

MUSAYEV PO'LAT XOLIQOVICH

1937 yilda Samarqand shahrida tug'ilgan, yoshlik yillari Mavlono Orif Deggaroniyning qishlog'i Hazorada o'tgan. 1960 yilda Samarqand davlat universistetini tugatib, shundan ikki yilini Rossiyaning Gorkiy davlat universitetida o'qigan. 1960–1967 yillar O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi fizika–texnika institutida ilmiy xodim va Rossiya Fanlar Akademiyasi fizika–texnika institutining aspiranti.

Fizika–matematika fanlari doktori (1991), professor (1995). Samarqand davlat universiteti dotsenti (1967–1984), Navoiy konchilik instituti kafedra mudiri (1984–1991), Buxoro davlat universiteti o'quv ishlari, ilmiy ishlar prorektori (1992–1998) lavozimlarida ishlagan. 1 ixtiro muallifi, 3 fan nomzodiga ilmiy rahbar, 140 dan ziyod ilmiy ishlar muallifi.

Hozir O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi Buxoro ilmiy markazining yetakchi ilmiy xodimi va Muvofiqlashtiruvchi ilmiy kengashining a'zosi.

Professor P.X. Musayev maktab o'qituvchi va o'quvchilari o'rtasida fizika va matematika fanlarini ommaviylashtirish sohasida faol ishlamoqda.

ISBN 978-9943-13-069-2

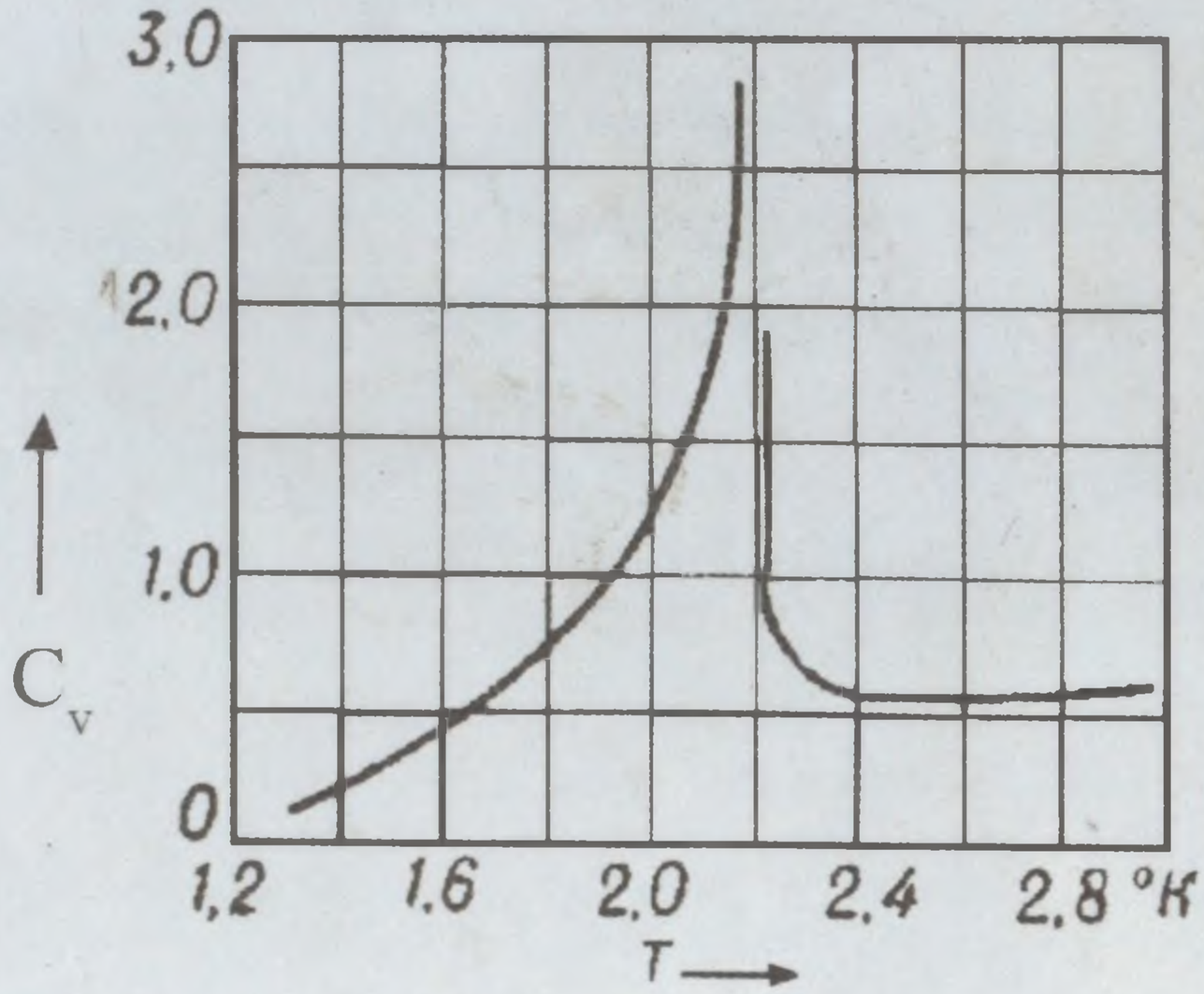
FIZIKA VA TERMODINAMIKA

STATISTIK

P.X. MUSAYEV

STATISTIK FIZIKA VA TERMODINAMIKA

$$\overline{F} = \frac{1}{z} \int F(q,p) e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}} (dq)(dp)$$



"IQTISOD – MOLIYA"

531.a
M-90

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA
MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

P.X. MUSAYEV

STATISTIK FIZIKA VA TERMODINAMIKA

O‘zbekiston Respublikasi oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi
tomonidan darslik sifatida tavsiya etilgan

5 dona
y 114 -

TOSHKENT
«IQTISOD-MOLIYA»
2008

BuxOO va YESTI
KUTUBXONA
№ Y114

22.317

Taqrizchilar: ***M.Yu.Rasulova*** - fizika-matematika fanlari doktori, O‘zR FA YaFI etakchi ilmiy xodimi
R. M. Ibodov - fizika-matematika fanlari doktori, professor
D.R. Juraev - fizika-matematika fanlari doktori, professor

M90 Musayev P.X.
Statistik fizika va termodinamika. Darslik /P.X. Musayev; O‘zR oily va o‘rta-maxsus ta’lim vazirligi. –Toshkent: «Iqtisod-moliya», 2008. -256 b.

Ushbu darslikda klassik statistik fizikaning asosiy vazifasini talqin etish uchun konfiguratsiyali - ko‘p o‘lchamli muhit tushunchasi, ehtimoliyat nazariyasidan asosiy ma’lumotlar berildi. Gibbs metodiga asoslangan statistik taqsimot ko‘rinishlari, ularning klassik bir atomli ideal gazga tatbiqlari yoritildi. Shuningdek, termodinamikani statistik asoslashga bag‘ishlangan alohida bob yozildi. Kvant statistik fizikasini talqin etish uchun zarur bo‘lgan kvant mexanikasidan ma’lumotlar berilib, Gibbs taqsimotlari kvant tizimlar uchun umumlashtirildi, u orqali Boze – Eynshteyn va Fermi – Dirak taqsimotlari keltirib chiqarildi.

Muvozanatsiz holatlar statistik fizikaga doir ma’lumotlar yoritildiki, ushbu bo‘limdagi ma’lumotlardan nafaqat bakalavr, balki nazariy fizika va qattiq jism fizikasi bilan shug‘ullanuvchi magistrlar ham foydalanishlari mumkin. Har bir bobning oxirida yoritilgan mavzularni mustahkamlashga doir masalalar va ularning namunaviy yechimlari berilgan.

ББК 22.317я7

ISBN 978-9943-13-069-2

© «Iqtisod-moliya», 2008
© P.X. Musayev, 2008

So‘zboshi

«Statistik fizika va termodinamika» darsligining asosiy vazifasi universitet va pedagogika institutlari bakalavriat va magistratura bosqichida ta’lim oluvchi talabalarga chuqur va mustahkam darajada makrotizimlarning termodinamik va statistik asosiy qonuniyatlarini yetkazishdan iboratdir. Shuning bilan birga, talaba olgan bilimlarini amaliyotda qo‘llay bilish darajasiga erishishi lozimligi nazarda tutildi. Bu darslik tushunarli tilda, shuning bilan birga, statistik qonuniyatlarni to‘g‘ri va to‘la bayon etishni talab etadi.

Ma’lumki, «Statistik fizika» nazariy fizikaning asosiy tarkibiy qismlaridan biri bo‘lib, juda ko‘plab zarralardan tashkil topgan tizimlar xususiyatlarini o‘rganish bilan shug‘ullanadi. Statistik fizika makrotizimlarni o‘rganishda ularni tashkil etgan zarralar xususiyatiga asoslanadi. U jism zarralarining xususiyatlariga asoslangan holda jismlarning makroskopik xususiyatlarini keltirib chiqaradiki, bu makro xususiyatlarni, ya’ni ularga tegishli bo‘lgan makroskopik parametrlarni bevosita o‘lchash imkonini beradi.

Mazkur darslikka jahonda bu sohada erishilgan yutuqlarni e’tiborga olgan holda muvozanatli tizimlar statistik fizikasi va termodinamikasining asosiy fundamental qonuniyatlari, tushunchalari kiritildi. Darslikda fenomenologik termodinamika yoritilishi bilan bir qatorda uning statistik fizika nuqtai nazaridan asosi ham berilgan va u orqali statistik fizika va termodinamika qonunlarining uzviy ravishda bog‘liqligi hamda ularning o‘zaro bir-birini to‘ldirishi ko‘rsatilgan. Darslik uch bo‘limni – klassik statistik fizika va termodinamika, kvant statistik fizika hamda nomuvozanat holatlar statistik fizikasini o‘z ichiga oladi. Eng muhimi “Universitet ta’limi uchun fizika va astronomiya mutaxassisliklari bo‘yicha o‘quv dasturlari” (Toshkent,“Universitet”, 1996) tarkibiga kiritilgan “statistik fizika va termodinamika” dasturiga to‘la amal qilindi va unda qayd etilgan asosiy mavzular darslikda yoritildi. Shuning bilan bir qatorda, ushbu darslik O‘zR OO‘MTV ning “Termodinamika va statistik fizika” fanidan 2006 yil 26 iyulda tasdiqlangan dasturi bilan (Ro‘yxat № BD 5440100-3.14) muvofiqlashtirildi.

Ushbu darslik ham shu paytgacha chop etilgan darsliklar qatoridan munosib o‘rin egallaydi degan umiddaman.

Muallif

Statistik fizika predmeti va uning vazifasi

Statistik fizika nazariy fizikaning asosiy tarkibiy qismlaridan biri bo‘lib, juda ko‘plab zarralardan tashkil topgan fizik tizimlar (makrotizimlar) xususiyatlarini o‘rganish bilan shug‘ullanadi. Makrotizim deyilganda, odatda, undagi zarralar soni $N_A=6,02\cdot 10^{23}mol^{-1}$ Avogadro sonidan kam bo‘lmagan tizim tushuniladi. Makrotizimlar xususiyatlarini o‘rganish bilan nazariy fizikaning bo‘limlari termodinamika va nazariy mexanika ham shug‘ullanadi. Termodinamika va nazariy mexanika makrotizimlarni tutash muhit deb qaraydi. Statistik fizika esa makrotizimlarni o‘rganishda ularni tashkil etgan zarralar xususiyatiga asoslanadi. Statistik fizika jism zarralarining xususiyatlariga asoslangan holda ularning makroskopik xususiyatlarini keltirib chiqaradiki, bu makroxususiyatlarni, ya’ni ularga tegishli bo‘lgan makroskopik kattaliklarni bevosita o‘lchash yoki hissiyotimiz bilan sezishimiz mumkin bo‘lsin.

Ma’lumki, alohida elementar zarralarning va ularning kombinatsiyasidan tashkil topgan atom va molekulalarning xususiyatlari kvant mexanikasida o‘rganiladi. Statistik fizika esa xususiyatlari allaqachon o‘rganilgan zarralardan tashkil topgan makrotizimlar xususiyatini aniqlash bilan shug‘ullanadi.

1901 yilda Gibbs tomonidan muvozanat holatdagi har qanday makrotizimni o‘rganish uchun yaroqli bo‘lgan ancha umumlashtirilgan va hozirgi zamon talablariga javob beradigan klassik statistik uslub yaratildi. Statistik fizika fani taraqqiyotining so‘ngi bosqichi kvant nazariyasining yaratilishi bilan bog‘liq.

Makrotizimlardagi fizik hodisalarni ifodalashda statistik fizikada ikki xil model qo‘llaniladi. Bular klassik va kvant statistikasidir. Tizim klassik statistik fizika bilan ifodalanganda, uni tashkil etuvchi zarralar klassik mexanika qonunlariga bo‘ysunadi deb hisoblanadi. Kvant statistikasida esa zarralarning harakati kvant mexanikasi qonunlari bilan ifodalanadi. Ma’lumki, klassik mexanika kvant mexanikasining xususiy holidir. Shuning uchun klassik statistika kvant statistikasining Plank doimiysi $h\to 0$ bo‘lgandagi chegara holidir. Binobarin, klassik va kvant statistikalarini birgalikda, parallel talqin etish ancha qulay bo‘lib, ko‘pchilik hozirgi zamon darsliklarida shunday qilinadi.

Lekin biz mahalliy sharoitga moslashgan holda, aniqrog‘i pedagogik nuqtai nazardan, dastlab klassik statistik fizikani, undan so‘ng kvant statistik fizika asoslarini bayon etamiz. Statistik fizika asosan vaqt o‘tishi bilan holati o‘zgarmaydigan tizimlarning fizik xossalarini o‘rganish bilan shug‘ullanadi. Vaqtga bog‘liq ravishda holati o‘zgaradigan tizimlarni o‘rganish bilan muvozanatsiz holatlar statistik fizikasi, boshqacha qilib aytganda, fizik kinetika shug‘ullanadi.

«Statistik fizika» kursining ahamiyati osha borganligi sababli mazkur fanga tegishli bo‘lgan darslikka talab osha bormoqda. Lekin juda yuqori talablarga javob beradigan darslik yaratishning o‘zi mushkul vazifadir. Ushbu dasrlikni yaratishdan asosiy maqsad fizika va unga qardosh bo‘lgan ixtisosliklar bo‘yicha ta’lim oluvchi bakalavriat va magistratura bosqichidagi va shu sohada faoliyat ko‘rsatayotgan ko‘p sonli o‘qituvchilar talabini qondirishdir.

1-bob. KONFIGURATSIYALI MUHIT VA EHTIMOLIYAT NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI

1.1-§. Konfiguratsiyali muhit. Liuvill teoremasi

Statistik fizikada konfiguratsiyali muhit (ko‘p o‘lchamli muhit) tushunchasi keng qo‘llaniladi. ***s*** - ta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan tizim uchun konfiguratsiyali muhit (Γ-muhit) deyilganda 2s ta o‘lchovga ega bo‘lgan abstrakt muhit tushuniladi.

Makrotizimning bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan barcha koordinatalari to‘plamiga uning ***s*** - erkinlik darajasining soni deyiladi. Γ- muhitning o‘lchov o‘qlari bo‘yicha ***s*** - ta q_i - umumlashtirilgan koordinata va ***s*** ta r_i- umumlashtirilgan impuls joylashgan bo‘ladi. Tizim holati shu 2s-ta koordinata va unga qo‘shma bo‘lgan impulslar orqali to‘la va bir qiymatli ravishda aniqlanadi. Tizim dinamikasi $N(q,p)$ - Gamilton funksiyasi orqali to‘la tavsiflanadi. Tizimni tashkil etgan zarralar Gamilton tenglamalariga bo‘ysunadi, ya’ni:

$$\dot{q}_i = \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H(q,p)}{\partial p_i}; \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H(q,p)}{\partial q_i} \tag{1.1}$$

Bu erda $\dot{q}_i$ va $\dot{p}_i$ - lar, mos ravishda, koordinata va impuls i-nchi komponentining o‘zgarish tezligi (i=1,2,3,…,s).

Ushbu tenglamalar tizimining yechimini konfiguratsiyali nuqta bilan ifodalash mumkin. Boshqacha qilib aytganda, konfiguratsiyali muhitda tizimning mexanik holati konfiguratsiyali nuqta bilan ifodalanadi. Tizim harakat qilgan vaqtda 2s o‘lchovli muhitda konfiguratsiyali nuqta bir o‘lchamli egri chiziq (konfiguratsiyali trayektoriya) chizadi. (1.1) - differentsial tenglamalar yechimi yagona bo‘lganligi uchun konfiguratsiyali nuqta trayektoriyasi o‘zaro kesishmaydi. Konfiguratsiyali trayektoriyaning parametrik tenglamalari

$$q_i = q_i\left(t, q_i^0, p_i^0\right); \qquad p_i = p_i(t, q_i^0, p_i^0)$$

ko‘rinishga ega. q_i^0 va p_i^0, mos ravishda, koordinata va impulslarning boshlang‘ich qiymatlaridir.

Agar tizim konservativ va yopiq bo‘lsa, ya’ni uning energiyasi harakat integrali bo‘lsa, u holda

$$H(q, p) = E = const.$$

Bunday holga to‘g‘ri keluvchi konfiguratsiyali trayektoriya (2s-1) o‘lchovga ega bo‘lgan giperyuzada joylashgan bo‘ladi. Γ-muhitning elementar hajmi deb

$$d\Gamma = dq_1 dq_2 \ldots dq_s dp_1 dp_2 \ldots dp_s = (dq)(dp) \qquad (1.2)$$

ifodasiga aytamiz.

Ayrim hollarda bitta zarra koordinatalari va impulslariga to‘g‘ri keluvchi konfiguratsiyali muhitni (μ-muhitni) qabul qiladilar. Bunday holda N zarrali ideal gaz holati μ muhitda N ta konfiguratsiyali nuqta orqali ifodalanadi. Bir atomli ideal gaz uchun μ-muhit olti o‘lchamli bo‘ladi va bunday μ-muhitning elementar hajmini (Dekart koordinat tizimida)

$$d\mu = dx\,dy\,dz\,dp_x dp_y dp_z = d\vec{r} \cdot d\vec{p}$$

deb olish mumkin.

Statistik fizika metodlarini asoslamoq uchun vaqt o‘tishi bilan bitta konfiguratsiyali nuqta harakatini tekshirish o‘rniga aynan bir xil bo‘lgan N ta tizimning harakatini tekshiraylik. Ansambl deb ataluvchi bu to‘plamga Γ-muhitda N ta konfiguratsiyali nuqta to‘g‘ri keladi. Vaqt o‘tishi bilan har bir konfiguratsiyali nuqta o‘zining trayektoriyasi bo‘yicha siljiydi.

Agar N yetarli darajada katta desak, u holda zichlik yoki taqsimot funksiyasi haqidagi tushunchani kiritish mumkin:

$$\rho(q, p, t) = \frac{\Delta N}{\Delta \Gamma} \qquad (1.3)$$

Bu yerda ΔN - konfiguratsiyali muhitning $\Delta\Gamma$ kichik hajmiga to‘g‘ri keluvchi konfiguratsiyali nuqtalar soni.

Taqsimot funksiyasining normallashtirish sharti quyidagicha:

$$\int \rho(q,p,t)d\Gamma = \int dN = N \tag{1.4}$$

Boshqacha qilib aytganda, ansambl bu ma'lum bir vaqtda faqat q_i va p_i qiymatlari bilan farq qiluvchi juda ko'plab aynan bir xil bo'lgan fizik tizimlar to'plami demakdir. Masalan, biror idish ichida gaz xususiyatlari o'rganilayotgan bo'lsin, juda ko'plab shunaqa gazli idish mavjud, deb tasavvur qilishimiz lozim; ulardagi zarralar soni bir xil bo'lishi kerak va bu tizimlarning barchasi (ansambl) termostatga joylashtirilgan deb hisoblaymiz. Ma'lumki, ansamblning konfiguratsiyali nuqtalari trayektoriyalari o'zaro kesishmaydi. Agar ular kesishganda edi, ma'lum bir holatda bo'lgan mexanik tizim turlicha harakatda bo'lar edi, ya'ni Gamilton tenglamalari yechimlarining yagonaligi bajarilmasdi. Ansambl konfiguratsiyali nuqtalarining harakati quyida isbot qilinadigan Liuvill teoremasiga bo'ysunadi.

Berilgan ansambl uchun konfiguratsiyali nuqtalar o'z-o'zidan yo'q ham, bor ham bo'lmaganligi tufayli taqsimot funksiyasi Γ-muhitda tegishli uzluksizlik tenglamasiga bo'ysunadi.

Ma'lumki, jismlarning saqlanish qonuni (real uch o'lchamli muhit uchun)*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \tag{1.5}$$

uzluksizlik tenglamasi orqali ifodalanadi.

Bu yerda $\rho(x,y,z,t)$ va $\vec{v}(x,y,z,t)$, mos ravishda, jismning t vaqt uchun x,y,z nuqtadagi zichligi va tezligi. Uzluksizlik tenglamasini

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\, grad\rho + \rho \cdot div\, \vec{v} = 0 \tag{1.5a}$$

ko'rinishida ham yozish mumkin. Yoki, agar muhitda harakat qilayotgan zarra bilan bog'liq bo'lgan zichlikning o'zgarish tezligini qabul qilsak, ya'ni

---

* В.И. Смирнов, Курс высшей математики, Т.II, IV том, 114-§. М, 1958г.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v} \cdot grad\rho$$

ekanligini hisobga olsak,

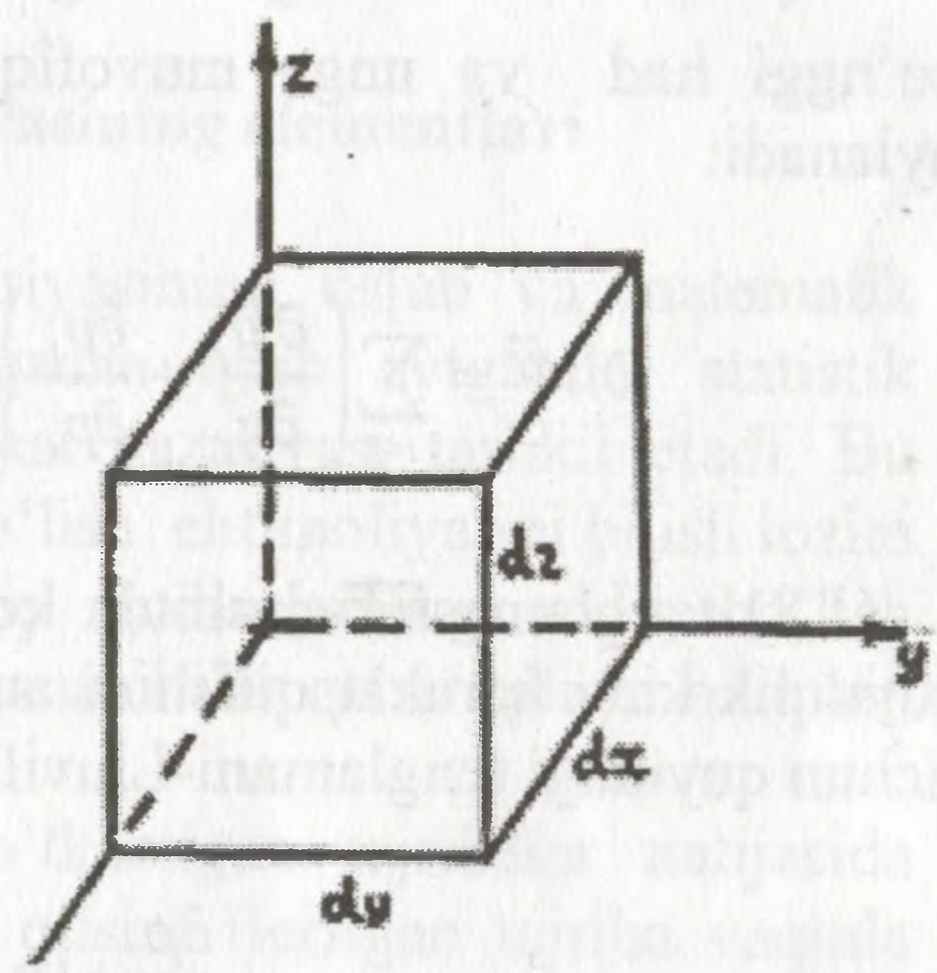
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\, \vec{v} = 0 \qquad (1.5b)$$

bo‘ladi. (1.5b) tenglamani hosil qilishda *dxdydz* kub hajmcha ichidagi jism balansi, ya’ni bu kubning parallel qarama-qarshi tomonlaridan keluvchi va undan chiquvchi jism miqdorlari hisobga olingan (1-chizma).

Agar xuddi yuqoridagidek mulohaza yuritsak, 2s o‘lchamli Γ-muhitda harakat qiluvchi konfiguratsiyali nuqtalar uchun

$$\frac{\partial\rho(q,p,t)}{\partial t} + Div(\rho\vec{V}) = 0 \qquad (1.6)$$

ko‘rinishidagi tenglama hosil qilish mumkin. $\rho(q,p,t)$. ko‘p o‘lchamli muhit uchun



1-chizma.Uch o‘lchamli Dekart koordinat sistemasi uchun $dV=dxdydz$

konfiguratsiyali nuqtalarning taqsimot funksiyasi. $\vec{V}$ - 2s o‘lchamli "tezlik" vektori, uning komponentlari

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \cdots, \dot{q}_s, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \cdots, \dot{p}_s$$

bo‘ladi. Yoki (1.5b) o‘rniga:

$$\frac{d\rho(q,p,t)}{dt} + \rho \cdot Div\vec{V} = 0 \qquad (1.7)$$

Bu yerda $d\rho/dt$ - harakat qiluvchi konfiguratsiyali nuqta yaqinida $\rho(q,p,t)$ ning o‘zgarish tezligi. Ikkinchi tomondan, $d\rho/dt$ vaqt bo‘yicha ρ dan to‘la hosila bo‘lganligi tufayli (1.6) uzluksizlik tenglamasini bevosita quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\int \rho(q,p,t)d\Gamma = \int dN = N \tag{1.4}$$

Boshqacha qilib aytganda, ansambl bu ma'lum bir vaqtda faqat q_i va p_i qiymatlari bilan farq qiluvchi juda ko'plab aynan bir xil bo'lgan fizik tizimlar to'plami demakdir. Masalan, biror idish ichida gaz xususiyatlari o'rganilayotgan bo'lsin, juda ko'plab shunaqa gazli idish mavjud, deb tasavvur qilishimiz lozim; ulardagi zarralar soni bir xil bo'lishi kerak va bu tizimlarning barchasi (ansambl) termostatga joylashtirilgan deb hisoblaymiz. Ma'lumki, ansamblning konfiguratsiyali nuqtalari trayektoriyalari o'zaro kesishmaydi. Agar ular kesishganda edi, ma'lum bir holatda bo'lgan mexanik tizim turlicha harakatda bo'lar edi, ya'ni Gamilton tenglamalari yechimlarining yagonaligi bajarilmasdi. Ansambl konfiguratsiyali nuqtalarining harakati quyida isbot qilinadigan Liuvill teoremasiga bo'ysunadi.

Berilgan ansambl uchun konfiguratsiyali nuqtalar o'z-o'zidan yo'q ham, bor ham bo'lmaganligi tufayli taqsimot funksiyasi Γ-muhitda tegishli uzluksizlik tenglamasiga bo'ysunadi.

Ma'lumki, jismlarning saqlanish qonuni (real uch o'lchamli muhit uchun)*)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div(\rho \vec{v}) = 0 \tag{1.5}$$

uzluksizlik tenglamasi orqali ifodalanadi.

Bu yerda $\rho(x,y,z,t)$ va $\vec{v}(x,y,z,t)$, mos ravishda, jismning t vaqt uchun x,y,z nuqtadagi zichligi va tezligi. Uzluksizlik tenglamasini

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{v}\, grad\rho + \rho \cdot div\, \vec{v} = 0 \tag{1.5a}$$

ko'rinishida ham yozish mumkin. Yoki, agar muhitda harakat qilayotgan zarra bilan bog'liq bo'lgan zichlikning o'zgarish tezligini qabul qilsak, ya'ni

---

* В.И. Смирнов, Курс высшей математики, Т.II, IV том, 114-§. М, 1958г.

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{v}\cdot grad\rho$$

ekanligini hisobga olsak,

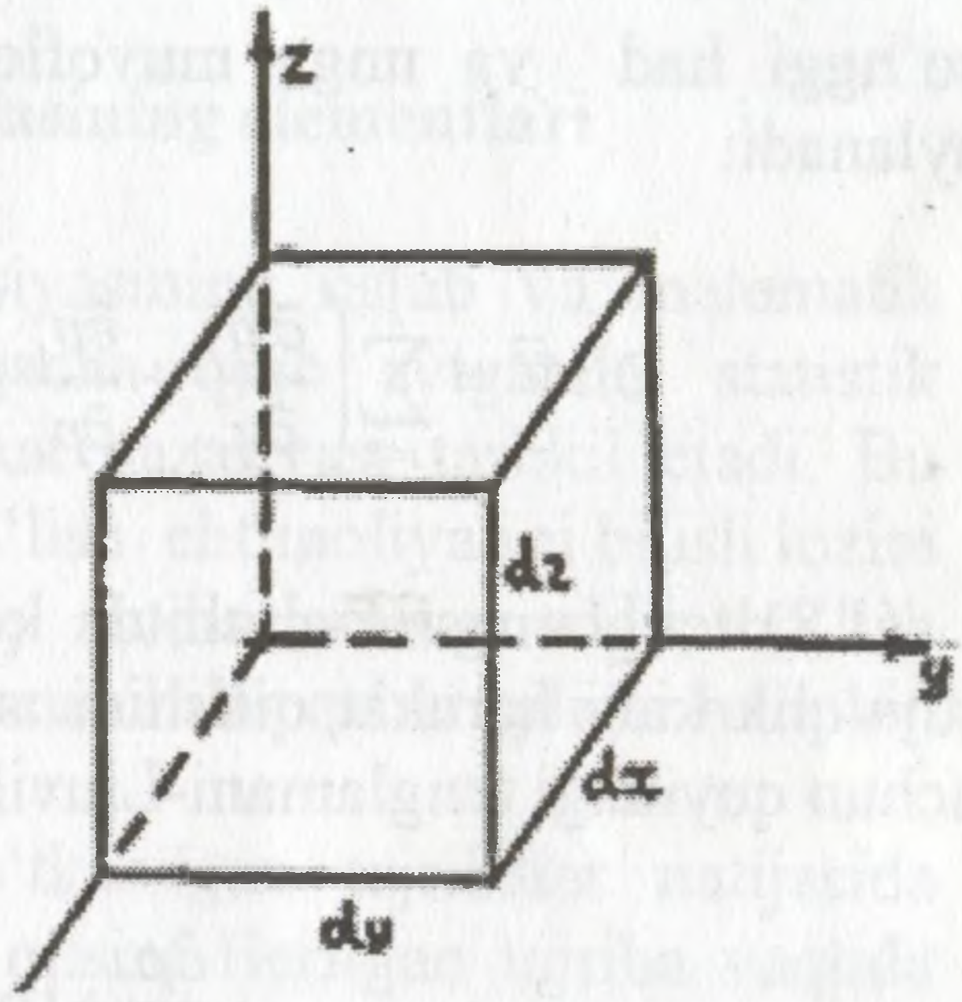
$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\, div\vec{v} = 0 \qquad (1.5b)$$

bo‘ladi. (1.5b) tenglamani hosil qilishda ***dxdydz*** kub hajmcha ichidagi jism balansi, ya’ni bu kubning parallel qarama-qarshi tomonlaridan keluvchi va undan chiquvchi jism miqdorlari hisobga olingan (1-chizma).

Agar xuddi yuqoridagidek mulohaza yuritsak, 2s o‘lchamli Γ-muhitda harakat qiluvchi konfiguratsiyali nuqtalar uchun

$$\frac{\partial\rho(q,p,t)}{\partial t} + Div(\rho\vec{V}) = 0 \qquad (1.6)$$

ko‘rinishidagi tenglama hosil qilish mumkin. $\rho(q,p,t)$. ko‘p o‘lchamli muhit uchun



1-chizma.Uch o‘lchamli Dekart koordinat sistemasi uchun $dV=dxdydz$

konfiguratsiyali nuqtalarning taqsimot funksiyasi. $\vec{V}$ - 2s o‘lchamli "tezlik" vektori, uning komponentlari

$$\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{q}_3, \cdots, \dot{q}_s, \dot{p}_1, \dot{p}_2, \dot{p}_3, \cdots, \dot{p}_s$$

bo‘ladi. Yoki (1.5b) o‘rniga:

$$\frac{d\rho(q,p,t)}{dt} + \rho\cdot Div\vec{V} = 0 \qquad (1.7)$$

Bu yerda $d\rho/dt$ - harakat qiluvchi konfiguratsiyali nuqta yaqinida $\rho(q,p,t)$ ning o‘zgarish tezligi. Ikkinchi tomondan, $d\rho/dt$ vaqt bo‘yicha ρ dan to‘la hosila bo‘lganligi tufayli (1.6) uzluksizlik tenglamasini bevosita quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left\{\frac{\partial}{\partial q_i}(\rho\cdot\dot{q}_i)+\frac{\partial}{\partial p_i}(\rho\cdot\dot{p}_i)\right\}=0$$

yoki

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\dot{q}_i+\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\dot{p}_i\right)+\rho\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right)=0$$

(1.1) - harakat tenglamasiga asosan ushbu munosabatdagi so‘nggi had va unga muvofiq bo‘lgan (1.7)-dagi $Div\vec{V}$ nolga aylanadi:

$$Div\vec{V}=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_i}+\frac{\partial \dot{p}_i}{\partial p_i}\right)=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial^2 H}{\partial q_i \partial p_i}-\frac{\partial^2 H}{\partial p_i \partial q_i}\right)=0 \qquad (1.8)$$

(1.8) tenglamasi Γ-muhitda konfiguratsiyali nuqtalar qisilmaydigan suyuqlik kabi harakat qilishini anglatadi. Va biz taqsimot funksiyasi uchun quyidagi tenglamani-Liuvill tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+[\rho,H]=0, \qquad (1.9)$$

bu yerda:

$$[\rho,H]=\sum_{i=1}^{s}\left(\frac{\partial \rho}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i}-\frac{\partial \rho}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\right) \qquad (1.10)$$

H -tizimning Gamilton funksiyasi, [ρ,H] - Puasson qavsi. (1.7) tenglamasi

$$\frac{d\rho}{dt}=0 \qquad (1.11)$$

tenglamasiga ekvivalent ekanligi ko‘rinib turibdi. (1.11)-tenglamasi ehtimoliyat zichligining saqlanish qonunini yoki Liuvill teoremasining matematik ko‘rinishdagi ifodasini anglatadi. (1.8) va (1.3)-ifodalaridan shunday xulosaga kelamizki, berilgan ΔN konfiguratsiyali nuqtaga ega bo‘lgan $\Delta\Gamma$ hajm, konfiguratsiyali nuqtalar harakatda bo‘lganda ham

saqlanadi. (1.8) va (1.7) -lardan konfiguratsiyali nuqtalar zichligi ρ(q,p,t) doimiy saqlanishini ko‘rish mumkin. Yuqorida isbotlangan ekvivalent xulosalar Liuvill teoremasini tashkil etadi. Umuman olganda, (1.9) – xususiy hosilali tenglama ρ - ehtimoliyat zichligini aniqlab beradi. Ammo ushbu tenglama yechimini topish, (1.1) – harakat tenglamasining yechimini topishga ekvivalentdir. Chunki (1.9)-ga mos keluvchi Lagranj tenglamalari harakat tenglamalari demakdir. Lekin shunga qaramasdan, (1.11)-tenglamasi ρ-taqsimot funksiyasi uchun yagona tenglamadir va undan kurs davomida ko‘p maqsadda foydalanamiz.

1.2-§. Ehtimoliyat nazariyasining elementlari

Statistik fizika ehtimoliyat nazariyasining uslub va matematik apparatidan keng foydalanadi. Boshqacha qilib aytganda, statistik fizikaning matematik asosini ehtimoliyat nazariyasi tashkil etadi. Bu yerda murakkab hodisalarning sodir bo‘lish ehtimoliyatini bilish lozim bo‘ladi. Shuning uchun dastlab oddiy hodisalarning sodir bo‘lish ehtimoliyatini diskret va uzluksiz o‘zgaruvchilar qabul qilishi mumkin bo‘lgan kattaliklarda ko‘rib chiqaylik.

Aytaylik, X kattaligi ko‘plab o‘tkazilgan tajribalar natijasida $x_1,x_2,\ldots,x_n$ diskret qiymatlarni qabul qilsin. Berilgan tajriba vaqtida $X=x_i$ bo‘lish ehtimoliyati

$$W(x_i)=\frac{n(x_i)}{N} \qquad (2.1)$$

bo‘ladi. Bunda N - barcha tajribalar soni; $n(x_i)$ - kerakli hodisa uchratilgandagi tajribalar soni. Bundan ehtimoliyatni normallashtirish sharti kelib chiqadi:

$$\sum_i W(x_i)=1 \qquad (2.2)$$

chunki

$$\sum_i n(x_i)=N$$

Agar X kattaligi x - ning uzluksiz qiymatlarini qabul qilsa, u holda X ning x~x + dx oralig‘ida bo‘lish ehtimoliyati (masalan, ideal gaz molekulalari tezligining v~v+dv oralig‘ida bo‘lish ehtimoliyati)

$$\tilde{W}(x, x+dx) = \frac{\tilde{n}(x, x+dx)}{N} \qquad (2.3)$$

bo‘ladi. $\tilde{n}$(x, x+dx) - bu yerda X ning x~x+dx oralig‘ida sodir bo‘lgan tajribalar soni. Ma’lumki, $\tilde{n}$(x, x+dx) cheksiz kichik dx oraliqqa proporsional va uni n(x)dx deb olish mumkin: Shuning uchun

$$\tilde{W}(x, x+dx) = \frac{n(x)dx}{N} = w(x)dx \qquad (2.4)$$

Bu yerda *w(x)* ifodasi X ning x qiymatiga ega bo‘lish ehtimoliyatining zichligi (taqsimot funksiyasi). (2.2) - dagi normallashtirish sharti kabi, bu holda ehtimoliyat zichligi uchun normallashtirish sharti

$$\int w(x)dx = 1 \qquad (2.5)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

1.3-§. Ehtimoliyatlarni qo‘shish va ko‘paytirish. Statistik bog‘liq emaslik

Biz yuqorida qayd qilganimizdek, ehtimoliyat nazariyasining asosiy vazifasi oddiy hodisa ehtimoliyatini bilgan holda murakkab hodisa ehtimoliyatini topishdir.

Oddiylik uchun V hajmda joylashgan kichik zarrani tekshiraylik. Bu zarraga katţaligi va yo‘nalishi turlicha bo‘lgan turtki berilib turgan bo‘lsin. Agar unga tashqi maydonlar ta’siri bo‘lmasa, muhit bir jinsli bo‘lganligi tufayli zarraning v hajmida kuzatilish ehtimoliyati

$$W = v/V$$

bo‘ladi. Shu zarrani V hajmining qolgan boshqa qismida kuzatish ehtimoliyati esa quyidagicha:

$$W_1=(V-v)/V = 1 - v/V$$

Binobarin,

$$W + W_1 = 1.$$

Agar X kattaligi $x_1,x_2,x_3,\ldots, x_i,\ldots$ va Y esa $y_1,y_2,y_3,\ldots, y_j,\ldots$ diskret qiymatlarni olish imkoniyatiga ega bo‘lsa, bir vaqtning o‘zida $X= x_i$ va $Y=y_j$ bo‘lish ehtimoliyati tubandagicha bo‘ladi:

$$W(x_i, y_j) = \frac{n(x_i, y_j)}{N} \qquad (3.1)$$

Bu murakkab ehtimoliyatning normallashtirish sharti:

$$\sum_{i,j} W(x_i, y_j) = 1$$

Agar X va Y lar uzluksiz o‘zgarsa, ehtimoliyat zichligi va uning normallashtirish sharti, mos ravishda,

$$W(x, y) = \frac{n(x, y)}{N}; \qquad \iint w(x, y)dxdy = 1 \qquad (3.2)$$

ko‘rinishlarga ega bo‘ladi.

$x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_k\ldots$ diskret qiymatlarni olishi mumkin bo‘lgan X ning x_i yoki x_k qiymatiga ega bo‘lish ehtimoliyati:

$$W(x_i, x_k) = \frac{n(x_i) + n(x_k)}{N} = W(x_i) + W(x_k) \qquad (3.3)$$

ya’ni oddiy ehtimoliyatlar yig‘indisiga teng.

Masalan, hajmi V bo‘lgan idishda ikki xil suyuqlik berilgan bo‘lsin. V hajmdan v hajmchani ajratib olamiz. Ana shu hajmchada birinchi suyuqlikning bitta molekulasi bo‘lish ehtimoliyati $W_1(v)=1/2$, ikkinchi suyuqlikning bitta molekulasi bo‘lish ehtimoliyati $W_2(v)=1/2$ bo‘lsin. U holda aralashma bitta molekulasining v hajmchada bo‘lish ehtimoliyati

$$W(v) = W_1(v) + W_2(v) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

bo‘ladi.

Shuningdek, uzluksiz o‘zgaruvchi X ning x_a va x_b oralig‘idagi qiymatiga ega bo‘lish ehtimoliyati tubandagicha:

$$W(x_a\ dan\ \ x_b\ gacha) = \int_{x_a}^{x_b} w(x)dx \qquad (3.4)$$

Ehtimoliyatlarni qo‘shish teoremasi X ning x_i va Y ning ixtiyoriy qiymatiga ega bo‘lish ehtimoliyatini topishga imkon beradi; ushbu diskret va uzluksiz o‘zgaruvchi kattaliklar uchun, mos ravishda:

$$W(x_i) = \sum_j W(x_i, y_j)\ ; \qquad W(x) = \int w(x, y)dy \qquad (3.5)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Agar X= x_i ga bog‘liq bo‘lgan hodisaning paydo bo‘lishi Y= y_i ga bog‘liq bo‘lgan hodisaga dahli bo‘lmasa, bunday hodisalar bir-biriga statistik bog‘liq bo‘lmagan hodisalar deyiladi. U holda X= x_i va Y= y_i bo‘lishining ehtimoliyati

$$W(x_i, y_j) = W_1(x_i) \cdot W_2(y_j) \qquad (3.6)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar X va Y lar uzluksiz o‘zgarsa, quyidagi hosil bo‘ladi:

$$w(x, y) = w_1(x)w_2(y) \qquad (3.7)$$

Bu yerda: $w(x, y)$, $w_1(x)$, $w_2(y)$ - ehtimoliyat zichliklari.

Masalan, V - hajmda ikkita o‘zaro tasir qilmaydigan zarra harakat qilayotgan bo‘lsin. Ularni bir vaqtning o‘zida v hajmchada uchratish ehtimoliyati:

$$W = \frac{v}{V} \cdot \frac{v}{V} = \left(\frac{v}{V}\right)^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Teskari xulosaga ham kelish mumkin: (3.6) va (3.7)-lar amal qilganda bunday hodisalar statistik bog‘liq bo‘lmagan bo‘ladi.

1.4-§. O‘rtacha qiymat va fluktuatsiya

Statistik fizikaning asosiy vazifasi statistik muvozanat holatida bo‘lgan makroskopik tizimlar parametrlarning o‘rtacha qiymatini va tizim kichik qismlariga tegishli bo‘lgan ayrim kattaliklar fluktuatsiyasi (o‘rtacha chetlashishi)ni hisoblashdan iboratdir. Shu maqsadda biz yuqorida ko‘rib chiqqan oddiy va murakkab hodisalarning sodir bo‘lish ehtimoliyati orqali o‘rtachani hisoblash masalasini ko‘rib chiqaylik.

$F(X)$ funksiyasining argumenti X $W(x_i)$ ehtimoliyat bilan $x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots$ qiymatlari qabul qiluvchi hol uchun $F(X)$ ning o‘rtacha arifmetik qiymati (2.1)ga binoan

$$\overline{F(X)} = \frac{F(x_1)\cdot n(x_1) + \ldots + F(x_i)\cdot n(x_i) + \ldots}{N} = \sum_i W(x_i)F(x_i) \qquad (4.1)$$

va, agar X uzluksiz o‘zgarsa, (2.4) ga asosan:

$$\overline{F(X)} = \int F(x)\cdot w(x)dx \qquad (4.2)$$

bo‘ladi. Shunday qilib, funksiyaning o‘rtacha arifmetik qiymati uning argumenti qiymatining ehtimoliyati orqali aniqlanadi. (4.1) va (4.2) dan ko‘rinib turibdiki, o‘rtacha qiymatni hisoblash chiziqli operatsiyadir, ya’ni

$$\overline{c_1F(x_1) + c_2F(x_2)} = c_1\cdot\overline{F(x_1)} + c_2\cdot\overline{F(x_2)} \qquad (4.3)$$

$\left(c_1, c_2 = const\right)$.

Agar funksiya $F(X,Y) = F_1(x)\cdot F_2(y)$ bo‘lsa va uzluksiz o‘zgaruvchi X,Y qiymatlarni kuzatish statistik bog‘liq bo‘lmasa, ya’ni (3,7) kuchga ega bo‘lsa, uning o‘rtacha qiymati

$$\overline{F(X,Y)} = \overline{F_1(X)\cdot F_2(Y)} = \iint F_1(x)F_2(y)w_1(x)w_2(y)\,dx\,dy =$$

$$= \int F_1(x)\cdot w_1(x)\,dx \int F_2(y)\cdot w_2(y)\,dy = \overline{F_1(X)}\cdot\overline{F_2(Y)} \qquad (4.4)$$

bo‘ladi.

Ko‘pincha statistikada $\overline{F(x)} = \overline{F}$ kattaligi tajribada kuzatiluvchi F- ni qanchalik aniqlik bilan tavsiflanishiga qiziqadilar. Bizni F-ning $\overline{F}$ dan o‘rtacha chetlanishi qiziqtiradi.

O‘z - o‘zidan ayonki,

$$\overline{\Delta F} = \overline{F - \overline{F}} = \overline{F} - \overline{F} = 0$$

ga teng. Shuning uchun F ning $\overline{F}$ dan chetlanishini aniqlamoq uchun o‘rtacha kvadratik chetlashishdan foydalanadilar:

$$\overline{(\Delta F)^2} = \overline{\left(F - \overline{F}\right)^2} = \overline{F^2} - \overline{F}^2 \qquad (4.5)$$

N-ta bir xil bir-biriga statistik bog‘liq bo‘lmagan qismdan tashkil topgan tizimni va bu tizim uchun additiv bo‘lgan F kattaligini tekshiraylik:

$$F = \sum_{k=1}^{N} F^{(k)} \qquad (4.6)$$

bo‘lsin. U holda

$$\Delta F = \sum_{k=1}^{N} (\Delta F)^k \qquad (4.7)$$

Bunday tizim uchun F-ning o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasini hisoblaylik:

$$\overline{(\Delta F)^2} = \overline{\left(\sum_{k=1}^{N} \Delta F^{(k)}\right)^2} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{k=1}^{N} \overline{\Delta F^{(i)}\cdot\Delta F^{(k)}}$$

bundan,

$$\overline{\Delta F^{(i)} \cdot \Delta F^{(k)}} = \overline{\Delta F^{(i)}} \cdot \overline{\Delta F^{(k)}} = \begin{cases} 0, & agar \quad k \neq i \quad bo'lsa, \\ \overline{\Delta F^{(k)}}^2 & agar \quad k = i \quad bo'lsa \end{cases}$$

Natijada additivlik xususiyatiga ega bo‘lgan F kattaligining o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasi quyidagicha ifodalanadi:

$$\overline{(\Delta F)^2} = \sum_{k=1}^{N} \overline{\left(\Delta F^{(k)}\right)^2} = N \cdot \overline{\left(\Delta F^{(k)}\right)^2} \qquad (4.9)$$

(4.6) - dan:

$$\overline{F} = \sum_{k=1}^{N} \overline{F^{(k)}} = N \cdot \overline{F^{(k)}} \qquad (4.10)$$

O‘rtacha chetlashishni xarakterlamoq uchun nisbiy fluktuatsiya tushunchasini ham kiritamiz:

$$\delta_F = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}}}{\overline{F}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \frac{\sqrt{\overline{\left(\Delta F^{(k)}\right)^2}}}{\overline{F^{(k)}}}$$

Masalalar

1. Garmonik otsillyator uchun Gamilton tenglamasi yechilsin.

Ye ch i sh: Ma’lumki, kvazielastik kuch $(-\chi q)$ ta’siri ostida to‘g‘ri chiziq bo‘yicha harakat qiluvchi moddiy nuqtaga garmonik otsillyator deyiladi. Garmonik otsillyator uchun Gamilton funksiyasi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{\chi q^2}{2}$$

Buni Gamilton tenglamalariga tadbiq etamiz:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m} \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -\chi q$$

Bundan:

BuxOO va YES
KUTUBXONA
№ 4 114

$$\dot{p} = m\ddot{q}$$

$$m\ddot{q} = -\chi q; \qquad m\ddot{q} + \chi q = 0; \qquad \ddot{q} + \omega^2 q = 0$$

bu yerda: $\omega^2 = \frac{\chi}{q}$

Tenglamaning yechimi $q = q_0 \cdot \sin\omega t$ hisoblanadi. Buni dastlabki tenglamaga tadbiq etsak,

$$p = \omega\, m q_0 \cdot \cos\omega t = p_0 \cos\omega t$$

2. Garmonik otsillyator uchun o‘rtacha kinetik va o‘rtacha potensial energiyalar topilsin.

Ye ch i sh:

$$E_{\min} = \frac{p^2}{2m} = \frac{m^2\omega^2 q_0^2}{2m}\cos^2\omega t = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2}\cos^2\omega t$$

$$E_{pot} = \frac{\chi q^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2}q^2 = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2}\sin^2\omega t$$

$$\overline{\sin^2\omega t} = \overline{\cos^2\omega t} = \frac{1}{2}$$

chunki, $\cos^2\omega t = \frac{1}{T}\int_0^T \cos^2\omega t\, dt = \frac{1}{2}$

Shuning uchun:

$$\overline{E_{\min}} = \overline{E_{pot}} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{4}$$

3. Garmonik otsillyatorning konfiguratsiyali trayektoriyasi aniqlansin.

Ye ch i sh: 1-masalaga binoan garmonik otsillyator konfiguratsiyali trayektoriyasining parametrik tenglamalari bo‘lib $q = q_0 \cdot \sin \omega t$, $p = p_0 \cos \omega t$ xizmat qiladi. Bundan

$$\frac{q^2}{q_0^2} = \sin^2 \omega t; \qquad \frac{p^2}{p_0^2} = \cos^2 \omega t$$

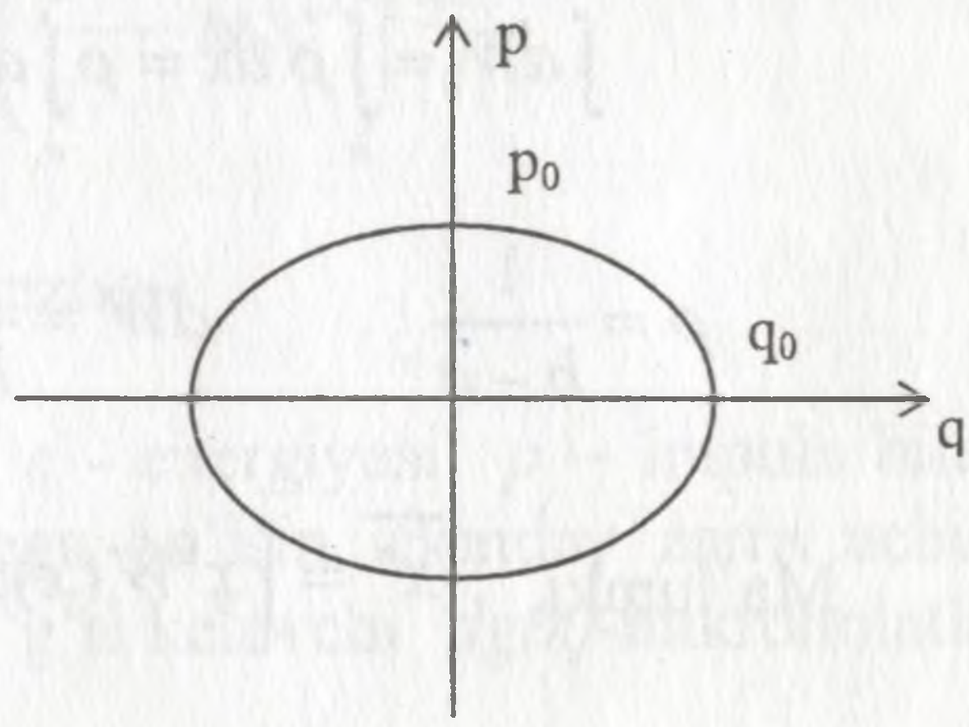
va natijada t vaqt ishtirok etmagan hol uchun yozsak, konfiguratsiyali trayektoriya tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{q^2}{q_0^2} + \frac{p^2}{p_0^2} = 1$$

Bu q_0 va r_0 yarim o‘qlarga ega bo‘lgan ellips tenglamasidir.

Shunday qilib, garmonik otsillyatorning konfiguratsiyali trayektoriyasi ellipsni tashkil etadi (*2-chizma*).

Otsillyator holati esa shu ellipsda nuqta bilan xarakterlanadiki, u vaqt o‘tish bilan shu ellips bo‘ylab siljiydi.



2-chizma. Garmonik otsilyatorning konfiguratsiyali trayektoriyasi

4. Tizim $dw \sim xy dx dy$ ko‘rinishidagi ehtimoliyat bilan xarakterlandi. Bu yerda $0 \le x \le a$, $0 \le y \le b$ bo‘lsin. Bu ehtimoliyat normallashtirilsin.

Ye ch i sh:

Tizim ehtimoliyati $dw = Axy dx dy$ bo‘lsin. Bundagi A-proporsionallik koeffitsiyentini ehtimoliyatni normallashtirish shartidan topamiz:

$$W = \int_0^a \int_0^b A \cdot xy dx dy = A \cdot \frac{a^2}{2} \cdot \frac{b^2}{2} = 1$$

Bundan $A = \frac{4}{a^2 b^2}$. Demak, normallashtirilgan ehtimoliyat

$$dW = \frac{4}{a^2 b^2} x \cdot y \, dx \, dy$$

bo‘lar ekan.

5. $\overline{(A-\overline{A})\cdot(B-\overline{B})} = \overline{AB} - \overline{A}\cdot\overline{B}$ ekanligi isbotlansin.

Ye ch i sh:

$$\overline{(A-\overline{A})\cdot(B-\overline{B})} = \overline{AB - \overline{A}\cdot B - A\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot\overline{B}} = \overline{AB} - \overline{\overline{A}B} - \overline{A\overline{B}} + \overline{\overline{A}\cdot\overline{B}} =$$

$$= \overline{AB} - 2\overline{A}\cdot\overline{B} + \overline{A}\cdot\overline{B} = \overline{AB} - \overline{A}\cdot\overline{B}$$

6. $dW=\rho dx$ ($\rho=const$, $0 \le x \le b$) ehtimoliyatidan foydalanib, $\overline{x}$ va $\overline{x^2}$ lar hisoblansin.

Ye ch i sh: Normallashtirish shartiga asosan:

$$\int dW = \int_a^b \rho \, dx = \rho \int_a^b dx = \rho\,(b-a) = 1 \quad \text{bundan}$$

$$\rho = \frac{1}{b-a}; \qquad dW = \frac{1}{b-a} dx$$

Ma’lumki, $\overline{x^n} = \int x^n W(x) dx$ ga teng. Shuning uchun

$$x = \int_a^b \frac{1}{b-a} x \, dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_a^b = \frac{1}{b-a} \cdot \frac{b^3-a^3}{3} = \frac{a^2+ab+b^2}{3}$$

7. $dW=\rho dx$ ($\rho=$const, $a \le x \le b$) ehtimoliyati uchun $\overline{(\Delta x)^2}$ hisoblansin.

Ye ch i sh: $(\Delta x)^2 = \int_a^b (x-\bar{x})^2 \rho \, dx = \overline{x^2} - \bar{x}^2$

$$\overline{x^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}; \qquad \overline{x}^2 = \frac{(b+a)^2}{4}$$

U holda:

$$\overline{(\Delta x)^2} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{b^2 + 2ab + a^2}{4} = \frac{1}{12}(4a^2 + 4ab + 4b^2 -$$

$$- 3b^2 - 6ab - 3a^2 = \frac{1}{12}\left(a^2 - 2ab + b^2\right)$$

Demak, $\overline{(\Delta x)^2} = \frac{(a-b)^2}{12}$

8. Tinch holat massasi m_0 bo‘lgan V-hajmda harakatlanayotgan ε- energiyali relyativ zarra uchun Γ- konfiguratsiyali hajm hisoblansin.

Javob:

$$\Gamma(\varepsilon) = \frac{4}{3}\pi V\left(\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m_0^2 c^2\right)^{3/2}$$

(c – yorug‘likning vakuumdagi tezligi)

9. Gazni tashkil etuvchi zarra ε - energiyasi p – impuls bilan ko‘rinishdagi $\varepsilon = cp$ munosabatga ega bo‘lsin. Bunday zarra uchun energiyaning $\varepsilon \div \varepsilon + d\varepsilon$ intervaliga to‘g‘ri keluvchi $dg(\varepsilon)$-mikroholatlar soni topilsin

Javob:

$$dg(\varepsilon) = \frac{4\pi}{c^s \cdot h^s} \cdot V^{3/2} \cdot \varepsilon^{s-1} d\varepsilon$$

(s - erkinlik darajasining soni; h - Plank doimiysi; V - gaz hajmi)

2-bob. STATISTIK TAQSIMOT

2.1-§. Mikrokanonik taqsimot

Makrotizimlar muvozanatli holati statistik nazariyasi asosini Gibbsning statistik taqsimoti tashkil etadi. Tizimning tashqi muhit bilan aloqasiga qarab statistik taqsimot turlicha (mikrokanonik, kanonik, katta kanonik taqsimotlar) ko‘rinishga ega bo‘lishi mumkin.

Statistik fizikaning asosiy vazifasi molekulalar tushunchasi asosida tegishli taqsimot funksiyasidan foydalanib, tizimga taalluqli bo‘lgan turlicha makroparametrlaming o‘rtacha qiymatini va shu tizimning kichik qismlariga tegishli bo‘lgan parametrlar fluktuatsiyasini hisoblab berishdir.

Agar tizim dastlab muvozanatsiz holatda bo‘lsa, F(q,p) fizik kattaligi, vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradi, chunki uning dinamik holati vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgaradi va konfiguratsiyali nuqta Γ-muhitda Gamiltonning (I.1.1) harakat tenglamalariga binoan konfiguratsiyali trayektoriya chizadi. Natijada tizim muvozanat holatiga keladi va F(q,p) o‘zining o‘rtacha qiymatiga intiladi. Uning vaqt bo‘yicha o‘rtacha qiymatini

$$\overline{F^{(t)}} = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T F\left[q(t), p(t)\right] dt \qquad (1.1)$$

deb olish mumkin. (1.1)-dan foydalanib, $\overline{F^{(t)}}$ ni hisoblab bo‘lmaydi, chunki undagi $p_i(t)$ va $q_i(t)$ - larning vaqtga bog‘liqligini bilish mumkin emas.

Statistik fizikada bu qiyinchilikdan qutilish uchun F-ning vaqt bo‘yicha o‘rtachasini hisoblash o‘rniga uning statistik ansambl bo‘yicha o‘rtachasi hisoblaniladi. (I.4.2) ga asosan $\rho(q,p)=N\cdot w(q,p)$ taqsimot funksiyasiga ega bo‘lgan, berilgan statistik ansambl uchun F(q,p) ning o‘rtacha qiymati:

$$\overline{F^{(s)}} = \int F(q,p)\cdot w(q,p)\, d\Gamma \qquad (1.2)$$

bo‘ladi. Bunda $w(q,p)=\rho(q,p)/N$ statistik ansambldagi tasodifiy tanlab olingan tizim koordinata va impulslari $d\Gamma=(dq)\cdot(dp)$ - hajm ichida bo‘lish ehtimoliyati. Ushbu taqsimot funksiyasi normallashtirilgan bo‘lib, (I.1.4) ga asosan:

$$\int w(q,p)d\Gamma = 1 \qquad (1.3)$$

Shunday qilib, statistik fizikada $\overline{F^{(t)}} = \overline{F^{(s)}}$ deb qabul qilingan va bunga ergodik gipoteza deyiladi. Statistik ansambl shunday tanlab olinishi lozimki, u bo‘yicha (1.2) asosida topilgan F(q,p) ning o‘rtacha qiymati tajriba natijasiga muvofiq kelsin.

Liuvill teoremasi makrotizimlar holatining vaqt bo‘yicha evolyutsiya (o‘zgarish) qonunlarini o‘rganishda o‘ta muhim rol o‘ynaydi va bu masalani batafsil o‘rganishga fizik kinetika bo‘limini bayon etganda qaytamiz. Statistik fizikada biz dastlab tizimning muvozanatli (shu jumladan, statsionar) holatlarini o‘rganamiz. Bunda Γ-muhitning har bir nuqtasida taqsimot funksiyasi doimiy ($\partial\rho/\partial t = 0$) bo‘ladi. Boshqacha qilib aytganda, trayektoriya bo‘ylab taqsimot funksiyasi o‘zgarmaydi.

Shunday qilib, *ρ(q,p)* – taqsimot funksiyasi harakat integrali bo‘lib xizmat qiladi. Ko‘pchilik fizik tizimlar uchun yettita bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan additiv harakat integrallari mavjud. Bular E-energiya, $\vec{p}$ - tizim impulsining uchta komponenti va $\vec{M}$ - impuls momentining uchta proyeksiyasi. Kursimiz davomida biz shunday sanoq tizimlarida ish olib boramizki, ularga nisbatan jism yaxlitligicha ilgarilanma harakatda bo‘lmasin, ya’ni $\vec{p} = 0$ va aylanmasin, ya’ni $\vec{M} = 0$. Bunday holda *ρ(q,p)* – taqsimot funksiyasi faqat energiya funksiyasi bo‘ladi, deb qarashimiz mumkin.

Juda ko‘p N - molekulalar sonidan tashkil topgan V - hajmda joylashgan klassik tizimni tekshiraylik. Tizimimizni izolyatsiyalangan yoki uning energiyasi harakat integrali, ya’ni doimiy saqlanadigan yopiq deb qaraymiz. Aslida laboratoriya sharoitida haqiqiy izolyatsiyalangan tizimni hosil qilib bo‘lmaydi. Lekin, agar tizimimiz tashqi muhit bilan o‘zaro ta’siri yetarli darajada kichik bo‘lsa va tizimimiz energiyasi taqriban doimiy saqlansa, bunday tizimni izolyatsiyalangan deb qarash mumkin. Liuvill teoremasiga asoslanib, izolyatsiyalangan tizim uchun

statistik taqsimot ko‘rinishini hosil qilish mumkin. Agar tizim izolyatsiyalangan (adiabatik) bo‘lib muvozanat holatida bo‘lsa, uning energiyasi doimiy bo‘ladi:

$$H(q, p) = E = const \tag{1.4}$$

Bu geometrik nuqtai nazardan konfiguratsiyali muhit uchun (2s-1) o‘lchamli giperyuza tenglamasini anglatadi (s-erkinlik darajasining soni). Vaqt o‘tishi bilan tizimdagi zarralarning q - koordinata va p - impulslari o‘zgaradi va konfiguratsiyali nuqta siljib konfiguratsiyali trayektoriya chizadi. (1.4)-ga asoslanib izolyatsiyalangan tizimda konfiguratsiyali trayektoriya butunlay shu doimiy energiyali giperyuzada yotishini qayd qilish mumkin. Bundan tashqari, yetarli darajada katta vaqt ichida bu konfiguratsiyali nuqta giperyuzaning barcha nuqtalaridan o‘tishi lozim.

Ma’lumki, Liuvill teoremasiga binoan konfiguratsiyali nuqtalar zichligi konfiguratsiyali trayektoriya bo‘yicha doimiy, binobarin, u doimiy energiyali giperyuzada ham doimiy bo‘lishi lozim. Real holatlarda izolyatsiyalangan tizim energiyasi

$$E \le H(q, p) \le E + dE$$

oraliqda bo‘ladi.

Shuning uchun Gibbs konfiguratsiyali nuqtalar zichligini

$$w(H) = \begin{cases} const, & \text{agar } E \le H(q,p) \le E + dE, \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } H(q,p) \text{ } \textit{energiyaning boshqa qiymatiga ega bo'lsa.} \end{cases} \tag{1.5}$$

deb oladi. Bitta tizim o‘rniga statistik ansamblni tekshirganimizda ham, agar u izolyatsiyalangan bo‘lsa, (1.5) bajariladi. (1.5) ni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

$$w(H) = D \cdot \delta(E - H(q,p)) \tag{1.6}$$

bu yerda: $D=const$ va u normallashtirish sharti orqali topiladi;
δ - Dirakning delta-funksiyasi.

(1.5) yoki unga ekvivalent bo‘lgan (1.6) ko‘rinishdagi mikrokanonik taqsimot konfiguratsiyali muhitning teng kattalikdagi hajmlarining teng ehtimolligi gipotezasiga asoslangan. Bu postulatga binoan, termodinamik muvozanat holatidagi makrotizim teng ehtimoliyat bilan kuzatilishi mumkin bo‘lgan ixtiyoriy holatda bo‘lishi mumkin.

(1.6) - ni (1.3)- ga tadbiq etib doimiy D- ni topamiz:

$$D\int\ldots\int\delta(E-H)\,dq_1\ldots dq_s dp_1\ldots dp_s=1 \qquad (1.7)$$

Bu integralni hisoblashdan oldin $E=const$ bo‘lgan giperyuza ichiga to‘g‘ri keladigan konfiguratsiyali hajmni aniqlaylik.

$$\Gamma(E)=\int\limits_{H\le E}\ldots\int dq_1\ldots dq_s dp_1\ldots dp_s$$

va tizim statistik vaznini

$$g(E)=\frac{d\Gamma(E)}{dE} \qquad (1.8)$$

deb qabul qilamiz.

(1.7) - ni dastlab barcha dq_i, dp_i - lar bo‘yicha cheksiz bir - biriga yaqin bo‘lgan

$$H(q,p)=E \quad \text{va} \quad H(q,p)=E+dE$$

giperyuzalar oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi muhit bo‘yicha integrallaymiz. Bu integral qiymati (1.8)- ga binoan $g(E)d(E)$ - hajmga teng bo‘ladi. Shunday qilib,

$$D\int\delta(E-H)g(E)dE=1$$

dE bo‘yicha integrallash vaqtida shuni e’tiborga olmoq lozimki, $\delta(E-H)$ nolga teng bo‘ladi, agar $H=E$, bo‘lsa integralda H - ning E - ga cheksiz yaqin elementlari muhimdir. U holda

$$D\,g(E)\int\delta(E-H)dE=1 \quad \text{va} \quad D=\frac{1}{g(E)}$$

Shunday qilib, (1.6) - mikrokanonik taqsimot

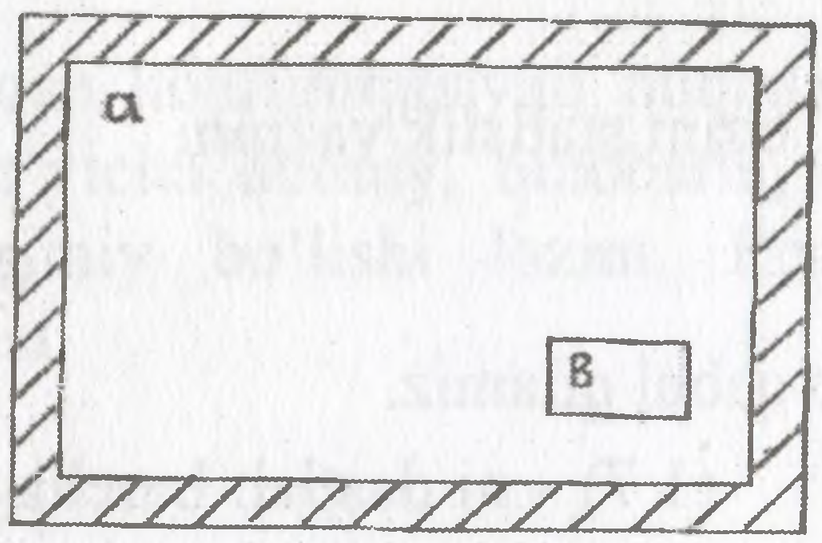
$$w(H) = \frac{1}{g(E)} \cdot \delta(E - H) \qquad (1.9)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

2.2-§. Kanonik taqsimot.

Mikrokanonik taqsimotdan foydalanishda bir qator matematik qiyinchiliklarga duch kelish mumkin. Bundan tashqari, tizimni adiabatik izolyatsiyalangan deb olish mikrokanonik taqsimotdan foydalanishni chegaralab qo‘yadi, chunki bunday real tizimlarni hosil qilish ancha mushkuldir. Umuman, izolyatsiyalangan tizimlar fizika uchun unchalik ahamiyatga ega emasdir.

Amalda izolyatsiyalanmagan, lekin o‘ziga nisbatan juda katta tizim (termostat) bilan muvozanat holatida bo‘lgan va uning ichida joylashgan tizimni tekshirish ancha qulaydir. Termostat bu adiabatik izolyatsiyalangan tizim demakdir. Termostat ichida joylashgan tizim uchun taqsimot funksiyasini topamiz (*3-chizma*). Muhimi shundan iboratki, bu holda taqsimot funksiyasi uchun energiya $E \sim E+dE$ oralig‘i bilan chegaralanmagan va u ixtiyoriy qiymatga ega bo‘lishi mumkin.



3-chizma. ***a*-termostat; *в*-termostat ichida joylashgan tekshiriluvchi tizim.**

Quyidagi shartlar bajariladigan hol uchun tekshiriluvchi tizimning (*3-chizma*dagi "*в*"ning) taqsimot funksiyasini keltirib chiqaramiz:

1. Butun yaxlit tizim adiabatik izolyatsiyalangan va uning uchun mikrokanonik taqsimot qo‘llaniladi.
2. Termostat energiyasi tekshiriluvchi tizim energiyasiga nisbatan juda katta.
3. Termostat va tekshiriluvchi tizimning o‘zaro ta’sir energiyasi tekshiriluvchi tizim energiyasiga nisbatan juda kichik.
4. Termostat va tekshiriluvchi tizim o‘zaro bir-biriga statistik bog‘liq bo‘lmagan tizimlar.

Tekshiriluvchi tizim, o‘z navbatida, makroskopik bo‘lmog‘i lozim. Shu holdagina bu tizimning xususiy energiyasiga nisbatan termostat bilan o‘zaro ta’sir energiyasini kichik deb hisoblab, uni hisobga olmaslik mumkin. Tekshiriluvchi tizimning Gamilton funksiyasi $H_1(q,p)$ va termostatning Gamilton funksiyasi esa $H_2(q,p)$ bo‘lsin. Ikkala tizim energiyalarining yig‘indisini doimiy deb hisoblaymiz.

Shunday qilib, butun izotermik tizimning to‘la energiyasini saqlanadi deb hisoblab, ikki tizim energiyalari yig‘indisi shaklida yozish mumkin:

$$const = H(q,p) = H_1(q,p) + H_2(q,p) \qquad (2.1)$$

Agar $w(H(q,p))$ taqsimot funksiyasi desak, (I.3.7) ehtimoliyatlarni ko‘paytirish teoremasiga asosan

$$w(H) = w(H_1 + H_2) = w_1(H_1) \cdot w_2(H_2) \qquad (2.2)$$

ifodani hosil qilamiz. Dastlab, bu ifodaning logarifmasini olamiz:

$$\ln w(H_1 + H_2) = \ln w_1(H_1) + \ln w_2(H_2) \qquad (2.3)$$

Hosil bo‘lgan so‘nggi ifodani differentsiallaymiz:

$$d\ln w(H_1 + H_2) = d\ln w_1(H_1) + d\ln w_2(H_2)$$

yoki

$$\left[\ln w(H_1 + H_2)\right]'(dH_1 + dH_2) = \left[\ln w_1(H_1)\right]' dH_1 + \left[\ln w_2(H_2)\right]' dH_2 \qquad (2.4)$$

dH_1 va dH_2 lar bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda nolga aylanishi mumkin $(dH_1 \to 0, dH_2 \to 0)$. Gamilton funksiyalarining bu xususiyatidan foydalanib, (2.4) dan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left[\ln w(H_1 + H_2)\right]' = \left[\ln w_1(H_1)\right]' = \left[\ln w_2(H_2)\right]' = \alpha = const \qquad (2.5)$$

Ma’lumki, turlicha argumentli funksiyalarning birinchi tartibli hosilalari doimiy qiymatga ega bo‘lsalar ular o‘zaro bir-biriga teng bo‘ladi. Shuning uchun termostatda joylashgan tekshiriluvchi tizimga

tegishli bo‘lgan $[\ln w_1(H_1)]'$ ifodani (2.5) - ni hisobga olgan holda integrallab

$$[\ln w_1(H_1)] = \ln w_1(q,p) = \alpha H_1 + \beta \qquad (2.6)$$

ifodasini hosil qilamiz. Bu yerda β- integrallash doimiysi.

Bizni faqat *3-chizma*dagi *в*-tizim, ya’ni termostatda joylashgan tizim qiziqtirganligi tufayli quyida Gamilton funksiyasi va ehtimoliyat zichligini indekssiz yozamiz.(2.6) dan

$$w(q,p)=exp(\alpha H(q,p)+\beta) \qquad (2.7)$$

Bu yerda $\alpha<0$ bo‘lmog‘i lozim, aks holda (1.3) normallashtirish sharti bajarilmaydi va integral tarqaluvchi bo‘ladi. Odatda α va β doimiyliklar o‘rniga quyidagi ko‘rinishdagi doimiyliklarni qabul qiladilar:

$$\alpha = -\frac{1}{\theta}; \quad \beta = \frac{\mathcal{F}}{\theta} \qquad (2.8)$$

Bu yangi θ va $\mathcal{F}$ doimiyliklar energiya o‘lchov birligiga ega. θ-statistik temperatura va $\mathcal{F}$- ozod energiya deyiladi. (2.8) - ni hisobga olgan holda (2.7) – ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$w(q,p) = e^{\frac{\mathcal{F}-H(q,p)}{\theta}} \qquad (2.9)$$

(2.9) - ko‘rinishdagi statistik taqsimotga kanonik taqsimot deyiladi. Bu ham mikrokanonik taqsimot kabi statistik ansamblning ayrim tizimlari koordinata va impulslari $d\Gamma$ elementi ichida bo‘lish ehtimoliyatini beradi. Biroq mikrokanonik taqsimotda tizim energiyasi belgilangan $H(q,p)=E=const$ qiymatga, (2.9) kanonik taqsimotda esa energiya ixtiyoriy qiymatga ega bo‘lishi mumkin. So‘nggi hol matematik jihatdan ancha qulaylik tug‘diradi, lekin ikkala taqsimot ham $N^{-1/2}$ gacha aniqlik bilan bir xil natijaga olib keladi. (*N*-tizimdagi zarralar soni). Normallashtirish shartiga asosan

$$\int w(q,p)d\Gamma = e^{\frac{\mathcal{F}}{\theta}} \cdot \int e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}} (dq)(dp) = 1$$

Bu ifoda tizimning mumkin bo‘lgan barcha holatlaridan birortasida bo‘lish ehtimoliyati demakdir. Bundan:

$$e^{-\frac{\mathcal{F}}{\theta}} = \int e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}} (dq)(dp) \equiv Z \qquad (2.10)$$

Bu yerda Z - statistik integral yoki holat integrali deb ataladi va statistik fizikada muhim rol o‘ynaydi. Holat integrali integral tizimning barcha mikroholatlari bo‘yicha olinganligi tufayli uning ichki holatini xarakterlaydi.(2.10)-ga asosan ozod energiya va holat integrali orasida quyidagicha bog‘lanish mavjud:

$$\mathcal{F} = -\theta \ln Z \qquad (2.11)$$

(2.10) dan foydalanib, (2.9) kanonik taqsimotni

$$w(q,p) = \frac{1}{Z} e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}} \qquad (2.12)$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin.

Agar tizim N ta aynan bir xil zarralardan tashkil topgan bo‘lsa, zarralarning turlicha o‘rni almashtirishlari tizimni yangi mikroholatga olib kelmaydi. Shuning uchun aynan bir xil zarralardan tashkil topgan tizimni ifodalashda ularning turlicha o‘rin almashtirishga tegishli bo‘lgan barcha konfiguratsiyali nuqtalaridan holi bo‘lmog‘imiz lozim. N ta zarradan tashkil topgan tizim uchun $N!$ (!-belgisi faktorial demakdir) marta bunday o‘rin almashtirish mumkin bo‘lganligi tufayli aynan bir xil bo‘lgan zarralar tizimining konfiguratsiyali muhitini $N!$ marta kamaytirish mumkin.

