-35, которыми руководил главный конструктор И.Д. Омельченко, система получила название А-35М.

В мае 1977 года на государственные испытания была предъявлена система А-35М. Тщательная подготовка позволила провести испытания в течение месяца и получить положительные результаты: она была способна с определенными ограничениями поражать сложные баллистические цели.

Государственные испытания были проведены с 15 августа по 21 октября 1977 года. 10 ноября 1977 года система поставлена на опытное дежурство. Система ПРО А-35М была принята на вооружение и поставлена на боевое дежурство в состоянии пониженной боевой готовности (1978 г.).

Система А-35М опережала другие системы вооружения войск ПРО и ПКО. Ее боевой алгоритм, реализованный в программах более пятидесяти мощных ЭВМ различных объектов, впервые обеспечивал полностью автоматизированное централизованное боевое управление. В декабре 1990 года система А-35М была снята с вооружения. Несмотря на недостатки, первая боевая система ПРО была наивысшим достижением научно-технической мысли лучших ученых, инженеров, конструкторов своего времени. По утверждению многих специалистов, степень ее автоматизации была высочайшей в мире и сопоставима лишь с уровнем автоматизации американского лунного проекта «Сатурн-Апполон». Система А-35М и «Сатурн-Апполон» были наиболее совершенными сложными автоматизированными системами XX века.

Последним этапом разработки систем ПРО является создание системы второго поколения ПРО Москвы. С мая 1968 года в Научно-техническом центре под руководством А.Г. Басистова была начата разработка новой концепции системы ПРО Москвы, основным положением которой стало признание невозможности создания непроницаемой ПРО. В соответствии с новой концепцией перед системой ПРО ставилась задача отражения *одиночного или ограниченного удара* (ограниченной группы БР). Основными принципами, заложенными в новую систему, стали ориентация на отражение одиночного или ограниченного удара по Москве и *двухэшелонное построение обороны: 1-й эшелон перехвата — дальний (заатмосферный) и 2-й эшелон — ближний (атмосферный)*.

Создание второго уровня (эшелона) обороны, на котором перехват целей должен был осуществляться в пределах атмосферы, позволяло решить задачу селекции ложных целей.

Система ПРО, получившая индекс А-135, включала [35, 86]:

- командно-вычислительный пункт (КВП) (А.Г. Басистов руководил разработкой системы в целом и КВП с вычислительным комплексом «Эльбрус»);
- противоракету А-925 первого эшелона перехвата (проблему создания противоракеты решал Петр Грушин; после смерти Грушина работу продолжил генеральный конструктор Владимир Светлов);
- противоракету второго эшелона — высокоскоростной атмосферный перехватчик ПРС-1 (задача создания перехватчика решалась под руководством генерального конструктора Льва Люльева);
- четырехгранный многофункциональный радиолокатор «Дон-2Н», обеспечивающий обнаружение, сопровождение и наведение ПР на цель (созданием «Дон-2Н» занимался в Радиотехническом институте им. академика А.Л. Минца главный конструктор В.К. Слока);
- радиотехнический узел с двумя секторами РЛС дальнего обнаружения «Дунай-34»;
- ядерный боевой заряд противоракеты, работы по созданию которого координировал Ю. Харитон в Арзамасе-16;
- пусковые установки, которые разработаны под руководством В. Бармина.

Генеральным конструктором был назначен А.Г. Басистов.

Система ПРО вокруг Москвы двухэшелонная, состоящая из усовершенствованных противоракет дальнего действия шахтного базирования; радиолокационных систем наведения, управления огнем и ведения боя, включая новую большую РЛС с ФАР, ориентированную в четырех направлениях — к северу от Москвы (рис. 6.33).

«Пирамида» ориентирована на четыре стороны света, с антеннами, которые являются главными элементами системы. Именно она предназначена для обнаружения и перехвата боевых частей, их сопровождения и наведения на них противоракет. Ее обслуживает высокопроизводительная (до миллиарда операций в секунду) ЭВМ [35, 86].

В систему ПРО А-135 включены и дежурные средства предупреждения о ракетном нападении (СПРН). Это РЛС с фазированными антенными решетками (ФАР) по окраинам бывшего СССР, а также искусственные спутники Земли (радиотехнической, оптической, электронной разведки, связи и информации).

Вместе с командным пунктом и быстродействующими, высокопроизводительными автоматическими системами управления они и составят полный комплекс противоракетной обороны.

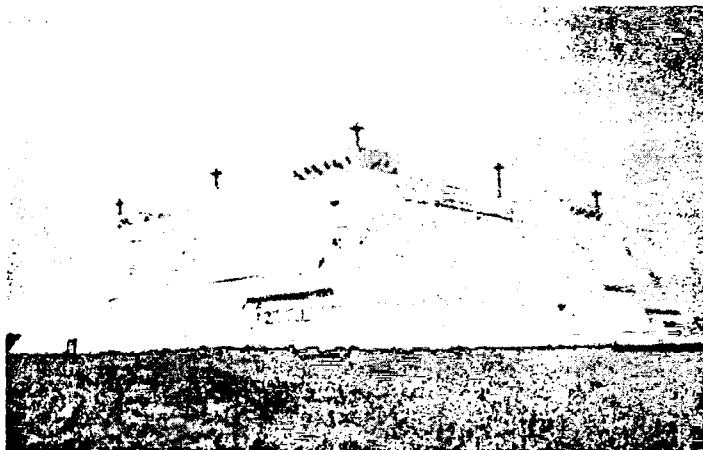


Рис. 6.33. МРЛС «Дон-2Н»

Вот что сказал о системе А-135 генеральный конструктор А.Г. Басистов в интервью корреспонденту «Известий» [86]: *«Система А-135 соответствует договору по ПРО, заключенному между СССР и США в 1972 году, и гарантированно защищает столицу от группы баллистических ракет и их ядерных боевых блоков, которые могут лететь в ее сторону...»*

Ни одного атомного взрыва в опасной близости к Москве система не допустит; она сделана так, чтобы в автоматическом режиме, даже без участия человека, обнаруживать летящие боеголовки, отфильтровывать их от «мусора» — ложных целей или комбинированных средств преодоления ПРО и безошибочно уничтожать на траектории, не допустив детонации заряда...»

По мнению компетентных ученых, система А-135 способна защитить Москву от атак одиночных и групповых баллистических целей (МБР с РГЧ ИН, многоблочные МБР, БРСД, оперативно-тактические ракеты). В основе А-135 лежит двухшелонное построение огневых средств ПРО: противоракеты ближнего (атмосферного) и дальнего (заатмосферного) перехватов; головные части противоракет оснащены ядерными боезарядами, что позволяет более успешно бороться с групповыми близкорасположенными целями и хорошо защищенными боеголовками МБР. Радиотехнические средства ПРО А-135 позволяют обнаруживать, сопровождать баллистические цели, а также наводить на них противоракеты (РЛС «Дон-2Н») в условиях внеатмосферных, атмосферных участков траектории, при воздействии активных и пассивных помех. А-135 способна успешно распознавать боевые блоки МБР, отличая

их от «мусора» — ложных целей. При поражении боевых блоков МБР исключается детонация ядерных зарядов, расположенных на них [86].

Работы по созданию аванпроекта советской ПРО под кодовым названием «Система А-35» начались в 1958 году. Но только к 1995-му году, после серии доработок и модернизации, второй вариант Российской ПРО — «Система А-135» был принят на вооружение. Его ядром стали многофункциональная радиолокационная станция «Дон-2Н» и командно-вычислительный пункт, совмещенные в единое здание в форме четырехгранной усеченной пирамиды вблизи города Софрино. Шахтные пусковые установки противоракет большой дальности А-350 были размещены на 6 позициях вдоль московского большого кольца, так называемой «бетонки» [86].

В декабре 1995 года система А-135 была поставлена на боевое дежурство, а в 1996 году принята на вооружение. Помимо работы с баллистическими целями многофункциональный радиолокатор «Дон-2Н» может осуществлять наблюдение за космическими объектами в интересах системы контроля космического пространства. Максимальная дальность обнаружения баллистических целей — 1200–1500 км. Радиолокатор дает возможность одновременного сопровождения в автоматическом режиме до 100 элементов сложных баллистических целей и одновременного наведения на них нескольких десятков ПР дальнего и ближнего перехвата.

В октябре 2002 года главным конструктором А-135 был назначен Ю.Ф. Воскобоев [86].

Ответственность, преданность делу и исключительные организаторские способности позволили главным конструкторам, руководителям научных, конструкторских и промышленных организаций и предприятий создать наиболее совершенные сложные автоматизированные системы XX века, какими являются системы «А», А-35, А-35М, А-135 (рассматривается вопрос о перспективной системе А-235).

Российское агентство по системам управления (РАСУ) провело торжественное собрание, посвященное выдающемуся юбилею — первому в мире перехвату головной части БР.

По общему мнению собравшихся, они добились грандиозного, в той международной обстановке поистине поворотного исторического результата не только благодаря высокой профессиональной подготовке, но и не в последнюю очередь благодаря беспредельной преданности Отчизне, чувству глубокого и неподдельного патриотизма.

Приведем имена тех, кто непосредственно разрабатывал конкретные виды оружия и создавал фундаментальные научные положения, которые послужили базой для решения проблем, связанных с созданием и эксплуатацией вооружений. Это лишь немногие представители огромной армии тружеников НИИ, КБ, заводов, полигонов — создателей вооружения страны.

Генерал-полковник в отставке Ю.В. Вотинцев, бывший командующий войсками ПРО и ПКО, сказал:

«Комплексы и системы вооружения войск ПРО и ПКО создавались талантливыми учеными, конструкторами, военными и гражданскими. Каждый из них был личностью по-своему индивидуальной. Например, интеллигентнейшие люди, ученые с мировыми именами Ю.Б. Харитон, А.Л. Минц со своими достойными учениками Ю.В. Поляком, В.М. Иванцовым и В.К. Слокой. Взрывной, резкий в полемике Г.В. Кисунько и скромный, честнейший, трудолюбивый И.Д. Омельченко. Талантливый, жесткий, принципиальный А.Г. Басистов и умный, обаятельный М.Г. Миносян. Лояльный к своим исполнителям В.Г. Репин. Уравновешенный, выдержанный, самокритичный А.И. Савин. Темпераментный, взыскательный В.М. Кавтуненко. Справедливый в оценке достигнутого П.Д. Грушин. Упорные и умелые Ф.А. Кузьминский, А.Н. Мусатов, В.П. Сосульников, Ф.Ф. Евстратов. Однако было то

общее, что объединяло их всех, — высокая ответственность за защиту многонационального народа великой страны надежными средствами СПРН, ПРО, ПКО и СККП».

Выдающийся вклад в создание систем ПРО внесли [86]:

Бармин Владимир Павлович, родился 17 марта 1909 года. Под его руководством были сконструированы, переданы в серийное производство и приняты на вооружение стартовые комплексы для боевых баллистических ракет, космических ракет-носителей, а также шахтные пусковые установки противоракет 51Т6 и 53Т6 системы А-135. Герой Социалистического Труда, академик АН СССР, лауреат Ленинской, Сталинской и Государственной премий.

Басистов Анатолий Георгиевич, родился 23 октября 1920 года. В 1944 году окончил Ленинградскую Военно-воздушную академию. С 1954 по 1968 год — заместитель главного конструктора, начальник отдела ОКБ-30. Принимал участие в создании системы С-25, руководил тематическим отделом по разработке системы противовоздушной обороны Ленинграда. За разработку зенитного ракетного комплекса С-200 в 1968 году был удостоен звания Героя Социалистического Труда. С 1973 года — главный конструктор системы ПРО А-135. С 1976 по 1998 год — генеральный конструктор системы ПРО А-135, генеральный конструктор НИИРП. А.Г. Басистов — член-корреспондент АН СССР (1967 год), лауреат Государственной премии РФ (1997 год), доктор технических наук, профессор, генерал-лейтенант авиации.

Берг Аксель Иванович родился 10 ноября 1893 года в Оренбурге. С 1947 по 1958 год — начальник НИИ-108. Под руководством А.И. Берга велась разработка РЛС дальнего обнаружения «Дунай».

С 1953 по 1957 год — заместитель министра обороны СССР. С 1957 по 1959 год — научный консультант по радиоэлектронике при заместителе министра обороны. С 1959 по 1979 год — председатель научного совета АН СССР по комплексной проблеме кибернетики. Герой Социалистического Труда, конт-адмирал-инженер, действительный член Академии наук СССР.

Бурцев Всеволод Сергеевич после окончания МЭИ поступил в Институт точной механики и вычислительной техники АН СССР (ИТМ и ВТ). В 1956–1961 годах под его руководством созданы вычислительные средства экспериментальной машины «А». В 1961–1968 годах разработана высокопроизводительная полупроводниковая ЭВМ 53926 для боевой системы ПРО А-35. В 1969–1972 годах главный конструктор В.С. Бурцев создал вычислительную машину третьего поколения для системы ПВО С-300П. В 1973–1985 годах разработаны многопроцессорные вычислительные комплексы «Эльбрус-1» и «Эльбрус-2» для системы ПРО А-135 и других систем РКО. В 1986–1993 годах разработал проект суперЭВМ, работающей на новых принципах. С 1972 по 1984 год В.С. Бурцев был директором ИТМ и ВТ. С 1992 по 1994 год — директором ВЦКП РАН. С 1994 по 1997 год — директором Института высокопроизводительных вычислительных систем РАН. Действительный член Российской академии наук, лауреат Ленинской и Государственных премий.

Воскобоев Юрий Федорович, родился в 1940 году в Москве. С 1963 года работал в КБ-1 инженером, старшим инженером. В 1968 году переведен в КБ «Вымпел» и назначен начальником тематической лаборатории по комплексу «Амур». С 1978 года — начальник отдела СКБ НИИРП, заместитель главного конструктора и руководитель испытаний комплекса «Амур-П». С 1993 года — заместитель начальника СКБ-2 НИИРП и заместитель главного конструктора по испытаниям системы А-135. С 1997 года — заместитель генерального конструктора НИИРП и заместитель главного конструктора по испытаниям системы А-135. С октября 2002 года — главный конструктор системы А-135. Лауреат Государственной премии России.

Голубев Олег Васильевич, родился в 1924 году в Ленинграде. После окончания института, в 1951 году направлен в КБ-1. С 1955 года — руководитель научного коллектива разработчиков систем наведения перехватчиков на воздушно-космические цели. Будучи заместителем генерального конструктора системы «А» и заместителем главных конструкторов систем А-35 и А-35М, занимался разработкой систем наведения противоракет. В настоящее время — начальник научно-исследовательского отделения систем наведения противоракет НИИРП и заместитель главного конструктора системы А-135. Лауреат Ленинской и Государственной премий, доктор технических наук, профессор.

Кириллов Петр Михайлович, родился 22 июня 1922 года в Смоленской области. В октябре 1941 года, будучи студентом МВТУ им. Н.Э. Баумана, добровольцем ушел на фронт. В декабре 1945 года демобилизовался и продолжил учебу в МВТУ, который окончил в 1950 году. С 1948 года начал работать в КБ-1 (ЦКБ «Алмаз»), где трудится до сих пор. Участвовал в создании всех основных систем вооружения, начиная с системы «Комета». За вклад в создание ЗРС С-200 был удостоен звания Героя Социалистического труда, за создание системы С-75 — лауреата Ленинской премии, за создание системы С-300П — лауреата Государственной премии. Работал заместителем главного конструктора, главным конструктором, начальником ОКБ-36. В настоящее время — главный конструктор НПО «Алмаз» имени академика А.А. Расплетина.

Кисунько Григорий Васильевич, родился 20 июля 1918 года. В 1938 году окончил Ворошиловградский педагогический институт, в 1941 году — аспирантуру Ленинградского пединститута имени А.И. Герцена. В конце 1950 года переведен в КБ-1 и назначен начальником лаборатории №2 по разработке антенно-волноводных устройств РЛС Б-200 системы С-25. С 1952 года — заместитель технологического руководителя по испытаниям станции Б-200, с сентября 1953 года — начальник НИО № 31 КБ-1. В августе 1954 года приступил к разработке предложений по проекту экспериментальной системы противоракетной обороны. С 7 июля 1955 года — начальник СКБ-30 КБ-1. С 1956 года — главный конструктор экспериментальной системы «А». В 1958 году назначен главным конструктором системы ПРО А-35.

30 декабря 1961 года Г.В. Кисунько назначен начальником вновь образованного самостоятельного ОКБ-30 и генеральным конструктором системы ПРО А-35. В январе 1963 года назначен первым заместителем ответственного руководителя КБ-1. 24 марта 1966 года ОКБ-30 преобразовано в ОКБ «Вымпел» МРП, Г.В. Кисунько назначен его директором и научным руководителем. С 1970 года — заместитель генерального директора ЦНПО «Вымпел» по научной работе. С 25 апреля 1975 года — начальник НИО-4 НТТЦ ЦНПО «Вымпел». В июне 1975 года освобожден от должности и назначен научным консультантом СНИИ-45 Министерства обороны. В 1987 году уволился из армии и работал заведующим лабораторией отдела теоретических проблем АН СССР. Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской премии, член-корреспондент АН СССР, генерал-лейтенант.

Лебедев Сергей Алексеевич, родился 2 ноября 1902 года в Нижнем Новгороде. В 1928 году окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана, оставлен преподавателем на кафедре и одновременно зачислен младшим научным сотрудником Всесоюзного электротехнического института. В 1947 году приступил к созданию первой ЭВМ. В 1950 году была сдана в эксплуатацию разработанная под его руководством первая в СССР и в континентальной Европе электронная вычислительная машина МЭСМ (малая электронная счетная машина). В 1951 году С.А. Лебедев вернулся в Москву и возглавил лабораторию Института точной механики и вычислительной техники АН СССР. В июне 1953 года был назначен директором ИТМ и ВТ, руководил которым по 1972 год. Под его руководством созданы ЭВМ БЭСМ, М-20, БЭСМ-4, М-40, М-50,

5Э926, 5Э51, БЭСМ-6, АС-6, 5Э26. Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственной премий, академик АН СССР.

Липсман Фрол Петрович, родился в 1915 году в Одессе. В 1950 году в лаборатории института, руководимой Ф.П. Липсманом, была создана радиорелейная линия многоканальной связи Р-400. В 1956 году назначен главным инженером НИИ-129 и главным конструктором системы передачи данных экспериментальной системы «А». С 1960 года — главный конструктор СПД системы А-35. Лауреат Сталинской премии.

Литовченко Цезарий Григорьевич, родился в 1932 году в Москве. В 1955 году окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана и был направлен в КБ-1. Прошел должности от инженера до главного конструктора научно-теоретического отделения, ответственного за системы космического предупреждения. С 1993 года — начальник научно-исследовательского отделения, с 1995 года — главный научный сотрудник ЦНИИ «Комета». Лауреат Ленинской премии, доктор технических наук, профессор.

Люльев Лев Вениаминович, родился 17 марта 1908 года в Киеве. Под руководством Л.В. Люльева были созданы зенитные управляемые ракеты для комплексов Сухопутных войск, противоракеты 5Я26 и 5ЗТ6 для систем ракетно-космической обороны Войск ПВО, крылатые ракеты для мобильных комплексов Сухопутных войск и подводных лодок, а также ракето-торпеды для комплексов Военно-Морского Флота. Дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской и Государственных премий.

Марков Владимир Иванович, родился в 1921 году в Смоленской области. С 1953 по март 1963 года — первый заместитель главного конструктора С-25. С 1968 по 1981 год — заместитель министра радиопромышленности СССР, с 1970 года — генеральный директор ЦНПО «Вымпел». С 1981 по 1989 год — директор НИИДАР. Под руководством В.И. Маркова в институте разработаны РЛС дальнего обнаружения баллистических ракет «Волга», радиолокационный комплекс контроля космического пространства «Крона», РЛС загоризонтального обнаружения морских и воздушных целей «Волна».

Михайлов Николай Васильевич, родился 14 мая 1937 года в г. Севск Брянской области. В 1961 году окончил МВТУ им. Н.Э. Баумана. С 1975 по 1979 год — главный инженер — 1-й заместитель генерального директора ЦНПО «Вымпел». С 1979 по 1987 год — директор НИИРП. С 1987 года — генеральный директор ЦНПО «Вымпел», с 1992 года — президент МАК «Вымпел».

Мусатов Александр Николаевич, родился в 1925 году в селе Кулачево Ивановской области. С 1955 года, после окончания Ленинградской Военной академии связи им. С.М. Буденного, работал в НИИ-108. С 1959 года работал в НИИДАРе. Был главным конструктором РЛС дальнего обнаружения «Дунай-3У», «Дунай-3УП», «Дарьял-С» и «Волга». Лауреат Государственной премии.

Мысрин Михаил Григорьевич, родился 24 октября 1918 года. С 1956 году — начальник сформированного в структуре 4 ГУ МО 5-го управления по разработкам и созданию систем и средств ПРО и ПКО. Затем почти 20 лет работал в должности заместителя начальника 4 ГУ МО по опытно-конструкторским и научно-исследовательским работам. Лауреат Государственной премии, кандидат технических наук, генерал-лейтенант.

Ненашев Михаил Михайлович, родился 1 ноября 1918 года. Работал над созданием новых космических систем в ЦНИИ «Комета». Герой Социалистического Труда, лауреат Государственной премии СССР, кандидат технических наук, генерал-лейтенант.

Омельченко Иван Дмитриевич, родился в 1919 году. С 1962 года — первый заместитель генерального конструктора, заместитель директора НИИРП. Участвовал в разработке экспериментальной системы «А». Был заместителем главного конструктора.

тора систем ПРО А-35 и «Аврора». С 1974 по 1990 год — главный конструктор системы А-35М и МКСК «Аргунь». Герой Социалистического Труда, лауреат Ленинской премии.

Рабинович Самуил Павлович, родился в декабре 1909 года. С 1956 года — главный конструктор РСВРП экспериментальной системы «А». 1 октября 1962 года перешел в ОКБ-30 ГКРЭ (НИИ радиоприборостроения). Лауреат Сталинской премии.

Репин Владислав Георгиевич, родился 8 ноября 1934 года. В 1958 году окончил Московский физико-технический институт. С 1955 года работал в КБ-1. С 1970 года — заместитель начальника НТЦ ЦНПО «Вымпел». С 1972 года — главный конструктор СПРН и ККП. Герой Социалистического Труда, лауреат Государственной премии, заслуженный деятель науки и техники РФ, доктор технических наук, профессор.

Савин Анатолий Иванович, родился 6 апреля 1920 года. В 1937 году поступил в МВТУ им. Н.Э. Баумана. В 1946 году, без отрыва от производства, окончил МВТУ.

В 1952 году направлен в КБ-1. С 1953 года — заместитель главного конструктора КБ-1.

С 1973 года — генеральный конструктор ЦНИИ «Комета». Руководил разработками системы противокосмической обороны, космической системы обнаружения и целеуказания, системы раннего обнаружения баллистических ракет. А.И. Савин — Герой Социалистического Труда, академик РАН, доктор технических наук, профессор, лауреат Ленинской премии, трех Сталинских и Государственной премии СССР. С 1999 года является научным руководителем ЦНИИ «Комета».

Слока Виктор Карлович, родился 20 февраля 1932 года в Москве. В 1958 году окончил вечернее отделение Московского авиационного института. С 1965 года работает в Радиотехническом институте. Принимал участие в создании РЛС «Днестр», «Днепр», «Дарьял». С 1972 года — главный конструктор МРЛС «Дон-2Н» системы ПРО А-135. С 1977 по 1996 год был директором и научным руководителем. Герой Российской Федерации, лауреат Государственной премии СССР, член научного совета при Совете Безопасности РФ, доктор технических наук, профессор МФТИ. С 1996 года — генеральный конструктор РТИ имени академика А.Л. Минца.

Сосульников Владимир Пантелеймонович, родился 5 октября 1921 года. Окончил в 1948 году Ленинградскую Военную Краснознаменную академию связи им. С.М. Буденного. С 1950 года — научный сотрудник НИИ-108. С 1960 года — главный конструктор НИИДАР. Под его руководством разработаны РЛС дальнего обнаружения ПРО «Дунай-2», «Дунай-3», «Дунай-3М» и радиолокационный комплекс распознавания ИСЗ «Крона». В.П. Сосульников — лауреат Ленинской премии, доктор технических наук.

6.5. РЕГУЛЯТОРЫ ОСНОВНЫХ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ [130]

6.5.1. ОСНОВНЫЕ УПРАВЛЯЕМЫЕ ПАРАМЕТРЫ ЭНЕРГОБЛОКОВ С РЕАКТОРАМИ ВВЭР И РБМК

Энергоблоки АЭС как объекты автоматизации имеют следующие особенности:

- 1) непрерывный характер основных технологических потоков (носителей тепловой и электрической энергий) и дискретный характер вспомогательных технологических потоков, обеспечивающих работу основных потоков;
- 2) значительные единичные мощности энергоблока, что приводит к существенным потерям при профилактике, ремонте, авариях, а также усложнению вспомогательного технологического оборудования;

- 3) сложность технологии, что требует большого количества измеряемых параметров (около 30 тыс.), запорной и регулирующей арматуры (около 4,5 тыс.);
- 4) сложность технологического процесса и недостаточное его исследование не позволяет ограничиться управлением по состоянию. Применяется комбинация: управление по состоянию (логическое управление и регулирование) и событийное управление в экстремальных ситуациях (блокировка, защита);
- 5) высокая экологическая опасность, необходимость обеспечения высокой радиационной, ядерной, пожаро-, взрыво-, электробезопасности. Это требует резервирования оборудования, применения вспомогательного оборудования.

Упрощенная однопетлевая технологическая схема энергоблока с реактором ВВЭР приведена на рис. 6.34*. Через активную зону 1 реактора 3 прокачивается теплоноситель первого контура с помощью главных циркуляционных насосов (ГЦН) 2. Нагреваясь в активной зоне реактора, теплоноситель поступает в парогенератор 4, где отдает тепловую энергию теплоносителю второго контура. Полученный в парогенераторе пар во втором контуре поступает в турбину 5, вращающую электрический генератор 6. Отработанный в турбине пар конденсируется в конденсаторе 7. Конденсат с помощью конденсатных насосов 8 подается через регенеративные подогреватели низкого давления 9 в деаэратор 10. Очищенная от газов в деаэраторе питательная вода подается насосами 11 через регенеративные подогреватели высокого давления 12 снова в парогенератор.

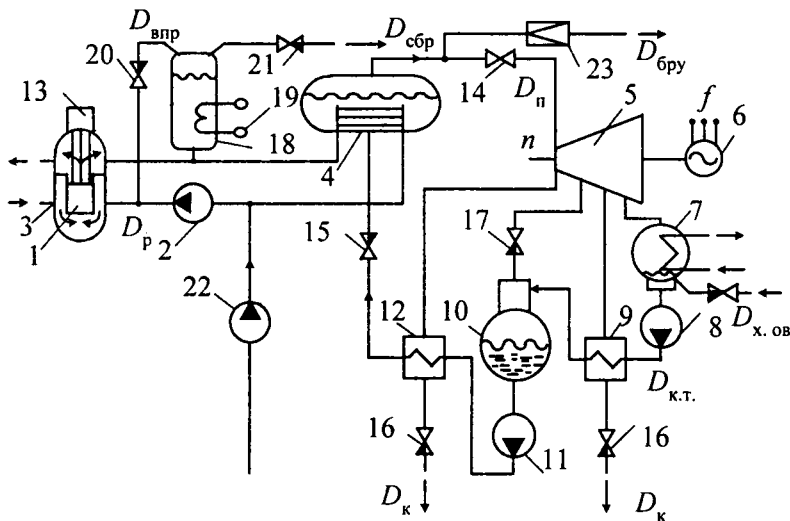


Рис. 6.34. Технологическая схема энергоблока с реактором ВВЭР

Для функционирования данного энергоблока все основные параметры отдельных его агрегатов должны поддерживаться в заданных технологических пределах. В наиболее часто применяемых режимах управления мощностью энергоблока в качестве регулируемой величины выбирается давление пара перед турбиной. Поддержание заданного давления пара осуществляется изменением электрической мощности генераторов или тепловой мощности реактора с помощью перемещения управляющих стержней исполнительным органом 13 системы управления реактора. При этом в качестве управляющего воздействия используется также сигнал нейтронного потока

* С используемыми терминами, а также с техническими средствами аналоговых и цифровых регуляторов, используемых в АЭС, можно познакомиться в [130].

в реакторе. Частота сети создается с помощью регулятора, воздействующего на регулирующие клапаны 14 турбины.

Существует ряд параметров, которые не влияют непосредственно на выработку электроэнергии, но влияют на режим работы блока. Одними из важных параметров являются: уровень в парогенераторах, который регулируется изменением расхода питательной воды с помощью регулирующего клапана 15; уровень конденсата в регенеративных подогревателях, регулируемый с помощью клапанов 16; уровень в конденсаторе турбины; уровень в деаэраторе, который регулируется подачей пара через клапан 17.

Для поддержания давления и массы теплоносителя в первом контуре имеется специальное устройство — компенсатор объема (давления) 18, в котором над уровнем воды поддерживается паровая подушка с постоянным давлением.

Давление в нем поддерживается изменением мощности нагревателя 19, а также путем впрыска холодной воды клапаном 20 или сброса пара клапаном 21. При снижении уровня воды в компенсаторе объема в первый контур подается дополнительная вода с помощью подпиточного насоса 22. В аварийных ситуациях изменяется давление пара перед турбиной путем сброса пара в конденсаторы через редукционно-охладительные установки 23.

На рис. 6.35 показана технологическая схема энергоблока с реактором РБМК-1000. В реакторе 1 расположены технологические каналы 2, через которые прокачивается теплоноситель с помощью главных центробежных насосов 3. Пароводяная смесь из технологических каналов поступает в барабаны-сепараторы 4. В каждой паре барабан-сепараторов они объединены по воде и пару. Расход воды через каналы задается с помощью клапанов 6.

