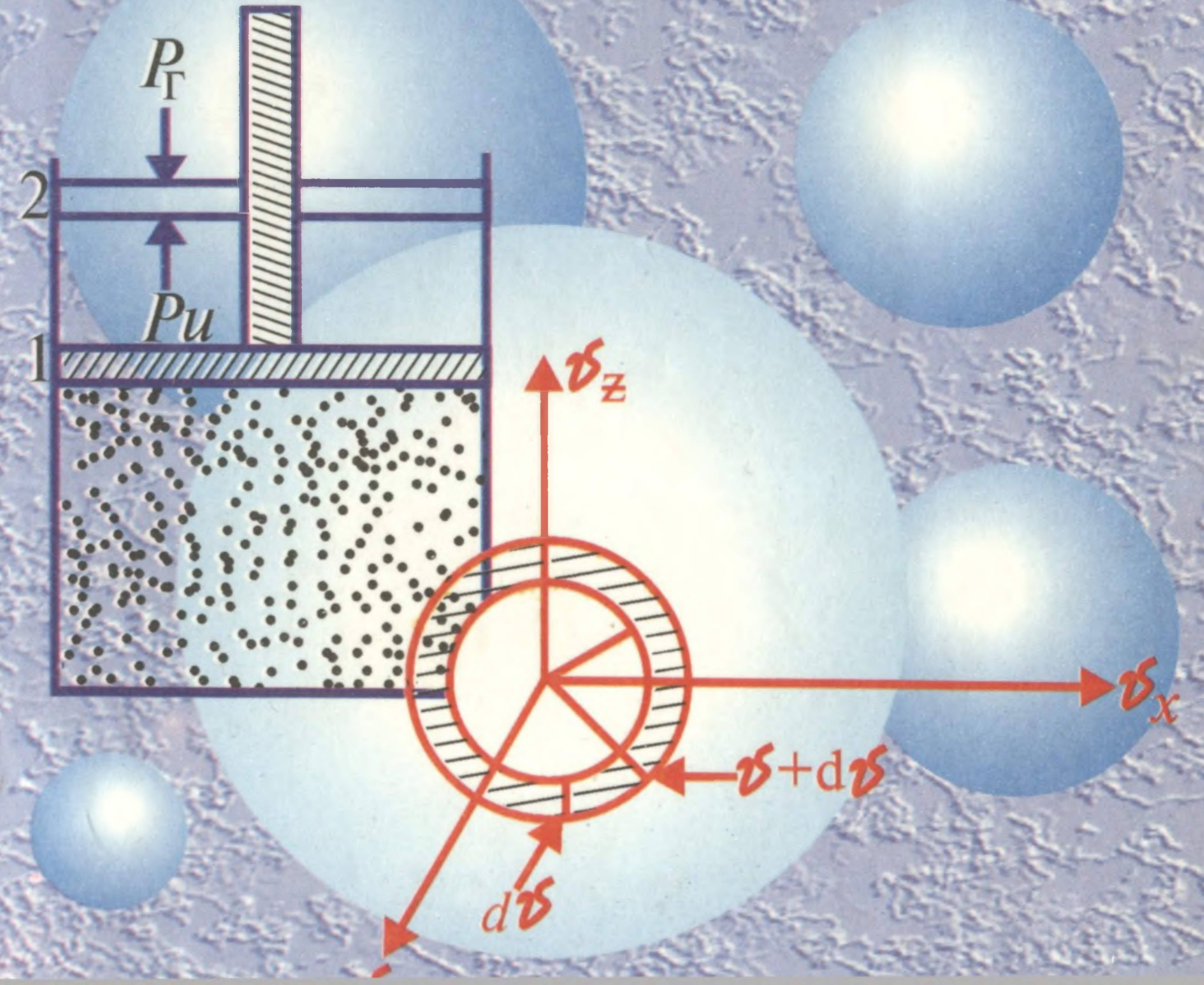
"ЎЗБЕКИСТОН"

КЛАССИК СТАТИСТИК ФИЗИКА

А. БОЙДЕДАЕВ

А. БОЙДЕДАЕВ

КЛАССИК СТАТИСТИК ФИЗИКА



А. БОЙДЕДАЕВ

КЛАССИК СТАТИСТИК ФИЗИКА

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги педагогика институтлари ва университетларнинг физика мутахассислиги бўйича таҳсил олаётган талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ — "ЎЗБЕКИСТОН" — 2003

Тақризчилар: А.А. АБДУМАЛИКОВ
Р. МАМАТҚУЛОВ

Муҳаррир Ю.МУЗАФФАРХЎЖАЕВ

Бойдедаев А.
Классик статистик физика.
Олий ўқув юртлари талабалари учун қўлланма. — Т.: "Ўзбекистон", 2003, — 352 б.

ISBN 5-640-02708-8

Китобда статистик физика ва статистик термодинамика асослари илмий ва услубий жиҳатдан ўзига хос тарзда баён қилинган ҳамда уларнинг муайян ҳолларга татбиқи келтирилган. Тақсимот функцияларининг услубий жиҳатдан янгича баён қилиниши янги термодинамик муносабатлар олинишига ҳамда мувозанатли статистик физика ва термодинамиканинг баъзи жиддий масалаларини (масалан, термодинамиканинг иккинчи ва учинчи қонунларини) янгича ва қулай баён этишга имкон беради.

Китоб педагогика институтлари ва университетларнинг физика мутахассислиги бўйича таҳсил олаётган юқори курслар талабаларига мўлжалланган. Китобдан шунингдек барча олий ўқув юртларининг табиий фанлар бўйича таҳсил олувчи талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

ББК 22.317

Б $\dfrac{1604010100-44}{\text{М}351(04)2001}$ 2003

Аҳмаджон Бойдедаев

КЛАССИК СТАТИСТИК ФИЗИКА

Бадиий муҳаррир *У. Солиҳов*
Техник муҳаррир *Т. Харитонова*
Мусаҳҳиҳ *Н. Умарова*
Компьютерда тайёрловчи *Ф. Тугушева*

Теришга берилди 12.04.02. Босишга рухсат этилди 16.04.03. Қоғоз бичими $84 \times 108^1/_{32}$.
Офсет босма усулида босилди. Шартли б.т. 18,48. Нашр т. 14,55. Нусхаси 1000.
Буюртма №330 Баҳоси шартнома асосида.

"Ўзбекистон" нашриёти, 700129. Тошкент, Навоий, 30.
Нашр № 197—2001.

Ўзбекистон Матбуот ва ахборот агентлигининг
Ғ. Ғулом номидаги нашриёт-матбаа ижодий уйи.
700129, Тошкент, Навоий, 30//700169.
Тошкент. У. Юсупов кўчаси, 86.

СЎЗ БОШИ

Бу китоб Тошкент Давлат педагогика институтида физика ихтисоси бўйича таҳсил олувчи талабалар учун ўқилган статистик физика ва термодинамика курси ҳамда семинар материаллари асосида ёзилди. Мазкур китобда статистик физика ва термодинамика асосларини етарли даражада содда баён этишга ҳаракат қилинди ва бу фанларни мустаҳкам эгаллашга кўмак бермоқ учун мисоллар ва масалалар (ечимлари билан) келтирилди.

Ушбу қўлланманинг асосий мақсади шу фаннинг асосларининг, қонун-қоидаларининг талабалар томонидан мукаммал эгалланишига қаратилган.

Физика асосий фанлар ичида етакчи ўринни эгаллайди. Статистик физика эса физиканинг асосий бўлимларидан биридир. Аммо уни асослашда бир қанча қийинчилик ва ноаниқликлар мавжуд. Шу сабабли, табиийки, статистик физика курсини баён этиш илмий ва услубий жиҳатдан мураккабдир.

Биз статистик физика асосини классик ва квант физиканинг асосий ғояларига таяниб ҳамда математик статистикадан бевосита фойдаланиб, ўзига хос янги усулда баён этишга ҳаракат қилдик.

Мазкур китоб "Классик статистик физика" ва "Квант статистик физика" деб номланган икки қисмдан иборат. Биринчи қисмда (I, III—VIII боблар) мувозанатли статистик физика асослари, мувозанатли термодинамиканинг асосий муносабатлари баён этилган. Иккинчи қисм "Квант статистик физика" квант тизим (система)ларининг мувозанатли ҳолатлари, уларнинг Бозе-Эйнштейн ва Ферми-Дирак тақсимотлари асосида тавсифланиши мувозанатли ҳолатни ўрганишдан номувозанатли ҳолатни ўрганишга ўтишда муҳим босқич ҳисобланадиган флуктуация назарияси баён этилган.

Китобнинг II боби эҳтимоллар назариясининг баъзи асосий тушунчаларига бағишланган.

Мазкур китобнинг қўлёзмасини ўқиб, ўз мулоҳазаларини билдирган ва қимматли маслаҳатлар берган профессорлар: А. Абдумаликов, М. Жўраевга, доцентлар: Р. Маматқулов, И. Исмоилов, Ж. Муҳиддиновларга муаллиф ўз миннатдорчилигини изҳор этади.

I БОБ

СТАТИСТИК ФИЗИКАНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ ВА ТАМОЙИЛЛАРИ

Узоқ вақт мустаҳкам ҳисобланган асосга
XX аср фани ҳужум қилишдан қўрқмади.

Г. ДАРБУ

КИРИШ

Жуда кўп зарралардан (молекулалар, атомлар, электронлар ва шу кабилардан ташкил топган тизим (система) *макроскопик (термодинамик) тизим* дейилади). Физиканинг классик механика ва квант механикаси бўлимлари бундай тизимнинг ҳолатини ва унинг хоссаларини зарралар динамик ҳаракатлари ва уларнинг ўзаро таъсири асосида ўрганади.

Тизимнинг бундай динамик микроҳолатининг вақт бўйича ўзгариши зарралар кўплиги ва уларнинг ҳаракати туфайли, ғоят мураккаб характерга эга. Унинг динамик ҳаракатларини амалда тадқиқ қилиш мумкин эмас. Аммо кўп заррали тизимда мураккаб ўзгаришни аниқлайдиган динамик қонуният билан биргаликда шундай статистик қонуният ҳам борки, уни ўрганиш статистик физиканинг вазифаси ҳисобланади.

Статистик қонуниятларни ўрганиш учун динамик микроҳолатларнинг қийматлари тўпламига қаралаётган тизим нусхалари (копиялари) тўплами мослаштирилади. Динамик микроҳолатлар билан фарқланадиган тизимнинг бу нусхалари тўплами *статистик ансамбл* дейилади. Статистик ансамбл унсур (элемент)ларининг ҳолатлари тасодифий функциянинг қийматлари орқали аниқланади. Шундай қилиб, статистик физикада статистик ансамбл унсурларининг микроҳолатларини ёки унга мос параметр қийматлари эҳтимоллари тақсимотини аниқлаш масаласи қўйилади.

Статистик физиканинг асосий вазифаси ана шу эҳтимоллар тақсимоти функциясига асосланиб макроскопик тизимнинг фундаментал қонунларини кашф этиш, тушунтириш, уни характерлайдиган катталиклар (параметрлар) орасидаги асосий муносабатларни топишдан иборат. Макроскопик тизимнинг хоссаларини тавсифлаш, унинг миқдорий муносабатларини аниқлаш (топиш) учун микрофизиканинг фундаментал қонунларидан фойдаланиш зарур бўлади. Макроскопик тизимнинг статистик қонуниятларини ўрганишда **микрофизика**нинг классик механика қонунларидан ёки квант механика қонунларидан фойдаланилишига қараб, статистик физика ***классик статистик физика*** ёки ***квант статистик физика*** дейилади.

Агар макроскопик тизим термодинамик мувозанат ҳолатида бўлса, бундай тизимнинг статистик қонунларини ва ундаги миқдорий муносабатларни мувозанатли статистик физика ўрганади. Бунда, кўпинча, "мувозанатли" деган сўз тушириб қолдирилади. Агар тизим номувозанат ҳолатда бўлса, бундай тизимнинг статистик хоссаларини номувозанатли статистик физика ўрганади.

Статистик физика асосида олинган ўртача катталиклар (моментлар), уларнинг ўзгаришлари, қонунлари макроскопик физикадаги (термодинамика, гидродинамика, газодинамика ва шу кабиллардаги) параметрлар, уларнинг ўзгаришлари, қонунларига мос келади. Шу маънода статистик физиканинг вазифаси макроскопик физика ва унинг қонунларини молекуляр атомистик тасаввурлардан келиб чиқиб асослашдан ҳам иборат.

Статистик физика бир томондан классик механика ва квант механиканинг услубларига таянса-да, иккинчи томондан, унинг математик услубларининг асосида эҳтимолликлар назарияси ётади.

Шундай қилиб, статистик физика назарий физиканинг бир бўлими бўлиб, у модданинг хоссаларини ҳар томонлама ва чуқур ўрганишда, ундаги физик ҳодисаларни тадқиқ этишда жуда зарурдир.

1.1-§. ТИЗИМ ВА УНИНГ ҲОЛАТИ

Макроскопик тизимлар ташқи тизимлар билан муносабатига қараб уч турга бўлинади. Агар қаралаётган тизим ташқи тизимлар (муҳит) билан ҳеч қандай алоқада бўлмаса, яъни улар билан иссиқлик (энергия) ҳам, зарралар (масса) ҳам алмашмаса, уни ***яккаланган тизим дейилади.*** Демак, яккаланган тизимнинг энергияси ва зарралар сони ўзгармайди, улар доимий бўлади. Агар тизим ташқи тизимлар билан иссиқлик контактида бўлиб, унинг энергияси ўзгариши мумкин бўлса-ю, аммо зарралари сони (массаси) доимий бўлса, уни ***берк тизим*** деб атаймиз. Ниҳоят, агар тизим ташқи тизимлар билан энергия ва масса алмашиниши туфайли унинг энергияси ва массаси (зарралар сони) ўзгарса, бундай тизим ***очиқ тизим*** дейилади. Макроскопик тизимнинг макроскопик (термодинамик) ҳолати шу тизимни аниқловчи (тавсифловчи) термодинамик параметрларнинг қийматлари билан аниқланади. Агар тизим термодинамик мувозанатда бўлса, таърифга кўра унинг термодинамик параметрларининг, масалан, температура, босим, зичлик, концентрацияларнинг қийматлари ўзгармайди. Бу мувозанат ҳолатда макроскопик тизимни аниқловчи параметрлар сони, яъни тизимнинг термодинамик эркинлик даражалари сони ф а з а л а р қ о и д а с и г а биноан аниқланади: *Эркинлик даражалари сони N тизимни ташкил этган компонентлар сони n га 2 ни қўшиб, тизимнинг фазалар сони r ни айириб ташланганига тенг:*

$$N = n + 2 - r.$$

1. Тизимнинг макроскопик (термодинамик) параметрлари. Тизимнинг мувозанатли макроскопик ҳолатини аниқловчи параметрлар икки турли: аддитив ва интенсив характерли бўлади. Масалан, тизимнинг зарралари сони N, ҳажми V (тизимнинг қисмлари орасидаги ўзаро таъсир эътиборга олинмаганда) энергияси E, энтропияси S аддитив катталиклардир, яъни тизимнинг катталиги (масалан, N ва V) тизим қисмларининг ўшандай катталикларининг йиғиндисига тенг. Масалан, $N = N_1 + N_2$, $V = V_1 + V_2$; N_1 N_2 ва V_1, V_2 тизим қисмларининг зарралари сонлари ва ҳажмларидир.

Тизимнинг параметрлари интенсив характерга эга бўлиши мумкин. Масалан, тизимнинг температураси T, босими P, зичлиги ρ интенсив параметрлардир, яъни тизимнинг қисмларига тегишли параметрлар унинг ўшандай параметрларига тенг.

Масалан, $T_1 = T_2 = T; \rho_1 = \rho_2 = \rho.$

2. Релаксация. Тизим бирор таъсир ёки таъсирлар сабабли номувозанатли ҳолатга келган бўлса, бу таъсирлар тўхтагандан кейин тизим маълум τ вақт ўтиши билан ўзининг термодинамик мувозанат ҳолатига келади. Бу жараён ***релаксация ҳодисаси*** дейилади ва τ вақт ***релаксация вақти*** дейилади.

си ҳолларда молекуляр-кинетик услубни ёки номувозанатли термодинамик услубни қўллаш мумкинлиги масаласини ҳал қилишга машҳур олимлар Н.Н. Боголюбов, И. Пригожин катта ҳисса қўшдилар [1, 2]. Номувозанатли термодинамика ва молекуляр-кинетикага тегишли ҳоллар билан кейинроқ танишамиз.

1.3-§. ТИЗИМНИНГ ДИНАМИК МИКРОСКОПИК ҲОЛАТЛАРИ

Тизимнинг ҳар бир зарраси классик механикада умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар билан аниқланади, квант механикасида эса (координаталар ёки импульслар ёки бошқа динамик катталикларга боғлиқ бўлган) тўлқин функция билан аниқланади.

Тизимни ташкил этган зарраларнинг умумлашган координаталари ва импульслари ёки тўлқин функциялари маълум бўлса, тизимнинг ҳолати аниқланган бўлади. Бундай усул билан аниқланган тизим ҳолатини *динамик микроскопик ҳолат* деб атаймиз.

Тизим зарраларининг ҳаракатлари, тўқнашишлари туфайли уларнинг координаталари ва импульслари ўзгаради. Демак, бундай динамик микроҳолат вақт ўтиши билан хатто тизим термодинамик мувозанатда бўлганда ҳам ўзгаради.

Умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар кўп ўлчовли фазонинг координата ўқлари деб қаралса, бундай кўп ўлчовли фазода ҳар бир нуқта тизимнинг динамик микроҳолатини ифодалайди. Бундай фазо тизимнинг ***фазавий фазоси***, динамик микроҳолатни ифодалайдиган нуқта эса ***фазавий нуқта*** дейилади. Маълумки, фазавий нуқта вақт ўтиши билан ўзгаради, фазавий фазода у фазавий траекторияя чизади.

Қаралаётган термодинамик мувозанатли тизимнинг ҳар бир заррасининг динамик ҳолатларини тавсифлайдиган ҳаракат тенгламаси, механика қонунларига асосан, вақтга нисбатан инвариантдир. Демак, мувозанатли тизимнинг динамик микроҳолатлари ва буларни геометрик тавсифлайдиган фазавий нуқталар тенг кучли бўлиб, улар бир-бирларига нисбатан афзалликларга ҳамда устунликларга эга эмас.

Шундай қилиб, динамик микроҳолат ва унга мос динамик параметрлар (катталиклар) вақт ўтиши билан ўзгаради, мувозанатдаги макроҳолат ва уни аниқлайдиган макропараметрлар эса ўзгармайди. Ўзгарувчи микроҳолатлар асосида ўзгармас макроҳолат, ўзгарувчи динамик катталиклар асосида эса макроскопик параметрлар қандай келиб чиқади, деган савол туғилади.

Энди биз микроҳолатлар билан макроҳолат орасидаги муносабатга, микроҳолатлардан қандай қилиб макроҳолат келиб чиқади, деган масалаларга тўхталамиз.

1.4-§. ТИЗИМНИНГ ДИНАМИК ПАРАМЕТРИ ВА УНИНГ ҚИЙМАТЛАРИ

Мувозанатдаги тизимнинг вақт ўтиши туфайли ҳосил бўлган барча динамик микроҳолатлари бир-бирига эквивалент (тенг кучли) бўлишига қарамасдан ички ва ташқи таъсирлар туфайли тизимнинг ихтиёрий физик катталик (параметр) $L(t)$нинг қийматларидан баъзилари кўпроқ вақт, баъзилари эса камроқ вақт кузатилади. Фараз қилайлик, L физик катталик

$$L_1,\ L_2, \ldots,\ L_i, \ldots$$

дискрет қийматларни қабул қилсин, бунда $N \to \infty$ кузатишлар ўтказилганда L_i қиймат n_i марта кузатилган бўлсин, яъни L_i қиймат n_i та динамик микроҳолатларда қайд этилган бўлсин. Бошқача айтганда, динамик катталик L нинг бирор қийматига мос келган микроҳолатлар қанча кўп бўлса, шу қийматга мос микроҳолатлар тўпламида тизим шунча узоқ (кўп) вақт бўлади ва, демак, L нинг қиймати кўп марта кузатилади. Бу эса тизим баъзи ҳолатларда кўпроқ, баъзи ҳолатларда камроқ вақт бўлади, демакдир.

Кузатишлар сони N га, динамик микроҳолатлар сони N_A га тенг бўлганда L_i қийматга мос келган динамик микроҳолатлар сони (тўплам элементлари сони) n_i ни L_i қийматининг ***айниш карраси*** ҳам дейилади. Яккаланган тизимда табиийки,

$$L_1 = L_2 = \ldots = L = \text{const}$$

бўлади. Демак, бу ҳолда айниш карраси N_A га тенг бўлади. Умуман мувозанатли тизимнинг бу L параметри қийматлари ўзгармайди ва демак, барча динамик ҳолатларда параметрнинг қийматлари ўзаро тенг бўлгани учун N марта кузатилганда барчасида битта бир хил қиймат олинади. L — бу сақланувчи параметр (масалан, эгнергия E). Умумий ҳолда динамик микроҳолатлар тенг кучли (бир-бирига эквивалент) бўлса-да, аммо физик катталикнинг қийматларига мос динамик ҳолатлар тўпламлари бир-биридан фарқ қилади.

1.5-§. ДИНАМИК КАТТАЛИКЛАРНИ ВАҚТ БЎЙИЧА ЎРТАЧАЛАШ

Агар тизим термодинамик мувозанатда бўлса, уни аниқлайдиган макроскопик параметрлар, таърифга биноан, ўзгармайди. Лекин шу тизимнинг динамик микроҳолати ўзгаради. Динамик микроҳолат вақт бўйича ўзгариши ҳамда ташқи таъсир туфайли тизимнинг ихтиёрий динамик катталиги L (масалан, энергия, импульс, импульс моменти ёки бошқа катталиклар) ўзгаради ва умумий ҳолда у ҳар хил қийматлар қабул қилади.

Тизимни $t \to \infty$ вақт давомида кузатилса, у барча динамик микроҳолатларда бўлади. (Бундай тизимни ***эргодик тизим*** дейилади).

Фараз қилайлик, L катталик

$$L_1,\ L_2, \ldots,\ L_i, \ldots \tag{4}$$

қийматларни қабул қилсин. $L(t)$ катталикни $N(N \to \infty)$ марта кузатайлик. Бу ҳолда динамик катталик $L(t)$нинг ўртача қиймати қуйидагича аниқланади:

$$\overline{L_t} = \frac{1}{N} \sum_i^N L_i,\ N \to \infty. \tag{5}$$

Агар N та тажриба ўтказилганда (4) қийматлар мос равишда

$$n_1,\ n_2,\ \ldots,\ n_i \ldots$$

марта келиб чиққан бўлса, ўртача $\overline{L_t}$

$$\overline{L_t} = \frac{1}{N} \sum_i^{L\text{нинг қийматлари сони}} n_i,\ L_i,\ N \to \infty \tag{6}$$

йиғинди билан аниқланади. Ҳар бир тажриба ўтказиш вақтини Δt га тенг деб фараз қилсак, у ҳолда умумий кузатиш вақти $t = N\Delta t$ га, n_i та кузатиш вақтини Δt_i га тенг дейилса, динамик катталикнинг вақт бўйича ўртачаси (6)ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\overline{L_t} = \frac{1}{t} \sum_i L_i \Delta t_i,\ t \to \infty. \tag{7}$$

Тизимнинг динамик микроҳолати вақт бўйича узлуксиз ўзгарса, унга мос бўлган L катталикнинг қиймати ҳам узлуксиз ўзгаради. L, $L + dL$ оралиқдаги $L(t)$ нинг қийматларига мос келган вақтни $dt_L = \Delta t dn_L$ билан белгиласак, динамик катталикнинг вақт бўйича ўртачаси (6) ва (7)ни

$$\overline{L_t} = \frac{1}{N}\int_0^N L_n dn_l, \tag{8}$$

$$\overline{L_t} = \frac{1}{t}\int_0^t L(t)dt \tag{9}$$

кўринишларда ёзиш мумкин.

Бу ерда шуни таъкидлаш лозимки, $t \to \infty$ да ўртача катталик $\overline{L_t}$ тажриба (кузатиш) бошланган вақтга боғлиқ эмас, яъни тизим термодинамик мувозанатда бўлганда $\overline{L_t}$ вақтга боғлиқ эмас. Бу эса макроҳолат ва тизимдаги флуктуацияларнинг вақтга боғлиқ эмаслигини кўрсатади.

Маълумки, мувозанат ҳолатда тизимнинг тажрибада кузатиладиган макроскопик катталиклари (масалан, температура, босим, зичлик ва бошқалар) ўзгармайди. Тажрибадан олинган бу катталикларни $\overline{L_t}$ га тенг деб қабул қилинади, бошқача айтганда, $\overline{L_t}$ макроскопик физикадаги катталикнинг ўзидир.

Амалда динамик катталикларни вақт бўйича ўртачалаш мумкин эмас. Ҳақиқатан ҳам, динамик микроҳолатни ва, демак, динамик катталик $L(t)$ ни t моментда аниқлаш учун тизимни ташкил этган ҳамма зарраларнинг ҳолатини билиш зарур. Ҳар бир зарра s эркинлик даражасига эга бўлса, N та заррадан иборат тизимнинг динамик микроҳолатини аниқлаш учун квант механикасида Ns та иккинчи даражали дифференциал тенгламалар тизимини, классик механикада $2Ns$ та биринчи тартибли каноник дифференциал тенгламалар тизимини ечиш зарур. Табиийки, динамик микроҳолатни аниқ билиш (интеграл доимийларини аниқлаш) учун яна $2Ns$ та қўшимча (чегаравий, бошланғич) шартлар берилиши керак. Масалан, бирлик ҳажмдаги газда 10^{20} дона бир атомли зарра бўлсин. Классик механикада ҳар бир зарранинг ҳолатини аниқлаш учун учта иккинчи тартибли дифференциал тенглама (Ньютоннинг иккинчи қонунига асосан ҳаракат тенгламалари) ёки олтита биринчи тартибли дифференциал тенглама (Гамильтон каноник тенгламалари) ечилиши зарур. Демак, бирлик ҳажмдаги газнинг динамик микроҳолатини аниқлаш учун $6 \cdot 10^{20}$ та биринчи тартибли дифференциал тенгламалар тизими

$$\frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i}; \ \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad i = \overline{1,3N} \tag{10}$$

ни ечиш зарур; бунда H — тизим гамильтониани; p_i, q_i — умумлашган импульслар ва умумлашган координаталар. Бундан ташқари, тизим зарраларининг ҳолатини аниқ билиш учун $6 \cdot 10^{20}$ та интеграл доимийларни аниқлаш зарур. Бунинг учун $6 \cdot 10^{20}$ та қўшимча (бошланғич, чегаравий) шартлар берилиши керак. Бундай катта сондаги тенгламалар тизимини секундига 10 млрд, ҳатто 100 млрд. операция бажарадиган ЭҲМ ҳам уддалай олмайди.

Агар тизим номувозанат ҳолатда бўлса, унга тегишли динамик катталикни ўртачалаш масаласи мураккаблашади.

Шундай қилиб, макроскопик параметрларни микрофизика (классик механика ёки квант механикаси) асосида аниқлашда боши берк кўчага кириб қолингандай. Аммо статистик физикада бу масалани ҳал этиш йўли топилди.

1.6-§. СТАТИСТИК МИКРОҲОЛАТ. СТАТИСТИК АНСАМБЛЬ

Статистик физикада статистик ансамбль тушунчаси киритилади (уни биринчи марта америкалик олим В. Гиббс киритган). Бу тушунчага биноан, тизим билан термодинамик жиҳатдан айнан бир хил бўлган, аммо динамик жиҳатдан (тизим зарраларининг ҳолатлари жиҳатдан) фарқли бўлган жуда кўп тизимлар тўплами (ансамбли) тасаввур этилади. Бу тизимлар биз қараётган реал тизимнинг копиялари (нусхалари) деб қаралади.