Bu aytganlarimiz to‘g‘ridan-to‘g‘ri tizim ichki holatini xarakterlovchi Z holat integraliga tegishlidir. Bundan tashqari, Z holat integrali statistik fizikada o‘lchovsiz holda keng qo‘llaniladi. (2.10) - ni o‘lchovsiz qilmoq uchun $d\Gamma=(dq)(dp)$ ni h^s ga bo‘lamiz. Bu yerda h ta’sir (energiya ko‘paytirilgan vaqt) o‘lchov birligiga ega bo‘lgan doimiy kattalik, s esa erkinlik darajasining soni. Shunday qilib, (2.10) - o‘rniga statistik integralni

$$Z = \frac{1}{N!h^s}\int e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}}(dq)(dp) \qquad (2.13)$$

ko‘rinishda ifodalaymiz. U holda, mos ravishda, kanonik taqsimotni (2.12) o‘rniga

$$w(q,p) = \frac{1}{N!h^s}\cdot\frac{1}{Z}\, e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}}(dq)(dp) \qquad (2.14)$$

ko‘rinishda ifodalash lozimdir. (2.13) va (2.14) formulalaridagi $(N!h^S)^{-1}$ ko‘paytma klassik va kvant statistik fizika natijalarini muvofiqlashtirish uchun kiritildi.

2.3-§. Kanonik taqsimotning xususiyatlari

Kanonik taqsimotda ishtirok etuvchi θ statistik temperaturaning xususiyatlarini ko‘rib chiqaylik. Bu xususiyatlar uning fizik ma’nosini anglashga imkoniyat beradi.

Faraz qilaylik, termostat ichida H_1 va H_2 Gamilton funksiyalariga θ_1 va θ_2 statistik temperaturalariga ega bo‘lgan ikkita tizim o‘zaro statistik muvozanat holatda bo‘lsin. Ularni bitta tizim deb qarash mumkin va o‘zaro ta’sir energiyasi kichik bo‘lganligi uchun

$$H_1 + H_2 = const \qquad (3.1)$$

bo‘ladi. Bunday birlashtirilgan ikkita tizimning kanonik taqsimoti alohida tizimlar kanonik taqsimotlari ko‘paytmasiga teng, ya’ni:

$$w(q,p) = w_1(q,p)\cdot w_2(q,p) = e^{\frac{\mathcal{F}_1 - H_1}{\theta_1} + \frac{\mathcal{F}_2 - H_2}{\theta_2}} =$$

$$= e^{\frac{\mathcal{F}_1}{\theta_1} + \frac{\mathcal{F}_2}{\theta_2}} \cdot e^{-\left(\frac{H_1}{\theta_1} + \frac{H_2}{\theta_2}\right)} = e^{\frac{\mathcal{F} - H}{\theta}} \qquad (3.2)$$

Ko‘rinib turibdiki, tizim muvozanat holatda bo‘lganda (3.2) bajarilishi uchun

$$H = H_1 + H_2; \qquad \frac{H}{\theta} = \frac{H_1}{\theta_1} + \frac{H_2}{\theta_2} \tag{3.3}$$

bo'lmog'i lozim. Bundan

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta \tag{3.4}$$

degan xulosa kelib chiqadi. (3.4) dan ikki tizim muvozanat holatida bo'lganda uning statistik temperaturalari o'zaro teng bo'ladi degan xulosa kelib chiqadi.

Ikkinchidan, (2.8) - ga binoan θ statistik temperatura musbat kattalikdir. Darhaqiqat, tizim energiyasi oshgan sari tizim holatining ehtimoliyati kamayadi va shundagina Z holat integrali yaqinlashuvchi bo'ladi.

Shunday qilib, θ absolyut temperatura ega bo'lgan asosiy xususiyatlarga ega ekan va uni T absolyut temperaturaning statistik analogi deyish mumkin. Keyinchalik

$$\theta = k_0 T \tag{3.5}$$

ekanligini ko'ramiz (k_0 - Boltsman doimiysi).

Kanonik taqsimot (2.9) - dagi ikkinchi parametr $\mathcal{F}$ - ning termodinamik funksiyalardan biri ozod energiya xususiyatlariga ega ekanligini ham ko'rsatish mumkin. Ozod energiyaning fizik ma'nosi shundan iboratki, tizimda izotermik jarayon bo'lgan vaqtda bajariladigan ish tizim ozod energiyalarining farqi bilan aniqlanadi. $\mathcal{F}$- ning ozod energiya xususiyatlaridan biri bo'lgan ekstensiv kattalik ekanligini (3.2) dan ko'rish mumkin. Masalan, tekshiriluvchi tizim ikkita tizimdan iborat bo'lsa va ularning o'zaro ta'sirini inobatga olmaslik mumkin bo'lsa, Z-holat integrali ikkita ko'paytiruvchiga ajraladi. Bu $\mathcal{F}$-ozod energiya ekanligining dalilidir. Statistik fizikadagi barcha ma'lumotlarni

$$Z = \int e^{-\frac{H(q,p)}{k_0 T}} d\Gamma \tag{3.6}$$

statistik integralni hisoblashdan so‘nggina hosil qilish mumkin, chunki u orqali barcha makroparametrlarni hisoblash imkoniyati tug‘iladi.

Ma’lumki, ozod energiya statistik integral orqali

$$\mathcal{F} = -\theta \ln Z \qquad (3.7)$$

bog‘lanishga ega.

Termodinamikadan ma’lumki, tizim entropiyasi va bosimining ozod energiya orqali ifodasi

$$S = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_V; \qquad p = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V}\right)_T$$

ko‘rinishga ega. Agar (3.5) va (3.7) - larni hisobga olsak, bu parametrlar statistik integral orqali quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$S = k_0\left[\ln Z + T\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right]; \qquad (3.8)$$

$$p = k_0 T\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T \qquad (3.9)$$

Tizim energiyasining o‘rtacha qiymati (1.2) va (2.12) larga asosan:

$$\overline{E} = \int H(q,p)\cdot \mathrm{w}(q.p)\, d\Gamma = \frac{1}{Z}\int H(q,p)\, e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}}\, d\Gamma = \theta^2\frac{\partial \ln Z}{\partial \theta} = k_0 T^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} \qquad (3.10)$$

bo‘ladi. Shunday qilib, (3.7) - (3.10) formulalaridan ko‘rinib turibdiki, tekshiriluvchi tizimning holat integrali Z ma’lum bo‘lsa, u orqali shu tizimni to‘la o‘rganish imkoniyatiga ega bo‘lar ekanmiz.

2.4-§. Katta kanonik taqsimot

Mikrokanonik va kanonik taqsimotlarni hosil qilganimizda fizik jihatdan bir jinsli tizimlarni tekshirgan edik, undagi zarralar turi bir xil, uning soni N esa doimiy deb hisoblangan edi. Ko‘pchilik hollarda murakkab tizimlarni tekshirishga to‘g‘ri keladiki, uning miqdori

(zarralar soni) ximik reaksiyalar, erish hodisasi, bug‘lanish, kristallanish va shu kabilar natijasida o‘zgarib turadi - saqlanmaydi.

Endigi vazifamiz zarralar soni o‘zgarib turuvchi bir jinsli bo‘lmagan tizimlarga tegishli bo‘lgan makroparametrlar o‘rtacha qiymatini hisoblash matematik ifodasini berishdan iboratdir.

Kanonik taqsimotni keltirib chiqarganimizda tizim termostat bilan energiya almashishi mumkin edi. Endi bir vaqtning o‘zida ham energiyasi va ham zarralar soni o‘zgaruvchi tizimlarni tekshiraylik. Zarralar soni o‘zgarib turuvchi tizimlar ochiq tizimlar deyiladi. Bunday tizim uchun hosil qilingan statistik taqsimotga katta kanonik taqsimot deyiladi. Oddiylik uchun zarralar turi bir xil bo‘lsin. Mikrokanonik taqsimotdan foydalanib, energiyasi belgilanmagan tizim uchun kanonik taqsimotni hosil qilganimiz kabi, kanonik taqsimotdan foydalanib, zarralar soni o‘zgaruvchi tizim uchun katta kanonik taqsimotni hosil qilish mumkin (isbotsiz keltiramiz). Bu taqsimot q_i va p_i lar bilan bir qatorda N ta zarralar soniga ham bog‘liq bo‘ladi va quyidagi ko‘rinishga egadir:

$$w(N,q,p)=\frac{1}{N!h^s}\cdot e^{\frac{\mathcal{F}_N-H_N(q,p)}{\theta}} \tag{4.1}$$

Bu yerda $\mathcal{F}_N$ va H_N lar N ta zarrali tizim uchun, mos ravishda, ozod energiya va Gamilton funksiyasi.

Termodinamikadan ma’lumki

$$\mathcal{F}_N=\mu\cdot N+\Omega \tag{4.2}$$

bu yerda: μ - ximik potensial,

Ω - omega potensial yoki termodinamik potensial.

Omega potensial (4.2) – ni hisobga olgan holda, (4.1) - ni normallashtirish sharti orqali aniqlanadi:

$$\Omega=-\theta\ln\sum_{N=0}^{\infty}\frac{1}{N!h^s}e^{\frac{\mu\cdot N}{\theta}}\int e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}}d\Gamma \tag{4.3}$$

Yuqoridagi formulalarni ko‘p komponentli tizimlarga ham umumlashtirish mumkin. Darhaqiqat, tizim ochiq bo‘lib, undagi zarralar

turi bir necha xil bo‘lgan (ko‘p komponentli) hol uchun ham Gibbsning katta kanonik taqsimoti shaklan (4.1) ko‘rinishga ega bo‘ladi. Lekin undagi $\mathcal{F}_N$ - ozod energiya endi (4.2) ko‘rinishi o‘rniga

$$\mathcal{F}_N = \sum_i \mu_i N_i + \Omega \tag{4.4}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Termodinamik tizim termostat bilan nafaqat energiya, balki molekulalar bilan ham o‘zaro almashinuv bo‘lgan hol uchun, ya’ni ochiq tizim uchun makroparametrlarning o‘rtacha qiymatini hisoblash quyidagi formula orqali bo‘ladi:

$$\overline{F} = \sum_{N_1} \cdots \sum_{N_i} \int F(q,p) W(q,p,N_1,\ldots,N_i)(dq)(dp) \tag{4.5}$$

Shunday qilib, (4.5) - dan ko‘rinib turibdiki, ochiq tizimga tegishli makroparametr o‘rtachasini hisoblashda barcha *dq* va *dp* lar bo‘yicha integrallashdan tashqari *i* - komponentli ochiq tizimdagi har bir komponent molekulalari soni bo‘yicha ham yig‘indi olish lozim. Bundan tashqari, termostat yetarli darajada katta deb faraz qilinganligi tufayli, barcha N_i - lar bo‘yicha yig‘indilar olishning yuqori chegaralarini cheksiz deb qabul qilish mumkin. Bir komponentli tizim uchun yozilgan (4.3) - omega potensial ifodasida ham yig‘indi olishda shu nazarda tutilgan.

2.5-§. Mikrokanonik taqsimot orqali katta kanonik taqsimotni hosil qilish

Klassik tizimlar uchun, ma’lumki, Gibbsning statistik uslubi asos qilib olingan va u orqali termodinamik munosabatlar keltirib chiqariladi. Shuning uchun statistik fizikada Gibbs taqsimotlari juda muhim ahamiyatga ega bo‘lganligini inobatga olib, katta kanonik taqsimotning yana bir isbotini beraylik. Buning uchun mikrokanonik taqsimotdan foydalanamiz. Yuqorida aytganimizdek, tizim termostat bilan energiya va zarralar soni bilan o‘zaro almashinuvga ega bo‘lsin.

Tizim bilan termostat birgalikda yopiq tizim bo‘lgani uchun, har qanday jarayon vaqtida ham unda har bir komponentga to‘g‘ri keluvchi zarralar soni saqlanadi.

$$N_1 + N_1^{'} = \nu_1 = const,$$
$$N_2 + N_2^{'} = \nu_2 = const,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (5.1)$$
$$N_i + N_i^{'} = \nu_i = const,$$

Bu yerda:

$N_1, N_2, \ldots\ldots, N_i$ - ochiq tizimdagi birinchi, ikkinchi va shu kabi i -nchi komponent molekulalari soni;

$N_1^{'}, N_2^{'}, \ldots\ldots N_i^{'}$ - termostatdagi shu xildagi molekulalar soni.

Biz tekshirayotgan tizim bilan termostatni katta bir izolyatsiyalangan tizim deb qaraymiz, va bu tizim uchun mikrokanonik taqsimot

$$W = \frac{\delta(H + H' - E)}{g(E)} \qquad (5.2)$$

bo‘ladi (ushbu banddagi shtrix belgilari termostatga tegishli).

Termostat va tizim konfiguratsiyali hajmining $d\Gamma'$ va $d\Gamma$ elementlari bo‘yicha F - kattaligini integrallash bir - biriga bog‘liq bo‘lgan holda bajariladi, chunki tizimda uzluksiz ravishda termostat bilan zarralar almashinuvi bo‘lib turadi. Shuning uchun

$$\overline{F} = \sum_{N_1, N_2, \ldots N_i = 0}^{\nu_1} \cdots \sum^{\nu_i} \int d\Gamma_N \int \frac{\delta(H + H' - E)}{g(E)} F(q \ldots p) d\Gamma_{N'}. \qquad (5.3)$$

Bu yerda $d\Gamma_N, d\Gamma_{N'}$ - lar, mos ravishda, tizim hamda termostat konfiguratsiyali elementar hajmi va ular tizimdagi molekulalar soni $N_1, N_2, \ldots\ldots, N_i$, termostatda esa - $N_1^{'}, \ldots, N_i$, ya’ni $\nu_1 - N_1, \ldots, \nu_i - N_i$ bo‘lgan holatga to‘g‘ri keladi. Har bir yig‘indidagi termostat o‘zgaruvchilari bo‘yicha integrallash amalini bajaramiz. Tizimning taqsimot funksiyasini esa quyidagi ko‘rinishda aniqlab olamiz:

$$w_1(H, N_1) = \int \frac{\delta(H + H' - E)}{g(E)} d\Gamma_{N'} =$$

$$= \frac{g'(E-H, \nu_1 - N_1, \nu_2 - N_2, ...)}{g(E)} \qquad (5.4)$$

bu yerda g' - ifodasi termostatning H' va $H' + dH'$ - lar oralig'idagi konfiguratsiyali hajmning dH' - ga nisbatini anglatadi. Ko'rinib turibdiki, g' - kattaligi termostat $E - H_1$ energiyasiga va undagi $(\nu_i - N_i)$ molekulalar soniga bog'liq. U holda ochiq tizim makroparametrining o'rtacha qiymatni topish (5.3)-formulasi (4.5) ko'rinishga ega bo'ladi.

Endi ochiq tizimga tegishli bo'lgan w_1 taqsimot funksiyasining bevosita H - ga va barcha $N_1, N_2, ..., N_i$ - larga bog'liqligini aniqlaymiz. Agar tizim termostatga nisbatan ancha kichik bo'lsa, uning energiyasi va molekulalari soni termostat energiyasi va molekulalari soniga nisbatan ancha kam bo'ladi, ya'ni $H \langle\langle H'$, $N_1 \langle\langle N_1'$, ..., $N_i \langle\langle N_i'$. Termostat statistik vazni

$$\ln g'(E - H, \nu_1 - N_1, ..., \nu_i - N_i)$$

ifodasini

$$\exp\left[\ln g'(E - H, \nu_1 - N_1, ..., \nu_i - N_i)\right]$$

logarifm ko'rinishida yozish mumkin. Yuqoridagi shartlar bajarilgan hol uchun ushbu statistik vaznni $H, N_1, ..., N_i$ darajalari bo'yicha qatorga yoyamiz va qatorning chiziqli hadlari bilan chegaralanamiz

$$\ln g'(E - H, \nu_1 - N_1, ...\nu_i - N_i) \cong \ln g'(E, \nu_1, ..., \nu_i) -$$

$$- H \frac{d \ln g'(E)}{dE} - \sum_{k=1}^{i} N_k \frac{d \ln g'(E)}{d\nu_k} + ... \qquad (5.5)$$

Quyidagi ko'rinishdagi belgilashlar kiritamiz:

$$\frac{1}{\theta} = \frac{d \ln g'(E)}{dE} \quad \text{va} \quad \frac{\mu_k}{\theta} = -\frac{d \ln g'(E)}{d\nu_k} \qquad (5.6)$$

Bu yerda μ_k - lar ximik potensiallar deb ataladi. Har bir komponentga to'g'ri keluvchi molekulalar o'z μ_i - kimyoviy potensialiga ega.

So‘nggi (5.5) va (5.6) ifodalarini (5.4) - ga tadbiq etsak,

$$w_1 = C \cdot e^{-\frac{H}{\theta}+\frac{1}{\theta}\sum_{k=1}^{i}\mu_k N_k} \tag{5.7}$$

hosil bo‘ladi. Konfiguratsiyali muhitda k - komponentli w_1 - ehtimoliyat zichligi bilan taqsimlangan (5.7) formulasiga Gibbsning katta kanonik taqsimoti deyiladi. Ushbu formuladagi C - konstantani (5.7)-ni normallashtirish sharti orqali topish mumkin va bu to‘g‘rida 2.5-§ da gap yuritilgan edi.

Masalalar

1. Klassik garmonik otsillyator uchun w(x)- koordinatalar va w(p) impulslar bo‘yicha taqsimot funksiyasi topilsin.

Ye ch i sh:

Koordinata va impulslar bo‘yicha mikrokanonik taqsimot

$$w(x,p) = \frac{1}{g(E)}\delta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2 x^2}{2}-E\right)$$

normallashtirish shartidan:

$$\int w(x,p)dxdp = 1$$

$$g(E) = \int \delta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2 x^2}{2}-E\right)dxdp = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$w(x) = \int w(x,p)dp = \frac{\omega}{2\pi}\int \delta\left(\frac{p^2}{2m}+\frac{m\omega^2 x^2}{2}-E\right)dp =$$

$$= \frac{\omega\sqrt{m}}{\pi\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\left(E-\frac{m\omega^2 x^2}{2}\right)^{1/2}}$$

Shuningdek,

$$w(p)=\int w(x,p)dx=\frac{1}{\pi\sqrt{2m}}\cdot\frac{1}{\left(E-\frac{p^2}{2m}\right)^{1/2}}$$

2. N - ta zarradan tashkil topgan ideal gaz V - hajmda joylashgan va E - energiyaga ega. Gaz entropiyasi hisoblansin. Bir zarra uchun energiya bo'yicha taqsimot funksiyasi topilsin. $E\to\infty$; $N\to\infty$; $E/N\to\bar{\varepsilon}$ chegara hollari ham qaralsin.

Ye ch i sh:

$$w(\vec{r}_i;\vec{p}_i)=g_N^{-1}\delta\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m_i}-E\right)$$

Normallashtirish shartidan

$$g_N(E)=\frac{V^N\pi^{3N/2}(2m)^{3N/2}E^{\frac{3N}{2}-1}}{\Gamma(3N/2)}$$

$$w(E_1)=\frac{\Gamma(3N/2)}{\Gamma(3(N-1)/2)\cdot\Gamma(3/2)}\cdot\frac{E_1^{1/2}(E-E_1)^{\frac{3(N-1)}{2}-1}}{E^{3N/2-1}}$$

Chegaraviy $N\to\infty$; $E=\bar{\varepsilon}\cdot N$ holi uchun $\frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n)}=n^{\alpha}$ asimitotasidan foydalanamiz, ya'ni:

$$\frac{(E-E_1)^{\frac{3N-3}{2}-1}}{E^{3N/2-1}}=\frac{\left(1-\frac{E_1}{NE}\right)^{\frac{3(N-1)}{2}-1}}{N^{3/2}\bar{E}^{3/2}}\approx\frac{e^{-\frac{3E_1}{2\bar{E}}}}{N^{3/2}\bar{E}^{3/2}}$$

Shuning uchun

$$w(E_1)=\frac{E_1^{1/2}e^{-E_1/\theta}}{\Gamma\left(3/2\right)\theta^{(3/2)}}\qquad(\theta=\frac{2}{3}\bar{E})$$

Barcha gazning entropiyasi

$$S=\ln g(E)=\ln\frac{g_N(E)}{N!(2\pi\hbar)^{3N}}$$

$N\to\infty$; $E=\bar{\varepsilon}\cdot N$ - da:

$$S = N \ln \frac{eV(2\pi\, m\theta)^{3/2}}{N(2\pi\,\hbar)^3} + \frac{3}{2}N.$$

3. Termostat vazifasini quyidagilar bajargan hol uchun Gibbsning kanonik taqsimoti keltirib chiqarilsin:

a) Dispersiya qonuni $\varepsilon = \frac{p^2}{2m}$ bo‘lgan ideal gaz;

b) Bir xil garmonik otsillyatorlar tizimi.

Ye ch i sh:

Izlanuvchi ehtimoliyat

$$w_n = \frac{g_T(E - E_n)}{\sum\limits_n g_T(E - E_n)}$$ - formulasi orqali aniqlanadi.

Bu yerda: $g_T(E_T)$ - termostat holatlar sonining zichligi.

a) $$g_T(E - E_n) = \frac{V^N (2\pi\, m)^{3N/2} (E - E_n)^{\frac{3N}{2}-1}}{N!(2\pi\,\hbar)^{3N}\, \Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}$$

Shuning uchun:

$$w_n = \frac{(E - E_n)^{\frac{3N}{2}-1}}{\sum\limits_n (E - E_n)^{\frac{3N}{2}-1}}$$

$E = \frac{2}{3}\overline{\varepsilon}$ - desak, u holda $N \to \infty$ bo‘lganda

$$w_n = \frac{\left(1 - \frac{E_n}{n_{\overline{E}}}\right)^{\frac{3N}{2}-1}}{\sum\limits_n \left(1 - \frac{E_n}{n_{\overline{E}}}\right)^{\frac{3N}{2}-1}} \to \frac{e^{-\frac{3}{2}\frac{E_n}{\overline{\varepsilon}}}}{\sum\limits_n e^{-\frac{3}{2}\frac{E_n}{\overline{E}}}}$$

$\theta = \frac{2}{3}\overline{E}$ - ni aniqlab $w_n = \frac{1}{z} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\theta}}$ ifodasini hosil qilamiz.

b) $g_T(E-E_n)=\dfrac{(E-E_n)^{N-1}}{(\hbar\omega)^N(N-1)!}$; $\quad w_n=\dfrac{(E-E_n)^{N-1}}{\sum\limits_n(E-E_n)^{N-1}}$

$N\to\infty$ va $E\to\overline{E}\cdot N$ bo‘lganda

$$w_n=\frac{e^{-\frac{\varepsilon_n}{\theta}}}{\sum\limits_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{\theta}}};\qquad (\theta=\overline{E})$$

4. Dispersiya qonuni quyidagi ko‘rinishlarda bo‘lgan hollar uchun muvozanatli holatda bo‘lgan zarraning energiya bo‘yicha taqsimot funksiyasi topilsin:

a) $E=\dfrac{p^2}{2m}$;

b) $E=c\cdot p$.

Ye ch i sh:

$$w(E)=\int w(q,p)\delta(H-E)\,dqdp=A\int e^{-\frac{H(q,p)}{k_0T}}\delta(H-E)\,dqdp=$$

$$=Ae^{-\frac{\varepsilon}{k_0T}}g(E);\qquad A^{-1}=\int e^{\frac{H(q,p)}{k_0T}}\,dqdp.$$

a) $$A^{-1}=\int e^{-p^2/2mk_0T}\,d\vec{p}dV=V(2\pi\,mk_0T)^{3/2}$$

$$g(E)=2\pi\,V(2m)^{3/2}E^{1/2}$$

$$w(E)=\frac{2E^{1/2}}{\pi^{1/2}(k_0T)^{3/2}}e^{-\frac{\varepsilon}{k_0T}};\qquad \overline{E}=\int_0^\infty E\,w(E)dE=\frac{3}{2}k_0T$$

b) $A^{-1}=\int e^{-cp/k_0T}\,d\vec{p}dV=8\pi V\left(\dfrac{k_0T}{c}\right)^3$, $\qquad w(E)=\dfrac{4\pi VE^2}{c^3}$

$$w(E)=\frac{E^2}{2(k_0T)^3}e^{-E/k_0T};\qquad \overline{E}=3k_0T$$

3-bob. TERMODINAMIKANING STATISTIK ASOSI

3.1-§. Tashqi parametrlar va ish

Biz shu paytgacha tizimni tashqi muhit o‘zgarmas bo‘lgan sharoitda tekshirdik. Bu tashqi maydonlar, masalan, og‘irlik maydoni yo‘q yoki doimiy, shuningdek, tizim hajmi doimiy deb hisobladik. Amalda esa tizim joylashgan muhitda tashqi sharoitlar o‘zgaruvchan bo‘lgan hollar ko‘p uchraydi. Porshen ostida gazning qisilishi, berilgan jismning magnit maydoniga yaqinlashtirilishi va shu kabilar bunga misol bo‘la oladi. Shuning bilan birga tizim ma’lum bir kuchlar orqali atrof muhitdagi jismlarga ta’sir qiladi va uning ustidan ish bajaradi (masalan, bug‘ mashinasida bug‘ kengaya turib, porshen ustidan ish bajaradi). Shu kabi ishlar qanday parametrlarga bog‘liq ekanligi bizni qiziqtirsin. Shuning uchun biz izolyatsiyalangan tizimni emas, balki tashqi muhit bilan o‘zaro ta’sirda bo‘lgan tizim bilan shug‘ullanamiz.

Faraz qilaylik a_1, a_2, ...,a_k...,a_m tizimga nisbatan tashqi makroskopik jismlar koordinatalari bo‘lsin. Bular porshen koordinatalari, gravitatsion ta’sirga ega bo‘lgan massa koordinatlari va hokazolar bo‘lishi mumkin. U holda tizim Gamilton funksiyasi q_i, p_i- umumlashtirilgan koordinata va impulslardan tashqari a_1, a_2,..., a_m - tashqi muhit koordinatalariga ham bog‘liq bo‘ladi va ularni tashqi parametrlar deb ataymiz. Tashqi jismlarni o‘zaro ta’sirga ega emas deb hisoblab, tizim va tashqi jismlar umumiy Gamilton funksiyasini

$$\sum_{k=1}^{m} m_k \frac{\dot{a}_k^2}{2} + H(...q_i,...p_i...a_1....a_m)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Yoki tashqi jismlar uchun $b_k = m_k \dot{a}_k$ ko‘rinishidagi impulslarni qabul qilsak, umumiy Gamilton funksiya

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{b_k^2}{2m_k} + H(...q_i....p_i...a_1...a_m) \qquad (1.1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerda tizim kinetik energiyasi va tizim hamda tashqi jismlarning potensial energiyasi bitta $H(...q_i...p_i...a_k...)$ ifoda bilan belgilandi.

Tashqi jismlar harakati uchun kanonik tenglamalar tuzaylik:

$$\dot{a}_k = \frac{\dot{b}_k}{m_k}; \qquad \dot{b}_k = -\frac{\partial H}{\partial a_k} = m_k \ddot{a}_k \tag{1.2}$$

Demak, k - nchi tashqi jismga tizim tomonidan ta’sir etuvchi R_k - umumlashtirilgan kuch

$$R_k = -\frac{\partial H}{\partial a_k} \tag{1.3}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. U holda tizimning tashqi jismlar ustidan bajaradigan ishi esa quyidagicha bo‘ladi:

$$dA = \sum_{k=1}^{m}\left(-\frac{\partial H}{\partial a_k}\right) da_k = \sum_{k=1}^{m} R_k da_k \tag{1.4}$$

Ushbu ifoda nafaqat a_k - larga , balki barcha $q_i...p_i$ - larga ham, ya’ni tizimning konfiguratsiyali nuqtasi egallagan o‘rniga ham bog‘liq. Tizimning barcha koordinata va impulslari vaqtga bog‘liq ravishda tez o‘zgaradi. O‘z-o‘zidan ayonki, makroskopik jismlar yoki asboblar bunday kuchlarning $\overline{R_k^{(t)}}$ vaqt bo‘yicha o‘rtachasinigina seza oladi. Bularni statistik ansambl bo‘yicha o‘rtachaga almashtirib quyidagini hosil qilamiz:

$$\overline{R_k^{(t)}} = \overline{R_k(q,p)} = \int(-\frac{\partial H}{\partial a_k}) w(q,p,a)\, d\Gamma = e^{\mathcal{F}/\theta}\int(-\frac{\partial H}{\partial a_k})\, e^{-H/\theta} d\Gamma =$$

$$= e^{\mathcal{F}/\theta}\theta\frac{\partial}{\partial a_k}\int e^{-H/\theta} d\Gamma = e^{\mathcal{F}/\theta}\theta\frac{\partial}{\partial a_k} e^{-\mathcal{F}/\theta} = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_k} \tag{1.5}$$

E'tirof etish lozimki $\overline{\frac{\partial H}{\partial a_k}} \neq \frac{\partial \overline{H}}{\partial a_k}$. Bu yerda hosila olganda θ va qolgan barcha a_k - larni doimiy deb hisoblanadi.

Tizim tomonidan bajariladigan ish uchun

$$dA = \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k da_k = -\sum_{k=1}^{m} \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_k} a_k = -d\mathcal{F}\big|_{\theta=const} \qquad (1.6)$$

ifodasini hosil qilamiz. (1.6) - bajariladigan ish temperatura doimiyligida $\mathcal{F}$ - ozod energiya kamayishiga teng ekanligini anglatadi.

Masalan, S - yuzaga ega bo'lgan porshenli silindr idish ichida gaz joylashgan bo'lsin. Porshenni tashqi jism deb, uning koordinatasi deb esa h-silindr idish devori balandligini hisoblaylik. Agar ta'sir etuvchi kuchni F - desak, bajariladigan ish

$$dA = Fdh = \frac{F}{S} d(S \cdot h) = pdV \qquad (1.7)$$

bo'ladi. Bu yerda p=F/S - bosim, V=$S \cdot h$ - silindr hajmi. Ko'rinib turibdiki, ayni misolimizda h - silindr balandligi o'rniga uning V - hajmini olish mumkin. U holda bu koordinataga mos keluvchi kuch bo'lib p - bosim xizmat qiladi ($a_1 \rightarrow V$, $R_1 \rightarrow p$).

$$\overline{R}_k = -\left(\frac{\partial F}{\partial a_k}\right)_\theta$$

formulasi keltirib chiqarilganda tashqi parametrlar o'zgarishiga qaramasdan w(q,p) - kanonik taqsimlanishdan foydalanish mumkin deb hisoblandi va foydalanildi.

Aslida bunday bo'lmasligi lozim. Masalan, porshen yuqoriga tortilib silindr ichidagi molekulalar unga kelib urilganda kichik tezlik bilan qaytadi va zarralar uchun Maksvellning tezliklar bo'yicha muvozanatli taqsimoti buziladi. Bundan tashqari, bu jarayon paytida porshen ostida gazning qisman siyraklashishi kuzatiladi, ya'ni hajm bo'yicha zarralarning bir xil taqsimoti buziladi. Lekin agar a_k - tashqi

parametrlar juda sekinlik bilan o‘zgartirilsa tizimning muvozanat holati o‘zgarmaydi. Tashqi parametrlarining o‘zgarishi

$$\frac{|\dot{a}_k \cdot T|}{|a_k|} << 1 \qquad (1.8)$$

tengsizligiga bo‘ysunadigan jarayonlarga kvazistatik jarayonlar yoki muvozanatli jarayonlar deyiladi. Bu yerda T - tashqi parametrlar o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘lgan tizim muvozanatsiz holatini muvozanatli holatga keltirish relaksatsiya vaqti.

Ayrim hollarda tashqi parametrlarning adiabatik o‘zgarishi haqida gap yuritiladi. Bunda juda sust o‘zgarish nazarda tutiladi. a_k - ning bunday o‘zgarishi jarayonida tizim muvozanat holatda saqlanganicha yangi holatga moslasha boradi. Ushbu muvozanat holatning o‘zi esa vaqt bo‘yicha o‘zgaradi. Masalan, vaqtga bog‘liq ravishda tizim o‘rtacha energiyasi va hajmi o‘zgaradi.

Shunday qilib, kvazistatik jarayon uchun tizim makroparametrlarining o‘rtachasini hisoblashda:

$$w(H) = \frac{1}{g(E)}\delta\big(E - H(q,p)\big) \text{ mikrokanonik}$$

yoki $w(H) = e^{\frac{\mathcal{F} - H(q,p)}{\theta}}$ kanonik taqsimlanishdan foydalanish mumkin.

3.2-§. Termodinamikaning birinchi qonuni

Faraz qilaylik, tizim, termostat va tashqi jismlar berilgan bo‘lsin. Tashqi jismlar va termostat bilan faqat tizim o‘zaro ta’sirga ega bo‘lsin. Tizim va termostatga energiyaning saqlanish qonunini tadbiq etamiz. Tizim va termostat energiyasining to‘la o‘zgarishi tashqaridan kiritilgan ishga, ya’ni (- dA) - ishga teng. Boshqacha qilib aytganda dA tizim tashqi jism ustidan bajaradigan ish:

$$d\mathrm{H} + d\mathrm{H}' = -\,d\mathrm{A} \qquad (2.1)$$

Bu yerda bizni energiyaning statistik ansambl bo‘yicha o‘rtachasining o‘zgarishi va ish qiziqtiradi. U holda

$$d\overline{H} + dA = -\overline{dH'}$$

Tizim $\overline{H}$ - o‘rtacha energiyasini E harfi bilan, $-\overline{dH'}$ - ni esa dQ deb belgilaymiz. Demak,

$$dE + dA = -\overline{dH'} = dQ$$

Termostat tashqi jismlar bilan ta’sirga ega bo‘lmasdan faqat tizim bilan o‘zaro ta’sirga ega bo‘lganligi uchun uning energiyasining kamayishi (- dH′) faqat tizimga berilishi hisobigagina sodir bo‘lishi mumkin. Ushbu jarayonning o‘tishi makrojismlar harakati, ish bajarish va shu kabilarga bog‘liq emas. Aytaylik, issiqlik miqdorining bir qismi $dQ = -\overline{dH'}$ termostatdan tizimga o‘tsin. Shunday qilib, tizim energiyasining oshishi bilan bajargan ishi yig‘indisi tizim tomonidan qabul qilib olingan issiqlik miqdoriga teng. Keyingi xulosaning to‘la matematik ifodasi

$$dQ = dE + \sum_{k=1}^{m} R_k da_k \qquad (2.2)$$

Ushbu munosabatdan nima uchun $R_k \neq -\frac{\partial E}{\partial a_k}$ ekanligi ko‘rinib turibdi. Ish nafaqat energiyaning kamayishi hisobiga, balki tizim qabul qiladigan issiqlik miqdori hisobiga ham bajariladi. Agar tizim va termostat orasida issiqlik almashinuvi bo‘lmasa, ya’ni tizim adiabatik izolyatsiyaga ega bo‘lsa, $dQ = 0$ bo‘ladi. Bu holda (2.2) - dan:

$$\sum_{k=1}^{m} R_k da_k = -dE, \qquad \text{ya’ni} \qquad R_k = -(\partial E / \partial a_k)_{dQ=0} \qquad (2.3)$$

Bu o‘rinda shuni alohida qayd etish lozimki, tizimga issiqlik miqdori o‘tishi (berilishi) uchun tizim va termostat orasida o‘zaro ta’sir bo‘lishi kerak.

Tizim gamiltoniani faqat o‘z koordinata va impulslariga va a_k - larga bog‘liq bo‘lsa, a_k - lar doimiyligida u Gamilton tenglamalariga binoan saqlanadi. Xuddi shuningdek, $H'=H'(...q_i',...p_i'...)$ - termostat

gamiltoniani faqat o‘z koordinata va impulslarigagina bog‘liq bo‘lganligi uchun, H' vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi.

$$\frac{dH'}{dt}=\sum_{i=1}^{s'}\left(\frac{dH'}{\partial q_i'}\cdot\dot{q}'+\frac{dH'}{\partial p_i'}\cdot\dot{p}_i'\right)=$$

$$=\sum_{i=1}^{s'}\left(\frac{\partial H'}{\partial q_i'}\cdot\frac{\partial H'}{\partial p_i'}-\frac{dH'}{\partial p_i'}\cdot\frac{dH'}{\partial q_i'}\right)=0 \qquad (2.4)$$

Endi tizim va termostatning umumiy Gamilton funksiyasi H va H'- lardan tashqari yana ular koordinata va impulslariga bog‘liq bo‘lgan $H''=H''(\ldots q_i\ldots,\ p_i,\ldots,\ q_i'\ldots,\ p_i'\ldots)$ qo‘shimcha hadga ham ega bo‘lgan holni tekshiraylik. U holda, a_k - lar doimiyligida, saqlanish xususiyatiga $(H+N'+H'')$ - kattaligi ega bo‘ladi va tizim tomonidan bajariladigan ish

$$dA=\sum_{k=1}^{m}R_k\,da_k=-d(H+H'+H'') \qquad (2.5)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. H''- qiymati cheklangan bo‘lgani uchun,

$$\frac{d\overline{\left(H''\right)'}}{dt}=\frac{1}{T}\left[H''(T)-H''(0)\right]\approx 0$$

bo‘ladi va (2.5) - ifodasining o‘rtacha qiymati (2.2) formulasiga olib keladi.

H va H' - energiyalari, mos ravishda, tizim va termostatlardagi barcha molekulalar soniga proporsional bo‘lgan bir vaqtda H'' tizim va termostatlarni chegaralovchi yuza yaqinidagi molekulalargagina bog‘liq. Shuning uchun o‘zaro ta’sir energiyasi H'' kichik bo‘ladi. Chunki molekulalararo ta’sir kuchi radiusi juda kichik $(\sim 10^{-6}\div 10^{-7}\,см)$ va tizim bilan termostatni chegaralovchi qatlamda molekulalar soni nisbatan juda kam bo‘ladi.

Issiqlik miqdori va ish orasidagi farqni ko‘rib chiqaylik. dA - ish ham, $(-dQ)$ - issiqlik miqdori ham tizim tomonidan, mos ravishda, tashqi jismlarga va termostatga berilgan energiya miqdoridir. Biroq tashqi ish uncha ko‘p bo‘lmagan, koordinatalari a_k bo‘lgan,

makroskopik jismlar bilan tizimning o‘zaro ta’siriga bog‘liq. ($-dQ$) - issiqlik miqdori esa s'-erkinlik darajasining soni ko‘p bo‘lgan termostatga beriladi. Ushbu ($-dQ$) energiya xaotik ravishda ko‘p sonli molekulalar orasida taqsimlanib ketadi. Biz makroskopik jismlar harakatini kuzatishimiz, ularda to‘plangan energiyadan bevosita foydalanishimiz mumkin. Ammo barcha q_i', p_i' -larning o‘zgarishini kuzatish mumkin emas va harakatdagi har bir molekulaning energiyasidan bevosita foydalanish mumkin emas. Shuning uchun dA - ishni va dQ - issiqlik miqdorini turlicha his etamiz.

3.3-§. Tizimning termodinamik erkinlik darajalari

Biz shu paytgacha tizim erkinlik darajasining soni deganimizda uni tashkil etgan atomlar o‘rnini aniqlovchi barcha q_i (i=1,2,.....s) koordinatalar tushunilar edi. Agar tizimni tavsiflovchi kattaliklarning faqat o‘rtacha qiymatlari bilan qiziqsak, izolyatsiyalangan ergodik tizim faqat energiya orqali to‘la ifodalanadi, chunki kattaliklarning vaqt bo‘yicha o‘rtachasi energiya funksiyasidir. Termodinamika nuqtai nazaridan bu bitta erkinlik darajasiga ega bo‘lgan tizim demakdir. Agar bir qator a_k (k=1,2,...m) tashqi parametrlar mavjud bo‘lsa erkinlik darajasining soni (m+1) - ga teng bo‘ladi. Agar tashqi parametr faqat bitta, masalan $a_1=V$ - hajm bo‘lsa, tizim ikkita erkinlik darajasiga ega bo‘ladi. Bu holda o‘zgaruvchilar sifatida E - energiya va V - hajmlarni qabul qilish mumkin.

Ko‘pchilik hollarda E - o‘rniga θ - statistik temperaturadan foydalanish qulaydir, chunki dastlab $Z(\theta,a_k)$ - holat integrali va $\mathcal{F}(\theta_1,\ldots a_k\ldots)$ - ozod energiyalarni hisoblash oson bo‘ladi. Ozod energiyani bilgan holda $E=\theta^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mathcal{F}}{\theta}\right)_{a_k}$ tizim energiyasini topish mumkin.

Biz oldin ko‘rgan H_0, θ, $lng(H)$ ifodalari orasidagi barcha differentsial munosabatlar tashqi parametrlar mavjudligida ham kuchga ega, albatta. Ammo bu yerda endi θ - bo‘yicha hosilani a_s - lar doimiyligida xususiy deb qaramoq lozim. Masalan,

$$\frac{1}{\theta}=\left(\frac{\partial \ln g(H...a_k...)}{\partial H}\right)_{\substack{H=H_0\\ a_k=const}}$$

bo‘ladi, chunki g - statistik vazn tashqi parametr a_k - larga bog‘liq. Shuningdek,

$$E=\mathcal{F}+\theta \ln g(H_0...a_k...);\quad \ln g(H_0...a_k...)=-\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta}\right)_{a_k} \qquad (3.1)$$

Termodinamika I - qonunining differentsial ifodasi, ma’lumki,

$$dQ=dE+dA=dE+\sum_k R_k da_k$$

ko‘rinishga ega. Bundagi $dA=-(d\mathcal{F})_{\theta=const}$ - elementar ish to‘la differentsialga ega emas, chunki u $\mathcal{F}\equiv\mathcal{F}(\theta,a_s)$ - ozod energiya to‘la differentsialining bir qismini tashkil etadi. Shunday qilib, tizim bir holatdan ikkinchi holatga o‘tganda u bajaradigan chekli ish $A_{12}=\int_1^2 dA$ jarayonning o‘tish uslubiga bog‘liq. Xususiy holda bu o‘tish izotermik bo‘lsa,

$$A_{12}=-\int_1^2 d\mathcal{F}_{\theta=const}=\mathcal{F}(1)-\mathcal{F}(2),$$

ya’ni tizim ozod energiyasi kamayishi hisobiga ish bajariladi.

Ma’lumki, H' - termostat Gamilton funksiyasi shu termostatni tavsiflovchi p'_i,q'_i - o‘zgaruvchilariga bog‘liq va u tizimning θ,a_k - makroskopik kattaliklariga bog‘liq emas. Shuning uchun $dQ=-dH'$ ifodasi ham to‘la differentsialga ega emas. Shunday qilib, Q - issiqlik miqdori ham, A - ish ham holat funksiyasi bo‘la olmaydi, shuning uchun ularga tegishli bo‘lgan dQ va dA - lar to‘la differentsialga ega emas. dQ va shuningdek dA- lar θ,a_s - o‘zgaruvchilarning ma’lum bir chiziqli differensial ko‘rinishlaridir va bu kattaliklarning integrali integrallash yo‘liga bog‘liq bo‘ladi, ya’ni

$$\oint dQ\neq 0,\qquad \oint dA\neq 0$$

Bunga butunlay teskari $E = \overline{H}$ - tizim energiyasi θ va a_s - larning funksiyasi va dE uning to‘la differentsialidir. Shunday qilib, dQ va dA ikki differentsial ifodalar farqi to‘la differentsial bo‘ladi. Molekulyar - kinetik nazariyani tadbiq etmay turib, termodinamikaning asosiy qonuniyatlarini bayon etishda dQ va dA - lar muhim tushunchalar bo‘lib xizmat qiladi. Va, nihoyat, termodinamika birinchi qonunining bosh ma’nosi ham shundan iboratki, E - holat funksiyasi mavjud, uning dE - to‘la differentsiali (dQ - dA) - ga teng. Statistik fizikada esa bu xulosa o‘z - o‘zidan tushunarlidir.

3.4-§. Kvazistatik jarayonlar uchun termodinamikaнинг ikkinchi qonuni

Tizimning a_s - tashqi parametrlari shunchalik sust o‘zgarsinki uning muvozanat holati saqlansin va

$$R_k = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_k}\right)_\theta$$ bo‘lsin.

Ozod energiya differentsiali

$$d\mathcal{F} = \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial a_k}\right) da_k + \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \theta} d\theta = -\sum_k R_k da_k - \ln g(H_0)\, d\theta \qquad (4.1)$$

Ikkinchi tomondan

$$\mathcal{F} = H_0 - \theta \ln g(H_0)$$

va $$d\mathcal{F} = dH_0 - \ln g(H_0) d\theta - \theta\, d \ln g(H_0) \qquad (4.2)$$

(4.2) - dan (4.1) - ni ayirsak:

$$0 = dH_0 + \sum_k R_k da_k - \theta\, d \ln g(H_0)$$

bo‘ladi va bundan

$$d \ln g(H_0) = \frac{dH_0 + \sum_k R_k da_k}{\theta} = \frac{dE + dA}{\theta} = \frac{dQ}{\theta} \qquad (4.3)$$

Shunday qilib, $1/\theta$ kattaligi dQ - ga integrallovchi ko‘paytuvchi bo‘lib xizmat qiladi va dQ/θ - to‘la differensialga ega funksiyadir. $\sum=\ln g(H_0)$ - tizim entropiyasi deyiladi. Temperaturani graduslarda o‘lchaganda tizim entropiyasini $S=k_0\sum$ ko‘rinishda oladilar. Entropiya differentsiali tizim qabul qilgan dQ - issiqlik miqdorining θ - taqsimot moduliga nisbatiga teng.

Oldin hosil qilingan $\frac{1}{\theta}=\left.\frac{d\ln g(H)}{dH}\right|_{H=H_0}$ munosabatdan ko‘rinib turibdiki, θ^{-1} entropiyadan tashqi parametrlar doimiyligida energiya bo‘yicha hosilasiga teng demakdir.

(2.2) - binoan:

$$dE=\theta\, d\sum-\sum_k R_k da_k\ ;$$

$$\theta=\left(\frac{\partial E}{\partial\sum}\right)_{a_k}\ ;\qquad R_k=-\left(\frac{\partial E}{\partial a_k}\right)_{\sum} \tag{4.4}$$

Muvofiqlik munosabatiga ko‘ra, to‘la differentsialga ega bo‘lgan funksiya uchun $\frac{\partial^2 E}{\partial\sum\partial a_k}=\frac{\partial^2 E}{\partial a_k\partial\sum}$ bajarilganligi tufayli (4.4) - ni hisobga olgan holda

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial a_k}\right)_{\sum}=-\left(\frac{\partial R_k}{\partial\sum}\right)_{a_k} \tag{4.5}$$

bo‘ladi. Masalan, tizim bitta $a_1=V$, R_k=p parametrga ega bo‘lsa,

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial V}\right)_{\sum}=-\left(\frac{\partial p}{\partial\sum}\right)_{V} \tag{4.6}$$

bo‘ladi.

Endi θ kattaligi o‘lchov birligini tanlab olishga bog‘liq bo‘lgan ko‘paytuvchigacha aniqlik bilan ideal gaz uchun $pV=RT$ Mendeleev - Klapeyron tenglamasi orqali aniqlanuvchi T - absolyut temperatura ekanligini ko‘rsataylik. Buning uchun yuqorida hosil qilingan formulalarimizni V - hajmli N - ta molekuladan tashkil topgan ideal bir atomli gazga tadbiq etamiz. Yopiq tizim uchun Gamilton funksiyasi

$$H(q,p)=\sum_i \frac{m_i}{2}\dot{q}_i^{\,2}+\sum_i \frac{p_i^2}{2m_i} \qquad (4.7)$$

Bundan foydalanib, Z - holat integralini hisoblaymiz:

$$Z=\int e^{-\frac{H}{\theta}}d\Gamma$$

$$Z=\left[\int\ldots\int e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m\theta}}dp_x dp_y dp_z dq_x dq_y dq_z\right]^N \qquad (4.8)$$

Bu ifodani q - lar bo‘yicha integrallash V - hajmni, p_x - bo‘yicha integrallash esa $\sqrt{2\pi\, m\theta}$ - ni beradi. Shunday qilib,

$$Z=V^N\cdot\left(2\pi\, m\theta\right)^{3N/2}$$

$$\mathcal{F}=-\theta\, lnZ=-N\,\theta\, lnV-(3N/2)\cdot\,\theta\, ln(2\pi m\theta) \qquad (4.9)$$

$$p=-\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial V}=\frac{N\theta}{V},\qquad \text{ya'ni}\qquad p\cdot V=N\cdot\theta \qquad (4.10)$$

Agar gaz bir gramm-molekula bo‘lsa, $N=N_A$ (N_A - Avagadro soni), (4.10) - ni Mendeleyev - Klapeyron tenglamasiga taqqoslashtirishdan:

$\theta=\frac{RT}{N_A}$; $\frac{R}{N_A}=k_0$ - Boltsman doimiysi (k_0=1,38· 10^{16}erg/grad)

va, shunday qilib, $\theta=k_0\cdot T$ bo‘ladi.

Ideal gaz o‘rtacha energiyasi

$$E=-\theta^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\mathcal{F}}{\theta}\right)=-\theta^2\frac{\partial}{\partial\theta}\left[-N\ln V-\frac{3N}{2}\ln(2\pi\, m\theta)\right]=$$

$$= \frac{3N}{2}\theta = \frac{3}{2}N \cdot k_0 T; \qquad (4.11)$$

hajm doimiyligidagi issiqlik sig‘imi esa

$$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_{V=const} = \frac{3}{2}N \cdot k_0 \text{ bo‘ladi}$$

bo‘ladi. Agar biz temperaturani odatdagi graduslarda ifodalamoqchi bo‘lsak, $d\Sigma = \frac{dQ}{\theta}$ formulasini

$$d(k_0 \Sigma) = \frac{dQ}{T} \qquad (4.12)$$

ko‘rinishda yozishimiz lozim. Bu yerda $k_0 \Sigma = S$ - odatdagi birlikda berilgan entropiya.

3.5-§. Nokvazistatik jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonuni va entropiyaning oshishi

Ma’lum bir muvozanatsiz holat ehtimoliyati va unga mos keluvchi entropiya orasida bevosita munosabat o‘rnatish mumkin. Bu munosabat Boltsman tomonidan berilgan va unga Boltsman prinsipi deyiladi.

Konfiguratsiyali muhitning $\Delta\Gamma$ qismida izolyatsiyalangan tizimning bo‘lish ehtimoliyati:

$$\int_{\Delta\Gamma} \frac{\delta(H-E)}{g(E)} d\Gamma = W(\Delta\Gamma) \qquad (5.1)$$

Aytaylik, $\Delta\Gamma$ ma’lum bir qatlam bo‘lib $H=E$ bo‘lgan doimiy entropiyali giperyuzaning bir qismini tashkil etsin va $\Delta\Gamma = g_1(E)\Delta H$ bo‘lsin. Bu yerda $g_1(E) < g(E)$. U holda (5.1) - da integrallash o‘tkazib,

$W(\Delta\Gamma) = \frac{g_1(E)}{g(E)}$ ifodasini hosil qilamiz.

Agar endi S - muvozanatli holat entropiyasi va S_1 - muvozanatsiz holat entropiyasini

$$S=k_0\ln g(E); \qquad S_1=k_0\ln g_1(E) \tag{5.2}$$

formulalari orqali kiritsak, (5.1) ko‘rinishdagi ehtimoliyat quyidagicha bo‘ladi:

$$W(\Delta\Gamma)=\exp[\ln g_1(E)-\ln g(E)]=e^{\frac{S_1-S}{k_0}}=e^{\frac{\Delta S}{k_0}} \tag{5.3}$$

Tizimning muvozanatsiz holatga o‘tish ehtimoliyati logarifmasi shu tizim entropiyasining k_0 - ga bo‘lingan qiymaticha kamayishini anglatadi. Bu formula Boltsman prinsipini ifodalaydi.

Muvozanatsiz holatdan muvozanatli holatga o‘tish jarayoni entropiyaning salmoqli oshishi bilan sodir bo‘ladi, teskari jarayon esa, ehtimoliyati o‘ta kichik bo‘lganligi uchun amalda sodir bo‘lmaydi.

Shunday qilib, entropiyaning oshish qonunini o‘rnatdik. Bunda biz konfiguratsiyali muhitning turli qismlariga to‘g‘ri keluvchi hajmlarni taqqoslashtirishda izolyatsiyalangan tizim uchun ehtimoliyat zichligi doimiyligiga asoslandik. Shuni qayd etish lozimki, muvozanat holat tushunchasidan entropiya oshishi lozimligi kelib chiqadi.

Endi izolyatsiyalangan tizimlarni tekshirishdan tashqi jismlar bilan o‘zaro ta’sirda bo‘lgan tizimlarni o‘rganishga kirishaylik. Boshqacha qilib aytganda, a_k - tashqi parametrlarning o‘zgarishi bilan bog‘liq ravishda tizimda sodir bo‘ladigan jarayonlarni tekshiramiz. Bunday nokvozistatik jarayonlarni biz a_k - larni nihoyatda sust o‘zgaradigan kvazistatik va a_k - larning o‘zgarish tezligi sezilarli (chekli) bo‘lgan nokvozistatik jarayonlarga ajratdik.

Ma’lumki, kvazistatik jarayon dastlabki holatga qaytuvchi bo‘ladi, chunki jarayon bunday tartibda o‘tganda, tizim har doim muvozanatli holatlardan o‘tadi. Bu jarayon teskari yo‘nalishda ham o‘sha holatlardan o‘tadi demakdir. Masalan, p - bosim ostida bo‘lgan gaz S - yuzaga ega bo‘lgan porshenli silindr ichiga joylashgan bo‘lsin. Og‘irligi pS bo‘lgan yuk porshen ustida bo‘lib tizim - ideal gaz muvozanatli holatda bo‘lsin. Porshen ustidagi yukni cheksiz kichik miqdorda oshira borsak, gaz shunga mos ravishda qisila boradi. Bunday jarayon dastlabki holatga qaytuvchi bo‘ladi.

Chekli tezlik bilan a_k - tashqi parametrlar o‘zgartirilganda, tizim muvozanat holatdan chiqishini biz yuqorida ko‘rgan edik. Masalan, gazli silindr porshenini juda katta tezlik bilan ko‘tarsak (tortsak) unda shu zahotiyoq bo‘shliq paydo bo‘ladi va bu bo‘shliqni keyinchalik gaz to‘ldiradi. Bunday jarayon, so‘zsiz, dastlabki holatga qaytmovchi bo‘ladi. Gazning bo‘shliqda bunday kengayishi ish bajarmaydi, lekin tizim ustidan ish bajarmay turib, gazni dastlabki holatga keltirib bo‘lmaydi.

Entropiyaning $S=k_0\ln g(H_0)$ ifodasiga asoslanib, issiqlik jihatdan izolyatsiyaga ega bo‘lgan tizimda kvazistatik bo‘lmagan jarayon sodir bo‘lganda, uning entropiyasi oshishi bilan o‘tadi. Umumiy holda $\frac{dS}{dt} \geq 0$ va undagi tenglik alomati faqat kvazistatik jarayonga tegishlidir.

Tizim va termostat birgalikda tashqi muhitga nisbatan issiqlik izolyatsiyasiga ega bo‘lsin. U holda jarayonning qanday o‘tishidan qat’iy nazar yig‘indi entropiya faqat oshishi mumkin. Faraz qilaylik, termostat va tizim orasida energiya almashinuvi bo‘lmasin. U holda entropiya termostat va tizim entropiyalari yig‘indisiga teng, ya’ni $\overline{S} = S + S'$ va $dS + dS' \geq 0$ bo‘ladi.

Termostatni ifodalovchi barcha kattaliklar uning faqat energiyasiga bog‘liq bo‘lgani uchun

$$dS' = k_0 \frac{\partial \ln g\left(\overline{H}'\right)}{\partial \overline{H}'} d\overline{H}' = k_0 \frac{1}{\theta} d\overline{H}'$$

$$dS \geq -\frac{d\overline{H}'}{\theta} k_0 = \frac{dQ}{T}, \qquad (5.4)$$

ya’ni tizim entropiyasining oshishi qabul qilingan dQ issiqlik miqdorining absolyut temperaturaga nisbatidan katta yoki unga teng. Xuddi ana shu xulosa kvazistatik bo‘lmagan jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonunining ta’rifini anglatadi. Xususiy holda, adiabatik izolyatsiyalangan tizim uchun $dQ=0$ va $dS \geq 0$ ko‘rinishdagi entropiyaning oshish qonunini hosil qilamiz.

Entropiya oshish qonunidan kelib chiqadigan xulosalardan birini ko‘raylik. Atrof muhitda hech qanday o‘zgarish qilmay turib, faqat bir

isitgichdan issiqlik miqdori olish yo‘li bilan davriy ravishda ish bajaruvchi issiqlik mashinasi yasash mumkin emas.

Ushbu xulosani isbotlaylik. Faraz qilaylik, issiqlik mashinasi isitgichdan Q - issiqlik miqdori olib, uni A- ishga aylantiradi va so‘ng yana dastlabki holatga qaytadi. U holda issiqlik mashinasining entropiyasi o‘zgarmaydi, termostat entropiyasi esa Q/T - kattalikka kamayadi. Ya’ni mashina va termostatning to‘la entropiyasi kamayadi, bu esa termodinamika ikkinchi qonuniga muvofiq kelmaydi.

Atrof muhitda hech qanday o‘zgarish qilmay faqat bir manbadan issiqlik miqdori olish yo‘li bilan ish bajaruvchi jarayonga Tomson jarayoni deyiladi. Tomson jarayonining bajarilishi mumkin emasligi

$$dS \geq \frac{dQ}{T}$$

termodinamika ikkinchi qonuniga ekvivalentdir.

Ushbu xulosa Klauzius uchun tarixan termodinamika ikkinchi qonuni isbotining tajribaviy asosini tashkil etgan.

Statistik fizika faniga asos solinganga qadar, tarixan XIX asr o‘rtalarida, Klauzius tomonidan termodinamika ikkinchi qonuni yaratilgan edi. Klauzius $\frac{dS}{dt} \geq 0$ ekanligini hosil qildi va bu xulosani butun koinotga tadbiq etdi, ya’ni koinot entropiyasi o‘zining maksimum qiymatiga intiladi degan fikrni oldinga surdi. Bu xulosaga ko‘ra, butun koinotda faqat relaksatsiya jarayonlari sodir bo‘ladi va bu jarayonlar ertami kech koinotda termodinamik muvozanat holat o‘rnatilishiga olib keladi. Bu holda butun koinotda temperatura bir xil qiymatga ega bo‘ladi. Energiyaning bir turdan ikkinchi turga o‘tish jarayonlari to‘xtaydi, planetamizda hayot bo‘lmaydi. Shu tarzda «issiqlik o‘lish» nazariyasi vujudga keladi.

Bugungi kunda issiqlikdan o‘lish muammosiga Klauzius zamonidagiga qaraganda tubdan boshqacha tushunchaga egamiz. Birinchidan, cheksiz koinot uchun «koinot entropiyasi» tushunchasi ma’noga ega emas. Butun koinotdagi relaksatsiya jarayonlari masalasi birgina termodinamika masalasi emas, chunki bu masala kosmologiyaga, yulduzlar, galaktikalar va shu kabilar evolyutsiyasiga bog‘liq. Shunday qilib, bu muammoni birgina mavjud termodinamika va statistik fizika

doirasida hal qilib bo‘lmaydi. Buning uchun kosmologik termodinamikaga murojaat qilmoq lozim, lekin bu fan endigina yaratilmoqda.

Masalalar

1. Bir atomli ideal gaz uchun ozod energiya ifodasidan foydalanib, gaz V_1 hajmdan V_2 hajmgacha izotermik jarayon bilan kengayish mobaynida bajariladigan ish topilsin.

Ye ch i sh: Ozod energiyaning termodinamik ma’nosiga ko‘ra bajariladigan ish

$$A = \mathcal{F}_1 - \mathcal{F}_2$$

(4.9) - dan foydalansak,

$$A = -N\cdot\theta\left[\ln V_1 + \frac{3}{2}\ln(2\pi\, m\theta)\right] + N\cdot\theta\left[\ln V_2 + \frac{3}{2}\ln(2\pi\, m\theta)\right] =$$

$$= N\cdot\theta\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right);$$

2. Bir atomli ideal gaz uchun entropiya ifodasidan foydalanib, adiabatik jarayon uchun hajm va temperatura orasidagi bog‘lanish topilsin.

Ye ch i sh:

Entropiyaning bir atomli gaz uchun ifodasini

$$S = k_0 N\left[\ln V + \frac{3}{2}\ln T + \ln(2\pi\, mk_0)^{3/2}\right] + \frac{3}{2}k_0 N$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin. Yoki

$$0 = S_1 - S_2 = k_0 N\left[\ln V_1 + \frac{3}{2}\ln T_1\right] - k_0 N\left[\ln V_2 + \frac{3}{2}\ln T_2\right]$$

Demak,

$$V_1 T_1^{3/2} = V_2 T_2^{3/2}$$

4-bob.BIR ATOMLI IDEAL KLASSIK GAZ

4.1-§. Termodinamik kattaliklarni hisoblash

Gibbs taqsimotlarining ayrim qo‘llanish sohalarini tekshirishga o‘tamiz. Dastlab bir atomli ideal klassik gazdan tashkil topgan tizimni tekshiraylik. Ideal gazdan tashkil topgan tizim deganimizda undagi zarralarning o‘zaro ta’sir energiyasi ularning kinetik energiyasiga nisbatan juda kichik bo‘lgan hol tushuniladi. Umumiy holda ideal gaz tekshirilganda zarralarning kinetik energiyasi bilan bir qatorda, ularning tashqi maydondagi potensial energiyasi hisobga olinadi.

Yuqorida ko‘rganimizdek, tizimning termodinamik kattaliklarini (ozod energiya, entropiya, ichki energiya va sh.k.) hisoblash uchun shu tizimga tegishli bo‘lgan Z - statistik integralni hisoblamoq lozim. Ideal gaz, nurlanish va garmonik yaqinlashuvda kristallarning nazariyasi uchungina Z - ni aniq hisoblash mumkin. Qolgan barcha tizimlar uchun Z taqriban hisoblanadi. Faraz qilaylik, tizimdagi zarralar soni N ta bo‘lsin ($N=const$ deb hisoblaymiz). U holda erkinlik darajasining soni $s=3N$ bo‘ladi va holat integrali

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}} \int e^{-\frac{H(q,p)}{\theta}} d\Gamma \qquad (1.1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Holat integralida ishtirok etuvchi H(q,p)-Gamilton funksiyasi tizimni tashkil etuvchi N ta zarra uchun Dekart koordinat tizimida

$$H(q,p) = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{2m} - \left(p_{x_i}^2 + p_{y_i}^2 + p_{z_i}^2 \right) + U(x_i, y_i, z_i) \right\} \qquad (1.2)$$

ko‘rinishga egadir.

Ideal gaz uchun holat integrali va termodinamik funksiyalarni hisoblashda tashqi maydonning potensial enegiyasini hisobga olmaymiz. Gaz V hajmli idish ichida joylashgan bo‘lsin. U holda

$$U(x_i,y_i,z_i)=\begin{cases}0, & V \text{ hajimli tizim ichida}\\ \infty, & \text{tizim tashqarisida}\end{cases} \tag{1.3}$$

Barcha zarralarning turlicha koordinatlari shu V hajm ichida joylashgan bo‘ladi. (1.2) ni (1.1) ga tadbiq etamiz:

$$Z=\frac{1}{N!h^{3N}}\exp\left\{-\frac{1}{k_0T}\sum_{i=1}^{N}\left[\frac{1}{2m}(p_{x_i}^2+p_{y_i}^2+p_{z_i}^2)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+U(x_i,y_i,z_i)\right]\right\}(dx)(dy)(dz)(dp_x)(dp_y)(dp_z)=$$

$$=\frac{1}{N!h^{3N}}\left\{\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2mk_0T}}dp_xp_yp_z\right]^N\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\left[\int_V e^{-\frac{U(x,y,z)}{k_0T}}dxdydz\right]^N\right\} \tag{1.4}$$

(1.4) da ideal gaz zarralarining bir xilligini hisobga olib, $6N$ karrali integralni $6N$ ta bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan integral ko‘rinishda oldik. Agar (1.3) ni hisobga olsak, tizimdagi bitta zarra uchun:

$$\int e^{-\frac{U(x,y,z)}{k_0T}}dxdydz=V \tag{1.5}$$

bo‘ladi va (1.4) holat integrali quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$Z=\frac{V^N}{N!h^{3N}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{p^2}{2mk_0T}}dp_xdp_ydp_z\right]^N \tag{1.6}$$

Impulsning proyeksiyalari bo‘yicha integrallar Puasson integrallarini beradi (IV.3.3), ya’ni

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p_x^2}{2mk_0T}} dp_x = \sqrt{2\pi\, mk_0T} \qquad (1.7)$$

Shuning uchun (1.6) ni integrallagandan so‘ng bir atomli ideal klassik gaz uchun statistik integral

$$Z = \frac{V^N}{N!h^{3N}} (2\pi\, mk_0T)^{\frac{3N}{2}} \qquad (1.8)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bundan

$$\ln Z = N\ln V + \frac{3N}{2}\ln(2\pi\, mk_0T) - \ln N! - N\ln h^3$$

Juda katta sonlar uchun $N>>1$ bo‘lgan hollarda Stirling formulasidan foydalanish mumkin:

$$\ln N! \approx N\ln N - N \qquad (1.9)$$

U holda

$$\ln Z = N\ln\frac{V}{N} + \frac{3N}{2}\ln T + \frac{3N}{2}\ln(2\pi\, mk_0) + N(1 - \ln h^3) \qquad (1.10)$$

$\ln Z$ uchun hosil qilingan bu ifoda N zarralar soniga proporsionaldir. Buning natijasida (II.3.7), (II.3.8) va (II.3.10) larga asosan ozod energiya, entropiya va o‘rtacha energiya ekstensiv kattalik, ya’ni tizim o‘lchoviga bog‘liq bo‘ladi. Shunday qilib, bir atomli ideal klassik gaz uchun (1.10) ni hisobga olsak, quyidagi makroparametrlarning qiymatlarini hosil qilamiz:

ozod energiya

$$\mathcal{F} = -k_0T\ln Z = -Nk_0T\ln V - \frac{3}{2}Nk_0T\ln T - Nk_0T\left[\ln\frac{(2\pi\, mk_0)^{3/2}}{Nh^3} + 1\right] \qquad (1.11)$$

o‘rtacha energiya

$$\overline{E} = k_0 T^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = k_0 T^2 \frac{3N}{2} \cdot \frac{1}{T} = \frac{3}{2} N k_0 T ; \qquad (1.12)$$

entropiya

$$S = k_0 \frac{\partial}{\partial T}(T \ln Z) = N k_0 \ln V + \frac{3}{2} N k_0 \ln T + S_0 , \qquad (1.13)$$

bu yerda

$$S_0 = N k_0 \left[\ln \frac{(2\pi\, m k_0)^{3/2}}{N h^3} + \frac{5}{2} \right]$$

Endi (II.3.5) ning to‘g‘riligini ko‘rsataylik. Tizimdagi zarralar bosimi ozod energiyaga bog‘liqligidan

$$p = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V}\right)_T = \theta \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = \theta \frac{N}{V} \qquad (1.14)$$

kelib chiqadi. Bu ifoda bir gramm-molekula ideal gaz uchun Mendeleyev-Klapeyron tenglamasi $p=k_0 N_A T/V$ ga muvofiq kelishi lozim (N_A - Avagadro soni). Shuning uchun statistik temperatura bilan absolyut temperatura orasida $\theta = k_0 T$ bog‘lanish mavjud.

Tizim mexanik energiyasining statistik ansambl bo‘yicha o‘rtachasi (1.12) shu tizimning termodinamik ichki energiyasiga teng. Termodinamikadan ma’lumki, tizim ichki energiyasini bilgan holda, uning C_V hajm doimiyligidagi issiqlik sig‘imini hisoblash mumkin. Shuning uchun

$$C_V = \left(\frac{\partial \overline{E}}{\partial T}\right)_V = \frac{3}{2} k_0 N \qquad (1.15)$$

bo‘ladi.

Shunday qilib, ideal gaz uchun Z holat integralidan foydalanib, asosiy termodinamik kattaliklarni hisobladik. (1.11) - (1.15) formulalaridan ko‘rinib turibdiki, Z holat integrali shunday statistik muhim parametrki, u orqali barcha termodinamik kattaliklarni hisoblash mumkin. (1.13)-ga muvofiq ideal gaz entropiyasi $T \to 0$ bo‘lganda cheksizlikka intiladi. Bu termodinamika uchinchi qonuniga va kuzatish

dalillariga ziddir. Demak, juda past temperaturalarda klassik statistik fizikadan foydalanish mumkin emas. Shuning uchun (1.4) orqali hosil qilingan qolgan barcha termodinamik kattaliklar ham past temperaturalarda noto‘g‘ridir.

Termodinamik holat tenglamasining empirik Mendeleyev-Klapeyron tenglamasiga muvofiq kelishi statistik nazariyaning to‘g‘riligini belgilaydi. Ikkinchi tomondan, bu xulosa termodinamik formula bo‘lmish ideal gaz holat tenglamasining nazariy jihatdan asoslanishidir.

4.2-§. Maksvell-Boltsman taqsimoti

Zarralari bir xil turdagi atomlardan tashkil topgan tizimni (geliy, neon, argon, metall bug‘i va sh.k.) tekshiramiz. Tizimdagi zarralar soni N ta bo‘lsin va ularning har biri klassik mexanika qonunlariga bo‘ysunsin. Ma’lumki, agar bunday tizim termodinamik muvozanat holatida bo‘lsa va termostatda joylashgan bo‘lsa, ehtimoliyat zichligi bo‘lmish (II.2.12) Gibbsning kanonik taqsimoti bilan xarakterlanadi:

$$w(q,p)=\frac{1}{Z}e^{-\frac{H(q,p)}{k_0T}} \tag{2.1}$$

Bunday tizim Gamilton funksiyasi

$$H(q,p)=\sum_{i=1}^{N}\left\{\frac{p_x^2+p_y^2+p_z^2}{2m}+U(x_i,y_i,z_i)\right\}, \tag{2.2}$$

bu yerda $U(x_i,y_i,z_i)$ - i- nchi zarraning tashqi maydon potensial energiyasi (4.1-§ dagi kabi idish devorlari maydonining ta’siri ham hisobga olingan). Gamilton funksiyasi (2.2) ko‘rinishga ega bo‘lgan hol uchun N ta zarraning $d\Gamma$ da bo‘lish ehtimoliyati Dekart koordinata tizimida

$$w\cdot d\Gamma=\frac{1}{Z}\left\{\exp\left[-\frac{p^2}{2mk_oT}-\frac{U(x,y,z)}{k_0T}\right]dxdydzdp_xdp_ydp_z\right\}^N \tag{2.3}$$

ifodasi bilan tavsiflanadi. (2.3)-dagi holat integrali quyidagicha ifodalanadi:

$$Z = \int \exp\left[-\frac{1}{k_0 T} \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{p_i^{\,2}}{2m} + U(r_i) \right) \right] (dx)(dy)(dz)(dp_x)(dp_y)(dp_z) \qquad (2.3')$$

Bizni tizimdagi birorta tanlab olingan zarraning (masalan, i -nchi raqamli zarraning) $d\mu$-da bo‘lishi ehtimoliyati qiziqtirsin. Boshqacha qilib aytganda, i-nchi zarraning koordinatalari va impulsining proyeksiyalari $x_i \sim x_i + dx_i$, $y_i \sim y_i + dy_i$, $z_i \sim z_i + d z_i$, $p_{x_i} \sim p_{x_i} + dp_{x_i}$, $p_{y_i} \sim p_{y_i} + dp_{y_i}$, $p_{z_i} \sim p_{z_i} + dp_{z_i}$ oraliqda bo‘lib, qolgan barcha (N-1) ta zarraning koordinata va impulslari qabul qilishi mumkin bo‘lgan ixtiyoriy qiymatga ega bo‘lish ehtimoliyatini bilish talab etilsin. Buning uchun (2.3) - ni i -nchi zarradan tashqari (N-I) ta zarraning koordinata va impulslari bo‘yicha integrallaymiz va natijada

$$w(\vec{r}, \vec{p}) d\vec{r}\, d\vec{p} = \frac{e^{-\frac{p^2}{2mk_0T}} d\vec{p}}{\int e^{-\frac{p^2}{2mk_0T}} d\vec{p}} \cdot \frac{e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0T}} d\vec{r}}{\int e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0T}} d\vec{r}} \qquad (2.4)$$

ifodasini hosil qilamiz $d\vec{r} = dxdydz$; $d\vec{p} = dp_x dp_y dp_z$) .

Ma’lumki, ((1.7) ga qaralsin):

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mk_0T}} dp_x dp_y dp_z = (2\pi\, mk_0T)^{3/2} \qquad (2.5)$$

(2.4) dan tekshiriluvchi zarraning $d\mu = d\vec{p}d\vec{r}$ da bo‘lish ehtimoliyatining zichligi

$$w(\vec{p},\vec{r}) = (2\pi\, mk_0T)^{-3/2} \cdot e^{-\frac{p^2}{2mk_0T}} \cdot C\, e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0T}} \qquad (2.6)$$

ekanligi kelib chiqadi. Hosil qilingan (2.6) taqsimotga Maksvell-Boltsman taqsimoti deyiladi. Bu yerda

$$\int e^{-\frac{U(r)}{k_0 T}} d\vec{r} = \frac{1}{C} \tag{2.7}$$

belgilash qabul qilindi. Maksvell-Boltsman taqsimotini faqat koordinatalarga va faqat impuls proyeksiyalariga bog‘liq bo‘lgan ikkita ko‘paytuvchidan tashkil topgan taqsimotlarga ajratish mumkin, ya’ni $w(\vec{p},\vec{r}) = w_{\vec{p}} \cdot w_{\vec{r}}$

Demak,

$$w_{\vec{p}} = (2\pi\, mk_0 T)^{-3/2} \cdot e^{-\frac{p^2}{2mk_0 T}} \tag{2.8}$$

$$w_{\vec{r}} = C \cdot e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0 T}} \tag{2.9}$$

Maksvell-Boltsman taqsimotini (2.8) va (2.9) - taqsimotlar ko‘paytmasi ko‘rinishida yozish fizik jihatdan muhitda zarraning egallagan o‘rni uning harakat holatiga bog‘liq bo‘lmaganligidadir.

(2.8) formulasini 1860 yil Maksvell hosil qilgan va unga Maksvell taqsimoti deyiladi; (2.9)-formulasini 1968 yil Boltsman hosil qilgan va unga Boltsman taqsimoti deyiladi.

Endi Maksvell taqsimotiga va u orqali xarakterlanuvchi gazning molekulyar-kinetik xususiyatlariga batafsil to‘xtalib o‘taylik. $w_{\vec{p}}$ ifodasi impulsi proyeksiyalari $p_{x_i} \sim p_{x_i} + dp_{x_i}$, $p_{y_i} \sim p_{y_i} + dp_{y_i}$, $p_{z_i} \sim p_{z_i} + dp_{z_i}$ oralig‘ida bo‘lish ehtimoliyat zichligini anglatadi.

Impulsning absolyut qiymati bo‘yicha zarra taqsimotini topaylik. Buning uchun impulslar muhitidagi elementlar hajmini sferik koordinat tizimida yozamiz:

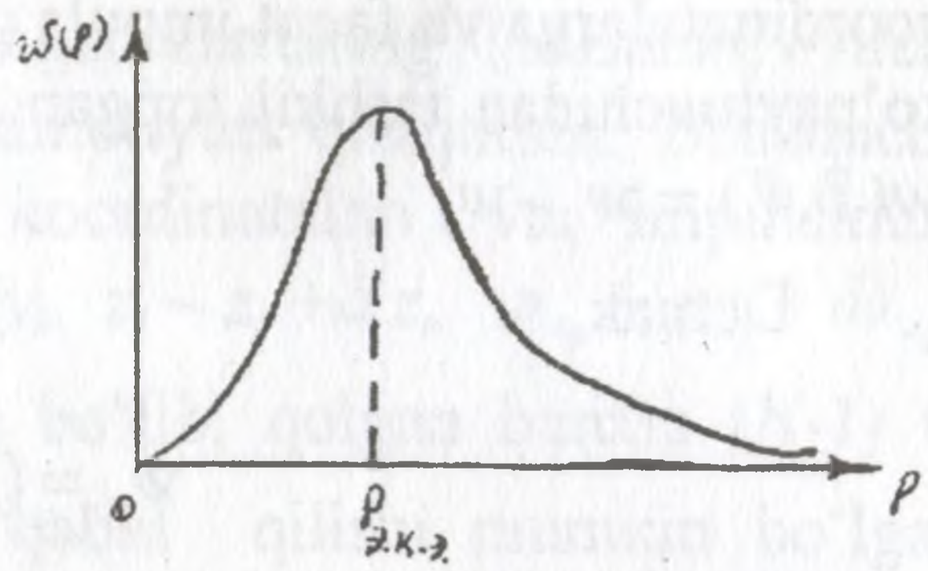
$$dp_x dp_y dp_z = p^2 \sin\alpha\, dp\, d\alpha\, d\varphi$$

va shu elementar hajmda zarraning bo‘lish ehtimoliyatini $w_{\vec{p}} \cdot p^2 \sin\alpha\, dp\, d\alpha\, d\varphi$ burchaklar bo‘yicha $(0 \le \alpha \le \pi, 0 \le \varphi \le 2\pi)$ integrallaymiz.

