

Ю.Г. Павленко

17 12

Начала физики



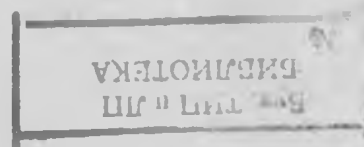
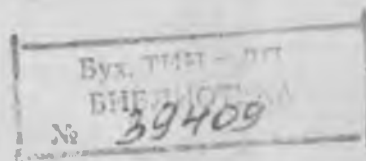
Основная цель предлагаемой книги состоит в том, чтобы помочь глубже и полнее познакомиться с физикой тем, кто думает выбрать ее своей специальностью, собирается изучать естественные науки или инженерные дисциплины. Содержание книги соответствует программе курса физики, изучаемого в средней школе. То же относится и к используемому математическому аппарату. Учитывая современные тенденции преподавания, я стремился изложить физику, насколько это возможно, в том виде, в каком она изучается в университетах, не выходя, однако, за рамки программы средней школы.

(Из предисловия автора)

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Ю.Г. Павленко

Начала физики



ИЗДАТЕЛЬСТВО
МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
1988

УДК 53

Павленко Ю. Г. Начала физики. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1988. — 639 с. — ISBN 5—211—00103—6.

Пособие написано в соответствии с действующей программой по физике для средней школы и ставит своей целью углубить и расширить понимание учащимися важнейших физических явлений и законов, научить их применять физические законы к решению конкретных задач. Особое внимание уделяется вопросам, которые, как показала практика приемных экзаменов на естественных факультетах МГУ, наиболее сложны для абитуриентов. Наряду с теоретическим материалом в книге приведено и разобрано большое количество примеров и задач, помогающих яснее понять физические законы и теории, иллюстрирующих важные прикладные аспекты современной физики.

Для учащихся средней школы и абитуриентов.

Ил. 354. Библиогр.: 75 назв.

Рецензенты:

доцент И. А. КВАСНИКОВ,
доцент Ю. Н. ПАШИН

*Печатается по постановлению
Редакционно-издательского совета
Московского университета*

П $\frac{1704010000-037}{077(02)-88}$ 103—88

ISBN 5—211—00103—6

© Издательство
Московского университета, 1988 г.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
Глава I. МЕХАНИКА	11
§ 1. Скаляры и векторы	11
§ 2. Основные понятия механики	19
§ 3. Кинематика	21
§ 4. Равномерное движение	29
§ 5. Относительное движение	34
§ 6. Прямолинейное движение с постоянным ускорением	40
§ 7. Криволинейное движение с постоянным ускорением	48
§ 8. Первый закон Ньютона	57
§ 9. Второй и третий законы Ньютона	60
§ 10. Законы изменения и сохранения импульса системы тел	78
§ 11. Статика	86
§ 12. Работа. Кинетическая и потенциальная энергии. Законы изменения и сохранения полной энергии	99
§ 13. Движение тел по окружности	121
§ 14. Закон всемирного тяготения	133
§ 15. Космические полеты	145
Глава II. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ	159
§ 16. Гидростатика. Закон Паскаля. Гидростатическое давление	159
§ 17. Закон Архимеда	172
§ 18. Гидродинамика и аэродинамика	177
Глава III. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ	184
§ 19. Молекулярно-кинетическая теория строения вещества	184
§ 20. Тепловое равновесие. Температура. Термодинамические процессы	191
§ 21. Идеальный газ	200
§ 22. Внутренняя энергия, работа, количество теплоты	207
§ 23. Процессы изменения состояния газа	215
§ 24. Жидкие и твердые вещества. Закон Гука	223
§ 25. Тепловое расширение тел. Газовая шкала температур	231
§ 26. Изменение агрегатного состояния вещества. Свойства паров	234
§ 27. Влажность воздуха	243
§ 28. Тепловые двигатели	251
Глава IV. ОСНОВЫ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ	258
§ 29. Закон сохранения заряда. Закон Кулона	258
§ 30. Электрическое поле. Напряженность и потенциал электрического поля	265
§ 31. Электростатика проводников	281
§ 32. Электроемкость. Конденсаторы. Диэлектрики в электрическом поле	286
§ 33. Постоянный ток. Закон Ома	297
§ 34. ЭДС источника тока. Замкнутая цепь постоянного тока	314
§ 35. Правила расчета электрических цепей	325
§ 36. Тепловое действие тока	334

§ 37. Электролиз. Законы Фарадея	340
§ 38. Электрический разряд в газе. Плазма. Диод. Триод	342
§ 39. Магнитное поле. Закон Ампера, сила Лоренца	349
§ 40. Электромагнитная индукция. Переменный ток	361
§ 41. Переменные токи в электрических цепях	372
Глава V. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ	384
§ 42. Свободные и вынужденные колебания механических систем	384
§ 43. Свободные и вынужденные колебания в контуре. Резонанс	395
§ 44. Волновое движение. Звук	407
§ 45. Электромагнитные волны	418
§ 46. Основы радиотехники	430
Глава VI. ОПТИКА	442
§ 47. Геометрическая оптика. Фотометрия	442
§ 48. Интерференция и дифракция света. Голография	446
§ 49. Отражение и преломление света	459
§ 50. Призма. Дисперсия света. Цвет	472
§ 51. Плоские и сферические зеркала	475
§ 52. Линзы	485
§ 53. Оптические системы	494
§ 54. Оптические приборы	502
§ 55. Основы специальной теории относительности	510
Глава VII. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА	530
§ 56. Кванты. Фотоны. Волновые свойства частиц	530
§ 57. Строение атома. Теория Бора. Излучение и поглощение света. Спектральный анализ. Лазеры	537
§ 58. Некоторые следствия квантовых представлений	547
§ 59. Радиоактивность. Ядерные реакции	553
§ 60. Физика элементарных частиц	559
§ 61. Ядерная энергетика	579
ДОПОЛНЕНИЯ	594
I. Механика	594
§ 1. Кинематика	594
§ 2. Равномерное движение	595
§ 3. Прямолинейное движение с постоянным ускорением	596
§ 4. Законы Ньютона	597
§ 5. Закон сохранения импульса	599
§ 6. Статика	602
§ 7. Закон изменения и сохранения полной энергии	605
§ 8. Космические полеты	606
§ 9. Движение тел в неинерциальных системах отсчета	612
II. Жидкости и газы	618
§ 10. Гидростатика и гидродинамика	618
III. Молекулярная физика. Тепловые явления	620
IV. Электродинамика	622
§ 11. Переменные токи в электрических цепях	622
V. Колебания и волны	628
VI. Оптика	629
§ 12. Основы специальной теории относительности	629
VII. Атомная и ядерная физика	632
§ 13. Соотношение неопределенностей	632
§ 14. Столкновение частиц	633
Некоторые справочные данные	637
Литература	638

§ 1. СКАЛЯРЫ И ВЕКТОРЫ

Физика, как и любая другая наука, основывается на наблюдениях. При описании различных явлений физики вынуждены вводить новые понятия. Следующий этап научного исследования — поиск причинно-следственных связей, т. е. закономерностей, лежащих в основе явления. Высшая ступень познания — формулировка законов природы, объединяющая разнородные понятия в единое целое.

Какие же величины используются в физике? В школьном курсе мы сталкиваемся с величинами двух типов. Величины первого типа определяются только своими числовыми значениями в соответствующей системе единиц — их называют *скалярами*. Например, число молекул в некотором объеме, масса, температура, работа, энергия, путь, пройденный телом, плотность являются скалярами. Величины второго типа характеризуются числовым значением и направлением в пространстве — это *векторы*. Сила, перемещение, скорость, ускорение, напряженность электрического и магнитного полей являются векторами. Векторы изображаются в виде направленных отрезков (стрелок). Стрелка указывает направление вектора, а длина стрелки дает числовое значение вектора в выбранном масштабе. Определим теперь понятия системы координат и вектора.



Рис. 1.1

1. Система координат. Чтобы задать положение точки, лежащей на прямой линии, выбирают произвольно начало отсчета (точка O на рис. 1.1), единицу масштаба и одно из двух возможных направлений в качестве положительного. Такая прямая называется *координатной*, или *числовой*, *осью*. Полупрямая, идущая в положительном направлении, называется *положительной полуосью*; полупрямая, идущая в противоположном направлении, — *отрицательной полуосью*. Координатой точки M_1 , находящейся на числовой оси, называют расстояние x_1 от начала отсчета, взятое со знаком плюс, если точка лежит на положительной полуоси, или

со знаком минус, если точка лежит на отрицательной полуоси.

Для того чтобы задать числами положение точки на плоскости, выбирают на ней две координатные оси, пересекающиеся, вообще говоря, под произвольным углом (разумеется, отличным от 0 и 180°). Мы будем использовать две взаимно перпендикулярные числовые оси, образующие, как говорят, декартову, или прямоугольную, систему координат. Одну из осей назовем осью x , другую — осью y . Точку пересечения осей называют началом координат. Начало координат является началом отсчета каждой из координатных осей (рис. 1.2). Пусть M_1 — произвольная точка на

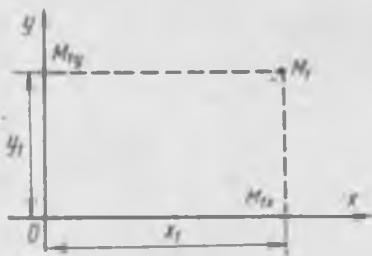


Рис. 1.2

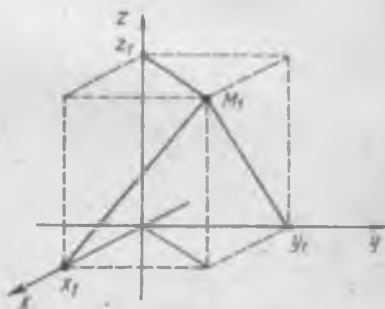


Рис. 1.3

плоскости. Спроектируем точку на координатные оси, т. е. проведем через M_1 перпендикуляры к прямым Ox и Oy и обозначим основания этих перпендикуляров соответственно M_{1x} и M_{1y} . Координатами x_1 и y_1 точки M_1 называют координаты точек M_{1x} и M_{1y} .

Положение точки M_1 в пространстве определяется координатами x_1 , y_1 , z_1 оснований перпендикуляров, опущенных из точки на три взаимно перпендикулярные координатные оси x , y , z . На рис. 1.3 каждый перпендикуляр лежит в плоскости, проходящей через точку M_1 и перпендикулярной соответствующей оси.

2. Определение вектора. Рассмотрим множество элементов, каждый из которых образован упорядоченными тройками чисел. Поскольку далее эти элементы станут векторами, то удобно обозначать их буквами со стрелкой над ними:

$$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \dots$$

Способ, с помощью которого можно задать тройки чисел, зависит от конкретной задачи. Например, изучается распределение трех признаков организмов или каких-то предметов. Наличию признака соответствует число 1, а отсутствию — 0. Мы получим соответствие между предметами и элементами $\vec{a} = (0, 0, 0)$, $\vec{b} =$

$= (0, 1, 1)$ и т. д. в пространстве признаков. Другая задача — определение численности трех возрастных групп по состоянию на 1 января каждого года — приводит к множеству элементов $\vec{a}, \vec{b}, \dots$. Упорядоченные наборы чисел (не обязательно троек чисел) возникают естественным образом при описании протекания эпидемий, химических реакций, численности хищников и их жертв и т. д.

Нас будет интересовать способ описания направленных отрезков — стрелок, расположенных (для упрощения рассмотрения) в плоскости. Введем прямоугольную систему координат, оси x и y которой лежат в указанной плоскости, а ось z проведена перпендикулярно к ней. Положительное направление оси z выбирается по правилу буравчика: буравчик движется в положительном направлении оси z , если его вращать против направления движения часовой стрелки — от оси x к оси y .

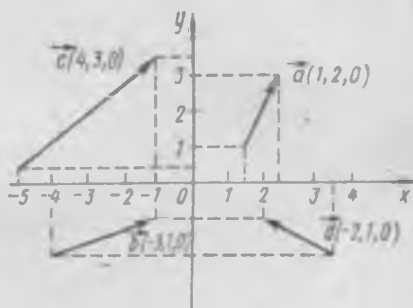


Рис. 1.4

Поставим теперь в соответствие стрелке тройку чисел $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ по правилу: число a_x равно разности x -координат конца и начала стрелки, число a_y равно разности y -координат конца и начала стрелки и т. д. Повторяя эту процедуру для каждой стрелки, получим множество элементов (рис. 1.4)

$$\vec{a} = (a_x, a_y, 0), \vec{b} = (b_x, b_y, 0), \dots$$

Понятие вектор вводится согласно следующему определению: множество элементов называется векторным, а сами элементы векторами, если для любых двух элементов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определен вектор $\vec{c}$, называемый их суммой, т. е. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, по правилу

$$c_x = a_x + b_x, c_y = a_y + b_y, c_z = a_z + b_z \quad (1.1)$$

и для каждого элемента $\vec{a}$ и произвольного числа λ определен вектор $\vec{g} = \lambda \vec{a}$, причем

$$g_x = \lambda a_x, g_y = \lambda a_y, g_z = \lambda a_z. \quad (1.2)$$

Мы ограничимся этими двумя условиями, добавив только, что векторы $\vec{c}$ и $\vec{g}$ должны также принадлежать исходному множеству.

На рис. 1.5 и 1.6 изображены векторы $\vec{c}$ и $\vec{g}$, полученные в результате введенных операций. Применяя теорему Пифагора, найдем длину вектора (см. рис. 1.7):

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

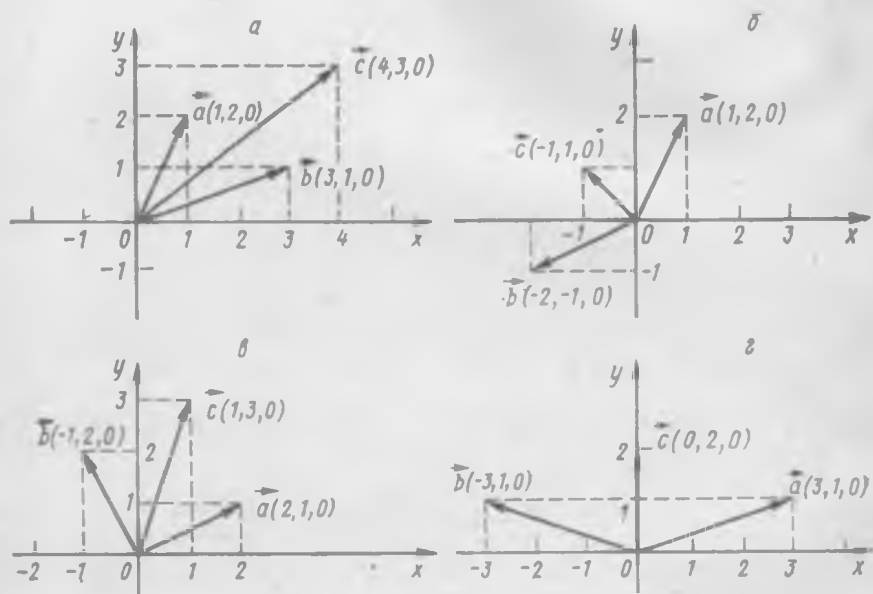


Рис. 1.5

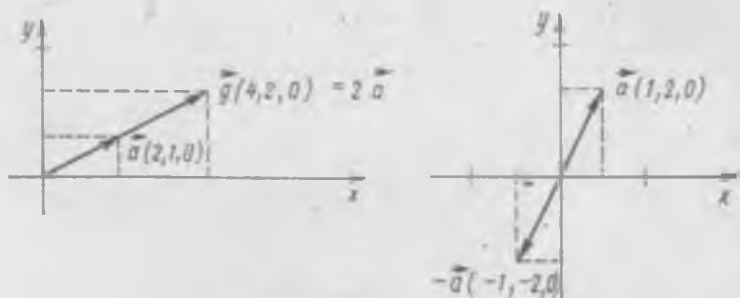


Рис. 1.6

В дальнейшем абсолютную величину (длину) $|\vec{a}|$ вектора $\vec{a}$ будем обозначать той же буквой без стрелки: $a \equiv |\vec{a}|$. Величина вектора — положительно определенное число. Три числа a_x , a_y , a_z называют проекциями вектора на оси x , y , z . Нетрудно заме-

тить, что проекция вектора на числовую ось равна произведению абсолютной величины вектора на косинус угла между положительным направлением оси и самим вектором. Для вектора $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, изображенного на рис. 1.8, $a_x = a \cos \alpha$, $a_y = a \sin \alpha$, $a_z = 0$. Все проекции нулевого вектора $\vec{c} = \vec{0}$ равны нулю: $c_x = c_y =$

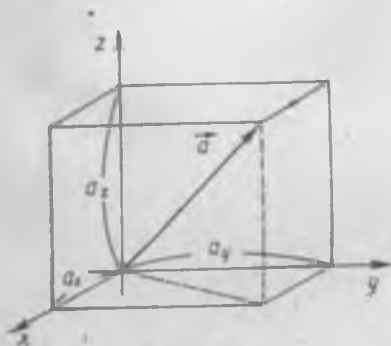


Рис. 1.7

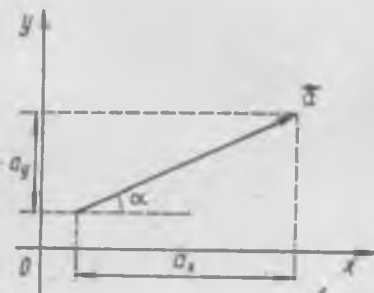


Рис. 1.8

$= c_z = 0$. Умножая вектор на число $\lambda = -1$, получим новый вектор $\vec{g} = -\vec{a}$, который называют обратным вектору $\vec{a}$ (рис. 1.6).

Если два вектора равны друг другу, т. е. $\vec{a} = \vec{b}$, то это означает, что выполняются три условия:

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z$$

(поэтому, в частности, из второго закона Ньютона $m\vec{a} = \vec{F}$ следует не одно, а три уравнения). Следовательно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называют равными, если они лежат на параллельных прямых, имеют одинаковое направление и длину. Заметим, что если $\vec{a} = \vec{b}$, то величины векторов одинаковы: $a = b$. Обратное заключение, конечно, недопустимо. Кроме того, понятия «больше», «меньше» применимы только к величинам векторов, но не к самим векторам.

3. Геометрический смысл суммы векторов легко понять, изучив рис. 1.9. Вектор $\vec{c}$ имеет проекции $c_x = a_x + b_x$, $c_y = a_y + b_y$, $c_z = 0$. Следовательно, сумма двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ есть вектор $\vec{c}$, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что начало вектора $\vec{b}$ приложено к концу вектора $\vec{a}$ (правило треугольника).

По определению абсолютная величина вектора $\vec{c}$ равна $c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}$. Учитывая, что вектор $\vec{a} = (a \cos \alpha, a \sin \alpha, 0)$, а век-

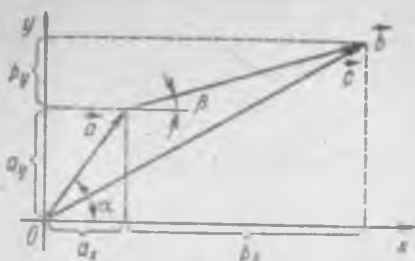


Рис. 1.9

тор $\vec{b} = (b \cos \beta, b \sin \beta, 0)$, найдем

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{(a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2} = \\ &= \sqrt{a^2 + 2ab \cos(\alpha - \beta) + b^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Этим соотношением, связывающим стороны a, b, c векторного треугольника, мы доказали теорему косинусов. Угол γ между вектором c и осью x определяется соотношениями

$$\cos \gamma = \frac{c_x}{c} = \frac{a \cos \alpha + b \cos \beta}{c}, \quad \sin \gamma = \frac{c_y}{c} = \frac{a \sin \alpha + b \sin \beta}{c}.$$

Складывая полученный вектор $\vec{c}$ с некоторым вектором $\vec{d}$, аналогичным образом получим сумму трех векторов. Продолжая этот процесс, можно определить сумму любого числа векторов. При этом компоненты результирующего вектора равны суммам компонент слагаемых векторов по соответствующим осям. Из этого построения следует полезный рецепт для нахождения величины и направления вектора $\vec{c} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots$: достаточно найти сумму компонент слагаемых векторов по осям x, y и z .

Следствие. Сумма векторов $\vec{a} + \vec{b} + \dots$ равна нулю, если равны нулю суммы компонент слагаемых векторов по осям x, y и z :

$$a_x + b_x + \dots = 0, \quad a_y + b_y + \dots = 0, \quad a_z + b_z + \dots = 0. \quad (1.4)$$

Соотношение $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ (см. рис. 1.9) можно понимать как разложение вектора $\vec{c}$ на два составляющих его вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Вычитание векторов. Разность $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$ векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно определить как результат сложения векторов $\vec{a}$ и $-\vec{b}$. Вектор $\vec{d} = (a_x - b_x, a_y - b_y, a_z - b_z)$.

На рис. 1.10 изображены векторы $\vec{a}, \vec{b}, -\vec{b}, \vec{a} + \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}$.

ПРИМЕР 1.1. Упругое столкновение частицы с плоскостью. До столкновения скорость частицы равна $\vec{v}_1$, после столкновения — $\vec{v}_2$. Приращение скорости $\Delta \vec{v} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ направлено перпендикулярно плоскости (рис. 1.11).

5. Единичный вектор. Поясним понятие единичного вектора $\vec{e}$. Абсолютная величина этого вектора равна единице. Если вектор $\vec{e}$ имеет направление вектора $\vec{a}$, то вектор $\vec{a}$ может быть пред-

ставлен в виде $\vec{a} = a\vec{e}$. Единичный вектор $\vec{e}$, параллельный вектору $\vec{c}$, равен $\vec{e} = \vec{c}/c$. Направляя, например, единичные векторы $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ параллельно осям x , y и z , можно записать вектор $\vec{a}$ в виде

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}.$$

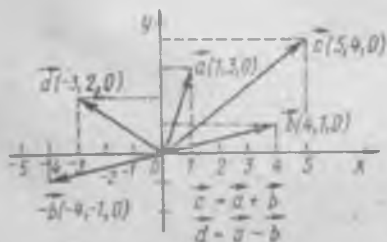


Рис. 1.10

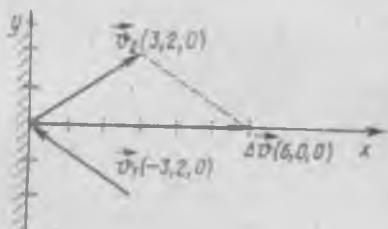


Рис. 1.11

Вектор называют постоянным, если в любой момент времени его длина и направление остаются неизменными. Очевидно, компоненты постоянного вектора не зависят от времени. В общем случае длина вектора и его направление в пространстве могут изменяться с течением времени. Компоненты такого вектора являются функциями времени.

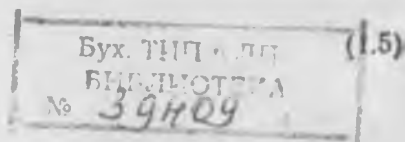
Возникает вопрос: какое отношение имеют введенные здесь векторы — упорядоченные тройки чисел — к реальным физическим величинам, измеряемым в экспериментах? Ответ состоит в том, что если в природе существуют объекты, определяемые тремя числами, для которых выполняются соотношения (1.1) и (1.2), то их естественно назвать векторами. Более того, некоторые скалярные величины: работа силы на некотором перемещении; магнитный поток, пронизывающий плоскость, и другие — можно связать со скалярным произведением векторов.

6. Скалярное произведение. Из двух векторов $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ можно образовать скаляр по правилу:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Это выражение называется скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается одним из символов $\vec{a}\vec{b}$, $\vec{a} \cdot \vec{b}$, $(\vec{a}\vec{b})$. Следовательно,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$



По определению скалярное произведение обладает следующими свойствами:

- 1) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,
- 2) $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda \cdot \vec{a} \cdot \vec{b}$,
- 3) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Длина вектора или его модуль связаны со скалярным произведением соотношением

$$a = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}. \quad (1.6)$$

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ на самого себя часто обозначают символом a^2 . Следовательно, $a^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$. Скалярное произведение двух равных единичных векторов $\vec{e} \cdot \vec{e} = 1$. Заметим также, что формула (1.3) эквивалентна соотношениям

$$c^2 = \vec{c} \cdot \vec{c} = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = a^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + b^2.$$

Скалярное произведение имеет простой геометрический смысл. Возьмем в качестве векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы, изображенные на рис. 1.9. Тогда

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a \cos \alpha \cdot b \cos \beta + a \sin \alpha \cdot b \sin \beta = ab \cos(\alpha - \beta). \quad (1.7)$$

Мы видим, что скалярное произведение векторов равно произведению абсолютных величин векторов на косинус угла между ними.

Следствие. Если скалярное произведение двух векторов равно нулю, то они взаимно перпендикулярны. Например, на рис. 1.5в можно определить, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны друг другу. Действительно, в соответствии с (1.5) $\vec{a} \cdot \vec{b} = (2)(-1) + + (1)(2) = 0$.

Скалярное произведение вектора $\vec{a}$ и единичного вектора $\vec{i}$, направленного по оси x , равно проекции вектора $\vec{a}$ на ось x : $\vec{a} \cdot \vec{i} = a_x$.

7. Векторное произведение. Из двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно образовать новый вектор $\vec{c}$, компоненты которого определяются по правилу

$$c_x = a_y b_z - a_z b_y, \quad c_y = a_z b_x - a_x b_z, \quad c_z = a_x b_y - a_y b_x. \quad (1.8)$$

Эта операция называется векторным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначается одним из символов $[\vec{a} \cdot \vec{b}]$ или $\vec{a} \times \vec{b}$. Мы не будем обсуждать это понятие, поскольку оно не входит в программу средней школы.

Еще раз подчеркнем, что, говоря о векторе, мы всегда имеем в виду его проекции на оси. Вектор, в отличие от скаляра, определяется тремя числами. Поэтому такие операции, как сложение и вычитание, сводятся к привычным действиям сложения и вычитания проекций. В этом смысле формула (1.5) есть определение скалярного произведения, а (1.7) — следствие этого определения.

С точки зрения формального подхода наше изложение недостаточно полно. Тем не менее материала, приведенного здесь, вполне достаточно для правильного понимания векторной природы различных физических величин и решения конкретных задач.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МЕХАНИКИ .

Механика — наука о законах движения тел — имеет отношение к широкому кругу явлений природы и практической деятельности человека. Основным понятием механики является понятие движения, а именно простейшая его форма — перемещение макроскопических тел (т. е. тел, состоящих из большого количества атомов и молекул) по отношению к другим телам. Реальные тела могут при движении вращаться. Наиболее просто можно описать движение тела, размеры которого настолько малы, что мы можем не принимать во внимание вращение. В этом случае можно ввести понятие материальной точки, т. е. тела, размерами которого можно пренебречь при описании его движения. Вопрос о возможности рассматривать движение некоторого тела как движение материальной точки зависит от конкретных условий физической задачи. Например, рассматривая движение Земли вокруг Солнца, можно считать и Землю и Солнце материальными точками, несмотря на то что радиус Земли $\sim 6,4 \cdot 10^6$ м, а радиус Солнца $\sim 7 \cdot 10^8$ м, поскольку эти размеры весьма малы по сравнению с расстоянием между Солнцем и Землей, примерно равным $1,5 \cdot 10^{11}$ м. В дальнейшем термин «частица» означает материальную точку.

Важную роль в механике играет понятие абсолютно твердого тела — системы материальных точек, расстояния между которыми остаются неизменными во время движения. Важность этого понятия состоит в том, что без этих тел мы не можем изучать движение материальной точки, поскольку абсолютное движение в пустом пространстве безотносительно к другим телам лишено смысла. Поэтому для описания движения изучаемого тела необходимо указать *систему отсчета*, относительно которой оно рассматривается. Системой отсчета называется совокупность твердых тел (вместе с часами), которые условно считаются неподвижными и по отношению к которым рассматривается движение других тел.

При решении конкретной задачи мы можем пользоваться в качестве системы отсчета различными телами. Системы отсчета, возникающие при выборе различных тел, являются равноправны-

ми и одинаково допустимыми при описании движения материальной точки. Однако естественно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы движение выглядело в ней наиболее просто. В выбранной системе отсчета необходимо как-то математически описать движение, т. е. задать какие-то величины, позволяющие однозначно определить положение тела. Для этого (если тело движется в плоскости) с системой отсчета связывают систему координат, в которой положение тела в момент времени t определяется вектором $\vec{r} = (x, y, 0)$, идущим из начала координат в точку, где находится тело (рис. 2.1а). По этой причине вектор $\vec{r}(t)$ назы-

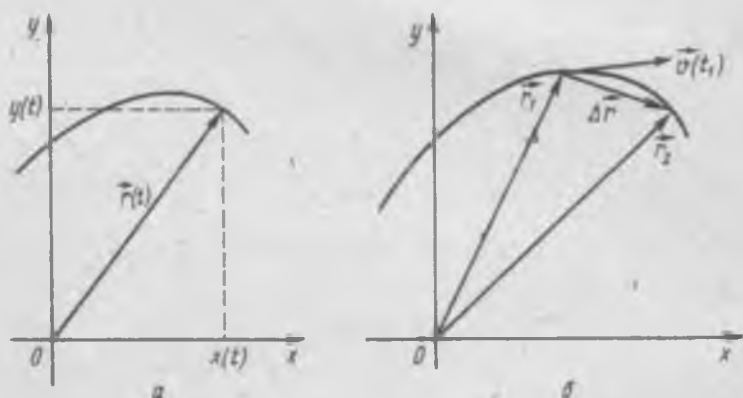


Рис. 2.1

вают радиус-вектором. Координаты или проекции радиус-вектора x , y и $z=0$ на координатные оси являются одновременно координатами этого тела. Кривая, которую при своем движении описывает материальная точка, т. е. конец радиус-вектора $\vec{r}$, называется *траекторией*. При этом координаты x и y тела в различные моменты времени принимают различные значения. Другими словами, x и y являются функциями времени $x(t)$ и $y(t)$. Если эти функции заданы, то, очевидно, известно положение радиус-вектора $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), 0)$ в момент времени t . Задание зависимости $\vec{r}(t)$ позволяет определить закон движения материальной точки, т. е. определить ее положение в любой момент времени.

Зависимость $x(t)$ координаты тела от времени называют *законом движения по оси x* , зависимость $y(t)$ — *законом движения по оси y* .

В различные моменты времени t_1 и $t_2 = t_1 + \Delta t$ радиус-вектор имеет различные значения: $\vec{r}_1 = \vec{r}(t_1)$ и $\vec{r}_2 = \vec{r}(t_2)$. Разность $\Delta \vec{r} =$

$\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ векторов $\vec{r}_2$ и $\vec{r}_1$ называют перемещением за время $t_2 - t_1 = \Delta t$ (рис. 2.16). Греческая буква Δ (дельта) обозначает приращение какой-либо величины. Проекциями вектора $\Delta \vec{r}$ на оси x и y являются компоненты Δx и Δy . Очевидно, $\Delta x > 0$, $\Delta y < 0$.

Необходимо отличать перемещение от пути — расстояния, отсчитываемого вдоль траектории. Путь — величина скалярная. Нетрудно видеть, что если тело, двигаясь от некоторой точки, снова возвращается в нее в некоторый момент времени, то перемещение равно нулю (нулевому вектору), в то время как путь, пройденный телом, отличен от нуля. Нужно ясно понимать различие между системой отсчета и системой координат. Систему отсчета образуют реальные тела. Перемещение, скорость, ускорение тела в выбранной системе отсчета — это та реальность, с которой мы имеем дело при решении конкретной задачи. Система координат является математической абстракцией. Один и тот же вектор в различных системах координат имеет различные компоненты, однако его положение относительно системы отсчета остается неизменным. Обычно выбор системы координат определяется соображениями удобства.

§ 3. КИНЕМАТИКА

Начальным этапом изучения движения является введение понятий, характеризующих перемещение тел, — траектории, скорости, ускорения и установление взаимосвязи между ними. Этот раздел механики называется кинематикой. Кинематика дает возможность описать движение, но не выясняет причины его возникновения. Наиболее типичные в этом смысле задачи кинематики относятся к теории машин и механизмов: изучаются траектории различных звеньев машин, возможность преобразования одного типа движения в другой, создание движений с наперед заданными свойствами и т. д.

1. Мгновенная скорость тела, движущегося прямолинейно. Рассмотрим частицу, движущуюся по прямой, параллельной оси x , и предположим, что зависимость x -координаты частицы — функция $x(t) = x_0 + v_0 t$, где x_0 , $v_0 > 0$. На рис. 3.1 изображен график этой функции. Важной характеристикой графика $x(t)$ является наклон прямой к оси времени. В момент времени t координата частицы равна $x(t)$, в другой момент времени $t + \Delta t$ координата стала равной $x(t + \Delta t)$. Перемещение частицы за интервал времени Δt равно приращению функции $x(t)$: $\Delta x = x(t + \Delta t) - x(t) = v_0 \Delta t$. Наклон прямой определяется отношением

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t},$$

которое характеризует быстроту изменения координаты x и называется проекцией v_x скорости частицы $\vec{v}$ на ось x :

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_{0x} \quad (3.1)$$

Поскольку отношение $\Delta x/\Delta t$ одинаково для любых пар точек t , $t+\Delta t$, то оно не зависит от выбора момента времени t и интервала Δt . Следовательно, проекция скорости $v_x(t)$ не зависит от времени.

Предположим теперь, что зависимость x -координаты частицы от времени, т. е. функция $x(t)$, имеет вид $x(t) = v_0 t - g t^2/2$, где $v_0, g_0 > 0$. На рис. 3.2а изображена функция $x(t)$, которая определяет координату частицы, брошенной вверх в вертикальном направлении со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Каким образом в этом случае следует определить проекцию скорости тела на ось x ? Мы покажем, что мгновенное значение скорости можно определить с помощью формулы (3.1), если на Δt наложить дополнительное условие. С этой целью прове-

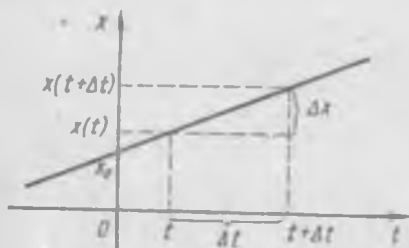


Рис. 3.1

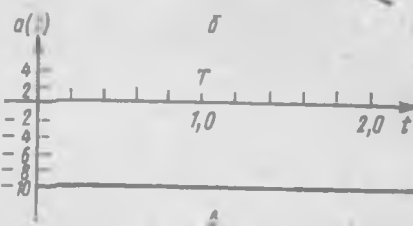
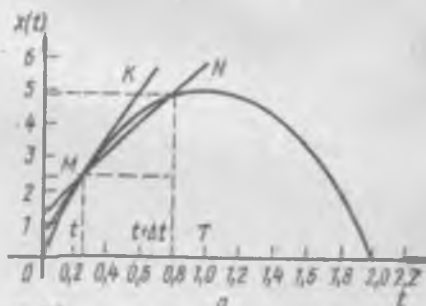


Рис. 3.2

дем касательную MK к кривой в точке M и прямую MN , соединяющую точки M и N . Наклон прямой MN определяет среднее значение проекции скорости тела на ось x :

$$(v_x)_{cp} = \Delta x/\Delta t = v_0 - g t - (g/2) \Delta t$$

и зависит от интервала Δt . Секущая MN и касательная MK в интервале Δt заметно различаются. Однако если промежуток Δt брать все меньше и меньше, то в интервале

($t, t + \Delta t$) различие между ними становится настолько малым, что они становятся почти не различимыми между собой. Это означает, что в интервале Δt движение очень близко к равномерному, а секущая MN почти совпадает с касательной в точке M . Тем самым соотношение (3.1) позволяет определить мгновенную скорость тела при условии, что Δt стремится к нулю ($\Delta t \rightarrow 0$):

$$v_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = v_0 - gt,$$

т. е. проекция мгновенной скорости на ось x равна пределу отношения проекции перемещения на ось x к интервалу Δt при стремлении Δt к нулю. Условие $\Delta t \rightarrow 0$ гарантирует независимость $v_x(t)$ от величины Δt . Согласно определению проекция скорости на ось x является производной по времени функции $x(t)$. Символически это утверждение записывают в виде

$$v_x(t) = x'(t), \text{ или } v_x(t) = dx/dt \quad (3.2)$$

(последнее обозначение, введенное Г. Лейбницем, более удобно, особенно при вычислении производных от сложных функций). Значения $v_x(t)$ могут быть как положительными, так и отрицательными (рис. 3.2б). Например, в точке T тело достигает максимального смещения. Здесь $v_x(T) = 0$. Затем проекция скорости становится отрицательной — тело движется в отрицательном направлении оси x . Следует отметить, что понятие «скорость» ведет начало от принципа диалектики об изменчивости всего сущего, сформулированного Гераклитом (V в. до н.э.), и достигает совершенства в теории дифференциального исчисления.

Предположим теперь, что вектор $\vec{r}(t)$ описывает в пространстве некоторую кривую, т. е. проекции $\vec{r}(t)$ на оси координат равны соответственно $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Вместо одной функции мы имеем три функции. Поэтому проекции скорости тела на оси координат определяются аналогично (3.2):

$$v_x = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}, \quad v_y = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}, \quad v_z = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (3.3)$$

Соотношения (3.3) являются проекциями на оси координат одного векторного равенства

$$\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \quad (3.4)$$

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t),$$

где $\Delta \vec{r}$ — перемещение тела за интервал Δt . Действительно, пусть в момент времени t радиус-вектор тела занимал положение $\vec{r}(t)$,

а в момент $t + \Delta t$ — положение $\vec{r}(t + \Delta t)$ (рис. 3.3). Тогда за промежуток времени Δt тело получило перемещение $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$. Отношение $\Delta \vec{r} / \Delta t$ является вектором, расположенным на секущей. В пределе $\Delta t \rightarrow 0$ направление вектора $\Delta \vec{r} / \Delta t$ совпадает с направлением касательной к траектории.

Приведем теперь задачу, решение которой обычно вызывает затруднения.

ЗАДАЧА 3.1. К ящику привязали веревку, другой конец ее пе-

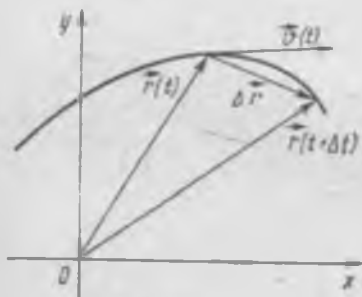


Рис. 3.3

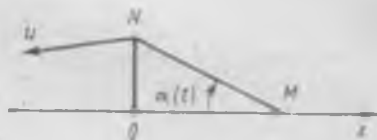


Рис. 3.4

рекинули через забор и тянут со скоростью u (рис. 3.4). В некоторый момент времени угол между горизонталью и куском веревки, привязанной к ящику, равен α . Найти скорость ящика.

Решение. Проведем ось x с началом у основания забора. Тогда координата ящика $x(t) = h \operatorname{ctg} \alpha(t)$, где h — высота забора. Следуя определению, находим проекцию скорости на ось x :

$$v_x(t) = x' = \frac{dx}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{h}{\sin^2 \alpha} \alpha'. \quad (1)$$

Для того чтобы вычислить $\alpha'(t)$, найдем длину части веревки $l(t) = MN: l = h / \sin \alpha$. Согласно условию скорость изменения длины веревки $l' = -u$ (так как функция $l(t)$ убывает). Следовательно,

$$-u = \frac{dl}{dt} = \frac{dl}{d\sin \alpha} \frac{d\sin \alpha}{d\alpha} \frac{d\alpha}{dt} = -\frac{h}{\sin^2 \alpha} \cos \alpha \alpha'. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим $v_x = -u / \cos \alpha$.

2. Мгновенное ускорение. Если при прямолинейном движении тела график проекции скорости $v_x = v_0 - gt$ на ось x изображается прямой линией, то наклон этой прямой определяет проекцию ускорения на ось x :

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}, \quad \Delta v_x = v_x(t + \Delta t) - v_x(t).$$

В нашем случае $\Delta v_x = -g\Delta t$, $a_x(t) = -g$. График этой функции

изображен на рис. 3.2в. Обратите внимание на то, что ускорение одинаково в каждой точке траектории. В точке наивысшего подъема ($T=1$ с) проекция скорости $v_x(T)=0$, однако проекция ускорения по-прежнему равна $-g$. Причина в том, что значение функции $a_x(t)$ определяется не значением функции $v_x(t)$, а ее производной, т. е. характером поведения в окрестности точки t .

В общем случае, когда зависимость $v_x(t)$ изображается кривой линией, проекция мгновенного ускорения на ось x

$$a_x(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

При криволинейном движении тела вектор ускорения

$$\vec{a}(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}, \quad \Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t). \quad (3.6)$$

Заметим, что векторы ускорения и скорости не связаны какой-либо зависимостью: ускорение определяется производной скорости, а не ее значением в момент времени t .

ЗАДАЧА 3.2. Тело движется по прямой (оси x) с переменным ускорением. На рис. 3.5 изображена зависимость проекции ускорения a_x от времени. В какой момент времени проекция скорости тела на ось x будет наибольшей?

Решение. Для достаточно малого интервала времени Δt $v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x(t)\Delta t$. Это соотношение, связывающее значения $v_x(t)$ в близких точках, позволяет сделать вывод, что $v_x(t)$ достигает максимального значения при $t=t_3$ и в дальнейшем не изменяется.

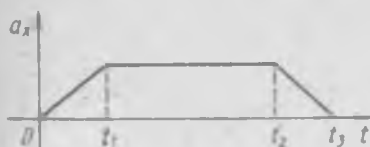


Рис. 3.5

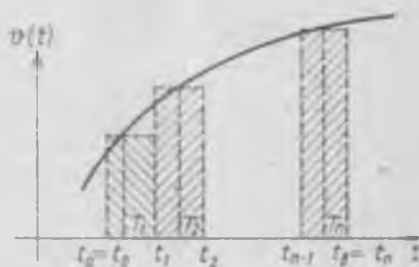


Рис. 3.6

3. Величина скорости. Пусть путь, пройденный телом по некоторой траектории за время t , определяется зависимостью пути $s(t)$ от времени. Определяя путь, пройденный телом по траектории за время Δt , т. е. $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$, и разделив его на этот промежуток, получим при $\Delta t \rightarrow 0$ мгновенное значение величины скорости

$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s' = \frac{ds}{dt}. \quad (3.7)$$

Из определения 3.4 следует, что $v(t) = |\dot{s}(t)|$, поскольку $\Delta s = |\Delta r|$.

Одной из приближенных характеристик переменного движения является средняя величина скорости за какой-то промежуток времени. Средняя величина скорости определяется отношением пути Δs , пройденного телом, к промежутку времени Δt , в течение которого этот путь пройден:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

ЗАДАЧА 3.3. Автомобиль первую половину пути прошел равномерно со скоростью $v_1 = 35$ км/ч, а вторую — равномерно со скоростью $v_2 = 15$ км/ч. Какова его средняя скорость?

Решение. Пусть $2s$ — все пройденное расстояние. Согласно определению

$$v_{\text{ср}} = \frac{2s}{T}. \quad (1)$$

Здесь T — время движения, причем $T = t_1 + t_2$, где t_1 — время движения со скоростью v_1 по первой половине пути, t_2 — по второй. Очевидно,

$$T = \frac{s}{v_1} + \frac{s}{v_2}.$$

Подставляя это выражение в формулу (1), получим

$$v_{\text{ср}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} = 21 \text{ км/ч.}$$

ПРИМЕР 3.4. Показать, что путь, пройденный телом, движущимся со скоростью $v(t)$ за время $t_b - t_a$, равен площади фигуры, ограниченной отрезком $[t_a, t_b]$, кривой $v(t)$ и прямыми $t = t_a$, $t = t_b$ (рис. 3.6).

Обозначим расстояние, пройденное телом от некоторой фиксированной точки траектории, через $s(t)$. Если бы скорость $v(t)$ была постоянна, то путь равнялся бы произведению $v \cdot (t_b - t_a)$. В случае переменной скорости путь можно определить следующим образом. Разобьем отрезок $[t_a, t_b]$ точками $t_0 = t_a, t_1, \dots, t_n = t_b$ ($t_1 < t_2 < \dots < t_n$) на n одинаковых отрезков $[t_0, t_1]$, $[t_1, t_2]$, $\dots$, $[t_{n-1}, t_n]$ и выберем на каждом отрезке $\Delta t_i = [t_{i-1}, t_i]$ ($1 \leq i \leq n$) некоторую точку T_i . Скорость $v(t)$ на отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ меняется от точки к точке, но если длина отрезка мала, то ее значение мало отличается от значения в точке T_i (мы предполагаем, что функция $v(t)$ не имеет резких скачков). Поэтому путь Δs_i , пройденный за время $[t_{i-1}, t_i]$, естественно считать приближенно равным пути, пройденному за то же время с постоянной скоростью $v(T_i)$:

$$\Delta s_i = v(T_i) \Delta t_i.$$

Выражение, стоящее в правой части, — площадь прямоугольника с основанием Δt_i и высотой $v(T_i)$. Проведя такие рассуждения для каждого отрезка деления, получим приближенно значение пути, пройденного за время $t_b - t_a$:

$$s = v(T_1) \Delta t_1 + v(T_2) \Delta t_2 + \dots = \sum_{i=1}^n v(T_i) \Delta t_i.$$

Греческая буква Σ (сигма) означает сумму. Здесь правая часть — площадь ступенчатой фигуры, составленной из прямоугольников. Точное значение пути получим в пределе $\Delta t_i \rightarrow 0$ при неограниченном увеличении числа отрезков деления:

$$s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(T_i) \Delta t_i.$$

Этот предел равен площади криволинейной трапеции, образованной отрезком $[t_a, t_b]$ оси t , кривой $v(t)$ и прямыми $t=t_a$, $t=t_b$, и обозначается символом, называемым интеграл:

$$s = \int_{t_a}^{t_b} v(t) dt.$$

Его ввел Г. Лейбниц в 1586 г. Ему же принадлежат термины «координата», «функция», «дифференциальное», «интегральное» (исчисление); знаки равенства, умножения.

ПРИМЕР 3.5. Две одинаковые полые трубки, согнутые в виде полуокружностей, расположены в вертикальной плоскости

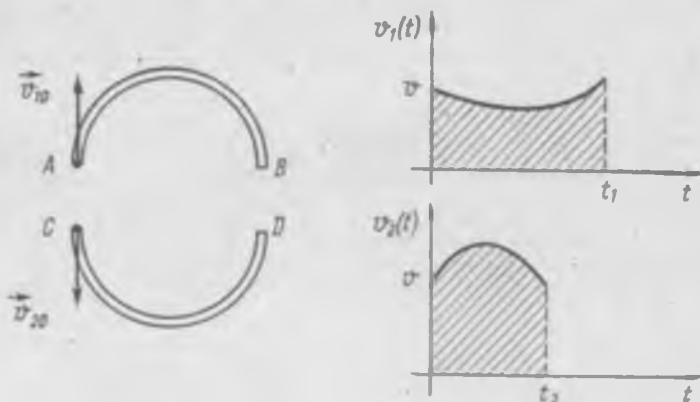


Рис. 3.7

(рис. 3.7). Поместим в точку A первой трубки шарик и сообщим ему скорость $v_{10}=v$, направленную вертикально вверх. Другой шарик запустим в точке C второй трубки со скоростью $v_{20}=v$, направленной вертикально вниз. Сравним время движения t_{AB} и t_{CD} шариков по первой и второй трубкам, пренебрегая силами трения.

Используя закон сохранения полной энергии (см. § 12), можно показать, что величины скоростей шариков в точках B и D равны v . Поскольку пути s_1, s_2 , пройденные каждым шариком, одинаковы, то для решения задачи необходимо рассмотреть уравнение $s_1=s_2$. Изобразим графики функций $v_1(t)$ и $v_2(t)$, следуя качественным соображениям: площади под кривыми $v_1(t)$ и $v_2(t)$ должны быть одинаковы. Таким образом, $t_{AB} > t_{CD}$.

Рассмотрим теперь несколько типичных задач кинематики.

ЗАДАЧА 3.6. Концы стержня AB длины l скользят по двум взаимно перпендикулярным прямым, причем скорость точки B равна v . Найти траекторию точки C — середины стержня и скорость точки C . В начальный момент времени $t=0$ стержень находился на вертикальной прямой.

Решение. Введем оси координат (рис. 3.8) и запишем проекции радиус-вектора r_C на оси x и y :

$$x_C(t) = (l/2) \cos \varphi(t), \quad y_C = (l/2) \sin \varphi(t), \quad (1)$$

где $\varphi(t)$ — угол OBA . Из (1), исключая φ , находим

$$x_C^2 + y_C^2 = \left(\frac{l}{2}\right)^2.$$

Следовательно, точка C движется по окружности радиусом $l/2$.

Далее найдем скорость v_C точки C . Поскольку функции $x_C(t)$, $y_C(t)$ зависят от функции $\varphi(t)$, то

$$v_{Cx} = \dot{x}_C = \frac{dx_C}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = -\frac{l}{2} \sin \varphi \cdot \varphi', \quad (2)$$

$$v_{Cy} = \dot{y}_C = \frac{dy_C}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{l}{2} \cos \varphi \cdot \varphi'.$$

Зависимость угла $\varphi(t)$ и его производной по времени можно найти, рассматривая движение точки B . По условию задачи $x_B(t) = vt$,

$$l \cos \varphi = vt. \quad (3)$$

Следовательно,

$$-l \sin \varphi \cdot \varphi' = v. \quad (4)$$

Учитывая (4) и (3), находим из (2)

$$v_{Cx}(t) = \frac{v}{2}, \quad (5)$$

$$v_{Cy}(t) = -\frac{v}{2} \operatorname{ctg} \varphi = -\frac{v}{2} \frac{vt}{\sqrt{R^2 - v^2 t^2}}.$$

Найдите далее ускорение точки C . Докажите, что проекции скоростей точек C и B на прямую AB совпадают (см. Дополнения, задача 1.1).

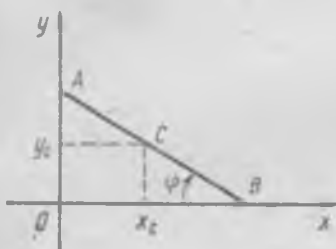


Рис. 3.8

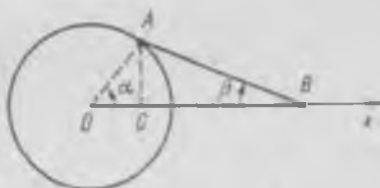


Рис. 3.9

ПРИМЕР 3.7. На рис. 3.9 изображено механическое устройство, которое позволяет преобразовать вращательное движение точки A в возвратно-поступательное движение кольца B по прямой Ox . Кольцо и точка A окружности шарнирно соединены стержнем длины l ($l > 2R$). Найдём зависимость координаты кольца при равномерном вращении точки A по окружности с угловой скоростью ω .

Пусть Ox — числовая ось с началом координат в точке O . Из треугольников OAC , ABC находим

$$x_B = R \cos \alpha + l \cos \beta, \quad R \sin \alpha = l \sin \beta.$$

При равномерном вращении $\alpha = \omega t$. Следовательно,

$$x_B(t) = R \cos \omega t + \sqrt{l^2 - R^2} \sin^2 \omega t.$$

§ 4. РАВНОМЕРНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Движение тела является равномерным, если его скорость не зависит от времени. Следовательно, соотношение

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0, \quad (4.1)$$

где $\vec{v}_0$ — постоянный вектор, эквивалентно определению равно-

мерного движения. Подставляя в (4.1) выражение для $v(t)$ из (3.4)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_0, \quad (4.1a)$$

получим уравнение, из которого можно найти зависимость радиус-вектора от времени.

ПРИМЕР 4.1. Тело движется по оси x , проходя за каждую секунду по одному метру. Будет ли движение тела равномерным?

В общем случае движение неравномерное, поскольку в течение каждой секунды тело можно перемещать как угодно, лишь бы к концу каждой секунды переместить его на один метр. Движение будет равномерным, если за любые равные промежутки времени перемещение тела одинаково. Этому определению соответствует операция вычисления предела (4.1) при $\Delta t \rightarrow 0$.

Соотношение (4.1a) является простейшим дифференциальным уравнением, поскольку в левой части стоит производная радиус-вектора по времени. Непосредственной проверкой убеждаемся, что векторная функция

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{c}, \quad (4.2)$$

где $\vec{c}$ — постоянный вектор, удовлетворяет (4.1a). Для того чтобы найти вектор $\vec{c}$, необходимо задать начальные условия: пусть в момент времени $t=t_0$ радиус-вектор $\vec{r}(t_0) = \vec{r}_0$. Полагая в (4.2) $t=t_0$, получим уравнение $\vec{r}_0 = \vec{v}_0 t_0 + \vec{c}$, из которого находим $\vec{c} = \vec{r}_0 - \vec{v}_0 t_0$. Следовательно,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0(t - t_0). \quad (4.3)$$

Приведем некоторые справочные данные. Довольно сильный бросок сообщает легкому камню скорость $15+20$ м/с. При подаче скорость мяча в бейсболе может превышать 100 км/ч. Скорость ракетки в момент удара $\sim 50+60$ м/с. Мировой рекорд скорости при спуске на лыжах $208,937$ км/ч. В беге мужчин на дистанцию 200 м максимальная скорость приближается к $10,5$ м/с; на дистанции 800 м максимальная скорость ~ 28 км/ч. Начальная скорость пули ~ 700 м/с, скорость истребителя МИГ-21 2200 км/ч. Скорость электрона в атоме водорода составляет $1/30$ скорости света.

Соотношения (4.1) и (4.3) полностью описывают равномерное движение тела. Геометрический смысл (4.3) становится ясным при рассмотрении рис. 4.1. Действительно, если при $t=t_0$ радиус-вектор занимал положение $\vec{r}_0$, то за время $t-t_0$ перемещение тела $\Delta \vec{r} = \vec{v}_0(t-t_0)$. Направление вектора перемещения $\Delta \vec{r}$ и скорости

$\vec{v}_0$ совпадают — значит тело движется по прямой линии. Положение тела в момент времени t определяется суммой векторов $\vec{r}_0$ и $\vec{v}_0(t-t_0)$.

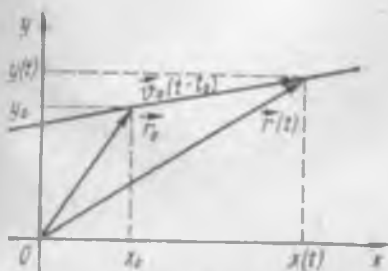


Рис. 4.1

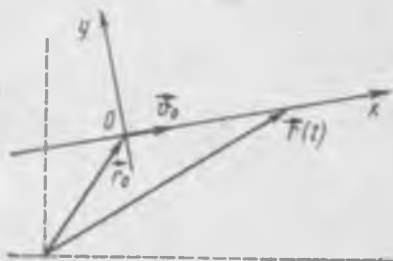


Рис. 4.2

Векторное соотношение (4.3) является символической формой записи, которая согласно определению (1.1) имеет вид

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{0x}(t-t_0), \\ y(t) &= y_0 + v_{0y}(t-t_0), \\ z(t) &= 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $(x_0, y_0, 0)$ — компоненты радиус-вектора начального положения тела, $(v_{0x}, v_{0y}, 0)$ — компоненты вектора начальной скорости.

Заметим, что в нашем примере прямолинейное равномерное движение выглядит сложным движением, т. е. суммой двух движений. Это обстоятельство связано с использованием «неудобной» системы координат (см. рис. 4.1). Поскольку движение точки прямолинейное, мы могли бы совместить с этой прямой, скажем, ось x (рис. 4.2). В этом случае вместо (4.4) мы получим более простую форму записи соотношения (4.3):

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = 0, \quad z(t) = 0.$$

Однако при рассмотрении движения более чем одного тела подобное «упрощение» невозможно.

ЗАДАЧА 4.2. Теплоход движется по озеру с постоянной скоростью $v_1 = 25$ км/ч параллельно берегу. Через какой наименьший промежуток времени T катер, имеющий скорость $v_2 = 40$ км/ч, догонит теплоход? В начальный момент времени теплоход и катер находились на одной нормали к берегу на расстоянии $s = 1$ км друг от друга.

Решение. Эту несложную задачу можно решить исходя из очевидного соотношения $(v_2 T)^2 = (v_1 T)^2 + s^2$. Однако мы используем общий метод решения, который позволяет с единой точки зрения решать более сложные задачи.

Прежде всего для описания движения теплохода и катера выберем удобную систему координат. Проще всего направить ось x вдоль берега, а ось y провести нормально к берегу через точки, в которых находились теплоход и катер в начальный момент времени (рис. 4.3).

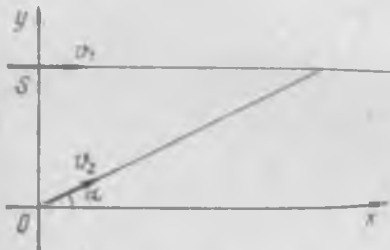


Рис. 4.3

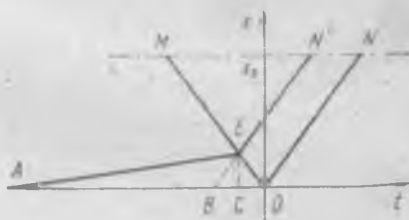


Рис. 4.4

Запишем далее закон движения теплохода и катера. Для этого мы должны записать проекции радиус-векторов теплохода $\vec{r}_1(t)$ и катера $\vec{r}_2(t)$, имеющих вид (4.4) на оси координат. В начальном положении радиус-векторы равны соответственно $\vec{r}_{10} = (0, s, 0)$, $\vec{r}_{20} = 0$. Скорость теплохода $\vec{v}_1 = (v_1, 0, 0)$, скорость катера $\vec{v}_2 = (v_2 \cos \alpha, v_2 \sin \alpha, 0)$. Проектируя радиус-векторы $\vec{r}_1(t)$ и $\vec{r}_2(t)$ на оси x и y , найдем законы движения теплохода и катера по соответствующим осям:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= v_1 t, \quad y_1(t) = s, \\ x_2(t) &= v_2 \cos \alpha \cdot t, \quad y_2(t) = v_2 \sin \alpha \cdot t. \end{aligned} \quad (1)$$

Полученные соотношения позволяют определить положение теплохода и катера в любой момент времени, так как связывают функциональной зависимостью взаимно однозначно координаты и время. В момент времени T теплоход и катер находятся в одной точке. Следовательно,

$$x_1(T) = x_2(T), \quad y_1(T) = y_2(T). \quad (2)$$

Подставляя из (1) в (2) значения функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ в момент времени T , получим два уравнения, содержащие две неизвестные величины T и α :

$$v_1 = v_2 \cos \alpha, \quad (3)$$

$$s = v_2 \sin \alpha \cdot T. \quad (4)$$

Соотношение (3) имеет простой физический смысл: для того чтобы догнать теплоход, проекция скорости катера на направление скорости теплохода должна равняться скорости теплохода. Из уравнений (3), (4) находим

$$T = \frac{s}{\sqrt{v_2^2 - v_1^2}} = 0,032 \text{ ч.}$$

ЗАДАЧА 4.3. Регулярно в определенное время за инженером приезжает заводская автомашина, которая доставляет его на место работы. Однажды инженер вышел из дома на 1 ч раньше обычного и, не дожидаясь машины, пошел на завод пешком. По дороге он встретил автомашину и приехал на завод на 10 мин раньше обычного. Сколько времени шел инженер пешком до встречи с автомашиной? Решить задачу графически, предполагая, что дом инженера и завод находятся на прямолинейном участке шоссе.

Решение. Поместим начало координат O в точку, из которой инженер начал свой путь. Координата завода равна $x_0 > 0$. На рис. 4.4 ломаная MON изображает зависимость x -координаты машины от времени при ее обычном движении, отрезок AE — зависимость x -координаты инженера от времени до встречи с машиной, отрезок EN' — зависимость x -координаты машины от времени после встречи с инженером. Эти графики не совсем корректны. Например, в точке O проекция скорости машины на ось x скачком изменяется от отрицательного до положительного значения. Такой скачок скорости машины, вообще говоря, невозможен, так как любые физические величины должны изменяться плавно. Однако для упрощения графиков этим требованием можно пренебречь. Согласно условию задачи $AO = 1$ ч, $NN' = BO = 10$ мин. Поскольку $BE = EO$, то

$$BC = CO = \frac{1}{2}BO.$$

Время движения инженера до встречи с машиной

$$AC = AO - \frac{1}{2}BO = 55 \text{ мин.}$$

ЗАДАЧА 4.4. Спортсмены бегут колонной длины l_0 с одинаковыми скоростями v . Навстречу бежит тренер со скоростью u ($u < v$). Спортсмен, поравнявшийся с тренером, разворачивается и бежит в обратную сторону с той же скоростью v . Найти длину l колонны, когда все спортсмены будут бежать в направлении, противоположном начальному.

Решение 1. Приведем графическое решение в кратком виде; опущенные детали читатель должен восстановить самостоятельно. На рис. 4.5 прямая $МОС$ изображает зависимость x -координаты тренера от времени, прямые FO и LC — x -координаты первого и последнего спортсменов в колонне до встречи с тренером. В момент встречи $t=0$ первого спортсмена с тренером в точке $x=0$ последний находился в точке с координатой $x=-OB$, $OB=l_0$. В момент времени $t=T$ происходит встреча последнего спортсмена с тренером, а первый спортсмен находится в точке с координатой $x=-OD$. Следовательно, искомая длина колонны $l=AD$. Очевидно, $OB=OA+AB$, $AD=OD-OA$. Учитывая, что $OA=uT$, $OD=AB=vT$, получим систему

Рис. 4.5

$$l_0 = uT + vT, \quad l = vT - uT, \quad (I)$$

из которой находим

$$l = \frac{v-u}{v+u} l_0.$$

Решение 2. Наиболее просто задача решается в аналитическом виде. Используя (4.4), запишем функции, определяющие x -координаты тренера: $x_T = -ut$, первого и последнего спортсмена до встречи с тренером: $x_1(t) = vt$, $x_2(t) = -l_0 + vt$ и первого спортсмена после встречи с тренером: $x_1'(t) = -vt$. В момент времени $t=T$ $x_2(T) = x_T(T)$, $l = x_T(T) - x_1'(T)$. Учитывая явный вид функций, получим систему

$$-l_0 + vT = -uT, \quad l = -uT + vT,$$

совпадающую с (I).

§ 5. ОТНОСИТЕЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ

Абсолютного движения тела не существует, оно всегда происходит только по отношению к какому-нибудь другому телу или системе тел, которую мы называем системой отсчета и рассматриваем условно как неподвижную. Действительно, все данные о положении, скорости и ускорении тела будут иметь смысл только тогда, когда мы одновременно назовем систему отсчета, по отношению к которой изучается его движение. Однако то же движущееся тело или другие явления может также изучать наблюдатель, находя-

щийся в другой системе отсчета, движущейся относительно первой. Его выводы о положении, скорости и ускорении тела будут иными, чем у первого наблюдателя. Выясним связь между утверждениями двух наблюдателей.

Рассмотрим прямолинейное движение некоторого объекта, скажем велосипедиста, со скоростью v относительно вокзальной платформы, которую вместе с Землей примем за неподвижную систему отсчета K . Параллельно велосипедисту движется поезд (система отсчета K') со скоростью u . Чему будет равна скорость велосипедиста относительно пассажира, находящегося в вагоне поезда? Свяжем с каждой системой отсчета систему координат (рис. 5.1).

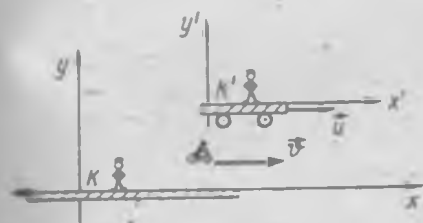


Рис. 5.1

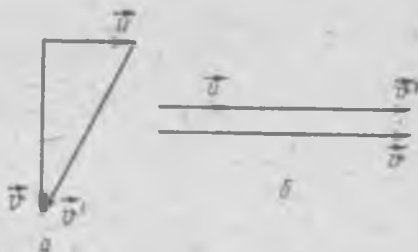


Рис. 5.2

Если скорость поезда $u=v$, то скорость велосипедиста относительно поезда $v'=0$. Если скорость поезда $u < v$, то велосипедист обгоняет поезд и проекция его скорости на ось x' в системе K' , связанной с поездом, $v'=v-u > 0$. Если $u > v$, то велосипедист отстает от поезда и проекция скорости в системе K' равна $v'=v-u < 0$. Таким образом, связь проекций скоростей в двух системах отсчета определяется соотношением

$$v_x = u_x + v'_x. \quad (5.1)$$

Найдем теперь соотношение, связывающее скорости тела $\vec{v}$ и $\vec{v}'$ в двух различных системах отсчета K и K' в общем случае, когда направления скоростей $\vec{v}$ и $\vec{u}$ не совпадают. При этом будем предполагать, что система отсчета K' движется поступательно относительно неподвижной системы K . Обозначим радиус-вектор тела в системе $K(K')$ в момент времени t посредством $\vec{r}(r')$, а радиус-вектор, указывающий положение начала O' движущейся системы, $\vec{r}_O$. Очевидно,

$$\vec{r} = \vec{r}_O + \vec{r}'. \quad (5.2)$$

В момент времени $t + \Delta t$ радиус-векторы принимают значения

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}(t) + \Delta \vec{r}, \quad \vec{r}_{O'}(t + \Delta t) = \vec{r}_{O'}(t) + \Delta \vec{r}_{O'},$$

$$\vec{r}'(t + \Delta t) = \vec{r}'(t) + \Delta \vec{r}',$$

где $\Delta \vec{r}(\Delta \vec{r}')$ — перемещение тела относительно системы $K(K')$, а $\Delta \vec{r}_{O'}$ — перемещение системы K' . При этом по-прежнему

$$\vec{r}(t + \Delta t) = \vec{r}_{O'}(t + \Delta t) + \vec{r}'(t + \Delta t). \quad (5.3)$$

Из соотношений (5.2) и (5.3) следует, что

$$\Delta \vec{r} = \Delta \vec{r}_{O'} + \Delta \vec{r}'. \quad (5.4)$$

Тем самым перемещение тела в системе отсчета K является суммой перемещения системы K' относительно системы K и перемещения тела относительно системы K' .

Разделим обе части равенства (5.4) на Δt и перейдем к пределу $\Delta t \rightarrow 0$. Согласно (3.4)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}(t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}_{O'}}{\Delta t} = \vec{u}(t), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}'}{\Delta t} = \vec{v}'(t).$$

Следовательно,

$$\vec{v}(t) = \vec{u}(t) + \vec{v}'(t). \quad (5.5)$$

Мы видим, что скорость тела в неподвижной системе отсчета равна сумме скорости движущейся системы отсчета и скорости тела относительно движущейся системы. Соотношение (5.5) позволяет без особых затруднений решать задачи, в которых мы вынуждены изучать движение тел по отношению к движущимся системам отсчета. Например, если $\vec{v}$ — скорость капель дождя относительно Земли (рис. 5.2а), $\vec{u}$ — скорость автомобиля, то $\vec{v}'$ — скорость капель относительно автомобиля; или $\vec{v}$ — скорость лодки относительно берегов, а $\vec{u}$ — скорость течения реки, то $\vec{v}'$ — скорость лодки в системе отсчета, связанной с водой (например, относительно плота на воде). При движении по течению скорость лодки равна скорости течения реки $\vec{u}$ плюс скорость лодки $\vec{v}'$ относительно покоящейся воды (рис. 5.2б) и т. д.

Связь ускорений тела $\vec{a}$ в системе отсчета K и $\vec{a}'$ в системе отсчета K' , движущейся прямолинейно относительно системы K с ускорением $\vec{w}$, записывается аналогично (5.5):

$$\vec{a} = \vec{w} + \vec{a}'. \quad (5.6)$$

ЗАДАЧА 5.1. Приборы, установленные на берегу, показывают, что ветер дует с юго-запада, а величина скорости ветра $v = 5$ м/с. Что покажут аналогичные приборы, установленные на корабле, идущем на запад со скоростью u , $u = 36$ км/ч.

Решение. В задаче идет речь об определении скорости ветра в двух системах отсчета: неподвижной системе, связанной с Землей, и системе, движущейся на запад со скоростью u . В неподвижной системе отсчета вектор скорости ветра известен и равен v .

Из соотношения $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$, связывающего скорости ветра в неподвижной и движущейся системах, находим вектор скорости ветра $\vec{v}'$ относительно корабля (рис. 5.3):

$$\vec{v}' = \vec{v} - \vec{u}. \quad (1)$$

Соотношение (1) представляет фактически два независимых уравнения, являющихся проекциями (1) на оси x и y прямоугольной системы координат. Пусть α — угол между вектором $\vec{v}'$ и осью x (см. рис. 5.3). Тогда из (1) получим систему уравнений

$$v' \cos \alpha = 1/\sqrt{2} v + u,$$

$$v' \sin \alpha = 1/\sqrt{2} v,$$

из которой находим

$$\operatorname{ctg} \alpha = 1 + \sqrt{2} (u/v),$$

$$v' = \sqrt{u^2 + \sqrt{2} uv + v^2}$$

(последнее соотношение можно получить непосредственно, применяя теорему косинусов к треугольнику, образованному векторами $\vec{v}$, $\vec{u}$ и $\vec{v}'$). Подставляя числовые данные, находим

$$\alpha = 15^\circ, \quad v' = 14 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧА 5.2. Проплывая под мостом против течения, гребец потерял соломенную шляпу. Обнаружив пропажу через время $\tau = 10$ мин, он повернул назад и, гребя по течению, подобрал шляпу в $s = 1$ км ниже моста. Определить скорость течения реки (предполагается, что гребец гребет одинаково интенсивно).

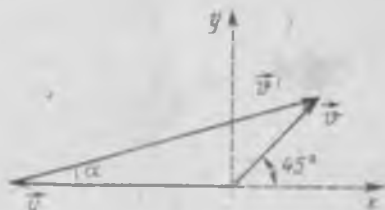


Рис. 5.3

Решение. Очевидно, скорость течения реки $u = s/T$, где T — время, за которое шляпа проплыла путь s . Величину T проще всего найти, рассматривая движение в системе отсчета, связанной с водой. В этой системе вода неподвижна, а гребец в течение τ с плыл от шляпы и τ с подплывал к ней с одной и той же скоростью. Следовательно,

$$T = 2\tau, \quad u = s/2\tau = 3 \text{ км/ч.}$$

Полезно изобразить графики зависимости от времени координат гребца и шляпы в системе отсчета, связанной с берегом.

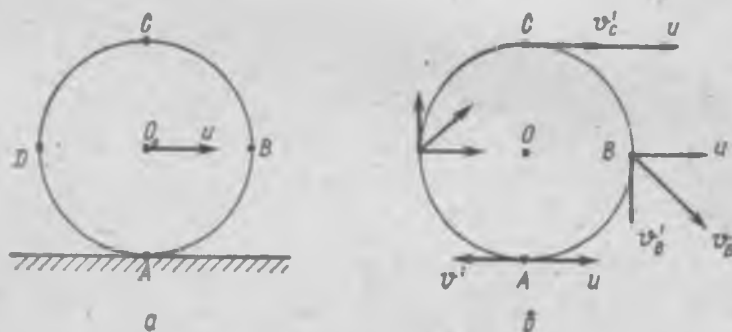


Рис. 5.4

ЗАДАЧА 5.3. Колесо катится по горизонтальной поверхности со скоростью u без проскальзывания (рис. 5.4а). Определить скорости точек A, B, C, D обода.

Решение. Скорость перемещения оси колеса u . Введем систему отсчета K' , движущуюся поступательно вместе с осью колеса. В этой системе скорости v' точек обода направлены по касательной к ободу и одинаковы по величине. Согласно (5.5) скорость любой точки колеса относительно Земли является векторной суммой скорости u и скорости v' . Направление v' в каждой точке обода известно. Определим величину скорости v' . Для этого рассмотрим точку A . Так как колесо движется без проскальзывания, то в любой момент времени точка касания колеса с поверхностью неподвижна относительно этой поверхности, т. е. скорость точки A равна нулю. Проектируя векторное равенство (5.5) на горизонтальное направление, находим

$$v_A = 0, \quad 0 = u - v'.$$

Таким образом, $v' = u$. Теперь нетрудно найти скорость точки B от-

носительно Земли (рис. 5.46): $\vec{v}_B = \vec{u} + \vec{v}'_B$, $v_B = \sqrt{2}u$; точки C : $\vec{v}_C = -\vec{u} + \vec{v}'_C$, $v_C = 2u$; и скорость точки D : $\vec{v}_D = \vec{u} + \vec{v}'_D$, $v_D = \sqrt{2}u$.

ЗАДАЧА 5.4. Две параллельные рейки движутся в одну сторону с постоянными скоростями $v_1 = 6$ м/с и $v_2 = 4$ м/с. Между рейками зажат диск радиусом $R = 0,5$ м, катящийся по рейкам без проскальзывания. Найти скорость центра диска и угловую скорость вращения.

Решение. Рассмотрим неподвижную систему отсчета, в которой заданы скорости реек $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, и систему отсчета, движущуюся со скоростью $\vec{u}$, равной скорости центра диска. Поскольку диск катится по рейкам без проскальзывания, то в неподвижной системе скорости точек A и B на рис. 5.5 равны в любой момент времени скоростям реек. В движущейся системе центр диска неподвижен, а диск вращается с угловой скоростью ω . При этом скорости $\vec{v}'_A$ и $\vec{v}'_B$ точек A и B направлены, как указано на рис. 5.5, и равны по величине ωR . Записав соотношение $\vec{v} = \vec{u} + \vec{v}'$, связывающее скорость любой точки диска в неподвижной и движущейся системах для точек A и B в проекции на горизонтальное направление, получим систему уравнений

$$v_1 = u + \omega R, \quad v_2 = u - \omega R,$$

из которой находим

$$u = \frac{1}{2}(v_1 + v_2), \quad \omega = (1/2R)(v_1 - v_2).$$

Подставляя числовые данные, получим $u = 5$ м/с, $\omega = 2$ рад/с.

ЗАДАЧА 5.5. Скорость бутсы футболиста в момент удара по неподвижному мячу равна u . Определить скорость мяча после удара. Удар абсолютно упругий. Предполагается, что скорость бутсы после удара не изменяется, т. е. масса бутсы значительно больше массы мяча.

Решение. После упругого столкновения мяча с бутсой его скорость изменится по направлению, оставаясь по величине неизменной. Это утверждение справедливо только в системе отсчета, относительно которой бутса неподвижна. Поэтому для решения задачи необходимо рассмотреть процесс соударения в системе отсчета, связанной с бутсой и движущейся со скоростью $\vec{u}$ относительно Земли. В этой системе мяч налетает на бутсу со скоростью $-\vec{u}$, а после удара скорость мяча становится равной $\vec{u}$. Таким образом, после удара мяч летит со скоростью $\vec{u}$ относительно бутсы, а бутса движется со скоростью $\vec{u}$ относительно Земли. Тем самым

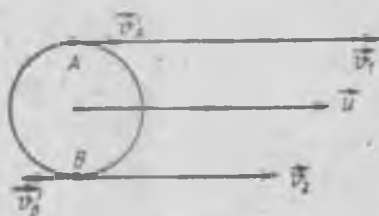


Рис. 5.5

скорость мяча после удара относительно Земли равна $2\vec{u}$, т. е. по определению равна сумме скорости движущейся системы и скорости тела относительно движущейся системы (см. также пример 12.12).

Приведем более общее решение задачи на определение скорости частицы после упругого столкновения с движущейся плоскостью. Пусть частица движется перпендикулярно плоскости со скоростью $\vec{v}_{in}$. В системе покоя плоскости ее скорость $\vec{v}'_{in} = \vec{v}_{in} - \vec{u}$. После столкновения скорость частицы стала равной $\vec{v}'_{out} = -\vec{v}'_{in} = \vec{u} - \vec{v}_{in}$. Переходя в исходную систему отсчета, найдем согласно (5.5) скорость частицы после столкновения

$$\vec{v}_{out} = \vec{u} + \vec{v}'_{out} = 2\vec{u} - \vec{v}_{in}.$$

ПРИМЕР 5.6. Скорость струи пара перед попаданием на лопатки паровой турбины равна v . Какова должна быть скорость u лопаток, чтобы вся кинетическая энергия струи пара могла перейти в энергию вращения турбины?

Для того чтобы вся кинетическая энергия струи пара перешла в энергию вращения турбины, скорость струи пара $\vec{v}$ после отражения от лопатки должна равняться нулю. Предположим, что столкновение струи с лопаткой является упругим процессом. Полагая в полученном выше решении $\vec{v}_{out} = 0$, находим $u = v/2$. Это соотношение выполняется в рабочем режиме турбины.

§ 6. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Теперь мы займемся изучением движения тела, ускорение которого постоянно:

$$\vec{a}(t) = \vec{a}_0. \quad (6.1)$$

Наша задача — найти зависимость скорости и положения тела, т. е. радиус-вектора, от времени. Примем момент времени $t=0$ за начало отсчета и будем считать, что при $t=0$ скорость и радиус-вектор соответственно равны $\vec{v}_0$ и $\vec{r}_0$.

Согласно определению $\vec{a}(t)$ (3.6)

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \vec{a}_0. \quad (6.2)$$

Поскольку в правой части (6.2) стоит постоянный вектор, то зависимость $\vec{v}(t)$ должна иметь вид

$$\vec{v}(t) = \vec{a}_0 t + \vec{A}, \quad (6.3)$$

где $\vec{A}$ — произвольный постоянный вектор. Подставляя (6.3) в (6.2), легко убедиться, что наше предположение верно. Определим теперь $\vec{A}$. Если в (6.3) положить $t=0$, то, учитывая, что $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$, получим $\vec{A} = \vec{v}_0$. Следовательно,

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t. \quad (6.4)$$

Далее, воспользовавшись определением (3.4), получим уравнение

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 t.$$

Так же как и ранее, проверкой убеждаемся, что решением этого уравнения является вектор

$$\vec{r}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 \frac{t^2}{2} + \vec{B},$$

где $\vec{B}$ — произвольный постоянный вектор. Учитывая начальные условия $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, находим, что $\vec{B} = \vec{r}_0$. Итак,

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \vec{a}_0 \frac{t^2}{2}. \quad (6.5)$$

Формулы (6.4) и (6.5) определяют решение поставленной задачи.

Если начальное положение $\vec{r}_0$ и начальная скорость $\vec{v}_0$ задаются в момент времени $t=t_0 \neq 0$, то в формулах (6.4) и (6.5) следует заменить t на величину $t-t_0$ (докажите это утверждение). В этом случае мы получим решение задачи в виде

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a}_0 (t-t_0), \quad (6.6)$$

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 (t-t_0) + \vec{a}_0 \frac{(t-t_0)^2}{2}. \quad (6.7)$$

При решении задач о движении в поле тяжести Земли в формулах (6.4)–(6.7) вектор $\vec{a}_0$ надо заменить вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$. Вектор $\vec{g}$ направлен к центру Земли, его величина равна $9,8 \text{ м/с}^2$. Для того чтобы не учитывать изменение g с высотой (см. § 14), мы везде будем предполагать, что начальная скорость много меньше первой космической скорости. Необходимо твердо усвоить, что законы движения тел, перемещающихся с постоянным ускорением, во всех случаях описываются формулами (6.4), (6.5) или (6.6), (6.7). Задачи, которые могут быть предложены для решения, отличаются только разными зна-

чениями векторов начального положения $\vec{r}_0$ и начальной скорости $\vec{v}_0$.

В этом параграфе мы ограничимся решением задач, в которых угол между вектором начальной скорости $\vec{v}_0$ и ускорением $\vec{a}_0$ равен 0 или π . В этом случае тело будет двигаться по прямой линии. Для описания движения тела удобно совместить с этой прямой одну из координатных осей. Направим вдоль этой прямой ось y . Проектируя теперь соотношения (6.5) и (6.4) на оси x, y, z , получим зависимость координат

$$\begin{aligned}x(t) &= 0, \\y(t) &= y_0 + v_0 t + a_0 \frac{t^2}{2}, \\z(t) &= 0\end{aligned}\tag{6.8}$$

и проекций скорости

$$\begin{aligned}v_x(t) &= 0, \\v_y(t) &= v_0 + a_0 t, \\v_z(t) &= 0\end{aligned}\tag{6.9}$$

от времени. Здесь v_0 и a_0 — проекции начальной скорости и ускорения на ось y .

Следует подчеркнуть, что соотношения (6.8), (6.9) определяют шесть функций и позволяют найти скорость и положение точки в любой, а не только в «конечный» момент времени. Эти соотношения содержат всю информацию, необходимую для решения задач, в которых рассматривается движение с постоянным ускорением. Полезно придерживаться при этом следующей последовательности: сначала ввести систему координат, в которой движение тел выглядит наиболее просто. Затем записать компоненты радиус-вектора в начальном положении, начальной скорости и ускорения. После этого записать проекции на оси координат соотношений (6.6) и (6.7). Далее, рассматривая положение тела в моменты времени, интересующие нас по условию задачи, получим систему алгебраических уравнений. При этом надо проследить, чтобы число независимых уравнений равнялось числу неизвестных величин.

ПРИМЕР 6.1. Камень брошен вертикально вверх с начальной скоростью v_0 из точки, находящейся на высоте H от поверхности Земли. Определим время, через которое камень упадет на Землю, скорость камня в момент падения на Землю, высоту наибольшего подъема.

Для описания движения выберем координатную ось y , направленную вертикально вверх. За начало отсчета примем точку

на поверхности Земли. Проекция вектора g на эту ось равна $-g$. Две функции из (6.8), (6.9)

$$y(t) = H + v_0 t - g \frac{t^2}{2}, \quad (1)$$

$$v(t) = v_0 - gt \quad (2)$$

определяют высоту камня над Землей в любой момент времени $t > 0$ и проекцию его скорости на ось y также в любой момент времени.

Для того чтобы используемый нами метод решения стал более ясным, предварительно начертим графики функций $y(t)$ и $v(t)$ (рис. 6.1); $v(t)$ — линейная функция времени, $y(t)$ — обычный квадратный трехчлен. В точках t_3, t_3' пересечения графика с осью t значения функции $y(t)$ равны нулю.

Реальное движение тела описывается той частью графиков, которые лежат в области $t > 0$. Согласно сказанному выше соотношения (1) и (2) содержат всю информацию, необходимую для решения задачи. Сейчас мы проверим это утверждение.

Определим вначале момент времени t_1 , в который камень находился на наибольшей высоте h_1 . В этой точке его скорость равна нулю: $v(t_1) = 0$. Подставляя сюда значение функции $v(t)$ из (2) в момент времени t_1 , получим уравнение для определения t_1 :

$$v(t_1) = 0, \quad v_0 - gt_1 = 0, \quad t_1 = v_0/g.$$

Высота h_1 равна значению функции $y(t)$ в момент времени t_1 :

$$h_1 = y(t_1) = H + v_0 t_1 - g \frac{t_1^2}{2}.$$

Подставляя t_1 , получим

$$h_1 = H + \frac{v_0^2}{2g}.$$

Определим попутно момент t_2 , в который тело вновь окажется на высоте H . Для этого имеем уравнение $y(t_2) = H$. Подставляя сюда значение функции $y(t)$ в момент времени t_2 , получим уравнение

$$H = H + v_0 t_2 - g \frac{t_2^2}{2}, \quad t_2 = 2 \frac{v_0}{g} = 2t_1.$$

Найдем теперь время падения t_3 камня на Землю. Очевидно, в момент падения t_3 высота, на которой находится камень, $y(t_3) = 0$. Подставляя сюда значение функции (1) в момент времени t_3 , получим уравнение для определения t_3 :

$$y(t_3) = 0, \quad H + v_0 t_3 - g \frac{t_3^2}{2} = 0. \quad (3)$$

Из этого уравнения находим

$$t_2, t_3 = \frac{v_0}{g} \pm \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}. \quad (4)$$

Второй корень со знаком минус, соответствующий точке пересечения t'_3 графика $y(t)$ с осью времени, надо отбросить, исходя из очевидного требования: время движения камня от момента бро-

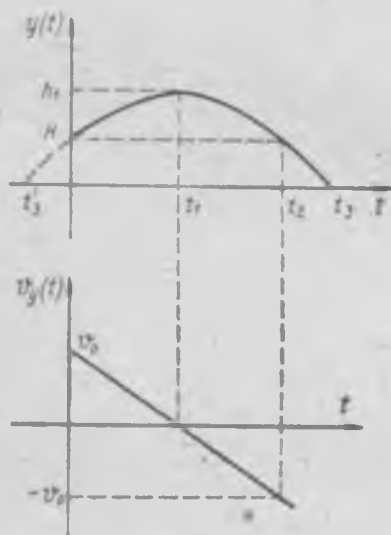


Рис. 6.1



Рис. 6.2

сения $t=0$ до момента падения t_3 должно быть больше нуля. Итак,

$$t_3 = \frac{v_0}{g} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{2H}{g}}.$$

Проекция скорости тела v_3 в момент падения на Землю равна значению функции (2) при $t=t_3$: $v_3=v(t_3)$. Подставляя значение t_3 , получим

$$v_3 = v_0 - gt_3 = -\sqrt{v_0^2 + 2Hg}.$$

Знак минус перед радикалом указывает на то, что скорость в этот момент направлена вниз.

Часто неверно говорят, что движение тела вверх является равнозамедленным, и, начиная с момента t_1 , тело движется вниз равноускоренно. Действительно, из рис. 6.1 видно, что проекция ско-

рости на ось y монотонно убывает. Момент времени t_1 ничем не выделен, поскольку сила, действующая на тело, постоянна. Заметим еще раз, что функция $y(t)$ позволяет найти координату тела в любой фазе его движения. На всех этапах решения не возникала необходимость рассматривать движение независимо на отдельных участках $0 \leq t \leq t_1$ и $t > t_1$.

ЗАДАЧА 6.2. Тело падает с башни с нулевой начальной скоростью. Известно, что вторую половину пути оно прошло за $\tau = 0,8$ с. Определить высоту башни H .

Решение 1. Если начало координат оси y поместить на поверхности Земли, то зависимость y -координаты тела определяется функцией (1) примера 6.1 ($v_0 = 0$):

$$y(t) = H - g \frac{t^2}{2}. \quad (1)$$

Пусть t_1 — момент времени, в который тело находится на половине пути (рис. 6.2), т. е. значение функции $y(t_1) = H/2$. Подставляя сюда $y(t_1)$ из (1), получим уравнение

$$H - g \frac{t_1^2}{2} = \frac{H}{2}. \quad (2)$$

По условию задачи в момент $t_2 = t_1 + \tau$ тело достигает Земли, т. е. $y(t_1 + \tau) = 0$. Подставляя в это соотношение значение функции (1), получим еще одно уравнение:

$$H - g \frac{(t_1 + \tau)^2}{2} = 0. \quad (3)$$

Из системы уравнений (2), (3), содержащей в качестве неизвестных H , t_1 , получим

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{2H}{g}} &= \sqrt{\frac{H}{g}} + \tau, \\ H &= \frac{g\tau^2}{(\sqrt{2}-1)^2} = g(\sqrt{2}+1)^2 \tau^2. \end{aligned}$$

Подставляя числовые данные, найдем $H = 36,4$ м.

Решение 2. В методических целях решим еще раз эту задачу, помещая начало координат на вершину башни, а положительное направление оси y пусть совпадает с направлением вектора $\vec{g}$. Тогда из (6.5) или из (6.8) находим функцию

$$y(t) = g \frac{t^2}{2}.$$

Далее рассмотрим событие — тело находится на половине пути

к Земле: $y(t_1) = H/2$. Подставляя сюда значение функции $y(t_1)$, получим первое уравнение

$$g \frac{t_1^2}{2} = \frac{H}{2}. \quad (4)$$

Второе событие — тело упало на Землю — определяется условием $y(t_1 + \tau) = H$, которое дает второе уравнение

$$g \frac{(t_1 + \tau)^2}{2} = H. \quad (5)$$

Очевидно, уравнения (4), (5) совпадают с системой (2), (3).

ЗАДАЧА 6.3. Тело брошено с поверхности Земли вертикально вверх. На высоте $H = 8,6$ м оно побывало дважды с интервалом времени $2\tau = 3$ с. Определить начальную скорость бросания.

Решение. Закон движения по вертикали и зависимость скорости от времени определяются функциями (1) и (2) примера 6.1, в которых надо положить $H = 0$. Для решения задачи достаточно использовать функцию

$$y(t) = v_0 t - g \frac{t^2}{2}. \quad (1)$$

По условию задачи мы должны рассмотреть два события. Первое — тело находится на высоте H в момент времени $t = t_1$: $y(t_1) = H$, второе — тело находится на высоте H в момент времени $t = t_1 + 2\tau$: $y(t_1 + 2\tau) = H$. Подставляя в эти условия соответствующие значения функции (1), получим систему уравнений

$$v_0 t_1 - g \frac{t_1^2}{2} = H, \quad (2)$$

$$v_0 (t_1 + 2\tau) - g \frac{(t_1 + 2\tau)^2}{2} = H, \quad (3)$$

из которой находим

$$v_0 = \sqrt{2gH + g^2\tau^2} = 19,6 \text{ м/с}.$$

Если переписать полученное выражение в виде

$$\frac{v_0^2}{2g} = H + g \frac{\tau^2}{2},$$

то оно приобретает простой физический смысл: максимальная высота подъема $v_0^2/2g$ складывается из высоты H и перемещения тела с максимальной высоты до высоты H в течение времени τ .

ЗАДАЧА 6.4. Жонглер бросает с одного и того же уровня два шарика вертикально вверх с начальными скоростями $v_0 = 5$ м/с

один за другим через промежуток времени $t_0 = 0,31$ с. Определить, через какое время после бросания первого шарика оба шарика окажутся на одной высоте.

Решение. Выберем координатную ось y так, чтобы направление вверх было положительным. Начало отсчета совместим с положением руки жонглера в момент бросания. Время отсчитывает секундомер, запущенный одновременно с бросанием первого шарика. Зависимость координаты первого шарика от времени имеет вид

$$y_1(t) = v_0 t - g \frac{t^2}{2}.$$

Движение второго шарика началось в момент времени $t_0 > 0$ с начальной скоростью v_0 . Согласно сказанному выше зависимость высоты этого шарика $y_2(t)$ от времени определяется выражением

$$y_2(t) = v_0(t - t_0) - g \frac{(t - t_0)^2}{2}.$$

На рис. 6.3 показаны графики функций $y_1(t)$ и $y_2(t)$, из которых видно, что, когда первый шарик движется вниз ($y_1(t)$ уменьшается), второй еще летит вверх ($y_2(t)$ растет). В некоторый момент



Рис. 6.3

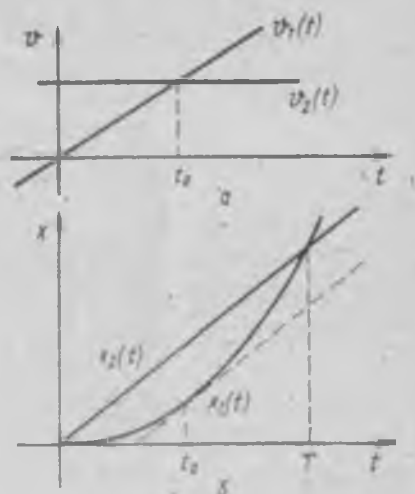


Рис. 6.4

времени T оба шарика окажутся на одной высоте. В момент времени T $y_1(T) = y_2(T)$, т. е.

$$v_0 T - g \frac{T^2}{2} = v_0 (T - t_0) - g \frac{(T - t_0)^2}{2}.$$

Из этого уравнения находим искомое время

$$T = \frac{v_0}{g} + \frac{t_0}{2} = 0,66 \text{ с.}$$

ЗАДАЧА 6.5. Два тела движутся по прямой, совпадающей с осью x . Зависимость проекций скоростей тел от времени изобра-

жена на рис. 6.4а. Известно значение времени t_0 , при котором скорости двух тел равны друг другу. В какой момент времени произойдет их встреча, если при $t=0$ они находились в начале координат.

Решение. Очевидно, первое тело движется с постоянным ускорением, а второе равномерно, т. е. $v_1(t) = at$, $v_2(t) = v_0$, где a , v_0 — неизвестные величины. Зависимость координат от времени, удовлетворяющая условию $x_1(0) = 0$, $x_2(0) = 0$, имеет вид

$$x_1(t) = a \frac{t^2}{2}, \quad x_2(t) = v_0 t. \quad (1)$$

Из условия $v_1(t_0) = v_2(t_0)$ находим уравнение $at_0 = v_0$. Поскольку в момент встречи $t = T$ значения функций (1) совпадают, то $x_1(T) = x_2(T)$. Из этого соотношения находим второе уравнение $aT^2 = 2v_0T$. После решения системы двух уравнений получим значение $T = 2t_0$. На рис. 6.4б изображены графики функций (1). Касательная к параболе в точке $t = t_0$ параллельна прямой $x_2(t) = v_0t$. В этом геометрический смысл равенства $v_1(t_0) = v_2(t_0)$.

§ 7. КРИВОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ С ПОСТОЯННЫМ УСКОРЕНИЕМ

Соотношения (6.4) и (6.5) определяют скорость и координаты тела в любой момент времени $t > 0$ при произвольных начальных условиях v_0 и r_0 . Мы видели, что тело движется прямолинейно, если вектор начальной скорости лежит на одной прямой с вектором ускорения a_0 . Теперь рассмотрим ситуацию, в которой векторы v_0 и a_0 образуют некоторый угол. Для математического описания движения введем систему координат. Предварительно построим плоскость, в которой лежат векторы v_0 и a_0 , и расположим в ней координатные оси x и y . Ось z перпендикулярна указанной плоскости. Для большей наглядности рассмотрим далее задачу о движении тела в поле тяжести, представляющую одновременно наибольший интерес.

В прямой постановке заданы начальная скорость и положение точки, из которой брошено тело. Требуется ответить на любой вопрос о положении тела, величине и направлении скорости в произвольный момент времени и т. д.

В рассматриваемой задаче плоскость x, y совпадает с вертикальной плоскостью. Проведем ось x параллельно поверхности Земли, а начало координат выберем так, что радиус-вектор начального положения $r_0 = (x_0, y_0, 0)$. Полагая в (6.4), (6.5) ускорение $a_0 = g$ и проектируя эти соотношения на оси координат, получим шесть функций:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (7.1)$$

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2}, \quad (7.2)$$

$$z(t) = 0, \quad (7.3)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (7.4)$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt, \quad (7.5)$$

$$v_z(t) = 0. \quad (7.6)$$

Эти соотношения позволяют вычислить любую величину, представляющую практический интерес. Правда, наши предсказания могут расходиться с экспериментальными данными, потому что мы не учли влияния вращения Земли и сил сопротивления со стороны воздуха. Поскольку эти вопросы выходят за рамки программы, мы не будем учитывать эти эффекты.

Соотношения (7.4)—(7.6) определяют зависимость проекций скорости на оси координат от времени. Величина скорости в момент времени t равна

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 - 2v_0 g t \sin \alpha + g^2 t^2}.$$

Вектор скорости тела $\vec{v}$ изменяется с течением времени по величине и направлению. Если y -координата тела растет, то $v_y(t) > 0$, при снижении тела $v_y(t) < 0$. При решении ряда задач необходимо представлять зависимость от времени угла $\beta(t)$ между вектором скорости и осью x . Нетрудно видеть, что

$$\operatorname{tg} \beta(t) = \frac{v_y(t)}{v_x(t)} = \operatorname{tg} \alpha - \frac{g t}{v_0 \cos \alpha}.$$

Подчеркнем еще раз, что решение любой физической или математической задачи сводится к решению системы уравнений. Однако (7.1)—(7.6) являются функциями, а не уравнениями. При решении конкретных задач (7.1)—(7.6) являются основой для вывода необходимых уравнений. С этой целью следует рассмотреть события, о которых идет речь в условии или вопросе задачи, и записать с помощью (7.1)—(7.6) соотношения, включающие известные и неизвестные величины. Составив замкнутую систему уравнений, можно приступить к ее решению.

ПРИМЕР 7.1. Ракета стартует с поверхности Земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Найдём высоту подъема ракеты и дальность полета.

Выберем начало координат в точке запуска ракеты, а плоскость x, y выберем так, чтобы в ней лежали векторы v_0 и g (см. рис. 7.1). Полагая в (7.1)—(7.6) $x_0 = y_0 = 0$, получим

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad (1)$$

$$y(t) = v_0 \sin \alpha \cdot t - g \frac{t^2}{2}, \quad (2)$$

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad (3)$$

$$v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt. \quad (4)$$

Рассмотрим первое событие — ракета в высшей точке траектории, которое определяется моментом времени t_1 и высотой $h =$

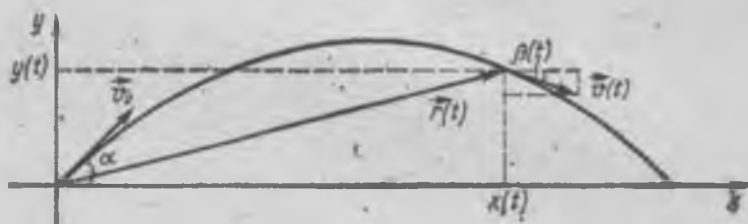


Рис. 7.1

$= y(t_1)$. Подставляя сюда значение функции $y(t_1)$ из (2), получим уравнение

$$h = v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - g \frac{t_1^2}{2}. \quad (5)$$

Поскольку в этой точке траектории проекция скорости на вертикаль равна нулю: $v_y(t_1) = 0$, то, подставляя из (4) значение функции $v_y(t_1)$, получим второе уравнение

$$v_0 \sin \alpha - gt_1 = 0. \quad (6)$$

Из (5) и (6) находим

$$t_1 = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad h = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Найдем теперь дальность полета s . Эта величина связана со вторым событием — падением ракеты на Землю в момент времени t_2 , т. е. $s = x(t_2)$. Учитывая (1), находим уравнение

$$s = v_0 \cos \alpha \cdot t_2. \quad (7)$$

Поскольку $y(t_2) = 0$, то, подставляя сюда значение функции $y(t_2)$ из (2), получим

$$v_0 \sin \alpha \cdot t_2 - g \frac{t_2^2}{2} = 0. \quad (8)$$

Система уравнений (7), (8) имеет решение

$$t_2 = 2 \frac{v_0 \sin \alpha}{g}, \quad s = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}.$$

Заметим, что $t_2 = 2t_1$, т. е. время подъема ракеты равно времени спуска. Зависимость дальности от угла α построена на рис. 7.2а. Как видно, при заданной скорости дальность полета в зависимости от угла α принимает значения от нуля до v_0^2/g . При этом двум различным углам α , симметрично расположенным относительно $\alpha = \pi/4$, соответствуют две различные траектории с одинаковой дальностью полета: настильная (при $\alpha = \alpha_1$) и навесная (при

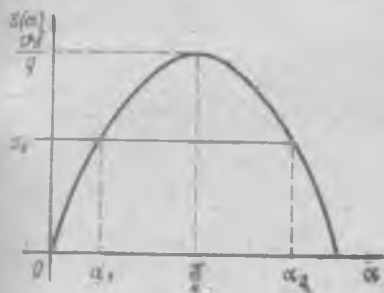


Рис. 7.2а

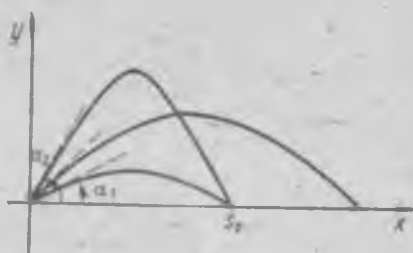


Рис. 7.2б

$\alpha = \alpha_2$). Дальность полета максимальна при старте под углом $\alpha = \pi/4$. Эти траектории изображены на рис. 7.2б.

Произведем численные оценки, полагая $v_0 = 1$ км/с, $\alpha = \pi/4$. В этом случае высота подъема $h = 25,5$ км, дальность $s = 102$ км, полное время полета $t_2 = 2$ мин 24 с.

Отметим, что формулы (7.4)—(7.6) могут быть использованы для решения задач о движении тел только в том случае, если на протяжении всей траектории можно пренебречь кривизной поверхности Земли. Легко видеть (нарисовав дугу большого круга Земли), что это условие сводится к требованию $v_0^2/g \ll R$, где R — радиус Земли. Следовательно, скорость $v_0 \ll \sqrt{gR} = 7,9$ км/с, т. е. начальная скорость должна быть меньше первой космической скорости (см. § 14).

ЗАДАЧА 7.2. Пикирующий самолет сбрасывает бомбу с высоты H и поражает цель, удаляющуюся по земле со скоростью v_2 . На каком расстоянии s по горизонтали от цели была сброшена бомба, если в этот момент времени скорость самолета v_1 направлена под углом α к горизонту?

Решение. Выберем координатные оси таким образом, чтобы в момент бросания бомбы $t = 0$ цель находилась по горизонтали

на расстоянии s от начала координат, а самолет — на высоте H . Требуется определить расстояние s (рис. 7.3).

Начальная скорость бомбы совпадает со скоростью самолета. Ее горизонтальная и вертикальная составляющие равны соответ-

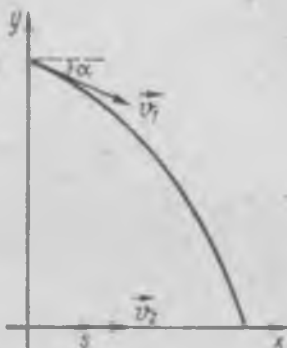


Рис. 7.3

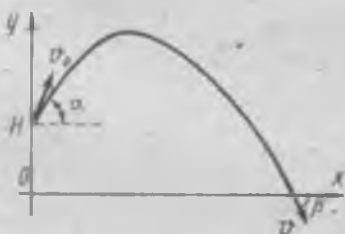


Рис. 7.4

ственно $v_1 \cos \alpha$ и $-v_1 \sin \alpha$. Закон движения бомбы в поле тяжести определяется функциями

$$x_1(t) = v_1 \cos \alpha \cdot t, \quad (1)$$

$$y_1(t) = H - v_1 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2. \quad (2)$$

Закон движения цели в выбранной системе координат:

$$x_2(t) = s + v_2 t, \quad (3)$$

$$y_2(t) = 0. \quad (4)$$

В момент T поражения цели x - и y -координаты цели и бомбы совпадают, т. е.

$$x_1(T) = x_2(T), \quad y_1(T) = y_2(T).$$

Подставляя в эти соотношения значения функций $x_1(t)$, $x_2(t)$, $y_1(t)$, $y_2(t)$ в момент времени T , получим систему двух уравнений с двумя неизвестными T и s :

$$v_1 \cos \alpha \cdot T = s + v_2 T,$$

$$H - v_1 \sin \alpha \cdot T - \frac{g}{2} T^2 = 0.$$

Разрешая эту систему, находим искомое расстояние

$$s = \frac{1}{g} (v_1 \cos \alpha - v_2) (\sqrt{v_1^2 \sin^2 \alpha + 2gH} - v_1 \sin \alpha).$$

ЗАДАЧА 7.3. Тело бросают с высоты $H=4$ м под углом $\alpha=\pi/4$ к горизонту так, что к поверхности Земли оно подлетает под углом $\beta=\pi/3$. Какое расстояние по горизонтали пролетит тело?

Решение. Выберем оси x и y , как показано на рис. 7.4. Начальное положение тела определяется координатами $x_0=0$, $y_0=H$; составляющие начальной скорости по осям x и y равны соответственно $v_0 \cos \alpha$ и $v_0 \sin \alpha$. Следовательно, законы движения по осям x и y имеют вид

$$x(t) = v_0 \cos \alpha \cdot t, \quad y(t) = H + v_0 \sin \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2.$$

Зависимость проекций скорости на оси координат от времени определяется формулами

$$v_x(t) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t) = v_0 \sin \alpha - gt.$$

Пусть t_1 — момент падения тела на Землю. Искомое расстояние полета тела по горизонтали

$$D = x(t_1), \quad D = v_0 \cos \alpha \cdot t_1. \quad (1)$$

В этот момент времени $y(t_1) = 0$, т. е.

$$H + v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 0, \quad (2)$$

а значения проекции скорости соответственно равны

$$v_x(t_1) = v_0 \cos \alpha, \quad v_y(t_1) = v_0 \sin \alpha - gt_1 < 0.$$

Далее по условию задачи в момент $t=t_1$

$$v_x(t_1) = v \cos \beta, \quad v_y(t_1) = -v \sin \beta, \quad (3)$$

где v — величина скорости в момент $t=t_1$. Приравнивая отношения $v_y(t_1)$ к $v_x(t_1)$ из (3) и (2), получим

$$-\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \alpha - \frac{gt_1}{v_0 \cos \alpha}. \quad (4)$$

Система уравнений (1), (2), (4) содержит 3 неизвестные величины D , v_0 и t_1 . Подставляя из (4)

$$t_1 = (\operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg} \alpha) \frac{v_0}{g} \cos \alpha \quad (5)$$

в (2), найдем

$$v_0^2 \cos^3 \alpha = \frac{2Hg}{\operatorname{tg}^3 \beta - \operatorname{tg}^3 \alpha}. \quad (6)$$

Теперь из (1), (5) и (6) получим

$$D = \frac{2H}{\lg \beta - \lg \alpha}$$

Ответ: $D = 11,42$ м.

ЗАДАЧА. 7.4. Спортсмен толкает ядро. Под каким углом к горизонту должна быть направлена скорость, чтобы ядро упало как можно дальше? Начальная скорость ядра $v_0 = 13,5$ м/с, высота точки бросания ядра $H = 2$ м.

Решение. Закон движения ядра приведен в предыдущей задаче. В момент t_1 падения ядра на Землю $y(t_1) = 0$, а дальность $D = x(t_1)$,

$$H + v_0 \sin \alpha \cdot t_1 - \frac{g}{2} t_1^2 = 0, \quad (1)$$

$$D = v_0 \cos \alpha \cdot t_1. \quad (2)$$

Подставляя t_1 из (1) в (2), находим

$$D(\alpha) = \frac{v_0 \cos \alpha}{g} (v_0 \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}). \quad (3)$$

Нам необходимо найти значение α_0 , при котором функция $D(\alpha)$ достигает максимума. Для этого надо решить уравнение $dD/d\alpha = 0$, где $dD/d\alpha = D'$ — производная функции D . Проще, однако, воспользоваться следующим приемом. Изобразим примерный вид графика функции $D(\alpha)$ (рис. 7.5) и найдем значения углов α_1 и

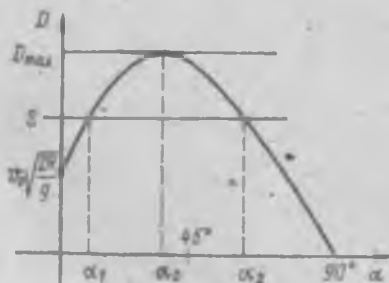


Рис. 7.5

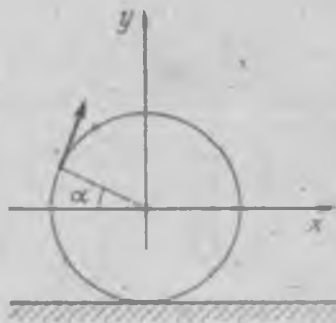


Рис. 7.6

α_2 , при которых дальность равна s . Подставляя t_1 из (2) в (1) и учитывая, что $\cos^{-2} \alpha = 1 + \lg^2 \alpha$, получим уравнение

$$\lg^2 \alpha - \frac{2v_0^2}{gs} \lg \alpha + 1 - \frac{2v_0^2 H}{gs^2} = 0. \quad (4)$$

Следовательно,

$$\operatorname{tg} \alpha_{1,2} = \frac{v_0^2}{g^2} \left(1 \mp \sqrt{1 - \left(\frac{g^2}{v_0^2} \right)^2 + \frac{2gH}{v_0^2}} \right). \quad (5)$$

При $s = D_{\max}$ уравнение (4) должно иметь один корень, определяющий значение искомого угла α_0 . Следовательно,

$$1 - \left(\frac{gD_{\max}}{v_0^2} \right)^2 + \frac{2gH}{v_0^2} = 0, \quad (6)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{v_0^2}{gD_{\max}}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) находим

$$D_{\max} = \frac{v_0}{g} \sqrt{v_0^2 + 2gH}, \quad (8)$$

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2 + 2gH}}. \quad (9)$$

При $H=0$ получаем уже известный результат задачи 7.1. На основе формул (8) и (9) можно давать вполне обоснованные тренерские указания спортсмену. Для достижения максимальной дальности точка бросания ядра должна быть расположена как можно выше, угол бросания определяется формулой (9). Подставляя числовые данные, находим $\alpha_0 = 42^\circ$, $D_{\max} = 20$ м.

Используем формулу (3) для анализа прыжков в длину с разбега [1]. В качестве горизонтальной составляющей начальной скорости возьмем максимальную скорость спринтера: $v_0 \cos \alpha = 10,5$ м/с. Вертикальную составляющую скорости найдем исходя из того, что, прыгая с места вертикально, человек поднимает центр тяжести на высоту 0,6 м: $v_0 \sin \alpha = \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 0,6} = 4,85$ м/с. Следовательно, $\operatorname{tg} \alpha = 0,46$, $\alpha = 25^\circ$. Величина $H = 0,6$ м равна расстоянию по вертикали между положениями центра тяжести на старте и при приземлении. Таким образом, приращение трех параметров: компонент начальной скорости Δv_x , Δv_y и разности уровней ΔH — привело бы к увеличению дальности на величину

$$\Delta D = \frac{D(\alpha)}{v_0 \cos \alpha} \Delta v_x + \frac{1}{\sqrt{v_0^2 \sin^2 \alpha + 2gH}} (D(\alpha) \Delta v_y + v_0 \cos \alpha \Delta H).$$

Из этого выражения следует вывод, что после достижения прыгуном высоких спринтерских качеств основной путь к увеличению дальности связан с отработкой техники по увеличению параметров Δv_y и ΔH .

ЗАДАЧА 7.5. Машина движется со скоростью u по дороге, покрытой гравием. На какую максимальную высоту могут подняться мелкие камешки, оторвавшиеся от покрышки колеса радиусом R ?

Решение. Эту задачу удобно решить в системе отсчета, движущейся со скоростью u (см. § 5). На рис. 7.6 изображены оси координат, начальные положение $(-R \cos \alpha, R \sin \alpha)$ и скорость $(u \sin \alpha, u \cos \alpha)$ камешка, оторвавшегося от покрышки. В этой системе координат

$$x(t) = -R \cos \alpha + u \sin \alpha \cdot t, \quad (1)$$

$$y(t) = R \sin \alpha + u \cos \alpha \cdot t - \frac{g}{2} t^2, \quad (2)$$

$$v_x(t) = u \sin \alpha, \quad (3)$$

$$v_y(t) = u \cos \alpha - gt. \quad (4)$$

Пусть t_1 — время подъема камешка до наивысшей точки траектории. В этот момент времени $v_y(t_1) = 0$. Учитывая (4), получим уравнение $u \cos \alpha - gt_1 = 0$, из которого находим $t_1 = u \cos \alpha / g$. Высота подъема камешка

$$h = y(t_1) = R \sin \alpha + \frac{u^2}{2g} \cos^2 \alpha. \quad (5)$$

Теперь наша задача, рассматривая $h(\alpha)$ как функцию угла α , найти ее максимальное значение. С этой целью представим $h(\alpha)$ в виде

$$h(\alpha) = \frac{u^2}{2g} + \frac{gR^2}{2u^2} - \frac{u^2}{2g} \left(\sin \alpha - \frac{gR}{u^2} \right)^2. \quad (6)$$

Заметим предварительно, что из неравенства $x + x^{-1} \geq 2$, $x > 0$, следует

$$\frac{u^2}{2g} + \frac{gR^2}{2u^2} = \frac{R}{2} \left(\frac{u^2}{gR} + \frac{gR}{u^2} \right) \geq R.$$

Знаку равенства соответствует условие $u = \sqrt{gR}$.

1. Пусть $u \geq \sqrt{gR}$. В этом случае функция $h(\alpha)$ достигает максимального значения

$$H = h(\alpha_0) = \frac{u^2}{2g} + \frac{gR^2}{2u^2} \geq R$$

при $\sin \alpha_0 = gR/u^2$.

2. Предположим теперь, что $u < \sqrt{gR}$. Тогда $h(\alpha) < h(\pi/2) = R$.

§ 8. ПЕРВЫЙ ЗАКОН НЬЮТОНА

Практическая деятельность людей привела к необходимости понять и объяснить сущность наблюдаемых явлений, установить связь между разнородными на первый взгляд фактами. Великие ученые и мыслители древности были первыми создателями философских учений, теоретических схем и моделей реальных процессов. Правда, мы знаем, что во многом они заблуждались. Но таков естественный путь познания природы.

Огромное влияние на развитие науки и философии оказал один из величайших мыслителей древности Аристотель (384—322 гг. до н. э.). Его подход к объяснению явлений природы был преимущественно дедуктивным, не связанным с обращением к эксперименту.

Повседневный опыт создает впечатление, что движение тела с постоянной скоростью требует определенных усилий. В механике Аристотеля этот вывод получает теоретическое обоснование. Он формулирует принцип: «природа боится пустоты», т. е. пространство заполнено материей и оказывает сопротивление движению тел. Поэтому для движения тела с постоянной скоростью необходимо приложить силу. Отсюда вывод: прекращается действие сил — прекращается движение. Способность тел двигаться по инерции не была известна Аристотелю. Авторитет Аристотеля в древнем мире и в средние века был настолько высок, что почти две тысячи лет его механика не вызвала сомнений. В XVI в. началось интенсивное развитие естественных наук. Эпоха великих географических открытий привела к быстрому развитию оптики, астрономии и механики. Однако нужны были значительные усилия, чтобы преодолеть сложившиеся веками догмы и взглянуть на проблему движения по-новому.

Первый шаг в этом направлении сделал Галилео Галилей (1564—1642). Положив в основу своих выводов экспериментальные факты, Галилей разрушил систему Аристотеля и заложил фундамент научного подхода к изучению физических явлений. Соединение принципов научного мышления и опыта сделало Галилея «отцом» современной физики. Галилей экспериментально показал, что под действием постоянной силы свободное тело движется не равномерно, а равноускоренно: тело «сопротивляется» ускорению, а не движению с постоянной скоростью. Он утверждал, что «любая скорость, сообщенная телу, устойчиво сохраняется до тех пор, пока нет никаких причин к возникновению торможения или ускорения» [2—4].

Первым результатом опытов Галилея было понимание того, что важно не движение само по себе, а изменения в движении — ускорение. Придя к этому выводу, Галилей начал изучать паде-

ние тел. Здесь он столкнулся с трудной задачей измерения времени. Он сумел «замедлить» процесс падения, заставив тело скользить по наклонной плоскости, а взвешивая воду, вытекавшую из резервуара за время движения тел, он смог оценить короткие интервалы времени с точностью до 0,1 с [3, 4]. Изучая проблему падения тел, Галилей обнаружил, что масса падающего тела почти не влияет на его движение: более крупные предметы падают немного быстрее, чем мелкие. Это различие он понял как вторичный эффект, который следует приписать силе сопротивления со стороны воздуха. Факт падения тел с почти одинаковой скоростью оказался важнее небольших различий в движении. Результаты опытов, проведенных несовершенными методами, путем логических рассуждений были обобщены в 1632 г. на модель движения в отсутствие трения и в пустоте. Галилей открыл один из самых удивительных законов природы. Он установил, что ускорение падающих тел не зависит от их массы.

Критикой механики Аристотеля Галилей не раз восстанавливал против себя университетские круги. Научная смелость Галилея представится еще более значительной, если учесть, что его взгляды противоречили не только здравому смыслу современников, но и догматам церкви, имевшей в качестве основного аргумента суд инквизиции.

Позднее И. Ньютон, родившийся в год смерти Галилея — в 1642 г., придал ясность выводам Галилея, сформулировав закон инерции: если на тело не действуют другие тела, то оно движется прямолинейно с постоянной скоростью или остается в покое. Под телом в этой формулировке понимается материальная точка. Таким образом, в законе инерции речь идет о свободном, т. е. не подвергающемся внешним воздействиям, теле.

Почему о первом законе Ньютона говорят как о законе инерции? (*Inertia* (лат.) — бездеятельность.) Под инерцией следует понимать свойство тел сохранять свою скорость по величине и направлению или состояние покоя при отсутствии воздействия со стороны других тел. В силу этого под воздействием других тел данное тело, «стремясь» сохранить прежнее значение скорости, изменяет ее не сразу, а постепенно.

В повседневной практике закон инерции непосредственно не проявляется. Ведь по закону инерции тело, которому сообщили начальную скорость, должно двигаться с этой же скоростью прямолинейно без конца. Однако из наблюдений нам известно, что любое тело, получив толчок, через некоторое время остановится. Причину этого замедления следует приписать трению о поверхности и воздух. Улучшая условия опыта, уменьшая силы трения, можно приблизиться к идеальным условиям, необходимым для наблюдения закона инерции.

Следует сделать еще одно замечание о первом законе Ньютона. Мы уже говорили в § 2, что для изучения движения тел мы выбираем определенную систему отсчета. Системы отсчета, в которых выполняется закон инерции, называют инерциальными. Пусть в некоторой инерциальной системе тело движется равномерно. Если наряду с имеющейся у нас инерциальной системой отсчета K мы введем другую систему K' , движущуюся относительно первой равномерно и прямолинейно, то, с точки зрения наблюдателя, находящегося в системе K' , это тело согласно формуле (5.5) также будет двигаться равномерно. Наблюдатели, изучающие движение тела в двух инерциальных системах, придут к одной точке зрения: сумма сил, действующих на тело, равна нулю. Этот и другие примеры показывают, что во всех инерциальных системах законы механики одинаковы. Другими словами, все инерциальные системы равноправны. Это утверждение составляет содержание принципа относительности Галилея.

Вследствие принципа относительности мы не можем говорить об абсолютном прямолинейном равномерном движении. Можно наблюдать только относительное прямолинейное равномерное движение. Ненаблюдаемость абсолютного движения материи как общий закон природы была осознана только в XX в.

Весьма важно, что мы всегда можем найти положение тела в одной системе, если знаем его положение в другой системе отсчета. Из рис. 5.1 видно, что координата некоторой точки вагона x' в системе K' и координата x той же точки в системе K связаны преобразованием Галилея

$$x = ut + x', \quad y = y', \quad z = z', \quad t = t'.$$

Последнее равенство означает, что время есть нечто абсолютное и течет одинаково для двух наблюдателей в системах K и K' .

Система отсчета, движущаяся ускоренно относительно инерциальной системы, называется неинерциальной (см. § Д9). В этих системах закон инерции не имеет места. Если в качестве системы отсчета взять далекие «неподвижные» звезды, то в этой системе Земля не является инерциальной системой, поскольку движется по эллипсу вокруг Солнца со скоростью ~ 30 км/с с отличным от нуля ускорением. Кроме того, неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, возникает в связи с суточным вращением.

Как случилось, что Галилей на движущейся Земле открыл принцип, строго справедливый только для инерциальных систем? Нетрудно видеть, что неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей, чрезвычайно мала, поскольку в течение малого времени наблюдения Земля движется по дуге эллипса, которую с большой степенью точности можно считать отрезком прямой линии. Медленное суточное вращение Земли также было несущественно в опытах Галилея.

§ 9. ВТОРОЙ И ТРЕТИЙ ЗАКОНЫ НЬЮТОНА

Величайший английский ученый Исаак Ньютон (1642—1727) оставил огромное научное наследие в разных областях науки. Его работы явились важнейшими этапами в развитии оптики, астрономии, математики и механики. Самым главным достижением Ньютона было создание основ механики, анализа и открытие закона всемирного тяготения. Исключительный авторитет приобрел Ньютон благодаря выдающемуся труду «Математические основы натуральной философии», вышедшему триста лет назад в 1687 г. Эта работа превратила надолго механику в эталон науки. Только в последнее столетие стало ясно, что классические понятия имеют ограниченную область применимости (см. § 55, 58). На памятнике Ньютону в Вестминстерском аббатстве есть такие строки: «...пусть смертные радуются, что существовало такое украшение рода человеческого» [3].

1. Понятие силы. В § 8 мы говорили, что проверить закон инерции очень трудно. Однако можно проверить обратное, а именно: у всех движений обнаруживается одна общая черта — изменение скорости тела, т. е. появление ускорения обусловлено взаимодействием этого тела с другим телом. Если тела удалить на достаточно большое расстояние, то ускорение тела обращается в нуль. Если данное тело m_1 взаимодействует с несколькими телами, то, как показывает опыт, ускорение a_{1n} , сообщаемое телу m_1 телом m_n , не зависит от присутствия других тел. При этом ускорение a_1 тела m_1 равно сумме ускорений:

$$a_1 = a_{12} + a_{13} + \dots$$

Для количественной меры взаимодействия тела m_1 с другими телами вводят понятие силы $\vec{F}_1$, действующей на тело m_1 со стороны других тел. Сила $\vec{F}_1$ является вектором, параллельным ускорению тела a_1 и равным векторной сумме сил $\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \dots$, действующих на тело m_1 со стороны тел m_n .

Если ускорение тела $\vec{a} = 0$, то результирующая сила также равна нулю. Это свойство можно использовать для изменения сил путем сравнения их с силой-эталоном. Пусть в результате действия силы-эталоны $\vec{F}^{et}$ и некоторого тела m_2 ускорение тела равно нулю. Тогда $\vec{F}^{et} + \vec{F}_{12} = 0$ и, следовательно, $\vec{F}_{12} = -\vec{F}^{et}$.

Итак, сила является векторной величиной, характеризующей взаимодействие тел. Все силы, кроме сил инерции (см. § Д9), с которыми нам придется встречаться, будут удовлетворять этому определению. Поэтому для того, чтобы перечислить все силы, действующие на данное тело, необходимо перечислить все тела,

с которыми оно взаимодействует. Заметим, что описание взаимодействий тел с помощью понятия силы является приближенным — в механике считается, что силы, действующие на тело в данный момент времени, зависят от расположения тел в тот же самый момент времени.

2.. Силы в механике. Природа сил может быть установлена из физических законов, которые лежат в основе взаимодействия между атомами, однако эти вопросы выходят за пределы школьного курса. Мы ограничимся лишь рассмотрением вопроса, какие силы возникают в том или ином случае.

Все силы, которые встречаются в механике, условно можно разделить на два класса: 1) силы, действующие между телами на расстоянии, 2) силы, возникающие при непосредственном соприкосновении тел.

Сила тяжести. Рассмотрим силы первого типа. Если на тело в каждой точке пространства действует со стороны других тел определенная сила, то всю эту совокупность сил называют силовым полем. В общем случае силы меняются от одной точки пространства к другой и могут зависеть от времени.

Однородным постоянным полем называется силовое поле, во всех точках которого величина и направление силы одинаковы. Таково поле притяжения Земли вблизи поверхности, т. е. на расстояниях, малых по сравнению с ее радиусом. Сила притяжения, действующая на тело со стороны Земли, $\vec{F} = m\vec{g}$, где $\vec{g}$ — постоянный вектор, называемый ускорением свободного падения, m — масса тела.

Рассмотрим теперь взаимодействия второго типа — силы упругости и силы трения.

Силы упругости или силы реакции. Тела, с которыми соприкасается данное тело при движении, называются связями. Обычно такими связями служат различные поверхности, нити, стержни и т. д. Связи не только накладывают ограничения на движение тела, но и действуют на него с некоторыми силами. Эти силы приложены в точках соприкосновения тел и называются силами реакции. Силы реакции заранее не известны, они зависят от характера связей и действующих активных сил и могут быть определены лишь в ходе решения задачи.

Пусть тело A движется по гладкой поверхности тела B (рис. 9.1). Опыт показывает, что на тело A действует сила со стороны тела B . Эта сила возникает при непосредственном соприкосновении вследствие деформации тел (см. § 24). Реальные тела при взаимодействии деформируются, т. е. меняют свою форму и объем, причем величина небольшой деформации пропорциональна приложенной силе. Хотя деформации твердых тел, с которыми мы имеем дело в механике, очень малы, тем не менее они приводят к возникновению сил упругости, стремящихся вернуть тела

в первоначальное состояние. Сила, действующая на тело A со стороны тела B , называется силой упругости $\vec{T}$. Силу, действующую на тело B со стороны тела A , называют силой нормального давления $\vec{N}$. Опыт показывает, что $\vec{N} = -\vec{T}$. Сила упругости $\vec{T}$ направ-

лена по нормали к поверхности тела B в точке их соприкосновения. Силы упругости и нормального давления не зависят от свойств поверхностей соприкасающихся тел.

Сила трения скольжения. В общем случае оба тела могут двигаться со скоростями $\vec{v}_A$ и $\vec{v}_B$. Заметим предварительно, что в системе покоя тела B скорость тела A равна $\vec{v}_A - \vec{v}_B$ (см. § 5).

В результате взаимодействия неровностей на поверхностях

тел появляются силы трения скольжения. Одна из них, действующая на тело A со стороны тела B , направлена противоположно

скорости тела A относительно тела B : $\vec{F}_A^{\text{тр}} \sim -(\vec{v}_A - \vec{v}_B)$. Другая, действующая на тело B со стороны тела A , также пропорциональна

скорости тела B относительно тела A : $\vec{F}_B^{\text{тр}} \sim -(\vec{v}_B - \vec{v}_A)$ (рис. 9.2). Причины возникновения сил трения одинаковы. Однако

если $v_A < v_B$, то сила трения $\vec{F}_A^{\text{тр}}$ параллельна «абсолютной» скорости тела A . Сила трения скольжения зависит от нормального

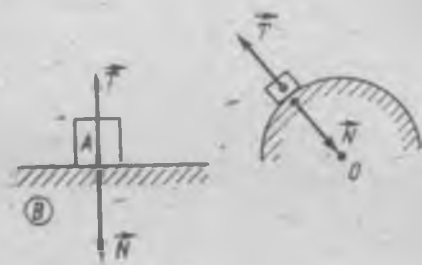


Рис. 9.1

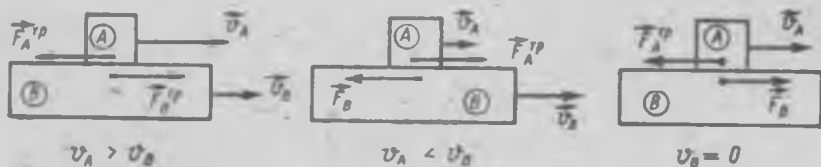


Рис. 9.2

давления, состояния соприкасающихся поверхностей и направлена по касательной к ним. Если обозначить величину силы нормального давления через N , то для силы трения скольжения справедлива простая формула

$$\vec{F}_A^{\text{тр}} = -kN\vec{e},$$

где $\vec{e}$ — единичный вектор, параллельный $\vec{v}_A - \vec{v}_B$; k — коэффи-

коэффициент трения, зависящий от степени обработки соприкасающихся поверхностей. Например, при скольжении деревянных полозьев по льду $k=0,035$, а для стальных — $k=0,02 \div 0,03$. Если ось x направить по вектору e ,

$$F_{\lambda x}^{\text{тр}} = -kN.$$

В действительности, как показывает опыт, сила трения зависит от относительной скорости соприкасающихся тел. Однако это отличие существенно непосредственно после того, как тела начнут двигаться относительно друг друга. В рассматриваемых нами задачах можно считать, что $F_{\lambda x}^{\text{тр}} = -kN$. Из этого соотношения следует, что сила трения не зависит от площади соприкасающихся поверхностей. Например, сила трения, действующая на кирпич, одинакова независимо от того, какой гранью он прилегает к поверхности. При всей видимой простоте выражения для силы трения в настоящее время не существует полной физической теории, объясняющей природу трения.

Трение — неизбежное следствие молекулярной структуры твердых тел и обусловлено переходом кинетической энергии в тепло при последовательном образовании и разрыве молекулярных связей в зонах микроконтактов. Возникающие при этом на молекулярно-атомном уровне многочисленные явления существенно затрудняют создание теории трения [5].

3. Второй закон Ньютона. На основании ряда опытов можно установить, что отношение величины силы, действующей на тело, к величине ускорения, вызываемого этой силой, является величиной постоянной для данного тела. Эту постоянную m называют инертной массой, или просто массой. Этот вывод перестает быть верным при движении тел со скоростями, близкими к скорости света. Второй закон Ньютона устанавливает связь между массой, ускорением тела и приложенной к нему силой:

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (9.1)$$

Из этого соотношения видно, что направление вектора ускорения совпадает с направлением силы. Скорость при этом может быть направлена как угодно, в зависимости от того, как тело двигалось, до того как на него стала действовать сила $\vec{F}$.

Если на тело действуют несколько сил, то $\vec{F}$ является результирующей силой, т. е. векторной суммой всех сил, действующих на тело:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_N.$$

Второй закон Ньютона имеет векторный характер, а поскольку любой вектор в общем случае имеет три независимые составляющие, то, говоря об уравнении (9.1), мы на самом деле имеем в виду три уравнения:

$$ma_x = F_x, \quad ma_y = F_y, \quad ma_z = F_z, \quad (9.2)$$

где $a_x, a_y, a_z, F_x, F_y, F_z$ — составляющие векторов ускорения и силы по осям декартовых координат x, y, z (см. § 1). Если имеется несколько взаимодействующих тел, то соотношение (9.1) или (9.2) следует записать для каждого тела в отдельности. Существенным преимуществом векторной записи (9.1) является то, что формулировка второго закона Ньютона в векторной форме не зависит от выбора определенной системы координат.

При движении тела по криволинейной траектории во многих случаях более целесообразно использовать не проекции уравнения (9.1) на неподвижные оси декартовых координат (9.2), а проекции на подвижные оси (см. § 13).

В СИ единицей силы является ньютон. Сила в 1 Н сообщает телу массой 1 кг ускорение 1 м/с². Внесистемная единица силы — 1 кгс, сила, равная 1 кгс, сообщает телу массой $m=1$ кг ускорение 9,8 м/с². Следовательно, сила притяжения, действующая на тело массой 1 кг, равна 1 кгс.

4. Третий закон Ньютона. Этот закон утверждает, что для любых двух взаимодействующих тел сила $\vec{F}_{21}$, с которой первое тело действует на второе, равна по величине и противоположна по направлению силе $\vec{F}_{12}$, с которой второе тело действует на первое:

$$\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}. \quad (9.3)$$

Необходимо помнить, что сила $\vec{F}_{21}$ приложена ко второму телу, а сила $\vec{F}_{12}$ приложена к первому телу, поэтому они не уравновешивают друг друга. Таким образом, в механике все силы возникают парами. По этой причине со стороны тела A (см. рис. 9.1) на тело B действует сила $\vec{N} = -\vec{T}$. Соотношения (9.1) или (9.2) называют уравнениями движения. Они позволяют решать задачи двух типов.

а) Прямая задача. Если заданы внешние силы и начальные условия, т. е. положение и скорость тела в начальный момент времени, то уравнения движения позволяют определить ускорение и найти характер и закон движения. Эта программа уже реализована в § 6 для тела, на которое действует постоянная сила $\vec{F}_0$. Действительно, подставляя $\vec{F}_0$ в (9.1), находим, что ускорение равно постоянному вектору: $\vec{a}(t) = \vec{a}_0, \vec{a}_0 = \vec{F}/m$. Следовательно, второй

закон Ньютона приводит к простому дифференциальному уравнению (6.2). Его решение — функция (6.4) — удовлетворяет начальным условиям $v(0) = v_0$. Следующий шаг привел к определению зависимости координат тела от времени.

б) Обратная задача. Известны начальные условия и закон движения. Требуется определить силу, действующую на тело.

Для успешного применения второго закона Ньютона надо правильно расставить все силы, приложенные к телу. Для этого необходимо перечислить все тела, с которыми взаимодействует данное тело.

Еще раз напомним, что при решении конкретной задачи удачный выбор системы координат играет важную роль, облегчая ее решение.

Рассмотрим несколько задач, предполагая, что трение скольжения настолько мало, что им можно пренебречь. В этом случае поверхности тел называют абсолютно гладкими.

ЗАДАЧА. 9.1. Два тела массой m_1 и m_2 движутся по гладкой горизонтальной плоскости под действием силы $\vec{F}$, приложенной к телу m_1 (рис. 9.3). Определить силы, действующие на тело массой m_2 .

Решение. На первое тело действуют сила $\vec{F}$, сила притяжения $m_1\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_1$ со стороны плоскости и сила реакции $\vec{T}_1$ со стороны второго тела. На второе — сила притяжения $m_2\vec{g}$, сила реакции $\vec{N}_2$ со стороны плоскости и сила реакции $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$ со стороны первого тела. Поскольку ускорения тел одинаковы, то второй закон Ньютона можно записать для каждого тела в виде

$$m_1\vec{a} = \vec{F} + m_1\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1, \quad (1)$$

$$m_2\vec{a} = \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + m_2\vec{g}. \quad (2)$$

Выбирая положительное направление осей декартовых координат по направлению движения и вертикально вверх, из (1), (2) получим

$$m_1a = F - T, \quad m_1 \cdot 0 = N_1 - m_1g,$$

$$m_2a = T, \quad m_2 \cdot 0 = N_2 - m_2g.$$

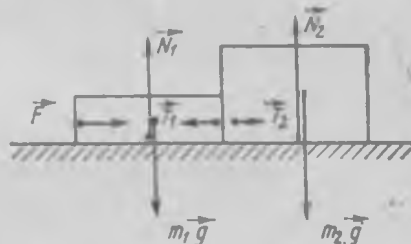


Рис. 9.3

Поскольку $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$, то

$$N_1 = m_1 g, \quad N_2 = m_2 g, \quad T = m_2 a = m_2 (m_1 + m_2)^{-1} F.$$

Сделаем два замечания: 1. Силы реакции заранее неизвестны. Они найдены в результате решения системы четырех уравнений (1), (2). 2. Сила $\vec{F}$ не «передается» телу m_2 .

ПРИМЕР 9.2. Тело массой m лежит неподвижно на столе (рис. 9.4а). На тело действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции опоры $\vec{N}$. Согласно второму закону Ньютона

$$m \cdot 0 = m\vec{g} + \vec{N}.$$

Следовательно, сила реакции $\vec{N} = -m\vec{g}$, а ее величина $N = mg$. Теперь приложим к телу силу $\vec{F}$, направленную перпендикулярно

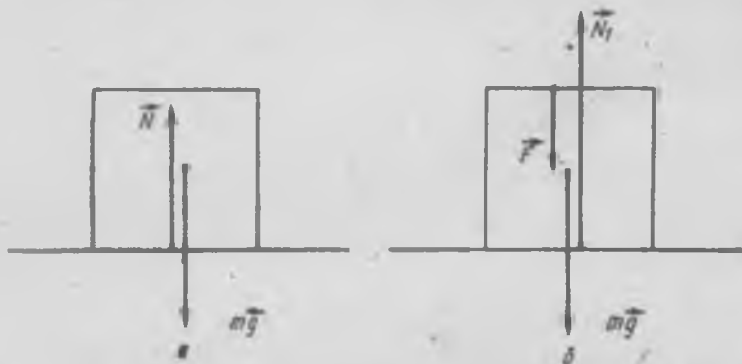


Рис. 9.4

поверхности рис. 9.4б. В этом случае на тело действуют три силы: сила $\vec{F}$, сила реакции опоры $\vec{N}_1$ и сила тяжести $m\vec{g}$. Используя второй закон Ньютона

$$m \cdot 0 = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F},$$

находим

$$\vec{N}_1 = -m\vec{g} - \vec{F}.$$

Величина силы реакции $N_1 = mg + F$ возросла. Этот простой пример приведен с целью показать, что силы не передаются, вопреки широко распространенному заблуждению. Точка приложения силы $\vec{F}$ фиксирована на верхней грани кубика. Сила реакции заранее

неизвестна и определяется только после решения уравнений, следующих из второго закона Ньютона.

ПРИМЕР 9.3. Динамометр находится на гладкой поверхности стола. К одному его концу приложена сила $F_1=8\text{ Н}$, к другому — сила $F_2=5\text{ Н}$. Определить показание динамометра (рис. 9.5).

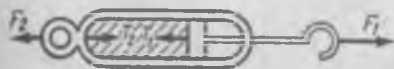


Рис. 9.5

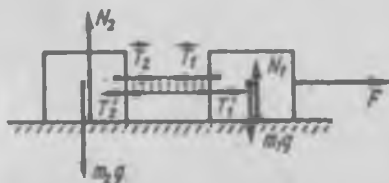


Рис. 9.6

Пружина прикреплена к обойме динамометра массой M и к крюку массой m . Массой пружины пренебрегаем (см. задачу 24.2). Со стороны пружины на обойму и крюк действуют силы $\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1$, равные по величине T . Значение T определяет показание динамометра. Согласно второму закону Ньютона

$$Ma = T - F_2,$$

$$ma = F_1 - T.$$

Следовательно, ускорение динамометра

$$a = \frac{F_1 - F_2}{M + m}.$$

Динамометр будет показывать значение

$$T = \frac{1}{2} \left[\frac{M - m}{M + m} (F_1 - F_2) + (F_1 + F_2) \right]. \quad (1)$$

Рассмотрим некоторые частные случаи:

1. $m=0$. Из (1) находим $T=F_1=8\text{ Н}$. В этом случае сумма сил, действующая на крюк массой $m=0$, равна нулю.

2. $M=m$. Из (1) следует значение $T=\frac{1}{2}(F_1+F_2)=6,5\text{ Н}$. На обойму и крюк действуют одинаковые силы по 1,5 Н, сообщая одинаковое ускорение.

3. $F_1=F_2=F_0$. Эта ситуация соответствует динамометру, прикрепленному к неподвижному или равномерно движущемуся телу. В этом случае $T=F_0$.

ЗАДАЧА 9.4. Два тела масс $m_1=10\text{ кг}$ и $m_2=20\text{ кг}$ лежат на гладкой поверхности стола. Тела соединены шнуром массой $m=1\text{ кг}$. Какую минимальную силу F надо приложить к телу

массой m_1 , чтобы шнур разорвался. Известно, что прикрепленный к неподвижной стенке шнур разрывается при действии силы $T_0 = 500$ Н.

Решение. Перечислим силы, действующие на каждое из трех тел системы (рис. 9.6). Ради наглядности тонкий шнур изображен двумя разнесенными отрезками прямых. Со стороны шнура на тело m_2 действует сила $\vec{T}_2$, а на тело m_1 — сила $\vec{T}_1$. Согласно третьему закону Ньютона на шнур действуют силы $\vec{T}_2' = -\vec{T}_2$ и $\vec{T}_1' = -\vec{T}_1$ со стороны второго и первого тела. На основании второго закона Ньютона

$$m_1 \vec{a} = \vec{F} + \vec{N}_1 + \vec{T}_1 + m_1 \vec{g}, \quad (1)$$

$$m \vec{a} = \vec{T}_1 + \vec{T}_2, \quad (2)$$

$$m_2 \vec{a} = \vec{T}_2 + \vec{N}_2 + m_2 \vec{g}. \quad (3)$$

Проектируя эти уравнения на горизонтальное направление, получим

$$m_1 a = F - T_1, \quad m a = T_1 - T_2, \quad m_2 a = T_2.$$

Здесь $T_1 = |\vec{T}_1|$, $T_2 = |\vec{T}_2|$. Обычно в подобных задачах предполагается, что масса шнура пренебрежимо мала. В этом случае в движении участвуют не три, а два тела. Полагая $m = 0$, получим $T_1 = T_2$. Если же $m \neq 0$, то величина силы T_1 должна быть больше, чем T_2 (укажите причину). Силы, действующие в каком-либо сечении шнура со стороны одной его части на другую, увеличиваются от значения

$$T_2 = \frac{m_2}{m_1 + m + m_2} F$$

на левом конце до значения

$$T_1 = \frac{m + m_2}{m_1 + m + m_2} F$$

на правом конце. Следовательно, шнур разрывается при $T_2 = T_0$, $F = F_{\min}$.

$$F_{\min} = \frac{m_1 + m + m_2}{m + m_2} T_0 = \frac{31}{21} \cdot 500 \text{ Н} = 738,1 \text{ Н}.$$

Если поменять местами тела m_1 и m_2 на рис. 9.6 (сила будет приложена к телу большей массы), то шнур разорвется при значении силы

$$F'_{\min} = \frac{m_1 + m + m_2}{m + m_1} T_0.$$

ПРИМЕР 9.5. При входе в плотные слои атмосферы спускаемый космический аппарат испытывает действие тормозящей силы. Найдем вес космонавта, предполагая, что аппарат спускается по вертикали.

Благодаря гравитационному взаимодействию на все тела действует сила притяжения Земли $m\vec{g}$. Не следует путать эту силу с силой веса. Как известно, *весом тела* называют силу, которая в положении равновесия растягивает пружину, если к ней подвесить тело. Можно также определить вес тела как силу $\vec{N}'$, с которой тело давит на подставку. Следовательно, вес тела является силой, приложенной к подставке, а не к телу.

Какие же силы действуют на тело в спускаемом аппарате? Таких сил две — сила тяжести $m\vec{g}$ и сила упругости $\vec{N}$ (рис. 9.7а).

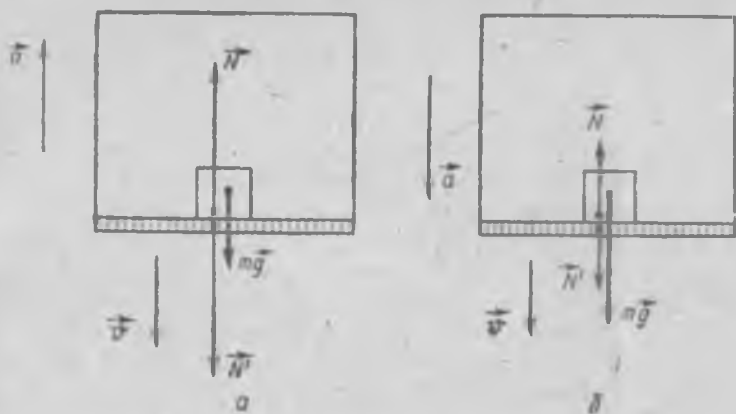


Рис. 9.7

Согласно третьему закону Ньютона сила веса $\vec{N}' = -\vec{N}$ приложена к плоскости опоры. Согласно (9.1)

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}. \quad (1)$$

При торможении ускорение $\vec{a}$ направлено в сторону, противоположную направлению скорости $\vec{v}$. Из (1) следует

$$m\vec{a} = \vec{N} - m\vec{g}.$$

Поскольку $N' = N$, то сила веса космонавта $N' = m(a + g)$. Эта сила превосходит нормальный вес космонавта на величину ma . Выражение для веса можно записать в виде $N' = mg_{\text{эф}}$, где эффективное

ускорение $g_{\text{эф}} = g + a$. Человек может выдержать перегрузку в $g_{\text{эф}} = (10 \div 12)g$. В реальных условиях влияние перегрузок на организм человека зависит от того, под каким углом к горизонту движется спускаемый аппарат.

Перегрузки возникают и при выводе космического корабля на орбиту. При ускорении, равном $4g$, в направлении «голова—ноги» передвижение космонавта невозможно [6, 7].

А теперь послушаем космонавта Е. В. Хрунова: «Заметное торможение начинается с высоты меньше ста километров. Перед входом в плотные слои атмосферы отделяются орбитальный и двигательные отсеки. Все более стремительно мчимся к Земле. Замечаем, что пылинки начинают приобретать упорядоченное по направлению полета движение и опускаются на пол. Значит, появилась перегрузка, которую мы пока физически не ощущаем. Заметно уменьшается высота полета: восемьдесят, семьдесят километров... Растет перегрузка, наши тела вдавливаются в кресла. Видим, как снаружи начинают оплавляться некоторые металлические элементы антенны, указатели. Пламя все больше увеличивается: переходит в сплошной поток и закрывает весь иллюминатор. Слышен все нарастающий шум, треск, как в топке паровозного котла. Но страха и волнения нет, обо всем этом мы знали заранее.

Скорость и высота полета продолжают уменьшаться. Корабль начинает трястись, подобно телеге, катящейся по булыжной мостовой. Это значит, что мы летим в диапазоне звуковых скоростей.

Примерно на десятикилометровой высоте ощущаем сильный рывок, затем второй, более слабый. Это раскрылись тормозной, а затем основной парашюты. Стало тихо. Высота полета все уменьшается и становится менее 1000 метров. Земля совсем близко, мы приготовились к приземлению. Несильный толчок — корабль стоит на Земле» [7].

Невесомость. Рассмотрим теперь движение тела, ускорение которого параллельно вектору $\vec{g}$ (рис. 9.76). Из уравнения

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$$

находим вес тела $N' = N = m(g - a)$. Если тело вместе с кабиной находится в состоянии свободного падения ($\vec{a} = \vec{g}$), то вес тела равен нулю. Следовательно, для создания невесомости нет нужды выходить в космическое пространство за пределы сферы тяготения — тела невесомы, например, в самолете, который движется в атмосфере с выключенным двигателем в поле тяготения Земли по траектории, близкой к параболе.

Оценим время падения с высоты H . Не учитывая сопротивления атмосферы, получим $t = \sqrt{2H/g}$. При $H = 12$ км $t \sim 50$ с. Наибольшая продолжительность невесомости на самолете (около

90 с) была достигнута советским летчиком-испытателем Г. К. Мосоловым.