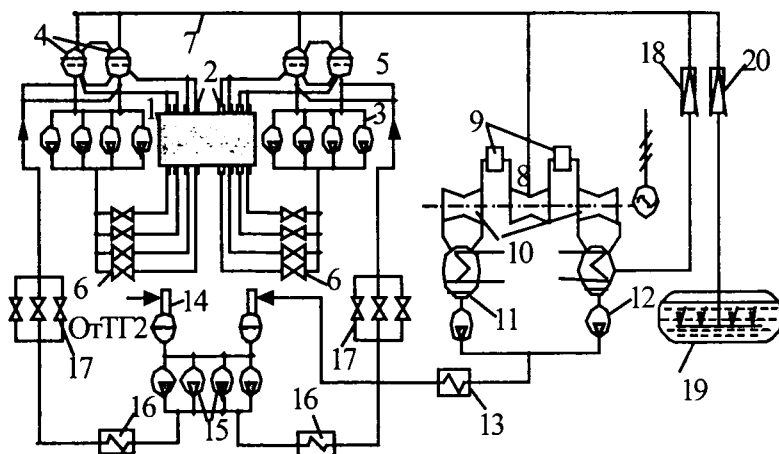


Рис. 6.35. Технологическая схема энергоблока с реактором РБМК

Пар из барабан-сепараторов по трубопроводам 7 поступает на турбину: цилиндр высокого давления 8, сепаратор 9, цилиндры низкого давления 10. После турбины пар попадает в конденсаторы 11. Вода из конденсаторов с помощью насосов 12 через подогреватели низкого давления 13, деаэраторы 14, насосы 15 по трубопроводам 5 снова подается в барабаны-сепараторы.

Уровень воды в барабанах-сепараторах регулируется с помощью клапана 17. При аварийном повышении давления пар сбрасывается в конденсаторы турбин через быструю редукционную установку в конденсатор (БРУ-К) 18 или в барботер 19 через (БРУ-Б) 20.

Реакторы типа РБМК обладают некоторыми особенностями: малое саморегулирование, положительный паровой эффект реактивности. Эти эффекты выдвигают более высокие требования к статической и динамической точности поддержания давления, высокие требования к регулированию уровня в барабанах-сепараторах. В процессе же работы имеют место колебания уровня. Необходимо также осуществлять регулирование большинства тех же параметров, что и в энергоблоках с реакторами ВВЭР.

6.5.2. СТРУКТУРНЫЕ СХЕМЫ РЕГУЛЯТОРОВ АЭС

Несмотря на существенные различия энергоблоков с различными ЯР и используемого в них энергетического оборудования, большинство регуляторов имеют одинаковые структурные и функциональные схемы.

Среди автоматических регуляторов тепловой автоматики можно выделить две группы: регуляторы уровня (АРУ) жидких сред и регуляторы давления (АРД) пара, которые существенно влияют на режим работы ядерного энергетического блока.

Регуляторы уровня предназначены для поддержания заданного уровня теплоносителя в компенсаторах давления (КД) и барабанах-сепараторах (БС), питательной воды и конденсата пара в парогенераторах (ПГ) и регенеративных перегревателях. Заданный уровень в АРУ поддерживается за счет обеспечения материального баланса между притоком и оттоком вещества в регулируемом сосуде. Часто приток и отток представляют разные фазы одного вещества. Например, приток — вода, отток — пар.

Для рассмотрения динамических свойств объектов регулирования (ОР) в АРУ используем уравнение материального баланса

$$\frac{d}{dt}(\rho_{\text{в}} V_{\text{в}} + \rho_{\text{п}} V_{\text{п}}) = G_{\text{в}} - G_{\text{п}}, \quad (6.1)$$

где $\rho_{\text{в}}, V_{\text{в}}$ — плотность и объем воды, $\rho_{\text{п}}, V_{\text{п}}$ — плотность и объем пара, $G_{\text{в}}, G_{\text{п}}$ — расходы воды и пара соответственно.

Так как для сосуда с постоянным поперечным сечением F и высотой H объем воды равен $V_{\text{в}} = hF$, а пара — $V_{\text{п}} = (H - h)F$, где h — уровень воды, то после подстановки $V_{\text{п}}$ и $V_{\text{в}}$ в (6.1), получим зависимость уровня воды от расходов пара и воды при постоянных их плотностей в виде

$$F(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{п}}) \frac{dh}{dt} = G_{\text{в}} - G_{\text{п}}. \quad (6.2)$$

Из (6.2) следует, что при сделанных допущениях уровень жидкости в ОР является интегралом от материального баланса $G_{\text{в}} - G_{\text{п}}$. При этом расход пара играет роль возмущения, а расход воды является управляющим воздействием (рис. 6.36).

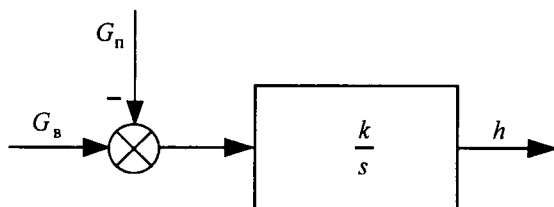


Рис. 6.36. Структурная схема объекта управления АРУ:

$k = 1/(\rho_{\text{п}} - \rho_{\text{в}})/F$ — коэффициент передачи; s — переменная преобразования Лапласа

Для управления расходом воды применяют регулирующие клапаны (РК), снабженные электрическим исполнительным механизмом (ИМ), который в первом при-

ближении также может рассматриваться как интегрирующее звено с передаточной функцией

$$K(s) = \frac{G_b(s)}{V(s)} = \frac{1}{T_{им}s}, \quad (6.3)$$

где $V(s)$ — изображение входного сигнала ИМ; $T_{им} = \frac{U_{\max}}{G_{B\max}} t_{им}$, $t_{им}$ — время полного хода РК.

Легко показать, что охват двух интеграторов отрицательной обратной связью (ООС) не обеспечивает устойчивость такой системы, поскольку характеристическое уравнение $T_{им}s^2 + k = 0$ имеет чисто мнимые корни. Это вынуждает вместо И-закона регулирования применять П-закон.

Простейшим способом обеспечения устойчивости систем с астатизмом 2-го порядка является охват ИМ жесткой ООС по положению регулирующего клапана (рис. 6.37).

Анализ приведенной одноимпульсной (импульс по уровню) структурной схемы АРУ приводит к следующей зависимости уровня h от уставки h_3 и возмущения G_n , записанной в операторной форме:

$$h(s) = \frac{k_n k}{T_{им}s^2 + s + k_n k} h_3(s) - \frac{k(T_{им}s + 1)}{T_{им}s^2 + s + k_n k} G_n(s). \quad (6.4)$$

Из последнего выражения следует, что одноимпульсный АРУ с местной обратной связью по положению РК имеет статическую ошибку, вызванную возмущением. Так, в установившемся ($s = 0$) режиме $h = h_3$ только при $G_n = 0$. Изменение расхода пара, например на постоянную величину ΔG_n , приводит к возникновению установившегося отклонения уровня от заданного значения на величину $\Delta h = \Delta G_n / k_n$, которая называется неравномерностью регулирования. Неравномерность регулирования обратно пропорциональна коэффициенту k_n передачи П-регулятора. Одноимпульсный АРУ с местной обратной связью по положению РК применяют для регулирования объектов, не требующих высокой точности поддержания заданного уровня, например регенеративных подогревателей.

Расход питательной воды G_b зависит не только от положения регулирующего клапана, но и от других факторов, например от напора питательного насоса. Поэтому более совершенным является двухимпульсный АРУ, в котором местная ООС введена не по положению РК, но по расходу воды G_b . Заметим, что выражение (6.4), строго говоря, соответствует именно двухимпульсному АРУ.

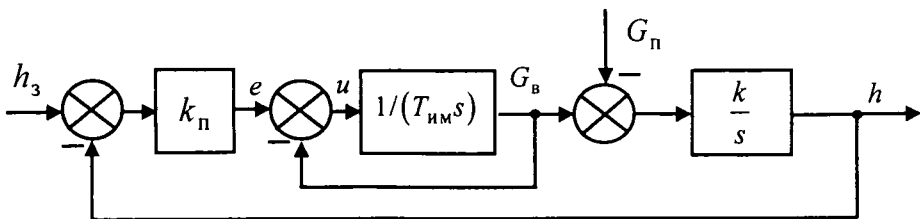


Рис. 6.37. Одноимпульсный (двухимпульсный) АРУ с местной обратной связью по положению регулирующего клапана (расходу питательной воды), k_n — коэффициент передачи П-регулятора

Для большинства регуляторов уровня выражение (6.2), описывающее ОР, имеет более сложный вид, так как на плотность воды и пара влияют температура (в КД) и давление (в БС). Уровень питательной воды в ядерных паропроизводящих установках (ЯППУ) зависит также от подвода тепла. При увеличении мощности реактора возрастает интенсивность парообразования, что снижает среднюю плотность воды и повышает ее уровень даже при сохранении баланса между расходами пара и воды. К аналогичному результату ведет резкое снижение давления пара в ЯППУ (эффект «вспухания»). На практике имеет место известный парадокс, когда увеличение расхода недогретой воды для питания ЯППУ, вместо увеличения уровня ведет к его временному снижению из-за уменьшения интенсивности парообразования.

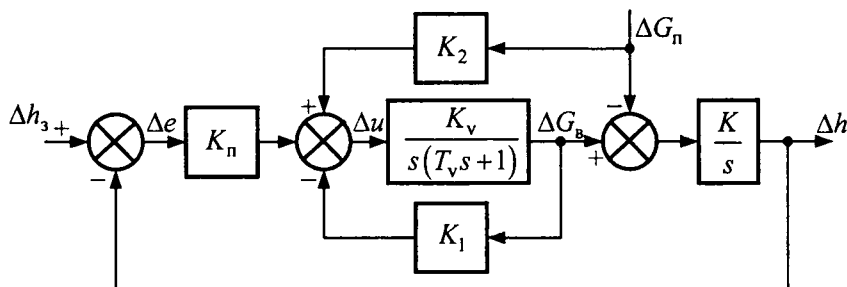


Рис. 6.38. Структурная схема трехимпульсного АРУ,
 T_v — постоянная времени ИМ, $K_v = 1/T_{им}$

В случае необходимости обеспечения высокой точности поддержания заданного уровня (ПГ, БС, КД) применяют трехимпульсные АРУ. В таких регуляторах в качестве местной ООС используется сигнал материального баланса $e = G_b - G_n$. В этом случае реализуется принцип комбинированного управления по отклонению и возмущению.

Пусть ради простоты $K_{рб}(s) = k_n$. Тогда для трехимпульсного АРУ справедливо выражение

$$\Delta h(s) = \frac{k_n k_v k}{T_v s^3 + s^2 + k_1 k_v s + k_n k_v k} \Delta h_3(s) - \frac{k [T_v s^2 + s + k_v (k_1 - k_2)]}{T_v s^3 + s^2 + k_1 k_v s + k_n k_v k} \Delta G_n(s). \quad (6.5)$$

Из последнего выражения следует, что подбором коэффициентов k_n и k_1 можно обеспечить устойчивость АРУ. Например, в соответствии с критерием Гурвица для устойчивости рассматриваемой системы достаточно $k_1 > k_n k$. Кроме того, при $k_2 = k_1$ трёхимпульсный АРУ не имеет статической ошибки относительно установившихся значений расхода пара, т.е. $h = h_3$ при любом $\Delta G_n = \text{const}$.

Автоматические регуляторы давления предназначены для поддержания заданного давления пара в ЯППУ. При этом АРД должен обеспечить баланс между генерацией пара и его расходом. Так как большинство энергоблоков работают в базовом режиме, т.е. мощность блока задает ЯР независимо от нагрузки электрической сети, заданное давление АРД поддерживают, подстраивая расход пара турбиной в соответствии с его генерацией. Для этого в зависимости от сигнала рассогласования АРД осуществляет воздействие на механизм управления турбиной (МУТ) и посредством гидравлического регулятора скорости (РС) вращения турбины меняет расход пара. Возмущением для АРД является изменение мощности ЯР и изменение расхода пара вследствие реакции РС на изменение частоты в электрической сети.

АРД могут выполнять свои функции, если турбогенератор работает на энергосистему в синхронном режиме. В противном случае, например во время пуска энергоблока или в аварийных режимах, связанных с остановом ТГ, используются так называемые стерегущие регуляторы — быстрые редуccionные установки, сбрасывающие пар в конденсатор (БРУ-К), деаэрактор (БРУ-Д) или барботер (БРУ-Б). Функциональные схемы этих регуляторов аналогичны АРД за исключением управляющих воздействий, которые через исполнительные механизмы воздействуют на соответствующие клапаны. Для стерегущих регуляторов устанавливаются более высокие (на 1–2 кгс/см²) значения заданного давления.

Давление пара в ЯППУ зависит от мощности ЯР (подвода тепла), расходов питательной воды и пара. При постоянной энтальпии питательной воды для небольших приращений перечисленных технологических параметров справедливо уравнение

$$A \frac{d}{dt} \Delta P(t) = \Delta Q(t) + \beta_1 \Delta G_v(t) - \beta_2 \Delta G_n(t), \quad (6.6)$$

где ΔP — изменение давления; ΔQ , ΔG_v , ΔG_n — приращения подводимого тепла и изменения расходов питательной воды и пара соответственно; A , β_1 , β_2 — коэффициенты пропорциональности.

В свою очередь, расход пара на турбину зависит как от его давления в ЯППУ, так и от положения регулирующих клапанов. Данная зависимость в линеаризованном виде может быть записана как

$$\Delta G_n = \beta_3 \Delta z + \Delta z, \quad (6.7)$$

где Δz — изменения положения РК турбины, β_3 — коэффициент пропорциональности.

Из последнего выражения приходим к уравнению инерционного звена 1-го порядка

$$T \frac{d}{dt} \Delta P(t) + \Delta P(t) = k_1 \Delta Q(t) + k_2 \Delta G_v(t) - k_3 \Delta z(t), \quad (6.8)$$

где $T = A/(\beta_2 \beta_3)$, $k_1 = 1/(\beta_2 \beta_3)$, $k_2 = \beta_1/(\beta_2 \beta_3)$, $k_3 = 1/\beta_3$.

Таким образом, при регулировании давления ОР не обладает астатизмом, что позволяет строить АРД по одноимпульсной схеме (рис. 6.39).

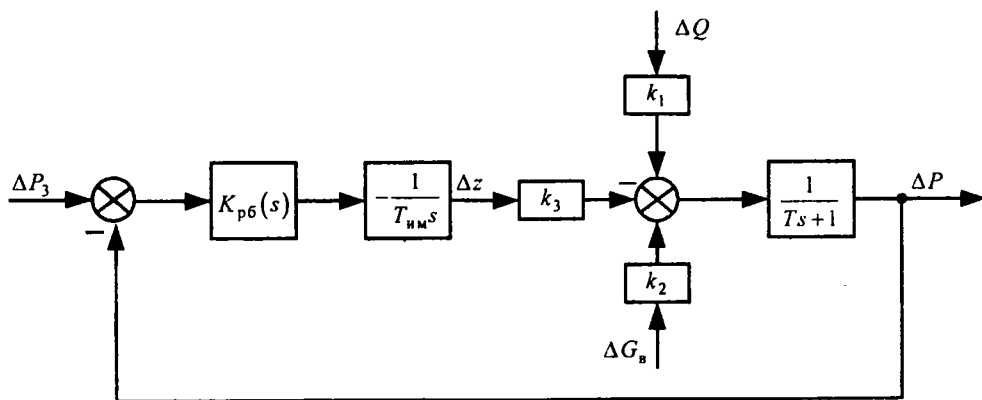


Рис. 6.39. Структурная схема одноимпульсного регулятора давления в ЯППУ

Регулирующее устройство с ПФ $K_{p6}(s)$ совместно с исполнительным механизмом $1/(T_{им}s)$, как правило, реализовывают ПИ-закон регулирования.

Возмущениями для АД являются тепловая мощность реактора и расход питательной воды. Так как на расход пара АД оказывает действие через гидравлический регулятор турбины, электрическая сеть также оказывает влияние на давление пара. Поэтому, строго говоря, расчет АД должен проводиться с учетом динамики РС турбины. Однако для уменьшения возмущения реактора со стороны электрической сети через турбогенератор и АД его быстродействие ограничивают. Так как переходные процессы РС длятся 1–2 с, в то время как переходные процессы АД — 3–10 мин, то это позволяет рассматривать оба регулятора отдельно.

На АРУ оказывает влияние АД через изменение расхода пара. Поэтому сначала настраивают АД, а потом — регулятор уровня. В этом случае можно считать $\Delta G_n = 0$.

Практика эксплуатации АД показала, что одноимпульсные регуляторы удовлетворительно работают в условиях нормальной эксплуатации. Однако в нештатных ситуациях имели место случаи, когда возникающие при этом перерегулирования давления приводили к останову энергоблока. Поэтому в настоящее время разрабатываются двухимпульсные АД. Второй импульс в регуляторе вводится по давлению за стопорно-регулирующими клапанами (СРК) турбины. Так как давление за СРК отражает мощность ТГ, использование этого сигнала позволяет организовать внутренний малоинерционный контур регулирования, позволяющий уменьшить влияние электросети на энергоблок. Однако в двухимпульсных АД проявляется неравномерность регулирования давления при изменениях мощности ЯР, что устраняется посредством ввода в регулятор сигнала по мощности реактора. Такой АД по своей сути реализовывает трехимпульсную схему регулирования.

6.5.3. РЕГУЛЯТОРЫ ПИТАНИЯ ПАРОГЕНЕРАТОРА

Автоматические регуляторы питания парогенератора (ПГ) предназначены для поддержания материального баланса между расходом пара и подачей питательной воды при заданном ее уровне. Поэтому наряду с термином регулятор питания часто используется термин регулятор уровня ПГ.

Регулируемым параметром является уровень питательной воды в ПГ, управляющим воздействием — ее расход, а возмущением — изменение расхода пара турбиной при изменении ее мощности. На уровень воды в ПГ также оказывают влияние мощность реактора, давление пара в ПГ, температура питательной воды и другие факторы.

В качестве примера рассмотрим автоматические регуляторы уровня парогенераторов ПГВ-1000 энергоблоков с ВВЭР-1000. Каждый из четырех ПГ снабжается двумя регуляторами уровня: основным РУПГ-1 (2,3,4) и пусковым РУПГ-1А (2А, 3А, 4А). Оптимальный уровень воды в ПГВ-1000 $h_3 = 2050$ мм в диапазоне мощности ЯР 0–30% поддерживается пусковым, а свыше 30% — основным регулятором уровня.

Наличие двух регуляторов обусловлено нулевым выходным сигналом блока извлечения корня (БИК), работающего совместно с измерительным преобразователем «Сапфир-22ДД», при малых расходах (0–15% от номинального). Это приводит к потере сигнала по материальному балансу и превращению регулятора в одноимпульсный.

Точность поддержания заданного уровня в стационарных режимах ± 50 мм. При повышении уровня на 300 мм свыше номинального РУПГ автоматически переводится на дистанционный (ручной) режим управления регулирующим питательным клапаном (РПК) и инициируется его закрытие. Если при этом рост уровня прекратился и его превышение над заданным снизилось до 250 мм, снимается блокировка РУПГ, который оператором может быть переведен в режим «Автомат». Повышение уровня на 500 мм сверх заданного приводит к закрытию стопорных клапанов турбины, что предотвращает заброс воды в турбину, и останову ЯР.

Снижение уровня питательной воды в ПГ на 150 мм от номинального уровня вызывает включение аварийных питательных электронасосов и пусковых РУПГ-1А (2А, 3А, 4А), на 500 мм — отключение ГЦН для предотвращения термических напряжений трубчатки ПГ, на 650 мм — к останову энергоблока по сигналу АЗ-1.

Регуляторы уровня ПГ строятся по трехимпульсной схеме на основе КТС «Каскад-2» (рис. 6.40).

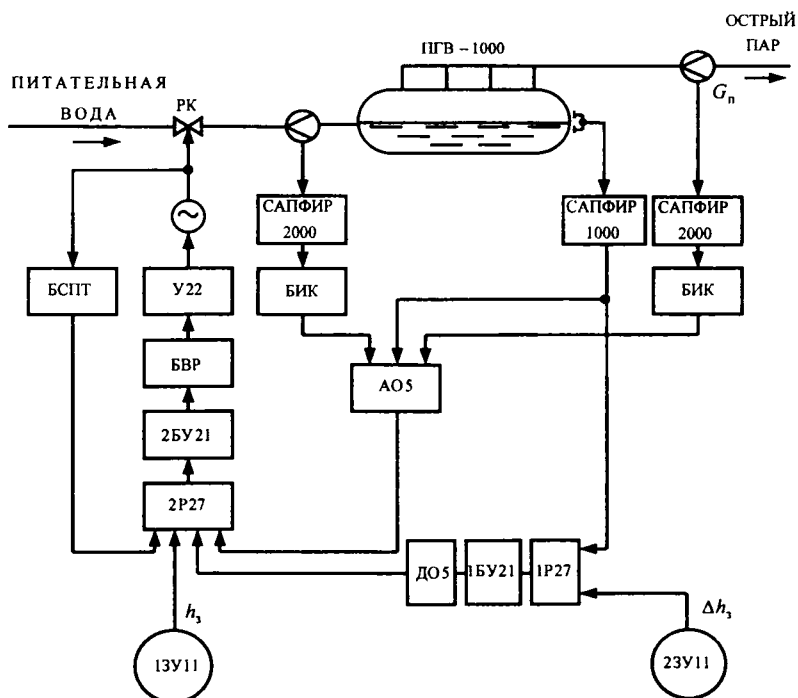


Рис. 6.40. Упрощенная функциональная схема основного регулятора уровня питательной воды ПГВ-1000

Входными сигналами РУПГ являются:

- уровень h питательной воды в ПГ (измеряется гидростатическим методом, измерительный преобразователь «Сапфир-22ДД», диапазон измерения 0–1000 мм);
- расход питательной воды (измерительный преобразователь «Сапфир-22ДД», максимальный расход 2000 м³/ч);
- расход пара на турбину (измерительный преобразователь «Сапфир-22ДД», максимальный расход 2000 м³/ч).

Перечисленные выше входные сигналы суммируются блоком А05 с учетом их знаков.

Уровень в ПГ задается посредством 13У11.

Сигнал с выхода импульсного регулирующего блока 2Р27 через блоки управления (2БУ21) и включения регулятора (БВР) подаются на усилитель У22, управляющий исполнительным механизмом регулирующего клапана.

Наряду с обратной связью по воде, в регулятор уровня введена жесткая обратная связь (БСПТ) по положению регулирующего клапана и реализован дополнительный контур коррекции статической погрешности, вызванной продувкой ПГ (23У11, 1Р27, 1БУ21, ДО5).

В отличие от регулятора уровня компенсатора давления, в РУПГ не введены сигналы расходов воды, используемой для продувки. Поэтому во время регулярно проводимых продувок ПГ из-за нарушения материального баланса возникает статическая погрешность поддержания уровня. Для ее устранения посредством 1БУ27 включают 1Р27, который добавляет к сигналу отклонения 2Р27 интеграл от небаланса $h_3 - h$. Во время продувки уровень ПГ корректируется задатчиком 2ЗУ11.

6.5.4. РЕГУЛЯТОРЫ УРОВНЯ КОМПЕНСАТОРА ОБЪЕМА

Рассматриваемые ниже автоматические регуляторы уровня (АРУ) компенсатора давления (КД) применяются на энергоблоках с ВВЭР-1000 и предназначены для поддержания необходимого уровня воды во всех режимах работы реактора. На блоке устанавливаются два регулятора — штатный и пусковой.

На уровень воды в КД влияет термическое изменение объема теплоносителя в первом контуре при изменении его температуры и нарушение материального баланса между расходами теплоносителя на продувку и подпитку, подвода и слива уплотняющей воды ГЦН. На уровень также оказывает влияние система поддержания давления в первом контуре и работа второго контура. Минимальный допустимый уровень воды $H_{\min}$ равен 5470 мм. Понижение уровня воды ниже $H_{\min}$ приводит к оголению и перегосу трубчатых электронагревателей (ТЭН). Превышение максимального уровня $H_{\max}$ ($H_{\max} = 8770$ мм при 100 % мощности реактора) уменьшает объем паровой подушки КД и нарушает работу системы поддержания давления первого контура.

Программа работы штатного АРУ рассчитывается, исходя из требования сохранения постоянной массы теплоносителя в первом контуре. Так как уровень зависит от температуры, для определения заданного уровня h_3 воды в КД используется ее средняя температура $T_{\text{ср}}$ в первом контуре. При изменении мощности реактора от 0 до 100% $T_{\text{ср}}$ меняется от 275 до 302°C, а номинальный уровень воды в КД от $H_{\min}$ до $H_{\max}$. Следовательно, зависимость требуемого (заданного) уровня теплоносителя от средней температуры может быть записана в виде $h_3(T_{\text{ср}}) = 5470 + V(T_{\text{ср}} - 275)$, где $V = (8770 - 5470)/(302 - 275) = 122$ мм/°C. На некоторых энергоблоках $H_{\min} = 6010$ мм при $T_{\text{ср}} = 280^\circ\text{C}$. В этом случае $V = 138$ мм/°C.

В качестве $T_{\text{ср}}$ используется максимальная величина из средних температур четырех петель (рис. 6.41, 6.42).

Для оценки $T_{\text{ср}}$ посредством термопар и нормирующих преобразователей Ш78 (пределы измерения 0–400°C) измеряется температура теплоносителя горячей и холодной ниток каждой петли. Соответствующие сигналы усредняются сумматорами А05, и из полученных сигналов блоками нелинейных преобразований Н05 выделяется максимальный — $T_{\text{ср.макс}}$. Блок А05 осуществляет формирование по $T_{\text{ср.макс}}$ заданного уровня $h_3(T_{\text{ср}})$.

В штатном регуляторе уровня посредством ручного задатчика ЗУ11 предусмотрена ручная корректировка заданного уровня теплоносителя в КД в пределах ± 1000 мм.

Входными сигналами штатного регулятора уровня являются уровень в КД — $h_{\text{ур}}$, заданный уровень — $h_3(T_{\text{ср}})$ и сигнал материального баланса (местной обратной связи) — e .

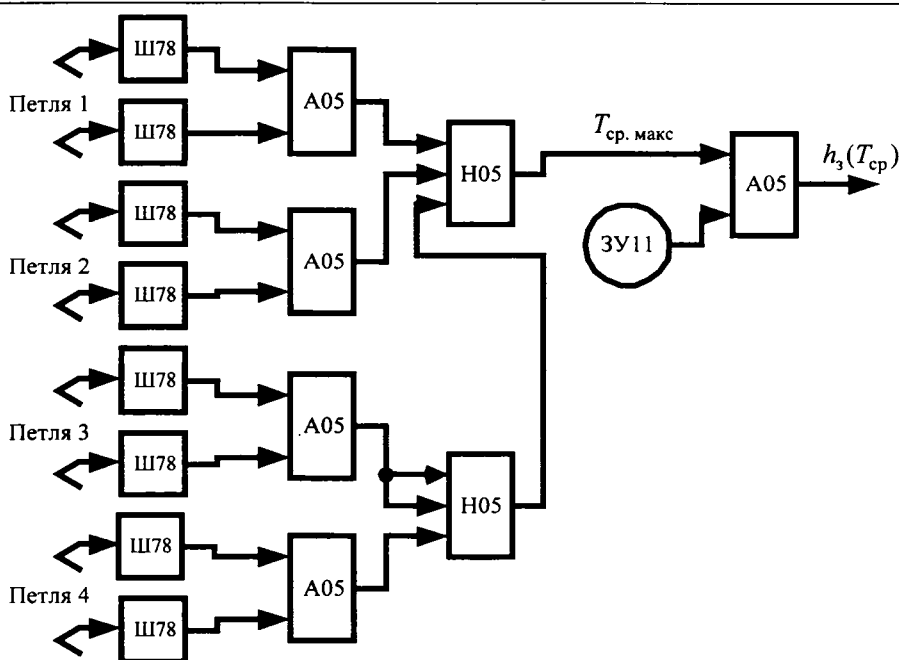


Рис. 6.41. Схема формирования сигналов максимальной средней температуры и заданного уровня

Уровень в КД измеряется гидростатическим образом измерительным преобразователем «Сапфир-22ДД» модели 2444 с максимальным избыточным давлением 400 кГс/см^2 .

Сигнал материального баланса формируется сумматором А05, который реализовывает соотношение $e = G_{т1} + G_{в1} - G_{т2} - G_{в2}$. Соответствующие расходы G измеряются:

- расход подпиточной воды, «Сапфир-22ДД», пределы измерения $0-100 \text{ м}^3/\text{ч}$;
- расход продувки, «Сапфир-22ДД», пределы измерения $0-80 \text{ м}^3/\text{ч}$;
- расход уплотняющей воды к ГЦН, «Сапфир-22ДД», пределы измерения $0-16 \text{ м}^3/\text{ч}$;
- расход уплотняющей воды от ГЦН, «Сапфир-22ДД», пределы измерения $0-12,5 \text{ м}^3/\text{ч}$.

Выходной сигнал регулирующего блока Р27 через устройство логического управления второго уровня (УЛУ-II) оказывает воздействие на регулирующие клапаны ТК32SO2 или ТК32SO1, меняя расход подпиточной воды таким образом, чтобы $h_{yp} = h_3(T_{cp})$. С помощью ключа, расположенного на блочном щите управления (БЩУ), один из клапанов выбирается рабочим, другой — резервным. После полного открытия рабочего клапана воздействие регулятора автоматически переключается на резервный. При этом закрытие клапанов начинается с резервного клапана.

Программа работы пускового регулятора основана на поддержании заданного объема теплоносителя в первом контуре во время разогрева и расхолаживания энергоблока. При этом критерием постоянства объема является неизменность уровня воды в КД. Во время разогрева первого контура сильно (приблизительно на 300°C) меняется его температура и, следовательно, давление. Вследствие этого для повышения точности измерения уровня вводят коррекцию показаний уровнемера по температуре

воды в КД в виде $h_{\text{факт}}(T_{\text{кд}}) = y_2(T_{\text{кд}}) + y_1(T_{\text{кд}})h_{\text{ур}}$, где $h_{\text{факт}}$ — фактический уровень воды в КД при температуре $T_{\text{кд}}$, °С, $h_{\text{ур}}$ — уровень по показаниям уровнемера, $y_1(T_{\text{кд}})$ и $y_2(T_{\text{кд}})$ — нелинейные функции температуры, зависящие от текущих значений плотности воды и пара (рис. 6.43).