U holda

$$w(p)dp = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{p^2}{(mk_0T)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{p^2}{2(mk_0T)}} dp \qquad (2.10)$$

Bu yerda $w(p)$ ham Maksvell taqsimoti bo‘lib, zarra impulsi absolyut qiymatining $p \sim p+dp$ oraliqda bo‘lish ehtimoliyatining zichligidir. *4-chizmada* w(p) - ning (2.10) asosida r ga bog‘liqligi ko‘rsatilgan. Chizmadagi egri chiziq tizimdagi ko‘pchilik zarra impulsining qiymati $r_{e.k.}$ - zarra impulsning eng katta ehtimoliy qiymatiga ega bo‘ladi demakdir.



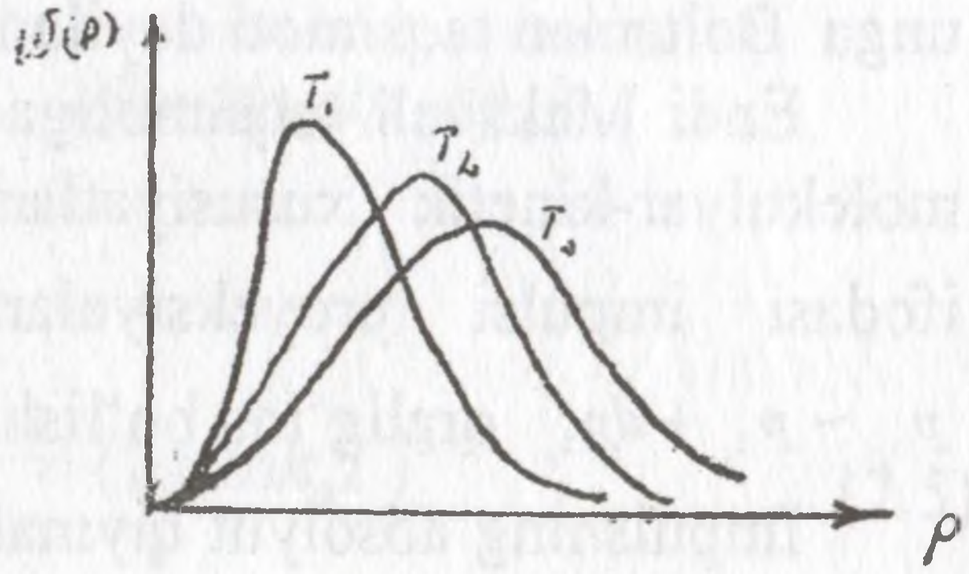
4–chizma. Impulsning absolyut qiymati bo‘yicha Maksvell taqsimotining impulsga bog‘liqlik grafigi

*5-chizma*da turlicha belgilangan temperaturalar (T_1, T_2, T_3) uchun zarra impulsining absolyut qiymati bo‘yicha Maksvell taqsimoti grafigi keltirilgan. Ko‘rinib turibdiki, temperatura oshishi bilan egri chiziq impulsning katta qiymati tomon siljiydi.

Biroq chizmadagi har bir egri chiziq bilan absissa o‘qi

$$\int w(p)dp = 1$$

orasidagi yuza normallashtirish shartiga asosan har qanday teperaturada ham bir xil saqlanish lozim. Zarralar impulsining absolyut qiymati bo‘yicha taqsimoti bilan bir qatorda tezlikning absolyut qiymati bo‘yicha va energiya bo‘yicha taqsimot funksiyasi ham ishlatiladi. Ma’lumki, zarra energiyasi, impulsi va tezligi orasida



5-chizma. Temperatura qiymati-ning o‘zgarishiga qarab Maksvell taqsimoti grafikasining o‘zgarishi $T_1<T_2<T_3$

$$\sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{3mk_0T} \qquad (3.6)$$

bo‘ladi.

Yuqorida hisoblangan ideal gaz xarakterli impulslarini taqqoslashtirishdan

$$p_{e.k.e} \langle \overline{p} \langle \sqrt{\overline{p^2}}$$

ekanligini ko‘rish mumkin, ya’ni o‘rtacha va o‘rtacha kvadratik impuls imulsning eng katta ehtimolli qiymatidan birmuncha katta ekan.

Tizimdagi bitta zarra kinetik energiyasining o‘rtacha qiymati

$$\overline{E} = \frac{1}{2m}\overline{p^2}$$

Agar (3.5) ni hisobga olsak,

$$\overline{E} = \frac{3}{2}k_0T \qquad (3.7)$$

ekanligini hosil qilamiz. Shunday qilib, gaz zarrasi ilgarilanma harakatining kinetik energiyasi gaz tabiatiga bog‘liq emas va uning absolyut temperaturasiga proporsinal bo‘ladi. Bundan absolyut temperatura orqali o‘rtacha kinetik energiyani aniqlash mumkin degan xulosa kelib chiqadi. Impulslar muhitining $\vec{p} \sim \vec{p} + d\vec{p}$ oralig‘ida bo‘lish ehtimoliyati $w_{\vec{p}}d\vec{p}$ - ni impuls proyeksiyasi bo‘yicha ehtimoliyatlar ko‘paytmasi, ya’ni

$$w_{\vec{p}}d\vec{p} = w_{p_x}dp_x \cdot w_{p_y}dp_y \cdot w_{p_z}dp_z$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin. Bu yerda

$$w_{p_x}dp_x = (2\pi mk_0T)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{p_x^2}{2mk_0T}}dp_x \qquad (3.8)$$

zarra impulsi proyeksiyasining $p_x \sim p_x + dp_x$ oraliqda bo‘lishi ehtimoliyati. Bundan foydalanib, zarra harakati impulsining ma’lum

bir yo‘nalish bo‘yicha o‘rtacha qiymatining modulini hisoblash mumkin:

$$\overline{|p_x|} = 2\int_0^\infty p_x w_{p_x} dp_x =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi m k_0 T}} \int_0^\infty p_x \cdot e^{-\frac{p_x^2}{2mk_0T}} dp_x = \sqrt{\frac{2}{\pi m k_0 T}} = \frac{1}{2}\bar{p} \qquad (3.9)$$

4.4-§. Ideal gazning holat tenglamasi

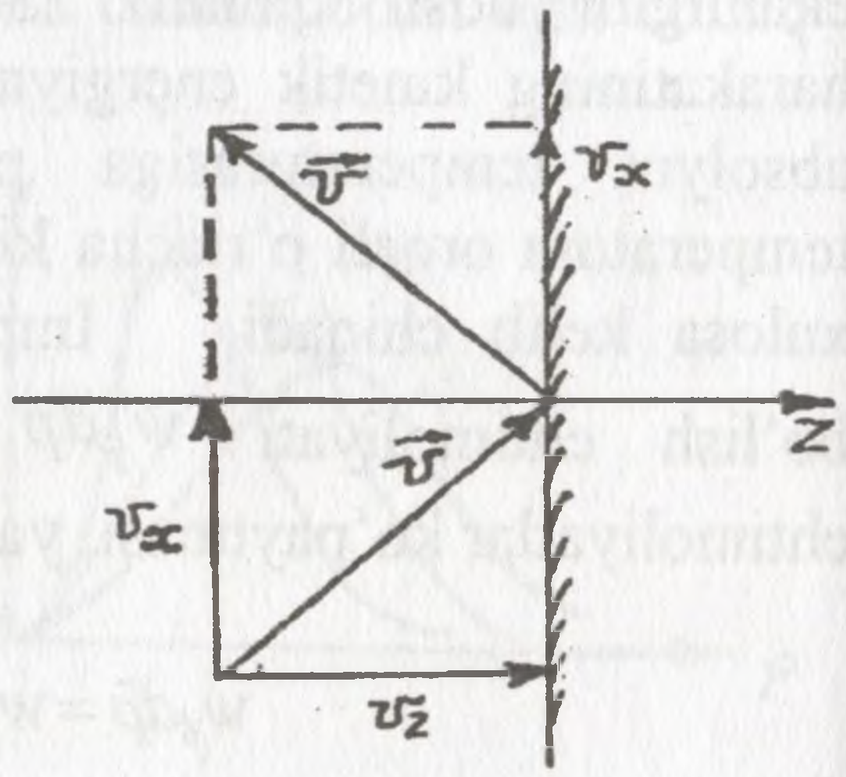
Ideal gaz zarralari hajmga ega bo‘lmagan material nuqtalar deb qaraladi. Shuning uchun bunday zarralar orasida o‘zaro to‘qnashuv bo‘lmaydi, lekin ular idish devori bilan to‘qnashishi mumkin. Shu to‘qnashish natijasida idish devorining yuza birligiga zarralarning beradigan bosimini va u orqali ideal gazning holat tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun muvozanatli holat taqsimot funksiyasi-Maksvell taqsimotidan foydalanamiz.

Zarra idish devoriga elastik kuch bilan uriladi, deb faraz qilamiz (*6-chizma*). Tezlikning v_z tashkil etuvchisi idish devoriga normal bo‘lsin, v_x va v_y tashkil etuvchilari esa unga parallel bo‘lsin. U holda idish devoriga kelib urilgan zarraning harakat miqdori (impulsi)

$$mv_z - (-mv_z) = 2mv_z$$

kattalikka o‘zgaradi. Idishning ichki tomonidan

ds=1 sm^2 yuza ajratib, shu yuzaga bir sekundda kelib uriladigan zarralar sonini hisoblaylik. dt vaqt ichida ds yuzaga shunday asosli va balandligi $v_z dt$ bo‘lgan parallelopiped ichida joylashgan barcha zarra idish devoriga kelib uriladi. 1 sm^3 hajmli parallelapipedda joylashgan gazning tezlik komponentlari v_z dan v_z+dv_z gacha oraliqda bo‘lganlarining soni vaqt birligi ichida



6-chizma. $\vec{v}$ tezlikka ega bo‘lgan zarraning proektsiyalari $v_x=v'_x$, $v_y=v'_y$, $v_z=-v'_z$.

$$\sqrt{\overline{p^2}} = \sqrt{3mk_0T} \qquad (3.6)$$

bo‘ladi.

Yuqorida hisoblangan ideal gaz xarakterli impulslarini taqqoslashtirishdan

$$p_{e.k.e} \langle \overline{p} \langle \sqrt{\overline{p^2}}$$

ekanligini ko‘rish mumkin, ya’ni o‘rtacha va o‘rtacha kvadratik impuls imulsning eng katta ehtimolli qiymatidan birmuncha katta ekan.

Tizimdagi bitta zarra kinetik energiyasining o‘rtacha qiymati

$$\overline{E} = \frac{1}{2m}\overline{p^2}$$

Agar (3.5) ni hisobga olsak,

$$\overline{E} = \frac{3}{2}k_0T \qquad (3.7)$$

ekanligini hosil qilamiz. Shunday qilib, gaz zarrasi ilgarilanma harakatining kinetik energiyasi gaz tabiatiga bog‘liq emas va uning absolyut temperaturasiga proporsinal bo‘ladi. Bundan absolyut temperatura orqali o‘rtacha kinetik energiyani aniqlash mumkin degan xulosa kelib chiqadi. Impulslar muhitining $\vec{p} \sim \vec{p} + d\vec{p}$ oralig‘ida bo‘lish ehtimoliyati $w_{\vec{p}}d\vec{p}$ - ni impuls proyeksiyasi bo‘yicha ehtimoliyatlar ko‘paytmasi, ya’ni

$$w_{\vec{p}}d\vec{p} = w_{p_x}dp_x \cdot w_{p_y}dp_y \cdot w_{p_z}dp_z$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin. Bu yerda

$$w_{p_x}dp_x = (2\pi mk_0T)^{-1/2} \cdot e^{-\frac{p_x^2}{2mk_0T}}dp_x \qquad (3.8)$$

zarra impulsi proyeksiyasining $p_x \sim p_x + dp_x$ oraliqda bo‘lishi ehtimoliyati. Bundan foydalanib, zarra harakati impulsining ma’lum

bir yo‘nalish bo‘yicha o‘rtacha qiymatining modulini hisoblash mumkin:

$$\overline{|p_x|} = 2\int_0^\infty p_x w_{p_x} dp_x =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi m k_0 T}} \int_0^\infty p_x \cdot e^{-\frac{p_x^2}{2mk_0T}} dp_x = \sqrt{\frac{2}{\pi m k_0 T}} = \frac{1}{2}\bar{p} \qquad (3.9)$$

4.4-§. Ideal gazning holat tenglamasi

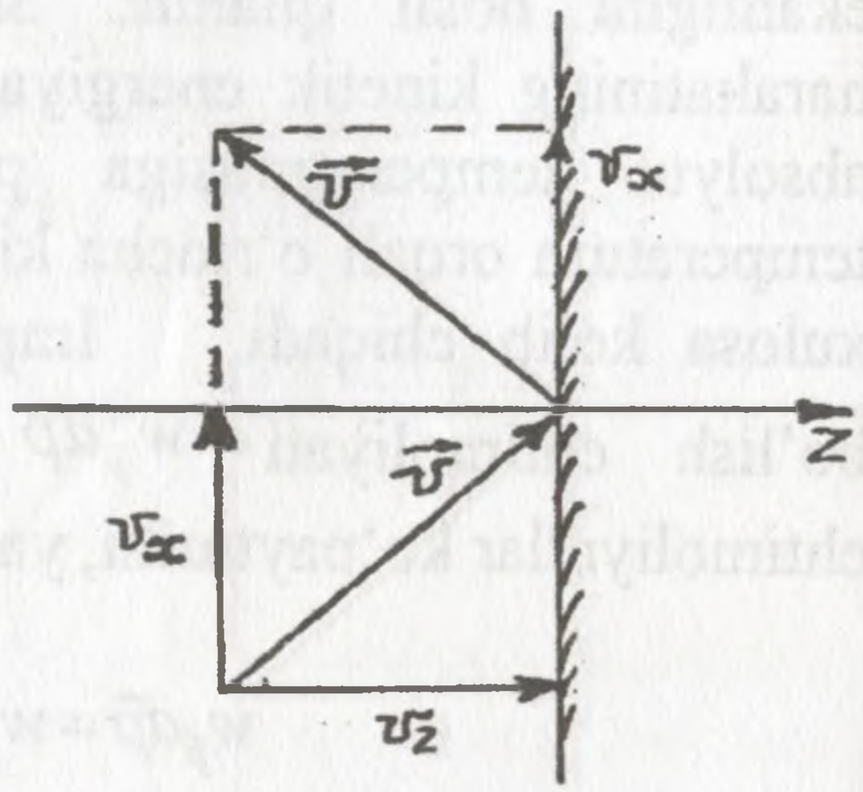
Ideal gaz zarralari hajmga ega bo‘lmagan material nuqtalar deb qaraladi. Shuning uchun bunday zarralar orasida o‘zaro to‘qnashuv bo‘lmaydi, lekin ular idish devori bilan to‘qnashishi mumkin. Shu to‘qnashish natijasida idish devorining yuza birligiga zarralarning beradigan bosimini va u orqali ideal gazning holat tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun muvozanatli holat taqsimot funksiyasi-Maksvell taqsimotidan foydalanamiz.

Zarra idish devoriga elastik kuch bilan uriladi, deb faraz qilamiz (*6-chizma*). Tezlikning v_z tashkil etuvchisi idish devoriga normal bo‘lsin, v_x va v_y tashkil etuvchilari esa unga parallel bo‘lsin. U holda idish devoriga kelib urilgan zarraning harakat miqdori (impulsi)

$$mv_z - (-mv_z) = 2mv_z$$

kattalikka o‘zgaradi. Idishning ichki tomonidan

ds=1 sm^2 yuza ajratib, shu yuzaga bir sekundda kelib uriladigan zarralar sonini hisoblaylik. dt vaqt ichida ds yuzaga shunday asosli va balandligi $v_z dt$ bo‘lgan parallelopiped ichida joylashgan barcha zarra idish devoriga kelib uriladi. 1 sm^3 hajmli parallelapipedda joylashgan gazning tezlik komponentlari v_z dan v_z+dv_z gacha oraliqda bo‘lganlarining soni vaqt birligi ichida



6-chizma. $\vec{v}$ tezlikka ega bo‘lgan zarraning proektsiyalari $v_x=v'_x$, $v_y=v'_y$, $v_z=-v'_z$.

$$dn = n \cdot w_{\vec{v}} dv_x dv_y dv_z \qquad (4.1)$$

Bu yerda $n=N/V$ hajm birligidagi zarralar soni; $w_{\vec{v}}$ tizimdagi zarralarning $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$ da bo‘lish ehtimoliyatining zichligi va (2.3) ga asosan $(d\vec{p} = m^3 d\vec{v})$

$$w_{\vec{v}} = \left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} \qquad (4.2)$$

Shunday qilib, tezligining proyeksiyasi $v_z \sim v_z + dv_z$ oraliqda bo‘lgan zarralarning vaqt birligi ichida yuza birligiga beradigan bosimi quyidagicha ifodalanadi:

$$dp = 2mv_z\, dn = 2nm\, w_{\vec{v}} \cdot v_z^2 dv_x dv_y dv_z \qquad (4.3)$$

To‘la bosim (4.3) ni tezlik proyeksiyalari bo‘yicha integrallash natijasida hosil bo‘ladi $\left(-\infty \le v_x,\ v_y \le \infty,\ 0 \le v_z \le \infty\right)$:

$$p = \int 2mv_z dn = 2mn\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_z^2 dv_z \int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv_x dv_y$$

Ma’lumki, ((1.7) va (3.2) ga qarang)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_0 T}} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi k_0 T}{m}}$$

$$\int_0^{\infty} v_z^2 e^{-\frac{mv_z^2}{2k_0 T}} dv_z = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2k_0 T}{m}\right)^{3/2}$$

U holda

$$p = n \cdot k_0 T \qquad (4.4a)$$

yoki

$$pV = Nk_0 T \qquad (4.4b)$$

bo‘ladi.

Hosil qilingan (4.4a) yoki (4.4b) tenglamalari ideal gazning holat tenglamasi deyiladi. Agar tizimdagi gaz gramm-atom bo‘lsa $N=N_A$ (Avagadro soni),

$$pV = RT \tag{4.5}$$

bo‘ladi, chunki $R=N_Ak_0$ gazlarning unversal doimiyligi.

4.5-§. Potensial maydondagi ideal gazning xususiyatlari

Ma’lumki, oddiy uch o‘lchamli muhit uchun zarralarning $dV=dxdydz$ elementar hajmida bo‘lish ehtimoliyatining zichligi, ya’ni Boltsman taqsimoti

$$w_{\bar{r}} = C \cdot e^{-\frac{U(\bar{r})}{k_0 T}} \tag{2.9}$$

ko‘rinishga ega . Bu yerda

$$C^{-1} = \int e^{-\frac{U(x,y,z)}{k_0 T}} dxdydz \tag{2.7}$$

Boltsman taqsimotini Yerning og‘irlik kuchi maydonida joylashgan gaz uchun tekshirib chiqaylik. Bunday maydon uchun zarraning potensial energiyasi

$$U(z) = mgz \tag{5.1}$$

ifoda bilan xarakterlanadi (agar z o‘qi Yerga tik yo‘naltirilgan bo‘lsa). Bu yerda g - zarraning erkin tushish tezlanishi, m - uning massasi. Potensial energiya faqat z balandlikka bog‘liq bo‘lgani uchun $z=const$ tekisligida zarralar bir xil taqsimlangan. Shuning uchun Boltsman taqsimotining z balandlikka bog‘liqligi bizni qiziqtiradi. Bu bog‘lanish zarra impulsining qiymatidan qat’iy nazar, Yer sathidan $z \sim z+dz$ balandlikda bo‘lish ehtimoliyatining zichligi

$$dn = n \cdot w_{\vec{v}} dv_x dv_y dv_z \qquad (4.1)$$

Bu yerda $n=N/V$ hajm birligidagi zarralar soni; $w_{\vec{v}}$ tizimdagi zarralarning $d\vec{v} = dv_x dv_y dv_z$ da bo‘lish ehtimoliyatining zichligi va (2.3) ga asosan ($d\vec{p} = m^3 d\vec{v}$)

$$w_{\vec{v}} = \left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} \qquad (4.2)$$

Shunday qilib, tezligining proyeksiyasi $v_z \sim v_z + dv_z$ oraliqda bo‘lgan zarralarning vaqt birligi ichida yuza birligiga beradigan bosimi quyidagicha ifodalanadi:

$$dp = 2mv_z\, dn = 2nm\, w_{\vec{v}} \cdot v_z^2 dv_x dv_y dv_z \qquad (4.3)$$

To‘la bosim (4.3) ni tezlik proyeksiyalari bo‘yicha integrallash natijasida hosil bo‘ladi $\left(-\infty \le v_x,\ v_y \le \infty,\ \ 0 \le v_z \le \infty\right)$:

$$p = \int 2mv_z dn = 2mn\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} v_z^2 dv_z \int\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv_x dv_y$$

Ma’lumki, ((1.7) va (3.2) ga qarang)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{mv_x^2}{2k_0 T}} dv_x = \sqrt{\frac{2\pi k_0 T}{m}}$$

$$\int_0^{\infty} v_z^2 e^{-\frac{mv_z^2}{2k_0 T}} dv_z = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{2k_0 T}{m}\right)^{3/2}$$

U holda

$$p = n \cdot k_0 T \qquad (4.4a)$$

yoki

$$pV = Nk_0 T \qquad (4.4b)$$

bo‘ladi.

Hosil qilingan (4.4a) yoki (4.4b) tenglamalari ideal gazning holat tenglamasi deyiladi. Agar tizimdagi gaz gramm-atom bo‘lsa $N=N_A$ (Avagadro soni),

$$pV=RT \tag{4.5}$$

bo‘ladi, chunki $R=N_Ak_0$ gazlarning unversal doimiyligi.

4.5-§. Potensial maydondagi ideal gazning xususiyatlari

Ma’lumki, oddiy uch o‘lchamli muhit uchun zarralarning $dV=dxdydz$ elementar hajmida bo‘lish ehtimoliyatining zichligi, ya’ni Boltsman taqsimoti

$$w_{\vec{r}} = C \cdot e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0 T}} \tag{2.9}$$

ko‘rinishga ega . Bu yerda

$$C^{-1} = \int e^{-\frac{U(x,y,z)}{k_0 T}} dxdydz \tag{2.7}$$

Boltsman taqsimotini Yerning og‘irlik kuchi maydonida joylashgan gaz uchun tekshirib chiqaylik. Bunday maydon uchun zarraning potensial energiyasi

$$U(z) = mgz \tag{5.1}$$

ifoda bilan xarakterlanadi (agar z o‘qi Yerga tik yo‘naltirilgan bo‘lsa). Bu yerda g - zarraning erkin tushish tezlanishi, m - uning massasi. Potensial energiya faqat z balandlikka bog‘liq bo‘lgani uchun $z=const$ tekisligida zarralar bir xil taqsimlangan. Shuning uchun Boltsman taqsimotining z balandlikka bog‘liqligi bizni qiziqtiradi. Bu bog‘lanish zarra impulsining qiymatidan qat’iy nazar, Yer sathidan $z \sim z+dz$ balandlikda bo‘lish ehtimoliyatining zichligi

5-bob.REAL GAZLAR STATISTIKASI

5.1-§. Tizimdagi zarralarning o‘zaro ta’siri

Ideal gazlar holat tenglamasini ma’lum darajagacha aniqlik bilan real gazlarga ham qo‘llash mumkin. Agar tizimdagi molekulalarning o‘zaro ta’sir energiyasi ularning kinetik energiyasiga nisbatan juda ham kichik bo‘lsa, bu fikr to‘g‘ri bo‘ladi. Aslida real gazlarning holat tenglamasini keltirib chiqarish uchun ulardagi molekulalarning o‘zaro ta’sirini hisobga olish lozim. Umumiy holda, molekulalarning o‘zaro ta’siri ularning ichki holatiga ham bog‘liq, lekin quyida bunday effektlarni hisobga olmaymiz. Bundan tashqari, oddiylik uchun bir atomli real gazlarni tekshiramiz. Tizimdagi atomlar harakatini klassik deb qarasak, undagi N-ta bir xil atomlar uchun Gamilton funksiyasi

$$H(q,p)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}+U(q) \qquad (1.1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerda U - tizimdagi molekulalarning o‘zaro ta’sir potensial energiyasi. Gamilton funksiyasini (1.1) ko‘rinishda qabul qilsak, statistik integral impulslar va koordinatalar bo‘yicha integrallar ko‘paytmasiga ajraladi:

$$Z=\frac{1}{N!h^{3N}}\int e^{-\frac{H(q,p)}{k_0T}}d\Gamma=\frac{1}{N!h^{3N}}\int\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{p^2}{2mk_0T}\right\}(dp)\int e^{-\frac{U(q)}{k_0T}}(dq) \qquad (1.2)$$

Bundagi impulslar bo‘yicha integralning oldida V^N ko‘paytuvchisi ham bo‘lganda edi, u ideal gazlar uchun holat integralini bergan bo‘lar edi.

Shuning uchun (1.2) ni

$$Z=Z_0\cdot Q_N \qquad (1.3)$$

deb qabul qilamiz. Bu yerda

$$Z_0 = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \int \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i_x}^2 + p_{i_y}^2 + p_{i_z}^2}{2mk_0T}\right\}(dp) = \frac{V^N}{N!h^{3N}}(2\pi mk_0T)^{\frac{3N}{2}} \qquad (1.4)$$

ideal gazlar holat integrali.

Q_N - konfiguratsiyali integral deb ataladi va u

$$Q_N = \frac{1}{V^N} \int e^{-\frac{U(q)}{k_0 t}} (dq) \qquad (1.5)$$

ko‘rinishga ega. Ideal gazlarda U=0 bo‘lganligi uchun Q_N=1 va Z=Z_0 bo‘ladi. Shunday qilib, Q_N-ifodasi real gazning ideal gazdan farqini beradi.

Umumiy holda, N ta atomdan tashkil topgan real gaz uchun U(q) o‘zaro ta’sir potensial energiyasining aniq ifodasini bilish ancha qiyin masaladir. Demak, Q_N - konfiguratsiyali integralni va, o‘z navbatida, real gazning Z holat integralini, xuddi ideal gazlar Z_0 -holat integrali kabi, aniq hisoblash imkoniyatiga ega emasmiz.

Tizimdagi zarralarning o‘zaro ta’sir potensial energiyasi ular orasidagi faqat juft ta’sirlar potensial energiyalari yig‘indisidan tashkil topgan deb hisoblaymiz. Bundan tashqari, ikki zarra orasidagi juft ta’sir potensial energiyasi, shu zarralar orasidagi masofagagina bog‘liq deb qabul qilamiz. U holda

$$U(q) \equiv U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) \equiv \sum_{i,j} \Phi(r_{ij}) \qquad (1.6)$$

Bu ifodani yozishda o‘zaro ta’sir doirasida bir vaqtning o‘zida faqat ikkita zarra bor deb hisoblandi. Gaz zichligi oshgan sari o‘zaro ta’sir doirasida uchta, to‘rtta va hokazo zarralar bo‘lishi mumkin. O‘zaro ta’sir doirasida ikkitadan ko‘p zarra bo‘lgan gaz uchun holat tenglamasi nazariyasi matematik jihatdan ancha murakkab masaladir va bunday masala ushbu darslikda qaralmagan.

5.2-§. Real gazlarni statistik tekshirish

Molekulalarning o‘zaro ta’siri uchun quyidagi ko‘rinishdagi holat integralini qabul qilgan edik:

5-bob.REAL GAZLAR STATISTIKASI

5.1-§. Tizimdagi zarralarning o‘zaro ta’siri

Ideal gazlar holat tenglamasini ma’lum darajagacha aniqlik bilan real gazlarga ham qo‘llash mumkin. Agar tizimdagi molekulalarning o‘zaro ta’sir energiyasi ularning kinetik energiyasiga nisbatan juda ham kichik bo‘lsa, bu fikr to‘g‘ri bo‘ladi. Aslida real gazlarning holat tenglamasini keltirib chiqarish uchun ulardagi molekulalarning o‘zaro ta’sirini hisobga olish lozim. Umumiy holda, molekulalarning o‘zaro ta’siri ularning ichki holatiga ham bog‘liq, lekin quyida bunday effektlarni hisobga olmaymiz. Bundan tashqari, oddiylik uchun bir atomli real gazlarni tekshiramiz. Tizimdagi atomlar harakatini klassik deb qarasak, undagi N-ta bir xil atomlar uchun Gamilton funksiyasi

$$H(q,p)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}+U(q) \qquad (1.1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerda U - tizimdagi molekulalarning o‘zaro ta’sir potensial energiyasi. Gamilton funksiyasini (1.1) ko‘rinishda qabul qilsak, statistik integral impulslar va koordinatalar bo‘yicha integrallar ko‘paytmasiga ajraladi:

$$Z=\frac{1}{N!h^{3N}}\int e^{-\frac{H(q,p)}{k_0T}}d\Gamma=\frac{1}{N!h^{3N}}\int\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\frac{p^2}{2mk_0T}\right\}(dp)\int e^{-\frac{U(q)}{k_0T}}(dq) \qquad (1.2)$$

Bundagi impulslar bo‘yicha integralning oldida V^N ko‘paytuvchisi ham bo‘lganda edi, u ideal gazlar uchun holat integralini bergan bo‘lar edi.
Shuning uchun (1.2) ni

$$Z=Z_0\cdot Q_N \qquad (1.3)$$

deb qabul qilamiz. Bu yerda

$$Z_0 = \frac{V^N}{N!h^{3N}} \int \exp\left\{-\sum_{i=1}^{N} \frac{p_{i_x}^2 + p_{i_y}^2 + p_{i_z}^2}{2mk_0T}\right\}(dp) = \frac{V^N}{N!h^{3N}} (2\pi mk_0T)^{\frac{3N}{2}} \qquad (1.4)$$

ideal gazlar holat integrali.

Q_N - konfiguratsiyali integral deb ataladi va u

$$Q_N = \frac{1}{V^N} \int e^{-\frac{U(q)}{k_0t}} (dq) \qquad (1.5)$$

ko‘rinishga ega. Ideal gazlarda U=0 bo‘lganligi uchun Q_N=1 va Z=Z_0 bo‘ladi. Shunday qilib, Q_N-ifodasi real gazning ideal gazdan farqini beradi.

Umumiy holda, N ta atomdan tashkil topgan real gaz uchun U(q) o‘zaro ta’sir potensial energiyasining aniq ifodasini bilish ancha qiyin masaladir. Demak, Q_N - konfiguratsiyali integralni va, o‘z navbatida, real gazning Z holat integralini, xuddi ideal gazlar Z_0 -holat integrali kabi, aniq hisoblash imkoniyatiga ega emasmiz.

Tizimdagi zarralarning o‘zaro ta’sir potensial energiyasi ular orasidagi faqat juft ta’sirlar potensial energiyalari yig‘indisidan tashkil topgan deb hisoblaymiz. Bundan tashqari, ikki zarra orasidagi juft ta’sir potensial energiyasi, shu zarralar orasidagi masofagagina bog‘liq deb qabul qilamiz. U holda

$$U(q) \equiv U(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N) = \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{N} \Phi\left(\left|\vec{r}_i - \vec{r}_j\right|\right) \equiv \sum_{i,j} \Phi(r_{ij}) \qquad (1.6)$$

Bu ifodani yozishda o‘zaro ta’sir doirasida bir vaqtning o‘zida faqat ikkita zarra bor deb hisoblandi. Gaz zichligi oshgan sari o‘zaro ta’sir doirasida uchta, to‘rtta va hokazo zarralar bo‘lishi mumkin. O‘zaro ta’sir doirasida ikkitadan ko‘p zarra bo‘lgan gaz uchun holat tenglamasi nazariyasi matematik jihatdan ancha murakkab masaladir va bunday masala ushbu darslikda qaralmagan.

5.2-§. Real gazlarni statistik tekshirish

Molekulalarning o‘zaro ta’siri uchun quyidagi ko‘rinishdagi holat integralini qabul qilgan edik:

$$Q_N = \frac{1}{V^N}\int e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0T}}(dx)^{3N} \qquad (2.1)$$

$$e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0T}} = e^{-\sum_{ij}\Phi(r_{ij})/k_0T} \qquad (2.2)$$

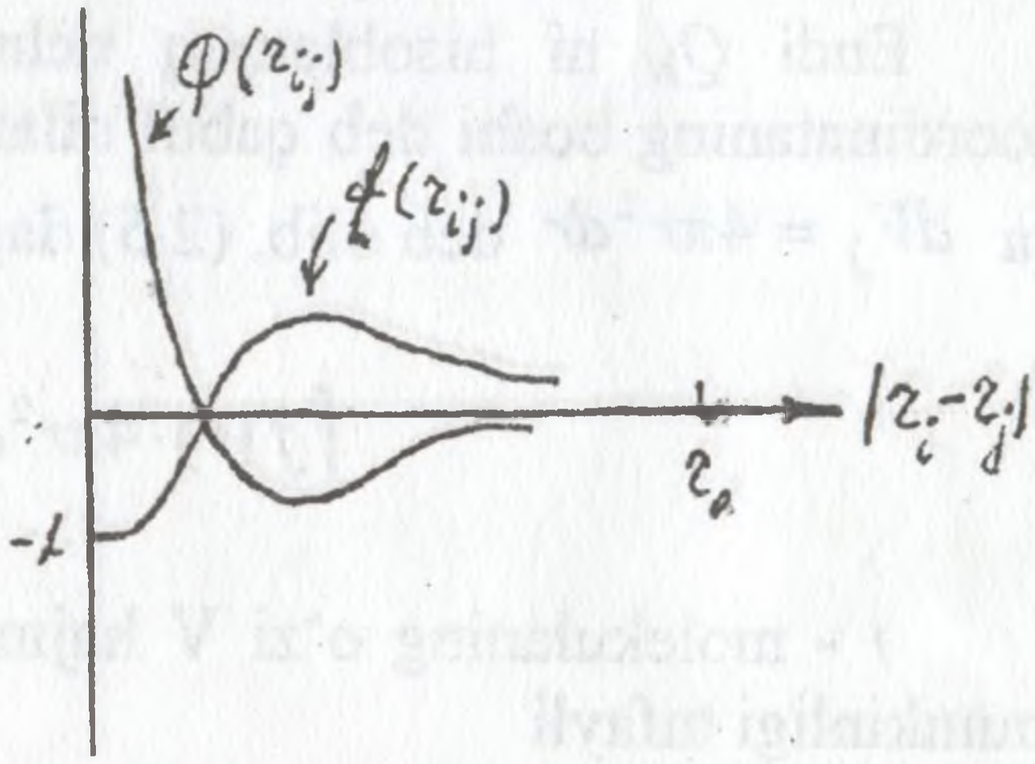
Siyrak gazda $r_{ij} >> r_0$ bo‘lgani uchun $\phi(r_{ij}) \to 0$. Shuning uchun

$e^{-\frac{\Phi(r_{ij})}{k_0T}} \to 1$ bo‘ladi.

Biz

$$f(r_{ik}) = e^{-\frac{\Phi(r_{ij})}{k_0T}} - 1$$

kattalik qabul qilamizki, $r_{ij} >> r_0$ bo‘lganda $f(r_{ij})$ kichikligicha qolsin (*7-chizma*). U holda (2.2) o‘rniga



7-chizma. O’zaro ta’sir potentsial energiyasi $f(r_{i,j})$ va $f(r_{i,j})$-funktsiyalarining zarralar orasidagi masofaga bog‘liqligi

$$e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0T}} = (1+f_{12})(1+f_{13})(1+f_{14})... = 1+(f_{12}+f_{13}+f_{14}...)+ \\ +(f_{12}\cdot f_{13}+f_{12}\cdot f_{14}+...) \approx 1+\sum_{i,j} f_{ij} \qquad (2.3)$$

Tizimimiz N ta zarradan tashkil topgan va undagi har bir zarra bir xil bo‘lganligi tufayli barcha $f(r_{ij})$ larni bir-biriga teng deb olish mumkin:

$$e^{-\frac{U(\vec{r})}{k_0T}} \approx 1+\frac{N(N-1)}{2}f(r_{ik}) \approx 1+\frac{N^2}{2}f(r_{ij}) \qquad (2.4)$$

(2.4) - ni (2.1) - ga qo‘yamiz:

$$Q_N = \frac{1}{V^N}\int\left[1+\frac{N^2}{2}f(r_{ij})\right]dV_1...dV_N = \frac{1}{V_N}\left[V^N + \frac{N^2}{2}\int f(r_{ij})dV_1...dV_N\right] =$$

$$= 1 + \frac{N^2}{2V^N}\cdot V^{N-2}\int f(r_{ij})dV_i dV_j \qquad (2.5)$$

Endi Q_N ni hisoblamoq uchun i molekulaning o‘rnini sferik koordinataning boshi deb qabul qilamiz. Bu tizimda r_{ij} - ni radius deb va $dV_j = 4\pi r^2 dr$ deb olib, (2.5) dagi integralni quyidagicha yozamiz:

$$\int f(r)\cdot 4\pi r^2 dr \int dV_i = \beta \int dV_i \qquad (2.6)$$

i - molekulaning o‘zi V hajmning ixtiyoriy nuqtasida bo‘lishi mumkinligi tufayli

$$\int dV_i = V$$

Natijada

$$Q_N = 1 + \frac{N^2}{2V}\cdot\beta \qquad (2.7)$$

Gaz zichligi kichik bo‘lganda, ya’ni bitta molekulaga to‘g‘ri keluvchi hajm V/N yetarli darajada katta bo‘lsa, u holda $\frac{N}{V}\to 0$ bo‘ladi va (2.7)-dagi ikkinchi hadni nolga teng deb olish mumkin. Boshqacha qilib aytganda, real gaz juda siyrak bo‘lsa, uning xususiyati ideal gazga to‘g‘ri keladi va bu holda Q_N=1 bo‘ladi.

(2.7)-ga asosan real gaz ozod energiyasi:

$$\mathcal{F} = -k_0 T \ln z = \mathcal{F}_{id} - k_0 T \ln(1 + N^2\beta/2V) \qquad (2.8)$$

Bu munosabatdagi N/V ni kichik miqdor deb, logarifmni qatorga yoyamiz va qatorning birinchi nolga teng bo‘lmagan hadinigina hisobga olamiz:

$$\mathcal{F} = -k_0 T\,[N\ln V + N^2\beta/2V] \qquad (2.8a)$$

$$Q_N = \frac{1}{V^N}\int e^{-\frac{U(\bar{r})}{k_0T}}(dx)^{3N} \qquad (2.1)$$

$$e^{-\frac{U(\bar{r})}{k_0T}} = e^{-\sum_{ij}\Phi(r_{ij})/k_0T} \qquad (2.2)$$

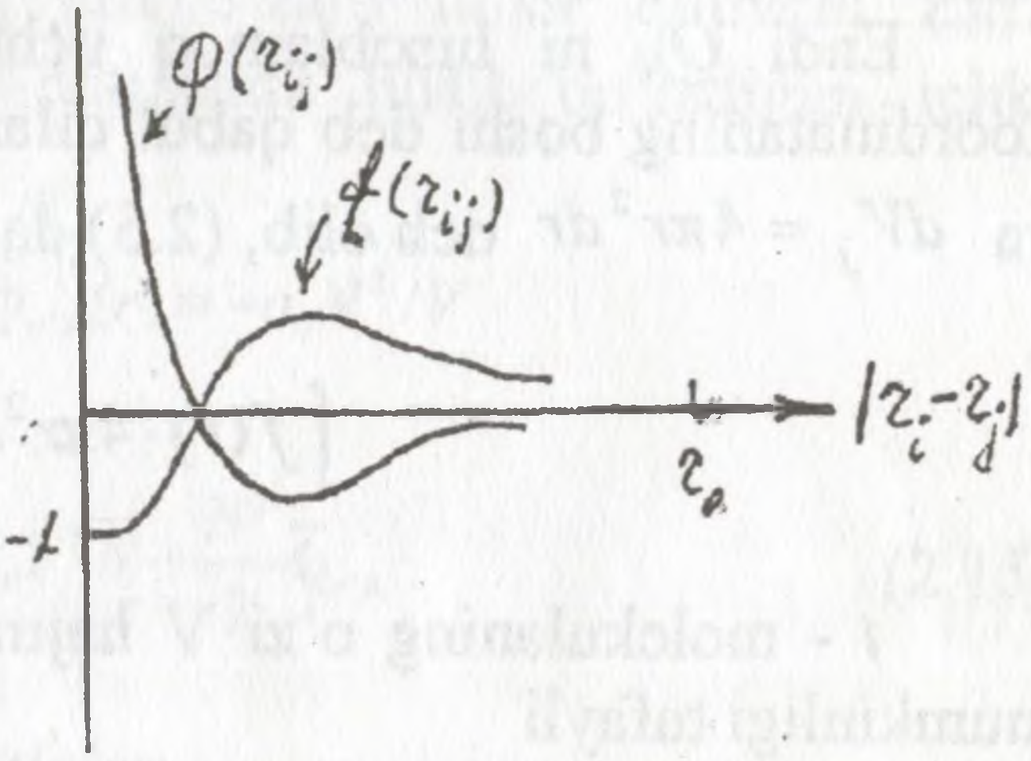
Siyrak gazda $r_{ij} >> r_0$ bo‘lgani uchun $\phi(r_{ij}) \to 0$. Shuning uchun

$e^{-\frac{\Phi(r_{ij})}{k_0T}} \to 1$ bo‘ladi.

Biz

$$f(r_{ik}) = e^{-\frac{\Phi(r_{ij})}{k_0T}} - 1$$

kattalik qabul qilamizki, $r_{ij} >> r_0$ bo‘lganda $f(r_{ij})$ kichikligicha qolsin (7-*chizma*). U holda (2.2) o‘rniga



7-chizma. O’zaro ta’sir potentsial energiyasi $f(r_{i,j})$ va $f(r_{i,j})$-funktsiyalarining zarralar orasidagi masofaga bog‘liqligi

$$e^{-\frac{U(\bar{r})}{k_0T}} = (1+f_{12})(1+f_{13})(1+f_{14})... = 1+(f_{12}+f_{13}+f_{14}...)+$$
$$+(f_{12}\cdot f_{13}+f_{12}\cdot f_{14}+...) \approx 1+\sum_{i,j} f_{ij} \qquad (2.3)$$

Tizimimiz N ta zarradan tashkil topgan va undagi har bir zarra bir xil bo‘lganligi tufayli barcha $f(r_{ij})$ larni bir-biriga teng deb olish mumkin:

$$e^{-\frac{U(\bar{r})}{k_0T}} \approx 1+\frac{N(N-1)}{2}f(r_{ik}) \approx 1+\frac{N^2}{2}f(r_{ij}) \qquad (2.4)$$

(2.4) - ni (2.1) - ga qo‘yamiz:

$$Q_N = \frac{1}{V^N}\int\left[1+\frac{N^2}{2}f(r_{ij})\right]dV_1...dV_N = \frac{1}{V_N}\left[V^N + \frac{N^2}{2}\int f(r_{ij})dV_1...dV_N\right] =$$

$$= 1 + \frac{N^2}{2V^N}\cdot V^{N-2}\int f(r_{ij})dV_i dV_j \qquad (2.5)$$

Endi Q_N ni hisoblamoq uchun i molekulaning o‘rnini sferik koordinataning boshi deb qabul qilamiz. Bu tizimda r_{ij} - ni radius deb va $dV_j = 4\pi r^2 dr$ deb olib, (2.5) dagi integralni quyidagicha yozamiz:

$$\int f(r)\cdot 4\pi r^2 dr \int dV_i = \beta \int dV_i \qquad (2.6)$$

i - molekulaning o‘zi V hajmning ixtiyoriy nuqtasida bo‘lishi mumkinligi tufayli

$$\int dV_i = V$$

Natijada

$$Q_N = 1 + \frac{N^2}{2V}\cdot\beta \qquad (2.7)$$

Gaz zichligi kichik bo‘lganda, ya’ni bitta molekulaga to‘g‘ri keluvchi hajm V/N yetarli darajada katta bo‘lsa, u holda $\frac{N}{V}\to 0$ bo‘ladi va (2.7)-dagi ikkinchi hadni nolga teng deb olish mumkin. Boshqacha qilib aytganda, real gaz juda siyrak bo‘lsa, uning xususiyati ideal gazga to‘g‘ri keladi va bu holda Q_N=1 bo‘ladi.

(2.7)-ga asosan real gaz ozod energiyasi:

$$\mathcal{F} = -k_0 T \ln z = \mathcal{F}_{id} - k_0 T \ln(1 + N^2\beta/2V) \qquad (2.8)$$

Bu munosabatdagi N/V ni kichik miqdor deb, logarifmni qatorga yoyamiz va qatorning birinchi nolga teng bo‘lmagan hadinigina hisobga olamiz:

$$\mathcal{F} = -k_0 T\,[N\ln V + N^2\beta/2V] \qquad (2.8a)$$

$$U_{real} = U_{id} + U_{o'.t.}$$

Ma'lumki,

$$U_{id} = \frac{3}{2} k_0 NT .$$

Gazda $N(N-1)/2 \approx N^2/2$ ta juft o'zaro ta'sir qiluvchi zarra bo'lganligi tufayli, o'zaro ta'sir natijasida hosil bo'ladigan ichki energiya

$$U_{o'.t.} = \frac{N^2}{2} \bar{\Phi}_{o'.t.}(r) = -a_0 N^2 / V$$

Demak,

$$U_{real} = \frac{3}{2} k_0 T \cdot N + \frac{N^2}{2} \bar{\Phi}_{o'.t.} \qquad (2.15)$$

Masalalar

1. Real gaz holat tenglamasi

$$pV = RT\left(1 + \frac{A}{V} + \frac{B}{V^2} + \ldots\right).$$

ko'rinishga ega. Bundan A, V va shu kabilar virial koeffitsiyentlar deb ataladi. Umumiy holda ular temperatura va hajm funksiyasi. Van-der-Vaals gazi uchun ikkita birinchi virial koeffitsiyent topilsin.

Ye ch i sh:

Bir gramm-molekula Van-der-Vaals gazi uchun holat tenglamasi

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

Bundan

$$pV = RT\left(\frac{V}{V-b} - \frac{a}{RTV}\right).$$

Ma'lumki, $|x|<<1$ bo'lgan hol uchun

$$(1-x)^{-1} \approx 1 + x + x^2$$

Shuning uchun

$$pV = RT\left(1+\frac{b}{V}+\frac{b^2}{V^2}+\ldots-\frac{a}{RTV}\right).$$

va

$$A = b-\frac{a}{RT};\ \ B = b^2$$

2. Bir atomli ideal gaz entropiyasi ifodasiga asoslanib, adiabatik jarayon uchun temperatura va hajm orasidagi boglanishni toping.

Ye ch i sh:

(IV.1.3.) - ga muvofiq bir atomli ideal gaz entropiyasi

$$S = k_0\frac{\partial}{\partial T}(T\ln Z) = Nk_0\ln V+\frac{3}{2}Nk_0\ln T+S_0,$$

bu yerda S_0=const.

Adiabatik jarayon vaqtida entropiya o‘zgarmaydi. Shuning uchun

$$0 = S_1-S_2 = Nk_0[\ln V_1+\frac{3}{2}\ln T_1]-Nk_0[\ln V_2+\frac{3}{2}\ln T_2]$$

yoki

$$\ln V_1+\frac{3}{2}\ln T_1 = \ln V_2+\frac{3}{2}\ln T_2$$

Bundan $V_1T_1^{3/2} = V_2T_2^{3/2}$

6-bob.FENOMENOLOGIK TERMODINAMIKA

6.1-§. Termodinamikaning umumiy qoidalari

Termodinamika o‘zining birinchi va ikkinchi qonunlariga asoslanadi. Ularning matematik ifodasi

$$dE = dQ - dA; \qquad dS = \frac{dQ}{T} \tag{1.1}$$

Bundagi dE va dS-lar to‘la differentsialga ega bo‘lsa, dQ va dA-lar to‘la differensialga ega emas. Ushbu formulalar hech qanday usullar bilan davriy ravishda ishlab turuvchi birinchi va ikkinchi jinsli mashinalar yasash mumkin emasligini isbotlovchi tajribalarni umumlashtirish natijasini anglatadi. Ko‘plab o‘tkazilgan tajribalar bularning katta aniqlik bilan bajarilishini ko‘rsatadi. Agar dE va dS-larni termodinamik o‘zgaruvchilar orqali, masalan, dT va da_k - lar orqali, ifodalash mumkin bo‘lsa, bunga asosan dE va dS-larning to‘la differensiallik shartlarini yozishimiz mumkin. Masalan, ushbu funksiyalar aralash ikkinchi tartibli hosilalari tengligini, ya’ni

$$\frac{\partial^2 E}{\partial T \partial a_k} = \frac{\partial^2 E}{\partial a_k \partial T}$$

munosabatini va shu kabilarni yozishimiz mumkin.

Bu va bu kabi munosabatlar esa tajribada bevosita o‘rganishi mumkin bo‘lgan kattaliklar orasidagi bog‘lanishlarni beradi. Ushbu munosabatlar orqali, bir tomondan, termodinamika birinchi va ikkinchi qonunlarining o‘zining to‘g‘riligini tekshirish mumkin bo‘lsa, ikkinchi tomondan bir, fizik kattalik orqali ikkinchisini (masalan, C_v orqali C_p-ni) hisoblash mumkin. Termodinamikaning asosiy maqsadi ham shunday ko‘plab munosabatlarni hosil qilishdan iboratdir. Statistik fizika uslubi orqali (z-statistik integralni hisoblash yo‘li bilan) tizimning kerakli bo‘lgan biror bir fizik kattalikni hisoblash mumkinligini biz yuqorida ko‘rgan edik. Termodinamika bunday imkoniyatga ega emas. Biroq z-ni bevosita hisoblash mumkin bo‘lmagan hollarda esa termodinamika qo‘l keladi, chunki uning uslubi orqali noma’lum bir fizik kattalikni

ma'lum bo'lgan boshqa bir fizik kattalik orqali ifodasini topish imkoniyatiga ega. Termodinamikada qo'llaniladigan uslublar orqali muvozanatsiz holatda bo'lgan tizimda sodir bo'ladigan jarayonlarning o'tish yo'nalishini oldindan aniqlash mumkin. U orqali issiqlik mashinalarining ishlashini tahlil qilish va kerakli rejimda ishlashini ta'minlash mumkin. Quyida termodinamik uslublarning qo'llanilishini ayrim misollardagina ko'rib chiqamiz.

6.2-§. Kalorik va termik koeffitsiyentlar

Ma'lumki, tizimni bir holatdan ikkinchi bir holatga o'tkazish uchun unga beriladigan issiqlik miqdorini hisoblashga imkon yaratadigan kattaliklarga kalorik koeffitsiyentlar deyiladi. Tashqi parametri faqat V-hajm bo'lgan bir jinsli termodinamik tizimni olaylik. Ushbu tizimning bir biriga bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilari sifatida hajm va temperaturani tanlab olamiz. U holda tizim hajmi va temperaturasi, mos ravishda, dV va dT-ga o'zgarganda u qabul qiladigan issiqlik miqdorini tajriba orqali

$$dQ=C_v dT+bdV$$

formulasidan foydalanib aniqlash mumkin.

Bu yerda C_v - hajm doimiyligidagi issiqlik sig'imi;

b - hajm oshishining yashirin issiqligi (tizim temperaturasi issiqlik miqdori berilganda o'zgarmasligiga yashirin deyiladi).

Bir-biriga bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar sifatida T-temperatura va r-bosimni tanlab olganimizda esa

$$dQ = C_p dT + d \cdot dp$$

bo'ladi.

Bu yerda C_p-bosim doimiyligidagi issiqlik miqdori;

d-bosim oshishining yashirin issiqligi.

Umumiy holda bir-biriga bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar bo'lib x va u-lar tanlab olinsa, tizim qabul qiladigan issiqlik miqdori

$$dQ=\mathrm{X}dx+\mathrm{Y}dy, \qquad (2.1)$$

Bu yerda X,Y - larga kalorik koeffitsiyentlar deyiladi.

Oddiy tizim uchun $p,V,$T - lar $f(\mathrm{T},V,p)=0$ holat tenglamasi bilan bog‘liq bo‘lganligi uchun bir vaqtning o‘zida dp, dV, dT o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan differensiallar bo‘la olmaydi. Demak, barcha kalorik koeffitsiyentlar shularning ikkitasi (masalan C_V, va b) va holat tenglamasi orqali ifodalanishi lozim. Masalan, T=*const* bo‘lsin. U holda yuqoridagilardan tizim qabul qiladigan issiqlik miqdori

$$dQ = b\cdot dV \;;\quad dQ = d\cdot dp$$

bo‘ladi. Bularni hadma-had bir-biriga bo‘lamiz:

$$1 = \frac{b}{d}\left(\frac{dV}{dp}\right)_T \qquad (*)$$

Ikkinchi tomondan, dQ=0 deb

$$C_V dT + b\cdot dV = 0\,,\quad C_p dT + d\cdot dp = 0$$

munosabatlarni hosil qilamiz. Bundan

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{d}{b}\cdot\left(\frac{dp}{dV}\right)_{dQ=0}$$

Hosil bo‘lgan so‘nggi ifodani (*) - formulasi bilan o‘zaro hadma-had ko‘paytirsak,

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{dQ=0} : \left(\frac{\partial p}{dV}\right)_T = \frac{C_p}{C_V} \qquad (2.2)$$

kelib chiqadi.

Kalorik koeffitsiyentlardan tashqari tajriba orqali $f(p,\mathrm{V},\mathrm{T})=0$ holat tenglamasini topish mumkin . Bundan tashqari, uchchala p,V,T-lardan bittasining qolgan ikkitasi orqali turlicha hosilalarini topish mumkin. Aytilgan so‘nggi xususiy hosilalar termik koeffitsiyentlar deb aytiladi.

Jumladan, $E = -V_0\dfrac{dp}{dV}$ - elastiklik koeffitsiyenti deyiladi, bunga teskari

ifoda esa $\chi = \frac{1}{E} = -\frac{dV}{dp}$ - qisilish koeffitsiyenti deyiladi. Odatda E va χ-lar T-doimiyligida yoki $dQ=0$ bo‘lganda aniqlanadi. (2.2) - ga asosan

$$\frac{E_Q}{E_T} = \frac{C_p}{C_V} \qquad (2.3)$$

Agar $\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ - termik kengayish koeffitsiyenti va $\beta = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ - bosim oshishining termik koeffitsiyenti ekanligini hisobga olsak, holat tenglamasi orqali yana bir muhim munosabatni hosil qilish mumkin. $p=p(V,T)$ funksiyasidan

$$dp = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV$$

ekanligini va $dp=0$ bo‘lganda

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T} \text{ yoki } V_0\alpha = -\frac{p_0\beta}{\left(-\frac{1}{\chi V_0}\right)} \text{ va } \alpha = p_0\chi\cdot\beta \qquad (2.4)$$

hosil bo‘ladi.

Holat funksiyasidan foydalanib hosil qilingan C_v, b va S_p, d-kattaliklari orasidagi munosabatlarni, ya’ni termik va kalorik koeffitsiyentlar orasidagi bog‘lanishni topamiz:

$$C_v dT + bdV = C_p dT + d\cdot dp =$$

$$= C_p dT + d\cdot\left[\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T dV\right]$$

dT va dV - lar oldidagi koeffitsiyentlarni taqqoslashtirishdan:

$$C_V = C_p + d \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V; \qquad b = d \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \tag{2.5}$$

Bu yerdagi ikkinchi tenglikni (2.2) formulasini keltirib chiqarishda hosil qilgan edik. Shunday qilib, yuqoridagi barcha munosabatlar $f(T,V,p)=0$ holat tenglamasiga va qabul qilingan koeffitsiyentlarga asoslangan. Termodinamika birinchi va ikkinchi qonunlaridan foydalanish esa yana bir qator qo‘shimcha munosabatlarni hosil qilishga imkon yaratadi.

6.3-§. Termodinamika birinchi qonuniga asoslanib, hosil qilinadigan kalorik koeffitsiyentlar orasidagi munosabatlar

Termodinamika birinchi qonuniga va yuqorida keltirilgan kalorik koeffitsiyentlarga (C_v va b-larga) muvofiq

$$dQ = dE + pdV = C_v dT + bdV =$$

$$= \left(\frac{dE}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T dV + pdV$$

Bundagi dT va dV koeffitsiyentlarni taqqoslab,

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V; \qquad b = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p \tag{3.1}$$

munosabatlarni hosil qilamiz. (2.5) - formulasiga asoslanib, b -ni d - orqali va d -ni (C_V - C_p) orqali ifodalaymiz:

$$d = \frac{C_V - C_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$$

va bundan (2.3) – ni e’tiborga olsak,

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \cdot \frac{C_V - C_p}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V} - p = \frac{C_p - C_V}{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p} - p$$

ya'ni:

$$C_p - C_V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right] \qquad (3.2)$$

hosil bo'ladi. Shunday qilib, C_p va C_V - larni va holat tenglamasini bilgan holda $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$ va $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T$ - larni topish mumkin hamda tajriba natijalariga asoslangan holda tizim energiyasi E=E(V,T) - ni hisoblash mumkin. Bundan tashqari, E - ning aralash ikkinchi tartibli hosilalari tengligidan

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial T}\right)_T = \frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V} = \frac{\partial}{\partial T_V}[b - p] = \frac{\partial}{\partial T_V}\left[d\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T - p\right] \qquad (3.3)$$

Xususiy holda, ideal gaz uchun

$$C_p - C_V = R \qquad (3.4)$$

$p = \frac{RT}{V}$; $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{R}{p}$ bo'ladi va (3.2) - ga asosan

$$R = \frac{R}{p}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right] = R + \frac{R}{p}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T,$$

ya'ni:

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = 0$$

Bu ideal gaz energiyasi tizim hajmiga bog'liq emas demakdir. Bu shartni ideal gaz ta'rifi deb qarash mumkin.

Real gaz uchun $E = E_{id} - \frac{a}{V}$ deb olib, (C_p-C_V) - ni hisoblaylik. (3.2) - ifodasidan

$$C_p - C_V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left[\frac{a}{V^2} + p\right] = \frac{RT}{V-b}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p;$$

Real gaz holat tenglamasi

$$RT = (V-b)\left(p + \frac{a}{V^2}\right)$$

ifodasidan

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{1}{R}\left[p + \frac{a}{V^2} - 2(V-b)\frac{a}{V^2}\right]$$

Va natijada

$$C_p - C_V = \frac{RT}{V-b} \cdot \frac{R}{p + \frac{a}{V^2} - 2(V-b)\frac{a}{V^2}} = \frac{R}{1 - \frac{2(V-b)^2 a}{RTV^3}} \qquad (3.5)$$

6.4-§. Termodinamika ikkinchi qonuniga asoslanib, hosil qilingan kattaliklar orasidagi munosabatlar

Termodinamika ikkinchi qonuni asosida hosil qilingan kalorik koeffitsiyentlar orasidagi munosabatlarni tekshiraylik:

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{Xdx + Ydy}{T}$$

bo‘lgani uchun,

$$\frac{X}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)_y; \quad \frac{Y}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)_x \qquad (4.1)$$

dS - ning to‘la differentsiallik shartidan

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial x}, \text{ ya'ni } \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{X}{T}\right)_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{Y}{T}\right)_y \qquad (4.2)$$

munosabati hosil bo‘ladi. Masalan, x=T, y=V, X=C_V, Y=b bo‘lsin, u holda

$$\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{C_V}{T}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{b}{T}\right)_V \qquad (4.2a)$$

bo‘ladi.

Endi bir vaqtning o‘zida termodinamikaning ham birinchi, va ham ikkinchi qonunidan foydalanamiz:

$$dQ = dE + pdV = \left(\frac{\partial E}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial x}\right)dx + \left(\frac{\partial E}{\partial y} + p\frac{\partial V}{\partial y}\right)dy$$

U holda

$$X = \frac{\partial E}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial x}; \qquad Y = \frac{\partial E}{\partial y} + p\frac{\partial V}{\partial y} \qquad (4.3)$$

bo‘ladi. Bularni (4.2) - ga tadbiq etamiz:

$$\frac{\partial}{\partial y}\cdot\frac{\frac{\partial E}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial x}}{T} = \frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\frac{\partial E}{\partial y} + p\frac{\partial E}{\partial y}}{T} \qquad (4.4)$$

Bundan

$$-\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial E}{\partial x} + p\frac{\partial V}{\partial x}\right)\frac{\partial T}{\partial y} + \frac{1}{T}\cdot\frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{\partial E}{\partial y} + p\frac{\partial V}{\partial y}\right)\frac{\partial T}{\partial x} + \frac{1}{T}\cdot\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial V}{\partial y}$$

yoki, agar (4.3) - ni hisobga olsak,

$$Y\frac{\partial T}{\partial x} - X\frac{\partial T}{\partial y} = T\left(\frac{\partial p}{\partial x}\cdot\frac{\partial V}{\partial y} - \frac{\partial p}{\partial y}\cdot\frac{\partial V}{\partial x}\right) \qquad (4.5)$$

bo‘ladi. Agar x=T, y=V desak, so‘nggi ifodadan

$$\frac{\partial E}{\partial V} + p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \qquad (4.6)$$

hosil bo‘ladi.

Shunday qilib, $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_V$, $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p$ bo‘lganligi uchun, C_V va holat tenglamasini bilgan holda dE - ni integrallab, doimiylikkacha aniqlik bilan $E(T,V)$ - ni topishimiz mumkin.

Endi (4.2a) formulasidan foydalanamiz. $b = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p$ ekanligini hisobga olsak,

$$\frac{1}{T}\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\left(\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right)\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial p}{\partial T}\right]$$

yoki:

$$\left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V \qquad (4.7)$$

ifodasini hosil qilamiz. Bu munosabat bevosita tajribada tekshirilishi mumkin.

Endi bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilar sifatida x=T, y=r bo‘lsin. U holda

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p \qquad (4.8)$$

munosabatini hosil qilishimiz mumkinki, uni ham tajribada tekshirish mumkin.

Biz yuqorida tashqi parametri bitta bo‘lgan holni misollar orqali ko‘rib chiqdik. Endi tashqi parametrlari $a_1, a_2, \ldots a_k \ldots a_m$ ixtiyoriy bo‘lgan holni tekshiraylik:

$$dQ = dE + \sum_{k=1}^{m} \overline{R}_k da_k;$$

$$dS = \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{a_k} dT + \sum_k \left(\frac{\partial E}{\partial a_k} + \overline{R}_k\right) da_k}{T} \qquad (4.9)$$

Shunday qilib, entropiyaning to‘la differentsiallik shartidan:

$$\frac{\partial}{\partial a_r}\cdot\frac{\frac{\partial E}{\partial a_k}+\overline{R}_k}{T}=\frac{\partial}{\partial a_k}\cdot\frac{\frac{\partial E}{\partial a_r}+\overline{R}_r}{T}$$

yoki

$$\frac{\partial \overline{R}_k}{\partial a_r}=\frac{\partial \overline{R}_r}{\partial a_k} \qquad (4.10)$$

Bundan tashqari,

$$\frac{\partial}{\partial a_k}\frac{1}{T}\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{a_k}=\frac{\partial}{\partial T}\left[\left(\frac{\partial E}{\partial a_k}+\overline{R}_k\right)\cdot\frac{1}{T}\right]$$

$$0=-\frac{1}{T^2}\cdot\left(\frac{\partial E}{\partial a_k}+\overline{R}_k\right)+\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial \overline{R}_k}{\partial T}$$

yoki

$$\frac{\partial E}{\partial a_k}+\overline{R}_k=T\frac{\partial \overline{R}_k}{\partial T} \qquad (4.11)$$

Hosil qilingan ushbu tenglik (4.6)-dagi $\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ munosabatni umumlashtirishdir.

Mavzu so‘ngida (C_p-C_V) - ni hisoblaylik. Termodinamika birinchi va ikkinchi qonuniga asosan

$$C_p-C_V=\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T+p\right]=T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=-T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\frac{(\partial p/\partial T)_V}{(\partial p/\partial V)_T}=$$

$$=-T\frac{(\partial p/\partial T)_V^2}{(\partial p/\partial V)_T}=-T\frac{p_0^2\beta^2}{\left(-1/V_0\cdot 1/\chi\right)}$$

Shunday qilib,

$$C_p-C_V=T\cdot\beta^2\cdot p_0{}^2\cdot\chi\cdot V_0 \qquad (4.12)$$

munosabati faqat holat tenglamasi orqali ifodalanadi. Aniqrog‘i (C_p-C_V) termik koeffitsiyentlar orqali ifodalanadi. (4.12) orqali (C_p-C_V) - ni ideal

va real gazlar uchun hisoblash mumkin va natija xuddi oldindagidek (3.4) va (3.5) - ni beradi.

Misol tariqasida termodinamika ikkinchi qonuni va holat tenglamasi orqali tizim o‘rtacha energiyasini hisoblash mumkin ekanligini ko‘raylik. Elektromagnit nurlanishining muvozanatli energiyasini $E = u \cdot V$ ($u(t)$ - energiya zichligi) hisoblash uchun (4.6) formulasidan foydalanamiz. Yorug‘lik nurini to‘la yutuvchi devorga perpendikulyar tushuvchi yorug‘likning bosimi, Lebedev tajribasiga muvofiq, u - ga teng va Maksvell nazariyasiga to‘la mos keladi. Agar yorug‘lik devorga ν burchak ostida tushsa, uning bosimi $u \cdot \cos^2 \nu$ - ga teng va izotrop taqsimlangan muvozanatli nurlanish uchun esa $p = u \cdot \overline{\cos^2 \nu} = u/3$ bo‘ladi. Elektromagnit nurlanish uchun E va p - lar qiymatini (4.6) - formulasiga tadbiq etamiz:

$$\frac{4}{3}u = T \cdot \frac{1}{3}\frac{du}{dT}; \quad \frac{du}{u} = 4\frac{dT}{T}; \quad u = \sigma \cdot T^4 \qquad (4.13)$$

Bu bizga ma’lum bo‘lgan Stefan-Boltsman qonunini anglatadi va tajribaga muvofiqdir. (4.13) - formulasidagi σ - konstantaning qiymatini termodinamik uslub bilan aniqlash mumkin emas, uning qiymati keyinchalik kvant statistikasida hisoblanadi.

6.5-§. Termodinamik potensiallar

Termodinamika birinchi va ikkinchi qonunlariga asoslanib, termodinamik kattaliklar orasida bir qator munosabatlarni hosil qildik. Shu bilan birgalikda turlicha termodinamik tizimlarni tekshirish jarayonida ular nechta holat funksiyasi bilan ifodalanishi mumkin degan savol tug‘ilishi mumkin. Fikrimizni to‘laroq bayon etsak: tizimning, masalan, faqat o‘rtacha energiyasi yoki issiqlik sig‘imi berilgan bo‘lishi bilan uning to‘la xususiyatlarini o‘rganish mumkinmi yoki buning uchun qo‘shimcha yana, masalan, holat tenglamasi berilgan bo‘lishi kerakmi?

Bu savolga statistik uslub bilan fizik kattaliklarni hisoblashning umumiy qoidasidan bevosita javob kelib chiqadi. Ma’lumki, θ - statistik

temperaturasi va a_k - tashqi parametrlar funksiyasi sifatida topilgan $z = \int e^{-\frac{H}{\theta}} d\Gamma$ - holat integrali yoki $\mathcal{F} = -\theta ln z$ -ozod energiya orqali $\mathcal{F}$ - ni oddiy differentsiallash yo‘li bilan tizimning barcha kattaliklarini hisoblash mumkin:

$$E = -T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\mathcal{F}}{T}\right); \quad S = -\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}; \quad p = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V}\right)_T \quad \text{va sh.k.}$$

Umumiy holda

$$d\mathcal{F} = -SdT + \sum_k \overline{R}_k da_k$$

deb olganda, $\mathcal{F}$ - ozod energiya T, a_k – o‘zgaruvchilarida berilgan termodinamik potensial vazifasini bajaradi. So‘nggi ifodadagi $S, \overline{R}_k$ - fizik kattaliklar $\mathcal{F}$ - termodinamik potensialni T, a_k - lar bo‘yicha differentsiallash orqali hosil qilinadi.

Bu yerda S va $\overline{R}_k$ - larni aniqlash mexanikasidagi potensial energiyani koordinatalar bo‘yicha differensiallab, kuchni aniqlash kabidir $(X = -\frac{\partial U}{\partial X})$. Shu asosda $\mathcal{F}(T, a_k)$-termodinamik potensial deyiladi. Turlicha usullar bilan bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilarni tanlab olish mumkin va bunga qarab qabul qilingan turlicha funksiyalar termodinamik potensial vazifasini bajaradi.

O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan o‘zgaruvchilar sifatida a_k-tashqi parametrlarni va E - energiyani qabul qilaylik. Termodinamika ikkinchi qonuniga asosan:

$$dS = \frac{dE + \sum \overline{R}_k da_k}{T};$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial E}\right)_{a_k} = \frac{1}{T}; \qquad \left(\frac{\partial S}{\partial a_k}\right)_T = \frac{\overline{R}_k}{T} \tag{5.1}$$

Demak, (E, a_k)-o‘zgaruvchilarida S-termodinamik potensial bo‘lib xizmat qiladi.

Agar termodinamika ikkinchi qonunini dE - ga nisbatan yozsak,

$$dE = TdS - \sum_k \overline{R}_k da_k \; ; \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{a_k} = T \; ; \left(\frac{\partial E}{\partial a_k}\right)_S = -\overline{R}_k \qquad (5.2)$$

bo‘ladi. Bu yerda E funksiyasi (S,... a_k...) o‘zgaruvchilari orqali berilgan termodinamik potensialdir.

Entalpiya H=E+pV ifodasini qarasak,

$$d\mathrm{H} = d\mathrm{E} + \mathrm{p}d\mathrm{V} + \mathrm{V}d\mathrm{p} = \mathrm{T}d\mathrm{S} + \mathrm{V}d\mathrm{p} \qquad (5.3)$$

(5.3) ifodasi (S,p) o‘zgaruvchilarida berilgan H-entalpiya deb atalmish termodinamik potensialdir. Umumiy holda

$$H = E + \sum_k \overline{R}_k \cdot da_k \; ; \quad dH = TdS + \sum_k a_k d\overline{R}_k$$

$$a_k = \left(\frac{\partial H}{\partial \overline{R}_k}\right)_k ; \quad T = \left(\frac{\partial H}{\partial S}\right)_{\overline{R}_k} \qquad (5.4)$$

Gibbsning termodinamik potensiali $\Phi = \mathcal{F} + \mathrm{pV}$ ni olib qaraylik:

$$d\Phi = -SdT - pdV + d(pV) = -SdT + Vdp \qquad (5.5)$$

Bundan:

$$\mathrm{S} = -(\partial\Phi/\partial\mathrm{T})_\mathrm{P}; \qquad \mathrm{V} = (\partial\Phi/\partial\mathrm{p})_\mathrm{T}$$

Bu yerda Φ - termodinamik potensial T, r o‘zgaruvchilarda berilgan. Umumiy tashqi parametrlar ko‘p bo‘lgan holda

$$\Phi = \mathcal{F} + \sum_k \overline{R}_k \cdot a_k \; ;$$

$$d\Phi = -SdT + \sum_k a_k d\overline{R}_k \; ; \qquad a_k = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \overline{R}_k}\right)_T \qquad (5.6)$$

Shunday qilib, mavzu boshida qo‘yilgan savolga quyidagicha javob berish mumkin:

-Tegishli o‘zgaruvchilarda berilgan termodinamik potensiallardan ixtiyoriy bittasi berilgan bo‘lsa, u orqali tizimning barcha termodinamik xususiyatlarini aniqlash mumkin.

Masalan, E(S, V)-termodinamik potensialni olaylik. Bu holda (5.2) formuladan ko‘rinib turibdiki, temperaturani aniqlash mumkin, boshqacha qilib aytganda, entropiyani temperatura va hajm orqali ifodalash mumkin. Bundan tashqari, (5.2) ga S-ni tatbiq etib $p = -\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_S$, ya’ni holat tenglamasi aniqlanadi. Issiqlik miqdorini $dQ = TdS = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_{a_k} dS$ ifodasidan foydalanib topiladi, bundan esa, o‘z navbatida, issiqlik sig‘imlarini hisoblash mumkin.

Termodinamik tizimni tavsiflamoq uchun parametrlarning berilganligiga qarab termodinamik potensialni tanlab olmoq lozim. Masalan, agar tizim belgilangan temperaturada va belgilangan bosim ostida bo‘lsa, uning holatini o‘rganish - to‘la ifodalash uchun Φ (T,p) - Gibbsning termodinamik potensialidan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

6.6-§. Issiqlik mashinasining foydali ish koeffitsiyenti

Tizim energiyasi dE-to‘la differentsialga ega bo‘lganligi uchun har qanday aylanma jarayonda $\oint dE = 0$ bo‘ladi va $\int_1^2 dE = E_2 - E_1$, ya’ni integrallash tizim bir holatdan ikkinchi holatga o‘tganda o‘tish uslubiga bog‘liq emas.

Termodinamika II-qonunidan foydalanib, issiqlik mashinalari foydali ish koeffitsiyentining yuqori chegarasini aniqlash mumkin. Issiqlik mashinasining ishlashi termodinamika I-qonuni

$$dE = dQ - dA$$

ifodasidagi dQ ham, dA ham to‘la differentsialga ega emasligiga asoslangan. Shuning uchun, agar biror bir tizim aylanma jarayon bajarib, dastlabki holatga kelsa:

$$\oint dE = 0 = \oint dQ - \oint dA \qquad (6.1)$$

bo‘ladi. Vaholanki, alohida $\oint dQ \neq 0$ va $\oint dA \neq 0$, ya’ni mashina bir nechta termostatdan issiqlik miqdori $\oint dQ$ olishi mumkin va uni $A = \oint dA$ ishga aylantirishi mumkin.

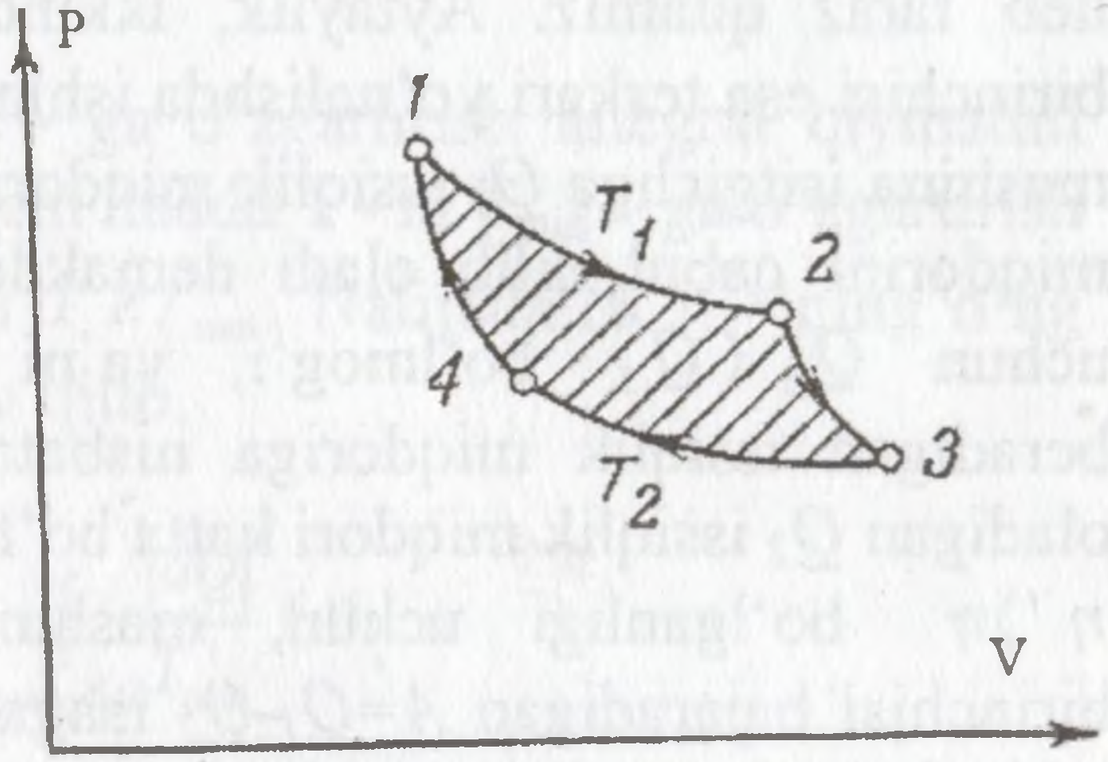
Termodinamika II-qonuniga asosan dQ - issiqlik miqdori almashinuvi kamida ikki jism orasida sodir bo‘lishi mumkin. Tizim faqat bir jismdan issiqlik miqdori qabul qilib, uni to‘la ishga aylantirganda edi, davriy ravishda ishlab turuvchi ikkinchi jinsli mashina yasagan bo‘lar edik.

Afsuski, bunday bo‘lishi mumkin emas!