Гиббснинг бу фундаментал тушунчаси — статистик ансамбль ва унинг элементларини яққолроқ тушуниш учун қуйидаги оддий мисолларни қарайлик.

Маълум идиш ичида битта зарра ҳаракатда бўлсин. Ўзининг ҳаракати ва идиш девори билан тўқнашишлари туфайли зарранинг динамик ҳолати вақт бўйича ўзгаради.

а) Фараз қилайлик, зарра идиш девори билан қайишқоқ (эластик) тўқнашсин, яъни энергия алмашиниши содир бўлмасин. Бу ҳолда зарранинг импульси p ва координати q ўзгариши туфайли динамик микроҳолат ўзгаради, аммо зарранинг энергияси ўзгармайди. Бундай динамик микроҳолатлар тўпламига энергияси бир хил бўлган, вақт бўйича ўзгармайдиган, аммо ҳар хил қийматли тасодифий катталиклар p, q билан аниқланадиган статистик микроҳолатлар постулат сифатида мослаштирилади. Қаралаётган зарранинг копиялари (нусхалари) ана шу статистик микроҳолатларда турибди деб қаралади ва бу копиялар (нусхалар)ни ***зарранинг статистик ансамбли*** деб аталади.

Шундай қилиб, битта реал зарра ўрнида чексиз кўп зарралар тасаввур этилиб, улар вақт бўйича доимий деб қаралади; статистик ансамбль элементлари — бу ҳар хил динамик микроҳолатлардаги зарранинг нусхалари. Энди бундай микроҳолатларни ва, демак, ансамбль элементларини тасодифий деб қаралиб, унинг содир бўлиш эҳтимолликлари ҳақидаги масалани ечиш лозим бўлади. Динамик микроҳолатлар тенг кучли (эквивалент) бўлгани ва уларнинг ҳар бирига постулат сифатида статистик микроҳолат мослаштирилгани туфайли бу статистик микроҳолат тенг кучли, яъни тенг эҳтимоллидир. Бу статистик микроҳолатларнинг энергияси қийматлари бир хил. Бир хил энергияли ҳолатларга бир хил эҳтимоллик мос келади.

Эркин зарра энергияси $E = p^2/2m$ доимий (ўзгармайди). Статистик физикада яккаланган (яъни энергияси ўзгармайдиган) тизимнинг микроҳолатлари тенг (текис) эҳтимолли деб, постулат сифатида қабул қилинади[1].

б) Зарра идиш девори билан тўқнашганда энергия алмашиниши содир бўлиши мумкин бўлсин. Бу ҳолда зарра идиш девори билан контактда бўлгани, идиш эса ташқи тизимлар билан контактда бўлгани сабабли, унинг энергияси $(0, \infty)$ оралиқда ўзгаради. Демак, микроҳолатлар зарра энергияси E нинг $(0, \infty)$ оралиқдаги қийматларига мос ёки p^2 нинг $(0, \infty)$даги қийматларига мос равишда ўзгаради. Энергия E (ёки p ва q)ни тасодифий катталик деб қараб, ҳар бир динамик микроҳолатга статистик ансамбль элементи мослаштирилади.

---

[1] Динамик (механик) нуқтаи назардан тенг кучли (эквивалент) ҳолатларга эга бўлган заррани статистик ансамбль билан алмаштиришда статистик физикадаги микроҳолатларнинг текис, тенг эҳтимоллиги ҳам ўз аксини топади.

Шундай қилиб, битта зарранинг вақт бўйича ўзгариши туфайли ҳосил бўлган динамик микроҳолатлар тўплами ўрнига шундай зарраларнинг вақт бўйича ўзгармайдиган статистик микроҳолатлари тўплами — статистик ансамбль мослаштирилади ва бундай ҳар бир заррани ва унга мос микроҳолатни тасодифий катталик деб қаралади. Қуйидаги асосий постулатни қабул қиламиз: *статистик микроҳолатлар тенг эҳтимолли*[1]. Демак, статистик ансамбль элементлари ҳам тенг эҳтимолли. Бу постулат асосида статистик физиканинг асосини баён этишнинг, тақсимот функцияларини исбот қилишнинг янги имконияти туғилади.

Фараз қилайлик, идишдаги N та заррадан иборат газ идиш девори билан энергия алмаштириши мумкин бўлсин. Газ зарраларининг ҳаракатлари туфайли газнинг динамик микроҳолатлари вақт бўйича ўзгаради. Тизимнинг энергияси E умумий ҳолда $(0, \infty)$ оралиқда ўзгаради.

Умумий ҳолда ҳар хил энергияли динамик микроҳолатларнинг ҳар бирига, Гиббс ғоясига биноан, статистик микроҳолат мослаштирилади. Тизимнинг умумлашган координаталари $q_1, q_2, ..., q_i, ...$ ва умумлашган импульслари $p_1, p_2, ..., p_i, ...$ ни вақт бўйича ўзгармайдиган тасодифий катталиклар билан алмаштирилади. Ҳар бир статистик микроҳолат шу тасодифий катталикларнинг қийматлари орқали аниқланади.

Шундай қилиб, тизимнинг вақт ўзгариши туфайли содир бўладиган динамик микроҳолатларининг тўпламига шу тизимнинг вақт бўйича ўзгармайдиган микроҳолатлари тўплами — статистик микроҳолатлар тўплами, (таъриф бўйича) мослаштирилади. Статистик микроҳолатлардаги тизим нусхаларининг тўпламини *тизимнинг статистик ансамбли* дейилади.

Демак, мувозанатли статистик физикада (статистик ансамбль тушунчасига асосан) тизимнинг динамик микроҳолатлари тўпламига вақт бўйича ўзгармайдган қаралаётган динамик тизим нусхалари тўплами мослаштирилади. Бу мослаштиришнинг фундаментал аҳамияти шундаки, динамик катталик қийматлари тўплами статистик ансамбль тушунчаси асосида тасодифий катталик қийматлари тўплами би-

---

[1] Ҳозиргача статистик физикада бундай постулат фақат яккаланган тизим учун ўринли деб қабул қилинган эди.

лан алмаштирилади. Статистик физикада ҳар иккала қийматлар тўпламлари, бир-бирига айнан тенг деб қабул қилинади. Бу тенглик эса эргодик теореманинг маъносини ташкил этади.

1.7-§. МИКРОҲОЛАТЛАР БЎЙИЧА ЎРТАЧАЛАШ

Фараз қилайлик, L тасодифий катталик

$$L_1,\ L_2,\ \ldots\ L_i,\ \ldots \tag{11}$$

қийматларни қабул қилиши мумкин бўлсин. Агар N марта тажриба ўтказилганда L тасодифий катталикнинг (11) қийматлари мос равишда

$$n_1,\ n_2,\ \ldots\ n_i,\ \ldots$$

марта келиб чиққан бўлса, ўртача қиймат

$$\overline{L}_N = \frac{1}{N}\left(n_1 L_1 + n_2 L_2 + \ldots n_i L_i + \ldots\right) = \frac{1}{N}\sum_i n_i L_i,\ \sum_i n_i = N \tag{12}$$

тенглик асосида топилади; бунда n_i катталик L нинг L_i қиймати келиб чиқиши сони.

$$W_i = \frac{n_i}{N},\ i = 1, 2, 3, \ldots \tag{13}$$

белгилашни киритиб (12)ни

$$\overline{L}_N = \sum_i W_i L_i \tag{14}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Ҳар бир ўлчаш Δt вақт давом этган бўлса, $n_i = \Delta t_i / \Delta t$ каби ёзиш мумкин. Бу ҳолда (13) нисбатни

$$W_i = \frac{\Delta t_i}{t},\ t = N\Delta t \to \infty \tag{15}$$

кўринишда ёзиш мумкин. $W_i = n_i/N$ нисбат ноль билан бир орасида ўзгаради. $N \to \infty$ бўлганда, агар $W_i = n_i/N$ нисбат аниқ бир қийматга (лимитга) интилса, уни L тасодифий катталикнинг L_i қиймат қабул қилиши эҳтимоли деб қабул қилинади[1].

Бу ҳолда, (13) ёки (15) га асосан, агар тасодифий катталик L нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари

---

[1] Эҳтимоллик ва унга тегишли баъзи тушунча ҳамда теоремалар II бобда келтирилади.

L_1, L_2 ..., L_i, ... нинг эҳтимолликлари W_1, W_2 ..., W_i, ... берилган бўлса, уларни мос равишда кўпайтириб, сўнг йиғиб ўртача қийматни (моментни) (14) тенглик асосида топилади. Шундай қилиб, статистик физикадаги асосий масаланинг ечилиши эҳтимоллар тақсимоти W_1, W_2 ..., W_i, ... нинг берилишига боғлиқ бўлиб қолди.

Агар тасодифий катталик L узлуксиз ўзгарса, у ҳолда L катталикнинг L, $L + dL$ оралиқда бўлиш эҳтимоллигини $dW(L)$ билан белгиласак, (14) ифода ўрнига қуйидагини ёзилади:

$$\overline{L_N} = \int_{(L)} L dW(L) \tag{16}$$

ёки

$$dW(L) = \frac{\partial W(L)}{\partial L} dL = f(L)dL,$$

тенгликдан фойдалансак:

$$\overline{L_N} = \int_{(L)} L f(L) dL, \tag{17}$$

бунда

$$f(L) = \frac{\partial W(L)}{\partial L} \tag{18}$$

эҳтимолликлар зичлиги. Физикада (18)ни эҳтимолликлар тақсимот функцияси дейилади. Демак, бу ҳолда ўртача арифметик қиймат $\overline{L_N}$ ни топиш учун эҳтимоллар зичлиги $f(L)$ ни билиш зарур.

Эҳтимолликлар учун қуйидаги нормалаш шарти ўринли: узлукли (дискрет) ҳол учун:

$$\sum_i W_i = 1, \tag{19}$$

узлуксиз ҳол учун:

$$\overline{L_N} = \int_{(L)} dW(L) = \int_{(L)} f(L)dL = 1. \tag{20}$$

Эргодик теорема: ***вақт бўйича олинган ўртача $\overline{L_t}$ билан тасодифий қийматлар тўплами бўйича олинган ўртача ўзаро тенг, яъни***

$$\overline{L_t} = \overline{L_N}. \tag{21}$$

Демак, макроскопик параметрни аниқлаш учун эҳтимолликлар тақсимоти W_1, W_2 ..., W_i, ... ёки эҳтимолликлар зичлиги $f(L)$ни аниқлаш — статистик физиканинг марказий масаласи эканлиги аён бўлади. Эргодик теоремага асосан вақт бўйича ўртачалаш микроҳолатлар бўйича ўртачалаш билан алмаштирилади. Номувозанат ҳолатни бу теорема асосида қарашда жиддий қийинчиликка дуч келишади, чунки макроскопик параметрлар (бундай тушунчаларни киритиш мумкин бўлган ҳолларда) вақтга боғлиқ. Шу сабабли вақтга боғлиқ микроҳолатлар ва, демак, вақтга боғлиқ тасодифий катталиклар киритилади; сўнгра уларнинг қийматларининг эҳтимоллари асосида аниқланган ўртача қийматни тажрибадан олинган физик катталикка айнан тенглаштирилади.

1.8-§. МИКРОҲОЛАТЛАР ВА УЛАРНИНГ ЭҲТИМОЛЛИКЛАРИ

Статистик ансамбль назарияси ва тақсимот функцияларини қатъий асослаш ҳозиргача ечилмаган муаммодир (қ. масалан, [5] 27-бет). Бунинг асосий сабабларидан бири, бизнингча, динамик ва статистик микроҳолатлар, статистик ансамбл ва унинг элементлари ва микроҳолатлар борасидаги тушунчаларни талқин этишда ноаниқликлар борлиги туфайлидир. Биз қуйида шу тушунчаларга тўхталамиз.

Мувозанатдаги тизимнинг динамик микроҳолатлари шарт-шароит ўзгармаганда тенг кучли ҳолатларнинг бири иккинчисидан афзаллиги ёки камчилиги йўқ деб айтган эдик. Динамик ҳолатлар динамик тенгламалар асосида аниқланади, бу тенгламалар эса вақт алмашинишига нисбатан инвариантдир, шунинг учун хатто улар қайтувчан эканлигини ҳам айтган эдик. Ана шу динамик микроҳолатларга таъриф асосида мослаштирилган статистик микроҳолатлар тенг эҳтимолли ёки узлуксиз ҳолда текис тақсимотга эга. Ҳозирда фақат яккаланган тизимнинг микроҳолатларини тенг эҳтимолли ёки текис тақсимотга эга деб, асосий постулат сифатида қабул қилинади. Биз эса постулат сифатида мувозанатдаги тизимларнинг статистик микроҳолатлари тенг эҳтимолли ёки текис тақсимланган деб қабул қиламиз. Бу асосий постулатга асосан, статистик ансамбль элементларининг эҳтимоллари ҳам тенг эҳтимолли ёки текис тақсимланган. Бошқача айтганда, ўз маъноларига кўра, динамик микроҳолатлар тўплами статистик микроҳолатар тўплами ва статистик ансамбль элементлари тўплами эквивалент тўпламлардир.

Биз юқорида L физик катталикнинг қабул қилиши мумкин бўлган L_i қийматлари ва уларнинг W_i эҳтимоллари ($i = 1, 2,...$) умумий ҳолда ҳар хил дедик. N марта тажрибалар ўтказилганда L_i қиймат n_i марта келиб чиқади, деб фараз этилди.

Ана шу L_i қийматга мос тизимнинг i-микроҳолати мавжуд дейилса, бундай микроҳолатлар эҳтимолликлари, табиийки умумий ҳолда ҳар хил бўлиши лозим. Асосий постулатга асосан, статистик микроҳолатнинг эҳтимоллиги I/N билан аниқланади. Аммо N марта ўлчанганда n_i марта статистик микроҳолатнинг келиб чиқиши L_i қийматнинг эҳтимоллигини аниқлайди, яъни L_i нинг келиб чиқиш эҳтимоли $W_i = n_i/N$ нисбатни аниқлайди. Биз тизимнинг L_i га мос W_i эҳтимолли микроҳолати тушунчасини киритамиз. Умумий ҳолда W_1, W_2, ... W_i ... лар ҳар хил бўлгани учун микроҳолатлар ҳам ҳар хил бўлади. i-микроҳолатнинг эҳтимоллиги $W_i = n_i(I/N)$ — бу эҳтимолликларни қўшиш теоремасига асосан, n_i та статистик микроҳолатдан ихтиёрий бирортасининг келиб чиқиш эҳтимоллигидир. Асосий постулатга асосан статистик микроҳолатнинг эҳтимоллиги $(1/N)$га тенг. Шундан кўринадики, микроҳолатлардаги статистик микроҳолатлар сони n_i микроҳолатни аниқлашда жуда муҳим аҳамиятга эгадир. Бу n_i ни i-микроҳолатнинг ***термодинамик эҳтимоллиги*** дейилади. Бу ерда шуни таъкидлаймизки, тажрибалар сони ёки кузатишлар сони N, дискрет ҳол бўлганда, статистик ҳолатлар сони яъни ансамбль элементлари сони N_A га каррали бўлиши талаб этилади. Акс ҳолда қаралаётган тизимнинг микроҳолатлари тўплами қаралаётган тизимнинг макроҳолатини тавсифлаб беролмай қолади. Демак,

$$N = kN_A$$

шарт бажарилиши талаб этилади. Бунда k — 1, 2, 3 ...; N_A — статистик микроҳолатлар (ансамбль элементлари) сони.

Энди шу L_1, L_2,... L_i, ... қийматлар эҳтимолларига мослаштирилган микроҳолатлар эҳтимолликлари W_1, W_2, ... W_i ... тақсимотини аниқлайлик.

1.9-§. МИКРОҲОЛАТЛАР ЭҲТИМОЛЛИКЛАРИ ТАҚСИМОТИ

Ҳозирги замон статистик физикасида ташқи тизимлар билан иссиқлик (энергия) контактида бўлган тизимнинг микроҳолатларидаги энергия қийматлари Гиббснинг каноник тақсимоти билан тавсифланади. Аммо буни асослаш учун мавжуд усулларда яккалган тизимнинг микроҳолатларининг тенг тақсимланиши ёки текис тақсимланиши ҳақидаги асосий постулатдан ташқари бир қанча шартлар ҳам бажарилиши талаб этилади. Шу сабабли, машҳур олим Р. Кубо статистик физиканинг асосланишида кўпгина ноаниқликлар мавжуд деганда, Д.Н. Зубарев эса ансамбль назариясини яратиш ҳамда эҳтимолликлар тақсимоти функциясини асослаш мураккаб муаммо бўлиб, хатто бу муаммони қандай даражада ҳал қилиш мумкинлиги ҳам ноаниқ эканлигини айтганда тўла ҳақлидирлар. Чунки бугунда ансамбллар назариясининг ҳамда тақсимот функцияларининг асосланишини назарий-мантиқий жиҳатдан мукаммал деб бўлмайди. Шу сабабли ҳам статистик физиканинг асосларини баён этишда бир қатор муаммолар мавжуддир.

Энди юқорида келтирилган асосий тушунчаларга таяниб, шу муаммолар устида тўхталамиз.

Ташқи муҳит билан энергетик контактда бўлган тизимнинг статистик микроҳолатлари ва уларга мос энергияси (бу тасодифий катталик)нинг қийматлари эҳтимолликлари асосий постулатга асосан узлуксиз ҳолда текис тақсимланган ёки дискрет ҳолда тенг эҳтимолли бўлади. Энергиянинг қийматларини

$$E_1 \leq E_2 \leq \dots \leq E_{i-1} \leq Ei \leq \dots$$

тартибда белгилайлик; бунда энергиянинг қиймати E_i га тенг бўлишлиги, шу вақтнинг ўзида унинг E_1, E_2 та, ... E_i ... қийматларга тенг эмаслигини тақозо этади. Энергиянинг бундай қийматлари эҳтимолликлари текис тақсимланган (тенг эҳтимолли) бўлмай, улар (O, E) энергия оралиғи узунлигининг қийматлари эҳтимолликлари билан аниқланади. Юқоридаги L нинг қийматлари (11) ни оралиқ узунлигининг қийматлари деб тушуниш керак. Статистик физика асосини баён этишга аниқлик киритиладиган бундай муҳим фикрни ҳар доим назарда тутмоқ лозим.

Энергиянинг қийматлари узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда энергия қиймати (O, E) оралиқда бўлмасин; E, $E + dE$ да бўлиши эҳтимоли, яъни "вектор" E нинг қиймати E, $E + dE$ да бўлиш эҳтимоли $dW(E)$ ни аниқлайлик. Бу $dW(E)$ мураккаб воқеа эҳтимолидир: E "Вектор"нинг учи E, $E + dE$ да бўлиш

Биз юқорида L физик катталикнинг қабул қилиши мумкин бўлган L_i қийматлари ва уларнинг W_i эҳтимоллари ($i = 1, 2, ...$) умумий ҳолда ҳар хил дедик. N марта тажрибалар ўтказилганда L_i қиймат n_i марта келиб чиқади, деб фараз этилди.

Ана шу L_i қийматга мос тизимнинг i-микроҳолати мавжуд дейилса, бундай микроҳолатлар эҳтимолликлари, табиийки умумий ҳолда ҳар хил бўлиши лозим. Асосий постулатга асосан, статистик микроҳолатнинг эҳтимоллиги I/N билан аниқланади. Аммо N марта ўлчанганда n_i марта статистик микроҳолатнинг келиб чиқиши L_i қийматнинг эҳтимоллигини аниқлайди, яъни L_i нинг келиб чиқиш эҳтимоли $W_i = n_i/N$ нисбатни аниқлайди. Биз тизимнинг L_i га мос W_i эҳтимолли микроҳолати тушунчасини киритамиз. Умумий ҳолда W_1, W_2, ... W_i ... лар ҳар хил бўлгани учун микроҳолатлар ҳам ҳар хил бўлади. i-микроҳолатнинг эҳтимоллиги $W_i = n_i(I/N)$ — бу эҳтимолликларни қўшиш теоремасига асосан, n_i та статистик микроҳолатдан ихтиёрий бирортасининг келиб чиқиш эҳтимоллигидир. Асосий постулатга асосан статистик микроҳолатнинг эҳтимоллиги $(1/N)$га тенг. Шундан кўринадики, микроҳолатлардаги статистик микроҳолатлар сони n_i микроҳолатни аниқлашда жуда муҳим аҳамиятга эгадир. Бу n_i ни i-микроҳолатнинг ***термодинамик эҳтимоллиги*** дейилади. Бу ерда шуни таъкидлаймизки, тажрибалар сони ёки кузатишлар сони N, дискрет ҳол бўлганда, статистик ҳолатлар сони яъни ансамбль элементлари сони N_A га каррали бўлиши талаб этилади. Акс ҳолда қаралаётган тизимнинг микроҳолатлари тўплами қаралаётган тизимнинг макроҳолатини тавсифлаб беролмай қолади. Демак,

$$N = kN_A$$

шарт бажарилиши талаб этилади. Бунда k — 1, 2, 3 ...; N_A — статистик микроҳолатлар (ансамбль элементлари) сони.

Энди шу L_1, L_2,... L_i, ... қийматлар эҳтимолларига мослаштирилган микроҳолатлар эҳтимолликлари W_1, W_2, ... W_i ... тақсимотини аниқлайлик.

1.9-§.МИКРОҲОЛАТЛАР ЭҲТИМОЛЛИКЛАРИ ТАҚСИМОТИ

Ҳозирги замон статистик физикасида ташқи тизимлар билан иссиқлик (энергия) контактида бўлган тизимнинг микроҳолатларидаги энергия қийматлари Гиббснинг каноник тақсимоти билан тавсифланади. Аммо буни асослаш учун мавжуд усулларда яккалган тизимнинг микроҳолатларининг тенг тақсимланиши ёки текис тақсимланиши ҳақидаги асосий постулатдан ташқари бир қанча шартлар ҳам бажарилиши талаб этилади. Шу сабабли, машҳур олим Р. Кубо статистик физиканинг асосланишида кўпгина ноаниқликлар мавжуд деганда, Д.Н. Зубарев эса ансамбль назариясини яратиш ҳамда эҳтимолликлар тақсимоти функциясини асослаш мураккаб муаммо бўлиб, хатто бу муаммони қандай даражада ҳал қилиш мумкинлиги ҳам ноаниқ эканлигини айтганда тўла ҳақлидирлар. Чунки бугунда ансамбллар назариясининг ҳамда тақсимот функцияларининг асосланишини назарий-мантиқий жиҳатдан мукаммал деб бўлмайди. Шу сабабли ҳам статистик физиканинг асосларини баён этишда бир қатор муаммолар мавжуддир.

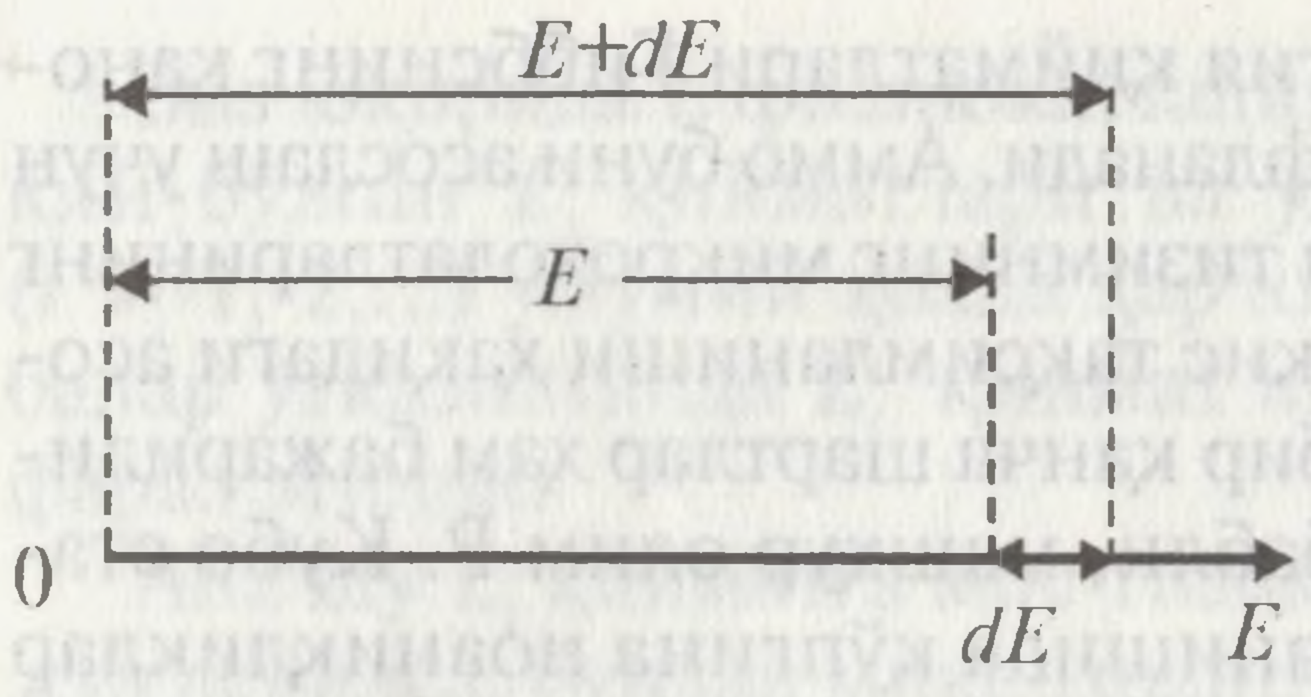
Энди юқорида келтирилган асосий тушунчаларга таяниб, шу муаммолар устида тўхталамиз.

Ташқи муҳит билан энергетик контактда бўлган тизимнинг статистик микроҳолатлари ва уларга мос энергияси (бу тасодифий катталик)нинг қийматлари эҳтимолликлари асосий постулатга асосан узлуксиз ҳолда текис тақсимланган ёки дискрет ҳолда тенг эҳтимолли бўлади. Энергиянинг қийматларини

$$E_1 \leq E_2 \leq ... \leq E_{i-1} \leq Ei \leq ...$$

тартибда белгилайлик; бунда энергиянинг қиймати E_i га тенг бўлишлиги, шу вақтнинг ўзида унинг E_1, E_2 та, ... E_i ... қийматларга тенг эмаслигини тақозо этади. Энергиянинг бундай қийматлари эҳтимолликлари текис тақсимланган (тенг эҳтимолли) бўлмай, улар $(O,\ E)$ энергия оралиғи узунлигининг қийматлари эҳтимолликлари билан аниқланади. Юқоридаги L нинг қийматлари (11) ни оралиқ узунлигининг қийматлари деб тушуниш керак. Статистик физика асосини баён этишга аниқлик киритиладиган бундай муҳим фикрни ҳар доим назарда тутмоқ лозим.

Энергиянинг қийматлари узлуксиз бўлсин. Бу ҳолда энергия қиймати $(O,\ E)$ оралиқда бўлмасин; $E,\ E+dE$ да бўлиши эҳтимоли, яъни "вектор" E нинг қиймати $E,\ E+dE$ да бўлиш эҳтимоли $dW(E)$ ни аниқлайлик. Бу $dW(E)$ мураккаб воқеа эҳтимолидир: E "Вектор"нинг учи $E,\ E+dE$ да бўлиш



1.2-расм.

эҳтимоли текис тақсимланиши ҳақидаги постулатга асосан E, $E+dE$ оралиқдаги статистик микроҳолатлар сони $dn(E)$ га мутаносиб. Энергия қийматининг (O, E) оралиқда бўлмаслик эҳтимолини $P(E)$ билан белгиласак, изланаётган эҳтимолликни

$$dW\left(E\right)=\frac{1}{Z}P(E)dn(E) \qquad (22)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Бунда Z — нормалаш шартидан топилади.

$P(E)$ ни аниқлайлик. Бунинг учун (O, E) ни dE оралиқлар йиғиндисидан иборат деб қарайлик (1.2-расм).