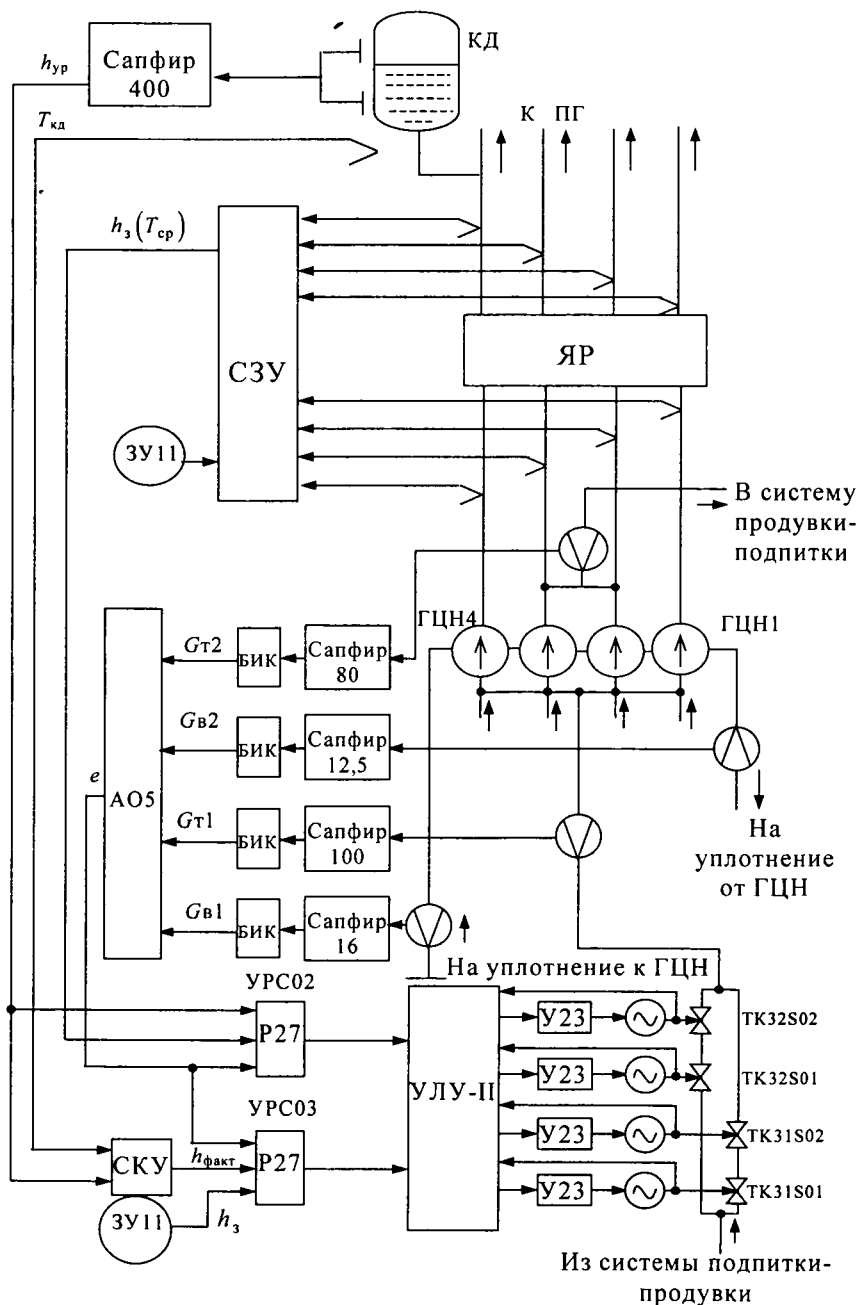


Рис. 6.42. Упрощенная функциональная схема регулирования уровня теплоносителя в компенсаторе давления энергоблока с ВВЭР-1000

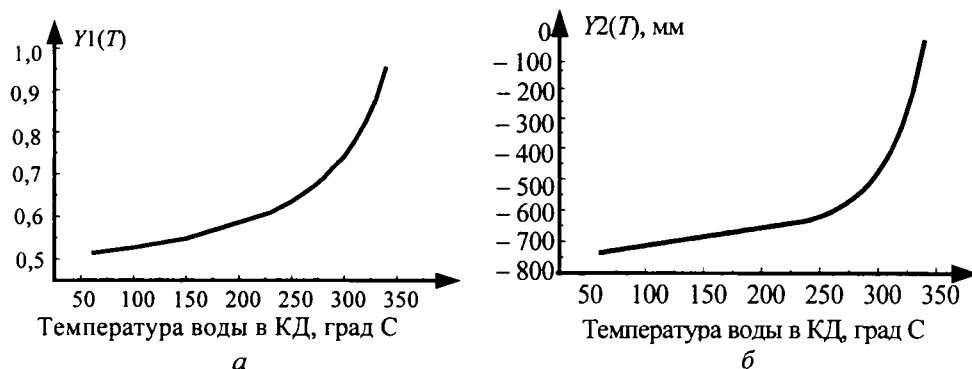


Рис. 6.43. Функции $y_1(T_{\text{кл}})$ и $h_{\text{факт}}(T)$ для коррекции показаний уровнемера с базой 6300 мм и учетом азотной подушки в интервале температуры 60–200 °C

Для реализации требуемой зависимости $h_{\text{факт}}(T)$ применяется схема коррекции уровня (СКУ), которая работает по сигналам уровнемера $h_{\text{ур}}$ и температуры $T_{\text{кл}}$ воды в КД (рис. 6.44). Нелинейные функции $y_1(T_{\text{кл}})$ и $y_2(T_{\text{кл}})$ реализовываются блоками нелинейных преобразователей Н05 способом кусочно-линейной аппроксимации.

В пусковом регуляторе предусмотрен ручной задатчик уровня (РЗУ). При заполнении реакторной установки посредством РЗУ задается $h_3 = 11\,600$ мм, во время сброса азота — $h_3 = 11\,000$ мм, а затем — $h_3 = 4570$ мм. При расхолаживании первого контура — $h_3 = 11\,000$ мм.

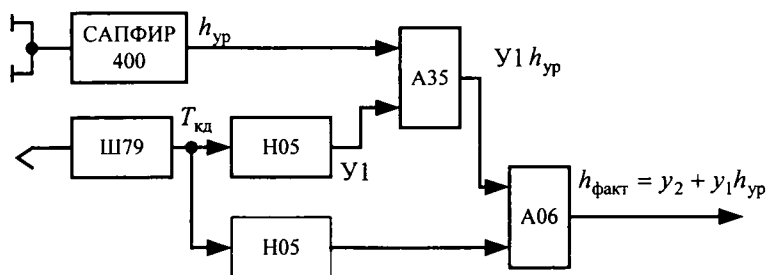


Рис. 6.44. Схема коррекции уровня

Аналогично штатному регулятору сигнал от регулирующего блока Р27 через УЛУ-II оказывает воздействие на пусковые регулирующие клапаны ТК31SO2 или ТК31SO1.

6.5.5. РЕГУЛЯТОРЫ УРОВНЯ РЕГЕНЕРАТИВНЫХ ПОДОГРЕВАТЕЛЕЙ

Система регенеративного подогрева питательной воды для ядерной паропроизводящей установки (ЯППУ) состоит из ряда подогревателей, включенных последовательно по воде. При этом подогреватели, включенные между деаэратором и конденсатором, называются подогревателями низкого давления (ПНД), а между деаэратором и ЯППУ — подогревателями высокого давления (ПВД). Для подогрева питательной воды используется пар из отборов турбины (из выходных патрубков ее цилиндров), который после отдачи теплоты основному конденсату в ПНД или пита-

Уровни воды в ПВД зависят от материального баланса расхода пара на отборы с турбины (расход на отборы зависит от общего расхода пара турбиной, т.е. от ее мощности) и расхода конденсата греющего пара. При этом возмущением на уровень в подогревателях является изменение расхода пара на отборы, а регулирующим воздействием — изменение расхода конденсата греющего пара. Контроль уровня конденсата начинается с отметки 4200 мм ПВД-6 и 3700 мм ПВД-7 от днища корпуса. Номинальный уровень при 100% нагрузке энергоблока 4800 мм для ПВД-6 и 4000 мм для ПВД-7. При повышении уровня до 5390 мм в ПВД-6 или до 4500 мм в ПВД-7 срабатывает защита на отключение данной группы подогревателей по пару.

Регенеративные подогреватели относятся к объектам, к которым не предъявляются строгие требования по точности поддержания регулируемого параметра — уровня воды. Так, например, уровень воды в ПВД-7 может колебаться в пределах от 3500 до 4500 мм. Это позволяет упростить регулятор уровня, реализовывая его по одноимпульсной схеме (сигнал по уровню) без ввода местной обратной связи по материальному балансу (импульсы по расходам греющего пара и его конденсата). Однако для обеспечения устойчивости такой системы приходится вводить жесткую обратную связь по положению регулирующего клапана и осуществлять П-закон регулирования. Такой регулятор имеет статическую погрешность по возмущению, но благодаря интегрирующим свойствам объекта сохраняет астатизм 1-го порядка, что исключает установившуюся ошибку по задающему воздействию. Рассматриваемая схема содержит один регулятор РУ-7 для ПВД-7 и два регулятора РУ-6К и РУ-6Д для поддержания уровня в ПВД-6 (обозначения регуляторов условны). Аппаратура автоматического регулирования построена на основе КТС «Каскад-2» и УКТС. Все три регулятора реализованы по схожим схемам. Основными входными сигналами являются заданные h_z и измеренные h уровни воды в ПВД. Выходной сигнал регулирующего устройства через блок включения регулятора и тиристорный усилитель мощности типа ПБР-3А подается на исполнительный механизм МЭО, управляющий регулирующими клапанами типа Т-149бс или Т-153бс. Блоками БВР управляет оператор посредством расположенных на БЩУ БРУ-32 (на схеме не показаны).

Так как из-за каскадного включения ПВД по дренажу конденсата греющего пара на уровень в ПВД-6 оказывает влияние регулятор уровня ПВД-7, для регулирования уровня ПВД-6 используются два регулятора РУ6-Д (основной) и РУ6-К (стерегущий) и вводится сигнал по положению регулирующего клапана ПВД-7. РУ6-К включается в работу при превышении ошибки РУ6-Д заданного значения. Для этого у стерегущего регулятора устанавливается более широкая зона нечувствительности и больший заданный уровень h_z , что исключает явление «гонок» регуляторов.

6.5.6. РЕГУЛЯТОР ПИТАНИЯ БАРАБАНА-СЕПАРАТОРА

Данный регулятор предназначен для поддержания уровня воды в БС энергоблоков с реакторами РБМК-1000 с точностью ± 50 мм посредством изменения расхода питательной воды регулирующими питательными клапанами (РПК). Регулятор должен обеспечить материальный баланс между расходом пара на турбины и притоком питательной воды от деаэраторов при заданном уровне воды в БС. При снижении уровня на 200 мм и 1000 мм последовательно срабатывают аварийные защиты АЗ-1 и АЗ-5 соответственно. АЗ-5 срабатывает также при повышении уровня на 150 мм. Один регулятор обслуживает два БС одной половины энергоблока, связанных водяной перемычкой. Всего на одном энергоблоке устанавливаются четыре регулятора уровня в БС, два из которых являются пусковыми (включаются в работу только во

* В режиме АЗ-1 мощность блока уменьшается до уровня 60% от номинального. В режиме АЗ-5 — до нуля.

время пуска энергоблока). Каждый из регуляторов может воздействовать на один (в режиме нормальной эксплуатации) или два (в аварийных режимах) РПК.

Рассмотрим функциональную схему автоматического регулятора уровня (рис. 6.46). Регулятор выполнен в трехимпульсной схеме. Регулируемой величиной является уровень питательной воды в БС. Так как оба БС соединены по воде, то, как правило, ограничиваются измерением уровня в одном из них. Измерение производится гидростатическим методом с применением двухкамерных уравнительных сосудов с базой 1600 мм (+400, -1200). В качестве уровнемера используется дифференциальный манометр «Сапфир-22ДД» на номинальный перепад 1600 мм в. ст. При этом крутизна уровнемера равна $\gamma_y = 0,00313$ мА/мм H_2O или 0,05 мА/%. Сигнал измеренного уровня (оценки уровня) h подается на регулирующее устройство РП4-УМ, где сравнивается с сигналом заданного уровня h_z от ручного задатчика РЗД-22, расположенного на БЦУ. Кроме h и h_z для формирования рассогласования ε используется сигнал дополнительной обратной связи e , вырабатываемый блоком суммирования и демпфирования $\varepsilon = h_z - h + e$.

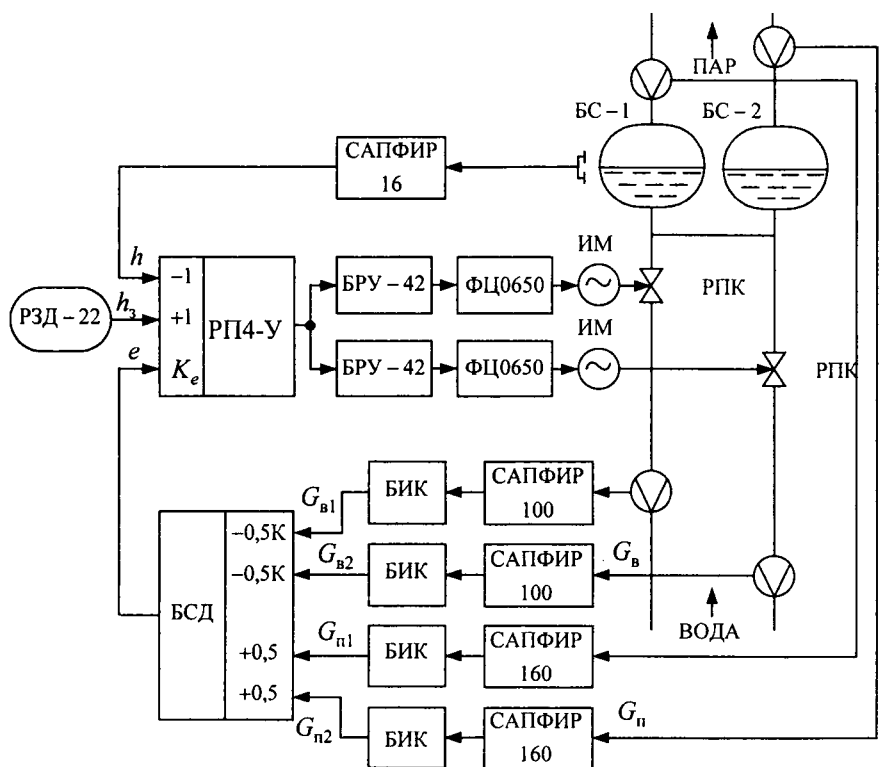


Рис. 6.46. Упрощенная функциональная схема автоматического регулятора уровня в БС одной половины энергоблока с РБМК-1000

Сигналы по расходу питательной воды G_v поступают от блоков извлечения корня (БИК) и двух измерительных преобразователей «Сапфир-22ДД» с диапазоном 0–100 кПа. Дроссельные устройства по воде рассчитаны на перепад 1 кгс/см² при объемном расходе воды 1600 м³/ч. С учетом плотности воды 0,912 т/м³ при температуре 165°C крутизна водомера равна $\gamma_v = 0,00336$ мА/(т/ч) или 0,0538 мА/(% расхода воды).

Сигналы по расходу пара G_n поступают от двух БИК и измерительных преобразователей «Сапфир-22ДД» с диапазоном 0–160 кПа, которые совместно с дроссельными устройствами, рассчитанными на перепад давления 1,6 кгс/см² при расходе 1600 т/ч, обеспечивают крутизну паромера равной $\gamma_n = 0,0031$ мА/(т/ч) или 0,049 мА/(% расхода пара).

Так как сигналы по расходу питательной воды G_b , отражающие действия РО, и сигналы по расходу пара G_n , отражающие возмущение со стороны турбины на БС, имеют отличные крутизны, при формировании сигнала e дополнительной обратной связи необходимо учитывать их знаки и ввести масштабный коэффициент K , т.е. $e = 0,5G_{n1} + 0,5G_{n2} - 0,5K(G_{b1} + G_{b2})$. Коэффициент K на соответствующих входах БСД выбирается из условия $K = (2\gamma_n - \gamma_y H_G) / 2\gamma_b$, где H_G — неравномерность показаний уровнемера $H_G = \Delta h / \Delta G_b \approx -0,25$ мм/%.

Выход РП4-УМ через блоки ручного управления БРУ-42 может быть подключен к одному или двум исполнительным механизмам РПК. В режиме нормальной работы блока один из ИМ получает сигнал от регулирующего устройства и осуществляет автоматическое поддержание заданного уровня (его БРУ в положении «А»). Другой ИМ находится в горячем резерве (его БРУ в положении «Р») и позволяет осуществлять ручное дистанционное управление соответствующим РПК. В аварийных режимах сигнал АЗ инициирует переключение обоих БРУ в положение «А», что обеспечивает двойную скорость изменения расхода питательной воды и позволяет удерживать уровень в допустимых пределах.

На динамику переходных процессов в БС влияет не только регулятор уровня, но и регулятор давления. Однако влияние регулятора уровня на давление существенно слабее влияния регулятора давления на уровень в БС. Поэтому вначале настраивают АРД, что позволяет настраивать регулятор уровня, считая давление постоянным.

Приведем некоторые рекомендации по настройке регулятора уровня. Ширина зоны нечувствительности Δ выбирается равной 10 мм, что обеспечивает такую же статическую погрешность поддержанию уровня. С учетом крутизны уровнемера для РП4-УМ $\Delta_{нч} = 0,63\%$. Постоянная времени демпфирования $T_\phi = 0,5TA / \Delta$, где A — амплитуда, в мм, T — период пульсаций уровня БС без автоматического регулятора, в с. Постоянная времени изодрома $T_{из} = (0,5 \div 1)T_\phi$. Коэффициент передачи регулятора $K_n = 100 / (VT_{им})$, где $T_{им}$ — время полного открытия РПК, а скорость связи выбирают равной $V = 400K\gamma_b / (2 \div 3) / T_{им}$. Сигнал рассогласования в РП-4У формируется в соответствии с выражением $\varepsilon = h_3 - h + K_e e$. В качестве оптимального K_e в [148] рекомендовано значение $K_e = \gamma_y / (0,3\gamma_b K)$, где γ_y в мА/мм, а γ_b в мА/%. Минимальная длительность выходных импульсов 0,3–0,7 с, что обеспечивает оптимальное соотношение между точностью поддержания заданного уровня и частотой срабатываний ИМ.

6.5.7. РЕГУЛЯТОР ДАВЛЕНИЯ ПАРА В БАРАБАНЕ-СЕПАРАТОРЕ

Автоматический регулятор давления (АРД) предназначен для поддержания заданного давления пара в барабанах-сепараторах энергоблоков с РБМК-1000. Давление в БС зависит от мощности реактора (генерация пара), мощности турбогенераторов (потребление пара) и расхода питательной воды и регулируется путем приведения потребления пара в соответствие с его генерацией. АРД регулирует давление до

стопорно-регулирующих клапанов (СРК) турбин и часто называется регулятором давления «до себя» (РДС).

В условиях нормальной эксплуатации давление пара поддерживается равным $69 \pm 0,25$ кГс/см². Обычно на энергоблок устанавливается один или два АРД, управляющие одним (в режиме нормальной эксплуатации) или обоими (в аварийных режимах) механизмами управления турбиной (МУТ).

При АЗ-1 происходит управляемое снижение мощности реактора до 60% номинальной, что вызывает провал давления. Допускается уменьшение давления до 65 кГс/см². Причиной срабатывания АЗ-2 является отключение одного из турбогенераторов. Несмотря на то что при этом мощность реактора снижается до 50–55% номинальной величины, тепловая инерция реактора приводит к росту давления в БС. При повышении давления до 71,5 кГс/см² автоматически включаются «стерегущие» регуляторы давления, так называемые быстрые редукиционные установки в конденсатор (БРУ-К), сбрасывающие пар мимо турбин в конденсаторы. БРУ-К отличаются от АРД величиной заданного давления и тем, что управляют не МУТ, а клапанами (четыре клапана на энергоблок) сброса пара в конденсаторы. В случае дальнейшего роста давления в работу включаются релейные регуляторы, которые открывают главные предохранительные клапаны, сбрасывающие пар в барботер. Повышение давления до 73,5 кГс/см² вызывает срабатывание АЗ-5, приводящее к полному останову энергоблока.

АРД в стандартном исполнении строится по схеме одноимпульсного регулятора (рис. 6.47).

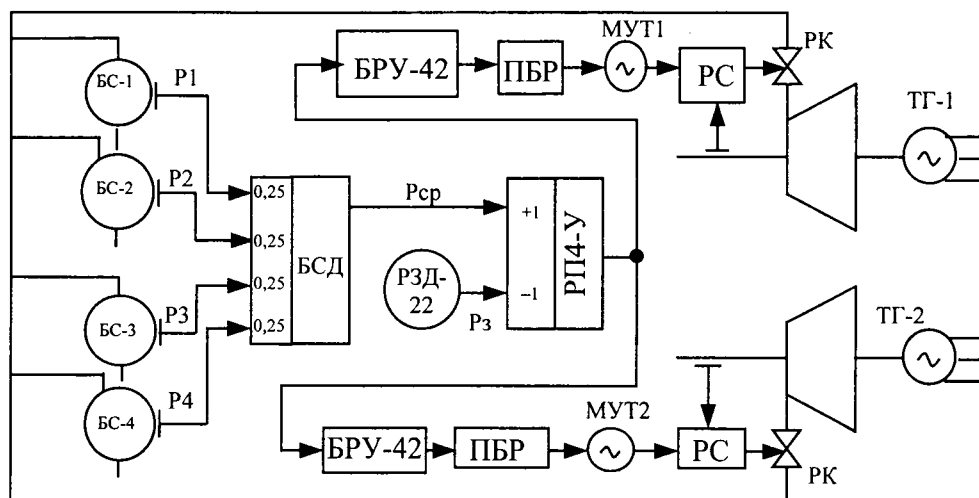


Рис. 6.47. Функциональная схема автоматического регулятора давления в БС

Давление в БС контролируется с помощью двух–четырех датчиков (манометров) типа «Сапфир-22ДД» с диапазоном 40–80 кГс/см², сигналы которых подаются на блок суммирования и демпфирования. Выходной сигнал БСД P_{cp} представляет среднее значение давления в БС и подается на один из входов регулирующего блока РП4-У. На другой вход РП4-У поступает сигнал заданного давления P_z от ручного датчика РЗД-22, расположенного на БЦУ.

Совместно с ИМ постоянной скорости МУТ, АРД реализовывает ПИ-закон регулирования. Посредством БРУ-42 выходной сигнал регулирующего устройства может

быть направлен к ИМ МУТ одной или обеих турбин. В режиме нормальной эксплуатации один из БРУ находится в положении «А», а другой — «Р». Пусть выход РП4-У соединен с ИМ МУТ1. В этом случае ТГ-1 участвует в регулировании давления в БС. Если, например, частота электросети уменьшится, то гидравлические регуляторы скорости (РС) турбин приоткроют регулирующие клапаны и увеличат расход пара, что вызовет уменьшение давления в БС. Однако возникший при этом сигнал рассогласования $P_3 - P_{ср}$ посредством РП4-У и ИМ переместит буксу МУТ1 в сторону уменьшения мощности ТГ-1, что заставит его гидравлический регулятор скорости закрывать регулирующие клапаны турбины до восстановления давления в БС. После переходного процесса установится равновесное состояние при новой частоте в сети. При этом мощность ТГ-2 возрастет, а мощность ТГ-1 уменьшится, а их сумма останется без изменения. Таким образом, при помощи АРД электрическая мощность энергоблока автоматически подстраивается под тепловую мощность реактора, т.е. осуществляется базовый режим регулирования энергоблока.

Для настройки АРД рекомендуется ширину зоны нечувствительности выбрать равной $0,3 \text{ кгс/см}^2$, постоянную изодрома $T_{из} = 20 \text{ с}$, коэффициент передачи регулятора $K_n = 75 / (n \gamma_d)$, где n — количество манометров в АРД, γ_d — крутизна манометра, $\text{мА/\%}$ (для рассматриваемого АРД $\gamma_d = 0,063 \text{ мА/\%}$), скорость связи $V = 100 / (K_n t_{им})$, $t_{им}$ — время перемещения ИМ буксы МУТ из одного крайнего положения в другое ($t_{им} = 30 \div 50 \text{ с}$).

6.5.8. ЦИФРОВОЙ РЕГУЛЯТОР ДАВЛЕНИЯ ПАРА В БАРАБАНЕ-СЕПАРАТОРЕ

По сравнению с аналоговыми АРД, данный регулятор позволил повысить надежность тепловой автоматики путем введения автоматического контроля исправности измерительных каналов и исполнительных механизмов, самодиагностики и резервирования технических и программных средств, реализации автоподстройки и переменной структуры.

Цифровой регулятор давления (ЦРД) в БС разработан на основе аппаратуры Ремиконт РК-131/300 и предназначен для автоматического поддержания давления в диапазоне $62 \div 72 \text{ кгс/см}^2$ с точностью $\pm 0,25 \text{ кгс/см}^2$ при изменении электрической нагрузки любого ТГ в пределах от 70 до 500 МВт в условиях нормальной эксплуатации и стабилизации давления при срабатывании АЗ.

Заданное давление поддерживается за счет обеспечения баланса двух процессов: генерации пара в ЯР и потреблении пара турбинами.

ЦРД (рис. 6.48) состоит из двух одинаковых каналов регулирования, один из которых находится в горячем резерве. Каждый из каналов работает по сигналам трех датчиков давления в БС, одного датчика давления за стопорно-регулирующими клапанами (СРК), двух датчиков положения буксы механизмов управления турбинами ТГ1 и ТГ2, одного ручного задатчика РЗД-22 и управляет посредством бесконтактного реверсивного пускателя ПБР-2М одним или двумя исполнительными механизмами постоянной скорости МЭО-16. Исполнительный механизм перемещает буксу МУТ и меняет посредством гидравлического регулятора скорости (РС) расход пара турбины.

Основу ЦРД составляют два блока контроллера БК-1, один блок переключения БПР-10, два блока ручного управления БРУ-42 и один — БРУ-22. Всего ЦРД использует 16 аналоговых и 16 дискретных входных сигналов и вырабатывает соответственно 4 и 16 выходных сигналов.

Заданное давление P_3 устанавливается оператором блока посредством РЗД-22. Узел задания давления (УЗД) ограничивает скорость изменения уровня заданного

давления величиной $1 \text{ (кгс/см}^2\text{)/мин}$ и осуществляет непрерывный контроль исправности РЗД. Далее P_3 сравнивается с измеренным давлением в БС P_{6c} и сигнал рассогласования через ПД-регулятор, исполнительный механизм и МУТ управляет расходом пара турбины.

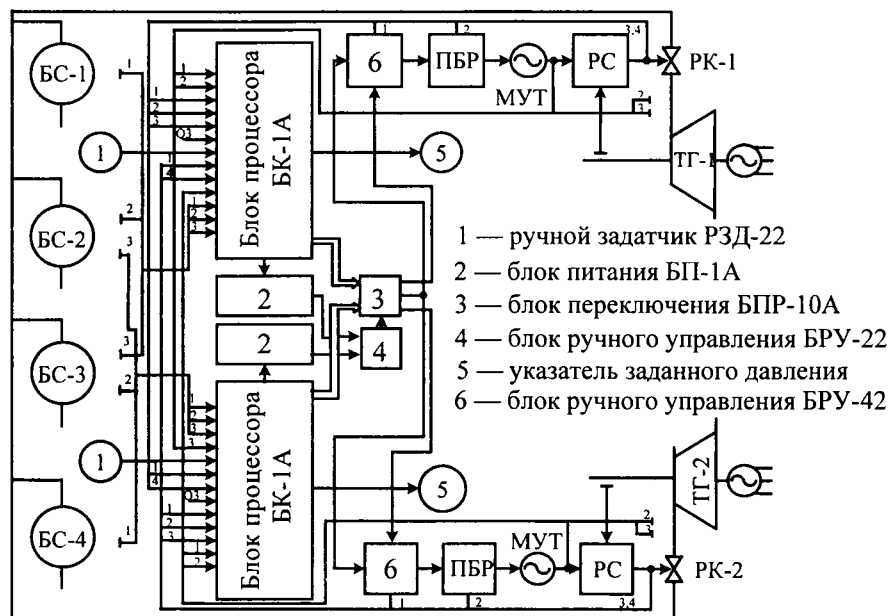


Рис. 6.48. Функциональная схема цифрового регулятора давления в барабанах-сепараторах: БС-1-БС-4 — барабаны-сепараторы; ТГ-1, ТГ-2 — турбогенераторы

ПД-регулятор совместно с ИМ постоянной скорости реализовывают ПИ-закон регулирования.

Алгоритм регулирования давлением отличается введением внутреннего малоинерционного контура регулирования по сигналу давления за СРК и автоматическим изменением параметров регулятора при срабатывании АЗ (рис. 6.49).

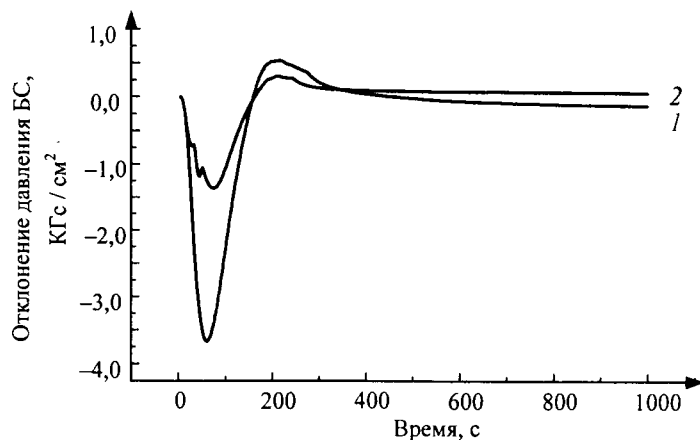


Рис. 6.49. Ожидаемое отклонение давления при срабатывании АЗ-1: 1 — аналоговый регулятор РП4-УМ, 2 — ЦРД

При срабатывании АЗ-1 допускается провал давления до 65 кгс/см^2 . Последующее перерегулирование не должно привести к срабатыванию стерегущих регуляторов давления БРУ-К. Введение узла настройки усиления (УНУ) позволяет без последующего перерегулирования величину провала уменьшить до 1 кгс/см^2 . Это достигается автоматическим управлением реальным скользящим процессом, который возникает в нелинейных системах с переменной структурой.