Oddiy holda T_1 temperaturaga ega bo‘lgan jismdan (isitgichdan) tizim Q_1 issiqlik miqdori oladi va uning bir qismini A-ishga aylantiradi, qolgan $Q_2=Q_1-A$ qismini esa T_2 temperaturali sovutgichga beradi. Tizimning foydali ish koeffitsiyenti (FIK)

$$\eta = \frac{A}{Q_1} \qquad (6.2)$$

bo‘ladi.



8-chizma. Karno tsikli bajaruvchi issiklik mashinasining ishchi jism bosimi va hajmi o‘zgarishi diagrammasi.

Dastlab kvazistatik jarayon bilan ishlovchi mashinani ko‘raylik. Bu holda issiqlik miqdorining qabul qilinishi va berilishi, mos ravishda, $T=T_1$ va $T=T_2$ izotermalarda sodir bo‘lishi lozim. Aks holda, issiqlik o‘tkazuvchanlik jarayoni nokvazistatik bo‘ladi. Tizim T_1 temperaturada Q_1 issiqlik miqdori qabul qilib bo‘lgandan so‘ng tashqi muhit bilan issiqlik miqdori almashinmasdan o‘z temperaturasini $T=T_2$ - gacha pasaytiradi. Bu jarayon adiabatik bo‘ladi. Xuddi shuningdek, sovutgichga Q_2 - issiqlik miqdori berilib bo‘lgach, tizim temperaturasi T_2 dan T_1 - gacha isishi adiabatik jarayon bilan o‘tadi.

Shunday qilib, kvazistatik jarayon bilan ishlayotgan issiqlik mashinasi temperaturalari T_1 va T_2 bo‘lgan faqat bitta isitgich va bitta sovutgich ikki adiabata bilan ajratilgan ikkita izotermadan tashkil topgan sikl bajarilishi lozim. Bunday sikl Karno sikli deb ataladi (*8-chizma*).

Isitgich temperaturasi va sovutgich temperaturasi ham bir xil bo‘lgan kvazistatik jarayon bilan ishlayotgan issiqlik mashinalarining FIK bir-biriga teng bo‘ladi. Bu fikrni isbot qilmoq uchun issiqlik mashinalarining FIK o‘zaro bir – biriga teng bo‘lmaydi deb faraz qilaylik. Aytaylik, ikkinchi mashinaning η'-FIK birinchi mashinaning η- sidan katta, ya’ni:

$$\eta' = \frac{Q_1' - Q_2'}{Q_1'} \rangle \eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \qquad (6.3)$$

deb faraz qilamiz. Aytaylik, ikkinchi mashina to‘g‘ri yo‘nalishda, birinchisi esa teskari yo‘nalishda ishlasin va $Q_1' = Q_1$ bo‘lsin. Bu birinchi mashina isitgichga Q_1 issiqlik miqdori beradi, ikkinchisi esa Q_1 issiqlik miqdorini qabul qilib oladi demakdir. U holda tengsizlik bajarilishi uchun $Q_2' \langle Q_2$ bo‘lmog‘i, ya’ni ikkinchi mashina sovutgichga beradigan issiqlik miqdoriga nisbatan birinchi mashina qabul qilib oladigan Q_2 issiqlik miqdori katta bo‘lmog‘i lozim. Shu bilan birgalikda $\eta' \rangle \eta$ bo‘lganligi uchun, mashina bajaradigan ish $A' = Q_1 - Q_2'$ birinchisi bajaradigan $A = Q_1 - Q_2$ ishga nisbatan katta bo‘ladi. Natijada, tabiatda hech qanday qo‘shimcha o‘zgarish bo‘lmay turib sovutgichning sovutilishi hisobiga ortiqcha $A' - A = Q_2 - Q_2'$ ish bajariladi. Bu esa termodinamika ikkinchi qonuniga ziddir. Demak, $\eta' = \eta$ bo‘ladi.

FIK η-ni topish uchun

$\oint \frac{dQ}{T} = \oint dS = 0$ munosabatidan foydalanamiz.

Bu integralning 1-2 uchastkasi Q_1/T-ni, 3-4 uchastka esa - Q_2/T_2 (issiqlik sovutgichga beriladi)qiymatni beradi, 2-3 va 4-1 uchastkalarida, shartga ko‘ra dQ=0. Shunday qilib

$$Q_1/T_1 - Q_2/T_2 = 0;\ Q_2 = Q_1 T_2/T_1;$$

$$\eta = (Q_1 - Q_2)/Q_1 = 1 - T_2/T_1 \qquad (6.4)$$

Endi issiqlik mashinasi temperaturasi turlicha bo‘lgan isitgichlardan issiqlik miqdori qabul qilsin va turlicha temperaturali sovutgichlarga issiqlik miqdori bersin. U holda

$$\eta < \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}}$$

bo‘lishini isbot qilaylik. Bu yerda

T_{max} - eng yuqori temperaturali isitgich;

T_{min} - eng past temperaturali sovutgich.

Darhaqiqat,

$$\oint \frac{dQ}{T} = \int_{isitgich} \frac{dQ}{T} - \int_{sovutgich} \frac{|dQ|}{T} \qquad (6.5)$$

Birinchi hadda T - ni T_{max} – ga o‘zgartirish integral qiymatini kamaytiradi, chunki $T \le T_{max}$, ikkinchi hadda T - ni T_{min} – ga o‘zgartirish integral qiymatini oshiradi, chunki $T \ge T_{min}$. Natijada (6.5) - ning o‘ng tomoni qiymati kamayadi. Shunday qilib,

$$\int_{isitgich} \frac{dQ}{T_{max}} - \int_{sovitgich} \frac{|dQ|}{T_{min}} < 0;$$

$$\frac{Q_1}{T_{max}} - \frac{Q_2}{T_{min}} < 0; \quad Q_2 > Q_1 \frac{T_{min}}{T_{max}} \qquad (6.6)$$

Demak,

$$\eta < \frac{T_{max} - T_{min}}{T_{max}} \qquad (6.7)$$

Nokvazistatik jarayon bilan ishlaydigan issiqlik mashinasining FIK kvazistatik jarayon bilan ishlaydigan issiqlik mashinasi FIKdan kichik bo‘ladi. Buni isbot qilaylik. Ma’lumki, kvazistatik bo‘lmagan jarayonlar uchun $dS > \frac{dQ}{T}$. Bu tengsizlik ifodasini sikl bo‘yicha integrallaymiz:

$$0 = \oint dS > \oint \frac{dQ}{T} \qquad (6.8)$$

Agartsikl ikki izoterma va ikki adiabatadan tashkil topgan bo‘lsa, (6.8)-ning o‘ng tomoni $\left(\frac{Q_1}{T_1}-\frac{Q_2}{T_2}\right)$ - ga teng bo‘ladi. Shunday qilib,

$$Q_2 \rangle Q_1 \frac{T_2}{T_1} \quad \text{va} \quad \eta \langle \frac{T_1 - T_2}{T_1} \tag{6.9}$$

bo‘ladi.

Amalda barcha issiqlik mashinalari nokvazistatik jarayon bilan ishlaydi. Shuning uchun ularning FIK nazariy chegara qiymatlariga qaraganda ancha kichik bo‘ladi. Masalan, bug‘ bilan ishlaydigan mashina bug‘i $150^0 S$ - gacha qizdirilgan bo‘lsin, uning FIK η=(450-300)/450, ya’ni 33% bo‘lishi lozim. Amalda esa bug‘ bilan ishlaydigan mashinalarning FIK. η=10÷16% bo‘ladi.

Bunday bo‘lishiga asos shundan iboratki, kvazistatik jarayon bilan ishlovchi mashinalar nihoyatda sustlik bilan siklni bajarishi lozim, boshqacha qilib aytganda, bunday mashinalarning quvvati nihoyatda kichik yoki tuzilishi katta bo‘lmog‘i lozim. Iqtisodiy nuqtai nazardan mashina tuzilishini kattalashtirmasdan quvvatini oshirish uchun nokvazistatik jarayon bilan ishlash rejimi tanlab olinadi.

6.7-§. Elektr va magnit maydonida joylashgan tizimga termodinamikaning tatbig‘i

Tashqi jismlar koordinatalari – zaryadlar orqali aniqlanuvchi $\vec{\xi}$ - elektr maydon kuchlanganligining tizimga ta’sirini ko‘rib chiqaylik. Maqsadimiz bunday maydonda joylashgan jism uchun termodinamik kattaliklarni topishdan iboratdir.

Maydon hosil qiluvchi tashqi zaryadlar muhitda ρ(x,u,z) - zichlik bilan taqsimlangan bo‘lsin. Zaryad zichligi $\vec{D}$ - elektr maydon induktsiyasi vektori bilan

$$div\vec{D} = 4\pi\rho \tag{7.1}$$

tenglamasi orqali bog‘lanishga ega.

Har bir hajm elementiga cheksizlikdan $\delta\rho \cdot dV$ zaryadi kiritilsin. Shuning bilan birga elektr maydoniga elektrostatik kuchga qarshi

$\int \varphi \cdot \delta\rho\, dV$ ifodasiga teng bo‘lgan ish bajarilishi lozim bo‘ladi. Bu yerda $\varphi \equiv \varphi(x,u,z)$ - elektrostatik potensialni anglatadi. Ushbu ish tizimimiz energiyasini oshirishga sarflanadi, tizim esa:

$$\delta A = -\int \varphi \cdot \delta\rho\, dV \qquad (7.2)$$

ko‘rinishdagi ish bajaradi. So‘nggi ifodaga (7.1) - ni tadbiq etamiz.

$$\delta A = -\int \varphi \frac{\delta div\, \vec{D}}{4\pi} dV = -\int div \frac{\varphi \cdot \delta \vec{D}}{4\pi} dV + \int (\nabla \varphi) \cdot \delta \vec{D} \frac{dV}{4\pi} \qquad (7.3)$$

Buning o‘ng tomonidagi birinchi integralni Gauss teoremasiga asoslanib, yuza bo‘yicha integralga aylantiramiz va barcha hajmni o‘z ichiga oladigan cheksiz yuza bo‘yicha integrallashga tadbiq etamiz. Bu integral qiymati chegara holda nolga intiladi, chunki uni tashkil etuvchi φ - elektrostatik potensial 1/R bo‘yicha $\vec{D}$ - elektr induktsiyasi $1/R^2$ bo‘yicha kamayadi, yuzaning o‘zi esa radius oshgan sari R^2 qonuniyat bilan osha boradi. Natijada elektr maydon kuchlanganligi $\vec{\xi} = -\nabla\varphi$ ekanligini hisobga olsak,

$$\delta A = -\frac{1}{4\pi}\int \vec{\xi} \cdot \delta \vec{D} dV \qquad (7.4)$$

hosil bo‘ladi. Tashqi a_k - parametrlar sifatida muhitning har bir nuqtasi uchun D_x, D_y, D_z - induktsiya vektori komponentalari to‘plamini qabul qilish mumkin. Bu yerda x,u,z - koordinatalari a_k - parametrlarining k - tartibli raqamini anglatadi. U holda $R_k = -\frac{1}{4\pi}\xi(x,y,z)$ - umumlashtirilgan kuch deb qabul qilinadi. Agar bajariladigan elementar ishni jismning hajm birligi uchun tadbiq etsak, D_x, D_y, D_z - uchta tashqi parametr va $-\xi_x/4\pi$, $-\xi_y/4\pi$, $-\xi_z/4\pi$ uchta umumlashtirilgan kuch mavjud bo‘ladi.

Tizim ozod energiyasining tashqi parametrlarga bog‘liqligini aniqlaylik. Buning uchun bizga ma’lum bo‘lgan $R_k = -\partial\mathcal{F}/\partial a_k$

formulasidan foydalanamiz. Oddiy holda $\vec{D} = \varepsilon \vec{\xi}$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$\frac{\partial f}{\partial D_x} = \frac{\xi_x}{4\pi} = \frac{D_x}{4\pi \cdot \varepsilon}; \quad \frac{\partial f}{\partial D_y} = \frac{\xi_y}{4\pi} = \frac{D_y}{4\pi \cdot \varepsilon}; \quad \frac{\partial f}{\partial D_z} = \frac{D_z}{4\pi \cdot \varepsilon} \tag{7.5}$$

ifodalarini hosil qilamiz. Bu yerda f - ozod energiya zichligi, ε - dielektrik doimiyligi. U holda, (7.5) – ni integrallash natijasida, tizim ozod energiyasi ziehligi

$$f = f_0(T,V) + \frac{D_x^{\,2} + D_y^{\,2} + D_z^{\,2}}{8\pi \cdot \varepsilon} \tag{7.6}$$

bo'ladi.

Xuddi shunday munosabatni magnit maydoni uchun ham $\vec{\xi}$ ni $\vec{H}$ - ga va $\vec{D}$ ni $\vec{B}$ - ga almashtirish yo'li bilan hosil qilish mumkin. Umumiy holda ozod energiya ziehligi

$$f = f_0(T,V) + \frac{1}{8\pi}\left(\frac{D^2}{\varepsilon} + \frac{B^2}{\mu}\right) \tag{7.7}$$

bo'ladi. Bu yerda $\vec{B}$ – magnit maydon induksiya vektori;
μ – magnit doimiysi.

Ixtiyoriy hajm uchun $\mathcal{F} = \int f dV$. Bu integralni olish uchun $\vec{D}$ va $\vec{B}$ -larning koordinatalarga bog'liqligini bilmoq lozim. Qabul qilingan maydonda joylashgan jism entropiyasi va o'rtacha energiyasini hisoblash quyidagicha bo'ladi.

$$S = -\frac{\partial f}{\partial T} = -\frac{\partial f_0}{\partial T} + \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{D^2}{\varepsilon^2} \cdot \frac{\partial \varepsilon}{\partial T} + \frac{B^2}{\mu^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial T}\right\} \tag{7.8}$$

$$E = f + T \cdot S = f_0 - T\frac{\partial f_0}{\partial T} + \frac{1}{8\pi}\left\{\frac{D^2}{\varepsilon^2} \cdot \left(1 + \frac{T}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial T}\right) + \frac{B^2}{\mu^2}\left(1 + \frac{T}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial T}\right)\right\} \tag{7.9}$$

Elektrodinamikada maydon energiyasi deyilganda $\frac{1}{8\pi}\left(\frac{D^2}{\varepsilon^2}+\frac{B^2}{\mu^2}\right)$ tushuniladi. (7.9) - formulasidan ko‘rinib turibdiki, agar ε va μ - larning T - ga bog‘liqligi hisobga olinmasa bu aytganimiz to‘g‘ri bo‘ladi.

Ushbu maydonlarning issiqlik sig‘imini aniqlaylik. Aytaylik, jism isishi D, B va V - lar doimiyligida bo‘lsin. U holda (7.8) - ga asosan

$$C_{V,D,B}=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_{V,D,B}=-T\left(\frac{\partial \mathcal{F}_0}{\partial T^2}\right)_V+\frac{T}{8\pi}\left\{D^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\varepsilon^2}\ \frac{\partial \xi}{\partial T}\right)+B^2\frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\mu^2}\ \frac{\partial \mu}{\partial T}\right)\right\} \quad (7.10)$$

Bu ifodadagi birinchi had $S_V^{(o)}$ -maydonlar ta’siri bo‘lmagandagi issiqlik sig‘imi.

6.8-§. Termodinamika uchinchi qonuni

Termodinamikada uning birinchi va ikkinchi qonunlari asosiy rolni o‘ynaydi. Termodinamikaning uchinchi qonuni kamroq ahamiyatga ega bo‘lsada, usiz termodinamika to‘liq bo‘la olmaydi va bir qator jarayonlarni o‘rganish mumkin bo‘lmaydi.

Nernst (1906 yil) ko‘plab eksperiment natijalarini tahlil qilish natijasida absolyut temperatura nolga intilganda bir jismning ikki holatiga to‘g‘ri keluvchi S_2 va S_1 entropiyalar farqi nolga intiladi, ya’ni

$$T\to 0 \text{ bo‘lganda } S_2-S_1\to 0 \quad (8.1)$$

bo‘ladi degan xulosaga keladi. Bu T=0 bo‘lganda, har qanday muvozanat holatda bo‘lgan tizim entropiyasi, tizim termodinamik parametrlariga bog‘liq bo‘lmagan holda, doimiy bo‘ladi demakdir, ya’ni

$$T=0 \text{ bo‘lganda } S=const \text{ bo‘ladi.} \quad (8.2)$$

Keyinchalik Nernstning bu natijasini yana ham aniqroq qilib, Plank

$$T\to 0 \text{ bo‘lganda } S\to 0$$

bo‘lishini uqtirdi.

Eksperimentlar natijasiga asoslangan bu xulosaga termodinamikaning uchinchi qonuni yoki Nernst teoremasi deyiladi.

Termodinamika uchinchi qonuniga asoslangan holda tajribada bevosita tasdiqlanuvchibir qator muhim xulosalar hosil qilish mumkin.

Shunday xulosalardan biri $T\to 0$ bo‘lganda $C_p\to 0$ bo‘lishini ko‘raylik. Ma’lumki,

$$C_p=\left(\frac{dQ}{dT}\right)_p=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \tag{8.4}$$

Bu ifodani T bo‘yicha integrallaymiz va integrallash paytida quyi chegarani T =0 da S=0 bo‘ladigan qilib tanlab olamiz.

$$S(T,p)=\int_0^T \frac{C_p}{T}\cdot dT \tag{8.5}$$

Entropiya har qanday temperaturada ham chekli qiymatga ega bo‘lganligi uchun, (8.5)-ning o‘ng tomonidagi integralli ifoda ham mavjud bo‘lmog‘i lozim. Ushbu integral ostidagi (C_p/T) funksiyasi $T\to 0$ bo‘lganda (1/T)-oshishiga qaraganda sustroq osha boradi. Bu $T\to 0$ da $C_p\to 0$ bo‘ladi demakdir.

Ma’lumki, Gibbsning termodinamik potensiali (5.5)-ga asosan:

$$S=-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_p;\quad V=\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T$$

Bundan

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{T}}\right)_p \tag{8.6}$$

munosabati bajarilishi bizga ma’lum. Endi S - uchun (8.5) - formulasidan foydalanaylik

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T=-\int_0^T \frac{1}{T}\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T dT$$

Ikkinchi tomondan,

$$C_p=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p=-T\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \mathrm{T}^2}\right)_p$$

Demak,

$$\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T=-T\frac{\partial^3 \Phi}{\partial \mathrm{T}^2\partial p}=-T\left(\frac{\partial^2 V}{\partial \mathrm{T}^2}\right)_p \tag{8.7}$$

(8.7) - ni (8.6) - ga tadbiq etsak,

$$\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\int_0^T \left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p dT = -\left[\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_{p=0}\right]$$

bo‘ladi va (8.6)-ga asosan T=0 da $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0$ kelib chiqadi, ya’ni termik kengayish koeffitsiyenti $\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = 0$ bo‘ladi.

Shunday qilib, temperatura absolyut nolga intilganda, C_p va hajm kengayish termik koeffitsiyenti nolga intiladi. Xuddi shuningdek, $T \to 0$ bo‘lganda, C_v va $\beta = {}^{1}\!/_{p_0}\left({}^{\partial p}\!/_{\partial T}\right)_v$ bosim oshishi termik koeffitsiyentining ham nolga intilishini isbotlash mumkin.

Masalalar

1. Termik qisilish va hajm kengayish koeffitsiyentlari ma’lum bo‘lgan hol uchun 1 kg suvni T_0 temperaturada p_o bosimdan p bosimgacha izotermik qisish vaqtida bajariladigan ish va buning uchun kerak bo‘lgan issiqlik miqdori hisoblansin.

Ye ch i sh: Bajariladigan ish $A = \int r dV$.

V=V(p,T) bo‘lganligi uchun $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp + \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dT$

Masala shartiga asosan $T_0 = const$ bo‘lganligi tufayli $dV = \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$ bo‘ladi. U holda:

$$A = \int_{p_0}^{p_1} p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp = -V_0\beta \int_{p_0}^{p_1} p dp = -\frac{1}{2}V_0\beta\left(p^2 - p^2{}_0\right)$$

Demak, $A = \frac{1}{2}V_0\beta\left(p_0^2 - p^2\right)$.

β - termik qisilish koeffitsiyenti.

$$dQ = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + T_0\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = T_0\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = T_0\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T dp$$

holat tenglamasining differentsial formasi

$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ bo‘lgani uchun, $dQ = -T_0\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p dp$

Ikkinchi tomondan, $dQ = -\alpha V_0 T_0 dp$ va $Q = -\alpha V_0 T_0 \int_{p_0}^{p_1} dp$ - issiqlik miqdori sarf bo‘ladi.

2. Entropiyaning to‘la differentsial ekanligidan foydalanib,

$$\left(\frac{\partial \mathrm{H}}{\partial p}\right)_T = V - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$$

ekanligini isbotlang. (H=E+pV-entalpiya)

Ye ch i sh: dS - ning dH orqali ifodasini topaylik:

$$TdS = dE + pdV = d(\mathrm{H} - pV) + pdV = d\mathrm{H} - Vdp$$

Ikkinchi tomondan, H=H(T,p) bo‘lganligi uchun

$$dH = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T dp$$

U holda

$$dS = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p dT + \frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right] dp$$

S - to‘la differentsialga ega bo‘lganligi uchun

$$\frac{\partial}{\partial p}\left[\frac{1}{T}\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_p\right] = \frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{1}{T}\left[\left(\frac{\partial H}{\partial p}\right)_T - V\right]\right\}$$

Bundan $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_T = V - \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ ekanligi kelib chiqadi.

3. Yakobianlar uslubidan foydalanib,

$$\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_S = \frac{C_V}{C_P}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$$ ekanligini isbotlang.

Ye ch i sh:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S = \frac{\partial(V,S)}{\partial(p,S)} = \frac{\partial(V,S)}{\partial(V,T)} \cdot \frac{\partial(V,T)}{\partial(p,S)} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \cdot \frac{\partial(V,T)}{\partial(p,T)} \cdot \frac{\partial(p,T)}{\partial(p,S)} =$$

$$= \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{C_V}{T}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T \cdot \frac{T}{C_p}$$

4. Yakobianlar uslubidan foydalanib, $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$;

$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S = \frac{T}{C_p}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$; $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V}$ tengliklarni isbotlang.

7-bob.KVANT STATISTIKASI

7.1-§. Kvant mexanikasidagi ba'zi ma'lumotlar

Ma'lumki, kvant mexanikasiga asoslangan statistik fizika kvant statistik fizikasi deyiladi. Demak, bunday holda tizimlarning ko'plab xususiyatlarini o'rganmoq uchun kvant mexanikasi apparatidan foydalanmoq lozim. Kvant mexanikasiga asosan bir vaqtning o'zida o'zaro qo'shma bo'lgan q-koordinata va r-impulslarni aniq o'lchash mumkin emas. Agar koordinata Δq - gacha va impuls Δp - gacha aniqlik bilan o'lchansa, u holda

$$\Delta q \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$

(Geyzenbergning noaniqlik prinsipi) bajariladi. Bundagi koordinata qanchalik katta aniqlik bilan o'lchansa, impulsni o'lchashda shunchalik katta xatolikka yo'l qo'yamiz va aksincha. Shuning uchun barcha o'lchov asboblarini ikki sinfga, ya'ni koordinata va vaqtni, hamda impuls va energiyani o'lchovchi asboblarga ajratish mumkin. Har qaysi turdagi asboblar yordami bilan tegishli fizik kattaliklarni istalgancha aniqlik bilan bir vaqtda o'lchash mumkin.

Kvant mexanikasida tizim holati shu tizimning q koordinatalari va t-vaqtga bog'liq bo'lgan $\psi(q,t)$ to'lqin funksiyasi orqali xarakterlanadi. $|\psi(q,t)|^2$ kattaligi esa tizimning koordinatalari $q \sim q+dq$ oralig'ida bo'lishi ehtimoliyatini anglatadi. To'lqin funksiyasi

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi \qquad (1.1)$$

Shredinger tenglamasini qanoatlantiradi. ($i = \sqrt{-1}$; $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ - Plank doimiysi).

Agar to‘lqin funksiyasi va uning birinchi tartibli hosilasi muhitning butun sohasida chekli va uzluksiz bo‘lsa, (1.1) ni yechish yo‘li bilan $\psi(q,t)$ ni topish mumkin. $\hat{H}$ - tizim uchun Gamilton operatori, u Gamilton funksiyasidagi r_i umumlashtirilgan impulslarni $\hat{P}_i = -i\hbar \frac{\partial}{\partial q_i}$ operatorlar bilan almashtirish vositasida hosil qilinadi.

Nazariyada bevosita vaqtga bog‘liq bo‘lmagan hol muhim rol o‘ynaydi. Bunday hol uchun (1.1) tenglamaning yechimini quyidagi

$$\Psi(q,t) = \psi(q) \cdot e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \qquad (1.2)$$

ko‘rinishda izlash mumkin. Bu erda $E = const$ (energiya birligiga ega). (1.2) ni (1.1) ga qo‘yib, $\psi(q)$ uchun vaqtga bog‘liq bo‘lmagan

$$\hat{H}\psi(q) = E \cdot \psi(q) \qquad (1.3)$$

tenglamani hosil qilamiz. $\psi(q)$ ning chekli va bir jinslilik shartlariga bo‘ysunishini talab etib, muhitning chekli sohasi uchun bir qator diskret $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ xususiy qiymatlarni va ularga mos keluvchi $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n \ldots$ xususiy funksiyalarni hosil qilish mumkin.

Kvant statistikasidan foydalanishda erkin harakatlanuvchi zarralarning, chiziqli ostsillyatorning, rotatorning va vodorod atomining energetik sathlarini bilish juda muhimdir. Shuning uchun quyida bunday kvant tizimlaridan, masalan, hajmi $V=L^3$ bo‘lgan kub quti ichida joylashgan zarraga tegishli masalani batafsil ko‘rib chiqaylik.

Kub ichida *m*-massali zarraga potensial energiya qiymatining kub chegarasida cheksizga sakrab o‘zgarishdan tashqari hech qanday maydon ta’sir etmasin. Kub ichidagi zarra uchun Gamilton operatori

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\left(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2\right) = -\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 \qquad (1.4)$$

Bu yerda $\hat{p}_x = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ va sh.k.;

∇^2 - Laplas operatori.

U holda kub ichidagi zarralarining statsionar holati

$$\nabla^2\psi = -\frac{2mE}{h^2}\psi \qquad (1.3')$$

ko‘rinishidagi tenglama bilan tavsiflanadi. Agar x,y,z koordinata o‘qlarini kub qirralari bo‘yicha yo‘naltirsak, $(1.3')$ tenglamasining yechimini

$$\psi(x,y,z) = \psi_1(x)\cdot\psi_2(y)\cdot\psi_3(z) \qquad (1.5)$$

ko‘rinishida izlash mumkin. Buni $(1.3')$ ga qo‘yib, so‘ngra butun tenglamani $\psi(x,y,z)$ ga bo‘lib yuborsak,

$$\frac{1}{\psi_1}\cdot\frac{d^2\psi_1}{dx^2}+\frac{1}{\psi_2}\cdot\frac{d^2\psi_2}{dy_2}+\frac{1}{\psi_3}\cdot\frac{d^2\psi_3}{dz^2}=-\frac{2m}{h^2}E$$

tenglama hosil bo‘ladi. Har biri bitta o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lgan uch had yig‘indisi doimiydir. Bunday bo‘lishi uchun undagi har bir had doimiy bo‘lishi kerak, ya’ni:

$$\frac{1}{\psi_1}\cdot\frac{d^2\psi_1}{dx^2}=-k_x^2;\quad \frac{1}{\psi_2}\cdot\frac{d^2\psi_2}{dy_2}=-k_y^2;\quad \frac{1}{\psi_3}\cdot\frac{d^2\psi_3}{dz^2}=-k_z^2$$

Demak,

$$E=\frac{\hbar^2}{2m}\left(k_x^2+k_y^2+k_z^2\right)=\frac{\hbar^2k^2}{2m} \qquad (1.6)$$

va

$$\psi_1(x)=A\sin(k_x x)+B\cos(k_x x) \qquad (1.7)$$

$\psi_1(y),\psi_1(z)$-lar uchun ham (1.7) kabi ko‘rinishga ega bo‘lamiz. k_x, k_y, k_z – larni to‘lqin vektorining tashkil etuvchilari deb qarash mumkin. To‘lqin funksiyasi uzluksiz bo‘lishi uchun

(1.5) kub chegarasida ham nolga teng bo‘lishi lozim. U holda x=0 va x=L da (1.7) dan:

$$B=0; \quad A\cdot sin(k_x\cdot L)=0$$

Bundan

$$k_x=\frac{n_1\pi}{L};$$

shuningdek, $k_y=\frac{n_2\pi}{L}$; $k_z=\frac{n_3\pi}{L}$ - ixtiyoriy musbat sonlar. Bularni (1.5) va (1.6) ga qo‘yib, to‘lqin funksiya va energiya uchun quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\psi(x,y,z)=A\sin\left(\frac{n_1\pi\, x}{L}\right)\sin\left(\frac{n_2\pi\, y}{L}\right)\sin\left(\frac{n_3\pi\, z}{L}\right) \qquad (1.8)$$

$$E=\frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2) \qquad (1.9)$$

Energetik spektr ε ning bu yerda diskretligi ko‘rinib turibdi. Lekin makroskopik sohalar uchun energetik sathlar juda zich joylashgan bo‘ladi. Bunday spektrni kvaziuzluksiz spektr deyiladi. Bunday ko‘rinishdagi energetik spektr idish ichidagi ideal gaz statistikasi, hamda qattiq jismda erkin harakat qiluvchi elektronlar xususiyati tekshirilganda ishlatiladi.

7.2-§. Mikrozarralarning aynan o‘xshashlik prinsipi

Klassik mexanikada bir xil zarralar, ularning fizik xususiyatlari bir xil bo‘lishiga qaramasdan, o‘zining «individualligini» saqlaydi, va ularning har biri ma’lum bir trayektoriyaga ega. Kvant mexanikasida esa noaniqlik munosabatiga ko‘ra zarralar xulqi bir-biridan tubdan farq qiladi. Bu holda zarralar trayektoriyaga ega emas. Agar belgilangan biror vaqtda zarraning egallagan o‘rni ma’lum bo‘lsa, cheksiz kichik vaqt o‘tgach shu zarra koordinatasi ma’lum qiymatga ega bo‘lmaydi. Shunday qilib, kvant mexanikasida tizimdagi bir xil zarralarning har birini kuzatish mumkin emas va shuning uchun ularni bir-biridan farq qilib bo‘lmaydi.

Ikkita vodorod atomidan tashkil topgan tizimni misol tariqasida qaraylik. Agar bu ikki atom bir-biridan etarlicha uzoqda bo‘lsa va uning elektron qatlamlari o‘zaro qoplanmagan bo‘lsa, har bir elektron o‘zining yadrosiga tegishli bo‘lib, u atrofida ma’lum bir qonuniyat bilan harakat qiladi. Atomlarni bir-biriga yaqinlashtirsak, ularning elektron qatlamlari o‘zaro qoplanadi. Bu elektron qatlamlarining o‘zaro qoplanish sohasida ikkala elektronni ham uchratish ehtimolligi paydo bo‘ladi. Aytaylik, shu qoplanish sohasida bitta elektron kuzatilsin, shu elektronning qaysi yadroga tegishli ekanligini aniqlab bo‘lmaydi. Bu kvant zarralarining aynan o‘xshashlik natijasidir.

Ko‘plab o‘xshash zarralar kvant mexanikasi-kvant statistikasida bir qator spetsifik xususiyatlarga ega. Bu xususiyatlardan asosiysi zarralarning aynan o‘xshashlik printsipiga binoan tizimdagi zarralarning o‘rnini almashtirishdan uning holati o‘zgarmaydi.

Ikkita aynan bir xil zarrali oddiy hol uchun bu xususiyatning namoyon bo‘lishini ko‘rib chiqaylik. Bunday tizimning to‘lqin funksiyasi $\psi(q_1,q_2,t)$ bo‘lsin. Undagi ikkala zarraning o‘rnini almashtirishdan hosil bo‘lgan to‘lqin funksiya $\psi'=\psi(q_2,q_1,t)$ zarralarning aynan o‘xshashlik prinsipiga binoan tizimning dastlabki holat to‘lqin funksiyasi $\psi(q_1,q_2,t)$ dan farq qilmaydi. Shunday qilib, $\psi(q_1,q_2,t)$ va $\psi'=\psi(q_2,q_1,t)$ to‘lqin funksiyalari tizimning bitta holatini xarakterlaydi. Ma’lumki, bu xil fizik holatni xarakterlovchi to‘lqin funksiyalari bir-biridan faqat doimiy ko‘paytuvchi bilan farq qiladi. Shuning uchun

$$\psi(q_1,q_2,t)=\lambda\psi(q_2,q_1,t) \qquad (2.1)$$

$(\lambda=const)$

Agar zarralar o‘rnini ikki marta o‘zgartirsak tizim dastlabki holatga o‘tadi. U holda to‘lqin funksiyasi umuman o‘zgarmasligi lozim va (2.1) ga asosan:

$$\psi(q_1,q_2,t)=\lambda(\lambda\psi(q_2,q_1,t))=\lambda^2\psi(q_1,q_2,t)$$

ya’ni,

$$\lambda^2=1;\quad \lambda=\pm 1$$

Bu esa zarralar o‘rmi almashganda tizimning to‘lqin funksiyasi o‘zgarmasligini (λ=1) yoki uning ishorasi o‘zgarishini (λ = -1) bildiradi.

Shuning uchun aynan o‘xshash zarralar kvant statistikasi ikki xil to‘lqin funksiyasining biri bilan xarakterlanadi. Bular simmetrik (λ=1) to‘lqin funksiyasi va antisimmetrik (λ= -1) to‘lqin funksiyalaridir.

Tizimning simmetrik yoki antisimmetrik to‘lqin funksiyasi bilan xarakterlanishi uni tashkil etuvchi aynan o‘xshash zarralar turiga bog‘liq.

Agar tizim dastlab simmetrik yoki antisimmetrik to‘lqin funksiyasi bilan ifodalanadigan bo‘lsa, vaqt o‘tishi bilan uning simmetrik xususiyati o‘zgarmaydi. Boshqacha qilib aytganda, tizim simmetrik yoki antisimmetrik holatda qolaveradi.

Tizimning simmetrik yoki antisimmetrik to‘lqin funksiyasi bilan ifodalanishi uni tashkil etuvchi elementar zarralar xususiyati orqali aniqlanadi. Spini butun songa teng bo‘lgan zarralar simmetrik to‘lqin funksiyasi bilan, spini kasr songa teng bo‘lgan zarralar esa antisimmetrik to‘lqin funksiyasi bilan ifodalanishi aniqlangan. Birinchi turdagi zarralarga bozonlar, ikkinchi turdagilariga esa fermionlar deyiladi.

Murakkab zarralar to‘plamidan tashkil topgan tizimning simmetriyasini aniqlamoq uchun murakkab zarraning to‘la spinini bilmoq lozim. Xuddi yuqoridagidek, agar murakkab zarra to‘la spini butun bo‘lmasa, antisimmetrik to‘lqin funksiyasi bilan tavsiflanadi.

7.3-§. Kvant tizimlarning statistik taqsimoti

Kvant tizimlar uchun kanonik taqsimot klassik statistik fizikadagi taqsimotni umumlashtirish yo‘li bilan bo‘ladi, ya’ni undagi H(q,p) Gamilton funksiyasini $\hat{H}(q,\frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q})$ operator bilan almashtiriladi.

Shunday qilib, statistik muvozanat holatda kvant tizimlar uchun zichlik matritsasi

$$\hat{w} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\hat{H}}{\theta}} \qquad (3.1)$$

Bu birga normalashtirilgan

$$Sp(\hat{w}) = \sum_m w_{mm} = \sum_m \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \left| a_m^{(k)} \right|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} 1 = 1 \qquad (3.2)$$

Zichlik matritsasi (3.1) faqat $\hat{H}$ - ga bog‘liq, shuning uchun $\hat{w}$ vaqtga bog‘liq bo‘lmaydi, ya’ni taqsimot statsionar. φ_n-bazisli funksiyalar tasvirida $\hat{w}$ -operatori o‘zining matritsali elementlari orqali aniqlanadi.

$$w_{mn} = \int \psi_m^* \hat{w} \psi_n d\tau$$

Bu va (3.1) ga asosan zichlik matritsasining diagonal elementlari

$$w_{mn} \equiv w_n = \frac{1}{z} \int \psi_n^* \hat{w} \varphi_n e^{-\frac{\hat{H}}{\theta}} \psi_n d\tau \qquad (3.3)$$

Ma’lumki,

$$\int \psi_n^* \psi_n d\tau = \int |\psi|^2 d\tau = 1;$$

$$\hat{H}\psi_n = E_n \psi_n \quad \text{va} \quad e^{-\frac{\hat{H}}{\theta}} \psi_n = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\theta^l} \hat{H}^l \psi_n = \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{\theta^l} E_n^l \psi_n = e^{-\frac{E_n}{\theta}} \psi_n$$

Shuning uchun:

$$w_n = \frac{1}{Z} \cdot e^{-\frac{E_n}{\theta}} \qquad (3.4)$$

$\hat{w}$ - (3.1) matritsaning (3.4) ko‘rinishidagi energetik tasvirini aksariyat hollarda statistik matritsa deb ataydilar. Bu holda (3.2)-normallashtirish sharti:

$$Z = \sum_n g_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{\theta}} \qquad (3.5)$$

n

bo‘ladi. g_n - bu yerda n-chi sathining aynish darajasini anglatadi va statistik vazn deb ataladi.

Tizimning o‘rtacha energiyasi:

$$\overline{E} = Sp\left\{\hat{w}\hat{H}\right\} = \sum_n g_n \varepsilon_n w_n = \theta^2 \frac{\partial \ln z}{\partial \theta} \tag{3.6}$$

Ozod energiya va entropiya tushunchalarini kvant tizimlariga umumlashtiramiz:

$$\mathcal{F} = -\theta \ln Z \tag{3.7}$$

$$S = k_0 Sp\{\hat{w} \ln \hat{w}\} \tag{3.8}$$

$\hat{w}$ - zichlik matritsasi. (3.3),(3.1) va (3.7)-dan

$$S = k_0 \cdot Sp\left\{\hat{w} \cdot \frac{\mathcal{F} - \hat{H}}{\theta}\right\}$$

yoki (3.2) va (3.8) – larni hisobga olsak:

$$\frac{1}{k_0} \cdot S = \frac{\overline{E} - \mathcal{F}}{\theta} = \frac{\partial}{\partial \theta}(\theta \cdot \ln Z) \tag{3.8a}$$

(3.7) ni e'tiborga olgan holda (3.1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\hat{w} = e^{\frac{\mathcal{F} - \hat{H}}{\theta}} \tag{3.9}$$

$$\frac{1}{\theta} = \frac{1}{k_0} \cdot \frac{dS}{d\overline{E}} \tag{3.10}$$

Statistik muvozanat holatda G kattaligining kvant tizimi uchun o'rtacha qiymati

$$\overline{<G>} = \sum_{m,n} w_{nm} G_{nm} = \sum_m (\hat{w}\hat{G})_{mm} =$$

$$= Sp(\hat{w}\hat{G}) = Sp\left\{\frac{1}{Z} e^{-\frac{\hat{H}}{\theta}} \hat{G}\right\} = \frac{1}{Z} \sum_n G_{nn} e^{-\frac{E_n}{\theta}} \tag{3.11}$$

Bu yerda G kattaligi $\hat{G}$-operatorining energiya tasavvuridagi matritsa elementi,

$$G_{nn} = \int \psi_n^* \hat{G} \psi_n d\tau \qquad (3.12)$$

ψ_n esa $\hat{H}$ operatorining xususiy funksiyasi.

Kvant statistik o‘rtachani topishning xarakterli xususiyati shundan iboratki, unda $d\tau$ bo‘yicha integrallashga bog‘liq bo‘lgan kvant mexanikasidagi qoida bo‘yicha o‘rtachalashtirish (<...>) va $k=1,2,3....$ yig‘indi bilan bog‘liq bo‘lgan ansambl bo‘yicha o‘rtachalashtirishdir.

Misol tariqasida kvant ostsillyatorning statistik xususiyatlarini ko‘rib chiqaylik. Uning energiyasi kvantlangan va faqat diskret qiymatlar qabul qiladi.

Chiziqli garmonik otsillyator energiyasining xususiy qiymati $E = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ bo‘lganligi uchun statistik vazn $g_n=1$ bo‘ladi. U holda statistik yig‘indi

$$Z = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\varepsilon_n}{\theta}} = e^{-\frac{\hbar\omega}{2\theta}} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{\hbar\omega}{2\theta}n} \qquad (3.13)$$

Cheksiz ravishda geometrik progressiya bilan ($e^{-\frac{\hbar\omega}{2\theta}}$) kamayib boruvchi qator formulasini statistik yig‘indiga tadbiq etamiz:

$$Z = \frac{e^{-\frac{\hbar\omega}{2\theta}}}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{\theta}}} \qquad (3.14)$$

Bu va (3.6) dan ostsillyatorning o‘rtacha energiyasi uchun

$$\bar{\varepsilon} = \theta^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial \theta} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{e^{(-\hbar\omega/\theta)} - 1} \qquad (3.15)$$

ifodasini hosil qilamiz. Temperaturaga bog‘liq bo‘lmagan $\frac{\hbar\omega}{2}$ hadga va $\theta \to 0$ da ham $\overline{E}$ da saqlanuvchi bu hadga nolinchi energiya deyiladi.

Yuqori temperaturalarda $(\theta >> \hbar\omega)$ (3.15) – formulasidagi $e^{\frac{\hbar\omega}{\theta}}$ - ni $\frac{\hbar\omega}{\theta}$ bo‘yicha qatorga yoyish mumkin. U holda

$$\overline{\varepsilon} = \frac{\hbar\omega}{2} + \frac{\hbar\omega}{\frac{\hbar\omega}{\theta} + \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{\theta}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\hbar\omega}{\theta}\right)^3 + \ldots} \approx \theta\left[1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar\omega}{\theta}\right)^2\right] \qquad (3.16)$$

7.4-§. Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari

Zarralarning kvant xususiyati bo‘lgan aynan o‘xshashlik prinsipini hisobga olgan holda ularning kvant holatlar bo‘yicha taqsimot funksiyasini hisoblaymiz. Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlarini aynan bir xil zarralar (elektron, fonon, foton va shu kabilar) to‘plamidan tashkil topgan ideal gaz uchun keltirib chiqaramiz va bu taqsimotlar xususiyatlarini tekshiramiz.

Taqsimot funksiyasini hisoblash uchun zarralar soni o‘zgaruvchi bo‘lgan tizim (ochiq tizim)ga Gibbsning katta kanonik taqsimotini tadbiq etamiz. Buning uchun zarralarning aynan o‘xshashlik prinsipini hisobga olgan holda taqsimot funksiyasida zarralarning o‘rin almashtirishini hisobga oluvchi $\left(\frac{1}{N!}\right)$ ko‘paytuvchisi bo‘lmaydi. Demak, kvant statistikasi uchun energetik tasvirda katta kanonik taqsimotni

$$w_{N_i} = e^{\frac{\Omega + N\mu - E_{N_i}}{\theta}} \qquad (4.1)$$

ko‘rinishda olishimiz mumkin.

w_{N_i} - bu E_{N_i} energiyali i-nchi kvant holatda N-ta zarrali tizimning bo‘lish ehtimoliyati zichligi.

Bizni n_k ta zarraning (n_k<N) E energiyaga ega bo‘lgan $\vec{k}$ kvant holatda bo‘lish ehtimolligi qiziqtiradi. O‘zaro ta’sirga ega bo‘lmagan zarralar to‘plamidan tashkil topgan tizimning to‘la zarralar

soni va energiyasi undagi kvant holatlarga to‘g‘ri keluvchi zarralar soni va energiyasi orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$N = \sum_k n_k \tag{4.2}$$

$$E_{N_i} = \sum_k n_k \cdot \varepsilon_k \tag{4.3}$$

(4.2) va (4.3) ifodalarda yig‘indi zarralarning barcha kvant holatlari bo‘yicha olingan. Har bir kvant holat uning to‘rtta kvant soni – bosh kvant son, orbital kvant son, magnit kvant son va spin kvant sonlarining berilishi bilan to‘la tavsiflanadi.

So‘nggi (4.2) va (4.3) ifodalarni hisobga olgan holda *i*-chi kvant holatiga to‘g‘ri keluvchi zarralar soni quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\bar{n}_i = \sum_i n_i W_{N_k} = \sum_{n_i} n_i e^{\frac{\Omega + \sum_k (\mu - \varepsilon_k) n_k}{\theta}} \tag{4.4}$$

Tizim holati n_i butun sonlar orqali aniqlanadi. Shuning uchun kvant holatlar bo‘yicha olingan yig‘indi barcha n_i lar bo‘yicha olingan yig‘indi bilan almashtirish mumkinligini (4.4) da hisobga oldik. Yoki (4.4) ni

$$\bar{n}_i = \sum_{n_i} n_i e^{\frac{(\mu - \varepsilon_i) n_i}{\theta}} \sum_{k \neq i} e^{\frac{\Omega + \sum_{k \neq i} (\mu - \varepsilon_k) n_k}{\theta}} \tag{4.4a}$$

ko‘rinishida ham yozish mumkin.

Ma’lumki, katta kanonik taqsimotning normallashtirish sharti

$$\sum_{n_i} W_{N_i} = \sum_{n_i} e^{\frac{\Omega + \sum_k (\mu - \varepsilon_k) n_k}{\theta}} = 1 \tag{4.5}$$

edi. Bundan

$$\sum_{n_{k\neq i}} e^{\frac{\Omega+\sum\limits_{k\neq i}(\mu-\varepsilon_k)n_k}{\theta}} = \left(\sum_{n_i} e^{\frac{(\mu-\varepsilon_i)n_i}{\theta}}\right)^{-1}$$

Hosil bo‘lgan bu ifodani (4.4a) ga tadbiq etamiz. U holda *i*-kvant holatga to‘g‘ri keladigan o‘rtacha zarralar soni quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\overline{n_i} = \left(\sum_{n_i} n_i e^{\frac{(\mu-\varepsilon_i)n_i}{\theta}}\right)\left(\sum_{n_i} e^{\frac{(\mu-\varepsilon_i)n_i}{\theta}}\right)^{-1} = \theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\left(\sum_{n_i} e^{\frac{(\mu-\varepsilon_i)n_i}{\theta}}\right) \qquad (4.6)$$

Taqsimot funksiyasining $\left(\overline{n_i} \equiv w(\varepsilon_i)\right)$ natijaviy ko‘rinishini hosil qilish uchun (4.6)-ifodasidagi yig‘indilarni hisoblash lozim. Bu yig‘indini hisoblashda zarralarning ikki turini bir-biridan farq qilish lozim. Elementar zarralarning bir turi Pauli prinsipiga bo‘ysunadi. Ikkinchi turi esa bu prinsipga bo‘ysunmaydi. Pauli prinsipiga binoan bir kvant holatda spini butun bo‘lmagan faqat bitta elementar zarra joylashishi mumkin (elektron, μ-mezon, nuklon). Bunday zarralar to‘plami antisimmetrik to‘lqin funksiyasi bilan ifodalanishini biz yuqorida ko‘rib o‘tgan edik. Shuning uchun yig‘indini olish qoidasiga qarab biz yuqorida ikki xil taqsimotni hosil qilamiz. Bu esa aynan o‘xshash bo‘lgan zarralar to‘plamining makroskopik xususiyatlari turlicha bo‘lishini ko‘rsatadi. Demak, hisoblashning aynan shu qismida Fermi-Dirak va Boze-Eynshteyn taqsimotlarining farqi namoyon bo‘ladi.

Fermi-Dirak statistikasida belgilangan *i*-nchi kvant holatida yo bitta zarra bo‘ladi yoki umuman zarra bo‘lmaydi va n_i ning qiymati nolga yoki birga teng bo‘ladi. Shuning uchun fermionlardan tashkil topgan tizimlarda

$$\sum_{n_i=0}^{1} e^{\frac{(\mu-\varepsilon_i)n_i}{\theta}} = 1 + e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}}$$

bo‘ladi. Bu ifodani (4.6) ga tadbiq etib, quyidagi ko‘rinishdagi Fermi-Dirak taqsimotini hosil qilamiz:

$$\overline{n_i} = w_\phi(\varepsilon_i) = \theta \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\ln\left(1+e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}}\right)\right] = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}}+1} \qquad (4.7)$$

Boze-Eynshteyn statistikasiga tegishli bo‘lgan hol uchun esa (4.6) dagi yig‘indini hisoblash sal murakkabroqdir. Bu holda har bir kvant holatda ixtiyoriy sondagi zarralar bo‘lishi mumkin, ya’ni $n_i=0,1,2,3,\ldots,N$. Biz N-ni ∞-lik bilan almashtiramiz, chunki barcha zarralarni bir kvant holatda bo‘lish ehtimolligi nihoyatda kichik. Bu holda (4.6) dagi yig‘indi quyidagi formula orqali hisoblanadi. Agar $x<1$ bo‘lsa, quyidagi yig‘indi cheksiz kamayib boruvchi geometrik progessiyani tashkil etadi va

$$\sum_{j=0}^{\infty} x^{(j)} = \frac{1}{1-x} \qquad (4.8)$$

bo‘ladi.

Bizning holimizda $x \equiv e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}}$. Bunga asosan (4.6) dagi yig‘indi energiyaning ixtiyoriy qiymatida, va hatto $\varepsilon_k=0$ bo‘lganda ham yaqinlashuvchi xarakterga ega bo‘lganligi uchun (4.8) tenglikdan foydalanishimiz mumkin, agar

$$e^{\frac{\mu}{\theta}} < 0, \qquad \text{ya’ni } \mu<0 \qquad (4.9)$$

bo‘lsa. Natijada (4.9) ni hisobga olgan holda (4.8) ni (4.6) ga tadbiq etib, Boze-Eynshteyn taqsimoti uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\overline{n_i} \equiv w_B(\varepsilon_i) = -\theta \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\ln\left(1-e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{\theta}}\right)\right] = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}}-1} \qquad (4.10)$$

Shunday qilib, kvant xarakterga ega bo‘lgan ideal gaz uchun taqsimot funksiyalari

$$w(\varepsilon_i) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{\theta}} \pm 1} \qquad (4.11)$$

Bu yerda «+» ishora Fermi-Dirak va «-» ishorasi esa Boze-Eynshteyn taqsimotlariga ta’lluqlidir.

7.5-§. Kvant va klassik taqsimotlarni taqqoslashtirish

Fermi-Dirak va Boze-Eynshteyn taqsimotlari (4.11) uchun:

$$e^{\frac{\mu}{\theta}} << 1 \qquad (5.1)$$

tengsizligi bajarilsa, bunday taqsimotlar maxrajidagi eksponensial had «1» soniga nisbatan juda katta bo‘ladi. Agar bunday hol uchun maxrajdagi «1» sonini hisobga olmasak, kvant taqsimotlari klassik statistikasidagi Maksvell-Boltsman taqsimotini beradi:

$$w_M(\varepsilon_k) = e^{\frac{\mu-\varepsilon_k}{\theta}} \qquad (5.2)$$

Bir atomli ideal klassik gaz uchun kimyoviy potensialni hisoblasak,

$$\mu = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N}\right)_{T,V} = \theta \cdot \ln \frac{n \cdot h^3}{(2\pi m n \theta)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5.3)$$

bo‘ladi. Bu yerda

$n = \frac{N}{V}$ - gaz zarralari konsentratsiyasi

$\mathcal{F}$ - tizimning ozod energiyasi.

Bundan

$$e^{\frac{\mu}{\theta}} = \frac{n \cdot h^3}{(2\pi m \theta)^{\frac{3}{2}}} \qquad (5.4)$$

bo‘ladi, ya’ni $n \cdot h^3$ aniqlik bilan Maksvell taqsimotining normallashtirish doimiysiga muvofiq keladi.

Shuning uchun,

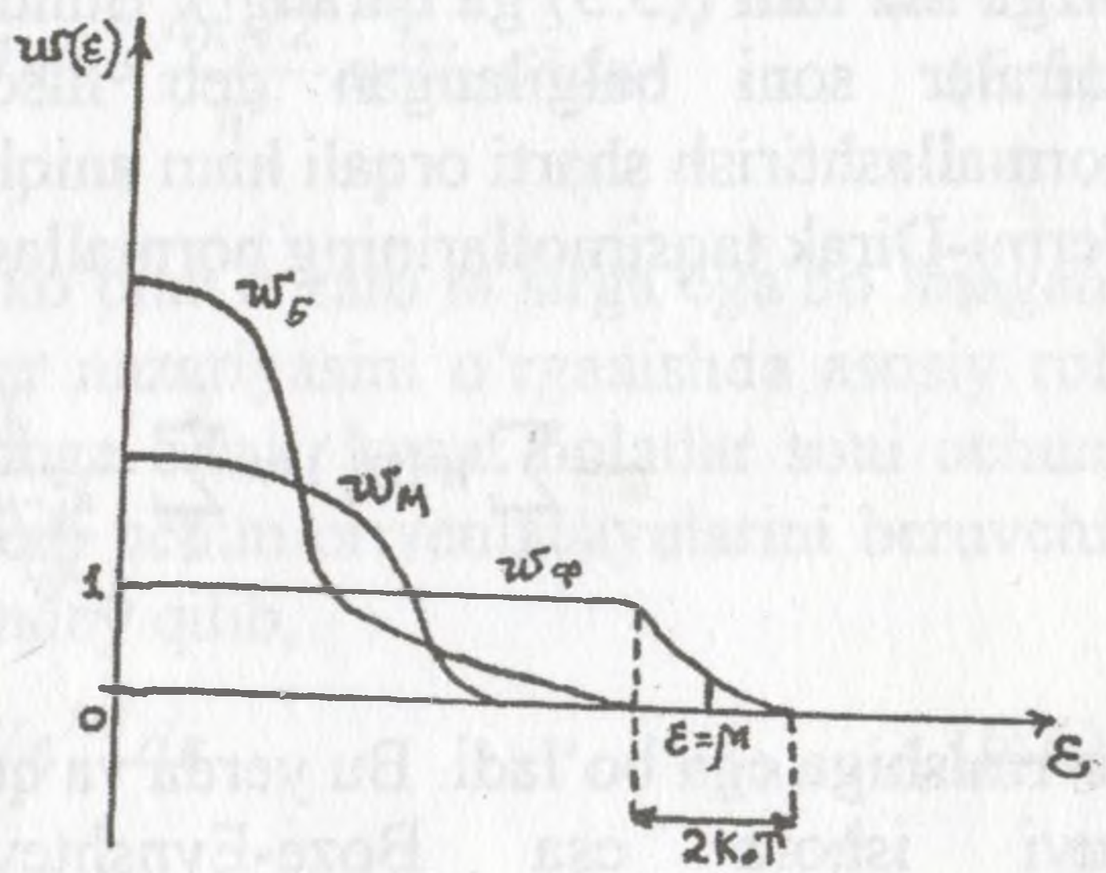
$$\frac{nh^3}{(2\pi\, m\theta)^{\frac{3}{2}}} << 1 \qquad (5.5)$$

tengsizligi bajarilganda klassik statistika kuchga ega bo‘ladi.

Klassik fizika nuqtai nazariga asoslangan Maksvell taqsimotini keltirib chiqarishda gaz zarralari individualligi saqlanadi (aynan o‘xshash emas) deb hisoblanadi. Boze va Fermi statistikalari esa zarralarning aynan o‘xshashligi printsipiga asoslangandir. Bundan tashqari Fermi statistikasi Pauli prinsipiga ham bo‘ysunadi.

Shunday qilib, (5.5)-tengsizligidan ko‘rinib turibdiki, Boze va Fermi taqsimotlari yetarli darajada yuqori temperaturada Maksvell taqsimotiga o‘tadi. Past temperaturalarda esa klassik va kvant statistikasi taqsimotlari bir-biridan juda katta farq qildi. Belgilangan T uchun bu funksiyalar 9-*chizma*da ko‘rsatilgan ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Chizmadagi egri chiziqlarning barchasi abstsissa o‘qiga eksponentsial yaqinlashadi. Koordinata boshida (energiyaning kichik qiymatlarida) esa Fermi egri chizig‘i deyarli gorizontal bo‘lib, Boze egri chizig‘i esa Maksvell taqsimotini anglatuvchi egri chiziqdan yuqoriga ko‘tariladi.



9–chizma. Kvant va klassik taqsimot funktsiyalarining shartli grafigi

Temperatura absolyut nol bo‘lganda bu egri chiziqdan deformatsiyalanishini kuzatish e’tiborga sazovordir. Bu holda Boze egri chizig‘i butunlay ordinata o‘qiga tortiladi. Bu esa o‘z navbatida barcha zarralarning eng pastki energiyasi nol bo‘lgan holatga (asosiy energetik holat) o‘tishga intilishini ko‘rsatadi. Fermi egri chizig‘i esa to‘g‘ri burchakli chiziqqa aylanadi: uning gorizontal qismi abstsissa o‘qidan bir soniga farq qiladi. (Agar energiyaning μ dan kichik barcha qiymatlarida T=0 bo‘lsa) w_ϕ=1 bo‘ladi. Energiyaning ma’lum bir kritik qiymatidan boshlab esa w_ϕ sakrab nolga aylanadi. Fermi egri chizig‘ining bunday xususiyati zarralarning T=0 bo‘lgan eng pastki energetik holatlarda to‘planishini anglatadi. Lekin ε=0 bo‘lganda asosiy energetik holatda Pauli prinsipiga binoan spinlari qarama-qarshi yo‘nalgan ikkita zarra bo‘lishi mumkin xolos, qolgan zarralar esa tartib bilan asosiy energetik holatga yaqin bo‘lgan uyg‘ongan holatlarda joylashgan bo‘ladi. Temperaturaning ko‘tarilishi bilan energiyasi μ-ga

yaqin bo‘lgan zarralarning bir qismi energiyasi $\varepsilon>\mu$ bo‘lgan energetik holatlarga o‘tadi. Fermi energetik sathidan ancha yuqori sathlarda zarraning bo‘lish ehtimolligi juda kichik. Shuning uchun energiyaning bunday qiymatlarida egri chiziq eksponentsial kamayadi.

7.6-§. Aynigan Fermi va Boze gazining kimyoviy potensiali

Tizim kimyoviy potensialini ozod energiyadan zarralar soni bo‘yicha xususiy hosila olish yo‘li bilan aniqlash mumkin ekanligi bizga ma’lum ((5.3) ga qarang!). Bundan tashqari kimyoviy potensialni zarralar soni belgilangan deb hisoblab, taqsimot funksiyasining normallashtirish sharti orqali ham aniqlash mumkin. Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlarining normallashtirish sharti

$$\sum_{\vec{k}} w(\varepsilon_k) = \sum_{\vec{k}} \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_k-\mu}{k_0T}} \pm 1} = N \qquad (6.1)$$

ko‘rinishiga ega bo‘ladi. Bu yerda va quyida yuqori ishora Fermi-Dirak, quyi ishora esa Boze-Eynshteyn statistikasiga tegishlidir. Normallashtirish shartida ishtirok etuvchi μ- kimyoviy potensial N va θ larning funksiyasi sifatida aniqlanadi. Bundan kimyoviy potensialni keltirib chiqarish uchun $V=L^3$ hajmli quti ichida erkin harakat qilayotgan zarraning energetik spektri qiymatidan foydalanamiz. Ma’lumki, bu holda (1.9)-ga asosan energetik spektr diskret bo‘lib, i-nchi kvant holatga to‘g‘ri keluvchi zarralar energiyasi

$$\varepsilon_{\vec{k}} = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}(n_1^2+n_2^2+n_3^2) = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}R^2 \qquad (6.2)$$

ko‘rinishga ega. Bu yerda $R^2 = n_1^2+n_2^2+n_3^2$

Kvant sonlarning katta qiymatlarida (6.2) energetik spektrni n_1, n_2, n_3-larning uzluksiz funksiyasi deb qarash mumkin. Bundan tashqari agar $g(\varepsilon)d\varepsilon$ - ni energiyaning ε - dan $\varepsilon+d\varepsilon$ gacha oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi kvant holatlar soni desak, (6.1) o‘rniga normallashtirish shartini:

$$N = \int_0^\infty w(\varepsilon)\cdot g(\varepsilon)d\varepsilon = \int_0^\infty \frac{g(\varepsilon)d\varepsilon}{\lambda^{-1}e^{\frac{\varepsilon}{\theta}} \pm 1} \tag{6.3}$$

ko‘rinishida olish mumkin bo‘ladi. g(ε)-kvant holatlar zichligi.

Bu yerda

$$\lambda = e^{\mu/\theta} \tag{6.4}$$

belgilash qabul qildik. (6.2) dan ko‘rinib turibdiki, kvant holatlar soni

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{8}\cdot 4\pi R^2 dR = \frac{4\pi\sqrt{2}}{h^3} m^{\frac{3}{2}} V \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \tag{6.5}$$

Kvant holatlar sonini bilish ko‘plab o‘zaro ta’sirga ega bo‘lmagan zarralardan tashkil topgan tizimlar nazariyasini o‘rganishda asosiy rol o‘ynaydi. Agar zarra spinini hisobga olsak, kvant holatlar soni uchun berilgan (6.5) ifodasini zarralar soni uchun oriyentatsiyalarini beruvchi (2s+1) ga ko‘paytirish lozim. Shunday qilib,

$$g(\varepsilon)d(\varepsilon) = aV\varepsilon^{1/2}d\varepsilon \tag{6.6}$$

Bu erda

$$a = \frac{4\pi}{h^3} m^{\frac{3}{2}} (2s+1) \tag{6.7}$$

(6.6)-ni hisobga olgan holda (6.3) ko‘rinishida berilgan normallashtirish shartini quyidagi ko‘rinishda ifodalash mumkin:

$$N = V\cdot a\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon}{\lambda^{-1}e^{\frac{\varepsilon}{\theta}} \pm 1} \tag{6.8}$$

Bu formuladan foydalanib, $\mu = \mu(N,\theta)$ ning aniq formulasini berib bo‘lmaydi. Shuning uchun ideal kvant gazining kuchli va kuchsiz aynigan chegaraviy hollarini alohida tekshirishga to‘g‘ri keladi. Kuchli aynigan ($\mu >> \theta$) Fermi gazi uchun kimyoviy potensial 8-§ da hisoblangan ((8.9)-formulaga qarang!).

Biz quyidagi kuchsiz aynigan ideal gaz uchun kimyoviy potensialni aniqlaymiz. Boshqacha qilib aytganda, kimyoviy

potensialning klassik ifodasiga, ya'ni (5.3) formuladagi kichik qo'shimchalarni hisoblaymiz.

Buning uchun

$$\lambda << 1, \text{ ya'ni } \mu < 0 \tag{6.9}$$

deb hisoblaymiz. Bu tengsizlikni (6.8) ga tadbiq etamiz va uning integral osti ifodasini $\lambda \cdot e^{\frac{-\varepsilon}{\theta}}$ bo'yicha qatorga yoyamiz. U holda:

$$\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon}{\lambda^{-1} e^{\frac{\varepsilon}{\theta}} \pm 1} = \lambda \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}}{1 \pm \lambda^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}} d\varepsilon =$$

$$= \lambda \theta^{\frac{3}{2}} \int_0^\infty x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \left[1 \mp \lambda^{-x} + \ldots.\right] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \theta^{\frac{3}{2}} G(\lambda) \tag{6.10}$$

bu yerda:

$$G(\lambda) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(\mp 1)^{l+1} \lambda^l}{l^{\frac{3}{2}}} \tag{6.11}$$

Shunday qilib, zarralar konsentratsiyasi

$$n = \frac{N}{V} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot a \cdot \theta^{\frac{3}{2}} \cdot G(\lambda) \tag{6.12}$$

Agar (6.11) da faqat l=1 hadnigina hisobga olsak,

$$\lambda = \lambda_0 = \frac{2n}{\sqrt{\pi} a \theta^{\frac{3}{2}}}$$

bo'ladi va bu (5.4) da ifodalangan (s=0 desak) klassik gaz natijasini beradi. (6.12) ning keyingi yaqinlashuvida, ya'ni l=2 bo'lgan hadda λ o'rniga λ_0 qabul qilsak,

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{1 \mp \frac{1}{2^{3/2}} \lambda_0} \approx \lambda_0 \left(1 \mp \frac{\lambda_0}{2^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{6.13}$$

Bu va (6.4) ifodalarni hisobga olsak, u holda,

$$\mu = \theta\left[\ln\lambda_0 \pm \frac{\lambda_0}{2^{3/2}}\right] \qquad (6.14)$$

ifodasini hosil qilamiz. Bundan ko‘rinib turibdiki, kuchsiz aynigan Fermi gazining kimyoviy potensiali klassik gaz kimyoviy potensialiga nisbatan katta, Boze gazining kimyoviy potensiali esa klassik gaz kimyoviy potensialiga nisbatan kichik bo‘lar ekan.

7.7-§. Fotonli gaz

O‘zaro ta’sirga ega bo‘lmagan fotonlar to‘plamidan tashkil topgan ideal gazga fotonli gaz deymiz; fotonli gaz tushunchasi absolyut qora jism nurlanishini ifodalashda qo‘llaniladi. Fotonlar impulsining momenti $\pm\hbar$ ga karrali va spini 1-ga teng. Shuning uchun fotonli gaz Boze-Eynshteyn statistikasiga bo‘ysunadi.

Elektromagnit maydon kvant nazariyasiga asosan fotonning tinch holatdagi massasi nolga teng va u *s*-yorug‘lik tezligiga teng. Fotonlar uchun impuls $p = \frac{\varepsilon}{c} = \frac{\hbar\omega}{c}$, energiya $\varepsilon = \hbar\omega$ va kimyoviy potensial $\mu=0$ bo‘lganligi tufayli Boze - Eynshteyn taqsimoti:

$$w_B(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\hbar\omega/k_0T} - 1} \qquad (7.1)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Chastotaning $\omega \sim \omega + d\omega$ oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi V - hajm uchun kvant holatlar soni

$$g(\omega)d\omega = 2\cdot\frac{V}{2\pi^2c^3}\omega^2 d\omega \qquad (7.2)$$

ko‘rinishga ega. Shuning uchun chastotaning $\omega \sim \omega + d\omega$ oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi muvozanatli fotonlar soni (7.1) va (7.2) ga asosan

$$dN_\omega = w_B(\varepsilon)\cdot g(\omega)d\omega = \frac{V}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{\omega^2 d\omega}{e^{\hbar\omega/k_0T}-1} \qquad (7.3)$$

Chastotaning $\omega \sim \omega + d\omega$ oralig'i uchun nurlanishning spektral energiya zichligi shu oraliqqa to'g'ri keluvchi (7.3) - fotonlar sonining hajm birligidagi qiymatining $\hbar\omega$ ga ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$dU_\omega = \hbar\omega\frac{dN_\omega}{V} = \frac{\hbar}{\pi^2 c^3}\cdot\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_0T}}-1} = -\frac{(k_0T)^4}{\pi^2 c^3\hbar^3}\cdot\frac{x^3 dx}{e^x-1} \qquad (7.4)$$

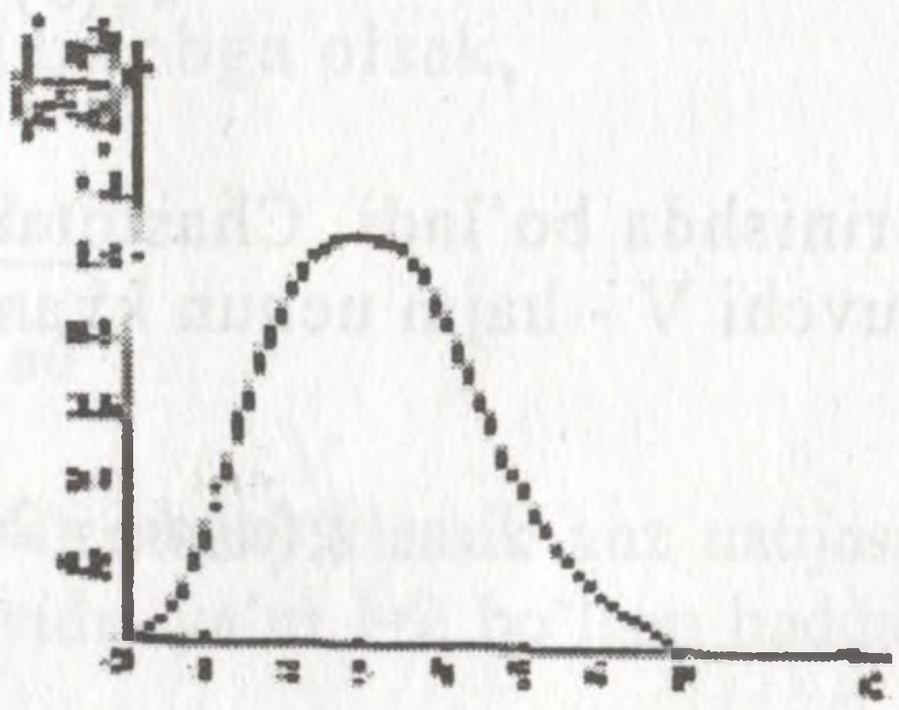
$$x = \hbar\omega/k_0T$$

Bu formula birinchi bor (1900 yil) Plank tomonidan keltirib chiqarilgan va u Plank formulasi deb ataladi. Plank formulasidan foydalanib, nurlanishning boshqa barcha qonunlarini keltirib chiqarish mumkin. Dastlab, (7.4) ning chastotalari kichik va katta bo'lgan ikki chegaraviy hollarni ko'raylik.

Agar $\hbar\omega << k_0T$, bo'lsa ya'ni kichik chastotali va yuqori temperaturali soha uchun (7.4) Reley-Jins formulasini beradi:

$$dU_\omega = \frac{k_0T}{\pi^2 c^3}\cdot\omega^2 d\omega \qquad (7.5)$$

Reley-Jins formulasi tarixan klassik statistika asosida (7.4) Plank formulasidan ancha ilgari keltirib chiqarilgan. Chastotaning oshishi bilan (7.5) formulaga asosan energiya osha boradi. Nazariyaning bu qiyinchiligi o'z vaqtida ultrabinafsha halokat deb nom olgan edi. Aslida unday emasligi (7.4) formuladan ko'rinib turibdi.



10-chizma. Plank funksiyasi $\left(\frac{x^3}{e^x-1}\right)$ ning chastotaga bog'liqlik grafigi,

Aksincha, chastotaning katta qiymatli sohasida ($\hbar\omega >> k_0T$) esa (7.4) formulasidan Vin formulasi kelib chiqadi:

$$dU_\omega = \frac{\hbar\omega^3}{\pi^2 c^3} e^{\frac{-\hbar\omega}{k_0 T}} d\omega \qquad (7.6)$$

*10-chizma*da (7.4)-formulasiga tegishli bo‘lgan $\left(\frac{x^3}{e^x - 1}\right)$ funksiyasining grafigi tasvirlangan. Ko‘rinib turibdiki, absolyut qora jism nurlanishining spektral taqsimoti xarakterli maksimumga ega va u

$$\frac{dU_\omega}{d\omega} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^3}{e^x - 1}\right) = 0$$

sharti orqali topiladi. Bundan

$$\frac{3x^2}{e^x - 1} - \frac{x^3 e^x}{(e^x - 1)^2} = 0$$

bu tenglamani x=2,82 qiymat qanoatlantiradi. Shunday qilib,

$$\omega_{\max} = 2{,}82 \cdot \frac{k_0 T}{\hbar} = const \cdot T \qquad (7.7)$$

Bu qonun Vinning siljish qonuni deb ataladi. Spektral energiya zichligi maksimumining chastotasi absolyut temperaturaga to‘g‘ri proporsional ravishda o‘zgaradi. Va, nihoyat, (7.4) dan absolyut qora jism nurlanish energiyasi zichligining to‘la qiymatini hosil qilish mumkin:

$$U(T) = \int_0^\infty dU_\omega = \frac{(k_0 T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^\infty \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^2}{15} \cdot \frac{(k_0 T)^4}{\pi^2 c^3 \hbar^3} \qquad (7.8)$$

Shunday qilib, biz Stefan-Boltsman formulasini

$$U = \sigma \cdot T^4$$

hosil qildik. Stefan-Boltsman formulasini termodinamik yo‘l bilan keltirib chiqarganda σ - proporsionallik koeffitsiyentining tabiati ma’lum emas edi, bu yerda esa

$$\sigma = \frac{\pi^2}{15} \cdot \frac{k_0^4}{\hbar^3 c^3}$$

ekanligi hosil qilindi. (7.4) va (7.8) - formulalar kvant statistikasining birinchi formulalari bo‘lib, ularning to‘g‘riligi eksperementda tasdiqlangan.

7.8-§. Fononlar. Kristallar issiqlik sig‘imi

Elektromagnit maydon energiyasi kvantlanganligi kabi qattiq jismda elastik to‘lqin energiyasi ham kvantlangan bo‘ladi. Bunday elastik to‘lqin energiyasining bir kvantiga fonon deyiladi. Kristall panjarasini tashkil etuvchi atomlardan tuzilgan qattiq jism gamiltonianini atomlar tizimining normal tebranishiga tegishli bo‘lgan garmonik ostsillyatordan tashkil topgan hadlar yig‘indisi deb qarash mumkin. Klassik nazariyada normal tebranish panjara tekisliklarining deformatsiya to‘lqinidir, ya’ni tovush to‘lqinidir. Kvant nazariyasida fonon deb ataluvchi kvantlar normal tebranishlar hosil qiladi.

Fonon

$$\varepsilon = \hbar\omega \tag{8.1}$$

energiyaga va

$$p = \left(\frac{\hbar\omega}{v_0}\right) \cdot \vec{n}_0 = \hbar\vec{q} \tag{8.2}$$

impulsga ega.

Bu yerda ω - tebranish chastotasi;

v_0 - tovush tezligi;

$\vec{q} = \left(\frac{\omega}{v_0}\right)\vec{n}_0$ - fononning to‘lqin vektori;

$\vec{n}_0$ - tovush to‘lqinining tarqalish yo‘nalishi bo‘yicha birlik vektori;

λ - tovushning to‘lqin uzunligi. $\left(\lambda = 2\pi \frac{v_0}{\omega}\right)$

Uyg‘otilgan holatda garmonik ostsillyator ixtiyoriy kvantlarga ega bo‘lishi mumkin bo‘lganligi tufayli fononlar Boze-Eynshteyn statistikasiga bo‘ysunadi. Bundan tashqari fononlarning to‘la soni doimiy emas, shuning uchun fononlarning kimyoviy potensiali nolga teng bo‘ladi ($\mu = 0$). N ta atomdan tashkil topgan qattiq jism $3N$ ta

normal tebranishga ega. Shuning uchun chastotalari $\omega_1,\omega_2,...,\omega_{3N}$ bo‘lgan $3N$ ta xildagi fonon bo‘lishi lozim. Bu chastotalarning qiymatlari panjara xususiyatlariga bog‘liq. Debay uslubiga asoslanib oddiy uch o‘lchamli panjara uchun chastotaning taqsimoti formulasini hosil qilish mumkin. Kristall V- hajmli bir jinsli elastik kontinium deb qaraladi. Fononlar chastotalari bunday tizimlarning $3N$ ta quyi normal chastotalari bo‘ladi. Elastik kontinium normal chastotalarning uzluksiz taqsimotiga ega bo‘lganligi uchun bizni chastotasi $\omega \sim \omega + d\omega$ oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi normal tebranishlar soni qiziqtiradi, va u

$$g(\omega)d\omega = \frac{3V}{2\pi^2 v_0^2}\omega^2 d\omega \qquad (8.3)$$

qiymatga ega. Bu yerda 3-soni normal tebranish uchta qutblanish yo‘nalishiga ega ekanligini anglatadi. v_0-tovush tezligining o‘rtacha qiymati, maksimal chastota ω_{max}- ni

$$\int_0^{\omega_{max}} g(\omega)d\omega = 3N \qquad (8.4)$$

shartidan foydalanib topamiz. (8.3) va (8.4)-lardan, agar $\Omega_0 = \frac{V}{N}$ bitta atomga to‘g‘ri keluvchi hajm (oddiy kristall uchun elementar yacheyka hajmi) desak,

$$\omega_{max} = v_0\left(\frac{6\pi^2}{\Omega_0}\right)^{\frac{1}{3}} \qquad (8.5)$$

Bunga to‘g‘ri keluvchi λ_{min} - to‘lqin uzunligi

$$\lambda_{min} = \frac{2\pi v_0}{\omega_{max}} = (4\pi\Omega_0)^{1/3}$$

ya’ni, taqriban zarralar orasidagi masofaga teng. Darhaqiqat, diskret strukturada atomlar orasidagi masofadan kichik bo‘lgan λ-li to‘lqin bo‘lishi mumkin emas.

