O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

Qattiq jismlarning qozg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati

Fizika kursidan hisob–grafik ishlarini bajarish uchun uslubiy ko‘rsatmalar

TOSHKENT - 2015

Tuzuvchilar: Xolbayev A.M. va Nasriddinov S.S. Fizika kursidan “Qattiq jismlarning qozg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatini o‘rganish” mavzusiga doir hisob–grafik ishlarini bajarish uchun uslubiy ko‘rsatmalar – T.: ToshDTU, 2015, 35 bet.

Ushbu hisob–grafik ishlarini bajarish uchun uslubiy ko‘rsatmalar ToshDTUning Elektronika va Avtomatika, Energetika, Mexanika va boshqa texnika ta’lim yo‘nalishlari bo‘yicha bakalavrlar tayyorlash uchun fizika fanining namunaviy dasturiga ko‘ra o‘qilgan ma’ruzalar asosida tuzilgan. Mazkur uslubiy ko‘rsatma, Qattiq jismlarning o‘q atrofidagi aylanma harakatini o‘rganishga, hamda jismlarning biror oqqa nisbatan inersiya momentini hisoblashga doir hisob–grafik ishlarini bajarish uchun mo‘ljallangan bo’lib, unda ba’zi qattiq jismlarning inersiya momentlarini ularni hisoblash va grafik chizish usullari keltirilgan.

Toshkent davlat texnika universiteti o‘quv – uslubiy kengashi qaroriga binoan nashr etildi.

Taqrizchilar:

ToshDTU, “Umumiy fizika” kafedrasi, dots. O.Ximmatqulov,

O‘zMU, “Fizikaviy elektronika kafedrasi, dots. N.Norqulov.

Kirish

Yuqori texnologiyalar rivojlangan hozirgi zamonda samarali faoliyat ko‘rsata oladigan, har tomonlama etuk mutaxassis kadrlarni tarbiyalash va tayyorlash Oliy o‘quv yurtlari oldida turgan birinchi galdagi muhim vazifa hisoblanadi.

Bu vazifani bajarishda ta’limning texnik bazasini mukammallashtirish bilan birgalikda talabalarni o‘quv qo‘llanmalar bilan o‘z vaqtida ta’minlash katta ahamiyatga ega.

Bizga ma’lumki, fizikani o‘qitishdan asosiy maqsad, birinchidan, tabiatning fundamental qonunlarini ilmiy asosda tushuntirish, talabalarning ilmiy dunyoqarash va falsafiy mulohaza yritish qobiliyatlarini rivojlantirish, texnikada va turmushda foydalanilayotgan uskuna va vositalarning ishlash printsipini tushuntiruvchi fizik jarayonlar haqida tasavvurlarni shakllantirish bolsa; ikkinchidan, ta’lim olishni davom ettirish. Olgan bilimlarni chuqrlshtirish va ilmiy izlanishlarni davom ettirish uchun mustahkam zamin yaratishdan iboratdir.

Fizika fani talabalarning ilmiy dunyoqarashlarini rivojlantirishda, koinot tuzilishining zamonaviy fizikaviy asoslarini tushuntirishda katta rol o‘ynaydi. Mazkur ish talabalarning fizikaning tegishli sohasida chuqur nazariy bilimga ega bo‘lishlari va bu bilimlarni mustaqil ravishda amaliyotga tadbiq qilishlari uchun yo‘llanma berishga mo‘ljallangan.

“Qattiq jismlarning qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakatini organish” mavzusiga doir misollarni yechish usullari keltirilgan. Ko‘rsatma sifatida bitta variant to‘liq ishlab ko‘rsatilgan va grafigi chizilgan asosiy formulalari berilgan. Uning oxirida ushbu mavzu bo‘yicha bajariladigan hisob–kitob ishlari variantlari ilova qilingan.

Qattiq jismlarning qo‘zg‘almas o‘q atrofidagi aylanma harakati

R e j a

1. Kuch momenti.
2. Impuls momenti. Impuls momentining saqlanish qonuni.
3. Jismning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momenti
4. Shteyner teoremasi va ba’zi jismlarning inersiya momenti.
5. O‘q atrofida aylanuvchi jismning harakat tenglamasi.
6. Aylanma harakat qilayotgan jismning kinetik energiyasi.
7. Turli geometrik shakldagi qattiq jismlar inersiya momentlarini hisoblash.

1. Kuch momenti

Tinch turgan jismni aylanma harakatga keltiruvchi yoki uning aylanma harakatini o‘zgartiruvchi tashqi ta’sirni tavsiflash uchun kuch momenti degan tushuncha kiritiladi. Kuch momenti biror nuqtaga nisbatan yoki biror aylanish o‘qiga nisbatan aytiladi.

Qattiq jism moddiy nuqtalar tizimidan iborat bo‘lganligidan kuch momenti tushunchasini dastlab moddiy nuqta misolida qarab chiqaylik. Massasi m bo‘lgan moddiy nuqtaning istalgan vaqtdagi vaziyati sanoq boshi sifatida qabul qilingan O nuqtaga nisbatan radius–vektor bilan aniqlanayotgan bo‘lsin.

Moddiy nuqtaga qandaydir $\vec{F}$ kuch ta’sir etayotgan bo‘lsa $\vec{r}$ radius – vektorning $\vec{F}$ kuchga vektor ko‘paytmasi $\vec{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deyiladi.

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]. \tag{1.1}$$

Bunda $\vec{F}$ moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi barcha kuchlarning teng ta’sir etuvchisidir. Kuch momenti $\vec{M}$ psevdovektor bo‘lib, u $\vec{r}$ va $\vec{F}$ vektorlar yotgan tekislikka tik yo‘nalgan, yo‘alishi esa o‘ng vint qoidasi bilan aniqlanadi, ya’ni o‘ng vintni $\vec{r}$ dan $\vec{F}$ ga qarab buraganda vintning ilgarilama harakati $\vec{M}$ ning yo‘nalishi bilan mos tushadi. Kuch momentining son qiymati, ravshanki:

$$M = Fr \sin\alpha = Fl \quad . \tag{1.2}$$

Bu yerda $\alpha - \vec{r}$ va $\vec{F}$ vektorlar orasidagi burchak $l = r\sin\alpha$ esa O nuqtadan $\vec{F}$ kuchning ta’sir chizig‘iga tushirilgan tik chiziqning uzunligi (O nuqtadan $\vec{F}$ kuchning ta’sir chizig‘igacha bo‘lgan eng yaqin masofa) bo‘lib, u *kuch yelkasi deyiladi.* Z o‘q $\vec{M}$ vektorning yo‘nalishi bilan mos tushsa, u holda kuch momenti o‘q yo‘nalishidagi vektor tarzida ifodalanishi mukin.

$$\vec{M}_z = [\vec{r}, \vec{F}]_z \quad . \tag{1.3}$$

Endi n ta moddiy nuqtadan iborat tizimni olib qaraylik. Tizimdagi i moddiy nuqtaning O nuqtaga nisbatan vaziyatini $\vec{r}_i$ radius–vektor bilan va unga ta’sir qiluvchi $\vec{F}_i$ orqali belgilasak, O nuqtaga nisbatan mazkur kuchning momenti:

$$\vec{M}_i = [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \quad . \tag{1.4}$$

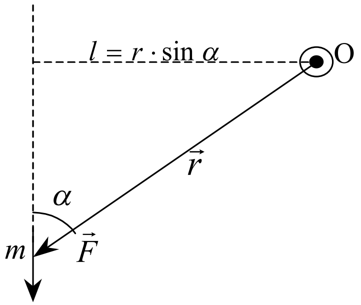
tarzda ifodalanadi. O nuqtaga nisbatan moddiy nuqtalar tizimiga ta’sir etuvchi kuch momentini tavsiflashda barcha moddiy nuqtalarning O nuqtaga nisbatan bir butun (yaxlit) tarzda olib qaraladi (qattik jismni moddiy nuqtalar tizimi deb qarash mumkin.). *O nuqtaga nisbatan moddiy nuqtalar tizimiga ta’sir etuvchi kuch momenti deb har bir moddiy nuqtaga qo‘yilgan kuch momentlarining vektor yig‘indisiga aytiladi:*

$$\vec{M} = \sum_i \vec{M}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{F}_i] \quad . \tag{1.5}$$

bunda $\vec{F}_i - i$ moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi tashqi kuchnigina ifodalaydi. Shu narsani alohida ta’kidlash lozimki, tizimidagi har bir moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi tashqi kuchdan tashqari, moddiy nuqtalarning o‘zaro ta’siri tufayli vujudga keluvchi kuchlar ham mavjud. Ma’lumki, bu kuchlar ichki kuchlar deyiladi. Ichki kuchlarning vektor yig‘indisi nolga teng bo‘lganligi tufayli (1.5) ifodada faqat tashqi kuchlargina aks ettiriladi.