При работе энергоблока в базовом режиме основным возмущением давления БС является изменение электрической нагрузки ТГ. Отслеживая изменения частоты сети, гидравлический регулятор скорости турбины меняет расход пара и соответственно давление в БС. Чтобы уменьшить влияние электрической сети на энергоблок, в ЦРД предусмотрен быстродействующий контур регулирования давления пара за стопорно-регулирующими клапанами (СРК). Дифференциальный регулятор (Д) совместно с ИМ реализовывают П-закон регулирования. Так как давление за СРК однозначно связано с электрической нагрузкой ТГ, при изменении частоты в сети данный контур посредством МУТ подстраивает его мощность так, чтобы уменьшить влияние нагрузки на давление в БС (кривые 1, 2, рис. 6.50).

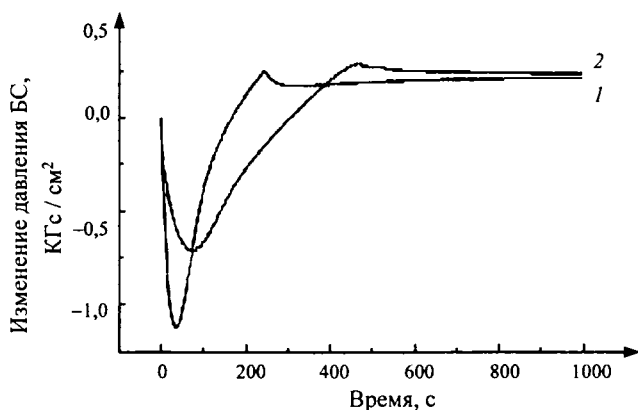


Рис. 6.50. Расчетная реакция ЦРД на увеличение электрической нагрузки ТГ на 100 МВт:
1 — аналоговый регулятор РП4-УМ, 2 — ЦРД

Дополнительно ЦРД обеспечивает контроль исправности исполнительных механизмов и всех каналов измерения давления. При обнаружении отказа соответствующий канал автоматически отключается, ЦРД перенастраивается на работу без отключенного сигнала, а на БЩУ загорается индикатор «Вызов к комплекту ЦРД №1 (2)». Если количество одновременных отказов не позволяет ЦРД выполнять основную функцию, происходит безударный переход на второй комплект аппаратуры. Информация об этом поступает на БЩУ и в систему централизованного контроля «Скала». Для осуществления автоматического поддержания заданного уровня достаточно одного из шести заложенных в проекте сигналов давления в БС и одного ИМ.

6.5.9. ЦИФРОВОЙ РЕГУЛЯТОР РАЗВОРОТА ТУРБОГЕНЕРАТОРОВ

Регулятор разворота предназначен для автоматического пуска турбогенераторов от нулевых оборотов до номинальных со скоростью, зависящей от теплового состояния турбины, и используется на некоторых энергоблоках с РБМК-1000.

Цифровой регулятор разворота (ЦРР) состоит из одного канала регулирования и работает по непрерывным сигналам двух датчиков оборотов ТГ1 и ТГ2, двух датчиков температуры внутреннего корпуса цилиндра высокого давления ТГ1 и ТГ2, а также по дискретным сигналам открытия стопорных заслонок и достижения номи-

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ САУ

Содержание заданий можно условно подразделить на две группы:

- группа заданий, содержание которых направлено на освоение теоретических положений, которые изложены в настоящем томе;
- группа заданий, содержание которых направлено на решение конкретных (иногда достаточно сложных) задач, связанных с проблемой синтеза систем автоматического управления.

ЗАДАНИЕ 1

Структурные схемы систем автоматического управления представлены на рис. 3.1.1–3.1.23, причем численные значения параметров не указаны. Изучите физику работы САУ по источникам, приведенным в томе 1.

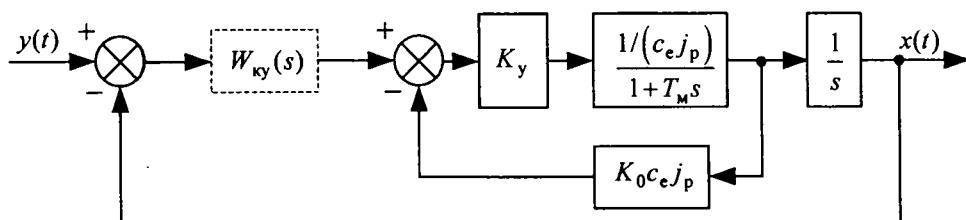


Рис. 3.1.1. Следящая система с асинхронным двухфазным двигателем и жесткой отрицательной связью по скорости

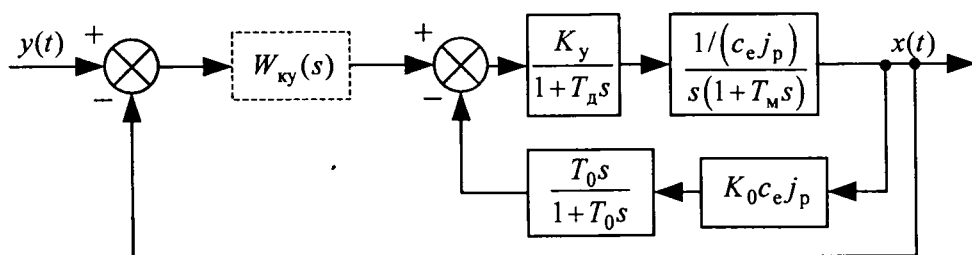


Рис. 3.1.2. Следящая система копировально-фрезерного станка

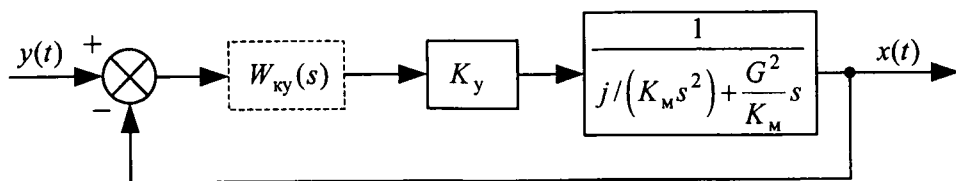


Рис. 3.1.3. Следящая система стабилизации сектора обзора

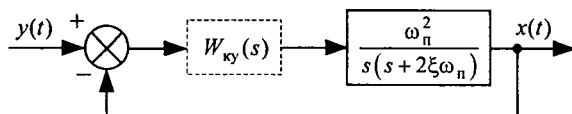


Рис. 3.1.4. Система автосопровождения цели

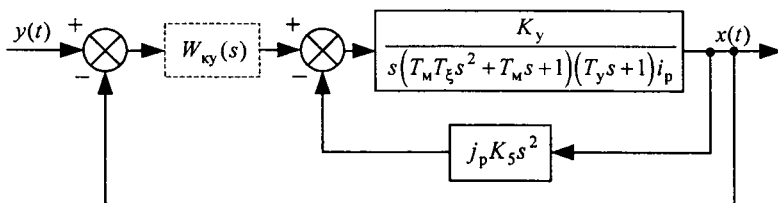


Рис. 3.1.5. Следящая система с электромашинным усилителем и исполнительным двигателем постоянного тока

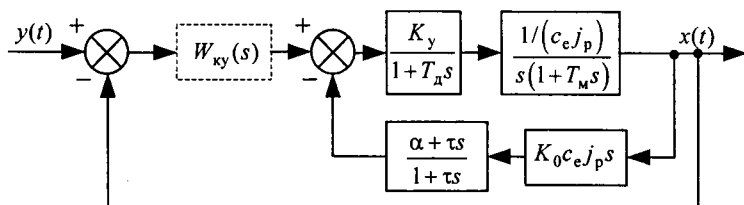


Рис. 3.1.6. Следящая система с гибкой и жесткой обратными связями по скорости

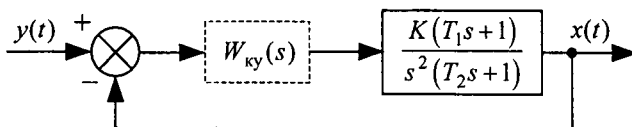


Рис. 3.1.7. Следящая система

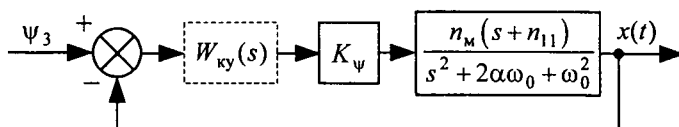


Рис. 3.1.8. Система управления угловой скоростью рысканья

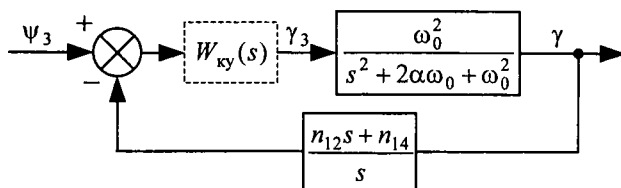


Рис. 3.1.9. Система управления креном с учетом перекрестных связей

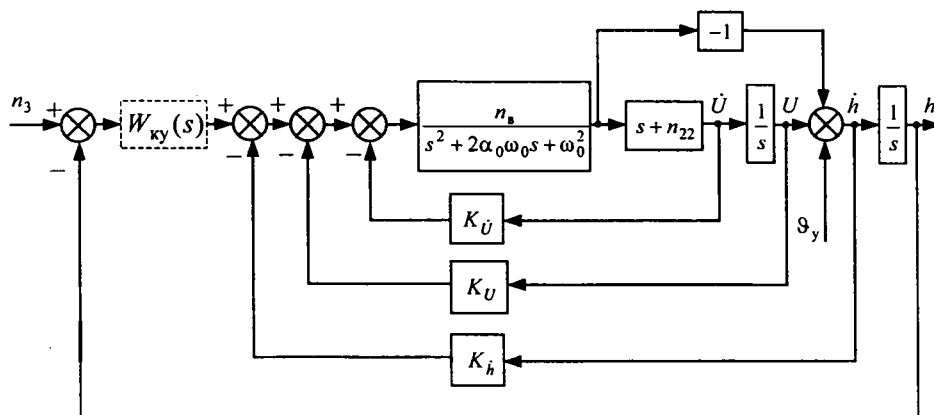


Рис. 3.1.10. Система управления высотой полета летательных аппаратов

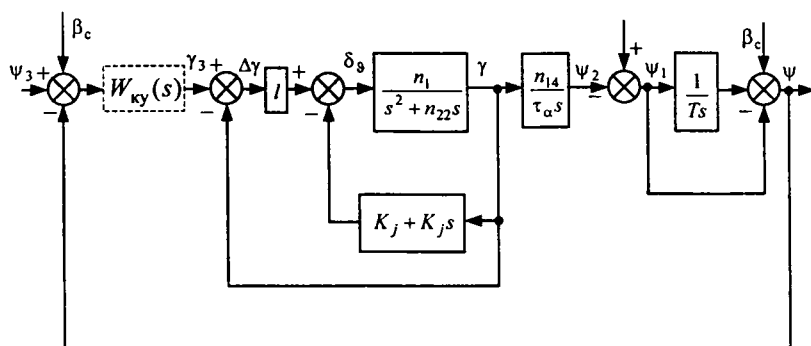


Рис. 3.1.11. Система управления курсовым углом ведомого самолета

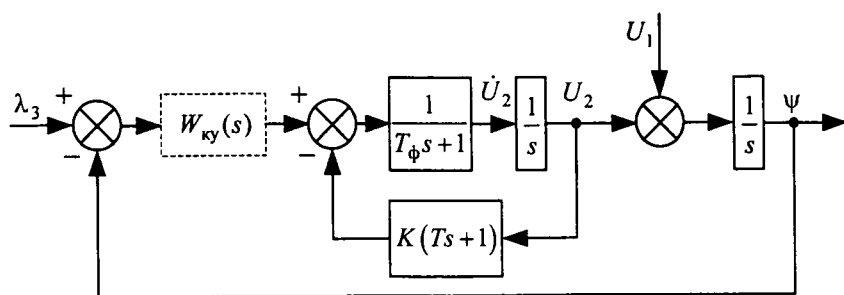


Рис. 3.1.12. Система управления временной дистанцией

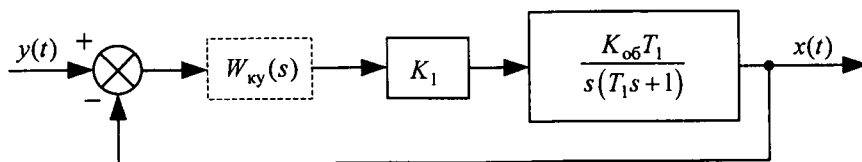


Рис. 3.1.13. Следящая система

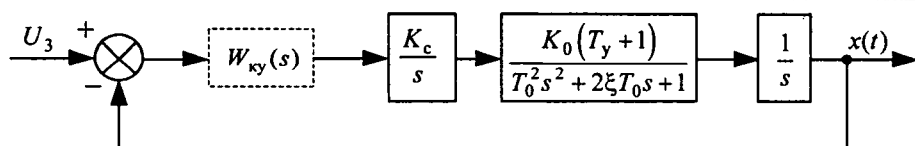


Рис. 3.1.14. Система автоматического управления полетом баллистической ракеты на активном участке

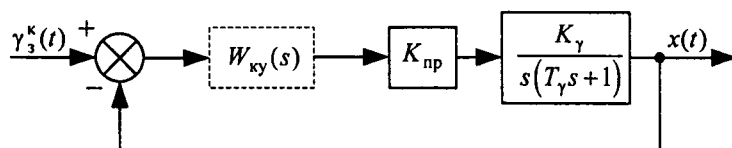


Рис. 3.1.15. Канал управления креном ракеты

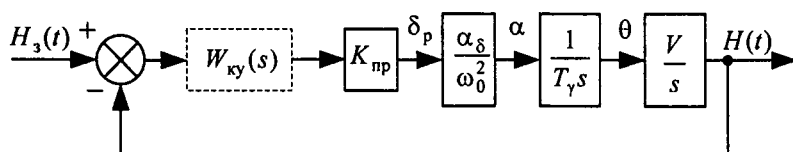


Рис. 3.1.16. Система стабилизации высоты полета ракеты

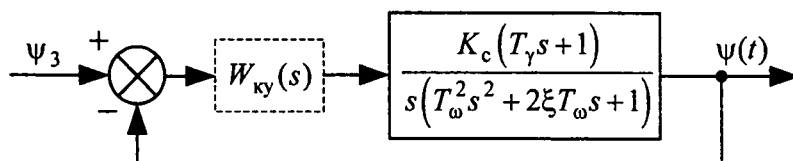


Рис. 3.1.17. Система управления углом рысканья крестовылого реактивного снаряда

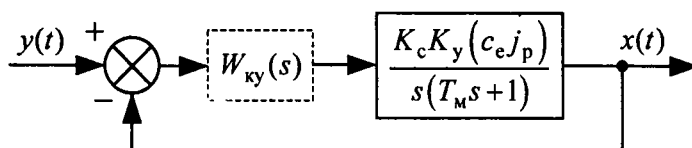


Рис. 3.1.18. Следящая система с асинхронным двухфазным двигателем

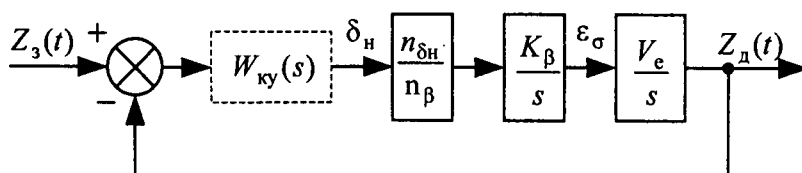


Рис. 3.1.19. Система управления центром тяжести крестовылого снаряда в боковом движении

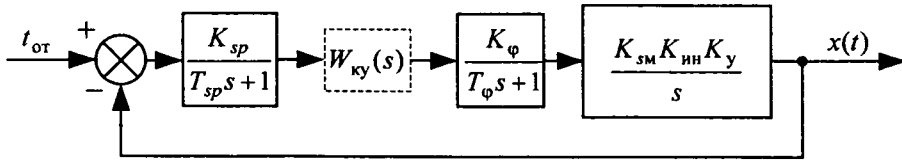


Рис. 3.1.20. Радиолокационные станции автоматического сопровождения цели по дальности

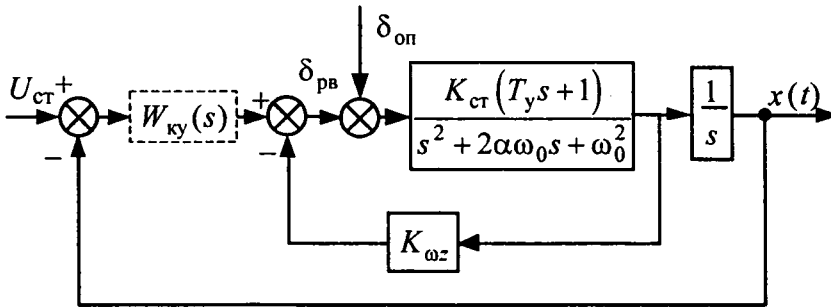


Рис. 3.1.21. Контур стабилизации угла тангажа

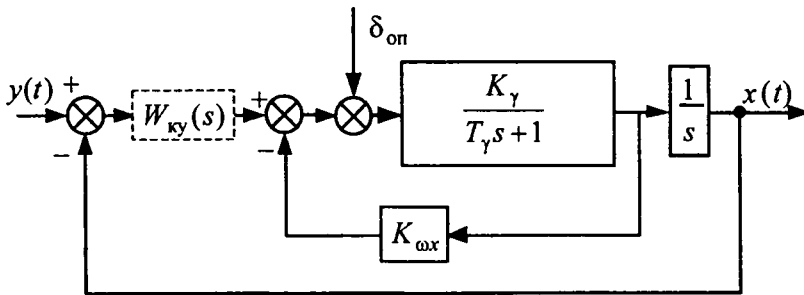


Рис. 3.1.22. Контур стабилизации крена

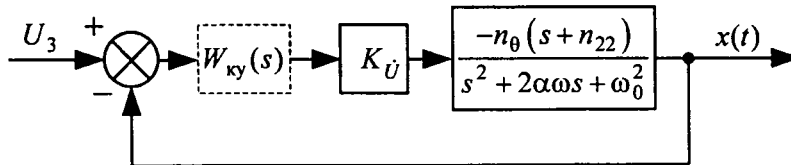


Рис. 3.1.23. Система управления угловой скоростью тангажа

Постройте в общем виде (без задания численных значений параметров неизменяемой части) алгоритмы расчета параметров регулятора $p_1, p_2, \dots, p_r$ (структура регулятора и изменяемые параметры $p_1, p_2, \dots, p_r$ задаются преподавателем) такие, которые обеспечили бы заданное качество переходного процесса ($T_p \leq T_{p \text{ доп}}$; $\sigma\% \leq \sigma\%_{\text{доп}}$; $c_0 \leq c_{0 \text{ доп}}$; $c_1 \leq c_{1 \text{ доп}}$; ...), пользуясь методами:

- динамической компенсации;
- математического программирования (решение задачи проводится во временной и частотной областях);
- проекционным;
- стандартных передаточных функций;
- уравнений синтеза;
- стандартных коэффициентов.

При необходимости доведите расчет до конкретных численных результатов, задавая численными значениями параметров неизменяемой части, структурой регулятора и изменяемыми параметрами $p_1, p_2, \dots, p_r$; разработайте соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение.

Методы, использующие аппарат нелинейного программирования, предполагают нахождение глобального экстремума. Решение этой задачи встречает серьезные трудности (это относится ко всем задачам, рассмотренным в книге и использующим нелинейное программирование). Распространены методы поиска глобального экстремума, связанные с использованием метода статистических испытаний. Непосредственное применение метода статистических испытаний, с высокой точностью позволяющего найти глобальный экстремум, требует большого числа испытаний.

Поэтому, как правило, используется сочетание метода статистических испытаний с методом локального поиска. На первом этапе методом статистических испытаний с использованием больших шагов в различных областях поиска находится несколько опорных точек, в которых выполняются все ограничения задачи. На втором этапе поиск производится в окрестности опорных точек с использованием методов поиска локального экстремума. Наименьшее из полученных значений функционала качества принимается за ее глобальный экстремум. Отметим, что некоторые методы синтеза регуляторов в неявной форме реализуют принцип динамической компенсации и этот факт надо учитывать при синтезе корректирующих устройств.

Прежде чем синтезировать регуляторы с заданной ПФ, необходимо учесть следующие соображения.

Передаточная функция регулятора может быть реализована технически, если у нее степень полинома знаменателя больше или равна степени полинома числителя. Это — грубое условие реализуемости, здесь не учитываются ПФ, удовлетворяющие этому условию, но имеющие малые постоянные времени.

Возможность реализовать замкнутую САУ еще не означает, что при заданной неизменяемой части может быть реализовано корректирующее устройство.

Для того чтобы регулятор был реализуем, необходимо, чтобы ПФ замкнутой системы обладала некоторым избытком степени знаменателя над степенью числителя.

ЗАДАНИЕ 2

Решите задачу синтеза системы автоматического управления (табл. 3.1.1) методами, изложенными в главе 1 (вариант и конкретный метод синтеза определяются преподавателем), выбрав структуру корректирующего устройства и рассчитав его параметры таким образом, чтобы переходной процесс скорректированной системы удовлетворял заданным показателям качества и точности:

$$\sigma \leq \sigma^{\text{зад}}, T_p \leq T_p^{\text{зад}}, C_0 \leq C_0^{\text{зад}}, C_1 \leq C_1^{\text{зад}}, C_2 \leq C_2^{\text{зад}}.$$

Структурные схемы систем представлены на рис. 3.1.24, а передаточные функции неизменяемой части системы, а также требования к синтезируемой системе приведены в табл. 3.1.1.

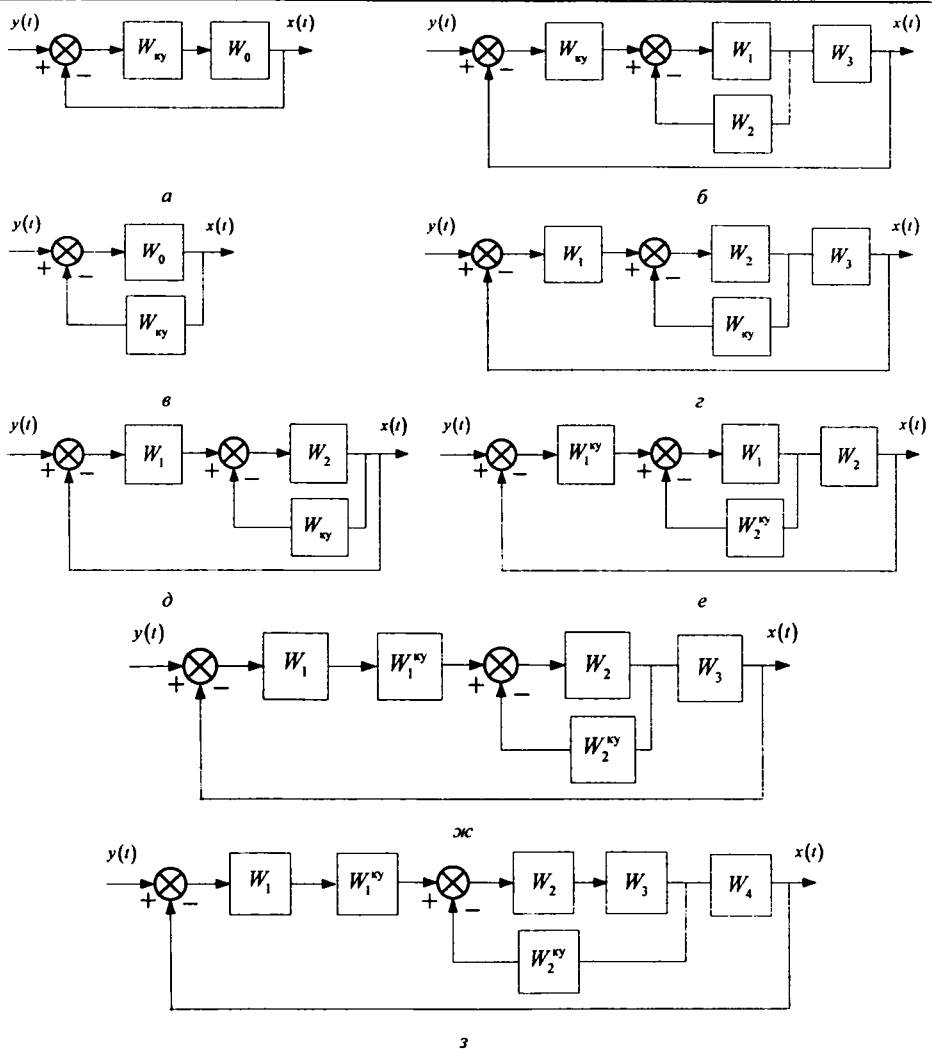


Рис. 3.1.24. Структурные схемы систем управления

Таблица 3.1.1

№	Неизменяемая часть системы	Требования к синтезируемой системе				
		$\sigma^{\text{нл}}, \%$	$T_y^{\text{нл}}, \text{с}$	$c_0^{\text{нл}}$	$c_1^{\text{нл}}$	$c_2^{\text{нл}}$
1	2	3	4	5	6	7
Выбрать структуру и рассчитать параметры последовательного КУ (рис. 3.1.24, а)						
1	$W_0(s) = \frac{1}{s(0,011s+1)(0,002s+1)}$	35	0,5	0	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{32}$
2	$W_0(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$	15	1	0	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{100}$
3	$W_0(s) = \frac{1}{s(s+1)}$	25	0,8	0	$\frac{1}{350}$	$\frac{1}{120}$

Продолжение табл. 3.1.1

1	2	3	4	5	6	7
4	$W_0(s) = \frac{1}{(s^2 + 10s + 100)}$	10	0,15	0	$\frac{1}{260}$	$\frac{1}{130}$
5	$W_0(s) = \frac{1}{s(s^2 + 4s + 9)}$	5	0,5	0	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{140}$
6	$W_0(s) = \frac{5000}{s(s + 1000)(s + 20)}$	10	0,1	0	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{100}$
7	$W_0(s) = \frac{10}{s(0,25s + 1)(0,01s + 1)(0,002s + 1)}$	45	0,7	0	$\frac{1}{1000}$	$\frac{1}{88}$
8	$W_0(s) = \frac{400}{s(0,0143s + 1)(0,005s + 1)(0,00125s + 1)}$	35	0,6	0	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{40}$
9	$W_0(s) = \frac{200}{s(0,66s - 1)(0,005s + 1)}$	30	0,35	0	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{88}$
10	$W_0(s) = \frac{200}{s(0,1s + 1)(0,025s + 1)(0,01s + 1)(0,005s + 1)}$	30	0,8	0	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{18}$
11	$W_0(s) = \frac{120}{s^2(0,0005s + 1)(0,0001s + 1)^2}$	45	0,0425	0	$\frac{1}{480}$	$\frac{1}{90}$
12	$W_0(s) = \frac{300}{s(0,01678s + 1)(0,0055s + 1)(0,001s + 1)}$	40	0,7	0	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{36}$
13	$W_0(s) = \frac{2}{s(0,25s + 1)(0,0025s + 1)(0,001s + 1)^2}$	40	0,175	0	$\frac{1}{2000}$	$\frac{1}{1170}$
14	$W_0(s) = \frac{125}{s(0,66s - 1)(0,005s + 1)}$	30	0,55	0	$\frac{1}{125}$	$\frac{1}{60}$
15	$W_0(s) = \frac{100}{s(5s + 1)(0,0125s + 1)(0,005s + 1)}$	20	0,4	0,1	—	—
16	$W_0(s) = \frac{1}{s(0,2s + 1)(0,0016s^2 + 0,06s + 1)(0,025s + 1)(0,005s + 1)}$	25	0,8	0	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{8}$
17	$W_0(s) = \frac{20}{s^2(0,04s + 1)(0,01s + 1)(0,002s + 1)}$	35	0,6	0	0	$\frac{1}{60}$
18	$W_0(s) = \frac{200}{s(0,1s + 1)(0,02s + 1)(0,01s + 1)(0,005s + 1)}$	30	0,8	0	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{16}$
19	$W_0(s) = \frac{32}{(0,05s + 1)(0,1s + 1)(0,2s + 1)}$	20	0,6	0,03	—	—
20	$W_0(s) = \frac{100}{s^2(0,04s + 1)(0,01s + 1)(0,002s + 1)}$	30	0,45	0,01	—	—
Выбрать структуру и рассчитать параметры последовательного КУ (рис. 3.1.24, б)						
21	$W_1(s) = \frac{18}{(2s + 1)^2}$, $W_2(s) = 0,5$, $W_3(s) = \frac{1}{30s}$	20	10	0	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{70}$
Решить задачу синтеза параллельного КУ (рис. 3.1.24, в)						
22	$W_0(s) = \frac{20}{s^2(0,0143s + 1)(0,005s + 1)(0,00125s + 1)}$	35	0,6	0	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{40}$
23	$W_0(s) = \frac{10}{s(0,01s + 1)(0,034s + 1)(0,0283s + 1)}$	30	0,8	0	$\frac{1}{450}$	$\frac{1}{80}$
24	$W_0(s) = \frac{10}{s(s + 1)(s + 10)}$	25	0,7	0	$\frac{1}{350}$	$\frac{1}{90}$

Продолжение табл. 3.1.1

1	2	3	4	5	6	7
25	$W_0(s) = \frac{1}{s(0,001s+1)(0,5s+1)}$	15	0,4	0	$\frac{1}{450}$	$\frac{1}{120}$
26	$W_0(s) = \frac{20}{s(s+1)(0,1s+1)(s+1000)}$	10	0,5	0	$\frac{1}{270}$	$\frac{1}{80}$
27	$W_0(s) = \frac{5}{(10s+1)(20s+1)(s+10)}$	10	10	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{24}$
28	$W_0(s) = \frac{1}{(0,5s+1)(0,1s+100)(s+1)^2}$	10	1,5	0	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{32}$
Выбрать структуру и рассчитать параметры параллельного КУ (рис. 3.1.24, з)						
29	$W_1(s) = \frac{2,5}{(0,07s+1)}, W_2(s) = \frac{100}{(0,0625s^2 + 0,35s+1)},$ $W_3(s) = \frac{1}{(0,4s+1)}$	18	0,9	0,01	—	—
Выбрать структуру и рассчитать параметры параллельного КУ (рис. 3.1.24, д)						
30	$W_1(s) = \frac{40}{(0,013s+1)(0,001s^2 + 0,007s+1)},$ $W_2(s) = \frac{25}{s(0,002s+1)(0,02s+1)(0,11s+1)}$	40	1	0	$\frac{1}{200}$	$\frac{1}{32}$
31	$W_1(s) = 30, W_2(s) = \frac{12}{s(0,1s+1)(0,003s+1)(0,001s+1)}$	20	0,25	0	$\frac{1}{360}$	$\frac{1}{8}$
Выбрать структуру и рассчитать параметры последовательно-параллельного КУ (рис. 3.1.24, е)						
32	$W_1(s) = \frac{2,1}{(0,3s+1)(0,125s+1)(0,04s+1)}, W_2(s) = \frac{1}{s}$	30	1,5	0	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{8}$
33	$W_1(s) = \frac{1}{(0,03s+1)(0,265s+1)(0,02s+1)}, W_2(s) = \frac{1}{s(2s+1)}$	35	1,5	0	$\frac{1}{80}$	$\frac{1}{16}$
Выбрать структуру и рассчитать параметры последовательно-параллельного КУ (рис. 3.1.1, ж)						
34	$W_1(s) = 20, W_2(s) = \frac{194}{(0,69s+1)(0,0525s+1)(0,002s+1)},$ $W_3(s) = \frac{2,55 \cdot 10^{-2}}{s(0,00805s+1)(0,00608s+1)}$	30	3	0	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{3}$
35	$W_1(s) = 1200, W_2(s) = \frac{20}{(0,167s+1)}, W_3(s) = \frac{0,01}{s(0,5s+1)}$	40	1,5	0	$\frac{1}{240}$	$\frac{1}{5}$
36	$W_1(s) = 2000, W_2(s) = \frac{20}{(0,15s+1)(0,05s+1)},$ $W_3(s) = \frac{0,01}{s(0,08s+1)}$	40	0,4	0	$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{25}$
37	$W_1(s) = \frac{2000}{(0,001s+1)}, W_2(s) = \frac{16}{(0,08s+1)^2},$ $W_3(s) = \frac{0,01}{s(0,1s+1)(0,008s+1)}$	35	0,5	0	$\frac{1}{320}$	$\frac{1}{25}$
Решить задачу синтеза последовательно-параллельного КУ (рис. 3.1.24, з)						
38	$W_1(s) = \frac{2500}{(0,009s+1)}, W_2(s) = \frac{10}{(0,01s+1)},$ $W_3(s) = \frac{2}{s(2,5s+1)(0,05s+1)}, W_4(s) = 0,01$	35	0,3	0	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{40}$

Продолжение табл. 3.1.1

1	2	3	4	5	6	7
39	$W_1(s) = 1500,$ $W_2(s) = \frac{15}{(0,05s+1)(0,0025s+1)},$ $W_3(s) = \frac{10}{s(0,0036s^2+0,084s+1)}, W_4(s) = 0,001$	38	0,4	0	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{25}$
40	$W_1(s) = \frac{1200}{0,01s+1},$ $W_2(s) = \frac{6}{(0,03s+1)(0,023s+1)},$ $W_3(s) = \frac{3}{s(0,023s^2+0,01s+1)},$ $W_4(s) = \frac{0,004}{s}$	40	0,8	0	$\frac{1}{300}$	$\frac{1}{25}$

ЗАДАНИЕ 3

Используя методы проекционно-матричных и сеточно-матричных операторов, решите задачу синтеза системы управления самонаводящейся ракетой, считая константу навигации n устройства формирования команд неизвестным параметром. Структурная схема системы при сближении ракеты и цели на встречных курсах имеет вид (рис. 3.1.25) (более подробное описание системы приводится в главе 6).