Fononning spini butun songa teng bo‘lganligi uchun u ham fotonlar kabi Boze-Eynshteyn taqsimotiga bo‘ysunadi, ya’ni:

$$w_{Б}(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\hbar\omega/k_0T}-1} \tag{8.6}$$

Shunday qilib, qattiq jismning to‘la elastik tebranishlar energiyasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$E=\int_0^{\omega_{max}}\hbar\omega\cdot w_{Б}\cdot g(\omega)d\omega=\frac{3V\hbar}{2\pi^2 v_0^{\,3}}\int_0^{\omega_{max}}\frac{\omega^3 d\omega}{e^{\frac{\hbar\omega}{k_0T}}-1} \tag{8.7}$$

Yoki

$$x=\frac{\hbar\omega}{k_0T};\quad x_{max}=\frac{\hbar\omega_{max}}{k_0T}=\frac{T_D}{T}$$

desak,

$$E=\frac{3Vk_0^{\,4}\cdot T^4}{2\pi^2 v_0^{\,3}\hbar^3}\int_0^{T_D/T}\frac{x^3dx}{e^x-1}=3N\cdot k_oT\cdot D\left(\frac{T_D}{T}\right) \tag{8.7a}$$

Bu yerda

$$D\left(\frac{T_D}{T}\right)=3\left(\frac{T}{T_D}\right)^3\int_0^{T_D/T}\frac{x^3dx}{e^x-1} \tag{8.8}$$

Endi

$$\frac{dD(x)}{dx}=-\frac{3}{x}D(x)-\frac{3}{e^x-1}$$

munosabatni hisobga olgan holda (8.7a) - dan kristall panjara issiqlik sig‘imi

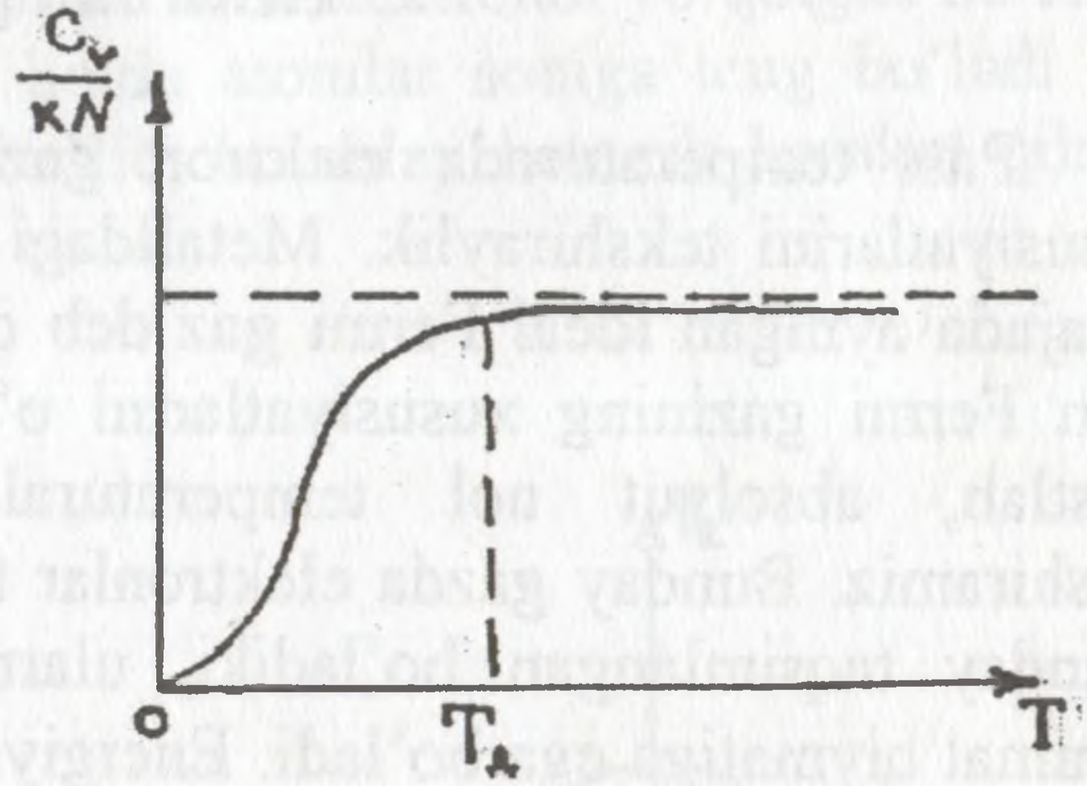
$$C_V=\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V=3Nk_0\cdot f_D\left(\frac{T_D}{T}\right) \tag{8.9}$$

ekanligini hosil qilamiz. Bu yerda

$$f_D\left(\frac{T_D}{T}\right)=3\left(\frac{T}{T_D}\right)^3\int_0^{\frac{T_D}{T}}\frac{e^x x^4dx}{(e^x-1)^2}$$

Debay funksiyasi. Shunday yo‘l bilan T_D/T-ning turli qiymatlari uchun S_v ning qiymatlari Debay tomonidan topilgan.

Chegara hollarni ko‘rib chiqaylik: $x_{max}<<1$, ya’ni $T>>T_D$ bo‘lsin. U holda (8.8) va (8.10) da integral osti funksiyasi $e^x \approx 1+x$ desak,



11-chizma. Kristallik panjara issiqlik sig‘imining temperaturaga bog‘liqlik grafigi

$$f_D = 3\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{\frac{T_Д}{T}} \frac{x^4 dx}{(1+x-1)^2} = 1$$

va $D\left(\frac{T_D}{T}\right) = 1$ hosil bo‘ladi.

Shuning uchun yuqori temperaturada kristallik panjara energiyasi

$$E = 3Nk_0T$$

bo‘ladi va issiqlik sig‘imi uchun Debay formulasi Dyulong-Pti formulasiga o‘tadi, ya’ni $C_V=3Nk_0$ bo‘ladi.

Aksincha, past temperaturalar uchun, ya’ni $T<<T_D$ ($x_{max} >>1$) uchun (8.8), (8.10) - dagi integralning yuqori chegarasini cheksiz deb olish mumkin va

$$D\left(\frac{T_D}{T}\right) = 3\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}$$

$$f_Д \approx 3\left(\frac{T}{T_D}\right)^3 \int_0^{\infty} \frac{x^4 e^x}{(e^x-1)^2} dx = \frac{3\pi^4}{15}\left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

Bundan (8.7) va (8.9) ga asosan

$$E = \frac{3\pi^4}{5} k_0 N \frac{T^4}{T_D^3}; \quad C_V = \frac{12\pi^4}{5} \cdot k_0 N \left(\frac{T}{T_D}\right)^3$$

Ko‘rinib turibdiki, past temperaturalarda C_V nolga T^3 qonuniyat bilan intiladi.

*11-chizma*da issiqlik sig‘imining temperaturaga bog‘liqligi ko‘rsatilgan, va bu egri chiziq eksperement natijalarini to‘g‘ri ifodalaydi.

7.9-§. Absolyut nol temperaturada metallardagi elektronli gaz

Past temperaturada elektron gazining, ya’ni Fermi tizimining xususiyatlarini tekshiraylik. Metalldagi elektronlar to‘plamini ma’lum darajada aynigan ideal Fermi gaz deb qarash mumkin. Shuning uchun ham Fermi gazining xususiyatlarini o‘rganish katta ahamiyatga ega. Dastlab, absolyut nol temperaturalarda bo‘lgan Fermi gazini tekshiramiz. Bunday gazda elektronlar turlicha kvant holatlar bo‘yicha shunday taqsimlangan bo‘ladiki, ularning to‘la energiyasi o‘zining minimal qiymatiga ega bo‘ladi. Energiyaning $\varepsilon \sim \varepsilon + d\varepsilon$ oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi kvant holatlar soni

$$g(\varepsilon)d\varepsilon = 4\pi V\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \varepsilon^{\frac{1}{2}} d\varepsilon \qquad (*)$$

Bu yerda har bir energetik sathga spini qarama-qarshi yo‘nalgan ikkita elektron bo‘lishi mumkinligi hisobga olingan. Shuning uchun (*) formulada 2 - ko‘paytuvchisi qo‘yilgan. Shu sababli energiyaning $\varepsilon \sim \varepsilon + d\varepsilon$ oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi elektronlar soni

$$dN = w_\Phi(\varepsilon) \cdot g(\varepsilon)d\varepsilon = 4\pi\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{\frac{3}{2}} V \frac{\sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0 T}} + 1} \qquad (9.1)$$

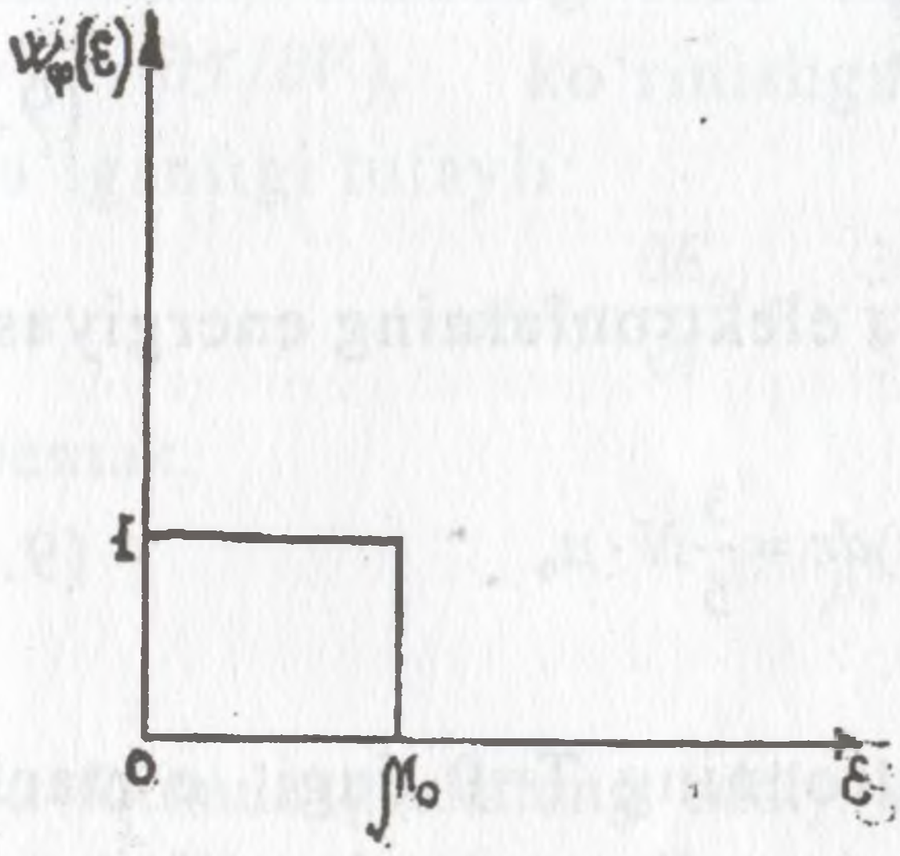
Fermi taqsimoti $T \to 0$ bo‘lganda (*12a- chizma*):

$$w_\Phi(\varepsilon) = \begin{cases} 1 & agar \quad \varepsilon \le \mu_0 \quad bo'lsa, \\ 0 & agar \quad \varepsilon > \mu_0 \quad bo'lsa \end{cases} \qquad (9.2)$$

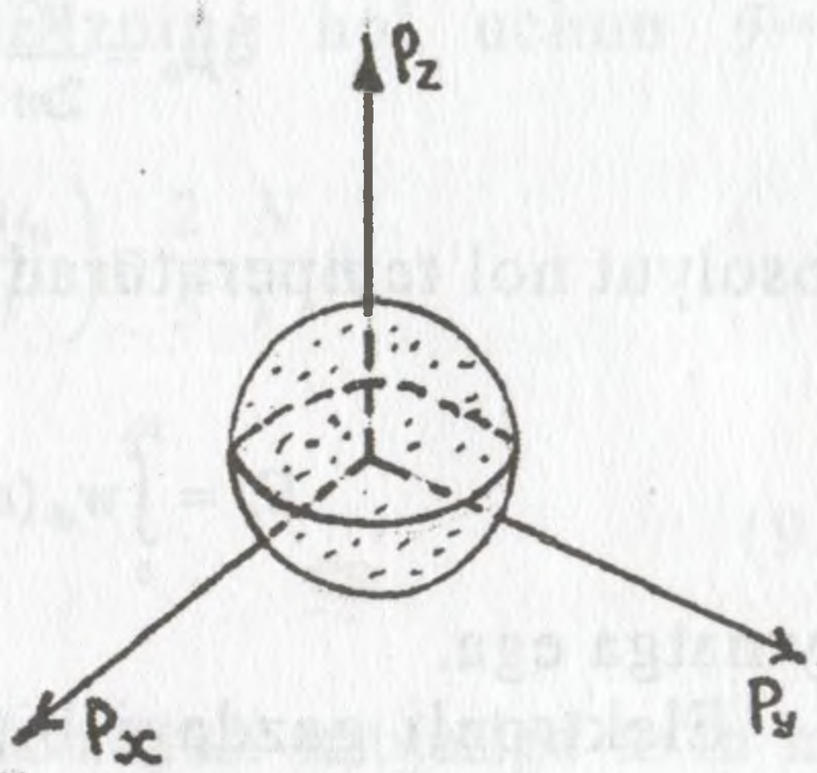
μ_0 – absolyut nol temperaturadagi kimyoviy potensial, bunga absolyut noldagi maksimal energiya deyiladi. (9.2) - formulasi oddiy ma’noga ega; tashqariga energiya chiqarmaydigan energetik to‘siq bilan o‘ralgan chekli hajmda harakat qiluvchi ko‘plab elektronlardan tashkil topgan tizimning sathlari deyarli cheksiz spektrni tashkil etadi (*12b –chizma*).

Absolyut nolga yaqin juda past temperaturalarda metalldagi elektronlarning xususiyatini tekshiraylik.

Aytaylik, metallni tashkil etgan barcha atomlar ionlangan bo‘lsin. Faraz qilaylik, har bir atom o‘zidan bitta elektronni yo‘qotgan bo‘lsin. Metalldagi elektronlar soni bu holda atomlar soniga teng bo‘ladi va elektronlar zichligi juda katta bo‘lib, butunlay betartib harakat qiladi (metall ichida).



12a-chizma Absolyut nol tempera turada Fermi-Dirak taqsimoti grafigi



12b-chizma. Absolyut nol temperaturada barcha elektronlar joylashgan Fermi-sfera

Elektronlar zichligining kattaligiga qaramasdan, ularning o‘zaro ta’sirini dastlab hisobga olmaymiz, ya’ni metalldagi bunday elektronlarni ideal gaz deb hisoblaymiz. Metallning barcha hajmi bo‘yicha elektronlar teng taqsimlangan bo‘ladi. Juda ko‘plab elektronlardan tashkil topgan tizimning energetik sathlari deyarli uzluksiz spektrni tashkil qiladi. Pauli prinsipi mavjudligi tufayli energiyasi nolga teng bo‘lgan past energetik sathni faqat spinining proyeksiyasi qarama-qarshi yo‘nalishga ega bo‘lgan ikkita elektron egallaydi. Qolganlari esa tartib bilan uyg‘otilgan energetik sathlarda bo‘ladi. Agar tizimda N-ta elektron bo‘lsa, absolyut nol temperaturada ular energiyasi $0 \le \varepsilon \le \mu_0$ oraliqda bo‘lgan N/2-ta eng past energetik sathlarni egallaydi. Impulslar muhitida barcha elektronlar Fermi-sfera ichida joylashgan bo‘ladi (*12b-chizma*). Qolgan barcha sathlar esa elektronlardan holi bo‘ladi. Faqat Pauli prinsipi mavjudligi

uchun elektronlar absolyut nolda ham uyg‘otilgan hollarda bo‘ladi.

Elektronlar bilan to‘ldirilgan holatlardan yuqorisiga taalluqli bo‘lgan energiya $\varepsilon_{min} = \mu_0$ ni hisoblaylik.

$$N = \int_0^{\mu_0} w_\Phi(\varepsilon) \cdot g(\varepsilon) d\varepsilon = 4\pi \left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V \int_0^{\mu_0} \sqrt{\varepsilon}\, d\varepsilon = \frac{8\pi}{3} V \left(\frac{2m\mu_0}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}$$

yoki

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi} \cdot \frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad (9.3)$$

Absolyut nol temperaturada barcha elektronlarning energiyasi

$$E_0 = \int_0^{\mu_0} w_\Phi(\varepsilon) \cdot \varepsilon \cdot g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3}{5} N \cdot \mu_0 \qquad (9.4)$$

qiymatga ega.

Elektronli gazdagi bitta elektronning T=0 dagi o‘rtacha energiyasi $\bar{\varepsilon} = {}^{3\mu_0}/_{5}$ ga teng bo‘ladi.

N/V~10^{19} desak, (9.3) ga asosan μ_0=5 eV (~ 6· 10^4 grad) bo‘ladi.

T=0 ligida elektronning maksimal tezligi bu holda

$$v_{max} = \sqrt{\frac{2 \cdot \varepsilon_{max}}{m}} = 1{,}39 \cdot 10^8\, sm/sek \qquad (9.3')$$

bo‘ladi. (9.3′) dan ko‘rinib turibdiki, hatto T=0 bo‘lganida ham elektronlarning tezliklari ancha katta bo‘ladi. Bundan biz ko‘rib turibmizki, elektronli gazning xususiyatlari klassik atomli gazlar xususiyatidan tubdan farq qilar ekan.

Malumki, klassik tushunchaga asosan zarralar T=0 ligida harakatdan to‘xtaydi. Bu yerda biz ko‘rib turibmizki, elektronlar absolyut nol temperaturada ham turlicha tezliklar bilan harakat qiladi. Bu elektronlarning o‘rtacha tezligi juda katta. Lekin shunga qaramay, T=0 da elektronli gazning issiqlik sig‘imi aniq nolga teng bo‘ladi. Darhaqiqat

$$C_V = \left(\frac{\partial E_0}{\partial T}\right)_{T=0} = 0 \quad , \tag{9.5}$$

chunki gazning energiyasi T=0 ligida temperaturaga bog‘liq emas.

Metallda harakat qiluvchi elektronlar, xuddi biz oldin ko‘rgan klassik gaz kabi idish devoriga ma’lum bir bosim bilan ta’sir qiladi. Ma’lumki, tizimning ozod energiyasi $\mathcal{F}=E-TS$ va uning bosimi $p=-(\partial\mathcal{F}/\partial V)_T$ ko‘rinishga ega. Bizning hol uchun $\mathcal{F}=E_0$ bo‘lganligi tufayli:

$$p = -\frac{\partial E_0}{\partial V} = -\frac{3}{5}N\left(-\frac{2}{3}\cdot\frac{\mu_0}{V}\right) = \frac{2}{5}\cdot\frac{N}{V}\mu_0$$

Demak,

$$p_0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{E_0}{V} \tag{9.6}$$

Bu formula gazlarning oddiy kinetik nazariyasi natijasiga to‘la mos keladi. Bir valentli metallar uchun bosim r=2· 10^5 atm. Lekin bosimning bunchalik katta qiymati metalldagi ionlarning tortishish kuchi bilan kompensatsiyalanadi, shuning uchun elektronlar metall ichida saqlanadi, aks holda barcha elektronlar metalldan chiqib ketgan bo‘lar edi.

Elektronli gazni ideal Fermi gazi deb hisobladik. Ma’lumki, aynigan gazning zichligi juda katta, va bu gaz zaryadlangan zarralardan tashkil topgan. Agar undagi elektronning kinetik energiyasi o‘zaro ta’sir energiyasining o‘rtacha qiymatidan katta bo‘lsa, elektronli gazni ideal gaz deb hisoblash mumkin.

Elektronning o‘rtacha kinetik energiyasi (9.4) formula orqali berilgan bo‘lib, elektronlarning o‘zaro ta’sir o‘rtacha energiyasi $e^2/\bar{r}$ - ga ($\bar{r}$ -elektronlar orasidagi o‘rtacha masofa) teng. Agar $\bar{r}$ masofa $\bar{r}\sim(V/N)^{1/3}$ bo‘lsa, (N/V- hajm birligidagi elektronlar va ionlar soni) o‘zaro ta’sir energiyasining kichiklik sharti

$$\frac{e^2}{(V/N)^{1/3}} << \mu_0$$

bo‘ladi. (9.3) ga asosan

$$\mu_0 = \frac{h^2}{m}\left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

bo‘lganligi uchun

$$\frac{N}{V} >> \left(\frac{e^2 m}{h^2}\right)^3$$

bo‘ladi.

Oxirgi munosabatdan ko‘rinib turibdiki, elektronli gazning zichligi katta bo‘lganda, o‘zaro ta’sir energiyasi kinetik energiyaga nisbatan kichik bo‘ladi.

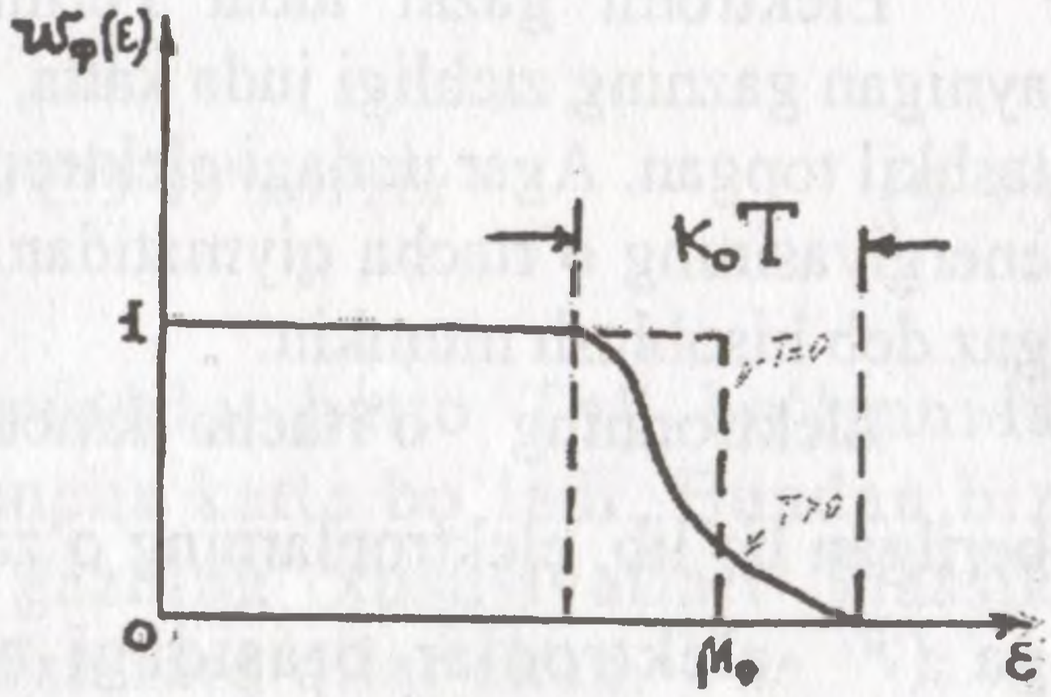
Shunday qilib, elektronli gazni ideal gaz deb hisoblash mumkin bo‘lsin uchun uning zichligi yetarli darajada katta bo‘lishi lozim.

7.10-§. Past temperaturalarda metallardagi elektronli gaz

Endi elektronli gazning xususiyatlarini $T \neq 0$ holi uchun, lekin hamon yetarli darajada past temperaturalar uchun tekshiraylik. Faraz qilaylik:

$$k_0 T << \varepsilon_{max} \ (\equiv \mu_0)$$

bo‘lsin (ε_{max} – elektronlarning T=0 ligidagi maksimal energiyasi). Bu holda elektronli gazning issiqlik uyg‘onishi unchalik sezilarli bo‘lmaydi. Bu esa issiqlik aynish vaqtida elektronlarni T=0 da bo‘lgan energetik holatlardan sal yuqoriroq qo‘shni energetik holatlarga ko‘chiradi. Lekin bu issiqlik aynish energiyasi $\varepsilon << \mu_0$ bo‘lgan elektronlarni energiyasi $\varepsilon > \mu_0$ holatga ko‘chira olmaydi. Bu aynish elektronlarni oralig‘i k_0T - gacha bo‘lgan holatlargagina ko‘tarish imkoniyatiga ega. Bu holda elektronlarning holatlar bo‘yicha taqsimot funksiyasi T=0 holdagiga nisbatan farq qiladi. *13-chizma*ning $\varepsilon < \mu_0$ sohasida egri chiziq bo‘lishi



13 - chizma. Fermi-Dirak taqsimotining energiyaga bog‘liqlik grafigi

elektronlarning ularga mos keluvchi energetik sathlaridagi o‘rtacha soni «1» dan kichik bo‘lishini anglatadi. Shu shartlarga bo‘ysunuvchi elektronli gaz uchun kimyoviy potensialni va o‘rtacha energiyani hisoblaymiz.

Kimyoviy potensialni hisoblamoq uchun normallashtirish shartidan foydalanamiz:

$$N = 4\pi\left(\frac{2m}{h}\right)^{3/2} V\int_0^{\infty}\frac{\sqrt{\varepsilon}}{\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T})+1}d\varepsilon =$$

$$=\frac{3}{2}N(1/\mu_0)^{3/2}\int_0^{\infty}\varepsilon^{1/2}\cdot w_{\Phi}(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (10.1)$$

Elektronli gazning o‘rtacha energiyasi

$$\overline{E}=\frac{3}{2}N(1/\mu_0)^{3/2}\int_0^{\infty}\varepsilon^{2/3}w_{\Phi}(\varepsilon)d\varepsilon \qquad (10.2)$$

(10.1) va (10.2) – larda ishtirok etuvchi integrallar umumiy holda olinmaydi. Bu integrallarni past temperaturalarda olish uchun quyidagicha ish ko‘ramiz.

Ma’lumki, ideal Fermi gazi uchun taqsimot funksiyasi

$$w_{\Phi}(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}+1} \qquad (10.3)$$

ko‘rinishga ega. Yuqoridagi integrallarni umumiy holda

$$I=\int_0^{\infty}w_{\Phi}(\varepsilon)\ \varepsilon^n\ d\varepsilon \qquad (10.4)$$

(n>0)

ko‘rinishda ifodalash mumkin. Bu integralni bo‘laklab integrallaymiz

$$I = w(\varepsilon)\frac{\varepsilon^{n+1}}{n+1}\Big|_0^\infty - \frac{1}{n+1}\int_0^\infty \varepsilon^{n+1}\frac{\partial w(\varepsilon)}{\partial \varepsilon}d\varepsilon \qquad (10.4')$$

Ko‘rinib turibdiki, $\partial w/\partial\varepsilon$ o‘z argumentining juft funksiyasi bo‘ladi, va $\varepsilon=\mu$ bo‘lganda katta maksimumga ega bo‘ladiki, buni δ-funksiyasining bir ko‘rinishi desak bo‘ladi.

$x=(\varepsilon-\mu)/k_0T$ o‘zgaruvchi kiritamiz:

$$\varepsilon=\mu+k_0T\cdot x; \qquad \frac{\partial w}{\partial \varepsilon}=\frac{1}{k_0T}\frac{\partial w}{\partial x}$$

U holda (10.4)

$$I = -\frac{1}{n+1}\int_{-\mu/k_0T}^{\infty}(\mu+k_0T\cdot x)^{n+1}\frac{\partial w}{\partial x}dx$$

Integralning quyi chegarasi $-\mu/k_0T\to-\infty$ deb olish mumkin, chunki biz past temperaturali sohani tekshirayapmiz ($k_0T<<\mu$).

$\partial w/\partial x$ noldan holi bo‘lgan x – ning o‘zgarish sohasida, ya’ni $\varepsilon\sim\mu$ sohasida x - juda kichik miqdordir. Shuning uchun integral ostidagi ko‘paytuvchini x bo‘yicha qatorga yoyish mumkin. x - ning katta qiymatlarida esa integral ostidagi miqdor nolga aylanadi, chunki $\partial w/\partial x$ o‘zgaruvchi $x=0$ dan uzoq sohada cheksiz kichikdir.

Shunday qilib,

$$I = -\frac{1}{n+1}\int_{-\infty}^{\infty}\mu^{n+1}\left[1+(n+1)\frac{k_0T}{\mu}x+\frac{(n+1)n}{2}\cdot\left(\frac{k_0T}{\mu}\right)^2x^2+\cdots\right]\frac{\partial w}{\partial x}dx \qquad (10.5)$$

(10.5) dagi ikkinchi integral nolni beradi, chunki bu haddagi integral ostidagi o‘zgaruvchi toq funksiyadir. Demak,

$$I = -\frac{1}{n+1}\mu^{n+1}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w}{\partial x}dx+\frac{(n+1)n}{2}\cdot\left(\frac{k_0T}{\mu}\right)^2\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\partial w}{\partial x}dx+\cdots\right] \qquad (10.6)$$

Bundan

$$I = -\frac{1}{n+1}\mu^{n+1}\left[1+\frac{(n+1)n}{6}\pi^2\left(\frac{k_0T}{\mu}\right)^2+\cdots\right] \qquad (10.7)$$

Normallashtirish shartida $n=1/2$ bo‘lganligi uchun (10.1)-ga (10.7) - ni tadbiq etib, quyidagini hosil qilamiz:

$$N = \frac{3}{2}N\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\right)^{3/2}\cdot\frac{2}{3}\mu^{3/2}\left[1+\frac{\pi^2}{8}\left(\frac{k_0T}{\mu}\right)^2\right] \qquad (10.8)$$

Elektronli gazning kimyoviy potensiali absolyut nol temperaturada elektronning T=0 dagi maksimal energiyasiga teng bo‘ladi. Absolyut nol temperaturaga yaqin temeraturalarda (10.8)-ni μ-ga nisbatan yaqinlashuv usuli bilan yechish mumkin, ya’ni (10.8) ning ikkinchi hadida $\mu=\mu_0$ deb olish mumkin.

U holda

$$\mu = \mu_0\left[1-\frac{\pi^2}{12}\left(\frac{k_0T}{\mu_0}\right)^2\right] \qquad (10.9)$$

Xuddi shuningdek, elektronli gazning o‘rtacha energiyasi (10.2), (10.4) va (10.7)-ga asosan,

$$\overline{E} = \frac{3}{5}N\mu_0\left[1+\frac{5\pi^2}{12}\cdot\left(\frac{k_0T}{\mu_0}\right)^2\right] \qquad (10.10)$$

Shunday qilib, elektronli gazni $T<\mu_0/k_0$ temperaturalarda aynigan deb hisoblash mumkin.

(10.10) – dan elektronli gazning issiqlik sig‘imi

$$C_V = \frac{\pi^2}{2}\cdot\frac{Nk_0^2}{\mu_0}\cdot T \qquad (10.11)$$

Elektronli gazning C_V -si temperaturaning chiziqli funksiyasi ekan, va u T=0 da nolga aylanadi.

Qo‘rg‘oshin metali uchun (bir valentli) nazariya bo‘yicha

$$C_V=0,9\cdot10^{-4}\,Nk_0T \qquad (10.12)$$

Bundan ko‘rinib turibdiki, va, shuningdek, tajriba natijalari ham shuni ko‘rsatadiki, elektronli gazning issiqlik sig‘imi kristall panjara issiqlik sig‘imiga nisbatan ($C_V^{pan}\sim T^3$) juda kichik bo‘ladi:

$$\frac{C_V^{el}}{C_V^{pan}}=\frac{5}{24\pi^2}\cdot\frac{k_0T}{\mu}\cdot\left(\frac{T_D}{T}\right)^3 \qquad (10.13)$$

Agar T=3,3K bo‘lsa, qo‘rg‘oshin uchun μ_0=5 eV xarakterli temperatura $T_D=365^0$K (Debay temperaturasi) va

$$\frac{C_V^{el}}{C_V^{pan}}=0,02\cdot\frac{T}{7\cdot10^2}\cdot\left(\frac{335}{T}\right)^3$$

$\frac{C_V^{el}}{C_V^{pan}}\approx1$ bo‘ladi. Bundan ham past temperaturalarda esa $C_V^{el}>C_V^{pan}$ bo‘ladi. Hozirgi zamon tajribasi ham yuqorida bayon etilgan nazariy formulalarning to‘g‘riligini tasdiqlaydi.

Endi Fermi taqsimotining yoyilish sohasidagi elektronlar sonini hisoblaymiz. Yoyilish sohasidagi elektronlar sonini n_{eff} effektiv elektronlar soni deymiz.

Tashqi ta’sir ostida shu elektronlargina o‘zining holatini o‘zgartiradi. Shuning uchun effektiv elektronlargina C_V^{el} - ni va elektr o‘tkazuvchanlikni tashkil etadi. n_{eff} -ni quyidagi mulohazalar asosida topish mumkin. ε_{eff} -energiyali bo‘lgan holatda elektronning bo‘lish ehtimoli taqsimot funksiyasiga proporsional. Shu holatning to‘la emaslik ehtimolligi (1-w_Φ)-ga teng.

Bir holatda faqat spinlari antiparallel bo‘lgan elektronlargina bo‘lishi mumkinligi tufayli, $w_\Phi(1-w_\Phi)$ ko‘paytma energiyasi ε bo‘lgan bitta elektron bo‘lib unga spini antiparallel bo‘lgan elektronning bu holatda bo‘lmaslik ehtimolligini beradi. Boshqacha qilib aytganda, $w_\Phi(1-w_\Phi)$ – bu energiyasi ε bo‘lgan holatda faqat bitta elektron bo‘lish ehtimolligini beradi. Bunday holatlarning to‘la soni, ya’ni toq tashuvchi elektronlarning to‘la soni:

$$n_{eff} = 2\int_0^{\infty} w_\phi(1-w_\phi)g(\varepsilon)d\varepsilon =$$

$$= \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\cdot V\int_0^{\infty} w_\phi(1-w_\phi)\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon \qquad (10.14)$$

Kuchli aynigan gazda $\mu_0 >> k_0T$ va bunday gaz uchun

$$w_\phi = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}+1} \approx 1; \qquad 1-w_\Phi \approx e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}$$

$\varepsilon-\mu >> k_0T$ ligida (10.14) - dagi integral ostidagi funksiya eksponentsial ravishda kamaya boradi. Shuning uchun bu ifodani ∞ energiya qiymatigacha integrallash o‘rniga $\varepsilon \sim \mu$ qiymatigacha integral chegarasini olish mumkin.

U holda

$$n_{eff} = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}\cdot V\int_0^{\mu} e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon$$

Bundagi eksponentsial had tez kamaya borganligi sababli $\varepsilon^{1/2}$ ni integral ostidan chiqarib uning qiymatini yuqori chegara qiymati bilan almashtirish mumkin:

$$\int_0^{\mu} e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}\sqrt{\varepsilon}\,d\varepsilon \approx \sqrt{\mu}\int_0^{\mu} e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}d\varepsilon =$$

$$= k_0T\cdot\sqrt{\mu}(1-e^{-\frac{\mu}{k_0T}}) \approx k_0T\sqrt{\mu} = k_0T\sqrt{\mu_0}$$

$$n_{eff} \approx V\frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3}k_0T\sqrt{\mu_0} \qquad (10.15)$$

Yoki oldingi natijadan foydalansak,

$$n_{eff} \approx \frac{3}{2}N\cdot\frac{k_0T}{\mu_0} \qquad (10.16)$$

Shunday qilib, $n_{eff}<<N$, ya'ni effektiv elektronlar soni elektronlarning to'la sonidan juda kichik ekan.

$$C_V^{el} \approx \frac{3}{2} k_0 \cdot n_{eff} \qquad (10.17)$$

(10.17) – ga asosan elektronli gazning xususiyatini quyidagicha xarakterlash mumkin:

Elektronli gazda o'z holatini o'zgartirishi va tashqaridan berilgan energiyani qabul qilishi mumkin bo'lgan n_{eff}-ta effektiv zarra mavjud. Bu effektiv zarralarning har biri klassik xususiyatga ega va ularning har biriga issiqlik sig'imining odatdagi qiymati to'g'ri keladi.

7.11-§. Ω, μ,T - parametrlarning termodinamik ma'nosi

Kvant tizim uchun katta kanonik taqsimot (4.1) ko'rinishga ega edi. Unda ishtirok etgan Ω, μ, T - larning termodinamik ma'nosini aniqlashga kirishaylik. Buning uchun katta kanonik taqsimot uchun yozilgan (4.5) - normallashtirish shartidan, tizimning (4.2) - to'la zarralar soni va (4.3) - to'la energiyasi ifodalaridan foydalanamiz va ularning o'zaro bog'liqligini ko'rsatuvchi tenglamalar hosil qilamiz. Bunday yo'l bilan hosil qilingan tenglamalarni termodinamikadan ma'lum bo'lgan tenglamalar bilan va nihoyat eksperiment natijalari bilan taqqoslashtiramiz. Odatdagi Gibbs taqsimotiga tayangan holda Ω - omega - potensialning T va μ - lar funksiyasi ekanligini aniqlaymiz. Shunday yo'l bilan (4.5), (4.3) va (4.2) - munosabatlardan termodinamik tenglamalar hosil qilishda foydalanish mumkin.

Muvozanat holatda bo'lgan ikki tizimning o'zaro muvozanatlik shartlarini aniqlaylik. Birinchi tizim uchun katta kanonik taqsimot

$$w'_{N'_i} = e^{\frac{1}{k_0 T'}\left(\Omega' + \mu' N' - E'_{N'_i}\right)} \qquad (11.1)$$

va ikkinchisi uchun esa

$$w''_{N_i''} = e^{\frac{1}{k_0 T''}\left(\Omega'' + \mu'' N'' - E''_{N_i''}\right)} \tag{11.2}$$

bo‘lsin.

Tizimlar orasidagi va tizimlar bilan termostatning o‘zaro ta’sir energiyasi tizimlar energiyasiga nisbatan juda kichik bo‘lsin. Agar ushbu ikki tizimni yaxlit bitta tizim deb qarasak, u quyidagi ko‘rinishdagi katta kanonik taqsimotga bo‘ysunadi:

$$w_{N_i} = e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} \tag{11.3}$$

Tizimlarning o‘zaro ta’sirini hisobga olmaganimiz tufayli birinchi tizimning ixtiyoriy holat ehtimoliyati ikkinchi jism holatiga bog‘liq bo‘lmaydi. Bundan tashqari umumiy tizimning har qanday holatini birinchi tizim biror bir holati va ikkinchi tizimning unga bog‘liq bo‘lmagan holatidan tashkil topgan deb qarash mumkin. Bu zarralarning umumiy soni tizimlar holatlariga to‘g‘ri keluvchi zarralar yig‘indisiga va umumiy energiya energiyalar yig‘indisiga teng demakdir, ya’ni

$$N = N' + N'' \tag{11.4}$$

va

$$E_{N_i} = E_{N_i'} + E_{N_i''} \tag{11.5}$$

Agar tizimlar holatlari bir - biriga bog‘liq bo‘lmasa ehtimoliyat nazariyasiga binoan murakkab tizim ehtimoliyati uni tashkil etgan tizimlar ehtimoliyatlari ko‘paytmasiga teng:

$$w_{N_i} = w_{N_i'} + w_{N_i''} \tag{11.6}$$

(11.1)- (11.3)-larni (11.6) - ga tadbiq etamiz.

$$e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} =$$

$$= e^{\frac{1}{k_0 T'}\left(\Omega' + \mu' N' - E'_{N'_i}\right)} \cdot e^{\frac{1}{k_0 T''}\left(\Omega'' + \mu'' N'' - E''_{N''_i}\right)}$$

So‘nggi munosabat $E'_{N'}, E''_{N''}, N', N''$- larning barcha qiymatlarida bajariladi. Bu esa quyidagi tengliklar bajarilishi lozimligini anglatadi.

$$T = T' = T'' \tag{11.7}$$

$$\mu = \mu' = \mu'' \tag{11.8}$$

$$\Omega = \Omega' + \Omega'' \tag{11.9}$$

Shunday qilib, ikki tizim o‘zaro muvozanat holatda bo‘lishi uchun ularning T - temperaturalari va μ - ximik potensiallari teng bo‘lmog‘i lozim. Bundan tashqari murakkab tizim omega - potensiali tizimlar omega - potensiallari yig‘indisiga teng bo‘ladi.

Ko‘rinib turibdiki, energiya uchun temperatura qanday rol o‘ynasa, zarralar soni uchun ximik potensial ham shunday rol o‘ynaydi. Muvozanat holatda bo‘lgan murakkab tizimdagi alohida tizimlar temperaturalari va ximik potensiallari bir xil qiymatga ega bo‘lganligi uchun, T va μ - larni termostat xarakteristikasi deb hisoblash mumkin. Aynan shuning uchun ham T va μ - larni berilgan deb hisoblab tizimni xarakterlovchi boshqa kattaliklarni (uning omega - potensiali, ichki energiyasi va boshqalar) ularning funksiyasi deb hisoblamoq lozim.

Katta kanonik taqsimotning normallashtirish shartidan foydalanib bir qator termodinamik munosabatlarni hosil qilish mumkin. Masalan, (4.5) - ni μ - ximik potensial bo‘yicha differensiallashdan

$$\sum_N \frac{1}{k_0 T}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} + N\right) e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} = 0$$

Yoki (4.2)-to‘la zarralar soni o‘rtachasini hisobga olsak,

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -\overline{N} \tag{11.10}$$

Shunday qilib, teskari ishora bilan omega - potensialdan ximik potensial bo‘yicha olingan hosila tizim zarralar sonining o‘rtacha qiymatiga teng.

Normallashtirish shartini temperatura bo‘yicha differensiallash, yopiq tizim uchun Gibbs-Gelmgolts tenglamasi kabi tenglamaga olib keladi.

$$0 = \frac{\partial}{\partial T}\sum_{N_i} e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} = \sum_{N_i} \frac{1}{k_0 T}\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} -$$

$$-\sum_{N_i} \frac{\Omega + \mu N - E_{N_i}}{k_0 T^2} e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)}$$

Hosil qilingan ifodani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$\frac{1}{k_0 T}\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\sum_{N_i} e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} - \frac{\Omega}{k_0 T^2}\sum_{N_i} e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} +$$

$$+\frac{1}{k_0 T^2}\sum_{N_i} E_{N_i} e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} - \frac{\mu}{k_0 T^2}\sum_{N_i} N e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)} = 0$$

So‘nggi tenglamani $k_0 T^2$-ga ko‘paytirsak va (4.5), (4.2), (4.3) munosabatlarini hisobga olsak,

$$T\frac{\partial \Omega}{\partial T} - \Omega + U - \mu \overline{N} = 0$$

$$U = \Omega - T\frac{\partial \Omega}{\partial T} + \mu \frac{\partial \Omega}{\partial \mu} \tag{11.11}$$

(11.11)- ifodasi omega - potensial orqali ichki energiyani hisoblash imkonini beradi va u zarralar soni o‘zgaruvchi tizim uchun umumlashtirilgan Gibbs-Gelmgolts tenglamasidir.

Endi omega - potensial bilan entropiya orasidagi bog‘lanishni topaylik. Katta kanonik taqsimotni hisobga olgan holda entropiya uchun hosil qilingan umumiy ifodaga asosan

$$S = -k_0 \sum_{N_i} w_{N_i} \ln w_{N_i} = -k_0 \sum_{N_i} \frac{\Omega + \mu N - E_{N_i}}{k_0 T} e^{\frac{1}{k_0 T}\left(\Omega + \mu N - E_{N_i}\right)}$$

Agar (4.2), (4.3) va (4.5) shartlaridan foydalansak,

$$S = -\frac{1}{T}\left(\Omega + \mu \cdot \bar{N} - U\right) \tag{11.12}$$

formula hosil bo‘ladi. Umumlashtirilgan Gibbs-Gelmgolts tenglamasidan foydalanib (11.12) - ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$S = -\frac{1}{T}\left(\frac{\partial \Omega}{\partial T} \cdot T\right) = -\frac{\partial \Omega}{\partial T}, \tag{11.13}$$

ya’ni entropiya omega - potensialdan temperatura bo‘yicha hosilasining teskari ishorali qiymatiga teng.

Kvazistatik jarayon vaqtida, tizim V-hajmi, T-temperaturasi va μ - ximik potensiali cheksiz kichik qiymatga o‘zgaradigan hol uchun entropiya o‘zgarishi nimaga teng ekanligi masalasini ko‘raylik. (11.13) - ga asosan:

$$\Delta S = -\frac{\Delta T}{T}\left(\Omega + \mu \cdot \bar{N} - U\right) - \frac{1}{T}\left(\Delta\Omega + \Delta U + \Delta\mu \cdot \bar{N} + \mu \cdot \Delta\bar{N}\right)$$

bo‘ladi. Agar (11.10) - ni hisobga olsak,

$$\Delta S = \frac{1}{T}\left(-\frac{\partial \Omega}{\partial V}\Delta V + \Delta U - \mu \cdot \Delta\bar{N}\right) \tag{11.14}$$

Ushbu formulaning o‘ng tomonidagi birinchi had tizim tomonidan bajarilgan ishni beradi, ya’ni

$$\Delta A = p\Delta V = -\frac{\partial \Omega}{\partial V}\Delta V$$

Termodinamika ikkinchi qonuniga binoan tizimga berilgan issiqlik miqdori $\Delta Q = T\Delta S$.

U holda ichki energiyaning o‘zgarishi uchun

$$\Delta U = \Delta Q - \Delta A + \mu \Delta \overline{N} \qquad (11.15)$$

ifodasini hosil qilamiz.

Shunday qilib, zarralar soni o‘zgaruvchi tizim uchun ichki energiyaning o‘zgarishi nafaqat issiqlik miqdori almashinuvi va ish bajarish hisobiga balki o‘rtacha zarralar sonining o‘zgarishi hisobiga ham sodir bo‘ladi.

Agar tizim hajmi o‘zgarmasa va tizim adiabatik izolatsiyalangan bo‘lsa (11.15) – dan

$$\mu = -\frac{\Delta U}{\partial \overline{N}}$$

ekanligi kelib chiqadi. Bu $\Delta V = 0,\ \Delta S = 0$ bo‘lganda jarayon vaqtida bir zarra o‘zgarishi bilan bog‘liq bo‘lgan ichki energiya o‘zgarishi ximik potensialni beradi demakdir.

7.12-§. Suyuq geliy II xususiyatlari

Kvant effektlar sodir bo‘ladigan makrotizimlarga misol qilib yakkayu yagona suyuq geliy II ni olib qarash mumkin. Temperatura absolyut nolga yaqinlashganda ham geliy II suyuqligicha saqlanadi. Qolgan barcha suyuqliklar, unda kvant effektlar sodir bo‘lishi mumkin bo‘lgan temperaturadan ancha yuqori temperaturada qattiq jism holatiga o‘tishga ulguradi, ya’ni ularningsuyuqligida kvant effekt kuzatilmaydi.

Geliy elementi $4{,}2^0$K - gacha sovutilganda gaz holatdan suyuq holatga o‘tadi. Tajribalar shuni ko‘rsatadiki, o‘zining fizik xususiyatlari

bilan suyuq geliy bir - biridan tubdan farq qiladigan ikki xil modifikatsiyadan tashkil topgan, ular geliy I va geliy II deb nomlangan. Bosimi 30 atm.dan yuqori bosim ostida geliy I temperatura pasayib ma'lum qiymatga ega bo'lganda u kristallga aylanadi. Biroq bosim 30 atm.dan past bo'lganda geliy har qanday temperaturada ham kristallanmaydi va $T=0^o$ da ham suyuqligicha qoladi. Sababi temperatura o'ta pasayganda ($2,19^0K$) suyuq geliyda faza o'tishi sodir bo'ladi. Bu faza o'tishida issiqlik sig'imining qiymati sakrab o'zgaradi. Geliy I dan GeliyII-ga o'tishda yashirin issiqlik miqdori nolga teng bo'lganligi uchun bu II turdagi faza o'tishi bo'ladi (Keyingi bobda faza o'tishlari haqida alohida to'xtalib o'tiladi).

Suyuq geliy II kvant tabiatli bo'lgan bir qator ajoyib xususiyatlarga ega. Ularning ayrimlarini quyida qayd etamiz.

L.D.Landau, suyuq geliy II dan tashkil topgan tizim energetik spektri xususiyatlariga tayangan holda, suyuq geliy II uchun o'zining statistik nazariyasini yaratdi. Bu nazariya zarralar to'plami uchun yaratilgan kvant mexanikaning umumiy qoidalariga asoslangan.

Suyuq geliy II idish ichiga solingan bo'lsin. Bu suyuqlik yaxlit kvant tizimni tashkil etadi. Uning qabul qilishi mumkin bo'lgan energiyalari ma'lum bir energetik spektrni tashkil etadi. Juda past temperaturalarda suyuqlik makroskopik tizim bo'lishiga qaramay, energetik spektrning diskretlik xususiyatini hisobga olmaslik mumkin emas. Biz nihoyatda kichik uyg'onish energiyalariga ega bo'lgan makroskopik kvant tizimning energetik spektr xarakterini aniqlashimiz lozim. Bu holda tizim absolyut nolda normal sathda bo'ladigan holatga yaqin energetik sathlardagina bo'lishi mumkin.

Kristallarda tok tashuvchilar energetik spektrini aniq hisoblash mumkin bo'lmaganligi kabi suyuq geliy II dan tashkil topgan tizim energetik sathlarini ham aniq hisoblash mumkin emas. Lekin bunday tizimlar kichik uyg'onish energiyalariga ega bo'lgan hol uchun energetik spektrining ayrim umumiy xususiyatlarini aniqlashimiz mumkin bo'ladi. Temperaturani pasaytirish yo'li bilan uyg'onish energiyalarining kichikligini ta'minlash mumkin. Bunday energetik spektrga suyuq geliy II ega bo'ladi.

Aniqlik uchun kichik uyg'onish energiyalariga ega bo'lgan kristall yoki suyuqlik energetik spektrini qarab chiqaylik. Ma'lumki, kristall atomlari harakatini bir-biri bilan o'zaro ta'sir qilmaydigan jismning butun hajmi bo'yicha tarqaluvchi elastik to'lqinlarga ajratish

mumkin. Kristall va kvant suyuqlik orasidagi yagona farq shundan iboratki, kristallarda ham bo‘ylanma va ham ko‘ndalang to‘lqin tarqalishi mumkin. Suyuqliklarda esa faqat bo‘ylama to‘lqinlar (qisilish va cho‘zilish to‘lqinlari) bo‘lishi mumkin. Bunday to‘lqinlardan har biri o‘zi bilan elementar uyg‘onish energiyasi deb hisoblanishi mumkin bo‘lgan ma’lum bir o‘zgarmas energiya tashiydi. Butun jism energiyasini esa bunday elementar uyg‘onish energiyalari to‘plami deb, ya’ni butun jism bo‘ylab tarqaluvchi bir – biriga bog‘liq bo‘lmagan elastik to‘lqinlar energiyalari yig‘indisi deb qarash mumkin.

Elementar uyg‘onish – bu jismdagi boshqa atomlarga nisbatan ortiqcha energiya olgan alohida atomgagina tegishli emas, balki yaxlit jism uyg‘onish energiyasi ekanligi tushunarlidir. Tovush to‘lqinini tashkil etuvchi uyg‘onishlarning har biri jism bo‘ylab harakat qiladi. Elementar uyg‘onish energiya va impulsga ega.

Jismdagi barcha elementar harakatini shu jism ichida o‘zaro ta’sir qilmaydigan kvazizarralardan, uyg‘onish kvantlaridan tashkil topgan ideal gaz harakati deb qarash mumkin. Bir tomondan yorug‘lik to‘lqinlari bilan yorug‘lik kvantlari va ikkinchi tomondan kristallarda elastik to‘lqinlar bilan uyg‘onish kvantlari orasida to‘la o‘xshashlik kiritish mumkin.

Yorug‘lik maydonini yorug‘lik kvantlari (fotonlar) to‘plami deb qarash mumkin bo‘lganligi kabi kristallarda elastik to‘lqinlar maydonini uyg‘onish kvantlari (fononlar) to‘plami deb qarash mumkin. Uyg‘onish kvantlari energiyasi ε impuls p bilan ma’lum bir bog‘lanishga ega.

Endi bevosita suyuq geliy energetik spektrini batafsil ko‘rib chiqaylik. Energetik spektr tuzilishiga tegishli ayrim farazlarga asoslangan holda suyuq geliyning asosiy xususiyatlarini hosil qilish mumkin.

Geliy II da ikki xil – uzun to‘lqinli va qisqa to‘lqinli uyg‘onish kvantlari mavjud deb faraz qilinadi. Katta to‘lqin uzunligi λ - ga ega bo‘lgan birinchi turdagi kvantlar o‘zi bilan $p = h/\lambda$ – kichik impuls va $\varepsilon(p)$ – kichik energiya tashiydi. Impuls p – ning kichik qiymatlarida $\varepsilon(p)$ - ni p – bo'yicha qatorga yoyib

$$\varepsilon \approx const \cdot p \qquad (12.1)$$

ko‘rinishda olish mumkin.

Suyuq geliy II da uzun to‘lqinli uyg‘onishlar elastik bo‘ylama kengayish va qisilish to‘lqinlarini tashkil etadi. Shuning uchun (12.1) – dagi doimiy odatdagi v – tovush to‘lqinining tarqalish tezligi demakdir.

$$\varepsilon \approx v \cdot p \qquad (12.2)$$

Suyuq geliy II da uzun to‘lqinli tovush uyg‘onish kvantlaridan tashqari qisqa to‘lqinli uyg‘onish kvantlari ham mavjud bo‘ladi deb qaraymiz va uning to‘lqin uzunligi λ_0 – ga yaqin, impulsi esa $p_0 = h/\lambda_0$ - ga yaqin qiymatlarga ega bo‘ladi. U holda geliy II suyuqligida impulsi nolga yaqin bo‘lgan uzun to‘lqinli uyg‘onish kvantlari bilan bir qatorda impulsi $p \approx p_0$ bo'lgan kvantlar ham mavjud deb hisoblash mumkin. Qisqa to‘lqinli kvantlar energiyasini

$$\varepsilon \approx \varepsilon(p_0) + \frac{(p - p_0)^2}{2m} \qquad (12.3)$$

ko‘rinishda olish mumkin. Bundagi $\varepsilon(p_0)$ va m – lar doimiy qiymatlar bo‘lib, tajriba orqali aniqlanadi (12.3) – ifodasida $(p\text{-}p_0)$ – lar bo‘yicha qatorga yoyganda bu farqning birinchi darajali ifodasi ishtirok etmaydi, chunki $\varepsilon(p)$ – ni, aniqlashimizga muvofiq, $p = p_0$ da minimumga ega. Agar suyuq geliy II dagi uzun to‘lqinli uyg‘onish kvantlarini fotonlarga o‘xshatish mumkin bo‘lsa, kalta to‘lqinli kvantlarni esa ideal gazni tashkil etuvchi m – massaga ega bo‘lgan oddiy zarralar kabi bo‘ladi deb hisoblash mumkin. Uyg‘onish kvantlari to‘plami bilan ideal gaz orasida bunday matematik o‘xshatish o‘tkazish suyuq geliy II uchun termodinamik funksiyalarni aniqlashga imkon yaratadi.

7.13-§. Suyuq geliy II-ning statistik nazariyasi

Makroskopik nuqtai nazardan suyuq geliy II issiqlik uyg‘onish kvantlari borligi unda $\mathcal{F}$ – ozod energiya mavjudligini anglatadi. Ozod energiya esa tizimda uzun to‘lqinli va kalta to‘lqinli uyg‘onish kvantlari mavjudligi sababli

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_u + \mathcal{F}_k \qquad (13.1)$$

ko‘rinishdagi ikki xil ozod energiya yig‘indisidan iborat bo‘ladi.

Uzun to‘lqinli kvantlar $\mathcal{F}_u$– ozod energiyasini qattiq jismning past temperaturasiga to‘g‘ri keluvchi ozod energiyasiga o‘xshatishdan foydalanib yozishimiz mumkin. Shunday qilib

$$3N = \frac{4\pi V \cdot \omega_{\max}^{3}}{3v^{3}} \qquad (13.2)$$

Bu yerda:

N - suyuqlikning V - hajmdagi atomlar soni;

ω_{max}- tovush to‘lqinlarining maksimal chastotasi;

v – tovush tezligi.

(13.2) – formulasini yozishda suyuq geliy II-da faqat bo‘ylama to‘lqinlargina mavjudligi hisobga olindi. Ma’lumki, past temperaturalar T<<θ_c – uchun kristall ozod energiyasi

$$\mathcal{F} = -k_0 T \ln z = -N\frac{\pi^4 k_0 T}{5}\left(\frac{T}{\theta_c}\right)^3 + \frac{9Nk_0\theta_c}{8}$$

ko‘rinishga ega. Bunga (13.2) – ni va $\theta_c = \frac{h\omega_{\max}}{k_0}$ - ni tadbiq etsak,

$$\mathcal{F}_u = -\frac{4}{45}\cdot\frac{\pi(k_0T)^4 V}{h^3 v^3} \qquad (13.3)$$

hosil bo‘ladi.

$\mathcal{F}_k$- ni hisoblash sal murakkabroq. Qisqa to‘lqinli kvantlar ideal gaz zarralar kabi xususiyatga ega.

(12.3) – formulasi orqali aniqlovchi qisqa to‘lqinli kvantlar energiyasini, yetarli darajada past temperaturalarda, k_0T – ga nisbatan katta deb hisoblash mumkin. Buning uchun hech bo‘lmaganda

$$\varepsilon(p_0) >> k_0T$$

tengsizligi bajarilmog‘I lozim. Suyuq geliy II-da bu tengsizlikning haqiqatdan bajarilishini biz quyida ko‘ramiz. Shuning uchun qisqa to‘lqinli kvantlar taqsimot funksiyasi klassik Maksvell taqsimoti ko‘rinishiga ega bo‘ladi. Klassik ideal gaz ozod energiyasi (zarralar aynan o‘xshashlik prinsipini hisobga olgan holda)

$$\mathcal{F}_k = -N_k \cdot k_0 T \ln\left(\frac{eV}{N_k}\int e^{-\frac{\varepsilon}{k_0 T}} \frac{d\vec{p}}{h^3}\right) \qquad (13.4)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Bu yerda N_k - qisqa to‘lqinli uyg‘onish kvantlarining soni. N_k – berilgan aniq son emas, lekin u suyuqlik temperaturasiga bog‘liq bo‘lgan kattalikdir. Bu son uyg‘onishning oshirilishi bilan, ya’ni suyuqlik temperaturasi ko‘tarilishi bilan osha boradi. Berilgan temperaturada qisqa to‘lqinli uyg‘onish kvantlarining soni ozod energiyaning minimumlik sharti orqali topiladi.

$$\frac{\partial \mathcal{F}_k}{\partial N_k} = 0 \qquad (13.5)$$

(13.4) - ni (13.5) - ga tadbiq etib qisqa to‘lqinli uyg‘onish kvantlari uchun

$$N_k = -V\int e^{-\frac{\varepsilon}{k_0 T}} \frac{d\vec{p}}{h^3} \qquad (13.6)$$

ifodasini hosil qilamiz. Buni hisobga olgan holda ozod energiya uchun

$$\mathcal{F}_k = -k_0 T V\int e^{-\frac{\varepsilon}{k_0 T}} \frac{d\vec{p}}{h^3} \qquad (13.7)$$

ifodasini hosil qilamiz. (13.7) – dagi integralli ifodani hisoblaylik:

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{k_0 T}} \frac{d\vec{p}}{h^3} = 4\pi\int e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0 T}} \cdot e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2mk_0 T}} \frac{p^2 dp}{h^3} =$$

$$= 4\pi e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0 T}}\int e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2mk_0 T}} \frac{p^2 dp}{h^3}$$

Uyg‘onish kvantini impuls bo‘yicha integrallash chegaralari to‘liq aniqlanmagan. Biroq $(p\text{-}p_0)$ – impuls farqi oshgan sari integral ostidagi ifoda tezlik bilan kamaya boradi va $\frac{(p-p_0)^2}{2m} \gg k_0 T$ bo‘lganda nolga

aylanadi. Shuning uchun bu holda integral chegaralarini ±∞ deb olish mumkin. U holda

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{k_0T}}\frac{d\vec{p}}{h^3}=4\pi\, e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2mk_0T}}\frac{p^2dp}{h}$$

Integral osti funksiyasi $\frac{(p-p_0)^2}{2m}\rangle\rangle k_0T$ tengsizligi bajarilganda nolga aylanganligi tufayli, sekin o‘zgaruvchi p^2 – funksiyani integral ostidan chiqarib $p=p_0$ deb olish mumkin. U holda

$$\int e^{-\frac{\varepsilon}{k_0T}}\frac{d\vec{p}}{h^3}=4\pi p_0^2\, e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{(p-p_0)^2}{2mk_0T}}\frac{dp}{h^3}=$$

$$=\frac{4\pi p_0^2}{h^3}\sqrt{2mk_0T}\, e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}} \qquad (13.8)$$

Shunday qilib,

$$\mathcal{F}_k=-\frac{4\pi}{h^3}\sqrt{2\pi\cdot m}\left(k_0T\right)^{3/2}Vp_0^2e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}} \qquad (13.9)$$

$$N_k=-\frac{4\pi p_0^2V}{h^3}\sqrt{2\pi\cdot mk_0T}e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}} \qquad (13.10)$$

Ozod energiyaning $\mathcal{F}_u$ va $\mathcal{F}_k$ qiymatlarini, mos ravishda, (13.3) va (13.9) -dan (13.1)-ga tadbiq etib suyuq geliy II uchun

$$\mathcal{F}=-\frac{4}{45}\cdot\frac{\pi^5\left(k_0T\right)^4V}{h^3v^3}-\frac{4\pi}{h^3}\sqrt{2\pi\cdot m}\left(k_0T\right)^{3/2}Vp_0^2e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}} \qquad (13.11)$$

ifodasini hosil qilamiz. Bundan suyuq geliy II uchun quyidagi ko‘rinishdagi entropiya va issiqlik sigimi ifodalari kelib chiqadi:

$$S=\frac{16}{45}\cdot\frac{\pi^5k_0^4T^3V}{h^3v^3}+\frac{4\pi}{h^3}\sqrt{2\pi\cdot m}p_0^2k_0^{3/2}T^{1/2}V\left\{\frac{3}{2}+\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}\right\}e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0T}} \qquad (13.12)$$

$$C_V = \frac{16}{45} \cdot \frac{\pi^5 k_0^4 T^3 V}{h^3 v^3} +$$

$$+ \frac{4\pi}{h^3} \sqrt{2\pi \cdot m}\, p_0^2 k_0^{3/2} T^{1/2} V \left(\frac{3}{4} - \frac{\varepsilon}{2k_0 T} + \frac{\varepsilon^2}{k_0^2 T^2}\right) \cdot e^{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0 T}} \qquad (13.13)$$

Demak, barcha termodinamik funksiyalar uzun to‘lqinli va kalta to‘lqinli uyg‘onish kvantlari orqali hosil bo‘lgan hadlar yig‘indisidan iborat bo‘lar ekan. Ularning birinchi qismi xuddi kristallardagi kabi temperatura bo‘yicha darajali qoida bilan o‘zgaradi, ikkinchi qismi esa temperaturaga eksponensial, $\exp\left\{-\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0 T}\right\}$ ifodasiga proporsional ravishda o‘zgaradi. Bu yerdagi doimiyliklar geliy II – ning entropiyasini va issiqlik sig‘imini o‘lchash yo‘li bilan aniqlangan:

$$\frac{\varepsilon(p_0)}{k_0} = 9{,}6^0\,\mathrm{K}; \qquad \frac{p_0}{h} = 12{,}25 \cdot 10^8\, см^{-1}; \qquad m = 0{,}75 m_{He}$$

Doimiyliklarning bunday qiymatlarida S va C_V - larda 1^0K dan past temperaturalarda eksponensial hadga nisbatan darajali had katta bo‘ladi. Va buning teskarisi, temperaturaning katta qiymatlarida eksponensial (qisqa to‘lqin) qismi katta bo‘lib, asosiy rol o‘ynaydi. Termodinamik funksiyalarning temperatura bo‘yicha bunday o‘zgarishi tajribalar natijasiga mos keladi.

Suyuq geliy II ning ajoyib xususiyatlaridan biri bu P.L.Kapitsa tomonidan kashf etilgan o‘ta oquvchanlik hodisasidir. Suyuq geliy II ning kapilyardan va kichik tirqishdan bemalol o‘tishi uning yopishqoqlik koeffitsiyenti nihoyatda kichik ekanligi ko‘rinadi. Shuning uchun ham suyuq geliy II har qanday ingichka kapilyardan ham bemalol o‘taveradi. O‘ta oquvchan suyuq geliy II ning xususiyatlaridan biri bu uning juda katta issiqlik o‘tkazuvchanlikka ega ekanligidir. Suyuq geliy II da, yopishqoqligi deyarli bo‘lmaganligi sababli, o‘ziga xos xususiyatga ega bo‘lgan o‘zi bilan salmoqli issiqlik miqdori tashuvchi oqim hosil bo‘ladi. Odatdagi yopishqoqli suyuqlikda

konvensiyali siljish (oqim) bo‘lmaganligi tufayli issiqlik o‘tkazuvchanlik juda kichik bo‘ladi. Yuqorida bayon etilgan nazariya asosida o‘ta oquvchanlik hodisasini to‘la tushuntirish mumkin. Bu esa geliy II ning energetik spektri xususiyatiga bevosita bog‘liq.

Dastlab geliy II da uyg‘onish kvantlari bo‘lmasin, ya’ni uning temperaturasi nolga teng bo‘lsin. Faraz qilaylik, geliyda p-impulsli va $\varepsilon(p)$ – energiyali uyg‘onish kvanti hosil bo‘lsin. Geliyning ichki energiyasi bu holda $\varepsilon(p)$ bo‘ladi.

Qattiq devor bo‘ylab geliy II ning oqishini ko‘rib chiqaylik. Oquvchi geliy energiyasi

$$E = \frac{mv^2}{2} + \varepsilon(p) + \vec{p}\cdot\vec{v}$$

bo‘ladi, Bu yerda:

v – suyuqlikning oqish tezligi;

$mv^2/2$ – suyuqlikning kinetik energiyasi;

$\varepsilon(p) + \vec{p}\cdot\vec{v}$ - suyuqlik energiyasining o‘zgarishi.

Energiya sochilganda oquvchi suyuqlik kinetik energiyasi faqat kamayishi mumkin, ya’ni $\varepsilon(p) + \vec{p}\cdot\vec{v} < 0$ bo‘ladi. Yo‘nalishi $\vec{v}$ - ga antiparallel bo‘lgan $\vec{p}$ - impulsli kvant hosil bo‘lganda $(\varepsilon + \vec{p}\cdot\vec{v})$- o‘zining eng kichik qiymatiga ega va u $(\varepsilon - \vec{p}\cdot\vec{v})$ - ga teng bo‘ladi. Demak,

$$\varepsilon - p\cdot v < 0$$

yoki

$$v > \frac{\varepsilon}{p} \qquad (13.15)$$

tengsizligi bajarilishi kerak.

Agar $\frac{\varepsilon}{p} \neq 0$ bo‘lsa oquvchi geliyda uyg‘onish kvantlari hosil bo‘lishi mumkin va oqim yetarli darajada katta tezlikka ega bo‘lgandagina energiya sochilishi sodir bo‘ladi. Agar oqish tezligi (13.15) tengsizligini qanoatlantirmasa, issiqlik uyg‘onish kvantlari hosil bo‘lishi bilan bog‘liq bo‘lgan idish devori va geliy orasida o‘zaro ta’sir bo‘lmaydi.

Geliy II energetik spektridan $\frac{\varepsilon}{p}$ hech nolga aylanmasligi ko‘rinib turibdi. Shunday qilib absolyut nol temperaturada suyuq geliy II qattiq devor bilan o‘zaro ta’sir qilmay va energiya sochmay harakat qiladi. Bunday bo‘lishi mumkin, agar uning tezligi $v_0 = \left(\frac{\varepsilon}{p}\right)_{min}$ - dan katta bo‘lmasa. O‘ta oquvchanlik hodisasi ana shunga asoslangan.

Temperatura $T \neq 0$ bo‘lganda oldingi barcha mulohazalar kuchga ega va $v \neq v_0$ bo‘lganda geliy II da yangi uyg‘onish kvantlari hosil bo‘lmaydi. Biroq oldindan mavjud bo‘lgan issiqlik uyg‘onish kvanti qattiq idish devori bilan o‘zaro ta’sirga ega bo‘lishi mumkin.

Bir porsiya suyuq geliy II da $T \neq 0$ bo‘lganda bir vaqtning o‘zida ikki xil turdagi harakat bo‘lishi mumkin va ular bir – biriga bog‘liq bo‘lmaydi. Bular o‘ta oquvchan va normal suyuqliklardir. O‘ta oquvchanlik yopishqoq va issiqlik uyg‘onish energiya tashimay sodir bo'ladi. Normal oqim esa yopishqoqlik koeffitsiyenti nol bo‘lmagan odatdagi suyuqlik oqimi kabi bo‘ladi. Geliyning bir qism massasi harakatning har bir turi bilan bog‘liq ravishda ko‘chishi mumkin. Shunga muvofiq geliy II ikki xil o‘ta oquvchan va normal suyuqliklar aralashmasi deb qaralishi mumkin. Butun geliy II harakati $T=0$ da qanday bo‘lsa, $T \neq 0$ bo‘lganda geliy II suyuqlikning bir qismini tashuvchi o‘ta oquvchan harakat ham shunday bo‘ladi. Biroq, $T \neq 0$ da geliy massasinig bir qismi normal holatda bo‘ladi, ishqalanish bilan oqadi va o‘zi bilan issiqlik tashiydi.

Ingichka kapilyar orqali geliyni oqirish bo‘yicha o‘tkaziladigan tajribalarda o‘ta oquvchanlik xususiyatiga ega bo‘lgan qismi o‘z xususiyatlarini namoyon qiladi. U juda ingichka kapilyardan hech qanday qarshiliksiz olib chiqadi.

Normal suyuqlik massasi temperaturaga bog‘liq bo‘ladi. $T \to 0$ bo‘lganda geliy II ning normal qismi massasi ham nolga intiladi.

Geliy II – ning ajoyib xususiyatlaridan biri termomexanik effektdir. Geliy idish ichidan ingichka kapilyar orqali oqib chiqqanda idishda qoladigan geliyning temperaturasi oshishiga termomexanik effekt deyiladi. Buning aksi, idish ichiga shunday kapilyar orqali geliy oqib kirganda idish temperaturasi pasayadi.

Yuqorida bayon etilgan fikrlar orqali termomexanik effekt sodir bo‘lishi tushuniladi.

Geliyning o‘zi bilan energiya tashimaydigan o‘ta oquvchan qismi ingichka kapilyar orqali harakat qilmoqda. Idishdan kapilyar orqali geliyning o‘ta oquvchi bir qism massasi oqib chiqsa, oldingi issiqlik energiya zahirasi idishda qolgan qismi o‘rtasida taqsimlanadi va uning temperaturasi oshadi. Kapilyar orqali o‘ta oquvchan geliy idish ichiga kirsa bunga teskari jarayon bo‘ladi. Idish ichida dastlab bo‘lgan geliyning issiqlik energiya zahirasi barcha geliy orasida qayta taqsimlanadi. Temperatura pasaygan sari bu jarayon osha boradi. Geliyda sodir bo‘ladigan ushbu termomexanik effektdan o‘ta past temperatura hosil qilishda foydalaniladi.

7.14-§. Kvant statistikasi tarixi

Biz quyidagi faqat muvozanatli holatda bo‘lgan ideal gazlar kvant statistikasining paydo bo‘lish tarixini ko‘rib chiqamiz.

Nurlanishning kvant xususiyatga ega ekanligini aniqlash kvant statistik fizikasining rivojlanishida katta rol o‘ynaydi. 1900-1924 yillar mobaynida birinchi kvant statistikasining (Boze-Eynshteyn statistikasining) paydo bo‘lishi, umuman, hozirgi zamon fizikasining rivojlanishida burilish yasadi.

Ma’lumki, Boltsman statistikasi XIX asr nazariy fizikasining eng katta yutuqlaridan biri bo‘lib hisoblanadi. Ammo keyinchalik izlanish sohasining kengayishi bilan Boltsman statistikasini qo‘llash ma’lum bir chegaraga ega ekanligi ma’lum bo‘ldi. Boltsman statistikasini qo‘llashdagi bu kamchilik va qiyinchiliklar asosida tekshiriluvchi makrotizimlardagi atom va molekulalar tuzilishi hamda ularning o‘zaro ta’sirini faqat mexanik tasavvur etish yotadi. Klassik statitsikasidagi asosiy qiyinchiliklardan biri energiyaning erkinlik darajalari bo‘yicha teng taqsimlanganligi haqidagi Maksvell-Boltsman qonuni bilan bog‘liqdir. Qattiq jism issiqlik sig‘imi (Dyulong-Pti formulasi) haqidagi klassik nazariyadagi qiyinchiliklar aynan shu qonunlardagi kamchiliklar tufayli vujudga kelgan.

Absolyut qora jism nurlanishi uchun, ma’lumki, klassik tushuncha o‘rniga kvant gipoteza qabul qilinishi natijasida dastlab Releу-Jins qonunini umumlashtirish orqali kelib chiqqan «ultrabinafsha halokat» haqidagi noto‘g‘ri tushunchani rad etish imkoniyatiga ega bo‘lindi. Shuning uchun ham kvant statistikasining vujudga kelishi

Eynshteynning nurlanishga tegishli bo‘lgan dastlabki ishlari bilan bog‘liq desa bo‘ladi.

1900 yil Eynshteyn statistika bilan yorug‘likning kvant gipotezasi orasida bog‘lanish borligini aytadi va Plankning nurlanishga tegishli bo‘lgan formulasi to‘g‘ri ekanligi haqidagi fikrni aytdi.

1913 yil N. Bor atomning elektron orbitalarga tegishli bo‘lgan kvant nazariyasini va spektrlar nazariyasini beradi. U muvozanatli nurlanish muammosidagi qiyinchiliklarni tahlil qilib, atomlar tomonidan yorug‘likning yutish va chiqarish jarayonlariga tegishli bo‘lgan hisoblashlar uchun klassik elektrodinamikaning formulalarini qo‘llash mumkin emasligini isbotlaydi.

1916 yil «Kvant nazariyasi asosida nurlanishning yutilishi va chiqarilishi» degan mavzudagi Eynshteynning maqolasi chop etildi. Eynshteyn o‘zining bu maqolasida ehtimoliyat tushunchasiga asoslangan holda Plankning nurlanish qonunining to‘la kvant nazariyasini yaratdi. Shu asosda 1917 yil Eynshteynning statistikasiga taalluqli bo‘lgan bir guruh ishlari matbuotda paydo bo‘ldi. Unda foton energiyaga ega bo‘lish bilan bir qatorda nurning tarqalish yo‘nalishi bo‘yicha impulsga ham ega ekanligi aytiladi. Fotonning impuls berishi gazlarda Maksvellning tezliklar bo‘yicha taqsimoti ta’minlanishi ko‘rsatilgan. Bundan so‘ng absolyut qora jism nurlanishiga tegishli bo‘lgan (1923 yil) Kompton, Debay, Nernst, Lorentslarning bir qator ishlari olimlar o‘rtasida muhokama qilindi. Bu ishlarning barchasi V.Paulining elektronli gaz bilan muvozanatda bo‘lgan absolyut qora jism nurlanishiga bag‘ishlangan ishlarida mujassamlashtirilgan.

Ideal gazning kvant nazariyasiga tegishli bo‘lgan keyingi ishlar va gazlarning aynish darajasi bilan bog‘liq muammoning yechilishi A.Eynshteyn, C.N.Boze, E.Fermi nomlari bilan bog‘liq. 1924 yil Boze «Plank qonuni va yorug‘lik kvantlari» nomli maqolasida Pauli formulasining o‘ziga xos isbotini berdi. Unda Boze foton zarralarining aynan o‘xshashlik prinsipini hisobga oldi.

Eynshteyn o‘zining 1924-25 yillar chiqqan uchta maqolasida Boze statistikasini ideal gazga tadbiq etgan. Shu yo‘sinda kvant zarralar to‘plami uchun Boze-Eynshteyn taqsimoti paydo bo‘ldi. Paulining elektronlar spinga ega ekanligini aniqlashi nafaqat murakkab tizimlar nazariyalarida, balki kvant statistik fizikasida ham muhim rol o‘ynaydi. E.Fermining shu davrdagi izlanishlarida zarralarning spinini hisobga olish yetishmay turgan edi. Bu momentni hisobga olgan holda buyuk

italyan olimi E.Fermi boshqa xil xususiyatga ega bo‘lgan kvant statistikasini ochdi. Bu statitsika «Fermi-Dirak statistikasi» nomi bilan taniqlidir.

Entropiyaning absolyut qiymati muammosi bilan shug‘ullanish jarayonida 1923 yil Fermi o‘zining statistikasini berdi. Spini butun bo‘lmagan zarralar to‘plami uchun Pauli prinsipini hisobga olgan holda Fermi-Dirak taqsimoti 1926 yil Fermining «Bir atomli ideal gazni kvantlash haqida» nomli maqolasida beriladi.

Shunday qilib, Fermi-Dirak statistikasi orqali metallardagi elektronlar xususiyatini tushuntirish imkoniyati tug‘iladi. Shuni ham qayd etish lozimki, Fermi o‘z statistikasini yaratganda kvant mexanikasi endigina Geyzenberg, Dirak va Shredingerlar tomonidan rivojlantirilmoqda edi.

Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak statistikasi orasida bog‘lanish bor ekanligi keyinchalik kvant mexanikasi asosida Geyzenberg, Diraklar tomonidan tushuntirildi. Xususan, Dirakning 1926 yil matbuotda chop etilgan «Kvant mexanikasining asoslari haqida» nomli maqolasi kvant statistikasining rivojlanishida katta rol o‘ynaydi. Bu maqolada birinchi bor kvant tushunchasi ko‘plab zarralardan tashkil topgan tizimga tadbiq etiladi. Dirak o‘zining bu nazariyasida atomli tizimlar holatini ifodalovchi simmetrik va antisimmetrik to‘lqin funksiyalarni kiritadi hamda Pauli prinsipini tizimning kvant-mexanik xususiyati sifatida tavsiflaydi. Bu ishning yana bir mohiyati shundan iboratki, unda birinchi bor kvant statistikasi elementar zarralar kvant xususiyatining natijasi ekanligi ko‘rsatilgan.

Shunday qilib, Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak statistikalarining (taqsimot funksiyalarining) ochilishi bilan klassik statistik fizikadan kvant statistik fizikaga o‘tishga asos tug‘ildi. Kvant statistik fizikasi esa hozirgi zamon nazariy fizikasining mustaqil alohida bo‘limi sifatida shakllangan.

Kvant statistikasining turli sohalarda qo‘llanilishi eksperiment natijalariga muvofiq keladi. Bu esa kvant statistikasining katta ahamiyatga ega ekanligini ko‘rsatadi. Bundan tashqari, kvant statistikasi orqali klassik statistikaning qo‘llanilish chegarasini aniq ko‘rsatish mumkinligi uning ahamiyatini yanada oshiradi.

Masalalar

1.Absolyut qora jism nurlanishi uchun to‘la energiya, ozod energiya va bosim hisoblansin.

Ye ch i sh:

Ma’lumki, absolyut qora jism nurlanishining to‘la energiya zichligi $U(T)=\sigma T^4$ edi. Shuning uchun V hajmli absolyut qora jism nurlanishining to‘la energiyasi

$E = V \cdot U(T) = \sigma V T^4$ bo‘ladi. $\mathcal{F}$-ozod energiya, S-entropiya va p-bosimni hisoblamoq uchun termodinamikada ma'lum bo'lgan quyidagi formulalardan foydalanamiz:

$$\frac{E}{T^2} = -\left[\frac{d}{dT}\cdot\left(\frac{\mathcal{F}}{T}\right)\right]_V; \qquad S = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_V; \qquad p = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V}\right)_T$$

Shunday qilib,

$$\mathcal{F} = -T\int\frac{E}{T^2}dT = -T\sigma V\int T^2 dT = -\frac{\sigma V T^4}{3} + const.$$

Buni hisobga olsak,

$$S = \frac{4}{3}\sigma V T^3; \qquad p = \frac{1}{3}\sigma T^4 \qquad \text{bo‘ladi.}$$

2. Foton gazi uchun hajm doimiyligidagi issiqlik sig‘imi hisoblansin.

Ye ch i sh:

Foton gazining to‘la energiyasi $E=\sigma V T^4$. Shuning uchun C_V – issiqlik sig‘imi

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 4\sigma V\cdot T^3 \qquad \text{bo‘ladi.}$$

3. Foton gazi uchun C_p-bosim doimiyligidagi issiqlik sig‘imi hisoblansin.

Ye ch i sh:

Termodinamikadan ma’lumki,

$$C_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p,$$

ikkinchi tomondan, holat tenglamasining differentsial formasi:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V=-1,\ \text{bundan}\quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p=-\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}$$

Shuning uchun:

$$C_p=C_V-\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}$$

Ma'lumki, foton gazining bosimi hajmga bog'liq emas ($p=\sigma T^4/3$). Shuning uchun $(\partial p/\partial V)_T=0$. Demak, $C_p=\infty$.

4. Foton gazi uchun adiabatik jarayon tenglamasi hosil qilinsin.

Ye ch i sh:

№1-masalaga binoan entropiya $S=4\sigma VT^3/3$ edi. Ikkinchi tomondan, ma'lumki, adiabatik jarayon vaqtida $S=const$ bo'ladi. Shuning uchun $VT^3=const$ adiabata tenglamasi bo'ladi. Agar bosim $p=\sigma T^4/3$ ekanligini hisobga olsak, adiabata tenglamasi bosim va hajm o'zgaruvchilarida $VP^{3/4}=const$ ko'rinishga ega bo'ladi.

5.Fermi-Dirak taqsimoti uchun $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial w_\Phi}{\partial\varepsilon}d\varepsilon=-1$ munosabatning bajarilishini isbotlang.

Ye ch i sh:

Ma'lumki, $$w_\Phi(\varepsilon)=\frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}+1}.$$

Shuning uchun,

$$\frac{dw_\Phi}{d\varepsilon}=-\frac{1}{k_0T}\frac{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}}{(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}+1)^2}$$

Bundan

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{dw}{d\varepsilon}\right)d\varepsilon=-\frac{1}{k_0T}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}d\varepsilon}{(e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}}+1)^2}$$

$e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}} = x$ o‘zgaruvchisi kiritamiz: $dx = \frac{1}{k_0T} e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}} d\varepsilon$ bo‘ladi.

U holda

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{dw}{d\varepsilon}\right) d\varepsilon = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1}\Big|_0^{\infty} = -1$$

6. Past temperaturalar uchun elektronli gaz tizimining entropiyasi hisoblansin.

Ye ch i sh:

Ma’lumki, kuchli aynigan Fermi gazi uchun

$$c_V^{el} = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{Nk_0^2}{\mu_0} \cdot T$$

edi. Bu yerda N tizimdagi barcha elektronlar soni μ_0 elektronlarning T=0 bo‘lgandagi maksimal energiyasi. Shuning uchun past temperaturalarga to‘g‘ri keluvchi elektronli gaz entropiyasi

$$S = \int \frac{c_V}{T} dT = \frac{\pi^2}{2} \cdot \frac{Nk_0^2}{\mu_0} \int dT = \frac{\pi^2 Nk_0^2}{2\mu_0} \cdot T + const;$$

Ko‘rinib turibdiki, $T \to 0$ bo‘lganda $S \to 0$ bo‘ladi, ya’ni termodinamikaning uchinchi qonuni bajariladi.

7. Kuchsiz aynigan Boze gazidan tashkil topgan tizim energiyasi

$$E = \frac{3}{2}\theta V \frac{(2\pi m\theta)^{3/2}}{h^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{5/2}} \cdot e^{l\frac{\mu}{\theta}}$$

ekanligi topilsin.

Ye ch i sh:

(4.3) va (4.10) - larga asosan ideal Boze gazining energiyasi

$$E = \sum_k \varepsilon_k \cdot n_k = \sum_k \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_0T}\right) - 1}$$

formulasi orqali aniqlanadi. Agar (6.1)-dan (6.3)-ga o‘tganligimizni hisobga olsak, tizim to‘la energiyasini quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$E = 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{k_0 T})-1} d\varepsilon$$

Kuchsiz aynigan gaz uchun integral osti ifodasini

$$\frac{1}{e^x - 1} = \sum_{l=1}^{\infty} e^{-lx}$$

ko‘rinishdagi qatorga yoyish mumkin. U holda,

$$E = 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^\infty \frac{\varepsilon^{3/2}}{\exp(\frac{\varepsilon-\mu}{k_0 T})-1} d\varepsilon =$$

$$= 2\pi V \frac{(2m)^{3/2}}{h^3} \cdot \theta^{5/2} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{5/2}} e^{l\frac{\mu}{\theta}} \int_0^\infty x^{3/2} e^{-x} dx =$$

$$= \frac{3}{2} \theta V \frac{(2\pi m\theta)^{3/2}}{h^3} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^{5/2}} e^{l\frac{\mu}{\theta}}$$

8. To‘la aynigan Fermi gazi uchun $\overline{(\Delta E)^2}$ – tizim energiyasining o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasi hisoblansin.

Ye ch i sh:

$$\overline{E^2} = \int_0^{\mu_0} E^2 \cdot g(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{3(2\pi^2)^{4/3} h^4}{28 m^2} \cdot \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3} ; \qquad \overline{E} = \frac{3}{10} (3\pi^2)^{2/3} \frac{h^2}{m} \cdot \left(\frac{N}{V}\right)^{2/3}$$

Demak,

$$\overline{(\Delta E)^2} = \overline{E^2} - \overline{E}^2 = \frac{111}{140} (3\pi^2)^{4/3} \frac{h^4}{m^2} \left(\frac{N}{V}\right)^{4/3}$$

8-bob. KO‘P KOMPONENTLI VA KO‘P FAZALI TIZIMLAR

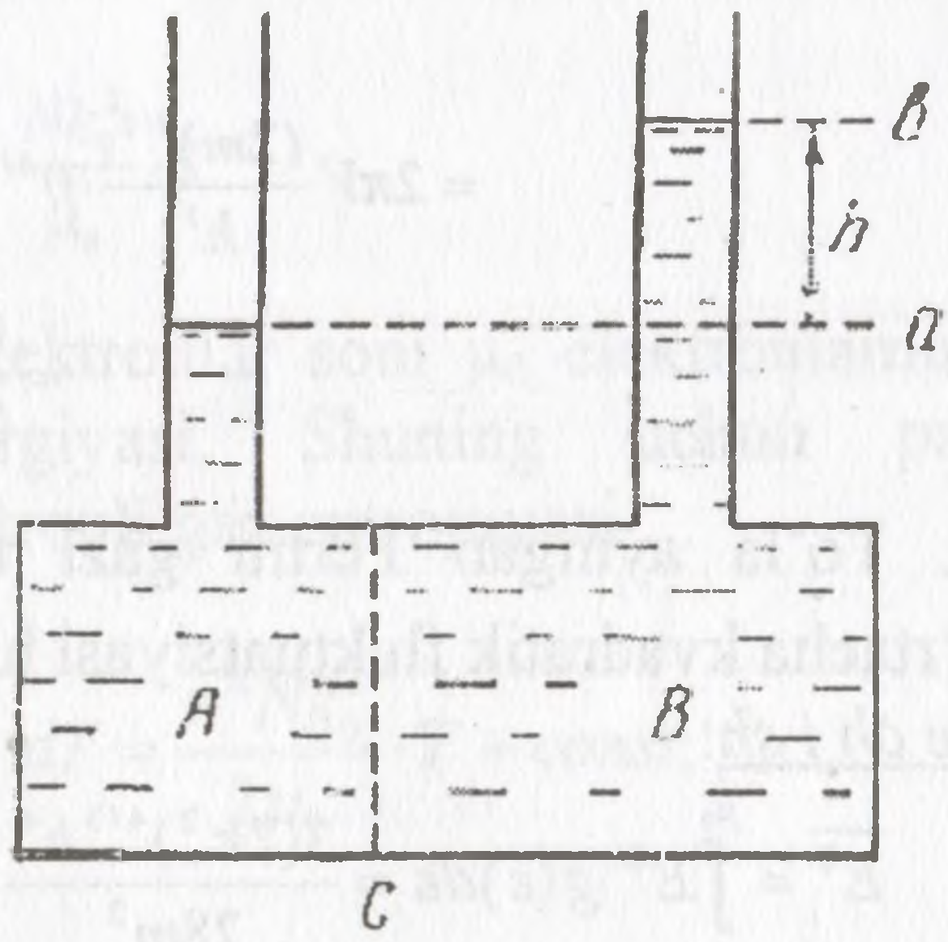
8.1-§. Kuchsiz eritmalar

Kuchsiz eritmalar deb eritiluvchi jism molekulalarining soni erituvchi jism molekulalari soniga nisbatan juda kichik bo‘lgan eritmaga aytiladi (qand va suv).

Eritgich vazifasini bajaruvchi suyuqlik molekulalari bilan eritilgan jism molekulalari orasida o‘zaro kuchli ta’sir bo‘lishiga qaramasdan, ideal gaz nazariyasi yaratilgani kabi, kuchsiz eritma nazariyasini berish mumkin. Bunga sabab kuchsiz eritmada eritilgan jism molekulalari deyarli o‘zaro ta’sirda bo‘lmaydi.

Osmotik bosim to‘g‘risidagi tushuncha ham eritmalarga taalluqlidir.

S to‘siqdan faqat erituvchi o‘tishi mumkin, eritiluvchi molekulasi o‘tmaydi deb faraz qilaylik (14-*chizma*). Idishning *A* qismida eritgich, *B*-da eritma bo‘lsin.



14-chizma. Osmotik bosimni o‘lchovchi qurilma. A-toza eritgich; B-eritma; C-erituvchi jism molekulalarini o‘tkazmovchi to‘siq.

Tabiiy holda konsentratsiyalarni tenglashtirish uchun eritgich *A*-dan *B*-ga o‘ta boshlaydi. Bu oqim idishning *B*-qismida eritgich bosimi oshib, teskari yo‘nalish bo‘yicha oqim hosil qilgunga qadar davom etadi va natijada ikkala yo‘nalish bo‘yicha eritgich oqimi tenglashguncha davom etadi. Idishning B-qismidagi ana shu oshgan bosimga osmotik bosim deyiladi, va u son jihatdan $\rho \cdot g \cdot h$-ga teng. Bu yerda ρ - eritma zichligi, *g*- og‘irlik kuchi tezlanishi va *h*-qiymati b va a - sathlar farqini anglatadi.

Nazariya va tajribada kuchsiz eritma uchun osmotik bosim:

$$p_{osm} = \frac{N_1 RT}{V} \qquad (1.1)$$

ko‘rinishga ega ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Bu yerda: T - temperatura; R- universal gaz doimiysi; V – eritma hajmi; N_1 – eritilgan jismning grammolekulalar soni.

Shunday qilib, V – hajmda eritilgan jism molekulalari xususiyatlari xuddi ideal gaz xususiyatlari kabi bo‘ladi. Agar kuchsiz eritmada eritilgan jism molekulalari o‘zaro ta’sirga ega bo‘lmaganligini va ular eritgich molekulalari bilan issiqlik muvozanati holatida bo‘lganligini hisobga olsak, bu xulosamiz tushunarli bo‘ladi.

Bu ifodani keltirib chiqarish uchun N_0 grammolekulali erituvchi va N_1 grammolekulali eritilgan jismdan tashkil topgan eritmani tekshiraylik. $\varepsilon\left(p, T, \frac{N_1}{N_0}\right)$- bir grammolekula eritma energiyasi bo‘lsin. Butun eritma energiyasi

$$E(T, p, N_0, N_1) = N_0 \cdot E(T, p, \frac{N_1}{N_0}) \qquad (1.2)$$

Agar eritma kuchsiz, ya’ni $\frac{N_1}{N_0} << 1$ bo‘lsa, N_1/N_0 kichik parametrning darajalari bo‘yicha $\varepsilon(T, p, \frac{N_1}{N_0})$ - ni qatorga yoyish mumkin. U holda

$$E(T, p, N_0, N_1) = N_0 \varepsilon_0(T, p) + N_1 \cdot \varepsilon_1(T, p) \qquad (1.3)$$

$$V(T, p, N_0, N_1) = N_0 v_0(T, p) + N_1 \cdot v_1(T, p) \qquad (1.4)$$

Bu yerda: $\varepsilon_0(T, p)$ - bir grammolekula toza erituvchi energiyasi;

$$\varepsilon_1(T, p) = \left[\frac{\partial \varepsilon(T, p, N_1/N_0)}{\partial(N_1/N_0)}\right]_{(N_1/N_0)=0}$$

$v\left(T, p, \frac{N_1}{N_0}\right)$ - bir grammolekula eritma solishtirma hajmi.

Agar $N_0=const$, $N_1=const$ bo‘lsa, eritma entropiyasining elementar o‘zgarishi:

$$dS = \frac{dE + pdV}{T} = \frac{1}{T} \cdot N_0 \left[d\varepsilon_0(T,p) + p dv_0(T,p) \right] +$$

$$+ \frac{1}{T} \cdot N_1 \left[d\varepsilon_1(T,p) + p dv_1(T,p) \right] =$$

$$= N_0 \cdot dS_0(T,p) + N_1 dS_1(T,p) \qquad (1.5)$$

bo‘ladi. So‘nggi tenglikni hosil qilishda dS ning to‘la differentsial va N_0, N_1 larning ixtiyoriy qiymatga ega ekanligini hisobga olindi. (1.5)-ni integrallaymiz:

$$S(T,p,N_0,N_1) = N_0 s_0(T,p) + N_1 s_1(T,p) + G(N_0,N_1) \qquad (1.6)$$

Bu yerda $G(N_0,N_1)$ integrallash doimiysi bo‘lib, T va p larga bog‘liq emas. Fikran tizim temperaturasini oshirish va bosimni kamaytirish yo‘li bilan eritmani gaz holatiga to‘la o‘tkazish mumkin. Bunga qaramay (1.6)-dagi $G(N_0,N_1)$ o‘zgarmaydi va (1.6) – ni ideal gaz aralashmasi entropiyasi bilan taqqoslash yo‘li bilan $G(N_0,N_1)$ ni aniqlash mumkin.

Ma’lumki, bir grammolekula ideal gaz uchun entropiya

$$S = R\ln V + C_V \ln T + const = C_p \ln T - R\ln p + K;$$

ko‘rinishga ega. Agar $C_p - C_V = R$; $V = RT/p$ ekanligini hisobga olsak, K-ifodasi T va p-larga bog‘liq bo‘lmagan doimiy kattalik ekanligini ko‘rish mumkin. U holda N_0 grammolekulali bir xil va N_1 gramm-molekulali ikkinchi xil ideal gaz aralashmasi uchun entropiya

$$S_{aral} = N_0 C_{p_0} \ln T + N_0 R\ln p_0 + N_0 K_0 + N_1 C_{p_1} \ln T - N_1 R\ln p_1 + N_1 K_1 \qquad (1.7)$$

Ideal gaz aralashmasi uchun Dalton qonuniga asosan

$$p = p_0 + p_1; \qquad \text{va} \qquad \frac{p_0}{p_1} = \frac{N_0}{N_1}$$

Bundan

$$p_0 = \frac{N_0 p}{N_0 + N_1} \approx p; \qquad p_1 = \frac{N_1 p}{N_0 + N_1} \approx \frac{N_1}{N_0} p \tag{1.8}$$

(1.8)-ni (1.7)-ga tadbiq etamiz:

$$S_{aral} \ (N_0 C_{p_0} + N_1 C_{p_1}) \ln T - (N_0 + N_1) R \ln p - N_1 R \ln \frac{N_1}{N_0} + N_0 K_0 + N_1 K_1; \tag{1.9}$$

(1.9) va (1.6)-ni taqqoslashtirishdan

$$G(N_0, N_1) = -N_1 R \ln \frac{N_1}{N_0} + N_0 K_0 + N_1 K_1 \tag{1.10}$$

U holda (1.6) va (1.3)-ga asosan eritmaning ozod energiyasi:

$$\mathcal{F} = E - TS = N_0 \varepsilon_0 + N_1 \varepsilon_1 - N_0 T(s_0 + K_0) - N_1 T(s_1 + K_1) - N_1 RT \ln \frac{N_1}{N_0} = \tag{1.11}$$

$$= N_0 f_0(T, p) + N_1 f_1(T, p) + N_1 RT \ln \frac{N_1}{N_0}$$

Bu yerda

$$f_0 = \varepsilon_o + Ts_o + TK_o; \qquad f_1 = \varepsilon_1 + Ts_1 + TK_1$$

To‘siqdan eritgich erkin o‘ta olganligi tufayli to‘siqning o‘ngga siljiganda bajariladigan ish

$$dA = r_{osm} \cdot v_o dN_o \tag{1.12}$$

Bu vaqtda to‘siqning o‘ng tomonida eritgich

$$dN'_0 = - dN_0$$

miqdorga kamayadi. Bu ish quyidagi ko‘rinishdagi ozod energiyaning kamayishi hisobiga bajariladi ($T=const$):

$$\mathcal{F} = (N_0 + N_0')f_0(T,p) + N_1 f_1(T,p) + N_1 RT \ln \frac{N_1}{N_0}$$

Bundan

$$d\mathcal{F} = (dN_0 + dN_0')f_0(T,p) - \frac{N_1}{N_0} RT dN_0 = -\frac{N_1}{N_0} RT dN_0 \qquad (1.13)$$

Shuning uchun (1.12) va (1.13) - dan:

$$p_{osm} v_0 = \frac{N_1}{N_0} RT; \qquad p_{osm} = \frac{N_1 RT}{V}$$

Bu erda $V = v_o \cdot N_0$ eritma hajmi ($N_1 v_1$-ni hisobga olmadik).

Shunday qilib, tajriba natijasini ifodalovchi formulani nazariy keltirib chiqardik.

8.2-§. Ko‘p atomli ideal gaz. Ideal gazlar aralashmasi

Bir atomli ideal gaz uchun Gibbsning kanonik taqsimotini qo‘llagan edik, va u uchun ozod energiya, o‘rtacha energiya, entorpiya hisoblangan edi. Bu o‘z navbatida bir atomli ideal gaz oddiy xususiyatlarini, jumladan, holat tenglamasini, C_v va C_p- larni, izotermik qisilish koeffitsiyentini o‘rganishga imkon bergan edi.

Ko‘p atomli ideal gazda molekula ichidagi atomlar o‘zaro kuchli ta’sir qilishadi, lekin molekulalar orasidagi ta’sirni hisobga olmaymiz. Bundan tashqari molekula og‘irlik markazining ilgarilanma harakati klassik mexanika qonunlari bilan ifodalanadi deb hisoblaymiz.

Ideal ko‘p atomli gazda molekulalarning o‘zaro ta’siri hisobga olinmaganligi tufayli uning statistik yig‘indisi:

$$Z = Z_{ilg} \cdot Z_1^N, \qquad (2.1)$$

Bu yerda N - gaz molekulalarining soni;

Z_{ilg} – molekulalar ilgarilanma harakatining statistik integrali;

Z_1 – bitta molekulaning ichki erkilik darajalariga to‘g‘ri keluvchi statistik yig‘indi.

$$Z_1 = \sum_{\alpha} g_\alpha e^{-\varepsilon_\alpha / k_o T} \qquad (2.2)$$

ε_a – bu molekulaning a kvant sonlari to‘plami orqali aniqlanuvchi ichki energiyasi, g_a – bu ε_a energetik sath statistik vazni (aynish darajasi). Aytaylik,

$$\varepsilon_a = \varepsilon_{ayl} + \varepsilon_{tebr} + \varepsilon_{el} \qquad (2.3)$$

bo‘lsin. Bu yerda: ε_{ayl}– qattiq molekulaning aylanma harakat energiyasi;

ε_{tebr}- molekuladagi atomlarning nisbiy tebranma harakati energiyasi;

ε_{el} – molekulaning elektron uyg‘onish energiyasi.

(2.3) - formulasi molekuladagi tebranma, aylanma va elektron uyg‘onishlarining o‘zaro ta’sirini hisobga olmagan holda yozilgan. (2.1), (2.2) va (2.3) – lardan

$$Z = Z_{ilg} \cdot Z_{tebr}^{N} \cdot Z_{ayl}^{N} \cdot Z_{el}^{N} \qquad (2.4)$$

$$Z_{tebr} = \sum g_{tebr} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_{tebr}}{k_0 T}};\ Z_{ayl} = \sum g_{ayl} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_{ayl}}{k_0 T}};\ Z_{el.} = \sum g_{el.} \cdot e^{-\frac{\varepsilon_{el.}}{k_0 T}} \qquad (2.5)$$

Bu yerda: g_{ayl} , g_{tebr} g_{el} - mos ravishda, aylanma, tebranma va elektron energetik sathlarining aynish darajasi.

Faraz qilaylik, tizimimizga tashqi maydon ta’sir etmasin. Aniqrog‘i V- hajmli idish devorlarida faqat potensial cheksiz katta qiymatga sakrab o‘zgarsin. Bu holda molekulalarning ilgarilanma harakatiga to‘g‘ri keluvchi statistik integrali bir atomli gaz statistik integrali ko‘rinishida bo‘ladi, ya’ni:

$$Z_{ilg} = V^N \cdot \frac{(2\pi m k_0 T)^{3N/2}}{h^{3N} \cdot N!} \qquad (2.6)$$

m – molekula massasi.

(2.4) va (2.6) - dan ozod energiya:

$$\mathcal{F} = -k_0 T \ln Z = -N k_0 T \ln V - N k_0 T + N k_0 T \ln N -$$

$$-\frac{3}{2} N k_0 T \ln(2\pi m k_0 T) + 3 N k_0 T \ln h -$$

$$-Nk_0T\ln Z_{tebr}-Nk_0T\ln Z_{ayl}-Nk_0T\ln Z_{el} \qquad (2.7)$$

Bundan bosim:

$$p=-\left(\frac{d\mathcal{F}}{dV}\right)_T=\frac{Nk_0T}{V} \qquad (2.8)$$

Shunday qilib, ko‘p atomli ideal gazning holat tenglamasi bir atomli ideal gaz holat tenglamasi (IV.4.4) kabi bo‘lar ekan. Demak, ko‘p atomli ideal gazning issiqlikdan kengayish, izotermik qisilish va termik bosim koeffitsiyentlari ham bir atomli ideal gazdagi qiymatlari kabi bo‘ladi.

Tizim entropiyasi esa

$$S=-\left(\frac{d\mathcal{F}}{dT}\right)_V$$

munosabat orqali topiladi, ya’ni ozod energiyadan temperatura bo‘yicha hosila orqali topiladi. Entropiya, ichki energiya, issiqlik sig‘imi ko‘p atomli gazda bir atomli gaznikiga nisbatan boshqa xil bo‘ladi, chunki ular Z ning temperatura bo‘yicha hosilasi orqali aniqlanadi.

Endi ideal gaz aralashmasining ba’zi xususiyatlarini ko‘rib chiqaylik. Aytaylik, V-hajmli tizimda T- temperaturaga ega bo‘lgan o‘zaro ximik reaktsiyaga kirishmovchi turli xil gazlar aralashmasi bo‘lsin. Agar gaz aralashmasi xususiyati ideal gaz xususiyati kabi bo‘lsa va undagi molekulalarning o‘zaro ta’sirini hisobga olmasak (2.1) - ga asosan gaz aralashmasining statistik yig‘indisi

$$Z=Z_{ilg}^{(1)}\cdot\left[Z_1^{(1)}\right]^{N_1}\cdot Z_{ilg}^{(2)}\left[Z_1^{(2)}\right]^{N_2}\ldots \qquad (2.9)$$

bo‘ladi.

$Z_{ilg}^{(i)}, Z_1^{(i)}$ va N_i lardagi i-indekslari aralashmadagi turli ximik komponentlarni anglatadi. (2.6) - dagi kabi i - nchi turdagi molekulalar uchun

$$Z_{ilg}^{(i)}=V^{N_i}\frac{(2\pi\, m_ik_0T)^{3N_i/2}}{N_i!h^{3N_i}} \qquad (2.10)$$

Shunday qilib, ideal gaz aralshamasi ozod energiyasining hajmga bog‘liqligi

$$\mathcal{F} = -k_0 T \ln Z = -N_1 k_0 T \ln V - N_2 k_0 T \ln V - N_3 k_0 T \ln V - .... + const$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bunday ideal gaz aralashmasining bosimi

$$p = -\left(\frac{d\mathcal{F}}{dV}\right)_T = \frac{N_1 k_0 T}{V} + \frac{N_2 k_0 T}{V} + \frac{N_3 k_0 T}{V} + \ldots \qquad (2.11)$$

ko‘rinishga ega (Dalton qonuni). Bundan *i*-nchi komponenta partsial bosimi

$$p_i = \frac{N_i k_0 T}{V} = \frac{N_i}{N} \cdot \frac{N k_0 T}{V} = \frac{N_i}{N} \cdot p$$

Bu yerda $p = \sum_i p_i$; $N = \sum_i N_i$ - mos ravishda, gaz aralashmasining umumiy bosimi va molekulalarning umumiy soni.

Yuqorida keltirilgan mulohazalarga asoslangan holda ideal gaz aralashmasining energiyasi, entropiyasi va ozod energiyasi qiymatlari aralashmani tashkil etgan alohida komponentalar energiyasi, entropiyasi va ozod energiyasi yig‘indisiga teng ekanligini ko‘rsatish mumkin.

8.3-§. Ochiq tizim uchun termodinamik potensiallar

Entropiya $S(E, a_s, N_i)$ va μ_i - ximik potensiallar orasidagi bog‘liqligini aniqlaylik. Agar ($S_{termostat}$ + S_{tizim}) yig‘indisi maksimal bo‘lsa, entropiya additivligiga muvofiq tizim va termostat o‘zaro muvozanat holatda bo‘ladi; quyida $S_{termostat} \equiv S'$; $S_{tizim} \equiv S$ belgilashlar kiritildi.

Faraz qilaylik, *i* - nchi turdagi molekulaning bir qismi termostatdan tizimga o‘tsin va $dN'_i = -dN_i$ bo‘lsin. Muvozanat holatda

$$d(S' + S) = \frac{\partial S'}{\partial N'_i} dN'_i + \frac{\partial S}{\partial N_i} dN_i = 0$$

va

$$\frac{\partial S}{\partial N_i} = \frac{\partial S'}{\partial N'_i} = \frac{\partial S'}{\partial v_i} = -\frac{\mu_i}{T} \qquad (3.1)$$

bo‘ladi. Bu formula quyida umuman termostat haqida fikr yuritmasdan μ_i - ni faqat tizim entropiyasi orqali aniqlashga imkon beradi. Aytaylik, V - yagona tashqi parametr bo‘lsin. U holda

$$S = \frac{\partial S}{\partial E}E + \frac{\partial S}{\partial V}V + \sum_i \frac{\partial S}{\partial N_i}N_i \qquad (3.2)$$

Ma’lumki,

$$\frac{\partial S}{\partial E} = \frac{1}{T}; \quad \frac{\partial S}{\partial V} = \frac{p}{T}$$

U holda (3.1) - ni hisobga olgan holda (3.2) - ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$E + pV - TS = \sum_i N_i \mu_i \qquad (3.3)$$

Bundan $\sum_i N_i \mu_i = \Phi$ - Gibbsning termodinamik potensiali ekanligi kelib chiqadi. Ikkinchi tomondan ochiq tizim uchun

$$\Phi = \mathcal{F} - \sum_i \mu_i N_i = \mathcal{F} - [E + pV - TS] = -pV \qquad (3.4)$$

Bu holda T, V, μ_i - o‘zgaruvchilarida berilgan termodinamik potensial vazifasini hajmning bosimga ko‘paytmasining manfiy ishorasi bajaradi.

(3.4) - ning differentsialini olamiz va uni

$$d\Phi = -SdT - pdV - \sum_i N_i d\mu_i \qquad (3.5)$$

ifodasiga tenglashtiramiz:

$$-pdV - Vdp = -SdT - pdV - \sum_i N_i d\mu_i$$

yoki

$$SdT - Vdp + \sum_i N_i d\mu_i = 0 \qquad (3.6)$$

Hosil bo‘lgan (3.6) - munosabatiga Dyugeym - Gibbs formulasi deyiladi.

Agar tizim energiyasi $E = \mathcal{F} + TS$ ekanligini hisobga olsak, uning differensiali

$$dE = d\mathcal{F} + TdS + SdT = TdS - pdV + \sum_i \mu_i dN_i \qquad (3.7)$$

Shunday qilib,

$$\mu_i = \left(\frac{\partial E}{\partial N_i}\right)_{S,V},$$

ya'ni ximik potensialni tizim energiyasidan i - nchi tur zarralar soni bo'yicha V,S - lar doimiyligida olingan hosilasi orqali topiladi. Demak, $V,S,\ N_i$ - bir - biriga bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar sifatida qaralganda, E - tizim energiyasi termodinamik potensial vazifasini bajaradi.

(3.7) - ifodasidan entropiyaning differensialini hosil qilaylik:

$$dS = \frac{1}{T}\left\{dE + pdV - \sum_i \mu_i dN_i\right\} \qquad (3.8)$$

Bu bir - biriga bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilar sifatida E, V, N_i - lar olinganda termodinamik potensial vazifasini entropiya bajarishini anglatadi. Shu yo'sinda ochiq tizim uchun boshqa termodinamik potensiallarni ham hosil qilish mumkin.

Agar ikki tizim o'zaro muvozanat holda bo'lsa, ularning T, p va μ_i - har bir turdagi zarralar uchun bir xil bo'lishi lozimligini ko'rsataylik. Ikki tizim entropiyasining yig'indisi $S=S_1+S_2$ bo'lsin. Yig'indi energiya $E=E_1+E_2$, hajm $V=V_1+V_2$ va zarralar sonining yig'indisi $N_i^{(1)}+N_i^{(2)}$ doimiy saqlanuvchi jarayonni tekshiraylik. U holda

$$dS = \frac{dE_1}{T_1} + \frac{p_1 dV_1}{T_1} - \sum_i \frac{\mu_i^{(1)}}{T_1} dN_i^{(1)} + \frac{dE_2}{T_2} + \frac{p_2 dV_2}{T_2} - \sum_i \frac{\mu_i^{(2)}}{T_2} dN_i^{(2)} =$$

$$= \left(\frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2}\right) dE_1 + \left(\frac{p_1}{T_1} - \frac{p_2}{T_2}\right) dV_1 - \sum_i \left(\frac{\mu_i^{(1)}}{T_1} - \frac{\mu_i^{(2)}}{T_2}\right) dN_i^{(1)} \geq 0$$

$dS=0$ entropiyaning maksimumga ega bo'lish sharti

$$T_1=T_2, \quad p_1=p_2, \quad \mu_i^{(1)}=\mu_i^{(2)} \qquad (3.10)$$

tengliklarining bajarilishini talab etadi.

Agar ikki tizim o‘zaro muvozanat holatda bo‘lmasa, dS>0 entropiyaning oshish shartiga binoan $T_1<T_2$ bo‘lganda, $dE_1>0$ bo‘lishini talab etadi, ya’ni energiya oqimi energiyasi kichik bo‘lgan tizim tomon bo‘lishi talab etiladi. Shuningdek, $p_1>p_2$ bo‘lganda $dV_1>0$, ya’ni bosimi katta bo‘lgan tizim hajmi kengayishi lozim va, nihoyat, $\mu_i^{(1)}< \mu_i^{(2)}$ tengsizligi bajarilganda $dN_i^{(1)}>0$ bo‘lishi lozim, ya’ni ximik potensiali kichik bo‘lgan tizim tomon zarralar o‘tishi lozim.

8.4-§. Fazalar muvozanati shartlari. Gibbsning fazalar qoidasi

Termodinamik tizim fizik xususiyatlari nuqtai nazaridan bir xil bo‘lmasligi mumkin. Tizimning fizik xususiyatlari bir xil bo‘lgan qismiga faza deb ataladi. Masalan, termodinamik tizimni suv va uning bug‘i tashkil etgan bo‘lsa bunday tizim bir komponentali ikki fazali hisoblanadi. Dastlab, ana shunday tizim bir vaqtning o‘zida muvozanat holatda bo‘lishi mumkinlik masalasini va uning muvozanatlik shartlarini ko‘rib chiqaylik.

Buning uchun zarralar soni o‘zgaruvchi tizimlar muvozanat holati nazariyasiga murojaat etamiz. Ikkita turlicha fazali tizimlar o‘zaro zarralar almashinuvi imkoniyatiga ega bo‘lsin. Bunday tizimlar o‘zaro muvozanat holatida bo‘lishi uchun (3.10) - ga muvofiq, ma’lumki, ularning temperaturalari, bosimlari va ximik potensiallari bir - biriga teng bo‘lmog‘i lozim.

Har bir faza uchun (3.6) - Dyugeym - Gibbs munosabatidan foydalanamiz:

$$d\mu^{(1)}=\frac{1}{N^{(1)}}\left(V_1dp-S_1dT\right),\qquad d\mu^{(2)}=\frac{1}{N^{(2)}}\left(V_2dp-S_2dT\right)\quad(4.1)$$

bu yerda $N^{(1)}$ va $N^{(2)}$- lar birinchi va ikkinchi fazadagi molekulalarning o‘rtacha soni.

Ikkala fazaga tegishli bo‘lgan bir molekula hajmi va entropiyasi ifodalarini qabul qilamiz:

$$\upsilon_1 = \frac{V_1}{N^{(1)}};\ s_1 = \frac{S_1}{N^{(1)}};\ \upsilon_2 = \frac{V_2}{N^{(2)}};\ s_2 = \frac{S_2}{N^{(2)}};$$

U holda

$$d\mu^{(1)} = \upsilon_1(T,p)dp - s_1(T,p)dT;\quad d\mu^{(2)} = \upsilon_2(T,p)dp - s_2(T,p)dT \qquad (4.2)$$

Agar bu funksiyalar ma'lum bo'lsa, (3.8) - ifodasini integrallash va μ - ni har bir faza uchun bosim va temperatura funksiyasi sifatida aniqlash mumkin. Bu fazalardagi fizik xususiyatlar turlicha bo'lganligi uchun, ya'ni ularning solishtirma hajmlari, issiqlik sig'imlari va sh.k. turlicha bo'lganligi uchun ximik potensial bu fazalarda turlicha bo'ladi. Lekin fazalar o'zaro muvozanat holatda bo'lganda,

$$\mu^{(1)}(T,p) = \mu^{(2)}(T,p) \qquad (4.3)$$

shartning bajarilishi T va p - larning o'zaro bog'liqligiga olib keladi. Shunday qilib, har qanday temperaturada ham fazalar muvozanati mavjud bo'ladi, lekin bu holda bosim temperaturaning funksiyasi ko'rinishida bo'lishi lozim.

Agar 1 - gazli faza, 2 - suyuqlik fazasi bo'lsa, $p = p_0(T)$ to'yingan bug'ning suvga nisbatan elastikligini ifodalaydi. Bosimning faqat bunday qiymatida gaz kondensatsiyalashmaydi ham, bug'lanish ham bo'lmaydi. $p > p_0$ bo'lganda gaz kondensatsiyalanadi, $p < p_0$ bo'lganda esa kondensatsiyalangan faza bug'lanadi va bu jarayon bir faza ikkinchisiga to'la o'tguncha davom etadi.

Bir vaqtning o'zida uchta fazali tizim ham muvozanat holatda bo'lishi mumkin. Buning uchun:

$$\mu^{(1)}(p,T) = \mu^{(2)}(p,T) = \mu^{(3)}(p,T) \qquad (4.4)$$

tenglik shartlari bajarilmog'i lozim. pV - diagrammasida bu uchlangan nuqtani tashkil etadi.

Endi muvozanat holatda bo'lgan tizimning turg'unlik shartlarini ko'raylik. Faraz qilavlik, yopiq tizimda $E=const, V=const, N_i=const$ bo'lsin. Bunday tizim muvozanat holatda bo'lganda uning entropiyasi o'zining maksimal $S=S_{max}$ qiymatiga ega bo'ladi.

Aytaylik, tizimda $T=const$, $V=const$, $N_i=const$ bo‘lsin. Termodinamika ikkinchi qonuniga muvofiq,

$$dS \geq \frac{dQ}{T} = \frac{dE + pdV}{T}$$

Bu holda $d(E-TS) \leq 0$, ya’ni faqat ozod energiya kamayishi mumkin. Demak, tizimning $\mathcal{F}=\mathcal{F}_{min}$ bo‘lgan holati turg‘un bo‘ladi.

Aytaylik bosim, temperatura va zarralar soni belgilangan bo‘lsin. U holda termodinamika ikkinchi qonuniga muvofiq $dS \geq \frac{dE + pdV}{T}$ va $d(E + pV - TS) \leq 0$, ya’ni faqat $\Phi=E+pV-TS$ Gibbsning termodinamik potensiali kamayishi mumkin, va tizim $\Phi=\Phi_{min}$ - qiymatida turg‘un muvozanat holatida bo‘ladi.

Agar tizim n - ta jismdan tashkil topgan bo‘lsa va unda k - ta ximik reaksiya mavjud bo‘lsa, bir - biriga bog‘liq bo‘lmagan ximik potensiallar soni $n-k=\beta$ - ta bo‘ladi. β - ga tizim komponentalarining soni deyiladi. Fazasi j - bo‘lgan i - nchi jismning ximik potensialini μ_i^j - deb belgilaylik. U holda

$$\mu_i^{(1)} = \mu_i^{(2)} = ... = \mu_i^{(j)} = ... = \mu_i^{(\alpha)} \qquad (4.5)$$

tengliklari fazalar muvozanat holati sharti bo‘lib xizmat qiladi.
Bu yerda: $i=1,2,\ldots,\beta$.

α - tizimdagi fazalar soni.

Tizimda maksimal nechtagacha faza bo‘lishi mumkinligi masalasini aniqlaylik.

Dyugeym - Gibbs (3.6) - munosabatidan ko‘rinib turibdiki, soni β –bo‘lgan ximik potensiallaridan bittasi T, p va qolgan boshqa ximik potensiallar funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. Demak, bir - biriga bog‘liq bo‘lmagan ximik potensiallar soni β - emas, balki $(\beta-1)$ - ta bo‘ladi. Natijada, barcha α - fazadagi o‘zgaruvchilar soni $\alpha\cdot(\beta-1)+2$ bo‘ladi. Barcha bu o‘zgaruvchilar $(\alpha-1)\beta$ - ga teng bo‘lgan fazalar muvozanati shartlarini qanoatlantirishi lozim. Lekin tenglamalar soni o‘zgaruvchilar sonidan katta bo‘lmasligi lozim. Shuning uchun

$$(\beta\text{-}1)\alpha+2 \geq (\alpha\text{-}1)\beta, \quad \text{ya'ni} \quad \alpha \leq \beta+2 \tag{4.6}$$

Fazalarning maksimal soni komponentalar soni qo‘shilgan 2 - ga teng. Bu xulosaga Gibbsning fazalar qoidasi deyiladi. Agar $\alpha<\beta+2$ bo‘lsa, $m=(\beta+2-\alpha)$ - ga tizim erkinlik darajasining soni deyiladi. Bu aytilganlardan ko‘rinib turibdiki, ximik jihatdan bir xil bo‘lgan tizimda uchtadan ko‘p faza (uchlangan nuqta) bo‘lishi mumkin emas. Ikki komponentali tizimda uchta erkinlik darajasining soni bo‘ladi, va bu holda hajm, bosim va temperatura qiymatlarini ixtiyoriy tanlab olish mumkin; bu yerda turli komponentalardagi molekulalar soni ximik jihatdan muvozanat holat shartlari orqali aniqlanadi.

8.5-§. Faza o‘tishlari

Ximik potensial μ - ni bevosita tajribada o‘lchash mumkin bo‘lmaganligi sababli fazalar muvozanatini anglatuvchi $\mu^{(1)}= \mu^{(2)}$ shartidan foydalanib, amalda bevosita $p=p(T)$ bog‘lanishni aniqlash mumkin emas. Ammo $p(T)$ - egri chizig‘iga tegishli bo‘lgan differensial tenglamasini hosil qilishimiz mumkin. Agar fazalar muvozanati egri chizig‘i bo‘yicha p,T - lar o‘zgarsa, unda $\mu^{(1)}$ va $\mu^{(2)}$ -lar o‘zaro tengligi ham saqlanadi. Yuqorida berilgan (4.2) – formulaga asoslanib $d\mu^{(1)}$, $d\mu^{(2)}$ differentsiallarni biridan ikkinchisini ayirishdan

$$(\upsilon_1 - \upsilon_2)dp - (s_1 - s_2)dT = 0$$

hosil bo‘ladi, ya’ni:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{s_1 - s_2}{\upsilon_1 - \upsilon_2} \tag{5.1}$$

Termodinamika ikkinchi qonuniga muvofiq $s_1 - s_2 = \frac{q_{12}}{T}$ deb olish mumkin. Bu yerda q_{12} - kattaligi 2 - fazani 1 - fazaga o‘zgartirish uchun talab etiladigan issiqlik miqdori (yashirin issiqlik miqdori). U holda

$$\frac{dp}{dT} = \frac{q_{12}}{T(\upsilon_1 - \upsilon_2)} \tag{5.2}$$

bo‘ladi. Bu tenglamaga Klapeyron - Klauzius tenglamasi deyiladi.

Agar turlicha T - lar uchun q_{12} - tajribada o‘lchangan bo‘lsa, va ikkala faza uchun $\upsilon_1 = \upsilon_1(T, p)$, $\upsilon_2 = \upsilon_2(T, p)$ - holat tenglamalari ma’lum bo‘lsa, (5.2) - formulasini integrallash mumkin. Buning uchun termodinamika uchinchi qonuniga muvofiq berilgan entropiya ifodasidan foydalanamiz:

$$s_1 = \int_0^T \frac{c_1}{T'} dT'; \qquad s_2 = \int_0^T \frac{c_2}{T'} dT'$$

bu yerda c_1 va c_2 - birinchi va ikkinchi fazalar solishtirma issiqlik sig‘imlari.

Demak,

$$q_{12} = T(s_1 - s_2) = T\int_0^T \frac{c_1 - c_2}{T'} dT' \qquad (5.3)$$

Bundan belgilangan T temperaturada, agar $c_1 \geq c_2$ bo‘lsa, $q_{12} > 0$ bo‘lishi ko‘rinib turibdi.

Ko‘pchilik jismlar uchun $\upsilon_1 \rangle \upsilon_2$ va T - ko‘tarilishi bilan bosim oshadi.

Yuqorida bayon etilgan faza o‘tishlariga birinchi tur faza o‘tishi deyiladi. Turlicha fazalar turli fizik xususiyatlar bilan tavsiflanadi. T va p - lar doimiyligida o‘tadigan faza o‘tishlari vaqtida v - solishtirma hajm hamda s - entropiya va ularning T va p - lar bo‘yicha hosilalari qiymatlari sakrab o‘zgaradi. Klapeyron - Klauzius tenglamalarida hajmlar farqi, $(s_1 - s_2) = q_{12}/T$ - entropiyalar farqi ishtirok etadi. Shuning uchun $c_p = T\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)p$ - issiqlik sig‘imi, shuningdek, $\frac{1}{\upsilon_0}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right)p$ - issiqlik kengayish va $\chi = -\frac{1}{\upsilon_0}\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial p}\right)T$ - qisilish koeffitsiyentlari ham ikkala fazada turlicha bo‘ladi.

Bunday faza o‘tishlaridan farq qiladigan faza o‘tishlari ham mavjudki, unda entropiya va hajm uzluksiz o‘zgaradi, ularning hosilalari esa sakrab o‘zgaradi. Bunday faza o‘tishlariga ikkinchi tur faza o‘tishlari deyiladi. Ikkinchi tur faza o‘tishlariga ferromagnitning paramagnitga o‘tishiga, metallarning oddiy holatdan o‘ta o‘tkazuvchan

holatga o‘tishi, suyuq geliyning oquvchanlikdan o‘ta oquvchan holatga o‘tishi misol bo‘ladi. Ikkinchi tur faza o‘tishlari nuqtalariga Kyuri nuqtalari deyiladi. Matematik nuqtai nazardan Klapeyron - Klauzius tenglamasi ikkinchi tur faza o‘tishlarini tavsiflash uchun yaramaydi, chunki bu holda tenglamaning o‘ng tomoni 0/0 ko‘rinishdagi aniqsizlikka aylanadi. Ushbu aniqsizlikni ochish uchun (5.1) - tenglamasining o‘ng tomoni surat va maxrajini temperatura va bosim bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{dp}{dT}=\frac{\left(\frac{\partial s_2}{\partial T}\right)_p-\left(\frac{\partial s_1}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial \upsilon_2}{\partial T}\right)_p-\left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial T}\right)_p}=\frac{\Delta\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p}{\Delta\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right)_p} \tag{5.4}$$

$$\frac{dp}{dT}=\frac{\left(\frac{\partial s_2}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial s_1}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial \upsilon_2}{\partial p}\right)_T-\left(\frac{\partial \upsilon_1}{\partial p}\right)_T}=\frac{\Delta\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T}{\Delta\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial p}\right)_T} \tag{5.5}$$

Bu yerda Δ -tegishli fizik kattalikning sakrab o‘zgarishini anglatadi. Agar

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p=\frac{C_p}{T} \qquad \text{va} \qquad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T=-\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right)_p$$

ekanligini va holat tenglamasining differensial formasini hisobga olsak, (5.5) va (5.4) - larni quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{dp}{dT}=-\frac{\Delta C_p}{T\Delta\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right)_p} \tag{5.6}$$

$$\frac{dp}{dT}=-\frac{\Delta\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial T}\right)_p}{\Delta\left(\frac{\partial \upsilon}{\partial p}\right)_T} \tag{5.7}$$

Bu tenglamalarga Ernfest tenglamalari deyiladi, va ular sakrab o‘zgaruvchi fizik kattaliklar bilan fazalar muvozanat holati egri chizig‘iga faza o‘tishi nuqtasidan o‘tkazilgan urinma yo‘nalishiga bog‘liqligini ko‘rsatadi.

(5.6) va (5.7) - munosabatlarni birlashtirish yo‘li bilan quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\Delta C_p = -\frac{\left[\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p\right]^2}{\Delta\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_T}$$

yoki

$$\Delta C_p = TV_0\frac{(\Delta\alpha)^2}{\Delta\beta} \qquad (5.8)$$

Bu (5.8) - tenglama esa faza o‘tishi nuqtasida sakrab o‘zgaruvchi solishtirma issiqlik sig‘im, termik kengayish va izotermik qisilish koeffitsiyentlarining o‘zaro bog‘liqligini beradi.

Ernfestdan so‘ng ikkinchi jinsli faza o‘tishining to‘la va batafsil termodinamik nazariyasini Landau (1937 y) bergan. Landau nazariyasi faza o‘tishi vaqtida jism simmetriyasining o‘zgarishini hisobga oladi.

Masalalar

1. Izolyatsiyalangan tizim reaktsiyasiga nisbatan muvozanatlik shartini keltirib chiqaring.

Ye ch i sh:

Izolyatsiyalangan tizimlar miqdori va energiyasi o‘zgarmasdir. Bu holda muvozanatlik shartining umumiy ko‘rinishi quyidagicha: $\delta S=0$.

Reaksiya natijasida zarralar sonining virtual o‘zgarishlarini δN_k orqali belgilaymiz.

Muvozanat shartiga ko‘ra,

$$\sum_k\left(\frac{\partial S}{\partial N_k}\right)_{U,V}\delta N_k = 0$$

$TdS \geq dU + \delta A - \sum_k \mu_k dN_k$ - asosiy termodinamik munosabatni qo‘llab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial N_k}\right)_{U,V} = -\frac{\mu_k}{T} \qquad \text{(a)}$$

δN_k qiymati ν_k - stexiometrik koeffitsiyentga proporsionaldir.

Shuning uchun (a) - dan quyidagini olamiz:

$$\sum_k \mu_k \nu_k = 0$$

bu esa talab etilgan muvozanatlik shartini anglatadi.

2. Foton gazining ximik potensiali nolga tengligini isbotlang.

Ye ch i sh:

Buning uchun qattiq jism va uning bir qismi elektromagnit nurlanish bilan to‘ldirilgan bo‘shliqdan iborat tizimni qaraymiz.

Agar qattiq jism hajmi va temperaturasi o‘zgarmas bo‘lsa, u holda tizim muvozanatlik shartiga ozod energiyaning minimal qiymatida erishadi. Bu $\delta\mathcal{F}=0$ ko‘rinishida yoziladi. Butun tizim ozod energiyasi nurlanish va qattiq jism ozod energiyalari yig‘indisiga teng:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_{jism} + \mathcal{F}_{nurl.}$$

Tizim muvozanat vaziyatdan chetlanishi fotonlar sonining o‘zgarishidan iborat bo‘lsin:

$$\delta\mathcal{F} = \delta\left(\mathcal{F}_{jism.} + \mathcal{F}_{nurl.}\right) = \left(\frac{\partial \mathcal{F}_{nurl.}}{\partial N}\right)_{V,T} \delta N = 0$$

Bundan

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}_{nurl.}}{\partial N}\right)_{V,T} = 0$$

Biroq, $\mu_k = \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial N_k}\right)_{T,V,N_{i\neq k}}$ ga muvofiq:

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}_{nurl.}}{\partial N}\right)_{V,T} = \mu_{nurl.}$$

9-bob. FLUKTUATSIYA NAZARIYASI

9.1-§. Fluktuatsiya va u orqali o‘lchov asboblarining o‘lchash aniqligiga chek qo‘yilishi

Shu paytgacha biz asosan turli xil makrotizimlar uchun fizik kattaliklarning o‘rtacha qiymatlarini hisoblash bilan shug‘ullandik. Ma’lumki, tizim statistik muvozanat holatda bo‘lganda uning turli fizik kattaliklari $F(q,p)$ fluktuatsiyaga ega, ya’ni ular o‘zlarining o‘rtacha $\overline{F}$ qiymatlaridan chetlanishga ega bo‘ladi.

Fluktuatsiya nazariyasining vazifasi:

1) F - kattaligi fluktuatsiyasi ehtimoliyatini topish; masalan, yopiq tizim uchun fluktuatsiya ehtimoliyatini Boltsman formulasi orqali topish mumkin:

$$dW(F) = const \cdot e^{\frac{\Delta S(F)}{k_0 T}} dF \qquad (1.1)$$

2) F - ning o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasini, ya’ni

$$\overline{(\Delta F)^2} = \overline{(F - \overline{F})^2} = \overline{F^2} - \overline{F}^2 \qquad (1.2)$$

qiymatini hisoblashdir (ma’lumki $\overline{F - \overline{F}} = 0$)

$\Delta F \equiv \sqrt{\overline{F^2} - \overline{F}^2}$ fluktuatsiyaning absolyut kattaligi bo‘lsa, ayrim hollarda

$$\delta_F = \frac{\Delta F}{\left(\overline{F}\right)} = \frac{\sqrt{\overline{F^2} - \overline{F}^2}}{\overline{F}} \qquad (1.3)$$

nisbiy fluktuatsiyani bilish ancha qulaylikka ega bo‘ladi.

(1.2) va (1.3)-dan ko‘rinib turibdiki, fluktuatsiyaning absolyut va nisbiy qiymatlarini hisoblash uchun $\overline{F}$ va $\overline{F^2}$ - larni bilish talab etiladi. Buning uchun oldingi natijalarimizdan foydalanishimiz mumkin.

Fluktuatsiya hodisasi amalda quyidagi ikki holda kuzatilishi mumkin:

1. Tizim o‘lchami kichik emas va unda kichik fluktuatsiya sodir bo‘ladi. Bunday fluktuatsiya tez-tez bo‘lib turishiga qaramay

tizimning muvozanat holatidan chetlanishi juda ham kam bo‘ladi.

2. Tizim o‘lchami yetarli darajada kichik va unda sodir bo‘ladigan fluktuatsiya nisbatan ancha katta bo‘ladi.

Ikkala holga ham to‘g‘ri keluvchi fluktuatsiyalarni ko‘rib chiqaylik. Dastlab, kanonik taqsimotni qo‘llash mumkin bo‘lgan hol uchun termostatdagi tizim E – energiyasining fluktuatsiya qiymatlarini hisoblaymiz. O‘rtachani topish formulasiga asosan

$$\overline{E} = \frac{1}{Z}\int H(q,p)e^{-\frac{H}{\theta}}d\Gamma = \frac{\int He^{-\frac{H}{\theta}}d\Gamma}{\int e^{-\frac{H}{\theta}}d\Gamma} \qquad (1.4)$$

Bu munosabatni θ bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{\overline{\partial E}}{\partial\theta} = \frac{\frac{1}{\theta^2}\int H^2 e^{-H/\theta}d\Gamma}{\int e^{-H/\theta}d\Gamma} - \frac{\frac{1}{\theta^2}\left(\int He^{-H/\theta}d\Gamma\right)^2}{\left(\int e^{-H/\theta}d\Gamma\right)^2} = \frac{\overline{E^2} - \overline{E}^{\,2}}{\theta^2}$$

Bundan (1.2)-ga asosan energiya fluktuatsiyasining absolyut qiymati

$$\Delta E = \sqrt{\theta^2\frac{\overline{\partial E}}{\partial\theta}} = \sqrt{k_0T^2\frac{\overline{\partial E}}{\partial T}} = \sqrt{k_0T^2\cdot C_v} \qquad (1.5)$$

Shunday qilib, energiyaning o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasi tizim o‘lchamiga proporsional ravishda osha boradi. Energiyaning nisbiy fluktuatsiyasi esa (1.3)-ga asosan

$$\delta_E = \frac{\sqrt{C_v\cdot k_0T^2}}{\overline{E}} \qquad (1.6)$$

(1.4) - o‘rniga kvant tizimlar uchun (VII.3.6) - o‘rtachani hisoblashda

$$\overline{E} = \frac{1}{Z}\sum_i g_i \varepsilon_i e^{\frac{-\varepsilon_i}{\theta}}; \qquad \left(Z = \sum_i g_i e_i^{\frac{-\varepsilon_i}{\theta}}\right) \tag{1.4'}$$

formulasidan foydalanganimizda ham (1.5) va (1.6) natijalari hosil bo‘ladi. Shuning uchun bu formulalar ham klassik, ham kvant tizimlarga taalluqlidir.

Ma’lumki, C_v ekstensiv kattalik ($\sim N$), T - esa intensiv kattalik (N – ga bog‘liq emas). Shuning uchun

$$\Delta E \sim N^{1/2} \tag{1.7}$$

Bu formuladan, garchi fluktuatsiyaning absolyut qiymati juda katta ($\sim N^{1/2}$) bo‘lsada, makrotizimlarda energiyaning o‘rtacha qiymatga nisbatan ($\sim N$) uni hisobga olmaslik mumkin.

Nisbiy fluktuatsiya (1.6) qiymatni klassik bir atomli ideal gazga tadbiq etamiz. Ma’lumki, bunday tizim uchun

$$\overline{E} = \frac{3}{2} N k_0 T, \qquad C_V = \frac{3}{2} N k_0$$

Shuning uchun

$$\delta_E = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \tag{1.8}$$

ko‘rinishga ega ekanligini hisobga olsak, makrotizimlarda fluktuatsiya ta’sirining juda kichik ekanligini yaqqol ko‘rish mumkin.

Tizim energiyasining nisbiy fluktuatsiyasiga yana bir misol ko‘raylik. Ma’lumki, past temperaturalarda fononlardan tashkil topgan makrotizim uchun:

$$\overline{E} = \frac{3\pi^4 N k_0 T^4}{5 T_D^3}$$

U holda bu va (1.3) - ga muvofiq

$$\delta_E = \left(\frac{20}{3\pi^4}\right)^{1/2} \left(\frac{T_D}{T}\right)^{3/2} \frac{1}{\sqrt{N}} \sim T^{-3/2} \cdot N^{-1/2} \tag{1.9}$$

Bu holda juda past temperaturalarda makrotizim uchun δ_E sezilarli qiymatga ega bo‘lishi mumkin. Masalan, $T=10^{-2}$K, $N=5\cdot 10^{16}$

(kristallning chiziqli o‘lchami ~ 10^{-2} sm), T_D=200°K bo‘lsa, $\delta_E = 0{,}02$ bo‘ladi va bu unchalik ham kichik kattalik emas.

Endi metallardagi elektronli gaz misoliga o‘taylik. Ma’lumki, past temperaturalarda metallardagi elektronli gazning o‘rtacha issiqlik energiyasi (VII.10.10) - ga muvofiq

$$\overline{E} = \frac{\pi^2}{4} N \frac{(k_0 T)^2}{\mu} \tag{1.10}$$

ko‘rinishga ega edi. Demak, bu holda elektronli gazning nisbiy fluktuatsiyasi

$$\delta_E = \frac{4}{\pi\sqrt{2}} \left(\frac{\mu_0}{k_0 T}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} \sim T^{-1/2} \cdot N^{-1/2} \tag{1.11}$$

Ko‘rinib turibdiki, bu holda ham xuddi (1.9) - dagi kabi, fermi - gazi issiqlik energiyasining nisbiy fluktuatsiyasi temperatura pasayishi bilan osha boradi.

Katta kanonik taqsimlanishdan foydalanib, kanonik taqsimotdan foydalanib, δ_E - ni chiqarganimizdek, zarralar sonining nisbiy fluktuatsiyasi

$$\delta_N = k_0 T \cdot n \beta_T \tag{1.10'}$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Bu yerda: $n = \frac{\overline{N}}{V}$ - zarralar soni konsentratsiyasi;

$\beta_T = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{\overline{N},T}$ - izometrik qisilish koeffitsiyenti.

Ko‘rinib turibdiki, katta β_T - ga ega bo‘lgan tizimda - siyrak gazda qattiq jismga nisbatan zarralar sonining fluktuatsiyaga ega bo‘lish ehtimoliyati kattaroq bo‘ladi.

Shunday qilib, birinchi holga to‘g‘ri keluvchi makrotizimlar uchun to‘la energiya va barcha zarralar soni uchun fluktuatsiya kichik qiymatga ega ekanligini ko‘rdik.

Bu xulosa tekshiriluvchi makrotizimlarning kichik sohalarida katta qiymatlarga ega bo‘lgan lokal (mahalliy) fluktuatsiyalarning bo‘lish mumkinligini rad etmaydi, albatta. Bunday lokal fluktuatsiyalar

(ikkinchi hol) ko‘plab fizik hodisalarni tushuntirishda asosiy rol o‘ynaydi. Masalan:

1. Quyosh nurining molekulyar sochilishi sochuvchi muhit zichligining fluktuatsiyasiga hamda buning natijasida dielektrik doimiysining o‘zgarishiga bog‘liq; shuning uchun osmon ko‘k ko‘rinadi.

2. Suyuqlik yoki gaz ichida molekula issiqlik harakatining fluktuatsiyasi (broun harakati) mikrozarralarning bir xil harakat qilmasligi natijasida bo‘ladi.

9.2-§. Prujinali tarozi va oynali galvanometrga. fluktuatsiya ta’siri

Juda kichik fizik kattaliklarni (massa, tok kuchi va sh.k.) aniq o‘lchash uchun o‘lchov asboblarining harakatlanuvchi qismi juda kichik, ya’ni ularning tarkibida molekulalar soni iloji boricha kam bo‘lishi lozim. Shuning uchun bunday o‘lchov asboblari harakatlanuvchi qismida yetarli darajada tez - tez fluktuatsiya sodir bo‘lib turadi. Taqriban bunday molekulalar to‘plamini issiqlik harakatiga ega bo‘lgan juda katta molekula deb qarash mumkin. Bu issiqlik harakati fizik kattalikni aniq o‘lchashga to‘siqlik qiladi va buning natijasida o‘lchov asboblarining aniq o‘lchashiga chegara qo‘yadi.

Umumiy holda o‘lchov asbobining barcha umumlashtirilgan koordinatalari qatorida asbobning harakatlanuvchi qismi og‘irlik markazi x,y,z - koordinatalarini va uning oriyentatsiyasini belgilovchi ψ,υ,φ - Eyler burchaklarini hisobga olamiz. Masalan, galvonometr strelkasining o‘rnini φ - burilish burchagi bilangina ifodalash yetarlidir. O‘lchov asbobining harakatlanuvchi qismi, ko‘pchilik hollarda yetarli darajada aniqlik bilan, $x,y,z,\psi,\upsilon,\varphi$ - larga va ularning $\dot{x},\dot{y},....,\dot{\varphi}$ - umumlashtirilgan tezliklariga bog‘liq bo‘lgan makroskopik harakat gamiltonianiga va ko‘p atomli molekulalarda bo‘lganidek, $H_i(p_i,\dots,q_i,\dots)$ - ichki harakat gamiltonianiga ajraladi:

$$H = H_i(p_i \dots q_i) + \frac{M}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\left(A\omega_x^2+B\omega_y^2+C\omega_z^2\right)+U\left(x,y,z,\psi,\upsilon,\varphi\right) \qquad (2.1)$$

Bu yerda

$\omega_x,\omega_y,\omega_z$ - burchak tezligi tashkil etuvchilari;

A,B,C - inertsiyaning bosh momentlari;

$U(x,y,z,\psi,\upsilon,\varphi)$ - o‘lchov asbobi harakatlanuvchi qismi potensial energiyasi.

Bu holda H_i - ichki harakat gamiltonianining $x,y,z,\psi,\upsilon,\varphi$ - makroskopik koordinatalarga bog‘liqligini inobatga olmaslik mumkin.

U holda ehtimoliyat zichligi

$$w=\int e^{\frac{\mathcal{F}-H}{\theta}}\,dp_i dq_i\ldots dp_x dp_y dp_z dp_\psi dp_\upsilon dp_\varphi=$$

$$=\frac{e^{-\frac{U}{k_0T}}}{\int e^{-\frac{U}{k_0T}}\,dx\,dy\,dz\,d\psi\,d\upsilon\,d\varphi} \qquad (2.2)$$

Fikrimizni tasdiqlash uchun quyida ikki fizik asbob misolida fluktuatsiya hodisasi aniq o‘lchashga chegara qo‘yishini ko‘rib chiqamiz.

Birinchi misol tariqasida prujinali tarozining o‘lchashdagi sezgirlik chegarasini ko‘rib chiqaylik.

Faraz qilaylik, $x=x-x_0$ (muvozanatli holat koordinatasi $x_0=0$ bo‘lsin) prujinali tarozining muvozanatli holatdan chetlanishini aniqlovchi koordinata bo‘lsin. Tarozi potensial energiyasi $U(x)$ ni kichik fluktuatsiya x – bo‘yicha qatorga yoyamiz:

$$U(x)=U(0)+\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0\cdot x+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\right)\cdot x^2+\ldots..\approx\frac{1}{2}\chi\cdot x^2 \qquad (2.3)$$

(2.3) da $U(0)=0$ deb qabul qildik va muvozanat holatda $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_0=0$ ekanligini hisobga oldik.

Endi tarozini atrofdagi muhit bilan termodinamik muvozanat holatda bo‘lgan kichik tizim deb qaraymiz. U holda energiyaning

erkinlik darajalari bo‘yicha teng taqsimlanganligi haqidagi teoremaga binoan

$$\overline{U(x)} = \frac{1}{2} k_0 T \tag{2.4}$$

Shuning uchun

$$\frac{1}{2} k_0 T = \frac{1}{2} \chi \cdot \overline{x^2}$$

bundan o‘rtacha kvadratik fluktuatsiya: $\overline{x^2} = \frac{k_0 T}{\chi}$ (2.5)

Ko‘rinib turibdiki, bunday tarozida yukni o‘lchaganda (2.5)-ga binoan $\sqrt{\overline{x^2}}$ - gacha aniqlik bilan o‘lchash mumkin xolos.

U*(x)* – potensial energiyaga

$$X = -\frac{\partial U}{\partial x} = -\chi \cdot x \tag{2.6}$$

elastik kuch to‘g‘ri keladi.

Shuning uchun massasi *m* bo‘lgan yuk (*mg* - og‘irligi)

$$x_1 = \frac{mg}{\chi} \tag{2.7}$$

chetlanishni beradi. x_1 bu $P=mg$ – og‘irlik borligidagi muvozanatli chetlanish. Bunday tarozida o‘lchash mumkin bo‘lsin uchun $x_1 > \sqrt{\overline{x^2}}$ tengsizligi bajarilishi lozim.

Bu tengsizlikdan va undagi x_1 (2.7)-, $\overline{x^2}$ (2.5) - lar qiymatidan alohida o‘lchash vaqtida aniqlash mumkin bo‘lgan chegaraviy massa

$$m = \frac{1}{g} \sqrt{\chi \cdot k_0 T} \tag{2.8}$$

χ - elastiklik koeffitsiyenti.

Bundan prujina qanchalik bo‘sh bo‘lsa (χ - kichik bo‘lsa), shuncha kam xatolikka yo‘l qo‘yish mumkin. Lekin bu holda x_1 – muvozanatli cho‘zilish kattalashadi. Bu esa, o‘z navbatida, aniq o‘lchovchi tarozi yasalishida qulaysizlik tug‘diradi. Demak, *M*- massali jism nisbiy fluktuatsiyasi

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{\sqrt{\chi \cdot k_0 T}}{M \cdot g} \tag{2.9}$$

bo‘ladi. Bu yerda ($\Delta M \equiv m$)

Elastik kuch (2.6) ostida M massali jism harakat tenglamasiga asosan tarozining siklik tebranish chastotasi

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = \sqrt{\frac{\chi}{M}} \tag{2.10}$$

bu yerda τ - tebranish davri. U holda

$$\frac{\Delta M}{M} = \frac{2\pi}{\tau}\sqrt{\frac{k_0 T}{Mg^2}}$$

Endi ikkinchi misol, oynalik galvanometr sezgirligining chegarasini tekshiraylik. Elektr tokining kuchi I oynachining burilish burchagi φ – orqali o‘lchanadi. Agar φ – burilish burchagi kichik bo‘lsa, ingichka simning elastik kuch momenti shu φ – burchakka proporsional bo‘ladi.

Harakatchan tizim inertsiya momenti K bo‘lsa, uning koordinatasi φ uchun harakat tengalmasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$K\ddot{\varphi} = \sum_i M(F_i) = -C\varphi - h\dot{\varphi} + \wp I \tag{2.12}$$

Bu yerda $C\varphi$ - elastik kuch momenti va $C = \frac{\pi^2 r^2 G}{2l}$;

$h\dot{\varphi}$ - ishqalanish kuch momenti;

$\wp I$ - elektromagnit kuchining momenti;

r - oynacha simining radiusi;

l - sim uzunligi;

G - simning siljish momenti;

$\wp$ - o‘ramlar soni;

Elastik va elektromagnit kuchlar kichik φ - larda potensialga ega bo‘ladi. Oynachaning kichik burchakka burilishiga ta’sir etuvchi kuch

$$-\frac{\partial U}{\partial \varphi} = -C\varphi + \wp I \tag{2.13}$$

(2.13) – ni integrallab quyidagini hosil qilamiz:

$$U = \frac{C\varphi^2}{2} - \wp I\varphi = \frac{C}{2}(\varphi - \varphi_0)^2 - \frac{C\varphi_0^2}{2}; \qquad (2.14)$$

$\varphi_0 = \frac{\wp I}{C}$ - muvozanatli holat burilish burchagi.

φ - ning o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasini topaylik.

$$\overline{(\varphi - \varphi_0)^2} = \frac{\int e^{-\frac{C}{2\theta}(\varphi-\varphi_0)^2} \cdot (\varphi - \varphi_0)^2 d\varphi}{\int e^{-\frac{C}{2\theta}(\varphi-\varphi_0)^2} \cdot d\varphi} =$$

$$= -\frac{\partial}{\partial\alpha} \ln \int e^{-\alpha(\varphi-\varphi_0)^2} d\varphi = -\frac{\partial}{\partial\alpha} \ln \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \frac{1}{2\alpha} = \frac{\theta}{C} \qquad (2.15)$$

$(\alpha = C/2\theta)$

Tok kuchi $I = \frac{C}{\wp}\varphi_0$ bo‘lganligi tufayli φ_0 - ni o‘lchashda $\Delta\varphi_0$ xatolikka yo‘l qo‘yilganligi uchun tok kuchini o‘lchashdagi xatolik:

$$\Delta I = \frac{C}{\wp}\Delta\varphi_0 = \frac{C}{\wp}\sqrt{\frac{\theta}{C}} \qquad (2.16)$$

yoki nisbiy xatolik (fluktuatsiya):

$$\frac{\Delta I}{I} = \frac{\sqrt{C \cdot \theta}}{\wp \cdot I} \qquad (2.17)$$

bo‘ladi.

Tok kuchini o‘lchashdagi aniqlikni oshirish uchun C - ni kichraytirib va $\wp$ - ni katta qilib olish lozim. Bu ikkala o‘zgarish ham φ_0 - muvozanat holat burchagining oshishiga olib keladi, lekin talab bo‘yicha $\varphi << \frac{\pi}{2}$ bo‘lishi kerak.

Shuning uchun bu holda ham asbob sezgirligiga chegara qo‘yiladi.

9.3-§. Broun harakatining nazariyasi

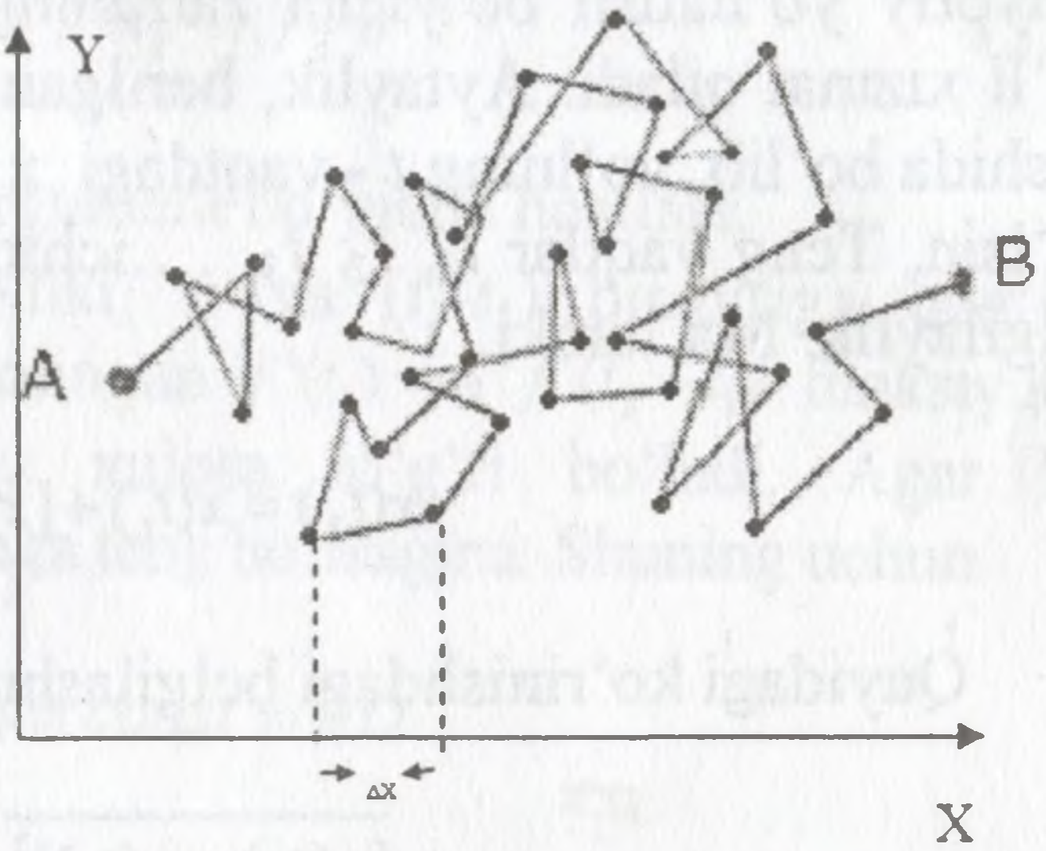
Broun harakati 1827 yil botanik Broun tomonidan birinchi bor kuzatilgan. Issiqlikning molekulyar – kinetik nazariyasi vujudga kelgach, Broun harakati bu katta o‘lchamdagi «molekula»larning

issiqlik harakati ekanligi tushuniladi. Darhaqiqat, zarra o‘lchami qancha kichik bo‘lsa va temperatura qancha yuqori bo‘lsa, harakat shunchalik katta bo‘lishi tajribada kuzatilgan va dastlab sifat jihatdan gazlar uchun hosil qilingan

$$\frac{\overline{mv^2}}{2} = \frac{3}{2}k_0T \qquad (3.1)$$

formula orqali Broun harakatini tushuntirish imkoniyati tug‘ildi.

Biroq tajribada Broun harakatining tezligini o‘lchash (3.1) – dagiga nisbatan har vaqt kichik qiymatlarni kuzatishga olib keldi. Broun harakati mavjudligi statistik nazariyaning to‘g‘riligini yana bir bor tasdiqlaydi (*15-chizma*). Unda nuqtalar bilan teng vaqtlar ichida zarra egallagan o‘rni belgilangan. Aslida muhitda harakat qilayotgan zarra harakat qarshiligiga energiya sarflashi natijasida to‘xtashi lozim. Lekin Broun harakatining mavjudligi energiya sochilishiga qarshi jarayon borligini ko‘rsatadi. Bu zarra termodinamika ikkinchi qonuniga zid holda o‘z harakatini saqlamoq uchun muhitda uzluksiz ravishda energiya olib turadi. Bu qarama-qarshilikni 1905 yilda Eynshteyn va Smoluxovskiylar hal qildi.



15 - chizma *xy*- tekisligida Broun zarrasining harakati xususiyati.

Haqiqatdan olganda (3.1)-formulasi odatdagi molekulalarga nisbatan o‘lchami ancha katta bo‘lgan Broun zarrasiga ham taalluqli bo‘lishi lozim. Ammo Broun zarrasining ilgarilanma harakati juda murakkab xususiyatga ega. Uning bosib o‘tadigan yo‘li turlicha uzunlikka ega bo‘lgan burilish chiziqlaridan iborat. Broun zarrasining atrofi molekulalar bilan o‘ralgan bo‘lib, ular uzluksiz ravishda Broun zarrasiga urilib turadi. Broun zarrasi qabul qiladigan barcha impulslarning natijaviy qiymati, shuning bilan birga uning tezligi xaotik (tartibsiz) ravishda o‘z kattaligini va yo‘nalishini o‘zgartirib turadi. Broun zarrasini mikroskop orqali kuzatganda ham uning haqiqiy yo‘lini ko‘rish imkoniyatiga ega bo‘lish mumkin emas. Broun zarrasining birqancha siniq chiziqlardan tashkil topgan haqiqiy yo‘lini

ko‘z sezmaydi va uni to‘g‘irlab kichik yo‘lni ko‘rish qurbiga ega. 15 - chizmada keltirilgan chiziq bu Broun zarrasining haqiqiy bosib o‘tgan yo‘li bo‘lsa, undagi A va B nuqtalarini birlashtiruvchi chiziqnigina ko‘z ko‘ra oladi. Natijada, kuzatiluvchi harakat tezligi har doim haqiqiy tezlikdan kichik bo‘ladi.