2. Impuls momenti. Impuls momentining saqlanish qonuni

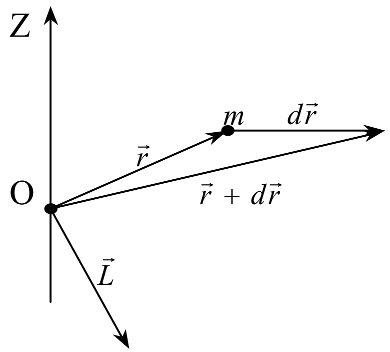
Faraz qilaylik, massasi m bo‘lgan harakatdagi moddiy nuqtaning ixtiyoriy paytdagi vaziyati O nuqtaga nisbatan aniqlanayotgan bo‘lsin. Moddiy nuqtaning O nuqtaga nisbatan impuls momenti deb quyidagicha ifodalangan vektorga aytiladi:



1-rasm. Kuch momenti

$$L = [\vec{r} \cdot \vec{p}\,] = [\vec{r} \cdot m\,\vec{\vartheta}\,] \quad (2.1)$$

Bunda $\vec{r}$ sanoq boshi hisoblangan O nuqtadan moddiy nuqtaga oʻtkazilgan radius–vektor. (2.1) dan koʻrinib turibdiki, $\vec{L}$ ning yoʻnalishi $\vec{r}$ va $\vec{p}$ vektorlarning vektor koʻpaytmasi tarzda aniqlanadi, yaʼni impuls momenti vektori $\vec{r}$ va $\vec{p}$ vektorlardan yasalgan parallelogramm tekisligiga tik ravishda O nuqtadan oʻtgan boʻlib, uning yoʻnalishi parma qoidasi bilan aniqlanadi. Impuls momentining son qiymati, maʼlumki:



2-rasm. Impuls momenti

$$L = rp\,\sin\alpha\,. \quad (2.2)$$

Bu tenglikda $r\sin\alpha = l$ – *moddiy nuqta impulsining O nuqtaga nisbatan yelkasi deyiladi.* Yelka tushunchasini kiritib (2.2) ni

$$L = lp = m\upsilon l\,, \quad (2.3)$$

koʻrinishida yozish mumkin. Oxirgi ikki tenglikdan koʻrinadiki, impuls momenti moddiy nuqta harakati yoʻnalishining va tezligining son qiymati oʻzgarishi bilan oʻzgaradi, agar moddiy nuqta toʻgʻri

chiziq boʻylab oʻzgarmas tezlik bilan harakatlanyotgan boʻlsa O nuqtaga nisbatan uning impuls momenti oʻzgarmay qoladi.

Moddiy nuqtalar tizimining biror O nuqtaga nisbatan *impuls momenti* deb mazkur tizimdagi ayrim moddiy nuqtalarning oʻsha O nuqtaga nisbatan impuls momentlarining vektor yigʻindisiga aytiladi:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \sum_i [\vec{r}_i, m\,\vec{\upsilon}_i]\,. \quad (2.4)$$

Bunda: $\vec{r}_i$ – qaralayotgan O nuqtadan i moddiy nuqtaga oʻtkazilgan radius–vektor, $\vec{\upsilon}_i$ – oʻsha i – moddiy nuqtaning tezligi.

Faraz qilaylik, massasi m va tezligi $\vec{\upsilon}$ boʻlgan moddiy nuqtaga sanoq boshi O ga nisbatan qandaydir $\vec{F}$ kuch taʼsir qilayotgan boʻlsin. Natijada moddiy nuqtaning impulsi va ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan uning impuls momenti oʻgarib boradi, yaʼni $\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}\,]$ vaqtning funksiyasidir. Aytaylik, moddiy nuqtaning vaziyatini aniqlovchi radius-vektor dt vaqt oraligʻida $d\vec{r}$ ga oʻzgarsin:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}\,] = [\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\,] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right], \quad (2.5)$$

bunda: $d\vec{r}/dt$ – moddiy nuqtaning t paytdagi tezligi $(d\vec{r}/dt = \vec{\upsilon})$; $d\vec{p}/dt$ esa Nyutonning II qonuniga koʻra moddiy nuqtaga taʼsir etuvchi kuchlarning teng taʼsir etuvchisi. Bularni va $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ ekanligini nazarda tutib (2.5) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = [\vec{\upsilon}, m\,\vec{\upsilon}\,] + [\vec{r}, \vec{F}\,].$$

Bu tenglikning oʻg tomonidagi birinchi qoʻshiluvchi had ikkita *kollinear* vektorlarning vektor koʻpaytmasi boʻganligi sababli nolga teng, ikkinchi qoʻshiluvchi had esa moddiy nuqtaga taʼsir etuvchi tashqi kuchlar O nuqtaga nisbatan momenti ($\vec{M}$) ni ifodalaydi. Shuning uchun yuqoridagi tenglik quyidagicha ko‘rinishga keladi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad . \tag{2.6}$$

Bu ifoda moddiy nuqta uchun *momentlar tenglamasi* deyiladi. (2.6) dan ko‘rinadiki, impuls momentining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlarning O nuqtaga nisbatan momenti bilan aniqlanadi (momentlar tenglamasining Nyutonning ikkinchi qonuniga o‘xshashligi ko‘zga tashlanadi, moddiy nuqta impulsining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi unga ta’sir etayotgan barcha tashqi kuchlarning teng ta’sir etuvchisiga teng). Moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlar teng ta’sir etuvchisining O nuqtaga nisbatan momenti nolga teng ($\vec{M} = 0$) bo‘lsa (2) tenglik quyidagicha yoziladi:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad . \tag{2.7}$$

O‘zgarmas kattalikning vaqt bo‘yicha hosilasi nolga teng ekandigini nazarda tutsak, (2.7) dan:

$$\vec{L} = const$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bu natija moddiy nuqta impuls momentining saqlanish qonunini ifodalaydi, moddiy nuqtaga ta’sir etayotgan kuchlarning teng ta’sir etuvchisining ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan momenti nolga teng bo‘lsa moddiy nuqta impulsining shu nuqtaga nisbatan momenti vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi. Moddiy nuqtaning impuls momenti ixtiyoriy O nuqtadan o‘uvchi biror o‘qqa nisbatan aniqlanayotgan bo‘lsa(2.6) tenglik quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z \quad . \tag{2.8}$$

Bunda L_z va $M_z - \vec{L}$ va $\vec{M}$ vektorlarning mos ravishda Z o‘qqa tushirilgan proyeksiyalari. Shunday qilib o‘qqa nisbatan impuls momentining vaqt bo‘yicha o‘zgarishi moddiy nuqtaga ta’sir etuvchi tashqi kuchlar momentining mazkur o‘qqa tushirilgan proyeksiyasiga teng ekan. Endi moddiy nuqtalar tizimini olib qaraylik. Umuman, tizimdagi har bir moddiy nuqtaga tashqi va ichki kuchlar ta’sir etadi. Ichki kuchlar tizimidagi moddiy nuqtalarning o‘zaro ta’sir kuchlaridan iborat bo‘lganligi tufayli ularning vektor yig‘indisi nolga teng va binobarin, ichki kuchlarning O nuqtaga nisbatan momenti ham nolga teng.