ЗАДАЧА 9.6. Коробка массой m_1 , в которой находится тело массой m_2 , скользит по наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтальной плоскостью. Найти силу $\vec{T}'$, с которой тело действует на переднюю стенку коробки.

Решение. Перечислим силы, действующие на коробку: $m_1\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}_1$ — сила реакции при взаимодействии с наклонной плоскостью; $\vec{N}_2'$ — сила нормального давления на дно и $\vec{T}'$ — сила давления на боковую стенку, возникшие вследствие взаимодействия с телом m_2 . Силы, действующие на тело m_2 : $m_2\vec{g}$ — сила тяжести, $\vec{N}_2$, $\vec{T}$ — силы реакции со стороны дна и стенки коробки (рис. 9.8). Согласно третьему закону Ньютона силы появляются парами, причем $\vec{N}_2 = -\vec{N}_2'$, $\vec{T} = -\vec{T}'$. Из второго закона Ньютона для тел m_1 и m_2

$$m_1\vec{a} = m_1\vec{g} + \vec{N}_2' + \vec{T}' + \vec{N}_1, \quad (1)$$

$$m_2\vec{a} = m_2\vec{g} + \vec{T} + \vec{N}_2 \quad (2)$$

получим систему уравнений

$$m_1a = m_1g \sin \alpha + T, \quad (3)$$

$$m_1 \cdot 0 = -m_1g \cos \alpha - N_2 + N_1, \quad (4)$$

$$m_2a = m_2g \sin \alpha - T, \quad (5)$$

$$m_2 \cdot 0 = -m_2g \cos \alpha + N_2. \quad (6)$$

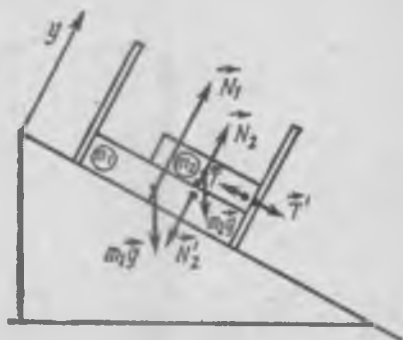


Рис. 9.8

Из (3), (5) находим $a = g \sin \alpha$. Подставляя это значение в (3), приходим к выводу, что $T = 0$, т. е. тело касается стенки, но не деформирует ее.

Найдем далее из (4), (6)

$$N_1 = (m_1 + m_2)g \cos \alpha.$$

При $\alpha \rightarrow \pi/2$ все силы реакций обращаются в ноль, — это состояние невесомости. Последнее замечание. Если сложить уравнения (1) и (2), то полученное уравнение

$$(m_1 + m_2)\vec{a} = (m_1 + m_2)\vec{g} + \vec{N}_1$$

можно понимать как уравнение движения (9.1) для единого тела массой $(m_1 + m_2)$.

ЗАДАЧА 9.7. Два груза с массами $m_1=M$ и $m_2=M$ подвешены на нерастяжимой нити, перекинутой через блок. На один из них положен перегрузок массой $m_3=m$. Определить ускорение системы, натяжение нити T , давление N перегрузка на груз M , давление P на ось блока (рис. 9.9а). Массы нити и блока считать исчезающе малыми.

Решение. Прежде всего заметим, что силы натяжения T_1 и T_2 нитей одинаковы только в том случае, когда массой нити (см. задачу 9.4) и блока можно пренебречь. При ускоренном вращении

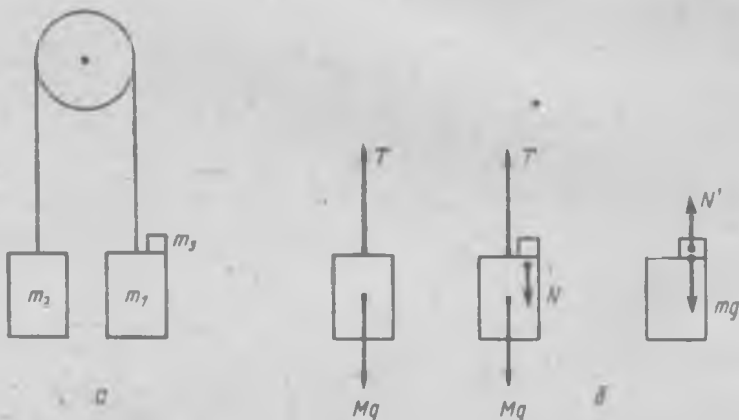


Рис. 9.9

блока момент сил $T_1R - T_2R$, действующих на него, пропорционален массе блока и угловому ускорению. Поэтому если пренебречь массой блока, то силы натяжения можно считать одинаковыми. Силы, действующие на каждое тело системы, показаны на рис. 9.9б. Поскольку нить нерастяжима, то ускорения каждого тела равны друг другу. Следовательно, второй закон Ньютона можно записать в виде:

1) для первого тела, учитывая, что $N' = N$,

$$Ma = Mg - T + N \quad (1)$$

(N — сила давления перегрузка на груз m_1);

2) для второго тела

$$Ma = T - Mg; \quad (2)$$

3) для перегрузка

$$ma = mg - N \quad (3)$$

(N — сила реакции со стороны тела m_1).

Складывая уравнения (1) — (3), получим ускорение

$$a = \frac{m}{m + 2M} g. \quad (4)$$

Затем из (2) и (4) найдем силу натяжения

$$T = \frac{2M(M + m)}{m + 2M} g, \quad (5)$$

а из (3) и (4) найдем

$$N = \frac{2mM}{m + 2M} g. \quad (6)$$

Сила давления на ось блока

$$P = 2T = \frac{4M(M + m)}{m + 2M} g. \quad (7)$$

Теперь разберем ряд задач, в которых существенную роль играет трение. С этой целью познакомимся с новым явлением — трением покоя.

5. Сила трения покоя. Сила трения между твердыми телами обладает характерной особенностью: она не обращается в нуль,

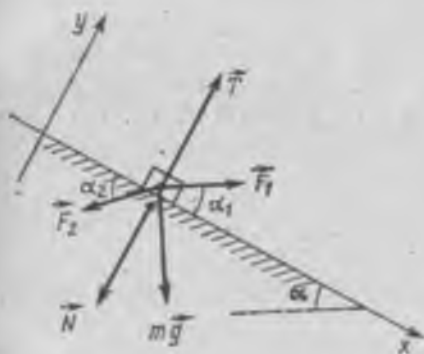


Рис. 9.10а

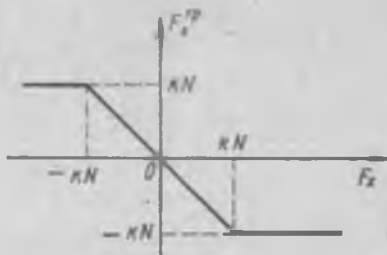


Рис. 9.10б

когда соприкасающиеся тела неподвижны, т. е. существует так называемая сила трения покоя. Величина и направление силы трения покоя определяются проекцией суммы внешних сил F_x на плоскость, касательную к поверхности, на которой находится тело. На рис. 9.10а изображено тело на наклонной плоскости

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + m\vec{g}, \quad F_x = mg \sin \alpha + F_1 \cos \alpha_1 - F_2 \cos \alpha_2,$$

$$N = T = mg \cos \alpha - F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 > 0.$$

В системе отсчета, в которой тело неподвижно, сила трения покоя всегда равна по величине и противоположна по направлению составляющей внешней силы F_x , касательной к поверхности. С ростом внешней силы растет величина силы трения покоя, пока не достигнет определенного значения, которое называют максимальным значением силы трения покоя $F_{\max}^{\text{тр}} = kN$. Как только величина составляющей F_x достигнет значения kN , начинается скольжение. При дальнейшем увеличении внешней силы сила трения остается постоянной, равной по величине kN , независимо от скорости тела. Зависимость проекции силы трения от проекции суммы внешних сил на ось x изображена на рис. 9.10б. Область значений F_x , удовлетворяющих условию $-kN < F_x < kN$, соответствует состоянию покоя. В этом случае $F_x^{\text{тр}} = -F_x$. Две области значений F_x : $F_x > kN$, $F_x < -kN$ — соответствуют движению с постоянным ускорением. При значениях $F_x = kN$, $-kN$ тело покоится или движется равномерно в зависимости от начальных условий.

Силы трения, которые возникают при движении твердого тела в жидкости или газе, называют *силами жидкого трения*. Одно из отличий жидкого трения от сухого заключается в отсутствии трения покоя. Если тело покоится относительно жидкости или газа, то со стороны последних на него может действовать только сила, перпендикулярная к поверхности соприкосновения. Вследствие отсутствия трения покоя можно сколь угодно малой силой сдвинуть предмет, плавающий в воде или в воздухе. Что же касается величины силы сопротивления, возникающей при движении тела в жидкой или газообразной среде, то она зависит от относительной скорости тела и среды, формы тела и от свойств среды. При малых скоростях сила трения прямо пропорциональна скорости, при больших — квадрату скорости:

$$\vec{F}_c = -0,65\mu S\vec{v}v, \quad (9.4)$$

где S — любая площадь тела, μ — коэффициент лобового сопротивления [8].

ПРИМЕР 9.8. Автомашина набирает скорость 100 км/ч за 10 с, двигаясь с ускорением $a \sim 2,8$ м/с². Какая сила сообщает машине ускорение? На машину как целое действуют: сила тяжести, реакции (сумма которых равна нулю), сила трения качения (которой будем пренебрегать), сила сопротивления воздуха и... изучите вначале рис. 9.11, где изображено ведущее колесо. Если оно движется без проскальзывания, то скорость точек контакта шины с шоссе равна нулю. В этой области на покрытие шоссе действует сила трения покоя $\vec{F}_n$ со стороны шины. Согласно третьему закону Ньютона на прилегающий к шоссе участок шины действует со стороны покрытия сила $\vec{F}_t$. В технике ее называют силой сопротивления скольжению или пробуксовке. Эта сила равна kN ,

где N — сила нормального давления. Поэтому для увеличения силы, разгоняющей автомашину, необходимо увеличить коэффициент трения шин. Поставьте машину на лед, и она не тронется с места.

Обычно о трении судят как о вредном явлении, на борьбу с которым по некоторым оценкам уходит от одной четверти до одной трети всей энергии, используемой человеком [5]. Значительно менее заметна полезная роль трения. Силы трения, прило-

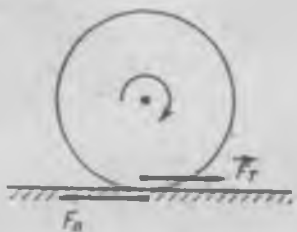


Рис. 9.11

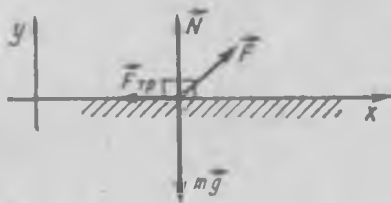


Рис. 9.12

женные в точках контакта колеса тепловоза с рельсом, подошвы ботинок с землей и т. д., совершают положительную работу. Другой пример — генерация незатухающих колебаний скрипичной струной в результате положительной работы силы трения, действующей со стороны смычка.

ЗАДАЧА 9.9. К телу массой $m=4$ кг, лежащему на горизонтальной шероховатой плоскости, приложена сила F ($F < mg$), направленная под углом α к горизонту. Коэффициент трения между телом и плоскостью $k=0,2$. а) Найти ускорение тела, если $F=1$ Н, $\alpha=30^\circ$; б) найти ускорение тела, если $F=19,6$ Н, $\alpha=30^\circ$; в) при каком наименьшем значении величины силы F движение тела будет равномерным.

Решение. На тело кроме силы F действуют силы притяжения Земли mg , сила реакции N и сила трения $F_{тр}$ (рис. 9.12). Согласно второму закону Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_{тр}.$$

Проектируя это векторное соотношение на оси координат, получим систему уравнений:

$$ma = F \cos \alpha + F_{тр}, \quad (1)$$

$$m \cdot 0 = F \sin \alpha + N - mg. \quad (2)$$

Обратим внимание на то, что реакция

$$N = mg - F \sin \alpha < mg.$$

Наиболее распространенная ошибка в решении системы (1), (2) в том, что $F_x^{\text{тр}} = -kN$ подставляют в (1), а затем находят ускорение. В действительности система (1), (2) содержит три неизвестные величины: a , N , $F_x^{\text{тр}}$. Напомним, что сила трения относится к силам реакции и заранее не определена. Недостающее уравнение представлено графиком, изображенным на рис. 9.106. Учитывая, что $F_x = F \cos \alpha$, приходим к выводу: из-за существования силы трения покоя тело будет покоиться, если проекция внешних сил на горизонтальное направление меньше силы трения скольжения, равной kN : $F \cos \alpha < kN = k(mg - F \sin \alpha)$. При этом сила трения покоя $F_x^{\text{тр}} = -F \cos \alpha$, а ускорение $a = 0$. Если же $F \cos \alpha > kN$, то тело движется с ускорением, при этом в уравнении (1) $F_x^{\text{тр}} = -kN$. Если же величина силы удовлетворяет условию $F \cos \alpha = kN$, то тело движется равномерно, а $F_x^{\text{тр}} = -kN$. Следовательно,

$$F \cos \alpha < kN, \quad a = 0, \quad F_x^{\text{тр}} = -F \cos \alpha,$$

$$F \cos \alpha = kN, \quad a = 0, \quad F_x^{\text{тр}} = -kN, \quad (3)$$

$$F \cos \alpha > kN, \quad a \neq 0, \quad F_x^{\text{тр}} = -kN.$$

Найдем теперь решение системы уравнений (1) — (3).

а) Подставляя числовые данные, находим, что $F \cos \alpha = 0,86 \text{ Н}$, $N = 38,7 \text{ Н}$, $kN = 7,74 \text{ Н}$. Следовательно, ускорение тела равно нулю.

б) Подставляя числовые данные, находим, что $F \cos \alpha = 16,66 \text{ Н}$, $N = 29,4 \text{ Н}$, $kN = 588 \text{ Н}$, т. е. $F \cos \alpha > kN$. Следовательно, уравнение (1) имеет вид

$$ma = F \cos \alpha - k(mg - F \sin \alpha),$$

$$a = (F/m)(\cos \alpha + k \sin \alpha) - kg = 2,7 \text{ м/с}^2. \quad (4)$$

в) Полагая в (4) $a = 0$, найдем величину силы, которая, будучи приложена под углом α , обеспечивает равномерность движения тела:

$$F = \frac{kmg}{\cos \alpha + k \sin \alpha}. \quad (5)$$

Подставляя числовые данные, находим $F = 8,15 \text{ Н}$.

Теперь наша задача — исследовать зависимость величины силы (5) от угла α . Проще всего это сделать, записав знаменатель

в виде одной тригонометрической функции. Вводя угол β соотношением $k = \operatorname{tg} \beta$, представим (5) в виде

$$F(\alpha) = kmg \frac{\cos \beta}{\cos(\alpha - \beta)}$$

Теперь видно, что функция $F(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = \beta$:

$$F(\beta) = kmg \cos \beta = \frac{kmg}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \beta}} = \frac{kmg}{\sqrt{1 + k^2}}.$$

Подставляя числовые значения, находим $\beta = 11^\circ$, $F(\beta) = 0,196mg$.

ЗАДАЧА 9.10. Тело находится на горизонтальной доске, движущейся с ускорением a . Коэффициент трения между телом и доской равен k . Найти зависимость силы трения от ускорения доски (рис. 9.13).

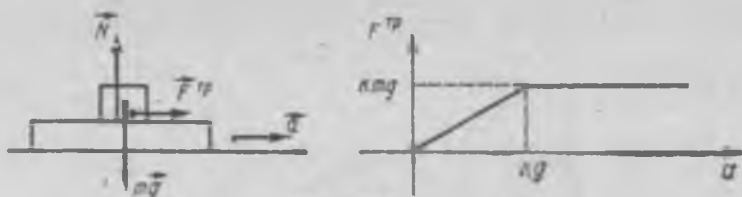


Рис. 9.13

Решение. На брусок действуют силы тяжести, упругости и сила трения, направленная в сторону движения доски. Выберем положительное направление оси x параллельным вектору ускорения доски. Из второго закона Ньютона находим

$$ma_x = F_x^{\text{тр}}, \quad 0 = N - mg,$$

где $a_x = a$ — проекция ускорения тела на ось x . Если тело неподвижно относительно доски, то $F_x^{\text{тр}} = ma$. При увеличении ускорения до значения $a_1 = kg$, определяемого условием $ma_1 = kN$, возникает скольжение тела относительно доски. При этом $F_x^{\text{тр}} = +kN$. Следовательно,

$$F_x^{\text{тр}}(a) = \begin{cases} ma, & a < kg, \\ kmg, & a \geq kg. \end{cases}$$

ЗАДАЧА 9.11. Доска массой m_1 лежит на гладкой горизонтальной плоскости, по которой может двигаться без трения. На доске лежит тело массой m_2 , к которому приложена в горизонтальном направлении сила F . Коэффициент трения между телом и доской равен k . При каком значении силы F тело начнет скользить по доске?

Решение. Силы, действующие на доску и тело, показаны на рис. 9.14. В горизонтальном направлении на тело m_2 действуют сила F и противоположно направленная сила трения $F_2^{\text{тр}}$ со стороны доски. Согласно третьему закону Ньютона на доску действует такая же по величине, но направленная в противоположную сторону сила трения $F_1^{\text{тр}}$. В проекции на горизонтальное направление уравнения движения имеют вид

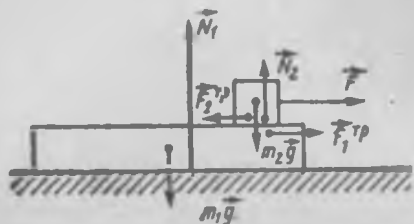


Рис. 9.14.

$$m_1 a_1 = F^{\text{тр}}, \quad (1)$$

$$m_2 a_2 = F - F^{\text{тр}}. \quad (2)$$

Если проскальзывания нет ($F^{\text{тр}} \leq k m_2 g$), то ускорения тела и доски совпадают: $a_1 = a_2 = a$. В этом случае из (1), (2) находим

$$F^{\text{тр}} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} F \leq k m_2 g.$$

Следовательно, скольжение возникает при значении силы

$$F > k \frac{m_2}{m_1} (m_1 + m_2) g.$$

Интересно рассмотреть предельный случай $m_1 \gg m_2$. Тогда $F > k m_2 g$.

§ 10. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ИМПУЛЬСА СИСТЕМЫ ТЕЛ

1. Второй закон Ньютона — закон изменения количества движения. Важную роль в физике играет величина $\vec{p}$, равная произведению массы тела на его скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Вектор $\vec{p}$ называют *количеством движения тела*, или *импульсом тела*. Согласно определению приращения импульса и скорости связаны соотношением $\Delta \vec{p} = m \Delta \vec{v}$. Используя это соотношение, запишем второй закон Ньютона (9.1) в виде

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \vec{F}, \quad (10.1)$$

т. е. скорость изменения импульса тела равна силе, действующей на тело. В механике Ньютона масса тела постоянна. Поэтому уравнения (10.1) и (9.1) эквивалентны.

Величину $\vec{F}\Delta t$ называют импульсом силы. Соотношение (10.1) очень удобно для качественного анализа взаимодействия тел.

В ряде прикладных задач требуется сообщить как можно большую скорость первоначально покоящемуся телу. Из формулы (10.1) видно, что для этой цели необходимо получить максимальное возможное произведение силы на время. Например, при одинаковом заряде пороха в патроне длинноствольные ружья бьют дальше и точнее, чем короткоствольные. Действительно, большая длина ствола увеличивает продолжительность действия пороховых газов на пулю, в результате она приобретает большую скорость.

При ударе клюшкой по шайбе, в толкании ядра, метании копья, молота и других спортивных упражнениях скорость может быть увеличена увеличением времени действия силы или увеличением самой силы.

ЗАДАЧА 10.1. Используя формулу (10.1), объясните: а) почему при приземлении после прыжка для смягчения удара о землю рекомендуется не напрягать мышцы ног? б) Как ослабить силу удара при приеме волейбольного мяча?

Из (10.1) следует, что если сумма сил, действующих на тело, равна нулю, то импульс тела не изменяется со временем

$$\Delta \vec{p} = m\vec{v}' - m\vec{v} = 0, \quad \vec{p} = \vec{p}_0.$$

Следует подчеркнуть, что импульс является вектором и сохранение всех его компонент имеет место, лишь когда все компоненты $\vec{F}$ равны нулю. Однако отдельные компоненты импульса могут сохраняться и при наличии сил. Например, рассмотрим движение тела в поле тяжести Земли. Если пренебречь сопротивлением атмосферы, то из (10.1) находим

$$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = m\vec{g}.$$

Из этого уравнения видно, что проекция количества движения на горизонтальное направление сохраняется. Проекция же количества движения на вертикальное направление изменяется.

2. Закон изменения импульса системы тел. Изучая движение тела в поле тяжести Земли (§ 6–7), мы неявно предполагали, что сила $m\vec{g}$, действующая со стороны тела на Землю, не влияет на ее движение. Разумеется, это связано с малостью массы тела по сравнению с массой Земли (более точные условия получены в § 12). В общем случае любое тело, взаимодействуя с другими телами системы, оказывает влияние на их движение. Поэтому для решения основной задачи механики — определения положения тел $\vec{r}_n(t)$ в любой момент времени по заданному закону взаимодействия, положениям $\vec{r}_n(0)$ и скоростям $\vec{v}_n(0)$ в начальный момент

времени — необходимо решить систему уравнений

$$m_1 \frac{\Delta \vec{v}_1}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{f}_{12} + \dots \quad (10.2)$$

$$m_2 \frac{\Delta \vec{v}_2}{\Delta t} = \vec{F}_2 + \vec{f}_{21} + \dots$$

.....

Здесь $\vec{f}_{ik}$ — сила, действующая со стороны k -го тела системы на i -е тело системы. $\vec{F}_i$ — сила, действующая на i -е тело системы со стороны тел, не принадлежащих системе. Мы предполагаем, что рассматриваемая система не влияет на движение этих тел. Силы, действующие между телами системы, называют внутренними силами, остальные силы, действующие на систему, называют внешними.

В настоящее время решение системы (10.2) может быть получено лишь с помощью электронно-вычислительных машин. Поэтому поставим ограниченную задачу: попытаемся получить общую информацию о поведении системы. С этой целью, складывая все уравнения (10.2), получим

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} + \dots$$

Здесь $\vec{P} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \dots$ — полный импульс системы. Первая сумма в правой части представляет результирующую внешних сил $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots$, а вторая сумма — результирующая внутренних сил — равна нулю, так как согласно третьему закону Ньютона $\vec{f}_{ik} = -\vec{f}_{ki}$. Итак, мы получили закон изменения импульса системы

$$\frac{\Delta \vec{P}}{\Delta t} = \vec{F}. \quad (10.3)$$

Это соотношение напоминает второй закон Ньютона (10.1). Однако если внешние силы зависят от координат тел системы, то уравнения (10.3) недостаточно для определения зависимости импульса $\vec{P}$ от времени. В этом случае зависимость $\vec{P}(t)$ определяется как внешними, так и внутренними силами.

ПРИМЕР 10.2. Космический аппарат имеет среднее лобовое сечение S и скорость $\vec{v}$. Определим тормозящую силу, действующую на аппарат, предполагая, что соударения молекул воздуха с его поверхностью являются абсолютно неупругими.

Скорость молекул воздуха значительно меньше скорости космического аппарата (далее КА). Поэтому будем считать, что мо-

лекулы воздуха неподвижны. Пусть в момент t скорость космического аппарата равна $\vec{v}$, а масса вместе с «прилипшими» молекулами равна m . В момент $t+\Delta t$ скорость КА станет равной $\vec{v}+\Delta\vec{v}$, а масса $m+\Delta m$. Следовательно, приращение импульса системы КА — молекулы воздуха

$$\Delta\vec{P}=(m+\Delta m)(\vec{v}+\Delta\vec{v})-m\vec{v}\simeq m\Delta\vec{v}+\vec{v}\Delta m. \quad (1)$$

Подставляя (1) в (10.3), получим уравнение

$$m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}=m\vec{g}. \quad (2)$$

Перенесем второе слагаемое в правую часть (2):

$$m\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=m\vec{g}-\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}. \quad (3)$$

Поскольку $(\Delta m/\Delta t)>0$, то оно играет роль силы торможения КА.

$$\vec{F}_{\text{торм}}=-\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}.$$

За время Δt к поверхности КА «прилипнет» масса Δm , находящаяся в объеме $Sv\Delta t$, т. е. масса воздуха, равная $\Delta m=\rho Sv\Delta t$, где ρ — плотность воздуха. Следовательно,

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}=\rho Sv, \quad (4)$$

а сила торможения $\vec{F}_{\text{торм}}=-\rho Sv\vec{v}$. Уравнения (2), (4) представляют замкнутую систему, позволяющую определить зависимость скорости от времени.

Найдем силу торможения, действующую на космический корабль на высоте $H=80$ км. Здесь плотность воздуха $\rho=1,846\cdot 10^{-5}$ кг/м³. Полагая $S=3$ м², $v=8$ км/с, найдем $F_{\text{торм}}=300$ кгс.

ЗАДАЧА 10.3. Голова кобры поднимается вертикально со скоростью v . Показать, что сила реакции со стороны земли возрастает на величину Mv^2/l , где l — длина кобры, M — масса кобры.

Решение. Пусть в момент t часть массы кобры $m(t)$ имеет скорость $\vec{v}$, остальная часть лежит на земле. В момент времени $t+\Delta t$ движущаяся масса кобры равна $m(t)+\Delta m$. Приращение импульса кобры $\Delta\vec{P}=\Delta m\vec{v}$. Подставляя $\Delta\vec{P}$ в закон изменения импульса системы, получим уравнение

$$\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}=M\vec{g}+\vec{N},$$

где $\vec{N}$ — сила реакции со стороны Земли. Далее учтем, что $\Delta m = \rho S v \Delta t$. Здесь ρ — плотность кобры, S — площадь поперечного сечения. Поскольку $M = \rho S l$, то $\Delta m = (Mv/l)\Delta t$. Следовательно,

$$\vec{N} = \frac{Mv}{l} \vec{v} - M\vec{g}. \quad (1)$$

Проектируя (1) на координатную ось y , направленную вверх, получим

$$N_y = Mg + \frac{Mv^2}{l}.$$

ПРИМЕР 10.4. Движение ракеты в поле тяжести Земли.

Пусть в момент времени t ракета с топливом имеет массу m и движется со скоростью $\vec{v}$. В момент времени $t + \Delta t$ вследствие истечения газов массой $-\Delta m > 0$ масса ракеты стала равной $m + \Delta m$ (в соответствии с определением приращения функции $m(t)$), а скорость ракеты получила приращение $\Delta \vec{v}$, т. е. $\vec{v}(t + \Delta t) = \vec{v}(t) + \Delta \vec{v}$. В этой же системе отсчета, связанной с Землей, скорость газов равна $\vec{c}$. Следовательно, приращение импульса системы ракета — газы с точностью до величин второго порядка малости

$$\Delta \vec{P} = (m + \Delta m)(\vec{v} + \Delta \vec{v}) + (-\Delta m)\vec{c} - m\vec{v} \approx m\Delta \vec{v} - \Delta m(\vec{c} - \vec{v}). \quad (1)$$

Разность скоростей $\vec{c}' = \vec{c} - \vec{v}$ согласно формуле (5.5) равна скорости газов относительно ракеты. Согласно гипотезе К. Э. Циолковского, скорость газов относительно ракеты можно считать постоянной величиной.

Если внешние силы отсутствуют, то из (10.3) следует, что $\Delta \vec{P} = 0$. Мы приходим к выводу, что за время Δt скорость ракеты возрастает на величину

$$\Delta \vec{v} = \left| \vec{c}', \frac{\Delta m}{m} \right|.$$

Получим теперь уравнение движения ракеты в поле тяжести Земли. Подставляя в (10.3) сумму внешних сил $\vec{F} = (m + \Delta m)\vec{g} + (-\Delta m)\vec{g} = m\vec{g}$ и учитывая (1), получим

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} - \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{c}' = m\vec{g}. \quad (2)$$

Уравнение (2) удобно переписать в виде

$$m \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t} \vec{c}' + m\vec{g}. \quad (3)$$

Первое слагаемое в правой части (3) $\vec{F}_p = (\Delta m / \Delta t) \vec{c}'$ называется реактивной силой — тягой, действующей на ракету. Это уравнение впервые получено русским математиком И. В. Мещерским в 1897 г. и носит его имя.

Направим ось z вертикально вверх. Тогда из (3) получим

$$m \frac{\Delta v}{\Delta t} = - \frac{\Delta m}{\Delta t} c' - mg.$$

Очевидно, при сгорании топлива $(\Delta m / \Delta t) < 0$. Для подъема ракеты на старте необходимо выполнить условие

$$\left| \frac{\Delta m}{\Delta t} \right| c' > mg.$$

Найдем расход топлива в единицу времени при зависании ракеты над поверхностью Земли. При значении $c' = 3000$ м/с и стартовой массе $m = 3000$ т получим $|\Delta m / \Delta t| \sim 10^4$ кг/с.

Заметим, что уравнение (3) позволяет исследовать не только движение ракеты, но и любых тел переменной массы, например, капли воды в насыщенной влагой среде в этом случае $(\Delta m / \Delta t) > 0$, $\vec{c}' = -\vec{v}$ (см. также пример 10.2).

3. Закон сохранения импульса системы тел. Систему тел, взаимодействующих друг с другом и не взаимодействующих с окружающими телами, называют *замкнутой системой*. В замкнутой системе действуют только внутренние силы, в результате действия которых состояние системы непрерывно меняется, т. е. изменяются с течением времени скорости и положения тел системы. Однако для замкнутой системы существует величина, которая постоянна во времени, — *полный импульс системы*. Он представляет собой векторную сумму импульсов каждого из тел, входящих в состав замкнутой системы. Поскольку $\vec{F} = 0$, то согласно (10.3)

$$m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) + \dots = \vec{P}_0, \quad (10.4)$$

где $\vec{P}_0$ — постоянный вектор. Каждое из слагаемых $m_i \vec{v}_i(t)$ в левой части (10.4) является функцией времени, однако их сумма от времени не зависит. Таким образом, если отсутствуют силы, действующие на систему извне, то внутренние силы никогда не смогут изменить полный импульс системы.

Закон сохранения импульса системы «работает», т. е. позволяет получить уравнения в задачах следующего типа: в момент времени t система находилась в некотором состоянии, затем в результате действия внутренних сил система в момент времени t' находится в другом состоянии. В силу сохранения полного импульса справедливо соотношение

$$m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) + \dots = m_1 \vec{v}_1(t') + m_2 \vec{v}_2(t') + \dots \quad (10.5)$$

Необходимо подчеркнуть большую роль, которую играют законы сохранения импульса, энергии (§ 12), электрического заряда (§ 29) и другие в современных физических исследованиях. Сейчас физики приходят к выводу, что законы сохранения являются наиболее важными законами природы. Например, природа сил взаимодействия между элементарными частицами еще не раскрыта и не существует уравнений, подобных второму закону Ньютона, с помощью которых можно было бы описать превращения и поведение частиц при взаимодействиях. Здесь на помощь приходят законы сохранения, позволяющие предсказать многие характерные особенности распадов, взаимодействий и превращений элементарных частиц.

ПРИМЕР 10.5. Рассмотрим распад неподвижного ядра массой M на два осколка массой m_1, m_2 . Из (10.5) получим уравнение

$$M \cdot 0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2,$$

из которого следует, что скорости осколков должны быть направлены по одной прямой в противоположные стороны. Если происходит распад на три частицы, то можно лишь утверждать, что векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, удовлетворяющие уравнению

$$M \cdot 0 = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + m_3 \vec{v}_3,$$

лежат в одной плоскости. В частном случае осколков равных масс $m_1 = m_2 = m_3$ концы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ лежат в вершинах правильного треугольника.

Если система не замкнута, полный импульс системы не сохраняется. Однако может случиться, что сумма проекций внешних сил на некоторое направление будет равна нулю. Тогда сохраняется проекция полного импульса системы на это же направление. Наибольший интерес представляет движение систем в поле тяжести Земли. Если сумма проекций внешних сил на два взаимно перпендикулярных направления оси координат x и y в горизонтальной плоскости равна нулю, то из (10.3) следует, что сохраняются проекции полного импульса на те же оси координат.

$$m_1 v_{1x}(t) + m_2 v_{2x}(t) + \dots = m_1 v_{1x}(t') + m_2 v_{2x}(t') + \dots \quad (10.6)$$

$$m_1 v_{1y}(t) + m_2 v_{2y}(t) + \dots = m_1 v_{1y}(t') + m_2 v_{2y}(t') + \dots$$

ПРИМЕР 10.6. Лодка массой M стоит в неподвижной воде. Насколько сместится лодка, если рыбак массой m переместится с кормы на нос лодки. Длина лодки l , сопротивлением воды пренебречь.

Поскольку сохраняется проекция импульса системы рыбак — лодка на горизонтальное направление, то в любой момент времени

$$0 = Mu_x + mv_x, \quad (1)$$

где u_x , v_x — проекции скоростей лодки и рыбака на расположенную горизонтально ось x . Умножая (1) на Δt , получим уравнение $0 = M\Delta x_{\text{л}} + m\Delta x_{\text{р}}$, из которого найдем соотношение, связывающее перемещение лодки $\Delta x_{\text{л}} = u_x \Delta t$ и рыбака $\Delta x_{\text{р}} = v_x \Delta t$ за промежуток времени Δt :

$$\Delta x_{\text{л}} = -\frac{m}{M} \Delta x_{\text{р}}. \quad (2)$$

Суммируя элементарные перемещения за время, которое затратил рыбак, переходя с кормы лодки на нос, на расстояние l , получим смещение лодки

$$L = -\frac{m}{M} l. \quad (3)$$

Прежде чем читать следующий абзац, найдите допущенную ошибку, так как ответ (3) неверен. Дело в том, что скорости и перемещения в (1), (2) относятся к системе отсчета, связанной с неподвижной водой или берегом. Ошибка состоит в замене перемещения рыбака относительно берега, перемещением относительно лодки. Для решения задачи необходимо использовать формулу (5.5): $v_x = u_x + v'_x$, где v'_x — проекция скорости рыбака относительно лодки. Тогда уравнения (1), (2) можно записать в виде

$$(M+m)u_x + mv'_x = 0,$$

$$\Delta x_{\text{л}} = -\frac{m}{M+m} \Delta x'_{\text{р}}.$$

Таким образом, перемещение лодки

$$L = -\frac{m}{M+m} l.$$

ЗАДАЧА 10.7. По горизонтальному пути без трения движется платформа массой M со скоростью w . На платформу падает камень массой m по вертикальной прямой. Затем через некоторое время в платформе открывается люк и камень проваливается вниз. С какой скоростью будет двигаться платформа?

Решение. В задаче идет речь о трех состояниях системы камень — платформа: 1. Камень падает, платформа движется; 2. Камень и платформа движутся как целое со скоростью w ; 3. Платформа движется со скоростью u'' , а камень падает в поле тяжести с начальной скоростью u' , направленной по горизонтали.

Горизонтальная составляющая камня, как мы знаем, при падении не меняется. Поскольку сохраняется проекция полного импульса системы на горизонтальное направление, то из (10.5) получим

$$m \cdot 0 + Mu = (M + m)u' = mu' + Mu''.$$

Следовательно,

$$u'' = u' = \frac{M}{M + m} u.$$

ЗАДАЧА 10.8. На платформе, движущейся со скоростью $v = 36$ км/ч, укреплено орудие. Ствол орудия направлен в сторону движения платформы под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту. Определить скорость платформы после выстрела, если масса платформы с орудием $M = 16$ т, масса снаряда $m = 20$ кг и он вылетает со скоростью $v_0 = 600$ м/с.

Решение. Поскольку мы пренебрегаем силами трения качения, то сохраняется проекция импульса системы на горизонтальное направление. В соответствии с (10.6)

$$(M + m)v = mv_0 \cos \alpha + Mv'.$$

Скорость платформы после выстрела

$$v' = v - (m/M)(v_0 \cos \alpha - v) = 34,7 \text{ км/ч.}$$

ЗАДАЧА 10.9. На подставке высотой $h = 5$ м лежит шар массой $m_1 = 0,2$ кг. Пуля массой $m_2 = 0,01$ кг, летящая горизонтально со скоростью $v_2 = 500$ м/с, пробивает шар по диаметру. На каком расстоянии s_2 упадет на землю пуля, если шар падает на расстоянии $s_1 = 20$ м от основания подставки.

Решение. Пусть v_1' , v_2' — скорости шара и пули после взаимодействия, T — время падения пули и шара на землю. Приведем только результат заключительного этапа решения задачи — систему уравнений, полученную на основе (10.6), (6.4) и (6.5),

$$m_1 \cdot 0 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2',$$

$$s_1 = v_1' T, \quad s_2 = v_2' T, \quad 0 = h - g(T^2/2).$$

Из этой системы находим

$$s_2 = v_2 \sqrt{\frac{2h}{g}} - \frac{m_1}{m_2} s_1 = 100 \text{ м.}$$

§ 11. СТАТИКА

1. Состояние равновесия. В школьном курсе механики статика — единственный раздел, где мы имеем дело с протяженным твердым телом. До сих пор мы всегда могли заменить тело материальной

точкой. Теперь этого делать нельзя, так как движение тела и его ориентация зависят от положения точек приложения сил. Напомним, что в механике твердым телом является совокупность материальных точек, расстояния между которыми постоянны. Поэтому говорят, что твердое тело находится в равновесии, если в определенной системе отсчета скорость любой точки тела равна нулю.

2. Условия равновесия. Предположим, что система материальных точек, рассмотренная в п. 2 § 10, является твердым телом. Тогда из (10.3) следует, что поскольку в положении равновесия импульс тела $P=0$, то сумма сил, действующих на него, также равна нулю. Мы получили первое условие равновесия:

в состоянии равновесия сумма сил, действующих на тело, равна нулю.

Для того чтобы сформулировать второе условие равновесия, необходимо ввести новое понятие — момент силы. На рис. 11.1 показано тело, на которое действуют несколько сил, лежащих в одной плоскости. Проведем далее через произвольную точку O ось z , перпендикулярную указанной плоскости. Длина перпендикуляра h , опущенного из точки O на прямую, на которой лежит вектор $\vec{F}$, называют плечом силы $\vec{F}$. Таким образом, плечо силы — расстояние между двумя скрещенными прямыми, одна из которых — ось z , а на другой лежит вектор $\vec{F}$.

Моментом силы F относительно оси z называется произведение силы на плечо h ; $L=Fh$, если сила стремится вращать тело вокруг оси в направлении, обратном направлению хода часовой стрелки, и $L=-Fh$, если сила стремится вращать тело в направлении хода часовой стрелки (см. § Д6). Полный момент всех сил, действующих на тело, равен сумме моментов каждой из сил.

Теперь можно сформулировать второе условие равновесия, предполагая, что все силы расположены в одной плоскости. *В состоянии равновесия сумма моментов всех действующих на тело сил относительно произвольной оси, перпендикулярной плоскости, в которой лежат силы, равна нулю.*

Сделаем два замечания о рациональном применении условий равновесия. Для того чтобы приравнять сумму сил нулю, нет необходимости складывать силы как векторы. Действительно, любой вектор определяется тремя числами — проекциями на оси координат. Поэтому для записи первого условия равновесия проще всего выбрать прямоугольную систему координат и приравнять нулю сумму проекций всех сил на каждую из осей координат (см. § 1).

Ось, относительно которой определяются моменты сил, может быть выбрана произвольно, поскольку сумма моментов сил не зависит от выбора оси, если сумма сил равна нулю (см. § Д6). Второе условие равновесия справедливо как для тела, которое

вообще не связано с реальными осями, так и для тела, которое действительно может вращаться вокруг реальной оси.

3. Центр тяжести. Любое тело состоит из большого количества связанных между собой частичек, на каждую из которых действует сила тяжести. Так как мы будем рассматривать не очень протяженные тела, то все эти силы параллельны друг другу. Заменим совокупность всех действующих на тело сил тяжести одной силой $\vec{mg}$, которую называют равнодействующей.

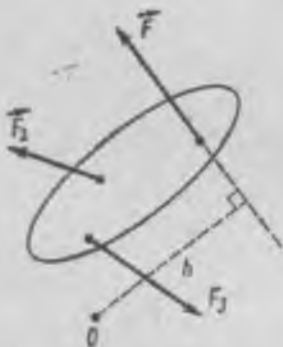


Рис. 11.1

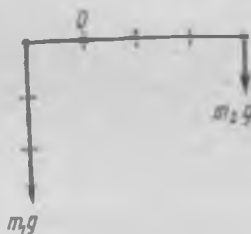


Рис. 11.2

Поскольку тело нельзя рассматривать как материальную точку, то положение результирующей силы зависит от формы тела и характера распределения частиц в нем. Очевидно, что сила $\vec{mg}$ равна сумме всех сил тяжести, а ее точка приложения должна быть выбрана таким образом, чтобы ее действие было бы равноценно действию сил тяжести всех частиц. Для этого ее момент относительно произвольно выбранной оси должен быть равен сумме моментов сил тяжести каждой частицы тела относительно той же оси.

Точка приложения равнодействующей силы $\vec{mg}$ называется *центром тяжести тела*. По отношению к оси, проходящей через эту точку, момент силы $\vec{mg}$ равен нулю. Но тогда

сумма моментов сил тяжести всех частиц по отношению к оси, проходящей через центр тяжести, тоже должна равняться нулю. Математическая запись этого утверждения приводит к уравнению, определяющему положение центра тяжести. Разумеется, у тела только один центр тяжести, и он не обязательно находится внутри тела.

Вычисление центра тяжести тела произвольной формы — сложная математическая задача. Для симметричных тел эта задача значительно упрощается. Например, рассмотрим тонкую од-

нородную палочку. Если мысленно разбить ее на поперечные полоски, то каждой из них соответствует другая, расположенная симметрично по другую сторону центра. Момент силы тяжести каждой пары таких полосок относительно центра равен нулю. Значит, сумма моментов всех сил тяжести относительно середины палочки равна нулю. Следовательно, центр тяжести лежит посередине палочки.

При нахождении положения центра тяжести необходимо прежде всего, исходя из симметрии задачи, попытаться определить положение прямых и плоскостей, на которых должен находиться центр тяжести. Например, центр тяжести прямоугольного листа бумаги находится на пересечении перпендикуляров, проведенных к серединам двух сторон. А теперь перегибем лист пополам и расположим обе половинки так, чтобы они образовали прямой двугранный угол. Где находится центр тяжести такой системы?

Центр тяжести системы, состоящей из двух частиц. Найдем положение центра тяжести двух частиц массой m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии l (рис. 11.2). Предположим, что центр тяжести находится на расстоянии l_1 от тела m_1 . Согласно определению сумма моментов сил тяжести m_1g и m_2g относительно оси, проходящей через центр тяжести O системы частиц (m_1, m_2), равна нулю:

$$m_1gl_1 - m_2g(l - l_1) = 0.$$

Из этого уравнения находим

$$l_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} l.$$

Если $m_1 \gg m_2$, то $l_1 \simeq (m_2/m_1)l \ll l$, т. е. центр тяжести системы почти совпадает с первой частицей.

Заметим, что по статистическим данным центр тяжести мужчины средних лет расположен на высоте, составляющей 58% от роста [1].

ПРИМЕР 11.1. Из квадратной однородной пластинки с длинной ребра a вырезали равнобедренный треугольник высотой h , основание которого равно a . Определить центр тяжести полученной фигуры ($0 < h < a$).

Для решения задач этого типа проще всего мысленно выделить в первоначальной фигуре вырезанную часть (фигура A) и остающуюся часть (фигура B). Центр тяжести первоначальной и вырезаемой фигур обычно легко находится. Центр тяжести остающейся фигуры неизвестен и подлежит определению. Поскольку алгебраическая сумма моментов сил тяжести фигур A и B относительно центра тяжести пластинки равна нулю, то это условие дает уравнение для определения центра тяжести фигуры B .

В нашем примере (рис. 11.3) центр тяжести вырезаемого треугольника лежит на высоте на расстоянии $h/3$ от основания всегда слева от центра пластины, так как $h < a$. Центр тяжести фигуры B находится на средней линии квадрата на расстоянии l от центра пластины. Условие равенства нулю суммы моментов сил

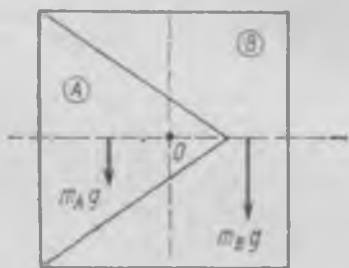


Рис. 11.3

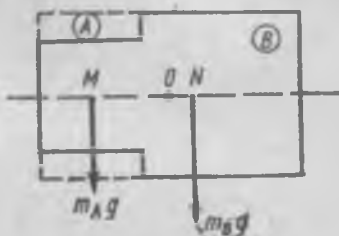


Рис. 11.4

$m_A g$ и $m_B g$ относительно оси, проходящей через центр тяжести пластины, приводит к уравнению

$$m_A g \left(\frac{a}{2} - \frac{h}{3} \right) - m_B g l = 0,$$

из которого находим

$$l = \frac{3a - 2h}{6} \frac{m_A}{m - m_A}.$$

Поскольку $m = \rho a^2 d$, $m_A = \rho^{1/2} a h d$, где ρ — плотность, d — толщина пластинки. Следовательно,

$$l = \frac{(3a - 2h) h}{6(2a - h)}.$$

Нетрудно видеть, что центр тяжести фигуры B находится справа от центра пластины. Поэтому можно вырезать треугольник такой высоты h_1 , чтобы центр тяжести фигуры B совпадал с вершиной треугольника, т. е.

$$\frac{a}{2} + \frac{(3a - 2h_1) h_1}{6(2a - h_1)} = h_1.$$

Из этого уравнения находим

$$h_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sqrt{3} - 1) a.$$

Если высота вырезанного треугольника $h > h_1$, то центр тяжести остающейся части лежит вне ее.

ЗАДАЧА 11.2. Из заготовки в виде цилиндра радиусом R , длиной l токарь должен выточить цилиндр радиусом r . Токарь перемещает резец со скоростью v . Найти наибольшее смещение центра тяжести в процессе обработки заготовки.

Решение. В момент времени t резец находится на расстоянии vt от левого торца заготовки (рис. 11.4). Центр тяжести фигуры B находится на расстоянии $ON=x$ от точки O — середины осевой линии. Учитывая, что $MO=1/2(l-vt)$, приравняем нулю сумму моментов сил тяжести m_Ag и m_Bg относительно оси, проходящей через точку O :

$$m_A g^{1/2}(l-vt) - m_B g x = 0.$$

Поскольку

$$m_A = \rho \pi (R^2 - r^2) vt, \quad m_B = \rho \pi [R^2 l - (R^2 - r^2) vt],$$

то зависимость от времени смещения центра тяжести заготовки имеет вид

$$x(t) = \frac{1}{2} \frac{(l-vt) vt (R^2 - r^2)}{[R^2 l - (R^2 - r^2) vt]}. \quad (1)$$

Очевидно, $x(0) = x(l/v) = 0$, т. е. при полном прохождении резца центр тяжести возвращается в начальное положение.

Найдем теперь максимальное значение функции $x(t)$. Для этого необходимо вычислить производную x' и приравнять ее нулю.

$$x' = \frac{v(R^2 - r^2)}{2[R^2 l - (R^2 - r^2) vt]} \left[l - vt + \frac{(l-vt) vt (R^2 - r^2)}{[R^2 l - (R^2 - r^2) vt]} \right] = 0. \quad (2)$$

Из (2) следует уравнение

$$(vt)^2 (R^2 - r^2) - 2vtR^2 l + R^2 l^2 = 0,$$

определяющее значения

$$t_{1,2} = \frac{Rl}{v(R-r)}, \quad \frac{Rl}{v(R+r)}.$$

Первый корень должен быть отброшен, поскольку $vt_1 > l$. Учитывая (2), максимальное значение $x_m = x(t_2)$ функции $x(t)$ можно записать в виде

$$x_m = x(t_2) = vt_2 - \frac{l}{2} = \frac{l}{2} \frac{R-r}{R+r}.$$

Интересно отметить, что в момент времени t_2 резец и центр тяжести заготовки лежат в одной плоскости: $(l/2) + x_m = vt_2$. Подобная особенность имеет место в следующей задаче. Возьмем стакан и начнем заполнять его песком. Наинизшее положение

центр тяжести стакана с песком займет в тот момент времени, когда он будет находиться на уровне песка в стакане.

ПРИМЕР 11.3. Однородный стержень согнут в виде прямого угла со сторонами a и b , подвешен на гвоздь, вбитый в вертикальную стенку. Какой угол образует сторона a с вертикалью?

На угол действуют сила реакции и силы тяжести, приложенные к серединам сторон угла (рис. 11.5). Приравнивая нулю сум-

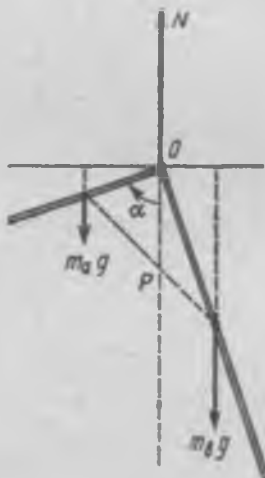


Рис. 11.5

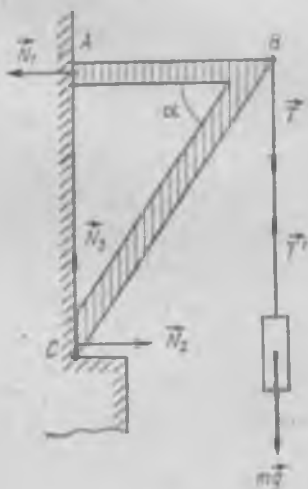


Рис. 11.6

му моментов сил относительно оси, проходящей через вершину угла O ,

$$m_a g \left(\frac{1}{2}\right) a \sin \alpha - m_b g \left(\frac{1}{2}\right) b \cos \alpha = 0,$$

получим тангенс угла

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{b}{a} \frac{m_b}{m_a} = \left(\frac{b}{a}\right)^2.$$

Если $b \gg a$, то $\alpha \rightarrow \pi/2$. Очевидно, центр тяжести P угла лежит на пересечении вертикали и прямой, соединяющей середины сторон. Докажите, что расстояние OP равно

$$OP = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{a^4 + b^4}}{a + b}.$$

ЗАДАЧА 11.4. Груз массой $m=100$ кг подвешен к кронштейну ABC (рис. 11.6). Угол ABC $\alpha=60^\circ$. Найти силы, действующие на кронштейн. Массой кронштейна пренебречь.

Решение. Согласно данному выше рецепту (§ 9) для того чтобы найти силы, действующие на данное тело, необходимо перечислить все тела, с которыми оно взаимодействует. 1. Со стороны Земли действует сила притяжения. Однако поскольку масса кронштейна предполагается малой величиной, то силой притяжения мы будем пренебрегать. 2. В точке B действует сила упругости $\vec{T}$ со стороны веревки. 3. При взаимодействии со стенкой возникают силы реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$. 4. При взаимодействии с уступом возникает сила реакции $\vec{N}_3$. Поскольку сумма сил, действующих на кронштейн, равна нулю, то

$$N_2 - N_1 = 0, \quad (1)$$

$$N_3 - T = 0. \quad (2)$$

Далее перечислим силы, действующие на груз: сила тяжести mg и сила упругости со стороны веревки $\vec{T}' = -\vec{T}$, причем $T' = T$. Приравнявая к нулю сумму сил, действующих на груз, находим уравнение

$$T - mg = 0. \quad (3)$$

Итак, мы имеем три уравнения и четыре неизвестные величины. Дополним систему, используя еще одно условие равновесия — сумма моментов сил $\vec{N}_1$ и $\vec{T}$ относительно оси, проходящей через точку C , равна нулю. Обозначая $CB = l$, получим

$$N_1 l \sin \alpha - T l \cos \alpha = 0. \quad (4)$$

Решив систему (1) — (4), находим

$$T = N_3 = mg; \quad N_1 = N_2 = mg \operatorname{ctg} \alpha.$$

Отсюда, в частности, следует, что сумма сил $\vec{F} = \vec{N}_1 + \vec{N}_2$ направлена по прямой CB . Этот вывод является следствием очевидного утверждения: если тело находится в равновесии при действии трех сил, то они лежат на прямых, пересекающихся в одной точке. Подставляя числовые данные, получим

$$T = N_3 = 980 \text{ Н}, \quad N_1 = N_2 = 577 \text{ Н}.$$

В учебной литературе этой задаче «не повезло». Приведем наиболее распространенные ошибки, допущенные при ее решении: все силы изображают приложенными в точке B и утверждают, что T — сила тяжести груза, а $\vec{N}_1$ — сила упругости в балке AB . По поводу последнего утверждения заметим, что кронштейн представляет единую конструкцию ABC , взаимодействующую с внешними телами; сила $\vec{N}_1$ приложена реально к тонкому слою торца

А кронштейна. Поэтому фраза «сила упругости в балке» должна быть отнесена к другой области механики — теории упругости, изучающей свойства деформированных тел.

ЗАДАЧА 11.5. Однородный шар массой m лежит на двугранном угле β , одна грань которого образует с горизонтальной плоскостью угол α . Определить величину сил реакций, действующих на шар.

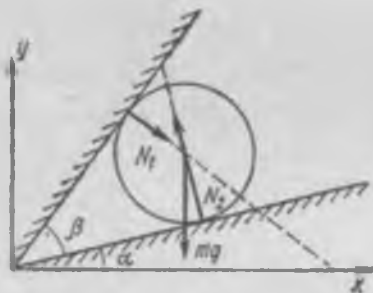


Рис. 11.7

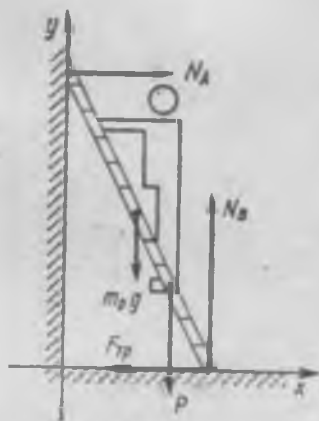


Рис. 11.8

Решение. Вначале делаем чертеж рис. 11.7 и расставляем все силы, действующие на шар: силу тяжести $m\vec{g}$, реакции $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, направленные перпендикулярно соответствующим плоскостям. В положении равновесия сумма этих сил равна нулю:

$$m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0. \quad (1)$$

Следовательно, равны нулю и суммы проекций этих сил на горизонтальную и вертикальную оси прямоугольной системы координат. Вектор $\vec{N}_1$ образует с осью x угол $\pi/2 - (\alpha + \beta)$, а вектор $\vec{N}_2$ — угол α с осью y . Уравнение (1) в проекциях на оси x и y имеет вид

$$N_1 \sin(\alpha + \beta) - N_2 \sin \alpha = 0, \quad (2)$$

$$-mg - N_1 \cos(\alpha + \beta) + N_2 \cos \alpha = 0. \quad (3)$$

Решая систему (2), (3), находим

$$N_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} mg, \quad N_2 = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin \beta} mg.$$

Если шар лежит на двугранном угле, одна сторона которого горизонтальна ($\alpha=0$), то $N_1=0$, $N_2=mg$. В этом случае шар не давит на боковую стенку, а только касается ее.

ЗАДАЧА 11.6. Лестница AB массой m_0 упирается в гладкую стену и опирается на горизонтальный шероховатый пол. Под каким наименьшим углом α к полу надо поставить лестницу, чтобы по ней мог подняться до самого верха человек, масса которого m ? Коэффициент трения скольжения лестницы о пол равен k .

Решение. Сделаем чертеж рис. 11.8 и, принимая лестницу за стержень длиной l , изобразим приложенные к нему силы. Со стороны стены на лестницу действует реакция $\vec{N}_A$, со стороны пола — реакция $\vec{N}_B$ и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$. При скольжении лестницы $F_{\text{тр}}=kN_B$. Очевидно, лестница не будет скользить, пока

$$F_{\text{тр}} \leq kN_B. \quad (1)$$

Сила притяжения m_0g приложена в середине лестницы. Со стороны человека, стоящего на расстоянии s от конца B лестницы, действует сила давления, равная весу человека $P=mg$.

Выберем два взаимно перпендикулярных направления по горизонтали и вертикали (оси x и y). Тогда первое условие равновесия имеет вид

$$-m_0g - mg + N_B = 0, \quad (2)$$

$$N_A - F_{\text{тр}} = 0. \quad (3)$$

Запишем далее второе условие равновесия — приравняем нулю сумму моментов сил относительно оси, проходящей через точку B (в этом случае моменты сил $\vec{F}_{\text{тр}}$ и $\vec{N}_B$ равны нулю):

$$mgs \cos \alpha + m_0g(l/2) \cos \alpha - N_A \sin \alpha = 0. \quad (4)$$

Из уравнений (3), (4) получим

$$F_{\text{тр}} = \left(\frac{1}{2} m_0 + \frac{s}{l} m \right) g \operatorname{ctg} \alpha. \quad (5)$$

Подставляя (5) и N_B из (2) в (1), находим, что человек сможет подняться наверх ($s=l$), если угол α удовлетворяет условию

$$\operatorname{tg} \alpha \geq \frac{2m + m_0}{2k(m + m_0)}.$$

Рассмотрим два частных случая:

1. «Легкая» лестница: $m_0 \ll m$, $\operatorname{tg} \alpha > 1/k$.
2. «Массивная» лестница: $m_0 \gg m$, $\operatorname{tg} \alpha > 1/2k$.

ПРИМЕР 11.7. Объяснить, почему яхта может идти против ветра (идти в бейдевинд)?

Пусть угол между направлением ветра и осью яхты равен $\pi - \alpha$ (рис. 11.9). Максимальная сила давления ветра R , действующая на парус, возникает в том случае, когда плоскость паруса расположена перпендикулярно направлению ветра. Если же плоскость паруса образует с направлением ветра угол β , то сила давления на парус $N = R \sin \beta$. Эта сила приводит яхту в движение. Однако реальной движущей силой

является проекция силы $\vec{N}$ на направление оси яхты, равная $F = N \sin(\alpha - \beta)$, поскольку боль-



Рис. 11.9

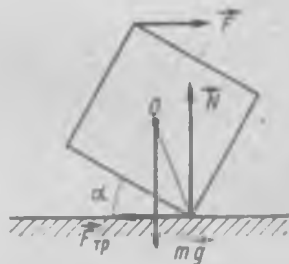


Рис. 11.10

шая поверхность киля яхты затрудняет ее движение в направлении, перпендикулярном оси яхты. Следовательно,

$$F(\beta) = R \sin \beta \sin(\alpha - \beta).$$

Эта функция достигает максимального значения $F_m = R \sin^2(\alpha/2)$ при $\beta = \alpha/2$. В этом случае парус расположен так, что делит точно пополам угол между направлением ветра и направлением оси яхты.

ПРИМЕР 11.8. Кубик массой m лежит на шероховатой горизонтальной плоскости. Коэффициент трения между материалами кубика и плоскости равен k . Наша задача — переместить кубик в новое положение, прилагая к нему горизонтально направленную силу F . Все силы, действующие на кубик, изображены на рис. 11.10. Здесь возможны два варианта: кубик будет скользить или опрокидываться, т. е. по существу катиться. Для того чтобы кубик не скользил по поверхности, должно выполняться условие (см. рис. 9.106)

$$F \leq kN = kmg. \quad (1)$$

Приравнивая нулю сумму моментов сил относительно оси, проходящей через ребро, лежащее на плоскости, получим уравнение

$$mga(\sqrt{2}/2)\cos(\alpha+\pi/4)-Fa(\cos\alpha+\sin\alpha)=0, \quad (2)$$

где a — длина ребра кубика. Из (2) находим, что сила, необходимая для «кантования» кубика

$$F=1/2 \operatorname{tg}(\pi/4-\alpha)mg, \quad (3)$$

изменяется от значения $F_0=1/2mg$ при $\alpha=0$ до значения $F=0$ при $\alpha=\pi/4$, когда кубик опрокидывается. Таким образом, из (1), (3) следует, что условием качения кубика будет неравенство $k>1/2$.

Возьмем теперь призму, имеющую в сечении правильный n -угольник. К ребру верхней грани приложим горизонтально направленную силу F . При каком наименьшем значении силы F призму можно перевернуть через ребро без проскальзывания? В этом случае

$$F_0=1/2 \operatorname{tg}(\pi/n)mg,$$

а условие качения имеет вид

$$k>1/2 \operatorname{tg}(\pi/n).$$

При увеличении числа граней сила F уменьшается, и одновременно условие качения становится менее жестким.

ПРИМЕР 11.9. Теория волока [5]. Волокуша, с помощью которой можно перемещать большие грузы, — самый древний вид сухопутного транспорта. Волок до сих пор используется при переброске мощными тягачами бурового оборудования по бездорожью. Обсудим основные закономерности этого метода транспортировки грузов.

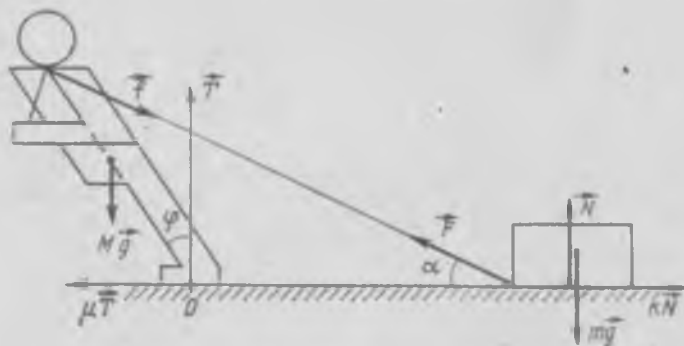


Рис. 11.11

На рис. 11.11 изображен человек массой M , который тянет канат, прикрепленный к грузу массой m . Скорости движения человека и груза постоянны. В этом случае из условия равенства нулю

суммы сил, действующих на груз, находим (см. задачу 9.7), что для перемещения груза необходимо приложить силу

$$F(\alpha) = \frac{kmg}{\cos \alpha + k \sin \alpha}. \quad (1)$$

Для данной массы груза сила F минимальна при $\operatorname{tg} \alpha_0 = k$. Изменение функции $F(\alpha)$ в зависимости от α незначительно даже при больших значениях k . Например, при $k=0,3$, $\alpha_0=17^\circ$, $F(\alpha_0) = 0,955F(0)$. Это облегчает волок всего на 5% по сравнению с горизонтальной тягой.

Положение меняется при рассмотрении условий, создающих силу $\bar{F}$. Записывая равенство нулю суммы сил, действующих на человека, получим

$$f(\alpha) = \frac{\mu Mg}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha}, \quad (2)$$

где μ — коэффициент сопротивления проскальзыванию его подошв по грунту. Из (2) следует, что сила тяги f значительно возрастает с ростом угла α (так как с увеличением α увеличивается сила реакции $\bar{T}$). Полагая $\alpha=30^\circ$, $\mu=0,3$, получим значение $f_1 = 1,43f(0)$. Сила f_1 увеличивается на 43% по сравнению с горизонтальным волоком. Приравнивая (1) и (2), получим значение массы тела, которое человек может волочить:

$$m = \frac{\mu}{k} \frac{\cos \alpha + k \sin \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} M.$$

Полагая массу человека $M=100$ кг, $\alpha=30^\circ$, $\mu=k=0,3$, получаем массу соответствующего груза $m=143$ кг. Это значительно больше того, что человек может нести на себе.

Однако существенное увеличение угла α приводит к ухудшению устойчивости. Человек при волоке вынужден сильно наклоняться вперед. Найдем угол отклонения φ корпуса человека от вертикали. Предположим, что центр тяжести находится на расстоянии $l/2$ от точки O соприкосновения подошв с землей. Запишем теперь условие равновесия моментов сил, действующих на человека, относительно оси, проходящей через точку O :

$$Mg(l/2) \sin \varphi - fl \cos(\varphi + \alpha) = 0.$$

Учитывая (2), найдем, что угол отклонения человека от вертикали определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2\mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha}. \quad (3)$$

С ростом α угол φ быстро убывает. Вместе с этим уменьшается устойчивость человека. Для значений $\alpha=30^\circ$, $\mu=0,3$ получим согласно (3) $\varphi=27^\circ$.

§ 12. РАБОТА. КИНЕТИЧЕСКАЯ И ПОТЕНЦИАЛЬНАЯ ЭНЕРГИИ. ЗАКОНЫ ИЗМЕНЕНИЯ И СОХРАНЕНИЯ ПОЛНОЙ ЭНЕРГИИ

1. Работа, совершаемая постоянной силой. На рис. 12.1 изображено тело, находящееся на горизонтальной плоскости. К нему приложены четыре постоянные силы, под действием которых тело перемещается прямолинейно. Определим работу любой из этих сил при перемещении из положения 1 в положение 2 соотношением

$$A_{12} = F \cos \alpha s_{12}, \quad (12.1)$$

где α — угол между направлением силы и скоростью тела, s_{12} — путь, пройденный телом. Произведение $F \cos \alpha$ является проекцией силы на направление скорости тела. Силы реакции и тяжести в

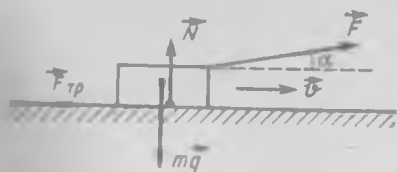


Рис. 12.1

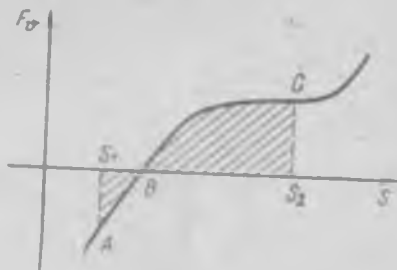


Рис. 12.2

соответствии с рис. 12.1 работы не совершают, так как направлены под прямым углом к перемещению. Работа силы трения отрицательна, поскольку $\cos \alpha = -1$ при $\alpha = \pi$. Заметим, что в общем случае работа силы трения может быть как отрицательной, так и положительной величиной (см. задачу 12.6).

Напомним некоторые энергетические единицы. В СИ единицей работы является джоуль (Дж). Один джоуль — работа силы 1 Н при перемещении тела на расстояние 1 м в направлении действия силы. Размерность этой величины $\text{Н} \cdot \text{м} = \text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{с}^{-2}$. С энергиями порядка одного — десяти джоулей мы имеем дело в повседневной практике: поднимая стакан с водой массой 200 г на 0,5 м мы совершаем работу 0,1 Дж, опуская чемодан массой $m = 25$ кг на 0,5 м, мы совершим работу — 12,5 Дж.

Внесистемные единицы: 1 Вт·ч = 3600 Дж; 1 кал = 4,1868 Дж; 1 кгм = 9,8 Дж — работа, совершаемая силой в 1 кгс на пути в 1 м.

2. Работа произвольной силы при движении тела по криволинейной траектории. Пусть к телу приложено несколько сил, под действием которых оно перемещается по некоторой траектории,

которую, кстати, можно определить из второго закона Ньютона. Найдем работу, совершаемую одной из этих сил $\vec{F}$. В общем случае вектор силы зависит от координат и времени, угол α между векторами силы и скорости также изменяется. Как теперь определить работу силы $\vec{F}$ при перемещении тела из положения 1 в положение 2? Мы можем поступить следующим образом. Представим траекторию в виде суммы N малых перемещений $\Delta\vec{r}_n$. В пределах малых перемещений можно не учитывать изменения вектора силы и угла α между $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}_n$. Тогда работа на малом перемещении может быть вычислена в соответствии с определением (12.1). Мы назовем ее элементарной работой и обозначим символом δA ,

$$\delta A = F \cos \alpha |\Delta\vec{r}|.$$

Здесь F — величина силы в произвольной точке малого приращения $\Delta\vec{r}$, α — угол между векторами $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$. Выражение для элементарной работы можно записать в более удобном виде в форме скалярного произведения

$$\delta A = \vec{F} \Delta\vec{r} \quad (12.2)$$

векторов $\vec{F}$ и $\Delta\vec{r}$ (см. § 1). Для того чтобы определить работу силы A_{12} на конечном участке траектории, необходимо сложить элементарные работы на всех бесконечно малых участках. Следовательно,

$$A_{12} = \sum_{n=1}^n \vec{F}_n \Delta\vec{r}_n. \quad (12.3)$$

3. Геометрический смысл понятия работы силы. Заметим, что $|\Delta\vec{r}|$ является длиной бесконечно малой дуги на траектории. Поэтому выражение (12.3) можно представить в виде

$$A_{12} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^N F_n \cos \alpha_n \Delta s_n. \quad (12.4)$$

Отсюда можно заключить, что если дан график зависимости от пути s проекции силы $F_v(s)$ на направление скорости (рис. 12.2), то работа силы на конечном пути $s_{12} = s_2 - s_1$ равна площади фигуры, ограниченной кривой ABC и прямыми As_1 и Cs_2 , причем площадь фигуры под частью кривой AB входит в общее выражение работы со знаком «минус». Если проекция силы $F_v(s)$ остается постоянной в любой момент времени, то работа силы равна площади прямоугольника в соответствии с определением (12.1).

ПРИМЕР 12.1. Чему равна работа сил трения при вытаскивании пробки из горлышка бутылки? Длина пробки a . Пробка находится от края горлышка тоже на расстоянии a (рис. 12.3а). Наибольшее значение силы трения между пробкой и бутылкой F .

При перемещении пробки сила трения направлена в сторону, противоположную перемещению. Поэтому график зависимости проекции силы трения на направление перемещения имеет вид, изображенный на рис. 12.3б. Действительно, чтобы вытащить пробку, ее надо переместить на расстояние $2a$. Сила трения постоянна



Рис. 12.3

при движении пробки в горлышке (отрезок $0-a$), затем становится пропорциональной длине части пробки, соприкасающейся с горлышком (отрезок $a-2a$). Вычисляя заштрихованную площадь, находим, что искомая работа

$$A = -\frac{3}{2}Fa.$$

ЗАДАЧА 12.2. Груз массой $m=10$ кг положили на начало ленты транспортера длиной $l=5$ м, движущейся со скоростью $u=0,5$ м/с. Найти работу силы трения при перемещении груза до другого конца транспортера. Коэффициент трения между грузом и лентой $\mu=0,5$.

Решение. На груз действуют силы тяжести, упругости и трения. Если положительное направление оси x совпадает с направлением скорости u , то

$$F_x^{\text{тр}} = \begin{cases} \mu N, & v < u, \\ 0, & v = u, \\ -\mu N, & v > u, \end{cases} \quad (1)$$

где v — проекция скорости груза на ось x . Из второго закона Ньютона

$$ma = mg + N + F^{\text{тр}}$$

в соответствии с (1) найдем

$$ma_x = \mu N, \quad 0 = -mg + N.$$

Поскольку ускорение груза постоянно, то зависимость координаты и скорости груза от времени (см. (6.6), (6.7))

$$x(t) = \mu g (t^2/2), \quad v(t) = \mu g t.$$

К моменту времени $t_1 = u/\mu g$ скорость груза сравнивается со скоростью ленты, а груз сместится на расстояние $s = x(t_1) = u^2/2\mu g$. С этого момента времени груз остается неподвижным относительно ленты. Следовательно, если $l > s$, то работа силы трения

$$A = \mu mgs = \frac{1}{2} mu^2.$$

Если же $l < s$, то работа силы трения

$$A = \mu mgl.$$

Учитывая условия задачи, находим $s = 2,5 \cdot 10^{-2}$ м, $A = 1,25$ Дж.

4. Мощность, развиваемая силой. Мощность силы P — работа, совершаемая в единицу времени: $\delta A = P \delta t$. Подставляя δA из (12.3), получим

$$P = \vec{F} \vec{v} = Fv \cos \alpha, \quad (12.5)$$

где v — скорость тела, v — величина скорости тела. Единица мощности — ватт — названа в честь английского механика Д. Уатта (1736–1819): $1 \text{ Вт} = 1 \text{ Дж/с}$. Внесистемная единица мощности — лошадиная сила: $1 \text{ л. с.} = 735 \text{ Вт}$.

Мощность автомобиля «Волга» — $\sim 55 \text{ кВт}$ (75 л. с.), самолета ТУ-114 — $11\,000 \text{ кВт}$ ($\sim 15\,000$ л. с.), ракеты-носителя космического корабля «Восток» — $14,7 \cdot 10^6 \text{ кВт}$ ($2 \cdot 10^7$ л. с.). Мощность сердца, которое в спокойном состоянии перекачивает в минуту 5–6 л крови, составляет приблизительно 2,5 Вт.

Здесь следует отметить вопреки распространенному мнению, что механическая мощность любого тягового устройства является величиной неопределенной. О конкретной мощности можно говорить, учитывая результат взаимодействия транспортного средства с окружающей средой. Рассмотрим, например, движение машины: в горизонтальном направлении на нее действуют сила тяги $\vec{F}$, возникающая при взаимодействии ведущих колес с дорогой, и сила $\vec{F}_c$ сопротивления движению. Последняя растет с увеличением скорости машины v . Поэтому согласно второму закону Ньютона $ma = F - F_c(v)$; начиная с некоторого момента времени скорость достигает максимального значения v_m . Мощность силы тяги вначале растет со временем, а затем стремится к постоянному значению $P = Fv_m = F_c(v_m)v_m$.

Изменяя внешние условия, мы будем получать различные значения мощности. Подставляя F_c из (9.4), получим $P = 0,65 \times \mu S v^3$. Для обычного грузовика $\mu = 0,7$, $S = 3 \cdot 2,7 \text{ м}^2$. При скорости $v = 100 \text{ км/ч}$, $P = 2,8 \cdot 10^3 \text{ Дж/ч}$. Поскольку литр дизельного топлива при сгорании дает $2,42 \cdot 10^7 \text{ Дж}$, то на преодоление сопротивления воздуха требуется 11,4 л/ч. Если к этому добавить расход горючего $\sim 8,6 \text{ л/ч}$ на преодоление трения качения и внутренних потерь, то общий расход на 100 км пути составит 18 л. Для легкового автомобиля ($\mu = 0,35 - 0,5$) потери на сопротивление несколько меньше.

ПРИМЕР 12.3. а) Оценим мощность, развиваемую двигателем при зависании вертолета в воздухе. Масса вертолета $m = 6250 \text{ кг}$, размах лопастей $2R = 20 \text{ м}$, плотность воздуха $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$.

Вращение лопастей сообщает покоящейся массе воздуха скорость v . За время Δt масса воздуха, пришедшего в движение, $\Delta m = \rho S v \Delta t$, где $S = \pi R^2$. Силу F , действующую на эту массу со стороны лопастей, найдем из второго закона Ньютона (10.3). Выбирая положительное направление оси координат вертикально вверх, найдем

$$-\frac{\Delta m}{\Delta t} v = F_y,$$

или

$$F_y = -\pi \rho R^2 v^2. \quad (1)$$

Согласно третьему закону Ньютона на лопасти винта действует сила, равная $\pi \rho R^2 v^2$. Если вертолет зависает на некоторой высоте, то

$$\pi \rho R^2 v^2 = mg. \quad (2)$$

Мощность, развиваемая двигателем,

$$P = \pi \rho R^2 v^3 = \frac{(mg)^{3/2}}{R \sqrt{\pi \rho}}. \quad (3)$$

Подставляя числовые значения, находим $P = 780 \text{ кВт}$.

б) Оценим силу давления F на пол и мощность, которую развивает человек, вставая с корточек во весь рост, со скоростью $v = 2 \text{ м/с}$. Масса человека $m = 100 \text{ кг}$, рост $l = 2 \text{ м}$. Аналогично предыдущей задаче находим

$$F = mg + m \frac{v^2}{l} \sim 120 \text{ кгс},$$

$$P = \frac{mv^3}{l} \sim 400 \text{ Вт}.$$

5. Работа силы тяжести. Если тело не поднимается до высот, сравнимых с радиусом Земли, то поле тяжести можно считать однородным. Предположим, что на тело действуют несколько сил. Нас интересует только работа силы тяжести при движении тела по криволинейной траектории из точки M_1 в точку M_2 . В этом

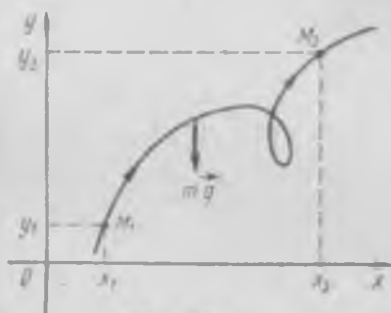


Рис. 12.4

случае следует воспользоваться формулой (12.3). Для вычисления скалярного произведения введем систему координат xy (рис. 12.4). Если ось y направлена по вертикали вверх, то проекции вектора $\vec{g}$ равны $g_x = g_z = 0$, $g_y = -g$. В соответствии с определением скалярного произведения (1.4) получим

$$A_{12} = \sum_{n=1}^N (-mg) \Delta y_n.$$

Полная работа, совершаемая силой тяжести при перемещении тела из точки M_1 в точку M_2 ,

$$A_{12} = -mg(y_2 - y_1) = -mgy_2 + mgy_1. \quad (12.6)$$

Мы видим, что работа силы тяжести не зависит от формы траектории, а определяется только положениями начальной и конечной точек траектории.

6. Работа сил упругости. Возьмем пружину, один конец которой присоединим к телу массой m , а другой — к неподвижной стенке (т. е. к телу массой $M \gg m$). Характеристики пружины определяются двумя параметрами: длиной l_0 в ненапряженном состоянии и коэффициентом жесткости k . Размерность жесткости Н/м, т. е. жесткость, численно равна силе, необходимой для растяжения или сжатия пружины на единицу длины. Запишем выражение для силы упругости, действующей со стороны пружины на тело массой m . Если совместить начало координат с точкой закрепления пружины, то проекция силы упругости на ось l

$$F_l = -k(l - l_0). \quad (12.7)$$

Здесь l — координата тела массой m . На рис. 12.5а изображена пружина в трех состояниях: в первом состоянии $l < l_0$, $F_l > 0$, во втором $F_l = 0$, в третьем $l > l_0$, $F_l < 0$. Прямая линия на рис. 12.5б — график зависимости проекции силы упругости от координаты тела массой m . Таким образом, сила упругости не является постоянной силой, а зависит от положения тела l .

Вычислим теперь работу сил упругости, действующих на тело m при его перемещении из положения l_1 в точку с координатой

l_2 . Из рис. 12.5б следует, что искомая работа равна разности площадей двух треугольников

$$A_{12} = \frac{1}{2}k(l_1 - l_0)^2 - \frac{1}{2}k(l_2 - l_0)^2. \quad (12.8)$$

Мы приходим к важному выводу, что работа силы упругости, как и работа силы тяжести, не зависит от характера движения тела, а определяется лишь его начальным и конечным положениями. Работа сил тяжести и упругости на замкнутой траектории равна нулю.

7. Потенциальная энергия. Понятие потенциальной энергии тела вводится для сил, работа которых определяется только положением начальной и конечной точек траектории. Такие силы назы-

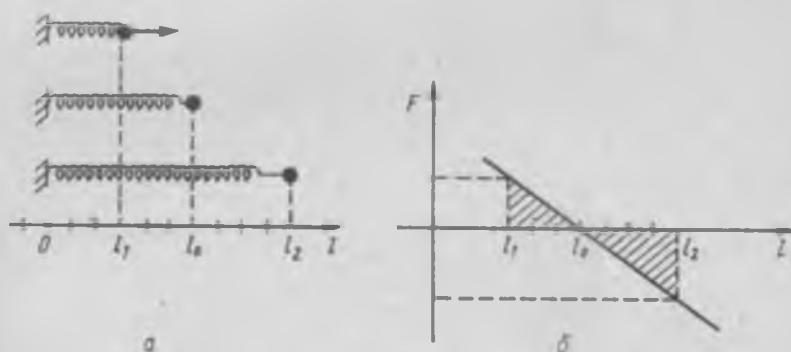


Рис. 12.5

вают консервативными. Работа неконсервативных сил зависит от формы траектории. Очевидно, к ним относится сила трения.

Рассмотрим движение материальной точки, которую будем называть частицей. Если A_{12} — работа консервативных сил при перемещении частицы из точки 1 в точку 2, то потенциальная энергия частицы в любой точке может быть найдена из определения

$$A_{12} = \Pi_1 - \Pi_2. \quad (12.9)$$

Здесь $\Pi_1 = \Pi(\vec{r}_1)$, $\Pi_2 = \Pi(\vec{r}_2)$ — значения функции $\Pi = \Pi(\vec{r})$, называемой потенциальной энергией частицы в точке с координатами x, y, z . Из (12.9) следует, что работа A_{12} определяет собственно не функцию $\Pi(\vec{r})$, а ее приращение за конечное время. Для бесконечно малого перемещения (12.9) приобретает вид

$$\delta A = -\Delta \Pi. \quad (12.10)$$

Таким образом, для определения функции $\Pi(\vec{r})$ необходимо вычислить работу, совершаемую консервативной силой при перемещении частицы.

Потенциальная энергия тела в поле тяжести. Подставляя (12.6) в (12.9), получим

$$-mgy_2 + mgy_1 = \Pi_1 - \Pi_2.$$

Следовательно, потенциальная энергия частицы в поле тяжести

$$\Pi(y) = mgy + \text{const.} \quad (12.11)$$

Заметим, что в этой формуле y обозначает координату частицы на числовой оси, направленной вертикально вверх. Наличие постоянной величины в выражении для потенциальной энергии приводит к неоднозначности в определении $\Pi(y)$, поскольку физический смысл имеет только разность потенциальных энергий в двух точках, т. е. работа. Эта неоднозначность позволяет произвольно выбрать нулевое значение функции $\Pi(y)$, в частности указать такое положение частицы относительно Земли, которому соответствует значение потенциальной энергии, равное нулю.

Если для определения потенциальной энергии воспользоваться соотношением (12.10) и учесть, что $\delta A = -mg\Delta y$, то мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\Delta \Pi}{\Delta y} = mg,$$

из которого следует (12.11).

Потенциальная энергия протяженного тела также определяется формулой (12.11), где m — масса тела, y — координата центра тяжести тела.

Потенциальная энергия тела, прикрепленного к пружине. Сопоставляя определение потенциальной энергии (12.9) с формулой для работы сил упругости (12.8), приходим к выводу, что потенциальная энергия тела, прикрепленного к пружине,

$$\Pi(l) = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2 + \text{const.}$$

Если выбрать значение потенциальной энергии в точке $l=l_0$, равное нулю, то

$$\Pi(l) = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2. \quad (12.12)$$

Графиком этой функции является парабола.

Сила и потенциальная энергия. Переместим частицу из положения, задаваемого радиус-вектором $\vec{r}$ в бесконечно близкое положение $\vec{r} + \Delta \vec{r}$. Сопоставляя выражения для работы, совершаемой силой $\vec{F}$ (12.2), и определение потенциальной энергии (12.10), получим соотношение

$$\vec{F} \Delta \vec{r} = -\Delta \Pi.$$

Пусть $\vec{\Delta r} = \vec{n} \Delta s$, где $\vec{n}$ — единичный вектор. Тогда проекция силы на направление $\vec{n}$ $F_n = \vec{F} \vec{n}$ может быть представлена в виде

$$F_n = - \frac{\Delta \Pi}{\Delta s}.$$

Таким образом, мы приходим к выводу, что сила, действующая на частицу, параллельна направлению, в котором потенциальная энергия убывает.

8. Устойчивость тела в положении равновесия. В положении устойчивого равновесия тело обладает наименьшим значением потенциальной энергии (вопрос о движении тела вблизи положения устойчивого равновесия рассмотрен в § 42). Например, из (12.12) следует, что в положении равновесия потенциальная энергия тела на пружинке минимальна.

Различные тела в положении равновесия обладают различной степенью устойчивости. Мерой устойчивости состояния равновесия является наименьшая работа, которую надо затратить для того, чтобы переместить тело в такое положение, откуда предоставленное самому себе оно уже не сможет вернуться в исходное состояние. Из двух тел более устойчивым является тело, для выведения которого из положения равновесия требуется большая работа.

ПРИМЕР 12.4. На горизонтальной шероховатой плоскости лежат два свинцовых кубика. Длина ребра первого кубика $a_1 = a$, а второго $a_2 = 2a$. Центр тяжести первого кубика расположен ниже, чем центр тяжести второго. Однако второй кубик более устойчив. Для того чтобы убедиться в этом, сравним минимальную величину работы, которую надо совершить, выводя каждый кубик из положения равновесия. Работа A_1 равна работе по подъему центра тяжести первого кубика на высоту

$$h_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{2} - 1) a,$$

$$A_1 = m_1 g h_1 = \frac{1}{2} \rho (\sqrt{2} - 1) a^4,$$

где ρ — плотность свинца. Для второго кубика

$$A_2 = m_2 g h_2 = 8\rho (\sqrt{2} - 1) a^4.$$

Поскольку $A_2 > A_1$, второй кубик более устойчив.

9. Кинетическая энергия. Теорема об изменении кинетической энергии. Кинетическая энергия материальной точки массой m , движущейся со скоростью $\vec{v}$, определяется скалярной положительной величиной

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

(12.13)

Если к телу приложена сила $\vec{F}$, то скорость и, следовательно, кинетическая энергия тела изменяются. Найдем соотношение, связывающее приращение кинетической энергии с работой, совершаемой силой $\vec{F}$. С этой целью воспользуемся вторым законом Ньютона, который представляет систему трех уравнений. Запишем одно из них, проектируя (9.1) на направление скорости: $m\vec{a}_v = \vec{F}_v$. Поскольку $\vec{a}_v = \Delta v / \Delta t$, то $m\Delta v = F_v \Delta t$. Умножая теперь обе части на величину скорости, получим

$$mv\Delta v = F_v v \Delta t.$$

Поскольку $v\Delta t = \Delta s$, то правая часть $F_v \Delta s = \delta A$ равна элементарной работе (12.2) силы $\vec{F}$. В левой части учтем, что $v\Delta v = \Delta(v^2/2)$ (так как $\Delta v^2 = (v + \Delta v)^2 - v^2 = 2v \cdot \Delta v + (\Delta v)^2 \approx 2v\Delta v$ с точностью до величин второго порядка малости). Поэтому окончательное соотношение, связывающее элементарную работу при бесконечно малом перемещении с приращением кинетической энергии, имеет вид

$$\Delta K = \delta A. \quad (12.14)$$

В том случае, когда к телу приложено несколько сил, в правой части (12.14) должна стоять сумма работ всех сил, действующих на тело.

Если в некоторой точке 1 траектории тело обладает кинетической энергией K_1 , а в точке 2 — кинетической энергией K_2 , то из (12.14) получим

$$K_2 - K_1 = A_{12}, \quad (12.15)$$

где A_{12} — работа всех сил, приложенных к телу на участке траектории, соединяющей точки 1 и 2.

Итак, сформулируем важнейшую теорему механики: *приращение кинетической энергии тела равно работе всех сил, приложенных к телу*. Силы, действующие на тело, могут быть силами упругости, тяготения, трения и т. д.

ЗАДАЧА 12.5. К телу массой $m=1$ кг, лежащему на земле, приложена вертикально направленная сила $F=10$ кгс. Найдем скорость тела на высоте $h=10$ м.

Решение. На груз действуют сила притяжения Земли и сила $\vec{F}$. Сила $\vec{F}$ направлена параллельно перемещению тела, а сила mg противоположна перемещению. Применяя теорему об изменении кинетической энергии, найдем, учитывая, что начальная скорость равна нулю,

$$\frac{mv^2}{2} - 0 = -mgh + Fh$$

или

$$v^2 = 2 \left(\frac{F}{mg} - 1 \right) gh, \quad v = 20 \text{ м/с.}$$

Сила F совершает при этом работу, равную $A = 294$ Дж.

ЗАДАЧА 12.6. Используя условия задачи (9.10), определить изменение кинетической энергии тела при перемещении доски на расстояние s .

Решение. Согласно закону изменения кинетической энергии (12.15)

$$\Delta K = F_{\text{тр}} s = \begin{cases} mas, & a < kg, \\ kmg s, & a \geq kg. \end{cases}$$

Заметим, что здесь сила трения совершает положительную работу.

10. Полная энергия. Закон изменения полной энергии. Если из всех сил, действующих на тело, выделить консервативные силы, работа которых выражается соотношением (12.9), то закон изменения кинетической энергии (12.15) удобно представить в несколько ином виде:

$$K_2 - K_1 = \Pi_1 - \Pi_2 + A'_{12}$$

или

$$(K_2 + \Pi_2) - (K_1 + \Pi_1) = A'_{12}, \quad (12.16)$$

где A'_{12} — работа неконсервативных сил. Сумму кинетической и потенциальной энергий называют полной энергией $E = K + \Pi$. Полная энергия тела включает кинетическую энергию, величина которой всегда положительна, и потенциальную, которая может быть как положительной, так и отрицательной. Следовательно, полная энергия может быть величиной положительной, отрицательной или равной нулю.

Соотношение (12.16) представляет важнейший закон механики:

приращение полной энергии тела равно работе неконсервативных сил

$$E_2 - E_1 = A'_{12}. \quad (12.17)$$

Если кинетическая энергия в начальном и конечном состояниях равна нулю ($K_1 = K_2 = 0$), то $A'_{12} = \Pi_2 - \Pi_1$. В случае $A'_{12} > 0$ работа внешних сил идет на увеличение потенциальной энергии.

11. Закон сохранения полной энергии. Если неконсервативные силы отсутствуют или работа всех неконсервативных сил A'_{12} равна нулю, то полная энергия не меняется, т. е. имеет одно и то же значение в любой момент времени:

$$K + \Pi = \text{const.} \quad (12.18)$$

В такой форме закон сохранения энергии был получен немецким физиком Г. Гельмгольцем. Имея в виду переход от (12.15) к (12.17), М. Планк писал: «Как ни незначительным на первый взгляд кажется это преобразование — перспектива, которую оно открывает во всех областях физики, чрезвычайно велика, ибо возможность его обобщения для любых явлений природы легко бросается в глаза» [9].

Использование закона изменения (12.17) или сохранения (12.18) полной энергии может существенно упростить решение задач о движении тел. Рассмотрим, например, движение тела в поле тяжести Земли. Из закона сохранения полной энергии (12.18) следует

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgy_1 = \frac{mv_2^2}{2} + mgy_2.$$

Здесь индексы 1, 2 относятся к двум различным состояниям движущейся частицы. Поэтому те задачи, в которых речь идет о скорости частицы в различных точках траектории, могут быть решены на основе закона сохранения или изменения полной энергии.

ЗАДАЧА 12.7. Тело массой m_1 соскальзывает по наклонной плоскости высотой H , образующей угол α_1 с горизонтом, а тело массой m_2 — по наклонной плоскости той же высотой H , но образующей с горизонтом угол α_2 . Сравнить величины скоростей тел v_1 и v_2 у основания наклонных плоскостей. Трением пренебречь.

Решение. Примем основания горки за нулевой уровень потенциальной энергии. Тогда полная энергия тела на вершине горки, складываясь из кинетической (равной нулю) и потенциальной (равной mgH) энергии, оказывается равной mgH . У основания горки кинетическая энергия равна $(mv^2)/2$, потенциальная энергия равна нулю. Поскольку трение отсутствует, полная энергия имеет одно и то же значение в любой точке траектории. Приравнявая значения полной энергии на вершине горки и у основания, получим уравнение для определения скорости v :

$$mgH = \frac{mv^2}{2}.$$

Отсюда находим, что величина скорости $v = \sqrt{2gH}$ зависит только от высоты горки и не зависит от массы тела. Итак, величины скоростей v_1 и v_2 одинаковы.

ЗАДАЧА 12.8. Небольшое тело начинает скользить с высоты H по наклонной плоскости, образующей угол $\alpha = 45^\circ$ с горизонтом. В конце наклонной плоскости тело встречает абсолютно упругую горизонтальную плоскость. Найти максимальную высоту подъема тела после упругого удара о горизонтальную плоскость. Начальная скорость тела равна нулю, трением пренебречь.

Решение. После отскока тело будет двигаться по параболе (рис. 12.6). Для определения искомой высоты h проще всего воспользоваться законом сохранения полной энергии. На высоте h скорость тела имеет только горизонтальную составляющую v_r . Приравнявая полные энергии в двух точках — на высоте H и в верхней точке параболы на высоте h , — получим уравнение

$$0 + mgH = \frac{mv_r^2}{2} + mgh. \quad (1)$$

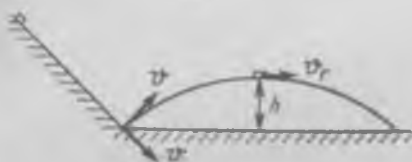


Рис. 12.6

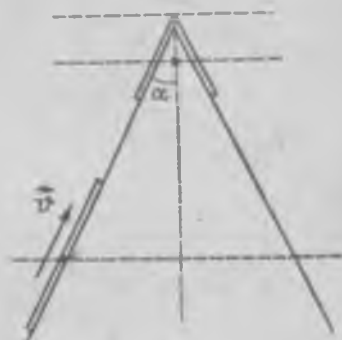


Рис. 12.7

Величина скорости тела у основания наклонной плоскости $v = \sqrt{2gH}$ (см. задачу 12.7), а горизонтальная составляющая скорости

$$v_r = \sqrt{2gH} \cos \alpha \quad (2)$$

при отскоке не изменяется. Подставляя (2) в (1), находим

$$h = H \sin^2 \alpha = \frac{1}{2} H.$$

ЗАДАЧА 12.9. Гибкая однородная цепь длиной L может двигаться по желобу, имеющему форму равнобедренного треугольника с углом 2α при вершине и расположенному в вертикальной плоскости. Трение отсутствует, предполагается, что цепь прилегает к желобу. Найти наименьшую начальную скорость цепи, необходимую для преодоления такой горки. В начальный момент времени расстояние между горизонтальными прямыми, проходящими через центр тяжести цепи и вершину желоба, равно H (рис. 12.7).

Решение. Для того чтобы цепь перевалила через горку, достаточно, чтобы скорость цепи в тот момент времени, когда ее середина достигнет вершины желоба, стала равной нулю. Выберем в качестве нулевого уровня потенциальной энергии горизонтальную прямую, проходящую через вершину желоба. Тогда в начальном состоянии полная энергия цепи равна

$$\frac{mv_0^2}{2} + (-mgH)$$

и в конечном состоянии

$$0 + \left(-mg \frac{L}{4} \cos \alpha \right).$$

(В конечном состоянии центр тяжести находится на расстоянии $(L/4) \cos \alpha$ от вершины треугольника.) Приравнивая эти величины, находим

$$v_0 = \sqrt{2gH \left(1 - \frac{L}{4H} \cos \alpha \right)}.$$

Заметим, что для точечного тела наименьшая скорость равна $\sqrt{2gH}$. В нашем примере $v_0 < \sqrt{2gH}$, так как высота, на которую поднимается центр тяжести цепи, $H - (L/4) \cos \alpha$, меньше, чем H .

Этот пример поясняет, почему прыгун в высоту, использующий технику «фосбери-флоп», может достичь большей высоты, чем при прыжке перекатом. Прыгун переносит через планку сначала корпус, голову и руки, потом ноги, при этом центр тяжести остается ниже уровня планки.

ПРИМЕР 12.10. Тепловая скорость v молекул воздуха у поверхности Земли при температуре 15°C равна приблизительно 500 м/с. Оценим высоту H атмосферы.

Рассмотрим движение какой-либо молекулы воздуха, скажем молекулы азота массой m , имеющей у земной поверхности скорость v , направленную под углом α к горизонту. У поверхности Земли полная энергия молекулы равна $(mv^2)/2$. В верхней точке траектории ее энергия равна $(m/2)(v \cos \alpha)^2 + mgH$, так как в верхней точке траектории скорость молекулы равна $v \cos \alpha$. Используя закон сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + 0 = \frac{mv^2 \cos^2 \alpha}{2} + mgH,$$

находим

$$H = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha.$$

Максимальной высоты достигнут те молекулы, начальная скорость которых направлена вертикально вверх ($\alpha = 90^\circ$). Эту высоту можно считать средней высотой атмосферы

$$H = \frac{v^2}{2g} = 12,5 \text{ км.}$$

Разумеется, приведенная оценка является приближенной: мы не учитывали столкновений молекул, изменения температуры с высотой, других явлений, оказывающих влияние на движение молекул воздуха.

ПРИМЕР 12.11. Пружина с прикрепленной к верхнему концу шайбой массой m стоит на горизонтальной плоскости. На какую высоту подскочит шайба, если пружину сжать на величину b и отпустить? Жесткость пружины — k , длина в ненапряженном состоянии — l_0 ; массой пружины пренебречь.

Выберем начало координатной оси y , направленной вертикально вверх на уровне l_0 от поверхности (рис. 12.8). Согласно (12.7)

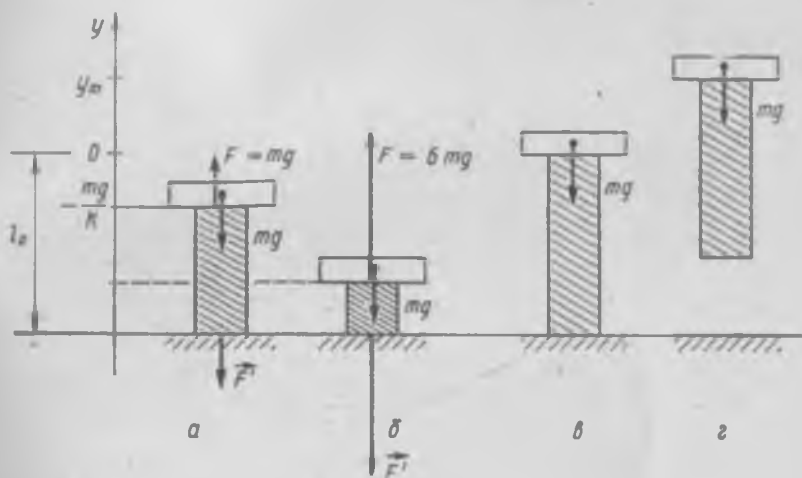


Рис. 12.8

сила, действующая со стороны пружины на шайбу $F_y = -ky$, где y — координата шайбы. В положении равновесия из уравнения

$$-mg - ky = 0$$

находим $y_1 = -mg/k$ (рис. 12.8a). При движении шайбы изменяется сила, действующая со стороны пружины на плоскость $F'(y) = -ky$. В положении равновесия $F'(y_1) = -mg$. Пружина с шайбой оторвется от плоскости в тот момент времени, когда сила F' станет равной нулю, т. е. при $y = 0$. Область допустимых значений y можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{k}{2} y^2 + mgy = E. \quad (1)$$

Постоянная E определяется начальными условиями $y(0) = -mg/k - b$, $v(0) = 0$:

$$E = + \frac{k}{2} y^2(0) + mgy(0) = \frac{k}{2} \left[b^2 - \left(\frac{mg}{k} \right)^2 \right].$$

Поскольку $v^2 > 0$, то из (1) следует, что при $b = mg/k$ максимальное значение $y = 0$. Если $b > mg/k$, то в точке $y = 0$ шайба с пружиной оторвется от плоскости. Высоту подъема y_m можно найти из закона сохранения полной энергии, приравнявая полную энергию шайбы E в нижнем положении (рис. 12.8б) и полную энергию $mg y_m$ шайбы в высшей точке траектории (рис. 12.8г):

$$y_m = \frac{k}{2mg} \left[b^2 - \left(\frac{mg}{k} \right)^2 \right].$$

Используем полученные формулы для оценки работы, совершаемой человеком при прыжке в высоту с места. Лучший прыжок в высоту, который может выполнить мужчина, поднимает его центр тяжести приблизительно на величину $y_m = 0,6$ м [1]. Мышцы ног при перемещении $|mg/k + b| = 0,3$ м совершают работу

$$A = \frac{k}{2} \left(\frac{mg}{k} + b \right)^2 = mg \left(\frac{mg}{k} + b + y_m \right).$$

Для прыгуна массой $m = 70$ кг находим $A = 617$ Дж. Величина мышечной силы, развиваемой в начальной стадии прыжка, $F = k(mg/k + b) = 6mg$ (рис. 12.8б).

12. Закон сохранения полной энергии для системы тел. Простейшая механическая система состоит по крайней мере из двух взаимодействующих тел. Однако в закон сохранения полной энергии (12.18) не входит кинетическая энергия второго тела. Мы приходим к заключению, что полученные соотношения требуют уточнения, поскольку мы неявно пренебрегли движением второго тела. Этот вопрос имеет принципиальное значение, так как закон сохранения энергии играет чрезвычайно важную роль в физических исследованиях. Действительно, получим решение задачи (12.7) в инерциальной системе отсчета, движущейся параллельно поверхности наклонной плоскости со скоростью $\sqrt{2gH}$. С точки зрения движущегося наблюдателя, полная энергия тела на вершине горки $(m/2)(2gH) + mgH = 2mgH$, у основания горки полная энергия равна нулю. Приравнявая полные энергии, получим парадоксальный вывод: $2mgH = 0$. Корректное решение этой задачи в любой инерциальной системе возможно только при использовании законов сохранения энергии и импульса замкнутой системы тел, в данном случае тела массой m и Земли.

Рассмотрим движение двух материальных точек массой m_a и m_b . В некоторый момент времени t положение точек определялось радиус-векторами $\vec{r}_a$ и $\vec{r}_b$, идущими из общего начала. Вектор $\vec{r} = \vec{r}_a - \vec{r}_b$ соединяет точку b с точкой a . Согласно (12.14) и определению (12.2) приращения кинетических энергий точек

$$\Delta K_a = \vec{f}_{ab} \Delta \vec{r}_a, \quad \Delta K_b = \vec{f}_{ba} \Delta \vec{r}_b,$$

где $\vec{f}_{ab}$ — сила, действующая на точку a со стороны точки b . Поскольку $\vec{f}_{ab} = -\vec{f}_{ba}$, то, складывая эти соотношения, получим

$$\Delta(K_a + K_b) = \vec{f}_{ab} \Delta(\vec{r}_a - \vec{r}_b).$$

Если сила $\vec{f}_{ab}$ направлена по прямой, соединяющей точки, и зависит от расстояния r между ними, то, определяя потенциальную энергию взаимодействия двух тел P_{ab} соотношением, аналогичным (12.10),

$$\vec{f}_{ab} \Delta(\vec{r}_a - \vec{r}_b) = -\Delta P_{ab}(r), \quad (12.19)$$

получим закон сохранения полной энергии системы тел:

$$K_a + K_b + P_{ab} = \text{const}. \quad (12.20)$$

В произвольный момент времени t' значения кинетической и потенциальной энергий станут равными K'_a , K'_b и P'_{ab} . В соответствии с (12.20)

$$K_a + K_b + P_{ab} = K'_a + K'_b + P'_{ab}.$$

Предположим, что $m_b \gg m_a$. Тогда это соотношение можно представить в виде

$$E'_a - E_a = K_b - K'_b, \quad (12.21)$$

где $E_a = K_a + P_{ab}$, $E'_a = K'_a + P'_{ab}$ — полная энергия тела массой m_a в моменты времени t и t' . Очевидно, эта величина не сохраняется. Однако если $|K_b - K'_b| \ll |E_a|$, $|E'_a|$, то правой частью можно пренебречь, и мы приходим к приближенному закону сохранения (12.18).

Если в замкнутой системе действуют силы трения, то полная энергия системы (12.20) уменьшается. Однако это не означает исчезновения энергии. Наличие трения приводит к увеличению кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия за счет уменьшения полной энергии. Для объяснения механизма этих потерь мы должны выйти за рамки механики. Действительно, в механике мы рассматриваем движение тела как целого, не учитывая «внутреннего» движения молекул, из которых оно состоит. По этой причине в механике энергия E тела как целого есть только часть полной энергии, которая на самом деле складывается из энергии E и внутренней энергии тела (см. § 22). При движении твердого тела по поверхности другого тела силы молекулярного сцепления приводят к взаимодействию атомов и возрастанию внутренней энергии обоих тел. Однако сумма полной энергии тела и внутренней энергии этого тела и окружающей среды всегда остается неизменной. Уменьшение полной энергии тела сопровождается возрастанием внутренней энергии

данного тела и соприкасающихся с ним тел. Сохранение полной энергии замкнутой системы, равной сумме полной и внутренней энергии, является частным случаем всеобщего закона сохранения и превращения энергии всех форм движения материи.

Итак, в результате действия сил трения внутренняя энергия тел возрастает. Можно ли утверждать, что тела нагреются или передадут часть внутренней энергии окружающей среде. Таким образом, возникает вопрос: как система распорядится приращением внутренней энергии? Ответ известен: конечное состояние зависит от характера термодинамического процесса, который реализуется при взаимодействии тел. Например, две принципиально различные причины — адиабатическое сжатие и трение — приводят к одинаковому следствию — повышению температуры. Поэтому, не изучив следующего раздела — молекулярной физики, нельзя правильно судить о тепловых явлениях в механических процессах. Наиболее распространенным заблуждением, существующим и поныне, является утверждение, что при отсутствии трения в механических процессах и подвода теплоты температура взаимодействующих тел будет сохраняться неизменной. Вот почему идеальная механика мыслилась как изотермическая наука [10]. Причина этого в том, что повышение температуры при адиабатическом сжатии твердых тел в окружающем нас мире достаточно мало. Другая причина связана с тем, что современное понимание тепловых явлений стало возможным только после появления в 1865 г. работы немецкого физика Р. Клаузиуса.

13. Столкновение тел. Если в начальный момент времени два тела находятся достаточно далеко друг от друга, а их начальные скорости направлены так, что с течением времени происходит сближение тел, то в результате взаимодействия их скорости изменятся как по величине, так и по направлению. В этом случае говорят, что произошло столкновение тел. Столкновение тел определяется характером их взаимодействия. Мы будем предполагать, что тела взаимодействуют при непосредственном контакте. Заметим, что если тела взаимодействуют на расстоянии, то столкновение может происходить и без непосредственного соприкосновения тел.

В зависимости от упругих свойств тел столкновения могут быть упругими, частично упругими и неупругими. Столкновение двух тел называется упругим, если оно не сопровождается изменением их внутреннего состояния. Кинетическая энергия тел превращается сначала в потенциальную энергию упругого сжатия, а затем полностью переходит в кинетическую энергию разлетающихся тел.

При абсолютно неупругом ударе тела объединяются — их относительная скорость равна нулю. Неупругий удар сопровождается энергетическими превращениями. При этом кинетическая энергия тел после удара меньше, чем до удара, и может даже обратиться в нуль. Внутренняя энергия сталкивающихся тел после

удара возрастает. Следствием этого может явиться превращение части или всей кинетической энергии в теплоту.

Если столкновение происходит в поле тяжести Земли, то при любом характере взаимодействия сохраняется горизонтальная составляющая количества движения соударяющихся тел.

Более того, иногда систему сталкивающихся тел можно считать замкнутой в течение времени взаимодействия. Это возможно только в том случае, если длительность взаимодействия очень мала. При этом согласно (10.1) возникают столь большие силы, что можно пренебречь всеми внешними силами, действующими на соударяющиеся тела.

ПРИМЕР 12.12. На идеально гладкой горизонтальной плоскости лежит шар массой m_2 . На него налетает шар массой m_1 , скорость которого v . Между шарами происходит упругий центральный удар. Определим скорости шаров после столкновения и величину энергии, переданной первоначально покоящемуся шару.

Проведем ось x , параллельную вектору v , и обозначим проекции скоростей первого и второго шаров после удара через u_1 и u_2 . Из законов сохранения горизонтальной составляющей импульса (10.5) и полной энергии (12.18) следует, что

$$m_1 v + 0 = m_1 u_1 + m_2 u_2, \quad (1)$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} + 0 = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}. \quad (2)$$

Из уравнения (1) найдем

$$u_2 = \frac{m_1}{m_2} (v - u_1). \quad (3)$$

Подставляя это выражение в (2), получим уравнение, из которого найдем скорость первого шара после удара

$$u_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (4)$$

Используя значение u_1 , из (3) найдем скорость второго шара после удара

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v. \quad (5)$$

Энергия, переданная первоначально покоящемуся шару, равна его кинетической энергии после удара

$$K_2 = \frac{m_2 u_2^2}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{m_1 v^2}{2}. \quad (6)$$

Кинетическая энергия первого шара после удара

$$K_1 = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{m_1 v^2}{2}. \quad (7)$$

Проанализируем полученные формулы. Из (4) видно, что налетающий шар отскакивает назад, если его масса $m_1 < m_2$. Если $m_1 > m_2$, то шар продолжает движение в направлении удара, но с меньшей скоростью. Если массы шаров равны, то налетающий шар остановится, а второй начнет движение со скоростью налетающего — шары обмениваются скоростями. Если $m_1 = \frac{1}{3}m_2$, то $u_2 = -u_1 = \frac{1}{2}v$. В этом случае движутся в противоположные стороны с одинаковыми по величине скоростями.

Интересно исследовать различные предельные случаи. Если масса первого шара $m_1 \gg m_2$, то из (4) и (5) следует, что тяжелый налетающий шар почти не изменит свою скорость, в то время как первоначально покоящийся легкий шар начнет двигаться со скоростью, приблизительно равной $2v$ (сравните с задачей 5.5).

Если, наоборот, масса первого шара $m_1 \ll m_2$, то, как видно из (4), (5), он отскакивает назад, причем скорость этого шара после удара почти не изменяется по величине, а первоначально покоящийся массивный шар приобретает небольшую скорость $\simeq (2m_1/m_2)v$. Поэтому энергия $K_2 \simeq 2m_1^2 v^2 / m_2 \ll m_1 v^2 / 2$, переданная шару массой m_2 , незначительна. Итак,

$$u_1 = -v, \quad u_2 = \frac{2m_1}{m_2} v, \quad m_1 \ll m_2,$$

$$u_1 = -\frac{1}{2}v, \quad u_2 = \frac{1}{2}v, \quad m_1 = \frac{1}{3}m_2,$$

$$u_1 = 0, \quad u_2 = v, \quad m_1 = m_2,$$

$$u_1 \simeq v, \quad u_2 \simeq 2v, \quad m_1 \gg m_2.$$

Энергия (6), переданная покоящемуся шару, максимальна только в том случае, когда массы шаров равны. Этот вывод, полученный при рассмотрении центрального удара, справедлив также и при нецентральных соударениях. Поэтому, когда в ядерной технике возникает необходимость уменьшить скорость нейтронов, выделяющихся при ядерных реакциях, это осуществляется пропусканием нейтронов через вещества с небольшим атомным весом. Например, из (7) следует, что при упругом лобовом ударе нейтрона с ядром дейтерия, масса которого равна удвоенной массе нейтрона ($m_2 = 2m_1$), энергия нейтрона уменьшится в 9 раз, а при столкновении с ядром углерода в блоке графита ($m_2 = 12m_1$) уменьшится только в 1,4 раза.

ЗАДАЧА 12.13. Два одинаковых гладких шара испытывают упругий нецентральный удар; скорости шаров не лежат на пря-

мой, соединяющей их центры. Второй шар до столкновения покоился. Определить угол разлета шаров.

Решение. Обозначим скорость первого шара до удара через $\vec{v}$, а скорости первого и второго шаров после удара через $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Угол между векторами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ является искомым углом разлета шаров после удара.

Согласно закону сохранения энергии и импульса

$$m_1 \vec{v} = m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2,$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}.$$

Сократив на массу, получим

$$\vec{v} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2, \quad (1)$$

$$v^2 = u_1^2 + u_2^2. \quad (2)$$

Из (1) следует, что векторы $\vec{v}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ образуют треугольник, а из (2) ясно, что этот треугольник прямоугольный с катетами $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$. Возводя (1) в квадрат

$$v^2 = u_1^2 + 2\vec{u}_1\vec{u}_2 + u_2^2, \quad (3)$$

находим из (2), (3), что $\vec{u}_1\vec{u}_2 = 0$. Поскольку скалярное произведение векторов $\vec{u}_1$ и $\vec{u}_2$ равно нулю, то они образуют угол, равный 90° .

Этот результат можно понять из качественных соображений, разлагая скорость $\vec{v}$ на две составляющие, одна из которых $\vec{v}_\parallel$ параллельна линии, соединяющей центры шаров, а другая $\vec{v}_\perp$ перпендикулярна ей. Составляющая $\vec{v}_\parallel$ не изменится при столкновении, так как шары гладкие, удар упругий. Составляющая $\vec{v}_\perp$ обратится после столкновения в нуль, так как шары имеют равные массы (см. пример 12.12). Поэтому после удара налетающий шар будет иметь скорость $\vec{u}_1 = \vec{v}_\parallel$, а второй шар — скорость, равную $\vec{u}_2 = \vec{v}_\perp$; шары разлетаются под прямым углом (рис. 12.9).

ЗАДАЧА 12.14. На пути тела массой m , скользящего по гладкой плоскости, находится горка высотой H , массой M . При какой минимальной скорости v тела оно сможет преодолеть горку? Горка может скользить без трения по плоскости, не отрываясь от нее.

Решение. Эта задача решается с помощью законов сохранения полной энергии и горизонтальной составляющей импульса систе-

мы «тело — горка». Поскольку потенциальная энергия горки по условию задачи не меняется, ее можно не учитывать при использовании закона сохранения полной энергии.

В начальном состоянии импульс системы равен mv , а полная энергия системы является суммой полных энергий тела и горки, т. е. равна $mv^2/2$. В конечном состоянии тело находится на верши-

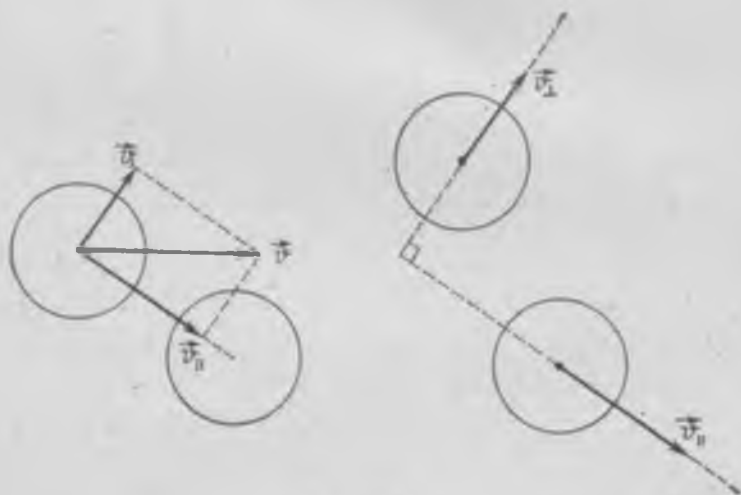


Рис. 12.9

не горки (покоясь относительно нее), движущейся со скоростью u . Импульс системы равен $(m+M)u$, полная энергия —

$$\frac{1}{2} (m+M) u^2 + mgH.$$

Законы сохранения приводят к уравнениям

$$mv = (m+M)u, \quad (1)$$

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} (m+M) u^2 + mgH. \quad (2)$$

Из второго уравнения видно, что часть кинетической энергии тела идет на сообщение горке кинетической энергии, при этом полная энергия тела становится равной $mu^2/2 + mgH$. Подставляя u из (1) в (2), найдем искомое значение скорости

$$v = \sqrt{2gH \left(1 + \frac{m}{M}\right)}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что если $M \gg m$, то минимальное значение скорости $v \approx \sqrt{2gH}$,

как в случае закрепленной горки.

ЗАДАЧА 12.15. Частица массой m с кинетической энергией K сталкивается с атомом массой M . Найти энергию Q , переданную атому в результате абсолютно неупругого удара частицы с атомом.

Решение. После неупругого удара атом и частица движутся с одинаковой скоростью u . Согласно закону сохранения импульса системы (10.4)

$$mv + 0 = (m + M)u, \quad (1)$$

где v — скорость частицы до столкновения.

Закон изменения полной энергии позволяет заключить, что

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{(m + M)u^2}{2} + Q, \quad (2)$$

где Q — энергия возбуждения атома (которая в дальнейшем может перейти в другие формы энергии). Из уравнений (1) и (2) находим

$$Q = \frac{M}{m + M} K.$$

Из этого соотношения следуют интересные предельные случаи:

$$Q = \begin{cases} K, & m \ll M, \\ \frac{1}{2} K, & m = M, \\ \frac{M}{m} K \ll K, & m \gg M. \end{cases}$$

Мы приходим к выводу, что при неупругом столкновении легкой частицы (например, электрона с атомом) происходит полная передача ее энергии атому — атом возбуждается и затем испускает фотон.

Если рассмотреть аналогичную задачу, в которой сталкиваются макроскопические тела массой m и M , то величина Q равна приращению внутренней энергии системы тел.

§ 13. ДВИЖЕНИЕ ТЕЛ ПО ОКРУЖНОСТИ

1. Кинематика. Положение частицы на окружности можно определить двумя способами: задавая функцию $s(t)$, где s — длина дуги отрезка между фиксированной точкой A (рис. 13.1) и частицей в момент времени t , или функцию $\varphi(t)$, где φ — угол (в радианах) между прямой, проходящей через центр окружности и

точку A , и прямой, проходящей через центр окружности и частицу. По определению радианной меры $s=R\varphi$, где R — радиус окружности.

Быстрота изменения $\varphi(t)$ называется угловой скоростью ω и определяется производной функции $\varphi(t)$:

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta t} = \varphi'. \quad (13.1)$$

Угловая скорость измеряется в рад/с.



Рис. 13.1

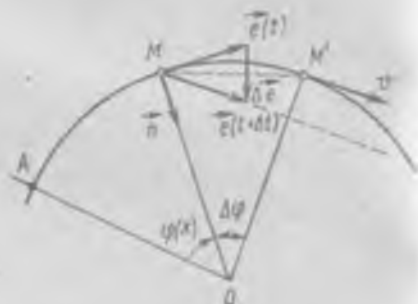


Рис. 13.2

Величина скорости v , определяемая согласно (3.7),

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s',$$

связана с угловой скоростью соотношением

$$v = \omega R. \quad (13.2)$$

Равномерным вращением называется движение с постоянными величинами v и ω . Время, за которое частица совершает один оборот, возвращаясь в исходное положение, называется периодом вращения и обозначается обычно буквой T . За период T угол поворота радиуса $\Delta\varphi = 2\pi$. Следовательно, угловая скорость и период связаны простым соотношением $\omega = 2\pi/T$.

Скорость точки всегда направлена по касательной к траектории (окружности), т. е. в нашем случае под прямым углом к радиусам OM , OM' и т. д. (рис. 13.2). Если $\vec{v}(t)$, $\vec{v}(t+\Delta t)$ — скорости точек в положениях M и M' , то, очевидно, $\vec{v}(t) \neq \vec{v}(t+\Delta t)$ даже в случае равномерного вращения частицы с постоянной величиной скорости. Таким образом, приращение $\Delta\vec{v} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ никогда не обращается в нуль.

Для вычисления ускорения частицы в момент t представим вектор скорости в виде

$$\vec{v} = \frac{v}{v} \vec{v} = v \vec{e},$$

где $\vec{e} = \vec{v}/v$ — единичный вектор параллельный скорости. Согласно правилу дифференцирования произведения получим приращение скорости

$$\Delta \vec{v} = \Delta v \vec{e} + v \Delta \vec{e}.$$

Следовательно, вектор ускорения (3.6) равен

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{e} + v \frac{\Delta \vec{e}}{\Delta t}. \quad (13.3)$$

Мы видим, что ускорение имеет два слагаемых. Одно из них, направленное по касательной к траектории, параллельно скорости и равно $a_{\tau} = \Delta v / \Delta t$. Эта составляющая полного ускорения называется касательной (или тангенциальной). Если частица движется с постоянной по величине скоростью, то $a_{\tau} = 0$. Второй вектор в (13.3) перпендикулярен к скорости. Чтобы убедиться в этом, запишем скалярное произведение единичных векторов: $\vec{e}\vec{e} = 1$ и продифференцируем это соотношение. В результате получим $\vec{e}\vec{e}' = 0$. Поскольку скалярное произведение вектора $\vec{e}$ и производной вектора $\vec{e}'$ равно нулю, то эти векторы взаимно перпендикулярны. Из рис. 13.2 видно, что вектор $\vec{e}'$ параллелен единичному вектору $\vec{n}$, направленному к центру окружности. Определим далее величину вектора $|\Delta \vec{e}|$. Из подобия треугольника $ОММ'$ и треугольника, образованного векторами $\vec{e}(t)$, $\vec{e}(t+\Delta t)$, $\Delta \vec{e}$, находим

$$\frac{|\Delta \vec{e}|}{MM'} = \frac{1}{R}.$$

Хорду $ММ'$ в этом соотношении можно считать равной длине дуги $ММ' = v \Delta t$. Совершенно ясно, что в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ ошибка от такой замены может быть сделана как угодно малой. Таким образом,

$$\left| \frac{\Delta \vec{e}}{\Delta t} \right| = \frac{v}{R},$$

$$\frac{\Delta \vec{e}}{\Delta t} = \frac{v}{R} \vec{n}.$$

Подставляя это выражение в (13.3), получим полное ускорение частицы, движущейся по окружности

$$\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \vec{e} + \frac{v^2}{R} \vec{n}. \quad (13.4)$$

Составляющая ускорения $a_n = v^2/R$ называется центростремительным (или нормальным) ускорением. Несмотря на то что величина скорости в общем случае зависит от времени, центростремительное ускорение связано только с изменением направления вектора скорости.

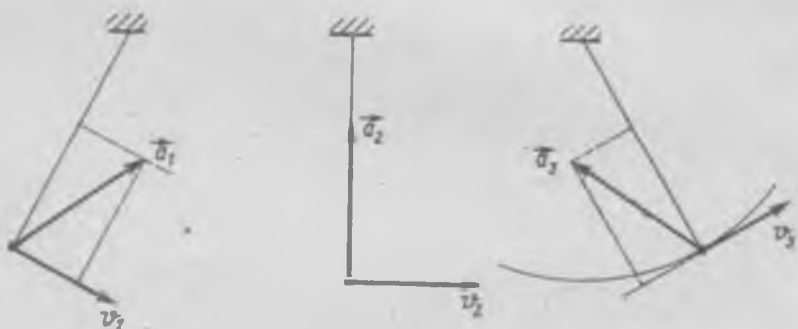


Рис. 13.3

На рис. 13.3 изображено расположение векторов ускорения и скорости в каждом из трех последовательных положений маятника, движущегося в плоскости.

2. Динамика вращательного движения. Основным уравнением динамики как вращательного, так и поступательного движения тела является второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (13.5)$$

В общем случае движения по окружности ускорение тела имеет две составляющие: одну a_v вдоль скорости по касательной к окружности и другую a_n , перпендикулярную к первой, направленную к центру окружности. Учитывая векторный характер второго закона Ньютона, из (13.5) получим три уравнения движения:

$$ma_v = F_{1v} + F_{2v} + \dots, \quad (13.5a)$$

$$m \frac{v^2}{R} = F_{1n} + F_{2n} + \dots, \quad (13.5b)$$

$$m \cdot 0 = F_{1\perp} + F_{2\perp} + \dots \quad (13.5b)$$

Здесь F_n , F_v , $F_{\perp}$ — проекции сил на направления к центру вра-

щения, касательное к окружности и перпендикулярное к плоскости, в которой лежит окружность. Уравнение (13.5б) гласит: произведение массы тела на центростремительное ускорение равно сумме проекций всех действующих сил на направление к центру вращения (это направление считается положительным). Сумму проекций сил, стоящих в правой части (13.5б), часто называют центростремительной силой. Отсюда видно, что центростремительной силы как «таковой» в природе нет, движение по окружности происходит под действием известных ранее сил — тяжести, реакции и силы трения. Из уравнения (13.5в) следует, что сумма проекций сил на направление, перпендикулярное к плоскости окружности, равна нулю.

Рассмотрим подробнее равномерное вращение тела по окружности. Согласно второму закону Ньютона ускорение параллельно силе, приложенной к телу. Поэтому тело, вращающееся по окружности с постоянной по величине скоростью, должно находиться под действием силы, направленной по радиусу к центру окружности. Эта сила является результирующей всех сил, возникающих при взаимодействии рассматриваемого тела с какими-либо другими телами, и удерживает вращающееся тело на окружности. Так как при равномерном вращении составляющая ускорения a_v равна нулю, то согласно (13.5а) сумма проекций всех сил на направление, касательное к окружности, также равна нулю.

Мы видим, что решение задач на динамику вращательного движения аналогично решению задач на прямолинейное движение. Для решения задач на вращательное движение необходимо:

а) перечислить все силы, приложенные к телу, движущемуся по окружности;

б) составить уравнения движения (13.5).

В связи с этим следует сделать важное замечание. При равномерном вращении ($a_v=0$) уравнение (13.5а) примет простой вид: $0=F_{1v}+F_{2v}+\dots$. При неравномерном вращении ($a_v\neq 0$) уравнение (13.5а), если не использовать аппарат высшей математики, не дает существенной информации для решения задачи. В этом случае вместо уравнения (13.5а) надо записать закон изменения (или сохранения) полной энергии (12.17), который является следствием всех уравнений (13.5).

ПРИМЕР 13.1. На тонкой нити длиной l подвешен шарик массой m . Если радиус шарика существенно меньше длины нити, то его можно рассматривать как материальную точку. В этом случае рассматриваемая система называется сферическим маятником. Далее изучим движение шарика в вертикальной плоскости, проходящей через точку подвеса (рис. 13.4а). Положение шарика определяется углом $\varphi(t)$. На шарик действуют сила тяжести mg и натяжение нити T . Согласно данному выше рецепту запишем уравнение (13.5б), которое имеет вид

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg \cos \varphi, \quad (1)$$

и закон сохранения полной энергии

$$\frac{mv^2}{2} + \Pi(\varphi) = E. \quad (2)$$

Здесь потенциальная энергия $\Pi(\varphi) = -mgl \cos \varphi$ (нулевой уровень совпадает с горизонтальной прямой, проходящей через центр ок-

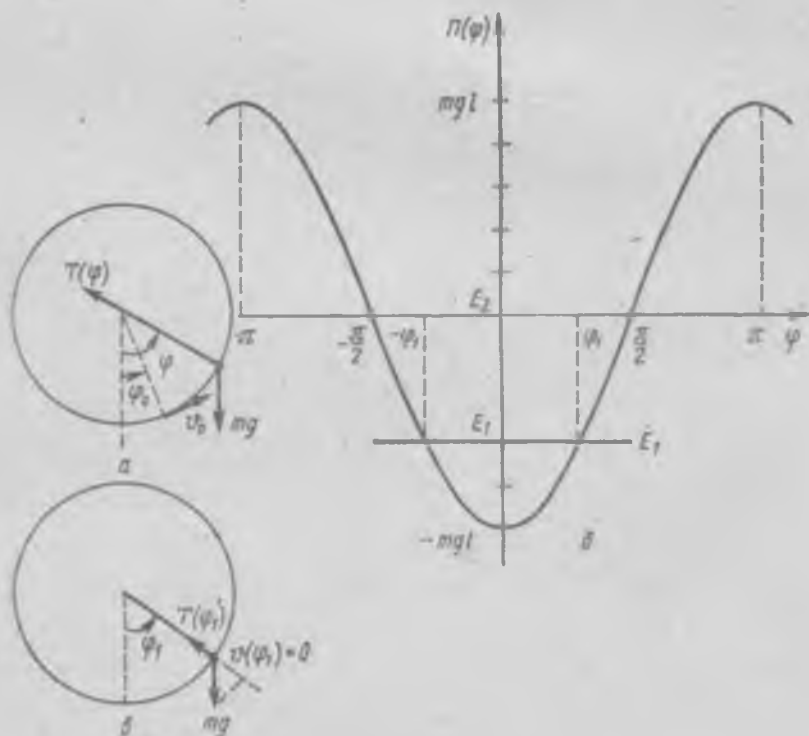


Рис. 13.4

ружности), E — полная энергия — константа, определяемая начальными условиями. Предположим, что в положении $\varphi(0) = \varphi_0$ шарiku сообщили скорость $v(0) = v_0$. Тогда

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - mgl \cos \varphi_0.$$

Уравнения (1), (2) позволяют ответить на многие вопросы динамики шарика.

Подставляя v^2 из (2) в (1), получим зависимость натяжения нити от угла:

$$T(\varphi) = 3mg \cos \varphi + (2/l)E. \quad (3)$$

Поскольку $v^2 = (2/m)(E - \Pi(\varphi)) \geq 0$, то

$$\cos \varphi \geq -\frac{E}{mgl}. \quad (4)$$

Если бы шарик был прикреплен к невесомому стержню длиной l , то границы движения по углу φ полностью определялись бы неравенством (4). В нашем случае шарик будет двигаться по окружности при условии $T(\varphi) > 0$:

$$\cos \varphi \geq -\frac{2E}{3mgl}. \quad (5)$$

Таким образом, область возможных значений угла φ определяется системой неравенств (4), (5).

Рассмотрим теперь несколько характерных ситуаций или по существу задач.

А. Колебания шарика. Пусть $-mgl < E < 0$. Этому условию соответствуют начальные условия в области $0 < \varphi_0 < \pi/2$, а область движения определяется неравенством (4).

1. Значение $E = -mgl$ реализуется единственным начальным условием $\varphi(0) = 0$, $v_0 = 0$. Тогда из (2) следует $v(\varphi) = 0$ — маятник находится в состоянии покоя.

2. Предположим, что полная энергия $E = E_1$ лежит в области $-mgl < E_1 < 0$. На рис. 13.46 изображен график функции $\Pi(\varphi)$ и прямая $E = E_1$. Учитывая (4), получим область допустимых значений

$$-\varphi_1 < \varphi \leq \varphi_1, \quad \cos \varphi_1 = -\frac{E_1}{mgl}, \quad \varphi_1 < \pi/2.$$

В этом случае говорят, что шарик движется в потенциальной яме. В крайних положениях скорость шарика равна нулю, а натяжение $T(\varphi_1) = -E_1/l > 0$ принимает наименее возможное значение (рис. 13.4в).

3. При $E = 0$ допустимая область значений угла φ $-\pi/2 < \varphi \leq \pi/2$. Полагая $\varphi_0 = 0$, т. е. выбирая начальное положение в нижней точке траектории, найдем значение начальной скорости $v_0 = \sqrt{2gl}$, которую необходимо сообщить шарiku, чтобы он поднялся до уровня горизонтальной прямой, проходящей через центр окружности. Из (3) следует, что $T(\varphi) > 0$, причем $T(\pi/2) = 0$, $T(0) = 3mg$. В положении $\varphi = \pi/2$ скорость тела равна нулю, а ускорение $a = g$; в положении $\varphi = 0$ величина ускорения равна $2g$. Ответим

теперь на вопрос: при каком значении угла φ вектор полного ускорения расположен горизонтально. Из системы уравнений

$$\frac{mv^2}{2} - mgl \cos \varphi = 0, \quad \frac{v^2}{l} = g \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \varphi,$$

находим $\operatorname{tg} \varphi = \sqrt{2}$. В этом положении натяжение нити $T = \sqrt{3}mg$.

Б. Пусть $0 < E < \frac{3}{2}mgl$. Этому неравенству соответствуют начальные положения $0 < \varphi_0 < 2\pi$. Разрешенная область движения определяется неравенством (5). С ростом угла φ функция $T(\varphi)$ убывает в области $0 < \varphi < \pi$.

Если $E = E_3 < \frac{3}{2}mgl$, то при значении φ_3 , определяемом условием

$$\cos \varphi_3 = -\frac{2}{3} \frac{E_3}{mgl},$$

сила натяжения обратится в нуль. Скорость шарика в этом положении найдем из (2): $v_3^2 = (2/3m)E_3$. Далее тело будет двигаться только под действием силы тяжести по параболе.

При значении $E = \frac{3}{2}mgl$ шарик достигает высшей точки траектории $\varphi = \pi$; $T(\pi) = 0$, $T(0) = 6mg$.

В. Вращение маятника: $E > \frac{3}{2}mgl$. В этом случае выполняются оба неравенства (4), (5). При $E > \frac{3}{2}mgl$ шарик будет вращаться, причем нить будет натянута в любой точке траектории. Рассмотрим два случая.

1. Шарiku сообщают начальную скорость v_0 в положении $\varphi_0 = 0$. Тогда $E = mv_0^2/2 - mgl$, $v_0 > \sqrt{5gl}$. Сила натяжения в верхнем положении $T(\pi) = -5mg + mv_0^2/l$, в нижнем — $T(0) = mg + mv_0^2/l > 6mg$.

2. Шарiku сообщают начальную скорость v_0 в положении $\varphi_0 = \pi$. В этом случае $E = mv_0^2/2 + mgl$, $v_0 > \sqrt{gl}$, $T(\pi) = -mg + mv_0^2/l$, $T(0) = 5mg + mv_0^2/l > 6mg$.

ЗАДАЧА 13.2. Бусинка массой m продета сквозь проволочное кольцо, поставленное вертикально, и находится в его верхней точке. Найти зависимость величины давления N бусинки на кольцо при ее соскальзывании от угла α между вертикалью и радиусом, проведенным через бусинку. Трением пренебречь.

Решение. Рассмотрим бусинку в положении B (рис. 13.5).

На нее действует сила тяжести mg и сила реакции N . Под действием этих сил бусинка движется по окружности с возрастающей по величине скоростью. Составим уравнение движения бусинки:

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}.$$

В положении B сумма проекций всех сил на направление к цент-

ру равна произведению массы бусинки на центростремительное ускорение:

$$\frac{mv^2}{R} = mg \cos \alpha + N_R. \quad (1)$$

Здесь N_R — проекция силы реакции на ось BO , R — радиус кольца, v — скорость бусинки в положении B , которую можно найти, используя закон сохранения полной энергии. Для этого выберем в качестве нулевого уровня отсчета потенциальной энергии горизонтальную прямую, проходящую через точку A . Тогда полная энергия в точке A равна нулю, а в точке B полная энергия равна сумме кинетической $mv^2/2$ и потенциальной энергии, равной $-mgR(1-\cos \alpha)$. Следовательно,

$$0 = \frac{mv^2}{2} - mgR(1 - \cos \alpha). \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим силу давления бусинки на кольцо

$$P(\alpha) = -N_R = mg(3\cos \alpha - 2). \quad (3)$$

Когда бусинка проходит положение, определяемое углом α_0 ($\cos \alpha_0 = 2/3$), она находится в невесомости, так как $P(\alpha_0) = 0$. При $0 < \alpha < \alpha_0$ сила давления направлена к центру окружности, а при $\alpha_0 < \alpha < \pi$ сила давления направлена по радиусу от центра. В нижней точке траектории ускорение $a = 4g$, а вес бусинки возрастает в пять раз: $P = 5mg$.

ЗАДАЧА 13.3. Какова должна быть наименьшая скорость мотоцикла, для того чтобы он мог ехать по внутренней поверхности вертикального кругового цилиндра радиусом $R = 6$ м по горизонтальной окружности, если известно, что коэффициент трения скольжения между шинами и поверхностью цилиндра $k = 0,4$. Определить угол наклона корпуса мотоцикла к вертикали.

Решение. На мотоциклиста действуют три силы: сила реакции $\vec{N}$, перпендикулярная поверхности цилиндра, сила тяжести mg и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$ (рис. 13.6). Согласно второму закону Ньютона $m\vec{a} = mg + \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}$. Запишем проекции этого векторного уравнения на три взаимно перпендикулярные оси. Уравнение (13.5а) имеет вид $0 = 0$, а два других (13.5б) и (13.5в)

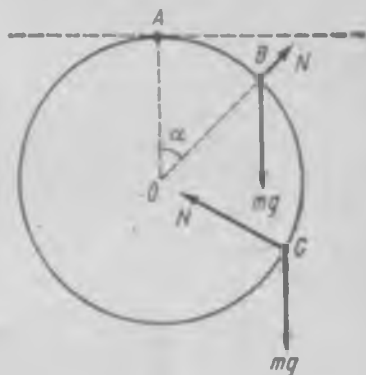


Рис. 13.5

$$m \frac{v^2}{R} = N, \quad (1)$$

$$0 = F_{\text{тр}} - mg. \quad (2)$$

Уравнения (1), (2) содержат три неизвестных величины. Однако при движении с наименьшей скоростью мы должны положить $F_{\text{тр}}$ равной силе трения покоя kN . Подставляя это значение в (2),

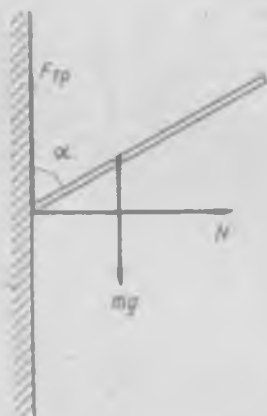


Рис. 13.6

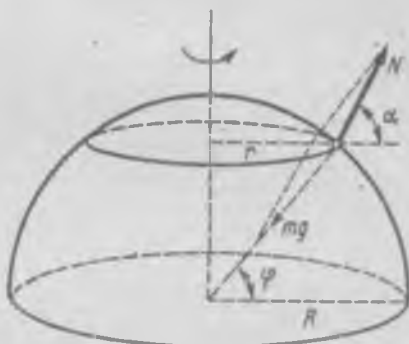


Рис. 13.7

определим величину реакции, зная которую из (1) найдем наименьшую скорость движения

$$v = \sqrt{\frac{gR}{k}} = 12,1 \text{ м/с.}$$

Угол α , образуемый корпусом мотоциклиста с вертикалью, найдем, записав равенство нулю моментов сил трения и реакции относительно центра тяжести мотоциклиста (см. рис. 13.6):

$$F_{\text{тр}} \sin \alpha - N \cos \alpha = 0,$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{k} = \frac{5}{2}, \quad \alpha = 68^\circ 12'.$$

ПРИМЕР 13.4. Определим вес тела массой $m=1$ кг на географической широте φ .

Пусть тело лежит на поверхности Земли. На него действуют сила притяжения Земли mg , направленная к центру, и сила реакции $\vec{N}$. Мы уже говорили (см. пример 9.5), что вес тела равен силе давления тела на подставку, численно равную реакции N .

Данное тело вращается вместе с Землей с угловой скоростью ω , находясь от оси вращения на расстоянии $r = R \cos \varphi$, R — радиус Земли. Это значит, что равнодействующая сил притяжения и реакции должна быть направлена перпендикулярно оси вращения. Поэтому сила реакции образует некоторый угол $\alpha \neq \varphi$ (рис. 13.7) с перпендикуляром к оси вращения. Запишем уравнение движения $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}$, которое эквивалентно уравнению (13.56)

$$m\omega^2 R \cos \varphi = mg \cos \varphi - N \cos \alpha \quad (1)$$

и уравнению (13.5в)

$$m \cdot 0 = -mg \sin \varphi + N \sin \alpha. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2), содержащих две неизвестные величины N и α , находим вес тела

$$P = N = \sqrt{(mg)^2 - m^2 \omega^2 R (2g - \omega^2 R) \cos^2 \varphi}. \quad (3)$$

Рассмотрим два предельных случая. 1) Тело находится на полюсе. Тогда $\varphi = \pi/2$ и вес тела $P = mg$ равен силе притяжения. 2) Тело находится на экваторе. В этом случае широта $\varphi = 0$ и вес тела

$$P = mg - m\omega^2 R \quad (4)$$

принимает наименьшее значение. Поскольку радиус Земли $R = 6350$ км, $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(24 \cdot 60 \cdot 60) = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$, то масса в 1 кг имеет вес $P = (1 - 0,0033) \text{ кгс}$. Таким образом, из-за вращения Земли вес тела на экваторе уменьшается примерно на 0,3% веса на полюсе. Из формулы (4) следует, что если бы Земля вращалась с угловой скоростью $\omega^2 = g/R$, то тела на экваторе были бы невесомы. В этом случае линейная скорость тел на экваторе $v = \omega R = \sqrt{gR}$, т. е. равнялась бы первой космической скорости. Заметим, что при вычислении силы веса (3) мы не учитывали сплюснутость Земли у полюсов.

ЗАДАЧА 13.5. Тело массой $m = 10$ кг, имеющее скорость $v = 5$ м/с, скользит по желобу, расположенному в горизонтальной плоскости. Желоб состоит из прямолинейного участка AB и дуги параболы BC . В координатах xu уравнение кривой, образующей желоб,

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ kx^2, & x > 0, \end{cases}$$

где $k = 2 \text{ м}^{-1}$. Найти силу, действующую на тело в точке сопряжения прямой и параболы.

Решение. На прямолинейном участке желоба сумма сил тяжести $m\vec{g}$ и реакции $\vec{N}$ равна нулю. При движении по параболичес-

ской части желоба сила реакции становится равной $\vec{N} + \vec{T}$, где $\vec{T}$ — вектор, лежащий в горизонтальной плоскости и перпендикулярный касательной к параболе в каждой точке траектории тела. В точке B вектор $\vec{T}$ направлен по оси y . Дуга параболы вблизи точки B может быть представлена как часть дуги окружности радиусом R , центр которой находится на оси y (рис. 13.8). Тогда из (13.56) следует

$$\frac{mv^2}{R} = T.$$

Найдем радиус этой окружности. Уравнение окружности в области $kx \ll 1$ должно иметь вид

$$x^2 + (y - R)^2 = R^2.$$

Подставляя сюда $y = kx^2$ и пренебрегая членами $\sim (kx)^2$, найдем значение $R = 1/2k$. Следовательно, при переходе на параболическую часть желоба тело испытает удар силой $T = 2kmv^2$. Подставляя числовые данные, находим $T = 1000 \text{ Н} \approx 100 \text{ кгс}$.

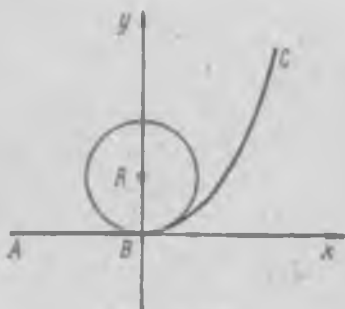


Рис. 13.8



Рис. 13.9

ЗАДАЧА 13.6. Невесомый стержень может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O и перпендикулярной к стержню (рис. 13.9). На концах стержня укреплены грузы равных масс, находящиеся на расстояниях a и $2a$ соответственно от точки O . В начальный момент стержень расположен горизонтально и отпущен. Определить линейную скорость грузов в момент прохождения стержнем положения равновесия.

Решение. Пусть скорости грузов в момент прохождения положения равновесия равны v_1 и v_2 . Тогда, пренебрегая трением, из закона сохранения полной энергии находим

$$0 = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{mv_2^2}{2} + mga - mg \cdot 2a. \quad (1)$$

Поскольку угловая скорость ω вращения грузов одинакова, то

$$v_1 = \omega a, \quad v_2 = 2\omega a. \quad (2)$$

Учитывая (2), из (1) находим $\omega = \sqrt{2g/5a}$. Следовательно, искомые скорости соответственно равны

$$v_1 = \sqrt{\frac{2ga}{5}}, \quad v_2 = 2\sqrt{\frac{2ga}{5}}.$$

ЗАДАЧА 13.7. Небольшое тело начинает соскальзывать без начальной скорости из верхней точки неподвижной полусферы радиусом R . Как высоко оно подскочит после удара о поверхность, на которой находится полусфера? Удар считать абсолютнo упругим, полусфера жестко закреплена на плоскости.

Решение. Приравнявая полные энергии в начальной точке траектории и в точке максимального подъема (рис. 13.10), получим уравнение

$$mgR = \frac{mv_1^2}{2} + mgh. \quad (1)$$



Рис. 13.10

Используя результат задачи 13.2, находим, что сила реакции обратится в ноль при значении α_0 , удовлетворяющем условию $\cos \alpha_0 = 2/3$. Далее тело будет свободно падать в поле тяжести. Поскольку горизонтальная составляющая скорости не изменяется, то $v_r = v_0 \cos \alpha_0$, $v_0 = \sqrt{2/3 gR}$. Подставляя v_r в (1), получим $h = 23/27 R$.

§ 14. ЗАКОН ВСЕМИРНОГО ТЯГОТЕНИЯ

1. Открытие закона всемирного тяготения стало возможным благодаря успехам астрономии. С древнейших времен ночное небо было грандиозной лабораторией, открытой для каждого. Звезды казались неподвижными относительно друг друга, а группа, состоящая из пяти светил (Меркурий, Венера, Марс, Юпитер, Сатурн), перемещалась на фоне звезд, описывая петли и зигзаги. Отсюда и название — планета (греч. — блуждающая). Изучение движений планет и создание моделей, объясняющих их перемещения, сыграли решающую роль в развитии астрономии. По Аристотелю (384—322 гг. до н. э.) Земля является центром мира, вокруг которого вращаются сферы с планетами и звездами. В 250 г. до н. э. Аристарх Самосский высказал гипотезу, согласно которой Земля имеет форму шара, вращается вокруг своей оси и движется вокруг Солнца. Кажущаяся неподвижность звезд связана с их очень большим удалением. Почти в то же время Эратосфен нашел способ измерения длины меридиана. Однако эти идеи явно противоречили обыденным представлениям того времени и не сыгра-

ли заметной роли в античной науке. Развитие практики кораблевождения требовало описания движения планет относительно Земли. На основе идей геоцентризма (Земля — центр мира) Птолемей (150 г. н. э.) создает новую систему движения планет, которая была основой астрономии до XVI в. Самым большим злом системы Птолемея оказалось то, что она была достаточно точно подогнана под известные сведения о движении планет и во многих отношениях оставалась неуязвимой для опровержения.