Shunday qilib, zarra tezligining kattaligi -nazariya va tajriba natijalarini taqqoslash uchun qulaysizdir. Qulay xarakteristika sifatida ixtiyoriy yo‘nalish bo‘yicha zarraning ma’lum bir vaqt ichida o‘tgan yo‘li xizmat qiladi. Aytaylik, berilgan dastlabki vaqtda zarra koordinat boshida bo‘lib, yo‘lning t - vaqtdagi x - o‘qi bo‘yicha koordinatasi $x(t)$ bo‘lsin. Teng vaqtlar t_1, t_2, t_3, ….ichida o‘tilgan yo‘lni x_1, x_2, x_3,.... deb belgilaylik. Ma’lumki,

$$x(t_2) = x(t_1) + [x(t_2) - x(t_1)] \tag{3.2}$$

Quyidagi ko‘rinishdagi belgilashni qabul qilamiz:

$$\overline{[x(t_2) - x(t_1)]^2} = f(t_2 - t_1) \tag{3.3}$$

Bunda $f(t_2\text{-}t_1)$ kattaligi $(t_2\text{-}t_1)$ - vaqt ichida zarraning o‘rtacha kvadratik siljishi.

$f(t_2\text{-}t_1)$ - faqat yo‘lning uzunligiga bog‘liq bo‘lib, zarraning t_1 va t_2 – vaqtdagi egallagan o‘rniga bog‘liq emas. $(t_2\text{-}t_1)$ - vaqtida o‘tilgan yo‘l t_1 vaqtda o‘tilgan yo‘lga bog‘liq bo‘lmasligi uchun $(t_2\text{-}t_1)$ - unchalik kichik bo‘lmasligi lozim.

(3.2) – dan:

$$\overline{[x(t_2)]^2} = \overline{[x(t_1)]^2} + \overline{[x(t_2) - x(t_1)]^2} + 2 \cdot \overline{x(t_1)[x(t_2) - x(t_1)]} \tag{3.4}$$

t_1 va $(t_2\text{-}t_1)$ yetarli darajada kattaligi to‘g‘risidagi farazimizga asosan, $(t_2\text{-}t_1)$ vaqtda o‘tilgan yo‘l t_1 – vaqtda o‘tilgan yo‘lga bog‘liq bo‘lmaydi, ya’ni $x(t_1)$ va $[x(t_2)\text{-}x(t_1)]$ o‘tilgan yo‘llar bir-biriga statistik bog‘liq bo‘lmaydi. Shuning uchun

$$\overline{x(t_1) \cdot [x(t_2) - x(t_1)]} = \overline{x(t_1)} \cdot \overline{[x(t_2) - x(t_1)]}$$

Zarraning musbat yoki manfiy qiymatiga siljishi teng ehtimolli bo‘lganligi uchun $\overline{x(t)} = 0$ va (3.4) - quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$f(t_2) = f(t_1) + f(t_2 - t_1) \tag{3.5}$$

(3.5) - munosabati ixtiyoriy t_1 va t_2 qiymatlari uchun to‘g‘ridir. t_2-vaqtni belgilab olib t_1-ni esa ixtiyoriy ravishda o‘zgartiraylik va (3.5) - ni t_1 bo‘yicha differentsiallaymiz:

$$f'(t_1) - f'(t_2 - t_1) = 0 \tag{3.6}$$

$f'(t_2 - t_1)$ funksiyaning $(t_2 - t_1)$ argument bo‘yicha hosilasi.

(3.6) - dan ko‘rinib turibdiki, t_1 va $(t_2\text{-}t_1)$ bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan argumentlar bo‘yicha olingan $f'(t_1)$ va $f'(t_2 - t_1)$ funksiyalar bir-biriga teng. Shu vaqtda bu xulosa to‘g‘ri bo‘ladi. Agar bu funksiyalarning har biri doimiy songa teng bo‘lsagina. Shuning uchun

$$f'(t) = const = 2D$$

Bundan:

$$f(t) = 2Dt; \qquad f(t) = \overline{[x(t)]^2} = 2Dt \tag{3.7}$$

Bu yerda D - Broun zarrasining diffuziya koeffitsiyenti.

(3.7) – munosabati bevosita eksperimentda kuzatilishi mumkin. Eksperiment o‘rtacha kvadratik siljishning shu siljish uchun ketgan vaqtga proporsionalligini ko‘rsatadi. Bunday eksperiment orqali porporsionallik koeffitsiyenti D – ni aniqlash mumkin.

(3.7) dan nazariya va eksperimentni tezliklar orqali taqqoslash noqulayligini ko‘rsatish mumkin:

$$\bar{v} = \frac{\sqrt{\overline{x^2}}}{t} = \frac{\sqrt{2Dt}}{t} = \sqrt{\frac{2D}{t}} \tag{3.8}$$

ya’ni tezlik siljish vaqtining funksiyasi bo‘ladi va $t \to 0$ bo‘lganda $\bar{v} \to \infty$ bo‘ladi. Bu hol bizni taajjublantirmasligi lozim. (3.7)-formulasi $t \to 0$ hol uchun emas balki, t_1 va $(t_2\text{-}t_1)$ vaqtlarning yetarli darajada katta qiymatlari uchun hosil qilingan.

Endi diffuziya koeffitsiyenti D – ning qiymatini tajribada o‘lchash mumkin bo‘lgan fizik kattaliklar orqali ifodasini topishga kirishaylik.

Buning uchun Broun zarrasiga tegishli bo‘lgan harakat tenglamasidan foydalanamiz:

$$m\ddot{x} = X - h\dot{x} + f(t) \qquad (3.9)$$

Bu erda X – tashqi ta’sir etuvchi kuchning x – o‘qiga proyeksiyasi;

$f(t)$ – atrofdagi molekulalarning tasodifiy xarakterga ega bo‘lgan ta’sir kuchi;

- $\hbar\dot{x}$ - yopishqoqlik kuchi (zarra harakati yo‘nalishiga qarama-qarshi).

(3.9) dagi $\hbar\dot{x}$ va $f(t)$ hadlar zarraning chiziqli o‘lchamiga va yuzasiga bog‘liq, $-m\ddot{x}$ - inertsiya kuchi esa zarra hajmiga bog‘liq bo‘lganligi tufayli kichik o‘lchamli zarra uchun

$$\dot{x} = \frac{1}{h}X + \frac{1}{h}f(t) \qquad (3.10)$$

Xususiy holda $X = const$ tashqi kuch ta’siri ostida (3.10) ning o‘rtachasi

$$\overline{\dot{x}} = \frac{1}{h}X \qquad (3.11)$$

chunki $\overline{f(t)} = 0$

(3.11)-dagi kuch va tezlik orasidagi $\frac{1}{h} = u$ koeffitsiyentga zarra harakatchanligi deyiladi. Og‘irlik kuchi maydonida Broun zarrasining yopishqoq suyuqlik ichida tushish (tezligini kuzatish) yo‘li bilan u – harakatchanlikni eksperimentda aniqlash mumkin. Endi harakatchanlik u va diffuziya koeffitsiyenti D orasidagi munosabatni topaylik. Buning uchun $X = -\alpha x$ kvazielastik kuch deb (3.10) – zarraning harakat tenglamasini integrallaymiz:

$$x = x_0 e^{-\frac{\alpha}{h}t} + \frac{1}{h}e^{-\frac{\alpha}{h}t}\int_0^t e^{\frac{\alpha}{h}\tau} f(\tau)d\tau \qquad (3.12)$$

Ushbu ifodaning o‘ng tomonidagi birinchi hadni tenglamaning chap tomoniga ko‘chiramiz, so‘ng tenglamaning ikkala tomonini

kvadratga ko‘taramiz va barcha Broun zarralari bo‘yicha uning o‘rtachasini olamiz, ya’ni

$$\overline{\left(x - x_0 e^{-\frac{\alpha}{h}t}\right)^2} = \frac{1}{h^2} e^{-\frac{2\alpha}{h}t} \int_0^t \int_0^t e^{\frac{\alpha}{h}(\tau+\tau')} \overline{f(\tau)\, f(\tau')\, d\tau\, d\tau'} \qquad (3.13)$$

$f(\tau)$ - tasodifiy kuchning $d\tau$ vaqt uchun impulsini

$$dF(\tau) = f(\tau)\, d\tau$$

deb olamiz. U holda (3.13)-ning o‘ng tomonidagi integralli ifoda

$$\int_0^t \int_0^t e^{\frac{\alpha}{h}(\tau+\tau')} \overline{dF(\tau) dF(\tau')} = \int_0^t e^{\frac{2\alpha}{h}\tau} \overline{[dF(\tau)]^2} \qquad (3.14)$$

Xuddi (3.7)-ni hosil qilganimizdek fikr yuritsak, $\overline{[F(\tau)]^2} = 2At$ deb olish mumkin va $\overline{[dF(\tau)]^2} = 2A d\tau$.

Bu yerda A – suyuqlik xususiyatiga va temperaturasiga bog‘liq bo‘lgan kattalik. U holda

$$\overline{\left(x - x_0 e^{-\frac{\alpha}{h}t}\right)^2} = \frac{1}{h^2} e^{-\frac{2\alpha}{h}t} \int_0^t e^{\frac{2\alpha\tau}{h}} \cdot 2A d\tau = \frac{1}{\alpha h} A \left(1 - e^{-\frac{2\alpha t}{h}}\right) \qquad (3.15)$$

(3.15)-dagi A – ning qiymatini quyidagi ikkita xususiy hol orqali topishimiz mumkin:

1) Broun zarrasi ozod bo‘lsin. Bu holga $\alpha \to 0$ bo‘lgan (3.15) - ning ifodasi to‘g‘ri keladi:

$$\overline{(x - x_0)^2} = \frac{2A}{h^2} t \qquad (3.16)$$

(3.15)-ning o‘ng tomonidagi aniqsizlikni ochgach (3.16) - ni hosil qildik. (3.16)-ni (3.7)- bilan taqqoslab:

$$D = -\frac{A}{h^2} \qquad (3.17)$$

hosil qilamiz.

2) Ozod bo‘lmagan Broun zarrasi uchun $\alpha \neq 0$. Bu holda $t \to \infty$ ga to‘g‘ri keluvchi (3.15) – formuladan:

$$\overline{x^2} = \frac{A}{\alpha h}$$

Lekin cheksiz katta vaqt davomida zarra statistik muvozanat holatiga keladi, va uning o‘rtacha potensial energiyasi $\frac{\alpha \overline{x^2}}{2} = \frac{k_0 T}{2}$ bo‘ladi. Bu ikkala keyingi munosabatdan $\overline{x^2} = \frac{k_0 T}{\alpha} = \frac{A}{\alpha h}$ va $A = h x_0 T$ bo‘ladi.

Buni (3.17) - ga tadbiq etamiz: $D = \frac{k_0 T}{h}$ yoki

$$D = k_0 T \cdot u \qquad (3.18)$$

(3.18) - ga Eynshteyn formulasi deyiladi, va u D - diffuziya koeffitsiyenti bilan u - harakatchanlik orasidagi bog‘liqlikni anglatadi.

Oxirgi munosabatdan ko‘rinib turibdiki, D va u – larning o‘zaro bog‘liqligi faqat muhitning xarakteristikasi bo‘lib, muhitga ta’sir etuvchi kuchga va aniq harakat ko‘rinishiga bog‘liq emas.

Diffuziya koeffitsiyentining muhit temperaturasiga bog‘liqligini ko‘raylik. Buning uchun Stoks formulasidan foydalanamiz, unga asosan yopishqoq muhitda r radiusli sharchaning ishqalanish kuchi $F = 6\pi\eta r v$ (η -yopishqoqlik koeffitsiyenti).

U holda (3.9) - formuladagi ishqalanish koeffitsiyenti

$$h = 6\pi\eta r; \quad u = \frac{1}{h} = \frac{1}{6\pi\eta r}$$

(3.18) - ga asosan

$$D = \frac{k_0 T}{6\pi\eta r}$$

Ko‘rinib turibdiki, diffuziya koeffitsiyenti zarra radiusiga teskari proporsional, uning temperaturaga bog‘liqligi esa T/η - munosabati orqali berilgan. η - yopishqoqlik koeffitsiyentining temperaturaga bog‘liqligi turlicha suyuqliklar uchun turlicha qiymatga ega, va umumiy holda temperaturaga bog‘liqligi murakkab ko‘rinishga ega.

9.4-§. Belgilangan bosim ostida hajm fluktuatsiyasi

Aytaylik, bizlarni qiziqtirayotgan F - fizik kattaligi bo‘lib tizimning V - hajmi xizmat qilsin. Termodinamik muvozanat holatlar nazariyasida V - hajm tashqi parametr vazifasini bajarar edi va uning qiymati yoki belgilangan, yoki bo‘lmasa ma’lum bir yo‘nalish bo‘yicha sekin o‘zgaradi deb hisoblangan edi. Masalaga bu yo‘sinda qaraganimizda hajm fluktuatsiyalanishi mumkin emas edi. V - ning qiymati hech narsa bilan chegaralanmasayu, lekin tizim doimiy bosim ostida bo‘lsa, hajm kattaligida fluktuatsiya hodisasi sodir bo‘lishi mumkin. Ma’lumki, agar na V - ni va na p- ni belgilab olmasa tizim holati berilgan bo‘la olmaydi.

Jismga doimiy bosim ta’sir qilish sharoitini hosil qilish oson. Faraz qilaylik, jism silindr ichida bo‘lib, unda porshin ozod harakat qilishi mumkin va porshin ustiga $P=pS$ – og‘irlikdagi yuk qo‘yilgan bo‘lsin (p- bosim, S - porshin yuzasi). Bu holda tizim hajmining o‘zgarishi porshin balandligi $h=V/S$ - ning o‘zgarishiga va uning Ph - potensial energiya, hamda $\frac{P}{2g}\dot{h}^2$ - kinetik energiyalar o‘zgarishiga bog‘liq bo‘ladi. Shunday qilib, jism va yuk o‘zaro kuchli ta’sirda bo‘ladi va ularni $q_1,\ldots, q_n, h$ – koordinatali, hamda

$$H = H_j(p_i,\ldots, q_i,\ldots, V) + Ph + \frac{P}{2g}\dot{h}^2 \qquad (4.1)$$

gamiltonianli bitta butun tizim deb qarash kerak bo‘ladi.

Bu yerda: H_j - jism gamiltoniani, u barcha molekulalarning $q_i,\ldots, p_i\ldots$ – koordinata va impulslariga, shuningdek V - hajmiga bog‘liq.

Koordinata sifatida h – yuk balandligi o‘rniga unga to‘g‘ri keluvchi $V=h\cdot S$ hajmni qabul qilamiz.

$$Ph=pS\cdot V/S=pV;$$

(4.1) - dagi $\dot{h}$ - tezlikni ($\dot{h}=\dot{V}/S$) umumlashtirilgan impuls bo‘yicha ifodalaymiz:

$$P_V = \frac{\partial H}{\partial \dot{V}} = \frac{\partial}{\partial \dot{V}}\left(\frac{P}{2g}\dot{h}^2\right) = \frac{P}{2g}\frac{\partial}{\partial \dot{V}}\left(\frac{\dot{V}}{S}\right)^2 = \frac{P\dot{V}}{gS^2};$$

U holda (4.1)

$$H = H_j(p_i,\ldots,q_i,\ldots,V) + pV + \frac{P_V^2}{2m} \qquad (4.2)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. $(m = p/gS)$

Agar $\mathcal{F}$ - umumiy tizimning ozod energiyasi desak, V - hajmning V-dan $V+dV$- gacha oraliqda bo‘lish ehtimoliyati:

$$W(V)dV = (\int e^{\frac{\mathcal{F}-H_j-pV-\frac{P_V^2}{2m}}{\theta}}(dp)(dq)\cdot dP_V)dV \qquad (4.3)$$

Ehtimoliyatni normallashtirish qoidasidan foydalanib,

$$e^{-\frac{\mathcal{F}_j(\theta,V)}{\theta}} = \int e^{-\frac{H_j}{\theta}}(dp)(dq)$$

ko‘rinishdagi belgilash kiritamiz. Ushbu formulada ma’nosiga ko‘ra, $\mathcal{F}_j(\theta,V)$ - hajm V belgilangan, lekin ixtiyoriy bo‘lgan jism uchun ozod energiya.

(4.3) - ni P_V bo‘yicha integrallasak:

$$W(V)dV = e^{\frac{\mathcal{F}-\mathcal{F}_j-pV}{\theta}}\cdot(2\pi\, m\theta)^{1/2}dV \qquad (4.4)$$

Xususiy holda N - zarrali ideal gaz uchun

$$\mathcal{F} = -N\cdot\theta\cdot\ln V + f(\theta)$$

va $$W(V)dV = C(\theta)\cdot V^N e^{-\frac{pV}{\theta}}dV \qquad (4.5)$$

Bu ifoda quyidagi holda maksimumga ega bo‘ladi:

$$\frac{d}{dV}\left(N\ln V - \frac{pV}{\theta}\right)\Big|_{V=V_0} = 0; \qquad V_0 = \frac{N\theta}{p} \qquad (4.6)$$

(4.6) - dan ko‘rinib turibdiki, eng katta ehtimolli hajm V_0 bu holat tenglamasini qanoatlantiruvchi hajm ekan.

Ixtiyoriy jism uchun (4.4) - formuladan foydalanmoq lozim, buning uchun esa ozod energiyaning hajmga bog‘liqligini bilish lozim. $\mathcal{F}$ - ning hajmga bog‘liqligini $d\mathcal{F}=-SdT-pdV$ munosabatni integrallab, eksperiment natijasidan foydalangan holda topish mumkin. Buning uchun $p(T,V)$ - holat tenglamasini va S - entropiyaning qiymatini bilmoq lozim (S - ning qiymatini $dS=dQ/T$ - ni integrallash orqali topiladi).

Agar $\mathcal{F}_j$ - ning hajmga bog‘liqligi ma’lum bo‘lmasa, u holda (4.4)-dagi $\mathcal{F}_j$ - ni hajmning $V=V_0$ - eng katta ehtimoli qiymatidan kichik chetlanishi bo‘yicha qatorga yoyamiz. V_0 - ni bu hol uchun aniqlashda (4.4) - formulasidagi ko‘rsatgichning maksimumlik shartidan foydalaniladi:

$$\left.\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial V}\right|_{V=V_0} + p = 0$$

Bu esa holat tenglamasidir. (4.4) - ning ko‘rsatgichini $(V\text{-}V_0)$ - bo‘yicha qatorga yoyamiz:

$$W(V)dV = (2\pi\, m\theta)^{1/2} \cdot \exp\left\{\frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}_j(\theta,V_0) - pV_0}{\theta} - \frac{1}{2\theta}\frac{\partial^2 \mathcal{F}_j}{\partial V^2}(V-V_0)^2 - \ldots\right\}dV, \quad (4.7)$$

lekin:

$$\left.\frac{\partial^2 \mathcal{F}_j}{\partial V^2}\right|_{V=V_0} = -\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{V=V_0}$$

(4.7) - ni hajm bo‘yicha integrallab, to‘la tizimning $\mathcal{F}$ - ozod energiyasini topamiz.

$$1 = \int_0^\infty W(V)dV = (2\pi\, m\theta)^{1/2} \sqrt{\frac{2\pi\theta}{-\left.\frac{\partial p}{\partial V}\right|_{V=V_0}}} \cdot \exp\left(\frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}_j(\theta,V_0) - pV_0}{\theta}\right);$$

bundan:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_j(\theta,V_0) + pV_0 - \theta \ln(2\pi\, m\theta)^{1/2} + \theta \ln \sqrt{\frac{-\frac{\partial p}{\partial V}}{2\pi\theta}} \approx$$

$$\approx \mathcal{F}_j(\theta,V_0) + pV_0 = \Phi; \quad (4.8)$$

Bu erda Φ - faqat jism uchun Gibbsning termodinamik potensiali.

Shunday qilib, jism va yukdan iborat bo‘lgan umumiy tizim uchun p - yuk tomonidan beriladigan bosim tashqi parametr vazifasini bajaradi. V_0 - muvozanat holatining hajmi esa $\frac{\partial \mathcal{F}_j}{\partial V} + p = 0$ shartidan topiladi. Bunday tizimning ozod energiyasi esa jismning o‘ziga tegishli bo‘lgan Gibbs termodinamik potensialiga teng bo‘ladi.

Endi hajmning o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasini hisoblaylik. Buning uchun $\mathcal{F}$- ning qiymatini (4.8) - dan (4.7) - ga qo‘yamiz:

$$\overline{(V-V_0)^2} = \int (V-V_0)^2 W(V) dV = \int \sqrt{\frac{1}{2\pi\theta}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial V^2}\right)_{V_0}} \times$$

$$\times \int \exp\left[-\frac{1}{2\theta}\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}_j}{\partial V^2}\right)_{V_0} (V-V_0)^2 \right] \cdot (V-V_0)^2 \, dV =$$

$$= \frac{\theta}{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{F}_j}{\partial V^2}\right)_{V_0}} = \frac{\theta}{-\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V}\right)_{V_0}} \qquad (4.9)$$

Bu munosabat kritik nuqtadan boshqa barcha nuqtalar uchun to‘g‘ridir. Kritik nuqtada $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{V_0} = 0$, bundan tashqari, $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{V_0} = 0$ bo‘ladi. Shuning uchun kritik nuqtaga taalluqli hajmning o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasini hisoblashda $\mathcal{F}_j$ - ni $(V\text{-}V_0)$ bo‘yicha qatorga yoyishda $(V\text{-}V_0)^4$ - hadgacha hisobga olmoq lozim.

(4.9) - ga asosan barcha nuqtalarda o‘rtacha kvadratik fluktuatsiya θ - ga proporsional bo‘lsa, kritik nuqtada hisoblashlar shuni ko‘rsatadiki, $\overline{(V-V_0)^2} \sim \sqrt{\theta}$ ekan.

Endi hajm fluktuatsiyasi gazli termometrning ko‘rsatish aniqligiga chegara qo‘yishi masalasini tekshiraylik.

Termik jism sifatida ideal gazni olib belgilangan bosim ostida hajm o‘zgarishi bilan temperatura o‘zgarishini ko‘rsatuvchi termometrni ko‘raylik. Ideal gaz uchun: $T = \frac{pV}{Nk}$ (N - gaz molekulalarining soni).

Temperaturani o‘lchash aniqligi hajmni o‘lchash aniqligiga bog‘liq:

$$\delta T = \frac{p}{Nk}\delta V \quad \text{yoki} \quad \frac{\delta T}{T} = \frac{\delta V}{V}$$

Hajm fluktuatsiyaga ega bo‘lishi natijasida uning qiymati belgilangan bosim ostida $\pm\sqrt{(\Delta V)^2}$ −gacha aniqlik bilan bizga ma’lum bo‘lganligi uchun, temperatura ham shuncha aniqlikka ega bo‘ladi, ya’ni:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{\sqrt{\theta}}{V\sqrt{-\frac{\partial p}{\partial V}}} = \frac{\sqrt{kT}}{V\sqrt{\frac{NkT}{V^2}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \qquad (4.10)$$

(4.10) - munosabatidan ko‘rinib turibdiki, gazli termometrning o‘lchamini oshirgan sari temperaturani shunchalik aniqroq o‘lchashimiz mumkin ekan. Lekin bu xulosa shu vaqtda to‘g‘riki, agar gazli termometrning issiqlik sig‘imi tekshiriluvchi jism issiqlik sig‘imiga nisbatan juda kichikligicha saqlansa.

Agar bu issiqlik sig‘imlari bir xil tartibda bo‘lsa, termometr o‘zi tekshiriluvchi jismdan $C\Delta T$ issiqlik miqdori oladi. (C- termometr issiqlik sig‘imi, ΔT - temperatura farqi).

Termometr energiyasi $\overline{\Delta E^2}$ - fluktuatsiyaga ega bo‘lganligi tufayli, uning jismdan olgan issiqlik miqdori $\sqrt{\overline{\Delta E^2}}$ - gacha aniqlikka ega, ya’ni $\sqrt{\overline{\Delta E^2}} = \sqrt{kTC_vT} = kT\sqrt{f\,N}$ Bu yerda f=3/2,5/2,7/2,…, mos ravishda, bir atomli, ikki atomli va shu kabi gaz uchun. Jismdan olinadigan energiya bu aniqsizlikka ega bo‘lganligi tufayli temperaturani o‘lchashda $\pm\frac{kT\sqrt{f\,N}}{C_j}$ - aniqsizlikka yo‘l qo‘yiladi.

Bu ikkala sababni qo‘shib temperaturani o‘lchashdagi yo‘l qo‘yiladigan xatolikni topamiz:

$$\frac{\delta T}{T} = \frac{1}{\sqrt{N}} + \frac{k\sqrt{f}}{C_T}\sqrt{N}$$

Bundan C_T - ning qiymati katta bo‘lmagan hol uchun gazli termometrning shunday optimal o‘lchami mavjud bo‘ladiki, u orqali temperaturani aniqlashdagi xatolik minimal bo‘lishini aniqlash mumkin.

9.5-§. Hajmda zarralar zichligining fluktuatsiyasi

Tekshiriluvchi tizim (qattiq jism yoki suyuqlik)ning massasi $M = \rho \cdot V$ bo‘lsin (Bu yerda ρ - jism zichligi, V-tizim hajmi). Hajm fluktuatsiyasi vaqtida massa doimiyligicha qoladi ($M = const$). Shuning uchun

$$0 = \rho \Delta V + V \Delta \rho$$

bo‘ladi. Bundan:

$$(\Delta V)^2 = \frac{V^2}{\rho^2}(\Delta \rho)^2$$

Buning o‘rtachasi $\overline{(\Delta V)^2} = \frac{V^2}{\rho^2}\overline{(\Delta \rho)^2}$

Ikkinchi tomondan, belgilangan bosim ostida hajm fluktuatsiyasi:

$$\overline{(\Delta V)^2} = \frac{\theta}{-\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)_0}$$

So‘nggi ikkala tenglikdan

$$\frac{\sqrt{\overline{(\Delta \rho)^2}}}{\rho} = \sqrt{\frac{\theta}{-V^2\left(\frac{\partial \rho}{\partial V}\right)_0}} \qquad (5.1)$$

Jism zichligi fluktuatsiyasi to‘g‘risidagi masalani boshqacha yo‘sinda ham qo‘yish mumkin. Aytaylik, bir molekula massasi m bo‘lsin. U holda biz tekshirayotgan tizim V - hajmidagi molekulalar konsentratsiyasi

$$N_1 = \frac{\rho}{m} \qquad \text{va} \qquad \Delta N_1 = \frac{1}{m}\Delta\rho$$

bo‘ladi. Natijada N_1 - zarralar konsentratsiyasining o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasi (5.1) - ga muvofiq:

$$\overline{\Delta N_i^2} = \frac{1}{m^2}\cdot\overline{\Delta\rho^2} = \frac{\rho^2\cdot V}{-m^2V^2\dfrac{\partial p}{\partial v}} = \frac{N_1^2\cdot\theta}{-V^2\dfrac{\partial p}{\partial V}} \tag{5.2}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Endi belgilangan V - hajmdagi $n = N_1\cdot V$ - barcha molekulalar fluktuatsiyasini hisoblaylik:

$$\Delta n = V\cdot\Delta N_1$$

Demak,

$$\overline{(\Delta n^2)} = V^2\cdot\overline{\Delta N_1^2} = \frac{N_1^2\cdot\theta}{-\dfrac{\partial p}{\partial V}} \tag{5.3}$$

Shunday qilib, yuqoridagi mulohazalarimiz qattiq jism yoki suyuqlikdan tashkil topgan tizimga tegishlidir. Gazdan tashkil topgan tizim uchun yuqoridagi fikrlarni qo‘llash mumkin emas. Bunga sabab bir xil molekulalardan tashkil topgan m - massani ajratib olish imkoniyatiga ega emasmiz. Vaqtning har bir daqiqasida belgilangan hajmga yangi molekulalar kirib keladi, oldingilari esa uni tark etadi. Hajm V - o‘lchami molekula erkin chopish uzunligiga nisbatan kichik bo‘lganda bu jarayon juda sezilarli bo‘ladi. Darslik sahifalari chegaralanganligi tufayli gazlar uchun zarralar soni fluktuatsiyasi masalasini ochiq qoldiramiz.

9.6-§. Yorug‘likning molekulyar sochilishi

Kundalik hayotdan ma’lumki, quyoshli kunda daraxt soyasi yaxshi yoritilgan bo‘ladi. Bu yorug‘lik quyosh nurining atrofdagi boshqa jismlardan qaytishi natijasida sodir bo‘ladi. Bunga sabab asosan yorug‘lik nurining manbai bo‘lib havo xizmat qiladi, ya’ni havoni tashkil etuvchi molekulalardan yorug‘lik nuri har tomonga sochiladi.

Quyosh nurining havoda bunday sochilishi natijasida osmonning rangi ko‘k ko‘rinadi.

Elektrodinamikadan ma’lumki, bir jinsli muhitda yorug‘lik nuri faqat to‘g‘ri chiziq bo‘ylab oldinga harakat qiladi. Lekin har qanday real muhit bir jinsli emas va unda molekulalar zichligi fluktuatsiyasi mavjud. Muhitning katta zichlikka ega bo‘lgan qismlarida dielektrik doimiysi ε-ning qiymati katta va muhitning bunday qismlarida yorug‘lik to‘lqinining tez o‘garuvchi elektrik maydonida qo‘shimcha $\Delta\vec{P}$ qutblanish qabul qiladilar. $\Delta\vec{P}$ esa bir nuqtadan ikkinchi nuqtaga o‘tganda xaotik ravishda o‘zgarib turadi.

Ma’lumki, har bir tebranuvchi dipol o‘zining tebranish chastotasiga teng bo‘lgan chastotali elektromagnit to‘lqinni tarqatadi. Barcha tebranuvchi dipollarning bir jinsli muhitdagi elektromagnit maydoni shunday natijaviy qiymatga egaki, faqat tushuvchi to‘lqin yo‘nalishi bo‘yicha bo‘lgan to‘lqinga ega bo‘ladi va boshqa barcha yo‘nalishlar bo‘yicha to‘lqinlar interferentsiya (Gyugens prinsipi) sodir bo‘lganligi tufayli o‘zaro bir-birini yo‘qotadi. Bir jinsli bo‘lmagan muhitda qo‘shimcha qutblanish $\Delta\vec{P}$ - ga to‘g‘ri keluvchi turli dipollar maydoni interferentsiyalashmaydi. Shuning uchun ham yorug‘lik turli yo‘nalishlar bo‘yicha tarqaladi.

Sochiluvchi yorug‘likning intensivligini hisoblaylik. Elektr maydon induktsiyasi

$$\vec{D} = \varepsilon\vec{\xi} = \vec{\xi} + 4\pi\vec{P}$$

munosabatidan:

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon - 1}{4\pi}\vec{\xi} \qquad (6.1)$$

Bu yerda $\vec{P}$ - hajm birligidagi dipol momenti. Dielektrik doimiysi

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \Delta\varepsilon$$

ko‘rinishga ega bo‘lsin. Bundagi ε_0 - o‘rtacha dielektrik doimiysi; $\Delta\varepsilon$ - esa o‘rtacha dielektrik doimiysining har bir nuqta uchun fluktuatsiyasi bo‘lsin. U holda

$$\vec{P} = \frac{\varepsilon_0 - 1}{4\pi}\vec{\xi} + \frac{\Delta\varepsilon}{4\pi}\vec{\xi} = \vec{P}_0 + \Delta\vec{P} \qquad (6.2)$$

$\Delta\vec{P} = \frac{\Delta\varepsilon}{4\pi}\vec{\xi}$ - qutblanish fluktuatsiyasi.

Bundan tashqari elekt maydon kuchlanganligini $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 e^{i\omega t} + \vec{\xi}_1 e^{i\omega t}$ deb olish mumkin. Bu yerda $\overrightarrow{\xi_0} e^{i\omega t}$ - tushuvchi to‘lqin maydoni, $\overrightarrow{\xi_1} e^{i\omega t}$ - sochiluvchi to‘lqin maydoni.

$\overrightarrow{\xi_1} << \overrightarrow{\xi_0}$ bo‘lganligi tufayli, $\Delta\vec{P}$ -ning ifodasida, oldindan (6.2)-da $\Delta\varepsilon$ - kichik kattalik ishtirok etganligi tufayli, $\Delta\varepsilon \cdot \vec{\xi}_1$ - hadni hisobga olmaymiz. Shuning uchun qutblanish fluktuatsiyasi

$$\Delta\overrightarrow{P} = \frac{\Delta\varepsilon}{4\pi}\overrightarrow{\xi}_0 e^{i\omega t}$$

Qutblanish fluktuatsiyaga ega bo‘lganligi tufayli ixtiyoriy kichik v- hajmga to‘g‘ri keluvchi qo‘shimcha dipol momenti

$$\vec{p} = v \cdot \Delta\vec{P}$$

Qo‘shimcha dipol momenti $\vec{p}$ - ga nisbatan r - masofada bo‘lgan dS – yuzadan o‘tuvchi tebranuvchi dipol $\vec{p}$ orqali sochiluvchi elektromagnit to‘lqin energiyasining oqimi elektrodinamikada ma’lum bo‘lgan formulaga asosan

$$\Delta I = \frac{\ddot{p}^2(\sin^2 v)dS}{4\pi c^3 r^2} = \frac{(\Delta\varepsilon)^2 \xi_0^2 \omega^4 v^2 dS \sin^2 v}{(4\pi c)^3 \cdot r^2} \qquad (6.3)$$

Bu yerda: v – tushuvchi va sochiluvchi to‘lqin orasidagi burchak.

Xuddi shunday dS yuzaga tushuvchi elektromagnit to‘lqin energiyasining oqimi:

$$I_0 = \frac{c}{4\pi}\left[\vec{\xi}_0, \vec{H}_0\right] d\vec{S} = \frac{c}{4\pi}\sqrt{\varepsilon}\,\xi_0^2 dS \qquad (6.4)$$

(6.4) - ni hosil qilishda $\vec{H}_0\sqrt{\varepsilon}\,\vec{\xi}_0;\ \vec{H}_0 \perp \vec{\xi}_0$ munosabati hisobga olindi. Bu ikki kattalik (6.3) va (6.4) - larning bir - biriga nisbati

$$\frac{\Delta I}{I_0} = \frac{(\Delta\varepsilon)^2 \omega^4 v^2 \sin^2 v}{(4\pi c^2 r)^2 \sqrt{\varepsilon_0}} \tag{6.5}$$

$\Delta\varepsilon$ - dielektrik doimiyligi o‘rtacha fluktatsiyasining $\Delta\rho$ - zichlik fluktuatsiyasi orqali ifodasi:

$$\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \left(\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 \overline{(\Delta\rho)^2} = \left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 \cdot \frac{k_0 T}{-v^2\left(\frac{dp}{dv}\right)_{T,N}} \tag{6.6}$$

(6.6) - ni hosil qilishda (5.1)-formulasi inobatga olindi.Tajribada sochiluvchi yorug‘likning o‘rtacha intensivligi o‘lchanganligi uchun (6.5)-ning barcha mumkin bo‘lgan fluktuatsiyalar bo‘yicha o‘rtacha qiymatini olmoq lozim, ya’ni (6.5) - ga $(\Delta\varepsilon)^2$ o‘rniga uning o‘rtacha qiymatini (6.6)-dan qo‘yish kerak:

$$\frac{\overline{(\Delta I)}}{I_0} = \frac{\left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 k_0 T \cdot \omega^4 v \cdot \sin^2 v}{\sqrt{\varepsilon_0}\left(4\pi c^2 r\right)^2\left(-v\frac{dp}{dv}\right)} \tag{6.7}$$

Muhitning barcha hajmi V – bo‘yicha sochiluvchi yorug‘likning intensivligi barcha v - kichik hajmdagi intensivliklar yig‘indisiga teng. Barcha v – lar bo‘yicha sochiluvchchi yorug‘lik intensivliklari kogerent bo‘lmaganligi uchun intensivliklar amplitudalari yig‘indisini emas, balki aynan intensivliklarning o‘zining yig‘indisini olmoq lozim. $\left(-v\frac{dp}{dv}\right)_{T,N}$ - ifodasi v - hajm o‘lchamiga bog‘liq emas va u jismga tegishli bo‘lgan doimiy kattalik bo‘lganligi uchun (6.7) - dan v - hajmlar bo‘yicha yig‘indi olganda uning maxrajini yig‘indi ishorasi ostidan chiqariladi va barcha v - lar yig‘indisi V- to‘la hajmni tashkil etadi. Shuning uchun:

$$\frac{\sum\overline{(\Delta I)}}{I_0} = \frac{\left(\rho\frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 k_0 T\cdot\omega^4 V\sin^2\nu}{\sqrt{\varepsilon_0}\left(4\pi c^2 r\right)^2\left(-\nu\frac{dp}{dv}\right)} \qquad (6.8)$$

Ushbu ifodadan ko‘rinib turibdiki, yorug‘lik sochilishining intensivligi absolyut temperaturaga to‘g‘ri proporsional va u chastotaning ω^4 - qonuniyati bo‘yicha ω - ning oshishi bilan oshaveradi. Bundan tashqari dielektrik doimiysi muhit zichligiga qanchalik kuchli bog‘liq bo‘lsa, sochilish intensivligi ham shunchalik katta bo‘ladi. $\left(-\nu\frac{dp}{dv}\right)$ - qanchalik kichik bo‘lsa, sochilish esa shunchalik katta bo‘ladi.

Ideal gaz uchun

$$-\nu\frac{\partial p}{\partial\nu} = \frac{Nk_0T}{\nu} = p$$

bo‘lganligi tufayli yorug‘likning sochilish intensivligi $\frac{k_0T}{\rho} = \frac{1}{n_1}$ qonuniyat bilan oshadi (n_1- molekulalar konsentratsiyasi).

Kritik nuqtaga yaqinlashgan sari $\left(-\frac{dp}{dv}\right)\to 0$ bo‘ladi va (6.8)-ga asosan sochilish intensivligi cheksiz katta qiymatga oshib ketadi. Aslida esa kritik nuqtada nurlanish intensivligi juda katta, lekin chekli miqdordir. Bu holda, albatta, (6.8)-kuchga ega emas va zichlik o‘rtacha kvadratik fluktuatsiyasining $\frac{\overrightarrow{(\Delta\rho)^2}}{\rho^2} = -\frac{k_0T}{\nu^2\frac{dp}{dv}}$ ko‘rinishdagi ifodasini kritik holatga to‘g‘ri keluvchi qiymat bilan almashtirish lozim. Bu holda (5.1) - o‘rniga

$$\frac{\overline{(\Delta\rho)^2}}{\rho} = \frac{\overline{(\Delta\nu)^2}}{\nu^2} = \frac{0.676}{\nu^2}\sqrt{\frac{6k_0T}{d^3p/dv^3}} \qquad (6.9)$$

ifodasini ishlatmoq lozim. (6.9)-ni (6.6)-ga qo‘yib kritik holatga to‘g‘ri keluvchi quyidagi nurlanish intensivligini hosil qilamiz:

$$\frac{\overline{(\Delta I)}}{I} = \frac{\left(\rho \frac{d\varepsilon}{d\rho}\right)^2 \omega^4 \cdot \sin^2 \nu}{\sqrt{\varepsilon_0}\left(4\pi \cdot c^2 r\right)^2} \cdot 0.676 \sqrt{\frac{6k_0 T}{-d^3 p/d\nu^3}} \qquad (6.10)$$

(6.8)-formulasining xarakterli xususiyati shundan iboratki, yorug‘likning sochilish intensivligi chastotaga kuchli bog‘liq. Bu formuladan ko‘rinib turibdiki, binafsha va ko‘k nurlar ko‘proq sochiladi. Shuning uchun osmon ko‘k ko‘rinadi.

Aksincha, quyoshdan sochilib bizgacha kelgan yorug‘lik spektri qizil va sariq komponentalar bilan boyitilgan bo‘ladi, bu bilan quyosh rangini tushuntirish mumkin. Buni erta tongda yoki kechqurun yaqqol ko‘rish mumkin, chunki yorug‘lik nuri kunning bu vaqtida kunduzga nisbatan ko‘proq yo‘lni sochilmay o‘tadi.

Masalalar

1. Tizim holatidagi ixtiyoriy additiv funksiyasining nisbiy fluktuatsiyasi shu tizimdagi bir - biriga bog‘liq bo‘lmagan qismlari sonining kvadrat ildizdan chiqarilganligiga teskari proporsional ekanligi ko‘rsatilsin.

Ye ch i sh:

$F=F_1+F_2$ (F_i - bu F kattaligining i-nchi qismi qiymati)

$$\overline{(\Delta F)^2} = \overline{(\Delta F_1)^2} + 2 \cdot \overline{\Delta F_1 \cdot \Delta F_2} + \overline{(\Delta F_2)^2}$$

bir - biriga bog‘liq bo‘lmagan qismlari uchun, ma’lumki

$$\overline{\Delta F_1 \cdot \Delta F_2} = 0$$

Demak,

$$\overline{(\Delta F)^2} = \overline{(\Delta F_1)^2} + \overline{(\Delta F_2)^2}$$

Tizimning k - ta bir - biriga bog‘liq bo‘lmagan qismi uchun esa

$$\overline{(\Delta F)^2} = \sum_{i=1}^{k} \overline{(\Delta F_i)^2}$$

Agar F kattaligi tizim qismlaridagi fluktuatsiyasi qiymati bir - biriga juda yaqin bo‘lsa,

$\overline{(\Delta F)^2} \sim N\overline{(\Delta F_i)^2}$. O‘z navbatida, $\overline{F} = \sum_{i=1}^{k} \overline{F}_i$ tizim qismlari N - ga proporsionaldir. Shuning uchun nisbiy fluktuatsiya

$$\delta_F \approx \frac{1}{(\overline{F})}\sqrt{\overline{(\Delta F)^2}} \sim \frac{\sqrt{N}}{N} = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

Shunday qilib, $\delta_F \sim N^{-1/2}$. Bu makrotizmlar uchun additiv parametr nisbiy fluktuatsiya juda kichik bo‘ladi demakdir.

2. Muvozanatli elektromagnit nurlanishning $\Delta\omega$ chastota oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi energiya fluktuatsiyasi topilsin.

Ye ch i sh:

Chastotaning $\Delta\omega$ oralig‘i uchun elektromagnit maydon energiyasi (VII.7.4) formulasiga asosan

$$\Delta E = \frac{V\hbar\omega^3\Delta\omega}{\pi^2c^3\left(e^{\frac{\hbar\omega}{k_0T}}-1\right)}$$

(1.5) - formulasiga asosan energiya fluktuatsiyasining absolyut qiymati:

$$\delta_{\Delta E} = \sqrt{\overline{E^2} - \overline{E}^2} = \sqrt{\frac{V\hbar^2 \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_0T}\right)\cdot\omega^4\cdot\Delta\omega}{\pi^2c^3\left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_0T}\right)-1\right]^2}}$$

Bu ifodani:

$$\delta_{\Delta E} = \sqrt{\hbar\omega\Delta E + \frac{(\Delta E)^2\pi^2c^3}{V\omega^2\Delta\omega}}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Chastotaning katta qiymatlar sohasida ($\hbar\omega >> k_0T$) ildiz ostidagi birinchi hadni saqlash mumkin. Hosil bo‘lgan qiymatga korpuskulyar tushuncha berish mumkin. Aytaylik, Δn - chastotaning $\omega \sim \omega+\Delta\omega$ oralig‘iga to‘g‘ri keluvchi o‘rtacha fotonlar soni. U holda:

$$\Delta E = \hbar\omega\cdot\Delta n \qquad \text{va} \qquad \delta_{\Delta E} = \hbar\omega\delta_{\Delta n} = \hbar\omega\sqrt{\Delta n}$$

Chastotaning kichik sohasida ildiz ostidagi ikkinchi had asosiy rolni o‘ynaydi va undagi birinchi hadni hisobga olmaslik mumkin. U holda:

$$\delta_{\Delta E} \approx \sqrt{\frac{(\Delta E)^2 \pi^2 c^3}{V \omega^2 \Delta \omega}}$$

Bu ifoda yorug‘lik tabiati to‘lqin xususiyatiga tegishlidir.

3. Zarralar soni o‘zgaruvan tizim uchun katta kanonik taqsimotdan foydalanib, $\overline{(\Delta N)^2}$ kattaligini $\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}$ orqali ifodalang (μ - ximik potensial).

Ye ch i sh:

Ochiq tizim uchun Gibbs taqsimoti

$$W = \exp\left(\frac{\Omega + N\mu - \varepsilon_n N_n}{\theta}\right),$$

Bu yerda ε_n - bir zarraning n - sathga to‘g‘ri keluvchi energiyasi

Zarralarning o‘rtacha qiymati

$$\overline{N} = e^{\frac{\Omega}{\theta}} \sum_N N e^{\frac{N\mu}{\theta}} \sum_n e^{-\frac{\varepsilon_n N_n}{\theta}}$$

munosabati orqali topiladi. Ω - termodinamik potensialning μ-ximik potensialga bog‘liqligini hisobga olib so‘nggi ifodani μ bo‘yicha differentsiallaymiz:

$$\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{\theta} e^{\frac{\Omega}{\theta}} \sum_N \left(N^2 + N\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right) e^{\frac{\mu N}{\theta}} \sum_n e^{-\frac{\varepsilon_n N_n}{\theta}} =$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(\overline{N^2} + \overline{N}\frac{\partial \Omega}{\partial \mu}\right)$$

Katta kanonik taqsimotning

$$e^{\Omega/\theta} \sum_N e^{\frac{\mu N}{\theta}} \sum_n e^{-\frac{\varepsilon_n N_n}{\theta}} = 1$$

ko‘rinishdagi normallashtirish shartidan foydalanib, μ - bo‘yicha differentsiallash yo‘li bilan

$$\frac{d\Omega}{\partial \mu} = -\overline{N}$$

tengligini hosil qilamiz.

Shuning uchun

$$\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{\theta}\left(\overline{N^2} - \overline{N}^2\right) = \frac{1}{\theta}\overline{\Delta N^2}$$

Demak,

$$\overline{\Delta N^2} = \theta\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V}$$

4. Katta kanonik taqsimotga tegishli bo‘lgan $\overline{\Delta N^2} = \theta\left(\frac{\partial \overline{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V}$ formulasidan foydalanib, Fermi - Dirak taqsimotiga bo‘ysunuvchi zarralar uchun $\overline{(\Delta n_i)^2}$ topilsin.

Javob: $\overline{(\Delta n_i)^2} = \overline{n_i}\left(1 - \overline{n_i}\right)$ ($\overline{n}$ - energiyasi ε_i holatiga to‘g‘ri keluvchi o‘rtacha zarralar soni).

10-bob.MUVOZANATSIZ HOLATLAR VA FIZIK KINETIKA ASOSLARI

10.1-§. Termodinamik muvozanatsiz holatlar

Dastlabki holatga qaytmovchi jarayonlarning turli-tumanligi va murakkabligi ularni o‘rganishda ancha qiyinchiliklar tug‘diradi. Shunga qaramasdan, muvozanatsiz holatda bo‘lgan tizimlarni o‘rganish uchun bir qator usullar ishlab chiqilganki, bu usullar orqali nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan muhim natijalarga erishildi. Bu usullar statistik fizikada berilgan fikrlarni umumlashtirish va rivojlantirishga asoslangandir. Ko‘pchilik hollarda muvozanatsiz holatlar uchun taqsimot funksiyasi qabul qilinadi va u muvozanat holatda bo‘lgan tizim uchun qabul qilingan taqsimot funksiyasidan farq qiladi. Qabul qilingan taqsimot funksiyasi impuls proyeksiyalari bilan bir qatorda koordinatalarga, statsionar bo‘lmagan hollarda esa vaqtga ham bog‘liq bo‘ladi.

Muvozanatsiz holatda bo‘lgan tizimlar statistik nazariyasiga fizik kinetika deyiladi. Fizik kinetikaning birinchi vazifasi muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasini va uning vaqtga bog‘liq ravishda o‘zgarishini ifodalovchi tenglamani topishdan iboratdir. Bunday tenglamalarni xususiy hollardagina yechish imkoniyatiga ega bo‘lishimiz mumkin. Muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasini bilish, muvozanatli holatlardagi kabi, tizim termodinamik parametrlarini hisoblashga va ularning o‘zgarish qonuniyatlarini o‘rganishga imkoniyat yaratadi.

Endi ana shunday termodinamik muvozanat holatda bo‘lmagan tizimlarni tekshirishga kirishaylik. Ma‘lumki, tizim termodinamik muvozanat holatda bo‘lishi uchun T=*const* va μ_i=*const* (*i* - nchi komponentining ximiyaviy potensiali) ekanligi talab etiladi. Oddiylik uchun tizim bir jinsli muhitda joylashgan bo‘lsin hamda tashqi bosim p=*const* bo‘lib, tizimning temperaturasi va ximiyaviy potensiali nuqtadan nuqtaga o‘zgarsin. Bunday holatda tizimning yuqori temperaturali qismidan past temperaturali qismi tomon energiya oqimi va jism molekulalari oqimi esa tizimning katta μ-lik qismidan kichik μ-lik qismiga tomon hosil bo‘ladi.

$\vec{i}$ - zarralar zichligi va $\vec{q}$ - energiya zichligi oqimlari bo‘lsin. $\vec{i}(x,y,z,t)$ - ning moduli vaqt birligi ichida unga tik bo‘lgan birlik yuzadan o‘tuvchi zarralar sonini anglatadi. $\vec{i}$ va $\vec{q}$ -lar x,y,z koordinatalarga ega bo‘lgan nuqta va uning atrofidagi T va μ-qiymatlari orqali aniqlanadi. Agar μ va T-lar x,y,z koordinatali nuqta atrofida doimiy bo‘lsa, muhitning bunday qismida jism muvozanat holatda bo‘ladi, ya’ni tizimning shu qismi uchun $\vec{i}=0$, $\vec{q}=0$ bo‘ladi.

x,y,z - koordinatalar bilan ifodalanuvchi nuqtaga juda yaqin bo‘lgan joylarda μ va T- larning qiymati shu x,y,z nuqtadagi qiymatlarining gradiyentlari orqali aniqlanadi, ya’ni:

$$T(x',y',z')=T(x,y,z)+(x'-x)\frac{\partial T}{\partial x}+(y'-y)\frac{\partial T}{\partial y}+(z-z')\frac{\partial T}{\partial z}= \\ =T(r)+\overline{(r'-r)}\nabla T; \qquad (1.1)$$

$$\mu(r')=\mu(r)+\overline{(r'-r)}\nabla\mu(r) \qquad (1.1')$$

U holda i va $\vec{q}$ larni ∇T va $\nabla\mu$ - larning fuksiyasi deb hisoblash mumkin. Agar ∇T va $\nabla\mu$ -lar kichik bo‘lsa, $\vec{i}$ va $\vec{q}$ -larni ular bo‘yicha qatorga yoyish yo‘li bilan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned}\vec{i} &= -\alpha\nabla\mu-\beta\nabla T\\ \vec{q} &= -\gamma\nabla T-\delta\nabla\mu+\mu\vec{i}\end{aligned}\right\} \qquad (1.2)$$

$\vec{q}$ - energiya oqimining zichligi formulasida $\mu\vec{i}$ -hadini alohida yozdik, chunki, ma’lumki, har bir zarra $s=const$ ligida o‘zi bilan μ ga teng bo‘lgan energiya olib keladi. (1.2) dagi $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ - larga kinetik koeffitsiyentlar deyiladi. Ular muhit va jism xususiyatlariga bog‘liq, bundan tashqari T-ga, p-bosimga, jism konsentratsiyasiga va shu kabilarga bog‘liq bo‘ladi. Kinetik koeffitsiyentlar, umumiy holda, tenzor kattaliklardir va ular Onsager isbotlagan simmetriya prinsipiga bo‘ysunadi. Unga asosan $\frac{\delta}{T}=\beta$ ekanligini aniqlash mumkin. μ - ni T – temperatura va n - eritilgan jism konsentratsiyasi orqali ifodalasak,

$$\nabla\mu = \left[\frac{\partial\mu}{\partial T}\right]_n \nabla T + \left[\frac{\partial\mu}{\partial n}\right]_T \nabla n \qquad (*)$$

(1.2) - formulasidagi zarralar zichligi oqimining boshqacha ifodasini hosil qilish mumkin:

$$\vec{i} = -D\left\{\nabla n + \frac{k_T}{T}\nabla T\right\} \qquad (1.3)$$

Bu yerda $D = \alpha\left[\frac{\partial\mu}{\partial n}\right]_T$ - diffuziya koeffitsenti;

k_T-termodiffuziya koffitsenti;

$$k_T \frac{D}{T} = \alpha\left[\frac{\partial\mu}{\partial T}\right]_n + \beta$$

(1.3) - ning birinchi hadi diffuziya oqimini, ikkinchisi esa termodiffuziya oqimini tashkil etadi. Konsentratsiya doimiy ($\nabla n = 0$) bo‘lib, temperatura gradiyenti mavjudligida zarralar jismning temperaturasi yuqori qismidan temperaturasi past qismiga o‘tishi termodiffuziya oqimini anglatadi, chunki zarralarning issiqlik tezligi, shuningdek, issiqlik oqimi jismning temperaturasi yuqori qismida uning temperaturasi past qismiga nisbatan katta bo‘ladi. (1.2) - dan energiya zichligining oqimi

$$\vec{q} = \left[\mu + \frac{\delta}{\alpha}\right]\vec{i} - \left[\gamma - \frac{\delta^2}{\alpha T}\right]\nabla T \qquad (1.4)$$

$\nabla\mu$ ni (1.2) ning birinchi tenglamasidan topib,

$$\nabla\mu = -\frac{\vec{i}}{\alpha} - \frac{\beta}{\alpha}\nabla T = -\frac{\vec{i}}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha\cdot T}\nabla T \ , \qquad (**)$$

(1.2) – ning ikkinchisiga qo‘yish yo‘li bilan (1.4) hosil qilindi.

$$\gamma - \frac{\delta^2}{\alpha T} = \gamma - \frac{\beta^2 T}{\alpha} = \chi$$ - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsenti.

Zarralar zichligining oqimi $\vec{i} = 0$ bo‘lsa, energiya zichligining oqimi $\vec{q} = -\chi \nabla T$ bo‘ladi.

Agar $\nabla \mu$ - ni ifodalovchi (*) va (**) formulalari tengligini, hamda undagi $\vec{i}$ -ning ifodasini (1.3) orqali yozsak, $\vec{q}$ - energiya ziehligi oqimini boshqacha ko‘rinishda ham yozish mumkin.

$$\nabla \mu = \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)\nabla T + \left(\frac{\partial \mu}{\partial n}\right)\nabla n = -\frac{\vec{i}}{\alpha} - \frac{\delta}{\alpha \cdot T}\nabla T =$$

$$= \frac{D}{\alpha}\left(\nabla n + \frac{k_T}{T}\right)\nabla T - \frac{\delta}{\alpha \cdot T}\nabla T$$

Bundagi ∇n - ifodali hadlar qisqaradi va:

$$\frac{\partial \mu}{\partial T} = \frac{D}{\alpha} \cdot \frac{k_T}{T} - \frac{\delta}{\alpha \cdot T}; \quad \frac{\delta}{\alpha} = -T\frac{\partial \mu}{\partial T} + \frac{D}{\alpha} \cdot k_T$$

bo‘ladi. Natijada energiya zichligining oqimi

$$\vec{q} = \left[\mu - T\frac{\partial \mu}{\partial T} + \frac{k_T D}{\alpha}\right]\vec{i} - \chi \nabla T \qquad (1.5)$$

ekanligi hosil bo‘ladi.

Agar temperatura va konsentratsiya taqsimoti ma’lum bo‘lsa, (1.3) va (1.5) - formulalari, mos ravishda, zarralar va energiya zichliklarining oqimini aniqlashga imkon beradi.

Amalda ko‘pincha T va n - lar aniqlanmagan bo‘ladi. Ko‘pchilik hollarda biror-bir boshlang‘ich $t=t_0$ vaqt uchun T va n lar berilgan bo‘lib, $n(t)$ va T(t)-larning o‘zini ham aniqlashga to‘g‘ri keladi. Bu holda (1.3) va (1.5) tenglamalarda $\vec{i}, \vec{q}, n, T$ -lar noma’lum sifatida ishtirok etadi. Tenglamalar yechimga ega bo‘lishi uchun ularni yana ikkita qo‘shimcha tenglama bilan to‘ldirish lozim. Bulardan biri sifatida uzluksizlik tenglamasini olish mumkin:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + div\vec{i} = 0 \qquad (1.6)$$

Ikkinchi tenglama sifatida hajm birligi uchun termodinamika ikkinchi qonunini oladilar. Agar δQ birlik hajmning dt vaqtida qabul qiladigan issiqlik miqdori bo‘lsa, shu hajmga to‘g‘ri keluvchi entropiyaning o‘zgarishi

$$dS = \frac{\delta Q}{T} \quad \text{va} \quad \frac{\partial S}{\partial t} = \frac{1}{T}\frac{\partial Q}{\partial t}.$$

Energiya zichligining oqimi $\vec{q}$ issiqlik miqdori $(\vec{q} - \vec{i}\,\mu)$ va zarralarning o‘zi tashuvchi energiya $\vec{i}\,\mu$ - lar yigindisidan tashkil topgan. Shuning uchun vaqt birligi ichida birlik hajm qabul qiladigan issiqlik miqdori

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\,div(\vec{q} - \vec{i}\,\mu)$$

Buni yuqoridagiga qo‘yib, kerakli tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{T}div(\vec{q} - \vec{i}\,\mu) \qquad (1.7)$$

Bunda yangi ishtirok etuvchi S va μ lar n va T larga bog‘liq bo‘lgan oldindan ma’lum kattaliklar deb hisoblanadi.

Shunday qilib, (1.3), (1.5), (1.6), (1.7) - tenglamalari $\vec{i}, \vec{q}, n, T$ – larni vaqt va koordinata funksiyalari sifatida aniqlashga imkon beradi. Bunda D, k_T, χ - kinetik koeffitsentlarning n va T - larga kuchsiz bog‘liqligini ayrim hollarda hisobga olmaslik mumkin.

10.2-§. Cheksiz muhit uchun diffuziya, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalari va ularning yechimlari

Zarralari konsentratsiyasi doimiy bo‘lgan, ya’ni $\nabla n = 0$ bo‘lgan tizimda temperatura bir xil taqsimlanmagan xususiy holni tekshiraylik.

Bu holda (1.3) va (1.6) - formulalari bo‘lmaydi va (1.5) - hamda (1.7)-formulalari quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\vec{q} = -\chi \nabla T; \qquad \frac{\partial S}{\partial t} = -\frac{1}{T} div \vec{q} \tag{2.1}$$

Tekshiriladigan muhitda bosim doimiy saqlangani uchun entropiya faqat temperaturaga bog‘liq bo‘ladi va

$$\frac{\partial S}{\partial t} = \frac{\partial S}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{C_p}{T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.2}$$

Ushbu munosabatni (2.1) - ga tadbiq etamiz va (2.1) -dagi ikkala tenglamadan $\vec{q}$ - issiqlik miqdorining oqimisiz quyidagini hosil qilamiz:

$$C_p \frac{\partial T}{\partial t} = div(\chi \nabla T) \tag{2.3}$$

Odatda bundan ham soddaroq hol, ya’ni χ va C_p - lar temperaturaga bog‘liq bo‘lmagan xususiy hol tekshiriladi. U holda χ -ni *div* belgisi ostidan chiqarish mumkin va (2.3) o‘rniga bundan ham oddiyroq tenglamani, ya’ni - Fur’e issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T \quad , \tag{2.4}$$

bu yerda $k = \frac{\chi}{C_p}$ - temperatura o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti.

Ushbu issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi ikkinchi tartibli xususiy hosilali differentsial tenglama bo‘lib, muhitda issiqlikning tarqalish jarayonini tushunishga imkon yaratadi.

Ushbu va shu kabi bir qator differentsial tenglamalar matematik fizika tenglamalari fanida batafsil turlicha xususiy hollar uchun yechilgan va ular tahlil etilgan. Quyida biz oddiy hol uchun matematik fizika tenglamalari fani natijalaridan foydalanamiz.

Xuddi shuningdek, ikkinchi xususiy holni ko‘ramiz. T=*const* bo‘lsin. Bu holda $\vec{i}$ va n - kattaliklarini topish uchun (1.3) va (1.6) - tenglamalari etarlidir.

$$\vec{i} = -D \nabla n; \qquad \frac{\partial n}{\partial t} + div \vec{i} = 0 \tag{2.5}$$

Oddiylik uchun D - diffuziya koeffitsiyentini n - konsentratsiyaga bog‘liq emas deb olamiz. U holda (2.5) - ko‘rinishidagi ikkala tenglamadan $\bar{i}$ - ni chiqarib yuborish yo‘li bilan quyidagi ko‘rinishdagi diffuziya tenglamasini hosil qilamiz:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = D\Delta n \tag{2.6}$$

Bu tenglama shaklan (2.4) ko‘rinishdagi issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasiga aynan mos keladi.

Ushbu tenglamalardan birining, masalan (2.4) - ning yechimini topaylik. Oddiylik uchun chegara shartlarini bilish talab etilmaydigan cheksiz muhitga tegishli bo‘lgan $T(x,y,z,t)$ funksiyasini topamiz. $t=t_0$ - boshlang‘ich vaqt uchun esa butun muhit bo‘ylab $T(x,y,z,t_0)$ - temperatura taqsimoti berilgan bo‘lsin. Dastlab (2.4) - tenglamasining xususiy yechimini topish bilan shug‘ullanaylik. Buning uchun T - temperatura faqat t - vaqtga va koordinata boshidan x,y,z - koordinatalar bilan aniqlangan r - masofaga bog‘liq deb hisoblaymiz. Qabul qilingan hol uchun (2.4) - tenglamasining xususiy yechimi

$$T(r,t) = \frac{A}{t^{3/2}} \exp\left[-\frac{r^2}{4kt}\right] \tag{2.7}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu ifodani bevosita tenglamaga tadbiq etish yo‘li bilan xususiy yechim ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin. Shuning bilan birga $A=const$ - ni $(1/4\pi k)^{3/2}$ ko‘rinishda qabul qilish qulaydir. Ushbu yechimning xususiyatlarini ko‘rib chiqaylik. $r\to\infty$ bo‘lganda, har qanday t uchun ham $T=0$ bo‘ladi. $r=0$ bo‘lganda esa, T o‘zining maksimal qiymatiga ega bo‘ladi. (2.7) - funksiyasi boshlang‘ich vaqtda $r=0$ nuqtaga cheksiz yuqori temperatura manbai kiritilgan hol uchun temperatura o‘zgarishini anglatadi.

Endi $t=t_0$ vaqtda issiqlik manbai $x=\xi$, $y=\eta$, $z=\zeta$ bo‘lgan nuqtaga kiritilgan bo‘lsin. Muhitning boshlang‘ich temperaturasini T_0 edi deb qabul qilaylik. Bu hol uchun ham (2.7) - funksiyasidan o‘zgaruvchilarni almashtirish yo‘li bilan tenglama yechimini topish mumkin. Buning sababi shundan iboratki, (2.4) - tenglamasida koordinatalar, vaqt va temperatura bevosita ishtirok etmaydi, balki ularning faqat

differentsiallari ishtirok etadi. Shuning uchun t,x,y,z o‘zgaruvchilariga, mos ravishda $-t_0,-\xi,-\eta,-\zeta$ doimiyliklarini qo‘shganimiz bilan ushbu tenglamada hech qanday o‘zgarish bo‘lmaydi va uning yechimi

$$T = T_0 + \frac{1}{[4\pi k(t-t_0)]^{3/2}} \cdot \exp \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4k(t-t_0)} \qquad (2.8)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Endi (2.4)-tenglamasining umumiy yechimini topaylik. Buning uchun (2.8)- xususiy yechimni ξ,η,ζ - larga bog‘liq bo‘lgan ixtiyoriy funksiyaga ko‘paytiramiz va natijani ξ,η,ζ - larni cheksiz chegaralar bo‘yicha integrallaymiz:

$$T = T_0 + \iiint \frac{f(\xi,\eta,\zeta)}{[4\pi k(t-t_0)]^{3/2}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left(\frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{4k(t-t_0)}\right) d\xi d\eta d\zeta \qquad (2.9)$$

Ushbu hosil qilingan funksiya ham (2.4)- tenglamaning yechimi bo‘ladi. Chunki tekshirilayotgan tenglama chiziqli va doimiyga ko‘paytirilgan yechimlarining yig‘indisi ham uning yechimidir. Bunga (2.9) - ni (2.4) - ga tadbiq etish yo‘li bilan ishonch hosil qilish mumkin. (2.9) - ning integral osti ifodasini t va x,y,z - lar bo‘yicha differentsiallash mumkin, chunki x,y,z, t - lar ξ,η,ζ - larga bog‘liq emas.

$f(\xi\eta\zeta)$ - funksiyasining fizik ma’nosini aniqlaylik. Buning uchun t - ni t_0 - ga intiltirish bilan bir qatorda integral ostida quyidagicha o‘zgaruvchilar almashtirishi kiritamiz:

$$\begin{aligned} \xi &= x + u\sqrt{4k(t-t_0)}; \\ \eta &= y + v\sqrt{4k(t-t_0)}; \\ \zeta &= z + w\sqrt{4k(t-t_0)}. \end{aligned} \qquad (2.10)$$

U holda

$$T = T_0 + \frac{1}{\pi^{3/2}} \iiint f\left(x + u\sqrt{4k(t-t_0)},\right.$$

$$y+v\sqrt{4k(t-t_0)},\quad z+w\sqrt{4k(t-t_0)}\Big)e^{-u^2-v^2-w^2}dudvdw \qquad (2.11)$$

$t\to t_0$ bo‘lganda, (2.11) - dagi f funksiyasi $t=t_0$ nuqtada integral ostidan chiqariladi, qolgan Puasson integrali esa $\pi^{3/2}$ - ni beradi. Shunday qilib,

$$T=T_0+f(x,y,z)$$

va

$$f(x,y,z)=T(x,y,z,t_0)-T_0$$

bo‘ladi. Natijada (2.9) - ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$T(x,y,z,t)=\iiint \frac{T(\xi\eta\zeta,t_0)}{[4\pi k(t-t_0)]^{3/2}}\cdot$$

$$\cdot\exp\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}{4k(t-t_0)}d\xi d\eta d\zeta \qquad (2.12)$$

(2.12) – formulasi, berilgan boshlang‘ich $T(x,y,z,t_0)$ - temperatura taqsimotiga asoslangan holda, ixtiyoriy t - vaqti uchun temperatura taqsimotini aniqlashga imkon yaratadi.

Xuddi shuningdek (2.6) - diffuziya tenglamasi yechimini aniqlash mumkin. Buning uchun T - ni n - ga va k - ni D - ga almashtirish lozim xolos.

10.3-§. Boltsmanning kinetik tenglamasi

Termodinamika kursida muvozanatsiz holatlar haqida gap yuritilib, termodinamik kuch va termodinamik oqim tushunchalari hamda ular orasidagi proporsionallik koeffitsenti bo‘lmish kinetik koeffitsentlar $\left(J_i=\sum_k L_{ik}x_k\right)$ va ularning ayrim xususiyatlari, jumladan, ularning simmetriya prinsipi haqida gap yuritiladi.

Ikkinchi tomondan, ma’lumki, tekshiriluvchi tizim uchun taqsimot funksiyasi ma’lum bo‘lsa, u orqali shu tizimga tegishli bo‘lgan makroparametrlarning o‘rtacha qiymatini hisoblashimiz mumkin. Xuddi shuningdek, agar muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasi ma’lum

bo‘lsa, u orqali termodinamik oqimga tegishli bo‘lgan barcha kinetik koeffitsentlarni ham hisoblashimiz mumkin. Lekin muvozanatsiz holatlar taqsimot funksiyasini topish ancha murakkab masaladir. Buning uchun muvozanatsiz holatlarni tekshirishda ikkita uslub qo‘llaniladi. Bular Boltsmanning kinetik tenglamalar uslubi (siyrak gazlar uchun), Smoluxovskiy va Fokker-Plank tenglamalari (zichligi katta bo‘lgan gazlar uchun).

Kinetik hodisalarni o‘rganishda dastlabki birinchi chegara holni, siyrak gaz holini ko‘raylik. Bir atomli gaz muvozanatsiz holatda bo‘lsin. Olti o‘lchamli μ-muhitni qabul qilamiz, uning koordinata o‘qlari vazifasini x,y,z va tezlikning uchta proyeksiyasi vazifasini v_x, v_y, v_z bajarsin.

N-ta molekuladan tashkil topgan gaz holati μ - muhitida o‘zining konfiguratsiyali trayektoriyalari bo‘yicha siljuvchi N - ta konfiguratsiyali nuqta orqali tavsiflanadi. t-vaqtda koordinatalari $x \sim x+dx,\quad y \sim y+dy,\quad z \sim z+dz$ oraliqda va tezliklari proyeksiyasi $v_x \sim v_x + dv_x,\ v_y \sim v_y + dv_y,\quad v_z \sim v_z + dv_z$ oraliqda bo‘lgan molekulalar soni

$$f(x,y,z,v_x,v_y,v_z,t)dxdydzdv_xdv_ydv_z = f \cdot d\mu \qquad (3.1)$$

Bu yerda: f - muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasi (μ-muhitda konfiguratsiyali nuqtalarning bo‘lish ehtimoliyati zichligi);

$d\mu$ - olti o‘lchamli muhitning elementar hajmi.

Ma’lumki, muvozanat holat uchun Maksvell-Boltsman taqsimoti

$$f_0(\vec{r},\vec{v}) = Ce^{-\frac{U(r)}{k_0T}} \cdot e^{-\frac{mv^2}{k_0T}} = n\left[\frac{m}{2\pi k_0 T}\right]^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{k_0T}} \qquad (3.2)$$

ko‘rinishga ega (C-normallashtirish doimiysi). So‘nggi tenglikni yozishda V-hajmli idish chegarasida $U(\vec{r})$ - potensial energiya qiymati noldan cheksizga sakrab o‘zgaradi deb hisoblanadi. $n=N/V$ - gaz konsentratsiyasi.

Muvozanatsiz holat taqsimot fuksiyasi $f(\vec{r},\vec{v},t)$ muvozanatli holat taqsimot funksiyasi $f_0(\vec{r},\vec{v})$ ni umumlashtirish yo‘li bilan hosil qilinadi.

Shuni e'tiborga olmoq lozimki, muvozanatsiz holatdagi jismga tashqi kuch ta'sir etmasa va $t\to\infty$ bo'lsa, $f(r,v,t)=f_0(\vec{r},\vec{v})$ bo'ladi. $f(\vec{r},\vec{v},t)$ - muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasini qanoatlantiruvchi differentsial tenglama tuzamiz. Buning uchun berilgan nuqtada dt - fizik cheksiz kichik vaqt ichida f - ning o'zgarishini hisoblaymiz, ya'ni $\frac{\partial f}{\partial t}$ - ni hisoblaymiz. Fizik cheksiz vaqt deganimizda, bu vaqt oralig'ida gaz molekulasi boshqa molekulalar bilan bir necha bor to'qnashishga ulguradi va taqsimot funksiyasi kam o'zgaradi deb tushuniladi. dt - vaqt ichida $d\mu$ - elementar hajmdagi barcha molekulalar undan chiqib ketadi buning o'rniga $d\mu$ - hajmga t vaqtda koordinatalari $x-v_x dt,\ y-v_y dt,\ z-v_z dt$ va tezlik proyeksiyalari $v_x-\dot{v}_x dt,$ $v_y-\dot{v}_y dt,\ v_z-\dot{v}_z dt$ bo'lgan molekulalar keladi. Shunday qilib, t vaqtdagi $f(\vec{r},\vec{v},t)$ o'rniga $d\mu$ - hajmdagi $t+dt$ vaqt uchun taqsimot funksiyasi $f(\vec{r}-\vec{v}dt,\vec{v}-\dot{\vec{v}}dt,t)$ bo'ladi. Agar dt vaqt ichida molekulalarning o'zaro to'qnashuvini hisobga olmasak, taqsimot funksiyasining o'zgarishi, quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{d}{dt}\left[f(\vec{r}-\vec{v}dt,\vec{v}-\dot{\vec{v}}dt,t)-f(\vec{r},\vec{v},t)\right]=-\vec{v}\nabla_{\vec{r}}f-\dot{\vec{v}}\nabla_{\vec{v}}f-\ldots \qquad (3.3)$$

Bu yerda

$$f\left(x-v_x dt,\ y-v_y dt,\ldots\right)=f\left(x,\ y\ldots\right)-\frac{\partial f}{\partial x}v_x dt-\frac{\partial f}{\partial y}v_y dt$$

deb qabul qildik; $\nabla_{\vec{r}}f$ va $\nabla_{\vec{v}}f$ - lar, mos ravishda, taqsimot fuksiyasining oddiy va tezliklar muhiti uchun gradiyentlari. Bu tenglamani yechish uchun $\dot{\vec{v}}_x,\ \dot{\vec{v}}_y,\ \dot{\vec{v}}_z$ tezlanish komponentalarini bilish lozim. Agar tizimdagi barcha molekulalarga bir xil $\vec{F}$ - kuch ta'sir etsa, u holda

$$\dot{\vec{v}}=\frac{\vec{F}}{m} \qquad (3.4)$$

Biroq, molekulaga tashqi maydon ta'siri bilan bir qatorda qo'shni molekulalarning kuchi ham ta'sir etadi, ya'ni zarralarning o'zaro

to‘qnashuvini ham hisobga olish lozim. Bu to‘qnashuvlar juda qisqa vaqt ichida molekula tezligining tubdan o‘zgarishiga olib keladi. To‘qnashuv natijasida $d\mu$ - hajmga dt vaqt ichida keluvchi molekulalar soni $b \cdot d\mu dt$ va undan to‘qnashuv natijasida chiqib ketuvchi molekulalar soni $a \cdot d\mu dt$ bo‘lsin. U holda (3.3) tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f + \frac{1}{m} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} f - (b - a) = 0 \qquad (3.5)$$

Bunga Boltsmanning kinetik tenglamasi deyiladi. Agar taqsimot funksiyasi bevosita vaqtga bog‘liq bo‘lmasa, ya’ni $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ bo‘lsa, u orqali hisoblangan parametrlarning o‘rtacha qiymatlari ham vaqtga bog‘liq bo‘lmaydi. Gazning bunday holatiga statsionar holat deyiladi. Gazning muvozanatsiz, lekin statsionar holatiga misol qilib, vaqtga bog‘liq bo‘lmagan temperatura gradiyenti mavjudligida issiqlik miqdorining stantsionar oqimini aytish mumkin.

O‘z-o‘zidan ayonki, (b-a) taqsimot fuksiyasiga bog‘liqdir. Lekin tizim muvozanat holatda bo‘lsa, u molekulalarning o‘zaro to‘qnashuvi natijasida shu holatni o‘zgartirmaydi, ya’ni $f=f_0$ bo‘lsa, $b=a$ bo‘ladi.