Shuning uchun tizimga ta’sir etuvchi kuchlar faqat tashqi kuchlardan iborat bo‘ladi. Demak, n ta moddiy nuqtalar tizimi uchun (2.5) ifodani quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{M}_i \quad . \tag{2.9}$$

bunda $\sum_i \vec{L}_i = \sum_i [\vec{r}, m\vec{\upsilon}_i]$–tizimning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan impuls momenti. (2.9) tenglik moddiy nuqtalar tizimi uchun momentlar tenglamasini ifodalaydi.

Shunday qilib, moddiy nuqtalar tizimning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan impuls momentidan vaqt bo‘yicha olingan hosila barcha tashqi kuchlarning shu nuqtaga nisbatan kuch momentilarining vektor yig‘indisiga teng. (2.9) ifodadagi barcha vektor kattaliklarning O nuqta orqali o‘tuvchi Z o‘qqa proyeksiyasi olinsa, quyidagi munosabat hosil bo‘lgan:

$$\frac{d}{dt}\sum L_z = \sum M_z \quad , \tag{2.10}$$

ya'ni, tizimdagi moddiy nuqtalarning O nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan impuls momentlarining algebraik yig'indisining vaqt bo'yicha o'zgarishi shu o'qqa nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Agar moddiy nuqtalar tizimi berk bo'lsa (tizimga tashqi kuchlar ta'sir qilmasa), (2.9) ifodaning o'ng tomoni nolga teng bo'ladi, bundan:

$$\sum_i \vec{L}_i = const \tag{2.11}$$

degan xulosaga kelamiz (2.11). Tenglik moddiy nuqtalar tizimi uchun impuls momentining saqlanish qonunini ifodalaydi, moddiy nuqtalar berk tizimning ixtiyoriy O nuqtaga nisbatan impuls momenti vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Bu natija moddiy nuqtalar berk tizimining O nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan impuls momenti uchun ham o'rinlidir. Tizimga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar teng ta'sir etuvchisining biror o'qqa nisbatan momenti nolga teng bo'lsa, bu kuchlar tizimning shu o'qqa nisbatan impuls momentini o'zgartira olmaydi.

3. Qattiq jismning harakat va muvozanat tenglamasi

Qattiq jism harakatining eng oddiysi–ilgarilanma harakat bo'lib, bunda uning barcha nuqtalari bir xil tezlik va bir xil tezlanish bilan harakatlanadi. Qattiq jism harakatining boshqa turi uning biror nuqta yoki o'q atrofidagi aylanma harakatidir.

Ma'lumki mutloq qattiq jismning erkinlik darajalari soni 6 ga teng, ya'ni uning harakati 6 ta mustaqil tenglama orqali aniqlanadi, mazkur tenglamalarning 3 tasi qattiq jism inersiya (massa) markazining harakat tenlamasidir:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \sum_i F_x \; ; \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = \sum_i F_y \; ; \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = \sum_i F_z \tag{3.1}$$

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = \sum_i F_x \; ; \quad m\frac{d\upsilon_y}{dt} = \sum_i F_y \; ; \quad m\frac{d\upsilon_z}{dt} = \sum_i F_z \tag{3.2}$$

bunda x, y, z – jism inersiya markazining koordinatalari: $\upsilon_q, \upsilon_y, \upsilon_z$ – massa markazi tezligining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari: $\sum_i F_x, \sum_i F_y, \sum_i F_z$ –jismga ta'sir etuvchi tashqi i kuchlarning mos ravishda x, y ,z o'qdagi proyeksiyalarining yig'indisi). Qolgan 3 ta tenglama – x, y, z o'qlarga nisbatan olingan momentlar tenglamasidir:

$$\frac{dL_x}{dt} = \sum_i M_x ; \quad \frac{dL_y}{dt} = \sum_i M_y ; \quad \frac{dL_z}{dt} = \sum_i M_z \tag{3.3}$$

bunda L_x, L_y, L_z– moddiy nuqtalar tizimidan iborat qattiq jism impuls momentining *x, y, z* o'qlardagi proyeksiyalar: $\sum M_x, \sum M_y, \sum M_z$ – aylanish O'qiga nisbatan tashqi kuchlar momentlarining algebraik yig'indisi.

Mexanikada jism muvozanati deb uning shunday holati tushiniladiki, jism qaralayotgan inersiyal sanoq tizimiga nisbatan tinch holatda bo'ladi. Jism muvozanatda bo'lish uchun uni ilgarilanma va aylanma harakatga keltiruvchi sabab bo'lmasligi lozim. Buning uchun jismni ilgarilanma harakatga keltiruvchi kuchlarning x, y, z o'qlardagi proyeksiyalari va aylanish o'qiga nisbatan kuch momentlarining mazkur koordinata o'qlardagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisi nolga teng bo'lishi shart:

$$\sum_i F_x = \sum_i F_y = \sum_i F_z = 0 \tag{3.4}$$

$$\sum_i M_x = \sum_i M_y = \sum_i M_z = 0 \tag{3.5}$$

(3.4) va (3.5) shartlar *x, y, z* o'qlar uchun bajarilsa, u holda ixtiyoriy olingan boshqa o'qlar uchun ham bajariladi.

Agar qattiq jismga ta'sir etayotgan kuchlarni ularning ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirsak aylanish o'qiga nisbatan kuchlar yelkasi o'zgarmaydi, binobarin mazkur o'zgarishlar jismning harakatiga yoki tinch holatiga ta’sir etmaydi. Shuningdek, jismga ta’sir etayotgan barcha kuchlar ularning teng ta’sir etuvchisi bilan, barcha kuchlarning biror o‘qqa nisbatan momentilarining vektor yig‘indisi esa teng ta’sir etuvchi kuchning shu o‘qqa nisbatan momenti bilan almashtirilishi mumkin.

Jismga ta’sir etuvchi barcha tashqi kuchlarning teng ta’sir etuvchisini $\vec{F}$ bilan va uning qaralayotgan O‘qqa nisbatan momentini $\vec{M}$ bilan belgilasak, jismning muvozanat sharti quyidagi ko‘rinishini oladi:

$$m\frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = \vec{F} = 0 \qquad (3.6)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \qquad (3.7)$$

bunda $\vec{\upsilon}$ -jism massa (inersiya) markazining tezligi. Jism muvozanatda bo‘lishi uchun bu shartlar zarur shartlar bo‘lib, lekin yetarli emas. Gap shundaki, bu shartlar bajarilganda jismning massa markazi qaralayotgan sanoq tizimiga nisbatan o‘zgarmas (υ=sonst) tezlik bilan ilgarilanma harakatda va jism biror o‘qqa nisbatan o‘zgarmas burchak tezlik bilan aylanma harakatda bo‘lishi mumkin. Shu bois jismning barcha nuqtalarining tezligi qaralayotgan sanoq tizimiga nisbatan nolga teng bo‘lishi lozim.

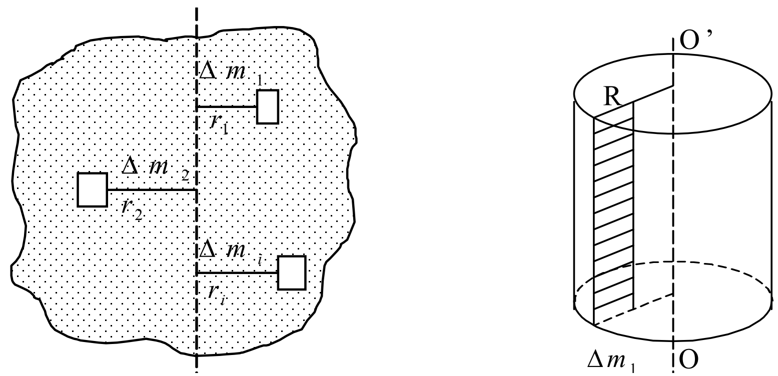
4. Jismning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momenti

Yuqorida biz burchak tezlik, burchak tezlanish va kuch momenti degan kattaliklar bilan tanishdik. Qattiq jismning aylanma harakatini o‘rganishda yuqoridagi kattaliklar bilan bir qatorda inersiya momenti degan kattalikdan ham foydalaniladi. Bu kattalik haqida muayyan tasavvur hosil qilish uchun OO^1 o‘q atrofida aylanayotgan qattiq jismni olib qaraylik. Uni fikran massalari Δm_i bo‘lgan n ta juda mayda bo‘lakchalarga bo‘lib, har bir mayda (element) bo‘lakchadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan eng qisqa masofani r_i bilan belgilaylik.