Асосий постулатга биноан, (O, E) оралиқда энергия қийматининг бўлиш эҳтимоли E га мутаносиб ёки βE га тенг. dE оралиқдаги статистик микроҳолатда бўлиш эҳтимоллиги эса dE га мутаносиб ёки βdE га тенг ("масштаб" параметри β аниқланиши лозим). dE даги шу статистик микроҳолатларда E нинг қиймати бўлмаслиги эҳтимоли эса

$$(1-\beta dE) \qquad (23)$$

билан аниқланади. Агар (O, E) оралиқни n та тенг dE ларга бўлсак, бу оралиқлардан барчасида E нинг қиймати бўлмаслиги (яъни улардаги статистик микроҳолатларда бўлмаслиги бир-бирига боғлиқ бўлмаган n та воқеанинг бир вақтда содир бўлиши) шу (23) эҳтимоллар кўпайтмасига тенг, яъни:

$$P(E)=(1-\beta dE)^n$$

$E=ndE$ да n ни чексизликка интилтириб, энергия қийматининг (O, E) оралиқдаги статистик микроҳолатларда бўлмаслик эҳтимоли $P(E)$ ни топамиз:

$$P\left(E\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\beta E}{n}\right)^n=e^{-\beta E}. \qquad (25)$$

Бу ерда шуни яна таъкидлаймизки, статистик микроҳолатлар ва статистик ансамбль элементлари (тизим нусхалари) бир-бирига боғлиқ эмас.

Демак, изланаётган энергия қийматлари эҳтимолликлари тақсимоти

$$dW(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} dn(E) \tag{26}$$

ифода билан аниқланади. Бунда

$$f(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} \tag{27}$$

бир микроҳолатга тўғри келган эҳтимолликлар зичлиги. Шунинг учун дискрет қийматлар бўлган ҳолда

$$W_i = f(E_i) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \tag{28}$$

ифода ёзилади. Буларда номаълум параметр Zни нормалаш шарти

$$\int_E dW(E) = \frac{1}{Z} \int_0^{\infty} e^{-\beta E} dn(E) = 1$$

ёки

$$\sum_i W_i = \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta e} = 1$$

ифодалардан

$$Z = \int_0^{\infty} e^{-\beta E} dn(E) \tag{29}$$

ёки

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \tag{30}$$

эканлигини аниқлаймиз. Бу ерда йиғинди (ёки интеграл) микроҳолатлар сони билан аниқланади. Z — статистик интеграл (йиғинди) дейилади.

Текис тақсимотга мисол келтирайлик.

Мисол. Ядро емирилиши. Ҳар бир радиоактив ядро вақт бўйича емирилиши эҳтимоллиги *apriori* текис (тенг) тақсимот деб қабул қилинади. Бу ҳолда ядронинг $(0,\ t)$ вақтда емирилмасдан dt вақтда емирилиши мураккаб воқеадир: бу воқеанинг эҳтимоллиги $dW(t)$ вақт dt да ядронинг емирилиш эҳтимоли, текис тақсимотга асосан, dt ёки λdt билан ҳамда $(0,\ t)$ вақт оралиғида емирилмаслик эҳтимоли $P(t)$ билан аниқланади, яъни

$$dW(t) = P(t)\lambda dt. \tag{1}$$

$P(t)$ ни топиш учун $(0, t)$ ни n та dt оралиқчаларга бўламиз. Бу оралиқчаларнинг ҳар бирида емирилиш эҳтимоллиги λdt га тенг ва демак, емирилмаслик эҳтимоллиги $(1 - \lambda dt)$ га тенг. $(0, t)$ оралиқда емирилмаслик эҳтимоллиги $P(t)$ шу оралиқчаларнинг ҳаммасида емирилмаслик эҳтимолликларининг кўпайтмасидан иборат, яъни

$$P(t) = (1 - \lambda dt)^n = (1 - \lambda t/n)^n \to e^{-\lambda t} \quad (n \to \infty). \qquad (2)$$

Демак, изланаётган эҳтимоллик

$$dW(t) = \lambda e^{-\lambda t} dt \qquad (3)$$

$t = 0$ да N_0 та ядро бўлса, t вақтгача емирилмай қолган $N(t)$ та ядро ($P(t) = N(t)/N_0 = e^{-lt}$ дан)

$$N(t) = N_0 \, e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

ифода билан аниқланади.

1.10-§. ЭНТРОПИЯ

Тизимнинг

$$1, \ 2, \ 3, \ \ldots, \ i, \ \ldots \qquad (31)$$

дискрет микроҳолатлари

$$W_1, W_2, \ldots W_i \ldots \qquad (32)$$

эҳтимолликларни қабул қилсин. Таърифга кўра, динамик микроҳолатлар тўплами, статистик микроҳолатлар тўплами ва статистик ансамбль элементлари тўплами тенг кучли, яъни уларнинг элементлари сонлари бир-бирига тенг.

N марта статистик микроҳолатлар билан тажриба ўтказилганда (31) микроҳолатлар (ёки N марта статистик ансамбль кузатилганда унинг элементлари) мос равишда

$$n_1, n_2, \ldots n_i \ldots \qquad (33)$$

марта келиб чиққан бўлсин. Бошқача айтганда, тизим устида N марта тажриба ўтказилганда у (31) микроҳолатларда мос равишда (32) эҳтимолликлар билан кузатилган бўлсин. Бунда n_i/N нисбатнинг лимити, яъни

$$\lim_{N \to \infty} n_i \,/\, N = W_i \qquad (34)$$

i микроҳолатининг келиб чиқиш эҳтимоллигини кўрсатади. Асосий постулатга асосан статистик микроҳолатнинг келиб чиқиш эҳтимоллиги $1/N$ га тенг. n_i тадан ихтиёрий бирининг келиб чиқиши — бу микроҳолатнинг келиб чиқиши эҳтимоли n_i/N га тенг, яъни $W_1 = n_i/N$ бўлади. (31) микроҳолатларнинг N марта тажриба ўтказилганда мос равишда $n_1, n_2, \ldots n_i \ldots$ марта келиб чиқиш (яъни статистик ансамбль элементларининг маълум (масалан, l) тақсимоти (33)нинг) эҳтимоллиги $W(l)$ (32) асосида

$$W(l) = W_1^{n_1}(l) W_2^{n_2}(l) W_i^{n_i}(l) = \prod_i^N W_i^{n_i}(l) \qquad (35)$$

ифода билан аниқланади. Ансамбль элементларининг тизим микроҳолатлари бўйича тақсимотининг эҳтимоллиги $W(l)$ фақат шу қаралаётган тизимнинг статистик катталигидир. $W(l)$ эҳтимоллик ўзининг маъносига кўра, умумий ҳолда агар тизим номувозанат ҳолатда бўлса, унинг макроскопик ҳолати ўзгариши сабабли (релаксация туфайли) микроҳолатлар сони (31) ҳам, микроҳолатлар эҳтимолликлари (32) ҳам ўзгаради ва, демак, $W(l)$ эҳтимоллик ҳам ўзгаради. Аммо тизим мувозанат ҳолатда бўлса, $W(l)$ эҳтимоллик доимий бўлади.

Ҳамма микроҳолатларда бўла олиши мумкин бўлган тизим ***эргодик тизим*** дейилади. Қуйида мувозанатдаги эргодик тизимни қараймиз. Фараз қилайлик, тизимнинг ҳамма микроҳолатлари бир-бирига тенг, яъни $W_1 = W_2 = \ldots = W_i = \ldots$ бўлсин. Бу ҳолда

$$W = w^{n_1 + n_2 + \ldots + n_i + \ldots} = w^N$$

ёки бундан: $\frac{\ln W}{N} = \ln w$ — статистик ансамблнинг ҳар бир элементига тўғри келган статистик катталик. Умумий ҳолда статистик ансамблнинг N та элементларининг микроҳолатлар бўйича тақсимланишларининг эҳтимолликлари учун нормалаш шарти $\sum_{l}^{M} W(l) = 1$, бунда M — тақсимланишлар

сони. Мувозанатдаги тизим учун $W(l)$ доимий бўлгани туфайли нормалаш шартини $MW(l) = 1$ кўринишда ёзиш мумкин; бундан эса қуйидагиларни оламиз:

$$-\ln M = \sum_i n_i \ln W_i \leq 0$$

$P(t)$ ни топиш учун $(0,\ t)$ ни n та dt оралиқчаларга бўламиз. Бу оралиқчаларнинг ҳар бирида емирилиш эҳтимоллиги λdt га тенг ва демак, емирилмаслик эҳтимоллиги $(1 - \lambda dt)$ га тенг. $(0,\ t)$ оралиқда емирилмаслик эҳтимоллиги $P(t)$ шу оралиқчаларнинг ҳаммасида емирилмаслик эҳтимолликларининг кўпайтмасидан иборат, яъни

$$P(t) = (1 - \lambda dt)^n = (1 - \lambda t/n)^n \to e^{-\lambda t} \quad (n \to \infty). \qquad (2)$$

Демак, изланаётган эҳтимоллик

$$dW(t) = \lambda e^{-\lambda t} dt \qquad (3)$$

$t = 0$ да N_0 та ядро бўлса, t вақтгача емирилмай қолган $N(t)$ та ядро ($P(t) = N(t)/N_0 = e^{-\lambda t}$ дан)

$$N(t) = N_0\ e^{-\lambda t} \qquad (4)$$

ифода билан аниқланади.

1.10-§. ЭНТРОПИЯ

Тизимнинг

$$1,\ 2,\ 3,\ \dots,\ i,\ \dots \qquad (31)$$

дискрет микроҳолатлари

$$W_1,\ W_2,\ \dots\ W_i\ \dots \qquad (32)$$

эҳтимолликларни қабул қилсин. Таърифга кўра, динамик микроҳолатлар тўплами, статистик микроҳолатлар тўплами ва статистик ансамбль элементлари тўплами тенг кучли, яъни уларнинг элементлари сонлари бир-бирига тенг.

N марта статистик микроҳолатлар билан тажриба ўтказилганда (31) микроҳолатлар (ёки N марта статистик ансамбль кузатилганда унинг элементлари) мос равишда

$$n_1,\ n_2,\ \dots\ n_i\ \dots \qquad (33)$$

марта келиб чиққан бўлсин. Бошқача айтганда, тизим устида N марта тажриба ўтказилганда у (31) микроҳолатларда мос равишда (32) эҳтимолликлар билан кузатилган бўлсин. Бунда n_i/N нисбатнинг лимити, яъни

$$\lim_{N\to\infty} n_i\ /\ N = W_i \qquad (34)$$

i микроҳолатининг келиб чиқиш эҳтимоллигини кўрсатади. Асосий постулатга асосан статистик микроҳолатнинг келиб чиқиш эҳтимоллиги $1/N$ га тенг. n_i тадан ихтиёрий бирининг келиб чиқиши — бу микроҳолатнинг келиб чиқиши эҳтимоли n_i/N га тенг, яъни $W_1 = n_i/N$ бўлади. (31) микроҳолатларнинг N марта тажриба ўтказилганда мос равишда $n_1, n_2, \dots n_i \dots$ марта келиб чиқиш (яъни статистик ансамбль элементларининг маълум (масалан, l) тақсимоти (33)нинг) эҳтимоллиги $W(l)$ (32) асосида

$$W(l) = W_1^{n_1}(l)W_2^{n_2}(l)W_i^{n_i}(l) = \prod_i^N W_i^{n_i}(l) \qquad (35)$$

ифода билан аниқланади. Ансамбль элементларининг тизим микроҳолатлари бўйича тақсимотининг эҳтимоллиги $W(l)$ фақат шу қаралаётган тизимнинг статистик катталигидир. $W(l)$ эҳтимоллик ўзининг маъносига кўра, умумий ҳолда агар тизим номувозанат ҳолатда бўлса, унинг макроскопик ҳолати ўзгариши сабабли (релаксация туфайли) микроҳолатлар сони (31) ҳам, микроҳолатлар эҳтимолликлари (32) ҳам ўзгаради ва, демак, $W(l)$ эҳтимоллик ҳам ўзгаради. Аммо тизим мувозанат ҳолатда бўлса, $W(l)$ эҳтимоллик доимий бўлади.

Ҳамма микроҳолатларда бўла олиши мумкин бўлган тизим ***эргодик тизим*** дейилади. Қуйида мувозанатдаги эргодик тизимни қараймиз. Фараз қилайлик, тизимнинг ҳамма микроҳолатлари бир-бирига тенг, яъни $W_1 = W_2 = \dots = W_i = \dots$ бўлсин. Бу ҳолда

$$W = w^{n_1+n_2+\dots+n_i+\dots} = w^N$$

ёки бундан: $\frac{\ln W}{N} = \ln w$ — статистик ансамблнинг ҳар бир элементига тўғри келган статистик катталик. Умумий ҳолда статистик ансамблнинг N та элементларининг микроҳолатлар бўйича тақсимланишларининг эҳтимолликлари учун нормалаш шарти $\sum_{l}^{M} W(l) = 1$, бунда M — тақсимланишлар сони. Мувозанатдаги тизим учун $W(l)$ доимий бўлгани туфайли нормалаш шартини $MW(l) = 1$ кўринишда ёзиш мумкин; бундан эса қуйидагиларни оламиз:

$$-\ln M = \sum_i n_i \ln W_i \leq 0$$

1.11-§. ЭНТРОПИЯНИНГ ХОССАЛАРИ

Энтропия S учун Шеннон (Гиббс) формуласи

$$S = -\sum_i W \ln W_i = \sum_i s_i W_i ,$$

бунда микроскопик ҳолат энтропияси

$$s_i = \ln 1 / W .$$

Тизимнинг энтропияси S қуйидаги хоссаларга эга:

1. Энтропия S манфий бўлмаган ҳақиқий катталик. Энтропия ифодаси (39) да $W_i \geq 0$ ва $S_i \geq 0$ бўлгани учун энтропия S нинг манфий эмаслиги, яъни $S \geq 0$ эканлиги келиб чиқади.

2. Агар тизимнинг микроҳолатлари тенг эҳтимолли (текис тақсимланган) бўлса, яъни

$$W_1 = W_2 = \ldots = W_i = \ldots = W$$

бўлса, унинг энтропияси $S(W)$ максимум қиймат қабул қилади.

Микроҳолат эҳтимоллиги $W_i = n_i/N$ ни эътиборга олиб, информация ифодасини

$$J = -\sum_i n_i \ln W_i = N \ln N - \sum_i n_i \ln n_i \tag{42}$$

кўринишда ёзайлик; бунда $\sum_i n_i = N = kN_A$; N_A — статистик микроҳолатлар (статистик ансамбль элементлари) сони; $k = 1, 2, 3, \ldots$

а) Микроҳолатлар тенг эҳтимолли ҳолда $n_i = 1$ бўлади (статистик микроҳолатлар тенг эҳтимолли). Бу ҳолда информация $J(W)$, $n_i = 1$ эканлигидан $\ln n_i = 0$ бўлгани учун,

$$J(W) = \mathrm{N} ln \mathrm{N} \tag{43}$$

ифода билан аниқланади, энтропия $S(W)$ эса

$$S(W) = \ln N \tag{44}$$

бўлади.

б) Тенг эҳтимолли бўлмаган барча ихтиёрий ҳолларда $n_i > 1$ бўлгани учун $\ln n_i > 0$ бўлади ва, демак, (42) да йиғиндининг ҳар бир ҳади $n_i \ln n_i > 0$ бўлгани учун бу ҳолдаги информация

$$J(W_1, W_2, \ldots, W_i, \ldots) = J(W_i) < J(W) \tag{45}$$

бўлади. (43) ва (44) ифодалардан, $S = J/N$ ни назарда тутилса, тенг эҳтимолли микроҳолатлар энтропияси $S(W)$, ихтиёрий тақсимотга эга бўлган N та микроҳолатларли тизим энтропияси $S(W_i)$ дан катта бўлади, яъни:

$$S(W) > S(W_i) \qquad (46)$$

3. Тизимнинг қисмлари бир-бирига боғлиқ бўлмаса, уларнинг энтропиялари йиғиндиси тизим энтропиясига тенг, яъни энтропия аддитив катталик. Тизим икки қисмдан иборат бўлсин. Бирининг микроҳолатлари W_1, W_2, ... W_i ... билан, иккинчисининг микроҳолатлари P_1, P_2, ... P_i ... билан аниқланган бўлсин. Умумий ҳолда бу икки микроҳолатлар тўпламлари бир-бирига боғлиқ бўлиши мумкин, яъни i микроҳолатнинг келиб чиқиши эҳтимоллиги W_i ва W_1, W_2, ... W_i ... микроҳолатлар берилганда j микроҳолатнинг келиб чиқиши эҳтимоллиги $P_j(W)$ биргаликда

$$W_i P_j(W)$$

эҳтимолликлар кўпайтмаси билан аниқланади: $P_j(W)$ ни ***шартли эҳтимоллик*** деб аталади (қ. II боб). Бундай тизимнинг энтропияси $S(W, P)$ ни

$$S(W,P) = -\sum_i^r \sum_j^l W_i P_j(W) \ln\left(W_i P_j(W)\right) =$$

$$= -\sum_i \sum_j W_i P_j(W)[\ln W_i + \ln P_j(W)] =$$

$$= -\sum_i W_i \ln W_i \sum_j P_j(W) - \sum_i W_i \sum_j P_j(W) \ln P_j(W) =$$

$$= -\sum_i W_i \ln W_i - \sum_j P_j(W) \ln P_j(W) = S(W) + S_w(P)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Демак,

$$S(W, P) = S_W(\mathrm{P}) + S(W) \qquad (47)$$

$S(W)$ — W_1, W_2, ... W_i ... эҳтимолликлар микроҳолатларга эга бўлган тизим қисмин инг энтропияси; $S_W(P)$ — биринчи қисм микроҳолатлари берилганда P_1, P_2, ... P_i ... эҳтимолликлари микроҳолатларга эга қисмнинг энтропияси, $S_W(P)$ ни шартли энтропия дейилади: (47) ни олишда нормалаш шартлари

$$\sum_i W_i = 1, \ \sum_i P_i(W) = 1$$

назарда тутилди. Агар тизимнинг қисмлари бир-бирига боғлиқ бўлмаса, уларнинг микроҳолатлари ҳам бир-бирига боғлиқ бўлмайди ва, демак,

$$P_i(W) = P_j \tag{48}$$

бўлади. (48) ни эътиборга олсак,

$$S_W(P) = S(P) \tag{49}$$

тенглик ўринли бўлади. Бу ҳолда (47) ифода

$$S(W, P) = S(W) + S(P) \tag{50}$$

аддитив кўринишни олади.

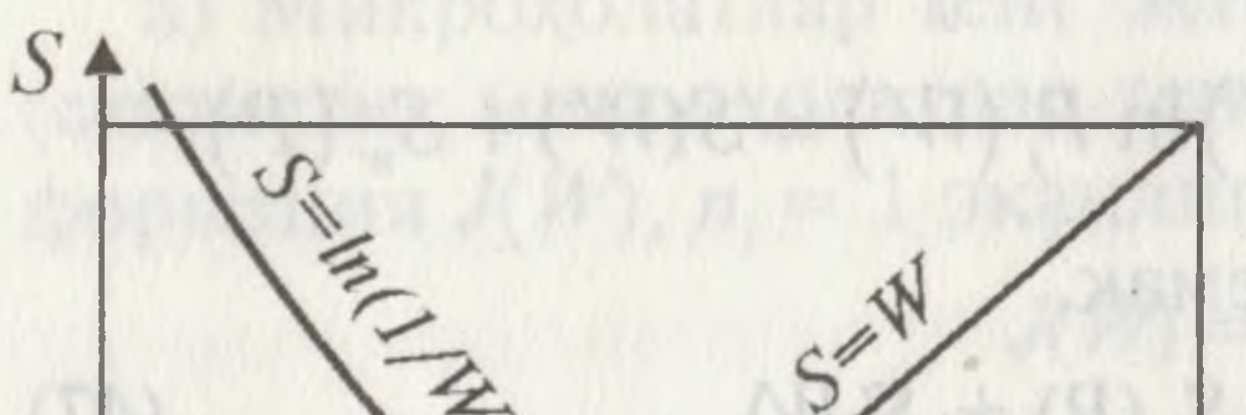
Тизим бирор таъсир ёки таъсирлар сабабли номувозанат ҳолатга келган бўлса, бу таъсирлар тўхтаганда (олинганда) тизим мувозанат ҳолатга келади, бунда тизимнинг энтропияси S ортиб боради, яъни $dS > 0$ бўлади. Бу масалани адабиётда ҳар хил усуллар билан ечишга интилинган.

Бир-бирига нисбатан зарралар ҳаракати бўлмаганда янги динамик микроҳолат содир бўлмайди ва, демак, битта статистик микроҳолат бўлганлиги учун микроҳолат муқаррар воқеа бўлади; унинг эҳтимоли $W = 1$ бўлиб, энтропияси эса $S = 0$ бўлишини биз юқорида айтдик.

Энди жараёнлар туфайли энтропиянинг ортишига батафсилроқ тўхтаймиз. Энтропия ифодаси:

$$S = \sum_i s_i W_i = \sum_i s_i' \tag{51}$$

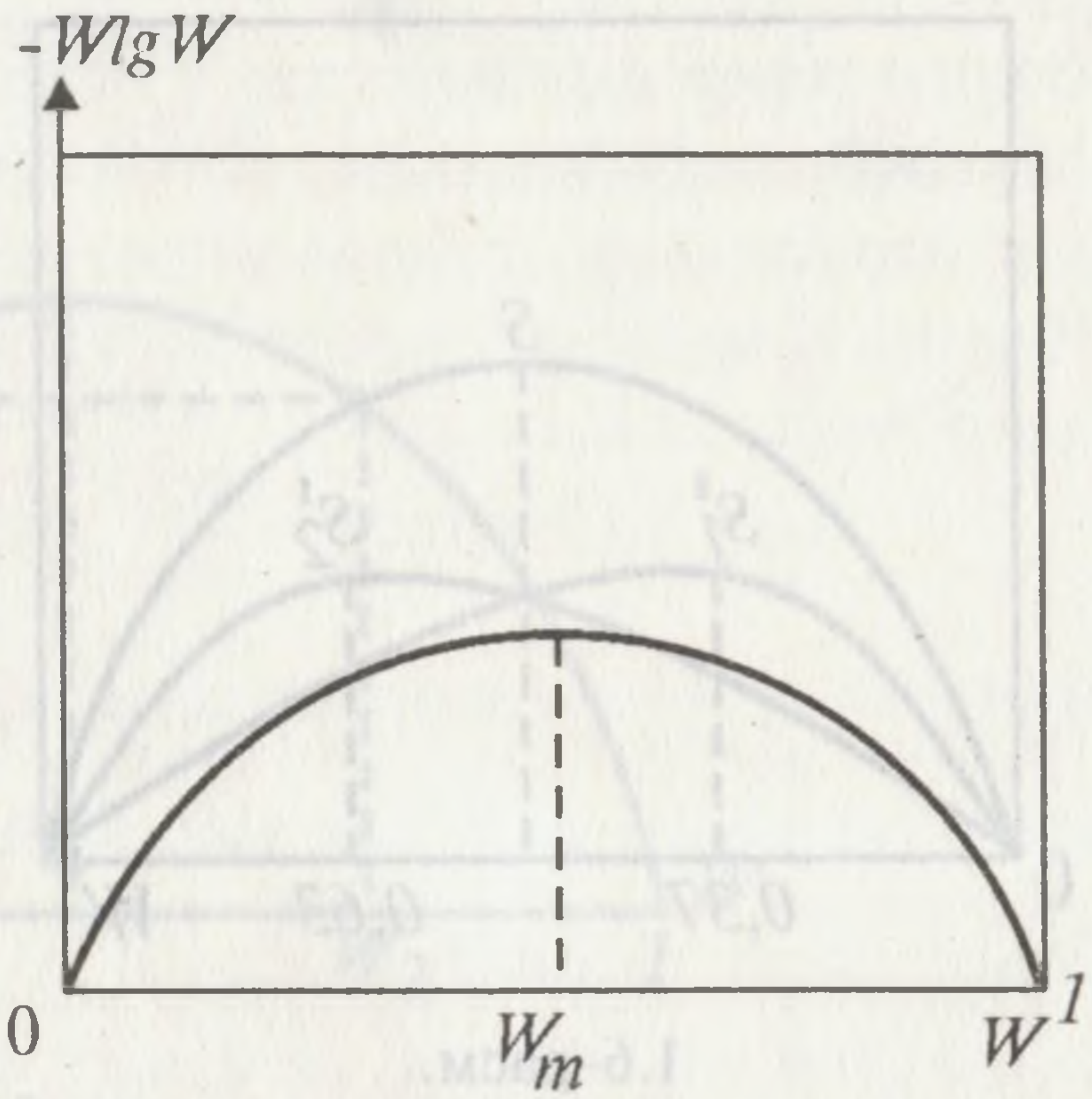
дан кўринадики, энтропиянинг ҳар бир ҳади $W_i S_i$ (бу катталикларни расмда кўрсатиш мақсадида узлуксиз ўзгаради, деб қараймиз) нинг ортиши билан чизиқли монотон ортадиган W_i ва логарифмик монотон камаядиган $S_i = ln 1/W$ кўпайтувчилардан иборат (1.4-расм). Бошқача айтганда, энтропия S нинг ҳар бир ҳади $W s_i = W_i 1/W_i$ максимумдан ўтади. Максимумга $\frac{\partial}{\partial W}(W \ln W) = \ln W_m + 1 = 0$



1.4-расм.

шартдан W нинг $W_m = 1/e \approx$ $\approx 0{,}37$ қийматида эришилади (1.5-расм).

Таҳлил қилиш осон бўлиши учун микроҳолатлар сони 2 та, уларнинг эҳтимолликлари мос равишда W_1, W_2 га тенг бўлсин. Нормалаш шарти $W_1 + W_2 = 1$ да $W_1 = W$, $W_2 = 1 - W$ белгилашни киритиб, бундай тизимнинг энтропиясини



1.5-расм.