После III—IV вв. античная астрономия приходит в упадок. Только в XIII в. начинается возрождение идей Аристотеля в рамках христианской религии. Абсолютное господство принципа геоцентризма было нарушено Н. Коперником (1473—1543), который создал теорию движения планет вокруг Солнца. Труд, над которым он работал почти 40 лет, вышел в свет в 1543 г. Теория, опрокидывающая догматы церкви, не была запрещена только потому, что в предисловии она была представлена как абстрактная схема, предназначенная лишь для вычислений. Однако в XVII в. начинается настоящая борьба за новую теорию. В 1600 г. был сожжен на костре Джордано Бруно за распространение идей Коперника в назидание всем еретикам. Несколько позднее Г. Галилей и И. Кеплер окончательно добились идею геоцентризма.

21 августа 1609 г. Галилей впервые в истории астрономии наблюдал небо в подзорную трубу, которую он и изобрел. До этого дня все наблюдения проводились невооруженным глазом. Галилей обнаружил спутники Юпитера, фазы Венеры, лунные горы, пятна на Солнце. Открытия Галилея доказали ошибочность утверждения о Земле как единственном центре вращения во Вселенной, показали, что количество объектов в Солнечной системе намного больше, чем привыкли считать. Идея Коперника становится достоянием широких слоев общества. Поэтому в 1616 г. инквизиция принимает декрет, в котором учение Коперника объявляется еретическим. Но декрет не остановил Галилея в его защите идей Коперника. В 1632 г. он издает фундаментальную книгу «Диалог о двух системах мира, птолемеевой и коперниковой». После этого в 1633 г. семидесятилетний ученый был привлечен к суду инквизиции и оставался под домашним арестом до конца своей жизни.

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить.
Сильнее бы не мог он возразить;
Хвалили все ответ замысловатый.
Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами Солнце ходит,
Однако ж прав упрямый Галилей.

Так тонко А. С. Пушкин подметил всю сложность проблемы выбора системы устройства мира.

Еще раньше в 1609 г. в Праге И. Кеплер опубликовал «Новая астрономия», в которой изложил два закона движения планет: 1. Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, в которых Солнце находится в фокусе эллипса. 2. Отрезок, соединяющий планету с Солнцем, заметает равные площади за равные промежутки времени. Еще десять лет напряженного труда привели к открытию третьего закона: отношение квадрата периода обращения к кубу среднего расстояния до Солнца одинаково для всех планет. Нужно напомнить, что расчеты Кеплера основаны на обработке многочисленных наблюдений движения Марса, сделанных Тихо Браге невооруженным глазом. Три закона Кеплера являются важнейшими законами в истории науки. «Он жил, — писал А. Эйнштейн, — в эпоху, когда еще не было уверенности в существовании какой-либо общей закономерности для всех явлений природы, в которой глубокой была у него вера в такую закономерность, несмотря на то, что в одиночестве, никем не поддерживаемый и непонятый, работая в течение многих десятков лет черпал в ней силы для своего кропотливого эмпирического исследования движений планет и математических законов этого движения!» На основе этих законов Кеплер после многолетних вычислений составил в 1628 г. таблицы движения планет. Они оказались гораздо точнее, чем все предыдущие. После трудов Коперника, Галилея и Кеплера уже никто не сомневался в несостоятельности геоцентрической модели. Только церковь до 1835 г. запрещала чтение и распространение книг Коперника, Галилея и Кеплера. Остается добавить, что в 1968 г. на конгрессе лауреатов Нобелевской премии в Стокгольме представитель церкви сообщил, что рассматривается вопрос о «реабилитации» Галилея. В 1979 г. Ватикан признал несправедливость и ошибочность преследований Галилея и предложил, чтобы эта история была поскорее забыта.

На вопрос, что заставляет планеты двигаться вокруг Солнца, ответ дал И. Ньютон. На основании геометрической картины движения планет, созданной Кеплером, ему удалось доказать, что планеты движутся под действием силы притяжения, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния между планетой и Солнцем. Подобные силы действуют на любые материальные тела. Этот закон был открыт И. Ньютоном в течение 1666 г., когда он находился в своих родных местах, спасаясь от чумы, поразившей Кембридж. К этому времени относятся также идеи о сложном составе света, открытие общего метода дифференциального и интегрального исчисления. В истории науки нет равного примера таких достижений, как достижения Ньютона. В течение этих двух золотых лет, — отмечали потом исследователи, — в его творчестве.

Дальнейшее развитие представлений о Солнечной системе связано с открытием В. Гершелем 13 марта 1781 г. планеты Урана. К 1820 г. были установлены элементы эллиптической орбиты и

ли заметной роли в античной науке. Развитие практики кораблевождения требовало описания движения планет относительно Земли. На основе идей геоцентризма (Земля — центр мира) Птолемей (150 г. н. э.) создает новую систему движения планет, которая была основой астрономии до XVI в. Самым большим злом системы Птолемея оказалось то, что она была достаточно точно подогнана под известные сведения о движении планет и во многих отношениях оставалась неуязвимой для опровержения.

После III—IV вв. античная астрономия приходит в упадок. Только в XIII в. начинается возрождение идей Аристотеля в рамках христианской религии. Абсолютное господство принципа геоцентризма было нарушено Н. Коперником (1473—1543), который создал теорию движения планет вокруг Солнца. Труд, над которым он работал почти 40 лет, вышел в свет в 1543 г. Теория, опрокидывающая догматы церкви, не была запрещена только потому, что в предисловии она была представлена как абстрактная схема, предназначенная лишь для вычислений. Однако в XVII в. начинается настоящая борьба за новую теорию. В 1600 г. был сожжен на костре Джордано Бруно за распространение идей Коперника в назидание всем еретикам. Несколько позднее Г. Галилей и И. Кеплер окончательно добились идею геоцентризма.

21 августа 1609 г. Галилей впервые в истории астрономии наблюдал небо в подзорную трубу, которую он и изобрел. До этого дня все наблюдения проводились невооруженным глазом. Галилей обнаружил спутники Юпитера, фазы Венеры, лунные горы, пятна на Солнце. Открытия Галилея доказали ошибочность утверждения о Земле как единственном центре вращения во Вселенной, показали, что количество объектов в Солнечной системе намного больше, чем привыкли считать. Идеи Коперника становятся достоянием широких слоев общества. Поэтому в 1616 г. инквизиция принимает декрет, в котором учение Коперника объявляется еретическим. Но декрет не остановил Галилея в его защите идей Коперника. В 1632 г. он издает фундаментальную книгу «Диалог о двух системах мира, птолемеевой и коперниковой». После этого в 1633 г. семидесятилетний ученый был привлечен к суду инквизиции и оставался под домашним арестом до конца своей жизни.

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.

Другой смолчал и стал пред ним ходить.

Сильнее бы не мог он возразить;

Хвалили все ответ замысловатый.

Но, господа, забавный случай сей

Другой пример на память мне приводит:

Ведь каждый день пред нами Солнце ходит,

Однако ж прав упрямый Галилей.

Так тонко А. С. Пушкин подметил всю сложность проблемы выбора системы устройства мира.

Еще раньше в 1609 г. в Праге И. Кеплер опубликовал книгу «Новая астрономия», в которой изложил два закона движения планет: 1. Планеты движутся вокруг Солнца по эллипсам, причем Солнце находится в фокусе эллипса. 2. Отрезок, соединяющий планету с Солнцем, заметает равные площади за равные промежутки времени. Еще десять лет напряженного труда привели к открытию третьего закона: отношение квадрата периода обращения к кубу среднего расстояния до Солнца одинаково для всех планет. Нужно напомнить, что расчеты Кеплера основаны на обработке многочисленных наблюдений движения Марса, сделанных Тихо Браге невооруженным глазом. Три закона Кеплера — первые законы в истории науки. «Он жил, — писал А. Эйнштейн, — в эпоху, когда еще не было уверенности в существовании некоторой общей закономерности для всех явлений природы. Какой глубокой была у него вера в такую закономерность, если, работая в одиночестве, никем не поддерживаемый и непонятый, он на протяжении многих десятков лет черпал в ней силы для трудного и кропотливого эмпирического исследования движений планет и математических законов этого движения!» На основе открытых им законов Кеплер после многолетних вычислений составил в 1628 г. таблицы движения планет. Они оказались гораздо более точными, чем все предыдущие. После трудов Коперника, Галилея и Кеплера уже никто не сомневался в несостоятельности геоцентрической модели. Только церковь до 1835 г. запрещала распространение книг Коперника, Галилея и Кеплера. Остается добавить, что в 1968 г. на конгрессе лауреатов Нобелевской премии по физике представитель церкви сообщил, что рассматривается вопрос о «реабилитации» Галилея. В 1979 г. Ватикан признал несправедливость и ошибочность преследований Галилея и предпочел бы, чтобы эта история была поскорее забыта.

На вопрос, что заставляет планеты двигаться вокруг Солнца, ответ дал И. Ньютон. На основании геометрической картины движения планет, созданной Кеплером, ему удалось доказать, что планеты движутся под действием силы притяжения, изменяющейся обратно пропорционально квадрату расстояния между планетой и Солнцем. Подобные силы действуют на любые материальные тела. Этот закон был открыт И. Ньютоном в течение 1665—1666 гг., когда он находился в своих родных местах, спасаясь от чумы, поразившей Кембридж. К этому времени относятся его идеи о сложном составе света, открытие общего метода дифференциального и интегрального исчисления. В истории науки нет равного примера таких достижений, как достижения Ньютона в течение этих двух золотых лет, — отмечали потом исследователи его творчества.

Дальнейшее развитие представлений о Солнечной системе связано с открытием В. Гершелем 13 марта 1781 г. планеты Уран. К 1820 г. были установлены элементы эллиптической орбиты, учи-

тывающие влияние известных планет. Однако последующие наблюдения расходились с теоретическими предсказаниями. Предполагив, что на движение Урана оказывает влияние неизвестная планета, французский математик Леверье и английский математик Адамс независимо в 1845—1846 гг. предсказали ее положение. Открытие 23 сентября 1846 г. немецкими астрономом Галле и молодым студентом д'Аррестом новой планеты — ее назвали Нептун — явилось триумфом небесной механики, основанной на законе всемирного тяготения.

История астрономии еще не знала подобных примеров. Следует добавить, что события, связанные с этим открытием, приобрели иногда драматический характер [11].

Открытие последней планеты Солнечной системы 13 марта 1930 г. — Плутона — уже не вызвало большого интереса.

2. Закон всемирного тяготения. Ньютон доказал, что на каждую из двух материальных точек массой m_1 и m_2 , находящихся на расстоянии r , действует сила притяжения

$$F = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (14.1)$$

направленная по прямой, соединяющей эти точки. В этой формуле γ — универсальный коэффициент, так как многократные опыты показали, что значение γ — одно и то же независимо от материала притягивающихся тел. Коэффициент γ называется гравитационной постоянной. В СИ

$$\gamma = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Строго говоря, закон всемирного тяготения должен формулироваться так, чтобы мы знали, какие силы следует подставлять в правую часть уравнений Ньютона (10.2). Можно учесть векторный характер сил притяжения, если ввести вектор $\vec{r}$, соединяющий частицы m_1 и m_2 (рис. 14.1). Тогда сила $\vec{F}_{12}$, с которой масса m_2 притягивает массу m_1 , приложена к частице m_1 и равна

$$\vec{F}_{12} = \gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}, \quad \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1. \quad (14.2)$$

Сила $\vec{F}_{21}$, с которой масса m_1 притягивает массу m_2 , приложена к частице m_2 и равна

$$\vec{F}_{21} = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\vec{F}_{12}. \quad (14.3)$$

Перечислим основные ошибки в следующей формулировке закона всемирного тяготения: «Все тела притягиваются друг к дру-

гу с силой, прямо пропорциональной произведению их масс и обратно пропорциональной квадрату расстояния между ними».

1. Все тела не притягиваются друг к другу с одной силой.
2. Фраза «расстояние между телами» лишена смысла, так как можно измерить лишь расстояния между точками.

Формула (14.1) написана для случая взаимодействия материальных точек, т. е. для тел любой формы, когда расстояние между ними много больше их размеров.



Рис. 14.1



Рис. 14.2

Для нахождения сил тяготения, действующих на протяженные тела, необходимо мысленно разбить эти тела на маленькие части, каждую из которых можно считать материальной точкой. Затем найдем силы взаимодействия между ними и, векторно складывая эти силы, получим полную силу, действующую на каждое из тел. Именно таким способом Ньютон показал, что если два тела являются однородными шарами, то они притягиваются как материальные точки, расположенные в их центрах и имеющие массы соответствующих тел. Это обстоятельство позволяет использовать формулу (14.1) при вычислении сил, действующих на однородный шар и материальную точку. Далее, везде в качестве модели Земли выбран однородный шар радиусом $R=6,35 \cdot 10^6$ м.

ЗАДАЧА 14.1. Сравнить силы притяжения, действующие на Луну со стороны Солнца и Земли. Масса Земли $m_3=5,98 \cdot 10^{24}$ кг, масса Солнца $m_c=1,99 \cdot 10^{30}$ кг, расстояние от Земли до Луны $r_{зл}=3,80 \cdot 10^5$ км, расстояние между Солнцем и Луной $r_{сл}=1,5 \cdot 10^8$ км.

Решение. Используя закон всемирного тяготения, находим

$$\frac{F_{лс}}{F_{лз}} = \frac{m_c}{m_3} \left(\frac{r_{зл}}{r_{сл}} \right)^2 \approx 2.$$

Интересный результат — Солнце притягивает Луну в два раза сильнее, чем Земля.

ЗАДАЧА 14.2. Определить массу Земли, если известны ее радиус $R=6350$ км, ускорение силы тяжести $g=9,81$ м/с² и гравитационная постоянная.

Решение. Сила притяжения тела массой m у земной поверхности

$$F = \gamma \frac{mM}{R^2}.$$

С другой стороны, сила притяжения F равна mg . Значит, ускорение силы тяжести $g = \gamma M/R^2$. Подставляя данные задачи, находим массу Земли $M = gR^2/\gamma = 5,98 \cdot 10^{24}$ кг.

Заметим, что выражение для силы притяжения Землей тела массой m можно представить в виде

$$F = mg \left(\frac{R}{r} \right)^2, \quad (14.4)$$

где r — расстояние между телом и центром Земли.

ПРИМЕР 14.3. Два шарика массой $m_1 = m_2 = m/2$, соединенные стержнем пренебрежимо малой массы, образуют гантель. Расстояние между центрами шариков равно l . Найдём силу, действующую на гантель в поле тяжести точечной массы M , находящейся на расстоянии r от середины гантели.

Величины сил, действующих на массы m_1 и m_2 одинаковы и равны (рис. 14.2)

$$F_1 = F_2 = \gamma \frac{mM}{2[r^2 + (l/2)^2]}.$$

Результирующая сила равна векторной сумме сил: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$, она направлена по прямой, соединяющей массу M и точку O , и равна

$$F = 2F_1 \cos \alpha = \gamma \frac{mMr}{[r^2 + (l/2)^2]^{3/2}}, \quad (1)$$

1. Предположим, что $r \ll l$. Тогда из (1) находим, что сила притяжения гантели

$$F = 8\gamma \frac{mM}{l^3} r \quad (2)$$

прямо пропорциональна «расстоянию» между материальной точкой M и протяженным телом массой m . При $r=0$ сила (1) или (2) обращается в ноль.

2. Пусть $r \gg l$, т. е. гантель является материальной точкой массой m . В этом случае из (1) находим

$$F \simeq \gamma \frac{mM}{r^2} + \dots \quad (3)$$

в соответствии с (14.1). На самом деле сила притяжения гантели, т. е. протяженного тела, меньше силы притяжения точечного тела

той же массы. Для того чтобы убедиться в этом, необходимо учесть в (3) отброшенные величины порядка $(l/r)^2$. С этой целью представим (1) в виде

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} \cos^3 \alpha, \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{l}{2r}.$$

Теперь учтем, что для углов $\alpha \ll 1$ $\operatorname{tg} \alpha \approx \alpha$, $\cos \alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, $\cos^3 \alpha \approx 1 - 3/2 \alpha^2$. Следовательно,

$$F = \gamma \frac{mM}{r^2} \left[1 - \frac{3}{8} \frac{l^2}{r^2} + \dots \right].$$

Учет зависимости силы притяжения от длины гантели позволил советскому механику В. В. Белецкому предсказать новое явление: в результате целенаправленного изменения распределения массы внутри космического корабля, движущегося в поле тяготения планеты, появляется возможность влиять на его траекторию [12].

ПРИМЕР 14.4. Спутник вращается по круговой орбите радиусом r вокруг Земли. Определим скорость и период обращения спутника. Сопротивлением атмосферы пренебrecь.

Поскольку масса Земли много больше массы спутника, то при решении задачи можно считать Землю неподвижной, и выбрать ее в качестве системы отсчета.

Единственной силой, действующей на спутник, является сила притяжения. Поскольку спутник движется по окружности, то согласно уравнению (13.56) произведение массы спутника на центростремительное ускорение равно силе притяжения:

$$m \frac{v^2}{r} = mg \frac{R^2}{r^2}. \quad (1)$$

Отсюда сразу получаем

$$v = R \sqrt{\frac{g}{r}}. \quad (2)$$

Запишем этот результат, вводя в него выражение для первой космической скорости v_1 . По определению v_1 — это скорость, которую необходимо сообщить телу вблизи поверхности Земли в направлении, перпендикулярном радиусу окружности, чтобы оно стало двигаться по этой окружности. Если сообщить скорость под углом, не равном прямому, то тело будет двигаться по эллиптической орбите.

Расстояние от тела до центра Земли есть $r = R + h$, где h — высота тела над поверхностью. Если высота очень мала по сравнению с радиусом Земли R , то ею можно пренебrecь. Заменяя в этом случае r на радиус Земли, получим из (2) выражение для

первой космической скорости $v_1 = \sqrt{gR} = 7,91$ км/с. Итак, скорость (2) движения спутника по круговой орбите радиусом r меньше первой космической скорости и равна

$$v = v_1 \sqrt{\frac{R}{r}}. \quad (3)$$

Величина v называется местной первой космической скоростью, или скоростью вращения по круговой орбите радиусом r .

Из (3) следует выражение для периода вращения. Учитывая, что $v = \omega r = 2\pi r/T$, получим

$$T = \frac{2\pi r^{3/2}}{R \sqrt{g}}. \quad (4)$$

Наименьший период обращения имеет спутник, движущийся в непосредственной близости от земной поверхности. Полагая в (4) $r \simeq R$, находим $T_1 = 2\pi \sqrt{R/g} = 84$ мин. Из (4) следует частная форма третьего закона Кеплера: для двух спутников, движущихся по круговым орбитам, квадраты периодов обращения спутников пропорциональны кубам радиусов орбит;

$$\frac{T_1^2}{r_1^3} = \frac{T_2^2}{r_2^3}. \quad (5)$$

Геостационарный спутник (или **синхронный спутник**). Любой спутник движется в плоскости, проходящей через центр Земли. Синхронный спутник должен «висеть» над одним и тем же местом на Земле. Поэтому он должен иметь круговую экваториальную орбиту с периодом обращения, равным $T_0 = 24$ ч. Найдем радиус орбиты синхронного спутника. Записывая уравнение (1) в виде

$$m \left(\frac{2\pi}{T_0} \right)^2 r_0 = mg \frac{R^2}{r_0^2},$$

получим

$$r_0 = \left[\frac{gR^2 T_0^2}{(2\pi)^2} \right]^{1/3} = R \left[\frac{T_0}{T_1} \right]^{2/3} = 6,7R.$$

Следовательно, $r_0 = 42\,160$ км, а расстояние от поверхности Земли около $35\,800$ км. С такого спутника Земля видна под углом 17° , что позволяет вести наблюдения за областью поверхности, равной примерно $1/3$ площади Земли.

ПРИМЕР 14.5. Два спутника массами $m_1 = m_2 = m$, соединенные невесомым канатом длиной l , движутся по круговым орбитам вокруг Земли и при этом в любой момент времени находятся на

прямой, проходящей через центр Земли. Расстояние между серединой каната и центром Земли равно r . Найдем силу натяжения каната.

На каждый спутник действуют силы притяжения Земли и силы натяжения каната $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, причем $N_1 = N_2 = N$ (рис. 14.3). Силой гравитационного взаимодействия спутников пренебрегаем в силу ее малости. Из второго закона Ньютона для первого и второго спутников находим

$$m\omega^2 \left(r - \frac{l}{2} \right) = \gamma \frac{mM}{(r - l/2)^2} - N, \quad (1)$$

$$m\omega^2 \left(r + \frac{l}{2} \right) = \gamma \frac{mM}{(r + l/2)^2} + N. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$\omega^2 = \frac{\gamma M}{r} \frac{r^2 + (l/2)^2}{[r^2 - (l/2)^2]^2}, \quad (3)$$

$$N = \gamma \frac{mMl}{2r} \frac{3r^2 + (l/2)^2}{[r^2 - (l/2)^2]^2}. \quad (4)$$

Сделаем ряд замечаний. 1. Рассмотрим два связанных спутника как одно протяженное тело, движущееся по окружности радиусом r . Тогда для него не выполняется третий закон Кеплера — лишнее напоминание о том, что законы Кеплера имеют место для материальных точек. Скорость первого спутника меньше, а второго больше местной первой космической скорости. 2. Из (4) следует, что канат будет натянут. Предполагая, что $l \ll r$, получим значение

$$N \simeq \frac{3}{2} \gamma \frac{mM}{r^2} \left(\frac{l}{r} \right).$$

3. Потенциальная энергия взаимодействия тела и Земли. До сих пор мы говорили о потенциальной энергии $\Pi(y) = mgy$ тела массой m , поднятого на небольшую высоту y над поверхностью Земли. Рассмотрим теперь более общий случай, когда тело может находиться на любой высоте над Землей. Найдем потенциальную энергию взаимодействия точечного тела массой m и Земли. Для этого подсчитаем работу, совершаемую силой поля тяжести при перемещении частицы из точки M , расположенной на расстоянии r от центра Земли, в бесконечно близкую точку M' на расстоянии $MM' = \Delta s$ (рис. 14.4). Поскольку отрезки Δr , Δs очень малы, то $\Delta s \cos \alpha = -\Delta r$, а силу притяжения при перемещении тела можно считать равной $F = \gamma mM/r^2$. Работа силы тяготения F на отрезке Δs (см. (12.2))

$$\delta A = \gamma \frac{mM}{r^2} \Delta s \cos \alpha = -\gamma \frac{mM}{r^2} \Delta r.$$

Согласно (12.10) эта работа связана с приращением потенциальной энергии соотношением

$$-\gamma \frac{mM}{r^2} \Delta r = -\Delta \Pi.$$

Нетрудно видеть, что мы удовлетворим этому соотношению, выбирая выражение для потенциальной энергии тела, находящегося на расстоянии r от центра Земли, в виде

$$\Pi(r) = -\gamma \frac{mM}{r} + \text{const.} \quad (14.5)$$



Рис. 14.3

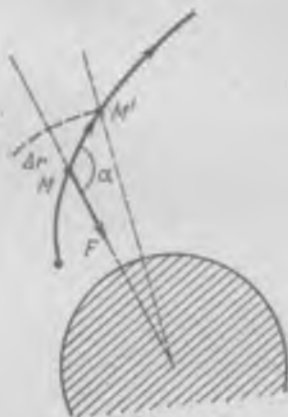


Рис. 14.4

Действительно,

$$\Delta \Pi = -\gamma \frac{mM}{r + \Delta r} + \gamma \frac{mM}{r} = \gamma \frac{mM \Delta r}{r^2 + r \Delta r} \simeq \gamma \frac{mM}{r^2} \Delta r,$$

так как $r^2 \gg r \Delta r$ при $\Delta r \rightarrow 0$. Значение константы в (14.5) несущественно. Удобно принять условие, согласно которому потенциальная энергия бесконечно удаленных Земли и частицы равна нулю. В этом случае $\text{const} = 0$. Используя соотношение $\gamma M/R^2 = g$, можно представить (14.5) в виде, соответствующем (14.4),

$$\Pi(r) = -mg \frac{R^2}{r}. \quad (14.6)$$

Из (14.6) следует, что при увеличении расстояния между телами потенциальная энергия возрастает и достигает максимального значения $\Pi = 0$, когда тело находится на бесконечно большом расстоянии от Земли. В этом положении взаимодействие между телом и Землей отсутствует. Тем самым нулевой уровень потенциальной энергии, определенной формулой (14.6), соответствует положению тела, удаленному от Земли на достаточно большое

расстояние. При приближении тела к Земле потенциальная энергия тела уменьшается. Как видно из (14.6), потенциальная энергия тела на поверхности Земли $\Pi = -mgR$. Покажем, что из (14.6) следует известное выражение для потенциальной энергии тела $\Pi = mgy$, пригодное только для высот $|y| \ll R$. Действительно, для малых высот $|y| \ll R$ можно с достаточной степенью точности считать

$$\frac{R}{r} = \frac{R}{|R+y|} = \frac{1}{1 + \frac{y}{R}} = \frac{1 - \frac{y}{R}}{1 + \left(\frac{y}{R}\right)^2} \approx 1 - \frac{y}{R}.$$

Учитывая это приближение, из (14.6) найдем

$$\Pi \approx -mgR + mgy.$$

Постоянная величина $-mgR$ в этой формуле может быть опущена, что соответствует выбору нулевого уровня потенциальной энергии на поверхности Земли (напомним, что потенциальная энергия определяется неоднозначно — с точностью до произвольной постоянной, так как физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий).

Используя теорему об изменении полной энергии (12.17) и определение (14.5), нетрудно заключить, что полная энергия

$$E = \frac{mv^2}{2} - \gamma \frac{mM}{r} \quad (14.7)$$

тела массой m ($m \ll M$) в поле тяжести Земли сохраняется, если работа всех прочих сил равна нулю.

Формула (14.6) получена при рассмотрении взаимодействия тела с Землей. Нетрудно понять, что потенциальная энергия взаимодействия двух точечных масс m_1 и m_2 определяется тем же выражением

$$\Pi_{12}(r) = -\gamma \frac{m_1 m_2}{r}. \quad (14.8)$$

ЗАДАЧА 14.6. Какую начальную скорость v_0 необходимо сообщить телу относительно Земли, чтобы за пределами сферы тяготения, т. е. на бесконечности, оно двигалось со скоростью u ? Силы сопротивления движению не учитывать.

Решение. Поскольку силы торможения со стороны атмосферы не учитываются, то полная энергия тела сохраняется. На поверхности Земли полная энергия равна

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - mgR. \quad (1)$$

По мере отдаления от Земли потенциальная энергия растет, а кинетическая уменьшается. Для того чтобы тело не вернулось на Землю, его кинетическая энергия не должна обращаться в нуль до тех пор, пока тело не уйдет на бесконечность. В нашем случае полная энергия на бесконечности

$$E = \frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), находим

$$v_0 = \sqrt{2gR + v^2}. \quad (3)$$

Выразим полученный результат через величину второй космической скорости v_{II} . По определению v_{II} — минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло Землю. Из формулы (1) видно, что если на бесконечности $v=0$, то скорость v_0 принимает наименьшее значение, равное второй космической скорости, т. е. $v_{II} = \sqrt{2gR} = 11,19$ км/с. Эта скорость в $\sqrt{2} = 1,41$ раза больше первой космической скорости $v_I = \sqrt{gR}$, т. е. $v_{II} = \sqrt{2}v_I$.

Таким образом, наш результат можно записать в виде

$$v_0 = \sqrt{v_{II}^2 + v^2}.$$

ЗАДАЧА 14.7. Телу на поверхности Земли сообщили в вертикальном направлении начальную скорость, равную первой космической скорости. На какую максимальную высоту поднимется тело? Сопротивлением атмосферы пренебречь.

Решение. Используем для решения задачи закон сохранения полной энергии. Полная энергия тела на поверхности Земли согласно (14.6) равна

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - mgR = -\frac{mgR}{2}. \quad (1)$$

так как по условию задачи $v = v_I = \sqrt{gR}$. На максимально достижимой высоте h скорость тела будет равна нулю. Полная энергия на этой высоте равна

$$E = 0 - mg \frac{R^2}{R+h}. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), находим $h=R$. Очевидно, достигнув высоты, равной радиусу Земли, тело начнет падать на Землю.

§ 15. КОСМИЧЕСКИЕ ПОЛЕТЫ

Среди великих достижений XX в. особое место занимает создание космических кораблей. У истоков космонавтики стоял выдающийся русский ученый К. Э. Циолковский (1857—1935). Его приоритет в основополагающих вопросах ракетной и космической техники сейчас признают во всем мире.

Начало самостоятельной работы протекало у Циолковского в трудных условиях. В детстве он потерял слух и не мог учиться в школе. Однако, работая самостоятельно, он уже в 1879 г. получает диплом учителя. Первые научные исследования Циолковского относятся к теории цельнометаллического дирижабля и аэроплана. Он провел много опытов, получил важные результаты, но для дальнейших изысканий не было ни средств, ни поддержки. Одновременно он приходит к выводу об использовании ракет для движения в безвоздушном пространстве. В 1898 г. впервые разработана теория полета ракеты — тела переменной массы. Начиная с 1903 г. появляются статьи и книги Циолковского по ракетодинамике и теории межпланетных сообщений. В своем труде «Исследование мировых пространств реактивными приборами» (1903) Циолковский доказал реальность технического осуществления космических полетов. Наряду с теоретическими работами он занимался решением практических вопросов: выбором конструкции ракет, топлива, схем стабилизации, систем жизнеобеспечения космонавтов и т. д. После Великой Октябрьской социалистической революции были созданы условия для творческой деятельности Циолковского. С 1925 по 1932 г. было опубликовано свыше 60 его работ по физике, астрономии, механике и философии. В 1926—1928 гг. он впервые показал, что только многоступенчатые ракеты способны сообщить рабочему отсеку первую космическую скорость [2, 13].

Сейчас осуществлены многие идеи К. Э. Циолковского. В нашей стране путь к их решению был открыт усилиями большого коллектива, возглавляемого выдающимся инженером и ученым С. П. Королевым (1906—1966). В своей автобиографии он писал: «... с 1929 г. после знакомства с К. Э. Циолковским и его работами начал заниматься вопросами ракетной техники... Имею за период до 1951 г. 40 работ, научных трудов и проектно-конструкторских разработок по авиации и специальной технике». В 1946 г. он стал Главным конструктором по созданию баллистических ракет дальнего действия. В августе 1957 г. была создана межконтинентальная ракета. «Эта ракета — одна из вершин инженерного гения С. П. Королева... Конструирование, расчет, а в дальнейшем и устранение поначалу загадочных неполадок потребовали большой научно-исследовательской работы». [2]. В таких ситуациях Королев сутками не уходил со стартовой площадки. С именем С. П. Королева связаны все основные этапы в развитии кос-

$$E = \frac{mv_0^2}{2} - mgR. \quad (1)$$

По мере отдаления от Земли потенциальная энергия растет, а кинетическая уменьшается. Для того чтобы тело не вернулось на Землю, его кинетическая энергия не должна обращаться в нуль до тех пор, пока тело не уйдет на бесконечность. В нашем случае полная энергия на бесконечности

$$E = \frac{mv^2}{2}. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), находим

$$v_0 = \sqrt{2gR + v^2}. \quad (3)$$

Выразим полученный результат через величину второй космической скорости v_{II} . По определению v_{II} — минимальная скорость, которую надо сообщить телу, чтобы оно навсегда покинуло Землю. Из формулы (1) видно, что если на бесконечности $v=0$, то скорость v_0 принимает наименьшее значение, равное второй космической скорости, т. е. $v_{II} = \sqrt{2gR} = 11,19$ км/с. Эта скорость в $\sqrt{2} = 1,41$ раза больше первой космической скорости $v_I = \sqrt{gR}$, т. е. $v_{II} = \sqrt{2}v_I$.

Таким образом, наш результат можно записать в виде

$$v_0 = \sqrt{v_{II}^2 + v^2}.$$

ЗАДАЧА 14.7. Телу на поверхности Земли сообщили в вертикальном направлении начальную скорость, равную первой космической скорости. На какую максимальную высоту поднимется тело? Сопротивлением атмосферы пренебречь.

Решение. Используем для решения задачи закон сохранения полной энергии. Полная энергия тела на поверхности Земли согласно (14.6) равна

$$E = \frac{mv_1^2}{2} - mgR = -\frac{mgR}{2}, \quad (1)$$

так как по условию задачи $v = v_I = \sqrt{gR}$. На максимально достижимой высоте h скорость тела будет равна нулю. Полная энергия на этой высоте равна

$$E = 0 - mg \frac{R^2}{R+h}. \quad (2)$$

Приравнявая (1) и (2), находим $h=R$. Очевидно, достигнув высоты, равной радиусу Земли, тело начнет падать на Землю.

§ 15. КОСМИЧЕСКИЕ ПОЛЕТЫ

Среди великих достижений XX в. особое место занимает создание космических кораблей. У истоков космонавтики стоял выдающийся русский ученый К. Э. Циолковский (1857—1935). Его приоритет в основополагающих вопросах ракетной и космической техники сейчас признают во всем мире.

Начало самостоятельной работы протекало у Циолковского в трудных условиях. В детстве он потерял слух и не мог учиться в школе. Однако, работая самостоятельно, он уже в 1879 г. получает диплом учителя. Первые научные исследования Циолковского относятся к теории цельнометаллического дирижабля и аэроплана. Он провел много опытов, получил важные результаты, но для дальнейших изысканий не было ни средств, ни поддержки. Одновременно он приходит к выводу об использовании ракет для движения в безвоздушном пространстве. В 1898 г. впервые разработана теория полета ракеты — тела переменной массы. Начиная с 1903 г. появляются статьи и книги Циолковского по ракетодинамике и теории межпланетных сообщений. В своем труде «Исследование мировых пространств реактивными приборами» (1903) Циолковский доказал реальность технического осуществления космических полетов. Наряду с теоретическими работами он занимался решением практических вопросов: выбором конструкции ракет, топлива, схем стабилизации, систем жизнеобеспечения космонавтов и т. д. После Великой Октябрьской социалистической революции были созданы условия для творческой деятельности Циолковского. С 1925 по 1932 г. было опубликовано свыше 60 его работ по физике, астрономии, механике и философии. В 1926—1928 гг. он впервые показал, что только многоступенчатые ракеты способны сообщить рабочему отсеку первую космическую скорость [2, 13].

Сейчас осуществлены многие идеи К. Э. Циолковского. В нашей стране путь к их решению был открыт усилиями большого коллектива, возглавляемого выдающимся инженером и ученым С. П. Королевым (1906—1966). В своей автобиографии он писал: «... с 1929 г. после знакомства с К. Э. Циолковским и его работами начал заниматься вопросами ракетной техники... Имею за период до 1951 г. 40 работ, научных трудов и проектно-конструкторских разработок по авиации и специальной технике». В 1946 г. он стал Главным конструктором по созданию баллистических ракет дальнего действия. В августе 1957 г. была создана межконтинентальная ракета. «Эта ракета — одна из вершин инженерного гения С. П. Королева... Конструирование, расчет, а в дальнейшем и устранение поначалу загадочных неполадок потребовали большой научной-исследовательской работы». [2]. В таких ситуациях Королев сутками не уходил со стартовой площадки. С именем С. П. Королева связаны все основные этапы в развитии кос-

монавтики, которые можно сопровождать словами «впервые в мире».

Околоземное пространство — часть окружающей человека среды, существенным образом влияющее на жизнь на Земле. Поэтому переход к активному исследованию межпланетного пространства — естественная фаза в развитии науки.

4 октября 1957 г. в Советском Союзе был запущен первый в мире искусственный спутник Земли. Началась эра освоения космоса. Это выдающееся достижение советской науки и техники стало возможным благодаря успешному решению широкого комплекса проблем: созданию мощных ракет-носителей, навигационного оборудования, теоретических расчетов траектории космических аппаратов.

12 апреля 1961 г. на орбиту спутника Земли был выведен космический корабль «Восток», пилотируемый Юрием Гагариным. Первый орбитальный полет человека — величайший подвиг, открывший путь человечеству в космос. Следующий шаг на этом пути — лунная экспедиция на корабле «Аполлон-11» и высадка 21 июля 1969 г. на Луну американских астронавтов Нейла Армстронга и Эдвина Олдрина. К 1984 г. полеты совершил 131 космонавт [14].

В первом космическом десятилетии шла интенсивная разведка явлений, представляющих интерес для науки и промышленности. Во втором десятилетии началось планомерное изучение и практическое освоение космического пространства. Если в первом десятилетии было осуществлено около 250 запусков космических аппаратов, то во втором — число запусков превысило 1000. К началу 1984 г. число советских спутников превысило 1700, число американских спутников достигло 1000. В 1984 г. в СССР запущено 97 космических аппаратов, за рубежом — 50 [14]. Советский Союз стал ведущей страной в практическом использовании космического пространства.

Невозможно перечислить научные и прикладные задачи и основные результаты, полученные в итоге космических экспериментов. Кратко приведем лишь основные направления космических исследований.

1. Значение космических исследований для народного хозяйства. Системы спутниковой связи. Космическая техника открыла новый этап в развитии и совершенствовании систем для обеспечения телевизионной, телеграфной и телефонной радиосвязи. С ноября 1965 г. начались регулярные передачи программ телевидения через спутники серии «Молния». Они имеют сильно вытянутые орбиты с высотой апогея почти 40 000 км, высотой перигея 500 км и периодом обращения, равным 12 ч. При наклонении орбиты 65° эта система обеспечивает связь на всей территории СССР в течение 8—10 ч на протяжении одного витка. Время жизни таких спутников порядка 10 лет.

29 июля 1974 г. выведен первый советский спутник на геостационарную орбиту. ИСЗ на такой орбите имеет период вращения 24 ч и остается неподвижным по отношению к земной поверхности на высоте около 36 000 км. Спутник при этом способен обеспечить связь на территории, охватывающей около одной трети земной поверхности.

Космическое производство. Освоение космоса дало мощный толчок развитию новой технологии. Уникальное сочетание вакуума и невесомости позволило получить сверхчистые полупроводниковые кристаллы, превосходящие земные в десятки раз. В невесомости капля расплавленного вещества имеет форму свободно висящего шара, который может быть подвергнут дальнейшей обработке. Невесомость создает условия для изготовления идеально круглых шариков для подшипников, осуществления ряда химических процессов, многослойного литья. Некоторые материалы могут быть разделены или, наоборот, скombинированы так, что получаются совершенно новые вещества со свойствами, недостижимыми в условиях Земли, например сверхднородные сплавы.

2. Космическое земледелие. Агрономы получили возможность быстро определять состояние сельскохозяйственных культур. Разные объекты отражают свет по-разному: можно различать влажную и сухую почву, хвойные и лиственные леса, выявлять посевы, подверженные болезням, очаги поражения вредителями участков леса и т. д. Такая информация позволяет прогнозировать урожайность основных культур, более рационально использовать ресурсы.

Большое практическое значение имеет **космическая метеорология**, позволяя существенно уточнять прогнозы погоды. За сутки метеорологические спутники собирают объем сведений во много раз превышающий информацию, которая поступает от всех десяти тысяч метеорологических станций земного шара. Спутники позволяют изучать облачный покров планеты, морские течения, образование ураганов, ледовую обстановку, определять толщину снежного покрова, чтобы предсказывать наводнения.

Картография. Космонавт видит целиком то, что поколениям картографов приходилось составлять по кусочкам. Для определения относительной высоты различных элементов рельефа земной поверхности используются новейшие варианты радиолокационных систем. Отраженные сигналы регистрируют на пленку методами голографии, а затем преобразуют в трехмерное изображение. В результате могут быть составлены геологические и топографические карты. Невероятно, но факт, что только из космоса были обнаружены глубинные разломы в оболочке Земли, которые можно связать с залежами полезных ископаемых. Выяснилось, например, что Уральская горная система проходит через пустыни Средней Азии, выявлены неизвестные кратеры вулканов, в бассейне Амазонки удалось обнаружить реку длиной несколько

сот километров и т. д. Наиболее удивительными оказались открытия под слоем песка в Сахаре. В ходе исследований было обнаружено, что сигналы радиолокатора проникают на глубину до 4,5 м через слой рыхлого сухого песка, часто достигая коренной породы. По радиолокационным изображениям из космоса удалось найти следы, протекавших когда-то здесь полноводных рек.

Инфракрасная революция в геологии. Сейчас появилось новое направление геологии, связанное с применением на спутниках многоканальных спектрографов, предназначенных для изучения природных ресурсов Земли. Съемка проводится со спутника, находящегося на полярной орбите высотой 500—900 км, плоскость которой почти перпендикулярна солнечным лучам. В этом случае освещенность различных участков земной поверхности, пробегающих под спутником, зависит только от времени года. Подобные орбиты называются синхронно-солнечными. Повторная съемка одного и того же объекта происходит при постоянных условиях освещенности.

Геологическая разведка ведется в видимом и инфракрасном диапазонах волн. Выбор средней ИК-области (8—14 мкм) связан с высокой прозрачностью атмосферы в этом «окне». Разные объекты — вода, растения, минералы — отражают солнечный свет по-разному. Чувствительные приемники, регистрирующие излучение с шестью длинами волн, реагируют на 100—250 градаций интенсивности отраженного излучения и кодируют изображение в цифровой форме. После обработки компьютер восстанавливает изображение в условных цветах. Здесь главная проблема состоит в том, чтобы правильно определить, какая комбинация цветов однозначно будет соответствовать данному типу пород или растительности.

Снимки из космоса позволили получить карты, которые раскрашены в соответствии с содержанием в породах основных соединений. Это привело к открытию ряда новых месторождений в нашей стране и за рубежом. Геологи-поисковики получили ценные данные о выходе на поверхность горных пород разного возраста и разного состава. Космические снимки особенно широко используются при геологических съемках в труднодоступных горах Тянь-Шаня и Памира.

К большому сожалению геологов, семьдесят процентов поверхности земного шара скрыто под океанами и морями. Но вот недавно ученые, используя радиолокационный высотомер, измеряющий расстояния с точностью до 0,5 см, впервые не только исследовали поверхность океана, но и смогли «проникнуть» сквозь водный покров Земли. Подтвердилось предположение о том, что поверхность океана, подобно суше, рельефна. В некоторых местах имеются возвышенности, высота которых по отношению к остальной части поверхности океана доходит до 180 м. Наличие выпуклостей и впадин объясняется различиями в силе тяготения из-за

неравномерного распределения массы внутри земного шара и особенностями рельефа океанического дна. Там, где сила притяжения велика, например у подводных гор, отмечается поднятие воды — поверхность океана отражает рельеф его дна. На основе информации, полученной со спутников, была составлена карта океанического дна. Ясно видны хребты, подводные горы, борозды, оставленные движущимися плитами, которые образуют поверхность земного шара.

3. Исследования космического пространства. Получены детальные сведения о плотности атмосферы в области высот от 70 км до 40 000 км. Открыты радиационные пояса — области, состоящие из заряженных частиц, удерживаемых магнитным полем Земли. Исследованы изменения магнитного поля Земли.

Достигнуты значительные успехи в изучении потоков заряженных частиц, испускаемых Солнцем, — солнечного ветра и космических лучей. Земная атмосфера является фильтром, который пропускает только ограниченный диапазон электромагнитных излучений, идущих из космоса, — видимое излучение и радиоволны. Кроме того, она задерживает и тормозит частицы высоких энергий. В то же время коротковолновое излучение и частицы больших энергий представляют наибольший интерес для науки. Регистрация этих излучений за пределами атмосферы открывает совершенно новые возможности исследования структуры звезд и галактик.

Возможность астрономических наблюдений за пределами атмосферы является давней мечтой астрономов. Использование больших орбитальных телескопов играет важную роль в развитии астрофизики.

4. Физика Солнечной системы. Все процессы, протекающие на Земле, ее климат, облачность, ледовый покров, озоновый слой, магнитное поле, ионосфера — связаны с процессами, протекающими в Солнечной системе. Наибольший интерес для понимания природы Земли и ее эволюции представляют исследования Венеры и Марса — планет, наиболее близких к Земле.

Почему наша планета так непохожа на своих небесных «сестер», которые развивались примерно в таких же условиях, но одна из которых сейчас представляет «раскаленную», а другая — «замороженную» пустыни? [14, 15].

Исследования Луны. Луна — самое близкое к Земле небесное тело радиусом 0,27 земного и массой, составляющей 0,01 массы Земли. Расстояние от Земли меняется от 356 400 до 406 800 км. Среднее расстояние составляет 60 земных радиусов. Период обращения Луны вокруг Земли 27,3 сут совпадает с периодом вращения Луны вокруг своей оси, поэтому она всегда обращена к Земле одной и той же стороной. Луну принято считать спутником Земли. Однако вследствие большой массы системы Земля — Луна было бы правильнее рассматривать как двойную планету. До на-

стоящего времени проблема происхождения Луны еще не решена.

Систематические наблюдения Луны начались Г. Галилеем в 1610 г. Серые области поверхности Луны были названы «морями». Это наименование сохранилось до сих пор, хотя давно было известно, что в лунных морях нет воды. Полеты и экспедиции на Луну сделали ее доступной для непосредственного изучения. Полет до Луны при наименьшей скорости отлета (10,9 км/с на высоте 200 км) продолжается 5 сут, а при второй космической — 2 сут. На начальном этапе исследования Луны даже аппараты, разрушающиеся при падении на лунную поверхность или движущиеся по пролетным траекториям, успели передать значительную научную информацию.

14 сентября 1959 г. советская автоматическая станция «Луна-2» достигла поверхности Луны. Это был первый перелет с Земли на другое небесное тело. 4 октября 1959 г. стартовала станция «Луна-3». Пройдя 6 октября на минимальном расстоянии 7900 км, она обогнула Луну и оказалась над невидимой с Земли ее стороной. Впервые были сделаны фотоснимки обратной стороны Луны. 7 октября станция вышла из сферы притяжения Луны и стала спутником Земли, движущимся по эллиптической траектории. Максимальное расстояние до станции равнялось 480 000 км, а минимальное — 47 500 км. Период обращения равнялся 15 сут. Передача полученных изображений осуществлялась как с дальних расстояний, так и вблизи Земли. Казалось, что станция, не испытывая торможений атмосферой, будет вечно двигаться по своей орбите. Однако здесь космонавтика столкнулась с новым явлением. Благодаря тому, что орбита станции была расположена в плоскости, примерно перпендикулярной к плоскости орбиты Луны, совместные действия лунного и солнечного притяжения привели к ее гибели. С каждым оборотом максимальное расстояние от Земли увеличивалось, а минимальное — уменьшалось. Через полгода после 11 оборотов станция вошла в земную атмосферу и сгорела.

Советская станция «Зонд-3» в 1965 г. успешно осуществила фотографирование Луны с расстояния 10 000 км. Изображения высокого качества дали возможность получить детальные сведения о рельефе обратной стороны Луны.

3 февраля 1966 г. впервые была осуществлена мягкая посадка на поверхность Луны советской станции «Луна-9». Ее камеры передали на Землю панораму залитой лавой равнины, усеянной мелкими кратерами и камнями. Посадка «Луны-9» была особенно важной, так как окончательно опровергла гипотезу о том, что лунные моря заполнены пылью глубиной несколько сотен метров. Мягкая посадка показала, что верхний слой поверхности (реголит) достаточно тверд, чтобы выдерживать вес космического аппарата. 31 марта 1966 г. впервые в истории космонавтики станция «Луна-10» стала искусственным спутником Луны. На основе полу-

ченных фотографий в СССР была составлена первая в мире полная карта Луны. Картирование Луны было продолжено пятью американскими спутниками, вращавшимися вокруг нее на невысоких орбитах в 1966—1968 гг.

В сентябре 1970 г. станция «Луна-16» совершила рейс Земля — Луна — Земля, доставив 105 г образцов лунной породы. Позднее, в ноябре 1970 г., космический аппарат «Луна-17» доставил на Луну первый автоматический самоходный аппарат, работающий от солнечных батарей и управляемый с Земли. В 1969—1972 гг. предприняты семь американских лунных экспедиций по программе «Аполлон». В каждой участвовали три космонавта: двое совершали посадку на Луну в лунной кабине, а третий оставался в основном блоке. Этот вариант полета, позволяющий существенно уменьшить стартовую массу ракеты-носителя был разработан в 1918 г. советским ученым Ю. В. Кондратюком. Начальная масса ракетно-космической системы — 2950 т, длина — 111 м, масса космического корабля — 50 т, лунной кабины — 15 т. После достижения первой космической скорости на высоте 190 км масса комплекса — 136 т. На Землю возвращается командный отсек массой 5,4 т. Торможение осуществлялось двухкратным погружением в атмосферу. Сначала корабль должен войти в нее по узкому «коридору входа» шириной 40 км, затормозиться до скорости несколько меньшей первой космической и опять выйти в космическое пространство [6]. При втором входе в атмосферу корабль движется к Земле так же, как при возвращении из орбитального полета. После первых трех полетов космонавты проходили карантин из-за возможности занесения на Землю чужеродных микроорганизмов.

Во время полета на Луну в апреле 1970 г. в служебном отсеке корабля «Аполлон-13» произошел взрыв кислородного бака. Посадка на Луну была отменена. Лунный отсек стал играть роль спасательной шлюпки. Благодаря мужеству и мастерству космонавтов и наземных операторов удалось предотвратить трагедию. После облета Луны аппарат приводнился в Тихом океане. Шестнадцать экспедиций собрали около 400 кг лунных образцов. На Луну были доставлены сейсмометры и лазерные отражатели для проведения дальнейших экспериментов.

Возраст лунных пород оказался равным примерно 4 млрд лет. Анализ химического состава позволил сделать вывод, что Луна и Земля формировались в одной и той же области Солнечной системы. Основными образованиями на поверхности Луны являются «моря» и светлоокрашенные материковые области, окаймляющие моря. Максимальная разность высот между морями и вершинами горных хребтов равна 9 км. Моря расположены в основном на видимой стороне. Вся поверхность Луны покрыта кратерами метеоритного происхождения. Только на видимой стороне насчитывается несколько сотен тысяч кратеров диаметром свыше 1 км.

На обратной стороне их концентрация еще выше. Кратеры в этой области отражают период бомбардировки метеоритами на раннем этапе эволюции Луны. После того как метеоритный поток ослаб, начался период излияния лавы на поверхность. Лава заполняла старые кратеры и затвердевала, образуя равнины. Лавовые потоки, имеющие разный возраст, различаются по количеству и величине кратеров на поверхности. Самое позднее и мощное излияние лавы произошло 3,3 млрд лет назад. Конечная стадия лунной истории — состояние покоя.

На Луне обнаружены области с повышенной плотностью. Эти образования получили название масконов (сокращение от mass concentration). Масконы заставляли корабли «Аполлон» неожиданно менять ускорение. В результате эллиптическая орбита высотой от 100 до 120 км за какие-то двенадцать часов превратилась в круговую высотой 111 км. Проблема происхождения масконов еще не решена.

Луна — негостеприимный мир. Температура в центре видимого диска днем достигает 130°C , а ночью — минус 170°C . На Луне нет воздуха и воды. Сейчас мы убеждены, что там никогда не было жизни. Однако лишенная атмосферы, вызывающей эрозию, и геологически активных внешних слоев коры Луна сохранила свидетельства ранних событий истории Солнечной системы.

Исследования Венеры. Венера — вторая по близости к Солнцу планета, ее масса равна 0,81 земной. Она окружена облаками бледно-желтого цвета. Атмосфера Венеры была открыта М. В. Ломоносовым в 1761 г. при наблюдении прохождения планеты по диску Солнца. Поверхность Венеры всегда скрыта под облаками и не поддается изучению с помощью телескопа. До последних лет ее называли «планетой тайн». Поскольку Венера — наша ближайшая соседка — почти такого же размера, как Земля, то предполагалось, что условия на поверхности Венеры должны напоминать земные. В 1932 г. спектральный анализ света, отраженного атмосферой, позволил установить наличие на Венере углекислого газа. Наиболее крупные успехи в исследованиях Венеры достигнуты в результате полетов космических аппаратов.

В октябре 1967 г., пройдя за четыре месяца 350 млн км, советская научная станция «Венера-4» вошла в атмосферу Венеры со скоростью 12 км/с, впервые проникнув под облака, скрывающие планету. После расшифровки результатов измерений, переданных на Землю, оказалось, что по составу атмосфера Венеры существенно отличается от земной — она содержит 97% углекислого газа. Тот факт, что углекислый газ может быть основной составляющей атмосферы, стал новым фундаментальным открытием в физике планет.

Природа частиц, образующих облака, до конца не выяснена: с большой вероятностью облака состоят из капель серной кислоты. Обнаружена высокая грозовая активность: 35 разрядов в се-

кунду на одном из участков. Средняя температура у поверхности достигает 480°C (напомним, что температура плавления свинца — 327°C , цинка — 420°C), а давление равно 9 МПа ($=90$ атм). На Земле такое давление создает слой воды толщиной ~ 1 км. Очевидно, высокие температура и давление делают пока невозможной высадку космонавтов на Венеру.

Следующий важный шаг был сделан в 1975 г., когда с двух советских станций «Венера-9» и «Венера-10» спускаемые аппараты совершили мягкую посадку на поверхность планеты. При спуске научная аппаратура выдержала перегрузки порядка 300 g. Передача информации с поверхности длилась почти час. На снимках видны плоская равнина и камни на крутом склоне горы. Поверхность была хорошо освещена. Вопреки ожиданиям, оказалось, что атмосфера не обладает высокими преломляющими свойствами.

Радиолокационные наблюдения обнаружили обширные равнины со сглаженным рельефом и плоскогорья с крупными вулканическими конусами. Было установлено, что период вращения Венеры вокруг оси равен 243 сут. Эта величина превосходит период обращения Венеры вокруг Солнца, равный 224,7 сут. Поэтому на Венере «сутки» длиннее года. Венера вращается с востока на запад, т. е. в обратном направлении по отношению к Земле и большинству других планет.

В 1985 г. с советских автоматических межпланетных станций «Вера-1» и «Вера-2» запущены аэростаты в атмосферу Венеры. Участие в эксперименте большинства радиодеталей мира позволило запеленговать передатчик аэростата, перемещавшийся вместе с атмосферными потоками. Измерения подтвердили наличие огромной — около 100 м/с — скорости вращения облачных слоев Венеры. Это удивительное явление, суперротация, было обнаружено с Земли. Пока ни одна модель этого явления не может объяснить имеющиеся данные.

Исследования Марса. Масса Марса составляет 0,1 земной, средняя плотность $\sim 3,95 \cdot 10^3$ кг/м³ существенно меньше плотности Земли, экваториальный радиус, равный 3394 км, примерно в два раза больше лунного. Максимальное расстояние между Землей и Марсом равно 377,5 млн км, когда они оказываются в диаметрально противоположных точках своих орбит. Во время противостояний, происходящих с интервалом 780 сут, Солнце, Земля и Марс находятся на одной прямой. Расстояние от Земли до Марса в противостоянии изменяется от 56 млн до 101 млн км. Противостояния, соответствующие минимуму этой величины, называются великими. Они наступают через 15–17 лет (ближайшие в 1986 и 1988 гг.).

Марс давно привлекал внимание человека. В телескоп Марс виден как красный диск с белыми шапками на полюсах и выделяющимися темными пятнами. Первая зарисовка деталей поверхности Марса была сделана Х. Гюйгенсом в 1659 г. Последующие

наблюдения с более мощными телескопами позволили обнаружить новые детали. В 1877 г. Дж. Скиапарелли составил карту, на которой видны прямые, получившие известность как марсианские каналы. Сразу же последовали гипотезы о существовании развитой цивилизации на Марсе. Там, где каналы пересекались, были видны небольшие пятна, которые считались населенными пунктами. Значительные изменения формы и яркости некоторых областей связывали с наличием растительности. Однако с началом в 1962 г. космических программ, выполненных нашими «Марсами» и американскими «Маринерами» и «Викингami», пришлось радикально пересмотреть эти представления. Оптимистические прогнозы о наличии растительности на Марсе не подтвердились. Не обнаружены также знаменитые «каналы», будоражившие воображение. Зато большим сюрпризом было открытие русел высохших рек и других доказательств существования в прошлом воды. Но откуда же могла появиться вода, если средняя температура на Марсе — 40° Цельсия, а плотность атмосферы в 100 раз меньше, чем земная? Эту загадку еще предстоит разрешить. Сейчас вся марсианская вода сосредоточена в виде льда в полярных шапках. Наиболее важной причиной этого обстоятельства является то, что Марс находится в 1,5 раза дальше от Солнца, чем Земля, и получает в 2 раза меньше солнечного тепла. По числу метеоритных кратеров, приходящихся на сеть каналов, можно оценить возраст речной сети примерно в 4 млрд лет.

Рельеф планеты. Анализ снимков, сделанных с разрешением 100 м, занял несколько лет. Наиболее удивительным оказалось разнообразие отдельных районов. Большие котловины покрыты кратерами, которые образовались в результате ударов метеоритов. Самая большая из них достигает 2000 км в поперечнике и 4 км в глубину. Наблюдаются и низменные равнины, вовсе лишенные кратеров, с красноватой почвой, усеянной камнями. Основными элементами в почве являются кремний, железо, кальций, алюминий, титан. Среди наиболее впечатляющих форм марсианского ландшафта — колоссальные горы, похожие по форме на земные вулканы Гавайских островов, но намного превосходящие их по размерам. Самый большой из них — потухший вулкан Арсия диаметром 500 км в основании достигает 27 км. Обнаружено четыре гигантских вулкана и множество более мелких с поперечником до 100 км. Выдающаяся геологическая особенность Марса — гигантский пояс провалов вдоль экватора длиной четыре тысячи километров, шириной до 200 км и глубиной от 3 до 5 км.

Атмосфера Марса состоит в основном из углекислого газа. Давление у поверхности примерно в сто раз меньше земного. Температура поверхности Марса вблизи экватора днем $10-20^{\circ}\text{C}$, ночью — $60-70^{\circ}\text{C}$; в полярных зонах до -130°C . Неожиданное атмосферное явление — пылевые бури со скоростью ветра до 100 м/с продолжаются иногда несколько месяцев. Эти бури

настолько сильны, что пыль поднимается на высоту свыше 40 км и придает планете красноватую окраску. Пыль поглощает солнечное излучение, а перепады температур приводят к интенсивной циркуляции. Когда плотность пыли возрастает настолько, что нижние слои перестают получать достаточное количество тепла, бури стихают.

В 1981 г. обнаружилось, что атмосфера планеты действует как огромный естественный лазер, испускающий инфракрасное излучение. Причина этого явления — избыток высокоэнергичных молекул CO_2 на высоте 75 км по отношению к нижней части атмосферы. Такое состояние атмосферы соответствует условиям, требуемым для работы лазера (см. § 57).

Марс обладает двумя спутниками, их называли Фобосом (греч. — страх) и Деймосом (греч. — ужас). Удалось сфотографировать Фобос с расстояния 90 км, а Деймос с расстояния 23 км. Оба они имеют неправильную форму и весьма сильно отличаются от нашей Луны; возможно это захваченные астероиды. Фобос по форме напоминает картофелину размером 28×20 км со впадинами и выступом, всегда обращенным к Марсу. На его поверхности есть кратеры, наибольший из которых имеет диаметр 6,5 км. Уникальная особенность Фобоса — наличие системы параллельных борозд, покрывающих более половины поверхности. Ширина борозд — 100—200 м, глубина — 20—30 м. Одна из возможных причин образования борозд — гравитационное растяжение (см. примеч. 24.3)

Исследования внешних планет. Солнечная система делится на две основные части широким разрывом между внутренними планетами (Меркурий, Венера, Земля, Марс) и четырьмя внешними планетами-гигантами (Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун). Эти тела совершенно не похожи на планеты земной группы. По современным данным они имеют жидкое ядро, непрерывно переходящее в атмосферу. Особенности движения самой дальней планеты — Плутона и ее малые размеры позволяют сделать предположение, что она была спутником Нептуна. Все гиганты окружены роем спутников: Юпитер имеет 16 спутников, Сатурн — 23, Уран — 15 и Нептун — 2. Один из спутников Сатурна — Титан — уникален тем, что имеет красно-оранжевую атмосферу. Правда, Сатурн в 95 раз массивнее Земли, а Титан больше Луны или Меркурия.

Планеты-гиганты существенно различаются между собой. Сатурн окружен системой концентрических колец, расположенных в экваториальной плоскости. Известны 7 колец. С Земли хорошо видны три. Толщина колец оценивается в пределах 1—4 км. Кольца состоят из ледяных глыб или покрытых льдом камней. В 1977—1981 гг. открыты 9 колец, окружающих Уран, и одно кольцо у Юпитера. Любопытно, что Уран вращается «лежа на боку» — вокруг оси, расположенной в плоскости орбиты.

Самой загадочной планетой Солнечной системы, по мнению многих ученых, является самая большая из них — Юпитер (масса в 318 раз больше массы Земли). Он излучает в два раза больше энергии, чем получает ее от Солнца. Механизм генерации теплоты еще непонятен. Ясно выделяется Большое Красное пятно — овал размером (24 тыс. — 40 тыс. км), превосходящий Землю, который наблюдается уже более 300 лет. Согласно современным представлениям пятно является устойчивым атмосферным возмущением.

Космический вояж. В 1977 г. начался полет кораблей «Вояджер-1» и «Вояджер-2» по маршруту Земля — Юпитер — Сатурн — Уран — Нептун. Этот полет получил название «Гран тур» — большое путешествие. 5 марта 1979 г. «Вояджер-1» пролетел в окрестности Юпитера. Анализ изображений планеты и нескольких ее спутников привел к поразительным открытиям. Прежде всего у Юпитера обнаружено кольцо, состоящее из обломков пород и глыб льда. Наиболее неожиданным было открытие действующих вулканов на спутнике Ио. Они являются единственными в Солнечной системе активными вулканами внеземного происхождения. У Ио обнаружена атмосфера и ионосфера. Поверхности других спутников покрыты слоем льда. Спутник Европа оказался телом с поразительно гладкой поверхностью, самой гладкой из известных в Солнечной системе.

В ноябре 1980 г. «Вояджер-1» прошел на расстоянии 124 000 км от поверхности Сатурна и всего лишь на расстоянии 4500 км от его самого большого спутника Титана. Слой дымки не позволил наблюдать поверхность. На изображении другого спутника — Мимаса — был обнаружен гигантский кратер глубиной 9 км и диаметром 130 км, составляющим примерно треть диаметра самого спутника. Размеры кратера свидетельствуют о таком ударе метеорита, от которого Мимас едва не развалился на части. Из вновь открытых маленьких спутников два не имеют аналогов в Солнечной системе. Они находятся на почти одинаковых орбитах, периодически сближаются и «обмениваются» траекториями. Близкое прохождение Титана — основной цели полета — сделало достижение Урана невозможным — аппарат ушел в отдаленные районы Солнечной системы. Другой аппарат — «Вояджер-2» — совершил в июле 1979 г. пролет вблизи Юпитера, а в августе 1981 г. после пролета в окрестности Сатурна перешел на траекторию полета к Урану. Высококачественные изображения, переданные двумя аппаратами позволили обнаружить тонкую структуру колец Сатурна. Оказалось, что каждое из них состоит из тысяч отдельных узких полосок. Внутри колец могут находиться небольшие «луны» — гиганты по сравнению с другими частицами. Не менее замечательной особенностью большого кольца явилось наблюдение радиальных возмущений плотности частиц. Но самый главный сюрприз — совершенно невероятная структу-

ра кольца *F*, шириной 500 км, удаленного от Сатурна на 80 тыс. км. На снимках можно различить несколько отдельных нитей, местами переплетенных, местами идущими параллельно друг другу. По всей длине кольца распределены сгущения и узлы. Кольцо находится между орбитами двух маленьких спутников — гравитационных «пастухов» кольца. До сих пор не удается построить теорию, объясняющую удивительную структуру кольца *F*.

В январе 1986 г. «Вояджер-2» пролетел вблизи Урана на расстоянии 81 000 км от его облачного покрова. Детектор выявил необычное свечение в атмосфере планеты. Обнаружены также атмосферные вихри и существование мощных ветров. Были открыты два новых кольца и 10 спутников (теперь их — 15). Траектория станции была выбрана так, чтобы она прошла на расстоянии 29 000 км от ближайшего к Урану спутника — Миранды. Рельеф поверхности Миранды ошеломил ученых. На снимках видны хребты, долины, разломы и борозды, величина которых сравнима с радиусом спутника, равным 241 км. Огромные скругленные поля и четырехугольное поле с выделяющимся светлым углом — самые уникальные образования во всей Солнечной системе. На сероватом диске другого спутника — Умбриэля — открыто большое число кратеров и странное яркое пятно.

Сигналам с «Вояджера-2», находящегося на расстоянии 2869,6 млн км, требовалось 2 ч 45 мин, чтобы достичь Земли. Изменив под действием тяготения Урана траекторию, космический аппарат взял курс к Нептуну, которого должен достичь в августе 1989 г.

Наша планета — Земля. Земля — самая крупная из внутренних планет и самая массивная. От других планет Землю отличает наличие богатой кислородом атмосферы и значительного количества воды. Сейчас средняя температура у поверхности составляет 15°С. На Марсе из-за низкого атмосферного давления не может быть океанов, их нет на Луне или Меркурии, где атмосфера отсутствует. На Венере температура слишком высока, чтобы там могла существовать жидкая вода.

Динамическое равновесие, которое включает обмен энергией и веществом между недрами, поверхностью, атмосферой и океанами, способствует поддержанию условий, благоприятных для существования различных форм жизни. Живые организмы оказывают огромное влияние на эволюцию земной коры и ее атмосферу. В современную эпоху ежегодно все растения Земли связывают 150 млрд т углерода с 25 млрд т водорода и выделяют 400 млрд т кислорода. При этом 90% кислорода поступает из океана в результате фотосинтеза в водорослях. Возможно, что поддержание стабильного узкого интервала температур, необходимого для существования жизни, осуществляется самими процессами жизнедеятельности.

Из всех живых существ, обитающих на Земле, человек оказы-

вает наибольшее воздействие на природу. Расширение масштабов производственной деятельности человечества может вызвать серьезные отрицательные последствия для окружающей среды и повлиять на ход развития Земли как планеты. Только сейчас мы стали понимать, что необдуманные действия могут изменить тонкую оболочку атмосферы, океанов и растительности, которые делают возможным существование человечества. Более эмоционально говорит об этом космонавт В. И. Севастьянов: «Наша голубая планета из космоса имеет удивительно красивый вид. Она прекрасна, но и поразительно мала... И вдруг понимаешь, что сама Земля — это космический корабль, который несется в космосе. Он имеет ограниченные ресурсы и экипаж — человечество, которое должно беречь свою планету, ее ресурсы, беречь себя».

§ 16. ГИДРОСТАТИКА. ЗАКОН ПАСКАЛЯ. ГИДРОСТАТИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ

1. Жидкости и газы. Любое твердое тело имеет определенную форму. Общее свойство твердых тел, жидкостей и газов проявляется в том, что для изменения их объема требуются значительные усилия. Однако сейчас нас интересуют те признаки, которые отличают жидкости и газы от твердых тел. Характерной особенностью жидкостей и газов является та легкость, с которой можно изменять их форму без изменения объема.

При исследовании поведения жидкостей (или газов) изучают не движение каждой отдельной молекулы, а поведение так называемых «жидких частиц» — объема, малого по сравнению со всем объемом жидкости, но достаточно большого, чтобы флуктуации (см. § 28) не оказывали влияния на измеряемые в этом объеме средние значения физических величин: массы, температуры и т. д. Далее предполагается, что структура жидкости идеально непрерывна, и физические величины, связанные с веществом, равномерно распределены в объеме жидкой частицы. Таким образом, приходят к представлению о жидкости как о сплошной среде. Поэтому, когда говорят о значении физической величины в некоторой точке среды с координатами x, y, z , то имеют в виду значение в малом объеме в окрестности данной точки.

2. Объемные и поверхностные силы. Можно различать два вида сил, действующих на частицы жидкости. К первому относятся силы дальнего действия (подобные силе тяжести), действующие на каждый элемент объема. Эти силы называют объемными, или массовыми. На жидкую частицу массой Δm действует сила тяжести $\Delta F = \Delta mg$. Ко второму виду относятся силы близкого действия, возникающие в результате непосредственного контакта между взаимодействующими элементами жидкости, газа и твердых тел на их общей границе. Эти силы называют поверхностными. На рис. 16.1 изображены поверхностные силы, действующие на неподвижные частицы жидкости со стороны окружающей их жидкости, атмосферного воздуха и стенок сосуда.

При изменении внешних сил изменяется степень деформации жидкости. Поскольку несжимаемых сред в природе не существует,

то при сжатии изменяется также и плотность. Если в каком-либо процессе изменение плотности среды пренебрежимо мало, то такую среду можно рассматривать как несжимаемую.

3. Давление. Возьмем квадратную пластинку и положим ее на горизонтальную поверхность стола. Мы знаем, что со стороны пластины на стол действует сила нормального давления F . Ее величина заранее неизвестна и может быть найдена из условия равновесия: $F = -mg$, где m — масса пластины. Найдем далее отношение

$$p = \frac{F}{S}, \quad (16.1)$$

где F — величина силы, S — площадь пластины. Каков смысл величины p ? Расположим в плоскости стола систему координат xy . Ось z направлена вертикально вниз. Очевидно, вне области, занятой пластиной, отношение аналогичное (16.1)

равно нулю (рис. 16.2a). Следовательно, введенная выше величина p должна быть функцией координат. А теперь заменим пластинку

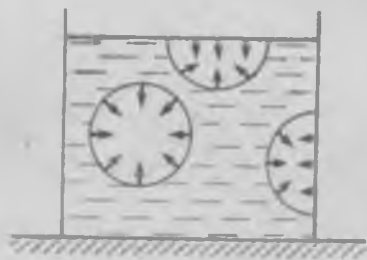


Рис. 16.1

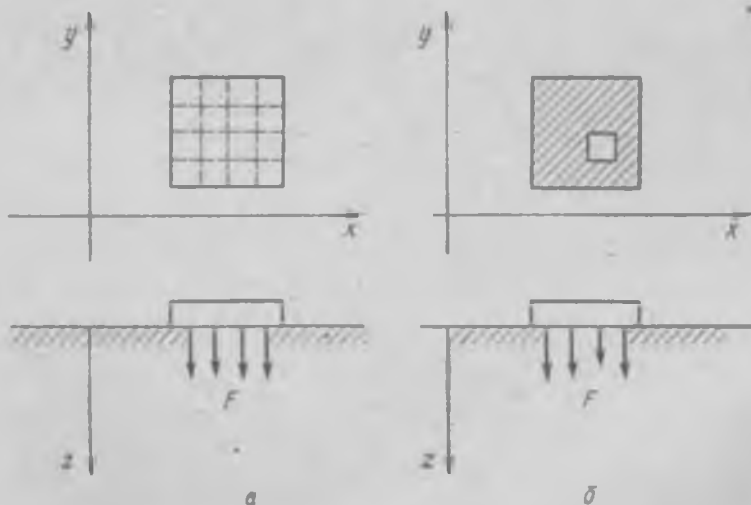


Рис. 16.2

другой, тех же размеров, но с вырезанным квадратиком (рис. 16.2б). Каков смысл отношения (16.1) в этом случае? Ясно только, что в области вырезанного квадратика сила давления отсутствует.

Мы приходим к выводу, что для корректного определения величины p , которую мы назовем давлением, необходимо прежде всего знать распределение сил $\vec{F}(x, y, z)$, действующих в каждой точке поверхности S (рис. 16.3). После этого введем единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный бесконечно малой плоской площадке ΔS в окрестности точки с координатами x, y, z , и определим скалярное произведение $\vec{F}\vec{n} = f(x, y, z)$. Функция $f(x, y, z)$ — проекция силы $\vec{F}$ на направление $\vec{n}$; перпендикулярное плоскости площадки.

Давление $p(x, y, z)$, создаваемое силой $\vec{F}(x, y, z)$ в точке с координатами x, y, z , определяется выражением

$$p(x, y, z) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta S}, \quad (16.2)$$

где Δf — приращение функции $f(x, y, z)$. Из определения (16.2) следует, что выражение «давление на стенку или дно» лишено смысла. (Аналогом этого выражения является фраза «скорость за время» по отношению к определению скорости (3.4) в момент времени t .) Давление — скалярная функция, принимающая в разных точках поверхности S различные значения. Если, например, положить руку на стол, то в разных точках под подушечками пальцев давление будет различным.

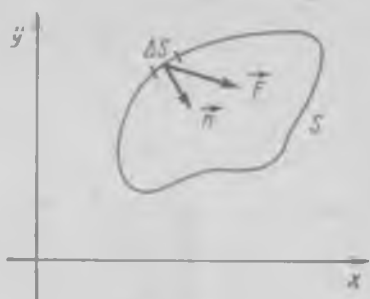


Рис. 16.3

Единицей давления в СИ является паскаль: $1 \text{ Па} = 1 \text{ Н/м}^2$. Сила 1 Н , равномерно распределенная по плоской поверхности площадью 1 м^2 , создает в каждой точке поверхности давление, равное 1 Па . Внесистемные единицы давления: 1 атм (физическая атмосфера) $= 760 \text{ мм рт. ст.} = 101\,325 \text{ Па} = 1,0332 \text{ кгс/см}^2$; 1 ат (техническая атмосфера) $= 1 \text{ кгс/см}^2 = 98\,066,5 \text{ Па}$; $1 \text{ бар} = 10^5 \text{ Па}$. Соотношения между единицами давления: $1 \text{ Па} = 9,87 \cdot 10^{-6} \text{ атм} = 7,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм рт. ст.} = 0,102 \text{ кгс/см}^2$; $1 \text{ мм рт. ст.} = 133,332 \text{ Па} = 1,35952 \cdot 10^{-3} \text{ кгс/см}^2$.

Приведем некоторые справочные данные: в аорте взрослого человека давление $\sim 100 \text{ мм рт. ст.}$, в венах падает до 10 мм рт. ст. Максимальное давление нефти в трубопроводе не превышает 8140 Па . Превращение графита в алмаз происходит при давлении порядка 10^5 атм . При ударах волн в шторм давление достигает $7 \cdot 10^3 \text{ кгс/см}^2$. В высококачественном звукозаписывающем устройстве сила давления $0,001 \text{ кгс}$ кончика иглы диаметром $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ создает локальное давление $\sim 200 \text{ атм}$. У основания плотины гидростан-

ции высотой 300 м на р. Вакше в Таджикистане давление 300 тс/м².

В протонных накопительных кольцах, предназначенных для соударений протонов с антипротонами и протонами, давление составляет 10⁻¹¹ мм рт. ст., а в местах пересечения колец — 10⁻¹³ мм рт. ст.

4. Закон Паскаля. Мы знаем, что важной характеристикой силы как вектора является ее направление. В неподвижной жидкости (газе) сила давления, действующая со стороны одной жидкой частицы на другую (или на стенки сосуда), обусловлена только изменением объема — деформацией сжатия — и всегда перпендикулярна к малому плоскому элементу поверхности раздела этих частиц. Если эти силы были бы направлены не перпендикулярно поверхности, то составляющая силы, касательная к поверхности, стремилась бы изменить ее форму без изменения объема. Поскольку этого не наблюдается, то касательная составляющая равна нулю.

Следовательно, в неподвижной жидкости сила давления $\Delta \vec{F}$, действующая на площадку ΔS , расположенную перпендикулярно единичному вектору $\vec{n}$,

$$\Delta \vec{F} = p \Delta S \vec{n}. \quad (16.3)$$

Для определения величины силы $\Delta \vec{F}$ необходимо знать зависимость давления от координат. Если внешние силы приложены к поверхности жидкости как к целому, то выполняется закон, открытый в 1653 г. французским математиком и физиком Б. Паскалем (1623—1662): *поверхностные силы, действующие на неподвижную жидкость (или газ), создают давление, одинаковое во всех точках жидкости (или газа).*

Поверхностными силами являются сила атмосферного давления и сила, действующая на жидкость со стороны соприкасающихся с ней тел. Например, если в стакан с водой опустить палец, то давление в каждой точке внутри воды возрастает на одинаковую величину. Если же учесть действие силы тяжести, то давление будет содержать дополнительное слагаемое — гидростатическое давление, зависящее от положения точки, в которой измеряется полное давление.

На рис. 16.4 изображена одна и та же бесконечно малая площадка в двух положениях. Согласно закону Паскаля величины сил $\Delta \vec{F}_1$ и $\Delta \vec{F}_2$ одинаковы при произвольном их расположении. Частокол одинаковых по величине стрелок — силы, действующие на жидкость со стороны атмосферы и стенок (силой тяжести пренебрегаем).

Заметим, что в учебной литературе большинство формулиро-

вок закона Паскаля содержит выражение «...давление передается...». В механике (см. задачи 9.1, 9.2), как и в гидростатике, силы не передаются. Не передается и создаваемое ими давление.

ЗАДАЧА 16.1. Малый поршень гидравлического пресса, к которому приложена сила $T=100$ кгс, переместился на расстояние $l_2=0,9$ м. Найти силу, действующую на большой поршень и величину его перемещения. Отношение площадей большого и малого поршней $S_1/S_2=20$.

Решение. На рис. 16.5 силы F_1 и F_2 действуют со стороны жидкости на поршни. Поскольку мы пренебрегаем силой тяжести,

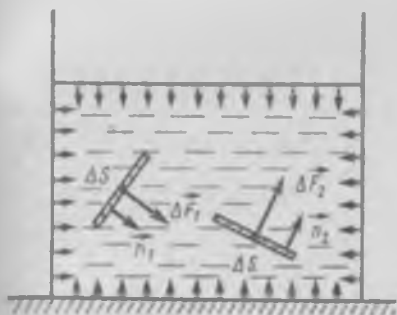


Рис. 16.4

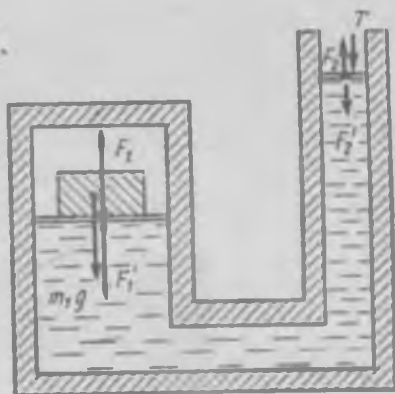


Рис. 16.5

действующей на жидкость, то в соответствии с законом Паскаля давление во всех точках жидкости одинаково. Следовательно,

$$\frac{F_1}{S_1} = \frac{F_2}{S_2}. \quad (1)$$

Поскольку малый поршень неподвижен, то $T=F_2$ (массой малого поршня мы пренебрегаем). Следовательно,

$$F_1 = T \frac{S_1}{S_2} = 2 \text{ тс} \gg T.$$

Определим смещение большого поршня l_1 из условия: масса жидкости, которую поршень вытолкнет из малого цилиндра, равна приращению массы жидкости в большом цилиндре,

$$S_1 l_1 = S_2 l_2.$$

Отсюда находим $l_1=0,02$ м, т. е. выигрыш в силе сопровождается проигрышем в пути.

5. Гидростатическое давление. Помимо внешних сил, приложенных к поверхности жидкости (газа), на каждую единицу ее массы действует сила тяжести. Благодаря силе тяжести верхние слои жидкости (газа) оказывают давление на нижние. Поэтому в жидкости (газе) наблюдается еще так называемое гидростатическое давление, обусловленное тяжестью жидкости (газа). Давление в жидкости, следовательно, является суммой давления, создаваемого поверхностными силами, и гидростатического давления. Плотность ρ жидкости (газа) можно считать постоянной, пока рассматриваются изменения гидростатического давления при не очень больших разностях высот.

Для того чтобы найти зависимость давления $p(h)$ от глубины h , рассмотрим жидкий параллелепипед, одно основание которого находится на поверхности, а другое — на глубине h . На этот столбик жидкости действуют сила тяжести и поверхностные силы, приложенные к его поверхности со стороны окружающей среды. В неподвижной жидкости сумма этих сил равна нулю. Введем систему координат с началом на поверхности жидкости, ось h направим вертикально вниз. В горизонтальном направлении поверхностные силы уравнивают друг друга (рис. 16.6). В вер-

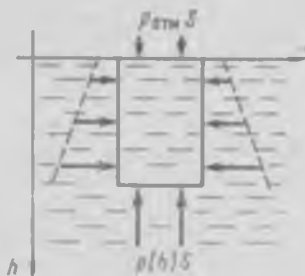


Рис. 16.6

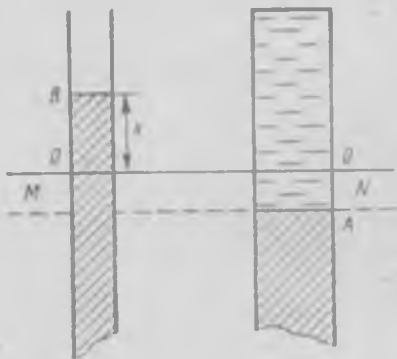


Рис. 16.7

тикальном направлении на столбик действуют сила тяжести $mg = \rho ghS$, поверхностная сила $F_1 = p_{\text{атм}}S$ (на верхнее основание) и поверхностная сила $F_2 = p(h)S$ (на нижнее основание). Проекция полной силы давления на ось h равна

$$F_n = p(h)S - p_{\text{атм}}S.$$

Приравнявая нулю проекции на ось h суммы всех сил

$$0 = mg - [p(h) - p_{\text{атм}}]S. \quad (16.4)$$

найдем давление на глубине h

$$p(h) = p_{\text{атм}} + \rho gh. \quad (16.5)$$

Слагаемое ρgh называют гидростатическим давлением. Гидростатическое давление зависит только от глубины h и плотности жидкости. В соответствии с законом Паскаля давление на любой глубине больше гидростатического на величину атмосферного давления.

ЗАДАЧА 16.2. В двух цилиндрических сообщающихся сосудах налита ртуть. Сечение одного из сосудов вдвое больше другого. Более широкий сосуд доливают до края водой. На сколько поднимется при этом уровень ртути в другом сосуде? Первоначально уровень ртути был на расстоянии L от верхнего края сосудов.

Решение. Предположим, что в состоянии равновесия вода и ртуть занимают положения, изображенные на рис. 16.7. Прямая MN совпадает с первоначальным уровнем ртути. После того как долили до края водой правый сосуд, ртуть в нем опустилась до уровня A , а в левом сосуде поднялась до уровня B , т. е. ртуть, занимавшая в первом сосуде объем между уровнями O и A , перетекла в левый и заняла объем между уровнями B и O .

Обозначим через x искомое расстояние между уровнями B и O . Тогда, в силу того что сечение правого сосуда вдвое больше сечения левого, расстояние OA равно $x/2$. Давления ртути на одинаковых уровнях в обоих сообщающихся сосудах равны. Запишем, например, условие равенства давлений на уровне A :

$$\rho_{\text{рт}} g \frac{3}{2} x = \rho_{\text{в}} g \left(L + \frac{x}{2} \right).$$

Из этого уравнения определяем

$$x = \frac{2\rho_{\text{в}}}{3\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{в}}} L.$$

ПРИМЕР 16.3. Два открытых сверху вертикально стоящих сосуда соединены трубками у основания и на высоте $H=8$ м. Трубки вначале закрыты клапанами (рис. 16.8а). Первый сосуд заполнен водой до высоты $h_1=10$ м, второй — нефтью (плотностью $\rho_2=0,8 \cdot 10^3$ кг/м³) так, чтобы давление на дно в первом и втором сосудах было одинаково: $h_2=(\rho_1/\rho_2)h_1=12,5$ м. Какое установится распределение нефти и воды в сосудах, если открыть клапан A ?

Введем числовую ось z с началом на поверхности нефти. Зависимость давления в первом и во втором сосудах от координаты z имеет вид

$$p_1(z) = p_{\text{атм}} + \rho_1 g z, \quad z > h_2 - h_1,$$

$$p_2(z) = p_{\text{атм}} + \rho_2 g z, \quad z > 0.$$

Далее для упрощения вычислений будем отсчитывать давление от величины $p_{\text{атм}}$. На рис. 16.86 пунктирными линиями изображены графики функций $10^{-3} p_{1,2}(z)$, из которых видно, что на любом уровне давление в сосуде с нефтью больше давления в сосуде с водой. В частности, на высоте $H=8$ м давление нефти $p_{\text{н}} = \rho_2 g (h_2 - H) = 35,28 \cdot 10^3$ Па, а давление воды $p_{\text{в}} = \rho_1 g (h_1 - H) = 19,6 \cdot 10^3$ Па.

Рассмотрим нарушение равновесия нефти и воды при просачивании нефти через открытый клапан А (рис. 16.8а). Нефть бу-

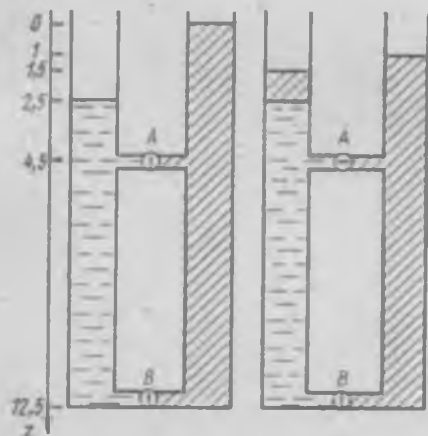


Рис. 16.8а

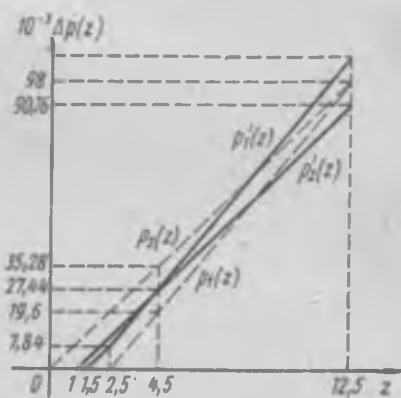


Рис. 16.8б

дет перетекать в воду пока давления нефти и воды на высоте H не уравниваются:

$$\rho_1 g (h_1 - H) + \rho_2 g x = \rho_2 g (h_2 - H - x), \quad (1)$$

где x — высота столба нефти, перетекающей в первый сосуд. Из (1) находим

$$x = \frac{1}{2} H \left(\frac{\rho_1}{\rho_2} - 1 \right) = 1 \text{ м.}$$

На рис. 16.8б изображены графики зависимости давления $p'_{1,2}(z)$ в двух сосудах после установления равновесия. Функция $p'_2(z)$ смещена вниз относительно функции $p_2(z)$ на величину $\rho_2 g x = 7,84 \cdot 10^3$ Па. Функция $p'_1(z)$ образована двумя отрезками прямых: в области $h_2 - h_1 - x \leq z \leq h_2 - h_1$ один отрезок параллелен $p'_2(z)$, в области $z > h_2 - h_1$ другой отрезок смещен вверх относительно прямой $p_1(z)$ на величину $\rho_2 g x$. Если теперь открыть клапан В, то рассматриваемая система перейдет в состояние устойчивого равновесия. Изобразите в этом случае графики зависимости давления в обоих сосудах от координаты.

ПРИМЕР 16.4. Давление в жидкости, движущейся с ускорением. Опять рассмотрим массу жидкости, ограниченную параллелепипедом (см. рис. 16.6). Предполагая, что сосуд с жидкостью движется с ускорением a , направленным вертикально вниз, получим вместо (16.4) уравнение

$$ma = mg - (p(h) - p_{\text{атм}})S.$$

Из него следует, что давление на глубине h

$$p(h) = p_{\text{атм}} + \rho(g - a)h. \quad (16.6)$$

Если сосуд с жидкостью падает с ускорением $a = g$, то гидростатическое давление равно нулю.

6. Гидростатический парадокс. Три сосуда, площади дна которых одинаковы, заполнены до одного и того же уровня разными количествами воды (рис. 16.9): в первом — 200 г, во втором — 300, в третьем — 125 г.

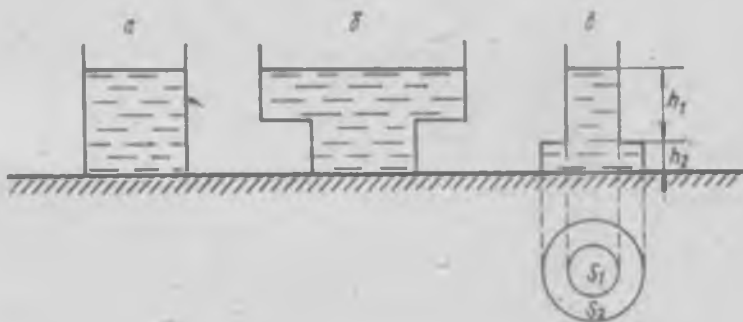


Рис. 16.9

Может показаться странным, что, несмотря на то что в сосудах содержится разное количество воды, силы, действующие на дно каждого из них, одинаковы. С формальной стороны здесь, все понятно. Гидростатическое давление на дно равно ρgh , где h — высота уровня воды, и, следовательно, сила давления на дно каждого сосуда $F = \rho ghS$. Попробуем истолковать этот вывод. В случае б давление создается только весом жидкости, расположенной над дном, поскольку сила давления остальной части жидкости уравнивается упругой силой деформации горизонтальных участков стенок сосуда. В случае в давление на участки дна, расположенные под горизонтальными участками стенок, складывается из гидростатического давления ρgh_2 и давления ρgh_1 , создаваемого весом жидкости ρgh_1S , заполняющей горлышко, которое

согласно закону Паскаля одинаково во всех точках части сосуда высотой h_2 . Таким образом, давление в любом участке дна оказывается равным $\rho gh_1 + \rho gh_2 = \rho gh$. Анализируя силы давления, действующие на дно, мы приходим к выводу $F = \rho ghS$. Действительно, на высоте h_2 на горизонтальный участок стенки площадью S_2 действует со стороны жидкости, находящейся в горлышке, направленная вверх сила $F_2 = \rho gh_1 S_2$. Она приводит к деформации стенки, и вследствие третьего закона Ньютона стенка давит на часть жидкости, лежащей под ней, с силой $\rho gh_1 S_2$. Добавляя эту силу к весу этой же части жидкости, определим силу давления на часть дна, расположенную под горизонтальным участком стенки: $\rho gh_1 S_2 + \rho gh_2 S_2 = \rho gh S_2$. Складывая эту силу с силой давления $\rho gh_1 S_1$ на часть дна площадью S_1 , расположенную под горловиной, найдем, что полная сила давления на дно равна $F = \rho ghS$ (поскольку $S = S_1 + S_2$). Теперь становится ясно, почему давление в некоторой точке сообщающихся сосудов определяется не высотой столба жидкости, расположенного непосредственно над этой точкой, а расстоянием до свободной поверхности жидкости.

Если у сосуда, изображенного на рис. 16.9а, горлышко достаточно узко, а площадь дна велика, то, как показывает простой расчет, можно небольшим весом воды создать огромное давление внутри сосуда. Например, полстакана воды достаточно, чтобы поднять человека весом 60 кгс. Для этого присоединим резиновую трубку к грелке размером 30 см × 20 см, нальем некоторое количество воды в грелку и трубку и, встав на доску, положенную на грелку, продолжим приливать воду в трубку. Если высота трубки 1 м и площадь ее сечения 1 см², то давление в грелке $p = \rho gh = 9,8 \cdot 10^3$ Па. Сила, действующая на верхнюю поверхность грелки, равна $F = pS = 60$ кгс, и эта сила вызвана всего лишь 100 г воды, налитыми в трубку. Очевидно, грелка с трубкой фактически является системой типа гидравлического пресса.

ЗАДАЧА 16.5. В резервуар с водой погрузили сосуд в форме усеченного прямого конуса, нижнее меньшее основание которого закрыто невесомой пластинкой (рис. 16.10). Сила реакции ободка конуса $N = 1$ кгс. Отпадет ли пластинка, если в сосуд влить 1 кг воды?

Решение. Предположим, что пластинка находится на глубине h , а площадь нижнего основания равна S . Сумма сил давления, действующих на часть пластинки, находящуюся вне основания конуса, равна нулю. На другую часть пластинки (в форме круга) действуют силы $F = (p_{\text{ат}} + \rho gh)S$ со стороны воды и $F_{\text{ат}} = p_{\text{ат}}S$ со стороны атмосферы и сила реакции N . Поэтому сила реакции ρghS численно равна весу 1 кгс воды в форме цилиндра высотой h , площадь которого S (этот объем выделен пунктиром). Если в конус влить 1 кг воды, то он займет объем высотой $h_1 < h$. Вследствие этого сила реакции станет равной $\rho g(h - h_1)$. Следовательно, пластинка не отпадет. Для того чтобы пластинка отпала, не-

обходимо долить некоторое количество воды до уровня воды в резервуаре.

7. Давление атмосферы. В газе (как и в жидкости) изменение давления с высотой определяется весом столба газа, расположенного между двумя данными уровнями. Однако вес одного и того же столба газа с изменением высоты меняется, так как степень сжатия на разных высотах неодинакова. По этой причине формулой $p_{\text{атм}} = \rho gh$ можно пользоваться только для малых изменений высот.

Экспериментально атмосферное давление можно измерить с помощью ртутного барометра. Атмосферное давление, при котором высота ртутного столба равна 760 мм, называют нормальным атмосферным давлением. Поскольку давление во всех точках, принадлежащих одному уровню, одинаково, то, приравнявая величину атмосферного давления на поверхности ртути давлению столба ртути высотой $h_{\text{рт}}$, найдем $p_{\text{атм}} = 1 \text{ атм} = \rho_{\text{рт}} gh_{\text{рт}}$, где $\rho_{\text{рт}} = 13,6 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность ртути. Следовательно,

$$h_{\text{рт}} = \frac{p_{\text{атм}}}{g\rho_{\text{рт}}}.$$

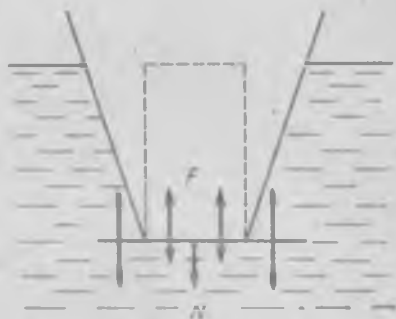


Рис. 16.10

Если бы мы использовали вместо ртути воду, то в водяном барометре вода поднялась бы на высоту, определяемую условием

$$\rho_{\text{рт}} gh_{\text{рт}} = \rho_{\text{в}} gh_{\text{в}}, \quad h_{\text{в}} = h_{\text{рт}} (\rho_{\text{рт}} / \rho_{\text{в}}) = 10,332 \text{ м}.$$

Атмосферное давление на поверхности Земли создается весом всей атмосферы, т. е. $p_{\text{атм}} = P/S$, где S — площадь земной поверхности, равная приблизительно $4\pi R^2$ (R — радиус Земли). Подставляя в формулу $P = 4\pi R^2 p_{\text{атм}}$ значения нормального атмосферного давления и радиуса Земли, найдем вес всей атмосферы $P = 5 \cdot 10^{15} \text{ тс}$.

ПРИМЕР 16.6. Накройте стакан, наполненный водой доверху, куском смоченного картона. Затем, придерживая картон, переверните его и уберите руку. Вода не выльется из стакана. Почему? Для того чтобы выделить в явлении самое существенное, будем считать, что массы стакана и картона равны нулю. На рис. 16.11 изображены силы, действующие на стакан с картонкой как целое тело: $\vec{F}_T$, $\vec{F}_T'$, $\vec{N}$, $\vec{N}'$ — силы трения и реакции со стороны руки. На поверхность дна стакана и картонку действует сила атмосферного давления, $F_{\downarrow} = p_{\text{ат}} S$, $F_{\uparrow} = p_{\text{ат}} S$. На воду действует

сила тяжести mg . Очевидно, сумма всех сил равна нулю. Рассмотрим отдельно силы, действующие на картонку: $\vec{N}$ — реакция ободка стакана, $\vec{P} = mg$ — сила веса воды и $F_1 = p_{\text{ат}}S$ — сила атмосферного давления. Поскольку сумма сил равна нулю, то

$$N = p_{\text{ат}}S - mg = \rho_w g \left(\frac{p_{\text{ат}}}{\rho_w g} - H \right) S.$$

Очевидно, пока высота «стакана» H меньше 10,33 м вода не вытечет. Разумеется необходимо учесть массу картонки. Рассматриваемая система является неустойчивой.

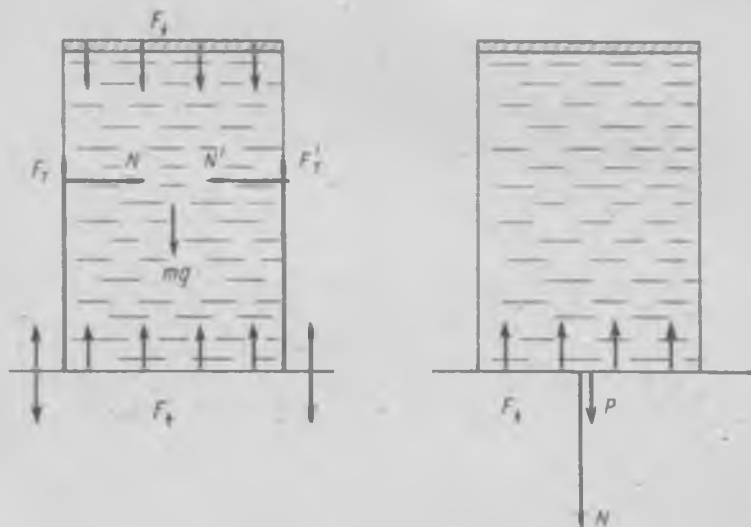


Рис. 16.11

ПРИМЕР 16.7. На рис. 16.12а изображена трубка, внутри которой находится невесомый поршень, плотно прилегающий к ее стенкам. Опустим конец трубки в воду и переместим поршень вверх. Объясним, почему вода поднялась за поршнем.

Изобразим силы, действующие на поршень (рис. 16.12б): $\vec{F}$ — внешняя сила со стороны руки, $\vec{F}_1$ — сила атмосферного давления ($F_1 = p_{\text{атм}}S$), $\vec{N}$ — сила реакции воды. Поскольку сумма сил равна нулю, то

$$F + N - p_{\text{атм}}S = 0. \quad (1)$$

Теперь перечислим силы, действующие на воду: $\vec{N}'$ — сила давле-

ния поршня на воду ($N=N'$), mg — сила тяжести, $\bar{F}_1$ — сила атмосферного давления ($F_1=p_{\text{атм}}S$). Очевидно,

$$p_{\text{атм}}S - N - mg = 0. \quad (2)$$

Из системы (1) и (2) находим

$$F = mg, \quad N = p_{\text{атм}}S - mg = \left(\frac{p_{\text{атм}}}{\rho g} - H \right) \rho g S,$$

где H — высота столба воды. Таким образом, если $H = p_{\text{атм}}/\rho g = 10,33$ м, то сила реакции обратится в ноль. При дальнейшем

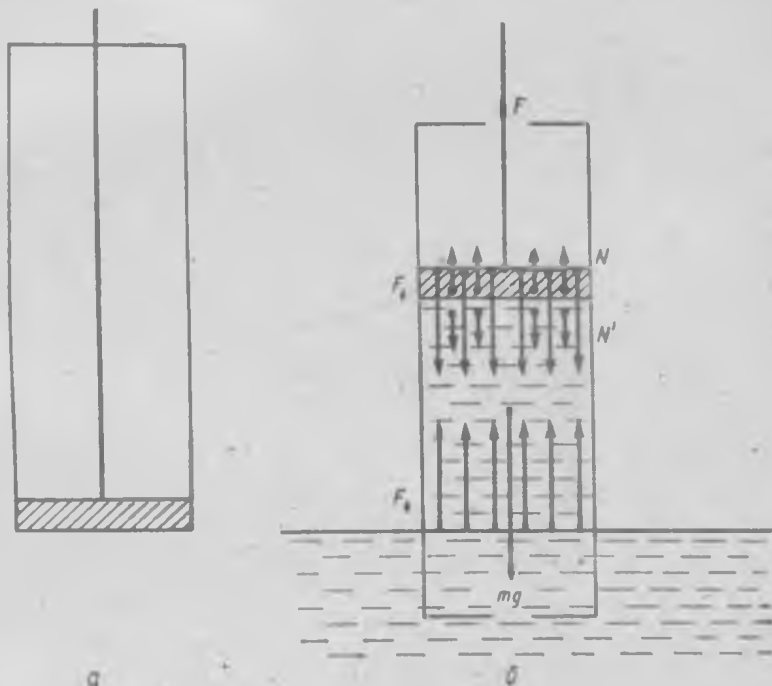


Рис. 16.12

перемещении поршня вода остается на высоте 10,33 м — результат, известный еще древним шумерам, жившим в третьем тысячелетии до н. э.

Изменим теперь начальные условия. Передвинем поршень на расстояние l_1 от свободного конца трубки, опустим ее в воду и переместим поршень на расстояние l_2 . Определим массу воды, поднявшуюся за поршнем. Эта задача относится к молекулярной физике. Для ее решения необходимо задать уравнение процесса, связывающего начальное и конечное состояния (см. задачу 23.3).

§ 17. ЗАКОН АРХИМЕДА

Мы уже знаем, что на площадку (скажем, резиновую пленку манометра) в жидкости (газе) действует сила давления, зависящая от глубины погружения и ее площади. Найдем теперь результирующую поверхностных сил, действующих на брусок — параллелепипед высотой H и площадью основания S , погруженный в неподвижную жидкость на глубину h (рис. 17.1).

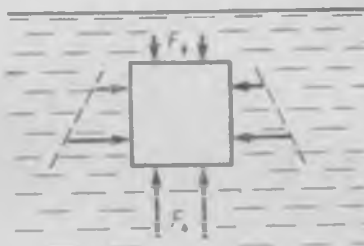


Рис. 17.1

На боковые стороны бруска действуют силы, стремящиеся сжать брусок. Эти силы взаимно уравновешиваются. Сила, с которой жидкость (газ) действует на нижнюю грань бруска, направлена вверх и равна по величине

$$F_1 = p_1 S, \quad p_1 = \rho g(h+H) + p_{\text{атм.}}$$

Сила, действующая на верхнюю грань, направлена вниз и равна

$$F_2 = p_2 S, \quad p_2 = \rho gh + p_{\text{атм.}}$$

Результирующая сила, действующая со стороны жидкости (газа) на брусок, называется выталкивающей силой. Она направлена вверх и равна

$$F_{\text{выт}} = F_1 - F_2 = \rho g HS = \rho g V, \quad (17.1)$$

где $V = HS$ — объем бруска. Возникновение выталкивающей силы обусловлено различием гидростатических давлений на нижнее и верхнее основания бруска. Таким образом, на брусок, погруженный в жидкость (газ), действует сила, направленная вверх и равная весу жидкости (газа), вытесненной телом. Этот результат, полученный для параллелепипеда, справедлив для тел произвольной формы, полностью или частично погруженных в неподвижную жидкость. Таким образом,

на тело, погруженное в жидкость (или газ), действует выталкивающая сила $F_{\text{выт}} = \rho g V_{\text{погр}}$, величина которой равна весу вытесненной им жидкости (газа).

Выталкивающая сила приложена к центру тяжести вытесненного объема жидкости (газа).

Этот закон открыт одним из величайших механиков и математиков Древней Греции Архимедом (287—212 гг. до н. э.). Архимед заложил основы статики и гидростатики: ввел понятие центра тяжести и разработал методы его определения; изобрел множество механизмов для поднятия тяжестей и воды на более высокий уровень; военные метательные машины [16]. Наиболее важный

вклад Архимеда в математику относится к вычислению площадей плоских фигур и объемов. Он вычислил приблизительно длину окружности, пользуясь вписанными и описанными многоугольниками. Дойдя в этом приближении до 96-стороннего многоугольника, он нашел $223/71 < \pi < 22/7$. Значение $\pi = 22/7$, называемое архимедовым числом, до сих пор популярно на Ближнем Востоке.

Закон Архимеда в ускоренной системе отсчета. Предположим, что сосуд, изображенный на рис. 17.1, движется вниз с ускорением a . Тогда, учитывая, что давление на глубине h равно $\rho_{\text{атм}} + \rho(g-a)h$, получим вместо (17.1)

$$F_{\text{выт}} = \rho(g-a)V. \quad (17.2)$$

В невесомости ($a=g$) выталкивающая сила равна нулю. В самом деле, выталкивающая сила обусловлена различием гидростатических давлений на нижнее и верхнее основания тела. В состоянии невесомости это различие исчезает и выталкивающая сила становится равной нулю. Формально этот результат следует из (17.2), если положить $a=g$.

ПРИМЕР 17.1. Из двух металлов плотностью ρ_1 и ρ_2 изготовлен сплав массой m . Определим массы составляющих металлов m_1 и m_2 .

Эта проблема, относящаяся к так называемым обратным задачам, впервые решена Архимедом. Погрузим сплав в воду и взвесим его с помощью динамометра. Пусть показание динамометра равно

$$P = mg - \rho_{\text{в}} g V. \quad (1)$$

Поскольку $m_1 = \rho_1 V_1$, $m_2 = \rho_2 V_2$, то

$$P = mg - \rho_{\text{в}} g \left(\frac{m_1}{\rho_1} + \frac{m_2}{\rho_2} \right).$$

С другой стороны,

$$m = m_1 + m_2. \quad (2)$$

Из этой системы уравнений находим

$$m_1 = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_{\text{в}} (\rho_2 - \rho_1)} \left[m \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_2} \right) - \frac{P}{g} \right],$$

$$m_2 = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_{\text{в}} (\rho_2 - \rho_1)} \left[-m \left(1 - \frac{\rho_{\text{в}}}{\rho_1} \right) + \frac{P}{g} \right].$$

ЗАДАЧА 17.2. На дне аквариума глубиной $H=1$ м лежит стеклянная пластинка в форме диска радиусом $R=0,1$ м, толщиной $d=5 \cdot 10^{-3}$ м, плотностью $\rho_{\text{ст}}=2,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Чтобы ее достать, в аквариум опустим трубку радиусом $r=0,05$ м, приложим к пластинке, затем выкачаем воду из трубки и начнем ее поднимать вверх.

Определить, до какого расстояния от поверхности воды можно поднять диск.

Решение. Сила веса диска в воде

$$P = (\rho_T - \rho_B) g \pi R^2 d.$$

После того как из трубки откачали воду, выталкивающая сила стала равной

$$F_{\text{выт}}(H) = \rho_B g [\pi R^2 H - \pi (R^2 - r^2) (H - d)] = \pi \rho_B g [R^2 d + r^2 (H - d)].$$

Если $F_{\text{выт}} > mg$, то диск будет прижат к трубке силой $N(H) = F_{\text{выт}}(H) - mg = \rho_B g \pi r^2 (H - d) - P$. По мере подъема трубки с диском выталкивающая сила $F_{\text{выт}}(x)$ уменьшается и на некоторой глубине $x = h$ реакция $N(h)$ обратится в нуль — диск отвалится от трубки. Из условия $F_{\text{выт}}(h) = mg$ находим

$$h = d + \frac{\rho_T - \rho_B}{\rho_B} \left(\frac{R}{r} \right)^2 d = 0,035 \text{ м.}$$

Условие плавания. Помимо выталкивающей силы (см. рис. 17.1) на тело действует сила тяжести. Если плотность тела $\rho_T > \rho_B$, то $mg > F_{\text{выт}}$: тело тонет. Если $\rho_T < \rho_B$, то $mg < F_{\text{выт}}$: тело будет всплывать. Положение равновесия определяется условием $mg - \rho_B g V_{\text{погр}} = 0$, где $V_{\text{погр}}$ — объем части тела, погруженной в жидкость. После всплытия тело окажется в состоянии устойчивого равновесия в результате процесса затухающих колебаний.

Если $\rho_T = \rho_B$, то тело будет находиться в состоянии безразличного равновесия. В таком положении находится, например, любой мысленно выделенный объем воды в сосуде с водой. В положении безразличного равновесия могут находиться подводная лодка или, скажем, шар-зонд на некоторой высоте. Таким образом, тело плавает, если сумма сил тяжести и выталкивающей силы равна нулю:

$$m_T g - \rho_B g V_{\text{погр}} = 0. \quad (17.3)$$

Средняя плотность тела человека $\rho_T = 1,01 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. При вдыхе плотность человека, т. е. отношение массы к объему тела человека, становится меньше плотности воды. В этом случае выполняется условие плавания.

Водоизмещением называется объем воды, вытесненный плавающим судном. Основная эксплуатационная характеристика грузовых судов — дедвейт — масса груза, принимаемая судном при предельно допустимом погружении. В настоящее время океаны бороздят громадные суда: дедвейт супертанкеров достиг 541 тыс. т. При полной загрузке их осадка составляет 23 м, а надводная часть выступает лишь на 5–6 м. Для полной остановки такого танкера, идущего со скоростью 30 км/ч, требуется дистанция 5 км и время 25 мин. Самый крупный авианосец имеет

водоизмещение 91 500 т. Его осадка — 11 м, длина — до 332 м, ширина корпуса — 41 м, ширина полетной палубы — 77 м. Энергетическая установка мощностью 260 000 л.с. позволяет развить скорость хода 54 км/ч.

Серьезную опасность для кораблей представляют айсберги. В Атлантическом океане айсберги, дрейфующие от берегов Гренландии, имеют длину ~ 100 м. Самый большой из отмеченных айсбергов имел длину ~ 450 м. В Антарктиде огромные массивы льда откалываются от ледников. Такие айсберги могут достигать 80 км в длину и 30 км в ширину.

ЗАДАЧА 17.3. Как изменится осадка корабля при переходе из Каспийского моря в Волгу?

Решение. В силу условия плавания

$$mg = \rho_1 g V_{\text{погр}} = \rho_2 g V_{\text{погр}}.$$

т. е. чем меньше плотность жидкости, тем больше осадка.

ЗАДАЧА 17.4. Батискаф массой m выполнен в виде цилиндра с площадью основания S , высотой d , составленного из двух полых половинок. Батискаф находится в положении устойчивого равновесия на глубине H , равной расстоянию от поверхности воды до средней линии цилиндра. Найти силу реакции, действующую на каждую из половинок цилиндра.

Решение. Предположим, что $H > d/2$. Силы давления, действующие на каждую половинку цилиндра в горизонтальном направлении, уравнивают друг друга. Перечислим силы, действующие в вертикальном направлении. На верхнюю половину цилиндра действуют сила давления воды $\vec{F}_1$, сила тяжести и сила реакции $\vec{N}$ (рис. 17.2). Поскольку сумма сил равна нулю, то

$$-\frac{m}{2}g + N - \left[p_{\text{ат}} + \rho g \left(H - \frac{d}{2} \right) \right] S = 0. \quad (1)$$

На нижнюю половину цилиндра действуют сила давления воды $\vec{F}_1$, сила тяжести и сила реакции $\vec{N}'$ ($N = N'$). Следовательно,

$$-\frac{m}{2}g - N + \left[p_{\text{ат}} + \rho g \left(H + \frac{d}{2} \right) \right] S = 0. \quad (2)$$

Из (1), (2) следует условие плавания $mg = \rho g S d$. Вычитая (2) из (1), находим

$$N = (p_{\text{ат}} + \rho g H) S.$$

Полагая $S = 1 \text{ м}^2$, $H = 1 \text{ км}$, получим $N \approx 10^3 \text{ тс}$.

ПРИМЕР 17.5. Бассейн, имеющий форму параллелепипеда с площадью основания S , заполнен водой до уровня h_0 . Найдем приращение уровня воды и силы давления на дно, если в бассейн поместить тело массой m .

а) Пусть плотность тела $\rho_t < \rho_v$. В этом случае тело плавает, $mg = \rho_v g V_{\text{погр}}$. Очевидно, что приращение уровня воды определяется условием $\Delta h S = V_{\text{погр}}$. Следовательно, $\Delta h = m / \rho_v S$. Сила давления на дно $F = \rho_v g (h_0 + \Delta h) S = \rho_v g h_0 S + mg$ увеличится на величину mg .

б) Пусть $\rho_t > \rho_v$. В этом случае тело тонет. Очевидно, приращение уровня определяется условием $\Delta h S = V_t$, где V_t — объем тела. Отсюда находим $\Delta h = m / \rho_t S$. Сила давления на дно равна сумме сил давления воды $\rho_v g (h_0 + \Delta h) S$ и силы веса тела $N = mg - F_{\text{выт}} = mg - \rho_v g V_t$. Следовательно, сила давления на дно

$$F = \rho_v g h_0 S + mg,$$

как и в предыдущем случае.

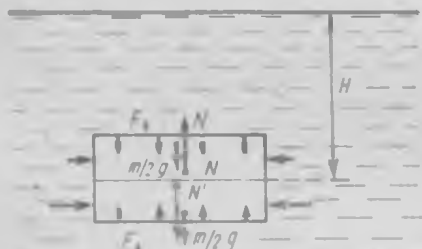


Рис. 17.2

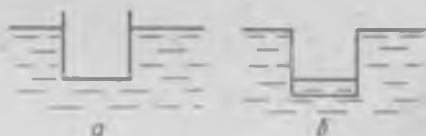


Рис. 17.3

ПРИМЕР 17.6. В лодке, плавающей в бассейне, появилась течь. Как будет изменяться уровень воды в бассейне по мере заполнения лодки водой?

В качестве модели лодки выберем тонкостенный параллелепипед массой m , высотой H , площадью основания S . Пока течи не было, глубина погружения лодки h определялась условием плавания: $\rho_v h S = m$, $h = m / \rho_v S$. При этом над водой выступают бортики высотой $H - h$ (рис. 17.3а).

Если $h = H$, то после образования пробоины вода устремится в лодку и она затонет. Уровень воды в бассейне понизится на величину HS/S_0 , где S_0 — площадь плоского дна бассейна.

Если $H > h$, то максимальное количество воды m_v , которое может проникнуть в лодку, еще остающуюся на плаву, определяется уравнением

$$m + m_v = \rho_v HS.$$

Из него находим $m_v = \rho_v (H - h) S$ (рис. 17.3б). Очевидно, лодка вытесняет объем, больший первоначального, на величину $(H - h) S$ за счет такого же объема воды, притекшего через пробоину. Следовательно, уровень воды при погружении до глубины H не меняется. Однако начиная с этого момента вода устремляется в лодку и она затонет. Уровень воды в бассейне понизится на ве-

личину $hS/S_0 = m/\rho_b S_0$. Вот почему образуются водовороты в месте затопления судна, получившего пробоину.

ЗАДАЧА 17.7. В сосуде с жидкостью, плотность которой ρ , плавает кусок льда. Как изменится уровень смеси жидкости и воды, после того как лед растает?

Решение. Для решения задачи необходимо сравнить объемы погруженной части льда V_n и образовавшейся после таяния воды V_b . Из условия плавания находим $V_n = \rho_l V_l / \rho$, где V_l — объем куска льда. Объем V_b можно найти из условия сохранения массы в процессе таяния: $\rho_l V_l = \rho_b V_b$,

$$V_n = \frac{\rho_l}{\rho} V_l.$$

Искомая разность

$$\Delta V = V_b - V_n = \left(\frac{1}{\rho_b} - \frac{1}{\rho} \right) \rho_l V_l.$$

Возможны три ситуации. 1) Лед плавает в воде. В этом случае $\Delta V = 0$ — уровень воды в сосуде не изменится. 2) Лед плавает в соленой воде, плотность которой $\rho > \rho_b$. Тогда $V_n < V_b$ — уровень повысится. 3) Лед плавает в масле, плотность которого $\rho < \rho_b$. В этом случае $V_n > V_b$ — уровень смеси понизится.

§ 18. ГИДРОДИНАМИКА И АЭРОДИНАМИКА

1. Уравнение непрерывности. Гидро- и аэродинамика занимаются изучением движения жидкостей и газов, возникающего в результате действия сил тяжести, давления и трения. Если, например, в воздухе создать область избыточного давления — перепад давления, то на частицу воздуха будет действовать сила в направлении, в котором давление уменьшается. Горизонтальные перепады давления естественно возникают в атмосфере в результате неравномерного нагрева воздуха. Кроме сил давления на элемент массы воздуха действуют силы трения, возникающие при его перемещении относительно окружающего воздуха. В этом пункте мы будем предполагать, что силы вязкости отсутствуют, однако читателю при качественном анализе движения реальных жидкостей (газов) необходимо помнить, что вязкость — важнейшее свойство жидкости, существенно влияющее на ее поведение.

Картина течения жидкости существенно зависит от начальных условий и включает огромное разнообразие свойств, предсказание которых требует значительных усилий. Движение частиц жидкости в общем случае имеет сложный характер. Мы ограничимся рассмотрением стационарного потока. Стационарным называется такое движение частиц жидкости, когда скорость и ускорение частиц, проходящих через фиксированную точку пространства, не

изменяются. Частицы жидкости в этой точке постоянно заменяются новыми, однако их скорость и ускорение в этой точке имеют те же значения, что и у предыдущих частиц. В таком потоке можно провести *линии тока* как такие линии, касательные к которым совпадают с направлением скорости. Следовательно, отдельные частицы движутся по линиям тока. Поэтому через поверхность, образованную линиями тока, не выйдет ни одна из частиц, находящихся внутри такой трубки. Если сечение трубки выбрать достаточно малым, то скорость частиц жидкости v во всех точках одного и того же сечения можно считать одинаковой. Такие трубки носят название *токовых трубок* (рис. 18.1).

Предположим, что при течении не происходит заметных сжатий или расширений жидкости. В этом случае плотность жидкости ρ можно считать постоянной. За малый интервал времени Δt масса жидкости, занимавшая первоначально объем между сечениями 1, 2, оказалась в объеме между сечениями 1', 2' (рис. 18.1). При



Рис. 18.1

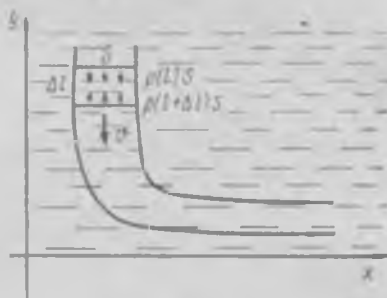


Рис. 18.2

этом на одном конце трубки жидкость перемещается на расстояние $v_1 \Delta t$, а на другом конце — на расстояние $v_2 \Delta t$. Очевидно, массы жидкости, заключенные между сечениями 1, 1' и 2, 2', должны быть равны. Поэтому $m = \rho v_1 \Delta t S_1 = \rho v_2 \Delta t S_2$, или

$$v_1 S_1 = v_2 S_2. \quad (18.1)$$

Это соотношение называют *уравнением непрерывности*. Отсюда видно, что на рассматриваемом участке происходит непрерывное изменение скорости жидкости от v_1 до v_2 . Следовательно, на этом участке жидкость движется ускоренно и на нее действует сила. Исходя из соображений, которые использованы при выводе закона Архимеда (см. § 17), можно сделать общее утверждение: направление полной силы давления, действующей на выделенный объем жидкости, совпадает с направлением, в котором уменьшается давление. Отсюда следует, что давление в некоторой точке потока зависит от скорости жидкости.

2. Уравнение Бернулли. Найдем связь давления и скорости вдоль линии тока при установившемся движении невязкой нетеплопроводной жидкости (рис. 18.2). Полная энергия жидкой частицы представляет сумму полной энергии E движения частицы как целого и внутренней энергии U : $E+U$,

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgy. \quad (18.2)$$

Приращение полной энергии равно работе внешних сил и количеству теплоты, переданному жидкой частице через поверхность, которая ее ограничивает (см. § 22). Мы рассмотрим изменение состояния жидкости в адиабатическом процессе, т. е. предполагая, что подвод или отвод теплоты отсутствует. Другое упрощение состоит в том, что плотность не меняется. В этом случае внутренняя энергия остается постоянной, поскольку жидкость предполагается несжимаемой. Тогда можно использовать закон изменения полной энергии (12.17)

$$\Delta E = \delta A', \quad (18.3)$$

где $\delta A'$ — работа сил давления, действующих на частицу при бесконечно малом перемещении $\Delta l = v \Delta t$ по линии тока в направлении скорости v частицы. По определению (12.2) $\delta A = F_v \Delta l$, где F_v — проекция полной силы давления со стороны окружающей частицу среды на направление скорости. Формула (16.3) определяет силу давления, приложенную к элементу поверхности с площадью ΔS , ориентированному по вектору n , а необходимая нам проекция на скорость полной силы давления F_v , действующей на частицу, равна (см. рис. 18.2)

$$F_v = [p(l) - p(l + \Delta l)] S = - \frac{\Delta p}{\Delta l} S \Delta l = - \frac{m}{\rho} \frac{\Delta p}{\Delta l}.$$

Следовательно, элементарная работа сил давления на траектории частицы

$$\delta A' = - \frac{m}{\rho} \Delta p. \quad (18.4)$$

Подставляя (18.2), (18.4) в (18.3), приходим к выводу, что во всех точках траектории жидкой частицы сохраняется величина C , определяемая выражением

$$C = p + \frac{\rho v^2}{2} + \rho gy. \quad (18.5)$$

Это уравнение было выведено Даниилом Бернулли (1700–1782). Восемь лет он работал в созданной Петром I Петербургской Академии наук. В предисловии к «Гидравлике», изданной в 1738 г. и

принесшей ему мировую славу, Бернулли писал: «...Я охотно объявляю, что главнейшая часть этой работы обязана руководству, замыслам и поддержке со стороны Петербургской Академии наук...».

Наиболее сильным достоинством уравнения Бернулли является то, что, не зная детального характера течения, удастся определить те его свойства, которые необходимы для практики.

ПРИМЕР 18.1. Истечение из круглого отверстия в открытом сосуде.

Пусть вытеканию потока жидкости через отверстие соответствует медленное понижение свободной поверхности воды в сосуде. Все линии тока, проходящие через отверстие, должны начинаться на свободной поверхности, где скорость пренебрежимо мала и давление равно атмосферному давлению. В цилиндрическом отверстии скорость частиц воды v , а давление равно $p_{\text{атм}}$. Записывая уравнение (18.5) для двух рассматриваемых точек трубки тока, получим

$$p_{\text{атм}} + \rho g H = p_{\text{атм}} + \frac{\rho v^2}{2}.$$

где H — расстояние между отверстием и свободной поверхностью. Следовательно, $v = \sqrt{2gH}$. Эта формула была получена Э. Торричелли в 1641 г. Исследование струи показало, что площадь поперечного сечения струи вблизи круглого отверстия площадью S в тонкой стенке имеет величину $(0,61-0,64)S$. Таким образом, расход воды в единицу времени $\Delta m / \Delta t \sim 0,6 \cdot \rho S \sqrt{2gH}$.

ПРИМЕР 18.2. Модель водопровода. Из поднятого на некоторую высоту резервуара выходит трубка постоянного сечения S , переходящая в короткую трубку сечением S_2 , перекрытую краном. Найдем давление в магистральной трубе при открытом кране (рис. 18.3).

Пусть скорость воды в отверстии крана равна v_2 , а в магистральной трубе — v . Пренебрегая изменением уровня воды в резервуаре, запишем уравнение Бернулли для трех точек: на поверхности воды в резервуаре, в трубе и в отверстии крана,

$$p_{\text{ат}} + \rho g H = p + \frac{\rho v^2}{2} = p_{\text{ат}} + \frac{\rho v_2^2}{2}. \quad (1)$$

Добавим к этой системе уравнение непрерывности

$$vS = v_2 S_2. \quad (2)$$

Из системы трех уравнений находим

$$p = p_{\text{ат}} + \rho g H \left[1 - \left(\frac{S_2}{S} \right)^2 \right]. \quad (3)$$

Из (1) видно, что манометр, помещенный в движущуюся воду, покажет давление на величину $\rho v^2/2$ меньшую, чем в неподвижной воде.

ПРИМЕР 18.3. Водослив через плотину. Как измерить расход воды, протекающий через слив плотины?

Обычный тип плотины и линии тока воды показаны на рис. 18.4. Если наклон плотины невелик, то скорость воды во всех точках сечения потока можно считать одинаковой. Тогда,



Рис. 18.3

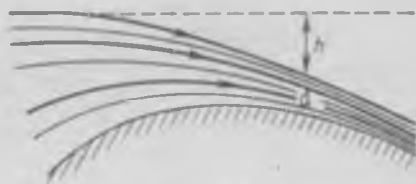


Рис. 18.4

если d — глубина потока в некотором месте плотины, L — ее ширина, то расход воды в единицу времени

$$Q = \rho d L v. \quad (1)$$

Для линии тока, начинающейся на свободной поверхности, в точке, далеко отстоящей от края плотины, скорость воды пренебрежимо мала. Из уравнения Бернулли для линии тока, проходящей по поверхности воды, находим соотношение

$$p_{ат} = p_{ат} + \frac{\rho v^2}{2} - \rho g h. \quad (2)$$

Таким образом, расход воды равен

$$Q = \rho d L \sqrt{2gh}.$$

Его можно вычислить по измеренным величинам h и d в любом месте потока.

Пусть $H = d + h$ — расстояние по вертикали между дном плотины и свободной поверхностью воды. Функция

$$H(v) = \frac{Q}{\rho L v} + \frac{v^2}{2g}. \quad (3)$$

определяющая неявную зависимость скорости течения от H

при постоянном расходе Q , имеет минимум по переменной v при значении $v_m = (gQ/\rho L)^{1/3}$, равный

$$H(v_m) = \frac{3}{2g} \left(\frac{gQ}{\rho L} \right)^{2/3}.$$

Очевидно, $d_m = 2h_m = 2/3 H(v_m)$. Скорость v_m наблюдается в наивысшей точке плотины. Таким образом, измеряя в этом месте расстояние h_m от свободной поверхности до поверхности потока, получим величину Q , равную

$$Q = \rho L (2h_m)^{3/2} \sqrt{g}.$$

Заметим в связи с уравнением (2), что давление имеет размерность объемной плотности энергии: $Pa = H/m^2 = \text{Дж}/\text{м}^3$.

ПРИМЕР 18.4. Какую мощность потребляет мотор насоса, если при откачке воды из колодца глубиной H через шланг сечением S поступает Q кг воды в секунду.

Предположим, что вода в шланге течет со скоростью v . В установившемся течении полная энергия E жидкости, содержащейся между двумя фиксированными поперечными сечениями трубки тока, постоянна. Ее приращение (18.3) возникает в результате работы, совершаемой силами давления в одном и в другом поперечном сечениях при перемещении массы $m = Q\Delta t$ за интервал времени Δt . Поскольку $\Delta E = mv^2/2 + mgH$, $\delta A = P\Delta t$, где P — мощность насоса, то

$$P = Qv^2/2 + QgH.$$

Учитывая, что $m = Q\Delta t = \rho S v \Delta t$, находим мощность насоса

$$P = \frac{Q^3}{2(\rho S)^2} + QgH.$$

Пусть $Q = 10$ кг/с, $H = 10$ м, $S = 10^{-2}$ м². В этом случае $P \approx 1$ кВт.

3. Обтекание тел реальными жидкостями. При обтекании тел потоком скорость жидкости различна в разных местах поверхности тела. Согласно закону Бернулли это приводит к различию давлений в разных точках поверхности, а следовательно, и сил, с которыми жидкость давит на поверхности. Рассмотрим два близко расположенных цилиндра с осями, перпендикулярными скорости плоского потока жидкости. В пространстве между цилиндрами линии тока сгущаются — здесь скорость жидкости больше, чем с внешних сторон. Согласно (18.5) увеличение скорости в этом месте приведет к уменьшению давления и к появлению сил, сближающих цилиндры. В практике судоходства известны случаи столкновения судов, идущих близко друг к другу параллельными курсами.

Наличие силы вязкости существенно изменяет характер течения вблизи поверхности тела и приводит к тому, что слой жидко-

сти, прилегающей к телу, не скользит, а «прилипает» к поверхности. На влияние вязкости в тонком пограничном слое впервые было указано Д. И. Менделеевым в 1880 г. Общее математическое доказательство существования пограничного слоя отсутствует до сих пор. Однако экспериментально проверено, что на поверхности обтекаемого тела скорость жидкости сколь угодно малой вязкости равна нулю и быстро возрастает по мере удаления от поверхности. Силы вязкости тормозят движение жидкости в пограничном слое, вследствие чего частицы жидкости движутся со скоростями, гораздо меньшими, чем те, которые они имели бы в случае отсутствия вязкости. Вследствие этого стационарность потока нарушается — твердая граница действует как источник завихренности, которая переносится вместе с жидкостью вниз по потоку. За телом образуется область, заполненная вихреобразно движущейся жидкостью, давление в которой делается меньше давления в набегающем потоке, — возникает область разрежения. Давление на передней части тела, где скорость жидкости близка к нулю, наоборот, больше давления в набегающем потоке (область избыточного давления). Результирующая сила давления на обтекаемое тело неравна нулю и направлена в сторону течения жидкости. Она называется сопротивлением давления.

Лобовое сопротивление, которое испытывает тело со стороны обтекающей его вязкой жидкости, представляет сумму силы сопротивления давления и силы сопротивления трения, обусловленной трением между слоем, прилипшим к телу, и потоком.

Возникновение подъемной силы, действующей на крыло самолета в потоке воздуха, было установлено в 1905 г. выдающимся русским ученым Н. Е. Жуковским (1847—1921). Из наблюдений известно, что благодаря сносу (в начальной стадии движения) от кормовой кромки завихренного воздуха вокруг крыла самолета устанавливается вращающийся поток. Над крылом, где скорость поступательного движения воздуха совпадает по направлению со скоростью циркуляционного потока, давление понижается, а под крылом повышается. В результате возникает сила, направленная перпендикулярно скорости набегающего потока.

Подъемная сила и сила лобового сопротивления зависят от формы, размеров тела, его ориентации в потоке и скорости потока.

Изменение полной энергии тела в единицу времени определяет мощность сил сопротивления. Космические аппараты при спуске на Землю входят в атмосферу со сверхзвуковыми скоростями. При этом впереди себя они создают волну сжатого до 50 атм воздуха, температура которого превышает 8000 К. Это приводит к возникновению дополнительной *волнового сопротивления*, обусловленного затратами кинетической энергии аппарата на образование *ударной волны*. Волновое сопротивление и сопротивление давления играют основную роль при торможении космических кораблей.

§ 19. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

Молекулярно-кинетическая теория строения вещества возникла в результате обобщения большого экспериментального материала, собранного человечеством за несколько тысячелетий.

Первая атомистическая теория возникла в Древней Греции. В то время зарождалась единая наука о развитии природы, человеческого общества и мышления — натурфилософия.

Основоположник диалектики — учения о развитии — Гераклит (544—483 гг. до н. э.) считал, что вечное движение является одновременно и вечным изменением и развитием. Основатель древнегреческого материализма — Левкипп (V в. до н. э.) — сформулировал основное положение атомистики — все тела состоят из простых, неделимых частиц. Развитие этих представлений тесно связано с именем ученика Левкиппа Демокрита (около 460—370 гг. до н. э.). Он ввел понятие атомов (греч. — неделимый) — малых неделимых частиц. По учению Демокрита, «истинная основа вещей — это атомы и пустота, все остальное — мнение и видимость». Эпикур (340—270 гг. до н. э.) развил и дополнил эти взгляды учением о возможных формах движения атомов. Атомистика древних греков, признавая вечными материю и движение, была, по существу, враждебна любой религии. Не случайно сторонников атомистической теории преследовали и в эпоху эллинизма и в средние века.

После длительного средневекового застоя в науке стало формироваться новое материалистическое учение о природе. Идеи атомизма были возрождены работами Г. Галилея (1564—1642), П. Гассенди (1592—1655), Р. Бойля (1627—1691), И. Ньютона (1642—1727).

Яркую страницу в истории развития атомистики вписал выдающийся русский ученый М. В. Ломоносов (1711—1765). Открытый им в 1756 г. закон сохранения массы в химических превращениях стал одним из основных законов химии. В 1774 г. А. Лавуазье подтвердил это открытие. Ломоносов считал, что вещества состоят из мельчайших частиц — корпускул и элементов. Корпускулы однородны, если состоят из одинакового числа одних и тех

же элементов. Корпускулы разнородны, когда элементы их различны; от этого зависит бесконечное разнообразие свойств веществ. Именно такое определение молекулы (корпускулы) и атома (элемента) было принято через сто лет на конгрессе химиков в 1860 г. Исследования Ломоносова имели очень широкий диапазон: он занимался химией, физикой, астрономией, метеорологией, геологией, горным делом, металлургией [3], организовал фабрику цветных стекол, мозаичных картин. Ломоносов проявил свои разносторонние дарования и в области поэзии и в создании русского литературного языка.

Необходимо отметить, что вследствие изоляции русских ученых блестящие работы Ломоносова были незнакомы мировой научной общественности [17, с. 324]. До начала XX в. Ломоносов был известен в основном как поэт и организатор науки. А. С. Пушкин был одним из немногих, кто видел в Ломоносове прежде всего великого ученого. В своей неопубликованной статье он писал: «...Ломоносов был великий человек... Он создал первый университет. Он, лучше сказать, сам был первым нашим университетом» [18, с. 190]. Лишь в 1904 г. в связи со 150-летием созданной Ломоносовым химической лаборатории были переведены с латинского и немецкого языков его научные труды. И только тогда выяснилось, как гениален и велик был первый русский ученый.

Важный шаг в развитии атомистики был сделан Дж. Дальтоном (1766—1844). В 1805 г. он опубликовал первую таблицу атомных весов и исходные положения своей теории. Разумеется, его теория была весьма несовершенной. Так, он считал, что частица воды состоит из одного атома водорода и одного атома кислорода, и на этом основании составил таблицу атомных весов элементов и соединений. Однако теория Дальтона положила начало развитию современных представлений о строении вещества. «Новая эпоха начинается в химии с атомистики...», — писал Ф. Энгельс.

В 1808 г. Ж. Гей-Люссак (1778—1850) устанавливает закон, согласно которому при взаимодействии газов объемы исходных веществ и продуктов реакции при одинаковых температуре и давлении относятся как простые целые числа. Из него следовало, что для образования двух объемов пара при температуре выше 100°C следует взять два объема водорода и один объем кислорода. Этот результат противоречит теории Дальтона, но может быть доказан на основе гипотезы, предложенной в 1811 г. А. Авогадро (1776—1856): вещество состоит из молекул; равные объемы различных газов при одинаковых температуре и давлении содержат одинаковое количество молекул. Таким образом возникла необходимость в уточнении понятий «атом» и «молекула». Из гипотезы Авогадро следовало, что отношение плотности к молярной массе одинаково для всех газов. Вначале гипотезу Авогадро отвергали,

§ 19. МОЛЕКУЛЯРНО-КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ СТРОЕНИЯ ВЕЩЕСТВА

Молекулярно-кинетическая теория строения вещества возникла в результате обобщения большого экспериментального материала, собранного человечеством за несколько тысячелетий.

Первая атомистическая теория возникла в Древней Греции. В то время зарождалась единая наука о развитии природы, человеческого общества и мышления — натурфилософия.

Основоположник диалектики — учения о развитии — Гераклит (544—483 гг. до н. э.) считал, что вечное движение является одновременно и вечным изменением и развитием. Основатель древнегреческого материализма — Левкипп (V в. до н. э.) — сформулировал основное положение атомистики — все тела состоят из простых, неделимых частиц. Развитие этих представлений тесно связано с именем ученика Левкиппа Демокрита (около 460—370 гг. до н. э.). Он ввел понятие атомов (греч. — неделимый) — малых неделимых частиц. По учению Демокрита, «истинная основа вещей — это атомы и пустота, все остальное — мнение и видимость». Эпикур (340—270 гг. до н. э.) развил и дополнил эти взгляды учением о возможных формах движения атомов. Атомистика древних греков, признавая вечными материю и движение, была, по существу, враждебна любой религии. Не случайно сторонников атомистической теории преследовали и в эпоху эллинизма и в средние века.

После длительного средневекового застоя в науке стало формироваться новое материалистическое учение о природе. Идеи атомизма были возрождены работами Г. Галилея (1564—1642), П. Гассенди (1592—1655), Р. Бойля (1627—1691), И. Ньютона (1642—1727).

Яркую страницу в истории развития атомистики вписал выдающийся русский ученый М. В. Ломоносов (1711—1765). Открытый им в 1756 г. закон сохранения массы в химических превращениях стал одним из основных законов химии. В 1774 г. А. Лавуазье подтвердил это открытие. Ломоносов считал, что вещества состоят из мельчайших частиц — корпускул и элементов. Корпускулы однородны, если состоят из одинакового числа одних и тех

же элементов. Корпускулы разнородны, когда элементы их различны; от этого зависит бесконечное разнообразие свойств веществ. Именно такое определение молекулы (корпускулы) и атома (элемента) было принято через сто лет на конгрессе химиков в 1860 г. Исследования Ломоносова имели очень широкий диапазон: он занимался химией, физикой, астрономией, метеорологией, геологией, горным делом, металлургией [3], организовал фабрику цветных стекол, мозаичных картин. Ломоносов проявил свои разносторонние дарования и в области поэзии и в создании русского литературного языка.

Необходимо отметить, что вследствие изоляции русских ученых блестящие работы Ломоносова были незнакомы мировой научной общественности [17, с. 324]. До начала XX в. Ломоносов был известен в основном как поэт и организатор науки. А. С. Пушкин был одним из немногих, кто видел в Ломоносове прежде всего великого ученого. В своей неопубликованной статье он писал: «...Ломоносов был великий человек... Он создал первый университет. Он, лучше сказать, сам был первым нашим университетом» [18, с. 190]. Лишь в 1904 г. в связи со 150-летием созданной Ломоносовым химической лаборатории были переведены с латинского и немецкого языков его научные труды. И только тогда выяснилось, как гениален и велик был первый русский ученый.

Важный шаг в развитии атомистики был сделан Дж. Дальтоном (1766–1844). В 1805 г. он опубликовал первую таблицу атомных весов и исходные положения своей теории. Разумеется, его теория была весьма несовершенной. Так, он считал, что частица воды состоит из одного атома водорода и одного атома кислорода, и на этом основании составил таблицу атомных весов элементов и соединений. Однако теория Дальтона положила начало развитию современных представлений о строении вещества. «Новая эпоха начинается в химии с атомистики...», — писал Ф. Энгельс.

В 1808 г. Ж. Гей-Люссак (1778–1850) устанавливает закон, согласно которому при взаимодействии газов объемы исходных веществ и продуктов реакции при одинаковых температуре и давлении относятся как простые целые числа. Из него следовало, что для образования двух объемов пара при температуре выше 100°C следует взять два объема водорода и один объем кислорода. Этот результат противоречит теории Дальтона, но может быть доказан на основе гипотезы, предложенной в 1811 г. А. Авогадро (1776–1856): вещество состоит из молекул; равные объемы различных газов при одинаковых температуре и давлении содержат одинаковое количество молекул. Таким образом возникла необходимость в уточнении понятий «атом» и «молекула». Из гипотезы Авогадро следовало, что отношение плотности к молярной массе одинаково для всех газов. Вначале гипотезу Авогадро отвергали,

но к 1854 г. она была убедительно доказана в результате измерений относительных молекулярных масс. В 1860 г. состоялся конгресс, на котором голосованием было принято определение атома и молекулы. Закон Авогадро, несмотря на его приблизительный характер (он относится к идеальным газам), положил начало применению математических методов в химии. Установленные значения атомных весов явились необходимой предпосылкой для открытия Д. И. Менделеевым в 1869 г. закона периодического изменения свойств элементов и создания периодической таблицы элементов. О значении конгресса для развития науки можно судить по словам Менделеева: «Решающим моментом в развитии моей мысли о периодическом законе я считаю 1860 г., съезд химиков в Карлсруэ, в котором я участвовал...»

К концу XIX в. атомно-молекулярная картина строения вещества была признана почти всеми естествоиспытателями. Однако, едва привыкнув к мысли о существовании атома и поверив в его неделимость, ученым пришлось испытать потрясение, вызванное открытием на рубеже столетий явления радиоактивности.

1. Атомы и молекулы. Все тела состоят из не очень большого числа простых веществ — химических элементов. Наименьшей частью элемента является атом. Атомы элементов, соединяясь друг с другом, образуют молекулы. Возможны два вида молекул: содержащие одинаковые атомы и содержащие два или более различных атомов. К первым относятся молекулы инертных газов, молекулы, состоящие из двух атомов азота, кислорода и т. д., образующие собственно элементарное вещество. Соединение или сложное вещество состоит из двух или более различных атомов.

Атомная единица массы (а. е. м.). Массы атомов измеряют в специальных единицах. В соответствии с международным соглашением, принятым в 1961 г., в качестве такой единицы выбрана масса m_0 одной двенадцатой части массы атома изотопа углерода $^{12}_6\text{C}$. Масса атома углерода $m_{^{12}\text{C}} = 1,99 \cdot 10^{-26}$ кг. Следовательно, атомная единица массы

$$m_0 = 1,660565 \cdot 10^{-27} \text{ кг}, \quad m_0 c^2 = 931,5016 \text{ МэВ}. \quad (19.1)$$

Для обозначения атома мы использовали обозначение ^A_ZX , где X — символ химического элемента, Z — порядковый номер элемента в таблице Менделеева, т. е. число протонов в ядре, A — массовое число, равное числу протонов и нейтронов в ядре. Заметим, что существуют девять изотопов углерода — от $^{10}_6\text{C}$ до $^{18}_6\text{C}$, два из них ($^{12}_6\text{C}$ и $^{13}_6\text{C}$) — стабильны.

Относительной атомной массой называется отношение массы атома к единице атомной массы m_0 :

$$\mu = \frac{m_A}{m_0} = \frac{12m_A}{m_{^{12}\text{C}}}. \quad (19.2)$$

Эту величину часто называют атомной массой, или атомным весом. Очевидно, атомный вес углерода равен 12. В выбранной шкале атомный вес водорода оказался равным 1,008, дейтерия — 2,014, трития — 3,016.

Относительная молекулярная масса — частное от деления массы молекулы m_m на атомную единицу массы m_0 : $\mu_0 = m_m/m_0$.

На практике приходится иметь дело не с одним отдельным атомом или молекулой, а с большой совокупностью этих частиц. Поэтому для сравнения количеств различных веществ выбрали единицу количества вещества — *моль*. Один моль содержит такое количество вещества, масса которого равна μ г, т. е. численно равна относительной атомной или молекулярной массе, выраженной в граммах. Моль водорода имеет массу 1,008 г, углерода — 12 г и т. д.

Молярная масса (грамм-молекула). Молярной массой M называют массу одного моля вещества: $M = \mu$ г/моль.

Покажем, что моль любого вещества содержит одно и то же число атомов или молекул. Действительно, пусть m г некоторого вещества содержит N атомов. Тогда

$$m = Nm_A = N\mu m_0.$$

Если взять один моль вещества ($m = \mu$ г/моль), то число атомов в нем

$$N_A = \frac{\mu}{m_0 \cdot \text{моль}} = 6,022045 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$$

одинаково для всех элементов. Это число называется *числом Авогадро*.

Зная N_A , можно оценить среднее расстояние между атомами или молекулами вещества, находящегося в любом агрегатном состоянии. Возьмем m г вещества плотностью ρ . Тогда $m = Nm_A = N\rho V$, где N — количество атомов или молекул, V — объем, занимаемый одним атомом (молекулой). Если $m = \mu$ г/моль, то $N = N_A$. Следовательно, $V = \mu/\rho N_A$. Таким образом, на каждый атом приходится кубик со стороной

$$L = \left(\frac{\mu}{\rho N_A} \right)^{1/3}. \quad (19.3)$$

Оценим величину L для атома золота. Подставляя $\mu = 196,37$, $\rho = 19,32 \cdot 10^3$ кг/м³, находим $L \approx 2,6 \cdot 10^{-8}$ см. Радиусы различных атомов, т. е. размеры области вокруг ядра, в которой движутся электроны, того же порядка (10^{-8} см). Радиусы ядер значительно меньше — 10^{-13} или 10^{-12} см (см. § 57). В результате поглощения электромагнитной волны один из электронов атома может перейти на орбиту, размеры которой в 10^3 – 10^4 раз больше первоначальной. Таким методом недавно были созданы короткожи-

вушие атомы-гиганты водорода. Внутри такого атома находится громадное количество «нормальных» атомов [20].

Диаметр двойной спирали молекулы ДНК порядка $2 \cdot 10^{-7}$ см, контурная длина зависит от того, какому организму принадлежит ДНК: у вирусов $\sim 5 \cdot 10^{-3}$ см, у человека $\sim 10^1$ см.

Существуют около 90 элементов, которые встречаются в природе, и свыше десяти, которые могут быть получены методами ядерной физики. Относительное содержание основных элементов, из которых состоит Земля, следующее: железо — $\sim 34,6\%$, кислород — $\sim 29,5$, кремний — ~ 15 , 2, магний — $\sim 12,7\%$. Представляет интерес относительное содержание основных элементов в человеческом теле: кислород — $\sim 60\%$, углерод — $\sim 20,2$, водород — ~ 10 , азот — $\sim 2,5$, кальций — ~ 2 , фосфор — ~ 1 , калий — $\sim 0,35$, сера — $\sim 0,25$, натрий — $\sim 0,15\%$.

2. Взаимодействие атомов и молекул. Силы, действующие между молекулами и атомами, образующими молекулы, — это силы электрического происхождения.

Атом представляет сложную систему электронов, взаимодействующих друг с другом и с ядром. Силы взаимодействия определяются законом Кулона. Теорией, объясняющей основные свойства атомных явлений, является квантовая механика (см. § 57). На смену представлениям классической механики пришли новые понятия.

Различные состояния электрона характеризуются *квантовыми числами*, определяющими полную энергию и *атомную орбиталь* — область пространства, в которой вероятность пребывания электрона достигает 90%. При переходе от одного элемента таблицы Менделеева к следующему увеличивается на единицу заряд ядра атома и добавляется один электрон, который попадает на соответствующую орбиталь.