Mayda bo‘lakcha massasini undan aylanish o‘qigacha bo‘lgan eng qisqa masofa kvadratiga ko‘paytmasi uning shu o‘qqa nisbatan inersiya momenti deyiladi, ya’ni:

$$I_i = \Delta m_i r_i^2 \qquad (4.1)$$

Aylanish O‘qiga nisbatan qattiq jismning inersiya momenti (4.I) deb, barcha kichik massalarning shu O‘qqa nisbatan inersiya momentlarining yig‘indisiga aytiladi:



3-rasm. O’q atrofida aylanuvchi jismlar;
a) ixtiyoriy shakldagi, b) silindrik shakldagi.

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \qquad (4.2)$$

Ta’rifdan ko‘rinadiki, jismning inersiya momenti aylanish o‘qiga nisbatan aniqlanadi. Bu borada shu narsani ta’kidlash lozimki, har qanday jism tinch holatda yoki aylanma harakatda bo‘lishiga bog‘liq bo‘lmagan holda uning ixtiyoriy o‘qqa nisbatan inersiya momenti mavjud.

Bu yerda jismning inersiya momentini massasiga qiyos qilish mumkin. Jism harakatda yoki tinch bo‘lishidan qat’iy nazar, uning massasi(inertligi) mavjuddir.

Aksariyat hollarda jismning massasi uning hagmi bo‘ylab bir tekis taqsimlangan (jism bir jinsli) bo‘ladi. Shuning uchun jismning inersiya momentini uning zichligi orqali ifodalashmumkin. Ma'lumki bir jinsli jismning zichligi $\rho = m / V$ tarzida ifodalanadi. Shu munosabat bilan jism inersiya momentini ifodalovchi (4.2) moddiy nuqtalar inersiya momenti yig'indisini (4.3) integral bilan ifodalash mumkin:

$$I = \int_V r^2 dm \quad , \tag{4.3}$$

Bunda integrallash jismning butun hajmidagi elementar massalar (dm) bo'yicha amalga oshiriladi. Dm ga teng elementar massaning hajmi dV ekanligidan va zichlikning ta'rifidan $dm = \rho dV$ ni hosil qilamiz, natijada (4.3) quyidagi kodmrinishni oladi:

$$I = \rho \int_V r^2 dV \quad . \tag{4.3a}$$

Endi, ba'zi jismlarning inersiya momentlarini aks ettiruvchi ifodani topaylik. Radiusi R ga teng yupqa devorli (kovak) silindrning simmetriya o'qi OO' ga nisbatan inersiya momentini topish uchun uning devorlarini OO' ga o'qqa parallel bo'lgan n taensiz bo'lakchalarga 3-rasmda ko'rsatilganidek fikran bo'lib chiqamiz.

Silindrning devori ypqa bo'lganligi tufayli har bir ensiz bo'lakcha OO' o'qqa bir xil masofada joylashgan deb hisoblash mumkin. I-bo'lakchaning massasini Δm_i deb belgilasak, uning OO' o'qqa nisbatan inersiya momenti:

$$I_i = \Delta m_i R^2 \quad , \tag{4.4}$$

bo'ladi. Yupqa silindrning o'sha o'qqa nisbatan inersiya momenti esa quyidagicha ifodalanadi:

$$I = \sum_i \Delta m_i R^2 = R^2 \sum_i \Delta m_i = mR^2 , \tag{4.5}$$

bunda $\sum_i \Delta m_i = m$ – yupqa silindrning massasi. Endi radiusi R va balandligi h bo'lgan bir jinsli yaxlit silindrning simmetriya o'qiga nisbatan inersiya momenti ifodasini topaylik. Buning uchun silindrning radiusi r va devorining qalinligi dr bo'lgan ichma–ich joylashgan silindrlarga fikran bo'lib chiqamiz. Bunday silindrning hajmi:

$$dV = 2\pi r dr h \quad . \tag{4.6}$$

Oxirgi formulani (4.4) ga quyib va ichma–ich joylashgan silindrning radiuslari O dan r gacha o'zgarishini nazarda tutib quyidagini hosil qilamiz.

$$I = \rho \int_0^R r^2 2\pi r dr h = 2\pi\rho h \int_0^R dr = \frac{1}{2}\pi\rho h R^4 \quad . \tag{4.7}$$

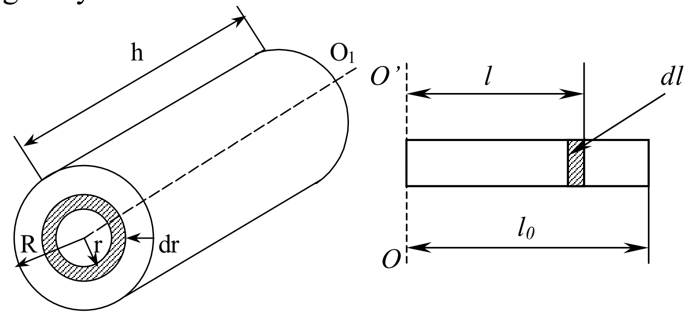
Bu formulaning o'ng tomonidagi $\pi R^2 h$ – yaxlit silindrning hajmi va $\pi R^2 h\rho = m$ uning massasi ekanligini e'tiborga olsak, bir jinsli yaxlit silindrning (shuningdek, bir jinsli diskning) simmetriya o'qiga nisbatan inersiya momenti quyidagicha ifodalanadi:

$$I = \frac{1}{2} mR^2 \; . \tag{4.8}$$

Uzunligi l_0 va massasi m bo'lgan bir jinsli ingichka sterjenning bir uchidan unga tik ravishda o'tuvchi o'qqa nisbatan inersiya momentini topish uchun kichik uzunlikdagi bo'lakchalarga to'g'ri keluvchi massasi m/l_0 bo'lganligi uchun dl uzunlikdagi bo'lakchaning massasi: $dm = \frac{m}{l_0} dl$ bo'ladi, bu bo'lakchaning OO' o'qqa nisbtan inersiya momenti:

$$dI = l^2 dm = \frac{m}{l_0} l^2 dl \tag{4.9}$$

munosabat bilan ifodalanadi. Sterjenning OO` o‘qqa nisbatan inersiya momentini topish uchun oxirgi formulani O dan l_0 gacha integrallaymiz:



4-rasm. Kovak silindr;
a) umumiy korinishi, b) kesmasi

$$I = \int dI = \frac{m}{l_0}\int_0^{l_0} l^2 dl = \frac{1}{3} m l_0^2 . \tag{4.10}$$

Shu sterjenning o‘rtasidan unga tik ravishda o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inersiya momenti:

$$I = \frac{1}{12} m l_0^2 \tag{4.11}$$

ekanligin hisoblash qiyin emas. Shuningdek, radiusi R va massasi m bo‘lgan bir jinsli sharning uning markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inersiya momenti:

$$I = \frac{2}{5} m R^2 \tag{4.12}$$

formula bilan ifodalanadi.