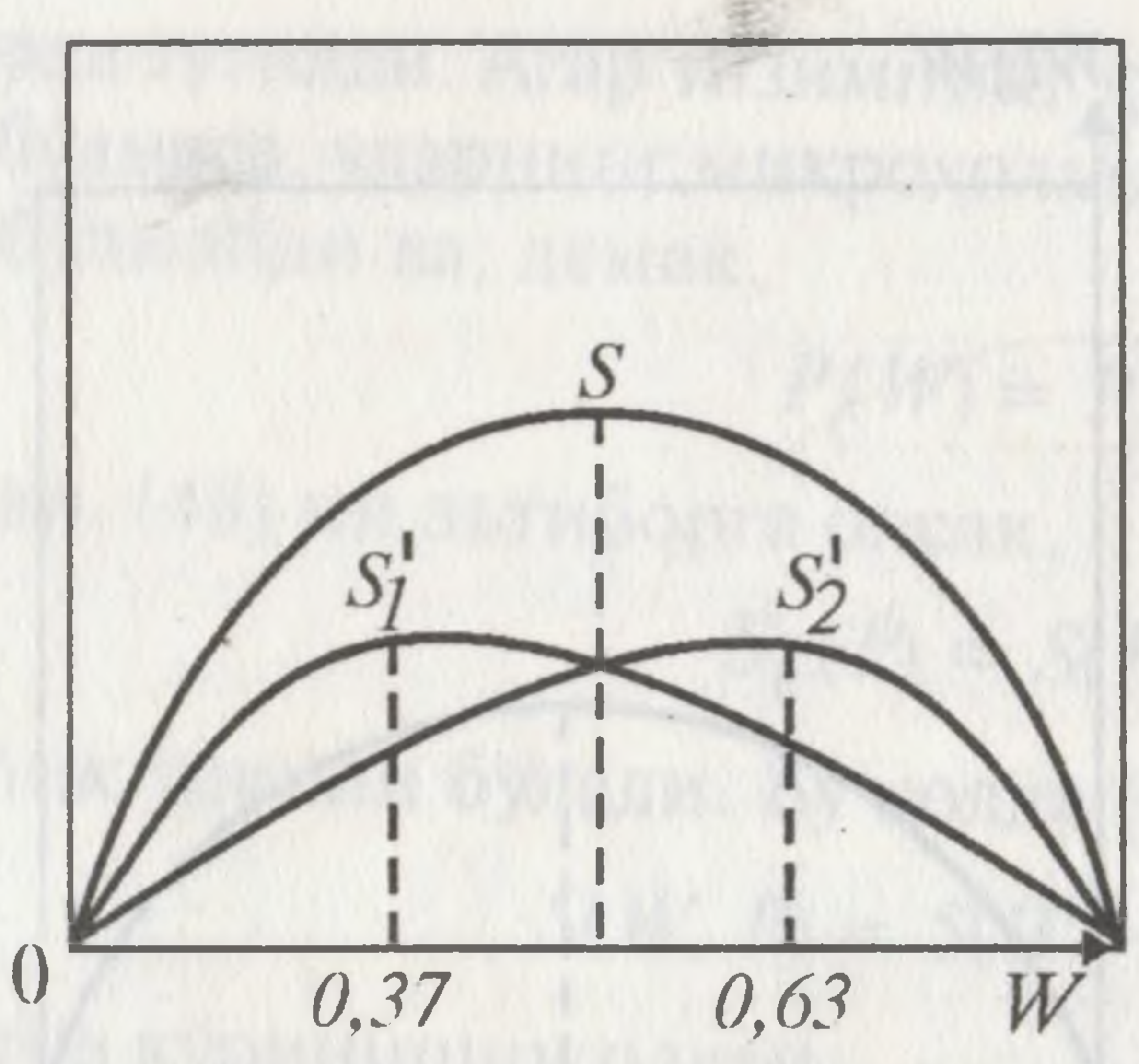
$$S = -W\ln W - (1-W)\ln(1-W) = s_1 + s_2 \qquad (52)$$

кўринишда ёзамиз. 1.6-расмда кўринадики, 2 та микроҳолатли тизимнинг энтропияси S максимум қийматдан ўтади. Бошқача айтганда, W нинг маълум оралиғида W ортиши билан S ортиб боради. Шунингдек, W нинг бошқа муайян оралиқда камайиши билан ҳам S ортиб боради (1.6-расмга қаранг). Ҳар икки ҳолни тушунтирайлик. Умумий ҳолда W_1, W_2, ... W_i ... микроҳолатлар мавжуд. Фараз қилайлик $W_1 = 1$ яъни тизим битта микроҳолатда муқаррар бўлсин. Бу ҳолда $S = 0$ бўлади. Бу ҳолни биз юқорида таҳлил қилган эдик ва унинг Нернст теоремасидан иборат эканлигини айтган эдик. Фараз қилайлик, $W_1 = 0$ бўлсин (аниқроғи $W_1 \to 0$, яъни эҳтимоллиги жуда кичик бўлган микроҳолат бўлсин). Бу ҳолда тизимнинг энтропияси $S \to 0$ бўлади. Демак, тизим микроҳолати эҳтимолликларининг ўзгариши (яъни микроҳолатларнинг сони ва эркинлик даражалари сонлари ўзгариши) сабабли унинг энтропияси S максимум қийматдан ўтади (1.6-расм). $W_1 \to 0$ бўлганда, $S \to 0$ бўлишини таҳлил этайлик.

Дискрет ҳол. Квазистатик (мувозанатдаги) жараённи кўрайлик:

$$S = -\sum_i W_i \ln W_i = \sum_i s_i W_i,$$

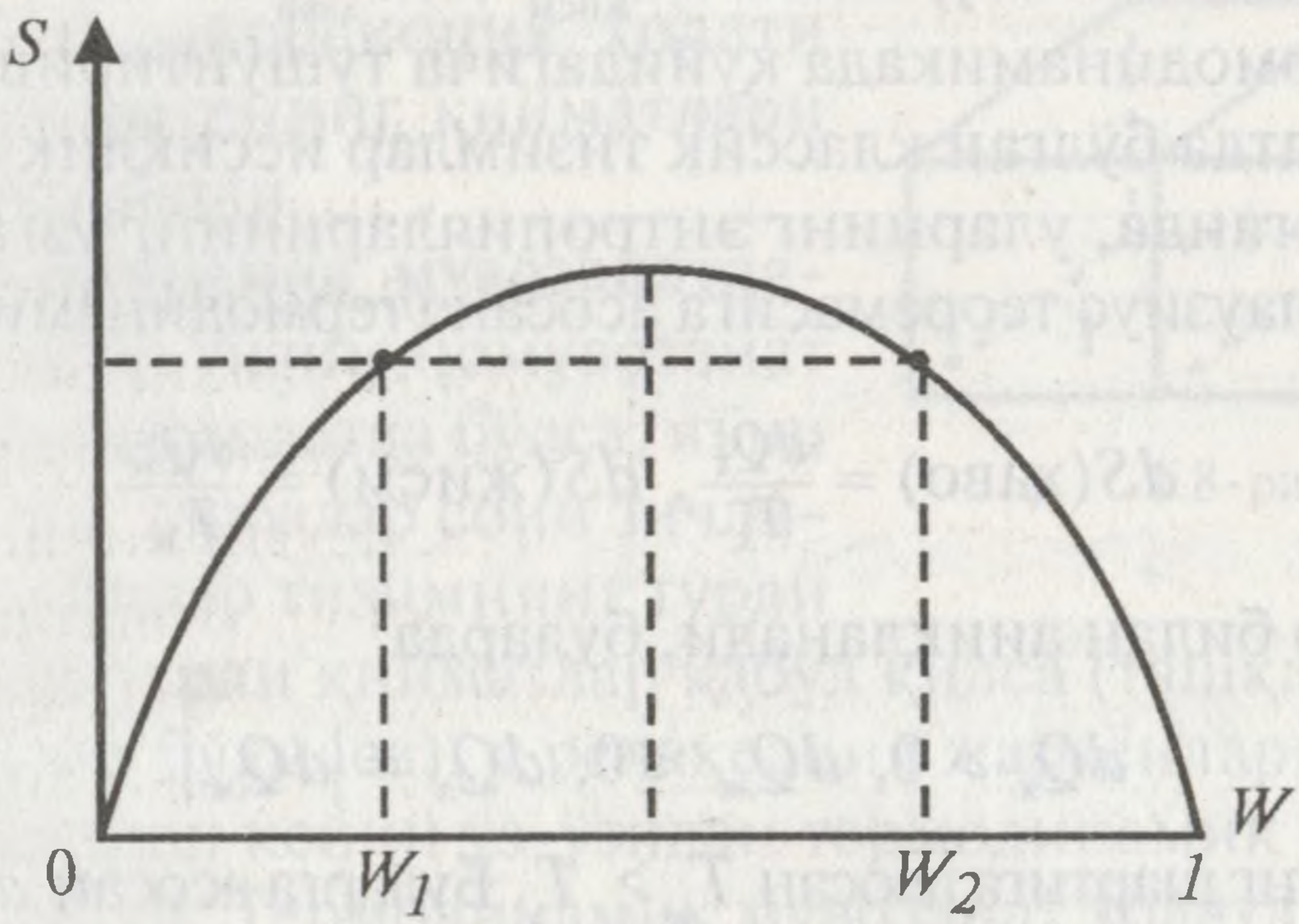
бунда $W_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}$, демак $s_i = \ln 1/W_i = +\beta E_i + \ln Z$, W_i — ортувчи функция, s_i — камаювчи функция. Микроҳолат



1.6-расм.

эҳтимоллиги W нинг ортиши билан унинг энтропияси камаяди ва, демак, шу микроҳолат энергияси E_i ҳам камаяди. Бошқача айтганда тизим юқори энергияли, лекин кичик эҳтимолли микроҳолатда бўлса, у кичик энергияли, лекин катта эҳтимолли микроҳолатга ўтади. Бунда тизимнинг энтропияси S ўз ифодасидаги W_i нинг ортиши ҳисобига ортади. Тизимнинг бу микроҳолатларида ажралган энергия эҳтимоллиги катта бўлган микроҳолатларнинг энергиясини оширишга ва хаотизация даражасининг кучайишига сарф бўлади. Шундай қилиб, микроҳолатлар эҳтимолликлари ортиши ва камайиши билан боғлиқ икки хил рақобатлашадиган жараёнлар содир бўлиши мумкин. Ҳар иккала жараёнда ҳам тизимнинг энтропияси ортади ва максимум қиймат қабул қилишга интилади. Эҳтимоли кичик микроҳолатлардан эҳтимоли катта микроҳолатларга ўтиш, механикадаги тизимнинг катта энергияли беқарор ҳолатдан кичик энергияли барқарор (турғун) ҳолатга ўтишига мос келади. (1.7-расмда энтропия S нинг чап қисмида унинг ортиб бориши). Тизимда катта эҳтимолли микроҳолатлардан кичик эҳтимолли микроҳолатларга ўтишлар эса статистик физикадаги тартиб даражаси юқори ҳолатдан тартиб даражаси паст бўлган ҳолатга ўтишлар, яъни тартибсизлик даражаси катта бўлган ҳолга ўтишлар (тартиблиликдан тартибсизликка ўтиш хаотикланиш) мос келади (1.7-расмда энтропия S нинг ўнг қисмидаги ортиб бориши). Тизимда бундай рақобатлашадиган ўтишларнинг тенглашуви микроҳолатларнинг W_m қийматида содир бўлади (1.7-расмда энтропия S максимумга эришади ва битта қиймат S_{max} ни қабул қилади), бу эса термодинамик мувозанат ҳолатдир.

Мисол учун яккаланган тизим ўзининг мувозанат ҳолатидан бирор сабабга кўра (масалан, флуктация туфайли) номувозанат ҳолатига ўтган бўлсин. Бу ҳолда эҳтимолликлари кичик, энергиялари катта бўлган микроҳолатларга



1.7-расм.

ўтишни ҳамда эҳтимоллиги катта, лекин хаотикланиш даражаси кичик (тартиблилик даражаси юқори) ва энергияси кичик ҳолатларга ўтишларни тушунмоқ лозим. Бу икки хил ўтишларга 1.7-расмда эҳтимоллик W нинг икки W_1 ва W_2 қийматлари тўғри келади; уларга эса энтропиянинг битта S қиймати мос келади (1.7-расм).

Умуман тизимнинг икки ҳолатига энтропиянинг бир қиймати мос келиши, яъни энтропия ҳолат эҳтимоллигининг бир қийматли функцияси бўлмай, икки қийматли функцияси эканлигини кўрсатади. Бу эса статистик физикадаги қабул қилинган энтропия ҳолатнинг бир қийматли функцияси дейилган тезисга аниқлик киритилишини тақозо этади.

М и с о л. Хонага қиздирилган жисм киритилди. Уй ҳавоси ва жисмни яккаланган тизим деб ҳисоблаб, ундаги жараёнларни таҳлил этайлик. Иссиқлик ютилиши ҳисобига ҳавода хаотиклашиш кучаяди, бунда микроҳолатлар сони ортиши мумкин; уларнинг эҳтимолликлари камаяди, аммо микроҳолат энтропияси S_i ортади ва умуман тизим ҳавоси қисмининг энтропияси S ортади (1.7-расм, ўнг қанот).

Тизимнинг бир қисми бўйича жисм юқори энергетик сатҳдан қуйи энергетик сатҳларга ўтади, микроҳолатларнинг эҳтимолликлари ортади; S_i камайса-да W_i нинг ортиши ҳисобига, умумий энтропия S ортади (1.7-расм, чап қанот). Умуман айтганда, тизимнинг (уй ҳавоси ва қизиган жисм) энтропияси $S = \sum W_i S_i$ ортади [1.7-расмда ҳар иккала (чап ва ўнг) қанот], яъни $dS_{\text{жисм}} + dS_{\text{ҳаво}} = dS > 0$. Бу мисолни термодинамикада қуйидагича тушунтириш мумкин. Мувозанатда бўлган классик тизимлар иссиқлик контактга келтирилганда, уларнинг энтропияларининг ўзгаришлари Карно-Клаузиус теоремасига асосан (термодинамиканинг 2-қонуни):

$$dS(\text{ҳаво}) = \frac{dQ_x}{T_x},\ dS(\text{жисм}) = \frac{dQ_ж}{T_ж}$$

ифодалар билан аниқланади, буларда

$$dQ_x > 0,\ dQ_ж < 0,\ dQ_x = |dQ_ж|.$$

Масаланинг шартига асосан $T_ж > T_x$. Буларга асосан $dS(\text{ҳаво}) > |dS(\text{жисм})|$. Демак, тизим (жисм + ҳаво)да қайтмас жараёнлар туфайли унинг энтропияси ортиши, яъни

$$dS(\text{ҳаво}) - |dS(\text{жисм})| = dS > 0$$

муносабат, содир бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз: адабиётлардаги Больцман формуласи $S = \ln W$ да W ни тизим ҳолатининг эҳтимоли деб қараб, тизим кичик эҳтимолли ҳолатлардан катта эҳтимолли ҳолатларга ўтади, деб тушунтирилиши бир ёқлама, умуман айтганда ноаниқдир.

Юқорида танишилган умумий тушунчаларни мисоллар ва масалалар воситасида қарайлик.

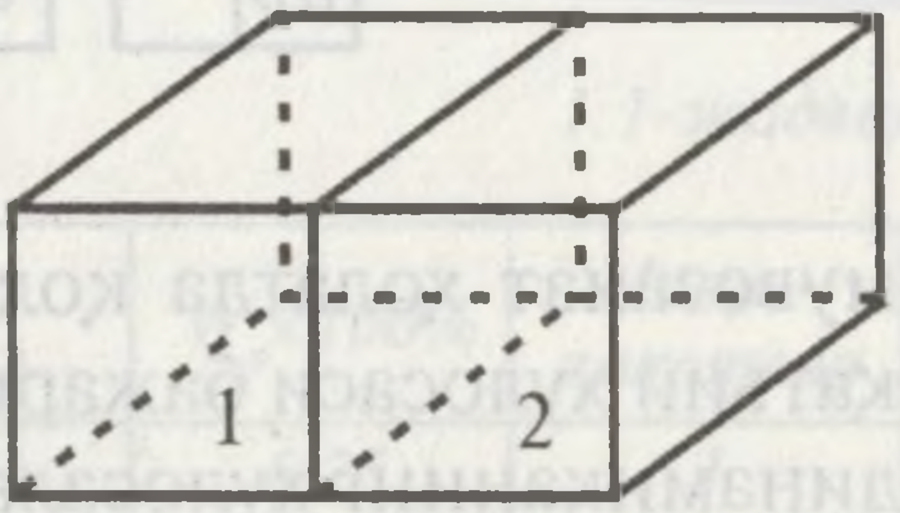
МИСОЛЛАР ВА МАСАЛАЛАР

1. Макроскопик ҳолат. Макроскопик тизимнинг макроскопик ҳолати уни аниқлайдиган макроскопик параметрлар, масалан, температура, зичлик ва бошқалар қийматларининг берилиши билан аниқланади. Тизимни аниқлайдиган макроскопик параметрлар сони шу тизимнинг термодинамик эркинлик даражалари сонидир. Гиббснинг фазалар қоидасига асосан, тизимнинг термодинамик эркинлик даражалари сони N_T шу тизимнинг компонентлари n ва фазалар сони r га боғлиқ.

Агар тизим термодинамик мувозанатда бўлса, унинг термодинамик эркинлик даражалари сони N_T қуйидагича аниқланади:

$$N_T = 2 + n - r.$$

Тизимнинг макроскопик ҳолати шу N_T параметрнинг қийматлари билан аниқланади.



1.8-расм.

2. Термодинамик мувозанатдаги ҳолат. Агар тизим номувозанат термодинамик ҳолатда бўлса, яъни температура, зарралар сони зичлиги ва шу кабилар тизимнинг турли қисмларида турли қийматлар қабул қилса (ташқаридан тизимга таъсир бўлмаса), у релаксация жараёнлари туфайли маълум вақтдан кейин ўз-ўзидан термодинамик мувозанат ҳолатга келади. Термодинамик мувозанат ҳолатда тизимни аниқлайдиган макроскопик параметрлар қийматлари ўзгармайди.

3. Тизимнинг ўз-ўзидан термодинамик мувозанатга келишига релаксация жараёни дейилади, мувозанатга келиш вақти τ эса ***релаксация вақти*** дейилади.

4. Масалан, идишда (1.8-расм) N та заррадан иборат газ бўлсин. Идиш ҳажми фикран тенг икки қисмдан иборат бўлиб, унинг бирида n_1 та, иккинчисида n_2 та зарра бўлсин. Аёнки,

$$N = n_1 + n_2 .$$

Тизим (газ) термодинамик мувозанат ҳолатда бўлса, тажриба кўрсатадики, зарралар зичлиги $\rho = N/V$ бир хил бўлади. Бу эса термодинамик мувозанат ҳолатдир. Бунда, одатда идишнинг ҳар икки қисмида зарралар сони тахминан тенг бўлади, яъни $n_1 \approx n_2$. Аммо муайян ҳолда зарраларнинг, масалан, бир қисмидаги сони $N/2$ дан яъни зарраларнинг тенг тақсимланишидан четланиши (фарқланиши) мумкин; яъни тизим термодинамик мувозанат ҳолатдан четлашиши мумкин. Зарралар сонининг бундай тенг тақсимланишдан четлашишига ***зарралар сонининг (зичликнинг) флуктуацияси*** дейилади.

Оддий мулоҳаза шунга олиб келадики, хатто зарраларнинг ҳаммаси ҳам идишнинг I қисмида бўлиб қолиши учун бирор бир принципиал тўсқинлик йўқ. Демак, яккаланган тизим, ҳеч қандай ташқи таъсирсиз, ўзининг мувозанат ҳолатидан четлашиши мумкин. Бундан хулоса шуки, яккаланган тизим термодинамик мувозанатда бўлса ва унга ҳеч қандай ташқи таъсир бўлмаса, у ҳар қанча узоқ вақт ўтса-да ўша (чап ва ўнг) қанот], яъни $dS_{жисм} + dS_{ҳаво} = dS > 0$. Бу мисолни термодинамикада қуйидагича тушунтириш мумкин. Мувозанатда бўлган классик тизимлар иссиқлик контактга келтирилганда, уларнинг энтропияларининг ўзгаришлари Карно-Клаузиус теоремасига асосан (термодинамиканинг 2-қонуни):

$$dS(ҳаво) = \frac{dQ_x}{T_x},\ dS(жисм) = \frac{dQ_ж}{T_ж}$$

ифодалар билан аниқланади, буларда

$$dQ_x > 0,\ dQ_ж < 0,\ dQ_x = |dQ_ж|.$$

Масаланинг шартига асосан $T_ж > T_x$. Буларга асосан $dS(ҳаво) > |dS(жисм)|$. Демак, тизим (жисм + ҳаво)да қайтмас жараёнлар туфайли унинг энтропияси ортиши, яъни

$$dS(ҳаво) - |dS(жисм)| = dS > 0$$

муносабат, содир бўлади.

Шундай қилиб, қуйидаги хулосага келамиз: адабиётлардаги Больцман формуласи $S = \ln W$ да W ни тизим ҳолатининг эҳтимоли деб қараб, тизим кичик эҳтимолли ҳолатлардан катта эҳтимолли ҳолатларга ўтади, деб тушунтирилиши бир ёқлама, умуман айтганда ноаниқдир.

Юқорида танишилган умумий тушунчаларни мисоллар ва масалалар воситасида қарайлик.

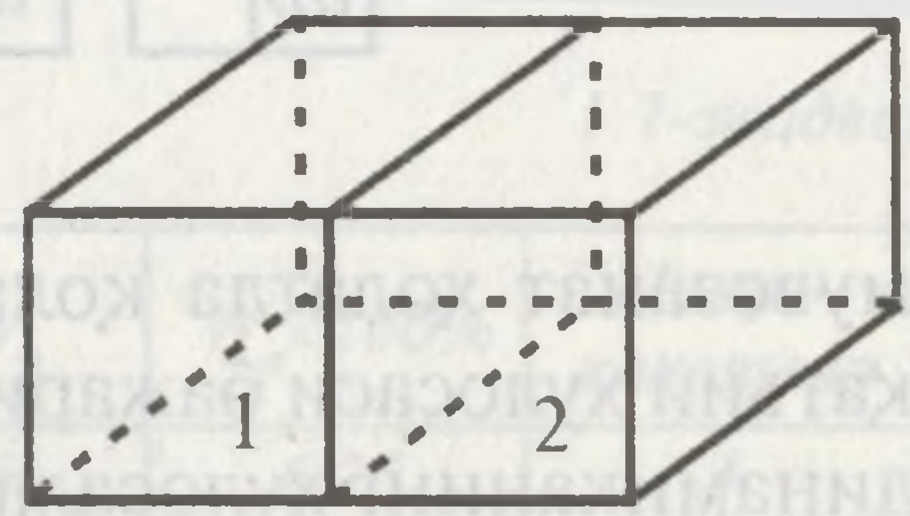
МИСОЛЛАР ВА МАСАЛАЛАР

1. Макроскопик ҳолат. Макроскопик тизимнинг макроскопик ҳолати уни аниқлайдиган макроскопик параметрлар, масалан, температура, зичлик ва бошқалар қийматларининг берилиши билан аниқланади. Тизимни аниқлайдиган макроскопик параметрлар сони шу тизимнинг термодинамик эркинлик даражалари сонидир. Гиббснинг фазалар қоидасига асосан, тизимнинг термодинамик эркинлик даражалари сони N_T шу тизимнинг компонентлари n ва фазалар сони r га боғлиқ.

Агар тизим термодинамик мувозанатда бўлса, унинг термодинамик эркинлик даражалари сони N_T қуйидагича аниқланади:

$$N_T = 2 + n - r.$$

Тизимнинг макроскопик ҳолати шу N_T параметрнинг қийматлари билан аниқланади.



1.8-расм.

2. Термодинамик мувозанатдаги ҳолат. Агар тизим номувозанат термодинамик ҳолатда бўлса, яъни температура, зарралар сони зичлиги ва шу кабилар тизимнинг турли қисмларида турли қийматлар қабул қилса (ташқаридан тизимга таъсир бўлмаса), у релаксация жараёнлари туфайли маълум вақтдан кейин ўз-ўзидан термодинамик мувозанат ҳолатга келади. Термодинамик мувозанат ҳолатда тизимни аниқлайдиган макроскопик параметрлар қийматлари ўзгармайди.

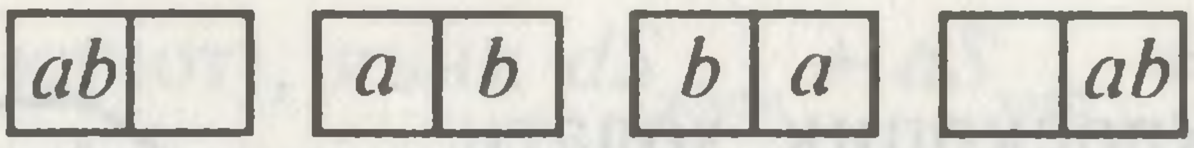
3. Тизимнинг ўз-ўзидан термодинамик мувозанатга келишига релаксация жараёни дейилади, мувозанатга келиш вақти τ эса ***релаксация вақти*** дейилади.

4. Масалан, идишда (1.8-расм) N та заррадан иборат газ бўлсин. Идиш ҳажми фикран тенг икки қисмдан иборат бўлиб, унинг бирида n_1 та, иккинчисида n_2 та зарра бўлсин. Аёнки,

$$N = n_1 + n_2 .$$

Тизим (газ) термодинамик мувозанат ҳолатда бўлса, тажриба кўрсатадики, зарралар зичлиги $\rho = N/V$ бир хил бўлади. Бу эса термодинамик мувозанат ҳолатдир. Бунда, одатда идишнинг ҳар икки қисмида зарралар сони тахминан тенг бўлади, яъни $n_1 \approx n_2$. Аммо муайян ҳолда зарраларнинг, масалан, бир қисмидаги сони $N/2$ дан яъни зарраларнинг тенг тақсимланишидан четланиши (фарқланиши) мумкин; яъни тизим термодинамик мувозанат ҳолатдан четлашиши мумкин. Зарралар сонининг бундай тенг тақсимланишдан четлашишига ***зарралар сонининг (зичликнинг) флуктуацияси*** дейилади.

Оддий мулоҳаза шунга олиб келадики, хатто зарраларнинг ҳаммаси ҳам идишнинг I қисмида бўлиб қолиши учун бирор бир принципиал тўсқинлик йўқ. Демак, яккаланган тизим, ҳеч қандай ташқи таъсирсиз, ўзининг мувозанат ҳолатидан четлашиши мумкин. Бундан хулоса шуки, яккаланган тизим термодинамик мувозанатда бўлса ва унга ҳеч қандай ташқи таъсир бўлмаса, у ҳар қанча узоқ вақт ўтса-да ўша



1.9-расм.

мувозанат ҳолатда қолаверади, деган термодинамиканинг қатъий хулосаси бажарилмайди. Иккинчи томондан, термодинамиканинг хулосалари тажрибанинг натижаларига асосланган.

Хўш, бу статистик физикада ва термодинамикада айтилганларнинг маъносидаги фарқни қандай тушуниш керак? Мисоллар орқали буни тушунтирамиз.

1. Идишда иккита a ва b зарра бўлсин. Бунда идишнинг 1 ва 2 қисмларида зарраларнинг жойлашиш усуллари сони тўртта бўлади (қаранг 1.9-расм).

Идишнинг 1 ва 2 қисмларида зарраларнинг тенг тақсимланиши қолган ҳолларнинг ҳар бирига нисбатан 2 марта ортиқ. Бошқача айтганда, зарраларнинг ҳажм бўйича тенг тақсимланиши (яъни "мувозанати") катта эҳтимолга эга.

Ҳолатлар (ячейкалар, катаклар) сонини Z, зарралар сонини N билан белгилаб Z ҳолатларда N та зарранинг жойлашиш усуллари сони — конфигурацияларнинг сонини аниқлайлик.

Тизим (зарралар) иккита ҳолатда (катакда) бўлиши мумкин, дейлик. Агар тизим битта заррадан иборат бўлса, ҳолатлар бўйича $2^1 = 2$ усул билан жойлашади. Зарралар сони $N = 2$ та бўлса, юқорида кўрганимиздек, $2^2 = 4$ та усул билан. $N = 3$ бўлса, $2^3 = 8$ та усул билан, $N = 4$ бўлса, $2^4 = 16$ та усул билан жойлашади (1.1-жадвалга қаранг, зарралар a, b, c, d билан белгиланган). Умумий ҳолда N та зарранинг Z та ячейкада (катакларда) жойлашиш усуллари сони Z^N га тенг. Тизимнинг макроҳолатини ҳосил қилиши мумкин бўлган усуллар сонини (мисолда $\frac{N!}{n_1!n_2!} = 1, 4, 6, 4, 1$ ни) ***термодинамик эҳтимоллик*** дейилади.

$N = 4$, $Z = 2$ бўлган ҳолни таҳлил этайлик. Агар идиш тенг икки қисмдан иборат бўлса, идеал зарранинг идишнинг бир қисмида бўлиши (ёки бўлмаслиги) эҳтимол (1/2) га тенг бўлади. 4 та зарранинг бир "статистик микроҳолат" да бўлиш эҳтимоли зарралар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг, яъни $(1/2)^4 = 1/16$. Масалан, 12-статистик мик-

1.1-жадвал

№	1 ҳолат	2 ҳолат	$C(n)$	W_n	$W_n \times 100\%$	Микро-ҳолатлар
1	abcd	—	1	1/b	6,25	I
2	abc	d	4	1/4	25	II
3	abd	c				
4	acd	b				
5	bcd	a				
6	ab	cd	6	3/8	37,5	III
7	ac	bd				
8	ad	bc				
9	cd	ab				
10	bd	ac				
11	bc	ad				
12	a	bcd	4	1/4	25	IV
13	b	acd				
14	c	abd				
15	d	abc				
16	—	abcd	1	1/16	6,25	V

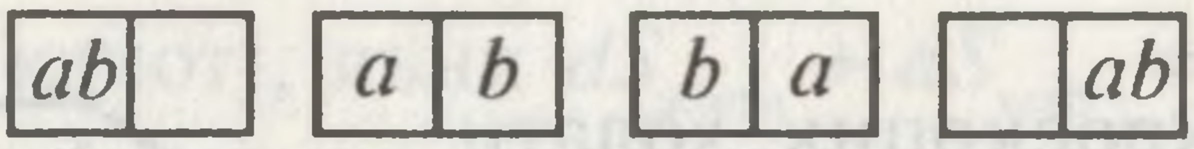
роҳолатнинг эҳтимоли $(1/2)\cdot(1/2)^3 = 1/16$. V эҳтимоллик ҳам асосий постулатга асосан 1/16 га тенг. Бундай "статистик микроҳолатлар" қаралаётган мисолимизда 16 та (1.1-жадвал).