Опишем некоторые основные свойства взаимодействия двух атомов, образующих молекулу. Образование молекулы сопровождается перестройкой электронной оболочки свободных атомов. При этом заполненные электронные оболочки атомов мало изменяются. Распределение же электронов внешних незаполненных оболочек может изменяться существенно. Рассмотрим два предельных механизма, обеспечивающих связь атомов в молекуле — ионную и ковалентную. В случае *ионной связи* все валентные электроны одного атома переходят к другому атому: молекула состоит из двух ионов. *Ковалентная связь* не сопровождается заметным смещением электронов одного атома к другому. При этом происходит перекрывание орбиталей: образуется единая область, в которой движутся электроны обоих атомов.

Наиболее важной характеристикой молекулы является потенциальная энергия взаимодействия атомов. Вполне понятно, что потенциальная энергия представляет сложную функцию, зависящую от взаимной ориентации, расстояния r между ядрами и ха-

рактера движения электронов. В разных электронных состояниях потенциальная энергия взаимодействия атомов различна. На рис. 19.1 качественно изображена зависимость от расстояния r между ядрами потенциальной энергии взаимодействия двух атомов $\Pi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = U(r)$ для двух различных электронных состояний, $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, $\vec{r}_{1,2}$ — радиус-вектор первого и второго ядра. Разумеется, что различных электронных состояний значительно больше. Мы уже упоминали (см. § 12), что сила взаимодействия всегда направлена в сторону уменьшения потенциальной энергии. Кроме того, чем круче идет кривая, тем больше сила. Используя эти соображения, можно заключить, что на расстояниях, больших r_0 ,

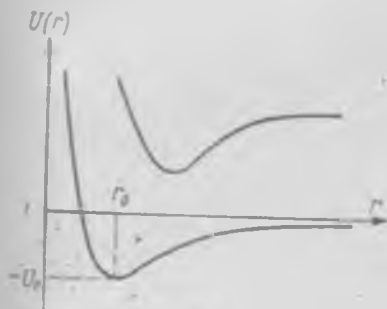


Рис. 19.1

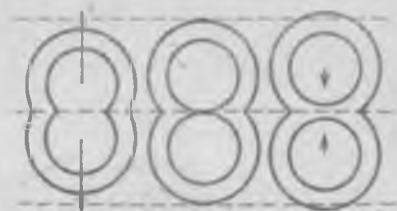


Рис. 19.2

атомы притягиваются. При сближении притяжение ослабевает и на расстоянии r_0 обращается в нуль. Это расстояние отвечает устойчивому равносному расположению атомов, поскольку в этом состоянии потенциальная энергия имеет наименьшее значение. При сближении атомов на расстояние, меньшее r_0 , возникают силы отталкивания. Значения параметров r_0 и U_0 зависят от рода атомов. На рис. 19.2 схематически показаны силы, действующие на атомы молекулы в трех различных положениях. Среднее положение соответствует расстоянию r_0 .

Образование молекулы. Полная энергия относительного движения двух атомов, находящихся на расстоянии $r \gg r_0$, положительна: $E_{12} > 0$. В связанном состоянии, когда атомы образуют молекулу, полная энергия $E_M = -U_0$. Поэтому, для того чтобы из двух атомов образовалась молекула, в момент столкновения атомы должны отдать избыток энергии, равный U_0 , какому-то третьему телу — атому или молекуле. В этом случае реакция идет с выделением тепла. Величина U_0 называется энергией связи, или энергией диссоциации. В общем случае в молекуле имеются три вида движений: электронное, колебательное и вращательное.

3. Тепловое движение атомов и молекул. Все частицы, из которых состоит тело, — молекулы и атомы, — находятся в непре-

рывном движении, которое называется *тепловым*. Все тепловые процессы обусловлены этим движением. Беспорядочность, хаотичность движения микрочастиц — важнейшая черта теплового движения.

Три состояния вещества: газообразное (греч. — хаос), жидкое и твердое — отличаются одно от другого характером теплового движения молекул. Более точно данное агрегатное состояние вещества возникает в результате конкуренции двух форм энергии — энергии связи молекул и энергии их теплового движения. При этом следует учитывать, что взаимодействие между молекулами становится значительным лишь тогда, когда молекулы находятся на расстояниях, сравнимых с их собственными размерами.

Из различных агрегатных состояний вещества теоретически наиболее полно изучены только газообразное и твердое кристаллическое состояния.

Основная особенность разреженных газов, с которой связано большинство их характерных свойств, заключается в том, что молекулы газа в среднем находятся на таком большом удалении друг от друга, что между ними действуют чрезвычайно слабые силы притяжения. Поэтому потенциальная энергия взаимодействия молекулы с ее соседями пренебрежимо мала по сравнению с ее кинетической энергией. Тем самым газы должны обладать свойствами, не зависящими от характера сил взаимодействия между молекулами. Вот почему все разреженные газы ведут себя одинаково при изменении давления, температуры и объема (см. § 21).

В конденсированном состоянии вещества, т. е. в твердых и жидких телах (§ 24), расстояние между соседними молекулами мало отличается от их размеров. Поэтому каждая молекула все время находится под действием интенсивных сил, обусловленных соседними с ней молекулами.

В твердых телах силы взаимодействия настолько велики, что пространственное расположение молекул фактически не изменяется. Тепловое движение атомов в твердых телах представляет собой малые колебания вокруг определенных положений устойчивого равновесия. В кристаллах этим положением являются узлы кристаллической решетки. Характер колебаний хаотичен в том смысле, что амплитуды и фазы колебаний различных атомов не связаны между собой. Величина потенциальной энергии взаимодействия частиц в твердом теле много больше энергии теплового движения. На фотографии кристалла золота, полученной с помощью электронного микроскопа с увеличением в 7 миллионов раз, уже видны ряды атомов, находящихся друг от друга на расстоянии $2,35 \cdot 10^{-8}$ см.

В жидкостях величина потенциальной энергии взаимодействия молекул приблизительно равна кинетической энергии: молекулы связаны менее сильно, чем в твердом теле. Благодаря этому жид-

кости обладают свойством текучести и не имеют собственной формы. Сведения о характере движения молекул остаются еще неполными. Лет десять тому назад предполагали, что отдельная молекула движется некоторое время около одной группы молекул, а затем перескакивает к другой группе. Теперь стало ясно, что любая молекула сильно связана со своими соседями и увлекает их при своем движении. Притяжение между молекулами приводит к образованию *кластеров* — областей повышенной концентрации и вакансий. При этом микроскопическое поверхностное натяжение препятствует частицам на краях перемещаться в незанятые области — вакансии. Время жизни вакансий $3 \cdot 10^{-12}$ с. Наблюдение за траекториями показало, что выделенная молекула смещается вместе с группой ближайших молекул приблизительно в одном и том же направлении. Направление движения определяется нарушением симметрии пространственного распределения их ближайших соседей. Движение такого вида происходит за время порядка $0,5 \cdot 10^{-12}$ с.

§ 20. ТЕПЛОВОЕ РАВНОВЕСИЕ. ТЕМПЕРАТУРА. ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

1. Тепловое равновесие. Молекулярная физика изучает свойства и поведение макроскопических систем, т. е. систем, состоящих из огромного числа атомов и молекул. Типичные системы, с которыми мы сталкиваемся в повседневной жизни, содержат около 10^{25} атомов. Молекула ДНК состоит из 10^8 — 10^{10} атомов. Клетка живого организма имеет 10^{12} — 10^{14} атомов.

При исследовании таких систем важнейшими являются макроскопические величины, непосредственно измеряемые опытным путем и характеризующие не его отдельные частицы, а свойства всей совокупности молекул в целом. Учитывая необычайную сложность макросистем, следует начать изучение с наиболее простых объектов — систем, состояние которых не меняется со временем. Состояние макроскопической системы, в котором она может находиться неопределенно долгое время, называется *равновесным* (о нем говорят так же, как о состоянии *теплового равновесия*). Равновесное макросостояние системы может быть описано при помощи нескольких макроскопических величин или параметров: температуры, давления и т. д., которые мы введем ниже.

Поясним основные детали подхода, с помощью которого могут быть описаны равновесные состояния макросистемы. Различные молекулы системы имеют различные энергии. Энергия выделенной молекулы не является строго постоянной: благодаря взаимодействию с другими молекулами ее энергия будет меняться. Учесть взаимодействие всех молекул и рассчитать их скорости и положения — задача практически неосуществимая, и на первый взгляд может показаться, что с увеличением количества частиц

возрастают сложности в описании системы. В действительности это не так, поскольку совокупность большого числа взаимодействующих молекул является системой, качественно отличной от системы, состоящей из небольшого числа молекул. В ней проявляются закономерности особого типа, совершенно не свойственные простым механическим системам и получившие название *статистических закономерностей*. Оказывается, что в макроскопической системе в состоянии теплового равновесия независимо от начальных условий устанавливается *статистическое распределение* молекул по энергиям. Пусть E — кинетическая энергия движения молекулы как *целого* (энергия движения центра масс молекулы). Тогда каждая из N_1 молекул имеет энергию E_1 , каждая из N_2 молекул имеет энергию E_2 и т. д. (полное число молекул $N = N_1 + N_2 + \dots$). Статистические закономерности носят вероятностный характер. Если бы мы смогли проследить за каждой химически одинаковой молекулой, то оказалось бы, что в каждый момент времени статистическое распределение реализуется совершенно различными индивидуальными распределениями. Другими словами, не имеет значения, какие именно N_i молекул в каждый момент времени обладают энергией E_i . Для определения макроскопических параметров достаточно знать, как часто N_i молекул будут иметь значение энергии, равное E_i , т. е. знать вероятность $w_i(E_i) = N_i/N$ того, что произвольно выбранная молекула попадет в состояние с энергией E_i . Зная статистическое распределение, мы можем ввести фундаментально важное в молекулярной физике понятие *средней величины*. Например, среднее значение кинетической энергии движения молекулы как целого равно

$$E_{\text{ср}} = \frac{N_1 E_1 + N_2 E_2 + \dots}{N_1 + N_2 + \dots} = \sum_{i=1}^N E_i \frac{N_i}{N} = \sum_{i=1}^N E_i w_i. \quad (20.1)$$

Иногда для обозначения среднего значения используют угловые скобки: $E_{\text{ср}} = \langle E \rangle$. Из определения (20.1) видно, что $E_{\text{ср}}$ характеризует совокупность молекул, т. е. является статистической величиной: для одной молекулы она не имеет смысла.

Возникает естественный вопрос: в какой мере среднее значение характеризует реальные значения этой величины? Ответ состоит в том, что относительная погрешность, которую мы совершим, заменив значения величины ее средним значением, обратно пропорциональна корню из числа частиц системы. Поэтому для систем с большим количеством частиц средние значения будут с огромной точностью совпадать с истинными значениями величин. Если же макросистема содержит относительно малое число частиц, то возможны отклонения физических характеристик от средних значений, которые носят название *флуктуаций* (§ 28). В дальнейшем мы будем полностью пренебрегать флуктуациями.

2. **Температура.** Наиболее важным параметром, характеризующим равновесные свойства макроскопической системы, является температура. Рассмотрим два тела, которые могут взаимодействовать и обмениваться энергией. Если фиксировать объемы тел, то взаимодействие происходит без совершения работы. Этот тип взаимодействий, который называется *тепловым*, приводит к тому, что в результате столкновений молекул в области контакта двух тел происходит передача энергии от быстрых молекул к медленным. Это означает, что энергия движения атомов в одном теле уменьшается, в другом — увеличивается. Тело, которое теряет энергию, называют более нагретым, а тело, к которому энергия переходит, — менее нагретым. Такой переход энергии продолжается до тех пор, пока не установится состояние теплового равновесия. Тепловое равновесие является *динамическим равновесием*: отдельные частицы будут по-прежнему обмениваться энергией, но не будет происходить никакого суммарного перехода энергии из одного тела в другое. Таким образом, в состоянии теплового равновесия степени нагретости тел одинаковы. В термодинамике для характеристики степени нагретости тела вводят понятие *температуры*. Говорят, что температуры двух тел, находящихся в тепловом равновесии друг с другом, одинаковы или энергия переходит от тела с более высокой к телу с более низкой температурой.

Для количественного определения температуры необходимо найти такую величину, которая была бы одинакова у любых двух тел, находящихся в тепловом равновесии друг с другом. Этим свойством обладает средняя (в смысле определения (20.1)) кинетическая энергия $\langle E \rangle$ поступательного движения центра тяжести атома или молекулы. По этой причине за меру температуры может быть выбрана средняя кинетическая энергия поступательного движения, приходящаяся на один атом системы. Проще всего было бы измерять температуру в энергетических единицах: Дж, эВ. Однако принято измерять температуру в градусах, исходя из соотношения

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2} kT \quad (20.2)$$

(коэффициент $3/2$ введен для того, чтобы избежать появления этого множителя в других формулах). Переводной коэффициент k называется *постоянной Больцмана*,

$$k = 1,38 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К} = 0,86 \cdot 10^{-10} \text{ МэВ/К}.$$

При комнатной температуре 20°C средняя кинетическая энергия

$$\langle E \rangle = 3/2 \cdot 1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 293 = 6,06 \cdot 10^{-21} \text{ Дж} = 0,038 \text{ эВ}.$$

Поскольку E — кинетическая энергия движения молекулы как целого со скоростью v , то согласно (20.2) $v_{\text{ср}}^2 = 3kT/m_m$, где m_m — масса молекулы. Величина $v_T = \sqrt{v_{\text{ср}}^2}$ называется *тепловой скоростью* молекулы.

Если, например, воздух находится в состоянии теплового равновесия при комнатной температуре, то тепловые скорости молекул азота и кислорода соответственно равны 507 и 478 м/с.

В состоянии теплового равновесия есть молекулы, которые движутся со скоростями, большими и меньшими v_T . Часть молекул имеет скорости, даже большие первой или второй космической скоростей. Однако доля таких молекул при умеренных температурах ничтожно мала.

Функция $f(v)$, определяющая число молекул, имеющих величину скорости в интервале между v и $v+\Delta v$, была получена в 1859 г. Д. К. Максвеллом, внесшим огромный вклад в развитие кинетической теории газов. На рис. 20.1 изображены распределения Максвелла при двух раз-

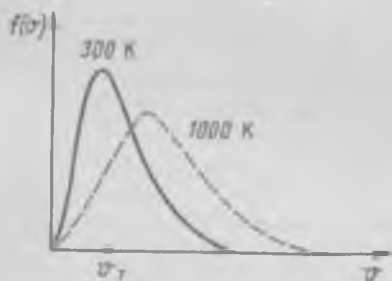


Рис. 20.1

личных температурах $T_1=300$ К и $T_2=1000$ К. Заметим, что каждая кривая достигает максимума при значении v несколько меньшем, чем величина v_T .

Согласно определению (20.2) при нулевой температуре тепловое движение вовсе прекращается. Однако известно, что при нулевой температуре гелий остается жидким и не прекращается движение электронов в атомах. Это противоречие связано с тем, что перечисленные явления обусловлены квантовыми свойствами частиц, а определение (20.2) основано на классических представлениях. Поэтому связь (20.2) между температурой и энергией теплового движения справедлива только в тех случаях, когда это движение может быть описано законами классической механики. В настоящей книге нет необходимости давать определение температуры в квантовом случае. Отметим только, что при температуре абсолютного нуля остается некоторая доля энергии.

Шкалу, в которой температуру отсчитывают от абсолютного нуля, называют *шкалой Кельвина*. Наряду с этой используется также *шкала Цельсия*, в которой за 0°C принята температура тающего льда, а за 100°C — температура кипения воды при нормальном давлении 760 мм рт.ст. Для перевода температуры из одной шкалы в другую необходимо знать абсолютную температуру точки замерзания воды. Современные измерения дают значение 273,16 К. В настоящее время удалось достичь низкой темпе-

ратуры $\sim 10^{-6}$ К. Верхнего предела абсолютной температуры не существует. В звездах или при термоядерных взрывах достигается температура 10^7 К.

Чтобы определить температуру как физическую величину, необходимо указать способ ее измерения. Обычно процесс измерения заключается в сравнении измеряемой величины с эталоном — единицей этой величины. Однако для определения температуры этот способ непригоден. Действительно, в силу формулы (20.2) температуру, скажем, в 300°C нельзя рассматривать как сумму трехсот единичных градусов. Поэтому значение температуры определяют по изменению какого-нибудь удобного для измерения свойства вещества, зависящего от температуры (см. § 25).

ПРИМЕР 20.1. В герметически закрытом сосуде смешали два газа, масса молекул которых равна m_1 и m_2 . Каково отношение тепловых скоростей движения молекул после установления равновесия?

Тепловой скоростью называют $v_T = \sqrt{v_{\text{ср}}^2}$. В состоянии теплового равновесия средняя кинетическая энергия молекул одинакова, несмотря на различие их масс. Следовательно,

$$\frac{m_1 v_{T1}^2}{2} = \frac{m_2 v_{T2}^2}{2}.$$

Из этого соотношения находим

$$v_{T2} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} v_{T1}.$$

Предположим, что $m_1 \ll m_2$, причем до смешивания температура «тяжелого» газа T_2 больше температуры «легкого» газа T_1 . Поскольку при взаимодействии температуры газов сближаются, то «тяжелый» газ охлаждается, а «легкий» нагревается.

Подобные соображения привели советского физика Г. И. Будкера (1918–1977) к открытию нового метода охлаждения пучка протонов, движущегося в ускорителе, пучком «холодных» электронов. Этот метод позволил значительно уменьшить разброс скоростей протонов, приводящий к их потере в процессе ускорения. В этом случае $\sqrt{m_{\text{прот}}/m_{\text{ел}}} = 43$.

3. Давление. Благодаря тепловому движению молекулы газа или жидкости, сталкиваясь со стенками сосуда и отскакивая от них, изменяют количество движения. Изменение импульса согласно (10.1) определяет силу, действующую на молекулы. По третьему закону Ньютона точно такая же по величине сила действует на поверхность стенки сосуда. Так как молекул очень много и ударяются они о стенку очень часто, то можно заменить их суммарное действие на поверхность стенки одной непрерывно действующей средней силой. Величина этой силы, отнесенная к едини-

не поверхности стенки, определяет основную часть давления, создаваемого молекулами. Другая часть давления обусловлена упругими свойствами газа, связанными с потенциальной энергией взаимодействия молекул.

4. Уравнение состояния. Состояние любой системы, находящейся в тепловом равновесии, определяется совокупностью термодинамических величин, называемых параметрами. В качестве параметров простейших систем газов, жидкостей достаточно выбрать массу m , давление p , температуру T и объем V . Изменения этих параметров не являются независимыми, так как p , T , V связаны функциональным соотношением, которое называется уравнением состояния. Уравнение состояния имеет вид $p=f(T, V)$. Из него следует, что состояние системы определяется двумя независимыми параметрами, а третий однозначно определяется уравнением состояния.

Обычно уравнение состояния получают из экспериментальных данных. Для простых систем уравнение состояния можно установить теоретически (см. § 21).

5. Термодинамические процессы. Чтобы вывести систему из состояния теплового равновесия, необходимо внешнее воздействие. Переход системы из одного равновесного состояния в другое называется термодинамическим процессом, или просто процессом. Термодинамика изучает равновесные состояния. Однако каждое промежуточное состояние не является равновесным и в общем случае не определяется заданием параметров, поскольку последние, например температура, определены лишь как свойства системы при равновесии. Возникает вопрос: можно ли изучать процессы в рамках термодинамики? Указанную трудность можно обойти, если ограничиться рассмотрением процессов, идущих настолько медленно, что каждое промежуточное состояние бесконечно мало отличается от состояния равновесия. В этом случае реальный процесс является как бы непрерывной последовательностью равновесных состояний, в каждом из которых параметры связаны уравнением состояния. На практике это условие во многих случаях выполняется. Чтобы пояснить это, рассмотрим процесс сжатия газа. При движении поршня энергия молекул, находящихся вблизи него, становится больше энергии остальной части молекул: газ переходит в неравновесное состояние. Однако благодаря процессам соударения между молекулами равномерное распределение энергии между ними восстанавливается за время $\tau \sim 10^{-10} - 10^{-9}$ с. Если время, требуемое для продвижения поршня на заметное расстояние, больше τ , то газ будет успевать приходить в состояние равновесия, соответствующее данным внешним условиям.

Процесс изображают графически в координатах давление — объем, давление — температура и т. д. Каждая точка на графике процесса совершенно однозначно определяет состояние системы.

Если в результате процесса система возвращается в первоначальное состояние, то процесс называется круговым, или *циклом*. Один из возможных круговых процессов изображен на рис. 20.3.

ЗАДАЧА 20.2. В результате адиабатического процесса $pV^n = C$ объем газа изменился от значения V_1 до V_2 . Как при этом изменилась температура, если уравнение состояния газа $pV = RT$ (R , C и n — постоянные положительные величины, причем $n > 1$)?

Решение. Параметры газа одновременно удовлетворяют уравнениям состояния и процесса

$$\frac{pV}{T} = R, \quad pV^n = C.$$

Исключая из этой системы давление, находим

$$T = \frac{C}{R} \frac{1}{V^{n-1}}.$$

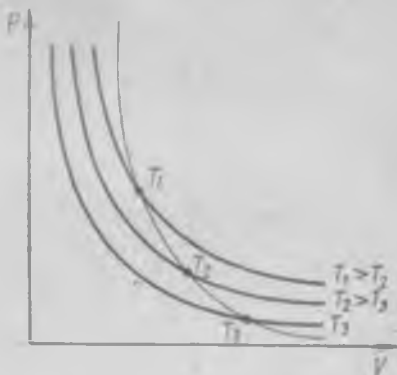


Рис. 20.2

Поскольку $n > 1$, то расширение газа сопровождается охлаждением. Для того чтобы этот результат стал более наглядным, построим в координатах (p, V) график процесса

$$p = \frac{C}{V^n} \quad (1)$$

и нанесем на него сетку изотерм, соответствующих различным значениям $T = T_1, T_2, T_3$,

$$p = \frac{RT}{V} \quad (2)$$

Так как $n > 1$, то кривая 1 на рис. 20.2 идет круче, чем изотерма 2. Поэтому ясно, что, расширяясь по закону (1), газ, переходя с изотермы T_1 на изотерму T_2 , будет охлаждаться.

ЗАДАЧА 20.3. На рис. 20.3а показана диаграмма кругового процесса в координатах V, T . Начертить диаграмму того же процесса в координатах V, p . Уравнение состояния $pV = RT$.

Решение. Точки c и a находятся на одной изотерме. Поэтому, начертив на рис. 20.3б изотерму, найдем на ней две точки c и a . Наклонные прямые $V = RT/p$ на рис. 20.3а — изобары, причем меньшим значениям давления соответствует больший угол наклона

на. Проведя изобару из точки c , найдем точку d . Далее построим изохору da , затем изобару ab и, наконец, изохору bc .

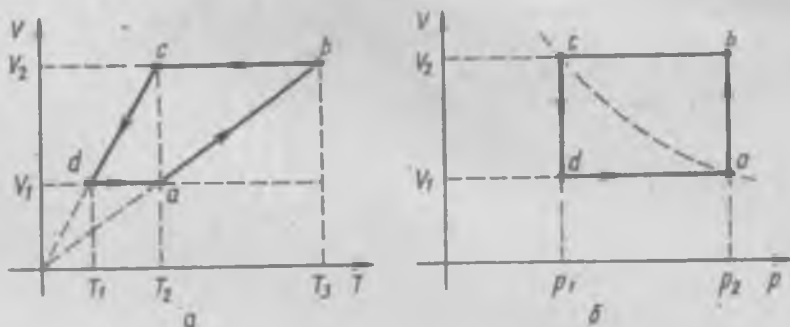


Рис. 20.3

6. Приращение внутренней энергии. Рассмотрим неподвижное макроскопическое тело, находящееся в тепловом равновесии с внешней средой при температуре T . Внутренней энергией тела называется сумма кинетической энергии частиц и потенциальной энергии их взаимодействия между собой. Вследствие взаимодействия частиц тела со средой энергия U изменяется. Предположим, что мы произвели N опытов по определению энергии тела, причем в N_1 опытах обнаружили значение энергии, равное U_1 , в N_2 опытах — значение энергии, равное U_2 , и т. д. Если число опытов N достаточно велико, то среднее значение энергии

$$U = \frac{N_1 U_1 + N_2 U_2 + \dots}{N_1 + N_2 + \dots} = \sum_{i=1}^N U_i \omega_i, \quad (20.3)$$

где $\omega_i = N_i/N$ — вероятность того, что тело находится в состоянии с энергией U_i .

Теперь рассмотрим некоторый процесс, т. е. переход из одного равновесного состояния в другое. Бесконечно малое приращение внутренней энергии

$$\Delta U = \sum_{i=1}^N \Delta U_i \omega_i + \sum_{i=1}^N U_i \Delta \omega_i \quad (20.4)$$

состоит из двух частей. Первый вклад в ΔU , связанный с изменением энергии U_i , называется работой, произведенной над телом

$$\delta A = \sum_{i=1}^N \omega_i \Delta U_i. \quad (20.5)$$

Второй, обусловленный изменением вероятностей ω_i , называется количеством теплоты, переданным телу внешней средой,

$$\delta Q = \sum_{i=1}^N U_i \Delta \omega_i. \quad (20.6)$$

Таким образом, при бесконечно малом изменении параметров

$$\Delta U = \delta A + \delta Q. \quad (20.7)$$

Символ δ (вместо Δ) введен для того, чтобы обратить внимание на то, что величина δA не является разностью двух работ. Действительно, работа совершается только в процессе и определяется уравнением процесса. Мы не можем говорить о работе в начальном и конечном состояниях системы. Аналогичное замечание относится и к δQ . Напротив, ΔU — приращение функции (см. § 22).

7. Задачи молекулярной физики и термодинамики. Молекулярная физика, более точно *статистическая физика*, изучает закономерности, которым подчиняются газы, жидкости, твердые тела и процессы, происходящие в этих средах. Поэтому методы молекулярной физики применяются при решении практически всех физических проблем, возникающих в гидродинамике, аэродинамике, при изучении электрического тока в веществе и магнетизма, в теории распространения электромагнитных и звуковых волн в различных средах, физике плазмы, астрофизике и т. д.

Значительно раньше молекулярной физики сложилась область физики, изучающая общие свойства макроскопических тел и закономерности преобразования различных форм энергии, — *термодинамика*. Слово термодинамика происходит от греческих слов «терме» (*therme*) — тепло и «динамис» (*dynamis*) — сила. Термодинамика не рассматривает внутреннее строение тел. Она оперирует с так называемыми термодинамическими величинами, характеризующими макроскопическое состояние тел: давлением, температурой, энергией, объемом. Термодинамика в узком смысле этого слова изучает свойства вещества в состоянии теплового равновесия при изменениях температуры, давления и химического состава, не опираясь на какие-либо представления об их структуре, а исходя из некоторых законов, являющихся обобщением опытных данных. Такой подход оказался возможным только потому, что равновесные свойства систем сравнительно мало зависят от конкретных свойств частиц, из которых они состоят. В настоящее время термодинамика и молекулярная теория тепловых процессов составляют неразрывное целое и взаимно дополняют друг друга.

§ 21. ИДЕАЛЬНЫЙ ГАЗ

Одним из важнейших объектов изучения молекулярной физики является так называемый идеальный газ. Этот термин обозначает модель реального газа, молекулы которого очень слабо взаимодействуют друг с другом и занимают пренебрежимо малый объем по сравнению с объемом, занимаемым газом. Следовательно, *потенциальной энергией молекул идеального газа можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией.*

Подставляя, например, в формулу (19.3) плотность воздуха при нормальных условиях $\rho = 1,3 \text{ кг/м}^3$, $\mu = 29$, найдем, что расстояние между молекулами $L \sim 3,4 \cdot 10^{-8} \text{ см}$. Эта величина больше междядерных расстояний $D \sim 1,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$ в молекулах кислорода и азота, составляющих основную часть воздуха.

Оценим среднее расстояние l , которое пролетит молекула газа, до того как столкнется с другой молекулой. Упрощая задачу, будем считать, что столкновение, т. е. процесс взаимодействия, происходит только при сближении на расстояние $\leq D$. Следовательно, столкновение произойдет в том случае, если в объеме $\pi D^2 l n$ находится в среднем одна частица, т. е. $\pi D^2 l n \sim 1$, где n — концентрация молекул. При температуре $T = 273 \text{ К}$ и нормальном давлении $p = 760 \text{ мм рт. ст.}$ $n = 2,68 \cdot 10^{19} \text{ см}^{-3}$. Таким образом, получим значение

$$l = \frac{1}{\pi D^2 n} = \frac{10^{-8}}{3,14 \cdot 2,25 \cdot 2,68} = 5300 \cdot 10^{-8} \text{ см.}$$

Эта величина примерно в три тысячи раз больше диаметра атома. Поэтому столкновения молекул в таком разреженном газе происходят настолько редко, что взаимодействием между ними можно пренебречь. Не следует, однако, забывать, что именно благодаря взаимодействию молекул становится возможным установление теплового равновесия в газе или его конденсация при охлаждении.

1. Уравнение Клапейрона — Менделеева. Изучение газов имело большое значение для становления двух важнейших направлений науки — атомно-молекулярной теории и термодинамики. Один из первых законов в истории физики был открыт в 1661 г. английским химиком Р. Бойлем. Он обнаружил, что произведение $pV = \text{const}$ для данного количества газа. Через пятнадцать лет французский ученый Э. Мариотт «подправил» Бойля, дополнив формулировку закона словами: «при постоянной температуре». Однако зависимость давления и объема от температуры была исследована лишь спустя сто лет французскими учеными Ж. Шарлем в 1787 г. и Ж. Гей-Люссаком в 1802 г. Они показали, что для постоянной массы газа в изохорическом процессе

$$\frac{p}{T} = \text{const}, \quad (21.1)$$

а при изобарическом процессе

$$\frac{V}{T} = \text{const.} \quad (21.2)$$

Соотношение (21.1) определяет закон Шарля, а зависимость (21.2) — закон Гей-Люссака.

Законы Шарля и Гей-Люссака можно объединить в один общий закон, связывающий три параметра p , V , T при неизменной массе газа. С этой целью проведем последовательно два процесса $(p_0, V_0, T_0) \rightarrow (p, V_0, T_1) \rightarrow (p, V, T)$. В результате получим

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0 V_0}{T_0} = \text{const.} \quad (21.3)$$

Это уравнение было установлено Б. Клапейроном в 1834 г. Значение постоянной в правой части (21.3) зависит от массы газа m и его молярной массы M . Для определения этой постоянной Д. И. Менделеев в 1874 г. использовал следствие закона Авогадро: один грамм-моль любого газа при одинаковом давлении и одинаковой температуре занимает один и тот же объем. В частности, при $T_0 = 273 \text{ К}$ (0°С) и давлении $p_0 = 1 \text{ атм}$ объем одного киломоля любого газа $v_0 = 22,414 \text{ м}^3/\text{кмоль}$. Если же взять $m \text{ кг}$ газа, то он займет объем $(m/M) V_0$, где $M = \mu \text{ кг/кмоль}$. Следовательно, для $m \text{ кг}$ газа

$$\text{const} = \frac{m}{M} \frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{m}{M} R.$$

Величина $R = p_0 V_0 / T_0$ одинакова для всех газов. Поэтому она называется универсальной газовой постоянной. В СИ

$$R = 8,314 \cdot 10^3 \text{ Дж/кмоль} \cdot \text{К}.$$

Теперь (21.3) принимает вид

$$\frac{pV}{T} = \frac{m}{M} R. \quad (21.4)$$

Уравнение (21.4) называется *уравнением Менделеева — Клапейрона* и является основным уравнением, связывающим параметры газа в состоянии теплового равновесия. Поэтому его называют *уравнением состояния идеального газа*. Из него следует полезное выражение для плотности газа

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{pM}{RT}. \quad (21.5)$$

В результате тщательных измерений установлено, что реальные газы лишь приближенно подчиняются уравнению (21.4). Так, произведение pV для 17 г аммиака при температуре 25°С не являет-

ся постоянным. Оно изменяется от 24,45 при 0,1 атм до 23,1 при 9,8 атм, когда уже начинается конденсация. Однако при достаточно разрежении поведение всех газов удовлетворительно описывается уравнением состояния (21.4).

Уравнение состояния газа представляет замечательный результат, не имеющий аналогий в других разделах физики, — оно является универсальным, так как описывает свойства всех веществ в газообразном состоянии. Заметим также, что, несмотря на то что его вывод основан на рассмотрении всего двух из бесчисленного множества процессов, уравнение состояния не имеет отношения к процессам. Приведем вывод уравнения состояния на основе молекулярно-кинетической теории.

2. Вывод уравнения состояния идеального газа. Малая величина взаимодействий между молекулами газа позволяет простым образом связать давление с температурой. Рассмотрим газ, содержащий N молекул и заключенный в объем V . В состоянии теплового равновесия N_1 молекул имеют скорости $\vec{v}_1$, N_2 молекул — скорости $\vec{v}_2$ и т. д. Вычислим давление газа на элемент поверх-

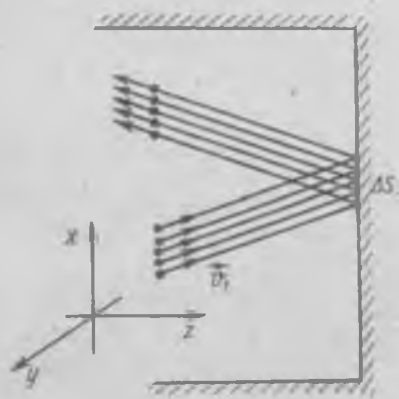


Рис. 21.1

ности ΔS (рис. 21.1). Для этого будем считать, что можно проследить за поведением отдельной молекулы, несмотря на их полную неразличимость, и рассмотрим движение молекулы массой m , обладающей скоростью $\vec{v}_1$. Далее предположим, что стенки объема являются идеально отражающими; если v_{1z} — составляющая скорости молекулы, перпендикулярная стенке, то после удара она становится равной $-v_{1z}$. Изменение импульса при одном столкновении $\Delta p_1 = -2mv_{1z}$. По третьему закону Ньютона стенка получит равный по величине и противоположный по направлению импульс $2mv_{1z}$. Если

за время Δt на площади ΔS происходит ΔN_1 соударений, то сила, действующая на эту площадь со стороны молекул, имеющих скорости $\vec{v}_1$, равна

$$\Delta F_{1z} = 2mv_{1z} \frac{\Delta N_1}{\Delta t}.$$

Сколько же столкновений ΔN_1 происходит за время Δt ? В силу хаотичности движения половина молекул, имеющих скорость

$|v_{1z}|$, движется от стенки, половина — к стенке. Ясно, что за время Δt успеют долететь до стенки только те молекулы, которые в начальный момент находились от нее на расстояниях, меньших $v_{1z}\Delta t$ ($v_{1z} > 0$).

Чтобы подсчитать ΔN_1 , построим над площадкой ΔS параллелепипед, образующая которого параллельна скорости v_1 , а высота $v_{1z}\Delta t$ (см. рис. 21.1). Очевидно,

$$\Delta N_1 = \frac{1}{2} \frac{N_1}{V} v_{1z} \Delta t \Delta S.$$

Следовательно,

$$\Delta F_{1z} = m v_{1z}^2 \frac{N_1}{V} \Delta S.$$

Полная сила, действующая на площадку ΔS со стороны всех молекул, имеющих всевозможные скорости, $\Delta F_z = \Delta F_{1z} + \Delta F_{2z} + \dots$. Учитывая, что $\Delta F_z = p \Delta S$, получим давление газа

$$p = \frac{m}{V} (N_1 v_{1z}^2 + N_2 v_{2z}^2 + \dots). \quad (21.6)$$

Величина, стоящая в скобках, согласно (20.1) определяет среднее значение квадрата составляющей скорости молекулы в направлении, перпендикулярном стенке, $\langle v_z^2 \rangle$, т. е.

$$N_1 v_{1z}^2 + N_2 v_{2z}^2 + \dots = N \langle v_z^2 \rangle. \quad (21.7)$$

Выразим теперь $\langle v_z^2 \rangle$ через величину, не связанную с выбранным направлением. С этой целью запишем квадрат полной скорости через квадраты ее составляющих по трем перпендикулярным осям:

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2.$$

Используя определение (20.1), вычислим среднее значение от обеих частей равенства:

$$\langle v^2 \rangle = \langle v_x^2 \rangle + \langle v_y^2 \rangle + \langle v_z^2 \rangle.$$

Так как направление координатных осей выбрано произвольным образом, а молекулы движутся хаотически, то

$$\langle v_x^2 \rangle = \langle v_y^2 \rangle = \langle v_z^2 \rangle.$$

Следовательно, $\langle v^2 \rangle = 3 \langle v_z^2 \rangle$. Подставляя это соотношение в (22.7), имеем

$$pV = \frac{2}{3} N \langle E \rangle, \quad (21.8)$$

где $\langle E \rangle = \langle m v^2 / 2 \rangle$ — среднее значение кинетической энергии мо-

лекул, равное по определению $(20.2) \frac{3}{2} kT$. Итак, окончательно получим следующее уравнение состояния идеального газа:

$$pV = NkT. \quad (21.9)$$

Уравнение (21.9) совпадает с уравнением Клапейрона — Менделеева (21.4). Действительно, записывая число молекул N в виде $(m/M)N_A$, где N_A — число Авогадро, уравнение (21.9) можно представить в виде (21.4) с $R = kN_A$.

Закон Дальтона. Если предположить, что газ представляет собой смесь различных идеальных газов, то из (21.9) находим

$$p = \frac{N_a}{V} kT + \frac{N_b}{V} kT + \dots = p_a + p_b + \dots, \quad (21.10)$$

где N_i — число молекул i -го сорта, p_i — парциальное давление газа i -го сорта. Из (21.10) следует закон, открытый Дальтоном в 1801 г.: *давление смеси газов, не взаимодействующих друг с другом, равно сумме их парциальных давлений*. Парциальным называется давление, которое производил бы каждый отдельный газ этой смеси, занимая весь объем V . Для каждой компоненты смеси справедливо уравнение состояния (22.3):

$$\frac{p_a V}{T} = \frac{n_a}{M_a} R.$$

Закон Авогадро. Из (21.9) следует также закон Авогадро: *равные объемы идеальных газов при одинаковых температурах и давлении содержат одинаковое число молекул*.

Уравнение состояния неидеального газа. Мы уже упоминали, что реальные газы не подчиняются уравнению (21.4) или (21.9). Отклонения в поведении реальных газов связаны с конечным объемом молекул газа и наличием сил притяжения между ними. Давление, создаваемое взаимодействующими молекулами, оказывается меньше, чем давление, создаваемое теми же молекулами в отсутствие притяжения. Наибольшую известность приобрело уравнение состояния, предложенное голландским физиком Д. Ван-дер-Ваальсом в 1873 г. Оно учитывает обе поправки и позволяет описывать процессы конденсации газа в жидкое или твердое состояние.

ЗАДАЧА 21.1. Найти плотность воздуха при температуре 127°C и давлении 720 мм рт. ст.

Решение. 1. Значение плотности определяется непосредственно из (21.5). В СИ давление должно быть выражено в Н/м^2 . Учитывая, что молярная масса воздуха $M = 29 \text{ кг/кмоль}$, а давление, соответствующее 720 мм рт. ст., равно

$$\frac{720}{760} 9,8 \cdot 10^4 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2},$$

находим

$$\rho = \frac{pM}{RT} = \frac{720 \cdot 9,8 \cdot 10^4 \cdot 29}{760 \cdot 8,31 \cdot 10^3 \cdot 400} = 0,83 \text{ кг/м}^3.$$

2. Пусть m кг воздуха занимают объем V при температуре $T=400$ К и давлении $p=720$ мм рт. ст. Та же масса воздуха при нормальных условиях ($T_0=273$ К, $p_0=760$ мм рт. ст.) занимает объем V_0 . Поэтому из уравнения (21.3) следует

$$\frac{pV}{T} = \frac{p_0V_0}{T_0} \quad (1)$$

Учитывая, что по определению плотности

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad \rho_0 = \frac{m}{V_0} \quad (2)$$

(ρ_0 — плотность воздуха при нормальных условиях), из (1) и (2) получим искомую плотность

$$\rho = \left(\frac{T_0}{T} \right) \left(\frac{p}{p_0} \right) \rho_0.$$

Подставляя из таблиц числовое значение $\rho_0=1,29$ кг/м³, найдем $\rho=0,83$ кг/м³.

ЗАДАЧА 21.2. Определить подъемную силу наполненного водородом аэростата радиусом $r=3$ м, сообщаемого с атмосферой. Температура наружного воздуха $T_1=17^\circ\text{С}$, температура водорода $T_2=27^\circ\text{С}$, давление воздуха $p=1$ атм, вес оболочки $N=30$ кгс ($M_1=29$, $M_2=2$ — молярные массы воздуха и водорода).

Решение. Подъемная сила F равна разности выталкивающей силы $\rho_1 gV$ и силы тяжести аэростата, заполненного водородом, равной $N+\rho_2 gV$ (ρ_1, ρ_2 — плотности воздуха и водорода, V — объем аэростата). Учитывая формулу (21.5), находим

$$F = g \frac{pV}{R} \left(\frac{M_1}{T_1} - \frac{M_2}{T_2} \right) - N = 99 \text{ кгс.}$$

ЗАДАЧА 21.3. Внутри нетеплопроводного цилиндра, расположенного горизонтально, имеется тонкий нетеплопроводный подвижный поршень. На каких расстояниях от концов цилиндра расположен поршень, если с одной стороны в цилиндре находится кислород при постоянной температуре $T_1=127^\circ\text{С}$, а с другой — водород при температуре $T_2=27^\circ\text{С}$? Массы обоих газов одинаковы, общая длина цилиндра $l=65$ см.

Решение. Поршень будет перемещаться до тех пор, пока давления, создаваемые кислородом и водородом, станут одинаковы-

ми. Пусть l_1 и l_2 — расстояния от краев цилиндра до поршня в положении равновесия. Поскольку $p_1 = p_2$, то

$$\frac{m}{M_1} \frac{RT_1}{l_1 S} = \frac{m}{M_2} \frac{RT_2}{l_2 S} \quad (1)$$

(S — площадь поршня). Учитывая, что $l = l_1 + l_2$, находим

$$l_1 = \frac{l}{1 + \frac{M_1}{M_2} \frac{T_2}{T_1}}, \quad l_2 = \frac{l}{1 + \frac{M_2}{M_1} \frac{T_1}{T_2}}.$$

Подставляя числовые значения $M_2 = 32$, $M_1 = 2$, $T = 400$ К, находим $l_1 = 5$ см, $l_2 = 60$ см.

ЗАДАЧА 21.4. Определить плотность смеси $m_1 = 32$ г кислорода и $m_2 = 8$ г азота при давлении $p = 1$ атм и температуре $T = 0^\circ \text{C}$ ($M_1 = 32$ и $M_2 = 28$ — молярные массы кислорода и азота).

Решение. По определению плотность

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{V}, \quad (1)$$

где V — объем смеси. Согласно закону Дальтона (21.10) давление p равно сумме парциальных давлений, создаваемых каждой компонентой смеси:

$$p = \frac{m_1}{M_1} \frac{RT}{V} + \frac{m_2}{M_2} \frac{RT}{V}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) получим

$$\rho = \frac{m_1 + m_2}{\frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}} \frac{p}{RT}. \quad (3)$$

Подставляя числовые данные, находим $\rho = 1,34$ кг/м³. Из сравнения (3) и (22.4) можно получить формулу для молярной массы смеси двух газов:

$$\frac{m_1 + m_2}{M} = \frac{m_1}{M_1} + \frac{m_2}{M_2}.$$

ПРИМЕР 21.5. В атмосфере на долю кислорода приходится 20,95%, а на долю азота 78,78% массы воздуха. Найдём парциальное давление кислорода.

Пусть M_1 — молярная масса кислорода, M_2 — молярная масса азота и других газов (углекислый (0,03%), озон и инертные

газы). Для массы воздуха m в объеме V атмосферное давление p согласно закону Дальтона равно

$$p = p_1 + p_2, \quad (1)$$

$$\frac{p_1 V}{T} = f_1 \frac{m}{M_1} R, \quad \frac{p_2 V}{T} = f_2 \frac{m}{M_2} R, \quad (2)$$

где $f_1 \approx 0,21$, $f_2 \approx 0,79$. Из системы уравнений получим парциальное давление кислорода

$$p_1 = \frac{f_1 M_2}{f_1 M_2 + f_2 M_1} p. \quad (3)$$

Примерно до 50—100 км атмосфера удивительно однородна: величины f_1 и f_2 одинаковы.

Парциальное давление кислорода при нормальном давлении $p = 760$ мм рт. ст. равно $p_1 = 143$ мм рт. ст. С увеличением высоты парциальное давление падает. На высоте 10 км $p = 198$ мм рт. ст., $p_1 = 37,3$ мм рт. ст. Поэтому для обеспечения нормального кислородного режима на больших высотах альпинистам рекомендуется пользоваться дыхательной смесью, обогащенной кислородом. Однако практика показывает, что приспособляемость организма к недостатку кислорода поддается тренировке. В. Балыбердин, первым из одиннадцати советских альпинистов ступивший на Эверест (высотой 8848 м), не пользовался кислородной маской.

В наши дни человечество начало осваивать морские глубины. Водолаз в «мягком» костюме под водой испытывает огромное давление. Оно возрастает на 1 атм при увеличении глубины погружения на 10 м. На глубине 90 м давление равно 10 атм. Под тем же давлением подают в скафандр воздух. Однако рост парциального давления кислорода приводит к нарушению функции нервных центров. Снижая содержание кислорода в дыхательной смеси, можно уменьшить парциальное давление кислорода до нормального значения.

§ 22. ВНУТРЕННЯЯ ЭНЕРГИЯ, РАБОТА, КОЛИЧЕСТВО ТЕПЛОТЫ

1. Внутренняя энергия. В термодинамике движение тела как целого обычно не рассматривают. По этой причине полная энергия системы складывается из кинетической энергии теплового движения частиц и потенциальной энергии их взаимодействия друг с другом. Эту энергию и называют *внутренней энергией системы*. Из закона сохранения энергии (см. § 12) следует, что если система является замкнутой, то внутренняя энергия сохраняется. В каждом состоянии система обладает определенным значением внутренней энергии. Следовательно, внутренняя энергия — *функция состояния*.

Внутренняя энергия идеального одноатомного газа. Поскольку идеальный газ состоит из невзаимодействующих молекул, то полная энергия газа равна кинетической энергии движения молекул. В многоатомных молекулах кинетическая энергия складывается из трех независимых частей — энергии движения молекулы как целого, вращательной энергии и колебательной энергии ядер. Для одноатомного газа остается только первое слагаемое. Поэтому, учитывая (20.1) и (20.2), находим внутреннюю энергию в виде

$$U = N\langle E \rangle = \frac{3}{2} NkT.$$

Поскольку $N = (m/M)N_A$, $R = kN_A$, то

$$U = \frac{3}{2} \frac{m}{M} RT. \quad (22.1)$$

Выражение для внутренней энергии идеального многоатомного газа приведено ниже (формула (22.8)).

Мы видим, что внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры. Для численных оценок представим (22.1) в виде $U = (m/2)v_r^2$, где v_r — тепловая скорость. Мы видели, что при комнатной температуре $v_r = 500$ м/с. Следовательно, внутренняя энергия совпадает с кинетической энергией тела массой m , движущегося со сверхзвуковой скоростью. При $m = 0,001$ кг, $U \sim 125$ Дж.

2. Первый закон термодинамики. Рассмотрим переход из одного равновесного состояния в другое, т. е. процесс. В начальном состоянии газ, имеющий параметры m , p , V , T , находится в цилиндре, ограниченном с одной стороны подвижным поршнем. Цилиндр помещен в некоторую среду (тепловой резервуар, включающий стенки цилиндра), имеющую заданные параметры p_0 , V_0 , T_0 .

К поршню приложена сила $\vec{F}$ (рис. 22.1). При проведении процесса поршень движется равномерно в положительном направлении оси x . Если под влиянием внешних воздействий система переходит из одного состояния в другое, то приращение внутренней энергии зависит лишь от параметров начального и конечного состояний и не зависит от параметров промежуточных состояний. Тем самым при рассмотре-

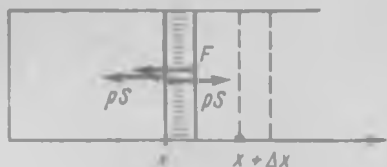


Рис. 22.1

нии термодинамических задач физическое значение имеет только приращение внутренней энергии, а не ее абсолютное значение. Очевидно, при круговом процессе полное приращение внутренней энергии равно нулю. В других процессах внутренняя энергия изменяется.

В термодинамике приращение внутренней энергии представляют в виде суммы двух слагаемых:

$$U_2 - U_1 = A_{12} + Q_{12}, \quad (22.2)$$

где A_{12} — работа, совершаемая силой F над газом, Q_{12} — количество теплоты, переданное газу внешней средой. Соотношение (22.2) соответствует равенству (20.7), полученному при рассмотрении бесконечно малого приращения внутренней энергии (20.3).

Соотношение (22.2), представляющее частный случай закона сохранения энергии в применении к тепловым процессам, называют *первым законом термодинамики*. Эквивалентность количества теплоты и работы, т. е. возможность измерения и сравнения в одних и тех же единицах, была доказана немецким врачом Ю. Р. Майером в 1841—1845 гг. и английским физиком Дж. Джоулем в 1841—1850 гг. Закон сохранения энергии был сформулирован Майером и немецким ученым Г. Гельмгольцем в 1847 г. [9]. Первый закон термодинамики (22.2) установлен в 1850 г. немецким физиком-теоретиком Р. Клаузиусом.

В СИ за единицу количества теплоты принимается джоуль. Калория является внесистемной единицей количества теплоты. Механическая работа, эквивалентная одной калории теплоты, называется *механическим эквивалентом работы*. Найдено, что $1 \text{ кал} = 4,186 \text{ Дж}$.

Приведем теперь качественные определения величин Q_{12} и A_{12} . Если фиксировать объем газа, то работа $A_{12} = 0$. В этом случае взаимодействие газа с внешней средой называют тепловым. При тепловом взаимодействии в результате столкновений молекул газа и молекул окружающей его среды происходит обмен энергией. Если $Q_{12} > 0$, то в систему поступает количество теплоты Q_{12} , если $Q_{12} < 0$, то система отдает количество теплоты, равное $|Q_{12}|$.

Количеством теплоты Q_{12} , переданной системе, называется часть приращения внутренней энергии, обусловленная переходом энергии теплового движения окружающей среды в энергию теплового движения системы.

Можно исключить тепловое взаимодействие, изолировав газ от внешней среды теплоизолирующей оболочкой так, что будет выполняться условие $Q_{12} = 0$. Процесс, в котором $Q_{12} = 0$, называется *адиабатическим*. Приращение внутренней энергии адиабатически изолированной системы полностью определяется работой внешних сил.

Работой, совершаемой внешними телами над системой, называется часть приращения внутренней энергии, обусловленная переходом энергии упорядоченного движения окружающих систему тел в энергию теплового движения системы.

Ниже мы получим явное выражение для работы A_{12} . Однако вывод аналогичной формулы для количества теплоты Q_{12} требует введения нового понятия — энтропии, не изучаемого в программе

средней школы. По этой причине мы получим выражение для Q_{12} лишь в некоторых частных случаях.

3. **Работа внешних сил над системой.** Рассмотрим процесс $p_1, V_1, T_1 \rightarrow p_2, V_2, T_2$ и найдем выражение для работы, совершаемой над газом в таком виде, как оно используется в термодинамике. Поскольку поршень на рис. 22.1 движется равномерно, то сумма сил, действующих на него, равна нулю, $F = p(V)S$, где V — объем, занимаемый газом, S — площадь поршня. Со стороны поршня на газ действует сила $p(V)S$, направленная справа налево. Поэтому элементарная работа при перемещении поршня на величину Δx равна

$$\delta A = -p(V)S\Delta x = -p(V)\Delta V, \quad (22.3)$$

где ΔV — приращение объема газа. Полная работа при переходе из состояния p_1, V_1, T_1 в состояние p_2, V_2, T_2 при конечном изменении объема определяется суммой элементарных работ, т. е. интегралом

$$A_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV. \quad (22.4)$$

Для того чтобы найти зависимость $p = p(V)$, необходимо использовать уравнение процесса и уравнение состояния.

Наиболее простой вид имеет работа при изобарическом процессе:

$$A_{12} = -p_0(V_2 - V_1). \quad (22.5)$$

Работу, совершаемую газом над поршнем, обозначим A'_{12} . Очевидно, $A'_{12} = -A_{12}$. Если $V_2 < V_1$, то $A_{12} > 0$, $A'_{12} < 0$. Если $V_2 > V_1$, то $A_{12} < 0$, $A'_{12} > 0$, т. е. газ совершает над поршнем положительную работу. Заметим, что соотношение (22.2) можно переписать в эквивалентном виде

$$Q_{12} = U_2 - U_1 - A_{12} = U_2 - U_1 + A'_{12}, \quad (22.6)$$

т. е. подведенное к системе тепло идет на приращение внутренней энергии и на произведенную системой работу.

ПРИМЕР 22.1. Часто говорят о «количестве тепла, заключенном в теле», или о «тепловой энергии» тела. Эти выражения некорректны. В каждом состоянии тело обладает определенным значением внутренней энергии, но никак не определенным количеством тепла или работы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим круговой процесс, изображенный на рис. 22.2. Какую работу производит газ на пути $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$? На участке $a \rightarrow b$ совершается работа, которая может быть вычислена по формуле (22.5), $A'_{ab} = -A_{ab} = p_2(V_2 - V_1)$. На участках $b \rightarrow c$ и $d \rightarrow a$ поршень остается на месте и, следовательно, газ работы не совершает. На участке

$c \rightarrow d$ работа газа $A'_{cd} = p_1(V_1 - V_2)$ отрицательна, так как фактически внешняя сила производит над газом работу. Полная работа

$$A' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$

равна площади прямоугольника, изображенного на рис. 22.2. После процесса газ возвратился в исходное положение, и его энергия стала такой же, как и до процесса, т.е. приращение энергии $\Delta U = 0$. Для того чтобы газ при этом совершил работу, к нему надо было согласно (22.6) подвести количество тепла $Q = A'$. Это

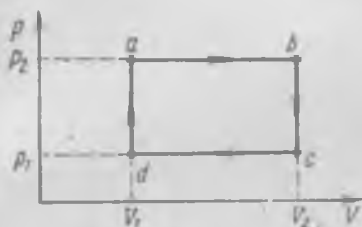


Рис. 22.2

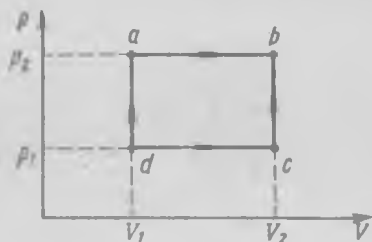


Рис. 22.3

количество тепла, как и работа, определяется характером процесса. Если бы газ в определенном состоянии a обладал определенным количеством тепла Q_a , то в результате кругового процесса приращение тепла $Q_a - Q_a = 0$. Однако мы знаем, что $Q = A' \neq 0$. *Теплота, как и работа, связана не с внутренней энергией тела, а с ее приращением в результате проведения процесса и зависит от уравнения конкретного процесса.*

Заметим, что при проведении процесса, изображенного на рис. 22.2, в направлении, противоположном указанному, $A' = -(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) < 0$.

ЗАДАЧА 22.2. Рассмотрим два процесса $d \rightarrow a \rightarrow b$ и $d \rightarrow c \rightarrow b$ (рис. 22.3), реализующие переход из состояния (p_1, V_1) в состояние (p_2, V_2) . Найти разность количеств теплоты, переданных в первом и во втором процессах?

Решение. Поскольку в обоих процессах приращение внутренней энергии одинаково, то согласно (22.2)

$$Q_1 + A_{ab} = Q_2 + A_{dc}.$$

Учитывая, что $A_{ab} = -p_2(V_2 - V_1)$, $A_{dc} = -p_1(V_2 - V_1)$, находим

$$Q_1 - Q_2 = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Очевидно, $Q_2 < Q_1$.

4. Теплоемкость. Предположим, что в процессе перехода системы (массой m) из состояния p_1, V_1, T_1 в близкое состояние

средней школы. По этой причине мы получим выражение для Q_{12} лишь в некоторых частных случаях.

3. Работа внешних сил над системой. Рассмотрим процесс $p_1, V_1, T_1 \rightarrow p_2, V_2, T_2$ и найдем выражение для работы, совершаемой над газом в таком виде, как оно используется в термодинамике. Поскольку поршень на рис. 22.1 движется равномерно, то сумма сил, действующих на него, равна нулю, $F = p(V)S$, где V — объем, занимаемый газом, S — площадь поршня. Со стороны поршня на газ действует сила $p(V)S$, направленная справа налево. Поэтому элементарная работа при перемещении поршня на величину Δx равна

$$\delta A = -p(V)S\Delta x = -p(V)\Delta V, \quad (22.3)$$

где ΔV — приращение объема газа. Полная работа при переходе из состояния p_1, V_1, T_1 в состояние p_2, V_2, T_2 при конечном изменении объема определяется суммой элементарных работ, т. е. интегралом

$$A_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} p(V) dV. \quad (22.4)$$

Для того чтобы найти зависимость $p = p(V)$, необходимо использовать уравнение процесса и уравнение состояния.

Наиболее простой вид имеет работа при изобарическом процессе:

$$A_{12} = -p_0(V_2 - V_1). \quad (22.5)$$

Работу, совершаемую газом над поршнем, обозначим A'_{12} . Очевидно, $A'_{12} = -A_{12}$. Если $V_2 < V_1$, то $A_{12} > 0$, $A'_{12} < 0$. Если $V_2 > V_1$, то $A_{12} < 0$, $A'_{12} > 0$, т. е. газ совершает над поршнем положительную работу. Заметим, что соотношение (22.2) можно переписать в эквивалентном виде

$$Q_{12} = U_2 - U_1 - A_{12} = U_2 - U_1 + A'_{12}, \quad (22.6)$$

т. е. подведенное к системе тепло идет на приращение внутренней энергии и на произведенную системой работу.

ПРИМЕР 22.1. Часто говорят о «количестве тепла, заключенном в теле», или о «тепловой энергии» тела. Эти выражения некорректны. В каждом состоянии тело обладает определенным значением внутренней энергии, но никак не определенным количеством тепла или работы. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим круговой процесс, изображенный на рис. 22.2. Какую работу производит газ на пути $a \rightarrow b \rightarrow c \rightarrow d$? На участке $a \rightarrow b$ совершается работа, которая может быть вычислена по формуле (22.5), $A'_{ab} = -A_{ab} = p_2(V_2 - V_1)$. На участках $b \rightarrow c$ и $d \rightarrow a$ поршень остается на месте и, следовательно, газ работы не совершает. На участке

$c \rightarrow d$ работа газа $A'_{cd} = p_1(V_1 - V_2)$ отрицательна, так как фактически внешняя сила производит над газом работу. Полная работа

$$A' = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1)$$

равна площади прямоугольника, изображенного на рис. 22.2. После процесса газ возвратился в исходное положение, и его энергия стала такой же, как и до процесса, т.е. приращение энергии $\Delta U = 0$. Для того чтобы газ при этом совершил работу, к нему надо было согласно (22.6) подвести количество тепла $Q = A'$. Это

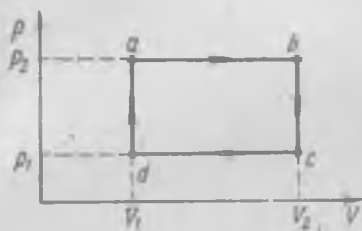


Рис. 22.2

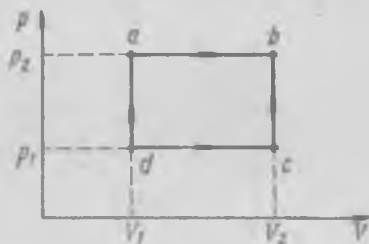


Рис. 22.3

количество тепла, как и работа, определяется характером процесса. Если бы газ в определенном состоянии a обладал определенным количеством тепла Q_a , то в результате кругового процесса приращение тепла $Q_a - Q_a = 0$. Однако мы знаем, что $Q = A' \neq 0$. *Теплота, как и работа, связана не с внутренней энергией тела, а с ее приращением в результате проведения процесса и зависит от уравнения конкретного процесса.*

Заметим, что при проведении процесса, изображенного на рис. 22.2, в направлении, противоположном указанному, $A' = -(p_2 - p_1)(V_2 - V_1) < 0$.

ЗАДАЧА 22.2. Рассмотрим два процесса $d \rightarrow a \rightarrow b$ и $d \rightarrow c \rightarrow b$ (рис. 22.3), реализующие переход из состояния (p_1, V_1) в состояние (p_2, V_2) . Найти разность количеств теплоты, переданных в первом и во втором процессах?

Решение. Поскольку в обоих процессах приращение внутренней энергии одинаково, то согласно (22.2)

$$Q_1 + A_{ab} = Q_2 + A_{dc}.$$

Учитывая, что $A_{ab} = -p_2(V_2 - V_1)$, $A_{dc} = -p_1(V_2 - V_1)$, находим

$$Q_1 - Q_2 = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$

Очевидно, $Q_2 < Q_1$.

4. Теплоемкость. Предположим, что в процессе перехода системы (массой m) из состояния p_1, V_1, T_1 в близкое состояние

$p_2, V_2, T_2 = T_1 + \Delta T$ сообщили количество теплоты δQ . В результате процесса температура системы изменится на величину ΔT , которая зависит от свойств системы, а также от вида уравнения процесса. Отношение

$$c = \frac{\delta Q}{m \Delta T}$$

называют *удельной теплоемкостью* системы. Эта величина, как и δQ , зависит от значений параметров системы и *определяется характером* процесса, в результате которого получено количество тепла δQ . В связи с этим возможны различные определения теплоемкости. В простейшем случае такой параметр, как объем, может остаться постоянным в процессе передачи телу теплоты. Поскольку $\delta A = 0$, то вся теплота идет на увеличение внутренней энергии, так как $\Delta U = \delta Q$. Теплоемкость газа при постоянном объеме обозначают

$$c_V = \frac{1}{m} \frac{\Delta U}{\Delta T}. \quad (22.7)$$

Подставив (22.1) в (22.7), найдем, что теплоемкость одноатомного газа c_V равна $(3/2M)R$. Этот результат подтверждается экспериментальными измерениями теплоемкости, например гелия или аргона (3,134 кДж/кг·К; 0,314 кДж/кг·К).

Рассмотрим теперь идеальный газ, состоящий из многоатомных молекул. В результате экспериментов, проведенных при обычных температурах, установлено, что c_V — постоянная величина. Тогда из (22.7) получим чрезвычайно важное в термодинамике выражение для внутренней энергии идеального газа

$$U = mc_V T. \quad (22.8)$$

(Внутренняя энергия неидеального газа зависит от температуры и объема.) Для двухатомного идеального газа $c_V = (5/2M)R$.

Найдем теперь теплоемкость c_p при изобарном процессе $p = \text{const}$. В этом случае тепло идет не только на увеличение внутренней энергии, но и на совершение работы. Поскольку $\delta Q = \Delta U - \delta A$, $\delta A = -p \Delta V$, то, учитывая уравнение состояния, получим

$$\Delta Q = \Delta U + p \Delta V = \Delta U + \Delta(pV) = \Delta U + (m/M) R \Delta T.$$

Следовательно,

$$c_p = \frac{1}{m} \frac{\Delta Q}{\Delta T} = c_V + \frac{R}{M}. \quad (22.9)$$

Жидкости и твердые тела при нагревании расширяются незначительно (см. § 25). Поэтому обычно пренебрегают работой A' , совершаемой телом при расширении. В этом случае теплоемкость

определяется формулой (22.7). Поэтому количество теплоты, необходимое для нагревания системы от температуры T_1 до T_2 , равно приращению внутренней энергии

$$Q_{12} = U_2 - U_1 = mc(T_2 - T_1), \quad (22.10)$$

где $c = c_v$. Большинство тел имеет теплоемкость меньше, чем вода. Теплоемкость всех тел, как правило, уменьшается с понижением температуры. Теплоемкость кристаллов складывается из теплоемкости электронов и теплоемкости кристаллической решетки. При температурах порядка 1—2 К электроны дают основной вклад в теплоемкость.

Соотношение (22.10) иногда ошибочно принимают в качестве определения количества теплоты. Более того, оно источник наших заблуждений, связанных со смешением понятий «нагревание» и «подвод тепла». Приращение температуры при нагревании или охлаждении и количество теплоты связаны уравнением (22.2). Учитывая (22.8), его можно представить в виде

$$mc_v(T_2 - T_1) = Q_{12} + A_{12}. \quad (22.11)$$

ЗАДАЧА 22.3. Найти приращение внутренней энергии воздуха в комнате, если после включения нагревателя его температура возросла от значения T_1 до T_2 .

Решение. Согласно (22.8) $\Delta U = c_v(m_2 T_2 - m_1 T_1)$. Поскольку $mT = (M/R)pV$, где p — атмосферное давление, V — объем комнаты, то $\Delta U = 0$.

5. Передача теплоты. Мы уже знаем, что носителем тепловой энергии являются движущиеся атомы и молекулы вещества, средняя кинетическая энергия поступательного движения которых пропорциональна температуре. В состоянии теплового равновесия температура любых частей тела одинакова. Если же в различных местах тела температура различна, то молекулы из более нагретых мест, сталкиваясь с молекулами соседних, менее нагретых участков, передают им часть своей энергии — возникает тепловой поток из мест, более нагретых, в места, менее нагретые. Такой способ передачи теплоты называется *теплопроводностью*.

К хорошим проводникам тепла относятся металлы (самые лучшие из них — серебро и медь), к плохим — так называемым *теплоизоляторам* — относятся дерево, стекло, пластмассы. Жидкости и газы также проводят тепло, но много хуже, чем металлы. Самым лучшим теплоизолятором является вакуум, так как в пустоте нет молекул — переносчиков внутренней энергии.

Другим способом передачи тепла является *конвекция* (латинское слово, обозначающее перемешивание). Конвекцией называют перенос теплоты из одного места в другое вместе с движущимися молекулами. Конвекция существует только в жидкостях и газах и является основным способом их нагревания. Возникновение

конвекции обусловлено выталкивающей силой, действующей на более нагретые объемы жидкости или газа. В невесомости конвекция отсутствует.

Передача тепла возможна также в результате *излучения и поглощения телом электромагнитных волн*. Все тела, температура которых больше абсолютного нуля, теряют внутреннюю энергию и, следовательно, охлаждаются, испуская электромагнитные волны всех частот. Однако при определенной температуре T основная часть излучения, определяющая его энергию, состоит из совокупности электромагнитных волн, длины которых лежат в небольшом интервале вблизи определенной длины волны. Тела, имеющие высокую температуру, такие, как раскаленный уголь, излучают в основном световые волны, наблюдаемые глазом. Менее нагретые тела, такие, как горячая печь, излучают невидимые инфракрасные волны. Поглощение этих волн приводит к увеличению средней кинетической энергии молекул поглощающего тела и, следовательно, к их нагреванию.

Таким образом, любое тело излучает электромагнитные волны и в то же время поглощает излучение, испущенное окружающими телами. Если температура тела выше (ниже) температуры окружающих тел, то оно охлаждается (нагревается).

Поглощаемая Землей световая энергия от Солнца должна со временем излучиться в космическое пространство. Основной поток излучения Земли сосредоточен в инфракрасном диапазоне на длинах волн ~ 10 мкм, соответствующих температуре излучающего тела ~ 300 К.

6. Метаболизм. Пища и кислород, потребляемые человеком, являются исходными веществами биохимических реакций, в результате которых в клетках синтезируются белки, ферменты и другие специфические соединения. Одно из них — аденозинтрифосфат (АТФ) запасает 60—70% энергии, выделяющейся в реакциях окисления, равной в среднем 4,825 ккал на 1 л атмосферного кислорода. Часть этой энергии идет на поддержание постоянной температуры тела. В целом все химические процессы, протекающие в живом организме, называются метаболизмом (от греч. *metabol* — превращение). Общий контроль осуществляется генетическим аппаратом клетки.

Живой организм является открытой системой, находящейся в состоянии, далеко от равновесия. Такую систему невозможно изолировать, не разрушив ее. Изучением подобных структур начали интенсивно заниматься только в последние тридцать лет. Теперь можно оценить проницательность Ф. Энгельса, который в прошлом веке отметил в проблеме «Что такое жизнь?» самое главное: «Жизнь есть способ существования белковых тел, существенным моментом которого является *постоянный обмен веществ с окружающей их внешней природой*, причем с прекращением этого обмена веществ прекращается и жизнь...» [21, с. 616].

Ежесуточный пищевой рацион человека составляет не менее 3000 ккал = 12,56 МДж, т. е. человек потребляет мощность

$$P = \frac{12,56 \cdot 10^6}{24 \cdot 60 \cdot 60} \frac{\text{Дж}}{\text{с}} \approx 145 \text{ Вт.}$$

За счет энергии, потребляемой человеком в день, можно поднять тело массой 100 кг на высоту

$$h = \frac{12,56 \cdot 10^6}{100 \cdot 9,8} \approx 13 \text{ км}$$

или нагреть 37 л воды от 20° С до кипения.

Скорость метаболизма регулируется частотой дыхания. Например, в состоянии покоя скорость тепловыделения ~76 ккал/ч (для двадцатилетнего мужчины), при игре в баскетбол ~600 ккал/ч. При беге тепловыделение возрастает в линейной зависимости от скорости. Уровень выделения теплоты на любых дистанциях составляет в среднем 70—90 ккал/км.

В заключение найдем связь скорости тепловыделения единицей массы (которую обозначим буквой ω) и линейными размерами теплокровных животных. Поскольку температура тела постоянна, то скорость тепловыделения P_1 должна равняться скорости теплопередачи P_2 в окружающую среду. Учитывая, что $P_1 \sim \omega L^3$, $P_2 \sim L^2$, получим $\omega \sim L^{-1}$. Следовательно, чем меньше размеры животного, тем большее количество пищи оно должно потреблять в единицу времени на единицу массы.

§ 23. ПРОЦЕССЫ ИЗМЕНЕНИЯ СОСТОЯНИЯ ГАЗА

Обсудим основные закономерности наиболее известных термодинамических процессов.

1. **Изохорический процесс.** Уравнение процесса $V = V_0$, где V_0 — постоянный объем. Из системы уравнений

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad V = V_0$$

находим $p/T = \text{const}$. Согласно (22.11) количество теплоты, которое получает газ при переходе из состояния p_1, V_0, T_1 в состояние p_2, V_0, T_2 , равно

$$Q_{12} = mc_V (T_2 - T_1). \quad (23.1)$$

Таким образом, изменение внутренней энергии, т. е. нагревание или охлаждение газа, происходит только за счет теплообмена с внешней средой.

2. Изобарический процесс, наиболее часто встречающийся в практике, определяется уравнением $p=p_0$, где p_0 — постоянное давление. Из системы уравнений

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad p = p_0$$

находим $V/T = \text{const.}$ Для изобарического процесса легко вычислить оба слагаемых в правой части (22.2):

$$Q_{12} = mc_p(T_2 - T_1), \quad A_{12} = -p_0(V_2 - V_1). \quad (23.2)$$

Последнее соотношение с помощью уравнения состояния можно представить в виде

$$A_{12} = -\frac{m}{M} R(T_2 - T_1). \quad (23.3)$$

Из первого закона термодинамики (22.2) следует, что при изобарическом процессе внутренняя энергия изменяется за счет теплообмена и работы, совершаемой газом или внешними телами над газом.

Количество теплоты, сообщаемое системе при переходе в бесконечно близкое состояние, равно

$$\delta Q = \Delta U + p_0 \Delta V = \Delta(U + p_0 V).$$

Функция

$$H = U + pV = U + \frac{mp}{\rho} \quad (23.4)$$

уже встречалась нам при выводе уравнения Бернулли (18.2). Ее называют *теплосодержанием*, поскольку при конечном изменении параметров в изобарном процессе $Q_{12} = H_2 - H_1$. Заметим, кроме того, что $\Delta H = mc_p \Delta T$.

ПРИМЕР 23.1. Вернемся к задаче (22.2) и найдем величины Q_1 и Q_2 . Для упрощения предположим, что $p_2 = 2p_1$, $V_2 = 2V_1$. Учитывая (23.1) и (23.2), находим, что

$$Q_1 = m[c_v(T_a - T_d) + c_p(T_b - T_d)],$$

$$Q_2 = m[c_p(T_e - T_d) + c_v(T_b - T_e)].$$

Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для состояний a, b, c, d :

$$\frac{2p_1 V_1}{T_d} = \frac{m}{M} R, \quad \frac{2p_1 2V_1}{T_b} = \frac{m}{M} R,$$

$$\frac{p_1 2V_1}{T_e} = \frac{m}{M} R, \quad \frac{p_1 V_1}{T_d} = \frac{m}{M} R.$$

Следовательно,

$$Q_1 = p_1 V_1 (c_v + 2c_p) \frac{M}{R}, \quad Q_2 = p_1 V_1 (c_p + 2c_v) \frac{M}{R}.$$

Вычислим Q_{12} для одноатомного и двухатомного газов. В первом случае $c_v = (3/2M)R$. Тогда, учитывая (22.9), найдем

$$Q_1 = -\frac{13}{2} p_1 V_1, \quad Q_2 = -\frac{11}{2} p_1 V_1.$$

Для двухатомного газа $c_v = (5/2M)R$,

$$Q_1 = -\frac{19}{2} p_1 V_1, \quad Q_2 = -\frac{17}{2} p_1 V_1.$$

3. Изотермический процесс определяется уравнением $T = T_0$, где T_0 — постоянное значение температуры. Из системы уравнений $pV = (m/M)RT$, $T = T_0$ получим соотношение $pV = \text{const}$. Поскольку внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, то в изотермическом процессе она не меняется: $U_2 = U_1$. Из (22.11) находим $Q_{12} = -A_{12} = A'_{12}$. Если $A'_{12} > 0$, то $Q_{12} > 0$. Это означает, что при проведении изотермического процесса происходит преобразование энергии теплового движения внешней среды в энергию движения внешних тел (поршня). Если $A_{12} = -A'_{12} > 0$, то $Q_{12} < 0$: при сжатии газ сохраняет внутреннюю энергию постоянной, отдавая во внешнюю среду количество теплоты $|Q_{12}| = Q_{21}$. Таким образом, подвод или отвод количества теплоты не сопровождается изменением температуры.

4. Адиабатический процесс. В этом процессе отсутствует тепловое взаимодействие между газом и внешней средой. Уравнение процесса: $Q_{12} = 0$. Это условие можно реализовать теплоизоляцией системы: С другой стороны, распространение звуковых волн или движение воздушных потоков в атмосфере с достаточной степенью точности описываются адиабатическими процессами, если они идут настолько быстро, что величиной Q_{12} можно пренебречь.

Поскольку $Q_{12} = 0$, то из (22.2) следует $U_2 - U_1 = A_{12}$, где $U_2 - U_1 = mc_v(T_2 - T_1)$. Это означает, что можно изменить температуру газа, не подводя к нему теплоту. Следовательно, если газ сжимается, т. е. $A_{12} = -A'_{12} > 0$, то внутренняя энергия возрастает — газ нагревается. И наоборот, при адиабатическом расширении внутренняя энергия уменьшается — газ охлаждается. В этом можно убедиться на простом опыте с сифоном. Перед тем как проколоть баллончик с газом, смочите водой соединительную трубку у основания. После прокола баллончика газ выходит настолько быстро, что не успевает обмениваться теплотой с окружающим сифон воздухом. В результате его температура падает — у основания трубки образуется иней.

Работа, совершаемая внешними силами при деформации упругого тела $A_{12} = -p\Delta V + A_{тр}$, где $A_{тр} > 0$ — работа сил трения, приводящая согласно (22.2) к увеличению внутренней энергии и температуры тела.

Возможность адиабатического изменения температуры позволяет понять ошибочность распространенного мнения о том, что в отсутствие трения ($A_{тр} = 0$) и теплообмена ($Q_{12} = 0$) температура упругого тела должна быть неизменной. Этот вывод основан на другом заблуждении: повышение температуры считается важнейшим признаком подвода теплоты. Сейчас мы знаем, что повышение температуры не всегда свидетельствует о подводе теплоты — в адиабатических процессах можно менять температуру тела, не подводя к нему теплоты. Работу, совершаемую в адиабатическом процессе, можно вычислить по формуле, следующей из (22.11):

$$A_{12} = mc_V(T_2 - T_1). \quad (23.5)$$

Найдем теперь уравнение адиабатического процесса в явной форме. Из системы

$$pV = \frac{m}{M} RT, \quad \delta Q = mc_V \Delta T + p\Delta V = 0,$$

используя соотношение (22.9), получим уравнение

$$-(\gamma - 1) \frac{\Delta V}{V} = \frac{\Delta T}{T}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Следовательно,

$$TV^{\gamma-1} = \text{const}. \quad (23.6)$$

Учитывая уравнение состояния, получим две другие формы уравнения адиабатического процесса:

$$pV^{\gamma} = \text{const}, \quad \frac{p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}{T} = \text{const}. \quad (23.7)$$

ПРИМЕР 23.2. Отметим неожиданный на первый взгляд вывод, следующий из (22.8): при одинаковой температуре внутренняя энергия m кг идеального газа не зависит от давления. Однако не следует забывать, что поскольку молекулы идеального газа не взаимодействуют друг с другом, то изменение их среднего взаимного расстояния при изменении объема не влияет на величину энергии.

Рассмотрим два процесса $a \rightarrow c$ и $a \rightarrow b \rightarrow c$, реализующих переход между двумя состояниями воздуха (p_1, V_1, T) (p_2, V_2, T) на одной изотерме $pV = (m/M)RT$ (рис. 23.1). В точке a воздух находится при атмосферном давлении $p = 1 \text{ атм} = 1,013 \cdot 10^5 \text{ Па}$ и комнатной температуре $T = 20^\circ \text{C}$.

В состояниях a , c внутренняя энергия воздуха одинакова. Поэтому при изотермическом переходе $a \rightarrow c$ внутренняя энергия воздуха не меняется.

Во втором процессе $a-b-c$ воздух адиабатически сжимается, затем охлаждается при постоянном объеме V_2 . Пусть $V_2 = 1/15 V_1$. Это соотношение выполняется в реальных дизельных двигателях. Для воздуха $\gamma = 1,4$. Согласно (23.6) температура в состоянии b

$$T_3 = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} T_1 = 293 (15)^{0,4} = 866 \text{ К.}$$

При переходе $a-b$ совершена работа (23.5), которая в точности равна количеству теплоты (23.1), отдаваемой воздухом при охлаждении в переходе $b-c$.

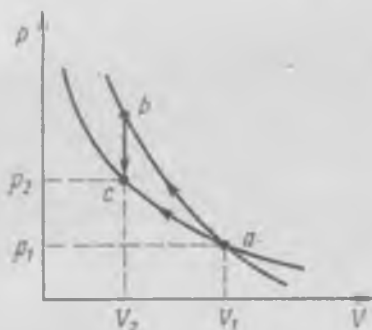


Рис. 23.1

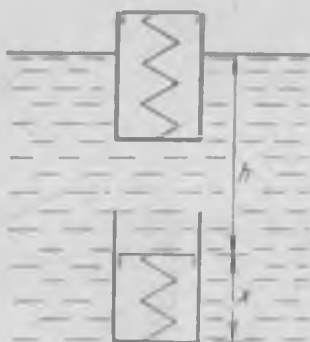


Рис. 23.2

5. При решении задач, в которых рассматриваются термодинамические процессы, в общем случае необходимо:

1) записать уравнение состояния (21.4) для каждого из указанных в задаче состояний p_i, V_i, T_i ;

2) записать уравнение процесса;

3) записать условия равновесия: сумма сил, действующих на поршень (или тело, которое играет роль поршня), равна нулю.

Необходимо также учитывать соотношения, обусловленные конкретными условиями.

ПРИМЕР 23.3. Подвижный поршень находится на расстоянии l_1 от открытого конца трубки. Поднесем открытый конец трубки к поверхности воды и поднимем поршень на расстояние l_2 . Определим высоту столба воды в трубке после перемещения поршня (см. рис. 16.2).

Следуя рецепту решения, запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для начального и конечного состояний

$$p_1 l_1 S = \frac{m}{M} R T_1, \quad p_2 (l_1 + l_2 - x) S = \frac{m}{M} R T_2, \quad (1)$$

где x — высота столба воды, S — сечение трубки. Переходя к 2), замечаем, что задача сформулирована некорректно: не указан процесс, связывающий два состояния. Предположим, что процесс изотермический. Тогда

$$T_1 = T_2. \quad (2)$$

Далее приравниваем нулю сумму сил, действующих на столб воды

$$0 = -p_2 S - \rho_0 g x S + p_{\text{ат}} S. \quad (3)$$

Из системы (1) — (3) находим уравнение

$$\rho_0 g x^2 - x(p_{\text{ат}} + \rho_0 g h) + p_{\text{ат}}(h - l_1) = 0, \quad (4)$$

где $h = l_1 + l_2$. Из двух корней этого уравнения следует выбрать

$$x = \frac{1}{2} \left(\frac{p_{\text{ат}}}{\rho_0 g} + h - \sqrt{\left(\frac{p_{\text{ат}}}{\rho_0 g} - h \right)^2 + 4 \frac{p_{\text{ат}}}{\rho_0 g} l_1} \right).$$

В частности, полагая $l_1 = 0$, находим при $p_{\text{ат}} > \rho_0 g l_2$ $x = l_2$.

Если процесс изменения объема воздуха адиабатический, то уравнения (1), (2) следует заменить уравнением (23.7). Тогда, учитывая (3), получим уравнение

$$p_{\text{ат}} l_1^\gamma = (p_{\text{ат}} - \rho_0 g x)(h - x)^\gamma,$$

для решения которого необходимо применять специальные методы.

ЗАДАЧА 23.4. Тонкостенный цилиндрический стакан, имеющий тонкое тяжелое дно, закрыт невесомым поршнем. Между поршнем и дном в стакане вставлена пружина. Внутри стакана находится воздух при атмосферном давлении p_0 . Стакан плавает в воде, как показано на рис. 23.2: расстояние от поверхности воды до поршня равно a , глубина погружения равна b . Площадь поршня S , жесткость пружины k , плотность воды ρ . На какую максимальную глубину можно погрузить стакан под воду, чтобы он еще мог всплыть? Температура воздуха в процессе погружения не меняется.

Решение. Поскольку температура воздуха в стакане не меняется, то 1), 2) эквивалентны уравнению

$$p_0(a + b)S = p_2 x S, \quad (1)$$

где p_2 , x — давление и высота объема воздуха в погруженном стакане. Условие равенства нулю сил, действующих на поршень, приводит к уравнению

$$0 = -k(x - a - b) + p_2 S - (p_0 + \rho g h)S. \quad (2)$$

Далее запишем условие всплывания стакана

$$\rho g x S > mg. \quad (3)$$

С другой стороны, из условия плавания стакана следует

$$\rho g b S = mg. \quad (4)$$

Из (3), (4) находим $x = b$ (этот вывод заранее очевиден),

$$h = \frac{a}{\rho g b} \left(p_0 + \frac{k h}{S} \right).$$

ЗАДАЧА 23.5. Компрессор захватывает воздух при температуре $T_1 = 300$ К, давлении $p_1 = 1$ атм и адиабатически сжимает его до $p_2 = 2$ атм, потребляя полезную мощность $N = 200$ Вт. Найти объем воздуха, забираемого компрессором в секунду, и его температуру после сжатия.

Решение. Согласно (23.5) мощность компрессора

$$N = \frac{\Delta m}{\Delta t} c_V (T_2 - T_1). \quad (1)$$

Используя уравнение состояния и уравнение процесса (23.7)

$$p_1 \Delta V = \frac{\Delta m}{M} R T_1, \quad \frac{p_1^{(\gamma-1)/\gamma}}{T_1} = \frac{p_2^{(\gamma-1)/\gamma}}{T_2}, \quad (2)$$

находим (для воздуха $\gamma = 1,4$, $M c_V = 7/2 R$)

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{NR}{M c_V p_1} \left[\left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1 \right]^{-1} = \frac{2 \cdot 3001}{7 \cdot 10^3 \cdot 0,21} = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ м}^3/\text{с}.$$

Из (2) следует $T_2 = 2^{2/7} T_1 \approx 366$ К. Таким образом, компрессор захватывает 2,7 л воздуха в секунду и нагревает его на 66° . Кстати, при быстром накачивании велосипедной шины воздух в трубке насоса сжимается адиабатически и нагревается.

6. Вертикальное движение сухого воздуха. Наблюдения показывают, что в восходящих потоках воздух не успевает обменяться теплотой с окружающей атмосферой. Рассмотрим «частицу» воздуха — небольшой столбик высотой Δz , площадью основания S , движущийся вверх с постоянной скоростью. Наша задача — найти температуру воздуха в столбике в зависимости от его координаты z (рис. 23.3). На все грани столбика действуют силы давления. Сумма горизонтальных составляющих сил давления равна нулю. На верхнее основание действует сила $(p + \Delta p)S$, на нижнее — pS . Поскольку сумма сил равна нулю, то $\Delta p = -\rho g \Delta z$. Далее, учитывая адиабатический характер процесса, получим из (22.11) уравнение

$$\delta Q = m c_V \Delta T + \Delta(pV) - V \Delta p = m c_p \Delta T - (m/\rho) \Delta p = 0.$$

Из этих уравнений найдем отношение приращения температуры к величине Δz :

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = - \frac{g}{c_p}. \quad (23.8)$$

Величину g/c_p метеорологи называют адиабатическим градиентом температуры. Для сухого воздуха $c_p = 1,008 \cdot 10^3$ Дж/кг·К, $k_0 = g/c_p = 9,9 \cdot 10^{-3}$ К/м, т. е. температура перемещающегося сухого воздуха понижается приблизительно на 1° на каждые 100 м подъема.

Пусть T_0 — температура воздуха у поверхности земли. Если зависимость температуры воздуха от высоты имеет вид $T(z) = T_0 - (g/c_p)z$, то все слои воздуха будут находиться в равнове-

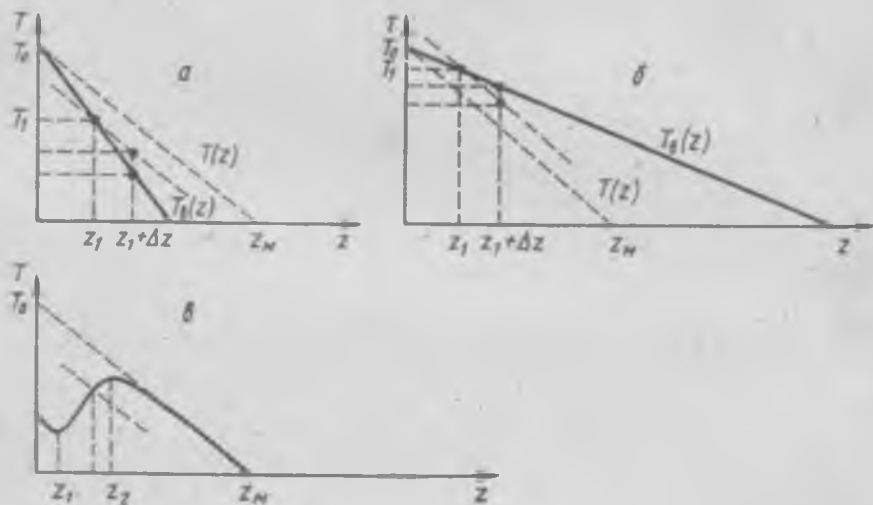


Рис. 23.3

сии. В реальной атмосфере эта зависимость может быть иной. Рассмотрим ситуацию, при которой $T_1(z) = T_0 - k_1 z$, где $k_1 = 1,2 \cdot 10^{-2}$ К/м $> k_0 = 9,9 \cdot 10^{-3}$ К/м. Тогда, если частица воздуха, первоначально находившаяся в равновесии в точке с координатой z_1 , переместится в точку $z_1 + \Delta z$, то ее температура изменится в соответствии с (23.8) на величину $\Delta T = -k_0 \Delta z$, а температура окружающего ее воздуха изменится на $\Delta T_1 = -k_1 \Delta z$. Эта ситуация представлена на рис. 23.3а: сплошной прямой изображен график функции $T_1(z)$, пунктирная прямая, проходящая через точку (T_1, z_1) , — график изменения температуры частицы воздуха при адиабатическом перемещении. При $\Delta z > 0$ частица окажется в более холодном воздухе. Следовательно, она будет продолжать подниматься вверх. Такое состояние атмосферы является неустойчивым: любое возмущение воздуха способствует его перемещению вверх. Этим и объясняется, что вредные примеси, загрязняющие воздух, уносятся вместе с ним вверх и рассеиваются.

Если $T_{\text{в}}(z) = T_0 - k_2 z$ ($k_2 < k_0$), то судьба частицы воздуха, сместившейся на величину $\Delta z > 0$, будет иной (рис. 23.3б). Поскольку $\Delta T_{\text{в}} = -k_2 \Delta z$, $\Delta T = -k_0 \Delta z$, то плотность «холодной» частицы воздуха будет больше плотности окружающей атмосферы: частица будет стремиться опуститься назад к положению равновесия. Это устойчивое состояние атмосферы, разумеется, неблагоприятное с точки зрения проблемы загрязнения атмосферы.

Особое положение возникает, когда образуется *инверсия* (лат. — перестановка): вертикальный градиент температуры положителен; это означает, что температура воздуха растет с увеличением высоты. Область инверсии на рис. 23.3в — участок между z_1 и z_2 . В области инверсии атмосфера также устойчива. Одна из причин возникновения инверсии — образование *антициклона* (области повышенного давления). Опускание воздушных масс сопровождается адиабатическим нагреванием приземного слоя. Подобные долговременные инверсии часто возникают осенью, и тогда наступает «бабье лето». Другая причина связана с загрязнением атмосферы, которая теперь поглощает тепло настолько интенсивно, что приземные слои воздуха не нагреваются. Если устойчивая инверсия возникает над районом с повышенным выделением загрязняющих примесей, то их концентрация может повыситься до опасного уровня, как это произошло в Лондоне. В течение недели в декабре 1952 г. погибло 4000 человек. После этого в обиход вошел новый термин — смог.

§ 24. ЖИДКИЕ И ТВЕРДЫЕ ВЕЩЕСТВА. ЗАКОН ГУКА

1. Структура жидкостей. В газах средняя кинетическая энергия теплового движения молекул значительно превосходит потенциальную энергию. В этом случае силы взаимодействия между молекулами весьма слабо влияют на характер их относительного движения, поскольку молекулы находятся на достаточно большом расстоянии друг от друга. Однако по мере уменьшения температуры или при сжатии взаимодействие молекул начинает играть настолько существенную роль, что газ в конце концов переходит в конденсированное состояние — жидкость. В жидкости средняя энергия взаимодействия молекул примерно равна средней энергии теплового движения. Поэтому тепловое движение легко нарушает связь между молекулами и приводит к перемещению их относительно друг друга внутри объема жидкости.

Среднее расстояние L между молекулами жидкости можно оценить, используя формулу (19.3). Для воды, взятой при нормальных условиях, $M = 18$ кг/кмоль, $\rho = 10^3$ кг/м³, $L = (M/\rho N_A)^{1/3} \sim \sim 3 \cdot 10^{-8}$ см. Так как размеры молекулы воды $\sim 2,6 \cdot 10^{-8}$ см, то, очевидно, они сближены «вплотную»: каждая данная молекула взаимодействует сразу с несколькими окружающими ее соседними молекулами. В результате этого взаимодействия из-за тесноты

в расположении молекул возникает связь между положениями ближайших соседей. Однако в силу большой подвижности молекул жидкости имеется лишь связь между положениями на сравнительно близких расстояниях, исчезающая при увеличении расстояния, т. е. жидкости обладают лишь *ближним порядком* в пространственном расположении молекул. Легкость, с которой данная молекула может менять своих соседей, зависит от вязкости жидкости.

2. Поверхностное натяжение. Если молекула находится внутри объема жидкости, то силы межмолекулярного притяжения действуют на каждую молекулу равномерно со всех сторон и потому взаимно компенсируются. Иначе обстоит дело в поверхностном слое, толщина которого меньше радиуса действия молекулярных сил. Здесь молекулы имеют одинаковых с ними соседей лишь с одной стороны. В этом случае силы притяжения дают результирующую силу, направленную *внутрь жидкости*. Под действием этой силы молекулы стремятся перейти во внутренние слои, а жидкость стремится принять такую форму, площадь поверхности которой имела бы наименьшее значение. Поверхностный слой жидкости при этом сокращается и находится в состоянии натяжения. Поверхностное натяжение проявляет себя как сила, направленная по касательной к поверхности жидкости. Эта сила называется *силой поверхностного натяжения*. При увеличении поверхности внешние силы должны совершить работу против сил поверхностного натяжения, препятствующих растяжению поверхности жидкости.

3. Структура твердых тел. Под твердыми телами в тепловом равновесии обычно подразумеваются кристаллы. Характерной особенностью кристаллов является регулярное расположение в них атомов. О совокупности точек, в которых расположены атомные ядра, говорят как о *кристаллической решетке*, а сами эти точки называют *узлами* решетки. Структурной единицей кристалла является *элементарная ячейка* — параллелепипед, содержащий одинаковое количество одинаково расположенных атомов. Размеры, форма и расположение атомов в ячейке полностью определяют структуру кристалла, так как последний представляет собой совокупность элементарных ячеек, периодически повторяющихся в пространстве. В этом смысле можно говорить о порядке на дальних расстояниях, или о *дальнем порядке*, в расположении узлов решетки в кристаллах. В кристаллической решетке атомы связаны силами взаимодействия, зависящими, конечно, от расстояния между ними. Наибольшим является взаимодействие атомов со своими ближайшими соседями. Упорядоченное расположение атомов в кристалле выделено тем, что в таком состоянии система атомов обладает наименьшим значением полной энергии.

Тепловое движение атомов кристалла носит в основном колебательный характер: каждый атом совершает колебания около

положения равновесия — узла решетки. Однако поскольку в кристалле кинетическая энергия колебательного движения атомов значительно меньше абсолютного значения потенциальной энергии взаимодействия, то тепловое движение не может разрушить связь между атомами. Поэтому твердое тело, в отличие от жидкости, сохраняет свою форму и обладает большой механической прочностью.

Реальные кристаллы никогда не имеют идеально правильной решетки. Правильное периодическое расположение атомов в пространстве нарушается из-за теплового движения и наличия различных *дефектов* кристаллической решетки. Наиболее простой тип дефектов состоит в отсутствии атома в узле решетки из-за перехода на свободную поверхность, граничащую с пустотой, перехода атома в пространство между узлами в так называемое *междоузлие*, в замене «своих» атомов атомами чужеродных примесей и т. д. В металлах к дефектам относятся прежде всего нарушения периодичности решетки, связанные с наличием совокупности мелких кристалликов, имеющих различную ориентацию. Такие тела называют *поликристаллическими*.

Наряду с кристаллами в природе существуют также и *аморфные* твердые тела, в которых атомы обладают лишь ближним порядком в расположении частиц и этим схожи с жидкостями.

В последние годы заметно изменилось отношение к твердому телу. Теперь кристаллы, полупроводники и магнитные материалы рассматривают скорее как естественные «почти готовые» к употреблению приборы.

4. Закон Гука. Под влиянием внешних сил тела в той или иной степени деформируются, т. е. изменяют свою форму и объем. При деформации молекулы тела смещаются, и тело выводится из состояния равновесия, в котором оно находилось первоначально. При этом вследствие взаимодействия молекул (см. § 19) в теле возникают силы, стремящиеся вернуть его в состояние равновесия. Эти силы действуют на каждый элемент поверхности некоторого объема тела со стороны окружающих его частей. Давление, возникающее в теле при деформации, обычно называют *внутренним напряжением*.

Мы ограничимся рассмотрением деформаций однородных изотропных твердых тел, исчезающих после прекращения действия внешних сил. Такие деформации называют упругими.

Простейшим видом деформации является растяжение или сжатие тонкого горизонтального стержня, один из концов которого закреплен, а к другому приложена сила $\vec{F}$, стремящаяся растянуть стержень. Изменением площади поперечного сечения стержня мы будем пренебрегать. На рис. 24.1 изображены внешние силы $\vec{F}$ и $\vec{T}$, действующие на стержень, и сила $\vec{N}$, действующая на часть стержня A (ограниченную сечением, расположенным на рас-

стоянии x от плоскости закрепления) со стороны части B стержня. Отношение $\sigma = N(x)/S$ называется *напряжением* и измеряется в паскалях. В общем случае (если стержень расположен вертикально или движется с ускорением) сила $N(x)$ и напряжение $\sigma(x)$ являются функциями x -координаты (см. задачу 24.3).

При деформации стержня меняются расстояния между его частями. Если до деформации малый элемент стержня с координатой x имел длину Δx , то в деформированном состоянии его длина станет равной $\Delta x + \Delta u$. Отношение $\Delta u/\Delta x$ характеризует относительное удлинение элемента Δx .

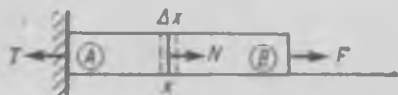


Рис. 24.1

Упругие деформации обычно невелики: величина относительного удлинения очень мала. Для достаточно малых деформаций относительное удлинение пропорционально напряжению $\sigma(x)$, т. е. силе, действующей на единицу

площади поперечного сечения стержня. Это утверждение называется законом Гука (1676 г.). Мы запишем его в виде

$$\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{1}{E} \sigma(x) = \frac{N(x)}{ES}, \quad (24.1)$$

где постоянный коэффициент E называется модулем Юнга. Модуль Юнга определяется только свойствами материала стержня. Его размерность совпадает с размерностью давления.

Приведем значения модуля Юнга для некоторых материалов: сталь — $2 \cdot 10^{11}$ Па, дерево — $5 \cdot 10^9$ Па, гранит — $8 \cdot 10^{10}$ Па, каучук — $5 \cdot 10^8$ Па. Модуль Юнга для костных материалов $\sim 10^{10}$ Па.

Величина деформации всего стержня характеризуется полным удлинением $\Delta l = l - l_0$ (l_0 и l — длины стержня до и после деформации) и относительным удлинением $\Delta l/l_0$. Для того чтобы найти полное удлинение, нужно просуммировать элементарные удлинения Δu_i каждого элемента Δx_i . В равновесии величины сил $\vec{N}$, $\vec{T}$, $\vec{F}$ одинаковы. Это означает, что напряжение σ одинаково вдоль всей длины стержня и поэтому полное удлинение

$$\Delta l = \sum_{i=1}^N \Delta u_i = \frac{\sigma}{E} \sum_{i=1}^N \Delta x_i = \frac{\sigma l_0}{E}. \quad (24.2)$$

Полученное соотношение можно переписать в виде $\Delta l = (l_0/ES)F$,

$$F = k \Delta l, \quad (24.3)$$

где $k = ES/l_0$ называют коэффициентом жесткости стержня. Для резинового жгута длиной $l_0 = 1$ м и сечением $S = 1$ см² $E = 7 \cdot 10^6$ Па, жесткость $k = 7 \cdot 10^2$ Н/м.

При упругих деформациях относительные удлинения, как правило, не превосходят 0,001. Это значит, что при межатомных расстояниях порядка 2 А (А — ангстрем, $1\text{А}=10^{-8}\text{ см}$) положения равновесия атомов смещаются на величину не более 0,002 А. При больших смещениях тело уже не возвращается к исходному виду при снятии внешних нагрузок. Существует определенная для каждого тела критическая величина напряжения, при котором тело начинает разрушаться. Эта величина называется пределом



Рис. 24.2

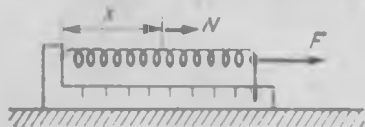


Рис. 24.3

прочности. Таким образом, закон Гука применим в широком интервале напряжений вплоть до критических.

ЗАДАЧА 24.1. Между двумя столбами натянута медная проволока. К проволоке точно посередине подвешен фонарь массой m . Определить относительное удлинение проволоки, считая его малым. Площадь поперечного сечения проволоки $S=1\text{ мм}^2$, $E=1,2 \cdot 10^{11}\text{ Па}$, $m=0,28\text{ кг}$.

Решение. Натяжение проволоки, как видно из рис. 24,2,

$$T = \frac{mg}{2 \sin \alpha}. \quad (1)$$

Из закона Гука находим, что

$$T = ES \frac{\Delta l}{l_0}. \quad (2)$$

Очевидно,

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{\cos \alpha} - 1 = \frac{2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}. \quad (3)$$

При малых углах $\sin \alpha \sim \alpha$, $\cos \alpha \sim 1$. Учитывая это, из (3) получим $\alpha^2 = 2\Delta l/l_0$. Приравнявая (1) и (2), найдем искомое удлинение

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \frac{1}{2} \left(\frac{mg}{ES} \right)^{2/3} = 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

ЗАДАЧА 24.2. Динамометр, который находится на гладкой горизонтальной поверхности, тянут с силой $F=4\text{ Н}$ (рис. 24.3).

где x — расстояние от центра планеты до середины гантели, ω — угловая скорость вращения по круговой орбите. Складывая (1) и (2), получим

$$m\omega^2 x = \gamma m M \frac{x^2 + (l/2)^2}{[x^2 - (l/2)^2]^2}. \quad (3)$$

Вычитая (2) из (1) и учитывая (3), найдем

$$\sigma(x) = \gamma \frac{m M l}{4 S} \frac{3x + l^2/4x}{[x^2 - (l/2)^2]^2} - \frac{\gamma}{S} \left(\frac{m}{2l} \right)^2. \quad (4)$$

Положим $l = 2r$, $S \simeq \pi r^2$ и представим (4) в виде, удобном для оценок:

$$\sigma(x) = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{m}{4r^2} \right)^2 \left[-1 + 8 \frac{M}{m} \frac{3 \frac{x}{r} + \frac{r}{x}}{\left[\left(\frac{x}{r} \right)^2 - 1 \right]^2} \right]. \quad (5)$$

Рассмотрим спутник малых размеров $r \ll R$. Поскольку нас интересует область $x \gg R + 2r$, то $x \gg r$. В этой области функция $\sigma(x)$ существенно упрощается:

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left[-1 + 24 \frac{\rho_n}{\rho_c} \left(\frac{R}{x} \right)^3 \right], \quad \sigma_0 = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{m}{4r^2} \right)^2.$$

Здесь ρ_n , ρ_c — плотности планеты и спутника. При $x \gg R$ функция $\sigma(x)$ стремится к постоянному значению — σ_0 , равному напряжению, создаваемому притяжением шаров. Функция $\sigma(x)$ обращается в ноль при значении x , равном

$$x_0 = R \left(24 \frac{\rho_n}{\rho_c} \right)^{1/3} \simeq 2,88 R \left(\frac{\rho_n}{\rho_c} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

В области $R + 2r \leq x < x_0$ функция $\sigma(x)$ принимает положительные значения и растет с уменьшением x . При $x \simeq R + 2r$ она достигает значения $\sigma_0 [24 (\rho_n/\rho_c) - 1]$ — растягивающее напряжение на порядок превосходит величину сжимающего напряжения. Для разрыва спутника достаточно, чтобы относительное удлинение «стержня» стало $\sim 10^{-3}$, т. е. при значении $\sigma \sim E \cdot 10^{-3}$ спутник разрушится гравитационными силами, действующими со стороны планеты. Это условие накладывает ограничение на минимальные размеры спутника. При условии

$$r_{\min} \ll r \ll R, \quad r_{\min} \simeq 10^{-3/2} \sqrt{\frac{3E}{8\pi\gamma\rho_c\rho_n}},$$

границы запретной зоны (предел Роша) определяются выражением (6).

Наибольший интерес представляет вычисление предела Роша для системы «Земля—Луна». В этом случае

$$\frac{r}{R} = 0,27, \quad \frac{\rho_c}{\rho_n} = 0,61, \quad \rho_z = 3,34 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad E \sim 10^{11} \text{ Па}$$

модуль Юнга горных пород. Подставляя числовые значения, находим $r_{\min} \sim 10^5$ м, $x_0 = 3,3R$. Любопытно, что наша оценка почти совпала с результатом точного расчета, равным $x_0 = 18\,300 \text{ км} \sim \sim 3R$. Вычисление предела Роша для Марса показало, что ближайший к нему спутник Фобос, двигаясь по эллиптической орбите, периодически попадает в окрестность границы опасной зоны [22].

§ 25. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТЕЛ. ГАЗОВАЯ ШКАЛА ТЕМПЕРАТУР

При нагревании газообразные и большинство жидких и твердых тел расширяются. Объясняется это тем, что при возрастании температуры среднее расстояние между молекулами растет. Различные вещества расширяются при нагревании неодинаково.

1. Расширение твердых тел. По отношению к твердым телам обычно различают изменение линейных размеров — длины, диаметра и т. д. (линейное расширение) и изменение объема (объемное расширение). Измерения показывают, что относительное удлинение или относительное изменение объема пропорционально изменению температуры

$$\frac{l_t - l_0}{l_0} = \alpha t, \quad (25.1)$$

$$\frac{V_t - V_0}{V_0} = \beta t. \quad (25.2)$$

Здесь l_0 , V_0 относятся к температуре 0°C , величины α и β , характеризующие тепловое расширение материала, различны для различных веществ и называются соответственно *коэффициентами линейного и объемного расширения*. Из таблиц видно, что величины α и β можно считать постоянными только в некотором интервале температур, в котором изменения коэффициентов малы по сравнению с величиной этих коэффициентов. В задачах обычно приводят средние значения коэффициентов в определенных интервалах температур. Величины α и β связаны соотношением $\beta = 3\alpha$.

В том случае когда заданы длина l_1 и объем V_1 тела при температуре $t_1 \neq 0^\circ\text{C}$, то при условии αt , $\alpha t_1 \ll 1$, βt , $\beta t_1 \ll 1$ можно

где x — расстояние от центра планеты до середины гантели, ω — угловая скорость вращения по круговой орбите. Складывая (1) и (2), получим

$$m\omega^2 x = \gamma m M \frac{x^2 + (l/2)^2}{[x^2 - (l/2)^2]^3}. \quad (3)$$

Вычитая (2) из (1) и учитывая (3), найдем

$$\sigma(x) = \gamma \frac{m M l}{4 S} \frac{3x + l^2/4x}{[x^2 - (l/2)^2]^3} - \frac{\gamma}{S} \left(\frac{m}{2l} \right)^2. \quad (4)$$

Положим $l = 2r$, $S \simeq \pi r^2$ и представим (4) в виде, удобном для оценок:

$$\sigma(x) = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{m}{4r^2} \right)^2 \left[-1 + 8 \frac{M}{m} \frac{3 \frac{x}{r} + \frac{r}{x}}{\left[\left(\frac{x}{r} \right)^2 - 1 \right]^2} \right]. \quad (5)$$

Рассмотрим спутник малых размеров $r \ll R$. Поскольку нас интересует область $x \gg R + 2r$, то $x \gg r$. В этой области функция $\sigma(x)$ существенно упрощается:

$$\sigma(x) = \sigma_0 \left[-1 + 24 \frac{\rho_n}{\rho_c} \left(\frac{R}{x} \right)^3 \right], \quad \sigma_0 = \frac{\gamma}{\pi} \left(\frac{m}{4r^2} \right)^2.$$

Здесь ρ_n , ρ_c — плотности планеты и спутника. При $x \gg R$ функция $\sigma(x)$ стремится к постоянному значению — σ_0 , равному напряжению, создаваемому притяжением шаров. Функция $\sigma(x)$ обращается в ноль при значении x , равном

$$x_0 = R \left(24 \frac{\rho_n}{\rho_c} \right)^{1/3} \simeq 2,88 R \left(\frac{\rho_n}{\rho_c} \right)^{1/3}. \quad (6)$$

В области $R + 2r \leq x < x_0$ функция $\sigma(x)$ принимает положительные значения и растет с уменьшением x . При $x \simeq R + 2r$ она достигает значения $\sigma_0 [24(\rho_n/\rho_c) - 1]$ — растягивающее напряжение на порядок превосходит величину сжимающего напряжения. Для разрыва спутника достаточно, чтобы относительное удлинение «стержня» стало $\sim 10^{-3}$, т. е. при значении $\sigma \sim E \cdot 10^{-3}$ спутник разрушится гравитационными силами, действующими со стороны планеты. Это условие накладывает ограничение на минимальные размеры спутника. При условии

$$r_{\min} \ll r \ll R, \quad r_{\min} \simeq 10^{-3/2} \sqrt{\frac{3E}{8\pi\gamma\rho_c\rho_n}},$$

границы запретной зоны (предел Роша) определяются выражением (6).

Наибольший интерес представляет вычисление предела Роша для системы «Земля—Луна». В этом случае

$$\frac{r}{R} = 0,27, \quad \frac{\rho_c}{\rho_a} = 0,61, \quad \rho_c = 3,34 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, \quad E \sim 10^{11} \text{ Па}$$

модуль Юнга горных пород. Подставляя числовые значения, находим $r_{\min} \sim 10^5$ м, $x_0 = 3,3R$. Любопытно, что наша оценка почти совпала с результатом точного расчета, равным $x_0 = 18\,300$ км $\sim 3R$. Вычисление предела Роша для Марса показало, что ближайший к нему спутник Фобос, двигаясь по эллиптической орбите, периодически попадает в окрестность границы опасной зоны [22].

§ 25. ТЕПЛОВОЕ РАСШИРЕНИЕ ТЕЛ. ГАЗОВАЯ ШКАЛА ТЕМПЕРАТУР

При нагревании газообразные и большинство жидких и твердых тел расширяются. Объясняется это тем, что при возрастании температуры среднее расстояние между молекулами растет. Различные вещества расширяются при нагревании неодинаково.

1. Расширение твердых тел. По отношению к твердым телам обычно различают изменение линейных размеров — длины, диаметра и т. д. (линейное расширение) и изменение объема (объемное расширение). Измерения показывают, что относительное удлинение или относительное изменение объема пропорционально изменению температуры

$$\frac{l_t - l_0}{l_0} = \alpha t, \quad (25.1)$$

$$\frac{V_t - V_0}{V_0} = \beta t. \quad (25.2)$$

Здесь l_0 , V_0 относятся к температуре 0°C , величины α и β , характеризующие тепловое расширение материала, различны для различных веществ и называются соответственно *коэффициентами линейного и объемного расширения*. Из таблиц видно, что величины α и β можно считать постоянными только в некотором интервале температур, в котором изменения коэффициентов малы по сравнению с величиной этих коэффициентов. В задачах обычно приводят средние значения коэффициентов в определенных интервалах температур. Величины α и β связаны соотношением $\beta = 3\alpha$.

В том случае когда заданы длина l_1 и объем V_1 тела при температуре $t_1 \neq 0^\circ\text{C}$, то при условии αt , $\alpha t_1 \ll 1$, βt , $\beta t_1 \ll 1$ можно

пользоваться простыми приближенными формулами, достаточно точными для практических расчетов:

$$l_t = l_1 [1 + \alpha(t - t_1)], \quad (25.3)$$

$$V_t = V_1 [1 + \beta(t - t_1)]. \quad (25.4)$$

Приведем вывод формулы (25.3):

$$l_t = l_0 (1 + \alpha t) = l_1 \frac{1 + \alpha t}{1 + \alpha t_1} = l_1 \frac{1 + \alpha(t - t_1) - \alpha^2 t_1}{1 - (\alpha t_1)^2}$$

Поскольку $(\alpha t)^2 \ll 1$, $(\alpha t)^2 \ll \alpha t$, то, пренебрегая величинами второго порядка малости, получим соотношение (25.3).

ПРИМЕР 25.1. Какую силу нужно приложить к стальному стержню, чтобы воспрепятствовать его расширению при нагревании на $\Delta t = 1^\circ \text{C}$? Коэффициент линейного расширения стали $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$, модуль Юнга $E = 2 \cdot 10^{11} \text{Па}$, площадь сечения стержня $S = 1 \text{ см}^2$.

При нагревании на Δt в свободном состоянии относительное удлинение стержня составило бы

$$\frac{\Delta l}{l_0} = \alpha \Delta t \sim 1,1 \cdot 10^{-5}.$$

Чтобы воспрепятствовать расширению стержня на Δl , его нужно сжать силой

$$F = ES \frac{\Delta l}{l_0} = ES \alpha \Delta t = 22 \text{ кгс}.$$

При нагревании на 50°C эта сила достигла бы значения 1100 кгс. Огромные силы, возникающие при тепловом расширении, необходимо учитывать в технике. Так, чтобы избежать действия этих сил, рельсы железнодорожного полотна укладываются с зазорами.

ЗАДАЧА 25.2. Какой должен быть оставлен зазор между рельсами, если укладка производится при температуре $t_1 = -20^\circ \text{C}$, а максимальная летняя температура $t_2 = 40^\circ \text{C}$. Длина рельса $L = 12,5 \text{ м}$, $\alpha = 1,1 \cdot 10^{-5} \text{K}^{-1}$.

Решение. Из формулы (25.3) находим удлинение Δl рельса при изменении температуры от t_1 до t_2 :

$$\Delta l = L \alpha (t_2 - t_1) \approx 0,82 \text{ см}.$$

ЗАДАЧА 25.3. Какую работу может совершить стальной стержень при нагревании на $\Delta t = 1^\circ \text{C}$? (Длина стержня $L = 1 \text{ м}$, площадь поперечного сечения $S = 1 \text{ см}^2$.)

Решение. При нагревании на Δt стержня с закрепленными концами сила, действующая со стороны стержня на тело, препятствующая его расширению, $F = ES(\Delta l/L)$. Если этому телу дать

возможность перемещаться, то длина стержня увеличится на $\Delta l = L\alpha\Delta t$. При этом сила линейно уменьшится от значения F до нуля. Работа, совершаемая стержнем (см. § 12),

$$A = \frac{1}{2}ESL\alpha^2\Delta t^2 \approx 1,21 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

2. Расширение жидкостей. Тепловое расширение жидкостей существенно больше, чем тепловое расширение твердых тел. Изменение объема с увеличением температуры происходит по закону

$$V_t = V_0(1 + \gamma t).$$

Здесь V_0 — объем жидкости при 0°C , γ — коэффициент объемного расширения жидкости.

Особенности расширения воды. При понижении температуры до 4°C объем химически чистой воды непрерывно сокращается. Но как только достигнута температура 4°C , наступает обратное явление: вместо дальнейшего сокращения объема, по мере понижения температуры от 4° до точки замерзания, вода постепенно расширяется. Вода, замерзая и превращаясь в лед, увеличивается в объеме примерно на $1/11$ по сравнению с объемом жидкой фазы. Другими словами, плотность воды $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ максимальна при температуре 4°C и уменьшается с уменьшением или увеличением температуры. Эта особенность расширения воды связана с тем, что начиная с 4°C происходит перестройка ближнего порядка: между молекулами воды возникают связи, характерные для кристаллической структуры льда. В интервале температур от 4 до 0°C влияние этих связей сильнее, чем тенденция сжиматься вследствие уменьшения подвижности молекул воды с уменьшением температуры. Поэтому при понижении температуры от 4° вода расширяется до тех пор, пока не затвердеет при 0°C .

3. Газовая шкала температур. Под термометром мы понимаем макроскопическую систему, устроенную таким образом, что при отдаче или поглощении тепла у нее может изменяться только один параметр, зависящий от температуры. Если термометр находится в состоянии теплового равновесия с какой-то системой A , то этот параметр принимает некоторое значение, определяющее температуру системы A .

В основе устройства жидкостных термометров лежит свойство вещества расширяться при повышении температуры — различным температурам соответствуют различные объемы жидкости. Однако поскольку коэффициент объемного расширения γ зависит от температуры, то шкала термометра будет неравномерной. Кроме того, различные жидкости расширяются по-разному, а водяной термометр был бы совсем непригоден для измерения температуры. Этими недостатками не обладают разреженные газы: любые из них расширяются при нагревании одинаково.

Действительно, в уравнение газового состояния (21.9) входит одна характеристика газа — число молекул. Это позволяет дать определение температуры, не зависящее от каких-либо частных свойств газа.

Предположим, что мы имеем возможность точно измерять объем газа, заключенного в баллоне при постоянном давлении p . Такая система образует *газовый термометр постоянного давления*. Параметром, связанным с температурой, является объем газа. Опустим баллон с газом в лед, тающий при атмосферном давлении. Обозначим объем газа в баллоне после установления равновесия через V_0 . Очевидно, $V_0 = (m/M)RT_0/p$ (m — масса газа). Если же баллон опустить в кипящую воду, в равновесии объем газа будет равен

$$V_k = \frac{m}{M} \frac{RT_k}{p}.$$

Произвольной температуре T соответствует объем $V = (m/M)RT/p$. Очевидно,

$$\frac{T - T_0}{T_k - T_0} = \frac{V - V_0}{V_k - V_0}.$$

Примем далее, что интервал между температурой таяния льда и температурой кипения воды $T_k - T_0 = 100^\circ$. Тогда объему V соответствует температура

$$T = T_0 + \frac{V - V_0}{V_k - V_0} 100^\circ.$$

Этим равенством определяется *универсальная газовая шкала температур*.

Следует отметить, что любой термометр измеряет не абсолютную температуру, а разность температур в двух состояниях, связанных уравнением процесса.

§ 26. ИЗМЕНЕНИЕ АГРЕГАТНОГО СОСТОЯНИЯ ВЕЩЕСТВА. СВОЙСТВА ПАРОВ

Понятия «твердый», «жидкий» и «газообразный» относятся к *агрегатному состоянию вещества*, а не к самому веществу. Переход из одного состояния в другое (при постоянном давлении) происходит всегда при строго определенной температуре и всегда связан с выделением или поглощением некоторого количества тепла. При изменении давления меняется и температура перехода. Переход вещества из одного состояния в другое происходит не мгновенно, а в течение некоторого времени, когда два состояния вещества существуют одновременно в тепловом равновесии.

1. Плавление тел. В твердом теле атомы совершают малые колебания около фиксированных положений равновесия. По мере

возрастания температуры атомы движутся все интенсивнее. Наконец, наступает такой момент когда связи между атомами начинают разрываться. Это означает, что постепенно исчезает дальний порядок и твердое тело будет переходить в жидкое состояние. Такой переход называется *плавлением*. При плавлении работа по разрушению решетки совершается за счет тепла, подводимого к телу извне. Плавление сопровождается увеличением потенциальной энергии системы атомов, а кинетическая энергия не меняется. Поэтому плавление происходит при постоянной температуре, называемой температурой плавления. *При данном давлении плавление происходит при строго определенной температуре*. Количество тепла, необходимое для превращения единицы массы вещества в жидкое при температуре плавления, называют удельной теплотой плавления λ . Для плавления m кг вещества необходимо затратить количество теплоты

$$Q = \lambda m. \quad (26.1)$$

Поскольку изменение агрегатного состояния происходит при постоянном давлении, то согласно (22.6) теплота перехода

$$Q = U_2 - U_1 + p(V_2 - V_1), \quad (26.2)$$

где U_1 (U_2) — внутренняя энергия вещества в твердом (жидком) состоянии, V_1 (V_2) — объем вещества массой m в твердом (жидком) состоянии, p — давление, при котором происходит переход. Последнее слагаемое в (26.2) — работа по расширению против сил внешнего давления.

При охлаждении расплавленного твердого тела происходит обратный процесс, называемый *кристаллизацией*. Образование кристалла происходит при определенной температуре, равной температуре плавления. Затвердевание сопровождается уменьшением потенциальной энергии системы атомов, так как атомы, образуя кристаллическую решетку, переходят в более устойчивое состояние. При этом эквивалентное количество теплоты, равное теплоте плавления тела, отдается во внешнюю среду, а кинетическая энергия атомов не меняется. В силу этого кристаллизация происходит при постоянной температуре. При кристаллизации m кг жидкости выделяется количество теплоты $Q' = \lambda m$.

Аморфные тела в противоположность кристаллам не имеют определенной температуры плавления.

ЗАДАЧА 26.1. В теплоизолированный калориметр, содержащий $m_1 = 2$ кг воды при температуре $t_1 = 30^\circ\text{C}$, положен кусок льда массой $m_2 = 4$ кг, имеющий температуру $t_2 = -20^\circ\text{C}$. Определить температуру t после установления теплового равновесия и содержимое калориметра. Удельные теплоемкости: воды $c_1 = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/кг·К; льда $c_2 = 2,12 \cdot 10^3$ Дж/кг·К. Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,37 \cdot 10^5$ Дж/кг.

Решение. Поскольку в силу малой сжимаемости воды и льда $A_{12}=0$, а калориметр теплоизолирован, то согласно первому закону термодинамики (22.2) внутренняя энергия системы остается неизменной, перераспределяясь между телами системы. Для всей системы в целом $Q_{12}=0$. Поэтому уравнение теплового баланса может быть записано в виде: сумма приращений внутренней энергии каждого тела системы равна нулю.

В задачах рассматриваемого типа заранее не ясно, в каком агрегатном состоянии находится система после установления теплового равновесия. Поэтому сначала нужно провести анализ возможных конечных состояний и только после этого записать уравнение теплового баланса с учетом агрегатных превращений.

Пусть $Q_{\text{в}}=m_1c_1t_1$ — количество тепла, выделяемого водой при ее остывании до 0°C , $Q_{\text{л}}=m_2c_2|t_2|$ — количество тепла, поглощаемого льдом при нагревании до 0°C , $Q_{\text{в}\rightarrow\text{л}}=\lambda m_{\text{з}}$ — количество тепла, отдаваемого водой при замерзании, $Q_{\text{л}\rightarrow\text{в}}=\lambda m_{\text{т}}$ — количество тепла, поглощаемого льдом при плавлении.

Возможны четыре конечных состояния.

I. Пусть $Q_{\text{в}} > Q_{\text{л}}$. 1. Если $Q_{\text{в}} > Q_{\text{л}} + Q_{\text{л}\rightarrow\text{в}}$, то весь лед растает и температура воды в конечном состоянии будет выше 0°C . 2. Если $Q_{\text{в}} < Q_{\text{л}} + Q_{\text{л}\rightarrow\text{в}}$, то часть льда растает. В конечном состоянии лед и вода имеют температуру 0°C .

II. Теперь предположим, что $Q_{\text{в}} < Q_{\text{л}}$. Тогда, учитывая, что при замерзании воды выделяется теплота, можно получить два других конечных состояния: 3. $Q_{\text{в}} + Q_{\text{в}\rightarrow\text{л}} < Q_{\text{л}}$ — вся вода замерзнет, и температура льда будет ниже 0°C ; 4. $Q_{\text{в}} + Q_{\text{в}\rightarrow\text{л}} > Q_{\text{л}}$ — часть воды замерзнет, и температура воды и льда будет равна 0°C .

В нашей задаче $Q_{\text{в}}=4,2 \cdot 10^5$ Дж, $Q_{\text{л}}=1,68 \cdot 10^5$ Дж. Так как $Q_{\text{в}} > Q_{\text{л}}$, то возможны случаи 1 или 2. Поскольку $Q_{\text{л}\rightarrow\text{в}}=1,32 \cdot 10^6$ Дж, то реализуется случай 2, так как $Q_{\text{в}} < Q_{\text{л}} + Q_{\text{л}\rightarrow\text{в}}$. Следовательно, температура смеси $t=0^\circ\text{C}$. Составив для этого случая уравнение теплового баланса (см. формулу 22.10)

$$c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (t - t_2) + \lambda m_{\text{з}} = 0,$$

найдем из него массу растаявшего льда

$$m_{\text{з}} = (1/\lambda) (c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2) = 0,763 \text{ кг}.$$

Таким образом, в калориметре будет содержаться 2,763 кг воды и 3,237 кг льда при 0°C .

ПРИМЕР 26.2. Обширные районы Арктики покрыты слоем льда. Нетающий круглый год полярный покров занимает половину поверхности Северного Ледовитого океана. Средняя толщина льда составляет около трех метров, а температура воздуха зимой опускается до -40°C . Однако за всю зиму нарастает слой льда толщиной 1,25 м. Причина этого в том, что замерзание воды

сопровождается выделением теплоты, перенос которой в атмосферу осуществляется через лед — плохой проводник тепла. Оценим количество теплоты, поступающей за зиму в атмосферу через единицу поверхности льда. Поскольку $Q = \lambda m$, $m = \rho h S$, то поток теплоты $Q/S = \lambda \rho h$. Подставляя $\lambda = 8 \cdot 10^4$ кал/кг, $\rho = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м³, получим значение $Q/S \approx 0,9 \cdot 10^8$ кал/м² = 377 МДж/м².

2. Испарение. Пар образуется при испарении и кипении жидкостей. Рассмотрим процесс испарения. Молекулы в жидкости связаны силами притяжения (см. § 24), удерживающими их внутри жидкости.

Однако из рис. 20.1 видно, что у небольшой доли молекул кинетическая энергия больше, чем у остальных молекул. Если такие высокоэнергичные молекулы находятся у поверхности жидкости, то они могут вырваться из объема жидкости. При переходе из жидкости в пар молекулы затрачивают часть кинетической энергии, совершая работу по преодолению сил притяжения. Поэтому испаряются в основном самые быстрые молекулы, обладающие достаточным запасом кинетической энергии. Средняя кинетическая энергия остающихся молекул уменьшается, и, следовательно, жидкость, из которой идет испарение, охлаждается.

Для испарения при постоянной температуре жидкости необходимо сообщить тепло. В состоянии теплового равновесия температуры жидкости и пара одинаковы, несмотря на то что испаряются молекулы с энергиями выше средней энергии. Объясняется это тем, что при переходе из жидкости в пар молекулы теряют избыток кинетической энергии, преодолевая силы притяжения. Поэтому средняя кинетическая энергия пара оказывается равной средней кинетической энергии молекул жидкости. Количество тепла, которое необходимо сообщить жидкости для испарения единицы ее массы при постоянной температуре, называется *удельной теплотой парообразования*. С ростом температуры величина удельной теплоты парообразования уменьшается. Количество теплоты, которое надо затратить, чтобы перевести в пар m кг жидкости, $Q = r m$, где r — удельная теплота парообразования.

3. Насыщенный пар. Если испаряющиеся молекулы все время отводятся от поверхности жидкости, то процесс испарения будет продолжаться до полного превращения жидкости в пар. При испарении жидкости в замкнутом сосуде молекулы, испытав несколько соударений, могут снова попасть в жидкость. В начале процесса испарения число молекул, вылетающих из жидкости, больше числа молекул, вновь возвращающихся в нее. Плотность и давление пара возрастают. Испарение продолжается до тех пор, пока не установится *динамическое равновесие*, характерное для данной температуры: в жидкость возвращается столько молекул, сколько вылетает из нее. При этом плотность и давление пара остаются неизменными. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называют *насыщенным*, а его давление назы-

Решение. Поскольку в силу малой сжимаемости воды и льда $A_{12}=0$, а калориметр теплоизолирован, то согласно первому закону термодинамики (22.2) внутренняя энергия системы остается неизменной, перераспределяясь между телами системы. Для всей системы в целом $Q_{12}=0$. Поэтому уравнение теплового баланса может быть записано в виде: сумма приращений внутренней энергии каждого тела системы равна нулю.

В задачах рассматриваемого типа заранее не ясно, в каком агрегатном состоянии находится система после установления теплового равновесия. Поэтому сначала нужно провести анализ возможных конечных состояний и только после этого записать уравнение теплового баланса с учетом агрегатных превращений.

Пусть $Q_{\text{в}} = m_1 c_1 t_1$ — количество тепла, выделяемого водой при ее остывании до 0°C , $Q_{\text{л}} = m_2 c_2 |t_2|$ — количество тепла, поглощаемого льдом при нагревании до 0°C , $Q_{\text{в} \rightarrow \text{л}} = \lambda m_1$ — количество тепла, отдаваемого водой при замерзании, $Q_{\text{л} \rightarrow \text{в}} = \lambda m_2$ — количество тепла, поглощаемого льдом при плавлении.

Возможны четыре конечных состояния.

1. Пусть $Q_{\text{в}} > Q_{\text{л}}$. 1. Если $Q_{\text{в}} > Q_{\text{л}} + Q_{\text{л} \rightarrow \text{в}}$, то весь лед растает и температура воды в конечном состоянии будет выше 0°C . 2. Если $Q_{\text{в}} < Q_{\text{л}} + Q_{\text{л} \rightarrow \text{в}}$, то часть льда растает. В конечном состоянии лед и вода имеют температуру 0°C .

II. Теперь предположим, что $Q_{\text{в}} < Q_{\text{л}}$. Тогда, учитывая, что при замерзании воды выделяется теплота, можно получить два других конечных состояния: 3. $Q_{\text{в}} + Q_{\text{в} \rightarrow \text{л}} < Q_{\text{л}}$ — вся вода замерзнет, и температура льда будет ниже 0°C ; 4. $Q_{\text{в}} + Q_{\text{в} \rightarrow \text{л}} > Q_{\text{л}}$ — часть воды замерзнет, и температура воды и льда будет равна 0°C .

В нашей задаче $Q_{\text{в}} = 4,2 \cdot 10^5$ Дж, $Q_{\text{л}} = 1,68 \cdot 10^5$ Дж. Так как $Q_{\text{в}} > Q_{\text{л}}$, то возможны случаи 1 или 2. Поскольку $Q_{\text{в} \rightarrow \text{л}} = 1,32 \cdot 10^6$ Дж, то реализуется случай 2, так как $Q_{\text{в}} < Q_{\text{л}} + Q_{\text{л} \rightarrow \text{в}}$. Следовательно, температура смеси $t = 0^\circ\text{C}$. Составив для этого случая уравнение теплового баланса (см. формулу 22.10)

$$c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (t - t_2) + \lambda m_x = 0,$$

найдем из него массу растаявшего льда

$$m_x = (1/\lambda) (c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2) = 0,763 \text{ кг.}$$

Таким образом, в калориметре будет содержаться 2,763 кг воды и 3,237 кг льда при 0°C .

ПРИМЕР 26.2. Обширные районы Арктики покрыты слоем льда. Нетающий круглый год полярный покров занимает половину поверхности Северного Ледовитого океана. Средняя толщина льда составляет около трех метров, а температура воздуха зимой опускается до -40°C . Однако за всю зиму нарастает слой льда толщиной 1,25 м. Причина этого в том, что замерзание воды

сопровождается выделением теплоты, перенос которой в атмосферу осуществляется через лед — плохой проводник тепла. Оценим количество теплоты, поступающей за зиму в атмосферу через единицу поверхности льда. Поскольку $Q = \lambda m$, $m = \rho h S$, то поток теплоты $Q/S = \lambda \rho h$. Подставляя $\lambda = 8 \cdot 10^4$ кал/кг, $\rho = 0,9 \cdot 10^3$ кг/м³, получим значение $Q/S \approx 0,9 \cdot 10^8$ кал/м² = 377 МДж/м².

2. Испарение. Пар образуется при испарении и кипении жидкости. Рассмотрим процесс испарения. Молекулы в жидкости связаны силами притяжения (см. § 24), удерживающими их внутри жидкости.

Однако из рис. 20.1 видно, что у небольшой доли молекул кинетическая энергия больше, чем у остальных молекул. Если такие высокоэнергичные молекулы находятся у поверхности жидкости, то они могут вырваться из объема жидкости. При переходе из жидкости в пар молекулы затрачивают часть кинетической энергии, совершая работу по преодолению сил притяжения. Поэтому испаряются в основном самые быстрые молекулы, обладающие достаточным запасом кинетической энергии. Средняя кинетическая энергия остающихся молекул уменьшается, и, следовательно, жидкость, из которой идет испарение, охлаждается.

Для испарения при постоянной температуре жидкости необходимо сообщить тепло. В состоянии теплового равновесия температуры жидкости и пара одинаковы, несмотря на то что испаряются молекулы с энергиями выше средней энергии. Объясняется это тем, что при переходе из жидкости в пар молекулы теряют избыток кинетической энергии, преодолевая силы притяжения. Поэтому средняя кинетическая энергия пара оказывается равной средней кинетической энергии молекул жидкости. Количество тепла, которое необходимо сообщить жидкости для испарения единицы ее массы при постоянной температуре, называется *удельной теплотой* парообразования. С ростом температуры величина удельной теплоты парообразования уменьшается. Количество теплоты, которое надо затратить, чтобы перевести в пар m кг жидкости, $Q = r m$, где r — удельная теплота парообразования.

3. Насыщенный пар. Если испаряющиеся молекулы все время отводятся от поверхности жидкости, то процесс испарения будет продолжаться до полного превращения жидкости в пар. При испарении жидкости в замкнутом сосуде молекулы, испытав несколько соударений, могут снова попасть в жидкость. В начале процесса испарения число молекул, вылетающих из жидкости, больше числа молекул, вновь возвращающихся в нее. Плотность и давление пара возрастают. Испарение продолжается до тех пор, пока не установится *динамическое равновесие*, характерное для данной температуры: в жидкость возвращается столько молекул, сколько вылетает из нее. При этом плотность и давление пара остаются неизменными. Пар, находящийся в равновесии со своей жидкостью, называют *насыщенным*, а его давление назы-

вают упругостью насыщенного пара. Давление насыщенных паров — наибольшее давление, какое могут иметь пары при данной температуре.

На рис. 26.1 изображены в виде графика значения давления насыщенного пара p_n при температурах в области $0-100^\circ\text{C}$; взятые из таблиц. При $T = -20^\circ\text{C}$ $p_n = 0,8$ мм рт. ст., при $T = 100^\circ\text{C}$ $p_n = 760$ мм рт. ст. Упругость насыщенного пара быстро растет с увеличением температуры: $p_n = 10$ ат при $T = 179^\circ\text{C}$, $p_n = 226$ ат при $T = 374^\circ\text{C}$.

Давления насыщенного пара различных жидкостей при одинаковой температуре могут сильно различаться. Например, давление насыщенного пара жидкого кислорода достигает 1 ат еще при температуре $T = -183^\circ\text{C}$.

4. Кипение. Если жидкость находится в открытом сосуде, то при образовании пара часть воздуха над жидкостью вытесняется паром. Жидкость будет непрерывно испаряться, поддерживая давление пара у поверхности равным упругости p_n . Испарение происходит при любой температуре вне зависимости от давления. Однако атмосферное давление p , под которым находится жидкость, существенно влияет на ход процесса испарения. Если давление насыщенных паров $p_n(T)$ при данной температуре меньше давления p , то происходит сравнительно медленное испарение жидкости с ее поверхности. Если же давление насыщенных паров достигает давления атмосферы, то возникает бурное испарение — кипение. Оно характеризуется тем, что пар образуется не только с поверхности жидкости, но и при разрыве всплывающих из толщи пузырьков, заполненных насыщенным паром. Центрами их образования являются мельчайшие пузырьки посторонних газов или частицы различных примесей. Процесс превращения жидкости в пар требует затрат энергии на разрыв связей между молекулами жидкости и на работу против сил внешнего давления. Если при этом жидкость не получает определенного количества теплоты, то ее температура будет понижаться.

Для того чтобы при постоянных температуре и давлении превратить в пар m кг жидкости, необходимо сообщить количество теплоты

$$Q = rm, \quad (26.3)$$

где r — удельная теплота парообразования — количество теплоты, необходимое для превращения в пар 1 кг жидкости.

Определенному внешнему давлению соответствует определенная температура кипения. При неизменном внешнем давлении жидкость закипает, когда давление насыщенного пара в пузырьках становится равным внешнему давлению: $p_n(T) = p_{\text{вн}}$. Поэтому кривая упругости пара на рис. 26.1 одновременно позволяет определить и температуру кипения в зависимости от внешнего давления. В неглубоком сосуде это давление практически совпадает

с атмосферным. При нормальном атмосферном давлении вода кипит при 100°C . В горных районах, расположенный на высоте 3 км, атмосферное давление равно 526 мм рт. ст.; вода на этой высоте кипит при 90°C . Поскольку в 90° -й воде скорость химических реакций в четыре раза меньше, чем в 100° -й, то пищу приходится варить значительно дольше. Сварить яйца вообще не удастся, так как белок при температуре ниже 100° не сворачивается.

Можно получить «кипяток» и при температуре 20°C при внешнем давлении 17,54 мм рт. ст., так как давление насыщенных паров при этой температуре равно 17,54 мм рт. ст.

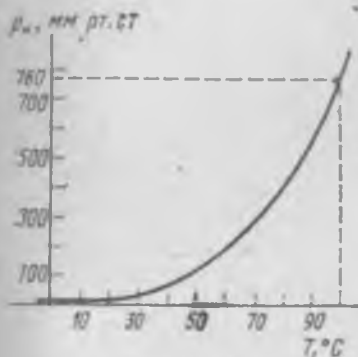


Рис. 26.1

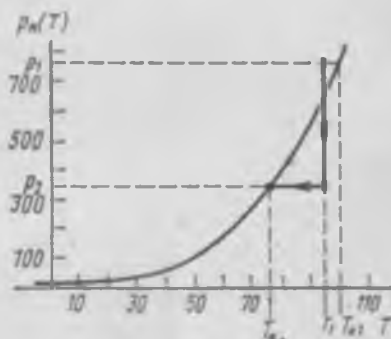


Рис. 26.2

ПРИМЕР 26.3. Почему летучие жидкости, например эфир и другие, быстро испаряются и кипят при более низкой температуре, чем вода?

У летучих жидкостей сила притяжения между молекулами слабее, чем у молекул воды. Поэтому у них давление насыщенного пара больше, чем у воды (у эфира при комнатной температуре $p_n = 437$ мм рт. ст., у воды — 17,5 мм рт.-ст.). При испарении давление пара у поверхности жидкости довольно быстро становится равным давлению насыщенных паров, характерному для данной температуры. Следовательно, чем больше упругость пара, тем быстрее испаряется жидкость. При сравнительно небольшом увеличении температуры давление насыщенных паров летучих жидкостей достигает атмосферного давления и они закипают.

Перегретая жидкость. Тщательно очищенная и обезгаженная жидкость может существовать при температуре выше точки кипения. Такая жидкость называется перегретой, так как существует в условиях, при которых она должна быть в газообразном состоянии. Перегрев жидкости можно осуществить как подводом тепла, так и уменьшением давления. Рассмотрим жидкость, находящуюся под давлением p_1 и доведенную до температуры T_1 . Значение

T_1 выберем несколько ниже точки $T_{к1}$, соответствующей температуре кипения при давлении насыщенных паров $p_n(T_{к1}) = p_1$ (рис. 26.2). Теперь, отпуская поршень, быстро уменьшим давление до величины p_2 . Жидкость оказывается в перегретом состоянии (p_2, T_1), поскольку T_1 выше температуры кипения, определяемой условием $p_n(T_{к2}) = p_2$. Перегретая жидкость находится в неустойчивом состоянии. Хаотичность теплового движения молекул жидкости приводит к возникновению микронеоднородностей, которые играют роль центров парообразования — через некоторое время жидкость вскипает. Однако процесс вскипания развивается молниеносно, если через жидкость пролетает заряженная частица.

На основе этого эффекта в 1953 г. был создан прибор для регистрации элементарных частиц — пузырьковая камера. Камеру устанавливают на пути пучка частиц, вылетающих из ускорителя. Рабочее вещество (жидкий водород при температуре -247°C) одновременно является мишенью. Пузырьковая камера, установленная в Институте физики высоких энергий (г. Серпухов), имеет высоту двухэтажного дома.

Эффект уменьшения давления ниже давления насыщенного пара имеет особое значение в гидродинамике. В разных точках потока воды приращение давления легко может превысить 1 атм. Тогда незначительное отклонение p_2 от значения $p_n(T_1)$ ($p_2 < p_n(T_1)$) приведет поток в неустойчивое состояние — в нем появятся полости, заполненные паром. Процесс образования таких полостей, называемый *кавитацией*, приводит к важным следствиям. Если давление p в окрестности полости поднимается выше $p_n(T_1)$, то она схлопывается. При начальной разности давлений $p - p_n(T_1)$ около 1 атм давление в момент схлопывания может превысить 150 атм. Поэтому, например, образование и схлопывание полостей вблизи винта корабля приводят со временем к разрушению поверхностей лопастей винта.

ЗАДАЧА 26.4. Почему при передаче теплоты воде, кипящей в закрытом сосуде, температура продолжает возрастать?

Спуск космического корабля на Землю. При движении в атмосфере космический аппарат (КА) сжимает воздух — образуется звуковая волна, распространяющаяся со скоростью звука. Однако поскольку скорость КА в 25 раз превышает скорость звука, то волновая поверхность, граничащая с лобовой частью аппарата, не может убежать от него. Возникает узкая ($\sim 10^{-3}$ см) область повышенного до 50 атм давления, в которой воздух превращается в плазму с температурой 6—10 тысяч градусов. Самые тугоплавкие вещества начинают переходить в жидкое состояние при температуре 4000—4500 $^\circ\text{C}$. Как же обеспечить безопасность космонавтов?

Если поставить на раскаленную плиту чайник с водой, то температура ее будет оставаться равной 100 $^\circ$ пока не выкипит вся

вода. Характерная особенность этого процесса — постоянство температуры при кипении — позволило реализовать новый способ теплозащиты. На лобовую часть КА наносят полуметровый слой пластмассы. В практике строительства КА наибольшее распространение получили пластмассы на основе эпоксидных и синтетических смол. При контакте с плазмой пластмасса плавится и испаряется, поглощая тепло и уменьшая поток теплоты к КА. Кроме того, тепловой поток уменьшается за счет сноса продуктов реакции горения пластмассы. Этот способ теплозащиты получил название абляционного (от лат. *устранение*).

5. Свойства ненасыщенного пара. Пока часть вещества остается в жидком состоянии, давление пара в замкнутом сосуде при неизменной температуре остается постоянным. При увеличении объема или температуры жидкость может испариться полностью. Динамическое равновесие нарушится. Если плотность и давление пара станут меньше, чем плотность и давление насыщенного пара, то такой пар называют *ненасыщенным*. Ненасыщенный пар ничем не отличается от обычного газа. Разница в этих понятиях сложилась в силу привычки называть «газами» те вещества, у которых при комнатных температурах давление насыщенного пара выше атмосферного давления. Например, давление насыщенных паров жидкого кислорода достигает 1 атм еще при температуре -183°C . Поэтому при атмосферном давлении жидкий кислород кипит при любой температуре, большей -183°C . Если же вещество при нормальных условиях остается в жидком состоянии, то, изменяя температуру или давление, мы получаем «пар».

Ненасыщенный пар подчиняется уравнению состояния идеального газа (21.4). Однако при значениях давления пара, близких к давлению насыщенных паров, возникают отклонения от теории идеального газа, связанные со взаимодействием молекул. С этой оговоркой уравнение газового состояния может быть применено и для насыщенных паров. Следует помнить, что при изменении параметров p , V и T может меняться также и масса газа.

6. Конденсация. Переход вещества из газообразного состояния в жидкое называется *конденсацией*. При переходе пара в жидкость кинетическая энергия молекулы увеличивается настолько, насколько она теряла ее при испарении. Поэтому если конденсация происходит при постоянной температуре, то в окружающую среду должно выделяться количество тепла, равное теплоте парообразования.

Пар, находящийся над поверхностью жидкости, сразу конденсируется. Для конденсации пара, не соприкасающегося с жидкостью, необходимо наличие центров конденсации, роль которых играют пылинки или поверхности, смачиваемые данной жидкостью. Тщательно очищенный от примесей пар может быть доведен до состояния с давлением, превышающим давление насы-

щенных паров при данной температуре. Пар в таком состоянии называют *пересыщенным*, или *переохлажденным* (см. § 27).

ЗАДАЧА 26.5. Почему пар обжигает сильнее воды той же температуры?

7. Изотермы реального пара. Пусть пар массой m находится в закрытом сосуде объемом V_0 при фиксированной температуре T_0 , причем его плотность $\rho_0 = m/V_0$ меньше плотности насыщенного пара $\rho_n(T_0)$. Наша задача — найти зависимость давления от объема сосуда в процессе изотермического сжатия пара. Из условия

$$m = \rho_n V_r \quad (1)$$

найдем значения объема V_r , при котором пар начнет конденсироваться. Следовательно, в области $V > V_r$ давление и объем связаны соотношением $pV = \text{const}$ (рис. 26.3). Дальнейшее уменьшение объема в области $V_{ж} < V < V_r$, где

$$V_{ж} = m/\rho_n, \quad (2)$$

не приведет к увеличению давления, так как некоторое количество пара, равное

$$m_n = \rho_n V_n, \quad (3)$$

сконденсируется. Объемы образовавшейся воды V_n и оставшегося пара V_n связаны соотношением

$$V = V_n + V_n. \quad (4)$$

Очевидно, масса пара

$$m_n = \rho_n V_n. \quad (5)$$

Исключая из (1), (2), (3), (5) плотности пара и воды, получим уравнения

$$\frac{m_n}{m} = \frac{V_n}{V_{ж}}, \quad \frac{m_n}{m} = \frac{V_n}{V_r}. \quad (6)$$

Система уравнений (4), (6), дополненная уравнением $m = m_n + m_n$, имеет решение

$$m_n = \frac{V - V_{ж}}{V_r - V_{ж}} m; \quad m_n = \frac{V_r - V}{V_r - V_{ж}} m. \quad (26.4)$$

При $V = V_{ж}$ сосуд содержит воду массой m . Поэтому левая, почти вертикальная, часть изотермы на рис. 26.3 отражает малую сжимаемость воды.