Massa markazidan o‘tmagan boshqa o‘qqa nisbatan jismning inersiya momenti esa massa markazidan o‘tgan o‘qqa nisbatan aniqlangan inersiya momentidan farq qiladi, chunki o‘qning vaziyati o‘zgarishi bilan jism massasining o‘qqa nisbatan joylashishi ham o‘zgaradi. Shuning uchun jismning massa markazi orqali o‘tmagan o‘qqa nisbatan inersiya momentini aniqlashda Shteyner teoremasidan foydalaniladi: *ixtiyoriy o‘qqa nisbatan jismning inersiya momenti (1) o‘sha o‘qqa parallel ravishda massa markazi orqali o‘tuvchio‘qqa nisbatan aniqlangan inersiya momenti* (I_0) *va jism massasi (m) o‘qlar oralig‘idagi masofa (d) kvadratining ko‘paytmasi tarzida aniqlanadigan kattalik yig‘indisiga teng:*

$$I = I_0 + md^2.$$

5. O‘q atrofida aylanuvchi jismning harakat tenglamasi

Biror qo‘zg‘almas o‘q (aytaylik, Z o‘q) atrofida o‘zgarmas burchak tezlik (ω) bilan aylanma harakat qilayotgan qattiq jismni olib qaraylik va uni massalari Δm_i bo‘lgan n ta mayda bo‘laklarga fikran shunday bo‘lib chiqaylikki, ularning har birini moddiy nuqta deb qarash mumkin bo‘lsin. Har bir bo‘lakchadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan eng yaqin masofani r_i bilan belgilasak qaralayotgan qattiq jismning aylanish o‘qiga nisbatan impuls momentiga ko‘ra

$$L_{zi} = \sum L_{zi} = \sum_i \Delta m_i \upsilon_i r_i \tag{5.1}$$

tarzda ifodalanadi. Bunda v_i – massasi Δm_i bo‘lgan bo‘lakchaning chiziqli tezligi. Ixtiyoriy qattiq jism biror o‘q atrofida aylanayotganda massalari Δm_i bo‘lgan uning har bir mayda bo‘lakchasi (shuningdek, uning har bir nuqtasi) ning trayektoriyasi aylanish o‘qiga tik joylashgan tekisliklarda yotuvchi va radiuslari r_i bo‘lgan aylanalardan iborat bo‘ladi. Har bir bo‘lakchaning chiziqli tezlik aylanishi radiusiga mutanosib, ya’ni $\upsilon_i = \omega \cdot r_i$. Bunga asosan (5.1) ni quyidagicha yozamiz (ω=sonst): $L_z = \omega \sum \Delta m_i r_i^2$ shunga binoan $\sum \Delta m_i r_i^2$ jismning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momentini ifodalaydi. Natijada, oxirgi tenglik

$$L_z = I \cdot \omega \ , \qquad (5.2)$$

ko‘rinishga keladi. Binobarin, qattiq jism impulsining qo‘zg‘almas o‘qqa nisbatan momenti uning mazkur o‘qqa nisbatan inersiya momenti bilan burchak tezlikning ko‘paytmasiga teng.

Qattiq jismning Z o‘q atrofida aylanma harakati tashqi kuchlar ta’sirida sodir bo‘layotgan bo‘lsa, mazkur kuchlarning natijaviy momenti: $\vec{M} = \sum_i \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i\right]$ bo‘ladi va o‘sha o‘qqa nisbatan momentlar tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dL_z}{dt} = \frac{d}{dt}(I\omega) = M_z . \qquad (5.3)$$

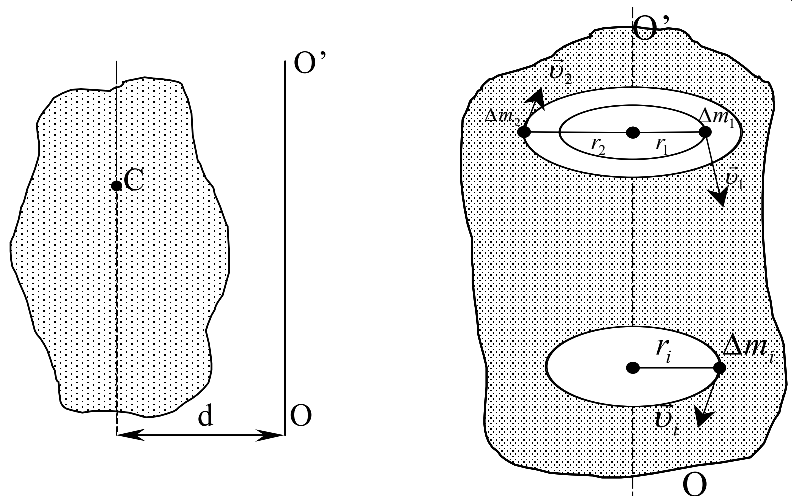
Jismning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momenti vaqtga bog‘liq bo‘lmagan kattalik bo‘lganidan va $\frac{d\omega}{dt} = \varepsilon$ – burchak tezlanish ekanligini e’tiborga olsak, yuqoridagi ifoda quyidagi ko‘rinishni oladi: $M_z = I\varepsilon$. Vektor ko‘rinishida bu tenglik:

$$\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$$

tarzda yoziladi ($\vec{M}$ va $\vec{\varepsilon}$ vektorlarning yo‘nalishi bir xil). (5.4) formula qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanuvchi qattiq jism aylanma harakat dinamikasining asosiy tenglamasi deyiladi. U ilgarilanma

harakat qilayotgan moddiy nuqta dinamikasining asosiy tenglamasi $\vec{F} = m\vec{a}$ (Nyutonning 2 qonuni) ga o‘xshashdir. Bunda massa vazifasini inersiya momenti, chiziqli tezlanish vazifasini burchak tezlanish, kuch vazifasini kuch momenti o‘taydi.

(5.4)



5-rasm. O‘q atrofida aylanuvchi qattiq jismlar;
a)xususiy o‘qiga parallel OO’ o‘qga nisbatan, b) xususiy o‘qiga nisbatan

Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan jismga tashqi kuchlar ta’sir kilmasa, ya’ni:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \ \text{va} \ M_z = 0 \ \text{bo‘lsa (6.3) dan :}$$

$$I\omega = const \qquad (5.5)$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu munosabat qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanayotgan jism impuls momentining saqlanish qonunini ifodalaydi.

Bu qonundan ko‘rinadiki, jismning o‘qqa nisbatan impuls momenti o‘zgarmaganda $(I = const)$ mazkur jism o‘zgarmas burchak tezlik bilan aylanma harakatda bo‘ladi. Aylanish jarayonida biror sababga ko‘ra jismning inersiya momenti o‘zgarsa uning burchak tezligi hamo‘zgaradi. (I ortsa, ω kamayadi va aksincha).

6. Aylanayotgan jismning kinetik energiyasi va bajargan ishi

Qattiq jism qo‘zg‘almas o‘q atrofida o‘zgarmas burchak tezlik (ω) bilan aylanma harakat qilayotgan bo‘lsin. Uni rasmda ko‘rsatilgandek, n ta mayda bo‘lakchalarga fikran bo‘lib chiqaylik va I - burchakning massasini Δm_i bilan va mazkur bo‘lakchadan aylanish o‘qigacha bo‘lgan eng yaqin masofani r_i bilan belgilaylik. Burchakning har biri aylanish o‘qiga tik joylashgan tekisliklarda yotuvchi aylanalar bo‘lib υ_i ga teng har xil chiziqli tezlik bilan harakat qiladi. Chiziqli tezlik υ_i bilan burchak tezlik ω orasidagi $\upsilon_i = \omega\, r_i$ munosabat mavjudligini va barcha bo‘lakchalarning burchak tezligi bir xil (ω=const) ekanligini e’tiborga olib, i-bo‘lakchaning kinetik energiyasi:

$$E_{ki} = \frac{\Delta m_i \upsilon_i^2}{2} = \frac{\Delta m_i (\omega r_i)^2}{2} = \frac{\omega^2}{2}\Delta m_i r_i^2 \qquad (6.1)$$

tarzida yozamiz. Qo‘zg‘almas o‘q atrofida aylanma harakat qilayotgan jismning kinetik energiyasi ayrim bo‘lakchalar kinetik energiyalarining yig‘indisiga teng:

$$E_k = \sum_i E_{ki} = \frac{\omega^2}{2}\sum_i \Delta m_i r_i^2 , \qquad (6.2)$$

bu yerda $\sum_i \Delta m_i r_i^2$ – ma’lumki, jismning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momentini ifodalaydi. Shunday qilib, o‘q atrofida aylanayotgan jismning kinetik energiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$E_k = \frac{I\omega^2}{2}. \qquad (6.3)$$

Bu formulani ilgarilanma harakat qilayotgan jismning kinetik energiyasi ($\frac{mv^2}{2}$) bilan taqqoslasak, bunda jism massasi o‘rnida inersiya momenti, chiziqli tezlik o‘rniga burchakli tezlik turganini ko‘ramiz.