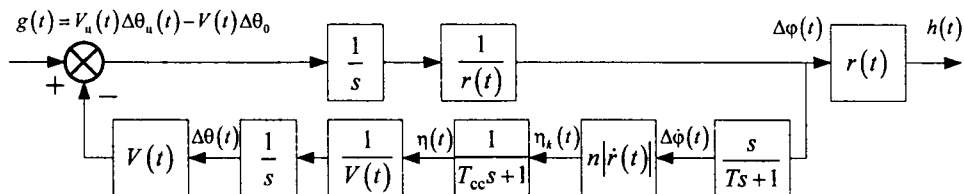


Рис. 3.1.25. Структурная схема системы управления самонаводящейся ракетой

Параметры неизменяемой части системы:

- постоянная времени системы стабилизации $T_{cc} = 0,1$;
- постоянная времени координатора $T = 0,3$.

Расстояние между ракетой и целью при их сближении на встречных курсах изменяется по закону

$$r(t) = r(0) - \int_0^t [V(\tau) + V_u(\tau)] d\tau,$$

где $r(0)$ — расстояние между ракетой и целью в момент старта ракеты, а $V(\tau)$ и $V_u(\tau)$ — законы изменения скорости ракеты и цели соответственно.

Эталонный промах системы управления следует выбирать таким образом, чтобы реальный промах у синтезированной системы в момент выключения $t_{\text{вык}}$ (время, при котором расстояние между ракетой и целью составляет 4–5 м) не превышал заданной величины $h_{\text{зад}}(t_{\text{вык}})$ (см. табл. 3.1.2).

Таблица 3.1.2

Варианты заданий

№ вар.	r_0 , м	$V(t)$, м/с	$V_u(t)$, м/с	$\Delta\theta_0$, рад/с	$\Delta\theta_u$, рад/с	$h_{\text{зад}}(t_{\text{вык}})$, м
1	4500	$200(1+t)$	400	0,05	0,05	4
2	5900	$100(1+t)$	400	0,04	0	5
3	9000	$55(1+t)$	110	0,035	0,03	6
4	3000	$195(1+t)$	350	0,03	0,01	5
5	9800	$350(1+t)$	400	0,036	0,07	7
6	3700	$120(1+t)$	450	0,04	0,065	5
7	4000	$280(1+t)$	360	0,06	0,09	6
8	8500	$220(1+t)$	415	0,012	0,055	9
9	7500	$250(1+t)$	460	0,004	0,04	7
10	2700	$135(1+t)$	450	0,046	0,02	6
11	1600	$140(1+t)$	300	0,085	0,065	6
12	9000	$170(1+t)$	330	0,095	0,07	5
13	3100	$320(1+t)$	450	0,027	0,04	7
14	4000	$280(1+t)$	340	0,016	0,001	7
15	7100	$170(1+t)$	220	0,09	0,04	7
16	3850	$350(1+t)$	450	0,025	0,075	6
17	5400	$150(1+t)$	470	0,065	0,08	7
18	2050	$225(1+t)$	470	0,095	0,09	6
19	9900	$250(1+t)$	340	0,065	0,085	5
20	6450	$300(1+t)$	380	0,085	0,04	7
21	5000	$100(1+t)$	160	0,001	0,06	5
22	5800	$185(1+t)$	325	0,013	0,07	7
23	4350	$300(1+t)$	460	0,08	0,02	6
24	5200	$100(1+t)$	550	0,045	0,09	6
25	3450	$130(1+t)$	240	0,085	0,055	7
26	6500	$190(1+t)$	230	0,075	0,06	6
27	7900	$100(1+t)$	250	0,06	0,02	6
28	6000	$120(1+t)$	210	0,035	0,055	7
29	7000	$280(1+t)$	500	0,015	0,09	6
30	3300	$230(1+t)$	550	0,015	0,035	5
31	4700	$70(1+t)$	215	0,02	0,065	7
32	8150	$60(1+t)$	220	0,04	0,04	6
33	7300	$110(1+t)$	220	0,085	0,06	7
34	5500	$55(1+t)$	140	0,05	0,07	4
35	6400	$200(1+t)$	420	0,08	0,04	5
36	8250	$220(1+t)$	395	0,045	0,054	7
37	2000	$90(1+t)$	520	0,05	0,065	4
38	6650	$60(1+t)$	190	0,035	0,08	5
39	1950	$120(1+t)$	285	0,04	0,045	6
40	5000	$200(1+t)$	600	0,09	0,025	6

ЗАДАНИЕ 4

Решите задачу синтеза системы управления самонаводящейся ракетой методами проекционно-матричных и сеточно-матричных операторов с учетом ввода в ее контур управления ПИД-регулятора (рис. 3.1.26). Исходные данные о движении ракеты и цели, а также требования к максимальному промаху в момент выключения координатора приведены в табл. 3.1.2.

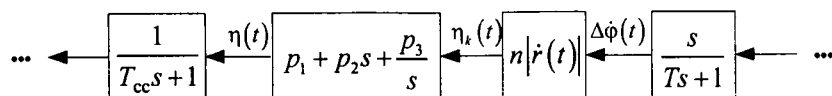


Рис. 3.1.26. Место включения ПИД-регулятора в системе управления самонаводящейся ракетой

При нахождении оператора замкнутой системы возникает необходимость символического обращения матричного оператора, полученного в результате структурных преобразований. Данную операцию позволяет выполнить большинство современных математических пакетов, однако получение такого оператора может потребовать больших ресурсов ЭВМ, в этом случае целесообразно воспользоваться процедурой приближенного обращения.

ЗАДАНИЕ 5

Рассмотрим подход, позволяющий получить решение задачи синтеза регулятора при условии его физической реализуемости (предполагается, что $k_{\text{к}}(\tau) \in L^2[0, \infty)$). Отличительной особенностью этого подхода является то, что задача синтеза регулятора сводится к задаче решения интегрального уравнения 2-го рода, чем обеспечивается корректная постановка задачи и вычислительная устойчивость.

Имеем

$$(1 + W_{\text{к}}(s)W_o(s))W(s) = W_{\text{к}}(s)W_o(s), \quad (3.1.1)$$

где $W(s)$ — эталонная ПФ (например, она может быть задана стандартными коэффициентами, может иметь вид фильтра Баттерворса, может быть найдена по стандартной ПФ разомкнутой системы). Из последнего уравнения можно получить зависимость, определяющую $W_{\text{к}}(s)$. Нахождение же ИПФ $k_{\text{к}}(\tau)$ в этом случае сводится к необходимости решения уравнения 1-го рода, что приводит к известным трудностям.

Получим уравнение 2-го рода относительно ИПФ регулятора. Имеем

$$W_{\text{к}}(s) = W_o^{-1}(s)(1 + W_{\text{к}}(s)W_o(s))W(s), \quad (3.1.2)$$

или, что то же самое,

$$W_{\text{к}}(s) = W_{\text{к}}(s)W(s) + W_o^{-1}(s)W(s). \quad (3.1.3)$$

Полагая, что $W_o^{-1}(s)W(s)$, $W_{\text{к}}(s)W(s)$ и $W_{\text{к}}(s)$ — правильные дробно-рациональные функции, из последней зависимости найдем (перейдя из комплексной области во временную)

$$k_{\text{к}}(t) = \int_0^t k_{\text{к}}(\tau)k(t-\tau)d\tau + f(t), \quad (3.1.4)$$

где

$$k_{\text{к}}(t) = L^{-1}\{W_{\text{к}}(s)\}; \quad k(t) = L^{-1}\{W(s)\}; \quad f(t) = L^{-1}\{W(s)W_o^{-1}(s)\}. \quad (3.1.5)$$

Полученное интегральное уравнение относительно ИПФ корректирующего устройства $k_{\text{к}}(t)$ относится к классу интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода.

Построение вычислительного метода решения этого уравнения или указание на возможность построения есть лишь первый шаг в создании теории метода.

За ним должно следовать выяснение условий сходимости, правила определения скорости сходимости, нахождение оценки погрешностей — априорной и апостериорной, выработка способов улучшения сходимости, если последняя окажется недостаточно быстрой, исследование вычислительной устойчивости и т.д.

Если ИПФ корректирующего устройства найдено в виде разложения по ортонормированному базису

$$k(\tau) = \sum_{v=1}^l c_v^k \varphi_v(\tau), \quad (3.1.6)$$

то этим выражением сразу же определяется структура и параметры корректирующего устройства (рис. 3.1.27).

Для спектрального метода синтеза корректирующих устройств характерно следующее: он применим как к стационарным, так и к нестационарным системам (в этом случае уравнение относительно ИПФ регулятора находится во временной области), ориентирован на использование ЭВМ, он обладает вычислительной устойчивостью, позволяет оценивать погрешность, с которой рассчитывается приближенная ИПФ корректирующего устройства.

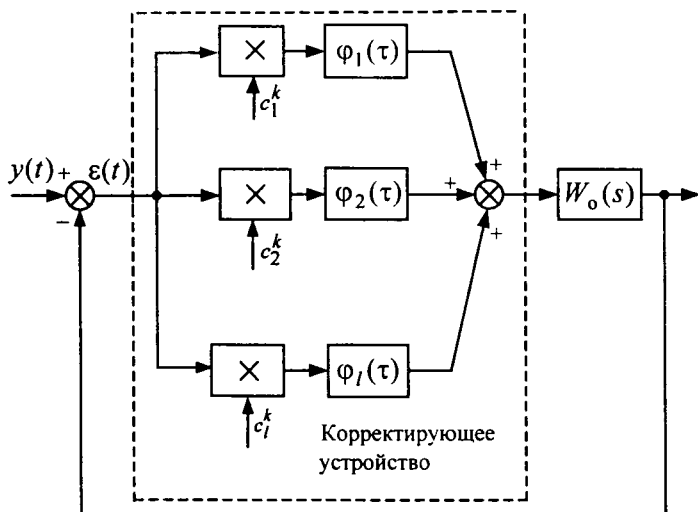


Рис. 3.1.27. Структурная схема системы

Разработайте соответствующее алгоритмическое и программное обеспечение синтеза регулятора методом интегральных уравнений 2-го рода с использованием различных ОНБ.

ЗАДАНИЕ 6

Разработайте алгоритмическое и программное обеспечение для синтеза корректирующих устройств методом моментов. С использованием метода моментов проведите синтез регуляторов систем, структурные схемы которых представлены в задании 1.

Этот метод с успехом может быть использован для синтеза регуляторов.

Формула, определяющая последовательное корректирующее устройство (если известны ПФ $W_o(s)$ неизменяемой части и $W(s)$ эталонной замкнутой системы), имеет вид

$$W_{\text{к}}(s) = \frac{W(s)}{W_o(s)(1 - W(s))}, \quad (3.1.7)$$

где $W_{\text{к}}(s)$ — правильная дробно-рациональная функция.

Последнюю зависимость можно переписать так:

$$\int_0^{\infty} k_{\text{к}}(t) e^{-kct} dt = \mu_k, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (3.1.8)$$

где

$$\mu_k = \frac{W(s)}{W_o(s)(1 - W(s))} \Big|_{s=kc}; \quad (3.1.9)$$

c — известная постоянная величина.

Задача построения ИПФ регулятора $k_{\text{к}}(t)$ в терминах метода моментов формулируется так: заданы моменты μ_k ($k = 1, 2, \dots$) функции $k_{\text{к}}(t)$ относительно моментной системы $\{e^{-kct}, k = 1, 2, \dots\}$; требуется найти условия существования, единственности, а также вычислить ИПФ $k_{\text{к}}(t)$ такую, что

$$\int_0^{\infty} k_{\text{к}}^2(\tau) d\tau \rightarrow \min. \quad (3.1.10)$$

ЗАДАНИЕ 7

С помощью методов, изложенных в главе 1, определите четыре коэффициента усиления регулятора возбуждения синхронного генератора при регулировании по производным двух режимных величин: тока и напряжения. Коэффициенты необходимо определить из условия получения оптимального переходного процесса и устойчивости при малых колебаниях. Изображение координаты $x(t)$ (угол передачи генератора) задано выражением

$$x(t) \div X(s) = \frac{b_4 + b_3s + b_2s^2 + b_1s^3 + b_0s^4}{a_4 + a_3s + a_2s^2 + a_1s^3 + a_0s^4}, \quad (3.1.11)$$

где

$$\begin{aligned} b_0 &= b_1 = 0, \\ b_2 &= 0,287 - 0,389\beta_2 - 0,632\gamma_2, \\ b_3 &= 4,86 - 0,389\beta_1 - 0,632\gamma_1, \\ b_4 &= 1,11 - 0,389\beta_0 - 0,632\gamma_0, \\ a_0 &= (1,21 - 1,63\beta_2 - 2,65\gamma_2) \cdot 10^{-2}, \\ a_1 &= (20,5 - 1,63\beta_1 - 0,124\beta_2 + 2,65\gamma_1 + 0,201\gamma_2) \cdot 10^{-2}, \\ a_2 &= (18,7 - 1,63\beta_0 - 0,124\beta_1 + 29,3\beta_2 - 2,65\gamma_0 - 0,201\gamma_1 - 39,9\gamma_2) \cdot 10^{-2}, \\ a_3 &= 2,10 - 0,124 \cdot 10^{-2}\beta_0 + 0,293\beta_1 - 0,201 \cdot 10^{-2}\gamma_0 - 0,399\gamma_1, \\ a_4 &= 0,298 + 0,293\beta_0 - 0,399\gamma_0. \end{aligned} \quad (3.1.12)$$

Здесь γ_0 и β_0 — коэффициенты усиления при регулировании по отклонениям напряжения и тока от нормальных значений; они равны: $\beta_0 = 1,0$; $\gamma_0 = -15,0$.

Коэффициенты усиления по первой и второй производным тока и напряжения обозначены соответственно $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$. Определите их, исходя из следующих требований:

- система должна быть устойчивой;
- переходной процесс должен быть монотонным (или с малым перерегулированием), время переходного режима $T = 2,5$ с, максимальная скорость протекания процесса $v = 2,5$ рад/с.

Изучите физические процессы, протекающие в системе.

Разработайте алгоритмическое и программное обеспечения для метода математического программирования.

ЗАДАНИЕ 8

Рассмотрите решение задачи синтеза регулятора (см. предыдущее задание) при следующих условиях:

- рассчитайте для режима малых колебаний четыре коэффициента усиления при регулировании возбуждения синхронного генератора по производным двух

режимных величин: тока и напряжения. Генератор работает через дальнюю передачу на систему $U = \text{const}$;

- уравнения генератора записаны в упрощенной форме Лебедева–Жданова; учитывается постоянная времени цепи возбуждения. Постоянными времени возбудителя и дифференцирующих звеньев регулятора пренебрегаем. Изображение приращения угла θ между вектором ЭДС и вектором напряжения U при внезапном малом изменении нагрузки имеет вид

$$\Delta\Theta(s) = \frac{b_2 + b_1s + b_0s^2}{a_4 + a_3s + a_2s^2 + a_1s^3 + a_0s^4}, \quad (3.1.13)$$

где

$$\begin{cases} b_0 = 0,287 - 0,389\beta_2 - 0,632\gamma_2, \\ b_1 = 4,86 - 0,389\beta_1 - 0,632\gamma_1, \\ b_2 = 10,2, \\ a_0 = (1,21 - 1,63\beta_2 - 2,65\gamma_2) \cdot 10^{-2}, \\ a_1 = (20,5 - 1,63\beta_1 - 0,124\beta_2 + 2,65\gamma_1 + 0,201\gamma_2) \cdot 10^{-2}, \\ a_2 = (56,8 - 0,124\beta_1 + 29,3\beta_2 - 0,201\gamma_1 - 39,9\gamma_2) \cdot 10^{-2}, \\ a_3 = 2,13 + 0,293\beta_1 - 0,399\gamma_1, \\ a_4 = 6,57. \end{cases} \quad (3.1.14)$$

Эти выражения записаны для нормального режима, которому соответствует угол передачи $\theta = 67^\circ$; β_1 , β_2 , γ_1 и γ_2 — искомые коэффициенты усиления (регулирования) регулятора соответственно по первой и второй производным тока и напряжения. Коэффициенты усиления при регулировании по отклонениям (от номинальных) тока и напряжения определяются статизмом; они приняты: $\beta_0 = 1,0$, $\gamma_1 = -15,0$.

Рассчитайте коэффициенты усиления β_1 , β_2 , γ_1 , γ_2 , исходя из следующих требований:

- 1) переходной процесс должен быть близким к монотонному при времени протекания переходного режима в пределах $T = 2,5$ с и максимальной скорости протекания процесса $\omega \approx 2,5$ рад/с;
- 2) система должна быть устойчивой.

Разработайте алгоритмическое и программное обеспечение для метода математического программирования.

ЗАДАНИЕ 9

Передаточная функция ошибки $\epsilon(t)$ замкнутой следящей системы по отношению к управляющему воздействию имеет следующий вид:

$$\Phi_\epsilon(s) = \frac{s(0,2s+1)(0,07s+1) + Z_1(s)}{14,2K_y + s(0,2s+1)(0,07s+1) + Z_1(s)}, \quad (3.1.15)$$

где $Z_1(s) = 1920K_y Z(s)$, $Z(s)$ — передаточная функция искомого корректирующего звена (обратной связи), K_y — коэффициент усиления электронного усилителя. Его значение выбрано в результате приближенного рассмотрения поведения системы при гармоническом управляющем воздействии $K_y = 15$. Рассчитайте параметры корректирующего звена, исходя из следующих качественных показателей следящей системы: максимальная динамическая ошибка слежения $\epsilon_{\max} \leq 30 \div 35'$ при синусоидальном входном воздействии с амплитудой $\theta = 25^\circ$ и периодом $T = 9,5$ с; время переходного

процесса $T_p \leq 0,4$ с; переходной процесс почти монотонный, с малым перерегулированием.

ЗАДАНИЕ 10

Рассмотрите возможность упрощения задачи статистического синтеза систем с использованием стандартных передаточных функций (схемы на рис. 3.1.28–3.1.43).

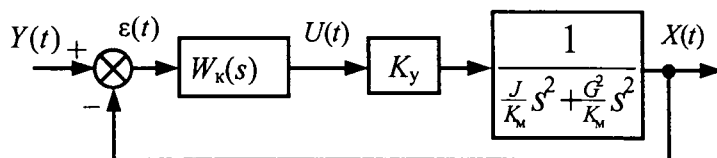


Рис. 3.1.28. Структурная схема следящей системы стабилизации сектора обзора

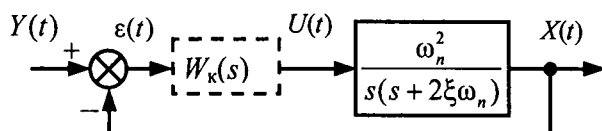


Рис. 3.1.29. Структурная схема системы автосопровождения цели

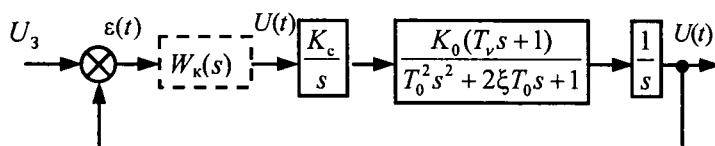


Рис. 3.1.30. Структурная схема системы автоматического управления полетом баллистической ракеты на активном участке

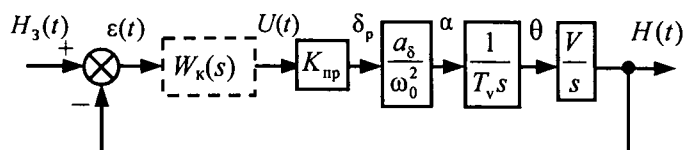


Рис. 3.1.31. Структурная схема системы стабилизации высоты полета ракеты

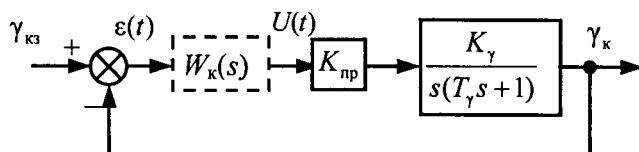


Рис. 3.1.32. Структурная схема системы управления креном ракеты

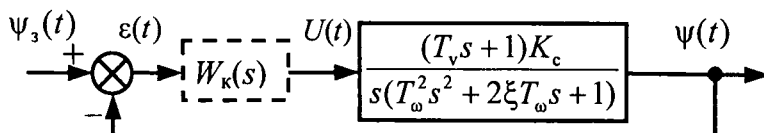


Рис. 3.1.33. Структурная схема системы управления углом рыскания крестового реактивного снаряда

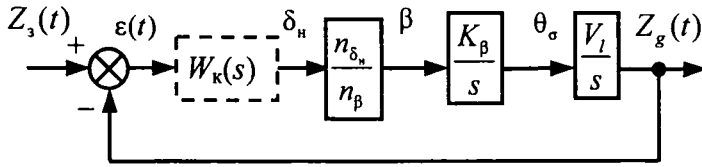


Рис. 3.1.34. Структурная схема системы управления центром тяжести крестокрылого снаряда (КРС) в боковом движении

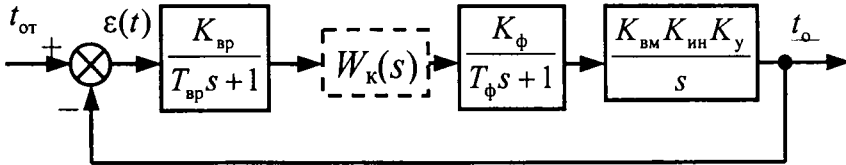


Рис. 3.1.35. РЛС автоматического сопровождения цели по дальности

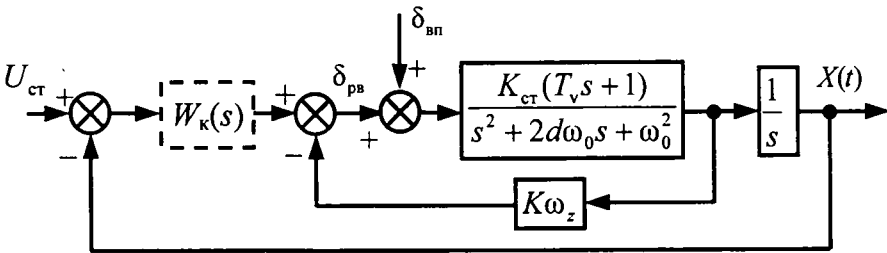


Рис. 3.1.36. Структурная схема контура стабилизации угла тангажа

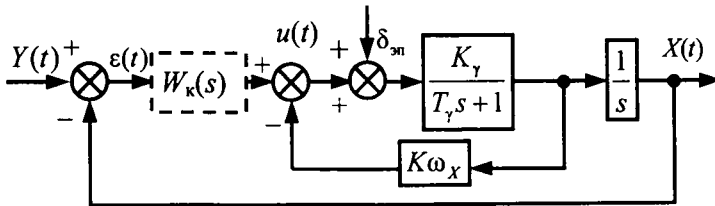


Рис. 3.1.37. Структурная схема контура стабилизации крена

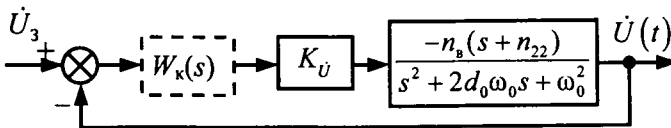


Рис. 3.1.38. Структурная схема системы управления угловой скоростью тангажа

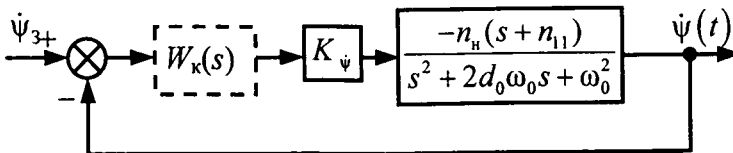


Рис. 3.1.39. Структурная схема системы управления угловой скоростью ракеты

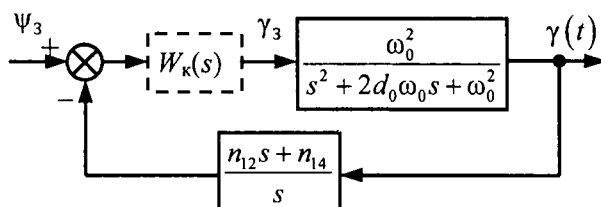


Рис. 3.1.40. Структурная схема канала крена с учетом перекрестных связей

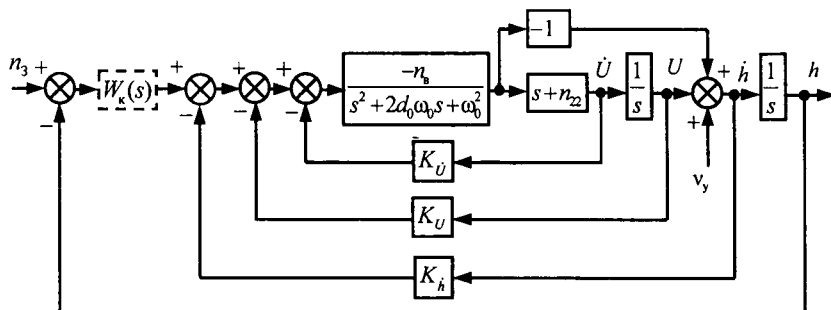


Рис. 3.1.41. Структурная схема системы управления высотой полета ЛА

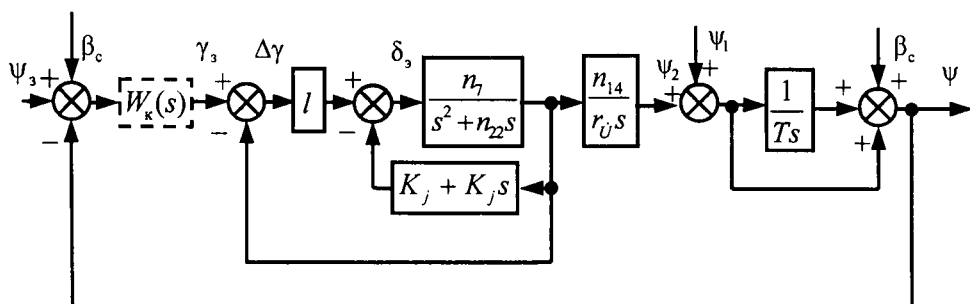


Рис. 3.1.42. Структурная схема системы управления курсовым углом ведомого самолета

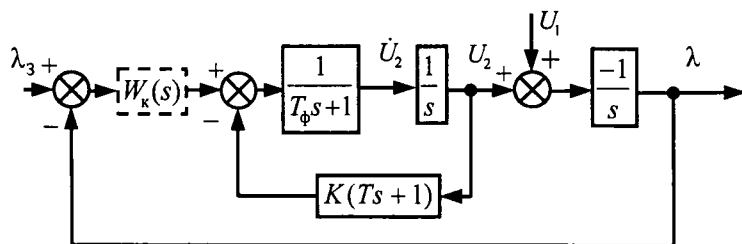


Рис. 3.1.43. Структурная схема системы управления временной дистанцией

Эта задача решается следующим образом. При выполнении задания 1 были рассмотрены подходы к определению структуры и параметров наиболее простых корректирующих устройств и стандартной ПФ разомкнутой системы. Этот этап сохраняется и при выполнении настоящего задания. Положим, что найдена стандартная ПФ разомкнутой системы с неизвестным параметром ω_0 , по которой легко найти стандартную ПФ замкнутой системы, т.е.

$$W^{\text{CT}}(s, \omega_0) = \frac{W_p^{\text{CT}}(s, \omega_0)}{1 + W_p^{\text{CT}}(s, \omega_0)}. \quad (3.1.16)$$

Если на вход действует полезный сигнал $m(t)$ и помеха $n(t)$ (полагаем их некоррелированными), то СКО воспроизведения полезного сигнала в установившемся режиме определяется зависимостью

$$\bar{\sigma}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |1 - W^{\text{CT}}(j, \omega, \omega_0)|^2 S_{mm}(\omega) d\omega + \int_{-\infty}^{\infty} |W^{\text{CT}}(j, \omega, \omega_0)|^2 S_{nn}(\omega) d\omega. \quad (3.1.17)$$

Поскольку последний интеграл вычисляется точно, то легко записать

$$\bar{\sigma}^2 = \bar{\sigma}^2(\omega_0). \quad (3.1.18)$$

Таким образом, при известных $S_{mm}(\omega)$, $S_{nn}(\omega)$ и $W^{\text{CT}}(s, \omega_0)$ СКО зависит лишь от одного параметра ω_0 .