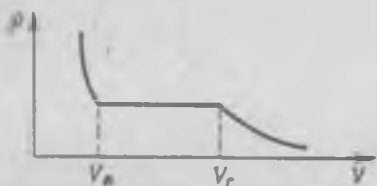
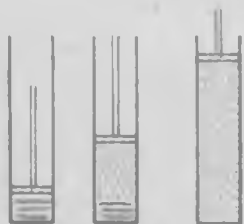


Рис. 26.3

Если $m \ll \rho_n V$ ($V_{ж} \ll V$), то из (26.4) получим приближенные значения

$$m_n \simeq \frac{V}{V_r} m, \quad m_a \simeq \left(1 - \frac{V}{V_r}\right) m. \quad (26.5)$$

Таким образом, поведение насыщенного пара при изотермическом процессе отличается от поведения обычного газа — давление соприкасающихся с жидкостью паров нельзя изменить, увеличивая или уменьшая объем, при неизменной температуре.

Вода и пар могут сосуществовать на горизонтальном участке изотермы, если соответствующая ей температура ниже критической температуры $T_{кр} = 374^\circ\text{C}$. При увеличении температуры от значения T_0 до $T < T_{кр}$ отрезок $[V_{ж}, V_r]$ уменьшается и при $T = T_{кр}$ вырождается в точку — плотности насыщенного пара и воды становятся одинаковыми, граница между ними исчезает, исчезает и различие в физических свойствах между водой и насыщенным паром.

ЗАДАЧА 26.6. Пар массой m находится в сосуде объемом $V_0 > m/\rho_n$ при температуре $T = 100^\circ\text{C}$ и давлении $p = 0,506 \cdot 10^5$ Па. Определить содержимое сосуда при изотермическом уменьшении объема в n раз ($nm < \rho_n V_0$).

Решение. Поскольку $p < p_n(T) = 1,013 \cdot 10^5$ Па, то в сосуде находится ненасыщенный пар. Более того, учитывая, что $p = 1/2 p_n$, найдем плотность пара $\rho = 1/2 \rho_n$. Из условия $m = \rho_n V_r$ получим значение V_r , при котором пар начнет конденсироваться: $V_r = 1/2 V$. Следовательно, при уменьшении объема в два раза содержимое сосуда не изменится. При дальнейшем уменьшении объема до значения $V = V_0/n$ решение задачи определяется формулами (26.4):

$$m_n = \frac{\rho_n V - m}{\rho_n - \rho_n} \rho_n = \frac{m}{n} \frac{2\rho_n - \rho_n}{\rho_n - \rho_n},$$

$$m_a = \frac{m - \rho_n V}{\rho_n - \rho_n} \rho_n = \frac{m}{n} \frac{(n-2)\rho_n}{\rho_n - \rho_n}.$$

Поскольку $\rho_n = 0,598$ кг/м³, $\rho_n = 10^3$ кг/м³, то

$$m_n \simeq \frac{m}{n} \left[2 - \frac{\rho_n}{\rho_n} (n-2) \right], \quad m_a \simeq \frac{m(n-2)}{n} \left[1 + \frac{\rho_n}{\rho_n} \right]$$

Если $nm \ll \rho_n V_0$, то $m_n = 2(m/n)$, $m_a = m - 2(m/n)$.

§ 27. ВЛАЖНОСТЬ ВОЗДУХА

Для того чтобы судить, много или мало водяных паров находится в воздухе, вводят понятие влажности. **Абсолютная влажность** — количество пара в кг, содержащееся в 1 м³ при данной

температуре, т. е. абсолютная влажность равна плотности паров воды. *Относительная влажность* B — отношение (выраженное обычно в процентах) абсолютной влажности к плотности насыщенного пара при той же температуре, т. е.

$$B = \rho / \rho_{\text{н}}. \quad (27.1)$$

Это отношение меньше или равно единице, так как при данной температуре $\rho < \rho_{\text{н}}$. Формула (27.1) может быть записана в эквивалентном виде, учитывая, что $\rho = pM/RT$ (для паров воды $M = 18$ кг/кмоль):

$$B = p / p_{\text{н}} \quad (27.2)$$

Здесь p — давление паров воды, находящихся в воздухе.

Общее давление p влажного воздуха складывается из давления сухого воздуха $p_{\text{в}}$ и давления паров воды $p_{\text{п}}$: $p = p_{\text{в}} + p_{\text{п}}$.

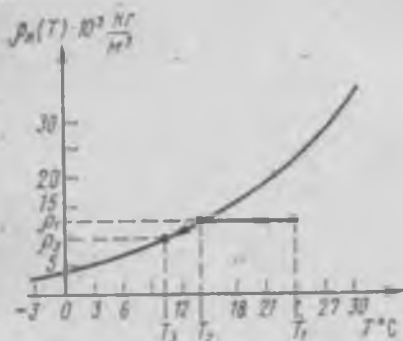


Рис. 27.1

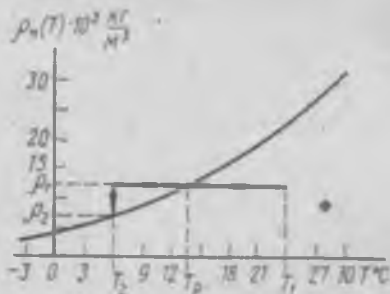


Рис. 27.2

1. Точка росы. Пусть абсолютная влажность воздуха, взятого при температуре T_1 , равна ρ_1 . При понижении температуры абсолютная влажность не меняется, однако поскольку плотность насыщенного пара понижается, то относительная влажность растет. При некоторой температуре $T_2 < T_1$ плотность пара ρ_1 станет равной плотности насыщенных паров $\rho_{\text{н}2} = \rho_{\text{н}}(T_2)$ при температуре T_2 : относительная влажность достигнет значения $B = 1$ (рис. 27.1). Дальнейшее понижение температуры до значения T_3 приведет к конденсации пара. Температура T_2 , при которой водяной пар, содержащийся в воздухе, становится насыщенным, называется *точкой росы*. По значениям двух температур T_1 и T_2 с помощью таблиц можно определить абсолютную и относительную влажности:

$$\rho_1 = \rho_{\text{н}2}, \quad B = \rho_{\text{н}2} / \rho_{\text{н}1},$$

где $\rho_{н1}$ — плотность насыщенного пара при температуре T_1 . Понижение температуры ниже точки росы приводит к образованию тумана и росы. Агрегатное превращение пара в воду сопровождается выделением теплоты.

2. Камера Вильсона. Рассмотрим замкнутый объем, заполненный влажным воздухом, сжатым поршнем до давления в несколько атмосфер. На рис. 27.2 точка (ρ_1, T_1) соответствует начальным параметрам пара. Если поршень быстро выдвинуть, то влажный воздух адиабатически охладится до температуры T_2 . Поскольку плотность пара $\rho_1 > \rho_{н2} = \rho_n(T_2)$, то относительная влажность $B = \rho_1 / \rho_{н2} > 1$. Пар оказывается в неустойчивом пересыщенном состоянии. Если в этот момент через камеру пролетает заряженная частица, то она ионизирует воздух вдоль траектории, а ионы становятся центрами конденсации пара. Таким образом, можно наблюдать след (трек) заряженной частицы. Изобретенная в 1912 г. английским физиком Ч. Вильсоном туманная камера на протяжении нескольких десятилетий была единственным трековым детектором для регистрации ядерных излучений.

Принципиально новую возможность получения информации о заряде и величине импульса частиц дало предложение советского физика П. Л. Капицы (1923) поместить камеру в магнитное поле.

В настоящее время камера Вильсона утратила свое значение, уступив место пузырьковым камерам.

ЗАДАЧА 27.1. Относительная влажность воздуха в помещении объемом $V = 50 \text{ м}^3$ при температуре 20°C равна $B_1 = 0,6$. Насколько изменится количество воды в помещении, если относительная влажность станет равной $B_2 = 0,8$?

Решение. Пусть m_1, m_2 — масса пара в начальном и конечном состояниях. Тогда

$$m_1 = \rho_1 V = B_1 \rho_n V, \quad m_2 = \rho_2 V = B_2 \rho_n V.$$

Следовательно,

$$\Delta m = m_2 - m_1 = (B_2 - B_1) \rho_n V.$$

Подставляя из таблиц значение $\rho_n(20^\circ\text{C}) = 17,3 \cdot 10^{-3} \text{ кг/м}^3$, найдем $\Delta m = 0,173 \text{ кг}$.

ЗАДАЧА 27.2. Смешали объем V_1 воздуха влажности B_1 и объем V_2 воздуха влажности B_2 . При этом обе порции взяты при одинаковой температуре. Смесь занимает объем $V_1 + V_2$. Определить ее относительную влажность.

Решение. Пусть ρ_n — плотность насыщенных паров, соответствующая температуре, при которой взяты объемы, ρ_1 и ρ_2 — плотности паров в объемах V_1 и V_2 . По определению относительной влажности

$$B_1 = \frac{\rho_1}{\rho_n}, \quad B_2 = \frac{\rho_2}{\rho_n}. \quad (1)$$

Относительная и абсолютная влажности смеси равны

$$B = \frac{\rho}{\rho_n}, \quad \rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}. \quad (2)$$

Исключая из (2) ρ_1 и ρ_2 с помощью (1), получим

$$B = \frac{B_1 V_1 + B_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

ЗАДАЧА 27.3. Найти плотность влажного воздуха.

Решение. Масса влажного воздуха, находящегося в объеме V , равна сумме масс пара и сухого воздуха

$$m_n = \frac{M_n}{RT} p_n V, \quad m_s = \frac{M_s}{RT} p_s V. \quad (1)$$

Учитывая, что давление равно сумме давлений пара и сухого воздуха

$$p = p_n + p_s, \quad (2)$$

а относительная влажность согласно (27.2)

$$B = p_n / p_n, \quad (3)$$

из уравнений (1) — (3) найдем искомую плотность

$$\rho = \frac{m_n + m_s}{V} = \frac{M_s}{RT} p - \frac{(M_s - M_n)}{RT} B p_n.$$

Поскольку молярная масса пара $M_n = 18$ кг/кмоль меньше молярной массы сухого воздуха $M_s = 29$ кг/кмоль, то плотность влажного воздуха меньше плотности сухого.

Уменьшение плотности влажного воздуха по сравнению с плотностью сухого следует из закона Авогадро: при одинаковых условиях в одном кубометре сухого и влажного воздуха должно содержаться одинаковое число молекул. Поэтому при увеличении влажности замещение части молекул воздуха более легкими молекулами воды приводит к уменьшению массы влажного воздуха в объеме V на величину

$$\Delta m = \frac{M_s - M_n}{RT} B V p_n.$$

Полагая, например, $V = 1$ м³, $B = 1$, $T = 27^\circ\text{C}$, $p_n = 26,74$ мм рт. ст., получим $\Delta m = 0,0157$ кг.

ЗАДАЧА 27.4. В объеме $V_0 = 1$ м³ находится $m = 12$ г воды, насыщенный пар и сухой воздух при давлении $p_0 = 760$ мм рт. ст. Плотность и давление насыщенного пара при данной температуре 11°C соответственно равны $\rho_n = 10^{-2}$ кг/м³, $p_n = 9,84$ мм рт. ст.

Какое установится давление при изотермическом расширении объема V_0 до значения V_1 ? а) $V_1 = 2V_0$; б) $V_1 = 5V_0$.

Решение. Давление в объеме V_0 равно сумме парциальных давлений сухого воздуха $p_0 - p_n$ и насыщенного пара p_n . Давление в объеме V_1 также равно сумме парциальных давлений сухого воздуха p_n и пара p_n :

$$p = p_n + p_n.$$

Давление воздуха определяется из уравнения

$$(p_0 - p_n) V_0 = p_n V_1 \Rightarrow p_n = (p_0 - p_n) (V_0 / V_1).$$

Определим давление пара. Для этого предварительно найдем, при каком значении объема V_x испарится масса m воды. Поскольку в процессе испарения плотность насыщенного пара не меняется, то

$$\rho_n = \frac{m + \rho_n V_0}{V_x}.$$

Следовательно,

$$V_x = V_0 + \frac{m}{\rho_n}. \quad (1)$$

В зависимости от соотношения между V_1 и V_x возможны два конечных состояния.

1. Если $V_1 < V_x$, то испарится лишь часть воды и давление пара останется равным p_n . В этом случае

$$p = p_n + p_n = (p_0 - p_n) \frac{V_0}{V_1} + p_n. \quad (2)$$

2. Если $V_1 > V_x$, то испарится вся вода и пары воды станут ненасыщенными. Давление пара можно найти из уравнения состояния

$$p_n V_0 = \frac{p_n V_0}{M_n} RT, \quad p_n V_1 = \frac{m + p_n V_0}{M_n} RT,$$

$$p_n = \left(1 + \frac{m}{p_n V_0}\right) \frac{V_0}{V_1} p_n.$$

В этом случае полное давление

$$p = \frac{V_0}{V_1} p_n + \frac{m}{p_n V_1} p_n. \quad (3)$$

Относительная и абсолютная влажности смеси равны

$$B = \frac{p}{p_n}, \quad p = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2}. \quad (2)$$

Исключая из (2) ρ_1 и ρ_2 с помощью (1), получим

$$B = \frac{B_1 V_1 + B_2 V_2}{V_1 + V_2}.$$

ЗАДАЧА 27.3. Найти плотность влажного воздуха.

Решение. Масса влажного воздуха, находящегося в объеме V , равна сумме масс пара и сухого воздуха

$$m_n = \frac{M_n}{RT} p_n V, \quad m_a = \frac{M_a}{RT} p_a V. \quad (1)$$

Учитывая, что давление равно сумме давлений пара и сухого воздуха

$$p = p_n + p_a, \quad (2)$$

а относительная влажность согласно (27.2)

$$B = p_n / p_a, \quad (3)$$

из уравнений (1) — (3) найдем искомую плотность

$$\rho = \frac{m_n + m_a}{V} = \frac{M_n}{RT} p - \frac{(M_a - M_n)}{RT} B p_n.$$

Поскольку молярная масса пара $M_n = 18$ кг/кмоль меньше молярной массы сухого воздуха $M_a = 29$ кг/кмоль, то плотность влажного воздуха меньше плотности сухого.

Уменьшение плотности влажного воздуха по сравнению с плотностью сухого следует из закона Авогадро: при одинаковых условиях в одном кубометре сухого и влажного воздуха должно содержаться одинаковое число молекул. Поэтому при увеличении влажности замещение части молекул воздуха более легкими молекулами воды приводит к уменьшению массы влажного воздуха в объеме V на величину

$$\Delta m = \frac{M_a - M_n}{RT} B V p_n.$$

Полагая, например, $V = 1$ м³, $B = 1$, $T = 27^\circ\text{C}$, $p_n = 26,74$ мм рт. ст., получим $\Delta m = 0,0157$ кг.

ЗАДАЧА 27.4. В объеме $V_0 = 1$ м³ находится $m = 12$ г воды, насыщенный пар и сухой воздух при давлении $p_0 = 760$ мм рт. ст. Плотность и давление насыщенного пара при данной температуре 11°C соответственно равны $\rho_n = 10^{-2}$ кг/м³, $p_n = 9,84$ мм рт. ст.

Какое установится давление при изотермическом расширении объема V_0 до значения V_1 ? а) $V_1 = 2V_0$; б) $V_1 = 5V_0$.

Решение. Давление в объеме V_0 равно сумме парциальных давлений сухого воздуха $p_0 - p_n$ и насыщенного пара p_n . Давление в объеме V_1 также равно сумме парциальных давлений сухого воздуха p_v и пара p_n :

$$p = p_v + p_n.$$

Давление воздуха определяется из уравнения

$$(p_0 - p_n) V_0 = p_v V_1 \Rightarrow p_v = (p_0 - p_n) (V_0 / V_1).$$

Определим давление пара. Для этого предварительно найдем, при каком значении объема V_x испарится масса m воды. Поскольку в процессе испарения плотность насыщенного пара не меняется, то

$$\rho_n = \frac{m + \rho_n V_0}{V_x}.$$

Следовательно,

$$V_x = V_0 + \frac{m}{\rho_n}. \quad (1)$$

В зависимости от соотношения между V_1 и V_x возможны два конечных состояния.

1. Если $V_1 < V_x$, то испарится лишь часть воды и давление пара останется равным p_n . В этом случае

$$p = p_v + p_n = (p_0 - p_n) \frac{V_0}{V_1} + p_n. \quad (2)$$

2. Если $V_1 > V_x$, то испарится вся вода и пары воды станут ненасыщенными. Давление пара можно найти из уравнения состояния

$$p_n V_0 = \frac{\rho_n V_0}{M_n} RT, \quad p_n V_1 = \frac{m + \rho_n V_0}{M_n} RT,$$

$$p_n = \left(1 + \frac{m}{\rho_n V_0} \right) \frac{V_0}{V_1} p_n.$$

В этом случае полное давление

$$p = \frac{V_0}{V_1} p_0 + \frac{m}{\rho_n V_1} p_n. \quad (3)$$

Подставляя числовые значения, находим, что $V_x = 2,2 V_0$. Поэтому в случае а) давление определяется отношением (2):

$$p = \frac{1}{2} (p_0 + p_n) = 385 \text{ мм рт. ст.}$$

В случае б)

$$p = \frac{1}{5} \left(p_0 + \frac{m}{\rho_n V_0} p_n \right) = 154 \text{ мм рт. ст.}$$

ЗАДАЧА 27.5. В объеме $V = 1 \text{ м}^3$ находятся масса m воды, насыщенный пар и сухой воздух при давлении $p_0 = 760 \text{ мм рт. ст.}$ и температуре $T_0 = 10^\circ\text{C}$. Какое установится давление при нагревании объема до температуры $T_1 = 20^\circ\text{C}$ в случае: а) $m = 10 \text{ г}$, б) $m = 1 \text{ г}$? Плотность и давление насыщенных паров при температурах T_0 и T_1 соответственно равны: $\rho_{n0} = 9,4 \text{ г/м}^3$, $p_{n0} = 9,2 \text{ мм рт. ст.}$; $\rho_{n1} = 17,3 \text{ г/м}^3$, $p_{n1} = 17,5 \text{ мм рт. ст.}$

Решение. Давление при температуре T_1 равно

$$p_1 = p_v + p_n.$$

Давление сухого воздуха находится из уравнения (21.1):

$$\frac{(p_0 - p_{n0})}{T_0} = \frac{p_v}{T_1} \Rightarrow p_v = (p_0 - p_{n0}) \frac{T_1}{T_0}.$$

Определим давление пара при температуре T_1 . Для этого найдем массу воды m_x , которую надо испарить, чтобы при температуре T_1 пары воды оставались насыщенными:

$$\rho_{n1} = \frac{m_x + \rho_{n0} V}{V}.$$

Следовательно,

$$m_x = (\rho_{n1} - \rho_{n0}) V. \quad (1)$$

Если $m > m_x$, то давление пара при температуре T_1 останется равным p_{n1} . В этом случае общее давление

$$p = (p_0 - p_{n0}) \frac{T_1}{T_0} + p_{n1}. \quad (2)$$

Если же $m < m_x$, то пары воды станут ненасыщенными. Давление пара можно найти из уравнения состояния

$$\rho_{n0} V = \frac{\rho_{n0} V}{M_n} R T_0, \quad \rho_n V = \frac{m + \rho_{n0} V}{M_n} R T_1,$$

$$\rho_n = \left(1 + \frac{m}{\rho_{n0} V} \right) \frac{T_1}{T_0} \rho_{n0}.$$

В этом случае полное давление

$$p = p_v + p_n = \left(p_0 + p_{n0} \frac{m}{\rho_{n0} V} \right) \frac{T_1}{T_0}. \quad (3)$$

Подставляя в (1) числовые данные, находим $m_x = 7,9$ г. Поэтому в случае а) давление определяется соотношением (2):

$$p = \frac{293}{283} (760 - 9,4) + 17,5 = 820 \text{ мм рт. ст.}$$

В случае б)

$$p = \frac{293}{283} \left(760 + \frac{9,2}{9,4} \right) = 783,8 \text{ мм рт. ст.}$$

3. Нагревание насыщенного воздуха. Большая часть водяного пара поступает в атмосферу с поверхности морей и океанов. Если верхний слой воды теплее воздуха, то слои воздуха, прилегающие к воде, нагреваются до тех пор, пока существует разность температур. Масса m воздуха содержит пар массой $m_n(T) = (\rho_n(T)/\rho(T))m$. Рассмотрим переход насыщенного воздуха, взятого при температуре T , в новое равновесное состояние при температуре $T + \Delta T$. Поскольку при увеличении температуры плотность насыщенного пара растет, то необходимо дополнительное количество теплоты

$$\delta Q' = r \Delta m_n$$

для испарения массы воды, равной

$$\Delta m_n = m_n(T + \Delta T) - m_n(T) \simeq m \frac{\Delta}{\Delta T} \left(\frac{\rho_n}{\rho} \right) \Delta T.$$

При температурах, меньших температуры кипения,

$$\Delta m_n \simeq \frac{m}{\rho} \left(\frac{\Delta \rho_n}{\Delta T} \right) \Delta T. \quad (27.3)$$

Общее количество теплоты, требуемое для нагревания m кг насыщенного воздуха на ΔT°

$$\delta Q = \left(mc_V + r \frac{m}{\rho} \frac{\Delta \rho_n}{\Delta T} \right) \Delta T.$$

На рис. 27.1, 27.2 приведены в виде графика плотности насыщенного пара в области обычных температур. Из них видно, что величина $\Delta \rho_n / \Delta T$ увеличивается с ростом T . Поэтому для нагревания m кг насыщенного воздуха в тропиках требуется больше тепла, чем, скажем, в умеренных широтах. Менее плотный по сравнению с сухим насыщенный воздух поднимается, уступая место сухому воздуху, который, придя в контакт с морской поверх-

ностью, насыщается влагой и в свою очередь поднимается. Таким образом, атмосфера запасает огромное количество энергии. При конденсации часть этой энергии проявляется в опустошительных ураганах.

4. Потери тепла и воды при дыхании. Физические методы только начинают проникать в классическую биологию, и уже простейшие термодинамические модели приносят ощутимую пользу [23].

Здесь мы рассмотрим процесс дыхания у теплокровных животных. Пусть температура окружающего воздуха T_1 , относительная влажность B . При вдохе влажный воздух поступает в легкие и насыщается влагой при температуре тела T_2 . Приращение массы пара $\Delta m_{12} = (\rho_2 - B\rho_1)V$, где $\rho_i = \rho_n(T_i)$, V — объем вдыхаемого воздуха. Температура выдыхаемого воздуха $T_3 < T_2$ (T_3 может быть даже меньше T_1) [23]. При выдохе тепло передается тканям дыхательных путей, насыщенный воздух охлаждается. В результате пар конденсируется. Приращение массы пара $\Delta m_{23} = (\rho_3 - \rho_2)V$. Таким

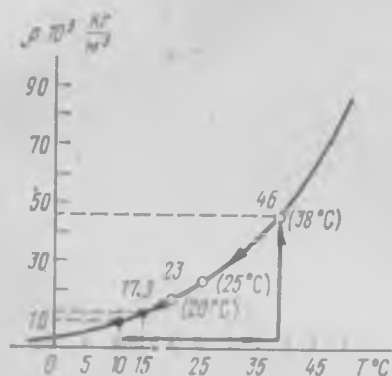


Рис. 27.3

образом, организм теряет количество воды, равное $\Delta m_{13} = \Delta m_{12} + \Delta m_{23} = (\rho_3 - B\rho_1)V$. Чем выше T_3 , тем большее количество воды будет потеряно. При этом организм отдаст количество теплоты $Q_{13} = r\Delta m_{13}$, затраченное на испарение воды массой Δm_{13} . На рис. 27.3 стрелками указаны переходы между рассмотренными состояниями. Произведем простой расчет, полагая $V = 10^{-3} \text{ м}^3 = 1 \text{ л}$, $B = 0,25$, $T_1 = 11^\circ\text{C}$, $T_2 = 38^\circ\text{C}$, $T_3 = 15^\circ\text{C}$. Соответствующие значения плотности насыщенного пара: $\rho_1 = 10 \text{ мг/л}$, $\rho_2 = 46 \text{ мг/л}$, $\rho_3 = 12,8 \text{ мг/л}$. В этом случае $\Delta m_{12} = 43,5 \text{ мг}$, $\Delta m_{23} = -33,2 \text{ мг}$, $\Delta m_{13} = 10,3 \text{ мг}$.

У человека теплообмен при выдохе менее эффективен: температура выдыхаемого воздуха близка к температуре его тела. Поэтому потери воды и тепла максимальны.

5. Местные ветры — фён и чинук. Воздушный поток, встретив на своем пути горы, поднимается по склону вверх и адиабатически охлаждается (см. § 23, п. 6). При некоторой температуре T плотность пара становится равной $\rho_n(T)$. Далее подъем воздуха сопровождается конденсацией и выделением количества теплоты $r\Delta m$, где Δm определяется формулой (27.3). Поскольку в адиабатическом процессе отсутствует теплообмен с окружающей средой, то приращение внутренней энергии влажного воздуха в соответствии с первым законом термодинамики (22.2) равно

$$\left(mc_v + r \frac{m}{\rho} \frac{\Delta \rho_n}{\Delta T} \right) \Delta T = -p \Delta V.$$

Повторяя вычисления, которые привели к формуле (23.8), получим отношение приращения температуры насыщенного воздуха к значению вертикального перемещения Δz :

$$\frac{\Delta T}{\Delta z} = - \frac{g}{c_p} \frac{1}{1 + \frac{r}{\rho c_p} \left(\frac{\Delta \rho_n}{\Delta T} \right)}.$$

Таким образом, процесс конденсации снижает скорость падения температуры. Для высот ~ 3 км $\Delta T/\Delta z = -5 \cdot 10^{-3}$ К/м, т. е. температура понижается на $0,5^\circ$ при подъеме на 100 м.

К тому времени, когда воздух переваливает через вершины горного хребта и начинает опускаться по подветренной стороне, он успевает потерять значительную часть содержащегося в нем пара. Далее он нагревается вследствие адиабатического сжатия при спуске по склону в область высокого давления. Увеличение температуры составляет уже 1° на 100 м спуска. На территории США в Скалистых горах ветер такого происхождения индейцы называли чинук — снегоед. Он нередко повышает температуру на 30°C и быстро испаряет снежный покров, причем повышение на 10° — 20° иногда происходит в течение нескольких минут. Аналогичный горячий, сухой ветер на склонах Альп называется фёном. Чаще всего фён продолжается менее суток. При этом усиливающийся сухой и теплый ветер вызывает у некоторых людей так называемую «фёновую болезнь» — возрастает число жалоб на недомогания, нервозность, снижается работоспособность. В Австрии во время фёна ученикам не проставляют неудовлетворительные оценки, а полицейские не штрафуют водителей, нарушивших правила движения.

§ 28. ТЕПЛОВЫЕ ДВИГАТЕЛИ

Механическая энергия системы тел есть только часть полной энергии, которая складывается из механической и внутренней энергии. Благодаря трению часть механической энергии идет на увеличение кинетической энергии хаотического движения молекул и изменение их взаимного расположения — тела системы обмениваются количеством теплоты. Каким же образом можно осуществить обратный переход — превратить часть внутренней энергии системы в механическую энергию упорядоченного движения тела как целого? Это превращение осуществляется в тепловом двигателе. Тепловым двигателем, или тепловой машиной, называется физическая система, преобразующая тепло в механическую энергию. Тепловые машины можно разделить на два типа. Машины первого типа

совершают некруговые процессы, производя при этом полезную работу. К ним относятся устройства однократного действия. Машины второго типа выполняют полезную работу за счет последовательности круговых процессов. К ним относятся двигатели внутреннего сгорания, паровые машины, турбины и т. д. Физические принципы, лежащие в основе устройства тепловых машин, являются следствием второго закона термодинамики. Мы ограничимся рассмотрением машин второго типа.

1. Второй закон термодинамики. Возьмем два тела с различной температурой. Если мы приведем их в соприкосновение, то через некоторое время тепло перейдет от горячего тела к холодному, и оба тела окажутся в состоянии теплового равновесия. Первый закон термодинамики в принципе допускает и обратный самопроизвольный без внешних воздействий процесс, т. е. процесс, при котором проходят те же тепловые состояния, но только в обратном порядке. При этом тепло будет самопроизвольно переходить от менее нагретого к более нагретому телу. Однако многочисленные опыты свидетельствуют о том, что, достигнув состояния равновесия, система сама по себе из него уже не выходит. Другими словами, все тепловые процессы являются *необратимыми*. Второй закон термодинамики представляет обобщение опытных фактов. В формулировке Р. Клаузиуса (1850) он гласит: *тепло не может самопроизвольно переходить от менее нагретого тела к более нагретому*. Если такая передача осуществляется, то неизбежны изменения в заданной нам системе тел или в окружающей среде.

Молекулярная теория позволяет более глубоко понять физический смысл второго закона термодинамики. Макроскопическая система может находиться в различных физических состояниях. Каждое состояние осуществляется с определенной вероятностью. Однако из опыта известно, что *состояние изолированной системы с течением времени стремится к равновесному*. Тем самым равновесное состояние является наиболее вероятным. Переход из равновесного состояния в неравновесное настолько маловероятен, что необратимость тепловых процессов можно считать принципиальной.

Второе начало термодинамики неприменимо к системам со сравнительно малым числом частиц. В таких системах могут наблюдаться *флуктуации*, связанные с самопроизвольным переходом системы из более вероятных состояний в менее вероятные. Типичный пример проявления флуктуаций — броуновское движение, обнаруженное в 1827 г. на пылце растений взвешенной в воде. Наблюдаемые частицы размером $\sim 10^{-6}$ м движутся независимо по сложным зигзагообразным траекториям. Хаотичность движения молекул проявляется в *флуктуациях давления*, т. е. в его отклонении от среднего значения. В результате различия давлений в разных точках поверхности частицы возникает сила, под действием которой она перемещается. Броуновское движение является

основным фактором, ограничивающим точность чувствительных измерительных приборов.

2. Условия работы теплового двигателя. В то время как механическую энергию можно полностью превратить в тепло, обратный процесс возможен лишь при определенных ограничениях, вытекающих из второго закона термодинамики.

Покажем вначале, что невозможно построить тепловую машину, которая, отнимая тепло от одного нагретого тела, систематически бы превращала его в работу. Если бы мы могли совершить работу, отобрав тепло у тела A , то эту работу можно было бы снова превратить в тепло и нагреть другое тело, имеющее температуру, большую, чем у тела A . Полный результат процесса в этом случае сводится к охлаждению «холодного» тела A . Машину, работающую за счет получения тепла от единственного теплового резервуара, называют *вечным двигателем второго рода*. Закон сохранения энергии при этом выполняется, поскольку требует только уменьшения внутренней энергии тела A . Однако работа такой машины противоречит второму закону термодинамики.

Из сказанного вытекает, что для получения работы необходимо иметь по крайней мере два тела, имеющих различные температуры, т. е. систему тел, не находящихся в равновесии. Будем условно называть более нагретое тело с температурой T_2 *нагревателем*, а более холодное с температурой $T_1 < T_2$ — *холодильником*, или охладителем. При этом предполагается, что температуры T_1 и T_2 поддерживаются постоянными.

Заметим прежде всего, что непосредственный тепловой контакт между нагревателем и холодильником приводит к необратимому переходу тепла и установлению теплового равновесия. Однако мы только показали, что с помощью тел, находящихся в равновесии, невозможно произвести никакой работы. Для того чтобы не допустить непосредственного контакта между ними, необходимо ввести еще одно вспомогательное тело. Это тело называется рабочим веществом, или *рабочим телом*. Обычно рабочим телом служит газ, пар или продукты сгорания топлива в некотором объеме. Рабочее тело совершает определенный круговой процесс.

Схема преобразования тепла в работу в общем случае периодически действующей машины представлена на рис. 28.1. Рабочее тело приводится в соприкосновение с нагревателем, получает от него количество тепла Q_2 и, расширяясь, совершает работу A_2' над внешними телами. Приращение внутренней энергии при этом $\Delta U_{ab} = Q_2 - A_2'$. Для того чтобы тепловая машина действовала циклически, рабочее тело надо вернуть в начальное состояние, сжимая его. Если не прерывать контакта рабочего тела с нагревателем, то на это потребуются работа A_2'' . В конечном результате полезная работа, совершенная рабочим телом, будет равна нулю. Чтобы избежать этого, контакт с нагревателем прерывается, и на участке bc рабочее вещество продолжает расширяться без притока

тепла извне; когда его температура достигнет значения T_1 , рабочее тело приводится в контакт с холодильником. Поскольку давление рабочего тела уменьшилось, то в процессе сжатия на участке cd внешние тела совершают работу A_1 , меньшую A_2' , а холодильнику отдается тепло Q_1 . Изменение внутренней энергии в этой части цикла $\Delta U_{cd} = -Q_1 + A_1$. Далее, на участке da , прервав контакт с холодильником, продолжим сжимать рабочее тело, пока

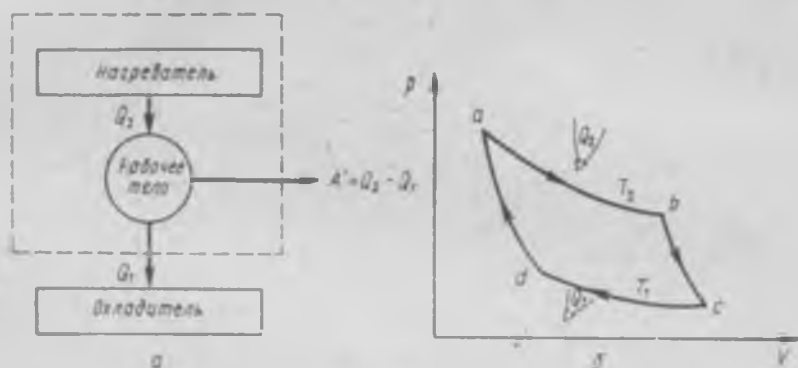


Рис. 28.1

его температура не станет равной T_2 . Поскольку рабочее тело по проведении каждого цикла возвращается в исходное состояние, то изменение внутренней энергии за цикл равно нулю:

$$\Delta U = Q_2 - A'_2 + \Delta U_{bc} - Q_1 + A_1 + \Delta U_{da} = 0.$$

Наиболее важен для термодинамики цикл Карно, для которого $\Delta U_{bc} + \Delta U_{da} = 0$. Следовательно, $A' = A'_2 - A_1 = Q = Q_2 - Q_1$. При проведении цикла по часовой стрелке $Q > 0$. Поэтому совершаемая рабочим телом полезная работа $A' = Q_2 - Q_1$. Следовательно, получая от нагревателя энергию Q_2 , тепловая машина превращает в полезную работу только часть ее, равную $Q_2 - Q_1$. Остаток Q_1 передается холодильнику. Однако для циклической работы двигателя, как мы видели, необходимы и нагреватель и холодильник.

Французский инженер С. Карно в 1824 г. первым показал, что это обстоятельство имеет принципиальное значение: часть теплоты должна непременно рассеиваться в окружающей среде (см. п. 3).

Таким образом, количество тепла Q_2 принципиально не может быть полностью превращено в работу — часть его идет на нагревание холодильника.

Очевидно, коэффициент полезного действия теплового двигателя

$$\eta = \frac{A}{Q_2} = 1 - \frac{Q_1}{Q_2}. \quad (28.1)$$

Р. Клаузиус доказал, что КПД теплового двигателя не может быть больше величины

$$\eta_{\max} = \frac{T_2 - T_1}{T_2}. \quad (28.2)$$

Для увеличения КПД необходимо повысить температуру нагревателя и понизить температуру холодильника. В реальных двигателях КПД значительно ниже, чем максимально возможный.

Дело в том, что в реальном мире невозможно создать идеальный термодинамический цикл из-за необратимого теплообмена при конечной разности температур и потерь от трения. Второй закон термодинамики ставит тепловое движение в исключительное положение. Все другие формы движения материи могут без потерь переходить одна в другую; связанные с ними процессы пол-

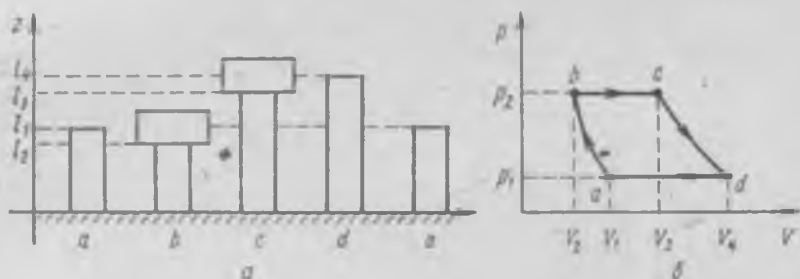


Рис. 28.2

ностью обратимы и могут продолжаться неограниченно долго. В реальном мире переход любой формы движения материи в тепловое приводит к необратимым потерям энергии.

ПРИМЕР 28.1. Рассмотрим простейшую тепловую машину, рабочим веществом которой является вертикально стоящий стержень длиной l_1 (рис. 28.2a). Наша задача — поднять груз массой M с высоты l_1 до высоты $l_3 = H$.

Поставим груз на торец стержня. После этого стержень адиабатически сожмется до длины $l_2 < l_1$. Теперь, сообщая ему количество тепла Q , заставим его расширяться до длины $l_3 > l_1$ и снимем груз. Стержень адиабатически увеличит длину до значения l_4 . Теперь, охлаждая стержень, можно уменьшить его размеры до исходных (см. рис. 28.2a). Соответствующий цикл изображен на рис. 28.2б.

Следует отметить, что эта же диаграмма описывает процессы в современных высокоскоростных авиационных турбинах, где рабочим веществом является атмосферный воздух.

3. Тепловое загрязнение окружающей среды. Существуют два основных источника получения теплоты для приведения в действие систем преобразования энергии — сжигание горючих веществ и деление ядер урана и плутония. В любом случае часть полученной

энергии возвращается холодильнику — окружающей среде. Один из способов отвода тепла состоит в прокачивании воды из реки или водоема через охлаждаемый агрегат. Нагретую воду затем сбрасывают обратно. Рост температуры, грозящий нарушить природное равновесие в этих экологических системах, называют *тепловым загрязнением*.

Из (28.1) следует, что количество сбрасываемой теплоты $Q_1 = -Q_2(1-\eta)$. Если КПД преобразования теплоты Q_2 в электроэнергию равен η_0 , то необходимо отвести часть мощности, равную $P(1-\eta)\eta_0^{-1}$, где P — мощность ТЭС. При увеличении КПД количество отводимой теплоты уменьшается. С 1900 по 1980 г. КПД ТЭС увеличивался на 0,45% в год. В настоящее время $\eta_0 \leq 0,4$. Для того чтобы изменение температуры не превышало значения ΔT , расход воды $\Delta m/\Delta t$ в 1 с должен удовлетворять уравнению

$$\frac{\Delta m}{\Delta t} c \Delta T = P \frac{(1-\eta)}{\eta_0}. \quad (28.3)$$

Пусть $P = 10^3$ МВт (типичная мощность ТЭС и АЭС). Полагая $\Delta T = 5^\circ$, $\eta = \eta_0 = 0,4$, $c = 4,2$ кДж/кг·К, получим $\Delta m/\Delta t \sim 7,1 \cdot 10^4$ кг/с. Заметим, что сток Волги — $8,5 \cdot 10^6$ кг/с.

4. Холодильные машины. Цикл, обратный рассмотренному, используют для охлаждения тел. Принцип работы холодильной машины показан на рис. 28.3. Вначале рабочее тело приводится

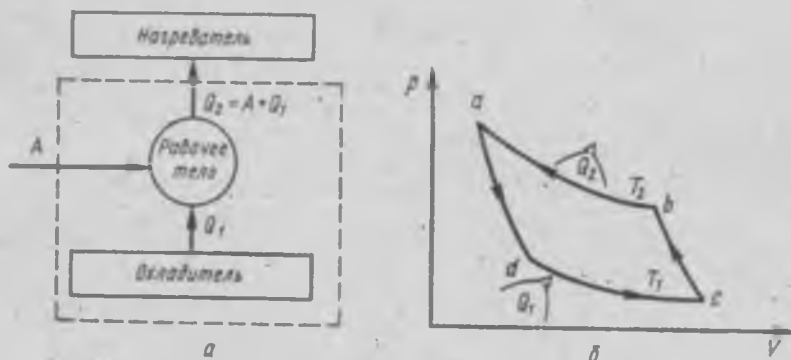


Рис. 28.3

в контакт с холодильником и создаются условия для его расширения. При этом рабочее тело совершает работу A' , а холодильник отдает рабочему телу количество тепла Q_1 , охлаждаясь еще больше. Изменение внутренней энергии $\Delta U_{dc} = Q_1 - A'$. Для того чтобы вернуть рабочее тело в исходное состояние, необходимо произвести сжатие и передать нагревателю количество тепла Q_2 . Работа, совершаемая внешними телами при сжатии, равна A_2 , а изменение внутренней энергии рабочего тела $\Delta U_{da} = -Q_2 + A_2$. Измене-

ние внутренней энергии за цикл $\Delta U = Q - A = 0$, где $Q = -Q_2 + Q_1$, $A' = -A_2 + A_1$. Поскольку при проведении цикла в направлении против часовой стрелки $Q < 0$, то совершаемая рабочим телом работа $A' = Q_1 - Q_2 < 0$. Следовательно, при работе холодильной машины внешние тела должны затрачивать работу $A = -A' = Q_2 - Q_1 > 0$. Таким образом, переход тепла от менее нагретого тела к более нагретому возможен только за счет работы, совершаемой внешними телами над рабочим веществом. Поэтому для работы холодильной машины необходим посторонний двигатель. Очевидно, холодильная машина передает нагревателю (или окружающей ее среде) теплоту Q_2 , большую, чем теплота Q_1 , отбираемая от более холодного тела, на величину работы, затраченной посторонним двигателем: $Q_2 = Q_1 + A > Q_1$. Следовательно, каждая холодильная машина нагревает окружающую среду.

Для реализации цикла необходимо подобрать рабочее вещество, поглощающее теплоту при низкой температуре. В бытовых холодильниках рабочим телом служит фреон — газ, который может превращаться в жидкость в конденсаторе, расположенном в нагревателе. В испарителе, расположенном в холодильнике, давление значительно ниже, чем в конденсаторе. Проходя через испаритель, жидкость испаряется, поглощая тепло Q_1 . После этого газ нагнетают в конденсатор — газ сжимается и выделяется количество тепла Q_2 .

5. Тепловые насосы. Эффективность работы холодильной машины определяют холодильным коэффициентом

$$k = \frac{Q_1}{A} = \frac{Q_1}{Q_2 - Q_1}. \quad (28.4)$$

Чем большее количество теплоты будет отобрано у холодильника при минимуме затраченной работы, тем лучше работает холодильная установка. Для бытовых холодильников $k \sim 2-5$. Из (28.4) получаем количество теплоты, переданной нагревателю

$$Q_2 = (1 + k)A.$$

Следовательно, холодильную машину можно использовать как нагреватель. Тепловой насос — тот же холодильник — охлаждает атмосферный воздух и передает полученное тепло воздуху в помещении. Пусть $k = 4$. Тогда количество теплоты, сообщаемое помещению, в пять раз больше эквивалентной работы. Если количество электроэнергии A затратить на обогрев, то в помещении выделится лишь количество теплоты, равное A . Эффективность тепловых насосов, используемых на практике, существенно ниже значения $1 + k$. Одна из проблем — выбор холодного источника, от которого отбирается теплота в зимнее время. Самое большое достоинство теплового насоса — обратимость. Зимой он нагревает воздух, а летом может быть использован как кондиционер.

§ 29. ЗАКОН СОХРАНЕНИЯ ЗАРЯДА. ЗАКОН КУЛОНА

До сих пор мы изучали явления, в которых главную роль играла единственная характеристика частиц вещества — их масса. Теперь мы переходим к изучению необъятной области явлений, понимание которых невозможно без введения новой характеристики — внутреннего свойства частиц — электрического заряда. Материальным носителем наименьшей массы и наименьшего отрицательного электрического заряда является электрон, открытый в 1897 г. английским физиком Дж. Дж. Томсоном. Это открытие завершило длительный этап развития учения об электричестве и положило начало современной науке — атомной и ядерной физике.

Еще в древнем мире была известна способность янтаря, потертого мехом, притягивать небольшие кусочки других материалов. Однако только в 1600 г., благодаря английскому физiku У. Гильберту (1544—1603), учение об электричестве обогатилось новыми открытиями. С помощью своего электроскопа он выяснил, что подобным свойством обладают и другие вещества. Именно Гильберт ввел слово электричество (греч. — янтарь), назвав стеклянную палочку, потертую шелком, «наэлектризованной». Прошло еще более ста лет, и в 1733 г. французский ученый Ш. Дюфе устанавливает существование двух различных родов электричества: «смоляного» и «стеклянного». Каждое из них отталкивает электричество своего вида и притягивает противоположное. Постепенно накапливались новые знания. «Электрическая сила» обнаружила способность распространяться по нити — первая «линия электропередачи». С изобретением в 1745 г. первого конденсатора — лейденской банки — появилась возможность проводить многочисленные опыты с большими количествами электричества. С ее помощью получали крупные электрические искры. Опыты с электричеством стали необычайно популярными.

Первая последовательная теория электрических явлений была создана американским ученым Б. Франклином (1706—1790), научная деятельность которого продолжалась всего семь лет [17]. В 1749 г. он высказал гипотезу, что оба рода электричества представляют собой избыток или недостаток «электрической жидкости». В его теории избыток электрической жидкости назывался

положительным зарядом, а недостаток — отрицательным. Франклин предположил, что при натирании стеклянной палочки шелком часть электрической жидкости перетекает от шелка к стеклу, в результате заряд палочки становится положительным, а шелка — отрицательным; причем величины этих зарядов одинаковы. В этом утверждении — основной смысл закона сохранения заряда. После открытия основных носителей электрического заряда — электронов — выяснилось, что при трении двух веществ в последовательности: мех, стекло, шерсть, шелк, янтарь, каучук, — способность веществ отдавать электроны уменьшается и соответственно, наоборот, способность приобретать электроны увеличивается от начала к концу списка [25]. Наиболее заметна электризация при трении веществ, далеко отстоящих друг от друга в этой последовательности. Следовательно, электроны переходят от стеклянной палочки на шелк. Для того чтобы не менять введенного Франклином направления тока — от шелка к палочке, — пришлось приписать электронам отрицательный заряд. Правда, теперь мы знаем, что положительный заряд палочки (недостаток электронов) образуется положительно заряженными ионами.

Когда Франклин установил электрическую природу молнии, он смог осуществить свое главное изобретение — молниеотвод. Внедрение молниеотвода в практику сопровождалось длительной борьбой с воззрениями суеверно-религиозного, научного и политического характера [26]. Впервые в истории научное открытие вызвало столь широкий общественный интерес. В это же время в России М. В. Ломоносов развил теорию атмосферного электричества.

Во второй половине XVIII в. началось количественное изучение электричества. В 1785 г. французский физик Ш. Кулон экспериментально установил закон взаимодействия точечных зарядов — основной закон электростатики. Почти 100 лет спустя выяснилось (это сделал Максвелл), что тот же закон был открыт в 1773 г. английским физиком Г. Кавендишем, который не публиковал свои работы.

1. Закон сохранения заряда. Наименьшая частица химического элемента — атом — состоит из ядра и движущихся вокруг него электронов. Ядро в свою очередь состоит из протонов и нейтронов. Протон, электрон и нейтрон называют субатомными частицами. Электрон является носителем отрицательного заряда, а протон — положительного. Заряд нейтрона равен нулю.

Электрический заряд является внутренней характеристикой частиц. Вся совокупность электрических и магнитных явлений есть следствие движения и взаимодействия зарядов. Опыт показывает, что величина заряда всех субатомных частиц одинакова и кратна абсолютной величине заряда электрона

$$e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Кл.}$$

Поэтому любое заряженное тело содержит множество элементарных зарядов постоянной величины e . Заряд тела кратен элементарному заряду e . Таким образом, заряд тела, как и его масса, может изменяться только скачками. Однако заряд e настолько мал, что во многих исследованиях электрический заряд тела можно считать непрерывной величиной.

На основе большого числа экспериментов, проводившихся до сих пор, был установлен закон сохранения электрического заряда: алгебраическая сумма электрических зарядов в изолированной системе всегда остается постоянной. Под изолированной мы понимаем такую систему, через границы которой не может проникнуть вещество. В любых процессах превращения и взаимодействия элементарных частиц или макроскопических тел выполняется закон сохранения заряда.

2. Закон Кулона. В курсе физики средней школы мы изучаем в основном явления, обусловленные действием двух фундаментальных сил: гравитационных сил и сил электромагнитной природы. Изучение последних составляет предмет электродинамики, или теории электромагнетизма. Круг явлений, рассматриваемый этой теорией, чрезвычайно велик, так как физические и химические свойства веществ в значительной степени объясняются электромагнитными силами. Известные в механике силы трения и реакции также являются проявлением сил электрического взаимодействия.

Самым простым разделом теории электромагнетизма является электростатика. В этом разделе мы имеем дело с неподвижными или жестко закрепленными зарядами. Изучая электростатику, часто используют понятие точечного заряда. Точечным зарядом называется заряженное тело, размеры которого малы по сравнению с расстоянием его до других тел. Взаимодействие точечных зарядов описывается законом, открытым в 1785 г. Ш. Кулоном: на каждый из двух точечных зарядов q_1 и q_2 , находящихся в вакууме на расстоянии r друг от друга, действует сила, прямо пропорциональная произведению зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Сила направлена по прямой, соединяющей заряды (рис. 29.1).

В векторной форме закон Кулона имеет вид

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e}. \quad (29.1)$$

Здесь $\vec{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2 , $r = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1|$, $\vec{e} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)/r$ — единичный вектор, направленный от q_2 к q_1 , k — коэффициент, определяемый выбором системы единиц. Согласно третьему закону Ньютона сила $\vec{F}_{21}$, действующая на заряд q_2 со стороны заряда q_1 , равна $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. Если знаки q_1 и q_2

одинаковы, то произведение $q_1 q_2 > 0$ — заряды отталкиваются. Для зарядов противоположных знаков произведение $q_1 q_2 < 0$ — заряды притягиваются.

Закон Кулона (29.1) описывает и взаимодействие зарядов, движущихся со скоростями, значительно меньшими, чем скорость света, в частности систему электрон — протон атома водорода.

3. Единица заряда. Любая система единиц должна быть построена таким образом, чтобы все физические величины можно было выразить через минимальное число основных независимых

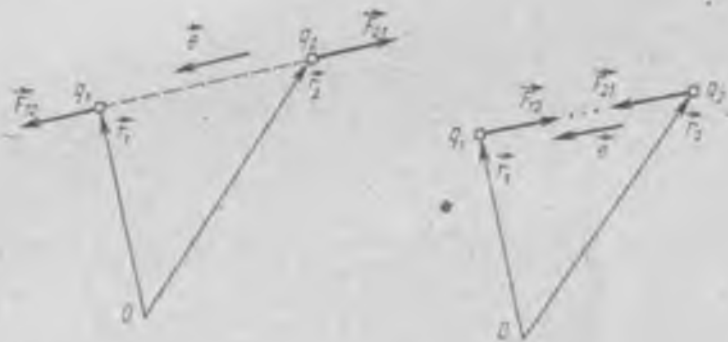


Рис. 29.1

единиц, представленных в виде физических эталонов. В качестве основных единиц в механике выбирают единицы длины, массы и времени. Для описания электромагнитных явлений необходимо ввести еще четвертую независимую единицу. Рассмотрим один из способов определения единицы заряда, основанный на законе Кулона.

Численное значение силы взаимодействия двух одинаковых зарядов $q_1 = q_2 = q$ в вакууме равно kq^2/r^2 .

Из этого выражения мы можем определить только размерность произведения kq^2 , но ничего не можем сказать в отдельности о размерности k и q . Это естественно, так как закон Кулона оперирует с новым понятием — электрическим зарядом, не встречавшимся ранее. Мы можем, однако, выбрать величину k безразмерной и положить ее равной единице. Тем самым мы устанавливаем определенную единицу заряда и ее размерность. Эту новую систему единиц называют абсолютной электростатической системой единиц (СГСЭ). В такой системе основными единицами являются сантиметр, грамм, секунда и абсолютная электростатическая единица заряда.

В СИ основными единицами являются метр, килограмм, секунда и единица силы тока — ампер. За единицу заряда в СИ принят кулон. Эта единица является производной и определяется как заряд, прошедший за 1 с через поперечное сечение проводника, ток в котором постоянен и равен 1 А (1 Кл = 1 А · 1 с). Поскольку единица заряда в СИ уже выбрана, коэффициент k в формуле закона Кулона становится размерным и равным

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2. \quad (29.2)$$

Обычно в СИ используется рационализированная запись законов электричества, в которой коэффициент k полагают равным $1/4\pi\epsilon_0$. Постоянная ϵ_0 называется электрической постоянной,

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}, \quad \epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / \text{Н} \cdot \text{м}^2.$$

Закон Кулона в рационализированной форме в СИ имеет вид

$$\vec{F}_{12} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{e} = -\vec{F}_{21}. \quad (29.3)$$

Выделение коэффициента $1/4\pi$ из k предпринято для исключения иррационального множителя 4π в наиболее часто встречающихся в практике формулах за счет введения этой величины в другие формулы, как, например, в данном случае в законе Кулона. Далее мы будем пользоваться законом Кулона в форме (29.1) с коэффициентом (29.2).

Если заряд q_1 содержит n_1 элементарных зарядов, а q_2 — n_2 зарядов, то сила взаимодействия может быть представлена в виде

$$F = k e^2 \frac{n_1 \cdot n_2}{r^2} = 2,306 \cdot 10^{-28} \frac{n_1 n_2}{r^2}.$$

ПРИМЕР 29.1. Какой величины достигнет сила притяжения между двумя одинаковыми свинцовыми шариками массой $m = 10$ г, расположенными на расстоянии $r = 10$ м, если бы можно было у каждого атома свинца первого шарика отнять по одному электрону и перенести на второй шарик? Атомная масса свинца $M = 207$.

После указанной процедуры шарики получают противоположные по знаку заряды Ne , где e — заряд электрона, N — число атомов свинца в шарике. В Мг свинца содержится число атомов, равное числу Авогадро N_A .

Очевидно, что в m г свинца число атомов в m/M раз больше: $N = (m/M) N_A$. Сила взаимодействия шаров оказывается равной

$$F = k \left(\frac{Ne}{r} \right)^2 = k \left(\frac{m}{M} N_A \frac{e}{r} \right)^2.$$

Подставляя числовые данные, находим

$$F = 9 \cdot 10^9 \left(\frac{10 \cdot 6,02 \cdot 10^{23}}{207} \frac{1,6 \cdot 10^{-19}}{10} \right)^2 = 2 \cdot 10^{11} \text{ Н.}$$

Принимая во внимание, что $1 \text{ кгс} = 9,8 \text{ Н}$, получим колоссальное значение силы притяжения $F = 2 \cdot 10^{11} \text{ тс}$.

Разобранный пример весьма поучителен. В каждом предмете нашего мира число положительных зарядов почти в точности равно числу отрицательных зарядов. Эти заряды почти полностью компенсируют друг друга. Электрические явления, изучаемые в обычных условиях, возникают от ничтожного нарушения баланса положительных и отрицательных зарядов. Если же баланс нарушается сильно как в нашем примере, то возникают невообразимо большие силы электрического взаимодействия.

• 4. Свойство суперпозиции. Из опыта следует, что сила взаимодействия между двумя зарядами не зависит от присутствия других зарядов. Поэтому независимо от числа зарядов уравнение (29.1) можно использовать для вычисления сил $F_1, F_2, \dots$, действующих на данный заряд q_0 со стороны остальных зарядов $Q_1, Q_2, \dots$. Отсюда можно заключить, что результирующая сила F_0 , действующая на данный заряд q_0 , равна векторной сумме сил

$$\vec{F}_0 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots \quad (29.4)$$

Это утверждение носит название свойства суперпозиции, или свойства наложения. Свойство суперпозиции используется в электростатике при рассмотрении взаимодействий тел, которые нельзя считать точечными. Для этого каждое тело следует мысленно разбить на достаточно малые части так, чтобы каждую из них можно было рассматривать как точечный заряд. После этого, используя закон Кулона, вычислим силы, действующие между малыми частями двух тел, и векторно сложим их. Силы, действующие на каждое из тел, получатся тем точнее, чем меньше будут составные части, на которые мы разбивали тела. В пределе мы должны брать бесконечно малые объемы, чтобы получить точный ответ.

ЗАДАЧА 29.2. В четырех точках замкнутой, нерастяжимой и непроводящей нити на равных расстояниях закреплены четыре одноименных заряда Q, q, Q и q . В положении равновесия нить принимает форму ромба. Определить его углы.

Решение. Для удобства перенумеруем заряды, как показано на рис. 29.2 ($q_1 = q_3 = Q, q_2 = q_4 = q$). На каждый заряд действуют силы электростатического отталкивания и силы натяжения нитей. Для решения задачи в силу симметрии зарядов достаточно использовать условие равновесия зарядов 1 и 2. Согласно § 11 условия равновесия имеют вид

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{T}_{12} + \vec{T}_{14} = 0, \quad (1)$$

$$\vec{F}_{23} + \vec{F}_{24} + \vec{F}_{21} + \vec{T}_{23} + \vec{T}_{21} = 0. \quad (2)$$

Проекция (1) на горизонтальное и (2) на вертикальное направления дают тождество $0=0$. Проекция (1) на вертикальное и (2) на горизонтальное направления приводят к уравнениям

$$\frac{kQ^2}{\left(2a \sin \frac{\alpha}{2}\right)^2} + 2k \frac{qQ}{a^2} \sin \frac{\alpha}{2} - 2T \sin \frac{\alpha}{2} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{kq^2}{\left(2a \cos \frac{\alpha}{2}\right)^2} + 2k \frac{qQ}{a^2} \cos \frac{\alpha}{2} - 2T \cos \frac{\alpha}{2} = 0 \quad (4)$$

(a — расстояние между зарядами).

Система (3), (4) содержит две неизвестные величины α и Ta^2 . Из (3) и (4) следует, что

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \left(\frac{Q}{q}\right)^{2/3}.$$

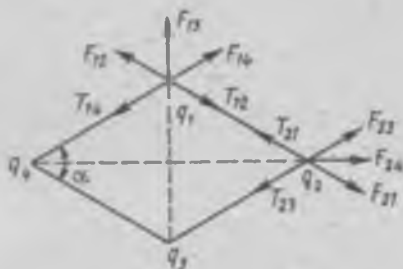


Рис. 29.2



Рис. 29.3

ЗАДАЧА 29.3. Определить величину и направление силы взаимодействия протона и нейтрального тела (диполя), представляющего собой систему из двух зарядов q и $-q$, жестко закрепленных на расстоянии d друг от друга. Протон находится в точке, расположенной на одинаковом расстоянии r от каждого из зарядов ($q=5 \cdot 10^{-10}$ Кл, $d=0,2$ м, $r=1$ м, заряд протона $Q=1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

Решение. Изобразим силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ взаимодействия между зарядами $\pm q$ и зарядом Q (рис. 29.3). Величины этих сил одинаковы и равны kqQ/r^2 . Остается сложить эти силы векторно! Результирующая сила

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

Вертикальная составляющая силы $\vec{F}$ равна нулю, а горизонтальная

$$F = 2k \frac{qQ}{r^2} \cos \alpha.$$

Учитывая, что $\cos \alpha = d/2r$, находим величину силы

$$F = k \frac{qQd}{r^2}.$$

Сила направлена параллельно прямой, соединяющей заряды. Отметим, что сила взаимодействия диполя и точечного заряда изменяется обратно пропорционально кубу расстояния. Подставляя числовые данные, находим $F = 9 \cdot 10^9 \cdot 5 \cdot 10^{-10} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 0,2 = 1,44 \cdot 10^{-19}$ Н.

§ 30. ЭЛЕКТРИЧЕСКОЕ ПОЛЕ. НАПРЯЖЕННОСТЬ И ПОТЕНЦИАЛ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ

1. Электрическое поле. Из (29.1) следует, что при смещении заряда q_2 сила $\vec{F}_{12}$ определяется расстоянием между зарядами в один и тот же момент времени, т. е. взаимодействие заряженных частиц осуществляется мгновенно, непосредственно через пустое пространство. В этом состоит, так называемый, принцип дальнего действия.

Выдающийся английский физик М. Фарадей первым выступил против общепризнанной точки зрения. Он искал причину и реального переносчика взаимодействия зарядов. Фарадей был глубоко убежден в том, что «материя не может действовать там, где ее нет» (Дж. Дж. Томсон). Он исходил из концепции близкого действия, предполагая, что взаимодействие зарядов осуществляется через создаваемые ими в пространстве электрическое и магнитное поля. Для описания поля Фарадей в 30-е г. прошлого века ввел понятие силовых линий, определяющих силу, действующую на заряды. Идеи Фарадея о реальности полей получили развитие в трудах Максвелла.

Поместим заряд Q в начало координат (рис. 30.1) и проведем опыт по измерению сил, действующих на заряды $q_1, q_2, \dots$, которые будем помещать по очереди в некоторую точку пространства с координатами x_0, y_0, z_0 . В результате получим ряд значений $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots$. При обработке опытных данных мы с удивлением обнаруживаем, что отношения $\vec{F}_n/q_n$ одинаковы и равны постоянному вектору

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \dots = \vec{E}_0.$$

Теперь повторим опыт несколько раз, помещая заряды в новые точки пространства. Результат всех опытов можно записать в виде

$$\frac{\vec{F}_1}{q_1} = \frac{\vec{F}_2}{q_2} = \dots = \vec{E}(x, y, z),$$

где $\vec{E} = (E_x(x, y, z), E_y(x, y, z), E_z(x, y, z))$. Поскольку правая часть не зависит от q , то мы приходим к выводу, что отношение $\vec{F}/q$ характеризует нечто, существующее в данной точке, безотносительно к заряду q . Вектор

$$\vec{E}(x, y, z) = \frac{\vec{F}(x, y, z)}{q} \quad (30.1)$$

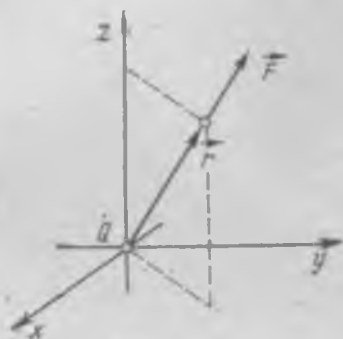


Рис. 30.1

называют напряженностью электрического поля, создаваемого зарядом Q .

С другой стороны, если вектор напряженности электрического поля известен, то сила, действующая на заряд, помещенный в точку с координатой x, y, z , $\vec{F}(x, y, z) = q\vec{E}(x, y, z)$.

Таким образом, понятие поля позволяет перейти к другому способу описания электрического взаимодействия. Вместо того чтобы говорить о том, что заряд Q действует с силой $\vec{F}$ на заряд q , можно сказать, что заряд Q создает электрическое поле, а на заряд q , находящийся в этом поле, действует сила $\vec{F} = q\vec{E}$. Разумеется, заряд q также создает электрическое поле, в котором на заряд Q действует сила, равная $-\vec{F}$. Полевой способ описания взаимодействия оказался очень плодотворным для развития физики, так как при описании электромагнитных явлений существенными оказываются только свойства самого поля. Различные же источники поля несущественно.

Поясним теперь, почему электрическое поле является одним из видов материи, самостоятельной физической реальностью. Если изменить положение заряда Q , то напряженность поля в том месте, где находится заряд q , изменится: электрическое поле системы зарядов q, Q должно перестроиться. При перемещении заряда Q поле изменится сначала к ближайшей к нему окрестности. Приращение напряженности поля будет распространяться со скоростью света c . Таким образом, сила $\vec{F}$, действующая на заряд q , изменится не мгновенно, а лишь через некоторый промежуток времени, с запаздыванием. Далее мы увидим, что электрическое поле, как и частицы, обладает энергией.

2. Напряженность поля точечного заряда. Подставляя в (30.1) выражение для силы $\vec{F} = (kqQ/r^2)\vec{e}$, действующей на заряд q , получим

$$\vec{E} = k \frac{Q}{r^2} \vec{e}, \quad \vec{e} = \frac{\vec{r}}{r}. \quad (30.2)$$

Электрическое поле неподвижных зарядов называется электростатическим. Формула (30.2) определяет напряженность поля точечного заряда. Направление вектора $\vec{E}$ определяется направлением вектора $\vec{e}$. Поэтому если $Q > 0$, то вектор напряженности направлен от заряда; если $Q < 0$, то вектор $\vec{E}$ направлен к заряду. Компоненты вектора $\vec{E}$ равны

$$E_x = k \frac{Qx}{r^3}, \quad E_y = k \frac{Qy}{r^3}, \quad E_z = k \frac{Qz}{r^3},$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Величина напряженности электрического поля, создаваемого изолированным зарядом Q на расстоянии r

$$E = k \frac{Q}{r^2}.$$

В СИ единица напряженности $1 \text{ Н/Кл} = 1 \text{ В/м}$ (вольт на метр).

3. Напряженность поля системы зарядов. Рассмотрим систему неподвижных дискретных зарядов $Q_1, Q_2, \dots$ и найдем напряженность поля, создаваемого системой в некоторой точке пространства. Помещая в эту точку заряд q_0 , найдем согласно (29.4) действующую на него силу $\vec{F}_0$. Далее определим напряженность $\vec{E}$, создаваемую системой зарядов в искомой точке, соотношением

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_0}{q_0}. \quad (30.3)$$

Подставляя (29.4) в (30.3), получим

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots \quad (30.4)$$

Следовательно, векторы напряженности, как и векторы сил, действующих на заряд q_0 , обладают свойством суперпозиции. Отсюда можно заключить, что напряженность поля, создаваемого системой зарядов, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности.

Определение напряженности поля по известному распределению зарядов — простая, но утомительная задача. В случае непрерывного распределения зарядов внутри и на поверхности макроскопического тела сумма (30.4) заменяется интегралом по объ-

ему тела. (В § 31 напряженность поля $\vec{E}(x, y, z)$, создаваемого заряженными телами, будет получена независимо от закона Кулона на основе теоремы Гаусса — Остроградского.)

Сила, действующая на заряд q в любом электростатическом поле напряженностью $\vec{E}(x, y, z)$, равна

$$\vec{F}(x, y, z) = q\vec{E}(x, y, z). \quad (30.5)$$

ЗАДАЧА 30.1. Три одинаковых положительных заряда q расположены в вершинах равностороннего треугольника. Сторона треугольника равна a . Найти напряженность поля: а) в точке, являющейся центром описанной окружности; б) в точке, лежащей на середине любой из сторон; в) в вершине правильного тетраэдра, для которого треугольник служит основанием ($q=10^{-10}$ Кл, $a=0,05$ м).

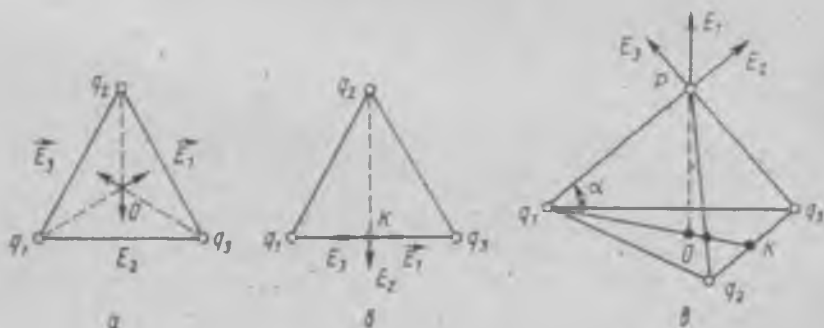


Рис. 30.2

Решение. а) Каждый заряд создает в точке O напряженности $\vec{E}_1, \vec{E}_2, \vec{E}_3$ (рис. 30.2 а), величины которых равны. Полная напряженность $\vec{E}$ равна сумме трех векторов:

$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что суммы горизонтальных и вертикальных составляющих этих векторов обращаются в нуль. Итак, $\vec{E} = 0$.

б) Из рис. 30.2 б видно, что сумма векторов $\vec{E}_1$ и $\vec{E}_3$ равна нулю. Напряженность в точке K оказывается равной

$$E = k \frac{4q}{3a^2} = 4,8 \cdot 10^3 \text{ Н/м.}$$

в) Каждый заряд создает в точке P напряженность величиной kq^2/a^2 (рис. 30.2 в). Векторы напряженности образуют с верти-

калью угол $\pi/2 - \alpha$. Сумма горизонтальных составляющих векторов $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$ и $\vec{E}_3$ равна нулю, а сумма вертикальных составляющих

$$E = 3k \frac{q}{a^2} \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right).$$

Из геометрических соображений следует, что $\sin \alpha = \sqrt{2/3}$. Поэтому

$$E = k \sqrt{6} \frac{q}{a^2} = 2,94 \cdot 10^3 \text{ Н/Кл.}$$

ПРИМЕР 30.2. Найдем напряженность поля, создаваемого диполем — системой из двух разноименных и одинаковых по величине зарядов Q , расположенных на фиксированном расстоянии $2l$.

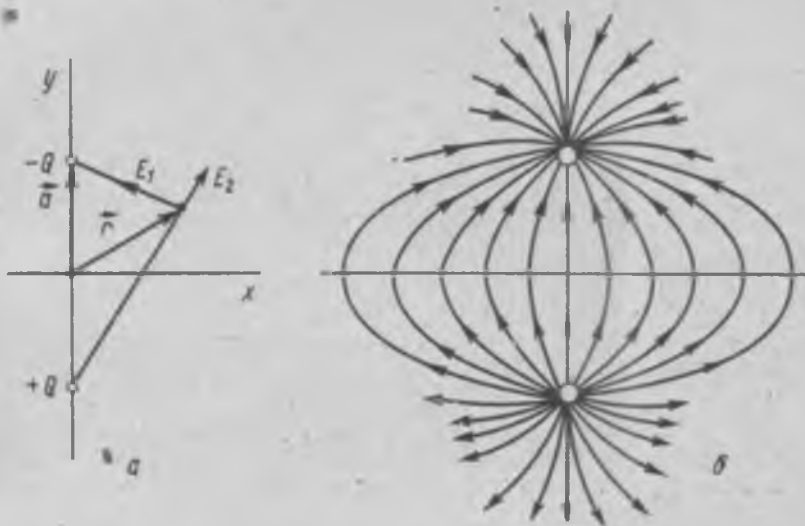


Рис. 30.3

Поместим начало координат в середину отрезка $2l$, а ось y направим по прямой, соединяющей заряды (рис. 30.3 а). Согласно (30.4)

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_1(\vec{r}) + \vec{E}_2(\vec{r}),$$

где $\vec{E}_{1,2}$ — поля, создаваемые зарядами $Q_1 = -Q$, $Q_2 = Q$. Учитывая (30.2), находим

$$\vec{E}(\vec{r}) = - \frac{kQ(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3} + \frac{kQ(\vec{r} + \vec{a})}{|\vec{r} + \vec{a}|^3}, \quad (1)$$

$\vec{a} = (0, l, 0)$. В точке с координатой $r(x, y, 0)$ составляющие вектора $\vec{E}$ равны: $E_z = 0$,

$$E_x(x, y, 0) = -\frac{kQx}{[x^2 + (l-y)^2]^{3/2}} + \frac{kQx}{[x^2 + (l+y)^2]^{3/2}},$$

$$E_y(x, y, 0) = \frac{kQ(l-y)}{[x^2 + (l-y)^2]^{3/2}} + \frac{kQ(l+y)}{[x^2 + (l+y)^2]^{3/2}}.$$

В точках $(0, y, 0)$, $(0, -y, 0)$, симметричных относительно начала координат, напряженности поля одинаковы. Отметим также, что вектор $\vec{E}$ в любой точке плоскости xz перпендикулярен к этой плоскости. Например, в точках $(x, 0, 0)$ напряженность поля определяется компонентами вектора $\vec{E}$

$$E_x = 0, E_y = \frac{2kQl}{(x^2 + l^2)^{3/2}}, E_z = 0.$$

4. Силовые линии. В общем случае электрическое поле, определяемое тремя функциями $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$, $E_z(x, y, z)$, имеет сложную структуру. Для большей наглядности можно изобразить поле графически с помощью силовых линий. Силовой линией называется такая линия, касательная к которой в каждой точке совпадает с направлением напряженности поля в этой точке. Поэтому силовые линии направлены от положительных зарядов к отрицательным. Величина напряженности поля при таком способе изображения пропорциональна числу силовых линий, пересекающих единицу площади, расположенной поперек линий.

Силовые линии обладают следующими свойствами:

1. Силовые линии непрерывны. Они «выходят» из положительного заряда и «входят» в отрицательный заряд или уходят в бесконечность.

2. Силовые линии нигде не пересекаются. Если бы они пересекались, то в точке пересечения вектор напряженности имел бы два различных направления.

Обычно при графическом изображении поля густота силовых линий определяет величину вектора напряженности; при этом одна силовая линия на единицу площади, перпендикулярной линии, соответствует единице напряженности.

Мы не приводим способа построения силовых линий по известному полю $\vec{E}(x, y, z)$, поскольку он связан с интегрированием дифференциальных уравнений. Существуют также приближенные методы графического изображения поля, создаваемого электродами сложной формы. Однако в тех случаях, когда заряженное тело обладает некоторой симметрией, расположение силовых линий можно обосновать правдоподобными рассуждениями. На

рис. 30.3б изображены силовые линии поля, создаваемого диполем.

ПРИМЕР 30.3. Электрическое поле заряженной безграничной плоскости.

Рассмотрим тонкий плоский слой, по которому равномерно распределен положительный электрический заряд, причем все прочие заряды отсутствуют (рис. 30.4). Поскольку плоскость безгранична, то вследствие симметрии электрическое поле по обе стороны слоя должно быть направлено перпендикулярно к плоско-

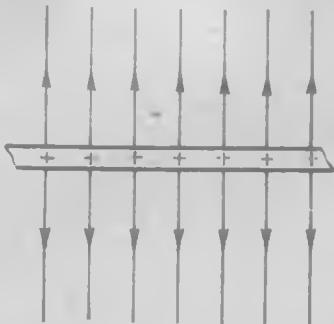


Рис. 30.4

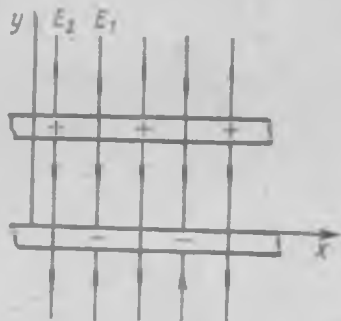


Рис. 30.5

сти, а число силовых линий, выходящих вверх и вниз, в точности одинаково. Следовательно, в точках, расположенных на равных расстояниях по разные стороны от слоя, векторы напряженности имеют одинаковую величину, но противоположные направления.

ПРИМЕР 30.4. Поле двух параллельных заряженных пластин.

Пусть изолированная отрицательно заряженная пластина создает поле напряженностью $\vec{E}_1$, а положительно заряженная — напряженностью $\vec{E}_2$. Расположим теперь эти пластины параллельно друг другу на расстоянии d и определим поле, создаваемое такой системой, пренебрегая краевыми эффектами. В силу свойства суперпозиции результирующее поле представляет собой сумму полей, создаваемых каждой пластиной в отдельности.

Совместим плоскость xz с отрицательно заряженной пластиной, а ось y направим перпендикулярно к пластинам (рис. 30.5). Тогда компоненты напряженности поля, создаваемого двумя пластинами, равны $E_x = E_z = 0$,

$$E_y = \begin{cases} E_1 - E_2, & y < 0, \\ -E_1 - E_2, & 0 \leq y \leq d, \\ E_2 - E_1, & y > d. \end{cases}$$

В частном случае, когда величина поверхностной плотности зарядов каждой из пластин одинакова, одинакова и величина полей, создаваемых каждой пластиной, т. е. $E_1 = E_2 = E$. Поэтому поле вне пластин равно нулю и полностью сосредоточено между пластинами. Величина поля равна $2E$. Результирующее поле может быть изображено параллельными силовыми линиями одинаковой густоты. Поле с такими свойствами называется однородным.

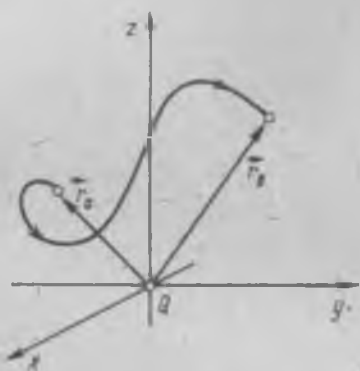


Рис. 30.6

5. Потенциал электрического поля. Электрическое поле можно характеризовать не только векторной величиной — напряженностью, но и связанной с ней скалярной величиной — потенциалом.

Потенциал точечного заряда. Для того чтобы ввести понятие электрического потенциала, поместим заряд Q в начало координат и определим работу сил, действующих на заряд q со стороны заряда Q при его перемещении из точки a

в точку b (рис. 30.6). При этом к заряду q может быть приложено любое количество прочих сил. Аналогичную задачу для работы силы притяжения мы уже решили в § 14 п. 3. Поэтому приведем окончательный результат

$$A_{ab} = k \frac{qQ}{r_a} - k \frac{qQ}{r_b} \quad (30.6)$$

Мы видим, что отношение A_{ab}/q не зависит от заряда q и полностью определяется положением точек a и b .

Разность потенциалов, создаваемых любым электростатическим полем в точках a и b , определяется соотношением

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{r A_{ab}}{q} \quad (30.7)$$

где $\varphi(x, y, z)$ — скалярная функция, называемая потенциалом электрического поля. Сравнивая (30.6) и (30.7), мы видим, что правая часть (30.6) является разностью двух значений функции

$$\varphi(x, y, z) = k \frac{Q}{r} + \text{const} \quad (30.8)$$

в точках a и b . Очевидно, что функция $\varphi(x, y, z)$ не имеет никакого отношения к заряду q и форме траектории, по которой его перемещали от точки a к точке b . Константа в (30.8) несущест-

венна. Обычно ее фиксируют условием $\varphi(x_0, y_0, z_0) = 0$ в точке бесконечно удаленной от заряда Q . Тогда

$$\varphi(x, y, z) = k \frac{Q}{r}. \quad (30.8)$$

Поскольку работа силы, действующей со стороны электрического поля на заряд q при его перемещении из точки a в точку b , $A_{ab} = q(\varphi_a - \varphi_b)$, то, устремляя точку b в бесконечность, можно заключить, что потенциал (30.9) в точке a численно равен работе сил поля при перемещении единичного заряда из точки a в бесконечность.

Работа сил поля при перемещении заряда q из точки a в бесконечно близкую точку b равна

$$\Delta A = -q \Delta \varphi, \quad (30.10)$$

где $\Delta \varphi = \varphi_b - \varphi_a$ — приращение функции $\varphi(x, y, z)$. Что же касается понятия разности потенциалов, то, очевидно, разность потенциалов точек a и b равна разности значений функции (30.9) в точках a и b :

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b. \quad (30.11)$$

В теории цепей постоянного или переменного токов эту величину называют напряжением между точками a и b .

Единица потенциала. В СИ единицей потенциала является вольт: $1 \text{ В} = 1 \text{ Дж/Кл}$. Согласно (30.7) при перемещении заряда равного 1 Кл, из одной точки в другую с разностью потенциалов 1 В электрическое поле совершает работу 1 Дж. Единица названа в честь итальянского физика А. Вольты, создавшего в 1800 первый источник постоянного тока.

В атомной и ядерной физике широко используется энергетическая единица — электронвольт (эВ), равный произведению элементарного заряда на 1 В: $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Некоторые справочные данные. Потенциал, создаваемый притоном на первой боровской орбите радиусом $r = 0,53 \cdot 10^{-8} \text{ см}$, равен 27 В, напряженность поля $E = 5,1 \cdot 10^{11} \text{ В/м}$.

В воздухе при нормальных условиях искра возникает в промежутке шириной в 1 см при напряженности $E \sim 3 \cdot 10^6 \text{ В/м}$.

В линиях электропередач используется напряжение, достигающее 750 кВ, в этом случае напряженность поля $\sim 10 \text{ кВ/м}$.

Отрицательно заряженная нижняя часть облака, находящаяся обычно на высоте около 5 км, может иметь потенциал $3 \cdot 10^8$ вольт по отношению к Земле [27].

Потенциал, создаваемый системой зарядов. Если поле создается не одним, а многими зарядами, то из свойства суперпозиции сил следует, что потенциал этого поля в какой-либо точке пр...

странства есть сумма потенциалов, создаваемых каждым из зарядов в отдельности.

ЗАДАЧА 30.5. Определить потенциал, создаваемый системой зарядов, описанной в задаче 30.1, в случаях а), б), в).

Ответ:

$$а) \varphi = 3\sqrt{3}k(q/a) = 93,5 \text{ В},$$

$$б) \varphi = 2(2 + 1/\sqrt{3})k(q/a) = 92,8 \text{ В},$$

$$в) \varphi = 3k(q/a) = 54 \text{ В}.$$

Сопоставляя определения разности потенциалов (30.7) и потенциальной энергии (12.9), приходим к выводу, что потенциальная энергия заряда q в любом электростатическом поле

$$\Pi(x, y, z) = q\varphi(x, y, z). \quad (30.12)$$

Потенциальная энергия взаимодействия двух зарядов. Подставляя в (30.12) потенциал поля точечного заряда Q (30.9), получим потенциальную энергию взаимодействия двух точечных зарядов

$$\Pi(x, y, z) = k \frac{qQ}{r}. \quad (30.13)$$

Предположим, что заряды первоначально находились на бесконечно большом расстоянии. Используя закон сохранения полной энергии (12.16), найдем работу, которую совершили внешние силы по сближению зарядов на расстояние r ,

$$A^{\text{вн}} = \Pi_{\text{кон}} - \Pi_{\text{нач}} = k \frac{qQ}{r}.$$

Если $qQ > 0$, то $A^{\text{вн}} > 0$; при $qQ < 0$ $A^{\text{вн}} < 0$.

Аналогичным образом может быть определена потенциальная энергия взаимодействия системы N зарядов как работа, которую нужно совершить для создания системы из отдельных зарядов, находящихся первоначально на бесконечно больших расстояниях друг от друга.

ПРИМЕР 30.6. Три заряда q_1, q_2, q_3 расположены на расстояниях l_{12}, l_{13}, l_{23} друг от друга. Какую нужно совершить работу, чтобы поменять местами заряды q_1 и q_2 ?

Согласно теореме об изменении полной энергии (12.16) иско́мая работа, совершаемая внешней силой, равна

$$A' = \Pi_2 - \Pi_1,$$

где $\Pi_{1,2}$ — потенциальная энергия системы зарядов в двух рассматриваемых конфигурациях:

$$\Pi_1 = k \frac{q_1 q_2}{l_{12}} + k \frac{q_1 q_3}{l_{13}} + k \frac{q_2 q_3}{l_{23}},$$

$$\Pi_2 = k \frac{q_1 q_2}{l_{12}} + k \frac{q_2 q_3}{l_{13}} + k \frac{q_1 q_3}{l_{23}}.$$

Следовательно,

$$A' = q_3(q_1 - q_2) \left(\frac{1}{l_{23}} - \frac{1}{l_{13}} \right).$$

ЗАДАЧА 30.7. Электрон в начальный момент времени покоился в некоторой точке поля с потенциалом φ_1 . Чему равна скорость электрона в точке с потенциалом φ_2 ($\varphi_2 - \varphi_1 = 500$ В)?

Решение. При движении заряда в электростатическом поле сохраняется полная энергия

$$\frac{mv^2}{2} + q\varphi.$$

Приравнивая полную энергию заряда в двух точках траектории, находим искомую скорость ($q = -e$)

$$v = \sqrt{\frac{2e}{m}(\varphi_2 - \varphi_1)} = 1,33 \cdot 10^7 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧА 30.8. На концах гладкой непроводящей трубки длиной $2d$ закреплены положительные заряды одинаковой величины Q . На расстоянии b ($b \ll d$) от середины трубки помещают заряд $q > 0$ и отпускают его без начальной скорости. Определить ускорение и скорость заряда q в момент времени, когда он проходит через середину трубки. Масса заряда m .

Решение. Расположим координатную ось x вдоль оси трубки и поместим начало координат посередине трубки. Пусть x — смещение заряда q . Тогда согласно второму закону Ньютона

$$ma = -\frac{kqQ}{(d-x)^2} + \frac{kqQ}{(d+x)^2},$$

ускорение равно

$$a = -\frac{4kqQx}{m(d^2 - x^2)^2}. \quad (1)$$

Полагая $x=0$, находим ускорение $a=0$.

Скорость в точке $x=0$ можно найти, воспользовавшись законом сохранения полной энергии. В начальный момент времени полная энергия складывается из равной нулю кинетической энер-

гии и потенциальной, равной согласно (30.13) и свойству суперпозиции

$$k \frac{qQ}{d-b} + k \frac{qQ}{d+b}$$

После того как заряд переместился под действием сил поля в точку с координатой x , то полная энергия равна

$$\frac{mv^2}{2} + k \frac{qQ}{d-x} + k \frac{qQ}{d+x}$$

Приравнявая полные энергии, находим

$$v^2(x) = \frac{4kqQd}{m} \left(\frac{1}{d^2 - b^2} - \frac{1}{d^2 - x^2} \right) \quad (2)$$

Полагая $x=0$, находим искомую скорость

$$v(0) = 2b \sqrt{k \frac{qQ}{md} \frac{1}{d^2 - b^2}}$$

Заметим, что по известной зависимости $v^2(x)$ можно определить границы области, в которой может двигаться заряд q : из условия $v^2(x) > 0$ находим $|x| < b$.

Потенциал однородного поля. Найдём потенциал однородного поля напряженности $\vec{E}$, создаваемого двумя параллельными пластинками, заряженными равными, но противоположными за-

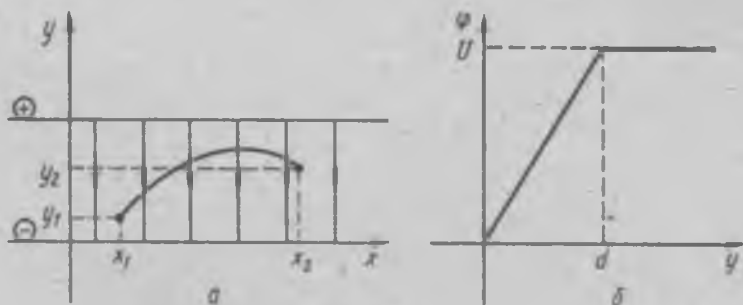


Рис. 30.7

рядами (рис. 30.7 а). Такая система называется плоским конденсатором. Вычислим работу, совершаемую силой $\vec{F} = q\vec{E}$ при перемещении заряда q из точки с координатой $(x_1, y_1, 0)$ в точку с координатой $(x_2, y_2, 0)$. Ответ известен — аналогичную задачу

по определению работы силы тяжести $\vec{F}=m\vec{g}$ мы уже решили в § 12 (ф-ла (12.6)):

$$A_{12} = -qEy_2 + qEy_1. \quad (30.14)$$

Сопоставляя это выражение с определением разности потенциалов (30.7), заключаем, что правая часть является разностью значений функции

$$\varphi(x, y, z) = Ey + \text{const}$$

в точках $(x_1, y_1, 0)$ и $(x_2, y_2, 0)$. Фиксируем константу произвольным условием $\varphi(0, 0, 0) = 0$. Тогда

$$\varphi(x, y, z) = Ey. \quad (30.15)$$

Подставляя (30.15) в (30.12), найдем потенциальную энергию заряда q в конденсаторе:

$$\Pi(x, y, z) = qEy. \quad (30.16)$$

Напряженность поля можно выразить через разность потенциалов U в точках $(0, 0, 0)$ и $(0, d, 0)$, где d — расстояние между пластинами, $U = \varphi(0, d, 0) - \varphi(0, 0, 0) = Ed$. Следовательно, в однородном поле

$$E = \frac{U}{d}. \quad (30.17)$$

График зависимости потенциала от y -координаты изображен на рис. 30.7 б.

ПРИМЕР 30.9. Диполь длиной l с зарядами $\pm q$ находится в конденсаторе (рис. 30.8). Найдем работу, которую необходимо совершить для того, чтобы диполь повернуть на 180° .

Вычисление работы может быть произведено прямым путем (см. § 12) или косвенным на основе закона сохранения полной энергии:

$$A^{\text{вн}} = \Pi_2 - \Pi_1,$$

где $\Pi_{1,2}$ — потенциальная энергия диполя в начальном и конечном состояниях. Пусть y -координата заряда q равна a . Тогда

$$\Pi_1 = qEa - qE(a+l) = -qEl, \quad \Pi_2 = -qEc + qE(a+l) = qEl.$$

Следовательно, $A^{\text{вн}} = 2qEl$. Очевидно, диполь находился в состоянии устойчивого равновесия. Поэтому работа внешних сил при перемещении диполя в неустойчивое положение положительна. Для того чтобы вернуть диполь в исходное положение, необходимо совершить работу $A^{\text{вн}2} = -2qEl < 0$.

6. Связь потенциала и напряженности поля. Получим соотношение между E и φ . Для этого рассмотрим поле E некоторой си-

системы неподвижных зарядов. В общем случае направление и величина вектора $\vec{E}$ изменяются от точки к точке. Пусть в произвольной точке a напряженность поля равна $\vec{E}$. Поместим в эту точку заряд q и перенесем его из точки a в точку b на расстояние Δs вдоль некоторого направления, задаваемого постоянным вектором $\vec{s}$. На рис. 30.9 изображены вектор напряженности $\vec{E}$, направленный всегда по касательной к силовой линии в точке a , и вектор перемещения $\Delta \vec{s}$. Если точки a и b расположены бесконечно близко друг к другу, то напряженность поля можно считать постоянной в пределах перемещения Δs . В этом случае работа сил поля по перемещению заряда из точки a в точку b равна

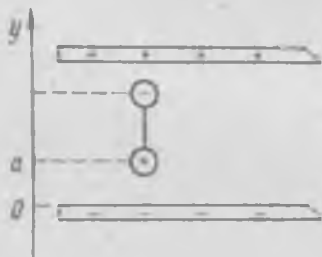


Рис. 30.8

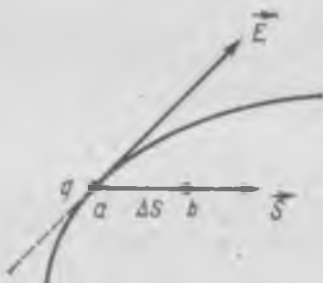


Рис. 30.9

на произведению перемещения Δs на проекцию силы $F_s = qE_s$ на направление перемещения, т. е.

$$\delta A = qE_s \Delta s.$$

С другой стороны, работа сил поля равна выражению (30.10). Приравнявая эти соотношения, мы видим, что в пределе $b \rightarrow a$ проекция напряженности поля в точке на направление вектора $\vec{s}$

$$E_s = -\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \varphi}{\Delta s}. \quad (30.18)$$

В случае однородного поля конденсатора правая часть (30.18) приобретает простой вид. Совмещая вектор $\vec{s}$ с осью x , получим $\Delta s = \Delta x$, $\Delta \varphi = \varphi(x + \Delta x, y, z) - \varphi(x, y, z) = 0$, $E_x = 0$. Направим теперь вектор $\vec{s}$ по оси y . Тогда $\Delta s = \Delta y$, $\Delta \varphi = \varphi(x, y + \Delta y, z) - \varphi(x, y, z) = -E \Delta y$, $E_y = -E$. Аналогичным образом получим $E_z = 0$.

7. Движение заряда в постоянном однородном электрическом поле. В любой точке постоянного однородного поля напряженности $\vec{E}$ на заряженную частицу действует постоянная сила $q\vec{E}$, где

q — заряд частицы. Кроме того, на частицу действует сила тяжести $m\vec{g}$. При движении частицы в среде следует учесть силу сопротивления и выталкивающую силу.

ПРИМЕР 30.10. Отклонение электронов в электрическом поле катодно-лучевой трубки. Электрон влетает в плоский конденсатор с начальной скоростью $v_0=10^7$ м/с, параллельной пластинам. Напряженность поля конденсатора $E=10^4$ В/м. Длина пластин $l=0,05$ м. Выйдя из области отклонения, электрон попадает на стенку трубки, расположенной на расстоянии $L=0,5$ м. Найдём величину отклонения электрона относительно первоначального направления.

Из второго закона Ньютона находим ускорение электрона

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E} + \vec{g}, \quad (1)$$

где $q=-q_0$ — заряд электрона. Оценим величину двух слагаемых в правой части (1). Учитывая, что отношение заряда электрона к его массе $q_0/m=1,7588 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, находим $(q_0/m)E=1,7588 \cdot 10^{15}$ м/с². Поэтому ускорением свободного падения в (1) можно пренебречь: $\vec{a} \approx (q/m)\vec{E}$. Поскольку ускорение постоянно, то зависимость радиус-вектора и скорости электрона определяются формулами (6.6), (6.7) после замены $\vec{g} \rightarrow \vec{a}$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{q}{2m} \vec{E} t^2, \quad (2)$$

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \frac{q}{m} \vec{E} t, \quad (3)$$

здесь $\vec{r}_0$ — радиус-вектор начального положения электрона, $\vec{v}_0$ — начальная скорость.

Введём прямоугольную систему координат xy , изображённую на рис. 30.10. Из (2) следует, что законы движения по осям x и y имеют вид

$$x(t) = v_0 t, \quad y(t) = \frac{q_0}{2m} E t^2. \quad (4)$$

Пусть t_1 — момент вылета электрона из конденсатора. Тогда $x(t_1)=l$ и, следовательно,

$$l = v_0 t_1.$$

Расстояние, на которое сместится электрон при вылете из конденсатора,

$$h = y(t_1), \quad h = \frac{q_0}{2m} E t_1^2 = \frac{q E l^2}{2 m v_0^2}.$$

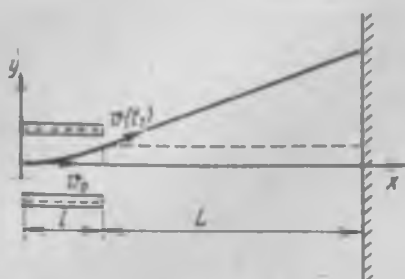


Рис. 30.10

Из (3) следует, что зависимость от времени проекции скорости на оси x и y имеет вид

$$v_x(t) = v_0, \quad v_y(t) = \frac{q_n}{m} Et.$$

Отсюда находим, что в момент вылета

$$v_x(t_1) = v_0, \quad v_y(t_1) = \frac{q_n}{m} E \frac{l}{v_0}.$$

Далее электрон движется прямолинейно со скоростью $\vec{v}(t_1)$. Время пролета до стенки трубки $T = L/v_0$, а смещение в направлении оси y

$$H = v_y(t_1) T = \frac{q_n E l L}{m v_0^2}.$$

Полное смещение электрона равно

$$\frac{q_n E l^2}{m v_0^2} \left(\frac{L}{l} + \frac{1}{2} \right) \approx 0,46 \text{ м.}$$

Заметим, что вертикальная составляющая скорости $\vec{v}_y(t)$ спустя всего 10^{-6} с после влета электрона в конденсатор достигла бы значения $\sim 2 \cdot 10^9$ м/с, сравнимой со скоростью света. Тогда формулы (2), (3) теряют смысл, так как область применимости классических уравнений движения (9.1) ограничена условием $v \ll c$. Однако в нашем случае $t_1 = 5 \cdot 10^{-9}$ с, $v_y(t_1) = 8,8 \cdot 10^6$ м/с $\ll c$.

8. Измерение заряда электрона. После измерения Томсоном в 1897 г. отношения заряда электрона к его массе возникла важная задача определения массы и заряда по отдельности. Заряд электрона был измерен в серии экспериментов, проведенных в 1911–1913 гг. Р. Э. Милликеном [24, 25]. Он использовал заряженные капельки масла, движущиеся в воздухе между обкладками конденсатора. При обработке результатов опыта необходимо учитывать силы тяжести, сопротивления воздуха и выталкивающую силу воздуха.

Работа Милликена получила всеобщее признание, однако только в 30-х годах выяснилось, что его результат занижен на 1%. Незначительная ошибка объяснялась использованием неверного значения вязкости воздуха. Любопытно, что каждый следующий результат, опубликованный другими авторами, был чуть выше предыдущего. По этому поводу Р. Фейнман замечает, что преклонение перед авторитетами в науке обесценивает сами эксперименты: «Тут нужна просто обычная честность» [28].

§ 31. ЭЛЕКТРОСТАТИКА ПРОВОДНИКОВ

1. Проводники в электрическом поле. По своим электрическим свойствам все тела делятся на две категории: *проводники* и *диэлектрики*. Основное свойство проводников состоит в том, что электрическое поле вызывает в них движение зарядов — электрический ток. Диэлектрики не проводят электричество.

Внесем заряженный или незаряженный проводник в электростатическое поле. В электростатике движение зарядов отсутствует, и мы должны сделать вывод, что в силу основного свойства проводников *электрическое поле внутри проводника равно нулю*. Отсюда следует, что вся область внутри проводника должна иметь одинаковый потенциал (см. формулу (30.16)). Поверхность проводника имеет тот же потенциал, образуя, как говорят, эквипотенциальную поверхность, т. е. множество точек, обладающих одинаковыми потенциалами. Если в проводнике имеется замкнутая полость, внутри которой нет заряда, то электрическое поле в ней также равно нулю. Отсутствие поля внутри проводящей оболочки служит основой для создания *электростатической защиты*.

При внесении проводника во внешнее поле перемещение электронов приводит к разделению положительных и отрицательных зарядов на его поверхности. Это явление называется *электростатической индукцией*, а образовавшиеся заряды наведенными или *индуцированными*. Полное электрическое поле в любой точке представляет собой суперпозицию полей, образованных зарядами, распределенными по поверхности проводника, и внешним полем. Поэтому наведенные заряды распределяются таким образом, чтобы создаваемое ими поле и внешнее поле компенсировали друг друга внутри проводника. Вне проводника электрическое поле образуется в результате наложения внешнего и образуемого поверхностными зарядами полей. Силовые линии результирующего поля вблизи поверхности проводника должны быть направлены перпендикулярно поверхности в каждой ее точке, так как наличие касательной составляющей привело бы к движению электронов вдоль поверхности.

Основная задача электростатики проводников заключается в определении напряженности поля вне проводников и характера распределения зарядов по их поверхности при определенных условиях: 1) мы можем задаться определенной величиной потенциала на проводнике (это достигается соединением проводника с источником ЭДС или заземлением); 2) мы можем задаться величиной полного заряда на проводнике (в этом случае проводник изолирован).

Решение задачи должно удовлетворять *граничным условиям*: вектор напряженности перпендикулярен внешней поверхности проводника в каждой точке поверхности.

2. Поле точечного заряда вблизи плоской поверхности проводника. Совместим плоскость xz с поверхностью проводника, а отрицательный заряд $Q < 0$ расположим в точке с координатами $(0, l, 0)$ (рис. 31.1). Мы уже знаем, что внутри проводника $\vec{E} = 0$.

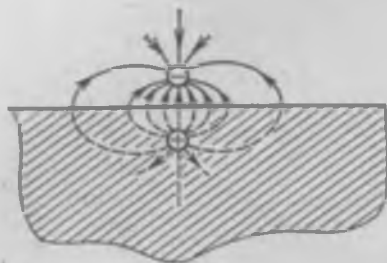


Рис. 31.1

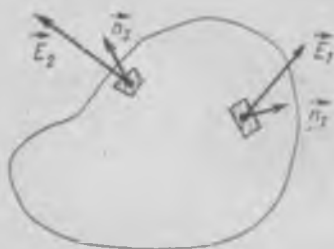


Рис. 31.2

Остается найти поле вне проводника. Это поле создается зарядом $-Q$ и положительным поверхностным зарядом, индуцированным на плоскости, т. е. является суперпозицией полей

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{E}'(\vec{r}), \quad \vec{E}_0(\vec{r}) = \frac{-kQ(\vec{r} - \vec{a})}{|\vec{r} - \vec{a}|^3},$$

где $\vec{a} = (0, l, 0)$. Найдем вектор $\vec{E}'(\vec{r})$. Он должен иметь форму напряженности поля, создаваемого некоторыми фиктивными зарядами, причем полное поле $\vec{E}$ должно быть перпендикулярно поверхности проводника во всех ее точках.

Этим условиям удовлетворяет вектор

$$\vec{E}'(\vec{r}) = \frac{kQ(\vec{r} + \vec{a})}{|\vec{r} + \vec{a}|^3}.$$

Таким образом, мы получили решение задачи: в области $y < 0$ $\vec{E} = 0$, в области $y > 0$ $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$. Вектор $\vec{E}'$ соответствует полю фиктивного заряда $q' = Q$, расположенного в точке, представляющей зеркальное изображение заряда $-Q$. Введение заряда q' позволило удовлетворить граничным условиям.

При определении поля, создаваемого зарядом, расположенным внутри двугранного прямого угла, образованного двумя проводящими поверхностями, потребуется уже три фиктивных заряда для выполнения граничных условий (см. рис. 51.5).

3. Теорема Гаусса — Остроградского (ГО). Определение напряженности поля, создаваемого системой проводников произвольной формы, — сложная задача, для решения которой необходимо использовать уравнения Максвелла. Основная трудность

связана с нахождением распределения зарядов по поверхности проводников. Однако в случае проводников, представляющих симметричные тела, задача может быть решена с помощью теоремы ГО. Для применения теоремы ГО возьмем замкнутую поверхность, охватывающую некоторую систему зарядов $Q_1, Q_2, \dots$ (рис. 31.2). Разобьем далее эту поверхность на малые площадки ΔS_i . Ориентацию каждой площадки зададим единичным вектором $\vec{n}_i$ внешним по отношению к поверхности. В пределах малой площадки значение вектора $\vec{E}$ одинаково и равно $\vec{E}_i$. Введем далее новое понятие — *поток вектора $\vec{E}$ через площадку* — $\Delta \vec{E}_i \vec{n}_i \Delta S_i = E_i \cos \alpha_i \Delta S_i$, где α_i — угол между векторами $\vec{E}_i$ и $\vec{n}_i$.

Теперь можно сформулировать теорему Гаусса—Остроградского: поток вектора напряженности через произвольную замкнутую поверхность равен произведению $4\pi k$ на сумму зарядов, находящихся внутри объема, ограниченного поверхностью.

$$\sum_{i=1}^N \vec{E}_i \vec{n}_i \Delta S_i = 4\pi k \sum_i Q_i. \quad (31.1)$$

Теорема Гаусса—Остроградского дает возможность найти напряженность поля в тех случаях, когда, благодаря симметрии распределения зарядов, можно «угадать» расположение силовых линий, пересекающих выбранную поверхность. Число таких задач очень ограничено.

4. Напряженность точечного заряда. Возьмем сферу радиусом r с центром в точечном заряде Q . Благодаря сферической симметрии электрическое поле изолированного заряда направлено по лучам, исходящим из заряда. В любой точке сферы напряженность поля равна $E(r)$. Из теоремы ГО следует

$$4\pi r^2 E(r) = 4\pi k Q, \quad E = \frac{kQ}{r^2}.$$

Помещая заряд q на расстояние r от заряда Q и учитывая определение поля (30.5), мы получим закон Кулона.

5. Напряженность поля заряженной сферы. Рассмотрим сферу радиусом R , по поверхности которой распределен заряд Q . Характер распределения заряда по поверхности определяется поверхностной плотностью заряда

$$\sigma = \frac{\Delta Q}{\Delta S}, \quad (31.2)$$

где ΔQ — заряд на поверхности ΔS . В общем случае поверхностная плотность — функция координат. Для равномерно заряженной сферы $Q = \sum \sigma \Delta S = \sigma S$.

Возьмем вспомогательную сферу радиусом $r > R$. Силовые линии вне сферы распределены в пространстве так же, как силовые линии точечного заряда. Если полный заряд поверхности сферы равен Q , то согласно теореме ГО вне сферы $E = kQ/r^2$. Построим теперь поверхность любой формы внутри исходной сферы. Применяя теорему ГО, находим

$$\sum \vec{E}_i \vec{n}_i \Delta S_i = 0, \quad \vec{E}_i \vec{n}_i = 0,$$

так как заряд внутри сферы отсутствует. Поскольку форма поверхности произвольна, то $\vec{E} = 0$. Итак,

$$E = \begin{cases} 0, & r < R, \\ k \frac{Q}{r^2}, & r \geq R. \end{cases} \quad (31.3)$$

Потенциал, создаваемый заряженной сферой,

$$\varphi = \begin{cases} k \frac{Q}{R}, & r \leq R, \\ k \frac{Q}{r}, & r \geq R. \end{cases} \quad (31.4)$$

6. Поле заряженной плоскости (см. пример 30.3). Предположим, что плоскость имеет бесконечную протяженность и заряд единицы площади равен σ . В качестве замкнутой поверхности

для применения теоремы ГО выберем поверхность куба, две грани которого параллельны плоскости (рис. 31.3). Поток напряженности поля через боковую поверхность равен нулю. Полный поток равен сумме потоков через две другие грани. Заряд внутри куба равен σS , где S — поверхность грани. Согласно теореме ГО

$$ES + ES = 4\pi k \sigma S,$$

величина поля

$$E = 2\pi k \sigma. \quad (31.5)$$

ЗАДАЧА 31.1. Чему равен заряд заземленной металлической сферы радиусом R , если на расстоянии a ($a > R$) от ее центра находится точечный заряд $q > 0$?

Решение. Поскольку сфера заземлена, то потенциал любой точки внутри и на поверхности сферы должен быть равен нулю. Под действием заряда q сфера вследствие индукции получит от-

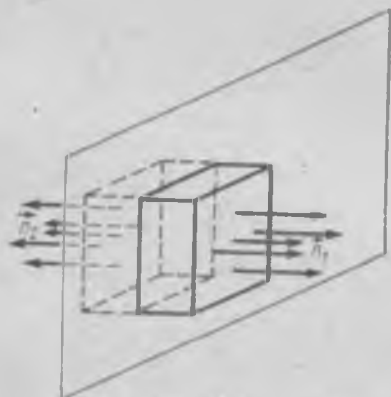


Рис. 31.3

рицательный заряд Q , притекший на нее с Земли. Величина этого заряда и характер распределения по поверхности сферы должны быть такими, чтобы сумма потенциалов полей φ_1 и φ_2 зарядов q и Q была равной нулю в любой точке внутри сферы и на ее поверхности. Для определения заряда Q проще всего подсчитать потенциал в центре шара. Заряд Q распределен неравномерно, но если поверхность шара разбить на маленькие участки с зарядами ΔQ , то потенциал поля φ_2 , создаваемого зарядом шара, можно выразить как сумму потенциалов полей точечных зарядов

$$\varphi_2 = \frac{k}{R} (\Delta Q_1 + \Delta Q_2 + \dots) = k \frac{Q}{R}.$$

Поскольку $\varphi_1 = kq/a$, то $(Q/R) + (q/a) = 0$. Отсюда находим $Q = -q(R/a)$.

ЗАДАЧА 31.2. Чему равен потенциал изолированного незаряженного металлического шара радиусом R , если на расстоянии a ($a > R$) от его центра находится точечный заряд q ?

Решение. Потенциалы всех точек шара одинаковы. Поэтому для решения задачи проще всего найти потенциал центра шара. Он равен потенциалу $\varphi_1 = k(q/a)$, созданному зарядом q , плюс потенциал φ_2 , созданный зарядами, наведенными на шаре вследствие электростатической индукции. Как и в предыдущей задаче, $\varphi_2 = k(Q/R)$. Однако поскольку общий заряд Q , наведенный на первоначально незаряженном изолированном шаре, остается равным нулю, то $\varphi_2 = 0$. Итак, потенциал сферы kq/a .

ЗАДАЧА 31.3. Системе проводников, состоящей из двух сфер радиусами R_1 и R_2 , соединенных проводом, сообщили некоторый заряд. Определить отношение напряженностей поля у поверхности каждой из сфер. Сферы находятся достаточно далеко друг от друга. Исследовать случай $R_1 \ll R_2$ (модель острия [29]).

Решение. Заряды будут перемещаться от одной сферы к другой до тех пор, пока потенциалы сфер не станут одинаковыми. После выравнивания потенциалов сферы будут обладать зарядами q_1 и q_2 , которые распределяются по поверхностям сфер неравномерно. Однако если расстояние между сферами значительно больше их радиусов, то можно пользоваться формулами для напряженности (31.3) и потенциала (31.4) равномерно заряженной сферы.

Искомое отношение напряженностей

$$\frac{E_1}{E_2} = \frac{q_1}{q_2} \left(\frac{R_2}{R_1} \right)^2. \quad (1)$$

Равенство потенциалов дает соотношение

$$\frac{q_1}{R_1} = \frac{q_2}{R_2}. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим, что

$$E_1 = \frac{R_2}{R_1} E_2.$$

Предположим, что $R_2 \gg R_1$. Тогда $E_1 \gg E_2$. Таким образом, напряженность поля больше у тех мест проводящей системы, где радиус кривизны меньше.

§ 32. ЕМКОСТЬ. КОНДЕНСАТОРЫ. ДИЭЛЕКТРИКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ

1. Емкость. Проводник, заряженный определенным количеством электричества, как показывает опыт, принимает вполне определенный потенциал. Значение потенциала зависит не только от заряда, сообщенного самому проводнику, но и от зарядов, имеющих на окружающих проводник телах или возникших на них вследствие электростатической индукции. Следовательно, заряды и потенциалы проводников не могут быть заданы одновременно произвольным образом: между ними существует определенная связь. Проще всего записать эту связь для уединенного проводника, удаленного от всех проводников настолько далеко, что они не влияют на его потенциал. Потенциал уединенного проводника пропорционален его заряду. Опыт показывает, что отношение заряда, сообщенного проводнику, к его потенциалу является постоянной величиной для данного уединенного проводника. Тем самым это отношение определяет некоторое физическое свойство проводника, которое называют *емкостью*, или просто *емкостью*, проводника. Поскольку $Q \sim \varphi$, то можно записать, что

$$Q = C\varphi. \quad (32.1)$$

Коэффициент пропорциональности C называется емкостью уединенного проводника. Эта величина определяется размерами и формой проводника. Так, например, из формулы (31.4) для потенциала уединенной сферы $\varphi = kQ/R$ и определения (32.1) следует, что емкость сферы равна R/k .

В СИ единицей емкости является фарад: $1 \text{ Ф} = 1 \text{ Кл/В}$, названная в честь величайшего английского физика М. Фарадея, внесшего огромный вклад в развитие электродинамики.

На практике обычно используют более мелкие единицы емкости: микрофарад (от греч. *mikros* — малый), $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$; нанофарад (от греч. *nanos* — карлик), $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$; пикофарад (от греч. *pico* — малый), $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$. Емкость земного шара равна всего 709 мкФ.

Отметим, что размерность коэффициента пропорциональности в законе Кулона (29.1) может быть записана в виде $\text{Н} \cdot \text{м}^2 / \text{Кл}^2 = \text{м/Ф}$.

2. Конденсаторы. Два изолированных друг от друга проводника любой формы называют конденсатором. Простейший из них представляет собой две одинаковые плоские проводящие пластины площадью S , расположенные параллельно друг другу на расстоянии d . Заряды на пластинах равны Q и $-Q$. Пластины обладают потенциалами φ_2 и φ_1 , разность которых обычно называют напряжением U .

Мы знаем (см. пример 30.4), что поле конденсатора сосредоточено между пластинами, а его напряженность E_k равна удвоенной напряженности, создаваемой одной пластиной. Учитывая (30.17), (31.5), получим

$$E_k = 4\pi k\sigma = \frac{U}{d}. \quad (32.2)$$

Найдем соотношение между зарядом Q на пластине с потенциалом φ_2 и напряжением U . Подставляя σ из (32.2) в выражение $Q = \sigma S$, получим

$$Q = \sigma S = \frac{S}{4\pi kd} U.$$

Следовательно,

$$Q = CU, \quad (32.3)$$

где C — положительный коэффициент, называемый емкостью конденсатора,

$$C = \frac{S}{4\pi kd}. \quad (32.4)$$

Из (32.3) следует, что при $U = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$, $Q > 0$, а при отрицательной разности потенциалов $U = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$, $Q < 0$.

Формула (32.4) строго верна для бесконечно протяженных пластин, образующих однородное поле. Поле, возникающее между пластинами конечной площади S , неоднородно на краях конденсатора. Однако если расстояние между пластинами много меньше их линейных размеров, то электрическое поле между ними можно считать почти однородным. Поэтому мы можем пользоваться формулой (32.4) в том случае, если неоднородность поля на краях конденсатора невелика, т. е. при условии $d \ll \sqrt{S}$. На рис. 32.1 изображены силовые линии электрического поля реального конденсатора. Обратите внимание на то, что вектор E перпендикулярен поверхности проводников в каждой точке поверхности.

ЗАДАЧА 32.1. Плоский конденсатор имеет емкость C . На одну из пластин поместили заряд Q , а на другую $4Q$. Определить разность потенциалов между пластинами конденсатора.

Решение. Учитывая результаты примера 30.4, найдем напряженность поля в конденсаторе

$$E = 2\pi k \left(\frac{4Q}{S} - \frac{Q}{S} \right) = 6\pi k \frac{Q}{S}.$$

Разность потенциалов определяется формулой (30.17): $U = Ed$. Исключая с помощью (32.4) отношение d/S , получим $U = \frac{3}{2} Q/C$.

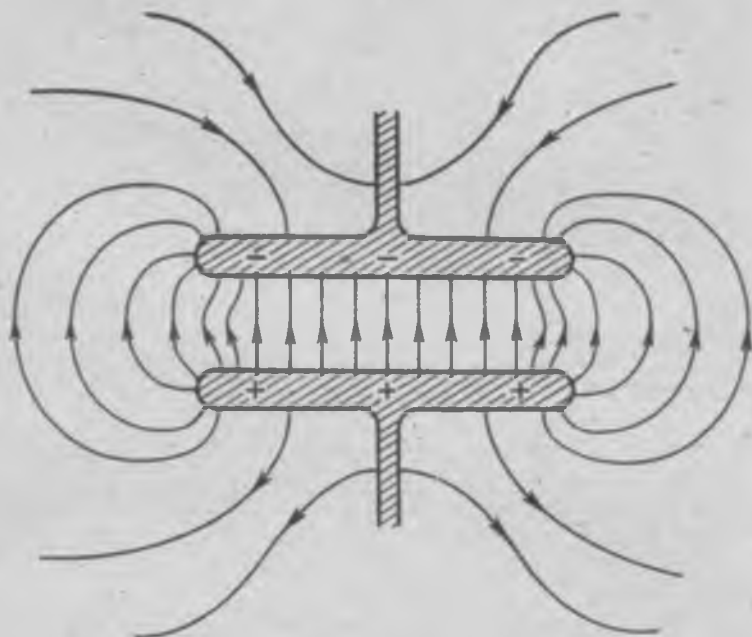


Рис. 32.1

3. Энергия, запасенная в конденсаторе. Подсчитаем работу, которую нужно затратить, чтобы зарядить незаряженный конденсатор. Пусть пластина 1 имеет отрицательный заряд $-q$, а пластина 2 — положительный заряд $q = C(\varphi'_2 - \varphi'_1)$, где $\varphi'_{1,2}$ — потенциал соответствующей пластины. Увеличим заряд пластины 2, перенося положительный заряд Δq с пластины 1 на пластину 2 (или перенося отрицательный заряд с пластины 2 на пластину 1). При этом внешние силы совершат работу

$$\delta A = \Delta q E' d = \Delta q (\varphi'_2 - \varphi'_1) = \frac{q}{C} \Delta q.$$

Полная работа, совершаемая внешней силой для того, чтобы за-

рядить первоначально незаряженный конденсатор количеством электричества Q , равна

$$A = \sum \delta A \rightarrow \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}. \quad (32.5)$$

Это выражение определяет потенциальную энергию, запасенную конденсатором. Поскольку $U = Ed$, то потенциальная энергия

$$\Pi = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CU^2}{2} = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{4\pi h d} \right) E^2 d^3 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 V, \quad (32.6)$$

где $V = Sd$ — объем, занимаемый полем. Заметим, что $w = E^2/8\pi k$ имеет смысл объемной плотности энергии. Размерность $[w] = \text{Дж/м}^3 = \text{Па}$.

4. Диэлектрики в электрическом поле. Для того чтобы понять поведение диэлектрика в электрическом поле, необходимо рассмотреть, как ведут себя в поле электрические заряды отдельного атома. В диэлектриках нет свободных зарядов. Каждый атом, из которых состоит диэлектрик, можно представить в виде точечного положительного ядра и связанного с ним облака отрицательно заряженных электронов. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением таких веществ, в атомах которых отрицательный заряд распределен симметрично относительно ядра. Поместим теперь атом в однородное электрическое поле. В присутствии поля ядро притягивается в одну сторону, а электроны в другую. Иначе говоря, в состоянии равновесия положительные и отрицательные заряды смещаются относительно друг друга — атом поляризуется. Характер смещения зарядов зависит от структуры электронной оболочки атома.

Тот же эффект возникает при помещении молекулы в электрическое поле. Внутри сплошного однородного диэлектрика индуцированные внешним полем положительные и отрицательные заряды компенсируют друг друга, а снаружи возникает поверхностный заряд, образованный «связанными» зарядами — ядрами и электронами. Термин «связанный» по отношению к электронам обозначает только то, что при напряженности поля, не приводящей к пробое, они не дают вклада в ток проводимости (см. § 57). Согласно свойству суперпозиции напряженность электрического поля $\vec{E}$ внутри диэлектрика равна сумме напряженностей полей — внешнего $\vec{E}_0$ и $\vec{E}'$, образованного поверхностными зарядами. Следует подчеркнуть, что поле $\vec{E}'$ существует только благодаря наличию поля $\vec{E}_0$. Очевидно, направление вектора $\vec{E}'$ противоположно направлению вектора $\vec{E}_0$. Число, показывающее, во сколько раз величина напряженности внешнего поля E_0 больше

напряженности поля внутри диэлектрика E , называется диэлектрической проницаемостью вещества

$$\epsilon = \frac{E_0}{E}. \quad (32.7)$$

В постоянном внешнем поле диэлектрическая проницаемость зависит от химического состава вещества и его состояния (т. е. давления и температуры). Приведем значения диэлектрической проницаемости некоторых веществ при комнатной температуре: 81 (вода), 5–10 (стекло), 4–8 (слюда), 2 (бумага).

ПРИМЕР 32.2. Конденсатор, заполненный диэлектриком.

Рассмотрим плоский пустой конденсатор емкостью C_0 , пластины которого изолированы и несут заряды $\pm Q$. Заряд Q и напряжение U_0 на конденсаторе связаны соотношением $Q = C_0 U_0$. Поместим теперь между пластинами диэлектрик. В результате поляризации на границе диэлектрика и отрицательно (положительно) заряженной пластины образуется положительный (отрицательный) поверхностный заряд. Поляризационные заряды являются связанными и не могут быть скомпенсированы свободными зарядами на проводящих пластинах.

Определим емкость конденсатора, заполненного диэлектриком. Поскольку поле $\vec{E}$ внутри конденсатора однородно, то напряжение между пластинами

$$U = Ed = \frac{E_0 d}{\epsilon} = \frac{U_0}{\epsilon}.$$

Заметим, что напряжение на изолированном конденсаторе уменьшилось в ϵ раз. Следовательно, емкость, определяемая формулой (32.3),

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{Q}{U_0/\epsilon} = \epsilon C_0, \quad C = \frac{\epsilon S}{4\pi k d}. \quad (32.8)$$

Мы видим, что постоянство заряда на конденсаторе приводит к условию $C_0 U_0 = CU$.

Для того чтобы представить, почему изобретение конденсатора произвело переворот в опытах с электричеством, сравним заряд Q_1 конденсатора в виде квадратной стеклянной пластинки со стороной $a=10$ см, толщиной $d=0,2$ мм, покрытой с двух сторон проводниками, и заряд Q_2 сферы радиусом $R=5$ см при одинаковой разности потенциалов: $Q_1/Q_2 = \epsilon S/4\pi R d$. Полагая $\epsilon=5$, получим $Q_1/Q_2=40$. Для того чтобы сфера имела ту же емкость, что и конденсатор, ее радиус должен быть равен $\epsilon S/4\pi d = 2$ м.

Определим теперь поверхностную плотность σ' связанных зарядов, появившихся на поверхности диэлектрика. Согласно (32.2) напряженность поля в пустом конденсаторе

$$E_0 = 4\pi k \sigma_0, \quad \sigma_0 = \frac{Q}{S}. \quad (1)$$

Электрическое поле E в диэлектрике определяется той же формулой, однако вместо σ_0 должна стоять полная поверхностная плотность зарядов. Очевидно, σ_0 и σ' имеют разные знаки, так что

$$E = 4\pi k (\sigma_0 - \sigma'). \quad (2)$$

Учитывая, что (1) и (2) связаны соотношением (32.7), находим

$$\sigma' = \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \sigma_0.$$

До сих пор мы предполагали, что конденсатор изолирован. Теперь предположим, что конденсатор включен в цепь ЭДС, равной U_0 . При заполнении конденсатора диэлектриком напряжение на обкладках не изменяется и остается равным U_0 . Поскольку поляризация диэлектрика ослабляет поле, то ясно, что сохранение напряженности неизменной возможно лишь при увеличении свободных зарядов на обкладках за счет перемещения через источник тока количества электричества $\Delta Q = \Delta C U_0 = (\epsilon - 1) C_0 U_0 = (\epsilon - 1) Q_0$. Первоначальный заряд Q_0 возрастет в ϵ раз.

5. Закон Кулона для зарядов, помещенных в диэлектрик. Рассмотрим систему проводников, полностью погруженных в газообразный или жидкий, однородный, изотропный диэлектрик. В этом случае поле в диэлектрической среде в ϵ раз меньше поля, которое существовало бы в вакууме. Разности потенциалов на проводниках также уменьшаются в ϵ раз.

Если заряды, изображенные на рис. 29.1, поместить в диэлектрик, то силы, действующие на каждый из них, определяются выражением

$$\vec{F}_{12} = k \frac{q_1 q_2}{\epsilon r^2} \vec{e} = -\vec{F}_{21}. \quad (32.9)$$

Отметим, что формула (32.9) выражает закон Кулона для зарядов в газообразном или жидком диэлектрике и не имеет места для зарядов, помещенных в твердый диэлектрик. Вычисление силы взаимодействия зарядов в твердом диэлектрике затруднительно, поскольку внесение заряда внутрь тела меняет его диэлектрические свойства.

6. Общий метод расчета цепей, содержащих конденсаторы. В радиотехнических системах используются различные соединения конденсаторов и источников тока. Здесь мы ограничимся изучением цепей, в которых токи отсутствуют. В этом случае ЭДС источника тока $\mathcal{E} = \varphi_+ - \varphi_-$, где $\varphi_{\pm}$ — потенциалы клемм со знаком «+» или «-».

Цель расчета цепи — найти напряжение на каждом из конденсаторов и определить разность потенциалов между двумя произвольно выбранными точками схемы. Для решения этой задачи

необходимо использовать закон сохранения заряда (заряд изолированной части цепи сохраняется) и очевидное правило:

При обходе любого замкнутого контура сумма разностей потенциалов на каждом конденсаторе равна сумме ЭДС источников тока, принадлежащих этому контуру.

ПРИМЕР 32.2. А. Определим напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 в схеме, изображенной на рис. 32.2 а.

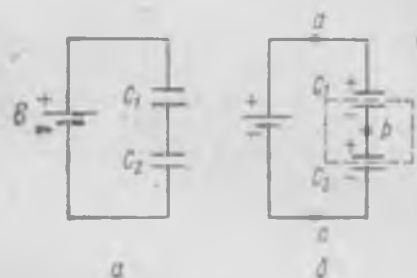


Рис. 32.2

В схеме три участка цепи имеют различные потенциалы φ_a , φ_b , φ_c (рис. 32.2 б). Напряжения на конденсаторах $U_1 = \varphi_a - \varphi_b$, $U_2 = \varphi_b - \varphi_c$. Очевидно, $\varepsilon = \varphi_a - \varphi_c$. Расставим произвольно заряды на конденсаторах. На рис. 32.2 б знак «+» на обкладке C_1 обозначает, что верхняя пластина имеет заряд $Q_1 = C_1 U_1$. Эта величина может быть положительной или отрицательной в зависимости от значения U_1 . Знак «-» обозначает, что заряд нижней пла-

стины равен $-Q_1 = -C_1 U_1$. Составим теперь уравнения, следующие из приведенных выше правил.

1. Обведенная пунктиром часть схемы является изолированной. Поскольку первоначальный заряд равен нулю, то

$$0 = -C_1 U_1 + C_2 U_2. \quad (1)$$

2. Обходя контур $abca$, получим соотношение

$$0 = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c + \varphi_c - \varphi_a,$$

из которого следует уравнение

$$U_1 + U_2 = \varepsilon. \quad (2)$$

Из системы (1), (2) находим

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \varepsilon, \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \varepsilon. \quad (3)$$

Поскольку $\varepsilon > 0$, то $U_{1,2} > 0$. Поэтому заряды верхних обкладок конденсаторов C_1 и C_2 одинаковы и положительны: $Q_1 = Q_2 = -Q = C_{12} \varepsilon$, где емкость C_{12} определяется уравнением

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}. \quad (4)$$

Следовательно, конденсаторы C_1 и C_2 можно заменить одним эквивалентным конденсатором емкостью C_{12} . Соединение конденсаторов C_1 и C_2 называется последовательным.

В. Найдем напряжение на конденсаторах в схеме, показанной на рис. 32.3 а.

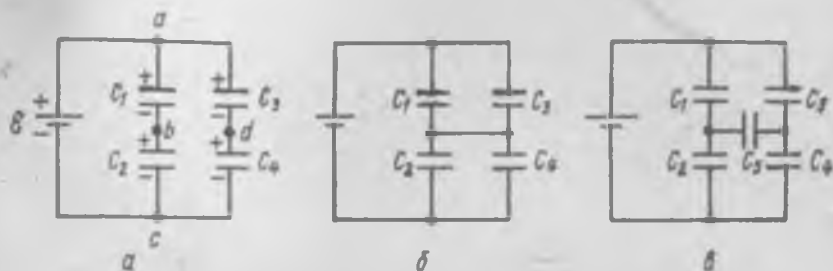


Рис. 32.3

В этой схеме четыре участка с различными потенциалами. Введем обозначения $U_3 = \varphi_a - \varphi_b$, $U_4 = \varphi_b - \varphi_c$ и произвольно расставим заряды на конденсаторах. Аналогично предыдущему примеру получим

$$U_3 = \frac{C_4}{C_3 + C_4} \varepsilon, \quad U_4 = \frac{C_3}{C_3 + C_4} \varepsilon. \quad (5)$$

Найдем теперь разность потенциалов между точками b и d

$$\varphi_b - \varphi_d = \varphi_b - \varphi_a + \varphi_a - \varphi_c = U_3 - U_4 = \frac{C_1 C_4 - C_2 C_3}{(C_1 + C_2)(C_3 + C_4)} \varepsilon. \quad (6)$$

Если емкости удовлетворяют условию $C_1 C_4 = C_2 C_3$, то $\varphi_b - \varphi_d = 0$. В этом случае исходная схема эквивалентна рис. 32.3 б или схеме, изображенной на рис. 32.3 в, причем конденсатор C_5 остается незаряженным. Таким образом, если в схеме рис. 32.2 в емкости четырех конденсаторов связаны соотношением $C_1/C_3 = C_2/C_4$, то конденсатор C_5 можно заменить проводником.

ЗАДАЧА 32.4. Батарею конденсаторов, изображенную на рис. 32.3 а, отключили от источника тока, а затем соединили точки b и d проводником. Найти заряд, который протечет по проводнику, соединяющему верхние обкладки C_1 и C_3 ($C_1 = C_2 = C_3 = C$, $C_4 = 3C$).

Решение. Используя результаты примера 32.3, найдем заряды

$$Q_1 = C_1 U_1 = \frac{1}{2} C \varepsilon, \quad Q_3 = C_3 U_3 = \frac{3}{4} C \varepsilon.$$

После соединения точек b и d заряды перераспределяются. Обозначим потенциалы четырех участков φ'_a , φ'_b , φ'_c , φ'_d . Введем далее напряжения на конденсаторах $U'_1 = \varphi'_a - \varphi'_b$, $U'_3 = \varphi'_a - \varphi'_d$ и

расставим заряды (рис. 32.4). Поскольку суммарный заряд на верхних обкладках C_1 и C_3 , равный $\frac{5}{4}C\delta$, сохраняется, то

$$C_1 U'_1 + C_3 U'_3 = \frac{5}{4} C \delta.$$

Рассмотрим контур $adba$. Учитывая, что $\varphi'_b = \varphi'_a$, находим уравнение $U'_1 = U'_3$. Следовательно, заряды на верхних обкладках C_1 и C_3 равны

$$Q'_1 = C_1 U'_1 = \frac{5}{8} C \delta, \quad Q'_2 = C_3 U'_3 = \frac{5}{8} C \delta.$$

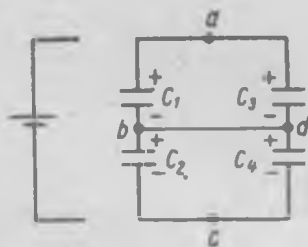


Рис. 32.4

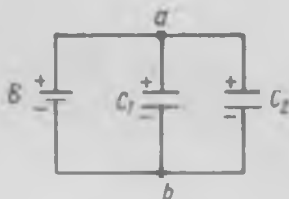


Рис. 32.5

Теперь нетрудно определить, какой заряд ΔQ протечет от C_3 к C_1 :

$$\Delta Q_1 = Q'_1 - Q_1 = \frac{1}{8} C \delta.$$

Очевидно, $\Delta Q_3 = Q'_3 - Q_3 = -\Delta Q_1$.

ПРИМЕР 32.5. А. Определим напряжения на конденсаторах в схеме, изображенной на рис. 32.5.

В схеме два участка с различными потенциалами, причем $U_1 = U_2 = \delta = \varphi_a - \varphi_b$. Общий заряд на верхних обкладках конденсаторов $Q = Q_1 + Q_2 = C\delta$, $C = C_1 + C_2$. В соответствии с (32.3) оба конденсатора можно заменить одним емкостью C . Соединение C_1 и C_2 в этом случае называется параллельным.

В. Определим напряжения на конденсаторах в схеме, изображенной на рис. 32.6а.

Чтобы стала ясной связь с предыдущей задачей, перейдем к эквивалентной схеме рис. 32.6б. Введем обозначение $U_3 = \varphi_b - \varphi_c$ и произвольно расставим заряды на конденсаторах.

Закон сохранения заряда изолированной части цепи, содержащей C_1 , C_2 , C_3 , приводит к уравнению

$$0 = -C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3. \quad (1)$$

Из второго правила следуют два уравнения:

$$U_1 + U_2 = \delta, \quad U_2 = U_3. \quad (2)$$

Решение системы

$$U_1 = \frac{C_2 + C_3}{C_1 + C_2 + C_3} \mathcal{E}, \quad U_2 = U_3 = \frac{C_1}{C_1 + C_2 + C_3} \mathcal{E}.$$

Очевидно, $C_2 + C_3 = C_{23}$ — емкость, эквивалентная двум параллельно соединенным конденсаторам C_2 и C_3 .

ПРИМЕР 32.6. Найдём разность потенциалов между точками c и a (рис. 32.7 а).

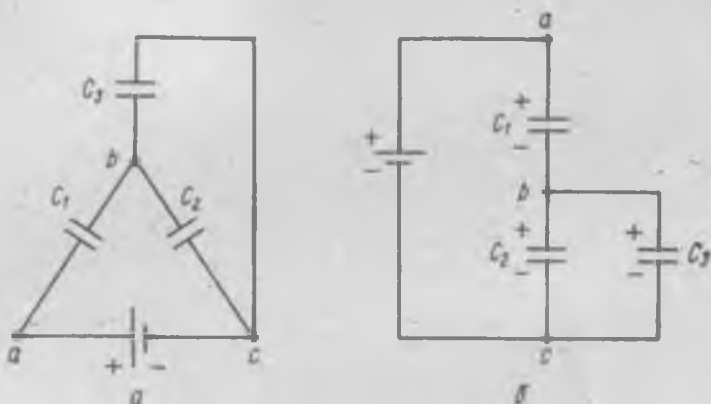


Рис. 32.6

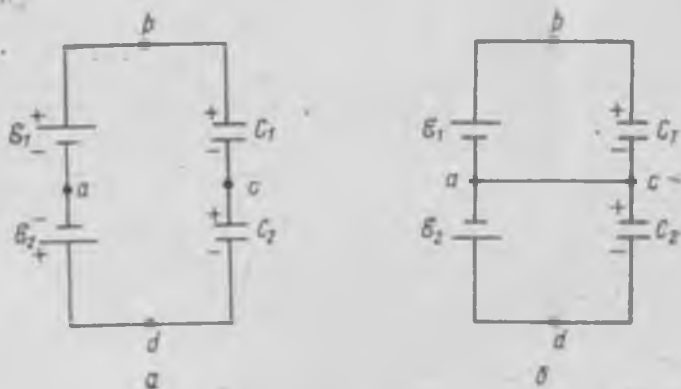


Рис. 32.7

Введем обозначения $U_1 = \varphi_b - \varphi_c$, $U_2 = \varphi_c - \varphi_a$. Очевидно, $\mathcal{E}_1 = \varphi_b - \varphi_a$, $\mathcal{E}_2 = \varphi_a - \varphi_c$. Расставим далее произвольно заряды на конденсаторах.

Закон сохранения заряда изолированной части схемы приводит к уравнению

$$0 = -C_1 U_1 + C_2 U_2.$$

(1)

Обходя замкнутый контур $abca$, получим соотношение

$$0 = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c + \varphi_c - \varphi_d + \varphi_d - \varphi_a,$$

из которого находим

$$U_1 + U_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (2)$$

Из (1), (2) находим

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2), \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2).$$

Заряды верхних обкладок конденсаторов одинаковы и равны $Q = C_{12}(\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2)$, где C_{12} — емкость батареи конденсаторов C_1, C_2 . Искомая разность потенциалов

$$\varphi_c - \varphi_a = \varphi_c - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_a = \mathcal{E}_1 - U_2 = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2}. \quad (3)$$

Если соединить точки a и c проводником, то схема не будет содержать изолированной части (рис. 32.7 б). В этом случае $U'_1 = \mathcal{E}_1$, $U'_2 = \varphi_c - \varphi_a = \varphi_a - \varphi_a = -\mathcal{E}_2$. Следовательно, заряд верхней обкладки C_1 $Q'_1 = C_1 \mathcal{E}_1 > 0$, заряд верхней обкладки C_2 $Q'_2 = C_2 U'_2 = -C_2 \mathcal{E}_2 < 0$. В результате соединения точек a и c через источник тока $\mathcal{E}_1$ протечет положительный заряд

$$\Delta Q_1 = Q'_1 - Q_1 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2).$$

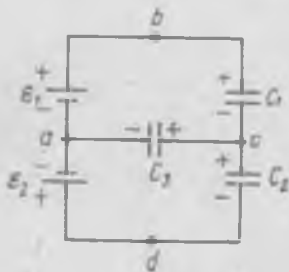


Рис. 32.8

ПРИМЕР 32.7. Найдём напряжение на конденсаторе C_3 (рис. 32.8).

Приведем краткое решение. Из закона сохранения заряда изолированной части схемы следует

$$0 = -C_1 U_1 + C_2 U_2 + C_3 U_3. \quad (1)$$

Обход по контуру $abca$ приводит к уравнению

$$U_1 + U_3 = \mathcal{E}_1. \quad (2)$$

Обход по контуру $acda$ позволяет записать еще одно уравнение

$$-U_3 + U_2 = -\mathcal{E}_2. \quad (3)$$

Из системы (1)–(3) находим

$$U_3 = \frac{C_1 \mathcal{E}_1 + C_2 \mathcal{E}_2}{C_1 + C_2 + C_3}. \quad (4)$$

Рассмотрим два частных случая: 1) если $C_3=0$, то цепь между a и c разомкнута (обкладки конденсатора разнесены на бесконечно большое расстояние). В этом случае U_3 совпадает с выражением (3) примера 32.6. 2) Значению $C_3 \rightarrow \infty$ соответствует расстояние между обкладками конденсатора $d \rightarrow 0$. В этом случае точки a и c практически соединены проводником. Из (4) находим $U_3 \rightarrow 0$.

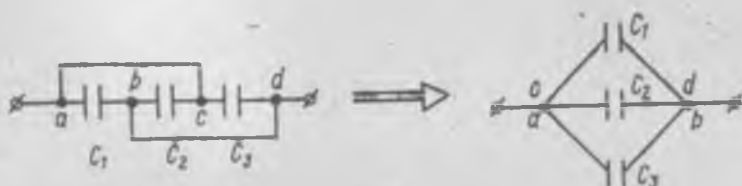


Рис. 32.9

ЗАДАЧА 32.8. Найти емкость C системы конденсаторов, изображенных на рис. 32.9.

Ответ. $C=C_1+C_2+C_3$.

§ 33. ПОСТОЯННЫЙ ТОК. ЗАКОН ОМА

Электрический ток представляет собой направленное перемещение носителей заряда: электронов или ионов. Здесь мы рассмотрим токи в металлических проводах, т. е. в проводниках настолько тонких, что можно пренебречь их толщиной. Носителями тока являются электроны. Однако в электротехнике принято считать, что ток создается движением положительных зарядов. Поэтому приходится говорить, что ток направлен в сторону, противоположную движению электронов. Как возникает ток в проводнике?

1. **Элементарные представления о теории проводимости металлов.** Следует сразу же подчеркнуть, что объяснение строения и свойств вещества стало возможным только с появлением квантовой механики. В сильно упрощенном виде современные представления о природе металлов сводятся к следующему. Электроны, расположенные на внешних орбитах атомов, наиболее удалены от ядер и весьма слабо связаны в атоме. При образовании кристалла, когда атомы приближаются достаточно близко друг к другу, внешние электроны будут притягиваться и к соседним ядрам. Это притяжение ослабляет связь электрона со своим ядром. В конечном итоге внешние электроны теряют связь с определенным атомом и могут перемещаться по всему кристаллу в любом направлении. Таким образом, электроны как газ заполняют пространство между ионами решетки. Разумеется, перемещаясь по кристаллу, они взаимодействуют с положительно заряженными иона-

ми решетки. Из квантовой теории (см. § 57) следует, что даже электроны внутренних атомных оболочек могут двигаться по кристаллу. Однако они не дают вклада в проводимость. Например, для меди можно принять, что на каждый атом решетки приходится один «свободный» электрон. Эти электроны и являются носителями тока в металлах. Слово «свободный» взято в кавычки, так как свойства электронов в металле значительно отличаются от свойств действительно свободных электронов в вакууме.

ЗАДАЧА 33.1. Оценить число свободных электронов в единице объема меди, считая, что каждый атом меди теряет всего один электрон. Плотность меди $\rho = 8,9 \cdot 10^3$ кг/м³, атомная масса $A = 64$.

Решение. Согласно сделанному предположению число электронов в объеме металла равно числу атомов. Определим поэтому число атомов в кубическом метре. В A г меди содержится число атомов, равное числу Авогадро N_A , значит, в 1 г меди содержится N_A/A атомов, а в 1 см³ содержится $\rho N_A/A$ атомов. Следовательно, концентрация электронов

$$n = \frac{\rho N_A}{A} = 8,4 \cdot 10^{28} \text{ м}^{-3}.$$

Последовательная теория проводимости металлов основывается на квантовой теории. Однако возникновение тока в металлах при обычных температурах можно объяснить и на основе простых представлений молекулярно-кинетической теории строения вещества.

Средняя скорость движения электронов в металле при комнатной температуре составляет около 10^7 м/с. Отдельный электрон движется по прямой, пока не столкнется с каким-нибудь атомом решетки. При этом скорость электрона

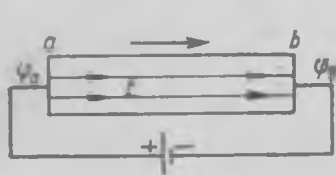


Рис. 33.1

v изменится по величине и направлению. Столкновения являются независимыми, случайными событиями, поэтому направление скорости электрона после нескольких столкновений не зависит от первоначального направления скорости. Полный заряд, переносимый электронами через любое сечение проводника, равен нулю — электрический ток отсутствует.

Теперь приложим к проводу длиной l разность потенциалов $U = \phi_a - \phi_b$. В этом случае электрическое поле внутри проводника становится отличным от нуля. Силовые линии в проводнике будут направлены почти параллельно его оси, а вне проводника располагаются наклонно к его поверхности (рис. 33.1). Напряженность электрического поля в проводнике $E = U/l$. Согласно второму за-

кону Ньютона электроны под действием силы приобретут ускорение

$$\vec{a} = \frac{e}{m} \vec{E}$$

(e — заряд, m — масса электрона). Поэтому скорость электрона через время t станет равной $\vec{v}_1 + (e/m)\vec{E}t$. Здесь $\vec{v}_1$ — скорость, которую имел электрон сразу за последним столкновением. Если поле $|\vec{E}|$ не слишком велико, то следующее соударение произойдет приблизительно через такое же время t_1 , как и в отсутствие электрического поля. Поэтому скорость электрона перед следующим столкновением равна

$$\vec{v}_1 + \frac{e}{m} \vec{E}t_1.$$

После каждого столкновения скорость электрона определяется аналогичной формулой, только с другими значениями $\vec{v}_i$ и t_i . Поскольку скорости $\vec{v}_i$ электронов направлены произвольным образом, а приращение скорости, обусловленное полем, является всегда малым вектором с одним и тем же направлением, то средняя скорость электронного газа оказывается равной

$$\vec{u}_{\text{ср}} = \frac{e}{m} \vec{E}\tau, \quad (33.1)$$

где τ — среднее время, в течение которого происходит значительное изменение направления импульса электрона. Таким образом, благодаря столкновениям с ионами решетки электроны в металле движутся не равноускоренно, а со средней постоянной скоростью, пропорциональной приложенной силе $e\vec{E}$. Тем самым хаотически движущиеся электроны систематически смещаются в направлении, противоположном полю, со скоростью $\vec{u}_{\text{ср}}$.

2. Электрический ток. На рис. 33.1 электроны перемещаются справа налево, однако, следуя принятому правилу, будем говорить о положительно заряженных частицах с зарядом $-e=e_0$, движущихся слева направо.

Для того чтобы ввести определение силы тока, выберем произвольно положительное направление на контуре, образованном проводом (стрелка вне провода на рис. 33.1). Подсчитаем теперь заряд, переносимый частицами в положительном направлении. Пусть n — концентрация частиц, S — площадь поперечного сечения проводника. За время Δt через площадку S пройдут все ча-

стицы, заключенные в объеме $u_{\text{ср}} \Delta t S$, т. е. $n u_{\text{ср}} \Delta t S$ частиц. Они перенесут заряд

$$\Delta q = e_0 n u_{\text{ср}} S \Delta t.$$

Это значит, что в проводнике появится электрический ток.

Количество заряда, проходящее через поперечное сечение проводника в направлении средней скорости носителей заряда за бесконечно малый интервал $(t, t + \Delta t)$, называется мгновенной силой тока $I(t)$ в момент времени t . Согласно этому определению через сечение S за время Δt пройдет заряд

$$\Delta q = I(t) \Delta t. \quad (33.2)$$

Следовательно,

$$I(t) = e_0 n u_{\text{ср}} S. \quad (33.3)$$

Заметим, что $u_{\text{ср}}$ — проекция средней скорости $\vec{u}_{\text{ср}}$ на прямую, задающую положительное направление. Если $u_{\text{ср}}$ зависит от времени, то сила тока $I(t)$ является функцией времени. В случае, когда $u_{\text{ср}} = \text{const}$, сила тока является постоянной функцией.

Единица силы тока — ампер (А), $1 \text{ А} = 1 \text{ Кл/с}$ — соответствует переносу заряда 1 Кл через поперечное сечение проводника за 1 с, что эквивалентно переносу $6,2 \cdot 10^8$ электронов в 1 с.

ПРИМЕР 33.2. Оценим величину средней скорости направленного движения электронов вдоль медного провода сечением $S = 1 \text{ мм}^2$, по которому идет ток $I = 10 \text{ А}$.

Согласно формуле (33.3) $u_{\text{ср}} = I / e_0 n S$. Значение концентрации электронов в меди возьмем из решения задачи 33.1: $n = 8,4 \cdot 10^{22} \text{ см}^{-3}$. Подставляя числовые данные, находим

$$u_{\text{ср}} = \frac{10 \cdot 10^{-9}}{1,6 \cdot 10^{-19} \cdot 8,4 \cdot 10^{22} \cdot 10^{-6}} = 0,07 \text{ см/с}.$$

Несмотря на то что средняя скорость движения электронов очень мала, ток в проводнике возникает практически мгновенно. Это связано с тем, что при подключении проводника к источнику электродвижущей силы скорость установления электрического поля равна скорости света.