Jism bir vaqtning o‘zida ham ilgarilanma, ham aylanma harakat qilishi mumkin. Jism aksariyat hollarda uning massa markazidan o‘tgan o‘q atrofida aylanadi. O‘q esa o‘z navbatida ilgarilanma harakat qiladi. Avtomobil g‘ildiragining harakati, silindr shaklidagi jismning biror tekislik ustida dumalashi shular jumlasidandir. Bunday harakatning to‘liq kinetik energiyasi ilgarilanma va aylanma harakat kinetik energiyalarining yig‘indisidan iborat bo‘ladi:

$$E_k = \frac{m\upsilon_c^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}, \qquad (6.4)$$

bunda m–jismning massasi, υ_0–massa markazining ilgarilanma harakatdagi tezligi.

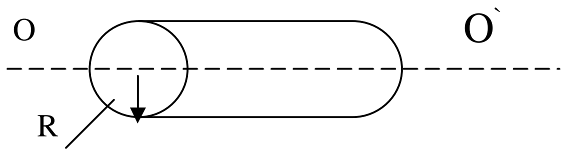
Jism muayyan φ burchakka burilganda bajarilgan to‘liq ish esa $A = M \cdot \varphi$ bo‘ladi. Bu formulani ilgarilanda harakatda tashqi kuchlar bajargan ish formulasi ($A = F_S dS$) bilan taqqoslasak, shu narsa ayon bo‘ladiki, kuch vazifasini tashqi kuchlar momenti, chiziqli ko‘chish vazifasini esa burchak ko‘chish o‘taydi.

Biz yuqorida jismning ilgarilanma va aylanma harakatini tafsiflovchi ifodalar orasidagi mos o‘xshashliklar borligini ko‘rdik.

7. Ba’zi jismlarning inersiya momentlarini hisoblash formulalari

Endi ba’zi bir jinsli jismlarning inersiya momentlarini aniqlashga imkon beruvchi formulalarni, ularni keltirib chiqarish bilan shug‘ullanmagan holda ko‘rsatib o‘taylik.

1. Devori juda yupqa silindrning 00’ simmetriya o‘qiga nisbatan inersiya momenti (6-rasm):



6-rasm. Devorlari juda yupqa silindr.

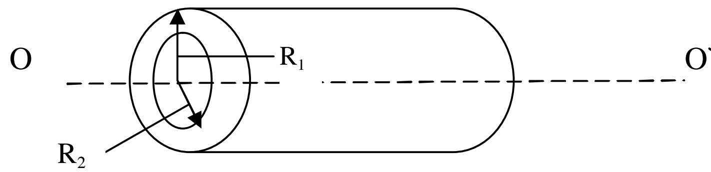
$$I = mR^2. \tag{7.1}$$

2. Devori qalin silindrning 00’ simmetriya o‘qiga nisbatan inersiya momenti (7 -rasm):

$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2). \tag{7.2}$$

3. Butun silindr (disk)ning 00’ simmetriya o‘qiga nisbatan inersiya momenti (8-rasm):

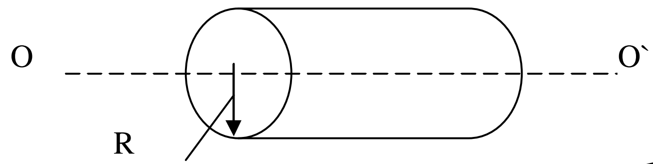
$$I = \frac{1}{2}mR^2. \tag{7.3}$$

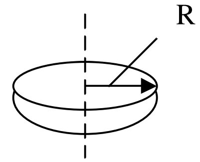


7-rasm. Devorlari qalin silindr.

4. Butun sharning massalar markazidan o‘tuvchi o‘qga nisbatan inersiya momenti (9 - rasm):

$$I = \frac{2}{5}mR^2. \tag{7.4}$$





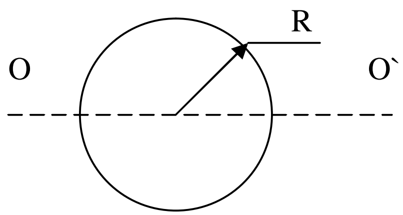
8-rasm. Butun silindr (disk).

5. ℓ uzunlikdagi ingichka sterjenning uzunligiga tik va massalar markazidan o‘tuvchi 00’ o‘qqa nisbatan inersiya momenti (10-rasm):

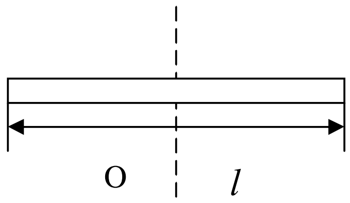
$$I = \frac{1}{12}ml^2. \tag{7.5}$$

6. ℓ uzunlikdagi ingichka sterjenning uzunligiga tik va uning bir uchidan utuvchi 00’ o‘qqa nisbatan inersiya momenti:

$$I = \frac{1}{3}ml^2. \tag{7.6}$$



9 - rasm. Ichi to’liq shar.



10 -rasm. Ingichka sterjen.

Misol tarzida etilen molekulasining 11-rasmda tasvirlanganidek massalar markazidan o‘tuvchi *X* va *Y* simmetriya o‘qlariga nisbatan inersiya momentlarini hisoblaylik. Molekulani tashkil qilgan atomlar markazlari (yadrolari) orasidagi masofa, ularning tekislikda joylashishdagi o‘zaro hosil qilgan burchaklari, shuningdek, atomlarning massa qiymatlari quyidagicha:

$r_{C-C} = 1{,}4 \cdot 10^{-10} m,\qquad r_{C-H} = 1{,}09 \cdot 10^{-10} m,\qquad \angle HCH = 117^{034`}$

$m_H = 1{,}67 \cdot 10 - 27kg,\quad m_C = 12m_H.$

X o‘qi *S* atomlarining markazlari orqali o‘tganligi tufayli molekulaning bu o‘qqa nisbatan inersiya momenti: $I = 4m_H R_H^2 \approx 5{,}8 \cdot 10^{-47}\, кгм^2$

Y o‘qiga nisbatan inersiya momenti esa:

$I = 2m_C R_C^2 + 4m_H R_{H1}^2 = 3 \cdot 10^{-46}\, кгм^2$

Kattiq jismni tashkil etuvchi moddiy nuqta (bo‘lakcha)larning massalari nolga intiluvchi kattaliklardan iborat bo‘lsa, inersiya momenti ifodasini quyidagicha yozish mumkin:

$$I = \int_V r^2 dm \qquad (7.7)$$

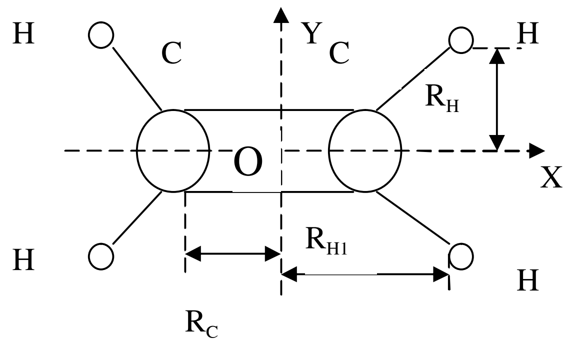
Integral qattik jism egallagan butun hajm bo‘yicha olinadi. Jismning berilgan nuqtadagi zichligi ρ bo‘lsa,

$$dm = \rho dV \quad \text{ga} \quad I = \int_V \rho r^2 dV \qquad (7.8)$$

Agar jism bir jinsli bo‘lsa (ρ = const), zichlikni integral ishorasidan tashqariga chiqarib, (8.2) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$I = \rho \int_V r^2 dV \qquad (7.9)$$

Umuman (7.7) xususiy holda (7.8) har qanday qattiq jismning istalgan o‘qqa nisbatan inersiya momentini aniqlashga imkon beradi.