Оптимальное значение ω_0^* можно найти или аналитически (для простых случаев)

$$\partial \bar{\sigma}^2(\omega_0) / \partial \omega_0 = 0, \quad (3.1.19)$$

или численным методом.

Поскольку $\bar{\sigma}^2(\omega_0)$ является функцией унимодальной, то для нахождения ω_0^* можно использовать следующие методы: перебора, поразрядного поиска, исключения отрезков, парабол, можно применить методы, использующие производные функции (методы средней точки, хорд, Ньютона, кубической аппроксимации).

Далее, если известна оптимальная стандартная ПФ замкнутой системы, легко находится ПФ $W_p^{\text{CT}}(s)$ и осуществляется расчет параметров корректирующего устройства, так же как и в детерминированном случае.

Корреляционные функции $R_{mm}(\tau)$ и $R_{nn}(\tau)$ задаются преподавателем; например, можно положить

$$R_{mm}(\tau) = D_{mm} e^{-\alpha|\tau|}; \quad R_{nn}(\tau) = 2\pi S_0 \delta(\tau). \quad (3.1.20)$$

Тогда

$$S_{mm}(\omega) = \frac{D_{mm}}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}; \quad S_{nn}(\omega) = S_0. \quad (3.1.21)$$

Численные значения D_{mm} , α , S_0 задаются преподавателем. Проведите статистический анализ синтезированных САУ.

Для систем, структурные схемы которых представлены на рис. 3.1.28–3.1.43, постройте решение следующей задачи: будем полагать, что полезный входной сигнал имеет вид

$$g(t) = g_0 + g_1 t + g_2 t^2 + \dots + g_l t^l, \quad (3.1.22)$$

а помеха $n(t)$ — белый шум с нулевым средним значением и спектральной плотностью S_0 ($g_0, g_1, \dots, g_l$ и S_0 задаются преподавателем).

Установившаяся ошибка определяется формулой

$$\varepsilon(t) = c_0 g(t) + \frac{c_1}{1!} \dot{g}(t) + \frac{c_2}{2!} \ddot{g}(t) + \dots, \quad (3.1.23)$$

а ошибка, порожденная помехой $n(t)$, имеет вид

$$\bar{\sigma}_n^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |W(j\omega)|^2 S_{nn}(\omega) d\omega, \quad (3.1.24)$$

где $c_0, c_1, c_2, \dots$ — коэффициенты ошибок, определяемые через ПФ замкнутой САУ.

Среднее значение квадрата общей ошибки САУ определяется выражением

$$\bar{\sigma}^2 = \varepsilon^2 + \bar{\sigma}_n^2. \quad (3.1.25)$$

Задача состоит в том, чтобы путем выбора параметров корректирующего устройства минимизировать ошибку $\bar{\sigma}^2$.

Для решения поставленной задачи можно воспользоваться тем же алгоритмом, который приведен выше. Приведем его этапы:

- 1) по структуре неизменяемой части выбирается структура и параметры наиболее простого корректирующего устройства таким образом, чтобы

$$W_p^{ct}(s, \omega_0) = W_{ky}(s)W_o(s). \quad (3.1.26)$$

В последнем выражении ω_0 неизвестно;

- 2) находится ПФ замкнутой стандартной системы $W^{ct}(s, \omega_0)$, зависящая от одного параметра ω_0 ;

- 3) находятся коэффициенты ошибок $c_0(\omega_0), c_1(\omega_0), c_2(\omega_0), \dots$ и $\bar{\sigma}_n^2(\omega_0)$;

- 4) записывается выражение для критерия качества

$$\bar{\sigma}^2(\omega_0) = \varepsilon^2(\omega_0) + \bar{\sigma}_n^2(\omega_0),$$

зависящего от одного параметра ω_0 ;

- 5) рассчитывается ω_0^* , обеспечивающее $\min_{\omega_0} \bar{\sigma}^2(\omega_0)$. На этом этапе найдено оптимальное значение параметра $\omega_0 = \omega_0^*$;

- 6) находится $W_p^{ct}(s, \omega_0^*)$ по известной $W^{ct}(s, \omega_0^*)$ — стандартной ПФ замкнутой системы (на этом этапе $\omega_0 = \omega_0^*$);

- 7) рассчитываются параметры корректирующего устройства в соответствии с идеологией метода стандартных ПФ.

Конкретные исходные данные для каждого студента задаются преподавателем.

ЗАДАНИЕ 11

Изучите постановку задачи синтеза регуляторов в классе многомерных систем и основные этапы ее решения.

С целью знакомства с конкретными многомерными системами, физикой их работы, принципиальными, функциональными и структурными схемами многомерных систем, постановкой задачи синтеза регуляторов и их конкретной реализацией, рассмотрим двухмерную систему автоматического управления барабаном-сепаратором.

Рассматриваемая САУ предназначена для автоматического поддержания заданного уровня h , воды и заданного давления P_3 в барабане-сепараторе (БС) на АЭС с реакторами типа РБМК-1000.

На рис. 3.1.44 приведена упрощенная принципиальная схема САУ БС.

В БС подается пароводяная смесь от реактора (на рис. 3.1.44 не показана), смешивается с питательной водой и разделяется на фракции: пар и воду. Пар через регулирующий клапан (РК) поступает на турбогенератор (ТГ).

Давление пара P в БС должно поддерживаться на уровне $69 \pm 0,25$ кг/см² в стационарном режиме энергоблока. Понижение давления приводит к вскипанию теплоносителя в реакторе, что чревато расплавлением активной зоны. Повышение давления может привести к разрыву паропроводов и БС.

Давление пара в БС зависит от двух процессов: генерации пара в реакторе и расхода пара ТГ. На давление оказывает влияние количество подаваемой в БС более холодной питательной воды.

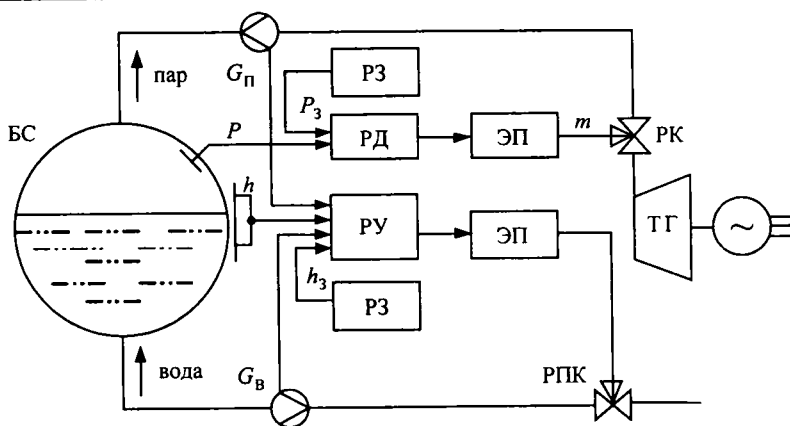


Рис. 3.1.44. Упрощенная схема САУ БС:

БС — барабан-сепаратор; ТГ — турбогенератор; РЗ — ручной задатчик; ЭП — электропривод;
 РД — регулятор давления; РУ — регулятор уровня; РК — регулирующий клапан;
 РПК — регулирующий питающий клапан

Заданное давление P_3 устанавливается ручным задатчиком (РЗ), сигнал от которого сравнивается с измеренным давлением P . Регулятор давления (РД) по разбалансу $\varepsilon_p = P_3 - P$ посредством электропривода (ЭП) открывает регулирующий клапан (РК), если $P > P_3$, или закрывает РК — в противном случае.

Уровень воды h в БС также играет важную роль для нормальной эксплуатации энергоблока. Понижение уровня может вызвать «срыв» работы главных циркуляционных насосов и прекращение охлаждения реактора. Повышение уровня может вызвать аварию ТГ из-за заброса влаги в турбину. В стационарных условиях работы энергоблока точность поддержания заданного уровня ± 50 мм.

Уровень воды h в БС зависит от материального баланса притока воды G_v и расхода пара G_p . Так как под зеркалом испарения в БС находится большой объем пара, то на уровень воды оказывает влияние давление пара. Увеличение давления приводит к снижению уровня и наоборот.

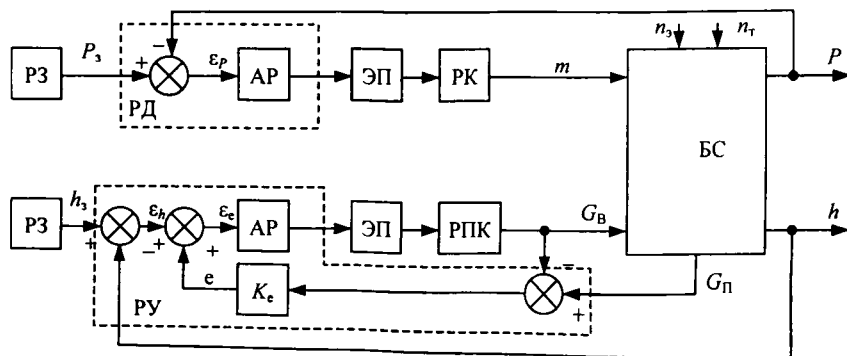


Рис. 3.1.45. Функциональная схема САУ БС:

АР — аппаратура регулирования (остальные обозначения см. на рис. 3.1.44)

Процесс управления уровнем сопровождается явлением, известным как «парадокс БС». Суть этого явления заключается в следующем: увеличение подачи питательной воды с целью повышения уровня в течение 1–2 минут приводит к обратному эффек-

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Пользуясь источниками:

- а) Головач Е.А., Иванов В.А., Попов Б.С., Фрейберг В.Г. Математическое моделирование блока кипящий реактор–турбина–генератор // Энергетика. — 1981. — №3. — С.46–51;
- б) Давыдов Н.И., Филатьева Р.Н., Везеницын Ю.Н. и др. Выбор параметров настройки регуляторов уровня и давления в барабанах-сепараторах энергоблока с реактором РБМК-1000 // Теплоэнергетика. — 1983. — №10. — С.10–15,
1. Изучите физические процессы, происходящие в рассматриваемой САУ; с использованием указанных источников изучите проблему математического моделирования системы.
2. Сделайте постановку задачи синтеза регулятора в классе многомерных систем автоматического управления; укажите трудности решения этой задачи.
3. Изучите методику выбора параметров настройки регуляторов уровня и давления в барабанах-сепараторах с реактором РБМК-1000.
4. При следующих значениях параметров:

$$K_p = 80 \frac{\text{МВт}}{\text{кгс/см}^2}, T_p = 50 \text{ с}, K_h = 10 \frac{\text{Т}}{\text{ч} \cdot \text{мм}}, T_p = 40 \text{ с}, K_e = 0,1 \frac{\text{мм}}{\text{м/ч}}$$

- а) постройте полную структурную схему двухмерной системы автоматического управления барабаном-сепаратором и запишите ее векторно-матричное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами в форме Коши;
- б) проведите анализ устойчивости рассматриваемой САУ с использованием характеристического уравнения, воспользовавшись методами Раussa, Гурвица, Лъенара–Шипара, Михайлова. Познакомьтесь с методами Гершгорина, Островского, Брауэра локализации собственных чисел матрицы А и укажите недостатки этих методов; проанализируйте возможность реализации на ЭВМ метода *D*-разбиения;
- в) изучите критерий устойчивости В.И. Зубова и, воспользовавшись этим критерием, исследуйте устойчивость рассматриваемой системы. Разработайте алгоритм и программу, реализующие метод В.И. Зубова, укажите его достоинства и недостатки;
- г) пользуясь стандартными численными методами интегрирования, постройте переходные процессы в системе (они показаны на рис. 3.1.48 и на рис. 3.1.49); сравните полученные результаты с теми, которые представлены на рис. 3.1.48, 3.1.49;

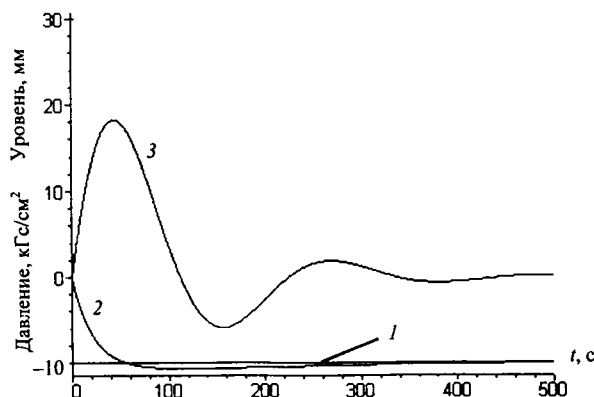


Рис. 3.1.48. Отклонения уровня 3 и давления 2 САУ БС при снижении заданного давления 1 на 10 кгс/см²

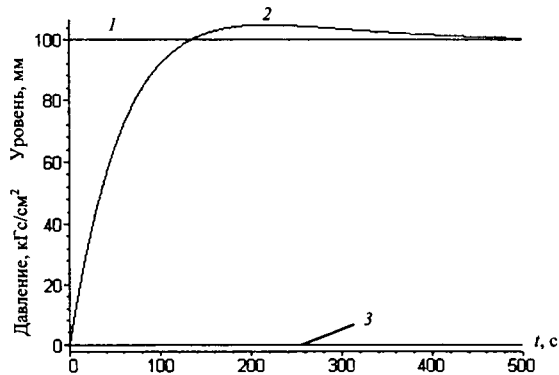


Рис. 3.1.49. Отклонения уровня 2 и давления 3 САУ БС при увеличении заданного уровня 1 на 100 мм

- д) изучите задачу определения матрицы перехода и передаточной функции с помощью преобразования Лапласа из уравнений системы; постройте матричную передаточную функцию системы и матричную ИПФ. Запишите векторно-матричный интеграл Дюамеля. Постройте фундаментальную систему и рассчитайте свободные колебания для конкретных начальных условий;
- е) запишите уравнения системы в виде

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t} \mathbf{X}^0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{Y}(\tau) d\tau \quad (3.1.27)$$

и постройте решение задачи, рассчитав $\mathbf{X}(t)$ по формуле

$$\mathbf{X}(t_k) = e^{\mathbf{A}h k} \mathbf{X}^0 + \int_0^{hk} e^{\mathbf{A}(hk-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{Y}(\tau) d\tau, \quad (3.1.28)$$

что эквивалентно следующему алгоритму расчета $\mathbf{X}(t_k)$:

$$\mathbf{X}(t_{k+1}) = \left(\mathbf{I} + \mathbf{A}h + \frac{\mathbf{A}^2 h^2}{2!} \right) [\mathbf{X}(t_k) + h \mathbf{B} \mathbf{Y}(kh)]. \quad (3.1.29)$$

Последний алгоритм может использоваться для построения переходных процессов в линейных системах при внешних воздействиях, меняющихся в широком диапазоне. Постройте алгоритмическое и программное обеспечение для расчета $\mathbf{X}(t)$ с использованием метода матричных операторов; проведите синтез регулятора методами модального управления.

ЗАДАНИЕ 12

Проведите синтез регуляторов в классе многомерных систем при следующих условиях:

- а) математическая модель объекта имеет вид

$$\mathbf{W}(s) = \frac{1}{0,38s^2 + 1,1s + 1} \begin{pmatrix} 3,4(0,4s + 1) & 6,8(0,55s + 1) \\ 0,18(1,13s + 1) & 0,9(1,1s + 1) \end{pmatrix}, \quad (3.1.30)$$

а требования к системе формулируются так:

- астатизм сепаратных каналов $\nu = 1$,
- перерегулирование $\sigma = 0$,
- время регулирования $T_p \leq 2$ с;

б) математическая модель объекта имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{X} &= AX + BY, \quad Y = CX, \\ A &= \begin{pmatrix} -0,16 & 0,177 & -0,984 & 0,104 \\ -18,191 & -1,162 & 0,82 & 0 \\ -0,158 & -0,04 & -0,297 & 0 \\ 0 & 1 & 0,18 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0,02 \\ -14,131 & -0,554 \\ -0,432 & -0,966 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \\ C &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.1.31)$$

а требования к системе формулируются так:

- перерегулирование $\sigma \leq 30\%$,
- время регулирования $T_p \leq 5$ с;

в) ПФ объекта имеет вид

$$W_o(s) = \frac{1}{\delta(s)} \begin{pmatrix} W_{11}(s) & W_{12}(s) \\ W_{21}(s) & W_{22}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.1.32)$$

где

$$\begin{aligned} W_{11}(s) &= -14,21s^2 - 6,56s - 6,4; \quad W_{12}(s) = 0,38s^2 - 1,15s - 18,18; \\ W_{21}(s) &= -2,08s^2 - 2,3s - 0,45; \quad W_{22}(s) = 0,02s^3 + 1,08s^2 + 1,06s - 0,09; \\ \delta(s) &= s^4 + 1,6s^3 + 3,65s^2 + 3,41s + 0,53. \end{aligned} \quad (3.1.33)$$

Остальные данные задаются преподавателем.

ЗАДАНИЕ 13

Постройте вектор обратной связи K такой, чтобы замкнутая система $\dot{X} = [A - BK]X$ имела заданного вида характеристический многочлен (заданные собственные значения). Изобразите структурную схему системы, выделив обратную связь по состоянию (заданный набор собственных значений задается преподавателем). Синтезируйте наблюдатели полного порядка. Выполните задание для следующих объектов:

а) объект задан уравнением

$$\dot{X} = AX + BY, \quad (3.1.34)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

причем замкнутая система имеет эталонный спектр $\Lambda^* = (-1, -1, -1)$;

б) объект имеет параметры

$$A = \begin{pmatrix} -0,0297 & 0 & 1,0 & 0,0438 & 0 \\ -1,2155 & -0,7923 & 0,1306 & 0 & 0 \\ 0,4304 & 0,021 & -0,0152 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0,0402 & 1,5671 \\ 0,3807 & -0,0671 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.1.35)$$

при этом эталонный спектр $\Lambda^* = (-0,895; -0,376 \pm j \cdot 1,292; -0,576 \pm j \cdot 0,534)$;

в) объект имеет параметры

$$A = \begin{pmatrix} -0,033 & -0,007 & 2,205 & -9,803 \\ 0,108 & -0,803 & -55,415 & -0,378 \\ 0,0016 & -0,01507 & -0,676 & 0 \\ 0 & 0 & 1,0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (3.1.36)$$

$$B = \begin{pmatrix} -12,58 & -0,05 & 0 & 0,00015 \\ 46,722 & 76,9 & 0 & 0 \\ 8,822 & 4,322 & -1,089 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1,0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1,0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,0 \end{pmatrix}.$$

Система неустойчива, так как

$$\lambda_1 = -1,66135; \lambda_{2,3} = -0,023129 \pm j \cdot 0,10196; \lambda_4 = 0,19561.$$

Эталонный спектр $\Lambda^3 = (-1,66135 \ -1,0 \ -1,0 \ -1,0)$.

В следующих заданиях рассматривается задача синтеза регуляторов в классе нелинейных одномерных стационарных систем.

ЗАДАНИЕ 14

Уравнение движения нелинейной автоматической системы имеет вид

$$\begin{aligned} & (7,5 \cdot 10^{-6} p^5 + 1,025 \cdot 10^{-3} p^4 + 3,05 \cdot 10^{-2} p^3 + 0,31 p^2 + 5 p_3) x + \\ & + 5(p_2 p + p_1) F(x) = 5(p_2 p + p_1) y(t), \end{aligned} \quad (3.1.37)$$

где $p = d/dt$, а нелинейная функция

$$F(x) = \begin{cases} k_1 b + k_2(x - b) & \text{при } x > b, \\ k_1 x & \text{при } |x| \leq b, \\ -k_1 b + k_2(x + b) & \text{при } x < -b \end{cases} \quad (3.1.38)$$

имеет следующие значения параметров: $k_1 = 0,5$; $k_2 = 1,0$; $b = 0,2$.

К системе приложено внешнее воздействие $y(t) = l(t) = \text{const}$. Требуется определить варьируемые параметры регулятора p_j ($j = 1, 2, 3$) из условия наилучшего приближения к желаемой переходной функции с временем затухания $T_p = 1$ с и максимальным отклонением в переходном режиме $\sigma = 1,1$ при безусловном обеспечении абсолютной устойчивости системы и обеспечении допустимой статической ошибки системы не более 5% от установившегося значения.

ЗАДАНИЕ 15

Рассмотрим задачу определения варьируемых параметров нелинейной САУ по заданным показателям качества переходного и установившегося режимов. Структурная схема системы изображена на рис. 3.1.50, где приняты следующие обозначения: ЭУ — электронный усилитель; ПКУ — последовательное корректирующее устройство; ЭГУ — электрогидроусилитель; ГД и З — гидродвигатель с золотником; ДОС — датчик обратной связи.

Требуется определить варьируемые параметры T_j ($j = 1, \dots, 4$) последовательного корректирующего устройства (ПКУ) таким образом, чтобы при входном воздействии $U_{вх}$, изменяющемся в диапазоне от 0 до 15 В, время переходного процесса в системе составляло около 0,1 с при перерегулировании 40%, а статистическая ошибка во всех режимах работы не превышала 10% от установившегося значения.

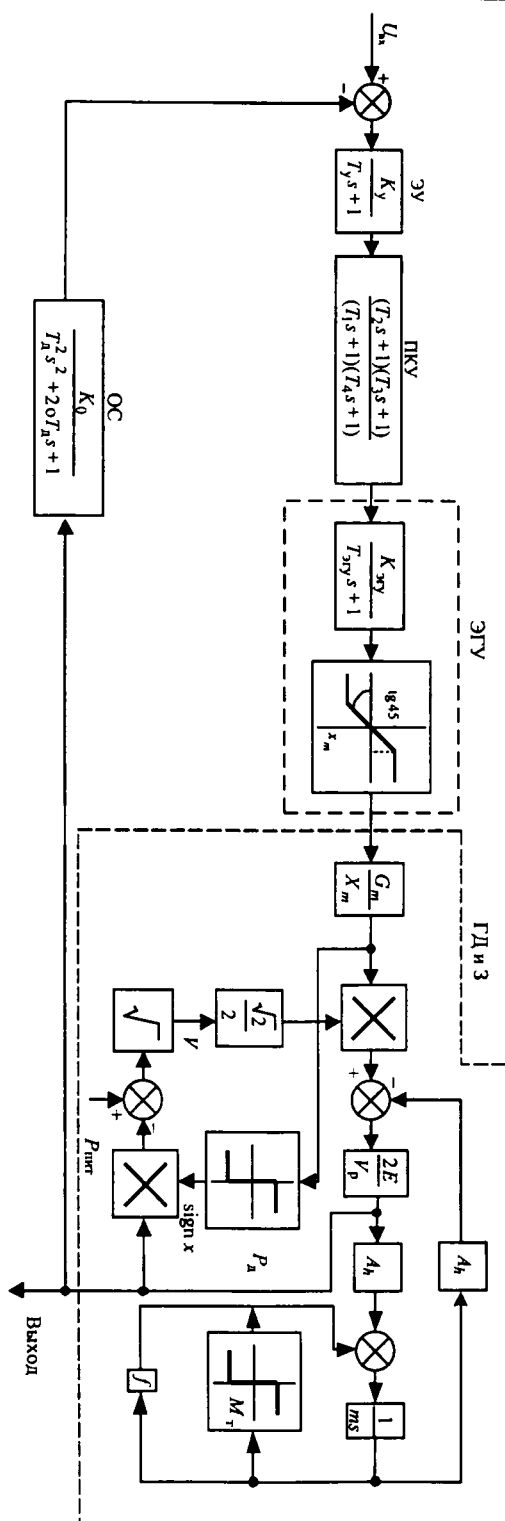


Рис. 3.1.50. Структурная схема САУ

Числовые значения известных параметров системы следующие: $T_y = 5 \cdot 10^{-3}$ с, $K_y = 28$, $K_{эгу} = 0,2$ м/А, $T_{эгу} = 6 \cdot 10^{-3}$ с, $G_m = 10^{-6}$ м⁴·Н^{-1/2} с⁻¹, $X_m = 0,6 \cdot 10^{-3}$ м, $E = 1,5 \cdot 10^9$ Па, $V = 18 \cdot 10^{-3}$ м³, $A_n = 28,3 \cdot 10^{-4}$ м², $m = 12,3$ Н·с²/м, $P_{\text{нпт}} = 0,08$ Па, $f = 6,5 \cdot 10^4$ Н·с/м, $M_r = 1132$ Н, $K_d = 0,21 \cdot 10^{-5}$ В·м²/Н, $T_d = 7 \cdot 10^{-4}$ с, $\xi = 0,7$.

При решении рассматриваемой задачи в качестве входного воздействия необходимо принять $U_{\text{вх}} = 10$ В = const. Как показало предварительное исследование, нелинейности «насыщения» в ЭГУ и «сухого трения» в ГД (рис. 3.1.50) не оказывают существенного влияния на динамику системы. Поэтому при проведении синтеза указанных нелинейности для упрощения расчета можно во внимание не принимать.

ЗАДАНИЕ 16

Структурная схема нелинейной САУ приведена на рис. 3.1.51. Здесь $\frac{K_3}{T_3s+1}$ — передаточная функция детектора и фильтра, $\frac{K_4}{T_0s^2+2T_0\xi s+1}$ — передаточная функция сглаживающего фильтра, $\frac{K_r K_5 K_6 K_7 K_8}{s(T_f s+1)(T_k s+1)(T_{\text{дв}} s+1)}$ — передаточная функция электромашинного усилителя с электродвигателем, K_9 — передаточная функция редуктора.

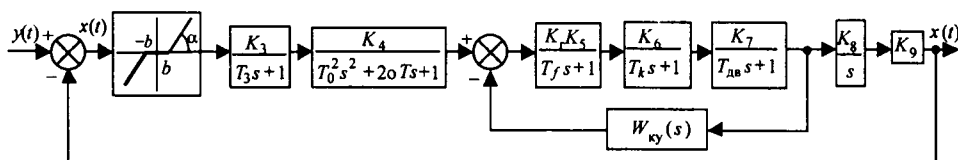


Рис. 3.1.51. Структурная схема САУ

Числовые значения параметров системы: $T_3 = 0,013$ с; $T_0 = 0,01$ с; $T_f = 0,02$ с; $T_k = 0,02$ с; $T_{\text{дв}} = 0,11$ с; $\text{tg } \alpha = 1,0$; $b = 0,2$; $\xi = 0,35$; $K_r K_3 K_4 K_5 K_6 K_7 K_8 K_9 = 13,8$.

Требуется определить варьируемые параметры p_j ($j = 1, \dots, 5$) корректирующего устройства в цепи местной обратной связи

$$W_{\text{кы}}(s) = \frac{p_5 s^2 + p_4 s + p_3}{s^2 + p_2 s + p_1} \quad (3.1.39)$$

таким образом, чтобы при входном воздействии $y(t) = 1(t) = \text{const}$ и нулевых начальных условиях $T_p \leq 2$ с, $\sigma\% \leq 15\%$.

ЗАДАНИЕ 17

Уравнение движения статической нелинейной САУ, записанное относительно выходной координаты, имеет вид

$$\left[T_1 p^2 + (1 + K_1 p_3) p + K_1 p_2 \right] x + K_1 p_4 F(x) = K_1 (p_2 + p_3 p) 1(t), \quad (3.1.40)$$

где $p = d/dt$, а $F(x)$ — нелинейность типа «насыщение», для которой K_F равен единице:

$$F(x) = \begin{cases} c & \text{при } x \geq b, \\ Kx & \text{при } -b < x < b, \\ -c & \text{при } x \leq -b. \end{cases} \quad (3.1.41)$$

Заданы также параметры: $K = 1$; $b = c = 0,5$; $T_1 = 0,15$ с; $K_1 = 10$.

Требуется определить параметры системы p_2 , p_3 , p_4 , обеспечивающие в синтезируемой системе монотонный переходный процесс, причем время переходного процесса должно составлять $T_p \approx 0,5$ с. Необходимо обеспечить устойчивость системы и статическую ошибку не более 5%. На искомые параметры наложены ограничения $p_2 > 0$, $p_3 > 0$, $p_4 > 0$.

Можно положить, что эталонный выходной сигнал $x_s(t)$ определяется формулой

$$x_s(t) = (H_0 - H_0 e^{-6t}) \cdot 1(t).$$

ЗАДАНИЕ 18

Структурная схема нелинейной САУ приведена на рис. 3.1.52. Дифференциальное уравнение движения системы, записанное относительно выходной координаты, имеет вид

$$\begin{aligned} [T_1 T_{\text{дв}} p^3 + (T_1 + T_{\text{дв}}) p^2 + (1 + K_3 p_2) p + K_3 p_1] x + K_3 p_3 p F(x) = \\ = (K_3 p_1 + K_3 p_2 p) y(t), \end{aligned} \quad (3.1.42)$$

где $K_3 = K_{\text{эму}} K_{\text{дв}} K_{\text{ред}}$, $p = d/dt$.

Заданы значения параметров системы: $T_{\text{дв}} = 0,5$ с; $T_1 = 0,165$ с; $K_3 = 240$.