Во многих учебниках физики можно познакомиться с определением силы тока как производной «заряда» по времени

$$I(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t}, \quad (33.4)$$

причем термин «заряд» не поясняется. Следует напомнить, что операция вычисления производной применима только к функциям. Не определяя функцию $q(t)$, невозможно вычислить и ее производную. Определение функции $q(t)$ следует, по существу, из ин-

тегральной формы, соответствующей (33.2): функция $q(t)$ равна разности количеств зарядов, прошедших через поперечное сечение провода в положительном и отрицательном направлениях за время t . Начало отсчета времени несущественно.

ПРИМЕР 33.3. На рис. 33.2 изображены две различные функции $q(t)$ и соответствующие токи. Из рис. 33.2а видно, что при $t < T$ заряд переносится в положительном направлении с убывающей скоростью. В момент $t = T$ средняя скорость переноса равна нулю. В интервале $t > T$ ток становится отрицательным. Поскольку носители заряда движутся в отрицательном направлении, то

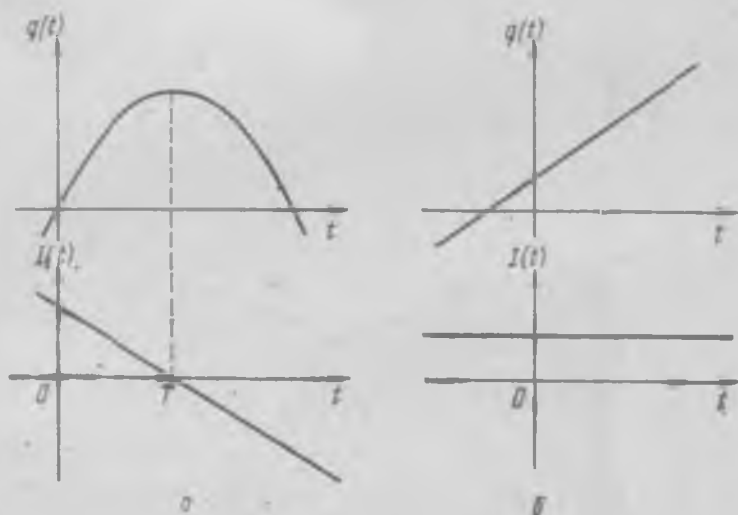


Рис. 33.2

функция $q(t)$ убывает. Рис. 33.2б соответствует протеканию постоянного тока в положительном направлении, которое мы заранее определили на проводнике.

ПРИМЕР 33.4. Согласно теории Бора в основном состоянии атома водорода электрон движется вокруг протона по круговой орбите радиусом $a = 5,3 \cdot 10^{-9}$ см. Какой величине тока эквивалентно движение электрона по орбите? (Масса электрона $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг.)

Сила тока численно равна заряду, переносимому через некоторую площадку за единицу времени. За одну секунду электрон, обращаясь вокруг протона, пройдет ν раз через данную точку орбиты (ν — частота вращения). Иначе говоря, через данную точку орбиты за секунду пройдет заряд $e_0 \nu$, т. е.

$$I = e_0 \nu.$$

(1)

Выражение (1) определяет ток, соответствующий прохождению одного электрона за период (так как $\nu=1/T$ и поэтому $I=e_0/T$).

Определим частоту вращения электрона ν . Единственной силой, действующей на электрон, является сила притяжения, определяемая из закона Кулона: $F=ke_0^2/r^2$. Поэтому из второго закона Ньютона

$$m(2\pi\nu)^2 a = k \frac{e_0^2}{a^2}$$

находим

$$\nu = \frac{e_0}{2\pi a} \sqrt{\frac{k}{ma}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим значение тока

$$I = \frac{e_0^2}{2\pi a} \sqrt{\frac{k}{ma}} = 1,05 \cdot 10^{-3} \text{ А.}$$

3. Закон Ома для участка цепи. Рассмотрим участок металлического проводника ab , по которому идет ток в направлении от точки a к точке b . Потенциалы этих точек равны соответственно φ_a и φ_b . Если проводник поддерживать при одной и той же температуре, то сила текущего по нему тока оказывается пропорциональной разности потенциалов $U=\varphi_a-\varphi_b$:

$$U=IR. \quad (33.5)$$

Коэффициент пропорциональности R называется сопротивлением проводника. Зависимость между напряжением и силой тока в проводнике называется законом Ома. Он был открыт в 1827 г. в результате серии экспериментов, проведенных немецким физиком Г. Омом.

Единицей сопротивления является Ом, $1 \text{ Ом} = 1 \text{ В/А}$. 1 Ом — сопротивление такого проводника, в котором при напряжении между концами в 1 В течет ток силой 1 А .

Зависимость сопротивления от длины проводника l , сечения S и свойств материала, из которого он состоит, определяется формулой

$$R = \rho \frac{l}{S}. \quad (33.6)$$

Здесь ρ — удельное сопротивление материала проводника. Значение удельного сопротивления ρ_0 при $t=0^\circ\text{С}$ можно найти в таблицах. На опыте наблюдается линейная зависимость удельного сопротивления от температуры:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \quad (33.7)$$

где α — температурный коэффициент сопротивления, имеющий различные значения для разных проводников и зависящий от их внутренней структуры. Подставляя значение (33.7) в формулу для сопротивления проводника (33.6), получим

$$R_t = \rho \frac{l}{S} = \rho_0 \frac{l}{S} (1 + \alpha t) = R_0 (1 + \alpha t), \quad (33.8)$$

где $R_0 = \rho_0 l / S$ — сопротивление данного проводника при $t = 0^\circ \text{C}$.

Размерность удельного сопротивления — Ом·м. Из всех металлов наибольшей электропроводностью, т. е. наименьшим значением ρ , обладает серебро, $\rho_{\text{Ag}} = 1,59 \cdot 10^{-8}$ Ом·м (при 20°C), далее идет медь ($1,72 \cdot 10^{-8}$ Ом·м), затем золото ($2,44 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). У сплавов удельное сопротивление сильно возрастает. Например, для константана, состоящего из 60% меди и 40% никеля, $\rho = 44 \cdot 10^{-8}$ Ом·м (у никеля $\rho = 7,2 \cdot 10^{-8}$ Ом·м). Удельное сопротивление морской воды $\rho = 3$ Ом·м.

Для того чтобы получить закон Ома из развитой выше классической теории, подставим (33.1) в (33.3). В результате находим

$$I = \frac{U}{R}, \quad R = \rho \frac{l}{S}, \quad \rho = \frac{m}{e_0 n \tau}.$$

Таким образом, представление о свободных электронах позволило правильно предсказать зависимость сопротивления от длины и сечения проводника. Однако классическая теория не в состоянии объяснить температурную зависимость (33.7), сверхпроводимость и другие явления, связанные с прохождением тока в веществе.

Согласно квантовой теории идеальная, не содержащая искажений решетка не оказывает никакого сопротивления прохождению тока. Электрическое сопротивление появляется в тех случаях, когда в решетке имеются различные виды нарушения ее правильного периодического строения — дефекты. Выше, в § 24, были рассмотрены различные виды дефектов. Важнейший из них — тепловые колебания ионов решетки — обусловлен тем, что металл находится не при температуре абсолютного нуля. Таким образом, сопротивление металлического проводника при $T \neq 0$ имеет конечное значение. Лишь при $T = 0$ сопротивление проводника, не имеющего искажений решетки, должно равняться нулю. Такой проводник получил название *идеального*. Идеальный проводник не следует отождествлять со *сверхпроводящим*. Эффект сверхпроводимости состоит в том, что при конечной температуре $T \neq 0$ К происходит резкий переход из обычного состояния в сверхпроводящее с сопротивлением, равным нулю. Явление сверхпроводимости почти полвека после его открытия в 1911 г. оставалось загадочным. Только в 1957 г. стали понятны закономерности этого эффекта, которые, как и следовало ожидать, носят квантово-механический характер. Любопытно, что сверхпроводящее и нор-

мальные состояния проводника возникают в результате взаимодействия электронов с решеткой металла.

4. Измерение тока. Пусть U — постоянная разность потенциалов между точками a и b . Сила тока на этом участке $I=U/R$.

Для измерения силы тока последовательно с сопротивлением R включается амперметр рис. 33.3 а. Очевидно, его включение изменяет силу тока в цепи до значения

$$I_a = \frac{U}{R + R_a} = \frac{1}{1 + R_a/R} I.$$

Однако если выполняется соотношение $R_a \ll R$, то амперметр покажет ток $I_a \sim I$. В этом случае относительная погрешность в измерении тока $(I - I_a)/I = R_a/(R + R_a)$ пренебрежимо мала.

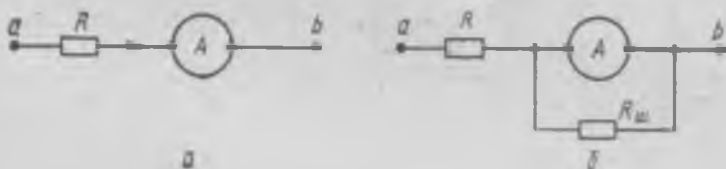


Рис. 33.3

Обычно амперметр рассчитан для измерения величины силы тока до некоторого значения $I_{\max}$. Для измерения токов $I > I_{\max}$ к амперметру параллельно подключают сопротивление $R_{\text{ш}}$, называемое *шунтом* (рис. 33.3 б). Найдем соотношение, связывающее ток I и показание амперметра I_a . Обозначая ток, протекающий через шунт $I_{\text{ш}}$, запишем систему уравнений

$$I = I_a + I_{\text{ш}}, \quad I_{\text{ш}} R_{\text{ш}} = I_a R_a,$$

из которой найдем

$$I = I_a (1 + R_a/R_{\text{ш}}).$$

Если значение силы тока, который нужно измерить, удовлетворяет неравенству $I_{\max} < I < I_{\max} \cdot 10^n$ ($n=1, 2, \dots$), то, выбирая

$$R_{\text{ш}} = \frac{R_a}{10^n - 1},$$

получим удобное для практических целей соотношение $I = I_a \cdot 10^n$.

5. Измерение напряжения. Пусть I — сила тока, протекающего по участку ab (рис. 33.4 а), $U=IR$ — напряжение на этом участке. Для измерения напряжения параллельно этому участку подключают вольтметр. Очевидно, включение вольтметра изменяет

сопротивление участка ab , и, следовательно, показание вольтметра будет равно

$$U_v = \frac{IRR_v}{R + R_v} = \frac{U}{1 + R/R_v}.$$

Разница между показанием вольтметра и напряжением U будет несущественна только в том случае, если $R_v \gg R$.

Если необходимо измерить напряжение U , большее того напряжения $U_{\max}$, на которое рассчитан вольтметр, то последова-

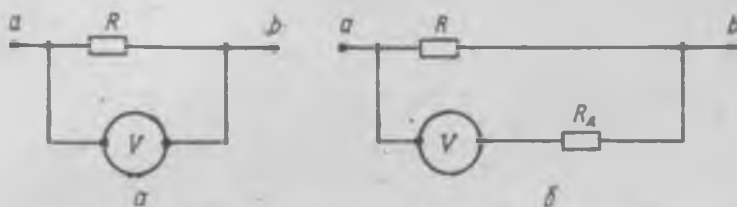


Рис. 33.4

тельно с ним включают дополнительное сопротивление R_d (рис. 33.4 б). Очевидно,

$$U = U_d + U_v, \quad U_d/R_d = U_v/R_v,$$

где U_d — падение напряжения на дополнительном сопротивлении. Исключая U_d , найдем связь между показанием вольтметра и напряжением:

$$U = U_v(1 + R_d/R_v).$$

Если $U_{\max} < U < U_{\max} \cdot 10^n$ ($n=1, 2, \dots$), то, выбирая

$$R_d = R_v(10^n - 1),$$

получим простую связь $U = U_v \cdot 10^n$.

6. Общий метод расчета электрических цепей, не содержащих источников тока. Рассмотрим схему, состоящую из произвольно соединенных резисторов и конденсаторов и имеющую несколько выводов, разность потенциалов между которыми известна. Основная задача состоит в определении токов и разностей потенциалов между произвольными точками схемы.

В общем случае в схеме можно выделить точки, в которых сходятся не менее трех проводников. Такие точки называются узлами. Любые два узла могут быть соединены произвольным количеством проводников, каждый из которых может содержать произвольное число последовательно соединенных резисторов.

Изобразим стрелками положительные направления на проводниках и введем обозначения $I_1, I_2, \dots, I_s$ для токов, протекающих

по каждому проводнику схемы. В узлах токи разветвляются. Поместим узел внутри некоторой замкнутой поверхности. Поскольку концентрация электронов не меняется, то сохраняется полный заряд, ограниченный этой поверхностью. Следовательно, сумма токов, входящих в узел, должна равняться сумме токов, выходящих из узла:

$$\sum_{\text{вход}} I_i = \sum_{\text{вых}} I_j. \quad (33.9)$$

Это соотношение аналогично уравнению непрерывности (18.1) в гидродинамике. Если в схеме n узлов, то соотношения (33.9) дают $n-1$ независимых уравнений.

Для того чтобы записать полную систему s уравнений для s токов, необходимо еще $s-n+1$ уравнений. Недостающие уравнения могут быть получены в результате рассмотрения произвольных замкнутых контуров, которые можно выделить в схеме. Напряжение на резисторах, входящих в контур, определяется законом Ома. В любом замкнутом контуре сумма падений напряжений на каждом из элементов контура (резисторе или конденсаторе) равна нулю. Математическая запись этого утверждения приводит в общем случае к системе зависимых уравнений. Для вывода $s-n+1$ независимых уравнений следует рассматривать только те контуры, которые нельзя получить наложением уже использованных контуров.

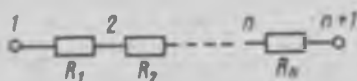


Рис. 33.5

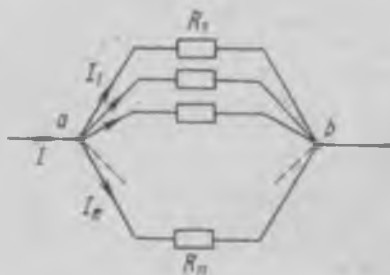


Рис. 33.6

В результате решения полной системы уравнений получим значения токов I_k ($k=1, 2, \dots, s$). Если значение некоторого тока окажется отрицательным, то это означает, что на данном участке цепи ток течет в отрицательном направлении. Разность потенциалов между любыми двумя точками схемы равна сумме падений напряжений на каждом элементе произвольного контура, соединяющего данные точки.

Последовательное соединение резисторов. Рассмотрим схему, не содержащую узлов: n резисторов соединены так, что резистор R_i присоединен к резистору R_{i+1} ($i=1, \dots, n-1$) (рис. 33.5). Разность потенциалов между точками 1 и $n+1$ равна U : $\varphi_1 - \varphi_{n+1} = U$. Очевидно,

$$\varphi_1 - \varphi_{n+1} = (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - \varphi_3) + \dots + (\varphi_n - \varphi_{n+1}). \quad (33.10)$$

Поскольку при последовательном соединении резисторов ток I не разветвляется, то $\varphi_i - \varphi_{i+1} = IR_i$. Подставляя разности потенциалов в (33.10), получим

$$R = R_1 + R_2 + \dots + R_n. \quad (33.11)$$

Если напряжения на резисторах не имеют самостоятельного значения, то исходную схему можно заменить эквивалентной схемой, содержащей только один резистор сопротивлением R .

Параллельное соединение резисторов. При параллельном соединении начала и концы проводников сходятся в два узла (рис. 33.6). Очевидно, сила тока, вытекающего в узел a , равна сумме токов, вытекающих из него:

$$I = I_1 + I_2 + \dots + I_n. \quad (33.12)$$

Поскольку напряжение $U = \varphi_a - \varphi_b$ на каждом резисторе одинаково, то согласно закону Ома $U = I_k R_k$. Подставляя значения токов в (33.12), получим $I = U/R$, где

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_n}. \quad (33.13)$$

Если нас не интересует распределение токов в резисторах, то исходную схему можно заменить эквивалентной, содержащей один резистор R .

Переход к эквивалентной схеме в общем случае следует начинать с отыскания резисторов, соединенных друг с другом параллельно или последовательно. Если в схеме удастся найти такие проводники, используя формулы (33.11) и (33.13), их следует заменить одним эквивалентным резистором и получить более простую схему. Полученную схему надо стремиться упростить аналогичным путем.

Если в схеме нет ни последовательно, ни параллельно соединенных проводников, то для определения эквивалентного сопротивления следует воспользоваться тем же методом расчета, который привел к выражениям (33.11) и (33.13).

ПРИМЕР 33.5. Найдём общее сопротивление резисторов, изображенных на рис. 33.7а. Представляя схему в более привычном виде рис. 34.7б, убеждаемся, что в ней отсутствуют параллельные или последовательные соединения резисторов. В схеме четыре узла и соответственно четыре участка, имеющих потенциалы $\varphi_a, \varphi_b, \varphi_d, \varphi_c$. Пусть $\varphi_a - \varphi_c = U$. Обозначим через I_n силу тока протекающего через резистор R_n , I — сила тока, вытекающего в узел a . Из (33.9) для узлов a, d, b получим уравнения

$$I = I_1 + I_2, \quad (1)$$

$$I_3 + I_5 = I_4, \quad (2)$$

$$I_1 = I_5 + I_2. \quad (3)$$

Уравнение $I_2 + I_4 = I$ для узла c следует из системы (1)–(3). Полная система уравнений относительно шести неизвестных токов должна содержать еще три уравнения. Рассмотрим контур abc ,

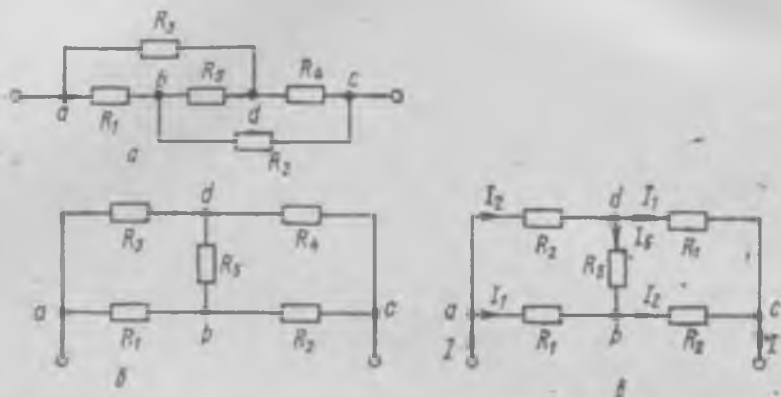


Рис. 33.7

$\varphi_a - \varphi_c = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c$. Из закона Ома для участков схемы ab , bc находим, что $\varphi_a - \varphi_b = I_1 R_1$, $\varphi_b - \varphi_c = I_2 R_2$. Следовательно,

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = U. \quad (4)$$

Далее для контура $abdc$ аналогичным образом находим

$$I_1 R_1 + I_5 R_5 + I_4 R_4 = U. \quad (5)$$

Последнее уравнение следует из рассмотрения контура adc ,

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 = U. \quad (6)$$

Сдно из решений системы (1)–(6) должно иметь вид

$$I = \frac{U}{R}, \quad (7)$$

где R — сопротивление рассматриваемой схемы.

Для того чтобы избежать громоздких вычислений, ограничим важным частным случаем, полагая $R_3 = R_2$, $R_4 = R_1$. Вычитая (6) из (4), находим уравнение

$$(I_1 - I_4) R_1 + (I_2 - I_3) R_2 = 0. \quad (8)$$

Заметим, что это уравнение является следствием равенства нулю суммы падений напряжений в замкнутом контуре $abcda$. Учтывая (2), (3), получим соотношение

$$I_1 - I_4 = I_2 - I_3. \quad (9)$$

Из (8), (9) следует, что $I_1=I_4$, $I_2=I_3$ (рис. 33.7 в). Таким образом, приходим к системе

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2, & I_2 + I_5 &= I_1, \\ U &= I_1 R_1 + I_2 R_2, & U &= 2I_1 R_1 + I_5 R_5, \end{aligned}$$

из которой находим $U=IR$,

$$R = \frac{(R_1 + R_2) R_5 + 2R_1 R_2}{R_1 + R_2 + 2R_5}, \quad (10)$$

$$I_1 = \frac{R_5 + R_2}{R_1 + R_2 + 2R_5} I, \quad I_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + 2R_5} I, \quad I_5 = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2 + 2R_5} I.$$

Убедимся в корректности решения, рассматривая ряд частных случаев, в которых схема рис. 33.7 существенно упрощается.

1. $R_1=R_2=R_5=r$ — все резисторы имеют одинаковые сопротивления. В этом случае резистор R_5 делит схему на две симметричные части. В силу симметрии $I_5=0$. Поскольку $\varphi_a - \varphi_b = 0$, то точки d и b можно совместить. Тогда в эквивалентной схеме можно выделить параллельно соединенные резисторы. Заменяя их резистором сопротивлением $r/2$, получим схему из двух последовательно соединенных одинаковых резисторов. Общее сопротивление $R=r$.

2. $R_5 \gg R_1, R_2$, т. е. участок db представляет, по существу, разрыв в цепи. Поэтому эквивалентная схема может быть представлена двумя параллельно соединенными резисторами, сопротивление которых равно R_1+R_2 . Следовательно, сопротивление схемы $R=1/2(R_1+R_2)$ в соответствии с (10). Поскольку $\varphi_a - \varphi_d = 1/2 IR_2$, $\varphi_a - \varphi_b = 1/2 IR_1$, $I=U/R$, то разность потенциалов

$$\varphi_b - \varphi_d = \frac{R_2 - R_1}{R_1 + R_2} U.$$

3. $R_5=0$. В этом случае общее сопротивление равно сумме сопротивлений двух одинаковых групп параллельно соединенных резисторов R_1 и R_2 . Падение напряжения на каждой группе равно $U/2$. Следовательно,

$$R = 2 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \quad I_1 = \frac{U}{2R_1}, \quad I_2 = \frac{U}{2R_2}, \quad I_5 = \frac{1}{2} U \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Заметим, что разность потенциалов $\varphi_d - \varphi_b = 0$, однако $I_5 \neq 0$. Пусть, например, $R_1=2$ Ом, $R_2=8$ Ом, $U=3,2$ В. Тогда $R=3,2$ Ом, $I_1=0,8$ А, $I_2=0,2$ А, $I_5=0,6$ А.

Вернемся к исходной схеме рис. 33.7 а и рассмотрим еще два частных случая.

А. Пусть $R_3=R_2=0$. Тогда резисторы R_1, R_5, R_4 соединены параллельно. Сопротивление R определяется формулой (33.13).

В. Разомкнем цепи между точками (ad) , (bc) — это эквивалентно замене резисторов R_3 , R_2 конденсаторами. Тогда получим схему, состоящую из последовательно соединенных резисторов R_1 , R_5 , R_4 .

ЗАДАЧА 33.6. Заменим в схеме (рис. 33.7а) резистор R_2 конденсатором емкостью C . Найти заряд конденсатора, если все резисторы одинаковы, $\varphi_a - \varphi_c = U$.

Решение. Поскольку в узле b ток не разветвляется, то схема содержит только параллельно и последовательно соединенные резисторы. Сопротивление схемы $R = \frac{5}{3}r$, где r — сопротивление одного резистора. Сила тока, входящего в узел a , равна $I = U/R = = (\frac{3}{5}r)U$. Напряжение на конденсаторе $U_c = \varphi_b - \varphi_c = \varphi_b - \varphi_d + \varphi_d - \varphi_c$. Очевидно, $\varphi_d - \varphi_c = Ir = \frac{3}{5}U$, $\varphi_b - \varphi_d = (\frac{1}{2}r)(U - Ir)r = \frac{1}{5}U$. Следовательно, $U_c = \frac{4}{5}U$. Заряд левой обкладки конденсатора $\frac{4}{5}CU$.

ЗАДАЧА 33.7. Найти показание амперметра (рис. 33.8а). $R_1 = 5$ Ом, $R_2 = R_5 = 10$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, $U = \varphi_a - \varphi_c = 30$ В.

Решение. Поскольку сопротивление амперметра равно нулю, то эквивалентная схема совпадает с изображенной на рис. 33.7а причем $R_4 = 0$. Представим ее в виде двух групп параллельно соеди-

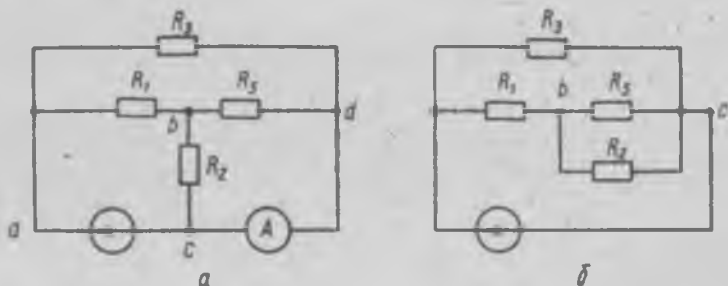


Рис. 33.8

ненных резисторов (рис. 33.8б). Очевидно, $I_3 = U/R_3 = 2$ А. Сопротивление нижнего участка равно 10 Ом. Поэтому $I_1 = 3$ А, $I_2 = I_5 = -1,5$ А. Ток, протекающий через амперметр, $I_4 = I_3 + I_5 = 3,5$ А.

ПРИМЕР 33.8. Рассмотрим схему, изображенную на рис. 33.9а. Пусть $\varphi_a - \varphi_c = U$. Найдем разность потенциалов точек d и b . Согласно закону Ома

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{U}{R_1 + R_5} R_1, \quad \varphi_a - \varphi_d = \frac{U}{R_3 + R_4} R_3.$$

Следовательно,

$$\varphi_d - \varphi_b = U \left(\frac{R_1}{R_1 + R_5} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) = U \frac{R_1 R_4 - R_2 R_3}{(R_1 + R_5)(R_3 + R_4)}. \quad (1)$$

Этот результат позволяет найти решение двух новых задач.

А. Предположим, что сопротивления резисторов R_3 и R_4 постоянны, а величины R_1 и R_2 изменяются так, что выполняется условие $R_1/R_3 = R_2/R_4$. Тогда разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = 0$.

В. Соединим точки b и d конденсатором емкостью C . Тогда заряд на правой обкладке конденсатора $q = C(\varphi_d - \varphi_b)$. Рассмотрим далее несколько вариантов этой задачи, не обращаясь к решению (1).

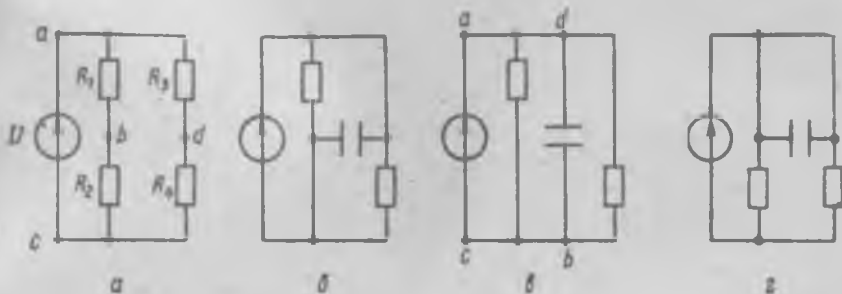


Рис. 33.9

1. Пусть $R_1 = 0$. Тогда напряжение на конденсаторе $U_c = -\varphi_a - \varphi_b = -U_3$, где U_3 — напряжение на резисторе R_3 ,

$$U_c = -\frac{U}{R_3 + R_4} R_3.$$

2. Положим $R_2 = R_3 = 0$ (рис. 33.9 б). Тогда $\varphi_a = \varphi_d$, $\varphi_c = \varphi_b$. Эквивалентная схема изображена на рис. 33.9 в. Очевидно, $U_c = U$. Если положить $R_1 = R_4 = 0$, то $U_c = -U$.

3. Если $R_1 = R_3 = 0$, то $U_c = 0$ — обе обкладки конденсатора имеют потенциал φ_a (рис. 33.9 г).

ПРИМЕР 33.9. Найдем токи, протекающие через резисторы в схеме, изображенной на рис. 33.10. Схема содержит четыре участка, имеющих различные потенциалы φ_a , φ_b , φ_c , φ_o , причем $\varphi_a - \varphi_o = U_1$, $\varphi_c - \varphi_o = U_2$.

В схеме два узла b и o . Стрелки обозначают положительные направления токов между узлами. Соотношение (33.9) для любого из узлов приводит к уравнению

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (1)$$

Далее рассмотрим контур $aboa$. Поскольку

$$0 = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_o + \varphi_o - \varphi_a,$$

то, учитывая закон Ома для участков цепи ab и bo $\varphi_a - \varphi_b = I_1 R_1$, $\varphi_b - \varphi_o = I_3 R_3$, получим уравнение

$$I_1 R_1 + I_3 R_3 = U_1. \quad (2)$$

Аналогичным образом, рассматривая контур *свос*, получим третье уравнение

$$I_2 R_2 + I_3 R_3 = U_2. \quad (3)$$

Можно рассмотреть также контур *авсоа*. Очевидное тождество

$$0 = \varphi_a - \varphi_b + \varphi_b - \varphi_c + \varphi_c - \varphi_o + \varphi_o - \varphi_a$$

приводит к уравнению

$$0 = I_1 R_1 - I_2 R_2 + U_2 - U_1,$$

которое не является независимым: оно следует из уравнений (2), (3). Из системы (1)–(3) находим

$$I_3 = \frac{R_1 U_2 + R_3 U_1}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}, \quad (4)$$

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3) U_1 - R_3 U_2}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}, \quad (5)$$

$$I_2 = \frac{(R_1 + R_3) U_2 - R_3 U_1}{R_1 R_2 + R_3 (R_1 + R_2)}. \quad (6)$$

Найдем разность потенциалов точек *a* и *c*. Выбирая контур *аос*, получим

$$\varphi_a - \varphi_c = (\varphi_a - \varphi_o) - (\varphi_c - \varphi_o) = U_1 - U_2.$$

Интересно исследовать независимо некоторые простые частные случаи и сопоставить полученные решения с (4)–(6).

1. $R_3 = 0$. Очевидно, $\varphi_b = \varphi_o$. Поэтому $U_1 = I_1 R_1$, $U_2 = I_2 R_2$, $I_3 = -(U_1/R_1) + (U_2/R_2)$.

2. $R_2 = 0$. Теперь $\varphi_b = \varphi_c$. Поэтому $I_3 = U_2/R_3$, $I_1 = (U_1 - U_2)/R_1$. Если $U_1 > U_2$, то $I_1 > 0$.

3. $R_2 \gg R_1, R_3$. В этом случае цепь на участке *bc* практически разомкнута. Следовательно, $I_1 = I_3 \simeq U_1/(R_1 + R_3)$, $I_2 \simeq 0$.

4. $U_1 \neq 0$, $U_2 = 0$. Условию $U_2 = \varphi_c - \varphi_o = 0$ соответствует параллельное соединение резисторов R_2 и R_3 . Очевидно,

$$I_1 = \frac{U_1}{R_1 + R_{23}}, \quad R_{23} = \frac{R_2 R_3}{R_2 + R_3}.$$

Поскольку положительное направление на участке *bc* уже определено, то $I_2 < 0$,

$$I_2 = -\frac{U_1 - I_1 R_1}{R_2} = -\frac{R_{23} U_1}{R_2 (R_1 + R_{23})}.$$

5. Рассмотрим симметричную схему: $R_1=R_2=R_3=R$, $U_1=U_2=U$. В этом случае $I_1=I_2=I$, $I_3=2I$. Поэтому $U=IR+2IR$,

$$I_1=I_2=\frac{1}{3} \frac{U}{R}, \quad I_3=\frac{2}{3} \frac{U}{R}.$$

6. Найдем условие, при выполнении которого $I_2=0$. В этом случае

$$I_1=I_3=\frac{U_1}{R_1+R_3}.$$

Поскольку $\varphi_b=\varphi_c$, то $I_3R_3=U_2$. Эти решения совместны при условии $(R_1+R_3)U_2=R_3U_1$.

ЗАДАЧА 33.10. Лестничная цепь состоит из последовательно-сти N одинаковых звеньев. Последнее звено замкнуто резистором R (рис. 33.11а). При какой величине R сопротивление цепи не зависит от числа звеньев?

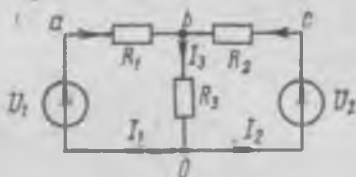


Рис. 33.10

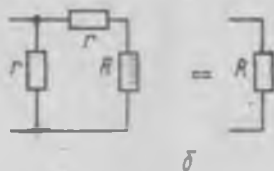
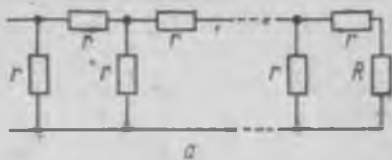


Рис. 33.11

Решение. Для решения задачи необходимо найти положительный корень уравнения

$$R = \frac{r(r+R)}{2r+R}, \quad (1)$$

символически изображенного на рис. 33.11б. Из (1) находим

$$R = \frac{\sqrt{5}-1}{2} r \simeq 0,618r.$$

Пропорция $b/a=0,618$ известна с древних времен как результат деления отрезка длиной $a+b$ на две неравные части a и b , $a>b$, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}.$$

Леонардо да Винчи назвал ее золотым сечением. Различные реализации золотого сечения известны в архитектуре и живописи [30, 31].

§ 34. ЭДС ИСТОЧНИКА ТОКА. ЗАМКНУТАЯ ЦЕПЬ ПОСТОЯННОГО ТОКА

1. **Электродвижущая сила.** Сообщим двум электродам равные по величине и противоположные по знаку заряды: на электроде *b* избыток электронов, а на электроде *a* недостаток электронов. Если соединить электроды проводником, то по нему пойдет ток. Недостаток электронов на электроде *a* начнет компенсироваться электронами, пришедшими к нему по проводнику. Напряженность электрического поля будет уменьшаться. После выравнивания зарядов на электродах все точки проводника приобретут одинаковый потенциал, электрическое поле исчезнет и ток прекратится.

Для того чтобы длительное время поддерживать электрический ток, необходимо непрерывно подводить к электроду *b* такое количество электронов, какое уходит от него по проводнику, и отводить от электрода *a* такое же количество электронов. Однако на участке *ab* вне проводника электроны должны двигаться против сил, действующих со стороны электрического поля. Поэтому непрерывный перенос электронов от электрода *a* к электроду *b* возможен только в результате работы, произведенной некоторой системой, внешней по отношению к проводнику. Следовательно, необходимо устройство, называемое генератором или источником тока, способное поддерживать ток в проводнике. Если проводник отключен, то генератор должен создавать разность потенциалов между электродами, совершив работу по разделению зарядов. Знаки «+» и «—» на зажимах генератора обозначают электроды соответственно с недостатком и избытком электронов.

Одной из характеристик генератора является разность потенциалов на электродах при разомкнутой внешней цепи. Эту величину называют электродвижущей силой (сокращенно ЭДС). ЭДС генератора или источника тока равна

$$\mathcal{E} = \frac{\Delta A}{\Delta q},$$

где ΔA — работа, совершаемая источником тока при разделении и перемещении зарядов Δq , — Δq к положительному и отрицательному электродам. В замкнутой цепи $\Delta q = I \Delta t$, где I — сила тока. Следовательно, работа ΔA , совершаемая источником тока над зарядом Δq при перемещении его вдоль всей цепи, связана с ЭДС соотношением

$$\Delta A = \mathcal{E} \Delta q = I \mathcal{E} \Delta t. \quad (34.1)$$

Мощность, потребляемая цепью,

$$P = \frac{\Delta A}{\Delta t} = \mathcal{E} \frac{\Delta q}{\Delta t} = I\mathcal{E} \quad (34.2)$$

характеризует скорость, с которой энергия передается заряду Δq .

Таким образом, генератор должен представлять физическую систему, которая преобразует одну из форм энергии в электрическую энергию. В настоящее время известны преобразователи такого рода: механические, электрохимические, фотоэлектрические, термоэлектрические и др. В основе работы любого преобразователя энергии лежит определенное физическое явление. В § 40, например, показано, как явление электромагнитной индукции используется для создания генератора переменного напряжения.

Любопытно, что около 250 видов морских созданий способны вырабатывать кратковременный электрический ток. Например, у электрического ската мышечная ткань плавников служит электродом с положительным полюсом в верхней части и с отрицательным — в нижней. Приборы регистрировали разряд напряжением 550 В при силе тока до 2 А.

2. Электрохимический (или гальванический) элемент — устройство, состоящее из двух электродов, помещенных в электролит. В нем происходит химическая реакция, в результате которой энергия связи конечных продуктов меньше энергии связи исходных. Разность энергий связи определяет ЭДС элемента.

Рассмотрим принцип действия элемента Вольта. В этом источнике тока электроды в виде дисков из меди (или серебра) и цинка погружены в водный раствор серной кислоты. Что же происходит при погружении электродов в раствор кислоты? В химической реакции вещества обмениваются электронами. Здесь возможны два типа процессов. Цинк растворяется в кислоте — происходит реакция окисления — часть атомов цинка оставляет два электрона и в виде положительных ионов переходит в раствор. Электрод приобретает отрицательный заряд. По мере накопления ионов Zn^{++} наступает равновесие. В тонком слое на границе раздела между поверхностью цинковой пластинки и раствором возникает разность потенциалов $\varphi_{\text{Zn}} - \varphi_{\text{Zn}} = e_b$. У медной пластинки идет реакция восстановления — положительные ионы H^+ присоединяют электроны: $\text{H}_2\text{SO}_4 + 2e = \text{H}_2 + \text{SO}_4^{--}$. Медный электрод приобретает положительный заряд. Между пластинкой и электролитом устанавливается разность потенциалов $\varphi_{\text{Cu}} - \varphi_{\text{Zn}} = e_a$. Разность потенциалов между электродами становится равной $\mathcal{E} = \varphi_{\text{Cu}} - \varphi_{\text{Zn}} = e_a + e_b$. Если соединить оба электрода проводником, то через него начнется движение электронов от цинкового электрода к медному. Одновременно протекают реакции



Их скорости одинаковы, т. е. количество электронов, освобождаю-

щихся в одной реакции, равно количеству электронов, поглощенных в другой. Ионы SO_4 , образующиеся вблизи положительного электрода, переходят в электролите к отрицательному электроду. Таким образом, получается замкнутая цепь тока. Ионы цинка и электроны на каждой поверхности электродов движутся против сил электрического поля. Энергия, необходимая для этого, выделяется в химической реакции $\text{Zn} + \text{H}_2\text{SO}_4 = \text{ZnSO}_4 + \text{H}_2$ и переходит в теплоту и электрическую энергию. Обычно эта энергия составляет около 10^{-19} Дж на один элементарный заряд. Поэтому за единицу ЭДС — 1 вольт принята величина такого же порядка: 1 вольт определяется как $1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж на элементарный заряд. Единица заряда — кулон — выбрана таким образом, что $1 \text{ Кл} \cdot 1 \text{ В} = \text{Дж}$. Следовательно,

$$1 \text{ Кл} = \frac{1 \text{ Дж}}{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж/эл. заряд}} = 6,25 \cdot 10^{18} \text{ эл. зарядов.}$$

Если внешняя цепь разомкнута, то окислительно-восстановительные реакции прекращаются. На отрицательном электроде имеется избыток электронов, а на положительном — недостаток электронов. В результате между электродами возникает разность потенциалов, равная значению $\mathcal{E}$. При подключении внешней цепи разность потенциалов на зажимах источника уменьшается.

При длительной работе элемента его состав претерпевает изменения и ЭДС уменьшается. Если химическая реакция в элементе обратима, то, пропуская ток в обратном направлении, можно восстановить химическую энергию элемента. Именно это происходит при зарядке батарей аккумуляторов.

До конца XVIII в. единственный способ получения электричества был основан на электризации трением. В 1780—1790 гг. итальянский физиолог Л. Гальвани (1737—1798) обнаружил и исследовал интересное явление. Он показал, что если создать замкнутую цепь, состоящую из двух разнородных металлов, приложенных к оголенному нерву препарированной лягушки, то возникает мускульное сокращение, аналогичное тому, которое вызывается разрядом лейденской банки. Это явление он приписал наличию особого «животного электричества». Опыты Гальвани приобрели громадную популярность. В 1791 г. их повторяет итальянский физик Алессандро Вольта (1745—1827). Однако основной причиной эффекта он считал контакт двух разнородных металлов между собой и тканью мышцы. В доказательство он провел свой знаменитый опыт. Вольта брал две монеты или диски из разных металлов и клал одну под язык, другую — на язык. Если края монет соединялись, то можно было ощутить кисловатый «вкус» электричества. Это был первый в истории человечества источник тока. Действительно, если электродами являются цинк и медь, а электролитом вода, то у медного электрода идет реакция $2\text{H}_2\text{O} + 2e = \text{H}_2 + 2\text{OH}^-$, а у цинкового — $\text{Zn} + 2\text{OH}^- =$

$= \text{ZnO} + \text{H}_2\text{O} + 2e$. В 1800 г. Вольта собрал батарею, состоящую из последовательно соединенных элементов — вольтов столб. Это изобретение принесло ему всемирную славу.

Появление первого источника тока, несмотря на его несовершенство (накопление водорода приводило к быстрому падению ЭДС), открыло новую эпоху в исследовании электричества. Изучение взаимодействия электрического тока с веществом привело вскоре к открытию множества новых явлений и развитию работ по практическому использованию электроэнергии.

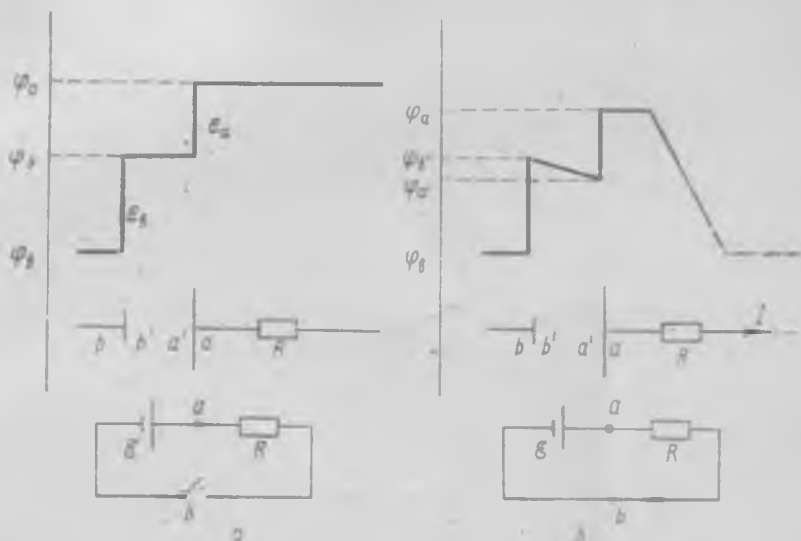


Рис. 34.1

3. Закон Ома для полной цепи. Рассмотрим цепь, состоящую из электрохимического элемента — источника тока, ЭДС которого $\mathcal{E}$, внутреннее сопротивление r , соединенного с проводником сопротивлением R . Изобразим графически распределение потенциала вдоль разомкнутой цепи. На рис. 34.1 по вертикали отложен потенциал различных точек цепи, элементы которой показаны на горизонтальной прямой. Потенциал электролита произволен, так как его нельзя непосредственно измерить. Точки b' , a' находятся на границе электродов b , a с электролитом. Поскольку $\varphi_{b'} - \varphi_b = e_b$, $\varphi_a - \varphi_{a'} = e_a$, то разность потенциалов на концах разомкнутой цепи $\varphi_a - \varphi_b = e_a + e_b = \mathcal{E}$, где $\mathcal{E}$ — ЭДС источника тока.

Изобразим теперь распределение электрического потенциала вдоль замкнутой цепи рис. 34.1 б.

Согласно условию, принятому в электротехнике, мы считаем, что ток во всех участках цепи создается движением положитель-

ных зарядов. Поэтому на любом участке, содержащем сопротивление, ток течет от точки с большим потенциалом к точке с меньшим потенциалом. Во внешней части цепи потенциал падает на резисторе R и согласно закону Ома

$$\varphi_a - \varphi_b = IR. \quad (34.3)$$

Во внутренней части цепи $b'a'$ ток должен течь от точки b' к точке a' . Из рис. 34.16 видно, что это возможно только при наличии скачков потенциала на границе электродов с электролитом. Падение напряжения на внутреннем сопротивлении

$$\varphi_{b'} - \varphi_{a'} = Ir. \quad (34.4)$$

Из (34.3), (34.4) находим соотношение

$$IR + \varphi_b - \varphi_{b'} + Ir + \varphi_{a'} - \varphi_a = 0,$$

из которого следует, что сумма приращений потенциала вдоль замкнутой цепи равна нулю. Учитывая, что $\varphi_a - \varphi_{a'} = \mathcal{E}_a$, $\varphi_{b'} - \varphi_b = \mathcal{E}_b$, $\mathcal{E}_a + \mathcal{E}_b = \mathcal{E}$, получим закон Ома для полной цепи

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r}. \quad (34.5)$$

Сила тока в неразветвленной цепи с гальваническим элементом равна ЭДС, деленной на полное сопротивление.

При протекании тока напряжение на электродах источника (равное, очевидно, напряжению на резисторе R) меньше значения $\mathcal{E}$ на величину падения напряжения на внутреннем сопротивлении источника

$$\varphi_a - \varphi_b = IR = \mathcal{E} - Ir. \quad (34.6)$$

Важно понимать, что напряжение на внешней цепи зависит от значений трех величин: $\mathcal{E}$, R и r . Зависимость напряжения U_R на внешнем резисторе (сплошная кривая) и напряжения U_r на внутреннем сопротивлении (пунктирная кривая) в зависимости от значений R (при фиксированных значениях $\mathcal{E}$ и r) изображены на рис. 34.2

$$U_R = \frac{R}{R + r} \mathcal{E}, \quad U_r = \frac{r}{R + r} \mathcal{E}.$$

При значении $R = r$ эти напряжения равны. Если $R \gg r$, то напряжение на резисторе R очень близко к значению $\mathcal{E}$. В пределе, когда сопротивление внешней цепи будет бесконечно велико (т. е. при разомкнутой цепи), напряжение между зажимами источника равняется значению ЭДС. В другом предельном случае, когда ис-

точник замкнут накоротко (т. е. $R=0$), напряжение на внутренней цепи максимально и равно $\mathcal{E}$. Сила тока короткого замыкания

$$I_{\text{кз}} = \frac{\mathcal{E}}{r}. \quad (34.7)$$

ПРИМЕР 34.1. При измерении ЭДС долго работавшей батарейки вольтметр показал 3,5 В. Почему лампочка, рассчитанная на это напряжение, подключенная к батарейке, не горит?

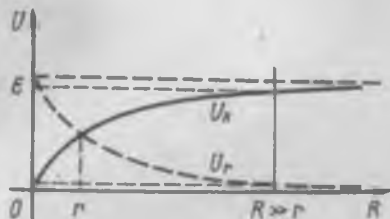


Рис. 34.2

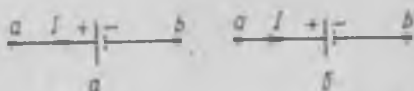


Рис. 34.3

У старой батарейки внутреннее сопротивление становится очень большим: $r \gg R$. Поэтому напряжение на лампочке сопротивлением R

$$U_R = \frac{R}{R+r} \mathcal{E} \simeq \frac{R}{r} \mathcal{E} \ll \mathcal{E}$$

оказывается значительно меньшим, чем необходимо для ее свечения.

ПРИМЕР 34.2. Какую допускают относительную ошибку в измерении ЭДС источника тока, если показание вольтметра, присоединенного к его полюсам, принимают за ЭДС? Сопротивление источника тока $r=0,5$ Ом, сопротивление вольтметра $R=200$ Ом.

Показание вольтметра U — это напряжение между его зажимами:

$$U = \frac{R}{R+r} \mathcal{E}.$$

Это значение напряжения отличается от величины ЭДС источника на величину

$$\mathcal{E} - U = \frac{r}{R+r} \mathcal{E} = 0,0025 \mathcal{E}.$$

Таким образом, относительная ошибка при измерении ЭДС составляет

$$\frac{\mathcal{E} - U}{\mathcal{E}} = 0,25 \mathcal{U}.$$

4. Закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Запишем закон Ома для участка замкнутой цепи, содержащей источник тока, сопротивление которого r . Направление тока указано на рис. 34.3.

Рассмотрим вначале рис. 34.3а. Между точками a и b может быть включена некоторая «внешняя» по отношению к рассматриваемой части цепи, содержащая резисторы и источники тока, соединенные произвольным образом. Очевидно, выделение внешней части в замкнутой цепи является условным.

Вольтметр, присоединенный к точкам a и b цепи, покажет напряжение $\varphi_a - \varphi_b$. Во «внешней» части цепи ток идет от положительного полюса к отрицательному. Поскольку $\varphi_b - \varphi_a = Ir$, то,

учитывая тождество $\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E} - (\varphi_b - \varphi_a)$, получим

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E} - Ir. \quad (34.8)$$

Формула (34.8) выражает закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС. Ее можно представить в другой форме:

$$\varphi_a - \varphi_b = (I_{кз} - I)r, \quad I_{кз} = \frac{\mathcal{E}}{r}.$$

Следовательно, при силе тока меньшей, чем сила тока короткого замыкания, разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b > 0$. Если же через источник протекает ток $I > I_{кз}$, то $\varphi_a < \varphi_b$, а работа сил, действующих на заряд $\Delta q = I \Delta t$ со стороны электрического поля $\Delta A = \Delta q (\varphi_a - \varphi_b)$, отрицательна.

Обратимся теперь к рис. 34.3б. На участке ab ток идет навстречу ЭДС. Это возможно в том случае, когда в цепи действуют другие источники тока, не входящие в рассматриваемый участок, суммарное значение ЭДС которых больше значения ЭДС данного участка. Фактически по отношению к этим источникам тока участок ab играет роль внешней цепи. Именно таким образом включается батарея аккумулятора при зарядке. Поскольку теперь $\varphi_a - \varphi_b = Ir$, то закон Ома для участка цепи, изображенного на рис. 34.3б, принимает форму

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E} + Ir. \quad (34.9)$$

В § 36 мы получим закон Ома для участка цепи, содержащего ЭДС на основе закона сохранения энергии.

Соотношения (34.8) и (34.9) чрезвычайно важны при расчете электрических схем. Причина этого в том, что любая цепь постоянного тока состоит из отдельных произвольно соединенных элементов: источников тока, резисторов и конденсаторов. Записывая закон Ома для резисторов и источников тока, мы получаем возможность провести полный анализ произвольных цепей.

При расчете различных цепей необходимо: 1) начертить схему и указать на ней все элементы цепи: источники тока, резисторы и конденсаторы; 2) обозначить на каждом участке цепи токи и произвольно указать положительные направления токов; 3) используя закон Ома в форме (34.8) и (34.9), установить связь между токами, ЭДС и разностями потенциалов различных точек цепи. В результате должна быть получена система уравнений, учитывающая условия задачи и позволяющая определить неизвестные величины. Если после подстановки числовых значений сила тока окажется отрицательной величиной, это будет означать, что соответствующий ток течет в направлении, противоположном выбранному.

ЗАДАЧА 34.3. При токе $I_1 = 1,5$ А напряжение на участке некоторой цепи $U_1 = 20$ В. При токе $I_2 = 0,5$ А напряжение на том же участке $U_2 = 8$ В. Какова ЭДС, действующая на этом участке? Каково будет напряжение U_3 , если ток уменьшить до значения $I_3 = 0,1$ А.

Решение. Поскольку напряжение не пропорционально току: $U_1/I_1 \neq U_2/I_2$, то на участке цепи имеется ЭДС. Пусть R — сопротивление этого участка, включающее сопротивление источника ЭДС. Применяя закон Ома для участка цепи, получим два уравнения

$$U_1 \pm I_1 R = \mathcal{E}, \quad (1)$$

$$U_2 \pm I_2 R = \mathcal{E}. \quad (2)$$

Верхний знак соответствует течению тока в направлении ЭДС (ток внутри источника идет от отрицательного полюса к положительному), а нижний — течению тока навстречу ЭДС участка. Вычитая (1) из (2), находим

$$R = \mp \frac{U_1 - U_2}{I_1 - I_2} = \mp 12 \text{ Ом}. \quad (3)$$

Поскольку сопротивление участка — положительная величина, соответствующая выбору нижнего знака, то можно заключить, что ЭДС источника включена навстречу току. Из (1) и (3) находим значение $\mathcal{E}$:

$$\mathcal{E} = \frac{U_2 I_1 - U_1 I_2}{I_1 - I_2} = 2 \text{ В}.$$

Напряжение U_3 теперь может быть найдено из соотношения, аналогичного (1) и (2):

$$U_3 = I_3 R + \mathcal{E} = 3,2 \text{ В}.$$

ЗАДАЧА 34.4. Вычислить ЭДС $\mathcal{E}$ и внутреннее сопротивление r батареи, показанной на рис. 34.4. Дано $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = 10$ В, $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 3$ Ом.

Решение. Предположим, что точки A и B подсоединены к внешней цепи и через батарею идет ток I . Направления токов I , I_1 и I_2 , идущих через $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, заранее неизвестны. Выберем положительные направления, например, так, как показано на рис. 34.4 а.

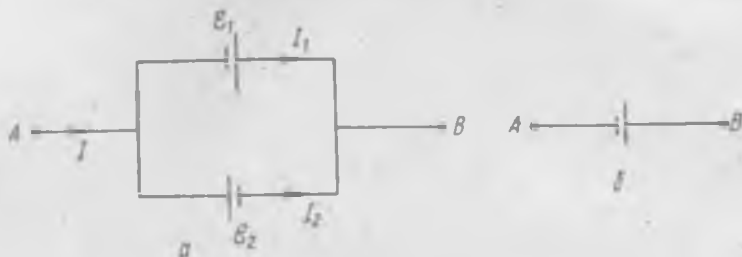


Рис. 34.4

Пусть потенциалы точек A и B равны φ_A и φ_B . Для участка цепи, содержащего $\mathcal{E}_1$, на основании (34.8) имеем

$$\varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1, \quad (1)$$

а для участка $A\mathcal{E}_2B$ в соответствии с (34.9)

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_2 + I_2 r_2. \quad (2)$$

Очевидно, общий ток через батарею

$$I = I_1 + I_2. \quad (3)$$

Наша цель — представить батарею в виде одного эквивалентного источника тока и определить величину электродвижущей силы $\mathcal{E}$ и внутреннего сопротивления r . Для этого умножим (1) на $r_2(r_1 + r_2)^{-1}$, а (2) на $r_1(r_1 + r_2)^{-1}$, сложим их и учтем (3). В результате получим

$$\varphi_B - \varphi_A = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} - I \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \quad (4)$$

Полученное соотношение совпадает с законом Ома (34.8) для участка цепи, изображенного на рис. 34.4 б. Следовательно, ЭДС и внутреннее сопротивление эквивалентного источника тока

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} = 5 \text{ В}, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0,75 \text{ Ом}.$$

ЗАДАЧА 34.5. Три гальванических элемента соединены, как показано на рис. 34.5. Определить токи I_1 , I_2 , I_3 в элементах ($\mathcal{E}_1 = 1,3$ В, $\mathcal{E}_2 = 1,5$ В, $\mathcal{E}_3 = 2$ В, $r_1 = r_2 = r_3 = 0,2$ Ом, $R = 0,55$ Ом).

Решение. Пусть в неразветвленной части цепи течет ток I_3 . Ток I_1 течет через $\mathcal{E}_1$, а I_2 — через $\mathcal{E}_2$. Потенциалы точек A и B

равны φ_A и φ_B . Рассмотрим участок цепи между точками A и B , содержащий $\mathcal{E}_1$. Закон Ома для этого участка имеет вид

$$\varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E}_1 - I_1 r_1. \quad (1)$$

Закон Ома для участка цепи AB , содержащего $\mathcal{E}_2$,

$$\varphi_B - \varphi_A = \mathcal{E}_2 - I_2 r_2. \quad (2)$$

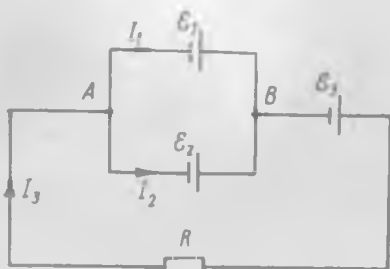


Рис. 34.5

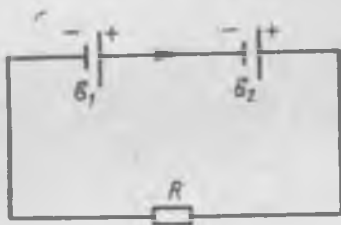


Рис. 34.6

Для участка цепи между точками A и B , содержащего сопротивление R и $\mathcal{E}_3$, закон Ома приводит к уравнению

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_3 - I_3(R + r_3). \quad (3)$$

К этим уравнениям необходимо добавить уравнение, связывающее токи:

$$I_3 = I_1 + I_2. \quad (4)$$

Система уравнений (1)–(4) содержит четыре неизвестные величины $\varphi_B - \varphi_A$, I_1 , I_2 , I_3 . Умножая (1) на r_2 , (2) на r_1 , складывая их и учитывая (3) и (4), получим выражение для тока

$$I_3 = \frac{1}{R + r_3 + \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}} \left[\frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 + r_2} + \mathcal{E}_3 \right] = 4 \text{ A}. \quad (5)$$

Отсюда, кстати, следует, что электродвижущая сила батареи, эквивалентная источникам $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_3$, определяется выражением, стоящим в скобках формулы (5). Далее из (3) найдем, что $\varphi_B - \varphi_A = -\mathcal{E}_3 + I_3(r_3 + R) = 1 \text{ В}$. Затем из (1) определим

$$I_1 = \frac{1}{r_1} [\mathcal{E}_1 - (\varphi_B - \varphi_A)] = 1,5 \text{ A}.$$

Из (2) получим значение

$$I_2 = \frac{1}{r_2} [\mathcal{E}_2 - (\varphi_B - \varphi_A)] = 2,5 \text{ A}.$$

ПРИМЕР 34.6. Найдем условия, при которых отключение источника тока $\mathcal{E}_2$ (рис. 34.6) приводит к возрастанию тока в цепи, содержащей только источник тока $\mathcal{E}_1$.

Искомое условие

$$\frac{\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2}{R + r_1 + r_2} < \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}$$

приводит к неравенству

$$\frac{\mathcal{E}_2}{r_2} < \frac{\mathcal{E}_1}{R + r_1}.$$

Из этого неравенства следует, что сила тока в цепи, содержащей источник $\mathcal{E}_1$, больше силы тока короткого замыкания $I_2 = \mathcal{E}_2/r_2$ источника $\mathcal{E}_2$. Поэтому в исходной цепи разность потенциалов на электродах $\mathcal{E}_1$

$$\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_2 - Ir_2 = r_2(I_2 - I) = \frac{\mathcal{E}_2(R + r_1) - \mathcal{E}_1 r_2}{R + r_1 + r_2} < 0.$$

Тем самым источник $\mathcal{E}_2$ играет роль нагрузки для источника $\mathcal{E}_1$. Поэтому, если такой источник «паразит» убрать, ток в цепи возрастет.

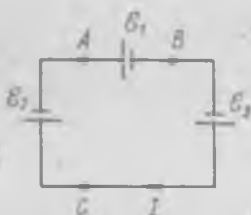


Рис. 34.7

ЗАДАЧА 34.7. В схеме, изображенной на рис. 34.7, включены три батареи ($\mathcal{E}_1 = 1$ В, $\mathcal{E}_2 = 4$ В, $\mathcal{E}_3 = 2$ В, $r_1 = 1$ Ом, $r_2 = 2$ Ом, $r_3 = 1$ Ом). Найти напряжение на зажимах первой батареи. Сопротивлением соединяющих проводов пренебречь.

Решение. Зажимы первой батареи обозначены буквами А и В, потенциалы этих точек φ_A и φ_B . Величина напряжения на зажимах $|\varphi_A - \varphi_B|$.

Предположим, что в цепи течет ток I в направлении, указанном стрелкой (рис. 34.7). Запишем закон Ома для участка цепи, содержащего $\mathcal{E}_1$,

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_1 + Ir_1. \quad (1)$$

Теперь запишем закон Ома для участков цепи, содержащих $\mathcal{E}_2$ и $\mathcal{E}_3$,

$$\varphi_C - \varphi_A = \mathcal{E}_2 + Ir_2, \quad (2)$$

$$\varphi_C - \varphi_B = \mathcal{E}_3 - Ir_3. \quad (3)$$

Из уравнений (1), (2) и (3) найдем

$$I = \frac{\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2 + r_3} = -0,5 \text{ А}. \quad (4)$$

Отрицательный знак указывает на то, что истинное направление тока противоположно выбранному. Подставляя значение тока (4) в (1), найдем искомое напряжение на зажимах первой батареи:

$$\varphi_A - \varphi_B = \mathcal{E}_1 + I r_1 = 0,5 \text{ В.}$$

§ 35. ПРАВИЛА РАСЧЕТА ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Мы видели, что на основании закона Ома для участка цепи, содержащего ЭДС, в принципе можно рассчитывать цепи любой сложности. Однако значительно удобнее применять правила Кирхгофа, которые являются несложным обобщением закона Ома.

В общем случае в цепи можно найти точки, в которых сходятся не менее трех проводников. Такие точки называются узлами. Очевидно, любой заряд, покинувший один элемент цепи, должен входить в какой-либо другой элемент цепи. Поскольку в узлах токи разветвляются, то из закона сохранения заряда следует условие непрерывности токов: *сумма сил токов, входящих в узел, равна сумме сил токов, выходящих из узла,*

$$\sum_{\text{вход}} I_k = \sum_{\text{вых}} I_l. \quad (35.1)$$

Направления токов мы заранее не знаем. Поэтому следует произвольно задать положительные направления токов и ввести обозначения I_k для тока, текущего в положительном направлении. Если в результате решения для какого-либо тока I_k получится отрицательное значение, то это означает, что на данном участке цепи в действительности ток течет в направлении, обратном выбранному.

Соотношение (35.1) называется *первым правилом Кирхгофа*.

Второе правило относится к произвольным замкнутым контурам, которые можно выделить в данной цепи. Оно гласит: *в любом замкнутом контуре сумма падений напряжения на резисторах равна сумме ЭДС, имеющих в этом контуре.*

Падение напряжения на внутреннем сопротивлении источника тока и проводниках считается положительным, если направление обхода на данном участке совпадает с положительным направлением тока. ЭДС берется с положительным знаком, если обход источника тока начинается с отрицательного полюса и заканчивается на положительном полюсе. При обходе источника тока от положительного полюса к отрицательному ЭДС следует брать со знаком «минус».

Ниже мы покажем, что второе правило Кирхгофа является следствием закона Ома для участка, рассмотренного в § 34.

В качестве примера рассмотрим цепь, изображенную на рис. 35.1 а. Первое правило Кирхгофа для любого из узлов дает соотношение

$$I = I_1 + I_2. \quad (35.2)$$

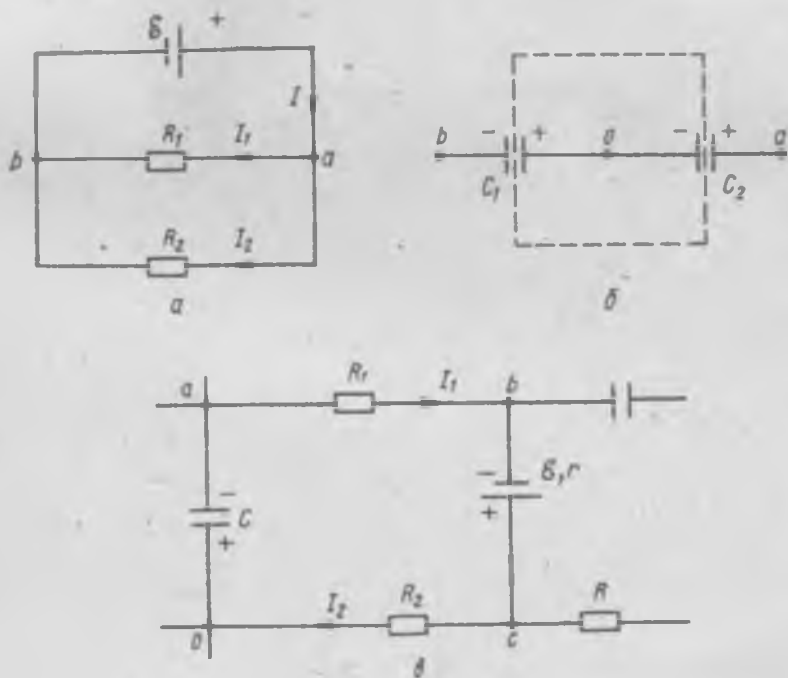


Рис. 35.1

Потенциалы узлов a и b равны соответственно φ_a и φ_b . Из закона Ома для участка $a\delta b$

$$\varphi_b - \varphi_a = \varepsilon - Ir, \quad (35.3)$$

для участка $a\delta_1 b$

$$\varphi_a - \varphi_b = I_1 R_1, \quad (35.4)$$

для участка $a\delta_2 b$

$$\varphi_a - \varphi_b = I_2 R_2. \quad (35.5)$$

Исключая потенциалы из (35.3) и (35.4), получим соотношение

$$Ir + I_1 R_1 = \varepsilon, \quad (35.6)$$

следующее из второго правила Кирхгофа для контура $a\delta b R_1$.

Для контура, содержащего $\mathcal{E}$ и R_2 , из (35.3) и (35.5) найдем

$$I r + I_2 R_2 = \mathcal{E}. \quad (35.7)$$

Для контура, содержащего R_1 и R_2 , из (35.4) и (35.5) найдем

$$I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0. \quad (35.8)$$

Правила Кирхгофа могут быть использованы и для вычисления сопротивления цепи, состоящей из многих резисторов. Действительно, выражение для тока I , получающееся в результате решения независимых уравнений (35.6), (35.7) и (35.8), имеет вид

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{12} + r}, \quad R_{12} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Из него сразу же следует правильное соотношение для сопротивлений, эквивалентного двум параллельно соединенным резисторам R_1 и R_2 .

В ряде цепей наряду с ЭДС и резисторами могут быть включены конденсаторы. Разумеется, ток через конденсатор равен нулю. Его пластины заряжаются противоположными по знаку зарядами $\pm Q$ и имеют определенные потенциалы. Разность этих потенциалов определяет напряжение U на конденсаторе. Величина заряда $Q = CU$ зависит от емкости конденсатора и напряжения на пластинах. Знаки зарядов на пластинах конденсаторов заранее не известны и расставляются произвольно, за исключением очевидных ситуаций. Если в цепи имеется участок, выделенный на рис. 35.1б пунктиром, изолированный от других проводников, то закон сохранения заряда приводит к уравнению

$$C_1 U_1 - C_2 U_2 = q, \quad (35.9)$$

где заряд q равен сумме зарядов правой пластины C_1 и левой пластины C_2 , которые были сообщены конденсаторам до включения в цепь, $U_2 = \varphi_a - \varphi_0$, $U_1 = \varphi_0 - \varphi_b$. Уравнение (35.9) является следствием первого закона Кирхгофа в применении к цепям, содержащим конденсаторы: *заряд изолированной части цепи сохраняется*. Покажем теперь, что второй закон Кирхгофа применим и к цепям, содержащим конденсаторы.

Произвольную цепь можно представить как совокупность замкнутых между узлами участков, содержащих ЭДС, резисторы и конденсаторы. Рассмотрим, например, контур, изображенный на рис. 35.1в. Он содержит четыре участка, потенциалы которых равны φ_a , φ_b , φ_c , φ_0 . Назовем напряжением на конденсаторе величину $U = \varphi_0 - \varphi_a$. Из закона Ома для участков ab , bc , co получим уравнения

$$\varphi_a - \varphi_b = I_1 R_1, \quad \varphi_c - \varphi_b = \mathcal{E} - I_1 r, \quad \varphi_c - \varphi_0 = I_2 R_2.$$

Исключая из этих уравнений потенциалы узлов, получим соотношение

$$U + I_1(R_1 + r) + I_2 R_2 = \mathcal{E},$$

которое является выражением второго закона Кирхгофа для данного контура. Правило знаков дополняется следующим: напряжение на конденсаторе считается положительным, если при обходе контура конденсатор проходит от положительно заряженной пластины к отрицательной, и считается отрицательным — в противоположном случае.

Приступая к расчету произвольной цепи, надо прежде всего обозначить токи между узлами, напряжения на конденсаторах и произвольно выбрать положительные направления токов и знаки зарядов на обкладках. Полное число уравнений, составленных по правилам Кирхгофа, должно равняться числу различных токов и напряжений на конденсаторах в данной цепи. При этом необходимо следить, чтобы все уравнения были независимы. Независимые уравнения можно составить для тех контуров, которые не получаются в результате наложения уже рассмотренных. Например, любое из уравнений (35.6) — (35.8) является следствием двух других оставшихся уравнений. Кроме того, при составлении уравнений для токов в цепи с n узлами независимыми оказываются только $n-1$ уравнений.

ЗАДАЧА 35.1. Записать систему уравнений Кирхгофа для цепи, показанной на рис. 34.5.

Решение. Первое правило позволяет написать уравнение

$$I_1 + I_2 = I_3. \quad (1)$$

Для определения трех токов два недостающих уравнения следуют из второго правила Кирхгофа. Для контура, содержащего $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, при обходе по часовой стрелке

$$I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2, \quad (2)$$

а для контура, содержащего $\mathcal{E}_3$ и $\mathcal{E}_2$, при обходе по часовой стрелке

$$I_2 r_2 + I_3 (r_3 + R) = \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3. \quad (3)$$

При обходе в направлении против часовой стрелки знаки в обеих частях уравнений (2), (3) согласно правилам изменятся на обратные. Очевидно, (2) и (3) являются следствиями уравнений (1) — (3) задачи 34.5.

ЗАДАЧА 35.2. Определить, при каком значении $\mathcal{E}$ ток через резистор R будет равен нулю (рис. 35.2). Внутренними сопротивлениями источников тока пренебречь.

Решение. В цепи два узла A и B . Для любого из них первое правило Кирхгофа дает уравнение

$$I_1 = I + I_2. \quad (1)$$

Для контура $A\delta_1 B\delta_2 A$, используя второе правило, находим

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2. \quad (2)$$

Для контура $A\delta B\delta_2 A$

$$I_2 R_2 - IR = -\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}. \quad (3)$$

По условию задачи $I = 0$. Подставляя это значение в (1)–(3) и исключая I_1 и I_2 , находим искомое значение

$$\mathcal{E} = \frac{\mathcal{E}_2 R_1 + \mathcal{E}_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

ЗАДАЧА 35.3. Два элемента соединены по схеме, показанной на рис. 35.3. Определить напряжение на зажимах элементов ($\mathcal{E}_1 = 1,4$ В, $\mathcal{E}_2 = 1,1$ В, $r_1 = 0,3$ Ом, $r_2 = 0,2$ Ом). При каком условии разность потенциалов между точками a и b равна нулю?

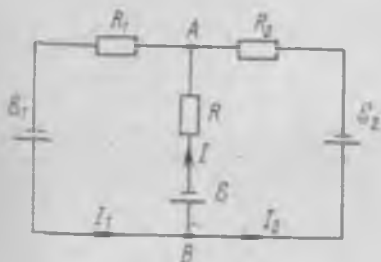


Рис. 35.2

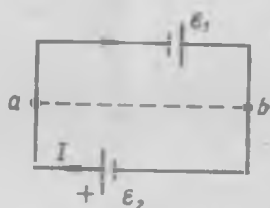


Рис. 35.3

Решение. Напряжения на зажимах ЭДС одинаковы и равны разности потенциалов $\varphi_a - \varphi_b$. Применяя к контуру $\delta_2 ab$ (часть контура ab показана пунктиром) второе правило Кирхгофа, получим

$$\varphi_a - \varphi_b + Ir_2 = \mathcal{E}_2. \quad (1)$$

Обратите внимание на то, что применение второго правила к рассмотренному контуру приводит к закону Ома (34.8) для участка цепи, содержащего ЭДС. Это же правило для контура $\delta_2 a \delta_1 b$ позволяет записать уравнение

$$I(r_1 + r_2) = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим

$$\varphi_a - \varphi_b = \frac{\mathcal{E}_2 r_1 - \mathcal{E}_1 r_2}{r_1 + r_2} = 0,1 \text{ В.}$$

При условии $\mathcal{E}_1 r_1 = \mathcal{E}_1 r_2$ разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = 0$.

ЗАДАЧА 35.4. К батарее с ЭДС, равными $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$, подсоединены два незаряженных конденсатора с емкостями C_1 и C_2 , как показано на рис. 35.4. Определить разности потенциалов на каждом конденсаторе и разность потенциалов между точками a и b .

Решение. При подключении батареи конденсаторов к ЭДС на левой обкладке C_1 появится заряд $-q_1$, а на правой обкладке

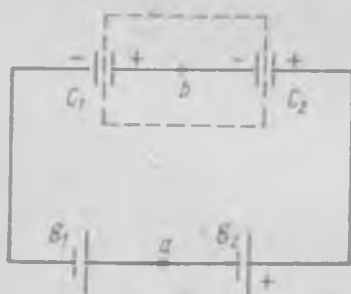


Рис. 35.4



Рис. 35.5

C_2 — заряд q_2 . Вследствие электростатической индукции на правой обкладке C_1 возникнет заряд q_1 , а на левой обкладке C_2 — заряд $-q_2$. Поскольку правая обкладка C_1 и левая C_2 изолированы от других проводников и первоначально не заряжены, то их общий заряд не должен измениться. Таким образом, сохранение заряда на изолированной части цепи, обведенной пунктиром на рис. 35.4, приводит к уравнению

$$0 = q_1 - q_2 = C_1 U_1 - C_2 U_2, \quad (1)$$

где U_1 , U_2 — напряжения на конденсаторах C_1 и C_2 . Второе правило Кирхгофа позволяет написать еще одно уравнение, связывающее напряжения U_1 и U_2 :

$$U_1 + U_2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2. \quad (2)$$

Разрешая систему уравнений (1) и (2), получим

$$U_1 = \frac{C_2}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2), \quad U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2} (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2).$$

Определим теперь разность потенциалов между точками a и b . Пусть φ_a и φ_b — потенциалы этих точек. Разность потенциалов

$V = \varphi_b - \varphi_a$ измеряется вольтметром. Применяя второе правило Кирхгофа к контуру $ba\delta_2 C_2 b$, получим

$$\varphi_b - \varphi_a + U_2 = \delta_2.$$

Подставляя U_2 , найдем

$$\varphi_b - \varphi_a = \delta_2 - U_2 = \frac{C_2 \delta_2 - C_1 \delta_1}{C_1 + C_2}.$$

Этот же результат можно получить при обходе по контуру $ba\delta_1 C_1 b$.

ЗАДАЧА 35.5. В схеме, изображенной на рис. 35.5, сначала все ключи разомкнуты. Конденсаторы, емкости которых C_1 и C_2 , заряжены; ЭДС батарей δ_0 и δ . Затем выполняются следующие переключения: 1) замыкают ключи K_1 и K_2 , 2) затем через некоторое время ключи K_1 и K_2 размыкают, а ключ K_3 замыкают. Найти заряды на конденсаторах после указанных переключений.

Решение. После первого переключения верхние обкладки C_1 и C_2 заряжаются положительно. Второе правило Кирхгофа позволяет найти разности потенциалов U_1 и U_2 на конденсаторах C_1 и C_2 . $U_1 = \delta_0$, $U_2 = \delta_0$. Заряды верхних пластин равны соответственно $q_1 = C_1 \delta_0$, $q_2 = C_2 \delta_0$, а заряды нижних $-C_1 \delta_0$, $-C_2 \delta_0$.

После второго переключения конденсаторы соединяются последовательно. Верхние обкладки C_1 и C_2 образуют изолированную систему, заряд которой $(C_1 + C_2) \delta_0$. Предположим, что в результате подключения батареи δ этот заряд перераспределяется: верхняя обкладка C_1 будет иметь положительный, а верхняя обкладка C_2 — отрицательный заряды. Обозначая через U_1' , U_2' разности потенциалов на C_1 и C_2 , из закона сохранения заряда изолированной части цепи найдем

$$(C_1 + C_2) \delta_0 = C_1 U_1' - C_2 U_2'.$$

Применяя второе правило Кирхгофа, получим уравнение

$$U_1' + U_2' = \delta.$$

Разрешая эту систему, найдем

$$U_1' = \delta_0 + \frac{C_2}{C_1 + C_2} \delta, \quad U_2' = -\delta_0 + \frac{C_1}{C_1 + C_2} \delta.$$

Заряды на верхних обкладках C_1 и C_2 соответственно становятся равными

$$q_1' = C_1 U_1' = C_1 \delta_0 + \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \delta,$$

$$q_2' = -C_2 U_2' = C_2 \delta_0 - \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \delta.$$

(1)

Нижние обкладки будут иметь заряды $-q_1'$ и $-q_2'$. Из (1) следует, что при условии $(C_1 + C_2)\epsilon_0 < C_1\epsilon$ заряд верхней обкладки C_2 будет действительно отрицательным.

ЗАДАЧА 35.6. Определить величину и знак заряда, который протечет через ключ K после его замыкания (рис. 35.6). $C_1 = 1$ мкФ, $C_2 = 2$ мкФ, $\epsilon_1 = 5$ В, $\epsilon_2 = 3$ В.

Решение. До замыкания ключа суммарный заряд изолированной части цепи, обведенной пунктиром, равен нулю. Замкнем ключ. Предположим, что на правой пластине C_1 и на верхней пластине C_2 появились отрицательные заряды.

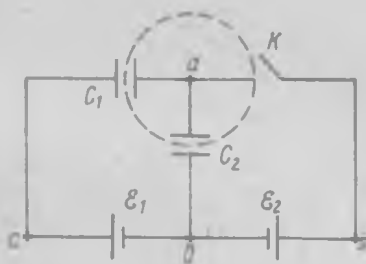


Рис. 35.6

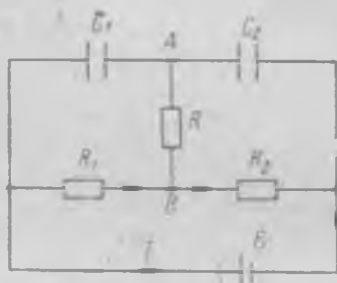


Рис. 35.7

Обозначим $U_1 = \varphi_c - \varphi_a$, $U_2 = \varphi_0 - \varphi_a$. Используя второе правило Кирхгофа, получим уравнение

$$U_1 = -\epsilon_2 + \epsilon_1 \quad (1)$$

для контура, содержащего C_1 , ϵ_2 , ϵ_1 , и уравнение

$$U_2 = -\epsilon_2 \quad (2)$$

для контура, содержащего C_2 , ϵ_2 . Из (2) следует, что заряд нижней пластины C_2 равен $q_2 = C_2 U_2 = -C_2 \epsilon_2 < 0$, а верхней пластины $-q_2 = C_2 \epsilon_2 = 6 \cdot 10^{-6}$ Кл. Следовательно, мы ошиблись, предполагая, что заряд верхней пластины C_2 отрицателен. Заряд правой пластины C_1 равен $-q_1 = C_1 U_1 = C_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1) = -2 \cdot 10^{-6}$ Кл. Таким образом, через ключ прошел заряд

$$-q_2 - q_1 = C_2 \epsilon_2 - C_1 (\epsilon_2 - \epsilon_1) = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

ЗАДАЧА 35.7. Определить разность потенциалов на обкладках конденсаторов в цепи, изображенной на рис. 35.7. Чему будет равна разность потенциалов на обкладках, если резистор R отсоединить в точке B и заземлить?

Решение. Поскольку ток через конденсаторы не течет, то, следовательно, не течет и через сопротивление R . В таком случае все его точки должны иметь один и тот же потенциал. Значит,

$\varphi_A = \varphi_B$. Поэтому разности потенциалов на конденсаторах C_1 и C_2 равны напряжениям U_1 и U_2 на резисторах R_1 и R_2 :

$$U_1 = IR_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2 + r} \mathcal{E}, \quad U_2 = IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2 + r} \mathcal{E}. \quad (1)$$

Если отключить R в точке B и не заземлять его, то разности потенциалов (1) не изменятся, так как правая обкладка C_1 и левая C_2 образуют изолированную систему, заряд которой $q = C_2 U_2 - C_1 U_1$ не меняется. При заземлении резистора заряд этой части становится равным нулю. Будем считать, что правая пластина C_1 зарядится отрицательно, а левая пластина C_2 — положительно. Тогда

$$C_1 U_1' - C_2 U_2' = 0, \quad (2)$$

где U_1' , U_2' — напряжения на конденсаторах после заземления конца B резистора R . Очевидно, теперь разности потенциалов $U_{1,2}'$ на конденсаторах не равны напряжениям $U_{1,2}$ на резисторах, хотя, как и прежде, $U_1' + U_2' = U_1 + U_2$. Действительно, используя второе правило Кирхгофа для контура, содержащего $\mathcal{E}$, C_1 , C_2 , получим уравнение

$$U_1' + U_2' + Ir = \mathcal{E} \quad (3)$$

и уравнение

$$I(R_1 + R_2 + r) = \mathcal{E} \quad (4)$$

для контура, содержащего R_1 , R_2 , $\mathcal{E}$. Из (3) и (4) следует, что

$$U_1' + U_2' = I(R_1 + R_2). \quad (5)$$

Заметим, что (5) является уравнением Кирхгофа для контура, содержащего C_1 , C_2 , R_1 , R_2 . Из системы уравнений (2), (4), (5) получим

$$U_1' = \frac{C_2}{C_1 + C_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + r} \mathcal{E},$$

$$U_2' = \frac{C_1}{C_1 + C_2} \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + r} \mathcal{E}.$$

ЗАДАЧА 35.8. В схеме, изображенной на рис. 35.8, оба ключа K первоначально разомкнуты, конденсатор C_3 не заряжен, конденсаторы C_1 и C_2 заряжены и имеют одинаковый заряд q , полярность пластин указана на схеме. Найти заряд на конденсаторе C_3 , после того как оба ключа будут замкнуты. Емкости всех конденсаторов одинаковы.

Решение. Предположим, что после замыкания ключей верхняя обкладка C_1 и левая C_3 имеют положительный заряд, а правая

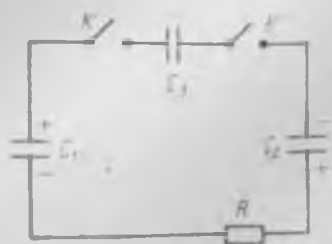


Рис. 35.8

обкладка C_3 и верхняя C_2 имеют отрицательный заряд. Применяя к изолированным частям цепи закон сохранения заряда, найдем

$$0 = -CU_1 + CU_2,$$

$$q = CU_1 + CU_3,$$

$$-q = -CU_3 - CU_2,$$

где U_i — разность потенциалов на i -м конденсаторе, C — емкость любого из конденсаторов. Очевидно, только два

уравнения являются независимыми. Второе правило Кирхгофа позволяет записать еще одно уравнение

$$U_1 + U_2 - U_3 = 0.$$

Разрешая систему из трех уравнений, находим

$$U_1 = U_2 = \frac{q}{3C}, \quad U_3 = \frac{2q}{3C}.$$

Следовательно, заряд на левой пластине конденсатора C_3 равен $2/3q$.

§ 36. ТЕПЛОВОЕ ДЕЙСТВИЕ ТОКА

1. Закон Джоуля — Ленца. В § 33 мы видели, что электрический ток в проводнике возникает вследствие упорядоченного движения электронов в электрическом поле, создаваемом источником тока. Электроны приобретают добавочную кинетическую энергию лишь на протяжении пути между столкновениями с кристаллической решеткой проводника. При столкновении часть кинетической энергии электрона переходит в энергию теплового движения решетки. Под действием приложенного поля электрон снова приобретает добавочную кинетическую энергию и вновь отдает ее решетке.

Рассмотрим участок цепи, содержащий резистор. Сила, действующая со стороны электронов проводимости на решетку, совершает работу A_{e-p} , которая идет на увеличение внутренней энергии решетки, — проводник получает количество теплоты $Q = A_{e-p}$.

Если через резистор сопротивлением R протекает постоянный ток силой I , то в резисторе за интервал времени $t_2 - t_1$ выделяется количество теплоты, равное

$$Q = I^2 R (t_2 - t_1). \quad (36.1)$$

Это соотношение является математическим выражением закона, открытого в 1841—1842 гг. английским физиком Д. Джоулем и

независимо в 1842—1843 гг. русским физиком Э. Ленцом (1804—1865).

С термодинамической точки зрения электронный газ в металле представляет собой систему, температура которой T , выше температуры T_n соответствующей энергии теплового движения ионов решетки. Тепло, как всегда, переходит от более нагретой системы электронов к менее нагретой кристаллической решетке. Энергия, отдаваемая электронами, компенсируется путем непрерывного «нагрева» электронов внешним электрическим полем. Ответ на вопрос — как будет изменяться температура проводника — зависит от характера термодинамического процесса, в котором он участвует совместно с окружающей проводник внешней средой.

Если по проводнику протекает переменный ток силой $I(t)$, то за интервал времени $(t, t + \Delta t)$ в нем выделится количество теплоты

$$\delta Q = I^2(t) R \Delta t. \quad (36.2)$$

На участке цепи (рис. 33.1), содержащей резистор, электрическое поле совершает за время Δt работу $\delta A = U \Delta q$ над зарядом $\Delta q = I \Delta t$. Учитывая закон Ома $U = IR$, находим, что $\delta A = I^2 R \Delta t$. Из равенства $\delta A = \delta Q$ следует, что часть энергии электромагнитного поля безвозвратно теряется, переходя в тепловую энергию движения решетки. Количество теплоты, выделяющейся за конечный промежуток времени,

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I^2(t) R dt. \quad (36.3)$$

Мгновенное значение мощности, рассеиваемой в проводнике,

$$P(t) = I^2(t) R \quad (36.4)$$

характеризует скорость, с которой выделяется теплота.

ЗАДАЧА 36.1. Паяльник рассчитан на напряжение $U_0 = 220$ В. Как нужно изменить его сопротивление, чтобы он работал нормально при напряжении $U_1 = 110$ В.

Решение. Пусть сопротивление паяльника R_0 . В нормальном режиме работы в сети с напряжением U_0 на паяльнике выделяется мощность P_0 . Поскольку

$$P = \frac{U_0^2}{R_0}, \quad (1)$$

то в сети с напряжением U_1 выделяется мощность

$$P_1 = \frac{U_1^2}{R_0} = P_0 \left(\frac{U_1}{U_0} \right)^2 = \frac{1}{4} P_0$$

в четыре раза меньшая. Для того чтобы паяльник работал нормально под напряжением U_1 , его сопротивление R_0 надо изменить до значения R_1 , которое определим из условия

$$P_0 = \frac{U_1^2}{R_1}.$$

Учитывая (1), находим

$$R_1 = R_0 \left(\frac{U_1}{U_0} \right)^2 = \frac{1}{4} R_0.$$

Сопротивление R_0 надо уменьшить на $3/4 R_0$. Для этого достаточно, не укорачивая спираль, изменить схему включения (рис. 36.1).

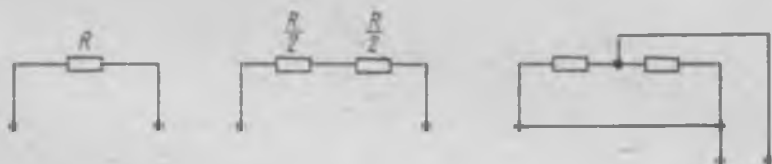


Рис. 36.1

ПРИМЕР 36.2. Найдём сопротивление лампы в холодном состоянии и в рабочем режиме. Лампа рассчитана на напряжение $U = 220$ В, потребляемая мощность $P = 100$ Вт.

Сопротивление лампы в рабочем режиме

$$R = \frac{U^2}{P} = 484 \text{ Ом.}$$

Рабочая температура вольфрамовой нити $T \sim 2300^\circ \text{C}$, температурный коэффициент сопротивления $\alpha = 4,6 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$. Согласно (33.8) сопротивление лампы при комнатной температуре $T_0 = 20^\circ \text{C}$

$$R_0 = \frac{R}{1 + \alpha(T - T_0)} = 42 \text{ Ом.}$$

Таким образом, в момент включения сила тока, протекающего через нить $I_0 = 5,2$ А, более чем в десять раз превосходит силу тока $I = 0,45$ А в рабочем режиме. По мере возрастания температуры нити сила тока убывает. В установившемся режиме количество теплоты, выделяющейся в нити, сравнивается с потерями энергии вследствие излучения и теплопроводности.

Обсудим одну из причин, приводящих к перегоранию лампочки. Если вольфрамовая нить неоднородна по поперечным размерам, то участок с наименьшим диаметром будет иметь сопротивление большее, чем участок такой же длины стандартного диаметра. Поскольку на каждом участке выделяется количество теплоты $\sim I^2 R$, то дефектный участок может перегреться и расплавиться.

ЗАДАЧА 36.3. Две лампочки, мощности которых $P_1 = 25$ Вт и $P_2 = 100$ Вт, рассчитанные на напряжение U , соединены последо-

вательно и включены в сеть с напряжением U . Найти отношение мощностей P_1' и P_2' , потребляемых лампами.

Ответ. $\frac{P_1'}{P_2} = \frac{P_2}{P_1} = 4.$

2. Энергетические превращения в замкнутой цепи, содержащей ЭДС. Мощности, рассеиваемые на нагрузке (резисторе R) и на внутреннем сопротивлении, соответственно равны

$$P_n = I^2 R, \quad P_r = I^2 r.$$

Поскольку мощность, потребляемая цепью, равна $I\mathcal{E}$ (см. (34.2)), то согласно закону сохранения энергии $I\mathcal{E} = I^2(R+r)$. Из этого уравнения следует закон Ома для полной цепи.

Мощность, рассеиваемая в нагрузке,

$$P_n = I^2 R = \frac{R\mathcal{E}^2}{(R+r)^2} \quad (36.5)$$

Коэффициент полезного действия источника в этой цепи

$$\eta = \frac{P_n}{P} = \frac{R}{R+r} \quad (36.6)$$

Зависимость полезной мощности от сопротивления нагрузки изображена на рис. 36.2. Интересно отметить, что одно и то же значение мощности P_0 выделяется при двух разных значениях R_1 и R_2 сопротивления нагрузки. Подставляя $P_n = P_0$ в (36.5), получим уравнение, определяющее R_1 и R_2 :

$$R^2 + \left(2r - \frac{\mathcal{E}^2}{P_0}\right) R + r^2 = 0.$$

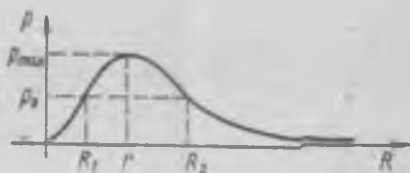


Рис. 36.2

Мы не будем выписывать значения R_1 и R_2 , отметим только связь между ними, следующую из теоремы Виета:

$$R_1 + R_2 = \frac{\mathcal{E}^2}{P_0} - 2r, \quad R_1 R_2 = r^2.$$

Очевидно, при значении $P_0 = P_{\max}$ оба корня совпадают. Отсюда следует вывод, что полезная мощность достигает максимального значения

$$P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r} \quad (36.7)$$

при условии $R=r$. КПД передачи энергии $\eta = 1/2$ — половина

мощности, передаваемой источником тока, рассеивается на внутреннем сопротивлении.

Каким путем получают электроны энергию, растрчиваемую ими на создание теплоты? Не вдаваясь в детальное обсуждение, отметим только следующее. Энергия является мерой движения материи и связана с определенным материальным носителем. Например, внутренняя энергия вещества равна сумме кинетической энергии частиц и потенциальной энергии их взаимодействия. Носителем электромагнитной энергии является электромагнитное поле. Вдоль проводника, вне и внутри его существует электрическое поле, а наличие тока порождает магнитное поле вне проводника (§ 39). Часть внутренней энергии источника тока, превращаясь в электромагнитную энергию, выходит из источника и движется в среде вдоль направления проводов, соединяющих источник тока с нагрузкой. Вблизи нагрузки поток электромагнитной энергии поступает внутрь проводника, в котором энергия поля превращается в тепловую энергию.

ЗАДАЧА 36.4. ЭДС батареи $\mathcal{E}=12$ В, сила тока короткого замыкания $I_k=5$ А. Какую наибольшую мощность $P_{\max}$ может дать батарея во внешней цепи?

Ответ. $P_{\max} = \frac{1}{4} I_k \mathcal{E} = 15$ Вт.

3. Линии передачи энергии. Обычно проводящие линии служат для передачи энергии от источника ЭДС к нагрузке, в которой она превращается в тепловую, механическую и другие виды энергии. Соединительная линия имеет небольшое сопротивление. По ней ток течет в одном направлении от генератора к нагрузке, затем от нагрузки к генератору, но поток электромагнитной энергии движется от положительного и отрицательного полюсов генератора к нагрузке. Роль соединительной линии заключается не в том, чтобы служить трубами, внутри которых течет энергия, а в том, чтобы направить движение энергии вдоль проводов к полезной нагрузке. Хотя передаваемый вдоль линии поток энергии движется во всем пространстве, окружающем провода, однако его плотность максимальна в непосредственной близости от проводников, где напряженность электрического и магнитного полей наиболее значительна. Скорость передачи энергии также определяется свойствами среды, окружающей провода.

Работа, совершаемая током в полезной нагрузке, называется *полезной работой*, а работа, совершаемая во всех остальных элементах цепи (соединительных проводах, внутреннем сопротивлении источника и т. д.), называется *работой потерь*. Коэффициент полезного действия линии передачи равен отношению полезной работы ко всей затраченной работе.

ПРИМЕР 36.5. Определим КПД линии передачи, если источник тока развивает мощность P при напряжении U . Сопротивление линии передачи R .

Ток в линии $I = P/U$. Потери мощности в линии

$$P_1 = I^2 R = \left(\frac{P}{U} \right)^2 R.$$

Передаваемая полезная мощность

$$P_n = P - P_1 = P - \frac{P^2 R}{U^2}.$$

Следовательно, коэффициент полезного действия линии передачи

$$\eta = \frac{P_n}{P} = 1 - \frac{PR}{U^2}$$

увеличивается с увеличением напряжения на зажимах источника тока и с уменьшением сопротивления проводов. Для повышения экономичности электропередачи уровень напряжения за последние десятилетия возрос до 800 кВ.

При напряжении линии электропередачи ~ 400 кВ напряженность электрического поля у поверхности земли достигает $E \sim 3$ кВ/м. Если человек ростом h находится под линией электропередачи, то через его тело может пройти ток силой $I = \Delta\phi/R$, где $\Delta\phi = Eh \sim 10^4$ В — разность потенциалов, $R = 10^6$ Ом — среднее сопротивление человеческого тела. Это значение силы тока $I \sim 10$ мА выше порога чувствительности человека к току, равного 1 мА. «Обездвиживающий» ток равен примерно 16 мА, при токах $\sim 20 - 100$ мА наступает дыхательный паралич [1].

ЗАДАЧА 36.6. При передаче электроэнергии зимой при температуре $t_1 = -25^\circ\text{C}$ мощность потерь в линии $P_1 = 100$ кВт. Насколько возрастут потери в летнее время при увеличении температуры до $t_2 = 25^\circ\text{C}$? Температурный коэффициент медных проводов линии $\alpha = 4,3 \cdot 10^{-3} \text{ K}^{-1}$.

Решение. Мощности, потребляемые линией и нагрузкой $P_1 = I^2 R_1$, $P_0 = I^2 R_0$, где R_1 , R_0 — сопротивление линии и нагрузки, I — сила тока. При увеличении температуры сопротивление линии станет равным R_2 . Однако мощность, потребляемая нагрузкой, не должна измениться. Следовательно, мощность, потребляемая летом, $P_2 = I^2 R_2$. Учитывая эти соотношения, находим

$$\Delta P = P_2 - P_1 = P_1 \frac{R_2 - R_1}{R_1} = P_1 \frac{\alpha(t_2 - t_1)}{1 + \alpha t_1} \simeq 2,15 \text{ кВт}.$$

4. Участок цепи, содержащей ЭДС. Закон Ома для участка цепи, содержащей ЭДС, является следствием закона сохранения энергии. Рассмотрим схему рис. 34.3а. Энергия, сообщаемая цепи источником, затрачивается на работу по переносу заряда Δq во внешней цепи от точки a к точке b и выделяется в виде количества теплоты на внутреннем сопротивлении:

$$\delta \Delta q = \Delta q (\phi_a - \phi_b) + I^2 r \Delta t.$$

Поскольку $I = \Delta q / \Delta t$, то из этого уравнения получим соотношение (34.8).

Обратимся теперь к рис. 34.3б. Работа, совершаемая внешними источниками тока, равна $\Delta q(\varphi_a - \varphi_b)$. При этом выделяется тепло на внутреннем сопротивлении, а источник тока поглощает энергию. На основе закона сохранения энергии

$$\Delta q(\varphi_a - \varphi_b) = \mathcal{E} \Delta q + I^2 r \Delta t.$$

Из этого уравнения следует закон Ома (34.9).

§ 37. ЭЛЕКТРОЛИЗ. ЗАКОНЫ ФАРАДЕЯ

Целый ряд веществ при растворении в воде оказывается распределенным в растворе частично в виде молекул, частично в виде заряженных частей молекул — ионов. Такие вещества называются *электролитами*. Отрицательные ионы содержат избыточные электроны, положительным ионам недостает электронов. О молекулах, которые при растворении распадаются на заряженные части (ионы), говорят, что они диссоциируют, а само явление называют *электролитической диссоциацией*.

Уникальная способность воды растворять большинство веществ связана со структурой молекулы воды. Атом кислорода, имеющий на два электрона меньше, чем устойчивый элемент неон, захватывает на свою орбиту электроны двух атомов водорода. Подобная перестройка электронной оболочки характерна для ионной связи. При этом образуется равнобедренный треугольник НОН, в котором угол НОН равен 105° . Вследствие такой симметрии молекула воды является диполем — отрицательный и положительный заряды оказываются пространственно разделенными. Благодаря дипольному моменту молекулы воды сильно взаимодействуют между собой и с молекулами других веществ. Небольшая часть молекул воды (1 молекула на 550 миллионов) диссоциирует на ионы водорода (протоны) и гидроксильный ион: $\text{H}_2\text{O} \rightleftharpoons \text{H}^+ + \text{OH}^-$.

Основы теории электролитической диссоциации разработал в 1883—1887 гг. швед С. Аррениус. Эта теория вызвала возражения со стороны большинства ученых. Все привыкли думать, что в растворе, например, поваренной соли NaCl содержатся только молекулы, ведь при испарении раствора получается та же соль. Трудно было представить, чтобы в растворе мог содержаться хлор — газ с удушливым запахом и натрий — мягкий металл, плавающий на воде и бурно с ней реагирующий. Однако хлор и натрий здесь особые — заряженные. Из представлений об ионе следовало, что атом имеет структуру, а химические свойства ионов резко отличаются от свойств атомов, из которых они получены. Особенно сильно проявляется различие в спектрах атомов и ионов.

Электролит является проводником тока. Подсоединим к источнику тока два электрода и опустим их в электролит. Согласно установившейся терминологии электрод, соединенный с положительным полюсом источника, называют *анодом*, а соединенный с отрицательным полюсом — *катодом*. При включении источника между электродами образуется электрическое поле, в котором отрицательные ионы (они называются анионами) движутся к аноду, а положительные (катионы) — к катоду. На аноде отрицательные ионы отдают электроны и становятся нейтральными атомами, а на катоде положительные ионы приобретают электроны. Анод играет роль окислителя, а катод — восстановителя. В результате этих процессов на электродах выделяются продукты реакции. Разложение электролитов под действием электрического тока называется *электролизом*.

Электролиз был открыт в 1800 г. сразу же после создания Вольта источника тока. Рассмотрим, например, процессы, идущие в растворе медного купороса CuSO_4 . Молекулы CuSO_4 диссоциируют на ионы Cu^{++} и SO_4^{--} . Молекулы воды частично диссоциируют, образуя ионы водорода H^+ и ионы гидроксидов OH^- . Далее, ион SO_4^{--} , соединяясь с двумя ионами H^+ , образует серную кислоту, а в растворе остаются ионы Cu^{++} и OH^- . Последние, достигая анода, отдают ему лишние электроны и образуют воду и кислород согласно реакции $4\text{OH}^- = 2\text{H}_2\text{O} + \text{O}_2$. Ионы Cu^{++} достигают катода и, присоединяя к себе недостающие электроны, образуют атомы меди и оседают на катоде. Из рассмотренного примера видно, что протекание тока через электролит связано с переносом вещества и выделением его на электродах. Явление электролиза описывают два закона, открытых М. Фарадеем в 1833—1834 гг.

Первый закон Фарадея. Масса Δm вещества, выделившегося на электроде за время Δt , пропорциональна силе тока и интервалу времени:

$$\Delta m = kI\Delta t, \quad (37.1)$$

здесь k — коэффициент пропорциональности, получивший название электрохимического эквивалента. k принимает разные значения для различных веществ.

Второй закон Фарадея. Электрохимический эквивалент вещества пропорционален химическому эквиваленту вещества $x = M/n$, где M [г/моль] — молярная или атомная масса, n — заряд иона:

$$k = \frac{1}{F} \frac{M}{n}. \quad (37.2)$$

Коэффициент пропорциональности содержит величину $F = 9,65 \cdot 10^5$ Кл/моль, называемую постоянной Фарадея.

Подставляя в (37.1) выражение для k из (37.2), получим объединенный закон Фарадея

$$\Delta m = \frac{1}{F} \frac{M}{n} I \Delta t. \quad (37.3)$$

Если $n=1$, то постоянная Фарадея численно равна заряду $\Delta q = I \Delta t$, который должен пройти через электролит, чтобы на электроде выделилась масса вещества Δm , численно равная M , т. е. один грамм-атом вещества. Поскольку моль любого вещества содержит число молекул, равное числу Авогадро N_A , то отношение F/N_A не что иное, как минимальное количество заряда, которым обмениваются ионы и электроды. Таким образом, Фарадей вплотную подошел к представлению о количестве электричества, связанном с частицами или атомами материи. Заряженные частицы вещества он назвал ионами (греч. — идущий). Однако заключение об атомарной природе электричества было сделано позднее. В 1891 г. минимальное количество электричества, переносимого в процессе электролиза, получило название «электрон». Тем не менее до открытия в 1897 г. частицы, которую стали называть электроном, большинство физиков различали две формы проводимости: одну, создаваемую атомами в электролите, и другую — металлическую, которая передавалась также как упругая деформация стержня. В вакууме «электрическая сила» передавалась напряжениями «эфира».

Выведем теперь закон Фарадея (37.3), исходя из современных представлений о строении вещества. Очевидно, число атомов вещества, образующихся на электроде, $s = \Delta q / n |e|$, где $\Delta q = I \Delta t$ — полный заряд, прошедший через электролит, e — заряд электрона. Поскольку масса одного атома равна M/N_A (N_A — число Авогадро), то масса вещества, выделяющегося на электроде,

$$\Delta m = \frac{M}{N_A} \frac{I}{n |e|} \Delta t. \quad (37.4)$$

Сопоставляя это выражение с (37.3), находим $F = N_A |e|$. Следовательно, величина заряда электрона выражается через две фундаментальные физические постоянные $|e| = F/N_A = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

ЗАДАЧА 37.1. Какое количество серебра выделится на электроде в 1 с при силе тока $I = 100$ А. Атомная масса серебра 107,87 г/моль, валентность иона $n = 1$.

Ответ. $\Delta m = 0,105$ г.

§ 38. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ РАЗРЯД В ГАЗЕ. ПЛАЗМА. ДИОД. ТРИОД

1. Электрический разряд в газе. Зарядим плоский конденсатор, образованный двумя пластинами, между которыми находится воздух. Напряжение между пластинами остается практически посто-

янным. Это объясняется тем, что в газе имеется небольшое количество свободных электронов и ионов. Они возникают при столкновениях молекул. Чем выше температура газа, тем больше образуется ионов и электронов.

Для изучения свойств образующихся при ионизации частиц наиболее пригодны разреженные газы. Поэтому изучение ионов в разреженных газах, начатое в XIX в., задолго до того, как были открыты в нынешнем смысле слова электроны и ионы, привело в конце века к возникновению атомной и ядерной физики.

В 1802 г. русский ученый В. В. Петров (1761—1834), собрав батарею, состоящую из 2100 медно-цинковых элементов, получил электрическую дугу — газовый разряд, возникающий при атмосферном давлении между двумя кусочками древесного угля. Открытие дугового разряда ошибочно приписывается Дэви, хотя свой опыт он поставил в 1810 г. [17]. В настоящее время дуговой разряд используется для сварки металлических конструкций. Ток разряда достигает 2000 А.

Для изучения тлеющего разряда берется заполненная газом трубка с электродами под напряжением ~ 150 В. Если откачивать газ, то при давлении 1 см рт. ст. в трубке возникает однородный столб розовато-пурпурного цвета. При давлении 5 мм рт. ст. на катоде появляется голубоватое свечение, отделенное от остального столба темным участком, который был обнаружен Фарадеем. При давлении 0,01 мм рт. ст. темное пространство заполняет всю трубку. Остается бледно-голубое свечение в области анода и зеленоватое свечение стенок. Под действием магнитного поля свечение смещалось. Так были открыты в 1859 г. катодные лучи (поток электронов от катода). В 1869 г. обнаружилось, что предмет, расположенный вблизи катода, дает тень. Это означало, что лучи идут от катода в определенном направлении. Возник спор о природе лучей: частицы или «лучистая материя», подобная свету? Выяснилось, что они переносят энергию и импульс. В процессе поиска истины были открыты в 1886 г. каналовые лучи (поток положительных ионов к катоду): катод был просверлен в нескольких местах и ионы, выходящие через каналы в катоде, вызывали слабое свечение закатодного пространства. Было установлено, что в магнитном поле они отклоняются в сторону, противоположную катодным лучам. Однако взаимосвязь между впечатляющим количеством данных, накопленных несколькими поколениями физиков в течение столетия, стала понятна после трех выдающихся открытий 1895, 1896 и 1897 гг., приведших к революции в физике.

В 1895 г. немецкий физик К. Рентген обнаружил, что от разрядной трубки, закрытой картоном, исходят какие-то лучи (электромагнитное излучение с длиной волны $\sim 5 \cdot 10^{-7}$ м, возникающее при торможении электронов, попадающих на анод при ускоряющем напряжении ~ 20 кВ). Он установил, что лучи не несут заряда, ионизируют воздух и вызывают почернение фотографических

пластинок. Различие в структуре тел позволяет получать теневые рентгеновские снимки. Последнее обстоятельство вызвало громадный общественный интерес. Подчеркивая необходимость дальнейшего изучения свойств лучей, Рентген назвал их X -лучами.

Рентгеновские лучи имеют прямое отношение к открытию радиоактивности. В 1896 г. французский физик А. Беккерель принял попытку обнаружить излучение X -лучей некоторыми минералами под действием солнечного света. Его исследования завершились величайшим открытием излучения солей урана, которое получило название *радиоактивности*.

Наконец, в 1897 г. Дж. Дж. Томсон пришел к выводу, что катодные лучи представляют собой поток отрицательно заряженных частиц — электронов.

Открытия рентгеновских лучей, радиоактивности и электрона стали началом того, что теперь называют современной физикой.

2. Тлеющий разряд. Присоединим источник напряжения к двум электродам, отстоящим друг от друга на расстоянии 0,5 м в

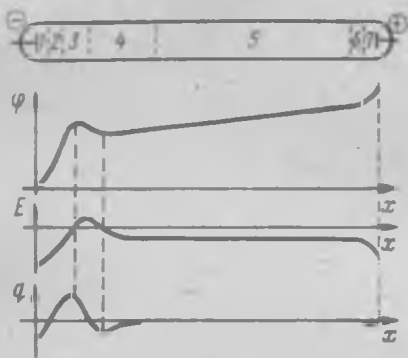


Рис. 38.1

трубке диаметром около 5 см. При напряжении в несколько сот вольт и давлении 0,1 мм рт. ст. разряд в воздухе схематически изображен на рис. 38.1. Цифрами 1—7 обозначены области с различным характером свечения: 1 — оранжевое свечение, 2 — катодное темное пространство, 3 — бледно-голубое свечение, 4 — фарадеево темное пространство, 5 — розовое свечение, 6 — красноватое свечение, 7 — анодное темное пространство. Далее представлены графики разности потенциалов φ , напряженности поля E и суммарного заряда q в различных точках разряда.

Изменение напряжения φ вдоль трубки показывает, что основные процессы, поддерживающие разряд, происходят в области 2. Здесь напряженность поля $E = -\Delta\varphi/\Delta x$ нарастает по линейному закону и создается пространственным положительным зарядом ионов. Эта особенность позволяет понять характер процессов, протекающих в различных частях трубки, хотя до сих пор не существует полной теории газового разряда. Предварительно заметим, что чем меньше масса налетающей частицы, тем большую часть энергии она может отдать молекуле, переводя ее в возбужденное состояние (см. пример 12.15). Поэтому, несмотря на то что электроны и однозарядные ионы в электрическом поле приобретают одинаковую энергию, главную роль в процессе ионизации молекул играют электроны.

Положительные ионы, образующиеся в области 3 вследствие столкновений электронов с молекулами воздуха, движутся к катоду. Ионы, попадая на катод, выбивают из него электроны, начальная скорость которых невелика. Поэтому у катода всегда присутствует небольшой отрицательный заряд. Затем электроны в области 2 ускоряются и приобретают энергию, достаточную для возбуждения и ионизации молекул газа в области 3. Образовавшиеся ионы устремляются к катоду, а возбужденные атомы излучают свет. Потеряв часть энергии, электроны тормозятся и образуют на левой стороне области 4 отрицательный пространственный заряд. Когда электроны вновь приобретают энергию, достаточную для ионизации и возбуждения, они опять вызывают излучение света в области 5. Здесь концентрация электронов и ионов почти одинакова. Однако из-за большей скорости электронов ионный ток значительно меньше электронного тока. Тлеющий разряд характеризуется относительно небольшим количеством электронов, образующихся на катоде. При увеличении напряжения тлеющий разряд переходит в дуговой.

3. Коронный и искровой разряды. При коронном разряде ионизация не приводит к пробое значительной толщи газа. Ионизация и свечение воздуха возникают в ограниченной области пространства вблизи заостренных проводников, где напряженность электрического поля наиболее высока (см. (31.3)) и достигает значения ~ 15 кВ/см. Коронный разряд, возникающий у поверхности проводов высоковольтных линий, является основной причиной утечки электроэнергии. Пульсирующий характер тока разряда создает сильные электромагнитные помехи.

Искровой разряд в отличие от коронного приводит к пробое. Примером искрового разряда является молния, длина которой может достигать несколько километров.

4. Плазма. Частично или полностью ионизированный газ, в котором концентрация электронов и ионов практически одинакова, называется *плазмой*. В состоянии плазмы находится подавляющая часть Вселенной — звезды, галактические туманности и межзвездная среда. В окрестности Земли плазма образует радиационные пояса и ионосферу. В лабораторных условиях плазма образуется в электрическом разряде в газе, в процессах горения и взрыва.

Создание лазеров открыло новую главу в физике газового разряда. Когда луч лазера сфокусировали линзой, в воздухе в области фокуса вспыхнула искра, и там образовалась плазма, как при пробое разрядного промежутка между электродами. Воздух пробивался при действии импульса излучения с энергией 1 Дж и длительностью $3 \cdot 10^{-8}$ с и фокусировке луча в кружок радиусом 10^{-2} см. Мощность излучения при этом 30 МВт, освещенность в фокусе 10^5 МВт/см², а напряженность электрического поля волны $E \approx 6 \cdot 10^6$ В/см. (В постоянном поле воздух пробивается при $E \approx 3 \cdot 10^4$ В/см.) Новый эффект вызвал огромный интерес у физи-

ков. За несколько лет оптический пробой был детально исследован. Под действием волны развивается электронная лавина. Первые затравочные электроны появляются в результате вырывания их из атомов среды после одновременного поглощения нескольких фотонов световой волны. Энергия каждого фотона рубинового лазера равна 1,78 эВ. Далее свободный электрон, поглощая фотоны, достигает энергии ~ 10 эВ, достаточной для ионизации и рождения нового электрона в процессе столкновения с атомами среды. Температура плазмы оптического разряда достигает необычно высокого значения ($\sim 20\,000$ К). Разряд может гореть в течение длительного времени, исчисляемого часами, и светится ослепительно белым светом, на него невозможно смотреть без темных очков. Необычайно высокая температура — уникальное свойство оптического разряда — представляет большие возможности для использования его в качестве источника света.

Особенно большое впечатление производит длинная искра — протяженный оптический пробой. Она возникает в том случае, когда луч слабо фокусируется длиннофокусной линзой, а энергии излучения достаточно для возбуждения среды на большой длине вдоль оптической оси. Искра рекордной длины — более 60 м — была получена в 1976 г.: световой импульс с энергией 160 Дж и мощностью 5 ГВт фокусировали линзой с фокусным расстоянием $F=40$ м. В длинных искрах ионизированные участки чередуются с непробитыми. В проблеме пробоя запыленного воздуха еще много неясного. Возможность создания плазменного шнура световым излучением лазера открывает возможности для передачи световой энергии на расстояние [34].

5. Диод. Рассмотрим двухэлектродную лампу — диод, электровакуумный прибор, изобретенный в 1904 г. Катод, разогретый до $500\text{--}600^\circ\text{C}$, является источником электронов, образующих отрицательный пространственный заряд. Присоединим диод к источнику напряжения. Пусть φ_a, φ_k — потенциалы анода и катода (рис. 38.2).

Вольт-амперная характеристика диода. Функциональная зависимость между током, протекающим через какой-либо элемент цепи, и напряжением на нем называется вольт-амперной характеристикой элемента цепи. На рис. 38.3 изображена вольт-амперная характеристика диода: $I=f(V)$, где $V=\varphi_a-\varphi_k$ — анодное напряжение. Мы видим, что при достаточно большом напряжении сила тока достигает наибольшей величины, называемой *током насыщения*. Это объясняется тем, что все электроны, вылетающие из катода, достигают анода. При отрицательном напряжении $V<0$ обратный ток через диод значительно меньше, чем ток в прямом направлении.

Для обычного проводника вольт-амперная характеристика $I=V/R$ представляет линейную зависимость тока от напряжения. Пропорциональность тока напряжению означает неизменность

величины сопротивления. Вольт-амперная характеристика диода имеет существенно *нелинейный* характер. Поэтому свойства диода оцениваются такими параметрами, как крутизна характеристики и внутреннее сопротивление.

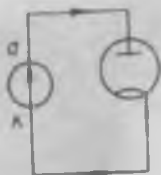


Рис. 38.2

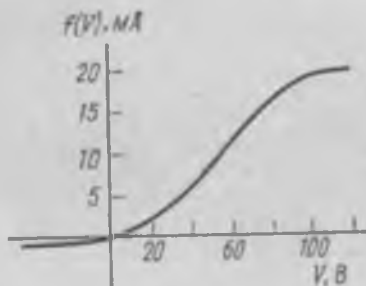


Рис. 38.3

Крутизной называется величина

$$S = \frac{\Delta I}{\Delta V}. \quad (38.1)$$

Размерность крутизны $[S] = \text{Ом}^{-1}$. Большая крутизна — достоинство диода, так как в этом случае небольшое увеличение напряжения приводит к значительному росту силы тока. Крутизна является функцией напряжения. Величина $R_0(V) = S^{-1}$ называется внутренним сопротивлением переменному току. На прямолинейном участке характеристики R_0 — постоянная величина. Внут-

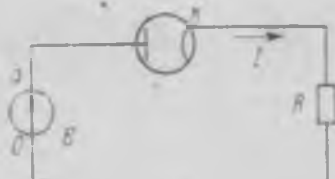
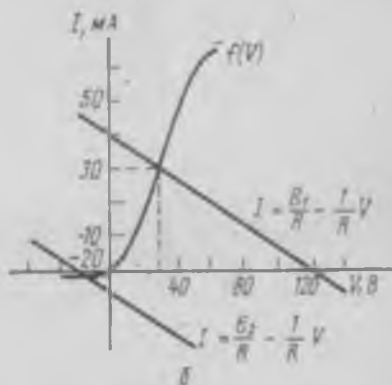


Рис. 38.4



реннее сопротивление постоянному току определяется из выражения $R_i = V/I(V)$.

6. Графический метод определения силы тока, протекающего через диод. В схеме, изображенной на рис. 38.4а, три участка об-

ладают различными потенциалами φ_a , φ_k , φ_0 . Стрелкой обозначено положительное направление тока.

Согласно закону Ома

$$V + IR = \mathcal{E}, \quad (38.2)$$

где $V = \varphi_a - \varphi_k$. Уравнение (38.2) и вольт-амперная характеристика диода

$$I = f(V) \quad (38.3)$$

образуют систему двух уравнений относительно I , V . Построим в координатах I , V график функции (38.3), а затем график прямой

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} - \frac{V}{R}. \quad (38.4)$$

Точка пересечения двух кривых определяет ток I_1 в цепи и падение напряжения V_1 на диоде. Этот способ решения уравнений (38.2), (38.3) называется *методом нагрузочной прямой*. На рис. 38.4 б изображены две нагрузочные прямые: одна при значениях $\mathcal{E}_1 = 120$ В, $R = 3$ кОм и другая при $\mathcal{E}_2 = -20$ В, $R = 3$ кОм. В первом случае сила тока через диод $I_1 = 30$ мА, а во втором — пренебрежимо мала.

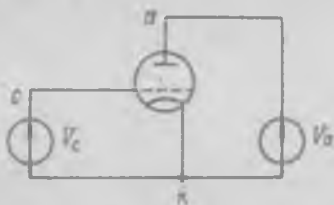


Рис. 38.5

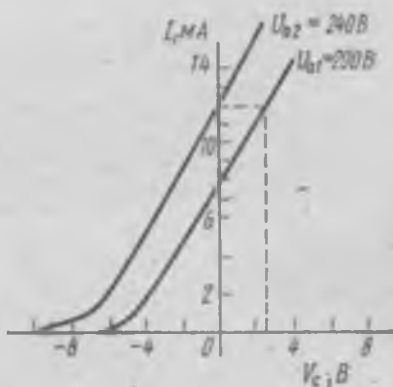


Рис. 38.6

7. Триод. Кроме катода и анода в триоде имеется третий электрод, присоединенный к сетке, окружающей катод. Сетка в триоде играет очень важную роль. Подавая на сетку напряжение $V_c = \varphi_c - \varphi_k$ (рис. 38.5) и меняя его величину и полярность, можно управлять электронным потоком внутри лампы, т. е. изменять величину анодного тока. Поэтому сетку называют управляющей, напряжение V_c — сеточным напряжением. Управляющая сетка расположена ближе к катоду, чем к аноду. Поэтому изменение напряжения на сетке сильнее влияет на величину анодного тока, чем такое же изменение анодного напряжения $V_a = \varphi_a - \varphi_k$. Эта особенность триода отражена в зависимости анодного тока

$I = I(V_a, V_c)$ от двух переменных V_a и V_c . Задавая определенные значения V_a , можно получить семейство сеточных характеристик триода. На рис. 38.6 показаны две сеточные характеристики для двух значений анодного напряжения $V_{a1} = 200$ В и $V_{a2} = 240$ В. При меньшем значении анодного напряжения характеристика сдвигается вправо и уже небольшое отрицательное напряжение на сетке запирает лампу. Рассматривая характеристики для $V_{a1} = 200$ В и $V_{a2} = 240$ В, находим, что при постоянном напряжении на сетке $V_{c1} = 0$ приращение анодного напряжения $\Delta V_a = 40$ В приведет к увеличению тока от значения $I_1 = 8$ мА до значения $I_2 = 12$ мА, т. е. на $\Delta I = 4$ мА. Если же анодное напряжение постоянно и равно $V_{a1} = 200$ В, то такое же приращение силы тока можно получить при изменении напряжения на сетке от $V_{c1} = 0$ до $V_{c2} = 2,5$ В, т. е. при приращении сеточного напряжения $\Delta V_c = 2,5$ В в шестнадцать раз меньше, чем в первом случае. Описанное явление лежит в основе использования триода в качестве усилителя (см. § 46).

Крутизна характеристики триода определяется соотношением

$$S = \frac{\Delta I}{\Delta V_c}, \quad V_a = \text{const.} \quad (38.5)$$

Например, при $V_a = 200$ В, $V_{c2} = 2,5$ В, $V_{c1} = 0$ В, $\Delta I = 4$ мА крутизна $S = 1,6 \cdot 10^{-3}$ Ом $^{-1}$,

Внутреннее сопротивление R_i триода определяется по семейству сеточных характеристик

$$R_i = \frac{\Delta V_a}{\Delta I}, \quad V_c = \text{const.} \quad (38.6)$$

Например, при $V_c = 0$, $V_{a2} = 240$ В, $V_{a1} = 200$ В, $\Delta I = 4$ мА внутреннее сопротивление $R_i \approx 10$ кОм.

Коэффициент усиления. Эта характеристика триода показывает, во сколько раз приращение анодного напряжения должно быть больше приращения сеточного напряжения для изменения силы тока на одинаковую величину. Обозначая коэффициент усиления буквой μ , получим $\mu = SR_i$. В рассмотренном выше случае $\mu = 16$.

§ 39. МАГНИТНОЕ ПОЛЕ. ЗАКОН АМПЕРА, СИЛА ЛОРЕНЦА

Вещества, притягивающие железо, были известны человечеству более 2000 лет назад. Они получили название *магнитов*. Постоянный магнит в форме тонкой полоски, расположенной на плавающей в воде деревянной дощечке, поворачивается одним концом в направлении Северного полюса Земли, а другим — в направлении Южного. Поэтому концы магнита так и называются северным и южным полюсами. Это наблюдение привело к созданию компаса. Первые компасы появились в Китае. В Европе компасом стали пользоваться с XII в. В 1600 г. английский физик У. Гиль-

берт опубликовал большой труд «О магните», в котором описал множество опытов по изучению электрических и магнитных явлений, проведенных им за 18 лет. Он первым пришел к заключению, что Земля сама является большим магнитом. Казалось, что магнетизм и электричество — две разные области, не имеющие между собой ничего общего. Дальнейшее развитие научных знаний показало тесную связь электрических и магнитных явлений, а созданная Максвеллом теория позволила единым образом описать все известные электромагнитные явления.

После изобретения в 1800 г. источника постоянного тока возможности экспериментаторов расширились. Первое фундаментальное открытие было сделано в 1820 г. датским физиком Х. К. Эрстедом (1777—1851). Он хотел выяснить, не производит ли электричество каких-либо действий на магнит. По-видимому, он хотел обнаружить взаимодействие статического электричества и магнита. В феврале 1820 г. Эрстед показывал студентам тепловое действие тока. Рядом с проводником случайно оказался компас. При включении тока стрелка отклонилась от первоначального положения. В этом эффекте Эрстед увидел подтверждение своих идей. Описание опыта вышло в свет 21 июля 1820 г.

Этот простой опыт произвел сильное впечатление на современников и положил начало новой области физики — электродинамике. Дальнейшие события развивались стремительно. 11 сентября 1820 г. опыт был показан на заседании Французской академии наук. Академики спокойно разошлись, и только один из них — А. М. Ампер — устремился заказывать приборы для проведения новых опытов. Он был уверен, что они должны подтвердить его догадки, сводящие магнетизм к чисто электрическим явлениям. Все считали, что ток, проходя по проводнику, превращает его в магнит, который и заставляет отклоняться стрелку компаса. Ампер высказал гениальную мысль: магнит представляет совокупность токов; отклонение стрелки вызвано взаимодействием токов. 25 сентября он демонстрирует новый эффект: два незаряженных параллельных провода, по которым текут одинаково направленные токи, притягиваются друг к другу. На каждый из проводников действует сила, зависящая от величины силы тока и расстояния между проводами. При перемене направления одного из токов силы притяжения сменяются силами отталкивания. В новой серии опытов спирали, по которым пропускали ток, вели себя подобно магнитам.

В этом же году Д. Араго обнаружил намагничивание железных опилок вблизи проводника с током. Новую область знаний о явлениях, обусловленных протеканием токов, Ампер назвал *электродинамикой*. Открытие явлений электромагнетизма оказало влияние не только на развитие науки, но и техники. В 1821 г. Фарадею удалось осуществить вращение проводника с током в магнитном поле. Это был первый электродвигатель. Ампер предложил

использовать отклонение от магнитной стрелки для передачи сигналов в электромагнитном телеграфе.

1. Магнитное поле. С современной точки зрения взаимодействие токов обусловлено существованием новой формы материи — *магнитного поля*. Этот термин ввел в 1845 г. Фарадей. Заметим, что согласно теории относительности электрическое и магнитное поля представляют две формы единого электромагнитного поля. Мы говорим, что ток в одном из проводников создает в окружающем пространстве магнитное поле. На каждый заряд, движущийся в другом проводнике, действует сила, называемая *силой Лоренца*. Сумма сил, действующих на хаотически движущиеся ионы решетки, равна нулю. В то же время сумма сил Лоренца, действующих на электроны, сообщает им приращение количества движения, которое при столкновении электронов с ионами решетки передается проводнику. В результате возникает сила, действующая на второй проводник в магнитном поле, создаваемом током в первом проводнике. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле, называется *силой Ампера*. Поскольку проводники равноправны, то на первый проводник, находящийся в магнитном поле, создаваемом вторым проводником, также действует сила. Если ток отсутствует, то электроны находятся в хаотическом движении и равнодействующая сила, приложенная к решетке, равна нулю — проводник покоится.

На основе явления взаимодействия проводников введена единица силы тока. Один ампер (А) — сила постоянного тока, протекающего по двум тонким и бесконечно длинным проводникам, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м, и вызывающего на каждый метр длины проводников силу взаимодействия $2 \cdot 10^{-7}$ Н.

Таким образом, для нахождения силы взаимодействия между токами надо решить две задачи: 1) определить магнитное поле, создаваемое движущимися зарядами, т. е. токами, 2) определить силы, действующие со стороны магнитного поля на ток.

2. Магнитная индукция. Магнитное поле в каждой точке пространства может быть описано вектором *магнитной индукции* $\vec{B}$. Условились за направление магнитного поля $\vec{B}$ в месте расположения магнитной стрелки принимать направление северного конца стрелки. Для графического изображения магнитного поля часто используют понятие силовых линий. Линии, касательные к которым в каждой точке совпадают с направлением вектора $\vec{B}$, называют силовыми линиями магнитной индукции. Величина магнитной индукции пропорциональна числу силовых линий, пересекающих единицу площади.

Как определить величину магнитной индукции? Для этого поместим в магнитное поле проводник с током I и будем измерять величину силы $|\Delta \vec{F}|$, действующей на малый элемент длины про-

водника Δl . Пусть угол между направлениями тока и вектора магнитной индукции равен α . Вначале мы обнаружили, что сила, действующая на проводник, перпендикулярна плоскости, в которой находится элемент Δl и вектор $\vec{B}$. Направление силы определяется правилом левой руки: расположим левую руку так, чтобы силовые линии магнитного поля входили в ладонь, а направление средних пальцев совпадало с направлением тока; тогда направление отогнутого в сторону большого пальца совпадает с направлением силы, действующей на проводник.

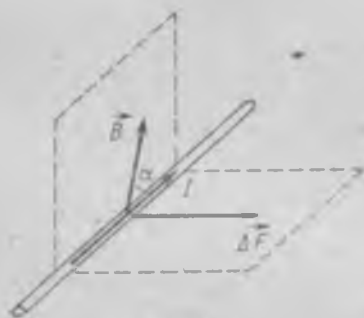


Рис. 39.1

На рис. 39.1 элемент Δl проводника изображен для наглядности как ребро двухгранного прямого угла. Вектор $\vec{B}$ находится в вертикальной, а $\Delta \vec{F}$ в горизонтальной плоскостях.

Измеряя величину силы, действующей на элемент Δl проводника при различных значениях силы тока I и углов α , можно убедиться, что отношение $\Delta F / \Delta l \sin \alpha$ не зависит от величины I , Δl , α . Вспомним, что в электростатике (§ 30) отношение силы, действующей со стороны заряда Q на пробный заряд q , к величине этого

заряда определяло напряженность $\vec{E}$ электрического поля, создаваемого зарядом Q . Подобно этому отношение $\Delta F / \Delta l \sin \alpha$ определяет величину, не зависящую от присутствия проводника с током в области размером Δl . Это обстоятельство позволяет ввести величину магнитной индукции магнитного поля

$$B = \frac{\Delta F}{I \Delta l \sin \alpha} \quad (39.1)$$

в данной точке пространства.

Однородным постоянным магнитным полем называется магнитное поле, вектор магнитной индукции которого одинаков во всех точках пространства.

Единица магнитной индукции получила название тесла (Тл) в честь сербского ученого-электротехника Н. Тесла. $1 \text{ Тл} = 1 \text{ Н/А} \cdot \text{м}$ — индукция магнитного поля, действующего с силой $\Delta F = 1 \text{ Н}$ на отрезок провода длиной $\Delta l = 1 \text{ м}$, по которому течет ток силой $I = 1 \text{ А}$. До введения СИ использовалась единица индукции гаусс (Гс): $1 \text{ Тл} = 10^4 \text{ Гс}$. Индукция магнитного поля Земли вблизи ее поверхности $\sim 5 \cdot 10^{-5} \text{ Тл}$. Магнитная индукция поля ядра на рассоянии порядка размера атома $\sim 5 \cdot 10^{-3} \text{ Тл}$. Слабые (до $5 \cdot 10^{-2} \text{ Тл}$) и средние ($5 \cdot 10^{-2} - 2 \text{ Тл}$) поля используются

в электротехнике и радиотехнике. В проектируемых сейчас гигантских ускорителях протонов до энергии 20 ТэВ (ТэВ = 10^{12} эВ) сверхпроводящие катушки магнитов будут создавать поля около 6,6 Тл. Магнитные поля пульсаров $\sim 10^9$ Тл.

3. Закон Ампера. Из формулы (39.1) следует, что сила, действующая на отрезок Δl проводника с током I , расположенный в магнитном поле с известной индукцией $\vec{B}$,

$$\Delta F = IB\Delta l \sin \alpha. \quad (39.2)$$

Эту формулу называют *законом Ампера*. Направление силы Ампера определяется правилом левой руки.

Для того чтобы представить закон Ампера в векторной форме, введем вектор $\vec{\Delta l}$ в направлении тока. Его длина равна Δl . Тогда силу Ампера можно записать с помощью векторного произведения (см. § 1):

$$\Delta \vec{F} = I [\vec{\Delta l} \cdot \vec{B}]. \quad (39.3)$$

Сила $\Delta \vec{F} = 0$, если угол α между векторами $\vec{\Delta l}$ и $\vec{B}$ равен 0° или 180° . Если $\alpha \neq 0, \pi$, то вектор $\Delta \vec{F}$ перпендикулярен плоскости, проходящей через векторы $\vec{\Delta l}$ и $\vec{B}$. Сила Ампера достигает наибольшей величины, если угол между векторами $\vec{\Delta l}$ и $\vec{B}$ равен 90° .

4. Момент сил, действующих на рамку с током в однородном магнитном поле. На рис. 39.2а изображена прямоугольная рамка $ABCD$ со сторонами $AD=BC=a$, $AB=DC=b$. В дальнейшем ориентацию рамки или петли с током будем задавать единичным вектором $\vec{n}$, перпендикулярным к плоскости рамки и направленным в одном из двух возможных направлений. В электродинамике существует правило, позволяющее по заданному вектору $\vec{n}$ определить положительное направление на контуре $ABCD$: при вращении буравчика (винта с правой нарезкой) в положительном направлении он перемещается в направлении вектора $\vec{n}$. Это определение эквивалентно условию: *при обходе контура в положительном направлении вектор нормали должен находиться с левой стороны*. Приведенное правило поможет в § 40 записать закон электромагнитной индукции в математической форме. А сейчас обратимся к рис. 39.2, на котором ток в рамке протекает в положительном направлении. Используя правило левой руки, нетрудно определить направления сил, действующих на каждый из проводников, образующих рамку. На верхний и нижний проводники действуют силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_3$, направленные по оси вращения и приводящие лишь к деформации рамки. На боковые стороны действуют силы $\vec{F}_2$, $\vec{F}_4$, создавая вращательный момент. Величины этих сил одина-

ковы $F_2 = F_4 = IBb$. На рис. 39.2 б изображен вид рамки сверху. Из него ясно, что плечи этих сил $\frac{1}{2}ab \sin \alpha$ также одинаковы. Следовательно, сумма моментов сил, действующих на обе стороны AB, DC рамки, равна

$$M = IBab \sin \alpha. \quad (39.4)$$

Очевидно, движение рамки зависит от начальных условий. Можно добиться того, чтобы она колебалась вблизи положения $\alpha = 0$ устойчивого равновесия, которое определяется условием $M = 0$ (рис. 39.2 в). При $\alpha = \pi/2$ момент сил достигает наибольшего зна-

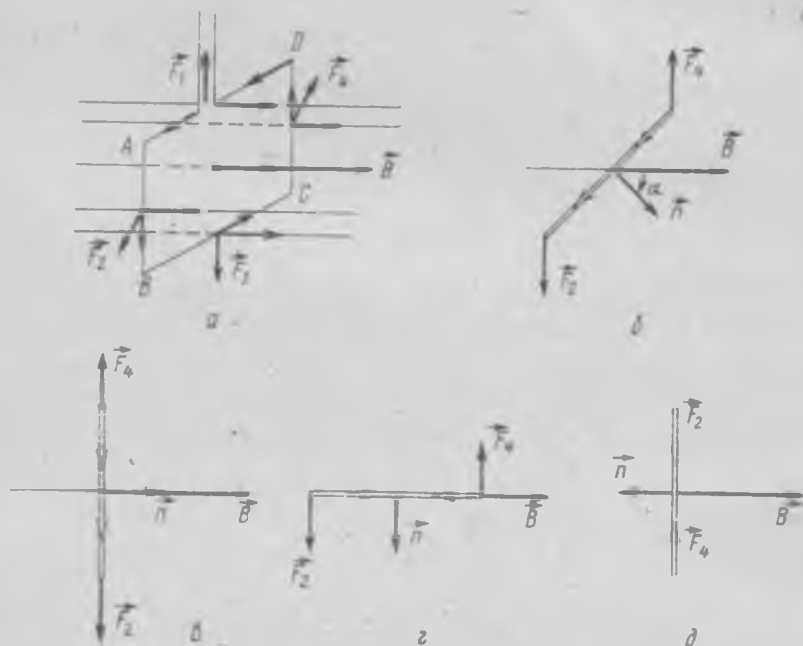


Рис. 39.2

чения (рис. 39.2 г). Если $\alpha = \pi$, то момент сил равен нулю. Однако в этом положении, изображенном на рис. 39.2 д, рамка находится в состоянии неустойчивого равновесия.

В векторной форме момент сил, действующих на рамку с током в магнитном поле, можно представить в виде

$$\vec{M} = IS [\vec{n} \cdot \vec{B}],$$

где $S = ab$ — площадь рамки. В таком виде это выражение справедливо для плоской рамки любой формы в однородном магнитном поле.

Рамку с током можно использовать для определения направления и величины индукции $\vec{B}$ однородного магнитного поля. Если рамка находится в состоянии устойчивого равновесия, то при вращении буравчика в направлении течения тока он будет перемещаться параллельно вектору $\vec{B}$. Определив таким способом направление магнитной индукции, повернем рамку в положение, показанное на рис. 39.2 г, и измерим значение момента $M=M_0$. Полагая в (39.4) $\alpha=\pi/2$, получим

$$B = \frac{M_0}{IS}.$$

Если момент сил $M_0=1$ Н·м при силе тока $I=1$ А и площади рамки $S=1$ м², то $B=1$ Тл.

ЗАДАЧА 39.1. Медный провод сечением $S=5$ мм², согнутый в виде трех сторон квадрата, может вращаться вокруг горизонтальной оси. Провод находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=10^{-1}$ Тл, направленной вертикально. Определить угол α отклонения плоскости квадрата от вертикали, если по проводнику идет ток силой $I=10$ А. Плотность меди $\rho=8,9 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. Рамка будет находиться в равновесии в том случае, если сумма вращающих моментов, действующих на нее, будет равна нулю. В данном случае на рамку действуют два момента: момент сил тяжести M_1 и момент M_2 , с которыми магнитное поле действует на рамку с током.

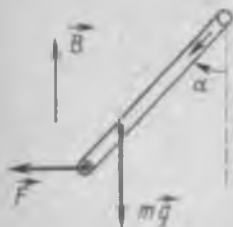


Рис. 39.3

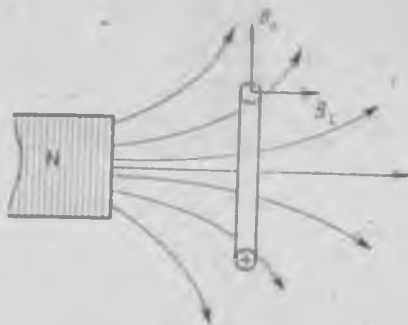


Рис. 39.4

Нетрудно подсчитать (см. задачу Д.6.2), что сила тяжести рамки $mg=3\rho gSa$ приложена в точке, находящейся на расстоянии $1/3a$ от середины средней стороны. Из рис. 39.3 видно, что $M_1 = \frac{2}{3}mgas \sin \alpha$.

Силы, действующие со стороны магнитного поля на боковые стороны рамки, не создают вращательного момента, так как направлены параллельно оси вращения и вызывают только растя-

жение рамки. Вращательный момент M_2 создается силой $F = IBa$, приложенной к середине средней стороны. Ее момент $M_2 = -Fa \cos \alpha$. Из уравнения

$$\frac{2}{3}mga \sin \alpha - Fa \cos \alpha = 0$$

находим

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{IB}{2\rho gS}.$$

Подставляя числовые данные, находим $\operatorname{tg} \alpha = 1,14$. Следовательно, $\alpha \approx 48^\circ$.

ЗАДАЧА 39.2. Описать поведение контура с круговым током, подвешенного вблизи северного полюса прямого постоянного магнита.

Решение. Магнитное поле у полюсов прямого магнита является неоднородным. Разложим вектор индукции магнитного поля $\vec{B}$ на две составляющие: $\vec{B}_\perp$ — перпендикулярную плоскости рамки и $\vec{B}_\parallel$ — параллельную рамке. Если ток течет в направлении, указанном на рис. 39.4, то $\vec{B}_\perp$ вызовет силу, лишь деформирующую рамку. Составляющая $\vec{B}_\parallel$ согласно правилу левой руки обуславливает возникновение силы, направленной перпендикулярно к плоскости рамки в сторону северного полюса. Следовательно, контур с выбранным направлением течения тока притянется к северному полюсу магнита. Если направление тока обратное изображенному на рис. 39.4, то контур отклонится от полюса, окажется в состоянии неустойчивого равновесия (докажите), повернется на 180° и снова притянется к магниту.

5. Сила Лоренца. Мы уже говорили, что магнитное поле не действует непосредственно на проводник. Сила Ампера возникает в результате действия магнитного поля на движущиеся в проводнике электроны. Используя закон Ампера, можно найти силу $\vec{F}_L$, действующую на одну из «положительно» заряженных частиц, создающих ток силой I . Очевидно, $\Delta F = \Delta N F_L$, где ΔN — число заряженных частиц в объеме $S \Delta l$, S — сечение проводника. Подставляя в (39.2) величину силы тока (33.3) и учитывая, что $\Delta N = nS \Delta l$, получим

$$F_L = e_0 u_{cp} B \sin \alpha. \quad (39.5)$$

Формула (39.5) является частным случаем самого общего выражения для силы, действующей на заряд q , движущийся со скоростью $\vec{v}$ в магнитном поле:

$$\vec{F}_L = q [\vec{v} \cdot \vec{B}]. \quad (39.6)$$

Этот результат впервые был получен голландским физиком Х. А. Лоренцем. Формула (39.6), определяющая силу Лоренца, справедлива при любых значениях скорости заряженной частицы. Ее величина равна

$$F_{\text{Л}} = |q|vB \sin \alpha, \quad (39.7)$$

где α — угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{B}$. Направление силы Лоренца находится с помощью правила левой руки. Поскольку сила Лоренца перпендикулярна скорости частицы, то она не совершает работы при движении частицы. Следовательно, кинетическая энергия и величина скорости не изменяются.

ПРИМЕР 39.3. Движение заряженных частиц в однородном магнитном поле. Пусть частица влетает в магнитное поле со скоростью $\vec{v}$, направленной перпендикулярно вектору $\vec{B}$. Поскольку сила Лоренца $\vec{F}_{\text{Л}}$ перпендикулярна скорости $\vec{v}$ в любой момент времени, то траекторией частицы является окружность. Из уравнения движения (13.56)

$$\frac{mv^2}{R} = qvB \quad (39.8)$$

следует, что радиус окружности $R = mv/qB$. Частота вращения $\omega = v/R = qB/m$ (называемая циклотронной частотой) не зависит от величины скорости. Пусть теперь начальная скорость частицы $\vec{v}$ имеет составляющие $v_{\perp}$ и $v_{\parallel}$, перпендикулярную и параллельную вектору $\vec{B}$. В этом случае частица движется по винтовой линии — навивается на поверхность цилиндра радиусом $mv_{\perp}/qB$ с осью, параллельной вектору $\vec{B}$. Проекция скорости частицы на направление вектора $\vec{B}$ остается равной $v_{\parallel}$.

6. Напряженность магнитного поля. Обычно электрическое и магнитное поля наблюдают в веществе. Правда, не всегда в плотном веществе, но по крайней мере в газе, например в воздухе. Вектор магнитной индукции характеризует именно магнитное поле внутри вещества (см. пункт 2). Наряду с индукцией магнитного поля используют векторную величину $\vec{H}$, называемую напряженностью магнитного поля. Эта величина является характеристикой намагничивающего внешнего поля, не зависящего от атомной структуры вещества. Другими словами, вектор $\vec{H}$ определяет магнитное поле в вакууме. Если среда отсутствует, то векторы $\vec{B}$ и $\vec{H}$ должны совпадать. Однако единицей напряженности магнитного поля в СИ принят 1 А/м — напряженность магнитного поля, индукция которого в вакууме равна $4\pi \cdot 10^{-7}$ Тл. Тем самым вектор

$\vec{B}$ отличается от вектора $\vec{H}$ в СИ и размерностью и численным значением. Связь между напряженностью поля и магнитной индукцией в СИ можно найти по формуле $B = \mu_0 H$, где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Н/А}^2$ называется магнитной постоянной.

Магнитное поле прямолинейного проводника с током. Рассмотрим магнитное поле, создаваемое в вакууме током I , текущим по длинному прямолинейному проводнику. Силовые линии вектора магнитной индукции образуют замкнутые concentрические окружности. Существенное отличие магнитных силовых линий от силовых линий электрического поля состоит в том, что они всегда замкнуты или уходят в бесконечность. Объясняется это тем, что в природе не существует магнитных зарядов, создающих магнитное поле, подобно тому как электрические заряды создают электрическое поле.

Для определения направления силовых линий можно воспользоваться следующим приемом: *если большой палец правой руки направить по току, то остальные пальцы, охватывающие проводник, укажут направление силовых линий.*

Величина вектора магнитной индукции в точке, находящейся на расстоянии r от проводника,

$$B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (39.9)$$

Следовательно, магнитное поле прямого тока является неоднородным — величина магнитной индукции убывает с увеличением расстояния от проводника, а направления вектора $\vec{B}$ в разных точках одной и той же силовой линии не совпадают.

ПРИМЕР 39.4. По двум параллельным проводам текут в одном и том же направлении токи силой I_1 и I_2 . Расстояние между проводами r . Вычислим силу, действующую на элемент Δl каждого проводника.

Найдем величину силы $\vec{F}_{21}$, действующей на отрезок второго провода длиной Δl со стороны магнитного поля $\vec{B}_1$, создаваемого током I_1 . Силовые линии магнитного поля $\vec{B}_1$ пересекают провод с током I_2 под прямым углом. Следовательно,

$$F_{21} = I_2 B_1 \Delta l, \quad B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1}{r}.$$

Исключая B_1 , получим величину силы

$$F_{21} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{r} \Delta l.$$

Полагая $I_1 = I_2 = 1 \text{ А}$, $r = \Delta l = 1 \text{ м}$, найдем в соответствии с определением единицы силы тока значение $F_{21} = 2 \cdot 10^{-7} \text{ Н}$. Аналогично находится сила $\vec{F}_{12}$, действующая на отрезок провода с током I_1

со стороны магнитного поля, создаваемого током I_2 . Величина $F_{12} = F_{21}$.

Если магнитное поле создается не одним, а несколькими токами, то результирующая напряженность в некоторой точке равна векторной сумме напряженностей, создаваемых каждым током в отдельности (свойство суперпозиции). Возьмем, например, два параллельных проводника, в которых токи текут в противоположных направлениях. Каждый из токов создает магнитное поле. Так как токи в проводах направлены в противоположные стороны, то в области между проводами силовые линии обоих полей направлены в одну и ту же сторону, а по обе стороны от проводов — в противоположные стороны. Складываясь, эти поля усиливают друг друга в области между проводами и ослабляют друг друга во всей остальной области.