11-rasm. Etilen molekulasining joylashishi.

8. Jismlarning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momentini hisoblash

4-variant uchun berilgan qiymatlarni ishlatgan holda bir necha misollarning yechimini keltiramiz.

1-misol. Misol tarzida bir jinsli diskning uning asos tekisligiga perpendikulyar va massalar markazidan o‘tuvchi *00’* o‘qqa nisbatan inersiya momentini hisoblaylik (12-rasm).

Disk *m* massaga va *R* radiusga ega. Diskni radiusi *r* va qalinligi *dr* bo‘lgan halqasimon yupqa qatlamlarga ajrataylik. Har bir hosil bo‘lgan halqasimon yupqa qatlamning hajmi $dV = 2\pi rdrh$ ekanligini e’tiborga olib, (7.9) ni bir jinsli disk uchun tatbiq etsak quyidagicha bo‘ladi:

$$\mathrm{I} = \rho\int_0^R r^2 2\pi rdrh = 2\pi\rho h\int_0^R r^3 dr, \qquad (8.1)$$

chunki r ning qiymati *O* dan *R* gacha ozgarishi mumkin.

$$I = 2\pi\rho h\frac{R^4}{4} \qquad (8.2)$$

Integrallash amali bajarilsa va $\pi R^2 h$ – disk hajmini ρ – zichlikka ko‘paytmasi disk massasiga teng ekanligini hisobga olib, diskning *00’* o‘qqa nisbatan inersiya momentini quyidagicha oddiy ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$I = \frac{1}{2}mR^2. \qquad (8.3)$$

Ilovada berilgan 1-jadvaldan 4-variantga tegishli son qiymatlani olamiz: h=0,8 m, R=0,3 m, $\rho_{Pb} = 11300\ kg/m^3$.

Bu son qiymatlardan foydalanib massani topamiz:

$$m = \pi R^2 h\rho = 3{,}14\cdot(0{,}3)^2\cdot 0{,}8\cdot 11300 = 2554{,}704 kg$$

Massaning bu qiymatini (8.3) formulaga qoyib inersiya momentini hisoblaymiz:

$$I = \frac{1}{2}mR^2 = 0{,}5\cdot 2554{,}704\cdot(0{,}3)^2 = 114{,}96\ kg\cdot m^2 \qquad (8.4)$$

Hisoblangan qiymatlar 1-jadvalga toldiriladi va ular asosida 13-rasmda keltirilgan grafik chiziladi.

2- misol. Ichki radiusi R_1 va tashqi radiusi R_2 bo‘lgan h uzunlikdagi kovak silindrning 00’ simmetriya o‘qiga nisbatan inersiya momentini xisoblang(7-rasm).

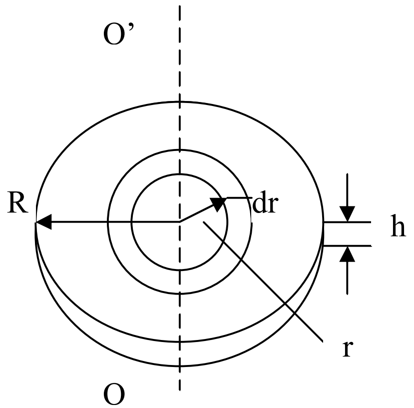
Har bir halqasimon yupqa qatlamning hajmi $dV = 2\pi rdrh$ ekanligini e’tiborga olib, (7.9) ni kovak silindr uchun tatbiq etib, R_1 dan R_2 gacha integrallasak quyidagicha bo‘ladi:

$$\mathrm{I} = \rho\int_{R_1}^{R_2} r^2 2\pi rdrh = 2\pi\rho h\int_{R_1}^{R_2} r^3 dr, \qquad (8.5)$$

chunki r ning qiymati R_1 dan R_2 gacha ozgarishi mumkin.

Integrallash amali bajarilsa va $\pi R^2 h$ – disk hajmini ρ – zichlikka ko‘paytmasi disk massasiga teng ekanligini hisobga olib, diskning *00’* o‘oqqa nisbatan inersiya momentini quyidagicha oddiy ko‘rinishda ifodalash mumkin:

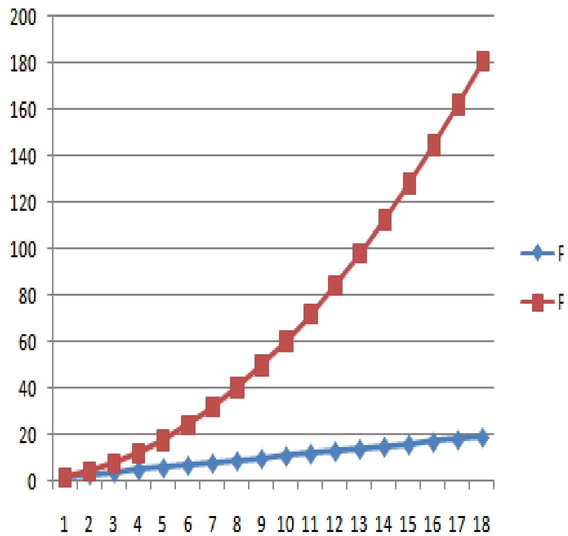
$$I = \frac{1}{2}m(R_1^2 + R_2^2). \qquad (8.6)$$



12-rasm. Bir jinsli disk

	A	B	C
1	m	R	J=mr2/2
2	1	2	2
3	1	3	4,5
4	1	4	8
5	1	5	12,5
6	1	6	18
7	1	7	24,5
8	1	8	32
9	1	9	40,5
10	1	10	50
11	1	11	60,5
12	1	12	72
13	1	13	84,5
14	1	14	98
15	1	15	112,5
16	1	16	128
17	1	17	144,5
18	1	18	162
19	1	19	180,5

1-jadval.



13-rasm. Inersiya momenti va radius orasidagi bog‘lanish grafigi.

Ilovada berilgan 2-jadvaldan 4-variantga tegishli son qiymatlarni olamiz:

$$h=0{,}7\ m,\ R_1=0{,}1\ m,\ R_1=0{,}2\ m,\ \rho_{Pb}=11300 kg/m^3.$$

$$m=\pi\rho h(R_2^2-R_1^2)=3{,}14\cdot 11300\cdot 0{,}7(0{,}1^2+0{,}2^2)=1241{,}87\,kg$$

Massaning bu qiymatini (8.6) formulaga qoyib inersiya momentini hisoblaymiz

$$I=\frac{1}{2}m(R_1^2+R_2^2)=0{,}5\cdot 1241{,}87\cdot(0{,}1^2+0{,}2^2)=52{,}7795\ kg\cdot m^2$$

Talab qilingan natija shundan iborat edi.

Hisoblangan qiymatlar 1-jadvalga to‘ldiriladi va ular asosida 13-rasmda keltirilgan grafik quriladi.

3- misol. ℓ uzunlikdagi bir jinsli sterjenning massalar markazidan o‘tuvchi o‘qqa nisbatan inersiya momentlarini hisoblang (11-rasm).