С учетом численных значений параметров системы дифференциальное уравнение движения (3.1.42) принимает вид

$$\begin{aligned} [0,0825 p^3 + 0,665 p^2 + (1 + 240 p_2) p + 240 p_1] x + 240 p_3 p F(x) = \\ = (240 p_1 + 240 p_2 p) y(t), \end{aligned} \quad (3.1.43)$$

где $p = d/dt$.

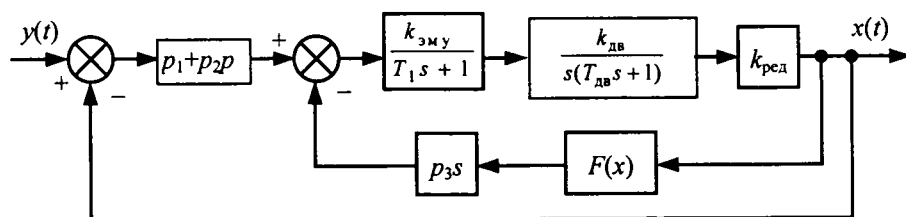


Рис. 3.1.52. Структурная схема системы

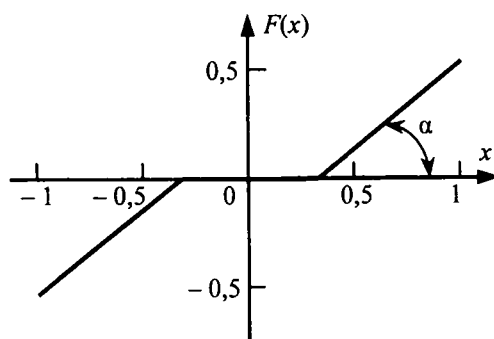


Рис. 3.1.53. Характеристика нелинейного элемента

Характеристика нелинейного элемента $F(x)$ типа «зона нечувствительности без насыщения» изображена на рис. 3.1.53 и имеет следующие значения параметров: $b = 0,4$; $K = \operatorname{tg} \alpha = 1,0$; $K_F = 1,0$. Требуется определить положительные значения параметров нелинейной системы p_1, p_2, p_3 таким образом, чтобы удовлетворялись следующие требования:

- 1) при скачкообразном внешнем воздействии $y(t) = 1(t)$ время переходного процесса в системе должно составить $T_p \approx 1,0$ с, а перерегулирование $\sigma\% \approx 20\%$;
- 2) должна обеспечиваться абсолютная устойчивость и грубость системы по варьируемым параметрам p_1, p_2, p_3 не менее $\Delta = 15\%$.

ЗАДАНИЕ 19

Рассмотрим систему (рис. 3.1.54).

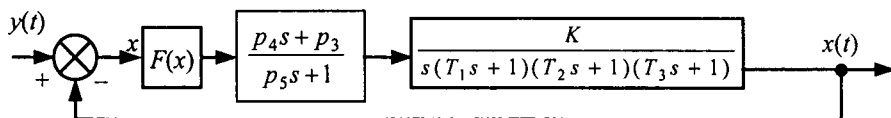


Рис. 3.1.54. Структурная схема САУ

В данном примере рассматривается синтез параметров регулятора нелинейной САУ. Динамический процесс в системе описывается нелинейным дифференциальным уравнением

$$\begin{aligned} & \{T_1 T_2 T_3 p_5 p^5 + [T_1 T_2 T_3 + p_5 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)] p^4 + \\ & + [T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 + p_5 (T_1 + T_2 + T_3)] p^3 + \\ & + (T_1 + T_2 + T_3 + p_5) p^2 + p\} x + (p_4 p + p_3) F(x) = \\ & = \{T_1 T_2 T_3 p_5 p^5 + [T_1 T_2 T_3 + p_5 (T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3)] p^4 + \\ & + [T_1 T_2 + T_1 T_3 + T_2 T_3 + p_5 (T_1 + T_2 + T_3)] p^3 + (T_1 + T_2 + T_3 + p_5) p^2 + p\} y(t), \end{aligned} \quad (3.1.44)$$

которое записано относительно координаты ошибки системы $\left(\text{здесь } p = \frac{d}{dt} \right)$.

Нелинейный элемент системы $F(x)$ типа «переменный коэффициент усиления» имеет следующие значения параметров: $K_1 = 0,5$; $K_2 = 1,0$; $b = 0,2$; $K_F = 1,0$. Заданы значения параметров системы: $K = 5$; $T_1 = 0,1$ с; $T_2 = 0,01$ с; $T_3 = 0,15$ с.

Дифференциальное уравнение с учетом известных параметров системы примет вид

$$\begin{aligned} & [0,15 \cdot 10^{-3} p_5 p^5 + (0,15 \cdot 10^{-3} + 0,0175 p_5) p^4 + (0,0175 + 0,26 p_5) p^3 + \\ & + (0,26 + p_5) p^2 + p] x + (p_4 p + p_3) F(x) = [0,15 \cdot 10^{-3} p_5 p^5 + (0,15 \cdot 10^{-3} + \\ & + 0,0175 p_5) p^4 + (0,0175 + 0,26 p_5) p^3 + (0,26 + p_5) p^2 + p] y(t). \end{aligned} \quad (3.1.45)$$

Требуется определить параметры регулятора системы $p_3 > 0$, $p_4 > 0$, $p_5 > 0$ из следующих условий:

- 1) переходной процесс в системе при $y(t) = 1(t)$ должен быть монотонным, причем время переходного процесса должно составлять $T_p \approx 4$ с;
- 2) $\sigma\% \leq 45\%$, должна обеспечиваться абсолютная устойчивость.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Автоматический регулятор	23
Автопилот	487
Амплитудно-частотная характеристика	28

Б

Баттерворса фильтр	91
Быстродействие	41, 60

В

Вектор состояния	85
Вещественная частотная характеристика замкнутой системы	28

Д

Динамические характеристики	28
Дифференциальные уравнения	21
– объекта управления	21, 85

Ж

Желаемая ЛАЧХ	28

З

Задача синтеза	23
Задающее устройство	23
Запас устойчивости	32
– по модулю	32
– по фазе	32

И

Исполнительное устройство	23

К

Качество управления	34
– в переходном режиме	26, 32
– в установившемся режиме	34
Корректирующее устройство	23
– параллельное	23
– последовательное	23
Коэффициент демпфирования	26
– ошибки	26

Л

Логарифмическая амплитудно-частотная характеристика (ЛАЧХ)	28
– желаемая	28
– типовая	28
Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ)	28

– анализ устойчивости	216
– метод построения	220
Лягерра функции	131

М

Матричная передаточная функция	339
Метод	
– матричных операторов	264
– моментов	153
– построения эталонных ПФ	86
– порождающих функций	172
– проекционный	118
– развязки каналов	339
– спектральный	131
– урavnений синтеза	76
– частотный	190
– эталонных ПФ	86, 116

Н

Невязка	48
Нелинейная система	
– метод моментов синтеза КУ	273
– постановка задачи синтеза регуляторов	273
– принцип динамической компенсации	273
– проекционный метод синтеза КУ	273
Нестационарная система	
– метод матричных операторов	247
– метод моментов синтеза регуляторов	247
– постановка задачи синтеза регуляторов	247
– принцип динамической компенсации во временной области	174
– принцип динамической компенсации в спектральной области	177

О

Область устойчивости	
– построение	205
– САУ	205
Обратная связь	23
Обратные задачи	318
Объект управления	23
Отклонение регулируемой величины	21

П

Параметры системы	23
Пассивный корректирующий фильтр	23
Передаточная функция	
– определение	23
– ошибки	34
– САУ	23
Переменные состояния	240
Перерегулирование	23

Переходная функция	48
Переходная характеристика	
– реальная	48
– эталонная	48
Переходные процессы	48
Показатели качества управления	98, 154
Проектирование САУ	23

Р

Расчет САУ	23
Регулируемая величина	23
Регулятор	
– давление пара в барабане-сепараторе	545
– математические модели	39
– ПИ, ПД, ПИД	39
– питания парогенератора	545
– питания барабана-сепаратора	545
– пропорциональный (П)	39
– уровня компенсатора объема	545
– этапы проектирования	23
Робастная система	385

С

Связь обратная	23
Сигнал	
– входной	23
– выходной	23
– главной обратной связи	23
– ошибки	23
Синтез корректирующего устройства	23
– параллельного	51
– последовательного	51
– постановка задачи	51
Система автоматического управления	
(САУ)	23
– линейная стационарная	51, 70, 86, 91
– линейная нестационарная	174
– нелинейная	273

Сравнивающее устройство	23
Стабилизация объекта	26
Структурная схема САУ	23

Т

Теория автоматического управления	5, 23

У

Управление	
– многомерными объектами	339
– модальное	364
Управляющее воздействие	23
Уравнение	
– динамики	23
– объекта управления	23
– ошибки	23

Ф

Функциональная схема САУ	23

Ч

Частота	
– сопрягающая	208
– среза	209
Частотная характеристика	
– амплитудная	215
– амплитудно-фазовая	216
– вещественная	217
– логарифмическая амплитудная	218
– мнимая	219
– фазовая	220

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Автоматизированное* проектирование систем автоматического управления / Под ред. В.В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, 1989. — 546 с.
2. *Автоматическое* регулирование паровых турбин и газотурбинных установок / Под ред. И.И. Кириллова. — Л.: Машиностроение, 1986. — 446 с.
3. *Александров А.Г.* Синтез регуляторов многомерных систем. — М.: Машиностроение, 1986. — 384 с.
4. *Альперович К.С.* Ракеты вокруг Москвы. — М.: Военное издательство, 1995. — 72 с.
5. Анализ и оптимальный синтез на ЭВМ систем управления / Под ред. А.А. Воронова и И.А. Огурка. — М.: Наука, 1984. — 344 с.
6. *Андреев Ю.Н.* Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976. — 424 с.
7. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Избранные главы теории автоматического управления. — СПб.: Наука, 1999.
8. *Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л.* Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и SCILAB. — СПб.: Наука, 2001.
9. *Аров Д.З., Крейн М.Г.* О вычислении энтропийных интегралов и их минимумов в обобщенных проблемах продолжения. — Acta Scienta Matematica, 1983. — Т.45. — С.33–50.
10. *Астапов Ю.М., Медведев В.С.* Статистическая теория систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1982. — 304 с.
11. *Афанасьев В.Н., Колмановский В.Б., Носов В.Р.* Математическая теория конструирования систем управления. — М.: Высшая школа, 1989. — 488 с.
12. *Барабанов А.Е., Первозванский А.А.* Оптимизация по равномерно-частотным показателям (H-теория) // Автоматика и телемеханика. — 1992. — №9.
13. *Баранов В.Н., Захаров Ю.Е.* Электрические и гидравлические вибрационные механизмы. Теория, расчет и конструкции. 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Машиностроение, 1977. — 328 с.
14. *Барковский В.К., Захаров В.Н., Шаталов А.С.* Синтез линейных систем автоматического управления с применением вычислительных машин. — М.: Машиностроение, 1967. — 320 с.
15. *Барковский В.В., Захаров В.Н., Шаталов А.С.* Методы синтеза систем управления. — М.: Машиностроение, 1969. — 328 с.
16. *Батенко А.П.* Системы терминального управления. — М.: Радио и связь, 1984. — 160 с.
17. *Белоус В.С.* Противоракетная оборона и оружие XXI века. — М.: Вече, 2002. — 479 с.
18. *Бесекерский В.А.* Цифровые автоматические системы. — М.: Наука, 1976. — 576 с.
19. *Бесекерский А.В., Попов Е.П.* Теория систем автоматического регулирования. — М.: Наука, 1975. — 768 с.
20. *Бирюков В.Ф., Реутов В.Ф.* Метод построения решений уравнения Бутона для класса исходных данных // Труды МВТУ. 1975. №190. — С.50–54.
21. *Боднер В.А.* Системы управления ЛА. — М.: Машиностроение, 1973. — 544 с.
22. *Бойчук Л.М.* Метод структурного синтеза нелинейных систем автоматического управления. — М.: Энергия, 1971. — 112 с.

23. Брандин В.К., Мухин В.И., Рожин В.В. Высокоточное оружие. — М.: Министерство обороны СССР, 1989. — 84 с.
24. Бромберг П.В., Цыпкин Я.З. О степени устойчивости линейных систем // Изв. АН СССР, ОТН. 1945. №2. — С.1163–1169.
25. Буков В.Н. Адаптивные прогнозирующие системы управления полетом. — М.: Наука, 1987.
26. Ван-Трис Г. Синтез оптимальных нелинейных систем управления. — М.: Мир, 1964. — 168 с.
27. Васильев Д.В., Чуич В.Г. Системы автоматического управления. — М.: Высшая школа, 1967. — 368 с.
28. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Анизотропия сигналов и энтропия линейных стационарных систем // Доклады РАН. Т.342, №3. 1995.
29. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Асимптотика анизотропийной нормы линейных стационарных систем // Автоматика и телемеханика. — 1999. — №3.
30. Владимиров И.Г., Курдюков А.П., Семенов А.В. Стохастическая проблема H_∞ -оптимизации // Доклады РАН. Т.343, №5. 1995.
31. Востриков А.С. Синтез нелинейных систем методом локализации. — Новосибирск: Изд-во НГУ, 1990. — 120 с.
32. Востриков А.С., Юркевич В.Д. Синтез многоканальных систем с вектором скорости в законе управления // Автоматика и телемеханика. — 1993. — №2. — С.51–64.
33. Гельфанд И.М., Колмогоров А.Н., Яглом А.М. Информация и энтропия для непрерывных распределений // Труды III Всесоюзного математического съезда. — Москва, 1958. Т.3.
34. Головин С.А., Сизов Ю.Г., Скоков А.Л., Худанов Л.Л. Высокоточное оружие и борьба с ним. — М.: Изд-во «ВПК», 1996. — 231 с.
35. Голубев О.В., Каменский Ю.А., Минасян М.Г., Пучков Б.Д. Российская система противоракетной обороны. — М.: Техноконсалт, 1994. — 79 с.
36. Горовиц И. Синтез систем с обратной связью. — М.: Сов. радио, 1970.
37. Д'Анжелло. Линейные системы с переменными параметрами. Анализ и синтез: Пер. с англ. / Под ред. Н.Т. Кузовкова. — М.: Машиностроение, 1974. — 288 с.
38. Джури Э. Импульсные системы автоматического регулирования. — М.: Физматгиз, 1963. — 456 с.
39. Динамика нестационарных линейных систем / Ф.А. Михайлов, Е.Д. Теряев, В.П. Булеков и др. — М.: Наука, 1967. — 368 с.
40. Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д., Шестопалов А.М. Машинные методы расчета и проектирования систем электросвязи и управления. — М.: Радио и связь, 1990. — 272 с.
41. Доброленский Ю.П., Иванова В.И., Поспелов Г.С. Автоматика управляемых снарядов. — М.: Оборониздат, 1963. — 386 с.
42. Емельянов С.В. Бинарные системы автоматического управления. — М.: Мир, 1987. — 296 с.
43. Емельянов С.В. Системы автоматического управления с переменной структурой. — М.: Наука, 1967.
44. Емельянов С.В., Коровин С.К. Новые типы обратной связи. Управление при неопределенности. — М.: Физматлит, Наука, 1997. — 352 с.
45. Жевнин А.А., Колесников К.С., Крищенко А.П., Толокнов В.И. Синтез алгоритмов терминального управления на основе концепции обратных задач динамики. — Обзор // Изв. АН СССР. Серия Техническая кибернетика. 1985. №4. С.180–188.
46. Зайцев Г.Ф., Костюк В.И., Чинаев П.И. Основы автоматического управления и регулирования. — Киев: Техника, 1975. — 495 с.

47. Иванов В.А., Медведев В.С., Чемоданов Б.К. Математические основы теории автоматического регулирования: В 2-х т. — М.: Высшая школа, 1977. Т.1. — 518 с.
48. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. — М.: Машиностроение, 1978. — 736 с.
49. Калман Р. Вариационный принцип выбора оптимального фильтра из условия минимума квадратов ошибки. В сб.: Самонастраивающиеся автоматические системы // Труды Международного симпозиума (ИФАК). — М.: Наука, 1964.
50. Карышев А.К. Динамика и управление газоперекачивающими агрегатами: Учебное пособие. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. — 160 с.
51. Киселев О.Н., Попков Ю.С. Некоторые вопросы синтеза одного класса нелинейных фильтров // Автоматика и телемеханика. — 1967. — №11. — С.29–38.
52. Кисунько Г.В. Секретная зона. Исповедь генерального конструктора. — М.: Современник, 1996. — 511 с.
53. Коваль В.А. Спектральный метод анализа и синтеза распределенных управляемых систем. — Саратов: Сарат. гос. техн. ун-т, 1997. — 192 с.
54. Конструирование робастных систем управления с использованием методов H_∞ -оптимизации. Обзор / Под ред. Е.А. Федосова. — ГосНИИАС, 1991.
55. Конференция «40-летие первого поражения баллистической ракеты средствами ПВО» (чтения, посвященные памяти Генерального конструктора ПРО, члена-корреспондента РАН Г.В. Кисунько) Сборник докладов. — М.: 2001. — 126 с.
56. Коньков В.Г. H_∞ -теория. Первая часть в кн.: Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2002.
57. Кочетков В.Т., Половко А.М., Пономарев В.М. Теория систем телеуправления и самонаведения ракет. — М.: Наука, 1964. — 536 с.
58. Красовский А.А., Поспелов Г.С. Основы автоматики и технической кибернетики. — М.: Госэнергоиздат, 1962. — 724 с.
59. Крутько П.Д. Обратные задачи динамики управляемых систем. Линейные модели. — М.: Наука, 1987. — 304 с.
60. Кузин Л.Т. Расчет и проектирование дискретных систем управления. — М.: Машгиз, 1962. — 683 с.
61. Кузовков Н.Т. Динамика систем автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1968. — 386 с.
62. Курдюков А.П. Основы робастного управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1995.
63. Курдюков А.П., Семенов А.В., Павлов Б.В., Тимин В.Н. Применение H_∞ -теории в задачах проектирования // Приборы и системы управления. №11. 1994.
64. Латин С.В., Егунов Н.Д. Теория матричных операторов и ее приложение к задачам автоматического управления. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996. — 496 с.
65. Ларин В.М., Науменко К.И., Сунцев В.Н. Спектральные методы синтеза линейных систем с обратной связью. — Киев: Наук. думка, 1971.
66. Лебедев А.А., Карабанов В.А. Динамика полета беспилотных аппаратов. — М.: Машиностроение, 1972.
67. Летов А.М. Аналитическое конструирование регуляторов I–III // Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21, №6.
68. Летов А.М. Математическая теория процессов управления. — М.: Наука, 1981. — 256 с.
69. Макашов В.С. Автоматизированный линейный синтез многосвязных систем автоматического регулирования с заданным динамическим качеством: Дисс. кандидата технических наук. — М.: 1990.

70. Максимов М.В., Горгонов Г.И. Радиоуправление ракетами. — М.: Сов. радио, 1964. — 386 с.
71. Матвеев П.С., Сеницын А.Ф. Динамическая точность систем автоматического управления со случайными параметрами // Автоматическое управление и вычислительная техника. — М.: Машиностроение, 1964. Вып. 6. — С.232–305.
72. Матвеев П. С., Сеницын А. Ф., Глебачев Ю.М. и др. Оптимизация систем автоматического управления с учетом нелинейностей, случайных параметров и помех // Автоматическое управление и вычислительная техника. Частотные методы. — М.: Машиностроение, 1968. Вып. 8. — С.239–282.
73. Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления. — М.: Изд-во МГТУ, 2001. — 743 с.
74. Машинные методы расчета и проектирования систем электросвязи и управления / А.Н. Дмитриев, Н.Д. Егупов, А.М. Шестопалов и др. — М.: Радио и связь, 1990. — 272 с.
75. Методы анализа, синтеза и оптимизации нестационарных систем автоматического управления / К.А. Пупков, Н.Д. Егупов, В.Г. Коньков, Л.Т. Милов. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1999. — 684 с.
76. Михайлов Ф.А., Теряев Е.Д., Булеков В.П. Динамика непрерывных линейных систем с детерминированными и случайными параметрами. — М.: Наука, 1971. — 286 с.
77. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. — СПб.: Наука, 2000. — 549 с.
78. Наладка средств автоматизации и автоматических систем регулирования: Справочное пособие / Под ред. А.С. Ключева. — М.: Энергоатомиздат, 1989. — 368 с.
79. Новые перспективные методы проектирования многомерных динамических систем управления. Обзор // Под ред. Е.А. Федосова. — ГосНИИАС, 1989.
80. Ньютон Дж.К., Гулд А.А., Кайзер Дж.Ф. Теория линейных следящих систем. — М.: ГИ ФМЛ, 1961. — 407 с.
81. Орурк И.А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем. — М.: Наука, 1965. — 208 с.
82. Основы теории автоматического управления / Под ред. Н.Б. Судзиловского. — М.: Машиностроение, 1985. — 452 с.
83. Основы теории систем управления высокоточных ракетных комплексов сухопутных войск / Под ред. В.Л. Солунина. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. — 327 с.
84. Отчет Института проблем управления №231-91/01. Исследование новых принципов автоматизации управления и контроля посадочными режимами ЛА. 1991.
85. Первов М. Зенитное ракетное оружие противовоздушной обороны страны. — М.: АВИАРУС-XXI, 2001. — 309 с.
86. Первов М. Системы ракетно-космической обороны России создавались так. — М.: АВИАРУС-XXI, 2003. — 432 с.
87. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. — М.: Наука, 1986. — 616 с.
88. Петров Б.Н., Крутько П.Д., Попов Е.П. Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики // Докл. АН СССР. 1979. Т.247, №5. — С.1078–1081.
89. Подчукаев В.А. Аналитические методы теории автоматического управления. — М.: Физматлит, 2002. — 255 с.
90. Позняк А.С. Реализация метода Неванлинны–Пика синтеза шуровских функций из RH_∞ с действительными коэффициентами в задаче робастной устойчивости // 5-й Ленинградский симпозиум по теории адаптивных систем. Ч.4. — Л., 1991.
91. Позняк А.С., Себряков Г.Г., Семенов А.В., Федосов Е.А. H_∞ -теория управления: феномен, достижения, перспективы, открытые проблемы. — М.: ГосНИИАС, Институт проблем управления АН СССР, 1990.

92. *Попков Ю.С.* Достаточные характеристики нелинейных систем // Автоматика и телемеханика. 1970. №3. — С.55–64.
93. *Попков Ю.С., Киселев О.Н., Петров Н.П., Шульян Б.А.* Идентификация и оптимизация нелинейных стохастических систем. — М.: Энергия, 1976. — 440 с.
94. *Попов Е.П.* Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. — М.: Наука, 1978. — 720 с.
95. *Поспелов Г.С., Доброленский Ю.П.* Метод стандартных коэффициентов для выбора параметров линейных систем автоматического регулирования / Сб. статей по автоматике и электротехнике. — Изд. АН СССР, 1956. — С.53–61.
96. *Потемкин В.Г.* Система MATLAB. Справочное пособие. — М.: ДИАЛОГ-МИФИ, 1997.
97. *Пугачев В.С., Казаков И.Е., Евланов Л.Г.* Основы статистической теории автоматических систем. — М.: Машиностроение, 1974.
98. *Пупков К.А.* Основы кибернетики. Математические основы кибернетики. — М.: Высшая школа, 1974. — 416 с.
99. *Пупков К.А.* Основы кибернетики. Теория кибернетических систем. — М.: Высшая школа, 1976. — 416 с.
100. *Пупков К.А., Егунов Н.Д., Трофимов А.И.* Статистические методы анализа, синтеза и идентификации нелинейных систем автоматического управления / Под ред. Н.Д. Егунова. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1998. — 562 с.
101. *Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С.* Функциональные ряды в теории нелинейных систем. — М.: Наука, 1976. — 448 с.
102. *Пупков К.А., Коньков В.Г.* Интеллектуальные системы. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2003. — 348 с.
103. *Рей У.Х.* Методы управления технологическими процессами: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. — 368 с.
104. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. — М.: Наука, 1990.
105. *Сборник задач по ТАР и У* / Под ред. В.А. Бесекерского. — М.: Наука, 1978. — 512 с.
106. *Семенов А.В.* Методы H_∞ -теории управления. В кн.: Энциклопедия машиностроения. Т.4. — М., 2000.
107. *Семенов А.В., Владимиров И.Г.* Методы стохастической H_∞ -оптимизации в приложении к проблемам конструирования робастных регуляторов и фильтров. Технический отчет №117 (14027)-95. — М.: ГосНИИАС, 1995.
108. *Семенов А.В., Владимиров И.Г., Фурлетов М.Ю., Мещеряков О.Г.* Методы стохастической H_∞ -оптимизации в приложении к проблемам конструирования робастных регуляторов и фильтров. Технический отчет №184 (1390)-94. — М.: ГосНИИАС, 1994.
109. *Сивцов В.И., Чулин Н.А.* Автоматизированный синтез систем регулирования на основе частотного метода теории автоматического управления. — М.: Машиностроение, 1982. — 236 с.
110. *Соколов Н.И.* Аналитический метод синтеза линеаризованных систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1966. — 328 с.
111. *Солодов А.В., Петров Ф.С.* Линейные автоматические системы с переменными параметрами. — М.: Наука, 1971. — 620 с.
112. *Солодовников В.В., Бирюков В.Ф., Пилишкин В.Н.* Синтез регулятора для многомерного объекта по ограничениям на вектор состояния // Труды МВТУ. Системы автом. управ. 1979. №314. Вып. 7. — С.42–59.
113. *Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д.* Анализ и синтез нелинейных систем автоматического регулирования при помощи рядов Вольтерра и ортого-

- нальных спектров. В кн.: Техническая кибернетика / Под ред. В.В. Солодовникова. Кн. 3, ч. 2. — М.: Машиностроение, 1969. — С.223–254.
114. Солодовников В.В., Дмитриев А.Н., Егунов Н.Д. Спектральные методы расчета и проектирования систем управления. — М.: Машиностроение, 1986. — 440 с.
115. Солодовников В.В., Матвеев П.С. Расчет оптимальных САУ при наличии помех. — М.: Машиностроение, 1973. — 240 с.
116. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1985. — 608 с.
117. Солодовников В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теория автоматического управления техническими системами. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1993. — 492 с.
118. Солодовников В.В., Семенов В.В. Спектральная теория нестационарных систем управления. — М.: Наука, 1974. — 336 с.
119. Солодовников В.В., Филимонов Н.Б. Проблема динамического качества систем автоматического управления: Учеб. пособие. — М.: МВТУ, 1987.
120. Справочник по теории автоматического управления / Под ред. А.А. Красовского — М.: Наука, 1987. — 712 с.
121. Теоретические основы управления полетом баллистических ракет и головных частей / Под ред. д.т.н., проф. Г.Н. Разоренова. — М., 2001. — 407 с.
122. Теория автоматического управления / Под ред. А.А. Воронова. Ч. I, II. — М.: Высшая школа, 1986. — 362, 382 с.
123. Теория автоматического управления. Изд. 2-е / Под ред. А.В. Нетушила. — М.: Высшая школа, 1983. — 432 с.
124. Техническая кибернетика. Теория автоматического регулирования / Под ред. В.В. Солодовникова. — М.: Машиностроение, 1967–1969. Кн.1 — 768 с. Кн. 2. — 680 с. Кн. 3, ч. 1 — 608 с., ч. 2 — 366 с.
125. Тихомиров В.М. Работы А.Н. Колмогорова по ϵ -энтропии функциональных классов и суперпозициям функций // Успехи математических наук. Т. XVIII, №5(113). 1963.
126. Тищенко Н.М. Введение в проектирование систем управления. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 248 с.
127. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования: Учеб. пособие для ВТУЗов. — М.: Машиностроение, 1989. — 752 с.
128. Топчиев Ю.И., Цыпляков А.П. Задачник по теории автоматического регулирования. — М.: Машиностроение, 1977. — 592 с.
129. Трофимов А.И., Егунов Н.Д., Дмитриев А.Н. Методы теории автоматического управления, ориентированные на применение ЭВМ. — М.: Энергоатомиздат, 1997. — 654 с.
130. Трофимов А.И., Егунов Н.Д., Слекеничс Я.В. Принципы построения автоматических регуляторов теплоэнергетических процессов АЭС. — М.: Энергоатомиздат, 1999. — 340 с.
131. Уткин В.И., Востриков А.С. К синтезу алгоритмов управления многосвязными объектами на основе принципа локализации // Исследования по теории многосвязных систем. — М.: Наука, 1982. — С.36.
132. Федосов Е.А., Инсаров В.В., Селивохин О.С. Системы управления конечным положением в условиях противодействия среды. — М.: Наука, 1989. — 270 с.
133. Федосов Е.А., Себряков Г.Г. Спектральный анализ систем управления со случайно изменяющимися параметрами // Автоматическое управление и вычислительная техника. Частотные методы. — М.: Машиностроение, 1968. Вып. 8. — С.207–238.
134. Федосов Е.А. Автоматическое управление. Теория. Тт.1–4. Машиностроение: Энциклопедия в 40 томах. — М.: Машиностроение, 2000. — 688 с.