Физик катталикнинг ҳар хил қийматларига мос келадиган "микроҳолатлар" сони 5 та. Ҳар бир "микроҳолат" нечта "статистик микроҳолат" дан ташкил топгани ҳам 1.1-жадвалда кўрсатилган. Масалан, III "микроҳолат" 6 та "статистик микроҳолат" дан ташкил топган. Бу ҳар бир микроҳолатга тўғри келган усуллар сони — "статистик ҳолатлар" сонини $C(n)$ билан белгилайлик. У ҳолда ҳар бир микроҳолатнинг эҳтимоли, яъни n зарраларнинг идишнинг бир қисмида бўлиш эҳтимоли W_n катаклар сони $Z = 2$ бўлганда қуйидагича аниқланади:

$$W_n = C(n)P_N = C(n)/2^N \qquad (1)$$

P_N — статистик микроҳолатнинг эҳтимоллиги; $P_N = 1/2^N$. $C(n)$ ни ***микроҳолатнинг термодинамик эҳтимоллиги*** дейилади.

Кўрилаётган мисолда $Z = 2$, $N = 4$ бўлганлиги учун микроҳолатларнинг эҳтимолликлари ва термодинамик эҳтимолликлари қуйидагича:



1.9-расм.

мувозанат ҳолатда қолаверади, деган термодинамиканинг қатъий хулосаси бажарилмайди. Иккинчи томондан, термодинамиканинг хулосалари тажрибанинг натижаларига асосланган.

Хўш, бу статистик физикада ва термодинамикада айтилганларнинг маъносидаги фарқни қандай тушуниш керак? Мисоллар орқали буни тушунтирамиз.

1. Идишда иккита a ва b зарра бўлсин. Бунда идишнинг 1 ва 2 қисмларида зарраларнинг жойлашиш усуллари сони тўртта бўлади (қаранг 1.9-расм).

Идишнинг 1 ва 2 қисмларида зарраларнинг тенг тақсимланиши қолган ҳолларнинг ҳар бирига нисбатан 2 марта ортиқ. Бошқача айтганда, зарраларнинг ҳажм бўйича тенг тақсимланиши (яъни "мувозанати") катта эҳтимолга эга.

Ҳолатлар (ячейкалар, катаклар) сонини Z, зарралар сонини N билан белгилаб Z ҳолатларда N та зарранинг жойлашиш усуллари сони — конфигурацияларнинг сонини аниқлайлик.

Тизим (зарралар) иккита ҳолатда (катакда) бўлиши мумкин, дейлик. Агар тизим битта заррадан иборат бўлса, ҳолатлар бўйича $2^1 = 2$ усул билан жойлашади. Зарралар сони $N = 2$ та бўлса, юқорида кўрганимиздек, $2^2 = 4$ та усул билан. $N = 3$ бўлса, $2^3 = 8$ та усул билан, $N = 4$ бўлса, $2^4 = 16$ та усул билан жойлашади (1.1-жадвалга қаранг, зарралар a, b, c, d билан белгиланган). Умумий ҳолда N та зарранинг Z та ячейкада (катакларда) жойлашиш усуллари сони Z^N га тенг. Тизимнинг макроҳолатини ҳосил қилиши мумкин бўлган усуллар сонини (мисолда $\frac{N!}{n_1!n_2!} = 1, 4, 6, 4, 1$ ни) ***термодинамик эҳтимоллик*** дейилади.

$N = 4$, $Z = 2$ бўлган ҳолни таҳлил этайлик. Агар идиш тенг икки қисмдан иборат бўлса, идеал зарранинг идишнинг бир қисмида бўлиши (ёки бўлмаслиги) эҳтимол (1/2) га тенг бўлади. 4 та зарранинг бир "статистик микроҳолат"да бўлиш эҳтимоли зарралар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг, яъни $(1/2)^4 = 1/16$. Масалан, 12-статистик мик-

1.1-жадвал

№	1 ҳолат	2 ҳолат	$C(n)$	W_n	$W_n \times 100\%$	Микро-ҳолатлар
1	abcd	—	1	1/b	6,25	I
2	abc	d	4	1/4	25	II
3	abd	c				
4	acd	b				
5	bcd	a				
6	ab	cd	6	3/8	37,5	III
7	ac	bd				
8	ad	bc				
9	cd	ab				
10	bd	ac				
11	bc	ad				
12	a	bcd	4	1/4	25	IV
13	b	acd				
14	c	abd				
15	d	abc				
16	—	abcd	1	1/16	6,25	V

роҳолатнинг эҳтимоли $(1/2)\cdot(1/2)^3 = 1/16$. V эҳтимоллик ҳам асосий постулатга асосан 1/16 га тенг. Бундай "статистик микроҳолатлар" қаралаётган мисолимизда 16 та (1.1-жадвал).

Физик катталикнинг ҳар хил қийматларига мос келадиган "микроҳолатлар" сони 5 та. Ҳар бир "микроҳолат" нечта "статистик микроҳолат" дан ташкил топгани ҳам Î.1-жадвалда кўрсатилган. Масалан, III "микроҳолат" 6 та "статистик микроҳолат" дан ташкил топган. Бу ҳар бир микроҳолатга тўғри келган усуллар сони — "статистик ҳолатлар" сонини $C(n)$ билан белгилайлик. У ҳолда ҳар бир микроҳолатнинг эҳтимоли, яъни n зарраларнинг идишнинг бир қисмида бўлиш эҳтимоли W_n катаклар сони $Z = 2$ бўлганда қуйидагича аниқланади:

$$W_n = C(n)P_N = C(n)/2^N. \qquad (1)$$

P_N — статистик микроҳолатнинг эҳтимоллиги; $P_N = 1/2^N$. $C(n)$ ни ***микроҳолатнинг термодинамик эҳтимоллиги*** дейилади.

Кўрилаётган мисолда $Z = 2$, $N = 4$ бўлганлиги учун микроҳолатларнинг эҳтимолликлари ва термодинамик эҳтимолликлари қуйидагича:

$$C(4) = C(0) = 1, \qquad W_4 = W_0 = 1/16,$$
$$C(3) = C(1) = 4, \qquad W_3 = W_1 = 1/4, \qquad (2)$$
$$C(2) = 6, \qquad W_2 = 3/8.$$

N та микрозарранинг микроҳолатига тўғри келган усуллар сони статистик микроҳолатлар сони (термодинамик эҳтимоллик) қуйидагича аниқланади:

$$C(n) = C(N-n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}. \qquad (3)$$

Бунда $Z = 2$ қабул қилинган ва идишнинг бир қисмида n та, иккинчи қисмида $N - n$ та зарра жойлашган деб ҳисобланган. i-микроҳолатдаги статистик микроҳолатлар сони $C(n)$ ни

$$C_i(n) = N! \cdot G_i(n_1, n_2)$$

кўринишда ёзайлик, бунда

$$G_i(n_1, n_2) = G_i(n, N-n) = \frac{1}{n_1!}\frac{1}{n_2!} = G_i(n_1)G_i(n_2)$$

ёки ҳолатлар (катакчалар) сони кўп, масалан, Z та бўлганда

$$G_i(n_1, n_2, \ldots n_k, \ldots) = G_i(n_1)G_i(n_2)\ldots G_i(n_k) = \prod_{k=1}^{Z} G_i(n_k)$$

ифодани ёзиш мумкин. Бу ҳолда микроҳолат эҳтимоллиги

$$W_i = \frac{N!}{Z^N}G_i = N!PG_i$$

ифода билан аниқланади. G_i шу i-микроҳолатнинг ***статистик вазнини*** аниқлайди. Юқоридагилардан кўринадики, микроҳолат эҳтимоллиги W_i статистик микроҳолатлар сони $N!G_i$ ёки статистик вазнни характерловчи катталик G_i билан тизимнинг микроҳолати аниқланиши мумкин; берилган тизим учун зарралар сони N ва катаклар сони Z доимийдир.

Қаралган мисолдан кўринадики, энг катта эҳтимолликка эга бўлган микроҳолат — зарраларнинг тенг тақсимланган ҳолидир (1.1-жадвалда III ҳолат).

Зарралар сони жуда катта бўлганда, масалан, $N = 10^{19}$ та бўлганда, энг катта эҳтимолли тенг тақсимланган ҳолатдаги тизимни характерловчи макроскопик параметрлар деярли ўзгармайди. Бу энг катта эҳтимолли микроҳолат — мувозанатдаги термодинамик ҳолатдир. Булардан кўринадики, статистик физикада тизимнинг микроҳолати тушунчаси термодинамик ҳолат тушунчасига нисбатан кенгроқ маънода ишлатилади. Жумладан, термодинамикадаги мувозанат ҳолат, қатъиян ўзгармас деб қаралгани ҳолда, статистик физикада бу ҳолат катта эҳтимолли ҳолат деб қаралиб, кичик эҳтимолли микроҳолатлар (1.1 жадвалда I, II, IV, V ҳоллар) ҳам содир бўлиши мумкин деб қаралади. Масалан, юқоридаги мисолда ҳамма (4 та) зарраларнинг биринчи қисмда тўпланиб қолиши 16 тадан 1 тасида, тенг тақсимланиш эса 6 тасида рўй беради. Зарралар сони 10 та бўлганда, уларнинг идишнинг ярмида тўпланиб қолиши $2^{10} = 1024$ тадан битта ҳолда содир бўлади; тенг тақсимланиши эса 252 тасида учрайди. Зарралар сони 100 та бўлганда уларнинг идишнинг ярмида тўпланиб қолиши 2^{100} тадан биттасида учрайди. Демак, N етарли даражада катта бўлганда, уларнинг идишнинг ярмида тўпланиб қолиш эҳтимоллиги $1/2^N$ га тенгдир, бу эса нолга яқиндир.

Шундай қилиб, статистик физика нуқтаи назаридан тизимнинг энг катта эҳтимолли тенг тақсимланиши ҳолатидан (термодинамик мувозанат ҳолатидан) катта оғиш ниҳоятда кичик эҳтимолликка эга, аммо кичик оғиш амалда сезиларли эҳтимолли ҳолдир. Статистик физикада тизимнинг термодинамик мувозанат ҳолатидан (қатъий айтилганда, тизимнинг макроскопик параметрлари ўртача қиймат қабул қилган ҳолдан) четланиши флуктуация ҳодисасидир. Мисолдаги W_{I}, W_{II}, W_{IV}, W_{V} эҳтимолли ҳолатлар флуктуациялар туфайли содир бўлиши мумкин бўлган ҳолатлардир. Булардан равшанки, катта флуктуациялар кичик эҳтимолли, кичик флуктуациялар катта эҳтимолли бўладилар.

Мувозанатдаги ҳол учун айтилганидек, термодинамикада тизимнинг номувозанат ҳолати, ташқи таъсир бўлмаганда, мувозанат томонга ўзгаради, деб қатъий айтилса, статистик физикада мувозанатга келиш жараёни (яъни релаксация жараёни) катта эҳтимолли жараёндир деб қаралади.

Мисоллар қарашда давом этайлик. М и с о л: $Z = 3$, $N = 2$ бўлсин. Статистик ҳолатлар сони $Z^N = 3^2 = 9$ та (қаранг: 1.2-жадвал). Тизим зарраларини квант механика асосида қаралса, айнанлик тамойилини ҳисобга олиш керак. Бу ҳолда

1.2-жадвал

№	1 ҳолат	2 ҳолат	3 ҳолат
1	ab	—	—
2	—	ab	—
3	—	—	ab
4	a	b	—
5	a	—	b
6	—	a	b
7	b	a	—
8	b	—	a
9	—	b	a

статистик микроҳолатлар сони юқоридаги классик ҳолдаги статистик микроҳолатлар сонидан фарқ қилади. Ҳақиқатан ҳам, айнанлик тамойили ҳисобга олинса, 4 ва 7, 5 ва 8, 6 ва 9 ҳолатлар бир-биридан фарқланмайди. Бу ҳолда "статистик микроҳолатлар" сони $f(N, Z)$ қуйидагича аниқланади:

$$f(N,Z)=\frac{(N+Z-1)!}{N!(Z-1)!}=6. \quad (4)$$

1.3-жадвал

№	1 ҳолат	2 ҳолат	3 ҳолат	4 ҳолат
1	ab	—	—	—
2	—	ab	—	—
3	—	—	ab	—
4	—	—	—	ab
5	a	b	—	—
6	a	—	b	—
7	a	—	—	b
8	—	a	b	—
9	—	a	—	b
10	—	—	a	b
11	b	a	—	—
12	b	—	a	—
13	b	—	—	a
14	—	b	a	—
15	—	b	—	a
16	—	—	b	a

Агар (Паули тамойилига биноан) бир катакда (ҳолатда) биттадан ортиқ зарра бўла олмаслиги талаб этилса, "статистик микроҳолатлар" сони 3 га тенг бўлади, яъни:

$$f(N,Z) = \frac{N!}{Z!(Z-N)!} = 3. \tag{5}$$

Қуйида $Z = 4$, $N = 2(a, b)$ мисолни қарайлик (1.3-жадвал). Бу мисолда классик статистик микроҳолатлар сони (2 та a, b зарранинг 4 та катакда жойлашиш усуллари сони) $Z^N = 4^2 = 16$ та. Квант механикасида айнанлик тамойилига асосан 5 ва 11; 6 ва 12; 7 ва 13; 8 ва 14; 9 ва 15; 10 ва 16 ҳолатларни бир хил деб ҳисобламоқ керак. Бу ҳолда "статистик микроҳолатлар" сони

$$f(N,Z) = \frac{(N+Z-1)!}{N!(Z-1)!} = 10\,.$$

Агар зарраларнинг Паули тамойилига бўйсиниши талаб этилса, у ҳолда 1, 2, 3, 4 ҳоллар мавжуд эмас. Бу ҳолда иккита зарранинг 4 та катакда жойлашиш усуллари сони ("статистик микроҳолатлар" сони)

$$f(N,Z) = \frac{Z!}{N!(Z-N)!} = 6$$

ифода билан аниқланади.

Идишнинг бир қисмида n та зарра, иккинчи қисмида $N-n$ та зарра жойлашиш эҳтимоли, яъни бундай микроҳолатнинг эҳтимоли W_n(1) ва (3) га асосан қуйидагича аниқланади:

$$W_n = \frac{N!}{2^N}\frac{1}{n!(N-n)!} \tag{6}$$

1.1-жадвалдан кўринадики, энг катта эҳтимолли микроҳолат — бу зарраларнинг текис тақсимланиши, идиш ҳажмининг қисмлари бўйича тенг тақсимланишидир (мисолда 2 та зарра бир қисмида, 2 та зарра иккинчи қисмида). Ҳақиқатан ҳам, зарраларнинг текис тақсимланишида, яъни $n = N/2$ бўлганда, микроҳолатлар эҳтимоллигининг ифодаси W_n максимум қийматга эришади. Бошқа қолган микроҳолатлар (конфигурациялар) бўлиши мумкин, лекин уларнинг эҳтимолликлари нисбатан кичик. Шундай қилиб, қаралаётган мисолдан кўриниб турибдики, тизимнинг мувозанат ҳолатдан (тенг тақсимотдан) катта четланиши кичик эҳтимолли, яъни

$$W_0,\ W_1 \ll W_2$$

бўлади. Юқоридаги мисолдан кўринадики, иккита ҳолнинг бирида тизим зарралари идишнинг ярмида йиғилиб қолиши мумкин. Агар N катта бўлса, бундай ҳолнинг содир бўлиши ниҳоятда кичик эҳтимолли воқеадир. Масалан, агар зарралар сони $N = 80$ бўлса, конфигурациялар сони $2^{80} = 10^{24}$ бўлади. Бу эса, агар тизимни 10^{24} сек кузатилса, 1 секунд вақт давомида 80 та зарранинг ҳаммаси идишнинг ярмида йиғилиб қолишини кўриш мумкин. Оламнинг ёши тахминан 10^{18} сек га тенг. Демак, Олам (Коинот) ёшидан миллион марта ортиқ вақт кузатилса, 80 та заррадан иборат тизим (газ) идишнинг ярмида 1 сек тўпланиб қолиши мумкин. Агар N етарли даражада катта бўлса, тизим зарраларининг ҳаммаси идишнинг ярмида бўлиб қолиши фантастик даражада кичик эҳтимолли воқеадир. Шундай қилиб, катта флуктуациялар яъни $n \gg N/2$ ёки $n \ll N/2$ ҳоллар амалда кузатилмайди. Аммо, мувозанат ҳолатидан кичик четланишлар етарли даражада тез-тез учраб туриши мумкин.

Юқоридаги мисолнинг таҳлилидан қуйидаги хулосаларга келамиз:

1. Зарраларнинг текис тақсимланиши, термодинамика нуқтаи назаридан мувозанат ҳолатдир. Демак, мувозанат ҳолат тизимнинг бўлиши мумкин бўлган микроҳолатларидан энг катта эҳтимоллигидир.

2. Тизимда кичик эҳтимолли ҳолатларнинг реализацияси, яъни тизимнинг мувозанат ҳолатдан четланиши — бу флуктуация ҳодисасидир.

Бу ерда шуни таъкидлаш лозимки, тизимнинг мувозанатдан кичик четланиши катта эҳтимолликка, катта четланиши эса нисбатан кичик эҳтимолликка эга.

3. (3) ифодадан кўринадики, N та заррадан иборат тизим микроҳолатининг эҳтимоллиги конфигурациялар сони-

$$C(n) = \frac{N!}{n!(N-n)!}$$

га боғлиқ. Бу ерда шуни таъкидлаймизки, берилган зарралардан иборат тизим микроҳолатининг эҳтимоллиги ўзгарувчан

$$G(n) = \frac{1}{n!(N-n)!} \quad (7)$$

катталикка боғлиқ. Бошқача айтганда, микроҳолатларнинг фарқи статистик вазнини характерловчи катталик $G(n)$ нинг ҳар хил қийматларига боғлиқ.

4. Агар тизим бирор сабабга кўра (ташқи таъсир, флуктуациялар туфайли) номувозанат ҳолатда бўлса, у катта эҳтимоллик билан ўзининг мувозанат ҳолатига яқинлашади. Бу ҳодисани релаксация (флуктуация сабабли бўлган бўлса, унинг "сўниши") дейилади.

5. Юқоридаги мисоллардан кўрдикки, микроҳолат эҳтимоллиги қуйидагича аниқланади:

$$W_i = \frac{1}{Z^N} C_i$$

1.1-мисол. Микроҳолатлар тенг эҳтимолли бўлсин, яъни

$$w_1 = w_2 = \ldots = w_i = \ldots = \frac{n}{N}, \quad (8)$$

бунда $N = kN_A$, $k = 1, 2, 3, \ldots, n$; N_A — статистик микроҳолатлар (ансамбль элементлари) сони; N — кузатишлар (тажрибалар) сони. Бу ҳолда тизимнинг эҳтимоллиги $W = \prod_i W_i^{n_i}$ ни аниқланг, таҳлил этинг.

Ечиш: $W = \prod_i W_i^{n_i} = \left(\frac{n}{N}\right)^N$. $N = \sum_i n_i$. $N = kN_A$ ни назарда тутиб, W эҳтимоллик учун

$$W = \frac{1}{N_A^N} = \left(\frac{1}{N_A}\right)^N \quad (9)$$

ифодани оламиз; бунда $\frac{1}{N_A} = \frac{1}{\sum_i 1_i}$ бир статистик микроҳолатнинг эҳтимоллиги, $(1/N_A)^N$ эса N та элементнинг бирдан келиб чиқиш эҳтимоллиги; агар $k = 1$ бўлса, статистик ансамблнинг эҳтимоллиги W билан аниқланади; $N_A^{N_A}$ эса N_A та элементларнинг N_A ҳолатларда (микроҳолатларда) жойлашиш усуллари сони.

1.2-мисол. N зарранинг m та катакда $n_1, n_2, \ldots, n_m$ тадан жойлаштириш усуллари сони:

$$C = \frac{N!}{n_1!n_2!\ldots n_m!} \quad (9)$$

эканлигини кўрсатинг.

Е ч и ш: Классик статистикада микроҳолат фақат зарралар сони билан аниқланади. N та заррадан $N!$ та ўрин алмаштиришлар ҳосил қилиш мумкин. Бунда микроҳолат ўзгармайди. Аммо биринчи катакда (ячейкада) n_1, иккинчи катакда n_2 та в.ҳ. зарра жойлашган бўлса, биринчи катакдаги n_1 та зарралар алмашинишида, 2-катакдаги n_2 та зарранинг ўзаро ўрин алмашинишидан микроҳолатлар ўзгармайди; катакдаги зарраларнинг ўрин алмашинишидан микроҳолатлар ўзгармайди. Демак, микроҳолатлар ўзгармас сонлар кўпайтмаси

$$n_1!, n_2!, \ldots, n_m!$$

дан иборат. Катаклардаги зарраларнинг катаклар орасидаги ўрин алмашинишлари сонини C билан белгиласак, бу сон C ни $n_1!, n_2!, \ldots, n_m!$ га кўпайтиришдан умумий ўрин алмаштиришлар сони $N!$ келиб чиқади, яъни,

$$N! = Cn_1!, n_2!, \ldots, n_m!$$

ёки бундан

$$C = \frac{N!}{n_1!, n_2!, \ldots, n_m!}$$

изланаётган статистик микроҳолатлар сони C топилади.

1.3-масала. Бир-биридан фарқланмайдиган (айнан бир хил бўлган) N та зарранинг Z катаклар бўйича тақсимланиш (жойлашиш) усуллари сонини аниқланг.

Е ч и ш: Фараз қилайлик, 1-катакда n_1 та, 2-катакда n_2 та, в. ҳ.к. Z-катакда n_Z та зарра жойлашган бўлсин. Индуктив усул билан аниқлайлик. $Z = 1$ да 1 хил усул билан $C = 1$ жойлашади; $Z = 2$ ҳолда зарраларнинг ўзаро ўрин алмаштиришлари янги микроҳолатга олиб келмайди, яъни $N!$ алмаштиришлар янги микроҳолат ҳосил қилмайди; Энди умумий ўрин алмаштиришлар сонини топайлик: катаклар сони $Z = 2$ бўлганда ўрин алмашинувчи элементлар сони биттага ортади: 0, 1, 2, 3, ..., N та бўлади; демак, ўрин алмашинишлар сони $[N + (Z - 1)]!$ та бўлади.

Демак, бу ҳолда микроҳолатлар сони

$$C = \frac{[N + (Z-1)]!}{N!}$$

ифода билан аниқланади; $Z = 3$ да бўлган ҳолда ўрин алмашишлар $N!$ янги микроҳолатларга олиб бормайди (аввалги ҳолдагидай); $Z = 3$ бўлганда умумий элементлар сони 2 тага ортади, яъни

$$\overset{1}{0}, \overset{2}{0}, 1, 2, \dots, N$$

бўлади, ёки $(Z - 1 = 2)$ бўлганда $N + (Z - 1)$ та элемент бўлади. Демак, умумий ўрин алмашинишлар сони $(N + Z - 1)!$ дан иборат бўлади; аммо $Z = 3$ да 2 та ячейкадаги 0,0 элементларнинг ўрин алмашишлари, равшанки, янги натижа бермайди. Демак, олинган натижа $(N + Z - 1)!/N!$ ни, яна $2! = (Z - 1)!$ га, яъни 0 (ноль) элементлар ўрин алмашиниши сонига бўлиш зарур. Ниҳоят изланаётган натижани оламиз:

$$C = \frac{(N+Z-1)!}{N!(Z-1)!}. \qquad (11)$$

$Z = 4$, $Z = 5$ в.ҳ. ҳолларда ҳам (11) микроҳолатлар сони олинишига осонгина ишонч ҳосил қилиш мумкин. $Z = 2$, $N = 4$ ҳолда ва $Z = 4$, $N = 2$ ҳолда асосий матнда 5 та ва 10 та микроҳолатлар олинган эди. Ҳақиқатан ҳам.

$$C = \frac{(4+2-1)!}{4!(2-1)!} = \frac{5!}{4!1!} = 5,$$

$$C = \frac{(2+4-1)!}{2!(4-1)!} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

1.4-масала. $Z > n$ шарт бажарилганда, бир-биридан фарқланмайдиган (айнан бир хил) N та микрозарранинг ячейкалар (катаклар, ҳолатлар) бўйича тақсимланиш сони C аниқлансин; бунда ҳар бир ячейкада биттадан ортиқ микрозарра бўла олмасин деб ҳисоблансин, яъни микрозарралар Паули тамойилига бўйсунсин.

Е ч и ш: Фараз қилайлик, Z та катакда мос равишда n_1, $n_2, \dots, n_z$ зарралар жойлашган бўлсин, яъни

$$\underset{n_1}{\boxed{1}}\,\underset{n_2}{\boxed{2}}\ \dots\ \underset{n_z}{\boxed{z}}.$$

n_1, $n_2, \dots, n_i \dots, n_z$; $Z > N$ бўлганда ва $n_i = 0,1$ шарт бажарилганда умумий ўрин алмаштиришлар сони $Z!$ га тенг, бунда зарралар айнанлик (бир хиллик) тамойилига бўйсунгани учун $N!$ ўрин алмаштиришлар янги натижа, янги микроҳолатлар бермайди; Демак,

$$Z!/N!.$$

Аммо $Z > 0$ бўлганда $Z - N$ та ячейкадаги "0" элементлар ўрин алмаштиришлари ҳам янги натижа, янги микроҳолатларга олиб келмайди; демак $Z!$ ни яна $(Z - N)!$ га ҳам бўлиш зарур. Бу ҳолда изланаётган усуллар сони

$$C = \frac{Z!}{N!(Z-N)!} \tag{12}$$

ифода билан аниқланади. $Z = 4$, $N = 2$ ҳол учун 6 та микроҳолат олинган эди. Ҳақиқатан ҳам (12) дан

$$C = \frac{4!}{2!2!} = 6$$

аввалги натижа 6 келиб чиқади.

II БОБ
ЭҲТИМОЛЛИКЛАР НАЗАРИЯСИДАН МАЪЛУМОТ

2.1-§. КИРИШ. АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР

Гиббснинг статистик ансамбль усулида микроҳолатлар эҳтимолликлари тақсимотини аниқлаш статистик физика усулининг асосидир. Шу сабабли бу бобда эҳтимоллар назариясининг бизга зарур бўлган асосий тушунчалари, теоремалари, тақсимотлари ва эҳтимоллар зичликлари устида қисқача тўхталамиз.

Эҳтимоллар назариясининг муҳим тушунчаси — тасодифий катталикдир. Бу (катталик) миқдор берилган шартда ўзининг имконияти бўлган қийматларидан бирини маълум эҳтимол билан қабул қилади. Масалан, агар тасодифий миқдор чекли ёки чексиз кетма-кет ҳар хил x_1, x_2, ... x_n ..., дискрет қийматлар қабул қилса, унинг учун эҳтимоллар тақсимоти қонуни шу қийматларга мос

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n, \ldots$$

эҳтимолликларни кўрсатиш билан берилади. Агар тасодифий миқдор узлуксиз қийматларни қабул қилса, бу ҳолда эҳтимоллар тақсимоти қонуни ҳар бир x, $x + dx$ оралиқ учун эҳтимоллик

$$dW_\xi(x)\ x \le \xi < x + dx$$

кўрсатилиши билан берилади. Агар бу ҳолда оралиқ чекли (a, b) бўлса, $W_\xi(a, b)$ эҳтимоллик қуйидаги тенглик билан аниқланади:

$$W_\xi(a,b) = \int\limits_{a\le\xi\le b} dW_\xi(x) \qquad (1)$$

ёки

$$W_\xi(a,b) = \int_a^b f(x)dx,$$

бунда:

$$dW(x) = \frac{\partial W}{\partial x}dx = f(x)dx,$$

$$f(x) = \frac{\partial W(x)}{\partial x} \qquad (2)$$

$f(x)$ — эҳтимолликлар зичлиги (бир ўлчамли ҳол учун); физик адабиётда бу функция тақсимот функцияси деб юритилади. Математикада тақсимот функцияси атамаси $W_\xi(a, b)$ эҳтимоллик учун ишлатилади. Физика ва математика адабиётларидаги бу тушунчалар ҳар хиллиги англашилмовчиликка олиб бормаслиги керак.