Магнитное поле соленоида, т. е. системы круговых токов с общей прямолинейной осью, образуется в результате наложения магнитных полей, создаваемых каждым витком. В средней части соленоида магнитные силовые линии представляют систему почти параллельных оси соленоида прямых одинаковой густоты (магнитное поле почти однородно). По мере приближения к концам соленоида силовые линии превращаются в расходящиеся кривые (неоднородное магнитное поле), замыкающиеся во внешней области соленоида.

7. Магнитные свойства вещества. Магнитные свойства вещества весьма многообразны. Отметим сразу, что в основе магнитных эффектов лежат квантовые явления. Поэтому ограничимся качественным обсуждением магнитных свойств вещества, обусловленных особенностями структуры электронной оболочки молекул.

Движущиеся вокруг атомных ядер электроны эквивалентны замкнутым токам. Мы можем представить картину силовых линий магнитного поля, создаваемого замкнутой петлей с током, если возьмем прямой провод, а затем свернем его в кольцо. Гипотеза Ампера блестяще подтвердилась, когда были созданы первые модели электронных оболочек атомов и молекул. Однако в дальнейшем было установлено, что электрон сам является элементарным магнитиком. Эта особенность, проявляющаяся при взаимодействии электрона с другими электронами и ядрами, обусловлена новой характеристикой элементарных частиц, получивших название *спин*. Спин электрона — такое же внутреннее свойство, как заряд и масса. Математическое описание спиновых свойств электрона возможно только в рамках квантовой теории. Таким образом, вектор магнитной индукции $\vec{B}$ в веществе создается не только молекулярными токами, но и содержит еще вклад поля элементарных магнитиков. В веществах, которые получили название *диамагнетиков*, вектор магнитной индукции $\vec{B}$ равен нулю. Однако существуют и такие вещества, в которых вектор $\vec{B}$ отличен от

нуля. Они называются *парамагнетиками*. Большинство веществ являются диамагнетиками.

Подобно тому как внесение диэлектриков в электрическое поле вызывает изменение этого поля, так и внесение магнетиков во внешнее магнитное поле вызывает его изменение. Всякий магнетик, находящийся во внешнем магнитном поле с индукцией $\vec{B}_0$, намагничивается. В этом состоянии магнитное поле внутри вещества является векторной суммой $\vec{B}_0$ и добавочного поля с индукцией $\vec{B}'$. Это дополнительное поле образуется за счет магнитных полей, создаваемых каждым атомом и молекулой вещества в присутствии внешнего поля. Векторная сумма $\vec{B}_0 + \vec{B}'$ получила название вектора магнитной индукции $\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{B}'$. В слабых и средних полях $\vec{B}_0$ вектор $\vec{B}$ пропорционален внешнему полю $\vec{B}_0$. Поэтому магнитная индукция может быть представлена в виде $\vec{B} = \mu \vec{B}_0$. Коэффициент μ называется *магнитной проницаемостью* вещества. Величина μ безразмерная; она является количественной характеристикой магнитных свойств среды, показывая, во сколько раз результирующее поле в веществе отличается от внешнего магнитного поля.

В диамагнетиках дополнительное поле $\vec{B}'$ возникает вследствие влияния внешнего поля $\vec{B}_0$ на величину и направление молекулярных токов. В этом случае поле $\vec{B}'$ ослабляет внешнее поле: вектор $\vec{B}'$ направлен противоположно направлению вектора $\vec{B}_0$. Это означает, что $B < B_0$, т. е. $\mu < 1$. В парамагнетиках (алюминий, медный купорос) молекулы можно представить в виде микроскопических магнитных стрелок. Внешнее магнитное поле не только влияет на движение молекулярных токов, но и заставляет магнетики ориентироваться в одном направлении. В результате вектор $\vec{B}'$ оказывается параллельным вектору $\vec{B}_0$. В этом случае $B > B_0$, следовательно, $\mu > 1$. Магнитная проницаемость большинства пара- и диамагнетиков близка к единице.

Наряду с этими веществами известны *ферромагнетики*, способные намагничиваться самопроизвольно, под действием внутренних сил. Ферромагнетик состоит из намагниченных макроскопических областей, называемых *доменами*. Они имеют размеры $\sim 10^{-3}$ — 10^{-2} см и доступны наблюдению в микроскоп. В отсутствие внешнего поля они расположены, как правило, хаотично. Включение магнитного поля заставляет домены ориентироваться по направлению вектора $\vec{B}_0$. Это приводит к исчезновению «границ» между соседними одинаково ориентированными доменами и к росту намагниченности. При поле $B_0 \sim 10^{-1}$ Тл величина индукции возрастает до 1—2 Тл. Необратимость процесса намагничи-

вания приводит к тому, что после выключения внешнего поля в ферромагнетике сохраняется остаточное магнитное поле, близкое к 1 Тл. Оно будет существовать до тех пор, пока материал не подвергнуть нагреванию или действию сильных магнитных полей.

Магнитные материалы широко применяются в электротехнике, автоматике, приборостроении, в счетно-решающих устройствах.

§ 40. ЭЛЕКТРОМАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ. ПЕРЕМЕННЫЙ ТОК

Одно из фундаментальных открытий в электродинамике — явление электромагнитной индукции — было сделано в 1831 г. гениальным английским ученым Майклом Фарадеем (1791—1867). Получив лишь начальное образование, он в возрасте двадцати одного года решил заняться научной работой. В 1813 г. был принят на должность лаборанта в физический институт, а в 1825 г. возглавил лабораторию. Невозможно перечислить его выдающиеся открытия в области химии, электрохимии, магнитооптики, магнетизма и электричества. Навсегда вошли в физику введенные им новые понятия: катод, анод, электрод, ионы, электролиз, диа- и парамагнетизм, диэлектрическая проницаемость, силовые линии. По мнению А. Эйнштейна, самой важной идеей со времен Ньютона было предположение о существовании электромагнитного поля. Пожалуй, лучше всех сказал о нем выдающийся русский ученый А. Г. Столетов: «Никогда со времен Галилея свет не видел столько поразительных и разносторонних открытий, вышедших из одной головы, и едва ли скоро увидит другого Фарадея».

В 1821 г. под влиянием открытия Эрстеда Фарадей записал в своем дневнике: «превратить магнетизм в электричество». За 10 лет он провел множество опытов. В одном из них 29 августа 1831 г. Фарадей намотал изолированной проволокой две обмотки на железное кольцо. Концы одной из них были подключены к гальванометру, а другая присоединялась к батарее. Когда он включил батарею, стрелка гальванометра заколебалась и вернулась в исходное положение. При размыкании контакта с батареей произошел новый бросок стрелки. Однако Фарадей еще не осознал, что цель достигнута. Его озадачила кратковременность эффекта. Поэтому он продолжает опыты и одновременно приходит к пониманию сущности явления. Заключительный эксперимент он провел 17 октября: спираль из медной проволоки подсоединил к гальванометру и быстро толкнул магнит внутрь спирали. Стрелка сдвинулась. Затем так же быстро вытащил магнит — стрелка качнулась в противоположную сторону. Главный вывод — электрический ток возникает при движении катушки и магнита относительно друг друга. 28 октября 1831 г. он создает первый генератор электрического тока.

Рассмотрим три опыта по исследованию явления электромагнитной индукции. Возьмем две электрические цепи: одна содержит катушку A и присоединенный к ней амперметр, другая — катушку B , соединенную с батареей (рис. 40.1). 1. Катушка A движется в магнитном поле, создаваемом катушкой B . Стрелка амперметра отклоняется. 2. Катушка A неподвижна, а катушка B движется. Амперметр снова регистрирует ток в цепи катушки A . 3. Обе катушки неподвижны, но мы меняем силу тока в цепи катушки B , перемещая движок реостата. Стрелка амперметра снова отклоняется.

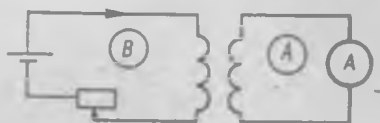


Рис. 40.1

В каждом из опытов возникновение тока в цепи A связано с работой по переносу зарядов, т. е. согласно (34.1) в ней возникает ЭДС. Ток, протекающий в цепи катушки B , называют *индукционным*, а ЭДС — *электродвижущей силой индукции*. Общей особенностью описанных опытов является то, что в каждом случае изменялось число силовых линий магнитной индукции, пересекающих площадь, ограниченную проводниками, образующими цепь A . Поэтому, для того чтобы записать в математической форме закон электромагнитной индукции, необходимо ввести новое понятие — *поток магнитной индукции*, характеризующее число силовых линий, пересекающих некоторую поверхность.

1. Поток вектора магнитной индукции. Рассмотрим однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ и произвольно расположенную плоскость. Контур C охватывает на плоскости площадь S . Ориентацию плоскости в пространстве зададим, вводя единичный вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к одной из ее сторон.

Потоком магнитной индукции Φ через площадь S называется скалярная величина

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (40.1)$$

где α — угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{B}$. Используя определение скалярного произведения (см. § 1), поток Φ можно записать в виде

$$\Phi = \vec{B} \vec{n} S. \quad (40.2)$$

При деформации контура или изменении ориентации плоскости в пространстве поток магнитной индукции будет зависеть от времени.

Единицей потока магнитной индукции является вебер (Вб): $1 \text{ Вб} = 1 \text{ Тл} \cdot 1 \text{ м}^2$.

Определим теперь поток магнитной индукции неоднородного магнитного поля через произвольную поверхность S , ограниченную контуром C , или замкнутую поверхность. Теперь величина и направление вектора B различны в каждой точке поверхности. В этом случае разделим поверхность на столь малые части, чтобы в пределах каждой из них поверхность мало отличалась от плоской. Тогда в пределах площадки ΔS_i магнитное поле B_i почти не отличается от однородного. Ориентацию каждой площадки зададим вектором $\vec{n}_i$, образующим угол α_i с вектором $\vec{B}_i$. В соответствии с (40.1) величина $\Delta\Phi_i = B_i \Delta S_i \cos \alpha_i$ является потоком магнитной индукции через элементарную площадку. Суммируя потоки $\Delta\Phi_i$, получим поток магнитной индукции через всю поверхность

$$\Phi = \sum_i \Delta\Phi_i = \sum_i B_i \Delta S_i \cos \alpha_i. \quad (40.3)$$

В общем случае вектор $\vec{B}$ может зависеть от времени, а поверхность S непрерывно деформироваться. Тогда поток, определяемый (40.3), становится функцией времени.

ЗАДАЧА 40.1. Прямоугольная рамка площадью S расположена в плоскости, перпендикулярной вектору магнитной индукции $\vec{B}$ однородного магнитного поля. Рамку можно переместить в новое положение, отмеченное на рис. 40.2 пунктиром, двумя спосо-

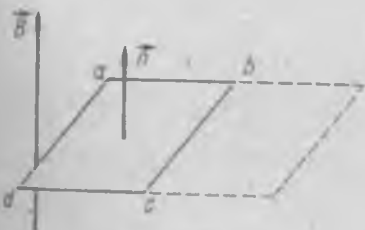


Рис. 40.2

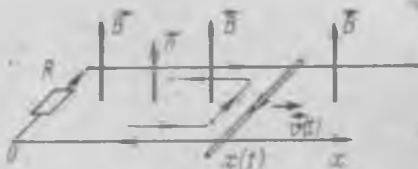


Рис. 40.3

бами: 1) перемещая ее в плоскости, в которой расположена рамка, 2) вращая ее вокруг стороны bc на 180° . Найти приращение потока магнитной индукции при перемещении рамки.

Решение. На первый взгляд кажется, что конечное положение рамки одинаково независимо от способа ее перемещения. Однако это не так, поскольку ориентация рамки задается вектором $\vec{n}$ и определение потока индукции немисливо без введения вектора нормали к одной из ее плоскостей. Если вектор $\vec{n}$ введен согласно рис. 40.2, то в начальном положении $\Phi = BS$.

1. В первом случае вектор $\vec{n}$ при перемещении рамки не изменяет ориентации. Поэтому поток индукции в конечном положении $\Phi_1 = BS$. Следовательно, $\Delta\Phi = 0$.

2. В этом случае вектор $\vec{n}(t)$ изменяет ориентацию и становится равным $\vec{n}_2 = -\vec{n}$, угол между $\vec{B}$ и вектором $\vec{n}_2$ равен 180° . Поэтому согласно (40.1) $\Phi_2 = -BS$. Приращение потока магнитной индукции $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1 = -2BS$.

2. Закон электромагнитной индукции. Рассмотрим замкнутый контур в магнитном поле и предположим, что поток магнитной индукции через поверхность, ограниченную контуром, является функцией времени: $\Phi = \Phi(t)$. Тогда в контуре возникает переменная ЭДС индукции

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}, \quad (40.4)$$

где $\Delta\Phi$ — приращение функции $\Phi(t)$ в интервале времени $(t, t + \Delta t)$. Переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\mathcal{E}(t) = -\Phi'. \quad (40.5)$$

Здесь Φ' — производная функции $\Phi(t)$. В зависимости от знака производной Φ' ЭДС может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Очевидно, положительные или отрицательные значения $\mathcal{E}(t)$ приобретают смысл только в том случае, если на контуре уже задано положительное направление. Действительно, вводя необходимый для определения функции $\Phi(t)$ вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к поверхности, ограниченной контуром, мы тем самым задали положительное направление на контуре по правилу буравчика: *вращение буравчика в положительном направлении заставляет его перемещаться параллельно вектору $\vec{n}$* . Это правило эквивалентно условию: при обходе контура в положительном направлении вектор $\vec{n}$ остается с левой стороны.

Правая часть (40.5) содержит производную по времени функции $\Phi(t)$ — потока магнитной индукции через рамку, т. е. ЭДС индукции определяется только скоростью изменения потока независимо от причин, вызвавших это изменение.

Важно отметить, что в описанных выше трех опытах цепь с амперметром играет вспомогательную роль: в ней возникает ЭДС и, следовательно, электрическое поле, работа которого по перемещению зарядов по замкнутому контуру не равна нулю. Это поле получило название вихревого электрического поля. Возникновение вихревого электрического поля при изменении магнитного потока через любую воображаемую поверхность ни в какой мере не связана с присутствием цепи, содержащей амперметр.

ПРИМЕР 40.2. Два параллельных металлических стержня расположены в горизонтальной плоскости на расстоянии l друг от друга. Два конца стержней соединены резистором R (рис. 40.3). По стержням движется со скоростью v отрезок прямого провода. Вся система находится в однородном постоянном магнитном поле с индукцией B , направленном вертикально вверх.

Определим вначале ЭДС индукции в контуре. С этой целью введем координатную ось x и вектор n , перпендикулярный к горизонтальной плоскости, образованной проводниками. Положительное направление на контуре, определяемое согласно данному выше правилу, показано на рис. 40.3 стрелками, лежащими вне контура. Положение отрезка провода определяется функцией $x(t)$. Учитывая (40.1), находим $\Phi(t) = Blx(t)$. Подставляя $\Phi(t)$ в (40.5), получим

$$\mathcal{E}(t) = -\Phi' = -Blx' = -Blv(t), \quad (1)$$

где $v(t)$ — проекция на ось x скорости отрезка провода в момент времени t . Предположим, что он движется вправо с постоянной скоростью v_0 . В этом случае $\mathcal{E} < 0$. Согласно закону Ома сила тока

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = -\frac{Blv_0}{R}. \quad (2)$$

Поскольку $I < 0$, то это означает, что ток течет в отрицательном направлении.

Мощность, рассеиваемая на резисторе,

$$P = I^2 R = \frac{1}{R} B^2 l^2 v_0^2. \quad (3)$$

Каков источник энергии, выделяющейся в резисторе в виде теплоты? Для того чтобы ответить на этот вопрос, определим силу Ампера (39.2), действующую на отрезок провода со стороны магнитного поля. Как только по цепи пойдет ток, на перемычку будет действовать сила

$$F_x = IBl = -\frac{B^2 l^2}{R} v_0 < 0. \quad (4)$$

Ее направление независимо от (4) можно определить с помощью правила левой руки. Следовательно, движение отрезка провода с постоянной скоростью возможно лишь тогда, когда на него будет действовать внешняя сила $f_x = -F_x$, направленная параллельно скорости. Механическая работа в единицу времени — мощность, развиваемая этой силой,

$$P_{\text{мех}} = f_x v_0 = \frac{1}{R} B^2 l^2 v_0^2. \quad (5)$$

Сравнивая (5) и (3), видим, что выполняется закон сохранения

энергии — количество энергии, эквивалентное механической работе по перемещению провода, выделяется в виде теплоты в резисторе R .

Предположим, что x -координата провода определяется функцией $x(t) = x_0 + A \cos \omega t$, где x_0 , A , ω — постоянные величины. В этом случае поток магнитной индукции

$$\Phi(t) = Bl(x_0 + A \cos \omega t).$$

Подставляя $\Phi(t)$ в (40.5), получим ЭДС индукции

$$\mathcal{E}(t) = BlA \omega \sin \omega t.$$

Таким образом, мы получили генератор переменного тока, на полюсах которого создается разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, $\mathcal{E}_0 = AB l \omega$.

3. Закон Ленца. В 1833 г. русский физик Э. Х. Ленц установил правило, определяющее направление индукционного тока. Пусть отрезок провода на рис. 40.3 движется вправо. В этом случае приращение потока индукции внешнего поля $\Delta\Phi > 0$. На рис. 40.4 изображено несколько силовых линий магнитного поля

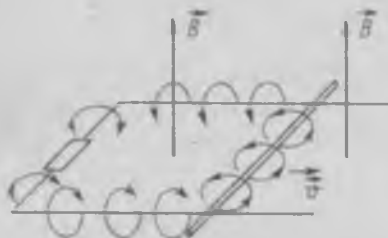


Рис. 40.4

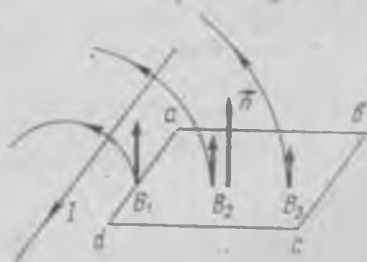


Рис. 40.5

индукционного тока. Нетрудно видеть, что поток магнитной индукции этого поля $\Phi_{\text{л}} < 0$. Приращение $\Delta\Phi_{\text{л}} < 0$. Для обычных проводников $|\Delta\Phi_{\text{л}}| \ll |\Delta\Phi|$. Ленц обратил внимание на то, что приращения двух потоков $\Phi(t)$ и $\Phi_{\text{л}}(t)$ противоположны по знаку. Этот вывод остается в силе и при движении проводника влево. Обобщая подобные результаты, можно сформулировать закон Ленца: *индукционный ток имеет такое направление, что приращение созданного им магнитного потока через площадь, ограниченную контуром, и приращение потока магнитной индукции внешнего поля противоположны по знаку.*

Заметим, что в учебной литературе встречается не вполне корректная формулировка закона Ленца: утверждается, что магнитный поток $\Phi_{\text{л}}(t)$ стремится компенсировать изменение магнитного потока $\Phi(t)$. Нетрудно понять, что сопоставление функции

$\Phi_L(t)$ в момент времени t и приращения $\Delta\Phi$ функции $\Phi(t)$ за интервал времени $(t, t+\Delta t)$ лишено смысла.

Закон Ленца отражает важнейшее свойство любых физических систем: *при действии внешних сил в системе возникают процессы, препятствующие изменениям, вызванным внешним воздействием.*

ПРИМЕР 40.3. Прямолинейный провод с током находится в одной плоскости с прямоугольной рамкой $abcd$, причем провод параллелен сторонам ad , bc . Определим направление тока, индуцированного в рамке при сближении проводника и рамки.

Предположим, что при сближении провод остается параллельным стороне ad . Поскольку магнитное поле провода является неоднородным (несколько силовых линий изображено на рис. 40.5), то вычисление потока (40.3) затруднительно. Поэтому приведем качественные соображения. Из рис. 40.5 видно, что заданному вектору $\vec{n}$ соответствует поток магнитной индукции $\Phi > 0$. Положительное направление на контуре указано стрелкой. При сближении провода и рамки приращение $\Delta\Phi > 0$ (см. формулу (40.3)). Поэтому согласно (40.4) $\mathcal{E} < 0$, т. е. ток протекает в отрицательном направлении. Разумеется, это решение находится в соответствии с правилом Ленца. Можно предложить второй способ решения, если заметить, что при приближении рамки к проводу они должны отталкиваться. Это утверждение отражает сущность закона Ленца.

ПРИМЕР 40.4. В системе, изображенной на рис. 40.3, отрезку провода массой m сообщили начальную скорость v_0 . Трение отсутствует. Найдём скорость провода $v(t)$, силу тока $I(t)$ и количество теплоты, рассеянной в резисторе R .

Этот пример относится к *электромеханике*. На провод действуют сила Ампера и силы реакции и тяжести. Пусть a , v — проекции ускорения и скорости на ось x в момент времени t . Из второго закона Ньютона получим уравнение

$$ma = BIl. \quad (1)$$

Поскольку $\mathcal{E} = -Blv$, то уравнение для тока в цепи имеет вид

$$IR = -Blv. \quad (2)$$

Исключая из (1), (2) силу тока $I(t)$ и учитывая, что $a = v'$, получим уравнение

$$mv' = -v, \quad \tau = \frac{mR}{B^2 l^2}. \quad (3)$$

Величина τ имеет размерность времени. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решением этого уравнения является функция

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau}. \quad (4)$$

Здесь e^x — показательная функция, называемая экспонентой, $e \approx 2,71828...$ — основание натуральных логарифмов [35]. Обычно эту функцию обозначают специальным символом $\exp x$. При $x < 0$ функция e^x быстро убывает: $e^{-1} \approx 0,368$, $e^{-2} \approx 0,135$, $e^{-3} \approx 0,05$, $e^{-4} \approx 0,018$, $e^{-5} \approx 0,007$. Например, при $t = 5\tau$ скорость провода уменьшится почти в сто раз.

Сила тока в цепи также убывает. Из (2), (4) находим

$$I(t) = -\frac{Bl}{R} v_0 e^{-t/\tau}.$$

Мощность, рассеиваемая в резисторе, $P = I^2 R$. Согласно (36.3) количество теплоты, выделившееся в резисторе,

$$Q = \int_0^\infty I^2(t) R dt = \frac{B^2 l^2 v_0^2}{2R} \tau = \frac{mv_0^2}{2}.$$

Разумеется, мы получили очевидный результат, согласующийся с законом сохранения энергии.

4. Вращающаяся рамка в однородном магнитном поле. На рис. 40.6 изображена рамка площади S , вращающаяся вокруг горизонтальной оси с угловой скоростью ω . Вектор магнитной индукции $\vec{B}$ направлен по вертикали.

Зададим ориентацию рамки единичным вектором $\vec{n}$. Положительное направление тока указано стрелкой в плоскости рамки.

Поскольку, при равномерном вращении угол $\alpha = 2\pi t/T = \omega t$, то поток магнитной индукции $\Phi(t) = BS \cos \omega t$. Следовательно, ЭДС индукции $\mathcal{E}(t) = BS\omega \sin \omega t$. Мы получили генератор тока, который создает на выходных проводниках разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_b = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, где $\mathcal{E}_0 = BS\omega$. Переменное напряжение подается во внешнюю цепь при помощи контактных колец.

5. Двигатели постоянного тока. Электрический мотор состоит из якоря и магнита. Якорь содержит множество проводочных петель прямоугольной формы, на-

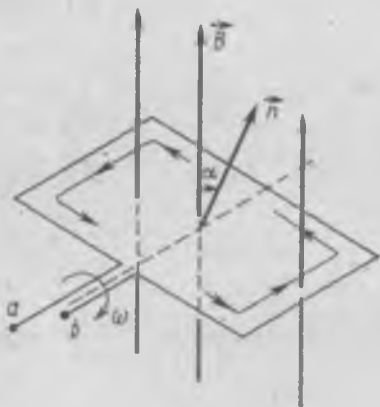


Рис. 40.6

детых на сердечник, выполненный в виде цилиндра. Обычно в электромагнит и якорь ток поступает от одного источника. Мы рассмотрим электромотор с независимым возбуждением. В этом случае магнит постоянный или питается от отдельного источника.

Поскольку катушка якоря пересекает линии магнитного поля, то в ней возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}$, направленная навстречу ЭДС внешнего источника $\mathcal{E}_0$. Поэтому закон Ома для цепи якоря принимает вид

$$IR = \mathcal{E}_0 + \mathcal{E}, \quad (40.6)$$

R — сопротивление обмотки якоря.

Полная мощность, затрачиваемая источником, идет на совершение механической работы и нагревание обмотки:

$$I\mathcal{E}_0 = P_{\text{мех}} + I^2 R. \quad (40.7)$$

Из (40.6) и (40.7) следует, что

$$P_{\text{мех}} = I(\mathcal{E}_0 - IR) = -I\mathcal{E}. \quad (40.8)$$

Коэффициент полезного действия мотора

$$\eta = \frac{P_{\text{мех}}}{I\mathcal{E}_0} = 1 - \frac{IR}{\mathcal{E}_0}. \quad (40.9)$$

При наибольшей нагрузке якорь заторможен, $\mathcal{E} = 0$. В этом случае в цепи якоря ток достигает максимального значения $I_0 R = -\mathcal{E}_0$. Поэтому (40.9) можно представить в виде $\eta = 1 - I/I_0$. В режиме холостого хода нагрузка отсутствует, $P_{\text{мех}} = 0$. Ток в цепи также равен нулю, так как якорь вращается с максимальной скоростью, при этом $\mathcal{E}_0 + \mathcal{E} = 0$.

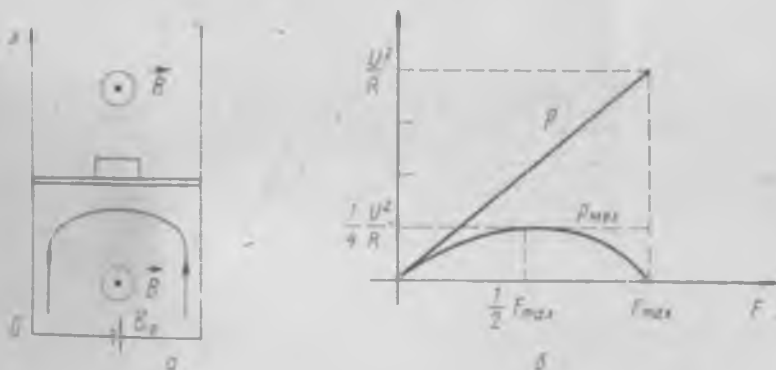


Рис. 40.7

ПРИМЕР 40.5. По двум параллельным металлическим рейкам, расположенным в вертикальной плоскости (рис. 40.7а) и замкнутым на источник с $\mathcal{E}_0 = U$, может двигаться без трения невесомый проводник длиной l . К нему прикреплен груз весом F . Вся система находится в однородном магнитном поле, индукция

которого $\vec{B}$ направлена перпендикулярно плоскости рисунка. Исследуем условия работы такого подъемника в стационарном режиме, найдем зависимость тока в цепи, полной потребляемой мощности, механической мощности и коэффициента полезного действия от величины силы $\vec{F}$.

Направим вектор $\vec{n}$ параллельно вектору $\vec{B}$ и введем ось x с началом в точке O (рис. 40.7 а). Положительное направление тока отмечено стрелкой в плоскости контура с током. Положение проводника определяется функцией $x(t)$. Поток индукции через площадь $l(x)$, ограниченную контуром, $\Phi(t) = Blx(t)$, ЭДС индукции $\mathcal{E}(t) = -Blv(t)$, где $v(t)$ — проекция скорости проводника на ось x . Следовательно, уравнение (40.6) имеет вид

$$IR = U - Blv.$$

Учитывая, что проекция силы Ампера на ось x равна IBl , из второго закона Ньютона находим второе уравнение

$$ma = IBl - F.$$

Исключая ток, получим уравнение, определяющее движение проводника,

$$ma = \frac{Bl}{R} (U - Blv) - F.$$

Если в начальный момент времени $v(0) = 0$, то при $BlU > FR$ проводник с грузом начнет двигаться вверх. Очевидно, $F_{\max} = UBl/R$ — максимально возможный вес, который может сдвинуть подъемник. Скорость груза растет, но со временем рост скорости замедляется, так как из-за ЭДС индукции сила тока уменьшается. В установившемся режиме груз движется равномерно вверх с постоянной скоростью

$$v_0 = \frac{1}{Bl} \left(U - \frac{FR}{Bl} \right).$$

В цепи протекает постоянный ток

$$I = \frac{1}{R} (U - Blv_0) = \frac{F}{Bl}.$$

Развиваемая подъемником механическая мощность

$$P_{\text{мех}} = -I\mathcal{E} = Fv_0 = \frac{F}{Bl} \left(U - \frac{FR}{Bl} \right).$$

Мощность, потребляемая от источника тока,

$$P = IU = \frac{FU}{Bl}.$$

Следовательно, коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{P_{\text{мех}}}{P} = 1 - \frac{IR}{U} = 1 - \frac{FR}{BIU}$$

Зависимость $P(F)$ и $P_{\text{мех}}(F)$ изображена на рис. 40.7 б. Максимальное значение $P_{\text{мех}}$, равное $U^2/4R$, достигается при $F = 1/2 F_{\text{мах}}$. При этом $\eta = 1/2$, а скорость подъемника $v_0 = U/2Bl$. При $F = F_{\text{мах}}$ мощность, развиваемая источником, достигает наибольшего значения $P_{\text{мах}} = U^2/R$, а механическая мощность и скорость груза обращаются в нуль.

В режиме холостого хода груз отсутствует ($F=0$). Проводник движется вверх с максимальной скоростью $v_0 = U/Bl$. Полный ток в цепи равен нулю, так как ЭДС индукции $\mathcal{E}$ становится равной $-U$. Мощность, потребляемая от источника, равна нулю.

При $F > F_{\text{мах}}$ груз будет опускаться, а подъемник будет работать как генератор тока.

6. Самоиндукция и взаимная индукция. Рассмотрим замкнутый контур, в котором с помощью батареи создается ток, силу которого можно менять (перемещая, например, движок реостата). При изменении тока магнитное поле, создаваемое этим током, также является переменным. Поэтому поток магнитной индукции через площадь, ограниченную контуром самого тока, меняется со временем и, следовательно, в нем возникает ЭДС индукции. Это явление, открытое Д. Генри в 1837 г., называется *самоиндукцией*. Приращение потока пропорционально приращению тока ΔI и зависит от геометрической формы контура и среды, в которой он расположен. Эта зависимость выражается через *коэффициент самоиндукции*, или *индуктивность* L . Если коэффициент самоиндукции L не меняется (т. е. форма контура и свойства среды не зависят от времени), то $\Delta \Phi = L \Delta I$, а ЭДС самоиндукции

$$\mathcal{E} = - \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} = -L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (40.10)$$

Знак минус показывает, что электродвижущая сила всегда направлена таким образом, чтобы препятствовать изменению тока.

В СИ за единицу индуктивности принимается индуктивность такого контура, собственный магнитный поток которого изменяется на 1 Вб при изменении силы тока на 1 А. Эта единица имеет название генри (Гн),

$$1 \text{ Гн} = \frac{1 \text{ Вб}}{1 \text{ А}} = \frac{\text{Тл} \cdot \text{м}^2}{\text{А}} = \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{А}^2}.$$

Согласно (40.10) при индуктивности контура в 1 Гн изменение тока на 1 А в 1 с возбуждает в нем ЭДС самоиндукции на 1 В. Очевидно, магнитная постоянная может быть записана в виде $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}$.

В замкнутой цепи, содержащей источник тока, катушку индуктивности и резистор, закон Ома имеет вид

$$IR = \mathcal{E} - L \frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad (40.11)$$

Вернемся к схеме рис. 40.1. Мы уже знаем, что при изменении силы тока в одном из контуров изменяющийся поток магнитной индукции порождает ЭДС индукции в соседнем контуре. Это явление получило название *взаимоиндукции*.

7. Энергия магнитного поля. Возьмем цепь, содержащую источник постоянного тока $\mathcal{E}$, резистор R и катушку индуктивности. Вначале цепь разомкнута, сила тока $I=0$. После замыкания цепи сила тока возрастает до значения $I_0 = \mathcal{E}/R$. Исследуем энергетические превращения в процессе роста силы тока. Умножим обе части (40.11) на I и представим полученное уравнение в виде

$$I\mathcal{E}\Delta t = I^2 R \Delta t + LI\Delta I.$$

Поскольку заряд, прошедший по цепи за время $(t, t+\Delta t)$, равен $\Delta q = I\Delta t$, то полученное соотношение выражает закон сохранения энергии:

$$\mathcal{E}\Delta q = I^2 R \Delta t + \Delta W, \quad (40.12)$$

$$W = \frac{1}{2} LI^2. \quad (40.13)$$

Действительно, $\mathcal{E}\Delta q$ — работа, совершенная источником тока, $I^2 R \Delta t$ — энергия, рассеянная в резисторе. А какой смысл имеет функция W ? Напомним, что магнитное поле, сосредоточенное в катушке, — одна из форм материи, обладающей энергией. Поэтому второе слагаемое в правой части (40.12) является приращением энергии магнитного поля, а функция $W(t)$ — энергией магнитного поля, создаваемого током в момент времени t . После установления постоянного тока силой I_0 функция $W(t)$ достигает наибольшего значения $\frac{1}{2} LI_0^2$.

§ 41. ПЕРЕМЕННЫЕ ТОКИ В ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЯХ

До сих пор мы имели дело с постоянными токами. Теперь займемся анализом цепей, содержащих в общем случае резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности, к которым подключен источник переменного напряжения — генератор напряжения. Напряжение на каждом элементе зависит от времени. Переменное напряжение создает переменное электрическое поле, распространяющееся в проводнике, и как следствие этого возникает переменный ток. Ясно, что изменение тока в различных участках цепи происходит не мгновенно, а по истечении времени порядка

l/v , где l — линейные размеры цепи, v — скорость распространения переменного электрического поля. Мы будем предполагать, что величина l/v много меньше времени T , в течение которого заметно изменяется напряжение: $l/v \ll T$. Если напряжение является периодической функцией с периодом T , то это условие можно записать в виде $l \ll \lambda$, где $\lambda = vT$ — длина электромагнитной волны, распространяющейся вдоль провода. В этом случае напряжение и ток в момент времени t одинаковы в любой точке цепи. Например, при $v = 5 \cdot 10^7$ м/с, $\nu = 50$ Гц длина волны $\lambda = 1000$ км. Поэтому для линии электропередачи длиной ~ 1000 км приходится учитывать волновой характер распространения напряжения и тока.

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно соединенных катушки индуктивности, емкости и резистора, к концам которой приложено переменное напряжение $\mathcal{E}(t)$ (рис. 41.1). Наша зада-

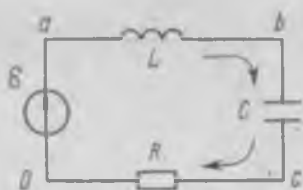


Рис. 41.1

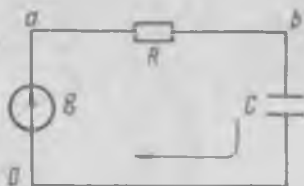


Рис. 41.2

ча — найти зависимость тока $I(t)$ от времени. Выберем положительное направление тока (указанное стрелками на рис. 41.1) и введем функцию $q(t)$. Ее значение в момент t равно заряду, прошедшему за время t в положительном направлении через произвольное сечение проводника. Сила тока определяется соотношением $I(t) = q'$. Пусть φ_n — потенциал точки n . Определим напряжения на каждом элементе схемы равенствами

$$\mathcal{E} = \varphi_a - \varphi_o, \quad U_L = \varphi_a - \varphi_b, \quad U_C = \varphi_b - \varphi_c, \quad U_R = \varphi_c - \varphi_o. \quad (41.1)$$

В теории цепей обычно используют два допущения. Во-первых, предполагают, что заряды, распределенные по поверхности проводников, малы по сравнению с зарядом $q(t)$, сосредоточенным у места разрыва на обкладках конденсатора. Поэтому значение функции $q(t)$ совпадает с зарядом верхней обкладки конденсатора в момент времени t : $q(t) = CU_C(t)$, а приращение $\Delta q = C\Delta U_C$. Следовательно, при выбранном положительном направлении

$$I(t) = q' = CU_C'. \quad (41.2)$$

Если $I > 0$, то положительный заряд перетекает от нижней обкладки конденсатора к верхней. (В действительности электроны пе-

ретекают в обратном направлении.) При $I < 0$ положительный заряд верхней обкладки убывает.

Во-вторых, предполагают, что можно не учитывать энергию магнитного поля, создаваемого током во всех элементах цепи, исключая катушку индуктивности. Таким образом, в рассматриваемом приближении *электрическое поле сосредоточено в емкости, а магнитное — в индуктивности*. Энергия электромагнитного поля в соответствии с (32.6) и (40.13) равна

$$W = \frac{1}{2} LI^2 + \frac{1}{2C} q^2. \quad (41.3)$$

Получим теперь уравнение, которому подчиняется функция $I(t)$, исходя из закона изменения энергии электромагнитного поля.

Уравнение электрической цепи. В результате действия внешнего источника в цепи возникают ток и электромагнитное поле. Работа $I \mathcal{E} \Delta t$, совершаемая источником над движущимися зарядами, переходит в тепло и затрачивается на изменение энергии электромагнитного поля. Следовательно, закон сохранения энергии $I \mathcal{E} \Delta t = I^2 R \Delta t + \Delta W$ можно представить в виде

$$W' = I \mathcal{E} - I^2 R, \quad (41.4)$$

где W' — производная по времени функции (41.3). Здесь и далее внутреннее сопротивление генератора $r=0$. Подставляя (41.3) в (41.4), получим соотношение

$$LI' + \frac{q}{C} + IR = \mathcal{E}(t), \quad (41.5)$$

которое является вторым законом Кирхгофа для цепи, изображенной на рис. 41.1. Действительно, учитывая (41.1), запишем (41.5) в виде

$$U_L + U_C + U_R = \mathcal{E}(t), \quad (41.6)$$

$$U_L = LI', \quad U_C = q/C, \quad U_R = IR. \quad (41.7)$$

Поскольку $I = q'$, $I' = q''$, то функция $q(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Lq'' + Rq' + \frac{1}{C}q = \mathcal{E}(t). \quad (41.8)$$

RC-цепь. Уравнение (41.8) для RC-цепи (рис. 41.2) имеет вид $q/C + IR = \mathcal{E}(t)$. Поскольку $q = CU_C$, учитывая (41.2), получим уравнение относительно U_C :

$$\tau U_C' + U_C = \mathcal{E}(t), \quad (41.9)$$

где $\tau = RC$ — постоянная величина, имеющая размерность времени. Например, при $R = 10$ кОм, $C = 10$ мкФ $\tau = 10^{-1}$ с; при $R = 10$ кОм, $C = 100$ пФ $\tau = 10^{-6}$ с.

Рассмотрим теперь процессы в некоторых схемах, применяемых в радиотехнике.

1. Ток, возбуждаемый перепадом напряжения. Пусть напряжение, создаваемое генератором,

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_1, & t \leq 0, \\ \mathcal{E}_2, & t > 0. \end{cases} \quad (41.10)$$

Эта зависимость реализована в схеме, изображенной на рис. 41.3. При $t < 0$ ключ находится в положении K_1 , а в момент времени $t=0$ его переводят в положение K_2 . Напряжение на конденсаторе $U_C(t)$ при $t \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$\tau U_C' + U_C = \mathcal{E}_2$$

с начальным условием $U_C(0) = \mathcal{E}_1$. Непосредственной проверкой можно убедиться, что решение этого уравнения

$$U_C(t) = \mathcal{E}_2 - (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)e^{-t/\tau}. \quad (41.11)$$

Здесь e^x — показательная функция (экспонента).

Напряжение на резисторе

$$U_R = IR = \tau U_C' = (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1)e^{-t/\tau}. \quad (41.12)$$

Проведем анализ двух частных случаев.

А. Разряд конденсатора. Пусть $\mathcal{E}_2 = 0$. Этому условию соответствует схема, в которой входные клеммы соединены проводником (рис. 41.4а). При $t=0$ заряд конденсатора $C\mathcal{E}_1$. Из (41.11), (41.12) находим

$$U_C(t) = \mathcal{E}_1 e^{-t/\tau}, \quad U_R(t) = -\mathcal{E}_1 e^{-t/\tau}.$$

Графики функций U_C и U_R изображены на рис. 41.4б.

Согласно (41.4) мощность, рассеиваемая на сопротивлении, $P = I^2 R$. Энергия, перешедшая в тепло в результате разряда конденсатора,

$$Q = \int_0^{\infty} P(t) dt = \frac{\mathcal{E}_1^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{C\mathcal{E}_1^2}{2}$$

равна, очевидно, энергии, запасенной в конденсаторе.

В. Переходный процесс при включении конденсатора в цепь постоянного источника ЭДС. Предположим, теперь, что $\mathcal{E}_1 = 0$, а конденсатор не заряжен. В момент времени $t=0$ ключ переводят

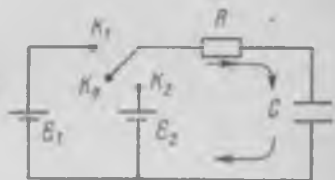


Рис. 41.3

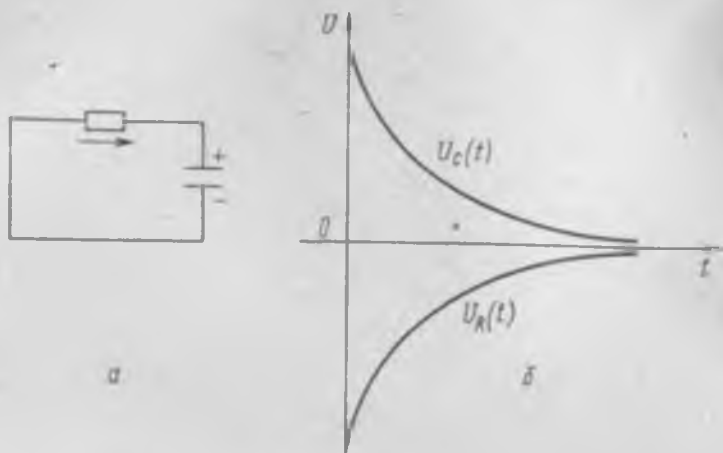


Рис. 41.4

из положения K_0 в положение K_2 (рис. 41.3). Из (41.11), (41.12) находим

$$U_C(t) = \mathcal{E}_2(1 - e^{-t/\tau}), \quad U_R(t) = \mathcal{E}_2 e^{-t/\tau}.$$

Очевидно, при $t \gg \tau$ $U_R \rightarrow 0$, $U_C \rightarrow \mathcal{E}_2$.

ЗАДАЧА 41.1. Найти количество тепла, выделившегося на каждом резисторе после переключения ключа из положения K_1 в положение K_2 (рис. 41.5).

Решение. Из закона сохранения энергии следует, что

$$\frac{1}{2} C \mathcal{E}_0^2 = Q_1 + Q_2.$$

Далее, поскольку $Q_n \sim R_n$, то $Q_1/Q_2 = R_1/R_2$. Из этих уравнений находим

$$Q_1 = \frac{1}{2} C \mathcal{E}_0^2 \frac{R_1}{R_1 + R_2}, \quad Q_2 = \frac{1}{2} C \mathcal{E}_0^2 \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

2. Прохождение импульса напряжения через RC-цепь. Пусть

$$\mathcal{E}(t) = \begin{cases} s(t), & 0 \leq t \leq t_0, \\ 0, & t < 0, t > t_0, \end{cases}$$

где $s(t)$ — непрерывная монотонная функция. В начальный момент времени $U_C(0) = 0$. Ограничимся далее приближенным решением уравнения (41.9). С этой целью рассмотрим два важных случая.

А. $\tau \gg t_0$. В этом случае конденсатор заряжается настолько медленно, что за интервал времени t_0 напряжение U_C изменится

на малую величину $|U_C| \ll \tau |U_C'|$. Следовательно, из (41.9) находим

$$U_C \simeq \frac{1}{\tau} \int_0^t s(t) dt, \quad 0 \leq t < t_0.$$

Напряжение на резисторе

$$U_R(t) \simeq \mathcal{E} - U_C(t) = s(t) - \frac{1}{\tau} \int_0^t s(t) dt, \quad 0 \leq t < t_0,$$

практически совпадает с напряжением, создаваемым генератором. При $t=t_0$ напряжения на конденсаторе и резисторе равны $U_C(t_0)=U_{C0}$, $U_R(t_0)=U_{R0}$. Поскольку при $t>t_0$ напряжение на генераторе равно нулю, то зависимость $U_C(t)$, $U_R(t)$ при разрядке конденсатора определяется функциями, аналогичными (41.11), (41.12):

$$U_C(t) = U_{C0} e^{-(t-t_0)/\tau}, \quad U_R(t) = -U_{C0} e^{-(t-t_0)/\tau}, \quad t > t_0.$$

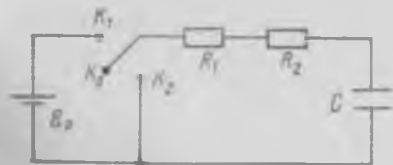


Рис. 41.5

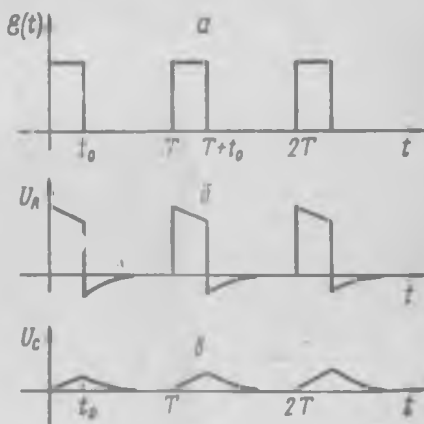


Рис. 41.6

Благодаря большой величине τ функции $U_C(t)$, $U_R(t)$ медленно приближаются к нулевым значениям.

В. $\tau \ll t_0$. В этом случае, наоборот, напряжение на резисторе изменяется на малую величину $\tau |U_C'| \ll |U_C|$. Следовательно, $U_C \simeq s(t)$,

$$U_R(t) = \tau U_C' = \tau s'.$$

Из (41.9) следует уточненное выражение для $U_C(t) = \mathcal{E} - U_R(t)$:

$$U_C(t) \simeq s(t) - \tau s', \quad 0 \leq t < t_0.$$

При $t > t_0$ уравнение (41.9) имеет решение

$$U_C(t) = U_{C0} e^{-(t-t_0)/\tau}, \quad U_R(t) = -U_{C0} e^{-(t-t_0)/\tau}.$$

Благодаря малой величине τ конденсатор быстро разряжается.

Рассмотренная здесь RC -цепь используется для преобразования электрических импульсов: при $\tau \gg t_0$ напряжение на конденсаторе реализует процесс интегрирования функции $s(t)$, а при $\tau \ll t_0$ напряжение на резисторе пропорционально ее производной.

ПРИМЕР 41.2. Генератор на входе RC -цепи создает последовательность положительных прямоугольных импульсов напряжения, изображенных на рис. 41.6а. Найдем напряжения $U_C(t)$, $U_R(t)$, если $\tau \gg t_0$, T (T — период последовательности импульсов, t_0 — длительность импульса).

Используя полученное выше решение, находим

$$U_R(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 \left(1 - \frac{t}{\tau}\right), & 0 \leq t \leq t_0, \\ -\mathcal{E}_0 \frac{t_0}{\tau} e^{-(t-t_0)/\tau}, & t_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Напряжение на конденсаторе

$$U_C(t) = \begin{cases} \mathcal{E}_0 \frac{t}{\tau}, & 0 \leq t \leq t_0, \\ \mathcal{E}_0 \frac{t_0}{\tau} e^{-(t-t_0)/\tau}, & t_0 \leq t \leq T. \end{cases}$$

Если $\tau \gg (T - t_0)$ $U_C(T) \approx 0$. В этом случае напряжения на резисторе и конденсаторе повторяются с периодом, равным T (рис. 41.6б, в). Если же $\tau \sim (T - t_0)$, то паузы между импульсами недостаточно для полного разряда конденсатора. В результате к началу каждого последующего импульса на конденсаторе останется заряд, который будет нарастать с течением времени. При $t \gg \tau$ напряжение на конденсаторе будет периодически изменяться относительно среднего уровня $U_{C0} = \mathcal{E}_0(t_0/T)$ — постоянной составляющей входного напряжения $U(t)$. При этом напряжение на резисторе смещается на величину $-U_{C0}$, а среднее значение $U_R(t)$ становится равным нулю. Поэтому в многокаскадных импульсных устройствах переходная RC -цепь обеспечивает разделение каскадов по постоянной составляющей напряжения.

Выпрямление переменного напряжения. Генератор напряжения создает разность потенциалов $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, $\omega = 2\pi\nu$, $\nu = 50$ Гц. Среднее значение этой функции равно нулю. Назначение выпрямляющего устройства состоит в том, чтобы получить на выходе напряжение, содержащее постоянную составляющую. С этой целью необходимо использовать такой элемент, который дает на выходе напряжение одной полярности независимо от значения функции $\mathcal{E}(t)$. Этим свойством обладает диод. Соберем схему, показанную на рис. 41.7а, где $R = 25$ кОм. Стрелка обозначает положительное направление тока.

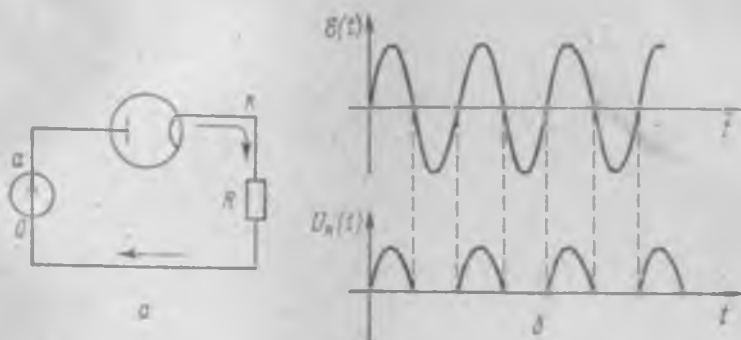


Рис. 41.7

Пусть φ_n — потенциал точки n . Наша задача — найти ток в цепи, напряжения на резисторе $U_R = \varphi_k - \varphi_0$ и диоде $V = \varphi_a - \varphi_k$. Следовательно,

$$V + U_R = \varepsilon(t).$$

Поскольку $U_R = IR$, $I = f(V)$, где $f(V)$ — вольт-амперная характеристика диода, получим уравнение

$$U_R/R = f(\varepsilon - U_R). \quad (41.13)$$

При больших амплитудах напряжения ε_0 вольт-амперную характеристику можно изобразить двумя прямыми:

$$f(V) = \begin{cases} 0, & V < 0, \\ V/R_0, & V \geq 0, \end{cases} \quad (41.14)$$

где $R_0 \approx 100-300$ Ом. Предположим, что диод пропускает ток, т. е. $V = \varepsilon - U_R > 0$. Тогда из (41.13), (41.14) получим

$$U_R(t) = \frac{R}{R + R_0} \varepsilon(t), \quad V(t) = \frac{R_0}{R + R_0} \varepsilon(t) \geq 0.$$

Поскольку в реальных схемах $R_0 \ll R$, то напряжение на резисторе $U_R \approx \varepsilon(t)$ при $\varepsilon(t) > 0$. Если диод заперт, т. е. $V = \varepsilon - U_R < 0$, то $I = 0$, $U_R = 0$ при $\varepsilon(t) < 0$ (рис. 41.7 б). Постоянная составляющая напряжения на выходе

$$U_{R0} = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} \varepsilon_0 \sin \omega t \, dt = \frac{\varepsilon_0}{\pi} \approx 0,32 \varepsilon_0$$

равна примерно 1/3 амплитудного значения. Таким образом, переменная составляющая выпрямленного напряжения весьма значительна.

Простейший способ уменьшения пульсаций напряжения состоит в присоединении конденсатора достаточно большой емкости параллельно нагрузке. Рассмотрим процессы в схеме, показанной на рис. 41.8 а ($C=10$ мкФ, $R=25$ кОм). Стрелками отмечены по-

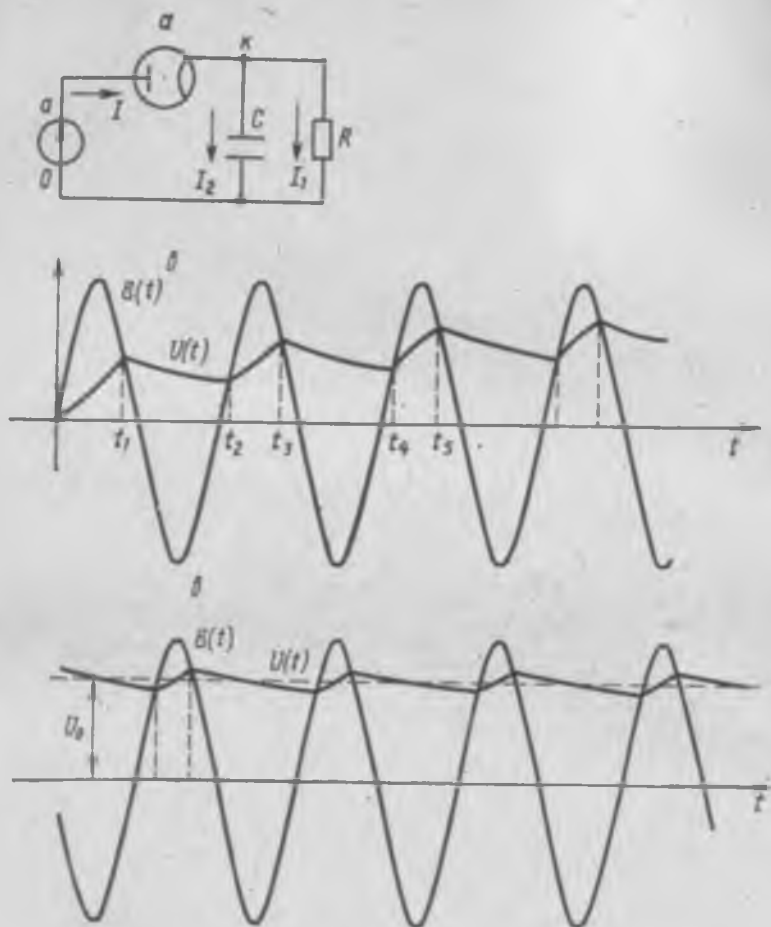


Рис. 41.8

ложительные направления токов I , I_1 , I_2 . Поскольку напряжения на резисторе $U_R = \varphi_K - \varphi_0$ и конденсаторе $U_C = \varphi_K - \varphi_0$ одинаковы, то вместо (41.13) получим уравнение

$$V + U = \mathcal{E}(t), \quad (41.15)$$

где $U = U_R = U_C$. Условие непрерывности токов приводит к соотно-

шению $I = I_1 + I_2$. Учитывая, что $U = I_1 R$, $I_2 = CU'$, $I = f(V)$, представим его в виде уравнения относительно функции U

$$CU' + \frac{1}{R}U = f(\mathcal{E}(t) - U) \quad (41.16)$$

с начальным условием $U(0) = 0$.

Переходный режим. Поскольку конденсатор не заряжен, то сразу же после включения ЭДС $V > 0$ — диод начнет пропускать ток. Учитывая (41.14), получим из (41.16) уравнение, описывающее заряд конденсатора,

$$\tau_n U' + U = \frac{R_n}{R_0} \mathcal{E}_0 \sin \omega t,$$

$$\tau_n = CR_n, \quad R_n = \frac{RR_0}{R + R_0}.$$

Здесь τ_n — постоянная времени цепи. При $R_0 = 200$ Ом, $R = 25$ кОм постоянная цепи $\tau_n \approx CR_n = 2 \cdot 10^{-3}$ с в десять раз меньше периода $T = 2 \cdot 10^{-2}$ с изменения $\mathcal{E}(t)$. Если бы выполнялось неравенство $\omega \tau_n \ll 1$, то в первом приближении слагаемым $\tau_n U'$ можно пренебречь. Тогда напряжение на RC -цепи $U(t) \approx \mathcal{E}_0 \sin \omega t$, а напряжение на диоде $V(t) \approx \tau_n \omega \mathcal{E}_0 \cos \omega t$. Конденсатор зарядился бы за четверть периода. Начиная с момента $t_1 = 1/4T$ $V(t) < 0$ — диод был бы заперт и началась бы разрядка конденсатора через резистор R .

В нашем случае функция $\mathcal{E}(t)$ изменяется не столь быстро. По мере зарядки конденсатора $U(t)$ растет в интервале $0 < t < t_1$. При $t = t_1$ $V(t_1) = 0$ — диод перестает пропускать ток. Далее конденсатор начинает разряжаться (интервал $t_1 < t < t_2$ на рис. 41.8б), причем ток разряда проходит через резистор в положительном направлении. Напряжение на RC -цепи изменяется в соответствии с (41.11):

$$U(t) = \mathcal{E}(t_1) e^{-(t-t_1)/\tau_p}, \quad \tau_p = CR, \quad t_1 \leq t < t_2.$$

Постоянная цепи разряда $\tau_p = 0,25$ с, т. е. в 12,5 раза больше периода $T = 0,02$ с. Поэтому $U(t)$ медленно убывает до значения $U_2 = \mathcal{E}(t_2)$. Начиная с момента t_2 $V(t) > 0$ — диод снова пропускает ток. Однако теперь начальное напряжение на RC -цепи равно $\mathcal{E}(t_2)$. Поэтому в интервале (t_2, t_3) приращение напряжения ΔU меньше, чем величина $\mathcal{E}(t_1)$, тем не менее $U(t_3) > U(t_1)$. В момент $t = t_3$ диод запирается. В интервале (t_3, t_4) напряжение падает до значения $U(t_4) > U(t_2)$. В момент $t = t_4$ диод снова открывается и происходит зарядка, причем $U(t_5) - U(t_4) < U(t_3) - U(t_2)$, $U(t_5) > U(t_3)$, т. е. рост напряжения замедляется. Далее описанные процессы повторяются. По истечении времени, равного нескольким десяткам периодов, величины $U(t_{2n-1})$ и $U(t_{2n})$ достигнут практи-

чески постоянных значений. Тогда напряжение будет пульсировать около среднего значения U_0 с частотой ω . Из рис. 41.8 в видно, что постоянная составляющая напряжения на выходе RC -цепи оказывается существенно большей, чем в схеме без конденсатора. Рассмотренные схемы выпрямителей называются *однополупериодными*, так как за один период в цепи нагрузки протекает один импульс тока.

Двухполупериодный выпрямитель. Выпрямитель содержит четыре диода (рис. 41.9). В первый полупериод ($0 < t < T/2$) разность потенциалов $\varphi_a - \varphi_0 = \mathcal{E}_0 \sin \omega t > 0$. Поэтому ток проходит по

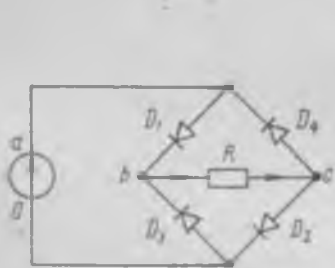


Рис. 41.9

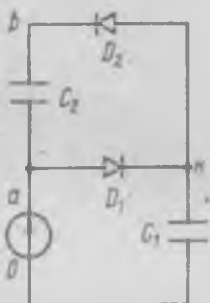


Рис. 41.10

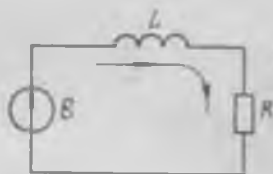


Рис. 41.11

цепи $abco$. Диоды D_3 и D_4 в это время ток не пропускают, так как $\varphi_0 - \varphi_a < 0$. В следующий полупериод ($T/2 < t < T$), наоборот, $\varphi_0 - \varphi_a = -\mathcal{E}_0 \sin \omega t > 0$. Ток течет по цепи $obca$ через диоды D_3 и D_4 . Направления токов, текущих через резистор в течение обоих полупериодов, совпадают.

Умножение напряжения. Если в схеме на рис. 41.8 а сопротивление резистора велико (или он отсутствует), то в установившемся режиме напряжение на конденсаторе C достигнет наибольшей величины $U_C = \mathcal{E}_0$ и диод будет заперт. В этом случае, соответствующем режиму «холостого хода», обратное напряжение на диоде

$$\varphi_k - \varphi_a = \varphi_k - \varphi_0 + \varphi_0 - \varphi_a = U_C - \mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(1 - \sin \omega t)$$

положительно и изменяется с удвоенной амплитудой напряжения генератора. Нельзя ли получить постоянное напряжение величины $2\mathcal{E}_0$? С этой целью присоединим к схеме еще один «этаж», содержащий конденсатор C_2 и диод (рис. 41.10). Поскольку к этой цепи приложено переменное напряжение с амплитудой $2\mathcal{E}_0$, то в установившемся режиме напряжение на конденсаторе $\varphi_b - \varphi_a$ достигнет постоянного значения $2\mathcal{E}_0$. Если к точкам a, b присоединить нагрузку — резистор, то напряжение на выходе будет пульсировать с частотой переменного напряжения. Заметим, что те-

перь обратное напряжение на диоде D_2 , равное $\Phi_b - \Phi_k = \Phi_b - \Phi_a + \Phi_a - \Phi_k = \mathcal{E}_0(1 + \sin \omega t)$, изменяется с амплитудой $2\mathcal{E}_0$. Присоединив еще один «аналогичный этаж», получим источник постоянного напряжения величиной $3\mathcal{E}_0$. Можно осуществить выпрямительные схемы с умножением напряжения на любое целое число.

Переходной процесс в RL -цепи. На рис. 41.11 изображена RL -цепь, $R=100$ Ом, $L=50$ Гн. Стрелкой указано положительное направление тока. Зависимость тока от времени определяется уравнением (41.5):

$$\tau I' + I = \frac{1}{R} \mathcal{E}(t), \quad \tau = \frac{L}{R}, \quad (41.17)$$

аналогичным (41.9). Пусть напряжение генератора изменилось скачком в соответствии с (41.10). Тогда решением (41.17) является функция

$$I(t) = \frac{1}{R} [\mathcal{E}_2 - (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) e^{-t/\tau}]. \quad (41.18)$$

Проведем анализ двух возможных случаев.

А. Включение постоянного источника ЭДС. Полагая $\mathcal{E}_1=0$, получим

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}_2}{R} (1 - e^{-t/\tau}).$$

При $t=0$ $I(0)=0$. Нарастание тока до постоянного значения $\mathcal{E}_2/R$ происходит с характерным временем $\tau=0,5$ с. При $t=4\tau=2$ с $I(t)=(1-0,018)\mathcal{E}_2/R$, при $t \gg \tau$ $I \simeq \mathcal{E}_2/R$. Напряжение на катушке

$$U_L(t) = LI' = \mathcal{E}_2 e^{-t/\tau}.$$

скачком изменяется до значения $\mathcal{E}_2$, а затем убывает, стремясь к нулю.

В. Отключение источника ЭДС. Пусть $\mathcal{E}_2=0$, т. е. при $t < 0$ в цепи протекает постоянный ток $I_1 = \mathcal{E}_1/R$. Из (41.18) находим

$$I(t) = (\mathcal{E}_1/R) e^{-t/\tau}.$$

Уменьшение тока происходит с тем же характерным временем τ . Напряжение на резисторе $U_R(t) = I(t)R$ в начальный момент времени не изменяется, а напряжение на катушке

$$U_L(t) = LI' = -\mathcal{E}_1 e^{-t/\tau}$$

скачком поднимается до $-\mathcal{E}_1$. При $t \gg \tau$ напряжения на резисторе и катушке равны нулю.

§ 42. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В природе существует множество различных видов движения известных нам форм материи: частиц и полей. Условно можно выделить два класса движений в зависимости от того, остается ли физическая система вблизи некоторого устойчивого состояния или она никогда не вернется в исходное положение. Здесь мы рассмотрим периодическое движение механических систем с одной степенью свободы, т. е. систем, положение которых в пространстве определяется заданием одной функции $x=x(t)$. Все периодические функции $f(t)$ с периодом T удовлетворяют условию $f(t+T)=f(t)$ для любого момента времени в интервале $-\infty < t < \infty$. Очевидно, последнее условие является очень сильным, поскольку для реальных систем оно никогда не выполняется. Поэтому колебаниями называется движение системы, удовлетворяющее условию $x(t+T)=x(t)$ для всех t в интервале $t-t_0 \gg T$, где t_0 — начальный момент времени. Таким образом, некоторое значение $x(t_0)$ будет повторяться с периодом T не на всей прямой t , а на достаточно большом интервале времени.

1. Гармонические колебания. Простейшим видом колебаний является гармоническое колебание — такое движение систем, при котором координата x изменяется по гармоническому закону

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Коэффициент A называется *амплитудой* колебаний, ω — *круговой частотой*, $\Phi = \omega t + \alpha$ — *фазой* колебаний, α — начальной фазой. Так как наибольшее значение синуса равно единице, то максимальное значение координаты равно A . Функция $x(t)$ изменяется в пределах $|x(t)| \leq A$. Следуя определению периода: $x(t+T)=x(t)$ и подставляя $x(t)$, $x(t+T)$, находим $T=2\pi/\omega$. Частота колебаний связана с периодом соотношением $\nu=1/T$. Единица измерения частоты в СИ — герц (Гц), $1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}$.

2. Кинематика гармонических колебаний. Прежде чем перейти к изучению динамики колебательных систем, проведем математический анализ гармонического колебания. Для этого рассмотрим равномерное движение шарика по окружности радиусом A с уг-

ловой скоростью ω (рис. 42.1). В начальный момент времени $t=0$ радиус-вектор шарика образует угол $\Phi(0)=\alpha$ с горизонтальным направлением. За время t угол Φ изменится на величину

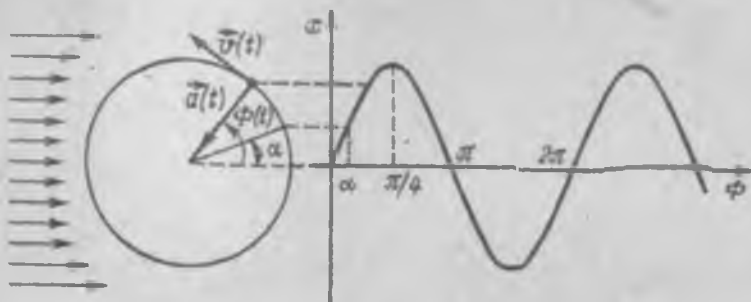


Рис. 42.1

$2\pi t/T = \omega t$ и станет равным $\Phi(t) = \omega t + \alpha$. В этот момент времени проекция радиус-вектора шарика на ось x равна

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha). \quad (42.1)$$

Из рис. 42.1 видно, что проекция $x(t)$ совпадает с положением тени шарика при освещении параллельным пучком света. Согласно (3.1) проекция скорости шарика на ось x равна

$$v(t) = x'(t) = A\omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (42.2)$$

Проекция ускорения шарика на ось x определяется производной функции $v(t)$ (см. 3.5):

$$a(t) = v'(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t + \alpha). \quad (42.3)$$

Можно убедиться, что $v(t)$ и $a(t)$ являются проекциями векторов скорости ($|\vec{v}| = A\omega$) и ускорения ($|\vec{a}| = A\omega^2$) на ось x . Заметим, что в точках максимального отклонения от положения равновесия скорость равна нулю, а ускорение достигает наибольшей величины.

Рисунок 42.1 позволяет пояснить понятие фазы колебаний. Если известна функция (42.1), то гармоническому колебанию можно поставить в соответствие вращение по окружности; значениям $x(t)$ соответствуют определенные значения угла $\Phi(t)$ между радиус-вектором шарика и горизонталью. Именно в этом смысле угол $\Phi(t)$ называют фазой колебаний. За одно полное колебание (один цикл) радиус-вектор шарика повернется на 2π радиан. За четверть периода фаза изменится на $\pi/2$ радиан, за половину периода — на π радиан и т. д.

Из (42.1) и (42.3) следует характерная для гармонических колебаний связь между координатой и ускорением

$$a(t) = -\omega^2 x(t). \quad (42.4)$$

Поскольку $a = v' = x''$, то функция (42.1) является решением дифференциального уравнения

$$x'' + \omega^2 x = 0. \quad (42.5)$$

3. Свободные колебания. Мы знаем, что основой динамики является второй закон Ньютона: по заданным силам можно определить зависимость координат тел от времени. Например, если сумма сил равна нулю, то тело покоится или движется прямолинейно с постоянной скоростью. Под действием постоянной силы тело движется с постоянным ускорением, а зависимость координат от времени определяется квадратным трехчленом.

Рассмотрим замкнутую систему: шарик, подвешенный на нити, и Земля; шарик и массивное тело, соединенные пружиной, и т. д. Предположим, что существуют одно или несколько положений устойчивого равновесия — при отклонении системы от этого положения возникают силы, стремящиеся вернуть ее обратно. Пусть x — координата, характеризующая отклонение шарика от положения равновесия. Если из второго закона Ньютона мы получим уравнение

$$ma = -kx, \quad (42.6)$$

где k — постоянный коэффициент, то координата x будет изменяться по гармоническому закону. Действительно, поскольку m и k — постоянные коэффициенты, то уравнения (42.4) и (42.6) совпадают при $\omega^2 = k/m$. Следовательно, частота и период колебаний соответственно равны

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (42.7)$$

Таким образом, координата и скорость шарика имеют вид

$$x(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad v(t) = A \omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (42.8)$$

Согласно (42.7) частота ω определяется свойствами замкнутой механической системы. В этом случае колебания системы называют *свободными*, а частоту — *собственной частотой*.

Начальная фаза α и амплитуда A определяются обстоятельствами, при которых началось движение, т. е. начальными условиями. Пусть в начальный момент $t=0$ тело сместили из положения равновесия на величину x_0 и сообщили в этой точке скорость v_0 . Вычислим α и A . Выражения (42.8) справедливы для всех t . Ес-

ли в них положить $t=0$, то мы должны получить слева x_0 и v_0 . Следовательно,

$$x_0 = A \sin \alpha, \quad v_0 = A \omega \cos \alpha.$$

Из этих уравнений находим амплитуду и начальную фазу через начальное положение и скорость тела:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2}, \quad (42.9a)$$

$$\sin \alpha = \frac{x_0}{A}, \quad \cos \alpha = \frac{v_0}{A\omega}. \quad (42.9b)$$

Заметим, что решение $x(t)$ можно представить в виде

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + x_0 \cos \omega t.$$

4. Масса на пружине. Простейшей механической системой, совершающей гармонические колебания, является шарик массой m , который взаимодействует с массивным телом при помощи пружины. Пусть k — жесткость пружины, l_0 — ее длина в ненапряженном состоянии.

Рассмотрим вначале движение шарика по горизонтальной гладкой плоскости рис. 42.2 а. Смещением массивного тела можно пре-

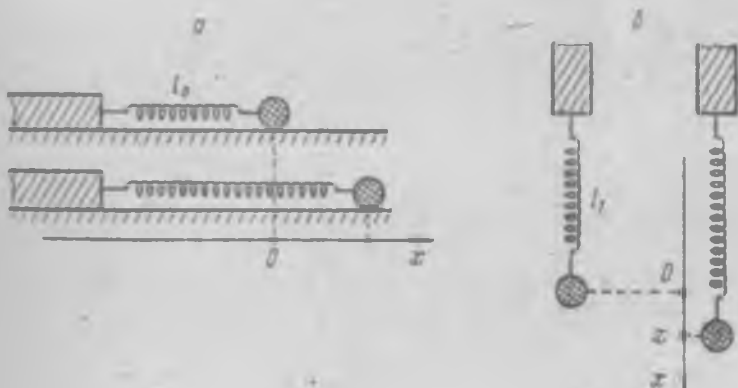


Рис. 42.2

небрежь. В положении равновесия сила, действующая на шарик, равна нулю. Введем систему координат x с началом в положении равновесия шарика. Если шарик находится в точке с координатой x , то длина пружины $l = l_0 + x$, а сила, действующая на него, равна $-k(l - l_0) = -kx$ (см. (12.7)). Из второго закона Ньютона та-

— $-kx$ находим $\omega = \sqrt{k/m}$. Значения постоянных α и A в решении (42.8) зависят от начальных условий. Если шарик сместили из положения равновесия на x_0 и отпустили, не сообщив начальной скорости, то, как следует из (42.9), $\alpha = \pi/2$, $A = x_0$, т. е.

$$x(t) = x_0 \cos \omega t, \quad v(t) = -x_0 \omega \sin \omega t.$$

Если же шарiku в положении равновесия $x=0$ сообщили начальную скорость v_0 , то

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad v(t) = v_0 \cos \omega t.$$

Обратимся теперь к вертикальным колебаниям шарика. Определим вначале положение равновесия. После того как подвесили шарик, пружина растянется до длины l_1 . В положении равновесия сумма сил упругости и тяжести равна нулю:

$$-k(l_1 - l_0) + mg = 0.$$

Введем систему координат x с началом в положении равновесия (рис. 42.2 б) на расстоянии

$$l_1 = l_0 + \frac{mg}{k} \quad (42.10)$$

от точки закрепления пружины. Если шарик находится в точке с координатой x , то из второго закона Ньютона

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{упр}} + m\vec{g}$$

следует

$$ma = -k(l_1 + x - l_0) + mg.$$

Учитывая (42.10), получим уже знакомое уравнение $ma = -kx$, описывающее гармонические колебания шарика по вертикали.

Энергетические превращения при гармонических колебаниях. Согласно (12.12), (12.10) потенциальная энергия шарика в момент времени t равна

$$\Pi = \frac{k}{2} (l_1 + x - l_0)^2 - mgx = \frac{k}{2} (l_1 - l_0)^2 + \frac{k}{2} A^2 \sin^2(\omega t + \alpha).$$

Используя выражение для скорости, найдем кинетическую энергию

$$K = \frac{mv^2}{2} = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \cos^2(\omega t + \alpha).$$

Кинетическая и потенциальная энергии положительны и изменяются с течением времени. Кинетическая энергия достигает макси-

му, когда грузик проходит положение равновесия $x=0$, и равна нулю, когда смещение максимально. Однако полная энергия $E=K+\Pi$ остается постоянной. В самом деле, так как $k=m\omega^2$, находим

$$E = \frac{k}{2} (l_x - l_0)^2 + \frac{1}{2} m\omega^2 A^2. \quad (42.11)$$

5. Влияние сопротивления среды. Мы рассмотрели колебания, не учитывая влияние среды. Такие колебания будут продолжаться неограниченно долго. Наличие среды в замкнутой системе приводит к затуханию колебаний — весь запас энергии в системе будет израсходован на работу против сил трения, и через определенный промежуток времени колебания совершенно прекратятся.

Для анализа влияния среды на поведение системы, движущейся с достаточно малой скоростью, можно в правую часть (42.6) ввести силы трения, пропорциональные скорости, $F_{тр} = -cv$, где c — постоянный коэффициент:

$$ma = -kx - cv.$$

ПРИМЕР 42.1. К тросу жесткости k подвешен контейнер массой M с грузом массой m . Опишем движение контейнера, после того как сбросили груз.

В начальном состоянии длина троса

$$l_1 = l_0 + (m + M) \frac{g}{k}.$$

Если груз снять, что длина троса в равновесном положении окажется равной

$$l_2 = l_0 + M \frac{g}{k}.$$

Поместим начало координат на расстоянии l_2 от точки подвеса троса и направим ось x вертикально вниз. Сбрасывание груза эквивалентно заданию для координаты контейнера начальных условий $x(0) = l_1 - l_2 = mg/k$, $v(0) = 0$. Следовательно,

$$x(t) = \frac{mg}{k} \cos \omega t, \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{M}}.$$

За половину периода $\pi\sqrt{M/k}$ контейнер сместится вверх относительно первоначального уровня на расстояние $2mg/k$.

ЗАДАЧА 42.2. Банка в виде цилиндра с утяжеленным дном плавает в воде. После толчка банка колеблется вблизи положения равновесия. Пренебрегая силами сопротивления и затратами энергии на образование волн, найти период колебаний банки. Масса банки m , площадь основания S .

Решение. На банку действуют сила тяжести и выталкивающая сила. В равновесии банка погружена до определенного уровня A , объем погруженной части — V_{π} . По условию плавания

$$mg - \rho g V_{\pi} = 0. \quad (1)$$

Введем ось x , направленную вертикально вниз с началом на поверхности спокойной воды. Если смещение уровня A равно x , то объем погруженной части станет равным $V_{\pi} + xS$. Запишем второй закон Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{F}_{\text{выт}}$$

в проекции на ось x :

$$ma = mg - \rho g (V_{\pi} + xS).$$

Учитывая (1), находим $ma = -\rho g Sx$. Поскольку результирующая сил, действующих на банку, выведенную из положения равновесия, $F = -kx$, $k = \rho g S$, то банка совершает гармонические колебания. Частота и период равны

$$\omega = \sqrt{\frac{\rho g S}{m}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}}.$$

ЗАДАЧА 42.3. Определить частоту гармонических колебаний заряда q в системе, рассмотренной в задаче 30.8.

Решение. Положение равновесия заряда q находится в точке $x=0$. Если начальные условия выбраны так, что $b \ll d$, то приближенно

$$a \simeq - \frac{4kQq}{md^2} x.$$

Следовательно, частота колебаний вблизи положения равновесия $\omega = 2(kQq/md^2)^{1/2}$.

6. Гармонические колебания математического маятника — шарика, подвешенного на нити и движущегося в вертикальной плоскости.

Положение шарика определяется длиной дуги s , отсчитываемой от положения равновесия (рис. 42.3). Угол φ отклонения нити длиной l от вертикали связан с длиной дуги s соотношением $s = l\varphi$ (величина угла выражена в радианах). На шарик действуют силы тяжести $m\vec{g}$ и упругости $\vec{T}$. Действие этих сил приводит к движению шарика по окружности радиуса l с ускорением $\vec{a}$

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}. \quad (42.12)$$

Поскольку направление и величина скорости шарика изменяются,

то ускорение $\vec{a}$ имеет две составляющие: центростремительную, равную v^2/l ($v=s'$), и касательную к окружности $a_{\kappa}=v'=s''$. Обратите внимание на то, что результирующая сил mg и $\vec{T}$ всегда направлена внутрь окружности. Проекция векторного соотношения (42.12) на прямую, проходящую через шарик и точку подвеса (уравнение (13.56)),

$$\frac{mv^2}{l} = T - mg \cos \varphi$$

вместе с законом сохранения полной энергии позволяет найти зависимость силы упругости от угла φ . Проекция (42.12) на прямую, касательную к окружности, дает уравнение $ms'' = -mg \sin \varphi$. Подставляя $\varphi=s/l$, получим

$$ms'' = -mg \sin \frac{s}{l}.$$

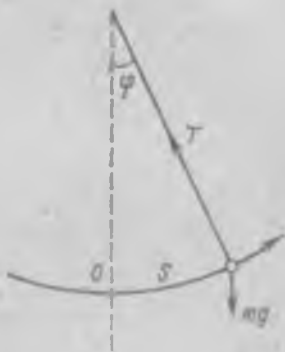


Рис. 42.3

Мы видим, что возвращающая сила $F = -mg \sin(s/l)$ отнюдь не пропорциональна смещению s и, следовательно, движение шарика не является гармоническим колебанием. Однако если начальные условия выбраны так, что угол $\varphi \ll 1$, то мы можем приближенно положить $\sin \varphi \approx \varphi$. В этом случае возвращающая сила становится равной $F = -ks$, где $k = g/l$,

$$ms'' = -\frac{mg}{l} s. \quad (42.13)$$

Это уравнение совпадает с (42.6). Следовательно,

$$s = A \sin(\omega t + \alpha).$$

Частота ω и период T соответственно равны

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (42.14)$$

Постоянные α и A определяются начальными условиями. Если $|\varphi| \leq 14^\circ$, то относительная погрешность приближения $\sin \varphi \approx \varphi$ не превосходит 1%.

Потенциальная энергия маятника в окрестности положения равновесия. Выберем нулевое значение потенциальной энергии в положении равновесия. Для малых углов отклонения $\sin \varphi \approx \varphi$, $\cos \varphi \approx 1 - \varphi^2/2$. Поэтому потенциальная энергия шарика

$$П = mgl(1 - \cos \varphi) \approx mgl \frac{\varphi^2}{2} = \frac{m\omega^2}{2} s^2 \quad (42.15)$$

имеет такой же вид, как и для тела, прикрепленного к пружине.

Маятник в неоднородном поле тяжести. Если поднять маятник на высоту h над поверхностью Земли, то частота и период изменятся. В этом случае в (42.14) следует заменить g на величину ускорения свободного падения $g(h)$ на высоте h . Эту величину можно определить, приравняв силу притяжения к $mg(h)$:

$$mg(h) = \gamma \frac{mM}{(R+h)^2} = mg \left(\frac{R}{R+h} \right)^2,$$

где R — радиус Земли. Производя в (42.14) замену

$$g \rightarrow g(h) = g \left(\frac{R}{R+h} \right)^2,$$

получим

$$T_h = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{R+h}{R} = T \left(1 + \frac{h}{R} \right). \quad (42.16)$$

Период маятника увеличится на величину $\Delta T = Th/R$. Например, полагая $T=1$ с, $h=10$ км, получим $\Delta T=0,0015$ с.

ЗАДАЧА 42.4. Часы с маятником на поверхности Земли спешат на $\Delta t=1,5$ мин в сутки. На какой высоте над поверхностью Земли они будут идти верно? Радиус Земли $R=6350$ км.

Решение. Период колебаний маятника наших часов T_1 меньше периода колебаний маятника T в точных часах. Это происходит вследствие того, что у нас длина маятника меньше длины маятника в часах, идущих точно. За сутки маятник совершает $(24 \cdot 60)/T_1$ полных колебаний, т. е. на $\Delta t/T_1$ колебаний больше, чем число колебаний, совершаемых маятником в точных часах $(24 \cdot 60)/T$. Следовательно,

$$\frac{24 \cdot 60}{T_1} = \frac{24 \cdot 60}{T} + \frac{\Delta t}{T_1}. \quad (1)$$

Для того чтобы часы правильно показывали время, можно, не меняя длину маятника, поднять их на высоту h . При этом период колебаний увеличится и станет равным

$$T = T_1 \left(1 + \frac{h}{R} \right). \quad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), найдем искомую высоту

$$h = \frac{k}{1-k} R, \quad k = \frac{\Delta t}{24 \cdot 60}, \quad h = 6,6 \text{ км}.$$

7. Вынужденные колебания. Перейдем к рассмотрению колебаний незамкнутой системы.

Колебания, совершаемые системой, на которую действует внешняя сила, зависящая от времени, называются вынужденными.

Вынужденные колебания могут возникать при самых разнообразных условиях.

Параметрические колебания возникают при изменении собственных параметров системы. Например, в случае маятника можно изменять длину нити по заданному закону $l=l(t)$ или, поднимая точку подвеса в неоднородном поле тяжести, изменять ускорение свободного падения.

Автоколебания. В незамкнутой системе работа сил трения может быть положительной величиной. В этом случае амплитуда колебаний будет возрастать и в установившемся режиме примет постоянное значение. Если незатухающие колебания поддерживаются в результате поступления энергии от постоянного источника, то такие системы называются *автоколебательными*. Колебания скрипичной струны при равномерном движении смычка, маятника в настенных часах — примеры автоколебаний.

Наиболее важен для практики случай, когда внешняя сила периодически зависит от времени. Получим уравнение вынужденных колебаний одной из рассмотренных в п. 4 и 6 систем. Для определенности будем говорить о шарике, прикрепленном к пружине при наличии силы трения $\vec{F}_{\text{тр}} = -c\vec{v}$, где c — постоянный коэффициент. Внешняя сила задана постоянным по направлению вектором $\vec{F}(t)$. Ограничиваясь по-прежнему изучением малых колебаний, предположим, что угол β между вектором $\vec{F}$ и перемещением шарика останется практически постоянным. Тогда из второго закона Ньютона получим уравнение

$$ma = -kx - cv + f(t),$$

где $f(t) = F(t) \cos \beta$. Если переписать его в виде

$$mx'' + cx' + kx = f(t), \quad (42.17)$$

то оно с точностью до обозначений совпадает с уравнением (41.8) для заряда $q(t)$, протекающего в цепи, содержащей катушку, резистор, конденсатор и источник внешнего напряжения. Разумеется, уравнение (42.17) можно получить аналогично выводу (41.5) из закона изменения полной энергии

$$E' = -cv^2 + fv, \quad (42.18)$$

где E' — производная полной энергии. В правой части (42.18) — мощности сил трения и внешней силы.

8. Резонанс. Рассмотрим особо интересный случай, когда $f(t) = f_0 \cos \omega t$. Введем новые обозначения $c = m\gamma$, $k = m\omega_0^2$ (ω_0 — собственная частота), и перепишем исходное уравнение в виде

$$x'' + \gamma x' + \omega_0^2 x = \frac{f_0}{m} \cos \omega t. \quad (42.19)$$

Наша задача — найти решение уравнения (42.19) для установившегося движения, которое возникает после того, как собственные колебания, возбужденные внешней силой, уже затухнут. В установившемся режиме частота колебаний равна частоте вынуждающей силы. Поэтому будем искать решение в виде

$$x(t) = a \cos(\omega t + \varphi), \quad (42.20)$$

где a , φ — постоянные, подлежащие определению. Подставляя (42.20) в (42.19), получим тождество

$$(\omega_0^2 - \omega^2) a \cos(\omega t + \varphi) - \gamma \omega a \sin(\omega t + \varphi) = \frac{I_0}{m} \cos \omega t.$$

Для того чтобы это соотношение выполнялось в любой момент времени, необходимо приравнять нулю суммы коэффициентов при функциях $\sin \omega t$ и $\cos \omega t$,

$$-(\omega_0^2 - \omega^2) \sin \varphi - \gamma \omega \cos \varphi = 0,$$

$$[(\omega_0^2 - \omega^2) \cos \varphi - \gamma \omega \sin \varphi] a = \frac{I_0}{m}.$$

Из этих уравнений находим

$$\cos \varphi = \frac{\omega_0^2 - \omega^2}{D}, \quad \sin \varphi = -\frac{\gamma \omega}{D}, \quad (42.21)$$

$$a = \frac{I_0}{mD}, \quad D = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2}. \quad (42.22)$$

Решение (42.20) с постоянными (42.21), (42.22) определяет отклик системы на внешнее возмущение.

Рассматривая амплитуду колебаний как функцию частоты ω , можно заключить, что, если $\gamma < \sqrt{2}\omega_0$, то $a(\omega)$ принимает наибольшее значение

$$a(\omega_p) = \frac{I_0}{m\gamma \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2/4}}$$

при $\omega = \omega_p$, где величина

$$\omega_p = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{\gamma^2}{2}}$$

называется *резонансной частотой*. Зависимость $a(\omega)$ называется *резонансной кривой*.

Наибольший интерес представляют колебания системы с малым сопротивлением, когда $\gamma \ll \omega_0$. В этом случае резонансная частота $\omega_p \approx \omega_0$. Шириной резонансной кривой называют интервал

частот $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, в пределах которого значение амплитуды не опускается ниже величины, равной $\frac{1}{\sqrt{2}} a(\omega_p)$. Учитывая, что $\omega^2 - \omega_0^2 \simeq 2\omega_0\Delta\omega$, находим из условия

$$a(\omega_0 + \Delta\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} a(\omega_p)$$

ширину резонансной кривой $|\Delta\omega| = \gamma$. При частотах $\omega \ll \omega_0$ значение

$$a(\omega) \simeq \frac{\gamma}{\omega_0} a(\omega_p) \ll a(\omega_p).$$

Еще слабее отклик колебательной системы при частоте внешней силы $\omega \gg \omega_0$:

$$a(\omega) \simeq \frac{\gamma\omega_0}{\omega^2} a(\omega_p) \ll a(\omega_p).$$

Резонансом (лат. — отзываются) называется избирательный отклик колебательной системы на периодическое воздействие внешней силы с частотой, близкой к собственной частоте.

Резонанс играет большую роль в природе, науке и технике [36]. Резонанс в строительных конструкциях, машинах, турбинах и т. д. может явиться причиной разрушения. Сложные проблемы, связанные с возбуждением колебаний, возникают при создании самолетов, ракет, космических кораблей [2]. Лучший способ ослабления вынужденных колебаний — изменить собственную частоту системы так, чтобы избежать совпадения с частотой внешнего воздействия.

Не менее интересны и сложны проблемы, связанные с использованием резонанса для создания генераторов незатухающих колебаний, резонансных ускорителей элементарных частиц, усиления слабых сигналов. Открытые в последнее время новые резонансные явления в атомной и ядерной физике позволили создать уникальные методы исследования структуры ядер, атомов, молекул, живых клеток и т. д.

§ 43. СВОБОДНЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В КОНТУРЕ. РЕЗОНАНС

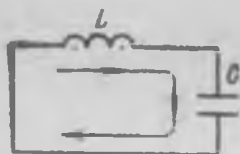
1. Свободные электрические колебания. Колебательный контур представляет собой замкнутую цепь, состоящую из катушки L и конденсатора C (рис. 43.1). Стрелка указывает положительное направление тока. В реальных условиях сопротивление проводов катушки индуктивности хотя и мало, но отлично от нуля. Сопротивление катушки индуктивности при постоянном токе называют омическим сопротивлением катушки. Вначале мы не будем учиты-

вать этого сопротивления. Полагая в (41.8) $R=0$, $\varepsilon(t)=0$, получим уравнение колебательного процесса

$$q'' + \omega^2 q = 0, \quad (43.1)$$

где $\omega = 1/\sqrt{LC}$ называют собственной циклической частотой контура, $T = 2\pi\sqrt{LC}$ — периодом собственных колебаний.

Для того чтобы возбудить колебания, необходимо сообщить контуру некоторое количество энергии W . С этой целью следует в момент $t=0$ до замыкания контура зарядить конденсатор или создать ток в катушке. Таким образом, решение уравнения будет зависеть от начальных условий $q(0)=q_0$, $q'(0)=I_0$. Первоначальный запас электромагнитной энергии (41.3) равен



$$W_0 = \frac{1}{2} L I_0^2 + \frac{1}{2C} q_0^2. \quad (43.2)$$

Рис. 43.1

Уравнения (43.1) и (42.5) отличаются только обозначениями. Поэтому решением (43.1) является функция

$$q(t) = A \sin(\omega t + \alpha), \quad (43.3)$$

$$A = \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{I_0}{\omega}\right)^2}, \quad \cos \alpha = \frac{I_0}{\omega A}, \quad \sin \alpha = \frac{q_0}{A}.$$

Эту функцию можно представить в виде

$$q(t) = q_0 \cos \omega t + \frac{I_0}{\omega} \sin \omega t.$$

Сила тока также совершает гармонические колебания

$$I(t) = q' = -q_0 \omega \sin \omega t + I_0 \cos \omega t = A \omega \cos(\omega t + \alpha). \quad (43.4)$$

Значениям $I(t) < 0$ соответствует течение тока в направлении, противоположном стрелке.

Проверим теперь справедливость уравнения (41.2). Найдем электромагнитную энергию контура с током в момент времени t . Подставляя (43.3) и (43.4) в (41.3) и учитывая, что $\omega^2 LC = 1$, получим

$$W(t) = \frac{1}{2} L \omega^2 A^2. \quad (43.5)$$

Следовательно, $W(t)$ — постоянная величина.

ПРИМЕР 43.1. Рассмотрим схему, показанную на рис. 43.2 а, $\mathcal{E} = 10$ В, $L = 400$ мГн, $C = 400$ пФ. Когда ключ находится в положении K_1 , заряд верхней пластины конденсатора равен $q_0 =$

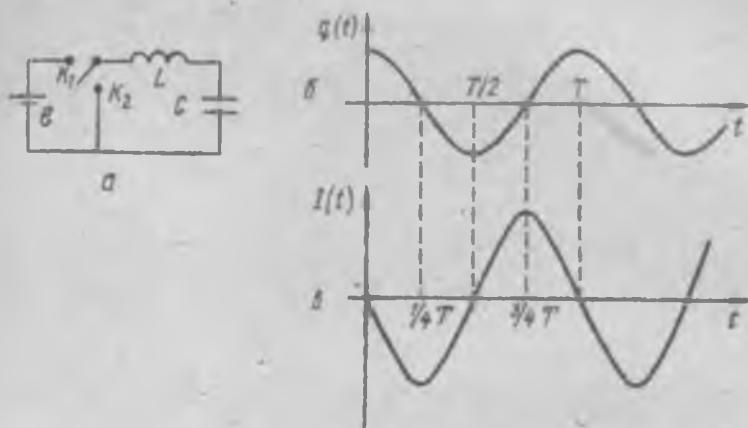


Рис. 43.2

$= C\delta = 4 \cdot 10^{-9}$ Кл. Переводя ключ в положение K_2 , получим контур, изображенный на рис. 43.1.

Учитывая начальные условия $q(0) = q_0$, $q'(0) = I(0) = 0$, получим

$$q(t) = q_0 \cos \omega t, \quad I(t) = -I_m \sin \omega t; \quad I_m = q_0 \omega.$$

Период колебаний

$$T = 2\pi\sqrt{LC} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ с.}$$

Собственная частота колебаний

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \simeq 400 \text{ кГц.}$$

На рис. 43.2 б, в изображены графики функций $q(t)$ и $I(t)$. Отрицательным значениям силы тока соответствует убывание заряда на верхней пластине конденсатора.

В соответствии с (41.6) напряжение на катушке и конденсаторе

$$U_L = LI' = -U_{L0} \cos \omega t, \quad U_{L0} = \omega LI_m = \frac{q_0}{C} = 10 \text{ В,}$$

$$U_C = Cq(t) = U_{C0} \cos \omega t, \quad U_{C0} = \frac{q_0}{C} = 10 \text{ В.}$$

2. Затухающие колебания. Выше мы предполагали, что сопротивление катушки R равно нулю. Реальный колебательный контур описывается уравнением

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = 0. \quad (43.6)$$

Условия, при выполнении которых уравнение (43.6) приближенно переходит в (43.1), имеют вид $|Rq'| \ll |Lq''|$, $|q/C|$. Подставляя сюда (43.3), (43.4), находим, что $R \ll R_*$, где

$$R_* = \frac{1}{\omega C} = \omega L = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

называют волновым сопротивлением. Однако из (41.4) следует, что даже в случае $R \ll R_*$ вся электромагнитная энергия убывает, переходя в теплоту. Следовательно, амплитуда колебаний должна уменьшаться, а при $t \gg T$ стремиться к нулю.

Проведем теперь анализ влияния сопротивления контура на характер колебательного процесса, предполагая, что приращение амплитуды ΔA за период незначительно: $|\Delta A| \ll A$. Тогда амплитуда колебаний является медленной функцией времени:

$$q(t) = A(t) \sin(\omega t + \alpha), \quad I(t) \approx \omega A(t) \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем среднее за период значение мощности $I^2 R$, рассеиваемой на активном сопротивлении катушки,

$$\langle I^2 R \rangle = \frac{R}{T} \int_0^T \omega^2 A^2(t) \cos^2(\omega t + \alpha) dt.$$

Поскольку функция $A(t)$ практически не изменяется в течение периода, ее можно вынести из-под знака интеграла. Далее, учитывая, что $\cos^2 \Phi = 1/2 + 1/2 \cos 2\Phi$, находим

$$\langle I^2 R \rangle = \frac{1}{2} \omega^2 A^2(t) R. \quad (43.7)$$

Подставим теперь (43.5), (43.7) в (41.4). В результате получим уравнение

$$2\tau A' + A = 0, \quad \tau = L/R.$$

Решением является функция

$$A(t) = A_0 e^{-t/2\tau},$$

где A_0 — значение амплитуды в момент времени $t=0$. Таким образом, заряд и ток в контуре

$$q(t) = A_0 e^{-t/2\tau} \sin(\omega t + \alpha), \quad I(t) = \omega A_0 e^{-t/2\tau} \cos(\omega t + \alpha)$$

представляют собой затухающие колебания. Энергия (43.5), запасенная в контуре, также убывает:

$$W(t) = \frac{1}{2} L \omega^2 A_0^2 e^{-t/\tau}.$$

Для радиотехнических целей желательно иметь контур с возможно меньшим затуханием. Чтобы определить пригодность контура, вводят понятие добротности контура. Добротность принято обозначать буквой Q ,

$$Q = 2\pi \frac{W}{\langle I^2 R \rangle T} = \frac{\omega L}{R} = \frac{1}{\omega RC} = \frac{R_s}{R} = \omega \tau. \quad (43.8)$$

Добротность контура пропорциональна отношению энергии, запасенной в контуре, к энергии, рассеиваемой за период в виде теплоты. После $n = \omega \tau / \pi = Q / \pi$ колебаний амплитуда уменьшается в e раз. В реальных контурах величина Q лежит в пределах от 50 до 200.

ПРИМЕР 43.2. Омическое сопротивление катушки в схеме (рис. 43.2 а) $R = 40$ Ом. В этом случае $R_s = 10^3$ Ом, $\tau = 10^{-5}$ с, $Q = 25$, $n \approx 8$. На рис. 43.3 изображен график функции

$$I(t) = -I_m e^{-t/2\tau} \sin \omega t, \quad I_m = q_0 \omega = 10^{-2} \text{ А.}$$

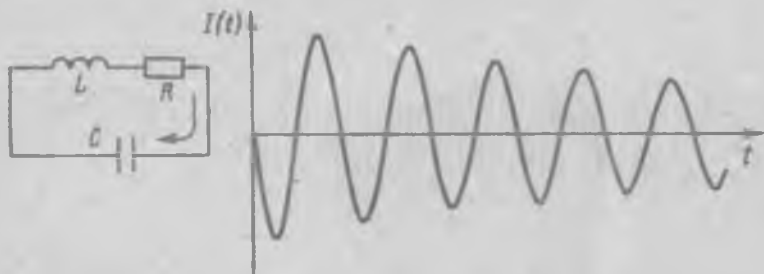


Рис. 43.3

3. Вынужденные колебания в последовательном контуре. Для получения в контуре незатухающих колебаний необходимо непрерывно пополнять энергию электромагнитного поля, компенсируя потери, связанные с ее переходом в теплоту. Для этого контур подключается к источнику переменного напряжения — внешнему генератору. Рассмотрим систему, показанную на рис. 41.1, предполагая, что напряжение $\mathcal{E}(t) = 0$, $t < 0$; $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, $t > 0$. Уравнение (41.8) для этой схемы

$$Lq'' + Rq' + \frac{q}{C} = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad t \geq 0. \quad (43.9)$$

Вследствие затухания в течение времени $t \gg \tau$ собственные колебания, возбужденные включением генератора, прекратятся. При $t \gg \tau$ действие периодически изменяющегося напряжения приведет к установившемуся режиму колебаний: заряд и ток изменяются по гармоническому закону с частотой внешнего источника, а амплитуда и фаза постоянны.

Таким образом, решение для установившихся колебаний следует искать в виде

$$q(t) = \frac{I_0}{\omega} \sin(\omega t + \varphi), \quad I(t) = I_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad (43.10)$$

где $I_0 = q_0 \omega$. Для определения постоянных I_0 и φ подставим $q(t)$ в (43.9),

$$\left(-\omega L + \frac{1}{C\omega}\right) I_0 \sin(\omega t + \varphi) + R I_0 \cos(\omega t + \varphi) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Вводя обозначения

$$X_L = \omega L, \quad X_C = \frac{1}{\omega C}, \quad (43.11)$$

перепишем полученное тождество в виде

$$[(X_C - X_L) \sin \varphi + R \cos \varphi] I_0 \cos \omega t + [(X_C - X_L) \cos \varphi - R \sin \varphi] I_0 \sin \omega t = \mathcal{E}_0 \cos \omega t.$$

Приравнявая нулю коэффициенты при функциях $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$, получим уравнения

$$[(X_C - X_L) \sin \varphi + R \cos \varphi] I_0 = \mathcal{E}_0,$$

$$(X_C - X_L) \cos \varphi - R \sin \varphi = 0.$$

Введем величину

$$Z = \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2}. \quad (43.12)$$

Тогда, полагая

$$\cos \varphi = \frac{R}{Z}, \quad \sin \varphi = \frac{X_C - X_L}{Z}, \quad (43.13)$$

мы найдем решение второго и первого уравнений

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}. \quad (43.14)$$

Из (43.14) видно, что амплитуды тока и напряжения связаны соотношением, аналогичным закону Ома. В силу этого величину Z называют *полным сопротивлением* цепи. Угол φ определяет сдвиг фаз тока и напряжения, его значения лежат в области $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$. Фазы тока $\omega t + \varphi$ и напряжения ωt принимают одинаковые значения Φ в различные моменты времени: фаза напряжения в момент $t_1 = \Phi/\omega$ и фаза тока — в момент $t_2 = (\Phi - \varphi)/\omega$. Если $\varphi > 0$, то говорят, что ток опережает напряжение по фазе, а

при $\varphi < 0$ — ток отстает от напряжения. Соотношения (43.12), (43.14) можно представить в виде

$$\mathcal{E}_0^2 = U_{R0}^2 + (U_{C0} - U_{L0})^2,$$

где $U_{R0} = I_0 R$, $U_{L0} = I_0 X_L$, $U_{C0} = I_0 X_C$ — амплитудные значения напряжений, соответственно на резисторе, индуктивности и конденсаторе. Отсюда видно, что амплитудные значения напряжений надо складывать как векторы, изображенные на рис. 43.4. Следовательно, всегда $\mathcal{E}_0 > U_{R0}$, однако значения U_{C0} и U_{L0} могут быть как больше, так и меньше амплитудного значения напряжения $\mathcal{E}_0$ на концах цепи.

ЗАДАЧА 43.3. Какое максимальное напряжение $\mathcal{E}_0$ можно приложить к цепи, изображенной на рис. 41.1 без опасности пробить конденсатор, если он рассчитан на напряжение не более $U = 400$ В ($\nu = 50$ Гц, $C = 10^{-4}$ Ф, $L = 0,1$ Гн, $R = 2$ Ом).

Решение. Напряжение на конденсаторе

$$U_{C0} = I_0 X_C = \frac{\mathcal{E}_0}{Z} X_C \leq U. \quad (1)$$

Из (1) получим

$$\mathcal{E}_0 \leq U \frac{Z}{X_C}.$$

Подставляя числовые значения, найдем $X_C = 31,8$ Ом, $X_L = 31,4$ Ом, $X_C - X_L = 0,4$ Ом, $Z \approx 2$ Ом, $\mathcal{E}_0 \leq 25$ В. Итак, напряжение, большее 25 В, приведет к пробое конденсатора, выдерживающего напряжение 400 В.

Рассмотрим три частных случая.

А. Резистор в цепи переменного тока. В этом случае $U_R(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, $Z = R$, $\varphi = 0$, $I_0 = \mathcal{E}_0 / R$, $I(t) = I_0 \cos \omega t$. Фазы силы тока и напряжения совпадают (рис. 43.5 а).

Б. Конденсатор в цепи переменного тока. В этом случае

$$U_C(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad Z = X_C, \quad \varphi = \pi/2, \quad I_0 = \mathcal{E}_0 / X_C, \quad I(t) = -I_0 \sin \omega t,$$

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi \nu C} = \frac{0,16}{\nu C}.$$

При $\nu = 400$ кГц, $C = 400$ пФ получим $X_C = 1000$ Ом. Ясно, что конденсатор оказывает большее сопротивление низкочастотным токам. Поскольку $\varphi = \pi/2$, то ток опережает напряжение — ток достигает амплитудного значения на четверть периода раньше, чем

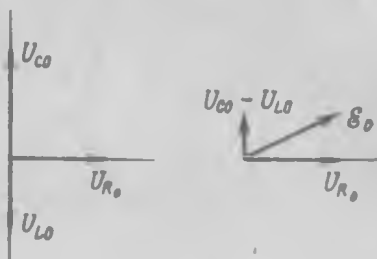


Рис. 43.4

напряжение (рис. 43.5б). В момент времени $t=0$ заряд верхней пластины равен $C\mathcal{E}_0$. В интервале $0 < t < \pi/2$ конденсатор перезаряжается — положительный заряд перетекает в отрицательном направлении к нижней пластине. Поэтому значения тока отрицательны. При $t=T/4$ ток достигает экстремального значения, по-

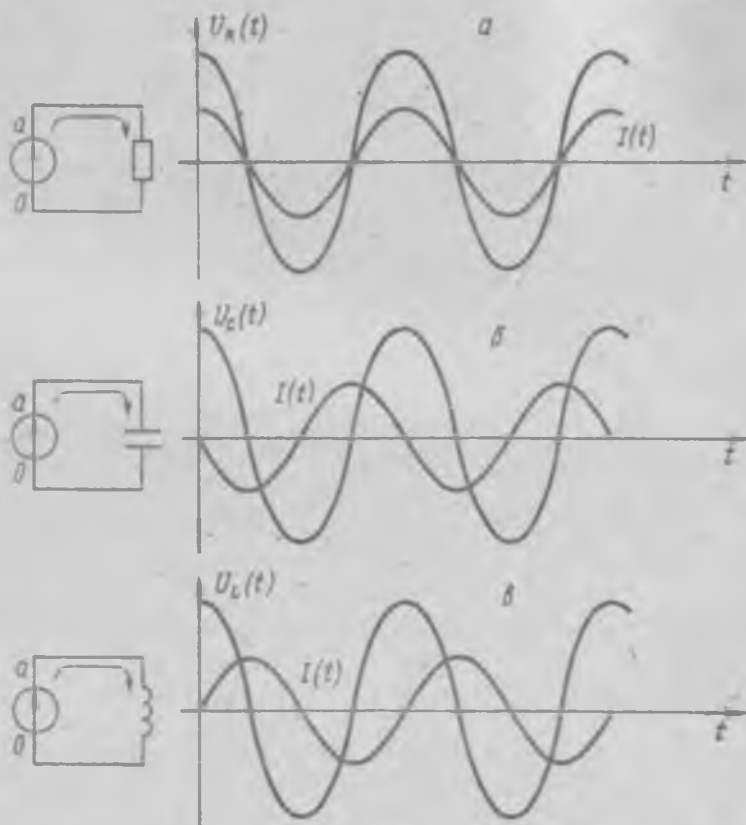


Рис. 43.5

скольку в этот момент времени скорость изменения функции $U_C(t)$ максимальна. Конденсатор полностью разряжен. Начиная с момента $t=T/4$ заряд верхней пластины становится отрицательным и достигает наименьшего значения — $C\mathcal{E}_0$ при $t=T/2$. Далее в интервале $T/2 < t < T$ происходит перетекание заряда в обратном направлении — значения тока положительны.

В. Индуктивность в цепи переменного тока. В этом случае $U_L(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, $Z = X_L$, $\varphi = -\pi/2$, $I_0 = \mathcal{E}_0/X_L$, $I(t) = I_0 \sin \omega t$. Величину X_L называют индуктивным сопротивлением. При $\nu = 400$ кГц,

$L=400$ мкГн $X_L=1000$ Ом. Поскольку $\varphi=-\pi/2$, то фаза тока отстает от фазы напряжения. Из рис. 43.5в видно, что при возрастании силы тока разность потенциалов $\varphi_a-\varphi_o=LI'$ на концах катушки индуктивности принимает положительные значения.

4. Мощность, потребляемая цепью. Согласно (41.4) мгновенная мощность, потребляемая цепью от внешнего источника,

$$p(t) = I \mathcal{E} = I_0 \mathcal{E}_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos \omega t.$$

Обычно интересуются средним значением P мощности за период

$$P = p_{cp} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt.$$

После простых преобразований получим

$$p(t) = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 [(1 + \cos 2\omega t) \cos \varphi - \sin 2\omega t \sin \varphi].$$

Поскольку среднее по времени значение функций $\cos 2\omega t$ и $\sin 2\omega t$ равно нулю, то

$$P = \frac{1}{2} I_0 \mathcal{E}_0 \cos \varphi. \quad (43.15)$$

Учитывая, что $\mathcal{E}_0 \cos \varphi = \mathcal{E}_0 R/Z = I_0 R$, получим

$$P = \frac{1}{2} I_0^2 R. \quad (43.16)$$

Если ввести величины

$$I_{\text{эф}} = \frac{1}{\sqrt{2}} I_0, \quad \mathcal{E}_{\text{эф}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \mathcal{E}_0 = 0,707 \mathcal{E}_0$$

называемые действующими или эффективными значениями силы тока и напряжения, то (43.15), (43.16) можно представить в виде

$$P = I_{\text{эф}} \mathcal{E}_{\text{эф}} \cos \varphi = I_{\text{эф}}^2 R. \quad (43.17)$$

Для городской электросети $\mathcal{E}_{\text{эф}}=220$ В.

Найдем теперь среднее значение мощности P_R , рассеиваемой на резисторе. Мгновенная мощность, выделяемая в цепи, согласно (43.10), равна

$$p_R(t) = I^2 R = I_0^2 R \cos^2(\omega t + \varphi).$$

Так как среднее значение $\cos^2(\omega t + \varphi) = 1/2 + 1/2 \cos 2(\omega t + \varphi)$ равно $1/2$, то

$$P_R = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_{\text{эф}}^2 R. \quad (43.18)$$

Сопоставляя (43.17) и (43.18), приходим к выводу, что в установившемся режиме среднее значение мощности, потребляемой от внешнего источника, равно среднему значению мощности, рассеиваемой на сопротивлении.

ЗАДАЧА 43.4. Катушка индуктивности с омическим сопротивлением соединена последовательно с резистором. Действующие напряжения на индуктивности $U_1=20$ В, на резисторе $U_2=200$ В, на концах цепи $U=220$ В. Найти мощность тепловых потерь катушкой индуктивности, если мощность, рассеиваемая резистором, $P_2=80$ Вт.

Решение. Пусть r, R — сопротивления катушки и резистора. Мощности, рассеиваемые резисторами,

$$P_1 = I_{\phi}^2 r, \quad P_2 = I_{\phi}^2 R.$$

Из условия задачи следуют еще три уравнения

$$U = I_{\phi} \sqrt{(R+r)^2 + X_L^2}, \quad U_1 = I_{\phi} \sqrt{r^2 + X_L^2}, \quad U_2 = I_{\phi} R,$$

из которых находим

$$U^2 - U_1^2 - U_2^2 = 2I_{\phi}^2 Rr.$$

Сопротивление $R = U_2^2 / P_2 = 500$ Ом. Следовательно,

$$P_1 = \frac{1}{2R} (U^2 - U_1^2 - U_2^2) = \frac{P_2}{2U_2^2} (U^2 - U_1^2 - U_2^2) = 8 \text{ Вт}.$$

5. Резонанс напряжений. Выражение (43.14) можно рассматривать как функциональную зависимость

$$I_0(\omega) = \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{\omega C} - \omega L\right)^2}}. \quad (43.19)$$

Функция $I_0(\omega)$ достигает наибольшего значения $\mathcal{E}_0/R$ при условии $(1/\omega C) - \omega L = 0$, из которого находим значение частоты $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, соответствующее экстремуму функции $I_0(\omega)$.

Наибольший интерес представляют контуры с высокой добротностью $Q \gg 1$. В области $\omega \ll \omega_0$, $I_0(\omega) \simeq (\omega/\omega_0) Q^{-1} I_0(\omega_0) \ll I_0(\omega_0)$. При $\omega \gg \omega_0$ функция $I_0(\omega)$ также мала: $I_0(\omega) \simeq (\omega_0/\omega) Q^{-1} I_0(\omega_0)$. Следовательно, амплитуда тока имеет резкий максимум в окрестности частоты $\omega = \omega_0$.

Сдвиг фазы $\varphi(\omega)$ также является функцией частоты, изменяясь от значения $\varphi(0) = \pi/2$ до значения $-\pi/2$ при $\omega \gg \omega_0$. При $\omega = \omega_0$ значение сдвига фазы равно нулю.

На рис. 43.6 изображена зависимость амплитуды тока I_0 от отношения ω/ω_0 при $\mathcal{E}_0 = 1$ В, $L = 10^{-4}$ Гн, $C = 10^{-8}$ Ф для трех значений сопротивления $R = 0,5$ Ом, 1 Ом, 2 Ом. В этом случае $\nu_0 =$

$= 1,159 \cdot 10^5$ Гц, $R_s = 100$ Ом. Из этих графиков видно, что с увеличением добротности кривые становятся более острыми.

Таким образом, значение частоты $\omega = \omega_0$ оказывается выделенным: амплитуды напряжений на конденсаторе и катушке также достигают максимальных значений

$$U_{L0} = U_{C0} = \frac{\mathcal{E}_0}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \mathcal{E}_0 \frac{R_s}{R} = Q \mathcal{E}_0, \quad (43.20)$$

в Q раз больших амплитуды напряжения на входе.

В радиосхемах выходное напряжение обычно снимают с конденсатора или катушки. Отсюда и происходит название — **резонанс напряжений**.

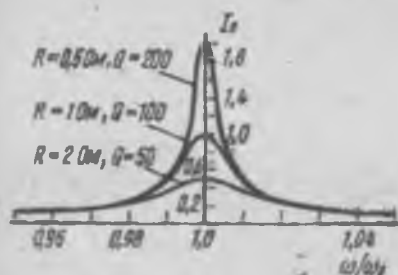


Рис. 43.6

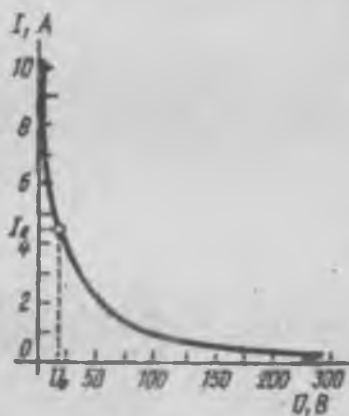


Рис. 43.7

Резонанс в электрическом колебательном контуре впервые описан Дж. Максвеллом в 1868 г.

6. Возбуждение незатухающих колебаний дугowym разрядом. Незатухающие колебания в одиночном контуре возможны только в том случае, если сопротивление равно нулю. Поскольку любой реальный контур обладает активным сопротивлением, то для получения незатухающих колебаний необходимо компенсировать положительное активное сопротивление отрицательным сопротивлением некоторого элемента, связанного с колебательным контуром. Особенностью вольт-амперной характеристики такого элемента является наличие участка, на котором увеличение напряжения приводит к уменьшению тока, и наоборот. Элемент с *отрицательным сопротивлением* не потребляет электромагнитную энергию, а отдает ее в цепь.

На рис. 43.7 показана вольт-амперная характеристика дугового разряда в воздухе при атмосферном давлении: $I = f(U)$, где U — разность потенциалов на электродах. Рассмотрим, например, точку с координатами (U_0, I_0) . Нетрудно увидеть, что при $\Delta U = U - U_0 > 0$ приращение силы тока $\Delta I = f(U_0 + \Delta U) - f(U_0)$ отри-

цательно. Поскольку для обычных проводников отношение $\Delta U/\Delta I$ определяет положительное сопротивление, то аналогичное отношение для дуги также называют сопротивлением. Однако теперь оно будет отрицательным:

$$f(U_0 + \Delta U) - f(U_0) = -\frac{1}{R_0} \Delta U, \quad (43.21)$$

где $(\Delta f/\Delta U)^{-1} = -R_0(U_0)$ — сопротивление дуги, зависящее от значения U_0 .

Прежде всего выясним условие горения дуги в цепи, изображенной на рис. 43.8 а. Из закона Ома

$$\frac{\mathcal{E} - U}{r} = f(U)$$

следует, что это уравнение имеет решение при сопротивлении резистора r меньшем некоторого значения $r_{\max}$. Выберем сопротивление r так, чтобы дуга горела при напряжении U_0 , причем $R_0(U_0) <$

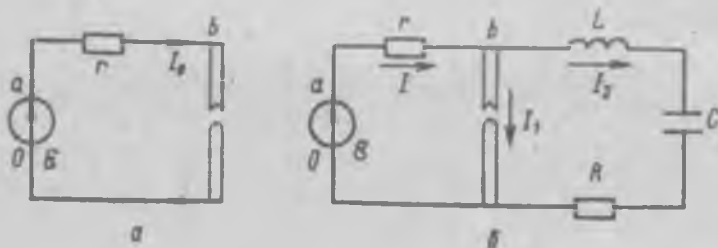


Рис. 43.8

$< r$. Необходимость этого условия станет ясной несколько позже.

Наличие у дуги отрицательного сопротивления позволяет создать генератор колебаний, схема которого показана на рис. 43.8 б. Благодаря неустойчивому характеру горения дуги напряжение $U = \phi_b - \phi_a$ может отклониться от значения U_0 . Это приведет к генерации колебаний в контуре, содержащем катушку индуктивности, конденсатор и дугу.

Независимыми переменными являются силы токов I, I_1, I_2 и напряжение на концах колебательного контура $U(t) = U_0 + u(t)$, где $u(t)$ — переменная составляющая напряжения. Из уравнения непрерывности токов находим

$$I = I_1 + I_2. \quad (43.22)$$

Для контура abo получим уравнение

$$\mathcal{E} = Ir + U_0 + u.$$

Присоединим к этой системе вольт-амперную характеристику дуги

$$I_1 = f(U_0 + u)$$

и уравнение колебательной цепи

$$LI_2' + RI_2 + \frac{q_2}{C} = u, \quad (43.23)$$

где q_2 — переменная составляющая заряда на верхней пластине конденсатора. Исключая из уравнения (43.22) I и I_1 , получим

$$\frac{1}{r} (\mathcal{E} - U_0 - u) = f(U_0 + u) + I_2.$$

Поскольку U_0 удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{r} (\mathcal{E} - U_0) = f(U_0),$$

то

$$I_2 = -\frac{u}{r} - f(U_0 + u) + f(U_0). \quad (43.24)$$

Ограничиваясь случаем малых приращений $|u| \ll U_0$, воспользуемся приближением (43.21). Тогда из (43.24) получим

$$I_2 = \frac{1}{R_i} u, \quad R_i = \frac{rR_0}{r - R_0}.$$

Если $r > R_0$, то фазы напряжения $u(t)$ и тока $I_2(t)$ совпадают.

Подставляя u в правую часть (43.23), получим уравнение

$$LI_2' + (R - R_i) I_2 + \frac{q_2}{C} = 0, \quad (43.25)$$

которое совпадает с уравнением колебательного контура (43.6) с резистором сопротивлением $R - R_i$.

Если выполняется условие $R = R_i$, то уравнение (43.25) описывает незатухающие колебания с постоянной амплитудой. При $R < R_i$ амплитуда колебаний возрастает. Следовательно, при условии $R_0 > rR(R+r)^{-1}$ в схеме могут возникнуть колебания. Недостатком такого генератора является нестабильность режима работы.

§ 44. ВОЛНОВОЕ ДВИЖЕНИЕ. ЗВУК

Любая система, которую мы собираемся изучать, должна описываться набором функций, характеризующих ее состояние. Поэтому, прежде чем приводить определение волны, необходимо хотя бы в общих чертах попытаться понять, какие величины изменяются в процессе эволюции системы при переходе из одного состояния в

другое. Например, когда мы изучаем токи в куске металла, то понятие силы тока, введенное для тонкого провода, теряет смысл. Ограничимся далее обсуждением процессов в сплошных средах — жидкости, газе и твердом теле.

1. Волны в упругой среде. Представьте, что вы ударили ладонью по столу. Ваш сосед услышал звук удара. Что же распространяется от одного объема воздуха к другому с некоторой определенной скоростью? Какие физические величины характеризуют это явление? Какие приборы следует использовать для изучения этого явления?

Рассмотрим упругую сплошную среду. В состоянии равновесия координаты каждой частицы, из которых состоит среда, определяются радиус-вектором $\vec{r}$. Различным значениям компонент вектора x, y, z соответствуют координаты различных частиц. При деформации расположение частиц меняется: частица с радиус-вектором $\vec{r}$ в процессе деформации будет занимать положение, определяемое радиус-вектором $\vec{r} + \vec{u}(t, \vec{r})$. Перемещение $\vec{u}(t, \vec{r})$ называется *вектором деформации*. Задание $\vec{u}(t, \vec{r})$ полностью определяет деформацию тела. В результате деформации изменяется и плотность среды: если до деформации среда была однородной плотностью ρ_0 , то в деформированном состоянии плотность становится равной $\rho_0 + \Delta\rho(t, \vec{r})$. Наиболее удобной для измерения величиной является давление. В равновесной среде давление p_0 постоянно. При деформации возникает приращение давления $\Delta p(t, \vec{r})$, различное в разных точках среды. Таким образом, функции $\vec{u}(t, \vec{r})$, $\Delta p(t, \vec{r})$ характеризуют неравновесное состояние среды в точке с координатой $\vec{r}$ в момент времени t . Например, при фиксированном времени $t = t_0$ функция $\Delta p(t_0, \vec{r})$ дает представление о распределении возмущений давления в среде в момент времени $t = t_0$. При постоянном значении $\vec{r} = \vec{r}_0$ функция $\Delta p(t, \vec{r}_0)$ определяет зависимость возмущения давления от времени в точке $\vec{r} = \vec{r}_0$.

Если создать неравновесное состояние в некотором объеме, то благодаря упругим свойствам среды в последующие моменты времени смещения и скорости частиц в соседних областях становятся отличными от нуля: первоначальное возмущение перемещается по области, занятой средой. *Процесс распространения деформации в среде называется звуковой волной, или просто звуком*. Волна возникает в том случае, если изменение состояния в одной точке среды приводит к изменению состояния в соседней точке.

В средах могут распространяться звуковые волны двух типов: продольные и поперечные. *Продольной называется волна, в кото-*

рой колебания частиц среды происходят в направлении распространения волны. Продольные волны наблюдаются в жидкостях, газах и твердых телах. Поперечные волны, в которых колебания частиц среды происходят в направлении, перпендикулярном к направлению распространения волны, наблюдаются только в твердых телах.

2. Сферическая волна. Предположим, что вследствие быстрого выделения энергии взрыва в сферической области радиусом R внезапно повышается давление относительно равновесного значения p_0 . На рис. 44.1 пунктирная кривая изображает график за-

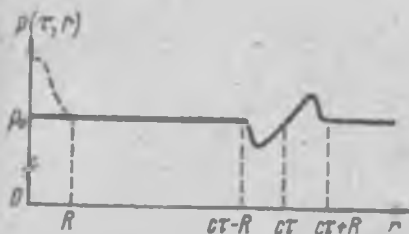


Рис. 44.1

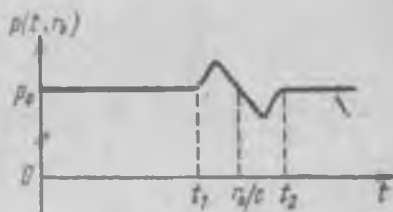


Рис. 44.2

висимости начального давления $p(t=0, r)$ от расстояния r от центра сферы. Избыточное давление приведет к возникновению сил, направленных в сторону областей с меньшим давлением. Под действием сил давления частицы воздуха начнут смещаться, образуя новые области повышенного и пониженного давления. Таким образом, различные неравновесные состояния среды будут перемещаться из области $r < R$ в область $r > R$. Движение воздуха в точке, находящейся на расстоянии r_0 от центра сферы, начнется в момент времени $t_1 = (r_0 - R)/c$ и закончится в момент времени $t_2 = (r_0 + R)/c$, где c — скорость распространения возмущений давления. Волна проходит через данную точку в течение промежутка времени, равного $2R/c$. На рис. 44.2 изображен график зависимости давления $p(t, r_0)$ от времени в точке r_0 : сначала приходит волна сжатия, а затем — волна разрежения.

Рассмотрим теперь пространственную структуру волны. Распространяющаяся из области $r < R$ волна имеет форму шарового слоя толщиной $2R$, заключенного в момент времени $t = \tau$ между сферами радиусов $c\tau - R$ и $c\tau + R$ (рис. 44.3). Зависимость давления от расстояния r в момент времени t показана на рис. 44.1. В наружной части слоя воздух сжат, а во внутренней разрежен ($p < p_0$). По мере того как волна будет распространяться все дальше и дальше от центра взрыва, давление в шаровом слое будет приближаться к величине p_0 . Поражающее действие взрывной волны зависит от величины избыточного давления $\Delta p = p - p_0$. При

$\Delta p \sim 0,2 \div 0,4$ кгс/см² возможны легкие травмы, при $\Delta p \sim 0,5$ кгс/см² последствия могут быть крайне тяжелыми. Самолеты и вертолеты получают неустранимые повреждения при $\Delta p \sim 0,1 \div 0,3$ кгс/см².

ЗАДАЧА 44.1. Ультразвуковой сигнал, посланный кораблем вертикально вниз, возвратился через $t_0 = 8$ с. Определить глубину моря. Скорость звука в воде $c = 1450$ м/с.

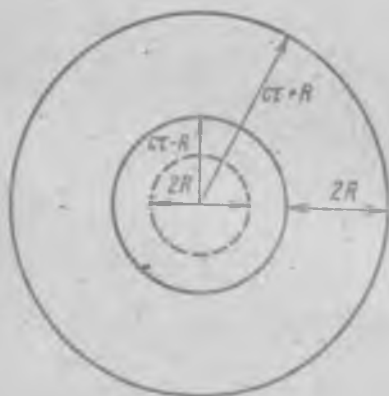


Рис. 44.3

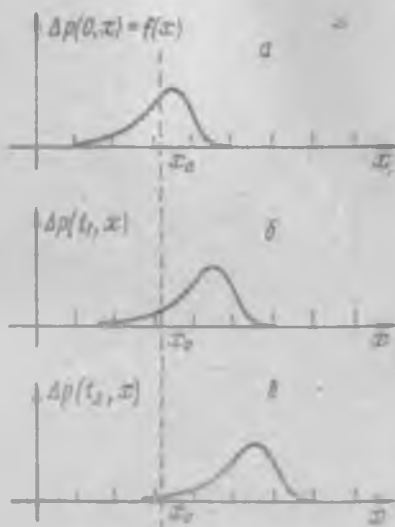


Рис. 44.4

Решение. Сигнал проходит через толщу воды, и часть энергии звука отражается от дна. Время прохождения звуковой волны от корабля до дна и от дна к приемнику $t_0 = 2h/c$, т. е. глубина моря $h = 5800$ м.

3. Плоская волна. Рассмотрим звуковую волну давления, которая распространяется в направлении оси x . В момент времени $t=0$ избыточное давление в точках с координатами x, y, z определяется функцией $f(x)$: $\Delta p(0, x) = f(x)$ (рис. 44.4 а). Это означает, что давление в любом месте плоскости, пересекающей ось x в произвольной точке с координатой x_0 , одинаково и равно $f(x_0)$. На рис. 44.4 б, в изображены графики давления $\Delta p(t_1, x)$, $\Delta p(t_2, x)$ при возрастающих временах t_1, t_2 . Каждый из них сдвинут относительно первого на расстояние ct_1, ct_2 , где c — скорость волны. Следовательно, если в момент $t=0$ в некоторой плоскости x_0 давление имеет значение $f(x_0)$, то через промежуток ct то же самое значение давления имеется в плоскости на расстоянии ct от первоначального места. Если по очереди проецировать эти рисунки на экран, то зритель увидит, что график, изображенный на рис. 44.2 а, побежит вправо. Перемещаясь параллельно оси x со

скоростью c , воображаемый наблюдатель будет находиться в области постоянного давления. Следовательно, в системе координат x' , движущейся со скоростью c , давление $\Delta p'(t, x') = f(x')$. Поскольку координаты двух систем связаны соотношением $x = ct + x'$, то давление в исходной системе имеет вид

$$\Delta p(t, x) = f(x - ct). \quad (44.1)$$

Функция (44.1) описывает волну давления, движущуюся вправо со скоростью c . Волна, в которой все величины зависят от одной координаты, называется плоской волной. Плоская волна — абстрактное понятие, поскольку возмущение давления происходит в неограниченно большом объеме среды.

Полагая в (44.1) $x = x_0$, найдем зависимость давления от времени в плоскости с координатой x_0 : $\Delta p(t, x_0) = f(x_0 - ct)$. Серия графиков на рис. 44.4 также позволяет увидеть, как изменяется давление в произвольной плоскости $x = x_0$.

На рис. 44.5 изображены скорости $v(t, x)$ частиц воздуха, имеющих координаты x в момент t и. пунктиром — в близкий момент времени $t + \Delta t$. Стрелками обозначены приращения скоростей частиц среды за интервал Δt .

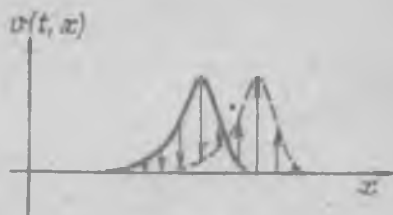


Рис. 44.5

ЗАДАЧА 44.2. Поток воды течет по водопроводной трубе со скоростью $v = 1$ м/с. Найти давление на заслонку при внезапном закрывании крана.

Решение. Столкнувшись с заслонкой, часть воды, прилегающая к ней, останавливается, сжимается и возбуждает волну давления, распространяющуюся навстречу потоку со скоростью звука в воде c . Если бы вода была несжимаема, то скорость всего потока уменьшилась бы мгновенно до нуля. Однако благодаря сжимаемости вода продолжает движение, и до нуля падает скорость только той части столба, которая может быть достигнута волной давления. Выбирая положительное направление оси в направлении скорости потока v , запишем закон изменения количества движения за время Δt :

$$0 - \rho(c\Delta t S)v = F\Delta t.$$

Сила, действующая на заслонку, $F_c = -F = \rho cvS$. Следовательно, давление $p = \rho cv$. Подставляя числовые значения $v = 1$ м/с, $c = 1400$ м/с, найдем $p = 14$ атм. Рассмотренное явление внезапного контакта воды с преградой называется *гидравлическим ударом*. Разрушительное действие капель также объясняется этим явлением.

4. Монохроматическая плоская волна. Предположим, что во всех точках плоскости $x=0$ давление изменяется по гармоническому закону:

$$F(t) = a \cos(\omega t + \alpha).$$

Найдем давление в плоскости с координатой x в момент времени t . Очевидно, функция $\Delta p(t, x)$ имеет такое же значение, какое имело в плоскости $x=0$ в момент времени $t-x/c$, поскольку время распространения волны от плоскости $x=0$ до плоскости x равно x/c : $\Delta p(t, x) = F(t-x/c)$. Следовательно,

$$\Delta p(t, x) = a \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} x + \alpha\right). \quad (44.2)$$

Функция (44.2) описывает бегущую плоскую монохроматическую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x .

Период волны. Давление в любой точке с координатой x_0 определяется функцией $\Delta p(t, x_0)$. Следуя определению периода $\Delta p(t+T, x_0) = \Delta p(t, x_0)$, находим $\omega T = 2\pi$, т. е. $T = 2\pi/\omega$.

Длина волны. Если сделать моментальный «фотоснимок» волны в момент t_0 , то распределение давления описывается функцией

$$\Delta p(t_0, x) = a \cos\left(\omega t_0 - \frac{\omega}{c} x + \alpha\right),$$

периодической по координате x . Поэтому можно ввести новую величину — длину волны λ , характеризующую пространственную периодичность давления условием $\Delta p(t_0, x+\lambda) = \Delta p(t_0, x)$. Из этого условия следует, что $\omega\lambda/c = 2\pi$, или

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega} c = cT. \quad (44.3)$$

Запишем (44.2) в эквивалентной форме

$$\Delta p(t, x) = a \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{2\pi}{\lambda} x + \alpha\right), \quad (44.4)$$

из которой видно, что давление является периодической функцией времени и координаты.

Следует отметить, что в монохроматической волне перемещение неравновесного состояния реализуется в результате взаимодействия между частицами воздуха, колеблющимися около средних равновесных положений. Если же в среде распространяется волновой импульс давления, изображенный на рис. 44.1 (или 44.2), то он реализуется частицами, которые первоначально покоились, затем в течение времени $2R/c$ смещались и снова пришли в состояние покоя.

5. Волны на воде. Свободная поверхность жидкости, находящейся в равновесии в поле тяжести, является плоской. Если под

воздействием внешних сил поверхность жидкости в некоторой области выводится из равновесного положения, то начинается движение частиц жидкости.

С давних пор волны на воде использовались для иллюстрации волнового движения, несмотря на то что они представляют собой значительно более сложное явление, чем звуковые волны. Действительно, частицы воды движутся по сложным траекториям, образуя в каждый момент времени профиль, перемещающийся в определенном направлении. Мы приведем зависимость координат различных частиц воды от времени, образующих волны небольшой амплитуды A на поверхности водоема, глубина которого существенно больше длины волны λ . В этом случае траекторией каждой частицы является окружность радиусом A . Зависимость координат n -й частицы от времени определяется функциями

$$x_n(t) = x_{n0} - A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x_{n0}\right),$$

$$y_n(t) = A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x_{n0}\right), \quad T = \sqrt{\frac{2\pi\lambda}{g}}.$$

В положении равновесия координаты частиц были равны $x_{n0}, y_{n0} = 0$. Положим $A = 1/2a$, $\lambda = 8a$, $x_{n0} = na$. На рис. 44.6 изобра-

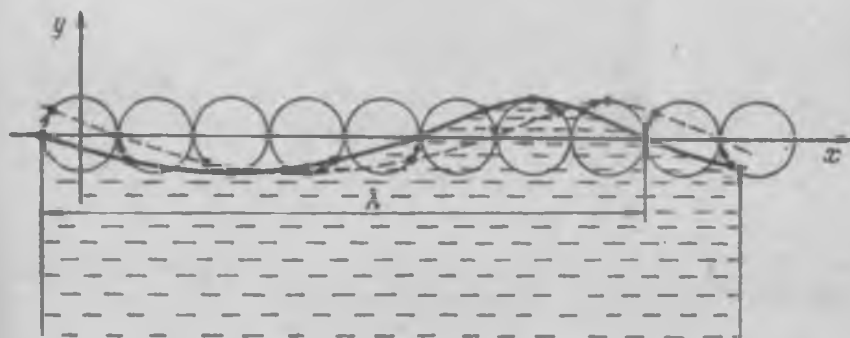


Рис. 44.6

жен профиль волны в момент t и пунктиром профиль — в момент $t + T/8$. Профиль волны образует кривую, которая называется укороченной циклоидой. Таким образом, волны на «глубокой воде» реализуются частицами, движущимися по окружностям. Такую волну нельзя считать ни продольной, ни поперечной. С ростом глубины радиус окружностей уменьшается.

6. Звук. Любое тело, движущееся в воздухе с переменной скоростью, создает вокруг себя области сжатия и разрежения и, та-

жим образом, приводит к возникновению звуковых волн. Источником энергии, уносимой этими волнами, является кинетическая энергия движущегося тела.

Мощность звуков, произносимых человеком при разговоре, $\sim 10 \text{ мкВт} = 10^{-5} \text{ Вт}$. При громком крике мощность доходит до 1000 мкВт , а при очень тихом шепоте падает до $0,01 \text{ мкВт}$.

Сверчок «поет», издавая звуки частотой около 5 кГц . Каждый раз, когда он складывает крылья, возникает звуковой импульс длительностью от 15 до 20 мс. Цикл повторяется с интервалом около 35 мс. Наиболее распространенный тип стрекотания — серии из 4 «слогов» подряд, прерываемые короткими паузами и повторяемые 2—4 раза в 1 с.

А как возникает гром? Правильное объяснение было дано в конце XIX в. Поскольку воздух обладает электрическим сопротивлением, то при прохождении тока разряда в канале молнии температура поднимается до $30\,000^\circ\text{С}$, а давление может превышать атмосферное в 10—100 раз. Гром возникает при быстром расширении нагретого воздуха [27]. Типичное значение частоты грома — 60 Гц .

Волны, образованные источником в безграничной среде, называются бегущими. Важное свойство бегущих волн заключается в том, что они переносят энергию и импульс, так как, для того чтобы привести частицы в движение, им необходимо сообщить энергию. Перенос энергии не сопровождается переносом газа, так как молекулы газа совершают только ограниченное движение, передавая начальный импульс соседним молекулам. Поскольку волновое движение передается молекулами, то неудивительно, что скорость звука в газах примерно равна тепловой скорости движения молекул.

Скорость распространения звуковой волны зависит от свойств среды: в воздухе при 0°С она равна 332 м/с , в воде — 1450 м/с , в твердых телах — примерно $0,5 \cdot 10^4 \text{ м/с}$.

С определением скорости звука связана знаменитая ошибка Ньютона. Попытавшись вычислить скорость звука

$$c = \sqrt{\frac{\Delta p}{\Delta \rho}}, \quad (44.5)$$

он получил значение $c \approx 280 \text{ м/с}$. Дело в том, что эта величина в зависимости от уравнения процесса может принимать различные значения. Ньютон, убежденный в том, что механическое движение, в том числе и волновое, является изотермическим процессом, получил значение $c = \sqrt{RT/M}$. Действительно, подставляя p из (21.5) в (44.5), мы получим результат Ньютона. Эту ошибку исправил в 1816 г. французский физик и математик П. С. Лаплас (1749—1827), когда ясно понял, что распространение звука в воздухе — процесс адиабатический. Используя уравнение процесса

(23.7) ($pV^\gamma = \text{const}$), докажите в качестве упражнения, что скорость звука $c = \sqrt{\gamma RT/M}$. Таким образом, распространение импульса давления сопровождается изменением температуры среды.

В неоднородных средах различные области имеют различную внутреннюю структуру, и поэтому скорости распространения волн в этих областях будут различны. При переходе волн из одной области в другую меняется скорость ее распространения, а на границе раздела областей возникают отраженная и преломленная волны. Какая часть энергии падающей волны перейдет в отраженную и преломленную волны, зависит от того, насколько свойства обеих областей отличаются друг от друга. Например, при падении звука на твердые или жидкие поверхности или, наоборот, из плотной среды в воздух энергия отраженной волны лишь на $1/1000$ меньше энергии падающей, т. е. происходит почти полное отражение (эхо).

7. Слышимый звук. Человеческое ухо способно воспринимать звуковые колебания, лежащие в интервале от 16 до 20 000 Гц, им соответствуют длины волн от 20 м для низких до 2 см для высоких частот. Колебания с частотами, превосходящими 20 000 Гц, называются *ультразвуком*, а колебания с частотами ниже 16 Гц — *инфразвуком*.

Громкость звука, определяемая его действием на ухо, является оценкой субъективной. Чем больше поток энергии, притекающей к уху, тем больше громкость. Удобной для измерений является *интенсивность звука* — энергия, переносимая волной за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную к направлению распространения волны. Интенсивность звука возрастает при увеличении амплитуды колебаний и площади тела, совершающего колебания.

Порог слышимости, т. е. едва заметная на слух интенсивность, зависит от частоты. При частоте 440 Гц порог слышимости близок к 10^{-12} Вт/м². При этом ухо воспринимает избыток давления $2 \cdot 10^{-5}$ Па, приводящий к колебаниям частиц воздуха с ничтожной амплитудой 10^{-8} см, равной диаметру атомов. Разговор, ведущийся в умеренном тоне, приводит частицы воздуха в колебание с амплитудой смещения порядка нескольких тысячных долей сантиметра. Интенсивность звука при этом порядка 10^{-6} Вт/м². Интенсивность сильных звуков, вызывающих у нас болезненные ощущения, лежит в пределах 1—10 Вт/м². Избыточное давление составляет при этом 60 Па, а амплитуда колебаний частиц воздуха $\sim 2,5 \cdot 10^{-2}$ см. Такое давление создает шум двигателя реактивного самолета на расстоянии 50 м.

Отметим, что ухо болезненно воспринимает именно волну давления. Увеличение постоянного атмосферного давления на указанную величину 60 Па остается незаметным для уха. Наиболее чувствительно ухо к звукам частотой 1000—4000 Гц.

8. Беллы и децибеллы. Мы видим, что ухо — чрезвычайно совершенный прибор, способный регистрировать звуки в широком интервале: от минимальной интенсивности до величины, превосходящей минимальное значение в 10^{12} раз. Однако ухо весьма слабо реагирует на изменения интенсивности; его чувствительность пропорциональна логарифму интенсивности. Этот вывод справедлив как для слуха, так и для осязания и зрения. По этой причине интенсивность звука удобно характеризовать безразмерной величиной, являющейся логарифмом отношения интенсивности звука I к минимальному значению интенсивности $I_0 = 10^{-12}$ Вт/м², соответствующей порогу слышимости. Логарифм отношения интенсивностей двух звуков, отличающихся друг от друга в 10 раз, называется беллом (Б) — единицей, получившей свое название в честь изобретателя телефона А. Г. Белла (1847—1922). Однако поскольку ухо различает более мелкие ступени интенсивности, то в качестве единицы громкости используют величину в 10 раз меньшую — децибелл дБ: $10 \text{ дБ} = 1 \text{ Б}$. Поэтому громкость в децибеллах равна отношению

$$10 \lg \frac{I}{10^{-12} \text{ Вт/м}^2}.$$

Порогу слышимости соответствует 0 дБ, обычному разговору — 60 дБ, болезненные ощущения возникают при громкости ~ 120 дБ.

9. Музыкальные звуки. Звуки, воспринимаемые ухом или микрофоном, отличаются различной формой графиков зависимости избыточного давления от времени. Например, обычному шуму соответствует график, изображенный на рис. 44.7. Музыкальные звуки, или музыкальные тона, создаются периодическими (но не

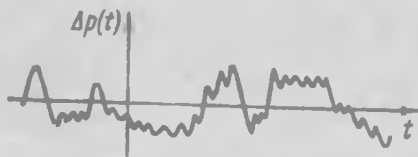


Рис. 44.7

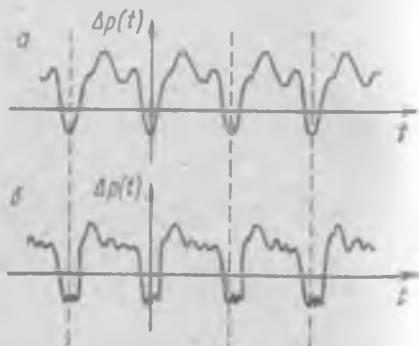


Рис. 44.8

гармоническими) колебаниями определенной частоты ν_0 (рис. 44.8). Частота звуковых колебаний воспринимается как *высота звука* (тона). Однако характер звучания одного и того же тона, произведенного, например, на флейте и кларнете, отличается «окраской» звука — его *тембром*. Различия между двумя тонами одной частоты, звучащими на флейте и кларнете, уже видны из

ис. 44.8 а, б. Более точный анализ звука основан на разложении на гармонические составляющие. Оказывается, периодическую функцию можно представить в виде суммы простых гармонических функций:

$$\Delta p(t) = A_1 \cos(\omega_0 t + \alpha_1) + A_2 \cos(2\omega_0 t + \alpha_2) + \dots$$

определенными амплитудами A_n и фазами α_n , $\omega_0 = 2\pi\nu_0$. Колебание с наименьшей частотой ν_0 задает высоту *основного*, или *числового*, тона. Колебания с более высокими частотами $\nu = n\nu_0$ ($n = 2, 3, \dots$) называются *обертонами*, или *высшими гармониками*. Амплитуды A_n обертонов обычно убывают при увеличении номера гармоники. Различные голоса одного тона отличаются величиной амплитуд обертонов. Наличие обертонов и создает окраску звука — его тембр. Способность уха отличать одну и ту же ноту, взятую на разных инструментах, основывается на разложении звука на гармонические составляющие и физиологическом анализе величины амплитуд обертонов. Высокие обертоны придают звуку резкость. Сурдина, надеваемая на медную трубу, приглушает ряд высоких гармоник и смягчает тембр.

Округлая форма зависимости звукового давления флейты от времени говорит о ее изысканном плавном звучании. Аналогичная зависимость звукового давления кларнета, имеющая «веселинки», отражает более пронзительный звук инструмента.

Каждому голосу соответствуют определенные пределы частот, в которых лежат его главные обертоны: басу — 80—300 Гц, басы — 100—400, тенору — 125—500, контральто — 150—600, сопрано — 250—1100 Гц.

10. **Инфразвук.** В природе инфразвук возникает из-за вихревого движения воздуха в атмосфере или в результате медленных вибраций различных тел. Для инфразвука характерно слабое поглощение. Поэтому он распространяется на большие расстояния.

Организм человека болезненно реагирует на инфразвуковые колебания. В лабораторных условиях установлено, что среднее значение резонансной частоты для всего тела равно 6 Гц, для грудной клетки — 5—8, для головы — 20—30 Гц. При внешних воздействиях, вызванных механической вибрацией или звуковой волной на частотах 4—8 Гц, человек ощущает перемещение внутренних органов, на частоте 12 Гц — приступ морской болезни.

Известно, что в районе Бермудских островов расположена область одного из главных антициклонов (область повышенного давления) северного полушария. Можно предполагать, что интенсивность низкочастотных акустических волн, исходящих от зон активной конвекции, возрастает и оттого ухудшается самочувствие экипажей находящихся здесь судов.

11. **Ультразвук** широко применяется в науке и технике. При помощи ультразвука осуществляется неразрушающий контроль изделий из твердых материалов, звуковидение. Важную роль иг-

рает ультразвук в гидроакустике, поскольку звук является единственным видом волн, хорошо распространяющихся в морской воде.

В живой природе ультразвук генерируют летучие мыши. Сигналы соответствуют диапазону от 20 до 100 кГц. Анализируя отраженные сигналы, они могут определять расстояние до окружающих предметов, размеры и характер их поверхности, азимут [32].