Sterjenni Δm_i elementar bo‘lakchalarga bo‘lamiz. Sterjenning massalar markazidan o‘tuvchi o‘qiga nisbatan inersiya momenti:

$$I_0=2\sum\Delta m_i r_i^2.$$

Bu holda yig‘inda sterjenning bir yarmi bo‘yicha ketadi.Agar sterjenning yuzasi $S=a\cdot b$ bo‘lsa, uning massasi: $m=\rho\cdot a\cdot b\cdot\Delta r$ kabi aniqlanadi. o‘z–o‘zidan ma’lumki elementar bo‘lakchaning inersiya momenti:

$$I_0=\rho\cdot a\cdot b\cdot\sum r_i^2\cdot\Delta r$$

Butun sterjenning inersiya momenti oxirgi formulani integrallash bilan topiladi:

$$I = 2\rho \cdot a \cdot b\int_0^{\frac{\ell}{2}} r^2 dr = 2\rho \cdot a \cdot b \cdot \frac{r^3}{3}\Big|_0^{\frac{\ell}{2}} = \frac{\rho \cdot a \cdot b \cdot \ell^2}{12}.$$

Sterjenning massasini topamiz:

Ilovadagi jadvalda berilgan qiymatlar, $a = 1m, b = 0,9, \ell = 0,2m.$ $\rho_{Pb} = 11300\ kg/m^3$) dan foydalanib massani topamiz:

$$m = \rho \cdot a \cdot b \cdot \ell = 11300 \cdot 1 \cdot 0,9 \cdot 0,2 = 2034\ kg\ .$$

Shunday qilib sterjenning inersiya momenti (7.5) dan:

$$I = \frac{m \cdot \ell^2}{12} = \frac{2034 \cdot 0,2}{12} = 33,9 kg \cdot m^2.$$

Hisoblangan qiymatlar 1-jadvalga toldiriladi va ular asosida 13-rasmda keltirilgan grafik quriladi.

4- misol. R radiusli bir jinsli sharning inersiya momentini hisoblang (9–rasm).

Bizga ma'lumki sharning hajmi, $V = \frac{4}{3}\pi R^3$, massasi esa $m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho$. (8.2) va (8.3) ifodalarni sharning butun hajmi integrallab, massalar markazidan O'tuvchi har qanday O'qqa nisbatan inersiya momenti uchun quyidagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$I = \frac{2}{5} mR^2. \qquad (8.7)$$

Ilovadagi jadvalda berilganlar asosida sharning massasini topamiz: R=0,1 m, $\rho_{Pb} = 11300\ kg/m^3$.

$$m = \frac{4}{3}\pi R^3 \cdot \rho = \frac{4}{3} \cdot 3,14 \cdot (0,1)^3 \cdot 11300 = 47,3 kg.$$

Sharning inersiya momenti (8.7)dan:

$$I = \frac{2}{5} \cdot 47,3 \cdot (0,1)^2 = 1,89\ kg \cdot m^3$$

Hisoblangan qiymatlar asosida 1-jadval toldiriladi va ular asosida 13-rasmda keltirilgan grafik quriladi.

A d a b i yo t l a r

1. Трофимова Т.И.. Курс физики. – М.: «Высшая школа», 1998 . стр. 28-33.
2. Қосимов А., Жўрақулов Х., Сафаров А.. Физика курси. – Т.: «Ўзбекистон», 1994. 1 том. Механика. 78–84; 161–172 бетлар.
3. Савелев И.В. Курс физики. Том 1. Механика. Молекулярная физика. – М.: «Наука», 1989 . стр. 84–92; 94–112.
4. Детьлаф А.А., Яворский Б.М.. Курс физики. – М.: «Высшая школа», 1989 . стр. 39–47.
5. Ахмаджонов О.. Физика курси. – Т.: «Ўқитувчи». 1 том. Механика ва молекуляр физика. 1987 . 71–92 бетлар.
6. Фейнман Р.Ф., Лейтон Р., Сендс М.. Фейнмановские лексии по физике. – М.: «Мир». 1977 . Том 1–11. стр. 327–338.
7. Киттел Ч., Найт У., Рузерман М.. Берклевский курс физики. Том 1. Механика. – М.: «Наука», 1983. стр. 190–196.

T o p sh i r i q

Alyuminiy ($\rho = 2600 kg/m^3$), mis ($\rho = 8600 kg/m^3$), temir ($\rho = 7900 kg/m^3$) va qo‘rg‘oshin ($\rho = 11300 kg/m^3$) dan yasalgan turli geometrik shakldagi qattiq jismlarning aylanish o‘qiga nisbatan inersiya momentlari hisoblansin.

1. h qalinlikdagi yaxlit silindr (disk)ning o‘z o‘qiga nisbatan inersiya momentini hisoblang.

2. Ichki radiusi R_1 va tashqi radiusi R_2 bo‘lgan h qalinlikdagi kovak silindrning inersiya momentini xisoblang.

3. L uzunlikdagi bir jinsli sterjenning massalar markazidan o‘tuvchi o‘qqaga nisbatan inersiya momentlarini hisoblang.

4. R radiusli bir jinsli sharning inersiya momentini hisoblan.

I L O V A

V a r i a n t l a r

2-jadval

Var. №	Kovak silindr			Bir jinsli silindr (disk)			Bir jinsli shar		Bir jinsli sterjen		
	h(m)	R_1 (m)	R_2 (m)	h (m)	R_1 (m)	mateirial	material	R (m)	a (m)	b (m)	ℓ (m)
1.	0.3	0.4	0.8	0.5	0.9	$A\ell$	$A\ell$	0.2	2	0.7	0.1
2.	0.5	0.7	0.9	0.9	0.1	Cu	Cu	0.3	1	0.8	0.5
3.	0.1	0.6	0.7	0.3	0.6	Fe	Fe	0.9	7	0.3	0.3
4.	0.7	0.1	0.2	0.8	0.3	Pb	Pb	0.2	1	0.9	0.2
5.	1	0.6	0.7	0.04	0.03	$A\ell$	$A\ell$	0.6	03	0.56	0.1
6.	0.63	0.24	0.35	0.54	0.72	Cu	Cu	0.78	6	0.26	0.4
7.	0.45	0.25	0.56	0.78	0.52	Fe	Fe	0.38	4.6	0.29	0.3
8.	0.27	0.51	0.72	0.83	0.61	Pb	Pb	0.72	4.1	0.34	0.1
9.	0.53	0.32	0.41	0.28	0.34	$A\ell$	$A\ell$	0.47	8.7	0.65	0.3
10	0.23	0.25	0.57	0.12	0.53	Cu	Cu	0.97	2.3	0.15	0.2
11	0.13	0.17	019	0.19	0.15	Fe	Fe	0.71	5.1	0.32	0.4
12	0.06	0.23	0. 9	0.01	0.05	Pb	Pb	0.15	1.6	0.26	0.2
13	0.45	0.27	0.28	0.19	0.65	$A\ell$	$A\ell$	0.65	1.2	0.21	0.4
14	0.31	0.14	0.45	0.31	0.05	Cu	Cu	0.72	2.3	0.13	0.2
15	0.04	0.098	0.91	0.07	0.76	Fe	Fe	0.67	7.6	0.87	0.1
16	0.35	0.32	0.21	0.52	0.56	Pb	Pb	0.70	3.4	0.11	0.2
17	1.32	2.1	3.1	1.7	1.07	$A\ell$	$A\ell$	1.31	3.12	1.8	0.4
18	2.1	3.3	4.3	7.1	4.1	Cu	Cu	3.5	7.1	3.2	0.5
19	3.1	1.3	1.4	1.3	2.3	Fe	Fe	1.4	1.8	6.1	0.6
20	1.6	2.5	5.1	3.1	7.1	Pb	Pb	5.1	3.1	2.4	0.4
21	2.2	1.1	3.1	4.4	2.4	$A\ell$	$A\ell$	4.2	2.3	3.3	0.3
22	5.2	4.0	4.5	3.7	6.3	Cu	Cu	2.2	6.7	5.7	0.4
23	3.4	3.7	6.0	2.0	3.0	Fe	Fe	3.0	2.4	3.5	0.5
24	5.7	4.9	5.2	4.5	2.5	Pb	Pb	4.0	5.6	7.1	0.7
25	4.4	4.2	7.8	3.9	8.4	$A\ell$	$A\ell$	5.3	4.9	3.7	0.5
26	7.7	7.5	8.2	9.0	5.7	Cu	Cu	2.7	2.7	1.6	0.4
27	1.2	1.1	1.5	1.8	1.3	Fe	Fe	1.3	1.5	1.8	0.5
28	3.1	1.2	1.4	2.7	3.5	Pb	Pb	3.1	3.01	5.03	0.3

M u n d a r i j a

Muharrir Sidikova K.A.

Musahhih Bahromova T.N.