1-м и с о л. Чизиқли гармоник осцилляторнинг энергияси

$$\varepsilon_n = \frac{h}{2\pi}w(n+1/2),\ n = 0, 1, 2,...$$

қийматларни қабул қилади.

Статистик физикада бундай осцилляторлар ансамблида осцилляторнинг $n = 0, 1, 2, ...$ ларга мос энергия қийматларини қабул қилиши эҳтимоллар тақсимоти функцияси билан берилади.

2-м и с о л. Макротизимни кўрайлик. Классик механика қонунларига асосан вақт ўтиши билан макротизим кетма-кет микроҳолатларда бўлади. Бу микроҳолатлар тўплами динамик характерга эга. Гиббс ансамбли (тўплами)ни ташкил этган тизимнинг микроҳолатлари статистик характерга эга. Гиббс ансамблига мос келган катталик (миқдор), масалан, L, тасодифий (миқдор) катталикдир. Микроҳолатларга L нинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари

$$L_1,\ L_2, ...\ L_n$$

мос келади (дискрет ҳол учун). Эҳтимолликлар тақсимоти қонунига асосан бу қийматларга мос эҳтимолликлар

$$P(L_1),\ P(L_2),\ ...\ ,\ P(L_n)$$

ҳам берилиши лозим.

Бу ерда шуни таъкидлаймизки, микроҳолатларнинг вақт бўйича тўплами билан микроҳолатларнинг Гиббс бўйича тўплами априори бир-бирига тенг деб қабул қилинади. Бу эса эргодик теореманинг маъносини ташкил этади. Бунда Гиббснинг даҳоси — тизим гамильтони E ни тасодифий катталикка келтиришидадир.

Тасодифий воқеа. Берилган шароитда тасодифий миқдорнинг қабул қилиши мумкин бўлган қийматлардан бирининг содир бўлиши (ёки бўлмаслиги) ***тасодифий воқеа*** деб аталади. Демак, ҳар бир элементар воқеага ўзига мос эҳтимоллик тўғри келади. Тасодифий воқеалар элементар ёки бир неча элементар воқеалардан иборат мураккаб бўлиши мумкин. Эҳтимоллик тушунчасидан фойдаланишда аниқлик учун математикадаги унинг таърифини Колмагоров бўйича келтирамиз. Бунинг учун тасодифий катталикнинг кетма-кет қийматларини ёзайлик:

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

Бу қийматларнинг содир бўлиши элементар воқеалар

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ldots$$

бўлсин.

1. Ҳар бир элементар воқеа A_n га, унинг эҳтимоллиги деб аталувчи манфий бўлмаган ҳақиқий $P(A_n)$ сон мос келади (аксиома).

2. Агар воқеа албатта содир бўлса, у ишончли (муқаррар) воқеа бўлади. Масалан, имконияти бўлган қийматлар-

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n,\ \ldots$$

дан ихтиёрий бирининг (содир бўлиши), яъни

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n,\ \ldots$$

воқеалардан бирининг содир бўлиши — бу муқаррар (ишончли) воқеадир. Муқаррар (ишончли) воқеанинг эҳтимоллиги бирга тенг, яъни:

$$P\,(\text{ихтиёрий } A_n) = 1.$$

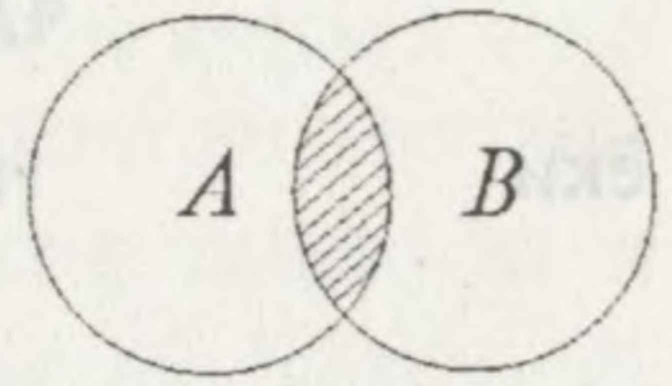
3. Агар A ва B бирга мавжуд бўла олмайдиган воқеалар бўлса (A ва B тўпламлар кесишмаса) унда A ёки B воқеалардан бирининг содир бўлиши эҳтимоллиги $P(A + B)$ ёки $P(AUB)$ кўринишда ёзилади ва қуйидагича аниқланади:

$$P\,(A \cup B) = P(A) + P(B)\,.$$

4. Мумкин бўлмаган воқеанинг эҳтимоллиги нолга тенг, яъни:

$$P(\bar{A}) = 0.$$

5. A, ёки B, ёхуд бир вақтда A ва B воқеанинг содир бўлиши эҳтимоллиги $P(A \cup B)$ қуйидагича аниқланади (2.1-расмга қаранг):



2.1-расм.

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

6. Бир вақтда бўлмайдиган A ва B воқеалардан бирининг содир бўлиш эҳтимоллиги $P(A + B)$ қуйидагича аниқланади:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$$

Бирга мавжуд бўла олмайдиган, A ва B воқеаларнинг бир вақтда содир бўлиш эҳтимоллиги $P(A \cap B) = 0$ (яъни A ва B тўпламлар кесишмайди) (2.2-расмга қаранг)

Бу ҳолда

$$P(A + B) = P(A) + P(B)$$

ёки умумий воқеалардан A_1 нинг, ёки A_2 нинг, ..., A_n нинг (бошқача айтганда, шу воқеалардан ихтиёрий бирининг) содир бўлиш эҳтимоллиги P қуйидаги эҳтимолликларнинг йиғиндиси билан аниқланади (эҳтимолликларни қўшиш теоремаси):

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_{n-1} \cup A_n) =$$

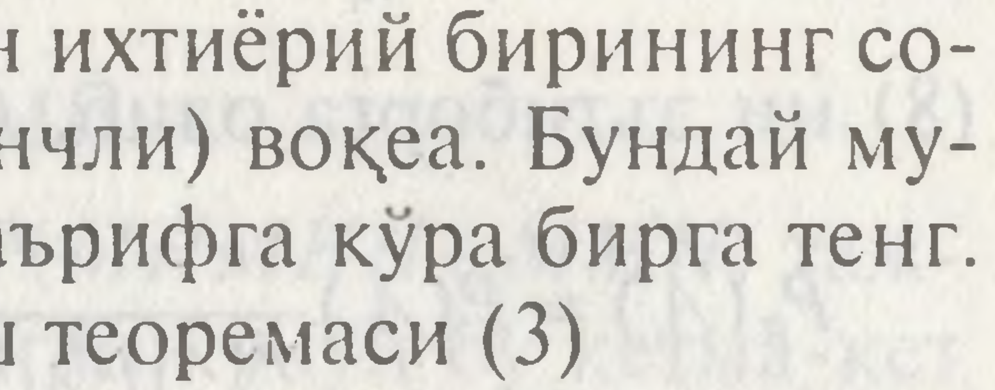
$$= P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) \qquad (3)$$

Имконияти бўлган воқеалардан ихтиёрий бирининг содир бўлиши — бу муқаррар (ишончли) воқеа. Бундай муқаррар воқеанинг эҳтимоллиги таърифга кўра бирга тенг. Бу ҳолда эҳтимолликларни қўшиш теоремаси (3)

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = 1 \qquad (4)$$

кўринишни олади.

7. A воқеа содир бўлганда B воқеанинг шартли эҳтимоллиги $P_A(B)$, таърифга кўра, қуйидагича аниқланади:



$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

2.2-расм.

ёки бундан

$$P(A \cap B) = P_A(B)\,P(A)$$

ёки

$$P(A \cap B) = P_B(A)\,P(B).$$

Агар A ва B бир-бирига боғлиқ бўлмаган воқеалар бўлса, юқоридагилардан:

$$P(A \cap B) = P(A)\,P(B)$$

экани келиб чиқади ёки, умумий ҳолда, воқеалар A_1, A_2, ..., A_n, ... дан A_1 нинг ҳам, A_2 нинг ҳам, ..., A_n нинг ҳам биргаликда содир бўлиш эҳтимоллиги қуйидаги эҳтимолликларнинг кўпайтмаси билан аниқланади (эҳтимолликларни кўпайтириш теоремаси):

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots A_{n-1} \cap A_n) = P(A_1)\,P(A_2)\ldots P(A_n) \tag{5}$$

Шартли эҳтимолликлар таърифидан

$$P_A(B)\,P(A) = P(B)\,P_B(A) \tag{6}$$

тенглик келиб чиқади.

Фараз қилайлик, A_1, A_2, ..., A_i, ... биргаликда бўлиши мумкин бўлмаган воқеалар бўлсин. У ҳолда (6) дан

$$P_B(A_i) = P(A_i)\frac{P_{A_i}(B)}{P(B)} \tag{7}$$

тенгликни ёзамиз. B воқеанинг тўла эҳтимоли шартли эҳтимолликлар орқали қуйидагича аниқланади:

$$P(B) = P(A_1)P_{A_1}(B) + P(A_2)P_{A_2}(B) + \ldots + P(A_i)P_{A_i}(B) + \ldots \tag{8}$$

(8) ни эътиборга олиб, (7) ни қуйидагича ёзамиз:

$$P_B(A_i) = P(A_i)\frac{P_{A_i}(B)}{P(A_1)P_{A_1}(B)+P(A_2)P_{A_2}(B)+\ldots+P(A_n)P_{A_n}(B)} \tag{9}$$

Бу ***Бейес формуласи***дир.

Умуман тасодифий ҳодисалар фазо нуқталарига ва вақтга боғлиқ бўлган тасодифий функциялар билан тавсифланади. Бу тасодифий функцияларнинг (ёки катталикларнинг) қийматлари кетма-кет дискрет қийматлардан ёки узлуксиз қийматлардан иборат бўлиши мумкин. Биз ана шу икки турга тегишли тасодифий катталикларни (функцияларни) алоҳида-алоҳида қарашга киришамиз.

2.2-§. ДИСКРЕТ ТАҚСИМОТЛАР

Тасодифий ξ катталик дискрет (узлукли)

$$x_1, x_2, \ldots x_n \ldots$$

қийматларни қабул қилсин. Бу ҳолда эҳтимолликлар тақсимоти қонунига асосан бу қийматларга мос эҳтимолликлар ҳам берилади. Хусусий ҳолни қарайлик. Тасодифий катталик фақат иккита қийматни қабул қилсин, яъни фақат 2 хил воқеа содир бўлсин. Бу ҳолда эҳтимолликлар тақсимоти қонунига асосан P_1 ва P_2 берилади ва эҳтимолликлар таърифидан:

$$P_1 + P_2 = 1. \tag{10}$$

2.2.1. БЕРНУЛЛИ ТАЖРИБАЛАРИ

Фараз қилайлик, тажриба фақат икки имкониятли натижага эга бўлсин ва буларнинг эҳтимолликлари бир-бирига боғлиқ бўлмаган қайта тажрибалар ўтказилганда ўзгармай қолсин. Бундай тажрибаларни илк бор Яков Бернулли (1654—1705) ўтказган.

Одатда бу икки натижа-воқеанинг эҳтимолларини p ва q билан белгиланади; p га мос воқеани муваффақият (омад) ва q га мосини эса муваффақиятсизлик деб атайдилар. Бу воқеаларни қулайлик учун M ва N билан белгилайлик.

Аёнки, бу ҳолда

$$p + q = 1.$$

Бернулли тажрибаси n марта ўтказилсин. У ҳолда имконияти бўлган воқеалар сони 2^n га тенг бўлади.

Бунда

$$MHMHH...MMH$$

кетма-кет воқеалар эҳтимоллиги $P(MHMHH...MMH)$ тажрибалар бир-бирига боғлиқ бўлмагани учун бу кетма-кет воқеалар эҳтимолликларининг кўпайтмасига тенг, яъни

$$P(MHMHH...MMH) = pqpqq...ppq$$

2.2.2. БИНОМИАЛ ТАҚСИМОТ

Бернулли тажрибаларида M воқеанинг k марта кетма-кет содир бўлиш эҳтимоллиги P^k га, шунда N воқеанинг $n - k$ марта содир бўлиш эҳтимоллиги q^{n-k}га; ҳар иккала воқеанинг содир бўлиш эҳтимоллиги эса юқоридаги эҳтимолликларнинг кўпайтмаси $p^k q^{n-k}$ га тенг.

Кўпинча бизни n марта ўтказилган Бернулли тажрибасида k марта муваффақият ва, демак, $n - k$ марта муваффақиятсизлик қизиқтириб, воқеаларнинг маълум кетма-кетлиги қизиқтирмайди. Бу ҳолда n та элементдан k тадан неч-та усулда ҳар хил танлаб олишни билиш лозим. Бу эса $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ га тенг. Демак, бизни қизиқтираётган воқеанинг эҳтимоллиги $W(k; n, p)$ эҳтимолликларни қўшиш теоремасига асосан аниқланади:

$$W(k;n,p) = \sum_{\substack{\text{ҳамма} \\ \text{усуллар}}} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \frac{n!\,p^k q^{n-k}}{k!(n-k)!}. \qquad (11)$$

p эҳтимолликни доимий деб қабул қилайлик; n марта ўтказилган тажрибадаги муваффақиятлар сонини S_n билан белгилайлик. У ҳолда $W(k; n, p) = P(S_n = k)$ яъни бунда S_n — дискрет қийматлар қабул қилувчи тасодифий катталик, $W(k; n, p)$ эса шу қийматлар эҳтимоллари тақсимотини кўрсатувчи функциядир. Шу $W(k; n, p)$ функция *биномиаль тақсимот* дейилади, чунки $(p + q)^n$ нинг бином ёйилмасидаги k-ҳадини $W(k; n, p)$ функция аниқлайди, яъни:

$$W(0; n, p) + W(1; n, p) + ... + W(n; n, p) = (p + q)^n = 1.$$

Охирги тенглик эҳтимолликлар таърифи ($p + q = 1$) асосида ёзилди. Биномиал тақсимот ифодаси $W(k; n, p)$дан кўринадики,

$$\frac{W(k;n,p)}{W(k-1;n,p)} = \frac{(n-k+1)p}{kq} = 1 + \frac{(n+1)p-k}{kq}. \qquad (12)$$

Бундан, агар $k < (n+1)p$ бўлса, (12) нисбат 1 дан катта, демак, $W(k; n, p)$ эҳтимоллик аввалгисидан катта, агар $k > (n + 1)p$ бўлса, у эҳтимоллик аввалгисидан кичик бўлади. Шундай қилиб, k нолдан n гача ўзгарганда $W(k; n, p)$ эҳтимоллик олдин монотон ортиб бориб, сўнгра монотон камаяди. Агар $(n + 1)p = m$ бутун сон бўлса, $k = m$ бўлганда $W(k; n, p)$ эҳтимоллик максимумга эришади. Бу $W(m; n, p)$ ни *максимал эҳтимоллик* дейилади, m ни эса муваффақиятларнинг ***энг катта эҳтимолли*** сони дейилади. Агар $np >> 1$ бўлса, $m = np$ бўлишини кўрсатиш мумкин.

Бизни одатда кўпинча муваффақиятлар сони камида r бўлиши эҳтимоли, яъни

$$P(S_n \geq r) = \sum_{\nu=0}^{n} W(r+\nu; n, p),$$

бўлиш қизиқтиради, бунда $\nu > n - r$ ҳолда бу қаторнинг ҳамма ҳадлари нолга тенг.

Ўртача қийматлар $\bar{k}, \overline{k^2}, \overline{k^l}$ ва дисперсия (флуктуация) $\sigma^2 = \overline{k^2} - \bar{k}^2$ ни аниқлаймиз. l тартибли момент $\overline{k^l}$ ни аниқлаймиз. Таърифга асосан:

$$\overline{k^l} = \sum_k^n k^l W(k; n, p) = \sum_k^n k^l C_n^k p^k q^{n-k} =$$

$$= p\frac{\partial}{\partial p} p\frac{\partial}{\partial p} \ldots \sum_k^n C_n^k p^k q^{n-k} = \left(p\frac{\partial}{\partial p}\right)^l (p+q)^n \qquad (13)$$

Хусусан, бундан қуйидагини топамиз:

$$\bar{k} = p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^n = np(p+q)^{n-1} = np, \qquad (14)$$

$$\overline{k^2} = p\frac{\partial}{\partial p} p\frac{\partial}{\partial p}(p+q)^n = p\frac{\partial}{\partial p} np(p+q)^{n-1} =$$

$$= np(p+q)^{n-1} + np^2(n-1)(p+q)^{n-2} = np\left[1 + p(n-1)\right]. \qquad (15)$$

(14) ва (15) га биноан дисперсия (флуктуация) ни аниқлаймиз:

$$\sigma_k^2 = \overline{k^2} - \bar{k}^2 = np\left[1 + p(n-1)\right] - n^2p^2 = np(1-p) = npq;$$

$$\sigma_k^2 = npq. \qquad (16)$$

Юқоридагилардан кўринадики, $np >> 1$ бўлганда,

$$\bar{k} \approx m$$

бўлади. (7) дан кўринадики, n ортиши билан флуктуация σ_k^2 ортади; аммо n ортиши билан нисбий флуктуация $\sigma_k / \bar{k} = \sqrt{q / np}$ камаяди.

Биномиал тақсимотнинг қўлланишига иккита оддий мисол келтирамиз.

1. Қутидаги шарлар масаласи.

Қутида оқ ва қора шарлар бор. Қутидан оқ шар олиниши (муваффақият, омад) эҳтимоли p, қора шарнинг олиниши (муваффақиятсизлик) эҳтимоли $q = 1 - p$ бўлсин. Қутидан ҳар гал олинган шарни қутига қайтариб солиб, шарларни аралаштирилади (Шу усул билан ҳар галдаги қутидан шар олишни бир-бирига боғлиқ бўлмаган тажрибалар деб қарашга келтирилади). Бу Бернулли тажрибасидир.

Бернулли тажрибаси n марта ўтказилганда k мартасида оқ шар чиқиши (омад) эҳтимоли биномиал тақсимот $W(k; n, p)$ билан аниқланади.

2. V ҳажмли идишда бир-бирига боғлиқ бўлмаган n та молекула (идеал газ) бор. V ҳажмнинг v қисмида молекуланинг бўлиш эҳтимоллиги p бўлсин. V ҳажмда k та ($k \leq n$) молекуланинг бўлиб қолиш эҳтимоллиги биномиал тақсимот $W(k; n, p)$ билан аниқланади.

2.2.3. ПУАССОН ТАҚСИМОТИ

Амалий масалаларни қараганда Бернулли тажрибасидаги n нисбатан катта, p эса нисбатан кичик бўлади; уларнинг кўпайтмаси $\lambda = np$, $k = 0$ учун

$$W(0; n, p) = (1 - p)^n = (1 - \lambda/n)^n .$$

Бундан $n \to \infty$ бўлганда

$$W(0; n, p) \Rightarrow e^{-\lambda} \tag{17}$$

ифодани оламиз.

Шунингдек, $n \to \infty$, $p \to 0$, аммо $\lambda = np$ чекли бўлганда нисбат

$$\frac{W(k; n, p)}{W(k-1; n, p)} = \frac{np-(k-1)p}{kq} \to \frac{\lambda}{k}$$

бўлади. Бу нисбатдан (индукция асосида):

$$W(1; n, p) = \lambda W(0; n, p) \to \lambda e^{-\lambda}$$

$$W(2; n, p) = \frac{1}{2}\lambda W(1; n, p) \to \frac{1}{2}\lambda^2 e^{-\lambda}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$W(k; n, p) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

ёки

$$W(k; \lambda) \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} . \tag{18}$$

Бу (18) Пуассон тақсимотидир. Кўриниб турибдики, $k = 0, 1, 2, \ldots$, ларда (18) ни қўшиш $e^{-\lambda}$ учун Тейлор қаторининг $e^{-\lambda}$ га кўпайтмасига тенг. Демак, берилган λ учун $W(k, \lambda)$ эҳтимолликларнинг йиғиндиси бирга тенг, яъни:

$$\sum_{k=0}^{\infty} W(k;\lambda) = 1. \qquad (19)$$

Вақт бўйича кетма-кет содир бўладиган тасодифий воқеаларни, масалан, радиоактив емирилиш, телефон станциясида "чақириш" ("вызов")ларни кўрайлик. Бунинг учун n ораликчаларга бўлинган бирлик вақт оралиғини олайлик. Бунда ҳар бир ораликчада содир бўлиши мумкин бўлган бир ёки бир нечта воқеа эҳтимоли P_n ни ўзгармас деб қарайлик. Бу масалада ҳар бир вақт ораликчаси воқеа билан ё банд, ё бўш бўлади. Ораликчалар бир-бирига боғлиқ эмаслигидан бу Бернулли тажрибасига келади: k ораликчанинг бандлиги эҳтимоллиги

$$W(k; n, p)$$

билан аниқланади. Бунда ораликда бирорта ҳам тасодифий воқеа (бирорта ҳам ядро емирилиши) бўлмаслиги, ҳар бир ораликчада ҳам бу воқеа содир бўлмаслигидан иборат. Бу воқеа эса $q^n = (1-p)^n$ эҳтимолликка эга ва бундан $n \to \infty$ ва $np = \lambda$ чекли бўлганда лимитга ўтиб,

$$\lim_{n\to\infty}(1-p_n)^n = e^{-\lambda} \qquad (20)$$

ифодани оламиз. k ораликчаларнинг бандлиги эҳтимоллиги эса $W(k, \lambda)$, яъни Пуассон тақсимоти билан берилади.

Амалий масалаларда бирлик вақт оралиғини ихтиёрий вақт оралиғи t билан алмаштирилса, табиийки, λ ни λt билан алмаштириш лозим. У ҳолда Пуассон тақсимоти

$$W(k;\lambda t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t} \qquad (21)$$

кўринишда бўлади.

Биз юқорида тасодифий воқеаларнинг вақт ўқи t бўйича тақсимотини кўрдик. Лекин шу воқеалар тақсимотини юза ҳажм (ёки фазовий ҳажм) бўйича кўриш ҳам мумкин. Бунда вақт оралиғи ўрнига юза ёки ҳажм оралиги бўлади.

2.2.4. ПОЛИНОМИАЛ ТАҚСИМОТ

Биномиал тақсимотни қуйидагича умумлаштириш мумкин. Ҳар бир тажрибада тасодифий катталикнинг $E_1, E_2, \ldots E_r$ қийматлари содир бўлиши мумкин бўлсин ва E_i га $P_i (i = 1, 2, \ldots r)$ эҳтимоллик мос келсин. Умумий ҳолда

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_r = 1.$$

n марта тажриба ўтказилганда, k_1 марта E_1, k_2 марта E_2 ва ҳ. к ларнинг келиб чиқиши (воқеаларнинг содир бўлиши) эҳтимоллиги

$$\frac{n!}{k_1!k_2!...k_r} p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{kT} \tag{22}$$

бўлади, бунда

$$k_1 + k_2 + ... + k_r = n.$$

(22)ни ***полиномиал тақсимот*** дейилади, чунки у $(P_1 + P_2 + ... + P_r)^n$ полиномнинг ёйилмасидаги умумий ҳади билан бир хилдир.

2.3-§. УЗЛУКСИЗ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ

2.3.1. ЭҲТИМОЛЛИКЛАР ЗИЧЛИГИ

Ўқдаги (бир ўлчовли фазодаги) эҳтимолликлар зичлиги $f(x)$ деб

$$f(x) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \tag{23}$$

функцияни айтилади:

Ҳар бир эҳтимоллик зичлигига F тақсимот функцияси мослаштирилади:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy. \tag{24}$$

Бу $F(x)$ функция 0 ва 1 орасида ўзгарадиган монотон функциядир. Агар $f(x)$ функция $a \leq x \leq b$ оралиқда мавжуд бўлиб, бу оралиқдан ташқарида нолга тенг бўлса, $F(x)$ шу $a \leq x \leq b$ оралиқда мавжуд бўлади, ундан ташқарида нолга тенг бўлади. (a, b) оралиққа

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx \tag{25}$$

эҳтимоллик мос келади.

Кўп ўлчовли ҳол учун ҳам эҳтимолликлар зичлиги юқоридагига ўхшаш киритилади ва қуйидагича аниқланади:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)dx_1 dx_2, ..., dx_n = 1. \tag{26}$$

Икки ўлчовли фазода эҳтимолликлар зичлиги $f(x)g(y)$ нинг берилиши қуйидаги интеграл билан аниқланади:

$$P(A) = \iint_{(A)} f(x)g(y)dxdy. \tag{27}$$

Муҳим хусусий ҳолни кўрайлик:

$$S = X + Y$$

Фараз қилайлик, $x + y \le s$, $g(y) = G'(y)$ эканлигини назарда тутиб, (27)ни бундай ёзамиз:

$$P(x + y \le s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s - x) f(x) dx \qquad (28)$$

ёки, осонгина кўринадики,

$$P(x + y \le s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(s - y) dy. \qquad (29)$$

(28) ва (29) ифодалардан $X + Y$ нинг зичлиги қуйидагича аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s - x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(s - y) dy \qquad (30)$$

(30) тенгликни умумий ҳолда қуйидагича белгиланади:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(s - y) g(y) dy = \int_{0}^{\infty} f(x) g(s - x) dx. \qquad (31)$$

2.3.2. ЎРТАЧА ҚИЙМАТ. МОМЕНТЛАР

Тасодифий катталик эҳтимолликлари тақсимотининг муҳим хусусиятларидан бири — бу ўртача қиймат (математик кутилма)дир. Фараз қилайлик, x тасодифий катталикнинг қийматлари $x_1, x_2, \dots, x_i \dots$ ва унинг эҳтимолликлари P_1, P_2, $\dots P_i$ бўлсин. Бу ҳолда x нинг ўртача қиймати

$$< x > = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i \qquad (32)$$

яқинлашувчи қатор билан аниқланади. Агар x нинг қийматлари узлуксиз бўлса, у ҳолда ўртача қиймат

$$< x > = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (33)$$

яқинлашувчи интеграл билан аниқланади.

$F(x)$ тасодифий катталик x нинг тақсимот функцияси бўлсин. У ҳолда x нинг k тартибли моменти

$$< x^k > = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) \qquad (34)$$

n марта тажриба ўтказилганда, k_1 марта E_1, k_2 марта E_2 ва ҳ. к ларнинг келиб чиқиши (воқеаларнинг содир бўлиши) эҳтимоллиги

$$\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_r} p_1^{k_1} p_2^{k_2} \ldots p_r^{kT} \qquad (22)$$

бўлади, бунда

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_r = n.$$

(22)ни ***полиномиал тақсимот*** дейилади, чунки у $(P_1 + P_2 + \ldots + P_r)^n$ полиномнинг ёйилмасидаги умумий ҳади билан бир хилдир.

2.3-§. УЗЛУКСИЗ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАРИ

2.3.1. ЭҲТИМОЛЛИКЛАР ЗИЧЛИГИ

Ўқдаги (бир ўлчовли фазодаги) эҳтимолликлар зичлиги $f(x)$ деб

$$f(x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1. \qquad (23)$$

функцияни айтилади:

Ҳар бир эҳтимоллик зичлигига F тақсимот функцияси мослаштирилади:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(y)dy. \qquad (24)$$

Бу $F(x)$ функция 0 ва 1 орасида ўзгарадиган монотон функциядир. Агар $f(x)$ функция $a \leq x \leq b$ оралиқда мавжуд бўлиб, бу оралиқдан ташқарида нолга тенг бўлса, $F(x)$ шу $a \leq x \leq b$ оралиқда мавжуд бўлади, ундан ташқарида нолга тенг бўлади. (a, b) оралиққа

$$F(b) - F(a) = \int_{a}^{b} f(x)dx \qquad (25)$$

эҳтимоллик мос келади.