135. Фельдбаум А.А. Основы теории оптимальных автоматических систем. — М.—Л.: Физматгиз, 1963. — 552 с.
136. Фриденсон Е.С. Основы ракетной техники. — М.: Военное издательство МО СССР, 1973. — 204 с.
137. Хореев А.А. Авиационное высокоточное оружие. — М.: РВСН, 1996. — 237 с.
138. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. — М.: Мир, 1990.
139. Цыпкин Я.З. Основы теории автоматических систем. — М.: Наука, 1977. — 650 с.
140. Цыпкин Я.З., Попков Ю.С. Теория нелинейных импульсных систем. — М.: Наука, 1973. — 414 с.
141. Черток Б.Е. Ракеты и люди. — М.: Машиностроение, 1997. — 534 с.
142. Шамриков Б.М. Основы теории цифровых систем управления: Учебник для высших технических учебных заведений. — М.: Машиностроение, 1985. — 296 с.
143. Шаталов А.С. Отображение процессов управления в пространствах состояний. — М.: Энергоатомиздат, 1986. — 256 с.
144. Шахназаров Г.А. Программное обеспечение расчета систем автоматического регулирования: Учебное пособие. — М.: Изд-во МВТУ им. Н.Э. Баумана, 1985. — 50 с.
145. Ширяев А.Н. Вероятность. — М.: Наука, 1989.
146. Ширяев А.Н., Липцер Р.Ш. Статистика случайных процессов. — М.: Наука, 1974.
147. Шмыгин А.И. СОИ глазами русского полковника. — М.: Издатцентр ЦСП «Ветеран Отчизны», «Мегатрон», 2000.
148. Юркевич В.Д. Синтез нелинейных нестационарных систем управления с разнотемповыми процессами. — СПб.: Наука, 2000. — 287 с.
149. Ball J.A., Helton J.W., Walker M.L. H -infinity Control for Nonlinear Systems with Output Feedback // IEEE Trans. Automat. Contr., vol. 38, №4, 1993.
150. Başar T., Bernhard P. H -infinity Optimal Control and Related Minimax Design Problems, Dynamic Game Approach, Systems and Control: Foundations and Applications. — Birkhauser, 1991.
151. Chang S.S.L., Peng T.K.C. Adaptive Guaranteed Cost Control of Systems with Uncertain Parameters // IEEE Trans. on AC. August, 1972.
152. Dorato P. U-Parameter design example: Robust Flight Control for Wind-Shear Protection // Proceeding of the 29-nd Conf. on Dec. and Control. 1990. Vol. 1.
153. Doyle J.C., Glover K., Khargonekar P.P., Francis B.A. State-space solutions to standard H_2 and H_∞ control problems // IEEE Transactions on Automatic Control, AC-34, №8, 1989.
154. Doyle J.C. Lecture notes in advances in multivariable control. ONR/Honeywell, Workshop, Minneapolis, MN, 1984.
155. Doyle J., Chu C. Robust control of multivariable and large scale systems. Final Technical report, Honeywell Systems and Research Centre.
156. Doyle J.C., Stein G. Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical / Modern Synthesis // IEEE Trans. Auto. Control. 1981. Vol. AC-26. N1.
157. Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications. Progress in System and Control Theory, vol. 14, Editors H.L. Trentelman, J.C. Willems. Birkhauser, 1993.
158. Francis B.A. A Course in H_∞ -Control Theory. Lecture Notes in Control and Information Sciences, vol. 88, Springer-Verlag, Berlin etc., 1987.
159. Glover K. All optimal Hankel-norm approximations of linear multivariable systems and their L_∞ error bounds. // Int. J. Control, v. 39, 1984.

160. Green M., Limebeer D. Linear Robust Control. — Prentice Hall, 1998.
161. Glover K., MacFarlane D. Robust Controller Design Using Normalised Coprime Factor Plant Descriptions // LNCIS. Vol. 138. — NY: Springer-Verlag, 1990.
162. Gu D.-W., Tsai M.C., O'Young S.D., Postlethwaite I. State-space formulae for discrete-time H_∞ optimization // International Journal of Control, v. 49, №5, 1989.
163. Hyde R.A., Glover K. Taking H_∞ -control into Flight // Proc. of the 32-nd Conf. on Dec. and Control. Vol. 2. 1993.
164. Iglesias P.A., Glover K. State-space approach to discrete-time H_∞ control // International Journal of Control, v. 54, №5, 1991.
165. Ivan. M. A Ring-Vortex Downburst Model for Flight Simulations // J. Aircraft. V. 23. №3. March 1986.
166. Kalman R.E., Bucy R.S. New Results in Linear Filtering and Prediction Theory // Trans. ASME, J. Basic Engineering, 1961.
167. Kang W., De P.K., Isidori A. Flight Control in a Windshear via Nonlinear H_∞ -Methods // Proceeding of the 31-st Conf. on Dec. and Control. Vol. 1, 1992.
168. Kurdjukov A., Pavlov B., Timin V. Longitude flight control in a windshear via H_∞ -Methods // AIAA Conference, July 15–20, San-Diego, USA, 1996.
169. Kurdjukov A., Pavlov B., Timin V. Robust flight control in a windshear // European Control Conference (ECC 95), September 5–8, Roma, Italy, 1995.
170. Kwakernaak H.A. Polynomial Approach to Minimax Frequency Domain of Multivariable Feedback Systems // Int. J. Contr. 1986, №1.
171. Limebeer D.J., Halikias G.D. A controller degree bound for H_∞ -optimal control problems of the second kind // SIAM J. Contr. and Opt. Vol. 26, 1988.
172. Limebeer P.J.N., Anderson B.J.O., Khargonekar P.P., Green M.A. A game theoretic approach to H_∞ -control for time varying systems // SIAM J. Contr. and Opt. Vol. 30. №2. 1992.
173. Mariton M., Bertrand P. A homotopy algorithm for solving coupled Riccati equations // Optimal Control Applications & Methods, v. 6, 1985.
174. Mehrmann V.L. The Autonomous Linear Quadratic Control Problem: Theory and Numerical Solution. Lecture Notes in Control and Information Sciences, v. 163, Springer-Verlag, Berlin etc. 1994.
175. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimization and acceleration guidance of flight trajectories in a windshear // J. Guid. Contr. and Dyn., v. 10, №4, 1987.
176. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Gamma guidance scheme for flight in a windshear // J. Guid. Contr. and Dyn., v. 11, №4. 1988.
177. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Guidance Strategies for Near-Optimum Take-off Performance in a Windshear // Journal of Optimization Theory and Applications, v. 50, №1, July, 1986.
178. Miele A., Wang T., Melvin W.W. Optimal Flight Take-off Trajectories in the Presence of Windshear // Journal of Optimization Theory and Applications, v. 49, №1, April, 1986.
179. Miele A., Wang T., Melvin W.W., Bowles R.L. Maximum Survival Capability of an Aircraft in a Severe Windshear // Journal of Optimization Theory and Applications, v. 53, №12, May, 1987.
180. Miele A., Wang T., Tzeng C.Y., Melvin W.W. Optimization and Guidance of Abort Landing Trajectories in an Windshear // Paper №AIAA-87-2341, AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference, August 17–19, Monterey, California, 1987.
181. Mustafa D., Glover K. Minimum Entropy H_∞ -Control. Lecture Notes in Control and Information Sciences, Springer-Verlag, Berlin etc., 1991.

182. Ohno M., Takahami M., Kimura T., Tokuda E. H_∞ Control Design Method Combined with Exact Model Matching Design of Longitudinal Robust Flight Control System // Proceeding of the 32-rd Conf. on Dec. and Control. V. 1, 1993.
183. Petersen I.A. A stabilisation algorithm for a class of uncertain linear systems // Sys. and Cont. Letters, 8, 1987, pp.351–357.
184. Ran A.C.M., Rodman L. On parameter dependence of solutions of algebraic Riccati equations // Mathematics of Control Signals & Systems, v. 1, 1988.
185. Ravi R., Nagpal K.M., Khargonekar P.P. H_∞ -Control of linear time varying systems: a state-space approach // SIAM J. Contr. and Opt. Vol. 29, j 6, 1991.
186. Recent Advances in Robust Control. Edited by P. Dorato, Rama K. Yedavalli. IEEE PRESS, 1990.
187. Robust Control. Edited by P. Dorato. IEEE PRESS, 1987.
188. Semyonov A.V., Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P. Stochastic approach to H_∞ -optimization // Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control, Florida, USA, December 14–16, 1994, v. 3, 1994.
189. Tahk M., Speyer J. Modelling of parameter variations and asymptotic LQG synthesis // IEEE Trans. on Auto. Cont., AC-32, 1987, pp.793–801.
190. Van der Schaft A.J. Nonlinear State Space H_∞ -control Theory, in Essay an Control: Perspectives in the Theory and Applications. — Birhauser, 1993.
191. Vidyasagar M. Control System Synthesis: A Coprime Factorization Approach. — MIT Press, MA, 1985.
192. Vidyasagar M. Normalized coprime factorization for non strictly proper systems // IEEE Transactions on Automatic Control, AC-33, pp.300–301, 1988.
193. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. On computing the anisotropic norm of linear discrete-time-invariant systems // Proceedings of the 13th IFAC World Congress, San-Francisco, California, USA, June 30–July 5, 1996, v. G, Paper IFAC-2d-01.6, 1996.
194. Vladimirov I.G., Kurdjukov A.P., Semyonov A.V. State-space solution to anisotropy-based stochastic H -infinity optimization problem // Proceedings of the 13th IFAC World Congress, San-Francisco, California, USA, June 30–July 5, 1996, v. H, Paper IFAC-3d-01.6, 1996.
195. Wonham W.M. Optimal Stationary Control of System with State-Dependent Noise // SIAM Journal on Control. August 1967.
196. Young N.J. The Nevanlinna-Pick Problem for Matrixvalued Functions // J. of Operator Theory. 1986. Vol. 15.
197. Zames G. Feedback and optimal sensitivity: model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses // IEEE Trans. Auto. Control. 1981. Vol. AC-26. j2.
198. Zames G. On input-output stability of time-varying nonlinear state-space models // IEEE Trans. Automat. Contr., vol.11, №2, pp.228–236, 1966.
199. Zhao Y. A Simplified Ring-Vortex Downburst Model // AIAA Paper. j580, 1990, pp.1–11.
200. Zhou K., Doyle J.C., Glover K. Robust and optimal control. — Prentice Hall, 1996.

СОДЕРЖАНИЕ

ОБЩЕЕ ПРЕДИСЛОВИЕ К УЧЕБНИКУ	5
ВВЕДЕНИЕ К 3-МУ ТОМУ	11
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ АББРЕВИАТУР	19
СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ	20
ГЛАВА 1. МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ	23
1.1. Постановка задачи синтеза регуляторов и основные этапы ее решения	24
1.1.1. Общие положения, связанные с задачей синтеза регуляторов	24
1.1.2. Качество процессов управления	28
1.1.3. Постановка задачи синтеза регуляторов в классе одномерных стационарных систем	36
1.2. Методы определения структуры регуляторов	46
1.2.1. Общие положения, определяющие пути обеспечения заданного качества и структуру регулятора в классе линейных стационарных систем	46
1.2.1.1. Стабилизация объектов введением обратной связи по производным	46
1.2.1.2. Целенаправленное изменение динамических свойств систем путем введения дифференцирующих звеньев в прямую цепь	51
1.2.1.3. Влияние коэффициентов усиления разомкнутой системы и интеграторов в прямой цепи на качество работы САУ в установившемся режиме	54
1.2.1.4. Влияние местных ОС	55
1.2.2. Математические модели и анализ регуляторов	60
1.2.2.1. Математические модели	60
1.2.2.2. Анализ динамических характеристик регуляторов	62
1.2.2.3. Техническая реализация корректирующих устройств [117]. Последовательные корректирующие устройства [117]	67
1.3. Обратные связи [117, 124]	73
1.4. Общие подходы и принципы решения задачи расчёта параметров регуляторов	76
1.5. Методы построения эталонных передаточных функций замкнутых систем	86
1.5.1. Построение передаточной функции эталонной системы в классе оптимизационных задач	87
1.5.2. Построение передаточной функции эталонной системы в классе низкочастотных фильтров баттерворса	91
1.5.3. Метод стандартных коэффициентов построения эталонной передаточной функции	101
1.6. Принцип динамической компенсации и анализ его эффективности для класса стационарных систем	106
1.7. Метод эталонных передаточных функций замкнутых систем управления	116

1.8.	МЕТОД ЭТАЛОННЫХ ПЕРЕДАТОЧНЫХ ФУНКЦИЙ РАЗОМКНУТЫХ СИСТЕМ	125
1.9.	СПЕКТРАЛЬНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ФУНКЦИЙ ЛЯГЕРРА	131
1.9.1.	Постановка задачи	131
1.9.2.	Алгоритм расчета спектральной характеристики регулятора	132
1.10.	МЕТОД НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ РЕГУЛЯТОРОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ	137
1.11.	МЕТОД МОМЕНТОВ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	153
1.12.	МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	172
1.13.	ЧАСТОТНЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА КОРРЕКТИРУЮЩИХ УСТРОЙСТВ	190
1.13.1.	Определение импульсной переходной функции (ИПФ) по частотным характеристикам замкнутой системы	190
1.13.2.	Определение переходной характеристики по частотной характеристике замкнутой системы	192
1.13.3.	Оценка качества переходной характеристики по частотным характеристикам	194
1.13.4.	Связь показателей качества замкнутой системы с частотными характеристиками разомкнутой	200
1.13.5.	Определение частоты среза ЛАЧХ разомкнутой системы при наличии ограничений на максимальное ускорение в системе [117, 124]	208
1.13.6.	Метод логарифмических амплитудно-частотных характеристик (частотный метод синтеза последовательных корректирующих устройств В.В. Солодовникова)	211
1.14.	СИНТЕЗ ДИСКРЕТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ	221
1.14.1.	Модели управляемых объектов с ЭВМ	221
1.14.2.	Свойства многомерных дискретных систем	225
1.14.3.	Модальное управление	230
1.14.4.	Алгебраический синтез в пространстве «вход-выход»	235
1.14.5.	Дискретная реализация непрерывных регуляторов	239
1.14.6.	Анализ реализации численных алгоритмов	243
ГЛАВА 2.	МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ ОДНОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ	247
2.1.	Основные положения принципа динамической компенсации при описании системы и ее элементов импульсными переходными функциями [37, 39, 75, 76, 111, 124]	247
2.2.	Реализация принципа динамической компенсации методом матричных операторов	252
2.3.	МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА МАТЕМАТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	255
2.4.	МЕТОД МАТРИЧНЫХ ОПЕРАТОРОВ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ, ПРЕДПОЛАГАЮЩИЙ ВЫБОР ЕГО СТРУКТУРЫ И ИЗМЕНЯЕМЫХ ПАРАМЕТРОВ	264
ГЛАВА 3.	МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ ОДНОМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ	273
3.1.	Принцип динамической компенсации	273
3.2.	МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ И ЕГО РЕАЛИЗАЦИЯ С ПОМОЩЬЮ АППАРАТА НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	279
3.3.	ПРОЕКЦИОННЫЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ	288

3.4.	СЕТОЧНО-ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ МЕТОД СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ, ИСПОЛЬЗУЮЩИЙ АППАРАТ НЕЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ	300
3.5.	ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ: ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ	318
3.5.1.	Содержание обратных задач динамики и примеры их решения	318
3.5.2.	Алгоритм построения программных управлений движением одного класса нелинейных динамических систем (задача Е.А. Барбашина)	321
3.5.3.	Алгоритм решения задачи слежения: воспроизведение эталонной выходной вектор-функции	331
ГЛАВА 4.	МЕТОДЫ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ МНОГОМЕРНЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ (ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ)	339
4.1.	МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	339
4.2.	ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ СИНТЕЗА РЕГУЛЯТОРОВ В КЛАССЕ МНОГОМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СИСТЕМ	343
4.3.	ДИНАМИЧЕСКАЯ И СТАТИЧЕСКАЯ РАЗВЯЗКА КАНАЛОВ (ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ)	347
4.4.	МЕТОД ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЙ СИНТЕЗА УСТРОЙСТВ РАЗВЯЗКИ КАНАЛОВ И РЕГУЛЯТОРОВ	358
4.5.	МОДАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ	364
4.5.1.	Постановка задачи	364
4.5.2.	Модальное управление при полностью измеряемом векторе состояния. Управление всеми модами	365
4.5.2.1.	Скалярное управление	365
4.5.2.2.	Векторное управление	368
4.5.3.	Управление отдельными модами при полных измерениях	376
4.5.4.	Оптимальное модальное управление одной модой при полных измерениях	378
4.5.5.	Модальное управление при неполных измерениях	381
ГЛАВА 5.	ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ РОБАСТНОГО И СТОХАСТИЧЕСКОГО РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ	385
5.1.	НОРМЫ СИГНАЛОВ И СИСТЕМ	389
5.1.1.	Нормы сигналов	389
5.1.2.	Нормы систем	390
5.1.3.	Вход-выходные соотношения	392
5.1.4.	ВЫЧИСЛЕНИЕ 2- и ∞ -НОРМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ	394
5.1.5.	Пространства Лебега и Харди	395
5.1.5.1.	Пространства Лебега	395
5.1.5.2.	Пространства Харди	397
5.2.	ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ	398
5.2.1.	Простейший контур с обратной связью	399
5.2.2.	Внутренняя устойчивость	401
5.2.3.	Качество	402
5.3.	НЕОПРЕДЕЛЕННОСТЬ И РОБАСТНОСТЬ	403
5.3.1.	Неопределенность объекта	403
5.3.1.1.	Мультипликативное возмущение	404
5.3.1.2.	Другие возмущения	405
5.3.2.	Робастная устойчивость	405
5.3.2.1.	Критерии робастной устойчивости	408
5.3.3.	Робастное качество	409
5.4.	СТАБИЛИЗАЦИЯ	411
5.4.1.	Взаимно простая факторизация	411
5.4.1.1.	Алгоритм построения взаимно простых сомножителей	412

5.4.2.	Факторизация в пространстве состояний	413
5.4.3.	Параметризация регуляторов	414
5.4.4.	Строгая и одновременная стабилизация	416
5.5.	ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ	418
5.5.1.	Задача построения модели	418
5.5.2.	Проблема Неванлинны–Пика	418
5.5.3.	Алгоритм Неванлинны	419
5.5.4.	Решение задачи построения модели	421
5.5.4.1.	Алгоритм решения задачи построения модели	422
5.5.5.	Приложение задачи построения модели к решению задачи H_∞ -оптимизации	423
5.6.	ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МНОГОМЕРНОЙ ТЕОРИИ РОБАСТНОГО УПРАВЛЕНИЯ	425
5.6.1.	Стандартная задача H_∞ -управления	425
5.6.2.	Взаимно простые факторизации	426
5.6.3.	Хорошая определенность и внутренняя устойчивость	429
5.6.4.	Результаты по устойчивости замкнутых систем	430
5.6.5.	Модели неопределенностей и возмущений	430
5.6.5.1.	Модели возмущений в пространстве состояний	431
5.6.5.2.	Модели возмущений в частотной области	431
5.6.6.	Анализ робастной устойчивости	435
5.6.7.	Проблема робастной стабилизации	436
5.6.8.	«2-Риккати подход» для решения стандартной задачи	436
5.7.	ПОСТРОЕНИЕ АНИЗОТРОПИЙНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ	438
5.7.1.	Анизотропийный анализ систем	439
5.7.1.1.	Средняя анизотропия гауссовского сигнала	439
5.7.1.2.	Анизотропийная норма линейной системы	441
5.7.1.3.	Вычисление анизотропийной нормы методом гомотопии	444
5.7.2.	Анизотропийный синтез систем	447
5.7.2.1.	Задача оптимального управления по критерию минимума анизотропийной нормы	447
5.7.2.2.	Вычисление оптимального регулятора методом гомотопии	452
5.8.	ПОСТРОЕНИЕ РОБАСТНЫХ РЕГУЛЯТОРОВ ДЛЯ САМОЛЕТА НА РЕЖИМЕ ПОСАДКИ	455
5.8.1.	Задачи робастного управления самолетом	456
5.8.1.1.	Математическая модель продольного движения самолета	456
5.8.1.2.	Постановка задач управления	457
5.8.2.	Результаты моделирования	460
5.8.2.1.	Параметры системы управления и регуляторов	460
5.8.2.2.	Сравнение систем с различными регуляторами	464
5.8.2.3.	Внешнее возмущение — белый шум	466
5.8.2.4.	Внешнее возмущение — цветной шум	469
5.8.2.5.	Внешнее возмущение — детерминированный входной сигнал	476
5.8.2.6.	Выводы по результатам моделирования	479

ГЛАВА 6. СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В АТОМНОЙ И РАКЕТНОЙ ТЕХНИКЕ, А ТАКЖЕ ПРИ СОЗДАНИИ ПРОТИВОСАМОЛЕТНОЙ И ПРОТИВОРАКЕТНОЙ ОБОРОНЫ

6.1.	СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ БАЛЛИСТИЧЕСКИХ РАКЕТ [21, 41, 57, 70, 121]	485
6.2.	СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ВЫСОКОТОЧНЫМ ОРУЖИЕМ [23, 34, 83, 121, 132, 137]	492
6.3.	СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ, ПРИМЕНЯЕМЫЕ В ПРОТИВОСАМОЛЕТНОЙ ОБОРОНЕ [4, 41, 52, 57, 70, 85, 136, 141]	503
6.3.1.	Основные теоретические положения	503

6.3.2.	Конкретные системы ПСО и тактической ПРО	514
6.4.	ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ СИСТЕМА ПРО — КОМПЛЕКС АВТОМАТИЧЕСКИ ФУНКЦИОНИРУЮЩИХ ИНФОРМАЦИОННЫХ СИСТЕМ И СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ [17, 35, 52, 55, 70, 85, 86, 141]	520
6.5.	РЕГУЛЯТОРЫ ОСНОВНЫХ ТЕПЛОЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ АТОМНЫХ ЭЛЕКТРОСТАНЦИЙ [130]	545
6.5.1.	Основные управляемые параметры энергоблоков с реакторами ВВЭР и РБМК	545
6.5.2.	Структурные схемы регуляторов АЭС	548
6.5.3.	Регуляторы питания парогенератора	552
6.5.4.	Регуляторы уровня компенсатора объема	554
6.5.5.	Регуляторы уровня регенеративных подогревателей	557
6.5.6.	Регулятор питания барабана-сепаратора	559
6.5.7.	Регулятор давления пара в барабане-сепараторе	561
6.5.8.	Цифровой регулятор давления пара в барабане-сепараторе	563
6.5.9.	Цифровой регулятор разворота турбогенераторов	565
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ.		
СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ САУ		567
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ		597
ЛИТЕРАТУРА		599

TEXTBOOK ANNOTATION

The textbook "Methods of Classic and Modern Control Theory" includes five volumes:

- Volume I — "Description and Analysis of Automatic Control Systems"
- Volume II — "Stochastic Dynamics of Automatic Control Systems"
- Volume III — "Controllers Design"
- Volume IV — "Automatic Control Systems Optimization Theory"
- Volume V — "Methods of Modern Control Theory"

I. Characteristic features of the textbook

1. This textbook is addressed to the wide range of readers:

- a) The beginning control theory students. It should be mentioned that this subject may be both an obligatory one evaluating the level of engineer's proficiency and an optional one.
- b) Students and specialists resuming studies in the field of control theory because of expanding range of problems concerned with automation processes.
- c) Students and specialists who want to refresh their knowledge by studying a part of the textbook that has not been included into engineering specialties curriculum.

The readers are to choose the material according to a particular tasks a), b), c) and to general curriculum opportunities. Taking into consideration the purpose of the textbook it should be noted that it presents sufficient material to make a proper choice.

2. Material introduction methods

The textbook attempts to provide readers with knowledge of control theory methods from fundamental concepts of control theory (control aims and concepts, control systems analysis, systems classification, analysis and synthesis of the main tasks and others) to its state-of-the-art issues. Getting a deep insight into the problems of control theory is impossible within the framework of current syllabus, that's why the subject matter of some trends has not been included into this textbook.

3. The level of readers' mathematical background

The authors have tried to set out the material in a simple and readily available form.

A scope of knowledge of higher mathematics necessary for understanding the contents corresponds to the syllabus for earlier stages of tuition at higher technical educational institutions.

The textbook implements concepts of functional analysis. The necessary information is given in corresponding section of the textbook. Owing to language application and the results of functional analysis bring about the more thorough discussion of the essence of each method, the opportunity of obtaining in-depth theoretical information as well as correlation of methods that seem entirely different at first sight.

4. Technical trend of the textbook

The subject matter of the textbook is given from the engineering point of view. The author stresses the main ideas of forming basis of methods but does not always adduce strict methodological proofs. The textbook is supposed to find simpler methods for solving practical tasks. Besides, the presentation of the materials is intended to help students realize the practicality of described methods.

In most cases the methods are reduced to computing algorithms. Tables and other additional materials are available to facilitate their application.

The main merit of the textbook is the outline of the use of particular control systems in the atomic industry for thermotechnical processes control:

- The textbook presents principal, functional and structural circuits of the system.
- It illustrates the calculations using particular algorithms.
- It gives the analysis of the results, etc.

It is impossible to study control theory without mastering the engineering aspect. That is why the engineering aspect of formulating and solving practical tasks is emphasized throughout the course.

5. "Computing colouring" of the material

The contents of the book is characterized by a certain "computing colouring" because present-day computers make it possible to reduce greatly automatic control systems designing time, stressing thus the significance of numerical methods in automatic control theory.

The author of the textbook has tried to take into account that the computer-aided control system design depends on many factors:

- The adequacy degree of system mathematical model.
- The efficiency degree of numerical methods used in algorithmic support.
- The availability of high-quality software.
- The extent of using the creative ability of the researcher-designer.

II. The contents

1. Mathematical models of automatic control systems

The problems of mathematical description of singular and nonsingular linear and nonlinear control systems, systems with distributed constants, continuous discrete systems are considered in the textbook in detail. Much attention is paid to the state space method in linear systems which gives basically new possibilities of the system analysis and control laws synthesis. The description by Volterra series is described in nonlinear system class.

2. Deterministic analysis of automatic control systems

The system theory methods has been studied to solve the following problems:

- a). The investigation of the steady-state singular, nonstationary and nonlinear systems:
 - the criteria of stability are considered in detail;
 - much attention is paid to nonlinear system class;

(The original material concerning the problems of stability is given in the corresponding chapter.)

- b). The analysis of system performance in unstable mode and creation of output processes.
- c). The investigation of performance accuracy in stable mode.

3. Statistic analysis of automatic control systems

The textbook deals with technical methods of the broad class ACS statistic research, including nonlinear and stochastically disturbed systems.

4. Filtration and control systems statistical synthesis

This chapter includes the following methods:

- a). Optimal filter synthesis on basis of Kolmogorov–Wiener’s theory as well as R. Calman and R. Busy.
- b). Synthesis of optimal observers.
- c). Synthesis of optimal analytical and nonlinear filters, described by Volterra series, etc.

5. Numerical methods of complex control system analysis under deterministic and stochastic inputs

Matrix operator method forms the basis for computer-aided control system investigation useful for algorithmization and programming.

6. Control objects identification

Formulation of identification problem for linear and nonlinear objects classes, its main aspects and engineering approach to its solution are outlined in this textbook.

7. Control system synthesis based on quality (controller synthesis)

Alongside with traditional methods of controller synthesis (frequency, modal control, dynamic compensation methods etc.), great attention is devoted to the application of mathematical programming due to the fact, that it determines general approach to optimization problems solution and is computer-aided.

8. Synthesis of optimal automatic control systems

The following problems were analysed:

- a). Basis principles of calculus of variations;
- b). Pontryagin’s maximal principle including the problem of state variables;
- c). Dynamic programming;
- d). Linear-quadratic problems;
- e). Method of moments;
- f). Mathematical programming as applied to optimal program controls development.

9. Methods of up-to-date CAD theory

Methods include rough control systems synthesis, H-control theory and robust methods as well as the problems of multi-object and multi-criteria systems optimization as well as application of effective compromises, calculation tasks and design of adaptive and intellectual control systems, differential geometry methods application for control theory, etc.

Учебное издание

Константин Александрович Пупков

Николай Дмитриевич Езупов

Игорь Геннадьевич Владимиров

Владимир Иванович Краснощеченко

Владимир Николаевич Пилишкин

Владислав Иванович Сивцов

Виктор Николаевич Тимин

Николай Васильевич Фалдин

Юрий Петрович Корнюшин

Александр Петрович Курдюков

Виктор Михайлович Рыбин

Янис Витальевич Слекеничс

Адольф Иванович Трофимов

МЕТОДЫ КЛАССИЧЕСКОЙ И СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

В пяти томах

Том 3

СИНТЕЗ РЕГУЛЯТОРОВ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

Редакторы *С.Н. Капранов, К.Ю. Савинченко*

Корректоры *Н.Г. Варварская, А.В. Жарков*

Компьютерная верстка *А.Л. Репкин, М.Р. Фишер*

Изд. лиц. №020523 от 25.04.97. Подписано в печать 11.03.2004.

Формат 70×100 1/16. Печ. л. 38,5. Усл. печ. л. 50.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 2500 экз. Заказ №51

Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана

107005, Москва, 2-я Бауманская, 5

Оригинал-макет подготовлен редакционно-издательским отделом
филиала МГТУ им. Н.Э. Баумана в г. Калуге
совместно с Издательским Домом «Манускрипт»

Отпечатано с готового оригинал-макета в ГП «Облиздат»

248640, г. Калуга, пл. Старый Торг, 5

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции

ОК—005—93, том 2; 953000 — книги, брошюры

ISBN 5-7038-2191-6



9 785703 821916

**Издательство МГТУ им. Н.Э. Баумана
совместно с Издательским домом «Манускрипт»
предлагает Вашему вниманию
цикл учебников и учебных пособий
«Методы теории автоматического управления»**

- **Подготовлен к изданию:** Учебник для вузов в 5-ти томах, рекомендованный Министерством образования РФ: К.А. Пупков, Н.Д. Егупов и др. *«Методы классической и современной теории автоматического управления»*. Под ред. К.А. Пупкова и Н.Д. Егупова; издание второе, переработанное и дополненное.

- 1-й том:** *Математические модели, динамические характеристики и анализ систем автоматического управления;*
- 2-й том:** *Статистическая динамика и идентификация систем автоматического управления;*
- 3-й том:** *Синтез регуляторов систем автоматического управления;*
- 4-й том:** *Теория оптимизации систем автоматического управления;*
- 5-й том:** *Методы современной теории автоматического управления.*

- **Вышли в свет:**

- 1. Учебник для вузов, рекомендованный Министерством образования: К.А. Пупков, Н.Д. Егупов и др. *«Методы робастного, нейро-нечеткого и адаптивного управления»*. Под ред. Н.Д. Егупова. Твердый переплет, золотое тиснение, 744 с.
- 2. К.А. Пупков, В.Г. Коньков. *«Интеллектуальные системы»*. Мягкая обложка, 348 с.
- 3. Учебное пособие, рекомендованное УМО вузов: Е.А. Микрин. *«Бортовые комплексы управления космическими аппаратами и проектирование их программного обеспечения»*. Твердый переплет, золотое тиснение, 336 с.

- **Готовятся к изданию в 2004 г.:**

- 1. В.И. Краснощёченко, А.П. Крищенко и др. *«Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза»*.
- 2. К.А. Пупков, Н.Д. Егупов и др. *«Нестационарные системы: исследование, синтез и оптимизация»*.
- 3. К.А. Пупков, В.И. Капалин. *«Идентификация систем человек – машина»*.

Эти учебники, а также другие книги
Издательства МГТУ им. Н.Э. Баумана Вы сможете приобрести
в Издательском доме «Манускрипт»

248000, г. Калуга, ул. Баженова, 4

Тел./факс (0842) 57-31-87

E-mail: id_manuskript@mail.ru

Электронный магазин: www.manuskript.ru