Faraz qilaylik, (3.5) tenglamasi yechilgan bo‘lsin. U holda molekulalar zichligining oqimi va ularning energiya oqimlarini hisoblash mumkin bo‘ladi, ya’ni:

$$\vec{i} = \int \vec{v} f dv_x dv_y dv_z$$

$$\vec{q} = \int \frac{mv^2}{2} \vec{v} \; f dv_x dv_y dv_z \qquad (3.6)$$

Muvozanatli holatdan muvozanatsiz holat kam farq qiladi deb (3.5) tenglamaning yechimini

$$f(\vec{r},\vec{v}) = f_0(\vec{r},\vec{v}) + f_1(\vec{r},\vec{v}) \qquad (3.7)$$

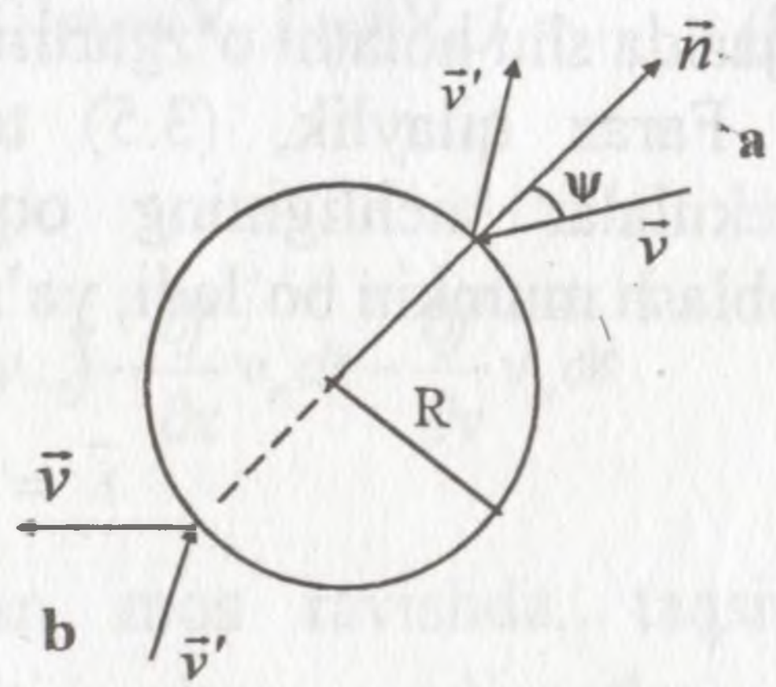
ko‘rinishda izlash mumkin. Shartga ko‘ra, $f_1 << f_0$. Faqat juft ta’sirni hisobga olamiz. Fizik jihatdan (3.7) zarralarga ta’sir etuvchi barcha kuchlar kichik va konsentratsiya, temperatura gradiyentlari ham kichik demakdir. Tezliklar muhitida f_1 sferik simmetriyaga ega bo‘lmaydi. Natijada, stantsionar muvozanatsiz hol uchun, agar kichik kattalik f_1 - ning gradiyenti $\nabla_{\vec{v}} f_1$ ni kichik $\vec{F}$ - kuchga ta’sirini hisobga olmasak, (3.5) - kinetik tenglamani quyidagi ko‘rinishga keltirish mumkin:

$$\vec{v}\nabla_{\vec{r}} f_0 + \frac{1}{m}\vec{F}\nabla_{\vec{v}} f_0 - (b-a) = 0 \qquad (3.8)$$

10.4-§. Zarralarning elastik to‘qnashuvi uchun erkin chopish uzunligi

Yuqoridagi (3.5) - Boltsmanning kinetik tenglamasida ikki xil sabab natijasida hosil bo‘lgan hadlar ishtirok etadi. Bu tenglamadagi hadlarning bir qismi tashqi maydon ta’siri va temperatura gradiyenti natijasida hosil bo‘lgan bo‘lsa, ikkinchi qismi esa, ya’ni tenglamadagi (b-a) hadi zarralarning o‘zaro to‘qnashuvini hisobga oluvchi haddir.

Endi kinetik tenglamada ishtirok etuvchi (b-a) - o‘zaro to‘qnashuv hadini hisoblaymiz. Umumiy holda (b-a) - ni hisoblash juda qiyin va u f-muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasi ishtirok etgan integralli ifodaga keladi. Shuning uchun (b-a) - ni oddiy hol uchun hisoblaymiz. Faraz qilaylik, gaz molekulalari o‘zaro ta’sir qilmasin va ular o‘zlariga nisbatan juda og‘ir zarralar bilangina o‘zaro elastik ta’sir qilsin. Bunday hol metall va yarim o‘tkazgichdagi ozod elektronlar bilan uning atomlari (ionlari) ta’siri vaqtida bo‘lishi mumkin. Bu hol birinchi bor Lorents tomonidan tekshirilgan.



16- chizma. Elektron tezligining radiusi R bo‘lgan atom bilan to‘qnashuvi natijasida o‘zgarishi; a) dμ - elementar hajmdan chiqish vaqtida; b) dμ - ga kirish vaqtida

Aytaylik, atom radiusi R bo‘lsin (elektron o‘lchamini hisobga olmaymiz). U holda atom yuzasining $R^2 d\omega$ - qismiga ($d\omega$- jismoniy burchak) $\vec{v}$ - tezlikka ega bo‘lgan elektronlarning kelib urilishlari soni $R^2 d\omega \cos\psi(v)$ bo‘ladi (*16-chizma*). To‘qnashuvigacha $\vec{n}$ - normalga qarshi va to‘qnashuvidan so‘ng normal bo‘yicha yo‘nalgan elektron tezligi $\vec{v}$ to‘qnashuv natijasida o‘zining $v\cos\psi$ normal tashkil etuvchisi ishorasini o‘zgartiradi.

Shunday qilib,

$$\vec{v}' = \vec{v} + 2(v\cos\psi)\cdot\vec{n} \qquad (4.1)$$

Chizmada elektron va atomning to‘qnashuvi ko‘rsatilgan. Chizmaning o‘ng tomonida to‘qnashuv natijasida $d\mu$ - hajmdan elektronlar chiqib ketadi va ular (3.8) - tenglamadagi a - ga o‘z hissasini qo‘shadi. Chap tomonda ko‘rsatilgan to‘qnashuv esa elektronning to‘qnashuv natijasida $d\mu$ - ga kelishini ko‘rsatadi va o‘sha tenglamadagi b - ga tegishli bo‘ladi.

Agar atomlar konsentratsiyasini N deb olsak $\vec{v}$ tezlikka ega bo‘lgan elektronlarning taqsimot funksiyasi $f(\vec{r},\vec{v})$ bo‘lganligi uchun:

$$a = N\cdot R^2 \int |\vec{v}|\cdot f(\vec{r},\vec{v})\cos\psi\, d\omega \qquad (4.2)$$

bo‘ladi. Xuddi shuningdek, v' tezlikka ega bo‘lgan elektronlarning taqsimot funksiyasi $f(\vec{r},\vec{v}')$ bo‘lsa,

$$b = N\cdot R^2 \int |\vec{v}'|\cdot f(\vec{r},\vec{v}')\cos\psi\, d\omega \qquad (4.3)$$

Lorens

$$f_1(\vec{r},\vec{v}) = \vec{v}\cdot\vec{\chi}\left(|\vec{v}|\right) \qquad (4.4)$$

deb olishni taklif etadi.

(3.7) va (4.4)-larni (4.3) va (4.2)-larga qo‘yib, (4.1)-ni va $|\vec{v}| = |\vec{v}'|$ ligini va demak, $f_0(v) = f_0(v')$ bo‘lishini hisobga olgan holda quyidagini hosil qilamiz:

$$b - a = NR^2 \int |\vec{v}|\left[\vec{v}'\vec{\chi} - \vec{v}\chi\right]\cos\psi\, d\omega =$$

$$= 2NR^2 \int v^2 \cdot \vec{n} \cdot \vec{\chi}(v) \cos^2 \psi \, d\omega \qquad (4.5)$$

Endi $\vec{n}, \vec{\chi}$ - vektorlari orasidagi $\vec{n} \hat{} \vec{\chi}$ - burchakni $\vec{n} \hat{} \vec{v}$ va $\vec{\chi} \hat{} \vec{v}$ burchaklar, hamda $\vec{n}\vec{v}$ va $\vec{\chi}\vec{v}$ tekisliklari orasidagi φ burchak orqali ifodalaymiz:

$$\cos \hat{\vec{n}\vec{\chi}} = -\cos\psi \cdot \cos \vec{\chi} \hat{} \vec{v} + \sin\psi \sin \vec{\chi} \hat{} \vec{v} \cos\varphi;$$

$(\vec{n} \hat{} \vec{v} = \pi - \psi)$

Bundan tashqari, $d\omega = \sin\psi \, d\psi \, d\varphi$ deb olsak, (4.5) ifodasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$b - a = 2NR^2 v^2 |\vec{\chi}| \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \left[-\cos\psi \cdot \cos \vec{\chi} \hat{} \vec{v} + \right.$$

$$\left. + \sin\psi \sin \vec{\chi} \hat{} \vec{v} \cos\varphi \right] \cos^2 \psi \sin\psi \, d\psi \, d\varphi =$$

$$= -4\pi NR^2 v^2 |\vec{\chi}| \cdot \cos \vec{\chi} \hat{} \vec{v} \int_0^{\pi/2} \cos^3 \psi \cdot \sin\psi \, d\psi =$$

$$= -\pi NR^2 v (\vec{v} \cdot \vec{\chi}) = -\frac{v}{l} (\vec{v} \cdot \vec{\chi}) \qquad (4.6)$$

chunki $\int_0^{2\pi} \cos\varphi \, d\varphi = 0$.

Bu yerda $l = (\pi NR^2)^{-1}$ elektronlarning atomlarda sochilishi uchun erkin chopish uzunligi.

Demak, qabul qilingan yaqinlashuvda (3.8) – ko‘rinishdagi kinetik tenglama

$$\vec{v} \cdot \nabla_{\vec{r}} f_0 + \frac{1}{m} \vec{F} \cdot \nabla_{\vec{v}} f_0 = -\frac{v}{l} \vec{v} \cdot \vec{\chi} \qquad (4.7)$$

bo‘ladi. Bu tenglamani hosil qilishda o‘zaro to‘qnashuv elastik va sochilish izotrop deb hisoblandi. Shunga qaramasdan ushbu tenglama elektronning kvant xarakterini hisobga olgan holda uning atomda sochilishi uchun ham to‘g‘ridir. Umumiy holda, l - erkin chopish

uzunligi atomning kuch maydoni orqali aniqlanadi va temperaturaga, elektronning harakat tezligiga bog‘liq bo‘ladi.

Shunday qilib, bu so‘nggi tenglamani yechish yo‘li bilan muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasiga bo‘lgan kichkina qo‘shimcha $f_1(\vec{r},\vec{v}) = (\vec{v}\cdot\vec{\chi})$ - ni topishimiz mumkin va u orqali (3.6)-dagi oqimlarni hisoblashimiz mumkin (bu masala bilan quyida shug‘ullanamiz).

10.5-§ Diffuziya koeffitsiyenti, elektr o‘tkazuvchanlik va issiqlik o‘tkazuvchanlikni Boltsman kinetik tenglamasiga asosan hisoblash

Shunday qilib, u yoki bu turdagi oqimni hisoblash uchun

$$\vec{v}\nabla_{\vec{r}} f_0 + \frac{1}{m}\vec{F}\cdot\nabla_{\vec{v}} f_0 = -\frac{v}{l}\cdot\vec{v}\vec{\chi} \qquad (5.1)$$

ko‘rinishdagi kinetik tenglamadan foydalanmoq lozim. Muvozanat holat taqsimot funksiyasini

$$f_0 = n(\vec{r})\cdot\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} \qquad (5.2)$$

deb olamiz. Bu yerda n - konsentratsiya, $T = T(\vec{r})$.

(5.2) - ni (5.1) ko‘rinishidagi kinetik tenglamaning chap tomondagi hadlariga tadbiq etamiz. U holda:

$$\nabla_{\vec{r}} f_0 = e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}}\left\{\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2}\nabla n + \frac{mv^2}{2k_0 T^2} n\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2}\nabla T - \left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2}\frac{3n}{2T^{5/2}}\nabla T\right\} =$$

$$= f_0\left\{\frac{\nabla n}{n} + \frac{mv^2}{2k_0 T^2}\nabla T - \frac{3}{2T}\nabla T\right\} \qquad (5.3\ a)$$

$$\nabla_{\vec{v}} f_0 = -\frac{m\vec{v}}{k_0 T} f_0 \qquad (5.3\ b)$$

(5.3a) va (5.3v)-ni (5.1)-ga tadbiq etamiz:

$$\vec{v}\left\{\frac{\nabla n}{n}+\left(\frac{mv^2}{2k_0T^2}-\frac{3}{2T}\right)\nabla T+\frac{\vec{F}}{k_0T}\right\}f_0=-\vec{v}\vec{\chi}\frac{v}{l};$$

bundan

$$\vec{\chi}=-\frac{l}{v}\left\{\frac{\nabla n}{n}+\left(\frac{mv^2}{2k_0T^2}-\frac{3}{2T}\right)\nabla T-\frac{\vec{F}}{k_0T}\right\}f_0 \qquad (5.4)$$

Shunday qilib, kinetik tenglama biz yuqorida qabul qilgan oddiy hol uchun yechildi va muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasi, aniqrog‘i, muvozanatli holat taqsimot funksiyasiga kichik qo‘shimcha $f_1=\vec{v}\cdot\vec{\chi}$ bizga ma’lum bo‘ldi.

(3.6) -ga asosan $\vec{i}$ -zarralar sonining oqimi va $\vec{q}$ - zarralar energiyasining oqimini hisoblash imkoniyatiga ega bo‘ldik. $\vec{i}$ va $\vec{q}$ - lar faqat f_1 orqali topiladi. Bu oqimlarning x - o‘qi bo‘yicha tashkil etuvchisini hisoblaylik. (3.6) - ga asosan

$$i_x=\int v_x(\vec{v}\cdot\vec{\chi})\,dv_x dv_y dv_z=$$

$$=\int(\chi_x v_x^2+\chi_y v_x v_y+\chi_z v_x v_z)\,dv_x dv_y dv_z=$$

$$=\int_0^{\infty}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\chi_x v^4\cos^2\alpha\,\sin\alpha\;dv\,d\alpha\,d\varphi=\frac{4\pi}{3}\int_0^{\infty}\chi_x v^4\,dv \qquad (5.5)$$

Bu yerda zarralar sonining oqimiga tegishli bo‘lgan integralli amallarni bajarishda tezliklar muhitining Dekart koordinat sistemasidan sferik koordinata tizimiga o‘tildi ($v_x=v\cos\alpha$; $dv_x dv_y dv_z=v^2\sin\alpha\,dv\,d\alpha\,d\varphi$).

Xuddi shuningdek, zarralar energiyasi oqimining x - o‘qi bo‘yicha tashkil etuvchisi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$q_x=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{m}{2}\int\chi_x\cdot v^6\,dv \qquad (5.6)$$

(5.4) va (5.2) - ni (5.5) - ga tadbiq etamiz:

$$i_x = -\frac{4\pi}{3}\int_0^{\infty} l\cdot v^3\left\{\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{F_x n}{k_0 T} + n\cdot\left(\frac{mv^2}{2\pi k_0 T^2} - \frac{3}{2T}\right)\frac{\partial T}{\partial x}\right\}\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv \quad (5.7)$$

Oddiylik uchun quyida l - ni v - ga bog‘liq emas deb hisoblaymiz. Bundan tashqari, ma’lumki,

$$\int_0^{+\infty} \frac{mv^2}{2k_0 T}\cdot v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv = 2\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv \quad (5.8)$$

(5.8) - ni hisobga olib, (5.7) - ni quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$$i_x = -\frac{4\pi}{3}\int l\cdot v^3\left\{\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{F_x n}{k_0 T} + \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{T}\cdot\frac{\partial T}{\partial x}\right\}\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv =$$

$$= -\frac{1}{3} l\cdot\bar{v}\left\{\frac{\partial n}{\partial x} - \frac{F_x n}{k_0 T} + \frac{n}{2T}\frac{\partial T}{\partial x}\right\} \quad (5.9)$$

Bu yerda:

$\bar{v} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi k_0 T}\right)^{3/2}\int_0^{\infty} v^3 e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv$ - zarralarning o‘rtacha tezligi.

Agar zarra zaryadi e, tashqi elektr maydon kuchlanganligi $\vec{\xi}$ bo‘lsa, bunday zaryadlangan zarraga ta’sir etuvchi kuch $\vec{F} = e\vec{\xi}$ bo‘ladi. Buning ustiga $\nabla n = 0$, $\nabla T = 0$ bo‘lgan xususiy hol uchun (5.9) - ga binoan zaryadlangan zarralar sonining oqimi

$$i_x = \frac{1}{3} l\,\bar{v}\,\frac{ne}{k_0 T}\vec{\xi}$$

bo‘ladi.

Bunga mos keluvchi elektr toki zichligi

$$\vec{j} = e\vec{i}; \quad j_x = \frac{1}{3} l\cdot\bar{v}\cdot\frac{e^2 n}{k_0 T}\xi_x = \sigma\xi_x. \quad (5.10)$$

Bu yerda σ - elektr o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti va uni $\sigma = e \cdot n \cdot u$ deyish mumkin (u- harakatchanlik koeffitsiyenti).

Xuddi shunday, agar tizim $\nabla n \neq 0$, lekin $\vec{F} = 0$ va $\nabla T = 0$ bo‘lgan sharoitda bo‘lsa (1.3)-ko‘rinishdagi umumiy formula bilan (5.9) - ni taqqoslashtirishdan diffuziya koeffitsiyenti:

$$D = \frac{1}{3} l \cdot \bar{v} \tag{5.11}$$

Agar $\sigma = e \cdot n \cdot u$ ekanligini hisobga olsak, (5.10) va (5.11)-formulalaridan

$$u = \frac{1}{3} l \bar{v} \frac{e}{k_0 T} = D \frac{e}{k_0 T} \tag{5.12}$$

bizga oldindan ma’lum bo‘lgan Eynshteyn formulasi hosil bo‘ladi.

Energiya oqimi $\vec{q}$ - ni hisoblash ham xuddi yuqoridagidek bo‘ladi. Bu yerda (5.6) -ifodasidan hosil bo‘ladigan q_x formulasi (5.9) - dagiga qaraganda qo‘shimcha faqat $\frac{mv^2}{2}$ - ko‘paytuvchisi bilan farq qiladi.

Endi

$$\int_0^\infty \frac{mv^2}{k_0 T} \cdot v^5 e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv = 3 \int_0^\infty v^5 e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv \tag{5.13}$$

munosabatdan foydalanib, q_x-ni hisoblaymiz:

$$q_x = -\frac{4\pi m}{3} \int_0^\infty \frac{l v^5}{2} \left\{ \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{F_x \cdot n}{k_0 T} + \frac{3n}{2T} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \left(\frac{m}{2\pi k_0 T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv;$$

(5.13) - ga asosan:

$$q_x = -\frac{4\pi}{3} \cdot 2k_0 T \int_0^\infty l v^3 \left\{ \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{F_x \cdot n}{k_0 T} + \frac{3n}{2T} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} \left(\frac{m}{2\pi k_0 T} \right)^{3/2} e^{-\frac{mv^2}{2k_0 T}} dv =$$

$$= -\frac{1}{3} l \cdot \bar{v} \cdot 2k_0 T \left\{ \frac{\partial n}{\partial x} - \frac{F_x n}{k_0 T} + \frac{3n}{2T} \frac{\partial T}{\partial x} \right\} =$$

$$= 2k_0 T \cdot i_x - \frac{1}{3} l \bar{v} \cdot n \cdot 2k_0 \cdot \frac{\partial T}{\partial x} \qquad (5.14)$$

Bu ifodani (1.5) formulasi bilan taqqoslashtirishdan issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyenti

$$\chi = \frac{1}{3} l \cdot \bar{v} \cdot 2k_0 \cdot n \qquad (5.15)$$

Va natijada (5.15) - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyentining (5.10) - dagi elektr o‘tkazuvchanlik koeffitsiyentiga nisbati

$$\frac{\chi}{\sigma} = 2k_0 \frac{k_0 T}{e^2} = 2\left(\frac{k_0}{e}\right)^2 T \qquad (5.16)$$

bo‘ladi. (5.16) - formula Videmai-Frants qonunini ifodalaydi.

Tajribada metallar uchun (5.16)-ni tekshirilganda faqat «2» o‘rniga «3»ga yaqin son hosil bo‘ladi. Buning sababi metalldagi elektronlar klassik statistikaga emas, balki kvant statistikasiga bo‘ysunishidadir.

Shunday qilib, Boltsmanning kinetik tenglamasi nafaqat zarralar zichligi oqimi va ular energiyasi oqimi uchun munosabatlar hosil qilishga, balki ushbu formulalar tarkibidagi σ - elektr o‘tkazuvchanlik, D - diffuziya, χ - issiqlik o‘tkazuvchanlik koeffitsiyentlarini ham hisoblashga imkon yaratadi. Ammo bu tenglamani faqat oddiy va xususiy hollar uchungina yechish mumkin.

10.6-§ Diffuziyali yaqinlashuv uchun taqsimot funksiyasi

Muvozanatsiz holatda bo‘lgan siyrak gaz uchun turli xil oqimlarni hisoblash masalasini yuqorida batafsil ko‘rib chiqdik. Quyida konsentratsiya gradiyenti mavjud bo‘lgan hol uchun turli oqimlarni hisoblashda diffuziyali yaqinlashuv uslubini qo‘llaymiz. Boltsmanning statsionar holat uchun kinetik tenglamasi (3.5) τ - relaksatsiya vaqti orqali

$$-\frac{\vec{p}}{m}\nabla_{\vec{r}} f - \vec{F}\nabla_{\vec{p}} f = \frac{f - f_0}{\tau} \qquad (6.1)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu tenglamadagi τ - tizimning muvozanat holatga qaytishini aniqlaydi va thermostat bilan ideal gazning o‘zaro ta’sir intensivligini xarakterlaydi. Bu o‘zaro ta’sir qanchalik kuchli bo‘lsa, relaksatsiya vaqti shunchalik kichik bo‘ladi va tizim tezroq muvozanat holatga keladi. Agar tashqi kuchlar yetarli darajada kichik bo‘lsa, kichik relaksatsiya vaqti davomida taqsimot funksiyasi muvozanat holat taqsimot funksiyasidan katta farq qilmaydi va uni (6.1)-ga asosan quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f = f_0 - \tau \frac{\vec{p}}{m}\nabla_{\vec{r}} f_0 - \tau\, \vec{F}\nabla_{\vec{v}} f \qquad (6.2)$$

Biroq oddiy muhitda ideal gaz konsentratsiyasi doimiy bo‘lmasa (6.2) yechimi kuchga ega bo‘lmaydi. Tizimda diffuziya yo‘li bilan, ya’ni zarralarning siljishi yo‘li bilan konsentratsiya doimiy qiymatga erishadi. Ushbu jarayon nihoyatda sust o‘tadi va shuning uchun bu holda (6.2) - ni yaxshi yaqinlashuv deb bo‘lmaydi.

Tizim muvozanatsiz holatda bo‘lganda zarralar konsentratsiyasining koordinatalarga bog‘liqligini aniqlovchi funksiyasini bevosita yozib bo‘lmaydi, lekin diffuziya tenglamasi deb ataluvchi tenglama hosil qilish mumkin. Diffuziya tenglamasini hosil qilishda

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\vec{p}}{m}\nabla_{\vec{r}} f - \vec{F}\nabla_{\vec{p}} f - \frac{f - f_0}{\tau} \qquad (6.3)$$

ko‘rinishdagi Boltsman tenglamasidan foydalanamiz. Konsentratsiya

$$n(\vec{r},t) = \int f(\vec{r},\vec{p},t)\, d\vec{p}$$

munosabati orqali aniqlanganligi sababli (6.3) – ni impuls proyeksiyalari bo‘yicha integrallaymiz.

Impulslar bo‘yicha integrallash va vaqt bo‘yicha differensiallash tartibini o‘zgartirib

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{p} = \frac{\partial}{\partial t} \int f d\vec{p} = \frac{\partial n}{\partial t}$$

ekanligini ko‘rsatish mumkin.

Bizning holda $\vec{F}$ - tashqi kuch tengsizlikka bog‘liq bo‘lmaganligi uchun integral ostidan chiqariladi va

$$\int \vec{F} \nabla_p d\vec{p} = \vec{F} \int \nabla_p f \, d\vec{p} = 0$$

bo‘ladi. Relaksatsiya vaqti zarra energiyasiga bog‘liq bo‘lmagan hol uchun zarralarning o‘zaro ta’sir hadining impulslar muhiti bo‘yicha integrali ham nolga teng bo‘ladi.

So‘nggi ifodaning impuls proyeksiyalari bo‘yicha integralini olishda koordinatalar bo‘yicha differensiallash bilan o‘rnini almashtiramiz.

$$\int \frac{\vec{p}}{m} \nabla_{\vec{r}} f \, d\vec{p} = \frac{\partial}{\partial x} \int \frac{p_x}{m_0} f \, d\vec{p} + \frac{\partial}{\partial y} \int \frac{p_y}{m} f \, d\vec{p} + \frac{\partial}{\partial z} \int \frac{p_z}{m} f \, d\vec{p} \qquad (6.4)$$

Bu integrallarni hisoblash uchun f - ning (6.2) – ko‘rinishdagi ifodasidan foydalanish mumkin:

$$\int \frac{p_x}{m} f \, d\vec{p} = - \int \frac{p_x}{m} \cdot \frac{\tau \vec{p}}{m} \nabla_{\vec{r}} f_0 \, d\vec{p} - \int \frac{p_x}{m} \cdot \tau \vec{F} \nabla_p f_0 \, d\vec{p} \qquad (6.5)$$

Bu munosabatning o‘ng tomonidagi integrallarni alohida – alohida yozamiz va nolga aylanmaydigan qismini keltiramiz:

$$\int \frac{p_x}{m} \cdot \frac{\tau \vec{p}}{m} \nabla_{\vec{r}} f_0 \, d\vec{p} = \int \frac{p_x^2 \tau}{m^2} \frac{\partial f_0}{\partial x} d\vec{p} =$$

$$= \int v_x^2 \tau \, \frac{\partial f_0}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial x} d\vec{p} = D_x \frac{\partial n}{\partial x} \qquad (6.6)$$

Bu yerda: D_x – diffuziya koeffitsiyenti .

(6.5) – ning ikkinchi integrali:

$$\int \frac{p_x}{m} \cdot \tau \, \vec{F} \nabla_{\vec{p}} f_0 \, d\vec{p} = F_x \int \frac{p_x \tau}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial p_x} d\vec{p} =$$

$$= -u'_x F_y \cdot n \qquad (6.7)$$

Bu yerda

$$u'_x = -\frac{1}{n} \int \frac{p_x \tau}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial p_x} d\vec{p} \qquad (6.8)$$

harakat koeffitsiyenti.

(6.4) – ning qolgan ikki integrali ham shu kabi natijalarni beradi. Bu ifodalardagi f_0 va τ - lar impuls moduligagina bog‘liq bo‘lganligi uchun

$$D_x = D_y = D_z \qquad \text{va} \qquad u'_x = u'_y = u'_z$$

bo‘ladi. Shunday qilib yuqoridagolarni hisobga olgan holda diffuziyali tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -div\left[-D\nabla_r n + u' n\vec{F} \right] \qquad (6.9)$$

Agar tashqi kuch $\vec{F} = e\vec{E}$ bo‘lsa, $u'n\vec{F} = u \cdot n \cdot \vec{E}$ bo‘ladi. Bu yerda u – harakatchanlik. Diffuziyali tenglamasi (6.9) – da ishtirok etuvchi D – diffuziya koeffitsiyenti qiymatini ko‘rib chiqaylik. Agar gaz Maksvell taqsimotiga bo‘ysunsa, f_0 – muvozanat holat taqsimot funksiyasi (5.2) - ko‘rinishga ega va

$$D = \frac{\partial}{\partial n} \int v_x^2 \cdot \tau \, f_0 d\vec{p} = \overline{v_x^2 \cdot \tau} = \frac{1}{3}\left(\overline{v_x^2 \cdot \tau} \right)$$

bo‘ladi. Xuddi shunday (6.8) – orqali harakatchanlikni hisoblab (5.12)-Eynshteyn formulasining to‘g‘riligini yana bir bor isbot qilish mumkin.

(6.9) – diffuziya tenglamasi temperatura doimiyligida muhitning ixtiyoriy qismi uchun zarralar konsentratsiyasini aniqlaydi. Faqat

yagona yechimga ega bo‘lish uchun bu tenglamani boshlang‘ich va chegara shartlari bilan to‘ldirmoq lozim.

Shunday qilib diffuziyali yaqinlashuv chun taqsimot funksiyasi

$$f = f_0 - \frac{\tau \cdot f_0}{n \cdot m} \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{r}} n + \frac{\tau}{m k_0 T} \cdot \vec{p}\vec{F} \cdot f_0 \qquad (6.10)$$

ko‘rinishga ega. U holda zarralar zichligining oqimi (3.6)-ga muvofiq

$$\vec{i} = -\int \frac{\vec{p}}{m} \frac{\tau \cdot f_0}{n \cdot m} \vec{p} \cdot \nabla_{\vec{r}} n d\vec{p} - \int \frac{\tau \cdot \vec{p}}{m k_0 T} \cdot f_0 (\frac{\vec{p}}{m} \vec{F}) d\vec{p} =$$

$$= -(\int \frac{p^2 \tau}{3n \cdot m^2} f_0 d\vec{p}) \cdot \nabla_{\vec{r}} n + (\int \frac{p^2 \tau f_0}{3n \cdot m^2 k_0 T} d\vec{p}) \vec{F} \cdot n \qquad (6.11)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Diffuziya koeffitsiyenti va harakatchanlik ifodalaridan foydolansak, (6.11) – ni

$$\vec{i} = -D \cdot \nabla_{\vec{r}} n + u\vec{F} \cdot n \qquad (6.12)$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi.

So‘nggi (6.12) – formuladan ko‘rinib turibdiki, diffuziyali yaqinlashuvda zarralar oqimi ikki xil kinetik hodisalar yig‘indisi aniqlanadi. Bulardan biri diffuziyaga tegishli bo‘lgan $(-D \cdot \nabla_{\vec{r}} n)$ - diffuziyali oqim bo‘lsa, ikkinchisi (5.9)-da keltirib chiqarilgan, ta’sir etuvchi kuchga proporsional bo‘lgan siljish oqimidir.

Muvozanatsiz holat klassik taqsimot funksiyasi diffuziyali yaqinlashuvda (6.10) – ko‘rinishdagi umumiy munosabat bilan aniqlanadi. Tok zichligi esa (6.10) – yordamida zaryadlangan zarra konsentratsiyasi va elektr maydon kuchlanganligi orqali ifodalanadi. Bunda diffuziya koeffitsiyenti va harakatchanlik berilgan deb olinadi. Ushbu kinetik koeffitsiyentlarni tajriba orqali toppish mumkin yoki muvozanat holat taqsimot funksiyasini bilgan holda (6.6) va (6.8) formulalar yordamida hisoblash mumkin.

Shunday qilib, differensiyali yaqinlashuvda tokni hisoblash uchun konsentratsiyaning muhit koordinatalari va vaqtga bog‘liqligini, hamda harakatchanlikni, diffuziya koeffitsiyentini bilish yetarlidir. Buning uchun taqsimot funksiyasiga murojaat qilish shart emas. Konsentratsiya $n(\vec{r},t)$ - esa (6.9) – ko‘rinishdagi diffuziya tenglamasini yechish orqali topiladi.

10.7-§ Korrelyativ funksiyalar uslubi

Boltsmanning kinetik tenglamasida gaz yetarli darajada siyrak deb hisoblangan va zarralarning juft ta’sirigina hisobga olingan. Unda uchta, to‘rtta va undan ko‘p zarralarning o‘zaro to‘qnashuvini hisobga olish yo‘llari ko‘rsatilmagan. Zichligi katta bo‘lgan gazlardagi turli oqimlarni o‘rganish uchun bunday to‘qnashuvlarni hisobga olmay iloji yo‘q va bunday gazlar uchun Boltsmanning kinetik tenglamasidan foydalanib bo‘lmaydi.

Plazma uchun o‘zaro ta’sirni hisobga olmagan holda kinetik tenglamani yechib muvozanatsiz holat taqsimlanish funksiyasini Vlasov topgan va bunday tenglamaga o‘zaro ta’sirsiz Vlasov tenglamasi deyiladi. Plazmadan tashkil topgan tizim zarralarning o‘zaro to‘qnashuv ifodasi L.D.Landau tomonidan hosil qilingan. Hozirgi vaqtda zichligi katta bo‘lgan gazlarning va suyuqliklarning statistik nazariyasini yaratmoq uchun o‘zaro ta’sir qiladigan zarralar tizimini tekshirishda turlicha uslublar qo‘llanilmoqda. Bu uslublardan biri Bogolyubov tomonidan taklif etilgan korrelyativ funksiyalar uslubidir. Bu ketma-ket tenglamalarga Bogolyubovning tenglamalar tizimi yoki Bogolyubov-Born-Grin-Ivon (BBGKI) tenglamalari deyiladi. U yoki bu yaqinlashuvda tenglamalar zanjirini uzish mumkin va uni yopiq deb hisoblab yechish mumkin.

Korrelyativ fuksiyalar uslubida

$$J = \int e^{-\frac{U}{k_0 T}} dv_1 dv_2 dv_3 ... dv_N \qquad (7.1)$$

konfiguratsiyali integralni hisoblash o‘rniga taqsimot funksiyalar tizimini bir-biriga bog‘lovchi integro-differintsial tenglama hosil qilinadi. Bu uslub Gibbs statistikasining natijasidir.

Bizni o‘zaro ta’sir qiluvchi zarralarning muhitdagi taqsimoti qiziqtiradi. Gibbs taqsimotini barcha impulslar bo‘yicha integrallab, zarralar tizimining muhitda taqsimot ehtimoliyatini topamiz:

$$dW_{\vec{r}} = \int_P dW = \frac{1}{J} \cdot e^{-\frac{U}{k_0 T}} d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \ldots d\vec{r}_N , \qquad (7.2)$$

$(d\vec{r}_1 = dV_1)$

Agar (7.2) ni $d\vec{r}_1$ - dan boshqa barcha koordinatalar bo‘yicha integrallasak,

$$dW_{\vec{r}}^{(1)} = d\vec{r}_1 \frac{1}{J} \int e^{-\frac{U}{k_0 T}} d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \ldots d\vec{r}_N \qquad (7.3)$$

bo‘ladi. $dW_{\vec{r}}^{(1)}$ - birinchi zarra $d\vec{r}_1$ hajmda bo‘lib, qolgan (N-1) - tasi esa ixtiyoriy ravishda taqsimot ehtimoliyati. Bu ehtimoliyatini:

$$dW_{\vec{r}}^{(1)} = \frac{\rho_1(\vec{r}_1) d\vec{r}_1}{V} \qquad (7.4)$$

deb yozish mumkin. Bu yerda $\rho_1(\vec{r}_1)$ - zarraning $d\vec{r}_1$ hajm elementida bo‘lish ehtimoliyati zichligi. $\rho_1(\vec{r}_1)$ - ga birlangan taqsimot funksiyasi deyiladi. (7.3) va (7.4) – lardan:

$$\frac{\rho_1(\vec{r}_1)}{V} = \frac{1}{J} \int e^{-\frac{U}{k_0 T}} d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \ldots d\vec{r}_N \qquad (7.5)$$

Endi (7.2) - ni birinchi va ikkinchi koordinatalaridan tashqari boshqa barcha koordinatalar bo‘yicha integrallasak, xuddi yuqoridagidek

$$dW_{\vec{r}}^{(1,2)} = \frac{d\vec{r}_1 d\vec{r}_2}{V^2} \rho_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1 d\vec{r}_2}{J} \int e^{-\frac{U}{k_0 T}} d\vec{r}_3, d\vec{r}_4 \ldots d\vec{r}_N \qquad (7.6)$$

bo‘ladi.

Bu yerda $\rho_{12}(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ - birinchi zarraning $d\vec{r}_1$ - da va ikkinchi zarraning $d\vec{r}_2$ - da bo‘lish ehtimoliyatini zichligi. ρ_{12} - ni ikkilangan taqsimot funksiyasi deb ataymiz.

Shu yo‘sinda ixtiyoriy tartibdagi taqsimot funksiyasini hosil qilish mumkin. Masalan, birinchi zarraning $d\vec{r}_1$ - da, ikkinchi zarraning $d\vec{r}_2$ - da ,..., m- zarraning $d\vec{r}_m$ - da bo‘lish ehtimoliyati zichligi

$$\frac{1}{V^m}\rho_m(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots\vec{r}_m)=\frac{1}{J}\int e^{-\frac{U}{k_0T}}d\vec{r}_{m+1}d\vec{r}_{m+2}\dots d\vec{r}_N \qquad (7.7)$$

Aytaylik, bizni barcha zarralarning egallagan o‘rniga bog‘liq bo‘lgan tizim xususiyatlari emas, balki bir qism m - ta zarralarning egallagan o‘rniga bog‘liq bo‘lgan tizimning xususiyatlari qiziqtirsin. U holda m - nchi tartibli taqsimot funksiyasi $\rho_m(\vec{r}_1,\vec{r}_2\dots\vec{r}_m)$ butun tizimning Gibbs taqsimoti kabi bo‘ladi, ya’ni ular teng kuchli bo‘ladi.

Ayrim zarralarninggina koordinatalariga bog‘liq bo‘lgan fizik kattaliklarning o‘rtacha qiymati

$$\overline{L(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\dots,\vec{r}_m)}=\int L(\vec{r}_1,\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_m)\rho_m(\vec{r}_1,\dots,\vec{r}_m)\frac{d\vec{r}_1\dots d\vec{r}_m}{V^m}$$

Turli tartibdagi $\rho_1,\rho_2,\dots,\rho_m$ taqsimot funksiyalarini kiritish masalani osonlashtirmaydi, chunki ularning barchasi uchun (7.1) ko‘rinishdagi konfiguratsiyali integralni hisoblash kerak. Lekin (7.1) bilan bog‘liq bo‘lmagan holda ham taqsimot funksiyalarini hisoblash yo‘li bor. Bogolyubov shu funksiyalarni qanoatlantiruvchi integro-differentsial tenglama tuzadi.

$\rho_1(\vec{r}_1)$ - birinchi tartibli taqsimot funksiyasini qanoatlantiruvchi tenglama hosil qilmoq uchun (7.5) - dan $\vec{r}_1$ - bo‘yicha xususiy hosila olamiz:

$$\frac{\partial\rho_1(\vec{r}_1)}{\partial\vec{r}_1}=-\frac{V}{J\cdot k_0T}\int e^{-\frac{U}{k_0T}}\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_1}d\vec{r}_2\dots\dots d\vec{r}_N \qquad (7.8)$$

Bu yerda

$$\frac{\partial U}{\partial\vec{r}_1}=\frac{1}{\partial\vec{r}_1}\sum_{j=2}^{N}u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right) \qquad (7.9)$$

$u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)$ - zarralarning juft ta’sir potensial energiyalari. U holda (7.8)-ning o‘ng tomoni

$$-\frac{V}{J\cdot k_0T}\int e^{-\frac{U}{k_0T}}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_1}\sum_{j=2}^{N}u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)d\vec{r}_2\dots.d\vec{r}_N=$$

$$= -\frac{V}{k_0 T}\sum_{j=2}^{N}\frac{1}{J}\int e^{-\frac{U}{k_0 T}}\frac{\partial u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_1}dr_2....d\vec{r}_N =$$

$$= -\frac{1}{V\cdot k_0 T}\sum_{j=2}^{N}\int\frac{\partial u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_1}\rho_{1j}(\vec{r}_1,\vec{r}_j)d\vec{r}_j, \qquad (7.10)$$

bo‘ladi, chunki (7.6) - ga asosan

$$\frac{\rho_{1j}(\vec{r}_1,r_j)}{V^2} = \frac{1}{J}\int e^{-\frac{U}{k_0 T}}d\vec{r}_2,..d\vec{r}_{j-1},d\vec{r}_{j+2}...d\vec{r}_N \qquad (7.10a)$$

Yuqoridagi ifodada j - bo‘yicha yig‘indi (N-1) ta had borligini anglatadi, va har bir hadda $\int\frac{\partial u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_1}\rho_{1j}(\vec{r}_1,\vec{r}_j)d\vec{r}_j$ ko‘rinishdagi integral ishtirok etadi. Tizim bir xil zarralardan tashkil topganligi tufayli $|\vec{r}_1-\vec{r}_j|$ ning berilgan qiymatida $u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)$ bir xil qiymatga ega. Bundan tashqari barcha $|\vec{r}_1-\vec{r}_j|$ - lar bo‘yicha integral olinayapti. Shuning uchun:

$$\frac{1}{V}\sum_{j=2}^{N}\int\frac{\partial u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_1}\rho_{1j}(\vec{r}_1,\vec{r}_j)d\vec{r}_j = \frac{(N-1)}{V}\int\frac{\partial u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_1}\rho_{1j}d\vec{r}_j =$$

$$\simeq \frac{N}{V}\int\frac{\partial u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_1}\rho_{1j}(\vec{r}_1,\vec{r}_j)d\vec{r}_j \qquad (7.10b)$$

Shunday qilib, (7.10b) va (7.10a) ni hisobga olgan holda (7.8) - tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial \vec{r}_1} = -\frac{N}{V\cdot k_0 T}\int\frac{\partial u(|\vec{r}_1-\vec{r}_j|)}{\partial \vec{r}_1}\rho_{1j}d\vec{r}_j \qquad (7.11)$$

Bu formula $\rho_1(\vec{r}_1)$ - birinchi va $\rho_{1j}(\vec{r}_1,\vec{r}_j)$ - ikkinchi tartibli taqsimot funksiyalari orasidagi bog‘lanishni beradi.

Endi ρ_{1j} - ikkinchi tartibli funksiyani qanoatlantiruvchi tenglamani keltirib chiqaraylik. (7.6) dan:

$$\frac{\partial\rho_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}{\partial\vec{r}_1}=-\frac{V^2}{J\cdot k_0T}\int e^{-\frac{U}{k_0T}}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_1}\left(\sum u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)d\vec{r}_3\ldots dr_N\right)=$$

$$=-\frac{V^2}{J\cdot k_0T}\int e^{-\frac{U}{k_0T}}\frac{\partial u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)}{\partial\vec{r}_1}d\vec{r}_3\ldots d\vec{r}_N\ -$$

$$-\frac{V^2}{J\cdot k_0T}\sum_{j=3}^{N}\int\frac{\partial u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)}{\partial\vec{r}_1}d\vec{r}_j\cdot\int e^{-\frac{U}{k_0T}}d\vec{r}_3,\ldots d\vec{r}_{j-1}d\vec{r}_{j+1}\ldots d\vec{r}_N\simeq$$

$$\simeq\frac{1}{k_0T}\rho_{12}(\vec{r}_1,\vec{r}_2)\frac{\partial u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)}{\partial\vec{r}_1}-\frac{N}{k_0TV}\int\frac{\partial u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)}{\partial\vec{r}_1}\rho_{12j}d\vec{r}_j \qquad (7.12)$$

(7.12) tenglama ikkinchi va uchinchi tartibli taqsimot funksiyalari orasidagi bog‘lanishni beruvchi tenglamadir. Shunday qilib, *m* - nchi va (*m*+1) - nchi tartibli taqsimot funksiyalari orasidagi bog‘lanishlarni ham topish mumkin. Natijada yopiq bo‘lmagan tenglamalar tizimi hosil bo‘ladiki, ularning har biri o‘z tartibidagi taqsimot funksiyasining hosilasi va navbatdagi tartibli funksiyasining o‘zi orqali ifodalanadi:

$$\frac{\partial\rho_{12\ldots m}(\vec{r}_1\ldots\vec{r}_m)}{\partial\vec{r}_1}=-\frac{1}{k_0T}\rho_{12\ldots\ldots m}\frac{\partial}{\partial\vec{r}_1}\left[\sum u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)\right]-$$

$$-\frac{N}{Vk_0T}\int\sum_{j=m+1}^{N}\frac{\partial\ u\left(\left|\vec{r}_1-\vec{r}_j\right|\right)}{\partial\vec{r}_1}\rho_{12\ldots m,m+1}\,d\vec{r}_{m+1} \qquad (7.13)$$

Bu jarayonni davom ettirish yo‘li bilan (*N*-1) - nchi tartibli taqsimot funksiyasi bilan *N* - nchi tartibli taqsimot funksiyasini bog‘lovchi tenglamaga kelamiz. *N* - nchi tartibli taqsimot funksiyasi esa bu Gibbsning taqsimot funksiyasidir. Shunday qilib, past tartibli taqsimot

funksiyasini topish masalasi butun tizim uchun Gibbs taqsimotiga borib tarqaladi. Muhimi shundan iboratki, yuqori tartibli funksiyalar integral ostida $\sim \frac{N}{V \cdot k_0 T} \cdot \frac{\partial u}{\partial \vec{r}_1}$ koeffitsiyent bilan birga keladi.

Agar ikki zarra orasidagi o‘zaro ta’sir potensial energiyasi $u(|\vec{r}_1 - \vec{r}_j|)$ masofaning oshishi bilan tez kamaysa va molekula o‘lchamidan katta masofalarda kichik bo‘lsa, $|\vec{r}_1 - \vec{r}_j| >> d$ (d molekula diametri) bo‘lganda, $\frac{\partial u}{\partial \vec{r}_1}$ -juda kichik bo‘ladi. Shuning uchun, masalan, (7.12) ifodasining o‘ng tomonidagi integralli ifodani quyidagicha baholash mumkin:

$$\frac{N}{V}\int \frac{\partial u}{\partial \vec{r}_1}\rho_{12j}d\vec{r}_j \simeq \frac{d^3}{V/N}\left(\frac{\partial u}{\partial \vec{r}_1}\rho_{12j}\right)_d$$

Agar 1 ta zarraga to‘g‘ri keluvchi V/N hajm zarra hajmi d^3 dan katta bo‘lsa, $\frac{d^3}{V/N}$, kichik bo‘ladi.

10.8-§ Boltsmanning H-teoremasi

Biz statistik fizika kursi davomida entropiyaning o‘sish qonuniyatini to‘la-to‘kis ko‘rgan edik (entropiya va ehtimoliyat). Unda yopiq tizim holati o‘zgarganda so‘nggi holat entropiyasi doimo boshlang‘ich holat entropiyasidan katta bo‘lishi ko‘rsatilgan edi.

Biroq u yerda boshlang‘ich holatdan so‘nggi holatga o‘tish qanday sodir bo‘lishini aniqlash mumkin emas edi. Tizim muvozanatsiz holatdan muvozanatli holatga o‘tganda uning entropiyasi oshaborish teoremasini isbot qilish uchun Boltsmanning kinetik tenglamasidan foydalanamiz. Boltsman tomonidan isbot qilingan bu teorema H-teorema deb yuritiladi, chunki u S - entropiya o‘rniga

$$H = -\frac{1}{kV}S \qquad (8.1)$$

kattaligini ishlatgan.

Buning uchun, agar tezliklari bo‘yicha muvozanatsiz holatda bo‘lgan gaz zarralarining o‘zaro to‘qnashuvi natijasida statsionar

holatga intilsa, bunday gaz Maksvellning tezliklar bo‘yicha taqsimoti orqali ifodalanishini ko‘rsataylik. Oddiylik uchun bir atomli ideal gaz bir jinsli muhitda joylashgan bo‘lsin $\left(\frac{\partial f(\vec{r},\vec{v},t)}{\partial \vec{r}}=0\right)$, va unga tashqi muhit ta’siri bo‘lmasin ($\vec{F}=0$). Demak, taqsimot funksiyasi bu holda faqat zarralar tezligiga va vaqtga bog‘liq bo‘ladi

$$f(\vec{r},\vec{v},t)=f(\vec{v},t)\equiv f$$

Qabul qilingan sharoitda bo‘lgan tizim uchun Boltsmanning kinetik tenglamasi (3.5) o‘rniga

$$\frac{\partial f}{\partial t}=b-a$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Ushbu kinetik tenglama gazdan tashkil topgan yopiq tizim uchun shunday makroskopik tavsif mavjudki, muvozanatsiz holatdan zarralarning o‘zaro to‘qnashuvlar natijasida tizim muvozanat holatga intilgan sari u monoton kamaya boradi degan xulosaga olib keladi. Bu fikrni isbotlamoq uchun

$$H(t)=\int f(\vec{v},t)\ln f(\vec{v},t)d\vec{v} \qquad (8.2)$$

funksiyasini tekshiraylik. Bundan

$$\frac{dH(t)}{dt}=\frac{d}{dt}\int f\cdot\ln f d\vec{v}=\int\left[\frac{\partial f}{\partial t}\ln f+\frac{\partial f}{\partial t}\right]d\vec{v}=\int\frac{\partial f}{\partial t}\ln f\,d\vec{v}\ , \qquad (8.3)$$

chunki

$$\int\frac{\partial f}{\partial t}d\vec{v}=\frac{d}{dt}\int f(\vec{v},t)d\vec{v}=\frac{d}{dt}\left(\frac{N}{V}\right)=0$$

$\int f(\vec{r},\vec{v},t)d\vec{r}d\vec{v}=N$ - bu V hajmli tizimda joylashgan gazni tashkil etuvchi barcha zarralar soni. Biz ko‘rayotgan hol uchun Boltsmanning kinetik tenglamasi

$$\frac{df}{dt}=b-a=-\int\left[f\cdot f_1-f'\cdot f_1'\right]|\vec{v}_1-\vec{v}|\sigma(v,u)d\omega d\vec{v}_1$$

Bu yerda $d\omega$ - fazaviy burchak;

$\sigma(v,u)$ -sochilishning defferentsial kesimi;

$\vec{u}=\vec{v}-\vec{v}_1$.

U holda (8.3) quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\frac{dH}{dt}=-\int\left[ff_1-ff_1'\right]\cdot\ln f\cdot\left|\vec{v}_1-\vec{v}\right|\sigma(\vec{v},u)d\vec{v}_1d\vec{v}d\omega\equiv G_1 \qquad (8.4)$$

(8.4) dagi integralli ifodani simmetriyalaymiz. Buning uchun uni 3 marotaba quyidagicha o‘zgarishlar qilib ko‘chiramiz:

1) $\vec{v}\leftrightarrow\vec{v}_1,\quad \vec{v}'\leftrightarrow\vec{v}_1'$

2) $\vec{v}\leftrightarrow\vec{v}',\quad \vec{v}_1\leftrightarrow\vec{v}_1'$

3) $\vec{v}\leftrightarrow\vec{v}_1',\quad \vec{v}_1'\leftrightarrow\vec{v}'$

Birinchi o‘zgarish kiritilganda $f\leftrightarrow f_1$ va $f'\leftrightarrow f_1'$ bo‘ladi, shuning uchun (8.4) - dagi integral ostidagi o‘rtacha qavsdagi ifoda o‘zgarmasdan qoladi; $\ln f\rightarrow\ln f_1$ bo‘ladi; $\left|\vec{v}_1-\vec{v}\right|\sigma(v,u)$ o‘zgarmaydi, chunki $\left|\vec{v}_1-\vec{v}\right|=\left|\vec{v}-\vec{v}_1\right|$ va nihoyat $d\vec{v}\,d\vec{v}_1$ ham o‘zgarmaydi.

Ikkinchi o‘zgarish kiritganimizda o‘rtacha qavs ishorasini o‘zgartiradi, $\ln f\rightarrow\ln f'$, $\left|\vec{v}_1-\vec{v}\right|\sigma(v,u)$ o‘zgarmay saqlanadi, chunki $\vec{u}=\vec{u}'$ va Liuvill teoremasiga muvofiq $d\vec{v}d\vec{v}_1=d\vec{v}'\,d\vec{v}_1'$.

Birinchi ikkita o‘zgartirishlar kombinatsiyasidan tashkil topgan uchinchi o‘zgartirishni kiritganimizda o‘rtacha qavsli ifoda ishorasini o‘zgartiradi; $\ln f\rightarrow\ln f'$; $\left|\vec{v}_1-\vec{v}\right|\sigma(v,u)$ - o‘zgarmasdan saqlanadi va $d\vec{v}d\vec{v}_1=d\vec{v}'\,d\vec{v}_1'$ bo‘ladi.

Endi (8.4) - munosabatini yuqoridagi o‘zgartirishlar kiritish natijasida hosil qilingan uchta munosabat bilan qo‘shsak, simmetriyalash natijasida quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\frac{dH}{dt}=-\frac{1}{4}\int\left[ff_1-ff_1'\right]\left\{\ln(ff_1)-\ln(ff_1')\right\}\left|\vec{v}_1-\vec{v}\right|\sigma(v,n)d\omega d\vec{v}d\vec{v}_1 \qquad (8.5)$$

Integral ostidagi o‘rta va katta qavslar ko‘paytmasi $[x-y]\cdot\{\ln x-\ln y\}$ ko‘rinishga ega. Bu ifodadagi logarifmik funksiya

monoton bo‘lganligi uchun ko‘paytma manfiy qiymatga ega bo‘lishi mumkin emas, ya’ni:

$$[x-y]\cdot\{\ln x-\ln y\}\geq 0.$$

Bu va $|\vec{v}_1-\vec{v}|\sigma(v,u)\geq 0$ bo‘lgani uchun (8.5) - ga asosan:

$$\frac{dH}{dt}\leq 0 \qquad (8.6)$$

Bu kamayish dinamik emas, balki statistikdir. Bundagi tenglik ishoraga $x=y$, ya’ni:

$$f\cdot f_1=f'\cdot f_1' \qquad (8.7)$$

ifodasiga aynan muvozanatlik sharti to‘g‘ri keladi. Bu holda gaz muvozanat holatda bo‘ladi va unga to‘g‘ri keluvchi taqsimot funksiyasi bu Maksvell taqsimot funksiyasi bo‘ladi, ya’ni:

$$f(\vec{v})=f_0(\vec{v})=Ce^{-\beta v^2};\quad \beta=\frac{m}{2k_0T};\quad C=n\left(\frac{m}{2\pi k_0T}\right)^{3/2}$$

Shunday qilib, agar gaz tezliklar bo‘yicha muvozanatsiz holatda bo‘lsa, undagi molekulalarning o‘zaro to‘qnashuvi natijasida H(t) funksiyasi katta ehtimoliyat bilan monoton ravishda kamaya boradi va, nihoyat, tizim muvozanatli holatga kelganda H(t) o‘zining eng kichik qiymatiga, S-entropiya esa o‘zining eng katta qiymatiga ega bo‘ladi. Bu xulosadan (8.7)-tengligi gaz holatining statsionar bo‘lishligi uchun yetarli va zaruriy sharti ekanligi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan termodinamikada ideal gaz entropiyasi va termodinamik ehtimoliyat orasidagi bog‘lanishga muvofiq

$$H=\frac{1}{V}\sum_{\alpha}N_\alpha\ln N_\alpha=-\frac{1}{kV}S;$$

$$N_\alpha=f(v_\alpha,t)(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})_\alpha \qquad (8.8)$$

Bu yerda: N_α - konfiguratsiyali nuqtalari μ – muhitning $\Delta\mu_\alpha=(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})_\alpha$ qismini tashkil etuvchi α – yacheykaga to‘g‘ri keluvchi o‘rtacha zarralar soni.

Endi ushbu funksiya bilan (8.2) ko‘rinishdagi H - funksiyaning bir - biriga mos kelishini ko‘rsataylik. Bunda biz μ - muhitdagi $(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})_\alpha$ barcha yacheykalarni bir xil hajmga ega deb hisoblaymiz va zarralarni normallashtirish shartidan foydalanamiz:

$$H=\frac{1}{V}\sum_\alpha f(v_\alpha,t)(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})_\alpha \ln\left[f(v_\alpha,t)\cdot(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})_\alpha\right]=$$

$$=\frac{1}{V}\sum_\alpha f(v_\alpha,t)\cdot\ln f(v_\alpha,t)\cdot(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})_\alpha +$$

$$+\frac{1}{V}\ln(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})\sum_\alpha f(v_\alpha,t)(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r})_\alpha =$$

$$=\sum_\alpha f(v_\alpha,t)\ln f(v_\alpha,t)(\Delta\vec{v})_\alpha+\frac{N}{V}\ln(\Delta\vec{v}\cdot\Delta\vec{r}) \qquad (8.9)$$

(8.9) va (8.2) - lar bir - biriga muvofiq kelganligi ko‘rinib turibdi.

Shunday qilib,

$$\frac{dS}{dt}\geq 0, \qquad (8.10)$$

ya’ni muvozanatsiz holatdagi gaz muvozanatli holatga intilganda uning entropiyasi katta ehtimoliyat bilan o‘zining maksimal qiymatiga ega bo‘lishga intiladi. (8.10)-ni termodinamika II qonunining isboti desa bo‘ladi. Boltsmanning H teoremasi o‘z vaqtida bir qator fiziklar tomonidan qarshilikka uchragan edi.

Loshmidt (1876 yil) Boltsmanning H - teoremasiga qarshi o‘zining qaytuvchanlik paradoksini qo‘ydi. Uning teoremasi mexanikaning vaqtga nisbatan qaytuvchanlik qonuniga qarama-qarshi ekanligini ko‘rsatadi.

Tezlik bo‘yicha muvozanatsiz holatda bo‘lgan gazning yopiq tizimdagi harakatini tekshiraylik. Bu harakat Γ-muhitda izoenergetik $H(q,p)=E$ yuzada konfiguratsiyali trayektoriya bilan ifodalanadi.

$t_0<t_1<t_2<\ldots<t_{n-1}<t_n$ vaqtlarda tizim holati konfiguratsiyali troyektoriyalar bo‘ylab joylashgan $P_0, P_1, P_2, \ldots\ldots, P_{n-1}, P_n$ nuqtalar bilan ifodalanadi. Bu nuqtalarga tizimning ma’lum holatlari va o‘z

navbatida (8.2)-ko‘rinishdagi H-funksiyaning ma’lum qiymatlari to‘g‘ri keladi. (8.6)-formulasi bilan ifodalanuvchi H - teoremasiga asosan

$$H_0 > H_1 > H_2 > ..... > H_{n-1} > H_n \qquad (8.11)$$

sharti to‘g‘ri keladi.

P_l va P_l' konfiguratsiyali nuqtalar bilan tasvirlangan 2 holatini ko‘rib chiqaylik. Faraz qilaylik, P_l' holatiga to‘g‘ri keluvchi barcha zarralar tezligi $\vec{v}_i' = -\vec{v}_i$ bo‘lsin. (8.2) - ga asosan bu faqat integral olishda o‘zgaruvchi almashtirishga to‘g‘ri keladi va $H_l = H_l'$ ligicha qoladi, ya’ni H – funksiyasining qiymati o‘zgarmaydi.

Bundan agar $t=t_n$ vaqtda barcha zarralar tezligini qarama - qarshi yo‘nalishga o‘zgartirsak, tizim $P_n', P_{n-1}', ..., P_1', P_0'$ nuqtalardan o‘tadi. Bu esa $P_n, P_{n-1}, ..., P_1, P_0$- holatlariga nisbatan barcha zarralar faqat tezliklarining yo‘nalishi bilan farq qiladi demakdir. U holda $P_n', P_{n-1}', ..., P_1', P_0'$ nuqtalar bilan tavsiflanadigan holatlariga H - funksiyasining teskari tartibda olingan (8.11)-formulasidagi holatlar ketma – ketligi to‘g‘ri keladi.

Shuning uchun

$$H_n' = H_n < H_{n-1}' = H_{n-1} < ..... < H_1' = H_1 < H_0' = H_0 \qquad (8.12)$$

Bu tengsizlik H - teoremaga qarama-qarshi xulosaga olib keladi. Boltsman o‘z raqiblarining fikrini asoslangan holda rad etadi. H-teoremaning isboti faqatgina mexanika qonunlariga asoslangan bo‘lmay, balki statistik xarakterga ega bo‘lgan o‘zaro to‘qnashuvlarni ifodalovchi munosabatlarga ham bog‘liq.

$$b = f(\vec{v}) \int d\vec{v}_1 \cdot \int d\Omega \sigma(v,u) |\vec{v}_1 - \vec{v}| \cdot f(\vec{v}_1),$$

$$a = \int d\vec{v}_1 \int d\Omega \sigma(v,u) |\vec{v}_1 - \vec{v}| f(\vec{v}') f(\vec{v}_1')$$

Darhaqiqat, bu ifodalar fizik jihatdan juda kichik vaqt oralig‘iga tegishli bo‘lib, bu kichik vaqt oralig‘iga juda ko‘p to‘qnashuvlar soni to‘g‘ri keladi. Boshqacha qilib aytganda, t-vaqtda muhitning berilgan nuqtasida molekulaning $\vec{v}'$ - tezlikka ega bo‘lish ehtimolligi shu t-

vaqtda o‘sha nuqtada boshqa molekulaning $\vec{v}'$ - ga ega bo‘lish ehtimolligiga bog‘liq emas.

Shunday qilib, H - funksiyasining monoton o‘zgarishi (kamaya borish) juda katta ehtimoliyat bilan bajariladi. Bundan yuqorida qayd etilgan zarralarning o‘zaro to‘qnashuv hadlari va, o‘z navbatida kinetik tenglamaning o‘zi ham nafaqat mexanika qonunlariga, balki statistik tasavvurlarga asoslangandir.

Masalalar

1. Muvozanatli ideal gazni tashkil etgan N - ta zarra boshlang‘ich vaqtda R - radiusli shar hajmini egallaydi. So‘ng gaz hech qanday to‘siqsiz bo‘shliqqa kengaya boradi. $f(\vec{r},\vec{p},t)$ va $n(\vec{r},t)$ - lar topilsin.

Ye ch i sh:

O‘zaro to‘qnashuv va tashqi ta’sir bo‘lmaganda kinetik tenglama

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}}=0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. $t=0$ bo‘lganda, taqsimot funksiyasi faqat $|\vec{r}|\le R$ sohada noldan holi bo‘ladi.

$$f(\vec{r},\vec{p},0)=\left(2\pi\, mk_0T\right)^{-3/2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1}\cdot e^{-p^2/2mk_0T}$$

Shuning uchun tenglamaning yechimi

$$f(\vec{r},\vec{p},t)=\begin{cases}\left(2\pi\, mk_0T\right)^{-3/2}\left(\frac{4}{3}\pi R^3\right)^{-1}e^{-p^2/2mk_0T}, & \left|\vec{r}-\frac{\vec{p}}{m}t\right|\le R\\ 0, & \left|\vec{r}-\frac{\vec{p}}{m}t\right|\rangle R\end{cases}$$

Zarralar sonining zichligi

$$n(\vec{r},t)=N\int f(\vec{r},\vec{p},t)d^3p=\frac{N\left(4/3\,\pi R^3\right)^{-1}}{\left(2\pi\, mk_0T\right)^{3/2}}\int\limits_{\left|\vec{p}-\frac{\vec{r}_m}{\tau}\right|\le R} e^{-p^2/2mk_0T}d^3p$$

Bu ifoda t - ning katta qiymatlarida

$$n(\vec{r},t)=\frac{N}{\left(2\pi\, mk_0T\right)^{3/2}}\left(\frac{m}{t}\right)^3\exp\left(-\frac{m}{2mk_0T}\frac{\vec{r}^{\,2}}{t^2}\right)$$

2. Bir jinsli og‘irlik maydonida joylashgan ideal gaz zichligi uchun kinetik tenglamadan foydalanib, Boltsman taqsimoti keltirib chiqarilsin.

Ye ch i sh:

Faqat vertikal bo‘yicha (z - o‘qi) gaz bir jinsli. Shuning uchun o‘zaro to‘qnashuvga ega bo‘lmagan statsionar holat uchun

$$v_z \frac{\partial f}{\partial z} + mg \frac{\partial f}{\partial p_z} = 0$$

Yechimni $f = W(z)e^{-\frac{p^2}{2mk_0T}}$ ko‘rinishda izlaymiz.

U holda $\frac{\partial W}{\partial z} + \frac{mqU}{2k_0T} = 0$, bundan

$$W(z) = U(0)e^{-\frac{mgz}{k_0T}}$$

3. Bir jinsli davriy elektr maydonida $\vec{\xi} = \vec{\xi}_0 e^{i\omega t}$ joylashgan sovuq plazmaning tok ziehligi topilsin. Vaqt dispersiyasi bo‘lgan hol uchun dialektrik qabul qiluvchanlik ham topilsin (plazma elektroneytral deb hisoblansin, ionlarning musbat zaryadini esa qo‘zg‘almas va muhitda teng taqsimlangan deb hisoblansin).

Ye ch i sh:

$\vec{\xi}$ - maydoni x - o‘qi bo‘yicha yo‘nalgan desak, kinetik tenglama

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{e}{m}\vec{\xi}(t)\frac{\partial f_0}{\partial v_x} = -\frac{f}{\tau}$$

Bu tenglamani v_x - ga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan ifodani d^3v bo‘yicha integrallasak, tok zichligi uchun quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{\partial j_x}{\partial t} + \frac{e^2N}{m}\xi(t)\int v_x \frac{\partial f_0}{\partial v_x} d^3v = -\frac{j_x}{\tau}$$

bu yerda

$$j_x = eN\int v_x f_1(\vec{r},\vec{v},t)d^3v;$$

N - zaryadlar zichligining soni. Ikkinchi haddagi integral bo‘laklab hisoblanadi va normallashtirish shartiga binoan birga teng

$\xi(t)=\xi_o e^{i\omega t}$ bo‘lganligi uchun yechim $j_x=j_w e^{i\omega t}$ ko‘rinishda izlanadi. Natijada $j_w = \frac{Ne^2E_0}{m(i\omega + 1/\tau)}$

Induktsiya $\vec{D} = \varepsilon\vec{\xi} = \vec{\xi} + 4\pi\vec{P}$. Ikkinchi tomondan, $\frac{\partial\vec{P}}{\partial t} = j$ yoki spektral komponentlar uchun $i\omega \cdot P_\omega = j_\omega$. Demak,

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{4\pi e^2 N}{m\left(\omega^2 - i\frac{\omega}{\tau}\right)}$$

4. Doimiy bir jinsli $\vec{\xi}$ - elektr va $\vec{H}$ - magnit maydonlarida ($\vec{\xi} \perp \vec{H}$) joylashtirilgan metall (yarim o‘tkazgich)ning o‘tkazuvchan elektronlaridan tashkil topgan gaz uchun elektr o‘tkazuvchanlik tenzori hisoblansin.

Ye ch i sh:

Muvozanatsiz holat taqsimot funksiyasini $f = f_0 + f_1$ deb olamiz. f_0 - muvozanatli holat taqsimot funksiyasi va $f_1 \ll f_0$.

$\vec{\xi}$ bo‘yicha chiziqli yaqinlashuvda kinetik tenglama:

$$\frac{e}{\hbar}\left(\vec{\xi} + \frac{1}{c}\left[\vec{\xi}, \vec{H}\right]\right)\nabla_{\vec{k}} f = -\frac{f_1}{\tau};$$

$$\nabla_{\vec{k}} f \approx \nabla_{\vec{k}} f_0 = \frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon} \cdot \hbar\vec{v}$$

bo‘ladi. Shuni e’tirof etmoq lozimki, chiziqli yaqinlashuvda magnit maydonining ta’siri bo‘lmaydi. Shuning uchun tenglamaning chap qismida ($\vec{H}$ - bo‘yicha) ikkinchi yaqinlashuv saqlangan. Tenglama yechimi

$$f_1 = -e\tau\frac{\partial f_0}{\partial\varepsilon}\vec{v}\left(\vec{\xi} + \frac{e\tau}{mc}\left[\vec{\xi}, \vec{H}\right]\right)\left(1 + \omega^2\tau^2\right)^{-1}$$

Bu yerda $\omega = \frac{eH}{mc}$ - magnit maydonida elektronning aylanish chastotasi.

$\omega\tau \ll 1$ - kuchsiz magnit maydoni va $\omega\tau \gg 1$ - kuchli magnit maydoni uchun tok va elektr o‘tkazuvchanlik tenzorini hisoblash mustaqil ishlashga qoldirildi.

5. Diffuziyali yaqinlashuvda zarra energiyasining o‘rtacha muvozanat holatidagidek ekanligini ko‘rsating.

Ye ch i sh:

O‘rtacha energiya ma’lumki,

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\int \frac{p^2}{2m} f \, d\vec{p}$$

formulasi orqali hisoblanadi. Masala shartini bajarmoq uchun f- uchun (6.2) – formulasini tadbiq etmoq lozim (6.2) - ning keying ikki hadi p_x, p_y, p_z - larning toq funksiyasi, energiya ε – esa juft funksiya bo‘lganligi uchun ular nolga teng bo‘ladi. Shunday qilib

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{n}\int \frac{p^2}{2m} f_0 \, d\vec{p}$$

bo‘ladi va masala shartiga ijobiy javob beriladi.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR:

1. Landau L.D., Lifshits E.M. Statisticheskaya fizika (Teoreticheskaya fizika, Tom V), M.: "Nauka", 1976, ch.1, t-V.- 568 s.

2. Isixara A. Statisticheskaya fizika. Per.s angl.pod red. D.N.Zubareva i A.G.Bashkirova, M.: "Mir", 1973.- 472 s.

3. Anselm A.I. Osnovi statisticheskoy fiziki i termodinamiki. M.: «Nauka», 1973.- 423 s.

4. Reyf Fredrix. Statisticheskaya fizika. Per. s angl. pod. red. A.I.Shalnikova i A.O.Vaysenberga M.: «Nauka», 1986.- 336 s.

5. Rumer Yu.B., Rivkin M.Sh. Termodinamika, statisticheskaya fizika i kinetika – M.: Nauka, 1977.- 552 s.

6. Klimontovich Yu.L. Statisticheskaya fizika M.: Nauka, 1982.- 608s.

7. Kuni F.M. Statisticheskaya fizika i termodinamika. M.: «Nauka», 1981.- 351 s.

8. Belyaev N.M. Termodinamika. M.: Vis.shk. 1987.- 344 s.

9. To'raev E., Jo'raev Sh., To'raev Y. Termodinamika va satistik fizika. Toshkent, «Sharq», 2002.- 128 b.

10. Boydedaev A. Klassik statistik fizika. Toshkent, «O'qituvchi», 2003.- 352 b.

11. Brillyuen L. Kvantovaya statistika. Gos.nauch.-tex.izd. Ukraina, Kiyev, 1934-510s.

11. Mamatqulov R., Tursunov A.A., Mamatqulov B.R. Termodinamika va statistik fizikadan masalalar. Toshkent, «O'qituvchi», 2003.- 152 b.

12. Kvasnikov I.A. Termodinamika i statischicheskaya fizika. V 4-yox tomax. Uchebnoe posobie dlya vuzov. M.: Izd-vo MGU
T.1. Teoriya ravnovesnix sistem. Termodinamika. 2002.- 238 s.
T.3. Teoriya neravnovesnix sistem. 2003.- 448 s.
T.4. Kvantovaya statistika. 2005.- 352 s.

13. Levich V.G. Vvedenie v statisticheskuyu fiziku. G T Izd-vo.M. 1954.

14. Kubo R. Statisticheskaya mexanika. M., «Mir», 1967.- 452 s.

15. Xir K. Statisticheskaya mexanika, kineticheskaya teoriya i stoxasticheskie protsessi. M., «Mir», 1976.- 600s.

16. Leontovich M.A. Vvedenie v termodinamiku. Statisticheskaya fizika. M., «Nauka»,1983.- 416 s.

17. A.Teshaboev, S.Zaynobiddinov, Sh.Ermatov Qattik jism fizikasi. Toshkent, «Moliya» nashriyoti, 2001.- 324 b.

18. A.S. Vasilevskiy, V.V. Multanovskiy Statisticheskaya fizika i termodinamika. -M.: Prosveshchenie, 1985.- 256 s.

19. Yuri Galperin Statistical Physics. http://www.edu.ioffe.ru (Obrazovatelniy sayt dlya studentov).

20. A.A.Abdumalikov. R.Mamatkulov. Termodinamika va statistik fizika. Toshkent, «Voris nashriyoti» MChJ, 2006 - 392 b.

MUNDARIJA

So‘zboshi 3
Statistik fizika predmeti va uning vazifasi..... 4

1-bob. KONFIGURATSIYALI MUHIT VA EHTIMOLIYAT NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI..... 6

1.1-§ Konfiguratsiyali muhit. Liuvill teoremasi..... 6
1.2-§ Ehtimoliyat nazariyasining elementlari..... 11
1.3-§ Ehtimoliyatlarni qo‘shish va ko‘paytirish. Statistik bog‘liq emaslik 12
1.4-§ O‘rtacha qiymat va fluktuatsiya..... 15
Masalalar..... 17

2-bob. STATISTIK TAQSIMOT..... 22

2.1-§ Mikrokanonik taqsimot..... 22
2.2-§ Kanonik taqsimot..... 26
2.3-§ Kanonik taqsimotning xususiyatlari..... 30
2.4-§ Katta kanonik taqsimot..... 32
2.5-§ Mikrokanonik taqsimot orqali katta kanonik taqsimotni hosil qilish..... 34
Masalalar..... 37

3-bob. TERMODINAMIKANING STATISTIK ASOSI..... 41

3.1-§ Tashqi parametrlar va ish 41
3.2-§ Termodinamikaning birinchi qonuni 44
3.3-§ Tizimning termodinamik erkinlik darajalari 47
3.4-§ Kvazistatik jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonuni 49
3.5-§ Kvazistatik bo‘lmagan jarayonlar uchun termodinamika ikkinchi qonuni va entropiyaning oshishi.... 52
Masalalar..... 56

4-bob. BIR ATOMLI IDEAL KLASSIK GAZ..... 57

4.1-§ Termodinamik kattaliklarni hisoblash..... 57
4.2-§ Maksvell-Boltsman taqsimoti..... 61
4.3-§ Ideal gazning xarakterli impulslari 65
4.4-§ Ideal gazning holat tenglamasi 68
4.5-§ Potensial maydondagi ideal gazning xususiyatlari..... 70
4.6-§ Energiyaning teng taqsimlanganligi haqidagi teorema 72
Masalalar..... 73

5-bob. REAL GAZLAR STATISTIKASI.....75

5.1-§ Tizimdagi zarralarning o‘zaro ta’siri.....75
5.2-§ Real gazlarni statistik tekshirish..... ..76
Masalalar 81

6-bob. FENOMENOLOGIK TERMODINAMIKA.....83

6.1-§ Termodinamikaning umumiy qoidalari..... 83
6.2-§ Kalorik va termik koeffitsiyentlar..... 84
6.3-§ Termodinamika birinchi qonuniga asoslanib hosil qilinadigan kalorik koeffitsiyentlar orasidagi munosabatlar.....87
6.4-§ Termodinamika ikkinchi qonuniga asoslanib hosil qilingan kattaliklar orasidagi munosabatlar.....89
6.5-§ Termodinamik potensiallar 93
6.6-§ Issiqlik mashinasining foydali ish koeffitsiyenti 96
6.7-§ Elektr va magnit maydonida joylashgan tizimga termodinamika tadbig‘i.100
6.8-§ Termodinamika uchinchi qonuni 103
Masalalar.....105

7-bob. KVANT STATISTIKASI.....107

7.1-§ Kvant mexanikasidan ba’zi ma’lumotlar 107
7.2-§ Mikrozarralarning aynan o‘xshashlik prinsipi 110
7.3-§ Kvant tizimlarning statistik taqsimoti.....112
7.4-§ Boze-Eynshteyn va Fermi-Dirak taqsimotlari 116
7.5-§ Kvant va klassik taqsimotlarini taqqoslashtirish..... 120
7.6-§ Aynigan Fermi va Boze gazining ximik potensiali.....122
7.7-§ Fotonli gaz 125
7.8-§ Fononlar. Kristallar issiqlik sig‘imi.....128
7.9-§ Absolyut nol temperaturada metallardagi elektronli gaz ..... .132
7.10-§ Past temperaturalarda metallardagi elektronli gaz 136
7.11-§Ω, μ,T - parametrlarning termodinamik ma’nosi.....142
7.12-§ Suyuq geliy II xususiyatlari.....147
7.13-§ Suyuq geliy II-ning statistik nazariyasi.....150
7.14-§ Kvant statistikasi tarixi 157
Masalalar 160

8-bob. KO‘P KOMPONENTALI VA KO‘P FAZALI TIZIMLAR.....164

8.1-§ Kuchsiz eritmalar 164
8.2-§ Ko‘p atomli ideal gaz. Ideal gazlar aralashmasi 168
8.3-§ Ochiq tizim uchun termodinamik potensiallar.....171
8.4-§ Fazalar muvozanati shartlari. Gibbsning fazalar qoidasi..... 174
8.5-§ Faza o‘tishlari..... 177
Masalalar.....180

9-bob. FLUKTUATSIYA NAZARIYASI.....182

9.1-§ Fluktuatsiya va u orqali o‘lchov asboblarining o‘lchash aniqligiga chek qo‘yilishi.....182
9.2-§ Prujinali tarozi va oynachali galvanometrga fluktuatsiya ta’siri.....186
9.3-§ Broun harakatining nazariyasi 190
9.4-§ Belgilangan bosim ostida hajm fluktuatsiyasi.....197
9.5-§ Hajmda zarralar zichligining fluktuatsiyasi.....202
9.6-§ Yorug‘likning molekulyar sochilishi 203
Masalalar.....208

10-bob. MUVOZANATSIZ HOLATLAR VA FIZIK KINETIKA ASOSLARI.....212

10.1-§ Termodinamik muvozanatsiz holatlar 212
10.2-§ Cheksiz muhit uchun diffuziya, issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamalari va ularning yechimlari.....216
10.3-§ Boltsmanning kinetik tenglamasi 220
10.4-§ Zarralarning elastik to‘qnashuvi uchun erkin chopish uzunligi 224
10.5-§ Diffuziya koeffitsiyenti, elektr o‘tkazuvchanlik va issiqlik o‘tkazuvchanlikni Boltsman kinetik tenglamasiga asosan hisoblash.....227
10.6-§ Diffuziyali yaqinlashuv uchun taqsimot funksiyasi.....231
10.7-§ Korrelyativ funksiyalar uslubi.....236
10.8-§ Boltsmanning H - teoremasi.....241
Masalalar.....247
Foydalanilgan adabiyotlar 251

P.X. MUSAYEV

STATISTIK FIZIKA VA TERMODINAMIKA

Muharrir *B. Hayitov*
Kompyuterda sahifalovchilar *A. Asrorov, N. Musayeva*

Bosishga ruxsat etildi 08.02.2008. Qog'oz bichimi 60x84 1/16.
Hisob – nashr tabog'i 16, Adadi 1000.
Buyurtma № 92.

«IQTISOD – MOLIYA» nashriyotida tayyorlandi.
100084, Toshkent, H.Asomov ko'chasi, 7 – uy.
Hisob – shartnoma 40-2008.

«Toshkent tezkor bosmaxonasi» MCHJ da chop etildi
100200. Toshkent, Radial tor ko'chasi 10 uy.