Кўп ўлчовли ҳол учун ҳам эҳтимолликлар зичлиги юқоридагига ўхшаш киритилади ва қуйидагича аниқланади:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,dx_1 dx_2, \ldots, dx_n = 1. \quad (26)$$

Икки ўлчовли фазода эҳтимолликлар зичлиги $f(x)g(y)$ нинг берилиши қуйидаги интеграл билан аниқланади:

$$P(A) = \iint_{(A)} f(x)g(y)dxdy. \qquad (27)$$

Муҳим хусусий ҳолни кўрайлик:

$$S = X + Y$$

Фараз қилайлик, $x + y \leq s$, $g(y) = G'(y)$ эканлигини назарда тутиб, (27)ни бундай ёзамиз:

$$P(x + y \leq s) = \int_{-\infty}^{\infty} G(s - x) f(x) dx \qquad (28)$$

ёки, осонгина кўринадики,

$$P(x + y \leq s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(s - y) dy. \qquad (29)$$

(28) ва (29) ифодалардан $X + Y$ нинг зичлиги қуйидагича аниқланади:

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(s - x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} g(y) F(s - y) dy \qquad (30)$$

(30) тенгликни умумий ҳолда қуйидагича белгиланади:

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(s - y) g(y) dy = \int_{0}^{\infty} f(x) g(s - x) dx. \qquad (31)$$

2.3.2. ЎРТАЧА ҚИЙМАТ. МОМЕНТЛАР

Тасодифий катталик эҳтимолликлари тақсимотининг муҳим хусусиятларидан бири — бу ўртача қиймат (математик кутилма)дир. Фараз қилайлик, x тасодифий катталикнинг қийматлари $x_1, x_2, \ldots, x_i \ldots$ ва унинг эҳтимолликлари P_1, P_2, $\ldots P_i$ бўлсин. Бу ҳолда x нинг ўртача қиймати

$$< x > = \sum_{i=1}^{\infty} x_i P_i \qquad (32)$$

яқинлашувчи қатор билан аниқланади. Агар x нинг қийматлари узлуксиз бўлса, у ҳолда ўртача қиймат

$$< x > = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \qquad (33)$$

яқинлашувчи интеграл билан аниқланади.

$F(x)$ тасодифий катталик x нинг тақсимот функцияси бўлсин. У ҳолда x нинг k тартибли моменти

$$< x^k > = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k dF(x) \qquad (34)$$

$$V(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} t^2 e^{-t^2/2}, t > 0. \quad (43)$$

Бу Максвелл тезликлар тақсимоти қонунидир.

2.3.7. ГАММА-ЗИЧЛИК

Гамма-функция

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-x} dx \quad (44)$$

интеграл ифода билан аниқланади, бунда $\nu = 0, 1, 2 \ldots$ бутун сонлар учун $\Gamma(\nu + 1) = \nu!$ Умумий ҳолда эса, ν миқдор $(0, \infty)$ оралиқда ўзгарганда, (44)ни бўлаклаб интеграллаш орқали аниқланади: $\Gamma(\nu + 1) = \nu\,\Gamma(\nu)$ $f_{\beta,\nu}(x)$ гамма-зичлик

$$f_{\beta,\nu}(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \beta^{\nu} x^{\nu-1} e^{-\beta x} dx \quad (45)$$

формула билан аниқланади.

Гамма-зичликлар йиғиштирма операциясига нисбатан ёпиқ, яъни:

$$f_{\beta,\mu} * f_{\beta,\nu} = f_{\beta,\mu+\nu},\ \mu > 0,\ \nu > 0; \quad (46)$$

2.3.8. ХАРАКТЕРИСТИК ФУНКЦИЯЛАР

Таъриф. Тасодифий катталик (миқдор) эҳтимолликлари зичлиги $f(x)$ га эга бўлсин. Бу ҳолда ҳақиқий катталик (миқдор) учун $f(x)$ зичликнинг характеристик функцияси $\varphi(\xi)$ қуйидагича аниқланади:

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f(x) dx \quad (47)$$

ёки

$$\varphi(\xi) = \langle e^{i\xi x} \rangle. \quad (48)$$

Равшанки, умумий ҳолда

$$\varphi(\xi) = u(\xi) + i\vartheta(\xi) \quad (49)$$

Масала. Гамма-тақсимотнинг характеристик функцияси $\varphi(\xi)$ ни аниқланг.

Ечиш.

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} f_{\beta\nu}(x)dx = \frac{\beta\nu}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi x} x^{\nu-1} e^{-\beta x} dx =$$

$$= \frac{\beta\nu}{\Gamma(\nu)} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta\left(1-\frac{i\xi}{\beta}\right)^{x}} dx = \frac{\beta^{\nu}}{(1-i\xi/\beta)^{\nu}\,\Gamma_{(\nu)}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{\nu-1} e^{-\beta x} dx = \frac{1}{(1-i\xi/\beta)^{\nu}}.$$

2.3.9. КЎП АРГУМЕНТЛИ ТАҚСИМОТ ФУНКЦИЯЛАР

Бир нечта тасодифий катталиклар $x_1, x_2, x_3, \ldots$ га боғлиқ воқеанинг эҳтимолликлари $dW(x_1, x_2, \ldots)$ қуйидагича ёзилиши мумкин:

$$\left.\begin{aligned} &dW(x_1, x_2) = f(x_1, x_2)dx_1dx_2; \\ &dW(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_2, x_3)dx_1dx_2dx_3; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &dW(x_1, x_2, \ldots x_n) = f(x_1, x_2, \ldots x_n)dx_1dx_2\ldots dx_n. \end{aligned}\right\} \quad (50)$$

$x_1, x_2, \ldots x_n$ тасодифий катталикларга боғлиқ мураккаб тасодифий катталик $L\ (x_1, x_2, \ldots x_n)$ нинг ўртача қиймати (моменти)

$$< L > = \int_{(x_1,\ldots,x_n)} L(x_1, x_2\ldots, x_n) f(x_1, x_2\ldots, x_n)\, dx_1dx_2\ldots dx_n \quad (51)$$

ифода билан аниқланади.

Фараз қилайлик, тасодифий катталик уч ўлчовли (яъни учта x, y, z тасодифий катталикларга боғлиқ) бўлсин. У ҳолда:

$$dW(x, y, z) = f(x, y, z)dxdydz. \quad (52)$$

Фазонинг маълум қисмида аниқланган тақсимот функцияси $W(x, y, z)$ ни топиш учун (52) ни $dxdydz$ "куб"лар бўйича интеграллаш зарур, яъни:

$$W(x, y, z) = \int\int\int_{(V)} f(x, y, z)\, dxdydz. \quad (53)$$

(52) ифодада Декарт координаталар тизимидан сферик координаталар тизимига ўтайлик. У ҳолда:

$$dW(x, y, z) = dW(r, \theta, \varphi) = f(x, y, z)dxdydz =$$
$$= f(r, \theta, \varphi)\left|J\right| d\theta d\varphi dr = f(r, \theta, \varphi)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi r^2 dr.$$

салан, классик механикада Гамильтон тенгламалари ёки квант механикасида Шредингер тенгламаси) асосида аниқланади. Статистик физикада тизимнинг статистик микроҳолати Лиувилль тенгламаси билан тавсифланади.

Мувозанатдаги статистик физикада Лиувилль тенгламасини қаноатлантирувчи ихтиёрий функция $f(H)$ нинг ошкор кўринишини аниқлаш бош масаладир.

В. Гиббс статистик ансамбль тушунчасини киритиб, унинг асосида $f(H)$ нинг ошкор кўриниши учун

$$f(H) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} \tag{1}$$

ифодани ёзди. Бунда $H = E$ тизимнинг тўлиқ энергияси, β ва Z берилган тизим учун доимий параметрлар бўлиб, термодинамика муносабатлари билан таққослаш ва нормалаш шарти асосида

$$\beta = 1/kT; \; Z = \exp(-\beta F) \tag{2}$$

эканлиги аниқланади; F — тизимнинг эркин энергияси, T унинг температураси.

Статистик физика фани яратилишида ансамбль тушунчаси киритилиши ва шу асосда (1) ифоданинг аниқланиши фундаментал аҳамиятга эга бўлсада, (бунда Р. Винер квант механика ва нисбийлик назариялари кашф қилинишидан устун қўяди [8]) (1) ифодани асослашда, масалан, термодинамикага мурожаат қилиниши назариянинг мантиқий жиҳатдан мукаммал эмаслигидан далолат беради.

Ҳақиқатан ҳам, статистик физикани асослашда кўпгина ноаниқликлар мавжуд. Зубарев Д. Н. айтганидай "Ансамбль назариясини яратиш ва олинган тақсимот функцияларни асослаш мураккаб ва ҳозиргача тўла ечилмаган муаммодир. Хатто, бу аниқ ечим қандай даражада мумкинлиги ноаниқдир". [5, 27-бет].

Биз шу ерда таъкидлаймизки, гарчи Гиббс тақсимоти функцияси, назарий-мантиқий жиҳатдан қатъий исбот қилинмаган бўлса-да, бунинг ўринли эканлигига ундан келиб чиқадиган натижалар термодинамика муносабатларига мувофиқ келиши ва, демак, тажриба натижаларига мос келиши билан қаноат ҳосил қилинар эди.

Шундай қилиб, Гиббс ансамбли ва унинг асосида тақсимот функцияларини асослаш қатъий айтилганда, узилкесил, тўла ҳал қилинмаган масаладир. (қ. [4, 5, 9, 10] ва бошқалар). Юқорида айтилган сабаблар туфайли, информация назарияси тушунчаларига таяниб, Шеннон формуласи асосида статистик физиканинг асосини қуриш, тақсимот функцияларини асослаш мумкин эди. Аммо бу йўлни рўёбга чиқаришда услубий жиҳатдан қийинчиликлар бор эди.

Биз статистик физикани асослашдаги бу қийинчиликлар, ноаниқликлар ва услубий қийинчиликларни бартараф этишга ҳаракат қилдик. Бошқача айтганда, статистик физика ва статистик термодинамика асосларини ҳам назарий, ҳам услубий жиҳатдан мукаммаллаштиришга уриндик.

3.2-§. ЯККАЛАНГАН ТИЗИМ. МИКРОКАНОНИК ТАҚСИМОТ

Таърифга асосан, яккаланган тизимнинг энергияси E ва зарралар сони N доимийдир, яъни:

$$E = E_0 = const, \; N = \; const \tag{1}$$

Бу ҳолда микроҳолатлар эҳтимолликлари тенг эҳтимолли статистик микроҳолатлар каби аниқланади: $W_1 = W_2 = = ...= W$. Нормалаш шарти:

$$\sum_i W_i = W \sum_i 1_i = WN_A = 1. \tag{2}$$

Бу ифодадан

$$W = \frac{1}{N_A}. \tag{3}$$

Барча микроҳолатлар учун бир хил бўлган (3) тақсимотни *микроканоник тақсимот* дейилади. Энтропия эса яккаланган тизим учун

$$S = -\sum_i^{N_A} W_i \ln W_i = -\sum_i^{N_A} \left(\frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} \right) = \ln N_A, \; \frac{n}{N} = \frac{1}{N_A} \tag{4}$$

ифода билан аниқланади.

Тизимнинг микроҳолатини энергия қиймати орқали аниқлангани ва энергия фақат битта қиймат $E = E_0$ ни қабул қилгани туфайли тизимнинг бундай микроҳолати салан, классик механикада Гамильтон тенгламалари ёки квант механикасида Шредингер тенгламаси) асосида аниқланади. Статистик физикада тизимнинг статистик микроҳолати Лиувилль тенгламаси билан тавсифланади.

Мувозанатдаги статистик физикада Лиувилль тенгламасини қаноатлантирувчи ихтиёрий функция $f(H)$ нинг ошкор кўринишини аниқлаш бош масаладир.

В. Гиббс статистик ансамбль тушунчасини киритиб, унинг асосида $f(H)$ нинг ошкор кўриниши учун

$$f(H) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} \tag{1}$$

ифодани ёзди. Бунда $H = E$ тизимнинг тўлиқ энергияси, β ва Z берилган тизим учун доимий параметрлар бўлиб, термодинамика муносабатлари билан таққослаш ва нормалаш шарти асосида

$$\beta = 1/kT; \; Z = \exp(-\beta F) \tag{2}$$

эканлиги аниқланади; F — тизимнинг эркин энергияси, T унинг температураси.

Статистик физика фани яратилишида ансамбль тушунчаси киритилиши ва шу асосда (1) ифоданинг аниқланиши фундаментал аҳамиятга эга бўлсада, (бунда Р. Винер квант механика ва нисбийлик назариялари кашф қилинишидан устун қўяди [8]) (1) ифодани асослашда, масалан, термодинамикага мурожаат қилиниши назариянинг мантиқий жиҳатдан мукаммал эмаслигидан далолат беради.

Ҳақиқатан ҳам, статистик физикани асослашда кўпгина ноаниқликлар мавжуд. Зубарев Д. Н. айтганидай "Ансамбль назариясини яратиш ва олинган тақсимот функцияларни асослаш мураккаб ва ҳозиргача тўла ечилмаган муаммодир. Хатто, бу аниқ ечим қандай даражада мумкинлиги ноаниқдир". [5, 27-бет].

Биз шу ерда таъкидлаймизки, гарчи Гиббс тақсимоти функцияси, назарий-мантиқий жиҳатдан қатъий исбот қилинмаган бўлса-да, бунинг ўринли эканлигига ундан келиб чиқадиган натижалар термодинамика муносабатларига мувофиқ келиши ва, демак, тажриба натижаларига мос келиши билан қаноат ҳосил қилинар эди.

Шундай қилиб, Гиббс ансамбли ва унинг асосида тақсимот функцияларини асослаш қатъий айтилганда, узил-кесил, тўла ҳал қилинмаган масаладир. (қ. [4, 5, 9, 10] ва бошқалар). Юқорида айтилган сабаблар туфайли, информация назарияси тушунчаларига таяниб, Шеннон формуласи асосида статистик физиканинг асосини қуриш, тақсимот функцияларини асослаш мумкин эди. Аммо бу йўлни рўёбга чиқаришда услубий жиҳатдан қийинчиликлар бор эди.

Биз статистик физикани асослашдаги бу қийинчиликлар, ноаниқликлар ва услубий қийинчиликларни бартараф этишга ҳаракат қилдик. Бошқача айтганда, статистик физика ва статистик термодинамика асосларини ҳам назарий, ҳам услубий жиҳатдан мукаммаллаштиришга уриндик.

3.2-§. ЯККАЛАНГАН ТИЗИМ. МИКРОКАНОНИК ТАҚСИМОТ

Таърифга асосан, яккаланган тизимнинг энергияси E ва зарралар сони N доимийдир, яъни:

$$E = E_0 = const, \quad N = const \qquad (1)$$

Бу ҳолда микроҳолатлар эҳтимолликлари тенг эҳтимолли статистик микроҳолатлар каби аниқланади: $W_1 = W_2 = \ldots = W$. Нормалаш шарти:

$$\sum_i W_i = W \sum_i 1_i = WN_A = 1. \qquad (2)$$

Бу ифодадан

$$W = \frac{1}{N_A}. \qquad (3)$$

Барча микроҳолатлар учун бир хил бўлган (3) тақсимотни *микроканоник тақсимот* дейилади. Энтропия эса яккаланган тизим учун

$$S = -\sum_i^{N_A} W_i \ln W_i = -\sum_i^{N_A} \left(\frac{n_i}{N} \ln \frac{n_i}{N} \right) = \ln N_A, \quad \frac{n}{N} = \frac{1}{N_A} \qquad (4)$$

ифода билан аниқланади.

Тизимнинг микроҳолатини энергия қиймати орқали аниқлангани ва энергия фақат битта қиймат $E = E_0$ ни қабул қилгани туфайли тизимнинг бундай микроҳолати битта бўлади ва унинг эҳтимоллиги $dW(E)$ узлуксиз ҳол учун

$$dW(E) = \delta(E - E_0)dE \tag{5}$$

ифода билан аниқланади; бунда эҳтимолликлар зичлиги $\delta(E - E_0)$ Диракнинг дельта-функциясидир. Нормалаш шарти

$$\int_{(E)} dW(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta\left(E - E_0\right)dE = 1 \tag{6}$$

кўринишга эга.

3.1-масала. Яккаланган тизим учун нормалаш шарти $\sum W_i = 1$ ва энтропия ифодаси $S = -\sum W_i \ln W_i$ дан фойдаланиб микроканоник тақсимот функцисини аниқланг.

Эслатма: Мувозанат ҳолатида S максимум қийматга эга ва у ўзгармайди. Ечиш:

Нормалаш шарти ва энтропия ифодалари вариацияларини оламиз:

$$\delta \sum_i W_i = 0, \tag{1}$$

$$\delta S = -\delta \sum_i W_i \ln W_i = 0 - \sum_i \ln W_i \delta n W_i = 0\,. \tag{2}$$

(1) ни Лагранжнинг номаълум коэффициенти α га кўпайтириб, сўнг уни (2)га қўшиб, қуйидагини оламиз

$$\sum_i W_i \left(\alpha - \ln W_i\right) \delta W_i = 0. \tag{3}$$

W_i ихтиёрий ўзгарганда (3) даги тенглик бажарилиши учун δW_i олдидаги коэффициентлар нолга тенг бўлиши шарт, яъни

$$\alpha - \ln W_i = 0. \tag{4}$$

бўлиши керак. Бундан барча ҳолатлар учун

$$W_i = e^{\alpha} \tag{5}$$

тақсимот функциясини оламиз. W_i ни нормалаш шартига қўямиз:

$$\sum_i W_i = \sum_i e^{\alpha} - 1_i = e^{\alpha} \sum_i 1_i = 1$$

Бундан ҳолатлар сони $N_A = \sum_i 1_i$ учун

$$N_A = \bar{e}^{\alpha}$$

ифодани оламиз; демак,

$$W_i = 1/N_A. \tag{6}$$

Бу ҳолда тизимнинг ҳар бир микроҳолатда бўлиш эҳтимоллиги W_i, микроҳолатлар эҳтимолликлари ўзаро тенг бўлганлиги учун, микроҳолатлар сонининг тескари қиймати $1/N_A$ га тенг. Бошқача айтганда, 1 ни микроҳолатлар сони N_A га бўлиб, микроҳолатлар эҳтимоллиги W_i топилади. Демак, микроканоник тақсимот учун асосий матндаги ифодани оламиз. (6) ни энтропия ифодасига қўйиб маълум ифодани оламиз:

$$S = \ln N_A.$$

3.3-§. БЕРК ТИЗИМ. КАНОНИК ТАҚСИМОТ

Таъриф бўйича, берк тизимда зарралар сони ўзгармайди, яъни $N = const$. Ташқи тизим билан қаралаётган тизим контактда бўлгани туфайли унинг E энергияси $(0, \infty)$ оралиқда ўзгариши мумкин. Тизим термодинамик мувозанат ҳолатда бўлганда унинг ўртача энергияси, яъни ички энергияси

$$U = \sum_i E_i W_i \tag{7}$$

доимий бўлади.

Бундай тизимнинг микроҳолатлари эҳтимолликлари тақсимоти функцияси

$$W_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \tag{8}$$

узлуксиз ҳол бўлганда эса тақсимот функцияси

$$f(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} \tag{9}$$

эканлигини биринчи бобда аниқлаган эдик. (8) ёки (9) ***канопик тақсимот*** дейилади. Бундаги номаълум Z нинг ифодасини нормалаш шарти

$$\sum_i W_i = 1 \qquad (10)$$

дан аниқланади:

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i}.$$

Z — ***статистик йиғинди*** (микроҳолатлар узлуксиз ўзгарган ҳолда статистик интеграл) дейилади. Иккинчи номаълум коэффициент β ни (7) дан аниқланади.

3.2-масала. Берк тизим учун каноник тақсимот функциясини Гиббс формуласи

$$S = -\sum_i W_i \ln W_i, \qquad (1)$$

ички энергия ифодаси (7) ва нормалаш шарти (10) ифодалардан фойдаланиб аниқланг.

Ечиш. 1. Анъанавий усул. Мувозанатдаги ҳолат учун (7), (10) ва энтропия S нинг вариацияларини олиб,

$$\delta U = \delta \sum_i E_i W_i = 0; \qquad (2)$$

$$\delta \sum_i W_i = 0; \qquad (3)$$

$$\delta S = -\delta \sum_i W_i \ln W_i = -\sum_i \ln W_i \delta W_i = 0 \qquad (4)$$

тенгламаларга эга бўламиз. (2) ва (3) ни номаълум коэффициентлар β ва α га кўпайтириб, сўнг (2), (3) ва (4) ни қўшиб,

$$\sum_i (\alpha - \ln W_i - \beta E_i)\delta W_i = 0 \qquad (5)$$

ифодани оламиз.

W_i ихтиёрий ўзгарганда (5) тенглик бажарилиши учун коэффициентлар нолга тенг бўлиши шарт, яъни

$$\alpha - \ln W_i - \beta E_i = 0 \tag{6}$$

бўлиши керак. Бундан изланаётган каноник тақсимотни топамиз

$$W_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}, \tag{7}$$

бунда

$$\frac{1}{Z} = e^{\alpha} \tag{8}$$

белгилаш киритилди. Каноник тақсимотдаги иккита номаълум коэффициент Z (ёки α ва β ни нормалаш шарти ва ички энергия ифодаларидан фойдаланиб аниқланади; ҳақиқатан, (7) ни нормалаш шартига қўйиб,

$$Z = \sum_i e^{-\beta E_i} \tag{9}$$

ифодани оламиз. β ни аниқлашни кейинроқ кўрамиз. (7) ни ички энергия ифодасига қўямиз.

$$U = \frac{1}{Z} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} = -\frac{1}{Z} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\sum_i e^{-\beta E_i} \right) = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta}.$$

Демак,

$$\underline{U} = -\left| \frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} \right|_{E_1 E_2, \ldots} \tag{10}$$

(7) ни энтропия ифодаси (1) га қўямиз:

$$S = - \langle \ln W_i \rangle = \beta \langle E_i \rangle + \ln Z.$$

Демак,

$$S = \beta U + \ln Z. \tag{11}$$

2. Янги усул. Квазистатик (мувозанатдаги) жараёнлар учун нормалаш шарти $\sum_i W_i = 1$, энтропия ифодаси $S = -\sum_i W_i \ln W_i$ ва ички энергия $U = \sum_i E_i W_i$ нинг ўзгаришларини ёзайлик:

$$0 = \sum_i dW_i, \tag{12}$$

$$dS = -\sum_i \ln W_i dW_i, \tag{13}$$

$$dU = \sum_i W_i dE_i + \sum_i E_i dW_i. \tag{14}$$

Энергия ўзгаришларининг (камайишларининг) ўртачаси $-\sum W_i dE_i = -< dE >$ тизим томонидан бажарилган dA ишга тенг, яъни $-<dE> = dA$. Шунга биноан (14) ни қайта ёзамиз:

$$\sum_i E_i dW_i = dU + dA \tag{15}$$

Термодинамиканинг биринчи қонунини ёзамиз:

$$dQ = dU + dA. \tag{16}$$

(15) билан (16) ни таққослаб, иссиқлик ифодасини оламиз:

$$dQ = \sum_i E_i dW_i. \tag{17}$$

(12) ни α га кўпайтириб, сўнгра уни (13) га қўшиб, мувозанатдаги жараён учун

$$dS = \sum_i (\alpha - \ln W_i) dW_i, \tag{18}$$

тенгликни оламиз.

Мувозанатдаги жараёндаги иссиқлик миқдори dQ_0 ни dS га тенглаштириш учун, уни β га кўпайтирамиз*, яъни

$$dS = \beta dQ_0 = \sum_i \beta E_i dW_i. \tag{19}$$

(18) билан (19)ни таққослаб, қуйидагини оламиз:

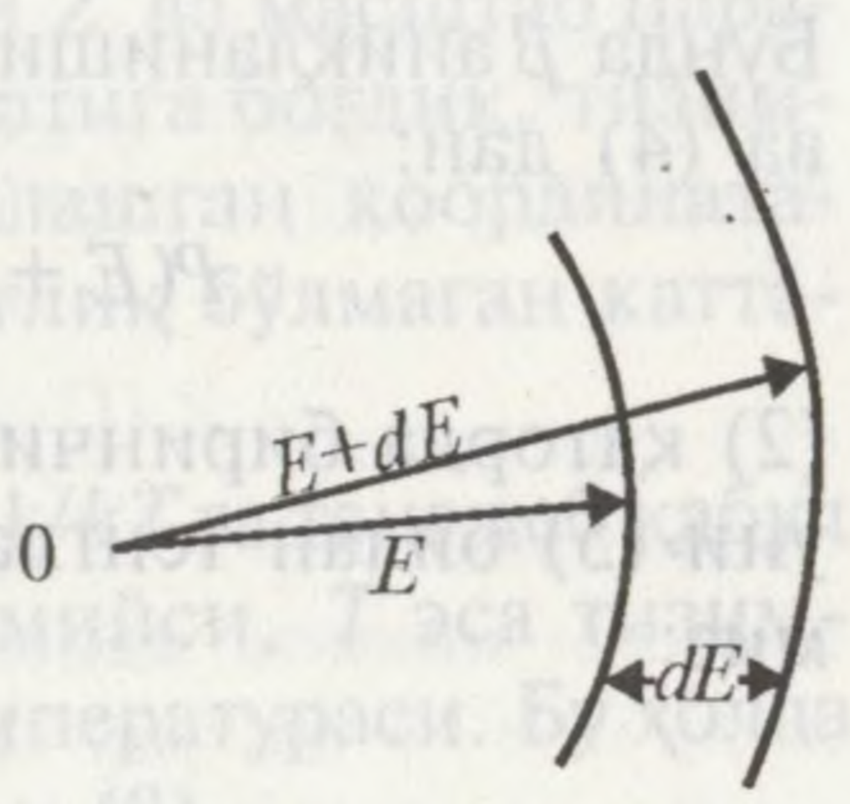
$$\alpha - \ln W_i = \beta E_i$$

---

* Берилган тизим учун шундай β кўпайтувчи (математик нуқтаи назардан шундай интегралловчи кўпайтувчи) мавжуд деб қаралди.

ёки бундан каноник тақсимотни аниқлаймиз

$$W_i = e^{\alpha} e^{-\beta E_i} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}.$$



3.1-расм.

3.3-масала. Микроҳолатлар тизим энергияси қийматлари E билан аниқланади. Тизим энергиясининг қиймати (O, E) оралиқда бўлмасдан, балки унинг радиуслари E ва $E + dE$ бўлган икки гиперсфера билан чекланган элементар ҳажмдаги ҳолатлардан бирида бўлиши эҳтимоли аниқлансин (3.1-расм).

Ечиш. Икки гиперсфера орасидаги элементар ҳажмда статистик микроҳолатлар сони dn га тенг бўлсин. Бу ҳолда тизим энергияси E нинг қиймати радиуслари E ва $E + dE$ бўлган гиперсфералар билан чекланган элементар ҳажмдаги dn ҳолатлардан ихтиёрий бирида бўлиш эҳтимоли $dW(E)$ асосий постулатга асосан dn га пропорционал, яъни:

$$dW(E) \sim dn(E) \qquad (1)$$

Тизим энергиясининг қийматлари (O, E) оралиқда бўлмаслик эҳтимоллиги $P(E)$ ни аниқлайлик. Тизим энергиясининг $(O, E + dE)$ оралиқда бўлмаслик эҳтимоллиги $P(E + dE)$ га тенг. Бу $P(E + dE)$ функцияни dE нинг даражалари бўйича қаторга ёйилик:

$$P(E + dE) = P(E) + \frac{\partial P}{\partial E} dE + \ldots \qquad (2)$$

Иккинчи томондан, энергия қийматларининг $(O, E + dE)$ оралиқда бўлмаслик эҳтимоллиги энергиянинг (O, E) оралиқда бўлмаслик эҳтимоллиги $P(E)$ нинг шу энергия қийматининг $(E, E + dE)$ оралиқда ҳам бўлмаслик эҳтимоллиги P га кўпайтмасидан иборат, яъни:

$$P(E + dE) = P(E) P. \qquad (3)$$

Эҳтимолликларнинг тенг тақсимланиши ҳақидаги асосий постулатга биноан энергия қийматининг E, $E + dE$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги dE га мутаносиб. Шунинг учун

$$P + \beta dE = 1 \qquad (4)$$

Бунда β аниқланиши лозим бўлган "масштаб" параметр. (3) ва (4) дан:

$$P(E+dE) = P(E) - P(E)\beta dE. \tag{5}$$

(2) қаторда биринчи иккита ҳад билан чегараланиб, сўнг уни (5) билан тенглаштирсак, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\frac{dp(E)}{p(E)} = -\beta dE.$$

Бундан

$$P(E) = A\,e^{-\beta E}$$

тенгликни оламиз. Узунлиги нолга тенг бўлган $(O,\ E)$ оралиқ тизимнинг бўлмаслиги муқаррар воқеа ҳисобланади. Муқаррар воқеанинг эҳтимоллиги, маълумки, бирга тенг, яъни $P(0) = A = 1$. Демак,

$$P(E) = e^{-\beta E}. \tag{6}$$

Шундай қилиб, изланаётган эҳтимоллик $dW(E)$ эҳтимолликларни кўпайтириш теоремасига асосан, $dW(E) \sim e^{-\beta E}dn$ ёки

$$dW(E) = \frac{1}{Z}e^{-\beta E}dn \tag{7}$$

ифода билан аниқланади; Z — параметрни нормалаш шартидан топилади. (7) дан эҳтимоллик зичлиги — каноник тақсимот функцияси $f(E)$ учун

$$f(E) = \frac{1}{Z}e^{-\beta E} \tag{8}$$

ифодага эга бўламиз.

1-изоҳ. Эҳтимолликлар зичлиги ифодасидаги тизимнинг тўлиқ энергияси (гамилтониан) E умумлашган координаталар $q_1, q_2, \ldots$ ва умумлашган импульслар $p_1, p_2, \ldots$ га боғлиқ, яъни $E = E(p,\ q)$. Статистик физикада умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар (қисқача уларни $q,\ p$ билан белгилаймиз) ва, демак, $E(p,\ q)$ гамильтониан тасодифий катталиклардир. Шунингдек, dn энергия E га ва, демак, $(p,\ q)$ га боғлиқ, яъни $dn(E)$ ёки $dn(p,\ q)$.

2-изоҳ. Тақсимот функциясидаги Z ва масштаб параметр β тизимнинг термодинамик ҳолатига боғлиқ, тизимнинг микроҳолатларига, яъни умумлашган координаталар ва умумлашган импульсларга боғлиқ бўлмаган катталиклар.

3-изоҳ. Статистик физикада β ни $1/kT$ га тенг деб қабул қилинган; бунда k — Больцман доимийси, T эса тизимнинг Кельвин шкаласида олинган температураси. Бу ҳолда эҳтимолликлар тақсимоти функцияси (8)

$$f(E) = \frac{1}{Z}\exp\left(-E/kT\right) \tag{9}$$

кўринишга келади. (9) ***каноник тақсимот*** дейилади.

3.4-§. ОЧИҚ ТИЗИМ. КАТТА КАНОНИК ТАҚСИМОТ

Очиқ тизимнинг таърифга кўра, унинг энергияси E ва зарралари сони N ўзгариши мумкин, яъни улар доимий бўлмайдилар. Аммо очиқ тизим термодинамик мувозанат ҳолатида бўлса, унинг ўртача энергияси (ички энергияси)

$$U = \sum_i E_i W_i \tag{10}$$

ва зарраларнинг ўртача сони

$$\langle N \rangle = \sum N_i W_i \tag{11}$$

ўзгармайди.

Очиқ тизим учун ҳам аввалги усул билан E_i ва N_i ларга боғлиқ тақсимот функциясининг

$$W_i = \frac{1}{Z(U, \langle N \rangle)} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} \tag{12}$$

ифодасини олиш мумкин. Бунда μ, яна битта номаълум коэффициент бўлиб, у (11) ифода асосида топилади; Z ва β ни нормалаш шарти

$$\sum_i W_i = 1 \tag{13}$$

ва ички энергия ифодаси (10) дан фойдаланиб топилади. Масалан, (12) ни (13) га қўйиб қуйидагини топамиз:

$$Z(U, < N >) = \sum_i e^{-\beta(E_i - \mu N_i)} . \qquad (14)$$

(12) ни ***катта каноник тақсимот функцияси*** дейилади, $Z(U, < N >)$ ни эса ***статистик йиғинди*** дейилади.

Биз тизим зарралари сони (ёки эркинлик даражалари сони) доимий бўлганда унинг энергияси қийматлари тақсимотини тавсифлайдиган каноник тақсимотни кўрдик. Аммо амалда фақатгина энергияси эмас зарралар сони ва, демак, эркинлик даражалари сони ҳам ўзгарадиган тизимлар ҳам учрайди. Масалан, суюқликдан буғга ва буғдан суюқликка молекулалар ўтиб туриши мумкинки, суюқликни ҳам, буғни ҳам зарралари сони ўзгарувчи тизимлар деб қаралиши мумкин. i тизим ташқи тизим билан зарралар алмашиб турсин. Ташқи тизим билан бирликда берк тизим (хусусий ҳолда, яккаланган тизим) ҳосил қилсин. Бундай берк тизимнинг мувозанат ҳолати учун каноник тақсимот ўринли:

$$f(E) = \frac{1}{Z} e^{-\beta E} . \qquad (15)$$

Бунда Z — умумий берк тизим учун ҳам, биз қараётган i тизим учун ҳам умумий параметр. Ёзамиз:

$$\frac{1}{Z} e^{\beta F} . \qquad (16)$$

Бунда $F = \Phi - PV$ аддитив функция $F = \sum_i F_i$, бундан:

$$F_i = \Phi_i - PV_i . \qquad (17)$$

F_i, Φ_i ва V_i — қаралаётган i очиқ тизимнинг мос равишда эркин энергияси, термодинамик потенциали ва ҳажмидан иборат эканини кейинроқ кўрамиз.

Умумий берк тизим энергияси E, зарралар сони N ва унинг ҳажми V қуйидагича аниқланади:

$$E = \sum_i E_i, \; N = \sum_i N_i, \; V = \sum_i V_i . \qquad (18)$$

Бу ерда тизимчаларнинг ўзаро таъсир энергияси ҳисобга олинмади. Мувозанат ҳолатда химик потенциаллар

$$\mu_1 = \mu_2 = ... + \mu_i ... = \mu \quad (19)$$

эканлигини эътиборга олиб ва $\Phi_i = N_i \mu_i = N_i \mu$ ни ҳисобга олиб, умумий тақсимот функцияси $f(E)$ учун ушбу ифодани ёзамиз:

$$f(E) = \exp[\sum_i (\mu N_i - E_i - PV_i)] =$$

$$= e^{-\beta PV} \exp[\sum_i (\mu N_i - E_i)] = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_N - \mu N)}. \quad (20)$$

Бунда:

$$\frac{1}{Z} = \exp(-\beta PV); \; PV = \theta \ln Z. \quad (21)$$

Агар (20) да N ўзгарувчи деб қаралса, нормалаштириш шартидан катта каноник тақсимотдаги статистик интеграл (ёки йиғинди) Z учун ушбу ифодани оламиз:

$$Z = \sum_{N=0}^{\infty} \int e^{-\beta(E_N - \mu N)} dn(p,q) = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} \int e^{-\beta E_N} dn(p,q) =$$

$$= \sum_{N=0}^{\infty} e^{\beta\mu N} Z_N. \quad (22)$$

Бунда узлуксиз ҳол учун:

$$Z_N = \int e^{-\beta E_N} dn, \quad (23)$$

дискрет ҳол учун:

$$Z_N = \sum_i e^{-\beta\mu E_{iN}}, \quad (24)$$

E_{Ni} — N та заррадан иборат тизимнинг l-ҳолатдаги энергияси. (20) ифодани ***катта каноник тақсимот*** дейилади; (22) ифодани эса очиқ тизим учун ***статистик интеграл*** ёки ***йиғинди*** дейилади.

3.4-масала. Очиқ тизим учун асосий матндаги (10), (11), (13) ва энтропия ифодаси

$$S = -\sum_i W_i \ln W_i \quad (1)$$

дан фойдаланиб катта каноник тақсимотни аниқланг.

Ечиш. Мувозанатдаги ҳол учун

$$\delta U = \delta \sum_i E_i W_i = 0, \tag{2}$$

$$\delta < N > = \delta \sum_i N_i W_i = 0, \tag{3}$$

$$\delta \sum_i W_i = 0, \tag{4}$$

$$\delta S = -\delta \sum_i W_i \ln W_i = -\sum_i \ln W_i \delta W_i = 0 \tag{5}$$

тенгламаларни оламиз. Бу (2), (3), (4) тенгламаларни номаълум коэффициентлар β, $-\beta\mu$, α га мос равишда кўпайтириб, (5) ни ҳам эътиборга олиб, қуйидаги умумий ифодани оламиз

$$\sum_i (\alpha - \ln W_i - \beta E_i + \beta\mu N_i)\delta W_i = 0. \tag{6}$$

Аввалги 1, 2 масалалардаги каби, бундан W_i ни аниқлаймиз:

$$W_i = \frac{1}{Z} e^{-\beta(E_i - \mu N_i)}. \tag{7}$$

(7) ни ***катта каноник тақсимот*** дейилади, бунда

$$\frac{1}{Z} = e^{\alpha} \tag{8}$$

белгилаш киритилди; номаълум коэффициентлар β ва μ (10) ва (11) шартлар асосида топилади. (7) ни (13) га қўйиб статистик йиғинди ифодаси Z ни оламиз. (7) ни энтропия S ифодасига қўйиб, мувозанат ҳолат энтропияси учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$S = -\sum W_i (-\ln Z - \beta E_i + \beta\mu N_i) = \ln Z + \beta U - \beta\mu < N >. \tag{9}$$

3.5-масала. Термодинамик потенциал Φ учун

$$\Phi = \mu_\nu < \nu > = U - \theta S + PV \tag{10}$$

дан фойдаланиб, $PV = \theta \ln Z$ тенгликни исбот қилинг.

Ечиш. Таърифга кўра,

$$S = \sum_i W_i \ln W_i = -< \ln W_i >= -< -\ln Z - \beta(E_i - \mu_\nu \nu_i) >=$$

$$= \ln Z + \beta < E_i > -\beta \mu_\nu < \nu_i >= \ln Z + \beta U - \beta \Phi =$$

$$= \ln Z + \beta U - \beta(U - \theta S + PV);$$

$$S = \ln Z + \beta\theta S - \beta PV.$$

Бунда $\theta\beta = 1$. Демак,

$$PV = \theta \ln Z.$$

3.6-масала. Яккаланган тизимда ички жараёнлар (масалан, флуктуациялар), "реакциялар" туфайли "тузилишлар" (тартиблиликлар), "бузилишлар" бўлиб туриши мумкин. Бу ҳолда тизимни характерловчи "қисмлар" ("молекулалар" ёки улардан тузилган "комплекс" молекулалар) сони ўзгариб туради. Шу туфайли тизимни характерловчи "эркинлик даражалари сони" ν ҳам ўзгариб туради. Аммо тизим термодинамик мувозанат ҳолатида бўлганда бу ν соннинг ўртачаси, яъни

$$< \nu_i >= \sum_i \nu_i W_i \tag{11}$$

ўзгармайди. Тизим микроҳолатлари эҳтимолликларининг "эркинлик даражалари"

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_i$$

бўйича тақсимотини аниқланг.

Ечиш. Яккаланган тизим учун умумий ифодалар маълум:

$$\sum_i W_i = 1 \tag{12}$$

$$-\sum_i W_i \ln W_i = S \tag{13}$$

Мувозанатдаги ҳолат учун:

$$\delta \sum_i W_i = 0, \tag{14}$$

$$\delta < \nu > = \delta \sum_i \nu_i W_i = 0, \tag{15}$$

$$-\delta \sum_i W_i \ln W_i = \delta S = 0 \tag{16}$$

тенгликларга эгамиз. (14) ни номаълум коэффициент α га кўпайтирамиз.

(11) ни ёки (15) ни номаълум коэффициентга кўпайтириб, сўнг $\langle\nu\rangle$ ва ν_i билан белгилаш мумкин. Бунда ν учун маъно ўзгармайди. Унинг қийматини эса кейин аниқлаймиз. (14), (15) ва (16) тенгликларни қўшиб,

$$\sum_i (\alpha - \ln W_i - \nu_i)\delta W_i = 0 \tag{17}$$

ифодани оламиз. W_i ихтиёрий ўзгарганда (17) тенглик бажарилиши учун

$$\alpha - \ln W_i - \nu_i = 0 \tag{18}$$

тенглама бажарилиши шарт. Бу тенгламадан

$$W_i = e^{\alpha} e^{-\nu_i} = \frac{1}{z} e^{-\nu_i} \tag{19}$$

тақсимот функциясини оламиз. Буни нормалаш шартига қўйиб,

$$z = \sum_i e^{-\nu_i} \tag{20}$$

ифодани оламиз.

1-изоҳ. Юқори температурадаги сийрак газ деярли идеал газ деб қаралиши мумкин. Аммо температура камайиши ва зичликнинг ортиб бориши билан газда икки молекула, уч молекула ва ҳ. к. лардан иборат гуруҳлар ҳосил бўлиши мумкин ва ниҳоят суюқлик фазасида ҳамма молекулалар маълум даражада бир-бири билан боғланган бўлади.

Зич газлар ва суюқликлардаги ҳосил бўлиши мумкин бўлган бундай гуруҳларни *псевдомолекулалар* деб қаралиши мумкин. Бу ҳолда гуруҳлар ичидаги, яъни псевдомолекулалардаги боғланишлар туфайли тизимни характерловчи эркинлик даражалари умуман ўзгарувчан бўлади.

Мувозанатдаги тизимдаги берилган температура ва босимда (зичликда) бундай псевдомолекулалар маълум статистик тақсимотга эга бўлади. Албатта, бу псевдомолекула орасидаги ўзаро таъсир ҳақиқий молекуладагидай кучли бўлмайди.

2-и з о ҳ. Биз каноник тақсимот учун

$$W_i = \frac{1}{z} e^{-\beta E_i} \tag{21}$$

ифодани олган эдик. Агар тизим яккаланган бўлса, $E_1 = E_2 = ... = U$ бўлади. Демак, (21) ни

$$W_i = \frac{1}{z} e^{-\beta U} \tag{22}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Яккаланган, ички "реакциялар" бўлмаган ҳол учун

$$\nu_1 = \nu_2 = ... = <\nu> \equiv \nu$$

эканлигини назарда тутиб, (19) ифодани

$$W_i = \frac{1}{z} e^{-\nu} \tag{23}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (22) ва (23) тақсимотларнинг тенг эканлиги ва улардаги Z бир хил эканлигидан муҳим натижа оламиз:

$$\beta U = \nu \tag{24}$$

Хусусий ҳолларда ν нинг қийматларини билганимиз ҳолда, β нинг ҳам маъносини аниқлашга муваффақ бўламиз. Кейинроқ (24) ни бошқа умумий усул билан келтириб чиқарамиз.

3.5-§. БЕРК ТИЗИМ ЭНЕРГИЯСИ ҚИЙМАТЛАРИНИНГ ТАҚСИМОТИ

Биз микроҳолатлар бўйича тақсимотни — каноник тақсимотни кўрдик. Энди тизим энергияси қийматлари бўйича эҳтимолликлар тақсимотини кўрайлик.

Бунинг учун аввалги параграфдаги (7) га асосан $dW(E)$ эҳтимолликни

$$dW(E) = e^{-\beta E}\,\frac{dn}{Z} \tag{25}$$

кўринишда ёзайлик. Бунда dn/Z — тизим энергияси қийматининг радиуслари E ва $E + dE$ бўлган гиперсфералар билан чегараланган ҳажм элементи $d\Gamma_E$ даги ҳолатлардан ихтиёрий бирида бўлиш эҳтимоллигини кўрсатади. Бунда микроҳолатлар сони $dn(E)$ ҳажм элементи $d\Gamma_E$ га мутаносиб, яъни:

$$dn(E) = d\Gamma_E$$

Кўп ўлчовли фазо учун маълум мутаносиблик $\Gamma_E \sim E^{\nu}$ ёки

$$d\Gamma_E \sim E^{\nu-1}\,dE$$

бўлишини назарга олсак, $dW(E)$ қуйидаги

$$dW(E) = \frac{C}{Z} e^{\beta E} E^{\nu-1} dE \tag{26}$$

кўринишга келади: бунда C — нормалаш шартидан топиладиган мутаносиблик коэффициенти, яъни:

$$\frac{C}{Z}\int_0^{\infty} e^{-\beta E} E^{\nu-1} dE = \frac{C}{Z\beta^{\nu}}\int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx = 1.$$

Бундан C/Z ни топамиз:

$$\frac{C}{Z} = \frac{\beta^{\nu}}{\Gamma(\nu)}, \tag{27}$$

бу ерда $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция қуйидаги

$$\Gamma(\nu) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{\nu-1} dx \tag{28}$$

интеграл ифода билан берилади.

(27) ни (26) га қўйиб,

$$dW(E) = f_{\beta\nu}(E)\,dE. \tag{29}$$

ифодани топамиз.

Энергия қийматлари эҳтимолликлари тақсимоти (эҳтимолликлар зичлиги)

$$f_{\beta\nu}\left(E\right)=\frac{\beta^{\nu}}{\Gamma(\nu)}e^{-\beta E}E^{\nu-1} \quad (30)$$

ифода билан аниқланади. Бу $f_{\beta\nu}(E)$ — функцияни ***гамма-тақсимот*** дейилади.

(29) ва (30) ифодалар асосида ўртача энергия $<E>$ ни, яъни ички энергияни аниқлайлик:

$$< E >=\int_{0}^{\infty}Ef_{\beta\nu}\left(E\right)dE=\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu)\beta}. \quad (31)$$

Бунда $\Gamma(\nu+1)=\nu\Gamma(\nu)$ эканлигини назарда тутсак, ички энергия учун

$$U=< E >=\nu/\beta\equiv\nu\theta \quad (32)$$

тенгликни оламиз. Бундан

$$\beta=\nu/U \quad (33)$$

эканлиги (термодинамик муносабатларга мурожаат қилмасдан) бевосита келиб чиқади.

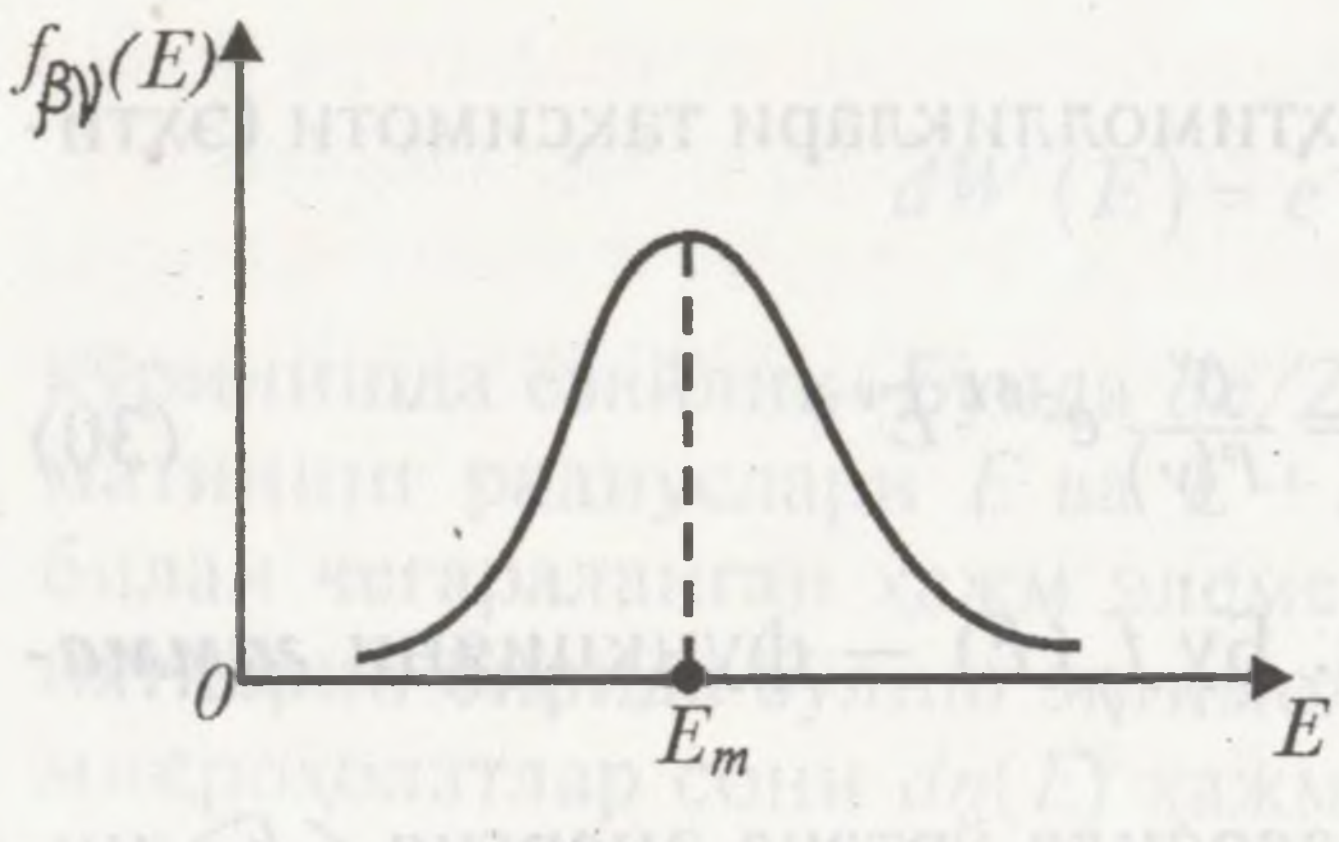
Шундай қилиб, номаълум параметр β нинг тизимнинг катталиклари орқали ифодасини топдик. ν — квант ҳолда тизим гамильтонианини аниқловчи ўзгарувчилар сони, 2ν — классик ҳолда тизим гамильтонианини аниқловчи умумлашган координаталар ва умумлашган импульслар сони.

1-изоҳ. Тизимнинг фазавий ҳажми Γ ни гиперсфералар орасидаги элементар ҳажм $d\Gamma_E$ ларга бўлиш мумкин; шу фазавий ҳажм Γ ни гиперкуб $d\Gamma=dq_1dq_2...dq_\nu dp_1...dp_\nu$ ларга ҳам бўлиш мумкин; гиперкубларга бўлингандаги микроҳолатлар эҳтимолликлари тақсимоти

$$dW\left(E\left(p,q\right)\right)=\frac{1}{Z}e^{-\beta E(p,q)}dn(p,q) \quad (34)$$

ифода билан аниқланади; $dn(p,q)$ — гиперкубдаги статистик микроҳолатлар сони.

2-изоҳ. Агар фазавий фазонинг энг кичик элементи h^s бўлса (h — Планк доимийси, s — фазавий фазо ўлчами), Γ/h^s нисбат ҳолатлар сонига тенг бўлади; агар ҳолатнинг



3.2-расм.

айниш даражаси g бўлса, элементар ҳажм $d\Gamma$ учун қуйидаги тенглик ўринли бўлади:

$$d\Gamma = h^{\nu} g\,dn. \tag{35}$$

3.7-масала. Эҳтимолликлар зичлиги тақсимот функцияси

$$f_{\beta\nu}\left(E\right) = \frac{\beta^{\nu}}{\Gamma(\nu)} e^{-\beta E} E^{\nu-1} \tag{1}$$

энергия E нинг маълум қийматида максимумга эга бўлади (3.2-расм). Шу қиймат E_m ни топинг.

Ечиш. (1) ифодадан E бўйича ҳосила олиб, сўнг нолга тенглаштириб, қуйидаги тенгламани оламиз:

$$\nu - 1 - \beta E_m = 0.$$

Бу тенгликдан:

$$E_m = \theta(\nu - 1) = U(1 - 1/\nu) \tag{2}$$

а) идеал газ учун $\nu = 3/2$. Демак,

$$E_m = U/3. \tag{3}$$

б) агар $\nu >> 1$ бўлса,

$$E_m \approx U. \tag{4}$$

3.6-§. ГАММА-ТАҚСИМОТГА ОИД МИСОЛЛАР

Биз юқорида энергия қийматлари эҳтимолликлари гамма-тақсимот билан аниқланишини кўрдик. Энди шу тақсимотнинг бошқача исботини келтирайлик.

1. Фараз қилайлик, тизим ν та эркин ўзгарувчиларга эга бўлсин ва унинг ҳар бирига тегишли энергия ε, принцип жиҳатдан, $(0, \infty)$ оралиқда ўзгариши мумкин бўлсин.

Гиббс ансамбли тушунчасига асосан, эркин ўзгарувчилар (параметрлар) чексиз кўп бўлсин. Шу ерда динамик эркин ўзгарувчи тасодифий катталик билан, унга тегишли энергия ҳам тасодифий катталик билан алмаштирилади. Ҳосил бўлган эркин ўзгарувчилар тўплами ва унга тегишли энергиялар тўплами эҳтимолликлар назариясидаги бош тўпламни ифодалайди. Шу бош тўпламдан ихтиёрий ν та ўзгарувчи биз қараётган тизимга тегишли Гиббс ансамблининг элементини ифодалайди (тавсифлайди).

Энди статистик физикадаги асосий масалани қўямиз: ν та эркинлик даражаларига эга тизим энергияси "вектор" E нинг учи $(E,\ E + dE)$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги аниқлансин.

E катталик учун бошланғич қиймат $E_0 = 0$ ёки $E_0 > 0$ бўлиши мумкин. Юқоридаги айтилганларга асосан:

$$E = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_\nu. \quad (5)$$

Асосий постулатга биноан бош тўпламдаги ҳар бир эркинлик даражаси (элемент) тенг эҳтимолли. Демак, унга тегишли энергия қийматлари ҳам тенг эҳтимолли (узлуксиз ҳолда текис тақсимланган).

Бу постулат асосида юқоридаги асосий масалани қуйидагича ҳал қиламиз. 1) Бош тўплам элементлари билан, масалан, $n \geq \nu$ марта синов ўтказилганда бу синовларнинг 1 мартасида $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_\nu$ лардан ихтиёрий бирининг чиқиши эҳтимоллиги $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_\nu$ воқеалар содир бўлиши эҳтимолликларининг йиғиндисига тенг. Аммо бу эҳтимолликлар, энергиянинг текис тақсимланиши ҳақидаги постулатга (фаразга) кўра, $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_\nu$ энергия қийматларига мутаносиб. Бошқача айтганда, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_\nu$ лардан бирининг чиқиш эҳтимоллиги (5) ифодага мутаносиб.

2) Бош тўплам билан $n \geq \nu$ марта синов (тажриба) ўтказилганда бу синовларнинг ν мартасида $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_\nu$ ларнинг чиқиш эҳтимоллиги, яъни E энергияли Гиббс ансамбли элементларидан бири ҳосил бўлиши эҳтимоллиги (бизнинг содда баёнимизда тизимнинг E энергияли микроҳолатда бўлиш эҳтимоли) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_\nu$ воқеалар содир бўлиш эҳтимолликлари кўпайтмасидан иборат, яъни E^ν га мутаносиб, бу эҳтимоллик $W(E) \sim E^\nu$ "вектор" учининг $(O,\ E)$ оралиқда бўлишлигини аниқлайди. Бизни эса "вектор" E нинг $(E,\ E + dE)$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги $dW(E)$ қизиқтиради. Бу эса $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + ... + \varepsilon_\nu$ лардан бирининг учи $(E,\ E + dE)$ ора-