§ 45. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

Спустя два столетия после открытия Ньютоном уравнений движения материальных тел гениальный английский физик Джеймс Клерк Максвелл (1831—1879) получил уравнения, описывающие динамику новой формы материи — электромагнитного поля. Тем самым были полностью установлены теоретические основы классической физики. «...На долю Максвелла, — писал М. Планк, — выпал такой успех, который мы должны причислить к наиболее удивительным деяниям человеческого духа. Ему удалось выманивать у природы в результате одного лишь чистого мышления такие тайны, которые лишь спустя целое поколение и лишь частично удалось показать в остроумных и трудоемких опытах» [37].

Интерес к электрическим и магнитным явлениям возник у Максвелла в 1855 г., когда ему было 24 года. Начал он с изучения работ Фарадея. Позднее он писал: «Иdeen Фарадея были выражены на языке, более всего пригодном для науки, находящейся на стадии зарождения». Он первым оценил их глубину и сумел записать в математической форме. Однако для Максвелла математика была не самоцелью, а орудием познания. К 1861 г. Максвелл уже достиг понимания взаимосвязи между электрическими и магнитными явлениями. В 1864 г. в статье «Динамическая теория поля» он впервые дал определение электромагнитного поля и заложил одну из основ современной науки, которая теперь называется *теорией поля*. Введение поля как физической реальности было революционным шагом в развитии физики. Максвелл сумел объединить и единым образом описать электрические и магнитные явления. Эта тенденция физики — стремление понять все взаимодействия в природе на основе небольшого числа общих принципов — привела в наши дни к впечатляющим результатам при создании единой теории поля. Анализируя свои уравнения, Максвелл в 1865 г. предсказал существование электромагнитных волн, распространяющихся в вакууме и переносящих энергию и импульс. Вычислив их скорость, он получил значение, равное скорости света. Далее он пришел к выводу об электромагнитной природе света и получил знаменитое соотношение $n = \sqrt{\epsilon}$, связывающее коэффициенты преломления и диэлектрической проницаемости. В 1873 г. выходит «Трактат об электричестве и магнетизме», ставший нача-

лом обширного семейства монографий и учебников по классической электродинамике.

Максвелл был разносторонним ученым: теоретиком и экспериментатором. Работы Максвелла по кинетической теории газов сделали его одним из основателей статистической механики. Развивая теорию цветового зрения, он впервые в мире получил цветное изображение. Много времени он отдал усовершенствованию физических приборов.

Максвелл прожил недолгую жизнь и не увидел торжества своей теории. Она существовала на правах гипотезы до открытия в 1888 г. Г. Герцем электромагнитных волн. В борьбе за утверждение теории Максвелла большая заслуга принадлежит русским физикам школы Столетова. Ими проводились измерения для доказательства соотношения $n = \sqrt{\epsilon}$. Наконец, в 1899 г. эксперименты П. Н. Лебедева по измерению светового давления полностью подтвердили теоретические выводы Максвелла. К. А. Тимирязев рассказывает: «В 1903 г. величайший физик своего времени лорд Кельвин, упомянув в разговоре со мной имя Лебедева, добавил: «Вы, может быть, знаете, что я всю жизнь воевал с Максвеллом, не признавая его светового давления, и вот ваш Лебедев заставил меня сдаться перед его опытами» [38].

1. Электромагнитные волны. Постоянные электрическое и магнитное поля могут существовать одно в отсутствие другого и независимо друг от друга. Но если электрическое или магнитное поля изменяются со временем, то картина оказывается существенно иной. Прежде всего изменение магнитного поля вызывает появление электрического поля. В основе этого эффекта лежит явление электромагнитной индукции (см. § 40): при изменении магнитного потока, пронизывающего замкнутый виток, в последнем появляется электрическое поле, действующее во всех точках витка и вызывающее в нем электрический ток. Силовые линии этого поля представляют собой замкнутые кривые, охватывающие силовые линии магнитного поля. В этом явлении виток проволоки играет вспомогательную роль: в нем возникает ток, что подтверждает существование электрического поля, само же возникновение поля ни в какой мере не связано с присутствием витка. Максвелл теоретически обосновал, что аналогично рассмотренному явлению *изменение электрического поля вызывает появление в окружающем пространстве изменяющего магнитного поля*. Его силовые линии подобны силовым линиям магнитного поля тока, текущего в направлении электрического поля, т. е. также являются замкнутыми кривыми. Изменяющееся магнитное поле в свою очередь возбуждает переменное электрическое поле и т. д. Таким образом, переменные электрическое и магнитное поля образуют электромагнитное поле, распространяющееся в пространстве.

Распространение электромагнитного поля в пространстве представляет волновой процесс — электромагнитную волну.

Таким образом, теоретическое предсказание нового явления магнитоэлектрической индукции позволило построить теорию электромагнитных волн.

Электромагнитное поле является особой формой материи и полностью определяется вектором напряженности электрического $\vec{E}$ и вектором индукции $\vec{B}$ магнитного поля. К сожалению, в СИ размерность этих величин различна. Поэтому удобно в дальнейшем ссылаться на величины $\vec{E}$ и $c\vec{B}$, имеющие одинаковые размерности, c — скорость света.

Согласно Максвеллу, векторы напряженностей электрического $\vec{E}$ и индукции магнитного $\vec{B}$ полей волны, распространяющейся в пустом неограниченном пространстве, перпендикулярны друг другу, а также направлению распространения волны. По этой причине электромагнитная волна в неограниченном пространстве является *поперечной волной*. Кроме того, $\vec{E}$ и $c\vec{B}$ имеют одну и ту же величину.

Важным случаем электромагнитных волн являются волны, в которых векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ изменяются во времени по гармоническому закону с частотой ν . Такая волна называется *монохроматической*. Если векторы $\vec{E}$ и $\vec{B}$ (оставаясь взаимно перпендикулярными) вращаются в плоскости, перпендикулярной к направлению распространения волны, то такая волна называется *эллиптически поляризованной*. При этом концы векторов $\vec{E}$ и $\vec{B}$ ($|\vec{E}| = |c\vec{B}|$ в любой момент времени!) описывают эллипс. При *круговой поляризации* эллипс заменяется окружностью. Наконец, если вектор $\vec{E}$ или $\vec{B}$ направлен в любой момент времени параллельно или антипараллельно одному и тому же направлению, то волну называют *линейно поляризованной*.

Для линейно поляризованной волны, изображенной на рис. 45.1, зависимость проекций электрического поля $\vec{E}$ на ось x и магнитного $\vec{B}$ на ось y от времени и координаты z , вдоль которой она распространяется, имеет вид

$$E(t, z) = E_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \varphi\right),$$

$$B(t, z) = \frac{E_0}{c} \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \varphi\right).$$
(45.1)

Здесь E_0 — амплитуда напряженности электрического поля волны, φ — фаза источника волны, T — период волны, $\nu = 1/T = \omega/2\pi$ — частота волны, $\lambda = cT$ — длина волны, $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света. Выражение

$$\Phi = \frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \varphi = \omega\left(t - \frac{z}{c}\right) + \varphi \quad (45.2)$$

называется *фазой волны*. Геометрическое место точек, для которых фаза имеет одно и то же значение, называется *волновой поверхностью*, или *фронтом волны*. Очевидно, положение фронта волны определяется условием

$$\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}z + \varphi = \frac{2\pi}{T}t_0 - \frac{2\pi}{\lambda}z_0 + \varphi,$$

т. е. $z = z_0 + c(t - t_0)$. Это означает, что если в момент времени $t = t_0$ в некоторой точке z_0 поля имели определенное значение, то через промежуток времени $(t - t_0)$ те же значения поля имеют на расстоянии $c(t - t_0)$ вдоль оси z от первоначального места. Следовательно, все значения электромагнитного поля распространяются в пространстве вдоль оси z со скоростью c .

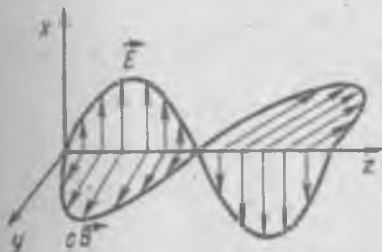


Рис. 45.1

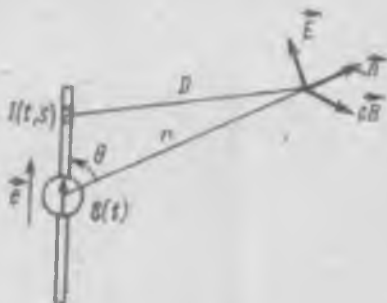


Рис. 45.2

Перенос энергии электромагнитной волны. Используя формулу (32.6), получим плотность энергии электрического поля $W_e = \epsilon_0 E^2(t, \vec{r})$ в момент времени t в точке пространства с координатами $\vec{r}$. Плотность энергии магнитного поля $W_m = \epsilon_0 c^2 B^2$. Сумма энергий электрического и магнитного полей волны представляет собой полную энергию электромагнитного поля

$$W = \epsilon_0 (E^2 + c^2 B^2) = \epsilon_0 E^2 + \mu_0^{-1} B^2.$$

Напомним, что

$$\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi} 10^{-9} \text{ Ф/м}, \quad \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гн/м}, \quad \epsilon_0 \mu_0 = c^{-2}.$$

Подставляя E и B из (45.1), найдем среднее за период значение плотности поля $W_{\text{ср}} = \epsilon_0 E_0^2$.

Перенос энергии электромагнитного поля характеризуется вектором Умова—Пойтинга $S = \epsilon_0 c^2 [\vec{E} \cdot \vec{B}]$. Его величина $|S|$ называется интенсивностью волны и равна энергии, переносимой полем за 1 с через площадку 1 м^2 , перпендикулярную направлению распространения волны. Действительно, размерность $[|\vec{S}|] = \text{Вт/м}^2$. Для линейно поляризованной волны (45.1) среднее значение интенсивности

$$S_{\text{ср}} = \epsilon_0 c^2 \langle E^2 \rangle \quad (45.3)$$

равно $\frac{1}{2} \epsilon_0 c^2 E_0^2$.

В средах, прозрачных для электромагнитных волн определенной частоты, скорость распространения волны v связана с коэффициентом преломления n соотношением $v = c/n$. Частота колебаний ν и период T не изменяются при переходе электромагнитной волны из одной среды в другую, однако длина волны при этом меняется. Действительно, за период колебаний $T = \nu^{-1}$ волна в среде распространяется на расстояние, равное длине волны $\lambda_c = vT$. Следовательно, длина волны в среде λ_c связана с длиной волны в вакууме λ соотношением $\lambda_c = \lambda/n$.

ПРИМЕР 45.1. Длины звуковой и электромагнитной волн в воздухе одинаковы: $\lambda = 2 \text{ см}$. Определим частоты этих волн.

Частота волны ν связана с ее длиной λ соотношением $\lambda = cT = c/\nu$ (c — скорость волны). Для звуковой волны $c = 332 \text{ м/с}$, следовательно, ее частота $\nu = 1,67 \cdot 10^3 \text{ Гц}$. Скорость электромагнитной волны равна скорости света. Поэтому ее частота $\nu = 1,5 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$.

Интересно отметить, что, несмотря на существенно различную природу, электромагнитные и звуковые волны одной длины ведут себя одинаковым образом в явлениях дифракции и отражения от металлических экранов.

2. Излучение электромагнитных волн. Приведем без вывода основные сведения о генерации электромагнитных волн.

Из уравнений Максвелла следует, что электромагнитные волны возникают вследствие движения заряженных частиц с переменной скоростью, т. е. *источником поля является переменный ток*. Поле в свою очередь оказывает влияние на движение зарядов. В теории излучения обратным влиянием поля на токи пренебрегают. В инженерных расчетах предполагается, что сила тока является известной величиной. Простейший излучатель представляет собой отрезок линейного проводника длиной l , подключенный в середине к источнику переменного напряжения $\mathcal{E}(t)$ частотой ν (рис. 45.2).

Ориентацию проводника зададим вектором $\vec{e}$, а начало координат O поместим в середину проводника. Положительное направление тока совпадает с направлением вектора $\vec{e}$.

В результате работы, совершаемой ЭДС, разность потенциалов между точкой с координатой s и серединой проводника

$$U(t, s) = -U_0 \sin ks \cos \omega t$$

приводит к возникновению тока

$$I(t, s) = I_0 \cos ks \sin \omega t.$$

Здесь $k = \pi m / l$, m — целое число.

Рассмотрим излучение, создаваемое током $I(t, s)$, протекающим через малый участок провода длиной Δs , расположенный на расстоянии s от середины проводника. Расстояния от начала координат и элемента Δs до точки наблюдения поля обозначим соответственно r и D . Наибольший интерес представляют поля на достаточно больших расстояниях от проводника: $r \gg l$. Об этой области говорят как о *волновой зоне* излучения. На расстоянии r в направлении, задаваемом единичным вектором $\vec{n}$, индукция магнитного и напряженность электрического полей соответственно равны

$$\Delta \vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 \Delta s}{4\pi r} \frac{dI(t - D/c, s)}{dt} [\vec{n} \cdot \vec{e}], \quad (45.4)$$

$$\Delta \vec{E}(t, \vec{r}) = c [\Delta \vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \vec{n}]. \quad (45.5)$$

Согласно этим формулам значение полей в момент времени t определяется силой тока в более ранний момент времени $t - D/c$. Для больших расстояний $r \gg l$

$$D = \sqrt{(r\vec{n} - s\vec{e})^2} \simeq r - s(\vec{e} \cdot \vec{n}).$$

Для определения полей, создаваемых проводником длиной l , необходимо сложить поля (45.4), (45.5), создаваемые малыми отрезками Δs . Соответствующие суммы вычисляются наиболее просто в том случае, когда распределение зарядов мало меняется за период T , $l/c \ll T$. Это условие можно написать в виде

$$l \ll \lambda, \quad (45.6)$$

т. е. размеры проводника должны быть малы по сравнению с длиной излучаемой волны. Условие (45.6) позволяет пренебречь слагаемым $s(\vec{e} \cdot \vec{n})/c$ в аргументе функции $I(t - r/c + s\vec{e} \cdot \vec{n}/c, s)$, учитывая запаздывание волны в пределах проводника. В этом приближении силу тока можно считать одинаковой в любом сечении проводника. В результате получим

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0 I_0}{4\pi r} \left(\frac{l\omega}{c} \right) \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{c} r \right) [\vec{n} \cdot \vec{e}], \quad (45.7)$$

$$\vec{E}(t, \vec{r}) = c [\vec{B}(t, \vec{r}) \cdot \vec{n}]. \quad (45.8)$$

Таким образом, в волновой зоне поля $\vec{E}$ и $\vec{B}$ образуют сферическую электромагнитную волну, причем векторы $\vec{E}$, $\vec{B}$, $\vec{n}$ — взаимно перпендикулярны. Кроме того, в любой точке вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{e}$. На малом участке пространства волновая поверхность является частью плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{n}$.

Полная мощность, излучаемая проводником, усредненная по периоду волны, равна

$$P = \frac{\mu_0}{12\pi c} I^2 \omega^2 l^2 \quad (45.9)$$

Мощность излучения можно представить как мощность, поглощаемую некоторым активным сопротивлением R :

$$P = \frac{1}{2} I^2 R, \quad R = \frac{\mu_0}{6\pi c} I^2 \omega^2 = \frac{2\pi}{3} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \left(\frac{l}{\lambda} \right)^2,$$

где R — так называемое сопротивление излучения. Здесь мы учли, что $\mu_0 c = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120\pi$ Ом.

В современной радиотехнике используются в основном излучатели, размеры которых соизмеримы с длиной волны. В этом случае учет запаздывания в пределах излучателя приводит к существенному изменению полей в волновой зоне. Особый интерес для практики представляет полуволновой вибратор — излучатель длиной $l = \lambda/2$. В этом случае поля в волновой зоне приобретают вид

$$\vec{B}(t, \vec{r}) = \frac{\mu_0}{2\pi r} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin^2 \theta} \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} r\right) [\vec{n} \cdot \vec{e}], \quad \vec{E} = c[\vec{B} \cdot \vec{n}].$$

Интенсивность излучения (45.3)

$$S = \frac{\mu_0 c I_0^2}{8\pi^2} \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)}{\sin \theta} \right]^2$$

не содержит множителя ω^2 .

Приведенные выше выражения относились к полям излучателя, помещенного в безграничное пространство. Наличие водной или земной поверхности приводит к более сложной по сравнению с (45.7), (45.8) структуре электромагнитного поля. Одна из особенностей состоит в том, что векторы $\vec{B}$ и $\vec{E}$ образуют с вектором $\vec{n}$ угол, не равный 90° .

Излучение свободных заряженных частиц. Частицы, взаимодействующие с внешними электромагнитными полями, движутся с переменной скоростью. Тем самым каждая из них становится источником электромагнитного излучения. Используя это явление, удалось создать разнообразные генераторы излучения.

Большой интерес представляет излучение электронов, движущихся в электрических и магнитных полях космических объектов. Измерения мощности излучения и поляризации позволяют получить информацию об энергии электронов, величине и направлении полей в удаленных частях Вселенной.

Черенковское излучение. В 1934 г. С. И. Вавилов и П. А. Черенков обнаружили излучение быстрых электронов в веществе. Природа излучения была выяснена в 1937 г. советскими физиками И. Е. Таммом и И. М. Франком. Оказалось, что излучение возникает при движении электронов с постоянной скоростью, причем скорость электронов должна быть больше скорости света $v = c/n$ в данной среде.

Совсем недавно было выяснено, что источником излучения может стать и неподвижный заряд, находящийся в среде, диэлектрическая проницаемость которой является функцией времени.

Излучение атомов и молекул рассматривается ниже в § 56.

3. Опыты Герца. После знакомства с теорией излучения легче понять те трудности, которые преодолел немецкий физик Г. Герц (1857—1894) на пути к открытию электромагнитных волн. Сначала он обнаружил взаимодействие незамкнутых проводников. Один из них — вибратор — представлял собой два отрезка провода, подключенных к индукционной катушке (рис. 45.3). При определенной разности потенциалов в промежутке между ними возникала искра и возбуждала колебания тока. Второй проводник — резонатор — представлял собой прямоугольный контур с промежутком, на концах которого были укреплены небольшие медные шарики. При работе вибратора Герц наблюдал искру в разрыве цепи резонатора. Эта искра была столь слаба и кратковременна, что наблюдения проводились в темноте. Пытаясь лучше разглядеть искру, он заслонил ее экраном от света, излучаемого искрой вибратора. Длина искры стала меньше. Исследуя это явление, Герц установил, что ультрафиолетовое излучение искры генератора усиливает разряд резонатора. Таким образом, в 1887 г. чисто «случайно» было открыто явление, называемое фотоэффектом (§ 56).

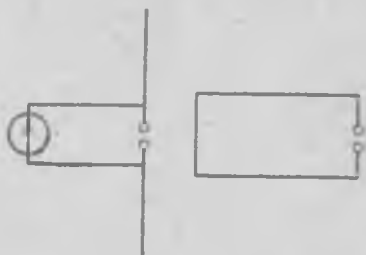


Рис. 45.3

Итак, два проводника взаимодействуют без электрического контакта. Мы понимаем, что электрическое поле волны, почти

параллельное вибратору, создает разность потенциалов в прямолинейном проводе антенны только в том случае, если проводники параллельны. Однако Герц еще не говорит о волнах. Рассчитывая эффект по законам теории дальнего действия, он приходит к выводу, что на больших расстояниях теория «не работает». Герцу пришлось обратиться к трудам Максвелла [39]. Результаты опытов, проведенных в 1888 г., неопровержимо доказали существование электромагнитных волн, предсказанных Максвеллом. При частоте колебаний тока в вибраторе $\nu = 5 \cdot 10^8$ Гц он получил волны длиной $\lambda = 60$ см. Герц наблюдал их отражение, преломление, интерференцию, поляризацию.

4. Свет — электромагнитная волна. Электромагнитные волны могут иметь различные частоты. Классификация электромагнитных волн по частотам называется *шкалой электромагнитных волн*.

Волны с низкими частотами менее 100 кГц называются *длинными волнами* (килогерц = 10^3 Гц, мегагерц = 10^6 Гц, гигагерц = 10^9 Гц). Этим частотам соответствуют в вакууме длины волн от 3000 м и выше. *Радиодиапазон* лежит в области от 100 кГц до 30 ГГц (длины волн лежат соответственно от 3000 м до 1 см). К нему примыкает *микроволновая область* — миллиметровые волны длиной от 1 см до 0,5 мм. Источниками излучения в этой области частот являются электрические токи в антеннах, электроны небольших энергий (до 1 МэВ), движущиеся в электрических и магнитных полях.

Далее следует *инфракрасный диапазон* (до $4,3 \cdot 10^{14}$ Гц). Интенсивными источниками инфракрасных волн являются молекулы нагретого вещества.

Электромагнитное излучение в интервале длин волн от 0,76 мкм (частота $4,3 \cdot 10^{14}$ Гц) до 0,38 мкм (частота $7,6 \cdot 10^{14}$ Гц) лежит в области чувствительности человеческого глаза: это *видимый свет* от темно-красного до темно-фиолетового цвета.

Далее лежат *ультрафиолетовые волны*, занимающие область частот до $5 \cdot 10^{16}$ Гц (длина волны $6 \cdot 10^{-7}$ см). Источниками видимого и ультрафиолетового излучения являются возбужденные электрическим разрядом и другими способами атомы, заряженные частицы, движущиеся с большими энергиями (для электрона > 500 МэВ), наконец, за областью ультрафиолета лежит область *рентгеновского излучения* (до $3 \cdot 10^{19}$ Гц). Длина волны рентгеновских лучей порядка размеров атома. Рентгеновские лучи испускаются электронами при столкновениях с тяжелыми металлами. Излучение с более короткими длинами волн называется *гамма-излучением*. γ -лучи испускаются в процессах распада некоторых радиоактивных элементов.

5. Сигналы и спектры сигналов. Любая информация может быть преобразована в электрическое напряжение $U(t)$ или ток $I(t)$. Например, в угольном микрофоне источник постоянного напряжения присоединен к неподвижному электроду и мембране,

пространство между которыми заполнено угольным порошком. Под воздействием избыточного звукового давления мембрана действует на порошок с переменной силой. Сопротивление порошка изменяется в соответствии с силой давления. В результате переменная составляющая тока повторяет закон изменения звукового давления.

Однако непосредственная передача сигналов в виде радиоволн звуковой частоты невозможна. Действительно, звуку частотой $\nu = 10^4$ Гц должна соответствовать радиоволна длиной $\lambda = 30$ км. Вибратор размерами $l \ll \lambda$ создает согласно (45.9) ничтожно малую интенсивность излучения. Поэтому для передачи сигналов используют радиоволны высокой частоты, один из параметров которой (амплитуда, частота или фаза) должен меняться в соответствии с передаваемым сообщением. Этот процесс называется *модуляцией*.

В качестве примера рассмотрим *амплитудную модуляцию*: амплитуда напряженности электрического и индукции магнитного полей, принимаемых на расстоянии r от излучающей антенны,

$$E(t, r) = E_0(t) \cos \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} r + \varphi \right), \quad (45.10)$$

$$B(t, r) = \frac{1}{c} E_0(t) \cos \left(\omega_0 t - \frac{\omega_0}{c} r + \varphi \right)$$

является медленной функцией времени: $|E_0'(t)| \ll \nu_0 |E_0(t)|$. В этом случае поля E и B можно представить в виде наложения монохроматических волн, частоты которых принимают непрерывный ряд значений, а амплитуды и фазы являются функцией частоты: $A(\nu)$, $\alpha(\nu)$. Зависимость $A(\nu)$ называют спектром амплитуд, а указанное выше представление — *спектральным разложением*. Это разложение имеет различный характер в зависимости от вида функции $E_0(t)$. Теоретически спектр имеет бесконечное протяжение по частоте, но практически амплитуды $A(\nu)$ заметно отличны от нуля лишь в некоторой области частот $\Delta\nu$, называемой *шириной спектра*. В том случае, когда амплитуда и фаза заметно меняются в течение промежутка времени τ , ширина спектра $\Delta\nu = |\nu - \nu_0| \gtrsim 1/\tau$. Мы видим, что волна действительно тем более монохроматична ($\Delta\nu$ мало), чем больше τ .

В качестве примера разберем случай, когда $E_0(t) = A_0 + A_c(t)$,

$$A_c(t) = A_1 \cos 2\pi\nu_1 t, \quad \nu_1 \ll \nu_0, \quad A_1 < A_0. \quad (45.11)$$

Подставляя полную амплитуду в (45.10), получим после тригонометрических преобразований

$$E(t, r) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \alpha) + 1/2 A_1 \cos[2\pi(\nu_0 + \nu_1)t + \alpha] + 1/2 A_1 \cos[2\pi(\nu_0 - \nu_1)t + \alpha], \quad \alpha = \varphi - (\omega_0/c)r. \quad (45.12)$$

Это означает, что амплитудно-модулированный сигнал представляет собой сумму трех монохроматических сигналов с частотами ν_0 , $\nu_0 + \nu_1$, $\nu_0 - \nu_1$. Зависимость $A(\nu)$ показана на рис. 45.4.

ПРИМЕР 45.2. Оценим ширину полосы частот: а) радиовещательных станций, б) телевизионных станций.

Электромагнитная волна, с помощью которой передается информация, называется *несущей волной*.

а) При амплитудной модуляции амплитуда сигнала равна сумме членов вида (45.12) с частотами ν_1 , лежащими в интервале $0 < \nu_1 \leq \nu_{\max}$, так как микрофон преобразует изменение звукового давления в электрическое напряжение.

Поскольку характерное время изменения сигнала $\tau \sim \frac{1}{\nu_{\max}}$, то ширина спектра волны, излучаемой передатчиком, $\Delta\nu \geq \tau^{-1} = \nu_{\max}$. Обычно радиостанциям предоставляется диапазон частот шириной 9 кГц. Этого диапазона вполне хватает для передачи речи и музыки. Эта полоса расположена симметрично относительно несущей частоты ν_0 .

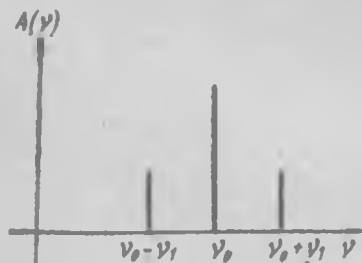


Рис. 45.4

б) Для передачи телевизионного изображения объекта последнее проецируется на тонкий листок слюды, передняя часть которого покрыта $N = N_1 \cdot N_2$ частицами цезиевого серебра (N_1 — число частиц в горизонтальной линии, N_2 — число горизонтальных ли-

ний), а задняя — слоем электропроводящего материала, который соединен с выходной нагрузкой. Это устройство действует как совокупность множества конденсаторов с одной общей пластиной. Вследствие фотоэффекта частицы, находящиеся в областях с большой освещенностью, теряют больше электронов и приобретают больший потенциал. Эти электроны собираются на металлическом кольце, соединенном резистором с задней пластиной слюды. При пробегании электронного луча по горизонтальной линии частицы серебра восстанавливают свой потенциал, т. е. происходит разряд крошечных конденсаторов. В результате на резисторе возникает импульс напряжения, называемый *видеосигналом*. При следующем пробеге просматривается соседняя линия и так далее — все изображение. Самая первая электронная передающая трубка, известная под названием *иконоскоп*, была создана в 1931 г. русским исследователем В. К. Зворыкиным.

Если луч пробегает кадр за время T_k , то частота смены кадров $\nu_k = T_k^{-1}$. Поэтому каждая частица ошупывается лучом за $T_k/N = (N\nu_k)^{-1}$ с. Следовательно, длительность каждого импульса не должна превышать $\tau \sim (N\nu_k)^{-1}$. В соответствии с этим ширина спектра видеосигнала $\Delta\nu \geq N\nu_k$.

Для того чтобы изображение воспринималось слитно, в 1 с передается 25 кадров, т. е. $\nu_k = 25$ Гц. По стандарту, принятому в СССР, $N_2 = 625$ строк. Полагая $N_1 = 400$, получим ширину спектра $\Delta\nu \geq 6,25$ МГц. Несущая частота для телевизионного канала лежит в диапазоне 50—200 МГц.

Почему передача одного кадра изображения Луны советской автоматической станцией в 1959 г. длилась $T_k = 25$ мин? Дело в том, что наряду с полезным сигналом приемная станция принимает случайные сигналы — шумы. Чем шире полоса частот, воспринимаемая приемником, тем выше уровень шумов. Если полезный сигнал слаб, то его можно не заметить на фоне шумов. Мощности передатчиков на космических кораблях малы. Поэтому уровень шумов можно снизить уменьшением полосы частот. Для этого достаточно увеличить время передачи одного кадра.

ПРИМЕР 45.3. Покажем, что чем больше частота волны, тем больше сведений в единицу времени можно передать с ее помощью.

Допустим, мы хотим передать сообщение азбукой Морзе, используя несущую волну частотой ν_0 . Для этой цели волну необходимо модулировать сигналами, соответствующими точкам и тире. Специальный генератор сигналов создает импульсы, изображенные на рис. 45.5. Длительность импульса, соответствующего точке,



Рис. 45.5

в 100 и более раз превосходит период высокочастотных колебаний: $\tau_0 = 100/\nu_0$. Длительность тире равна $3\tau_0$, интервал между соседними знаками равен длительности точки τ_0 , между группой знаков, образующих букву, $3\tau_0$, а между словами $5\tau_0$. Прочитайте слово, изображенное на рис. 45.5.

Статистический анализ показал, что в среднем на одно слово приходится пять букв, для передачи которых требуется время $48\tau_0$; интервал $22\tau_0$ соответствует передаче знаков, а промежутков времени $26\tau_0$ — паузам между знаками и буквами, включая паузу в конце слова. Поэтому передача одного слова занимает $4800/\nu_0$ с. Таким образом, чем больше частота волны, на которой ведется передача, тем больше информации можно передать в единицу времени. Например, на длине волны $\lambda = 1$ мм мы можем передать за 1 с в тысячу раз больше знаков, чем на волне длиной $\lambda = 1$ м.

6. Некоторые свойства электромагнитных волн. Хотя все электромагнитные волны по своей природе одинаковы, взаимодействие

волн с веществом зависит от частоты, направления распространения и состояния поляризации. Так, например, показатель преломления в общем случае зависит от частоты (см. § 50). Показатель преломления некоторых кристаллов зависит еще от направления распространения волны (пространственная дисперсия).

Радиоволны свободно проходят через диэлектрики и поглощаются в металлах. Рентгеновские лучи проникают через легкие металлы. Ультрафиолетовые лучи поглощаются большинством тел.

Когда свет падает на твердые тела, газы, жидкости, он так или иначе действует на них. При поглощении световой волны или других электромагнитных волн энергия, которую она несет с собой, превращается в тепло и нагревает непрозрачное тело. Свет оказывает также давление на тела, на которые он падает.

Важное значение имеют процессы, в которых поглощение электромагнитных волн веществом вызывает химические реакции. Важнейший из них — фотосинтез: в результате поглощения энергии излучения Солнца из энергетически бедных веществ образуются энергетически более богатые соединения — углеводы и др. Аккумулируемая энергия излучения выделяется затем в реакциях окисления.

При взаимодействии с веществом проявляются также квантовые свойства света (§ 56, 57).

В настоящее время благодаря появлению мощных источников излучения — *квантовых оптических генераторов* — возник новый раздел оптики — *нелинейная оптика*. Лазеры позволяют получить световые волны, напряженность электрического поля которых $E \sim 10^6 \div 10^8$ В/см совпадает по величине с полем, действующим со стороны ядра на электроны атома. (Напряженность электрического поля световой волны, пришедшей от Солнца, $E \sim 10$ В/см.) При распространении такой волны меняются оптические свойства среды. Показатель преломления становится функцией напряженности электрического поля волны.

§ 46. ОСНОВЫ РАДИОТЕХНИКИ

Радиотехника — это наука о методах излучения и приема электромагнитных волн, методах преобразования электрических сигналов, конструирования устройств и приборов для научных исследований, телевидения, радиовещания, радионавигации, вычислительной техники, автоматики и других целей.

Основоположником радиотехники является выдающийся ученый А. С. Попов (1859—1906), который 7 мая 1895 г. на заседании Русского физико-химического общества демонстрировал первое радиоприемное устройство. В этом же году он провел опыты по приему и передаче волн на расстояние до 60 м. Прошло немного времени и радиотехника достигла крупных успехов в решении

задач промышленного, экономического и культурного прогресса. Сфера ее влияния столь многообразна, что, по существу, нет ни одной области человеческой деятельности, где бы не «работали» конденсаторы, резисторы, диоды, триоды и т. д. В этом разделе мы рассмотрим простейшие элементы линии радиосвязи, усиление и детектирование высокочастотных сигналов. Однако вначале познакомимся с полупроводниковыми приборами, без которых немыслима современная электроника.

1. Полупроводниковые приборы. В узком смысле полупроводниками называют вещества IV группы периодической системы, у которых проводимость при комнатной температуре незначительно превышает проводимость изоляторов. Поэтому возможность создания полупроводниковых приборов целиком связана с внесением в эти вещества различных примесей.

Донорная примесь. Внесем в кристалл германия (валентность равна 4) атом мышьяка, имеющего 5 валентных электронов. При замене узла основной решетки атомом примеси мы получаем один лишний электрон. В этом случае образуется, как говорят, полупроводник *n*-типа. При концентрации примеси 0,001% число электронов возрастает в 10^8 раз.

Акцепторная примесь. Если ввести в германий примесь галлия, имеющего 3 валентных электрона, то при образовании связи недостающий электрон отбирается от соседних атомов германия. В результате образуется состояние с положительным ионом германия, называемое дыркой. В этом случае образуется проводник *p*-типа. Очень важно, что при наличии дырок через вещество может проходить ток в отсутствие свободных электронов. Слабо связанные электроны переходят на место дырок к положительному электроду. Дырки, которые представляют собой состояния с отсутствующим электроном, передвигаются к отрицательному электроду. Этот процесс схематически изображен на рис. 46.1. Электропроводность, обусловленная движением дырок, называется дырочной.

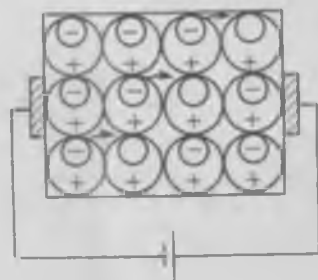


Рис. 46.1

Электронно-дырочный переход. Если соединить полупроводники *n*- и *p*-типов, то на границе областей образуется ток, называемый электронно-дырочный переход: часть носителей каждого знака диффундирует через границу, *n*-область приобретает положительный, а *p*-область отрицательный заряд. При этом возникает электрическое поле, препятствующее движению новых носителей. Образуется слой шириной $\sim 10^{-5}$ см, свободный от носителей и имеющий сопротивление большее, чем весь кристалл. Уникальные

свойства полупроводниковых веществ связаны с возможностью изменения сопротивления n — p -перехода внешним источником ЭДС.

Полупроводниковый диод. Подсоединим n — p -переход к батарее (рис. 46.2а). Тогда электроны движутся направо, а дырки налево. Переходная область сужается, сопротивление n — p -перехода падает, тем самым создаются условия для прохождения сильного тока. Уменьшение числа электронов в n -области вследствие рекомбинации (захвата электрона дыркой) компенсируется притоком электронов от источника ЭДС. С другой стороны, дырки,

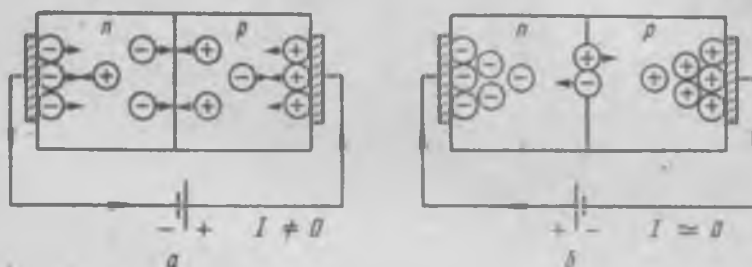


Рис. 46.2

исчезающие в p -области, появляются снова из-за ухода электронов к положительному электроду ЭДС.

Положение сильно меняется, если ЭДС имеет противоположную полярность (рис. 46.2б). Теперь практически все электроны из n -области и дырки из p -области не могут преодолеть переход. Однако небольшой ток все-таки существует. Он возникает вследствие того, что при комнатных температурах появляется небольшое число дырок и электронов. Таким образом, n — p -переход обладает односторонней проводимостью, т. е. является полупроводниковым диодом.

Транзистор (полупроводниковый триод). Основу транзистора составляет кристалл, в котором создают два близко расположенных n — p -перехода. Такую структуру можно создать двумя способами, реализуя последовательность p — n — p или n — p — n . Средняя область называется *базой*. Слой с наибольшей концентрацией основных носителей называется *эмиттером*, а с наименьшей — *коллектором*. На рис. 46.3 изображены два типа транзисторов и их условные обозначения. В радиотехнике они используются для усиления тока, напряжения и мощности слабых сигналов. Транзисторы включают так, чтобы они составляли как бы два встречно включенных диода.

2. Схема с общим эмиттером является основной в усилительной технике (рис. 46.4 а, б). Положительные направления токов базы (I_b), эмиттера (I_e) и коллектора (I_k) указаны на рисунке стрел-

ками. Введем также обозначения для разностей потенциалов: $V_6 = \phi_6 - \phi_3$, $V_k = \phi_k - \phi_3$. Зависимости между входными и выходными токами I_6 , I_k и напряжениями V_6 , V_k описываются вольт-амперными характеристиками

$$I_6 = F(V_6, V_k), \quad I_k = f(I_6, V_k), \quad (46.1)$$

показанными на рис. 46.5 а, б. Входные характеристики (рис. 46.5а), т. е. зависимость тока базы от напряжения база — эмиттер при различных значениях напряжения V_k , имеют сходство с характеристикой диода. Если повышать напряжение V_k , то характеристики, соответствующие значениям $V_k \geq 0,5$ В (для транзистора типа КТ 315), практически совпадают.

Выходные характеристики представляют собой зависимость тока коллектора I_k от напряжения V_k при различных значениях тока базы I_6 . Можно заметить, что небольшим значениям I_6 соответствуют большие токи коллектора. Дело в том, что большая часть электронов, перешедших из

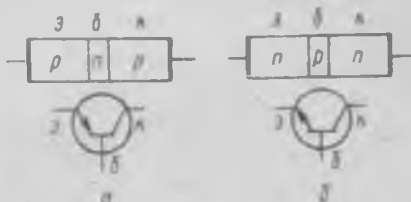


Рис. 46.3

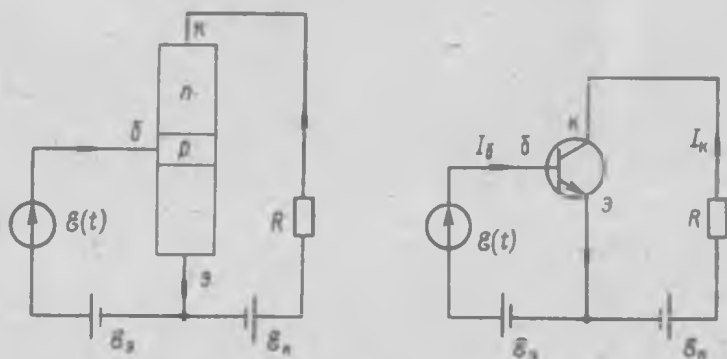


Рис. 46.4

эмиттера в область базы, выполненную в виде очень тонкого слоя $\sim 10^{-5}$ м, свободно проходят к коллектору. Остальные электроны рекомбинируют с дырками базы. Этот процесс поддерживается током $I_6 \ll I_k = \alpha I_6$. В выпускаемых промышленностью транзисторах $\alpha \sim 0,9 - 0,995$.

Обратимся к усилительным свойствам транзистора. Мы имеем сигнал $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, поданный на вход схемы (рис. 46.4). Помимо характеристик запишем еще два уравнения:

$$V_0 = \mathcal{E}(t) + \mathcal{E}_s, \quad V_k = \mathcal{E}_k - I_k R. \quad (46.2)$$

Выберем сначала рабочую точку усилителя, полагая $\mathcal{E}(t) = 0$. Ее положение находится в результате графического решения уравнений

$$V_{00} = \mathcal{E}_s, \quad I_{k0} = \frac{1}{R} (\mathcal{E}_k - V_{k0}), \quad I_{k0} = I(I_{00}, V_{k0}). \quad (46.3)$$

Пусть $\mathcal{E}_s = 0,6$ В, $\mathcal{E}_k = 10$ В, $R = 2$ кОм, тогда $I_0 = 20$ мкА, $V_{k0} = 5$ В, $I_{k0} = 2,5$ мА. Будем искать решение уравнений (46.1), (46.2) в рабочем режиме в виде

$$I_0 = I_{00} + i_0, \quad I_k = I_{k0} + i_k, \quad V_0 = \mathcal{E}_s + u_0, \quad V_k = V_{k0} + u_k.$$

Из (46.2) находим

$$u_0 = \mathcal{E}(t), \quad u_k = -i_k R. \quad (46.4)$$

Уравнения характеристик вблизи рабочей точки можно представить в виде линейной зависимости

$$u_0 = h_{11} i_0, \quad i_k = h_{21} i_0 + h_{22} u_k, \quad (46.5)$$

где h_{ik} — основные параметры транзистора: $h_{11} = 1$ кОм, $h_{21} = 50$, $h_{22} = 2 \cdot 10^{-3}$ Ом⁻¹. Исключая из (46.5) i_0 , получим соотношение

$$i_k = S u_0 + \frac{1}{R_i} u_k, \quad (46.6)$$

$$S = \frac{h_{21}}{h_{11}}, \quad R_i = \frac{1}{h_{22}}.$$

выявляющее аналогию между транзистором и вакуумным триодом (см. ниже).

Что же нам дает усилительная схема? Из (46.4), (46.6) получим

$$i_k(t) = \frac{SR_i}{R + R_i} \mathcal{E}(t). \quad (46.7)$$

Из этого выражения видно, что транзистор эквивалентен генератору, развивающему ЭДС в SR_i раз большую, чем напряжение, приложенное в цепи база—эмиттер, и имеющему внутреннее сопротивление R_i .

Схема обладает возможностью усиливать ток сигнала. Коэффициент усиления

$$k_I = \frac{i_k}{i_6} = \frac{SR_I h_{11}}{R + R_I} = \frac{h_{21}}{1 + h_{22}R}. \quad (46.8)$$

Подставляя числовые значения, получим коэффициент усиления $k_I = 10$, т. е. сигнал при малом токе базы управляет большим током коллектора.

Схема позволяет усиливать напряжение сигнала. Коэффициент усиления по напряжению

$$k = \left| \frac{u_k}{u_6} \right| = \frac{SR_I R}{R + R_I} = \frac{h_{21}R}{h_{11}(1 + h_{22}R)}. \quad (46.9)$$

Для схемы рис. 46.4 $k = 20$. Наконец, коэффициент усиления по мощности

$$k_P = \left| \frac{i_k u_k}{i_6 u_6} \right| = k k_I = 200.$$

На рис. 46.5 отмечены три точки, соответствующие входному сигналу с амплитудой 0,1 В. В цепи базы амплитуда тока 0,1 мА.

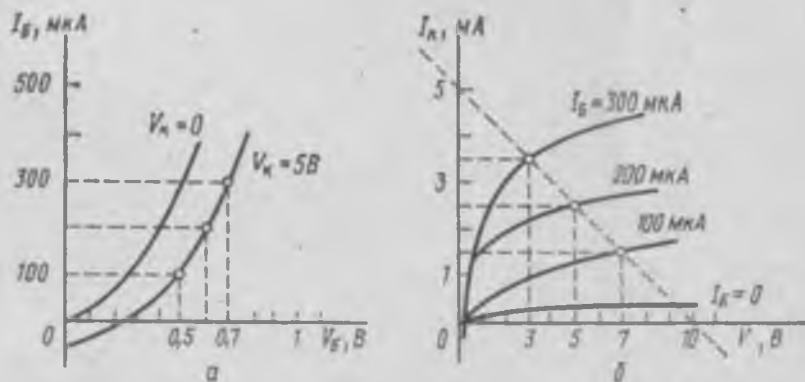


Рис. 46.5

В цепи коллектора амплитуды тока и напряжения равны соответственно 1 мА и 2 В.

3. Усилитель на вакуумном триоде. Работа лампового усилителя основана на использовании управляющего действия сетки. Упрощенная схема усилителя показана на рис. 46.6: $\mathcal{E}_a = 100$ В, $\mathcal{E}_c = 3$ В, $R = 6$ кОм. Роль батареи $\mathcal{E}_c$ состоит в том, чтобы сдвинуть рабочую точку в область отрицательных значений напряжения. В этом случае сеточный ток будет отсутствовать. Введем обозна-

чения для разности потенциалов между анодом и катодом $V_a = \varphi_a - \varphi_k$, сеткой и катодом $V_c = \varphi_c - \varphi_k$.

Работа усилителя описывается уравнениями

$$V_c = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}_c, \quad V_a = \mathcal{E}_a - I_a R,$$

к которым следует добавить вольт-амперную характеристику триода

$$I_a = f(V_c, V_a).$$

Определим вначале положение рабочей точки, разрешая графически уравнения

$$V_{c0} = -\mathcal{E}_c, \quad V_{a0} = \mathcal{E}_a - I_{a0} R, \quad I_{a0} = f(V_{c0}, V_{a0}).$$

Переходя к новым переменным $V_a = V_{a0} + u_a$, $V_c = -\mathcal{E}_c + u_c$, $I_a = I_{a0} + i_a$, получим систему уравнений

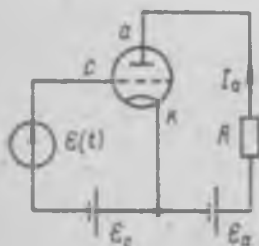


Рис. 46.6

$$u_c = \mathcal{E}(t), \quad u_a = -i_a R, \quad (46.10)$$

$$I_a = f(V_{a0} + u_a, V_{c0} + u_c) - f(V_{c0}, V_{a0}). \quad (46.11)$$

Для малых сигналов мы можем представить (46.11) в виде

$$i_a = S u_c + \frac{1}{R_i} u_a,$$

$$S = \frac{\Delta f}{\Delta u_c}, \quad \frac{1}{R_i} = \frac{\Delta f}{\Delta u_a}, \quad (46.12)$$

где S , R_i — крутизна и внутреннее сопротивление триода. Сопоставляя (46.6) и (46.12), приходим к выводу, что формально аноду, сетке и катоду вакуумного триода можно сопоставить коллектор, базу и эмиттер транзистора. Из (46.10), (46.12) находим соотношение

$$i_a(t) = \frac{S R_i}{R + R_i} \mathcal{E}(t),$$

аналогичное (46.7). При $S = 1,6 \cdot 10^{-3} \text{ Ом}^{-1}$, $R_i = 10 \text{ кОм}$, $R = 6 \text{ кОм}$ коэффициент усиления по напряжению $k = 6$.

4. Детекторный приемник. В заключение рассмотрим работу наиболее простого устройства, не имеющего усилителя высокой и низкой частот, — детекторного приемника (рис. 46.7 а).

Приемник рассчитан на прием сигналов радиовещательных станций в диапазоне средних длин волн: $200 \text{ м} \leq \lambda \leq 3000 \text{ м}$, в интервале частот $10^5 - 1,5 \cdot 10^6 \text{ Гц}$. Оценим вначале величину ЭДС,

наводимую в приемной антенне длиной h . Учитывая (45.7) — (45.9), получим величину напряженности электрического поля на расстоянии r от излучателя мощностью P :

$$E = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{300c}{4\pi} P}.$$

Для оценок положим $P=1$ МВт, $r=30$ км. Тогда $E=0,1$ В/м. При длине антенны $h=1$ м величина ЭДС $=0,1$ В.

Электромагнитные волны создают в антенне высокочастотные колебания $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0(t) \cos \omega_0 t$ с частотой ω_0 и амплитудой $\mathcal{E}_0(t)$. Последовательно соединенные катушка индуктивности и конденсатор переменной емкости образуют резонансный контур (§ 43).

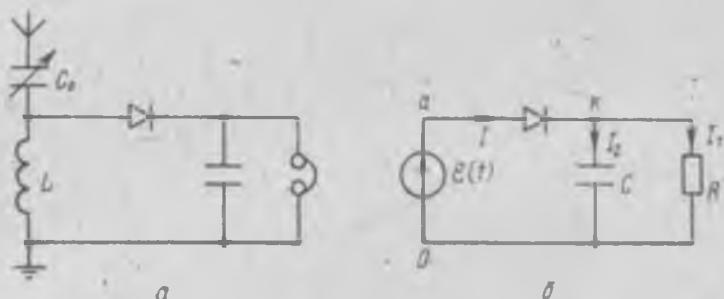


Рис. 46.7

При настройке приемника для приема радиостанции, работающей на частоте ω_0 , величину C_0 изменяют таким образом, чтобы выполнялось соотношение $\omega_0 = 1/\sqrt{LC_0}$. При этом собственная частота контура становится равной частоте станции и наступает резонанс: напряжение на катушке достигает максимума, и это обеспечивает наиболее благоприятные условия для приема данной станции. При добротности контура Q амплитуда напряжения на катушке индуктивности $\sim Q\mathcal{E}_0(t)$.

Предположим, что амплитуда изменяется с частотой звукового сигнала: $\mathcal{E}_0(t) = A_0 + A_1 \cos \omega t$, $\nu = \omega/2\pi = 4$ кГц. Задача детектора — полупроводникового диода — состоит в том, чтобы преобразовать амплитудно-модулированное напряжение $\mathcal{E}(t)$ в напряжение звуковой частоты. Этот процесс называется детектированием.

Детектирование. Принципиальная схема приемника изображена на рис. 46.7 б. Емкость конденсатора $C=5000$ пф, сопротивление наушников $R=3$ кОм. Аналогичная схема была рассмотрена в § 41 в качестве выпрямителя переменного напряжения.

Обозначим разность потенциалов $V = \varphi_a - \varphi_k$ на диоде и $U = \varphi_k - \varphi_0$ на RC -цепи, образованной конденсатором и наушниками.

Стрелки указывают положительные направления токов I , I_1 , I_2 . Из условия $I_1 + I_2 = I$ находим уравнение

$$CU' + \frac{1}{R}U = f(\xi(t) - U), \quad (46.13)$$

описывающее работу детектора. Здесь $I = f(V)$ — вольт-амперная характеристика диода. Хотя $I(V) > 0$ при $V > 0$, достаточно заметный ток появляется у кремниевых диодов при $V \geq 0,4$ В. Предположим, что $|\xi_0(t)| > 0,4$ В. Тогда вольт-амперную характеристику

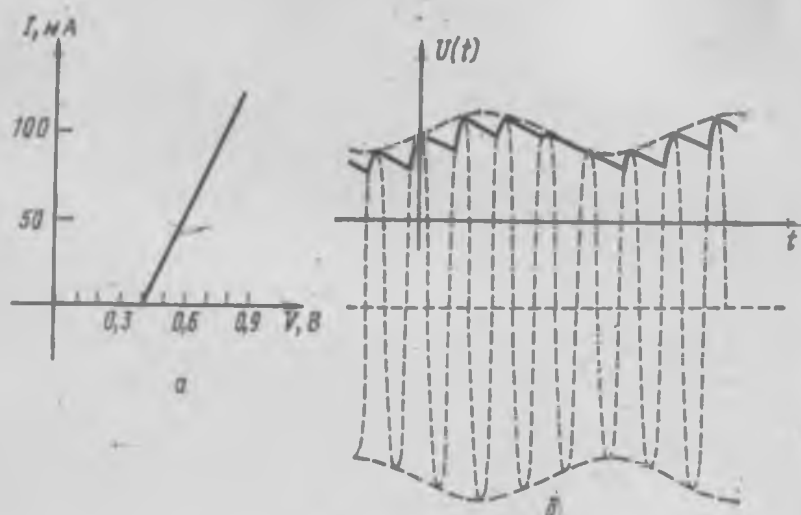


Рис. 46.8

диода (типа КД 104А) можно представить в виде кривой, изображенной на рис. 46.8 а,-

$$f(V) = \begin{cases} 0, & V < V_n, \\ \frac{1}{R_0} V, & V \geq V_n, \end{cases}$$

где $R_0 = 4$ Ом, $V_n = 0,4$ В.

Предварительно опишем качественно процесс детектирования. Пусть: $\lambda_0 = 300$ м. Поскольку постоянная зарядки конденсатора $\tau_s = CR_0 = 2 \cdot 10^{-8}$ с существенно меньше периода высокочастотных колебаний $T_0 = 10^{-6}$ с, то при открытом диоде напряжение $U(t)$ повторяет форму входного сигнала $\xi(t)$ (рис. 46.8 б). В моменты $t_n = nT$ (n — целое число) диод запирается и конденсатор разряжается через резистор. Поскольку постоянная разряда $\tau_p = CR = 1,5 \cdot 10^{-5}$ с больше T_0 , то во время разряда конденсатора через резистор R напряжение $U(t)$ медленно спадает. При значениях

t , удовлетворяющих условию $U(t) = \mathcal{E}(t) - V_n$, диод отпирается. Каждый новый импульс тока подзаряжает конденсатор. В результате $U(t)$ почти совпадает с напряжением звукового сигнала $\mathcal{E}_0(t)$ (следует учесть, что рисунок схематичен: за период звукового сигнала $T = 2,5 \cdot 10^{-4}$ с произойдет 250 высокочастотных колебаний).

Будем искать решение (46.13) в виде

$$U(t) = -V_n + U_0 + u_1 \cos(\omega_0 t + \varphi) + \dots, \quad (46.14)$$

где U_0 , u_1 , φ — величины, подлежащие определению, причем $u_1 \ll U_0$. После подстановки $\mathcal{E}(t)$, $U(t)$ выражение для тока через диод становится периодической функцией времени

$$f(\mathcal{E}(t) - U(t)) \simeq f(\mathcal{E}_0 \cos \omega_0 t - U_0) \equiv F(t).$$

Его можно представить в виде суммы постоянной и переменной составляющих:

$$F(t) = i_0 + i_1 \cos \omega_0 t + \dots, \quad (46.15)$$

$$i_0 = \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{R_0} a, \quad a = \frac{1}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} \left(\cos x - \frac{U_0}{\mathcal{E}_0} \right) dx, \quad (46.16)$$

$$i_1 = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega_0 t dt \equiv \frac{\mathcal{E}_0}{R_0} b, \quad (46.17)$$

где $\cos \theta = U_0 / \mathcal{E}_0$. Подставляя (46.14), (46.15) в (46.13), получим тождество

$$\begin{aligned} \frac{U_0}{R} + \left(-\frac{1}{X_C} \sin \varphi + \frac{1}{R} \cos \varphi \right) u_1 \cos \omega_0 t - \\ - \left(\frac{1}{X_C} \cos \varphi + \frac{1}{R} \sin \varphi \right) u_1 \sin \omega_0 t = i_0 + i_1 \cos \omega_0 t, \end{aligned}$$

где $X_C = (2\pi\nu_0 C)^{-1} \simeq 30$ Ом — емкостное сопротивление конденсатора. Приравнивая коэффициенты при $\sin \omega_0 t$, $\cos \omega_0 t$, получим $U_0 = i_0 R$ и систему уравнений

$$\left(\frac{1}{R} \cos \varphi - \frac{1}{X_C} \sin \varphi \right) u_1 = i_1, \quad \frac{1}{X_C} \cos \varphi + \frac{1}{R} \sin \varphi = 0.$$

Введем величину Z соотношением

$$\frac{1}{Z} = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{X_C^2}}.$$

Тогда, полагая $\cos \varphi = Z/R$, $\sin \varphi = -Z/X_C$, получим

$$u_1 = i_1 Z.$$

Амплитуда выпрямленного напряжения связана с амплитудой $\mathcal{E}_0$ соотношением $U_0 = i_0 R = (R/R_0) \mathcal{E}_0 a$. Поскольку $(\mathcal{E}_0/U_0) a = R_0/R \ll 1$, $U_0 < \mathcal{E}_0$, то $a \ll 1$. Поэтому пределы интегрирования в (46.16) ограничивают малую область $\theta \ll 1$. Заменяя в (46.17) $\cos \omega_0 t$ единицей, получим $b = 2a$. В этом же приближении $U_0/\mathcal{E}_0 = \cos \theta \approx 1 - \theta^2/2$, $a \approx R_0/R$. Таким образом,

$$U_0 \approx \mathcal{E}_0, \quad u_1 = i_1 Z = 2(Z/R) \mathcal{E}_0.$$

Остается еще учесть неравенство $X_C \ll R$ и его следствие: $Z \approx X_C$, $\varphi \approx -\pi/2$. Напряжение на RC -цепи становится равным

$$U(t) = -V_n + \mathcal{E}_0(t) + 2X_C R^{-1} \mathcal{E}_0(t) \sin \omega_0 t.$$

Поскольку $X_C \ll R$, то переменная составляющая напряжения оказывается весьма малой. Поэтому переменное напряжение на RC -цепи создается практически только низкочастотной составляющей $U_0(t) = \mathcal{E}_0(t)$, которая полностью воспроизводит звуковой сигнал. Конденсатор шунтирует резистор R по высокочастотной составляющей тока $I(t)$: ток звуковой частоты идет через резистор, а высокочастотный — через конденсатор.

5. Преимущества полупроводниковых приборов. Первые транзисторы, изготовленные в 50-х годах, представляли пластинки со стороной 2 мм и толщиной 0,1 мм. Транзистор не имеет нити накала и работает при небольших напряжениях. Это позволяет значительно уменьшить количество потребляемой электроэнергии. Транзисторы обладают большой прочностью и высокой надежностью в работе.

6. Микроэлектроника. Небольшие токи в элементах схем позволили перейти к использованию миниатюрных резисторов, конденсаторов и индуктивностей. Однако подлинная революция в электронной технике произошла в 60-е годы в результате создания *интегральных схем*. Стало возможным, выполнив ряд технологических операций, сформировать на одной кремниевой пластине резисторы, конденсаторы, диоды и триоды. На первом этапе это привело к так называемому первому уровню интеграции: на пластине размером 1×1 см размещалось до 400 транзисторов. В ходе дальнейшего совершенствования технологии стало возможным повысить плотность заполнения: на одном квадратном сантиметре размещается до 2 000 000 элементов. Размеры резисторов составляют сотые доли миллиметра, толщина конденсатора еще в тысячу раз меньше. Мельчайшая частица пыли, попав на микросхему во время процесса изготовления, состоящего из 200 операций, может сделать ее негодной. Сложнейшее электронное устройство, состоящее из тысяч элементов, сегодня свободно можно пропустить через игольное ушко.

Прогресс в микроэлектронике привел к созданию миниатюрных ЭВМ — *микропроцессоров*, которые внедряются в настоящее время

в научную, техническую и производственную деятельность. Одна микросхема размером не больше монеты, содержащая миллион элементов, «запоминает» информацию, соответствующую 300 страницам машинописного текста. Без микроэлектроники были бы невозможны спутниковые линии передачи информации.

В настоящее время усилия ученых направлены на повышение быстродействия, что связано с проблемой уменьшения расстояния между элементами и их размеров. Этот предел соответствует размещению на 1 см^2 ста миллионов элементов. Новые направления микроэлектроники, связанные с использованием сверхнизких температур и органических молекул, открывают фантастические возможности. В перспективе сами элементы и их соединения могут быть выполнены с помощью методов генной инженерии. И тогда можно будет говорить не об изготовлении ЭВМ, а об их выращивании.

§ 47. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА. ФОТОМЕТРИЯ

Оптика — раздел физики, в котором изучаются закономерности, наблюдаемые при взаимодействии света и вещества. В древности оптика была тесно связана с потребностями мореплавания, военного искусства, с проведением строительных работ. После долгого периода эволюционного развития только в XVII в. были сделаны крупнейшие теоретические и экспериментальные открытия (закон преломления, явление дифракции, измерение скорости света, корпускулярная и волновая теории света и др.).

В XIX столетии наступил коренной перелом в развитии оптических исследований. Были открыты принцип интерференции, поляризация света, высказана и доказана гипотеза о поперечности световых волн, открыт спектральный анализ, создана теория оптического изображения. Самое главное событие оптики XIX века — создание Максвеллом электромагнитной теории света.

Однако несмотря на огромный успех теории на рубеже XIX и XX вв. стала ясной ее ограниченность в попытках объяснить процессы поглощения и излучения света атомами и молекулами. Изучение этой проблемы привело к созданию квантовой теории, которая является основой современных представлений о нашем мире. Согласно новой теории электромагнитное поле обладает не только волновыми, но и корпускулярными свойствами.

1. Геометрическая оптика. Одна из задач оптики состоит в том, чтобы при известном расположении источника света и свойствах среды определить напряженности электрического и магнитного полей в любой точке пространства. Если длина волны пренебрежимо мала по сравнению с размерами поперечного сечения электромагнитного поля, то приближенное решение задачи называется геометрической оптикой. В этом приближении волну на каждом небольшом участке пространства можно рассматривать как плоскую.

Непременным признаком плоской волны является то, что ее амплитуда и направление распространения постоянны. Плоская волна не ограничена в пространстве и распространяется прямоли-

нейно в направлении, перпендикулярном фронту волны. Для плоской волны (45.1) волновые поверхности — плоскости, перпендикулярные оси z . Графически плоскую волну можно представить как совокупность *лучей* — параллельных прямых, перпендикулярных фронту волны.

Произвольная электромагнитная волна, разумеется, не является плоской волной. Ее фронт представляет ограниченную поверхность, перемещающуюся в пространстве. Понятие направления распространения волны как целого в этом случае не существует. Однако если амплитуда и фаза мало изменяются на расстояниях порядка длины волны, то волновая поверхность в небольшом участке пространства является частью плоскости. Поэтому можно говорить, что на таких участках волна распространяется в направлении, перпендикулярном волновой поверхности. Если мысленно представить положения волновой поверхности в пространстве в различные моменты времени, то световые лучи можно определить как линии, перпендикулярные волновым поверхностям. Это обстоятельство позволяет в рассматриваемом приближении представить волну как пучок лучей, распространяющихся в пространстве. Касательная к лучу в данной точке совпадает с направлением распространения волны в этой точке. При этом надо помнить, что вдоль луча распространяется электромагнитная волна, ограниченная малым участком волновой поверхности. Обычно при изучении распространения лучей отвлекаются от волновой природы электромагнитного поля, которое они представляют. В этом случае распространение волны описывается, как говорят, законами *геометрической*, или *лучевой*, *оптики*. В тех местах, где амплитуда волны резко меняется, например на границах непрозрачных экранов, зеркал, в фокусах линз и зеркал, проявляются отклонения от законов геометрической оптики. Явления, которые наблюдаются при этом, называются *дифракцией света* (§ 48).

2. **Фотометрия**, т. е. учение об измерении световых величин, сформировалась как самостоятельная область физики задолго до создания электродинамики. Долгое время фотометрия существовала как теория, построенная без всякой связи с волновой оптикой и полностью игнорировавшая волновые и корпускулярные свойства света. За последние 20 лет положение существенно изменилось. Развитие квантовой оптики вскрыло более глубокое статистическо-волновое содержание фотометрии.

Различные источники света излучают в окружающее пространство разное количество электромагнитной энергии. Чтобы охарактеризовать источники света в отношении освещения, которое они создают, пользуются понятием *светового потока*. Световой поток Φ определяется как энергия, переносимая светом в единицу времени через какую-либо поверхность. Поток световой энергии имеет размерность мощности и фактически определяет мощность излучения, падающего на данную площадку.

Другой важной величиной в светотехнике является *освещенность*, характеризующая распределение светового потока в разных местах освещаемой поверхности.

Если световой поток $\Delta\Phi$, создаваемый пучком лучей, нормальных к площадке ΔS , равномерно распределен по ней, то освещенность в точке определяется пределом

$$e = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta S}. \quad (47.1)$$

Освещенность определяет количество энергии, падающее на единичную площадку в единицу времени. Эта величина совпадает с интенсивностью электромагнитной волны (45.3).



Рис. 47.1

Если площадка расположена не перпендикулярно лучам, образующим поток, то ее освещенность будет зависеть от угла падения. Пусть лучи падают под углом α к нормали освещаемой поверхности (рис. 47.1). Найдём освещенность e_1 поверхности S_1 . Освещенность e поверхности S , перпендикулярной к лучам, равна $e = \Phi/S$, а освещенность e_1 поверхности S_1 равна Φ/S_1 . Из рис. 47.1 видно, что $S = S_1 \cos \alpha$. Следовательно,

$$e_1 = e \cos \alpha. \quad (47.2)$$

Рассмотрим точечный источник света, излучающий лучи по всем направлениям равномерно. Выделим далее мысленно часть светового потока $\Delta\Phi$, распространяющегося внутри узкого конуса с малым телесным углом $\Delta\Omega$. Величина телесного угла определяется отношением площади ΔS поверхности, вырезаемой телесным углом из сферы, центр которой совпадает с источником, к квадрату радиуса этой сферы. Силой света I по направлению оси конуса называется отношение светового потока $\Delta\Phi$, идущего внутри конуса, к величине телесного угла $\Delta\Omega$ при его вершине, т. е.

$$I = \frac{\Delta\Phi}{\Delta\Omega}. \quad (47.3)$$

Поскольку сила света точечного источника по всем направлениям одинакова, то его сила света равна отношению полного светового потока Φ к полному телесному углу 4π стерадиан.

Опишем теперь вокруг точечного источника сферу радиусом r . В силу того что полный поток $\Phi = 4\pi I$, освещенность всей поверхности сферы $S = 4\pi r^2$ равна

$$e = \frac{I}{r^2} \quad (47.4)$$

Зная освещенность, можно вычислить полную мощность излучения, т. е. поток, излучаемый в телесный угол, равный 4π стерadian:

$$\Phi = e \cdot 4\pi r^2. \quad (47.5)$$

Определим, например, мощность излучения Солнца. Измерения количества тепла, переданного солнечными лучами различными телам, показали, что освещенность на границе земной атмосферы $e_0 \approx 1,37 \cdot 10^3$ Вт/м². Эта величина называется *солнечной постоянной*. Подставляя значение e_0 и расстояние от Солнца до Земли $r = 1,5 \times 10^{11}$ м в формулу (47.5), получим полную мощность, излучаемую Солнцем, $\Phi = 3,85 \cdot 10^{26}$ Вт. Заметим, что проектная мощность крупнейшей в стране Саяно-Шушенской гидроэлектростанции равна $6,36 \cdot 10^9$ Вт.

В фотометрии используются специальные единицы измерения. Основной единицей силы света является *кандела* (лат. — свеча): 1 кд — сила света некоторого источника — эталона. *Люмен* (лм) — световой поток, создаваемый источником с силой света в 1 кд в пределах телесного угла в один стерadian. Если источник излучает монохроматические лучи с длиной волны $\lambda = 5,5 \cdot 10^{-5}$ см, то 1 лм = $1,55 \cdot 10^{-3}$ Вт. За единицу освещенности принимается *люкс* (лк) — освещенность, создаваемая потоком в 1 лм, равномерно распределенным на площади 1 м².

Освещенность места работы должна лежать в пределах 20–200 лк. Освещенность, создаваемая Солнцем, достигает 10^4 лк.

ЗАДАЧА 47.1. Параллельный пучок света падает нормально на поверхность, создавая освещенность $e_0 = 1,37 \cdot 10^3$ Вт/м². Определить объемную плотность световой энергии пучка.

Решение. Обозначим объемную плотность энергии буквой w . По смыслу этой величины ее размерность энергия/объем. Поскольку электромагнитная энергия переносится волной со скоростью света c , то световая энергия, падающая на площадку S за время Δt , равна $wSc\Delta t$, а световой поток $\Phi = wSc$. Используя формулу (47.1), найдем связь $e = cw$. Таким образом, $w = e_0/c = 4,6 \cdot 10^{-6}$ Дж/м³. Заметим, что при освещенности $e_0 \sim 10^{13} - 10^{15}$ Вт/м², создаваемой лазерами, возникает искра — оптический пробой воздуха.

ЗАДАЧА 47.2. При печатании фотоснимка негатив освещался лампочкой силой света $I_1 = 60$ кд с расстояния $r_1 = 100$ см в течение $t_1 = 30$ с. Сколько секунд t_2 нужно освещать негатив лампочкой с силой света $I_2 = 15$ кд с расстояния $r_2 = 50$ см, чтобы получить отпечаток с такой же степенью почернения, как и в первом случае?

Решение. Если размеры негатива много меньше расстояния до источника, то можно считать, что лучи падают почти перпендикулярно пластинке. Поэтому освещенность в любой точке негатива определяется формулой (47.4), а поток, падающий на негатив, — площадью S :

$$\Phi = eS = \frac{I}{r^2} S.$$

Степень почернения отпечатка определяется, однако, не потоком, а величиной энергии, падающей на негатив за время t экспозиции, т. е. величиной $\Phi t = ISt/r^2$. По условию задачи в двух различных случаях падающая световая энергия должна быть одинакова:

$$\frac{I_1 S}{r_1^2} t_1 = \frac{I_2 S}{r_2^2} t_2.$$

Отсюда находим $t_2 = t_1 (I_1/I_2) (r_2/r_1)^2$. Произведя вычисления, найдем $t_2 = 30$ с. Время экспозиции не изменилось, так как, уменьшая расстояние в 2 раза, мы в 4 раза уменьшили силу света лампы.

§ 48. ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ СВЕТА. ГОЛОГРАФИЯ

1. Интерференция света. Если имеется не один, а несколько источников света, то электрическое и магнитное поля результирующего электромагнитного поля являются векторными суммами электрических и магнитных полей волн, излучаемых каждым источником. Пусть имеются два источника, излучающие одинаково поляризованные световые волны одной и той же частоты. Расстояния от этих источников до точки наблюдения равны r_1 и r_2 . Фазы излучаемых волн соответственно равны φ_1 и φ_2 .

В точке наблюдения происходит наложение электромагнитных волн. Нас будет интересовать поле на расстоянии значительно большем, чем расстояние между источниками. В этом случае амплитуды двух волн можно считать почти одинаковыми, а направления распространения волн параллельными. В результате векторного сложения напряженностей электрического поля волн получим

$$E = E_1 \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1) + E_2 \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2), \quad (48.1)$$

где $k = 2\pi/\lambda$. Используя тригонометрические формулы, запишем (48.1) в виде

$$E = a \cos \omega t + b \sin \omega t,$$

$$a = E_1 \cos(kr_1 - \varphi_1) + E_2 \cos(kr_2 - \varphi_2),$$

$$b = E_1 \sin(kr_1 - \varphi_1) + E_2 \sin(kr_2 - \varphi_2).$$

Положим теперь $a = A \cos \varphi$, $b = A \sin \varphi$. Тогда получим электрическое поле той же частоты

$$E = A \cos(\omega t + \varphi), \quad (48.2)$$

но с амплитудой

$$A = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{E_1^2 + 2E_1E_2 \cos \Delta + E_2^2}, \quad (48.3)$$

зависящей от величины $\Delta = k(r_2 - r_1) - \varphi_2 + \varphi_1$. Величину $r_2 - r_1$ называют *разностью хода двух волн*.

В зависимости от значения Δ амплитуда напряженности электрического поля в точке наблюдения изменяется в пределах

$$|E_2 - E_1| \leq A \leq E_2 + E_1.$$

Пусть $E_1 = E_2 = E_0$. Тогда $A = 2E_0 |\cos(\Delta/2)|$. Поскольку интенсивность волны согласно (45.3) пропорциональна квадрату амплитуды электрического поля, то при условии

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) - \varphi_2 + \varphi_1 = 2\pi n, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (48.4a)$$

волны будут усиливать друг друга и в точке наблюдения интенсивность будет в 4 раза больше интенсивности, создаваемой одним источником. Если же

$$\frac{2\pi}{\lambda} (r_2 - r_1) - \varphi_2 + \varphi_1 = 2\pi \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (48.4b)$$

то произойдет гашение волн и интенсивность обратится в ноль. В тех местах экрана, где условия (48.4) не выполняются, освещенность принимает промежуточные значения.

Наложение волн, при которых происходит явление усиления или ослабления освещенности, называют интерференцией.

Разность хода волн — величина, имеющая вполне определенное значение, зависящее от взаимного расположения источников и точки наблюдения. Разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ в зависимости от типа источника может меняться во времени. Устойчивая интерференционная картина будет наблюдаться лишь в том случае, если разность фаз $\varphi_2 - \varphi_1$ налагающихся волны постоянна за время наблюдения. В таком случае две волны называют *когерентными*. Если же разность фаз меняется со временем, то через некоторые интервалы времени освещенность в точке наблюдения принимает различные значения. В том случае, когда регистрирующий прибор в состоянии зафиксировать эти изменения освещенности, мы можем установить наличие меняющейся интерференционной картины. Если же изменения освещенности следуют столь быстро, что мы не в состоянии обнаружить эти изменения, то наш прибор будет фиксировать среднее значение освещенности, постоянное во все

местах экрана. В этом случае говорят о некогерентных волнах. *Освещенность, создаваемая двумя некогерентными источниками, равна сумме освещенностей, создаваемых каждым отдельным источником.*

Первая экспериментальная установка для демонстрации интерференции была осуществлена в 1802 г. выдающимся английским ученым Т. Юнгом (1773—1829). В опыте, ставшем классическим, свет от точечного монохроматического источника падал на два небольших отверстия в экране (рис. 48.1 а). Эти отверстия

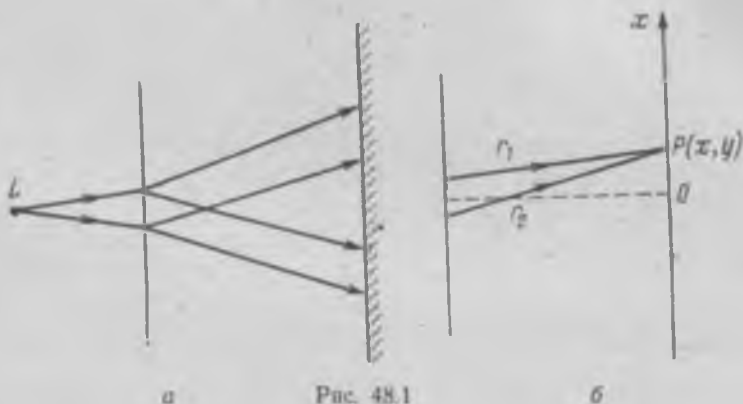


Рис. 48.1

действуют как два источника, а световые пучки от них интерферируют в области перекрытия. В этом случае $\Delta = k(r_2 - r_1)$.

Предположим, что интерференционная картина наблюдается в плоскости xy , находящейся на расстоянии r от экрана. Пусть d — расстояние между отверстиями. Для точки $P(x, y)$, лежащей в плоскости наблюдения, разность $r_2^2 - r_1^2 = 2xd$ не зависит от y -координаты точки P (рис. 48.1 б). При условии $d, x \ll r$ можно положить $r_1 + r_2 \approx 2r$. Тогда разность хода двух волн $r_2 - r_1 \approx xd/r$, а амплитуда волны в точке $P(x, y)$

$$A = 2E_0 \left| \cos \frac{\pi d}{\lambda r} x \right|. \quad (48.5)$$

Если в разности хода укладывается четное число полуволн, то наблюдается увеличение освещенности. Если же разность хода содержит нечетное число полуволн, то интенсивность равна нулю. Таким образом, интерференционная картина в непосредственной близости от O состоит из светлых и темных полос, параллельных оси y . Расстояние между соседними яркими полосами $\Delta x = r\lambda/d$. Следовательно, измеряя r, d и расстояние между полосами, можно определить длину волны света. Например, при $d = 0,1$ мм, $r = 1$ м, $\Delta x = 6$ мм находим $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см.

Рассмотрим излучение тепловых источников света, скажем, обычной лампочки накаливания. Процесс излучения света атомом не может продолжаться бесконечно долго и обрывается спустя некоторое время τ после начала. Можно допустить, что колебания, продолжающиеся в течение интервала времени τ , являются синусоидальными, т. е. отдельный атом испускает электромагнитные волны в виде так называемых *цугов*. Длительность цуга составляет около 10^{-8} с, а протяженность в пространстве $ct=3$ м. Поскольку в тепловом источнике света отдельные атомы излучают независимо друг от друга, то начальные фазы световых волн, испускаемых разными атомами и одним и тем же атомом в последующие моменты времени, не связаны. Поэтому в точку наблюдения при регистрации освещенности придут волны, разность фаз которых может оставаться постоянной только в течение 10^{-8} с. Однако большинство приборов не может регистрировать освещенность за такое короткое время и не обнаруживает интерференции. Следовательно, освещенность, создаваемая тепловым источником, равна сумме освещенностей, создаваемых каждым атомом. Мы приходим к выводу, что тепловые источники испускают некогерентный свет (об источниках когерентного излучения — лазерах см. § 57).

Как же удастся получить наблюдаемую интерференционную картину, используя тепловые источники? Для этого надо располагать таким устройством, в котором можно разделить волну, идущую от каждого атома, по меньшей мере на две взаимно-когерентные волны и заставить обе волны налагаться друг на друга, после того как они пройдут разные пути. В качестве такого устройства можно использовать зеркала, плоскопараллельные пластинки, бипризмы и т. д. Интерференционная картина возникает только в том случае, если в точке наблюдения налагаются друг на друга каждый электромагнитный цуг и его «копия». Для этого длины путей r_1 и r_2 , проходимые этими волнами, должны быть такими, чтобы разность хода $|r_2 - r_1|$ была меньше длины цуга волны, т. е. $|r_2 - r_1| \ll ct = 3$ м. Это условие накладывает ограничения на взаимное расположение устройств, расщепляющих луч на две части, и экрана для наблюдения четкой интерференционной картины.

2. Принцип Гюйгенса. В 1678 г. голландский ученый Х. Гюйгенс (1629—1695) сформулировал правило, позволяющее объяснить отражение и преломление монохроматических световых волн. Согласно Гюйгенсу, каждый элемент произвольно выбранной поверхности S , до которого дошел волновой фронт, становится *источником вторичных сферических волн*, а волновой фронт световой волны в любой последующий момент времени является *огнивающей всех вторичных волн*. Принцип Гюйгенса обладает существенными недостатками: во-первых, существуют две огибающие поверхности, одну из которых не следует учитывать, во-вторых, в

нем ничего не говорится об интенсивности света. *Главный недостаток этой теории — невозможность объяснить прямолинейное распространение света в однородной среде.* Именно, по этой причине Ньютон развил «теорию истечения» корпускул света. Эта теория сохранила господствующее положение до начала XIX в.

В 1815 г. французский физик О. Ж. Френель дополнил построение Гюйгенса предположением об интерференции вторичных волн. Это позволило удовлетворительно объяснить прямолинейное распространение света.

Пусть поверхность S совпадает со сферическим волновым фронтом радиусом a , распространяющимся от точечного источника L . Применим принцип Гюйгенса — Френеля для оценки освещенности в точке P (рис. 48.2 а). Построим вокруг точки P сфе-

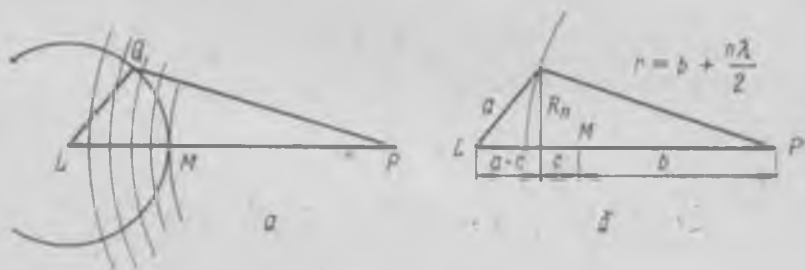


Рис. 48.2

ры с радиусами $b, b+\lambda/2, b+2\lambda/2, \dots$, где $b=MP$. Последняя сфера имеет радиус, равный длине касательной, проведенной из точки P к волновому фронту. Эти сферы делят поверхность S на области, которые называются *зонами Френеля*. Найдём радиусы R_n нескольких, ближайших к первой, зон Френеля. Предполагая, что $a, b \gg \lambda$, находим (рис. 48.2 б)

$$R_n^2 = a^2 - (a-c)^2 \simeq 2ac,$$

$$R_n^2 = \left(b + \frac{n\lambda}{2}\right)^2 - (b+c)^2 \simeq 2b\left(\frac{n\lambda}{2} - c\right).$$

Следовательно,

$$R_n = \sqrt{n\lambda \frac{ab}{a+b}}. \quad (48.6)$$

В соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля каждая точка зоны рассматривается как центр вторичной сферической волны, а поле в точке P равно сумме полей, создаваемых каждой вторичной волной. Фаза волны, пришедшей из точки Q в точку P ,

равна $\Phi = \omega t - ka - kr$. Поскольку разность фаз волн, приходящих из соседних зон, равна π , то поля, создаваемые соседними зонами, имеют разные знаки. В результате оказывается, что все поля, кроме поля, создаваемого первой зоной, погашают друг друга. Таким образом, мы приходим к заключению, что в точку наблюдения приходит луч, направленный по прямой LP . Этот луч является физическим объектом и занимает объем, ограниченный огибающими первых зон Френеля. При конечной, хотя и малой, длине волны луч имеет конечную толщину, в отличие от математического луча, представляющего собой бесконечно тонкую линию в пространстве.

Следует отметить, что принцип Гюйгенса носит формальный характер и не имеет какого-либо физического смысла. С современных позиций его нужно рассматривать как удобный способ интерпретации математического выражения, определяющего поле в данной точке по известным значениям поля на произвольно выбранной поверхности.

3. Принцип Ферма. В 1662 г. французский математик и физик П. Ферма установил основной принцип геометрической оптики: из всех возможных кривых, соединяющих две точки, луч света движется по такой траектории, время прохождения по которой минимально. Если свет приходит из одной точки в другую различными путями, то время прохождения различных лучей одинаково.

Применим принцип Ферма к проблеме прямолинейного распространения света. Источник находится в точке L с координатами $x=h, y=0, z=-d$ (рис. 48.3). В качестве поверхности S , на которой расположены центры вторичных сферических волн, выберем плоскость xy . Волнам, приходящим в точку наблюдения P с координатами $(x_n, 0, z_n)$, соответствует множество лучей. Из принципа Ферма следует, что искомый луч, соединяющий точки L и P , должен лежать в плоскости xz . Один из них изображен на рис. 48.3. Координаты точки $Q - (x, 0, 0)$. Фаза поля, создаваемого лучом в точке P , равна $\Phi = \omega t - kr_{LQ} - kr_{QP}$, где r_{LQ}, r_{QP} — расстояния между точками L и Q , Q и P . Фазу Φ можно представить в виде $\Phi(x) = \omega t - \omega \tau(x)$, где

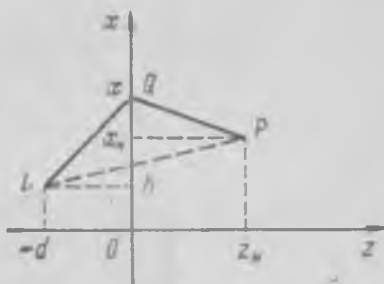


Рис. 48.3

$$\tau(x) = \frac{1}{c} \sqrt{(x-h)^2 + d^2} + \frac{1}{c} \sqrt{(x_n-x)^2 + z_n^2} \quad (48.7)$$

время движения по траектории LQP . Произведение $c\tau(x)$ называют оптической длиной луча.

Найдем значение x , соответствующее наименьшему значению времени. Приравнявая производную

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{c} \frac{x-h}{\sqrt{(x-h)^2 + d^2}} - \frac{1}{c} \frac{x_n - x}{\sqrt{(x_n - x)^2 + z_n^2}}$$

нулю, находим $x = x_0$, где

$$x_0 = \frac{x_n d + h z_n}{d + z_n}.$$

Поскольку

$$x_0 - h = d \frac{x_n - h}{d + z_n}, \quad x_n - x_0 = z_n \frac{x_n - h}{d + z_n}, \quad (48.8)$$

то, очевидно, точка x_0 лежит на прямой LP . Подставляя (48.8) в (48.7), получим

$$\tau(x_0) = \frac{1}{c} \sqrt{(x_n - h)^2 + (d + z_n)^2} \quad (48.9)$$

время движения по прямой LP .

4. Дифракция света. При распространении электромагнитных волн в пространстве, содержащем какое-либо тело, результирующее электромагнитное поле будет отличаться от поля, которое существовало бы в отсутствие тела. В самом деле, переменные электрическое и магнитное поля падающей световой волны действуют на электроны атомов тела с силой, носящей колебательный характер. Вследствие этого электроны приобретают дополнительное переменное ускорение и сами становятся *источниками вторичных световых волн*. Вторичные волны являются когерентными, так как их начальные фазы определяются фазой падающей первичной волны. В результате интерференции первичной и всех вторичных волн образуется результирующее электромагнитное поле, которое регистрирует наблюдатель. Это явление приводит к *дифракции* света, под которой понимают отклонение направления результирующей волны от направления падающей. Из этого определения следует, что реального различия между интерференцией и дифракцией нет. Обычно дифракцией называют интерференцию волн, образованных непрерывно распределенными источниками, т. е. всеми колеблющимися в теле зарядами.

Впервые явление дифракции было описано в 1665 г. итальянским ученым Ф. Гримальди. Он же ввел термин *дифракция* [лат. — разломанный].

Рассмотрим, например, действие большого непрозрачного экрана на электромагнитную волну. В прямом направлении суперпозиция падающей волны и волн, образованных электронами экрана, дает поле за экраном, равное нулю.

Если поверхность экрана блестящая, то суперпозиция падающей и вторичных волн в обратном направлении дает отраженную волну. Если же поверхность экрана черная, то отраженной волны не возникает — суперпозиция вторичных волн равна нулю.

Дифракция света на экране конечных размеров приводит к тому, что вместо резкой границы между светом и тенью за экраном получается сложная картина распределения освещенности. Рассмотрим качественно дифракцию плоской волны, т. е. пучка параллельных лучей на непрозрачном экране, в котором вырезано круглое отверстие диаметром $D \gg \lambda$. Такая волна может быть создана точечным источником, удаленным от отверстия на расстоянии $r \gg D$.

Действительно, если разность хода в центре отверстия и на его периферии $\Delta \ll \lambda/2$, то амплитуда волны в пределах области $(\pi/4)D^2$ постоянна. Это условие согласно (48.4б) имеет вид

$$\Delta = \sqrt{r^2 + \left(\frac{D}{2}\right)^2} - r \simeq \frac{D^2}{8r} \ll \frac{\lambda}{2},$$

где r — расстояние от источника до экрана. Таким образом, точечный источник должен находиться от экрана на расстоянии $r \gg D^2/4\pi$.

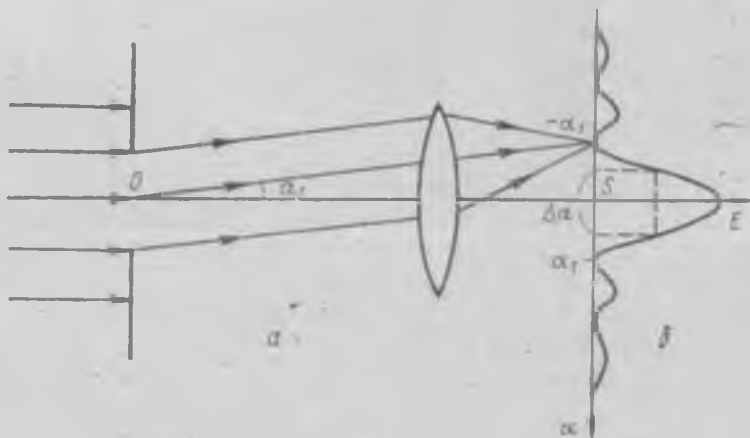


Рис. 48.4

Мы будем регистрировать освещенность в определенном направлении. Это означает, что приемник излучения находится очень далеко от экрана или мы используем линзу, чтобы сфокусировать излучение в некоторой точке.

После прохождения отверстия большая часть лучей распространяется прямолинейно в направлении OS (рис. 48.4). Разность

хода этих лучей равна нулю. Для этого направления мы будем иметь максимум интерференции. Меньшая часть лучей отклоняется от направления OS под различными углами. Разность хода лучей, распространяющихся в направлении α , уже не равна нулю, а зависит от значения угла α . В некотором направлении α_1 разность хода достигает значения $\lambda/2$ и возникает первый интерференционный минимум освещенности. В интервале $|\alpha| < \alpha_1$ освещенность уменьшается от максимального значения до нуля (см. рис. 48.4 б). Для других лучей, отклоняющихся на большие углы, разность хода может составить целую длину волны. Тогда их интерференция приведет к усилению освещенности. Однако освещенность в этом направлении будет меньше, чем при $\alpha=0$, так как с увеличением угла α число отклоняющихся лучей уменьшается. На рис. 48.4 б показана зависимость освещенности от угла α . Дифракционный максимум, образованный в направлении $\alpha=0$, называют главным, или *максимумом нулевого порядка*. Положение первого минимума, как показывает расчет, определяется условием

$$\frac{\pi D}{\lambda} \sin \alpha_1 = 3,8.$$

Обычно угол α_1 очень мал. Например, для $D=1$ см и $\lambda=6 \cdot 10^{-5}$ см $\sin \alpha_1 \approx 6 \cdot 10^{-5}$. Для малых углов, о которых здесь идет речь, $\sin \alpha$ и $\operatorname{tg} \alpha$ равны углу α , выраженному в радианах.

Основная особенность углового распределения освещенности заключается в том, что освещенность велика только в интервале углов (рис. 48.4 б)

$$\Delta \alpha = 1,22 \frac{\lambda}{D} \quad \text{в радианах,} \quad (48.10)$$

$$\Delta \alpha = 1,22 \frac{\lambda}{D} \frac{180}{\pi} \quad \text{в градусах,}$$

между углами $-0,61\lambda/D$ и $0,61\lambda/D$.

Этот вывод имеет важное практическое значение, поскольку становится ясно, что *невозможно создать ограниченный в сечении пучок параллельных лучей*. Всегда возникает обусловленный дифракцией угловой разброс в направлениях распространения лучей за экраном. Аналогичный эффект возникает при отражении света от зеркала диаметром D и т. д. С увеличением отношения λ/D прошедшая через экран волна или отраженная от зеркала становится менее направленной.

На расстоянии $x \gg D$ от экрана сечение пучка расширяется от $\pi(D/2)^2$ до $\pi(x\lambda/2D)^2$. Например, лазерный пучок света диаметром $D=1$ см, длиной волны $\lambda=6 \cdot 10^{-5}$ см, направленный на Луну ($x=384\,000$ км), создал бы освещенную поверхность диаметром

~ 20 км. Однако на расстояниях, меньших некоторого расстояния L , распывание или расходимость пучка еще не проявляется, и здесь отклонения от геометрической оптики пренебрежимо малы. Насколько же велико расстояние L ? Из рис. 48.5 видно, что ширина пучка на расстоянии x от экрана

$$D + 2x \operatorname{tg} \frac{\Delta\alpha}{2} = D + x\Delta\alpha.$$

Подставляя $\Delta\alpha$ из (48.10) в неравенство $x\Delta\alpha \ll D$, получим искомое условие

$$x \ll L = \frac{D^2}{\lambda}. \quad (48.11)$$

При $D = 1$ см, $\lambda = 6 \cdot 10^{-5}$ см величина $L \approx 0,2$ км.

Если за экраном поставить линзу с фокусным расстоянием F , то в фокальной плоскости образуется дифракционное изображение точечного источника. Зависимость освещенности от расстояния до фокуса имеет вид кривой, изображенной на рис. 48.4 б, с тем отличием, что по оси ординат должна быть отложена величина $F\alpha$. Следовательно, пучок света, все лучи которого согласно геометрической оптике должны были бы собраться в одной точке, в действительности дает изображение в виде светлого пятна диаметром $F\Delta\alpha = F\lambda/D$, окруженного темными и светлыми кольцами с убывающей освещенностью.

Анализ дифракции на основе построения зон Френеля приводит к удивительным результатам. Если в точке M на расстоянии a от источника, изображенного на рис. 48.2 а, поставить экран с отверстием радиусом, равным радиусу первой зоны Френеля, то освещенность в точке P в четыре раза больше, чем в отсутствие экрана. При увеличении радиуса отверстия интенсивность уменьшается. Более того, если площадь отверстия будет приблизительно равна площади двух первых зон Френеля, то освещенность в точке P станет равной нулю.

Одно из предсказаний теории Френеля произвело сильное впечатление на его современников и приблизило конец долгому спору между сторонниками корпускулярной и волновой теорий света. В 1819 г. Френель представил «Мемуар о дифракции света». При обсуждении работы выяснилось, что в точке P (рис. 48.2 а) за непрозрачным экраном в точке M радиусом $R_1 = \sqrt{\lambda ab/(a+b)}$, равным радиусу первой зоны Френеля, должно наблюдаться светлое пятно. Более того, интенсивность света должна быть такой же, как и в отсутствие экрана. Этот результат сочли бессмыслен-

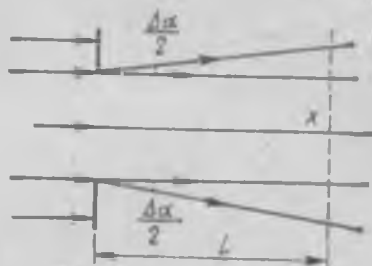


Рис. 48.5

ным. Однако был поставлен опыт, показавший, что это удивительное предсказание правильно.

Точное решение задач дифракции стало возможным только на основе уравнений Максвелла.

Обычно электромагнитные волны, распространяющиеся в данном направлении, имеют ограниченное сечение, обусловленное конечными размерами излучающих или принимающих устройств. Таково, например, излучение точечного источника в фокусе рефлектора, излучение, образованное отраженной от зеркала плоской волны, излучение, принимаемое объективом телескопа, зрачком глаза, и т. д. В любом случае явление дифракции приводит к тому, что пучок волн состоит из лучей, направления распространения которых лежат в интервале углов λ/D , где D — поперечный размер системы. Например, расходимость пучка, отраженного от блестящей поверхности, проявляется на расстояниях, больших $L=D^2/\lambda$. Для зеркала диаметром $D=1$ см ($\lambda=5 \cdot 10^{-5}$ см) $L=200$ м, для снежинки размерами $D=0,1$ см $L=2$ м. Поэтому с высоты человека среднего роста еще можно увидеть сверкающие снежинки. На большом расстоянии снежное поле будет выглядеть равномерно освещенным.

Другой пример: дифракция плоской волны на оправе линзы приводит к тому, что изображением удаленного точечного источника является светлое пятно в фокальной плоскости, угловые размеры которого λ/D , а величина $\Delta s \sim F\lambda/D$, где D — диаметр линзы, F — фокусное расстояние. Для линзы $D=3$ см, $F=5$ см, $\Delta s=10^{-4}$ см, для глаза $D=0,2$ см, $F=2,3$ см, $\Delta s \sim 0,7 \cdot 10^{-3}$ см. Интересно, что в процессе эволюции расстояние между фоторецепторами на сетчатке глаза достигло той же величины $\sim 10^{-3}$ см.

5. Голография. Световой поток, отраженный от любого предмета, представляет собой электромагнитную волну, образованную лучами, исходящими из различных его точек. Информация об объеме предмета, т. е. о различии расстояний до каждой точки предмета, содержится в фазе лучей. При обычном фотографировании степень почернения негатива определяется интенсивностью света, т. е. величиной амплитуды электромагнитной волны, распространяющейся от соответствующей точки предмета. При этом информация о фазе безвозвратно теряется — предмет на фотографии выглядит плоским. Для получения объемного изображения необходимо зарегистрировать и амплитуду, и фазу волны. Эта задача была решена на основе принципиально нового метода, получившего название голография.

Осветим точечный предмет $L(h, 0, -d)$ когерентной световой волной, падающей вертикально на зеркало M , плоскость которого образует с плоскостью xu двугранный угол, равный 45° (рис. 48.6а). Расположим теперь в плоскости xu фотопластинку, которая регистрирует интерференционную картину, образованную волной, отраженной от предмета, и опорной волной, отражен-

ной от зеркала. В точке пластинки с координатами $(x, y, 0)$ напряженность электрического поля волны

$$E = E_0 \cos \omega t + E_L \cos \left[\omega \left(t + \frac{d}{c} \right) - \omega \tau_L(x, y) \right],$$

$$\tau_L(x, y) = \frac{1}{c} \sqrt{(x-h)^2 + y^2 + d^2},$$

где E_0 — амплитуда опорной волны, E_L — амплитуда предметной волны, $(h, 0, -d)$ — координаты предмета. Согласно (45.3), (48.3) освещенность пластинки пропорциональна

$$A_g^2 = E_L^2 + 2E_L E_0 \cos [\omega \tau_g(x, y)] + E_0^2, \quad \tau_g = \tau_L - \frac{d}{c},$$

Зарегистрированная интерференционная картина называется *голограммой*. Проявленный негатив — голограмма — напоминает засвеченную пленку, на которой нельзя обнаружить изображения предмета.

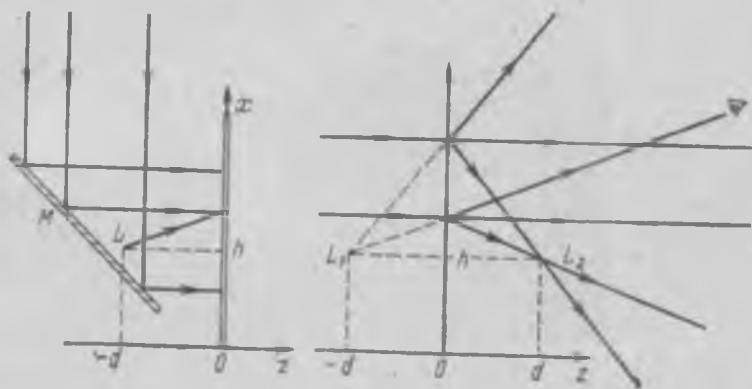


Рис. 48.6

Для получения изображения голограмму освещают параллельным пучком света от лазера (рис. 48.6 б) с амплитудой A_0 . Амплитуда A волны, прошедшей через голограмму, зависит от коэффициента пропускания негатива k_N : $A(x, y) = k_N(x, y) A_0$,

$$k_N(x, y) = k_0 - \alpha (A_g^2 - E_L^2 - E_0^2) = k_0 - 2\alpha E_L E_0 \cos [\omega \tau_g(x, y)],$$

где k_0 и α — некоторые постоянные величины. Первое слагаемое соответствует плоской волне, распространяющейся в направлении оси z . Она не несет информации о предмете. Наличие второго слагаемого приводит к тому, что, согласно принципу Гюйгенса, каждая точка голограммы становится источником сферической волны. Напряженность электрического поля в точке P , создавае-

мая лучом, соединяющим точку (x, y) голограммы и точку наблюдения P с координатами $(x_n, 0, z_n)$,

$$E_r = -2\alpha E_L E_0 A_0 \cos[\omega \tau_g(x, y)] \cos[\omega t - \omega \tau_n(x, y)],$$

где

$$\tau_n(x, y) = \frac{1}{c} \sqrt{(x_n - x)^2 + y^2 + z_n^2}.$$

Величина τ_n — время движения света по лучу, соединяющему произвольную точку на голограмме и точку наблюдения. Выражение E_r можно представить в виде

$$E_r = -a \cos\left[\omega\left(t + \frac{d}{c}\right) - \omega \tau_1(x, y)\right] - a \cos\left[\omega\left(t - \frac{d}{c}\right) - \omega \tau_2(x, y)\right]. \quad (48.12)$$

Здесь $a = \alpha E_L E_0 A_0$,

$$\tau_{1,2}(x, y) = \tau_n(x, y) \pm \tau_L(x, y) = \frac{1}{c} \sqrt{(x_n - x)^2 + y^2 + z_n^2} \pm \frac{1}{c} \sqrt{(x - h)^2 + y^2 + d^2}.$$

Два слагаемых в (48.12) соответствуют двум лучам, распространяющимся от голограммы. Как мы уже знаем, в точку наблюдения приходит луч, исходящий из такой точки (x_0, y_0) , которая удовлетворяет принципу Ферма. Очевидно, условию минимума времен $\tau_{1,2}$ соответствует значение $y = y_0, y_0 = 0$. Теперь функция $\tau_1(x, 0)$ совпадает с (48.7). Значение $\tau_1(x, 0)$ в точке $(x_0, 0)$, определяемой формулой (48.8), совпадает с выражением (48.9). Его структура соответствует лучу, исходящему из точки L_1 . Сквозь голограмму можно хорошо рассмотреть мнимое изображение предмета L , который был расположен на том же самом месте (рис. 48.6б). Мы *восстановили сферическую волну, в точности совпадающую с реальной волной, исходящей от предмета L .*

Аналогичным образом, используя принцип Ферма, находим, что функция $\tau_2(x, 0)$ достигает наименьшего значения при $x = x_0$, удовлетворяющем условиям

$$x_0 - h = d \frac{h - x_n}{z_n - d}, \quad x_0 - x_n = z_n \frac{h - x_n}{z_n - d}.$$

Значение функции $\tau_2(x, 0)$ в этой точке

$$\tau_2(x_0, 0) = \frac{1}{c} \sqrt{(h - x_n)^2 + (z_n - d)^2}$$

равно времени распространения света от действительного изображения L_2 с координатами $(h, 0, d)$ до наблюдателя $P(x_n, 0, z_n)$.

Точно так же можно получить голограмму трехмерного предмета и восстановить его трехмерное изображение, т. е. изображе-

ние можно рассматривать с разных сторон. Создается полное ощущение объемности.

Голограммы обладают уникальными свойствами. Одно из них отражено на рис. 48.6б: освещая только часть голограммы, мы получаем полное изображение. Термин «голография», означающий «полная запись», удачно передает возможности нового метода. Он был создан в 1948 г. Д. Габором. В 1962 г. Ю. Н. Денисюк предложил метод записи голограмм в трехмерных средах. Эти голограммы восстанавливаются в обычном солнечном свете.

Голограммы могут быть изготовлены не только оптическим методом, но и рассчитаны на ЭВМ для получения объемных изображений несуществующих объектов. С помощью ЭВМ происходит восстановление акустических голограмм: регистрируемое звуковое давление можно сделать «видимым» на дисплее. Голограммы, полученные в результате интерференции звуковых волн или радиоволн, могут быть восстановлены и в видимом свете.

Трехмерные свойства голографических изображений используются для исследований движения ядерных частиц, анализа деформаций, преобразования волновых фронтов, в медицинской диагностике, в геофизике, гидролокации и т. д. Ведутся работы по созданию трехмерного телевидения и кино.

§ 49. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ СВЕТА

Почему лучи света отражаются и преломляются на границе вакуума и полупространства, заполненного прозрачной средой? Мы уже говорили, что в результате взаимодействия падающей электромагнитной волны с электронами атомов среды в последней возникает вторичная волна. В результате интерференции падающей и всех вторичных волн внутри среды формируется преломленная волна, распространяющаяся со скоростью $v=c/n$, где c — скорость света в вакууме, n — коэффициент преломления среды. В результате интерференции падающей и вторичных волн вне среды возникает отраженная волна.

1. Закон отражения света. Выведем теперь закон отражения света, исходя из принципа Ферма. Пусть плоскость xy является границей раздела двух сред с различными коэффициентами преломления: n_1 — в области $z>0$, n_2 — в области $z<0$. Поместим источник света в точке $L(0, 0, h)$ (рис. 49.1). После отражения в точке $Q(x, y, 0)$ луч должен попасть к наблюдателю $P(x_n, 0, z_n)$. Требуется найти такую траекторию луча LQP , чтобы время распространения света было наименьшим.

Из принципа Ферма следует, что искомый луч должен лежать в плоскости zx , т. е. луч должен проходить через некоторую точку $Q(x, 0, 0)$. Применим еще раз принцип Ферма для определения точки Q . Поскольку время распространения света по траектории LQP

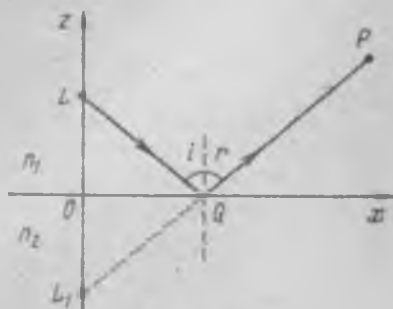


Рис. 49.1

$$\tau(x) = \frac{n_1}{c} \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_n - x)^2 + z_n^2},$$

то, приравнявая нулю производную

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{n_1 x}{c \sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{n_2 (x_n - x)}{c \sqrt{(x_n - x)^2 + z_n^2}} = 0,$$

получим $x = x_0$, $x_0 = x_n h / (h + z_n)$. Следовательно,

$$\sin i = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + h^2}} = \frac{x_n - x_0}{\sqrt{(x_n - x_0)^2 + z_n^2}} = \sin r,$$

где i — угол падения луча, r — угол отражения.

Сформулируем закон отражения: *падающий и отраженный лучи и нормаль к поверхности раздела сред лежат в одной плоскости. Угол отражения луча равен углу падения луча.*

Значение функции $\tau(x)$ в точке x_0

$$\tau(x_0) = \frac{n_1}{c} \sqrt{x_n^2 + (h + z_n)^2}$$

определяет время распространения света от мнимого изображения источника L_1 , расположенного в точке $x=0$, $y=0$, $z=-h$ до точки наблюдения.

Реальный луч отражается, конечно, не в одной точке Q плоскости xy . В соответствии с принципом Гюйгенса — Френеля формирование поля в точке наблюдения P происходит в результате интерференции вторичных волн, которые порождаются падающей волной в каждой точке плоскости xy . Однако наиболее существенной областью при отражении является эллипс с центром в точке Q . Полуоси эллипса в направлении осей x и y равны $R_n / \cos i$ и R_n , где R_n — радиус n -й зоны Френеля (48.6),

$$R_n = \sqrt{n\lambda \frac{ab}{a+b}}, \quad a = LQ, \quad b = QP.$$

Таким образом, при скользящем падении ($i \ll \pi/2$) уже первые зоны могут охватывать большую часть трассы луча света или радиоволны. Впервые понятие *существенной области отражения* ввел советский физик-теоретик Е. Л. Фейнберг. Развитие им новые методы позволили получить решение ряда сложных задач

теории распространения волн вдоль неоднородной и неровной поверхности Земли.

Угловой отражатель. Возьмем три взаимно перпендикулярные отражающие плоскости. Эта система зеркал обладает характерной особенностью: падающий внутрь луч света после трех отражений выходит обратно в противоположном направлении. Докажем это свойство углового отражателя. Ориентацию плоскостей зададим с помощью единичных векторов $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$, перпендикулярных к плоскостям декартовой системы zy, xz, xy . Предварительно заметим, что луч, падающий в направлении единичного вектора $\vec{e}$ на поверхность, заданную вектором $\vec{n}$, отражается в направлении вектора $\vec{e}' = \vec{e} - 2(\vec{n}\vec{e})\vec{n}$. Здесь $(\vec{n}\vec{e})$ — скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\vec{e}$, равное проекции вектора $\vec{e}$ на вектор $\vec{n}$ (см. § 1).

Пусть луч последовательно отражается от плоскостей zy, xz, xy . После отражения от плоскости zy направление отраженного луча определяется вектором $\vec{e}_1 = \vec{e} - 2(\vec{n}_1\vec{e})\vec{n}_1$. Отразившись от плоскости xz , луч идет в направлении

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_1 - 2(\vec{n}_2\vec{e}_1)\vec{n}_2 = \vec{e} - 2(\vec{n}_1\vec{e})\vec{n}_1 - 2(\vec{n}_2\vec{e})\vec{n}_2.$$

Здесь мы учли, что скалярное произведение $\vec{n}_1\vec{n}_2 = 0$. После третьего отражения луч выходит из отражателя в направлении вектора

$$\begin{aligned} \vec{e}_3 &= \vec{e}_2 - 2(\vec{n}_3\vec{e}_2)\vec{n}_3 = \vec{e} - 2(\vec{n}_1\vec{e})\vec{n}_1 - 2(\vec{n}_2\vec{e})\vec{n}_2 - 2(\vec{n}_3\vec{e})\vec{n}_3 = \vec{e} - 2\vec{e} = \\ &= -\vec{e}. \end{aligned}$$

При другой последовательности отражений результат не изменится.

2. Закон преломления света. Обратимся теперь к выводу закона преломления. Из рис. 49.2 находим время распространения света по траектории LQP

$$\tau(x, y) = \frac{n_1}{c} \sqrt{x^2 + h^2} + \frac{n_2}{c} \sqrt{(x_H - x)^2 + z_H^2}. \quad (49.1)$$

Условие

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{n_1 x}{c \sqrt{x^2 + h^2}} - \frac{n_2 (x_H - x)}{c \sqrt{(x_H - x)^2 + z_H^2}} = 0$$

приводит к закону преломления

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2. \quad (49.2)$$

Если имеются не две среды, а несколько плоскостойких сред с различными коэффициентами преломления (рис. 49.3), то, рассматривая преломление луча на каждой из границ, получим $n_0 \sin i_0 = n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 = \text{const}$. Мы видим, что закон преломления имеет вид закона сохранения величины $n \sin i$. Поясним это обстоятельство.

Световая волна переносит энергию и обладает импульсом, направление которого совпадает с направлением распространения волны. На границе раздела энергия падающей волны перераспре-

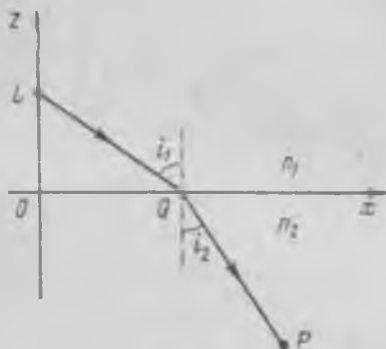


Рис. 49.2

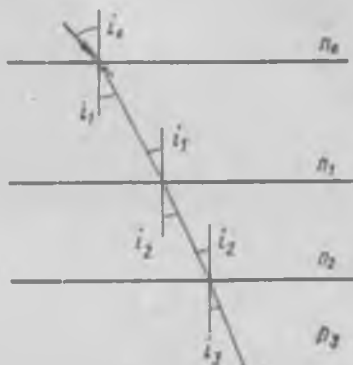


Рис. 49.3

деляется между отраженной и преломленной волнами. Из закона сохранения энергии следует, что падающий световой поток равен сумме отраженного и преломленного световых потоков. При этом сохраняется проекция импульса преломленного и отраженного лучей на поверхность раздела двух сред. Математическим выражением этого обстоятельства является закон преломления (49.2) и отражения.

Граница раздела, отражающая все падающие на нее лучи, называется идеальным зеркалом. При отражении от идеального зеркала импульс волны не меняется по величине, а нормальная к поверхности составляющая меняет знак. Вследствие этого угол падения равен углу отражения.

Итак, закон преломления можно сформулировать в следующем виде. Падающий, преломленный лучи и нормаль к границе раздела сред с показателями преломления n_2 и n_1 лежат в одной плоскости. Произведение коэффициента преломления на синус угла падения луча является постоянной величиной для любой из сред:

$$n \sin i = \text{const}. \quad (49.3)$$

Возвращаясь к рис. 49.3, нетрудно видеть (полагая $n_3 = n_0$), что если на пути луча в среде с показателем преломления n_0 по-

ставить ряд плоскопараллельных пластинок с различными коэффициентами преломления, то направление луча по выходе из них не изменится.

Открытие закона преломления связано с именем голландского ученого В. Снеллиуса (около 1621 г.). Общепринятая формулировка этого закона была дана в 1637 г. французским философом, физиком и математиком Р. Декартом (1596—1650).

ПРИМЕР 49.1. Пучок параллельных лучей падает на плоскопараллельную стеклянную пластинку под углом $i=60^\circ$. Ширина пучка в воздухе $a=20$ см. Определим боковое смещение пучка h после выхода из пластинки и ширину пучка a_1 в стекле. Толщина пластинки $d=5$ см, коэффициент преломления стекла $n=1,5$.

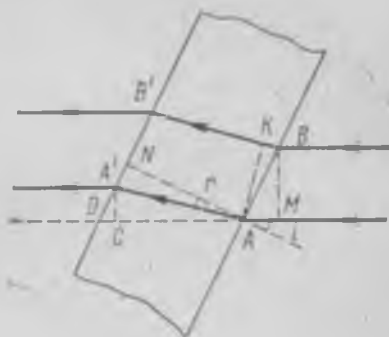


Рис. 49.4

На рис. 49.4 показаны два граничных луча пучка A и B . AN — перпендикуляр к плоскостям поверхности пластинок, BM — ширина пучка в вакууме, KA — ширина пучка в пластине.

Определим смещение пучка $h=A'C$. Угол падения и угол преломления NAA' связаны вследствие закона преломления

$$\sin i = n \sin r. \quad (1)$$

Поскольку угол $DA'C$ равен углу NAD , то

$$h = A'D \cos i. \quad (2)$$

Прямоугольные треугольники DNA и $A'NA$ имеют общий катет $NA=d$. Следовательно,

$$A'D = d \operatorname{tg} i - d \operatorname{tg} r. \quad (3)$$

Из (1)—(3) следует, что

$$h = d \left(\sin i - \frac{\sin r \cos i}{\cos r} \right) = d \sin i \left[1 - \frac{\cos i}{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}} \right].$$

Подставляя числовые данные, найдем $h=1$ см.

Определим теперь ширину пучка $a_1=KA$ в пластине. Учитывая, что в прямоугольных треугольниках KBA , BAM гипотенузы совпадают, а $\angle ABM=i$, $\angle KAB=r$, получим уравнение

$$\frac{a}{\cos i} = \frac{a_1}{\cos r}.$$

Исключая r с помощью (1), найдем

$$a_1 = a \frac{\sqrt{n^2 - \sin^2 i}}{n \cos i} = 32,5 \text{ см.}$$

Заметим, что если угол падения пучка i настолько мал, что синус этого угла можно заменить самим углом, выраженным в радианах, а косинус единицей (т. е. $\sin i \approx i$, $\cos i \approx 1$), то смещение $h = di(1 - 1/n)$, а ширина пучка в стекле $a_1 \approx a$.

ПРИМЕР 49.2. Источник света находится на расстоянии h от поверхности воды. Наблюдатель видит его под углом r к вертикали. Найдем положение изображения источника.

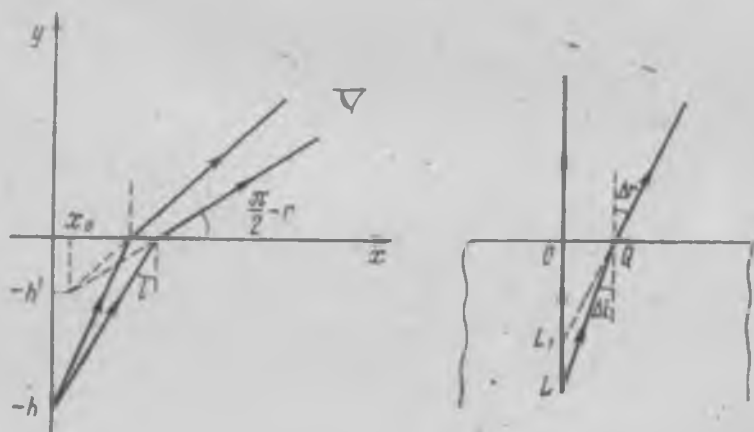


Рис. 49.5

Введем оси координат (рис. 49.5a). Координаты источника $(0, -h)$. Уравнение луча света, приходящего к наблюдателю,

$$y_1(x) = \operatorname{ctg} r (x - h \operatorname{tg} i). \quad (1)$$

Углы i и r связаны законом преломления

$$n \sin i = \sin r. \quad (2)$$

Для построения изображения необходимо провести второй луч, составляющий с лучом зрения малый угол Δr . Ему соответствует луч, исходящий от источника под углом $i + \Delta i$. Уравнение второго луча

$$y_2(x) = \operatorname{ctg} (r + \Delta r) [x - h \operatorname{tg} (i + \Delta i)],$$

причем $n \sin(i + \Delta i) = \sin(r + \Delta r)$. Поскольку $\Delta i, \Delta r \ll 1$, то

$$y_2(x) = y_1(x) - \frac{\Delta r}{\sin^2 r} (x - h \operatorname{tg} i) - \frac{\Delta i}{\cos^2 i} h \operatorname{ctg} r,$$

$$n \Delta i \cos i = \Delta r \cos r. \quad (3)$$

Точка пересечения лучей определяет координаты изображения (x_0, y_0) . Из условия $y_1(x_0) = y_2(x_0)$ находим

$$x_0 = h \operatorname{tg} i - h \frac{\cos r \sin r}{\cos^2 i} \frac{\Delta i}{\Delta r}.$$

Учитывая (2), (3), получим

$$x_0 = (n^2 - 1) \frac{\sin^2 r}{(n^2 - \sin^2 r)^{3/2}} h.$$

Значение y -координаты изображения

$$y(x_0) = \operatorname{ctg} r (x_0 - h \operatorname{tg} i) = -hn^2 \frac{\cos^3 r}{(n^2 - \sin^2 r)^{3/2}}.$$

Если угол зрения $r=0$, то $x_0=0$, $y_0=-h'$, $h'=h/n$. Полагая $n=1,33$, $h=3$ м, найдем, что кажущаяся глубина погружения источника $h'=2,26$ м. В случае $r=0$ решение задачи элементарно (рис. 49.56). Один луч идет перпендикулярно поверхности воды ($i=0$), другой образует угол $\Delta i \ll 1$. Поскольку OQ — общий катет треугольников OQL_1 и OQL , то

$$h \operatorname{tg} \Delta i \simeq h \Delta i = h' \operatorname{tg} \Delta r \simeq h' \Delta r.$$

Учитывая закон преломления $n \sin \Delta i = \sin \Delta r$ в приближении малых углов $n \Delta i = \Delta r$, получим $h' = h/n$.

ПРИМЕР 49.3. Узкий цилиндрический пучок света падает на сферическую колбу, наполненную некоторой жидкостью так, что ось пучка проходит через центр колбы. Определим коэффициент преломления жидкости, если известно, что площадь сечения пучка на входе в колбу в 4 раза больше площади сечения на выходе.

Обозначим через α и β углы падения и преломления (рис. 49.6а). По закону преломления

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (1)$$

Радиус пучка на входе равен $R \sin \alpha$, где R — радиус колбы, а на выходе — $R \sin \gamma$. Угол γ нетрудно найти из условия $\alpha + \angle AOB + \gamma = \pi$. Поскольку треугольник AOB — равнобедренный, то $\angle AOB = \pi - 2\beta$. Следовательно, $\gamma = 2\beta - \alpha$. По условию задачи отношение радиусов на выходе и входе равно

$$2 = \frac{\sin \alpha}{\sin (2\beta - \alpha)}. \quad (2)$$

Поскольку пучок узкий, то угол падения α , а следовательно, и β очень малы. Поэтому мы вправе заменить синусы углов самими углами. В результате такой замены уравнения (1) и (2) упрощаются:

$$\alpha = n\beta, \quad 2 = \frac{\alpha}{2\beta - \alpha}.$$

Из этой системы находим $n = 4/3$.

Интересно отметить, что при $n=2$ узкий пучок света фокусируется в точке F на задней поверхности шарика (рис. 49.6б). Действительно, в этом случае из закона преломления следует

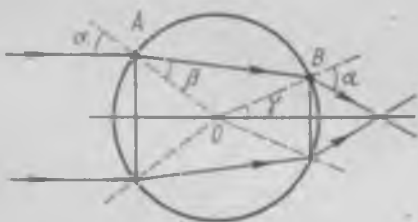


Рис. 49.6а

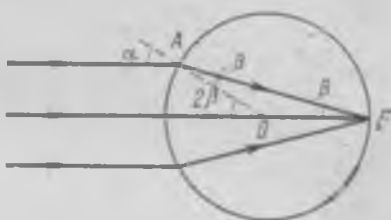


Рис. 49.6б

$\alpha = 2\beta$. Тогда $\gamma = 0$. Если заднюю поверхность сделать зеркальной, то пучок света, отразившись в точке F , выйдет в обратном направлении.

ПРИМЕР 49.4. Две преломляющие среды с коэффициентами преломления n_1 и n_2 разделены сферической поверхностью радиусом R . Найдём положение изображения точечного источника O_1 , находящегося в первой среде на расстоянии d от преломляющей поверхности.

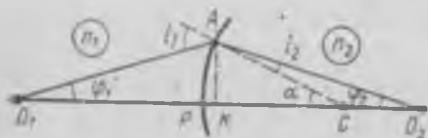


Рис. 49.7

Мы рассмотрим формирование изображения только теми лучами, которые проходят вблизи от оси O_1O_2 (рис. 49.7), где C —

центр сферической поверхности. Такие лучи называются *параксиальными*. Для того чтобы построить изображение, необходимо найти точку пересечения по крайней мере двух лучей, выходящих из источника и претерпевших преломление на сферической поверхности. В качестве одного из таких лучей возьмем луч, идущий перпендикулярно преломляющей поверхности. После преломления направление распространения этого луча не изменится. Второй луч, выходящий из источника под малым углом к первому, пересекает поверхность под углом i_1 , угол преломления обозначим i_2 .

Из закона преломления $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$. Расстояния $O_1P = d$, $PO_2 = f$, $PC = R$. В силу теоремы синусов из треугольников O_1AC и O_2AC следуют соотношения

$$\frac{R}{\sin \varphi_1} = \frac{R+d}{\sin i_1}, \quad \frac{R}{\sin \varphi_2} = \frac{f-R}{\sin i_2}.$$

Так как мы считаем, что точка A близка к оси, то все углы малы. Заменяя синусы углов самими углами, мы значительно упростим наши уравнения:

$$n_1 i_1 = n_2 i_2, \quad (1)$$

$$\frac{R}{\varphi_1} = \frac{R+d}{i_1}, \quad \frac{R}{\varphi_2} = \frac{f-R}{i_2}. \quad (2)$$

Замечая, что $\varphi_1 + \alpha = i_1$, $i_2 + \varphi_2 = \alpha$, из (2) находим $i_1 = (1+R/d)\alpha$, $i_2 = (1-R/f)\alpha$. Подставляя значения i_1 и i_2 в (1), получим уравнение для определения f :

$$\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (3)$$

Поскольку f не зависит от i_1 , то, очевидно, все лучи, выходящие из источника под малыми углами, пересекутся в точке O_2 .

Обсудим формулу (3). Если на поверхность падает слева параллельный пучок света, т. е. $d \rightarrow \infty$, то он собирается в точке на расстоянии

$$f \equiv F_1 = \frac{n_2 R}{n_2 - n_1}.$$

Разумеется, в нашем доказательстве ничего не изменится, если источник находится в точке O_2 . Тогда лучи соберутся в точке O_1 . Это обстоятельство известно как *принцип обратимости луча*. Обозначая $PO_2 = d'$, $PO_1 = f'$, можно записать

$$\frac{n_2}{d'} + \frac{n_1}{f'} = \frac{n_2 - n_1}{R}. \quad (4)$$

Если источник O_2 находится на бесконечности, то пучок соберется в точке на расстоянии $f' \equiv F_2 = n_1 R / (n_2 - n_1)$.

Интересен случай, когда источник O_1 находится на расстоянии $d < F_2$. Формула (3) показывает, что в этом случае расстояние до изображения $f = (n_2/n_1)F_2 d / (d - F_2) < 0$. Это означает, что изображение источника является мнимым и лежит на продолжении пересечения преломленных лучей слева от преломляющей поверхности.

Рассмотрим теперь предельный случай плоской границы, раздела, т. е. в формулах (3) и (4) надо устремить радиус R к бесконечности. Например, из (4) получим

$$\frac{n_2}{d'} + \frac{n_1}{f'} = 0, \quad f' = -\frac{n_1}{n_2} d'.$$

Это условие означает, что если из вакуума ($n_1=1$) смотреть на некоторую точку, находящуюся на расстоянии d' от поверхности раздела сред, то она кажется ближе, поскольку $|f'| < |d'|$. Изображение точки мнимое.

ЗАДАЧА 49.5. Показать, что вследствие принципа Ферма время прохождения лучей по путям O_1AO_2 и O_1PO_2 одинаково.

Решение. Обозначим $O_1A=a$, $AO_2=b$. Время распространения света по пути O_1AO_2 и O_1PO_2

$$\tau_A = \frac{n_1}{c} a + \frac{n_2}{c} b, \quad \tau_P = \frac{n_1}{c} d + \frac{n_2}{c} f. \quad (1)$$

Для параксиальных пучков величины $AK=h$, $PK=\Delta$ малы по сравнению с d , f , R . Рассматривая треугольники O_1AK , O_2AK , CAK , получим

$$h^2 = a^2 - (d + \Delta)^2 \simeq (a - d - \Delta) 2d,$$

$$h^2 = b^2 - (f - \Delta)^2 \simeq (b - f + \Delta) 2f,$$

$$h^2 = R^2 - (R - \Delta)^2 \simeq \Delta 2R.$$

Следовательно,

$$a = d + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{R} \right), \quad b = f + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{f} - \frac{1}{R} \right). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$\tau_A = \tau_P + \frac{h^2}{2} \left[\left(\frac{n_1}{d} + \frac{n_2}{f} \right) - \frac{n_2 - n_1}{R} \right]. \quad (3)$$

Согласно формуле (3) примера 49.4, выражение в квадратной скобке равно нулю, $\tau_A = \tau_P$.

3. Полное внутреннее отражение. Если свет идет от источника, расположенного в среде, оптически более плотной, в среду, оптически менее плотную, $n_2 < n_1$ (рис. 49.8), то согласно закону преломления $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ угол преломления i_2 больше угла падения i_1 .

Отраженный луч распространяется в среде n_1 под углом, равным углу падения. Если увеличивать угол падения, то мы увидим, что преломленный луч будет приближаться к поверхности раздела и делаться менее ярким, а отраженный луч — все ярче. При некотором угле падения преломленный луч идет параллельно гра-

нице раздела, т. е. $i_2=90^\circ$, и совсем слабеет, а отраженный луч делается столь же ярким, как и падающий. Соответствующий угол падения называется критическим, или предельным, углом полного отражения. При этом

$$n_1 \sin i_{\text{пр}} = n_2 \sin \frac{\pi}{2}, \quad \sin i_{\text{пр}} = \frac{n_2}{n_1}.$$

У сильно преломляющих веществ ($n_1 \gg n_2$) предельный угол мал. По отношению к вакууму у воды $i_{\text{пр}}=48^\circ$, у стекла $i_{\text{пр}}=42^\circ$, у алмаза $i_{\text{пр}}=24^\circ$. Если угол падения луча i_1 становится больше предельного угла, то преломленный луч отсутствует и наблюдается только отраженный луч.

С эффектом полного внутреннего отражения мы часто сталкиваемся в различных явлениях: миражах, распространении радиоволн в ионосфере и т. д. При рассмотрении этих явлений в естественных условиях надо учитывать, что коэффициент преломления среды изменяется непрерывно. По этой причине траекторией луча является не ломаная, а плавная кривая с выпуклостью, обращенной в сторону уменьшения коэффициента преломления. Подобную траекторию имеет, например, луч света, отраженный от более нагретых слоев воздуха, поскольку коэффициент преломления нагретого воздуха меньше, чем холодного. В этом нетрудно убедиться, если разбить среду на тонкие слои и в каждом из них считать коэффициент преломления постоянным [40].



Рис. 49.8

С появлением лазеров появилась возможность перенести в оптический диапазон принципы преобразования и передачи информации, разработанные в радиотехнике. В земных условиях системы оптической связи используют гибкие волоконные световоды. Световод представляет собой тонкую нить из кварцевого стекла, сердцевина которой толщиной 10^{-3} см имеет показатель преломления n_1 , а внешняя оболочка — показатель преломления $n_2 < n_1$. Поэтому лучи, распространяющиеся под достаточно малыми углами к оси, испытывают полное внутреннее отражение. Сейчас по паре волокон можно передать до десяти тысяч телефонных переговоров. Цифровое кодирование речи, позволяющее «втиснуть» пять двусторонних телефонных переговоров в один голосовой канал, еще более увеличивает передачу информации. Для сравнения заметим, что первая трансатлантическая телефонная линия, проложенная в 1956 г. почти через 100 лет после прокладки телеграфного кабеля, имела всего 36 каналов. В 1988 г. вступит в строй трансатлантический оптический кабель, реализующий 40 тыс. переговоров.

ПРИМЕР 49.6. Луч света испытывает на поверхности воды полное внутреннее отражение. Выйдет ли он в воздух, если на

поверхность воды положить плоскопараллельную пластинку?

По условию задачи луч падает на границу раздела вода — воздух под углом $i > i_{\text{пр}}$. Угол $i_{\text{пр}}$ определяется соотношением $n_{\text{в}} \sin i_{\text{пр}} = 1$. Закон преломления, записанный в форме (49.3), позволяет сразу же решить задачу. Если луч выходит через пластинку в воздух под углом r , то $n_{\text{в}} \sin i = \sin r$. Из этих соотношений находим

$$\sin r = n_{\text{в}} \sin i > n_{\text{в}} \sin i_{\text{пр}} = 1, \quad \sin r > 1.$$

Отсюда следует вывод: луч света не выйдет в воздух.

Выясним теперь, пройдет ли луч света в стеклянную пластинку? Предельный угол $i'_{\text{пр}}$ для границы вода — стекло определяется условием

$$\sin i_{\text{пр}}^* = \frac{n_{\text{ст}}}{n_{\text{в}}}, \quad i_{\text{пр}}^* > i_{\text{пр}}.$$

Если $i_{\text{пр}} < i < i'_{\text{пр}}$, то луч пройдет в пластинку, так как согласно закону преломления (α — угол преломления)

$$\sin \alpha = \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ст}}} \sin i < \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ст}}} \sin i'_{\text{пр}} = 1.$$

Следовательно, $\sin \alpha < 1$. Затем луч испытает полное внутреннее отражение на границе стекло — воздух. Если же $i > i'_{\text{пр}}$, то луч не проникнет в пластинку, поскольку

$$\sin \alpha = \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ст}}} \sin i > \frac{n_{\text{в}}}{n_{\text{ст}}} \sin i'_{\text{пр}} = 1, \quad \sin \alpha > 1.$$

4. Радуга. Радуга — изумительное явление природы, которое с давних пор стремились описать и поэты и ученые. Последовательная теория радуги была развита в самое недавнее время. Яркая дуга, которая возникает после дождя или в брызгах водопада, — это первичная радуга. Цветные полосы сильно отличаются по яркости, но порядок их всегда одинаков: внутри дуги находится фиолетовая полоса, которая переходит сначала в синюю, затем в зеленую, желтую, оранжевую и, наконец, красную образующую дугу с внешней стороны. Выше первой, в небе, возникает вторая менее яркая дуга, в которой цветовые полосы располагаются в обратном порядке.

Основные черты радуги можно понять, изучая распространение света внутри одной изолированной капли воды. На рис. 49.9 изображен путь одного из солнечных лучей, участвующих в образовании основной дуги радуги. Поэтому мы не показали луча, отраженного сразу же в точке A , луча, преломленного в точке B , и луча, испытавшего внутреннее отражение в точке C . Угол θ между лучом, падающим на каплю в точке A , и лучом, вышедшим из точки

C , называется углом рассеяния. Используя законы отражения и преломления, находим, что

$$\sin \alpha = n \sin \beta. \quad (49.4)$$

В качестве упражнения докажите, что

$$\theta = 4\beta - 2\alpha + \pi. \quad (49.5)$$

Каждый луч падает на каплю под вполне определенным углом α . Исключая из (49.4), (49.5) угол β , получим значение угла рассеяния θ для каждого из падающих лучей, т. е. функцию $\theta = \theta(\alpha)$.

Теперь выясним, почему интенсивность рассеянных лучей возрастает именно вблизи одного определенного луча θ_0 . Впервые на этот вопрос ответил Р. Декарт. Прodelав более десяти тысяч вычислений угла θ для различных значений α , он нашел, что функция $\theta(\alpha)$ достигает наименьшего значения $\theta_0 \approx 138^\circ$ при $\alpha_0 = 59^\circ$. Это означает, что вблизи угла θ_0 концентрируется максимальное количество лучей: лучи, падающие на каплю в области углов

$(\alpha_0 - \Delta\alpha, \alpha_0 + \Delta\alpha)$, рассеиваются в узком интервале углов $\theta_0 < \theta < \theta_0 + \Delta\theta$ ($\Delta\theta > 0$). Возникающее в результате резкое возрастание интенсивности рассеянного света — это и есть основная дуга.

Благодаря открытию дифференциального исчисления, для определения величины α_0 достаточно вычислить производную функции $\theta(\alpha)$ и приравнять ее нулю. Дифференцируя (49.4) и (49.5) по α , получим

$$\cos \alpha = n \cos \beta \frac{d\beta}{d\alpha}, \quad \frac{d\theta}{d\alpha} = 4 \frac{d\beta}{d\alpha} - 2.$$

Полагая $d\theta/d\alpha = 0$, запишем систему

$$\cos \alpha_0 = \frac{n}{2} \cos \beta_0, \quad \sin \alpha_0 = n \sin \beta_0,$$

из которой находим

$$\sin \alpha_0 = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}, \quad \sin \beta_0 = \frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}.$$

Поскольку среднее значение коэффициента преломления воды в диапазоне видимого света $n \approx 1,333$, то $\alpha_0 \approx 59^\circ$, $\theta_0 \approx 138^\circ$. Не будь дисперсии, впечатление от радуги было бы намного слабее. Если

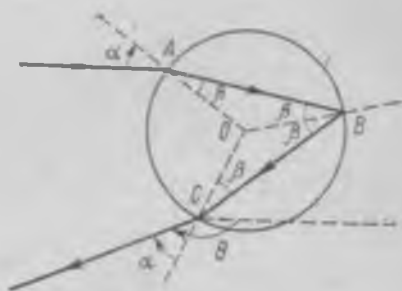


Рис. 49.9

для показателя преломления фиолетового света ($\lambda=0,4$ мкм) взять значение $n \approx 1,343$, а красного ($\lambda=0,65$ мкм) значение $n \approx 1,331$, то угловая ширина радуги будет равна $1,7^\circ$.

Вторая дуга радуги образуется лучами, которые испытывают два внутренних отражения. Эти лучи рассеиваются под углом 129° . Ее угловая ширина $\sim 3,1^\circ$. В лабораторных условиях наблюдались радуги 17 порядков на каплях сахарного сиропа.

Наблюдать радугу можно во время дождя при условии, что Солнце находится позади наблюдателя. Угловые положения радуг первого и второго порядков относительно горизонта соответственно равны $180^\circ - 138^\circ = 42^\circ$ и $180^\circ - 129^\circ = 51^\circ$. Размер видимой части радуги зависит от положения Солнца относительно горизонта. Полную радугу в виде замкнутого кольца можно видеть только с самолета.

В 1970 г. была впервые сфотографирована невидимая инфракрасная радуга, расположенная между красной внешней дугой основной радуги и красной внутренней дугой второй радуги.

Недавно обнаружена атомная радуга, возникающая при рассеянии атомов одного вещества на атомах другого. Вблизи угла, соответствующего θ_0 , наблюдалась значительная концентрация рассеиваемых частиц — *радуга, обусловленная взаимодействием атомов*. Разумеется, эта радуга содержит богатую информацию о межатомных силах.

§ 50. ПРИЗМА. ДИСПЕРСИЯ СВЕТА. ЦВЕТ

1. Призма. В оптических приборах часто используются призмы. Угол α между гранями, через которые проходит луч, называется *преломляющим углом призмы* (рис. 50.1). Пусть луч падает под

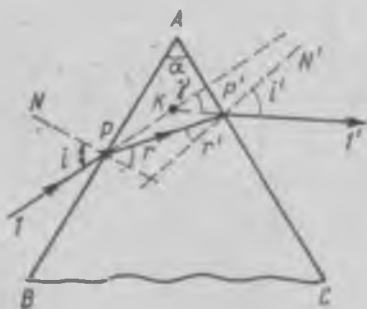


Рис. 50.1

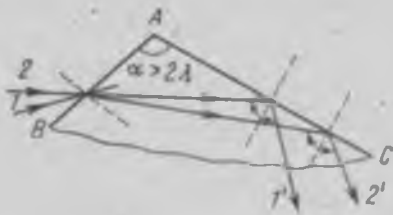


Рис. 50.2

углом i на грань AB . При прохождении через призму луч света всегда отклоняется к основанию BC . Угол γ между направлениями падающего I и отклоненного луча I' называется *углом отк-*

клонения луча в призме. Определим этот угол γ , считая, что показатель преломления стекла равен n .

После преломления на грани AB луч идет в призме, образуя с нормалью N угол r . Согласно закону преломления

$$\sin i = n \sin r. \quad (50.1)$$

На грань AC луч падает под углом r' , зависящим от преломляющего угла призмы α . В $\triangle PAP'$ сумма углов равна π : $\alpha + (\pi/2 - r) + (\pi/2 - r') = \pi$, т. е.

$$\alpha = r + r'. \quad (50.2)$$

Если угол r' меньше угла полного внутреннего отражения λ , определяемого условием $n \sin \lambda = 1$, то после преломления через грань AC луч выходит из призмы под углом i' к нормали N' . Закон преломления связывает углы i' и r' :

$$n \sin r' = \sin i'. \quad (50.3)$$

Угол отклонения γ можно найти из $\triangle KPP'$: $\gamma = (i - r) + (i' - r')$, т. е.

$$\gamma = i + i' - \alpha. \quad (50.4)$$

Формулы (50.1) — (50.4) позволяют определить угол отклонения γ через угол падения i и преломляющий угол α . Однако выражение для угла γ имеет довольно сложный вид и упрощается только в том случае, когда угол падения и преломляющий угол малы. Действительно, заменяя в (50.1) и (50.3) синусы малых углов самими углами, получим $i \approx nr$, $nr' \approx i'$. Подставляя значения i , i' в (50.4) и используя (50.2), получим

$$\gamma = (n - 1)\alpha. \quad (50.5)$$

Мы видим, что угол отклонения не зависит от угла падения, если последний достаточно мал.

Определим теперь условия, которым должен удовлетворять угол α , чтобы лучи зеркально отражались от грани AC , испытывая полное внутреннее отражение. Для этого необходимо, чтобы $r' = \alpha - r \geq \lambda$, т. е.

$$\alpha \geq \lambda + r. \quad (50.6)$$

Из (50.1) следует, что $0 < r \leq \lambda$, причем наибольшему значению $r = \lambda$ соответствует угол падения $i = 90^\circ$. Таким образом, если $\alpha \geq 2\lambda$, ни один из лучей, падающих на грань AB , не выйдет из грани AC (рис. 50.2).

Если $\alpha < 2\lambda$, то лучи, падающие на грань AB в области I (рис. 50.3), испытывают на грани AC полное внутреннее отраже-

Его экспериментальные работы в 1669—1704 гг. и взгляды на природу света оказали сильное влияние на последующее развитие научных исследований по оптике.

3. Цвет. Цвет тела зависит от его способности по-разному поглощать, отражать и пропускать свет различных цветов. Обычно мы рассматриваем непрозрачные предметы в отраженном свете. В этом случае цветом предмета называют цвет отраженного света. Предмет белого цвета отражает лучи всех цветов. Тело красного цвета отражает из падающего на него белого света главным образом красные, а остальные поглощает. Предмет, не отражающий никакого света, кажется черным. Поэтому мы видим черным красный предмет, освещенный, например, зеленым светом.

Почти прозрачные тела можно рассматривать в проходящем и отраженном свете. При прохождении пучка света через мутное вещество (лед, туман, атмосферу и т. д.) часть света поглощается, а часть рассеивается в стороны, благодаря этому пучок света становится видимым при наблюдении сбоку. Интенсивность рассеиваемого света обратно пропорциональна длине волны в четвертой степени. Отношение длины волны синего света ($\lambda_c = 4,5 \cdot 10^{-5}$ см) к длине волны красного света ($\lambda_k = 6,5 \cdot 10^{-5}$ см) равно 1,44. Следовательно, интенсивность рассеиваемого синего света в $(1,44)^4 \approx 4,3$ раза больше интенсивности рассеиваемого красного света. Поэтому небо кажется голубым, а закат желто-красным, так как проходящий свет обедняется синими лучами.

§ 51. ПЛОСКИЕ И СФЕРИЧЕСКИЕ ЗЕРКАЛА

Каждый самосветящийся или освещенный предмет является совокупностью светящихся точек или точечных источников света. От каждой точки предмета на оптическую систему падает пучок лучей. Каждый из них распространяется в соответствии с законами геометрической оптики. Поскольку точка определяется пересечением двух прямых, то для построения изображения точки достаточно взять только два луча. Построив изображение каждой точки, получим изображение всего предмета.

Разберемся теперь в терминологии, которую используют в теории оптических изображений. Оптическая система может состоять из многих элементов — зеркал и линз. Рассмотрим изображение, формируемое одним из элементов системы, не принимая во внимание другие элементы. На выходе этого элемента пучок лучей может быть сходящимся (рис. 51.1а) или расходящимся (рис. 51.1б). В первом случае точку пересечения I лучей называют *действительным изображением*, во втором — точку пересечения продолжения лучей I' в направлении, противоположном направлению распространения света, называют *мнимым изображением*. Вышедший из рассматриваемого элемента пучок света падает на следующий. Если этот элемент расположен так, что на него падает

расходящийся пучок света, то точку I (на рис. 51.1а) и точку I' (на рис. 51.1б) называют *действительным предметом*. Если же на вход этого элемента падает сходящийся пучок света, то точку I (на рис. 51.1в) называют *мнимым предметом*.

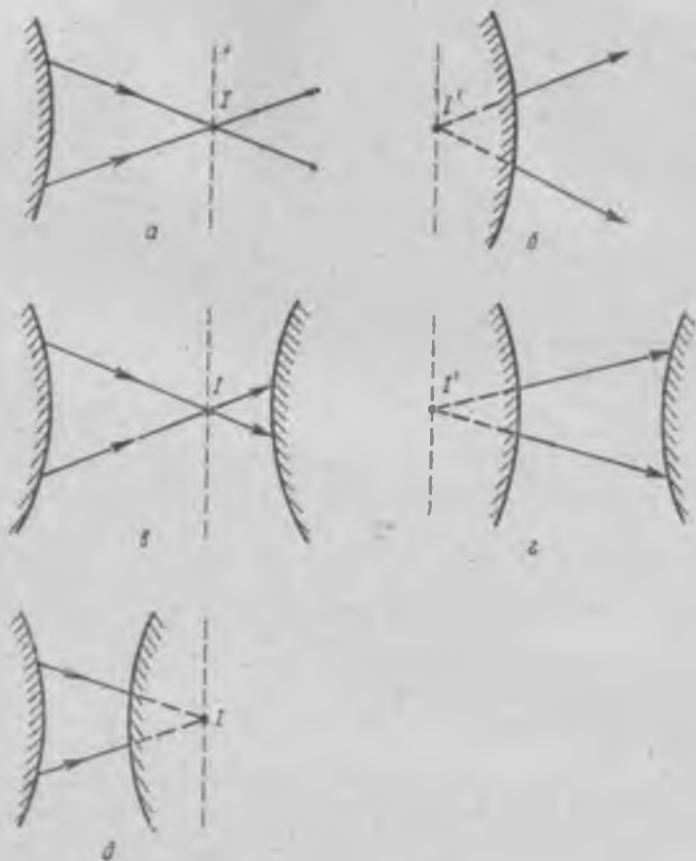


Рис. 51.1

Любое освещенное тело является действительным предметом, так как каждая его точка располагается в вершине расходящегося пучка пересекающихся лучей. Действительное изображение на выходе последнего элемента системы можно спроецировать на экран и наблюдать его с различных направлений.

1. Плоское зеркало. Построим изображение светящейся точки S в плоском зеркале (рис. 51.2а). Чтобы найти положение изображения, надо найти точку пересечения каких-нибудь двух отраженных лучей. Пусть это будут лучи 1 и 2. Далее согласно закону

отражения построим отраженные лучи $1'$ и $2'$. Эти лучи оказываются расходящимися и нигде не пересекаются. Продолжая их за зеркало, получим точку S' пересечения реально не существующих лучей. Эта точка является мнимым изображением светящейся точки S , так как наблюдателю кажется, что свет излучается из этой точки. Изображение S' увидят наблюдатели, которые будут находиться в пределах угла, образованного лучами $1'$ и $2'$. Предмет

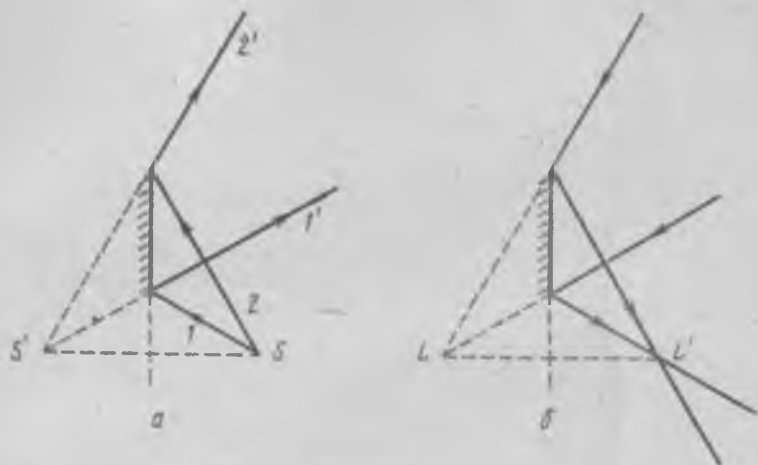


Рис. 51.2

S и его изображение S' находятся на одинаковых расстояниях от зеркала и на одном и том же перпендикуляре к нему или к его продолжению.

Можно ли с помощью плоского зеркала получить действительное изображение? Оказывается, возможно, если на зеркало будет падать сходящийся пучок лучей (рис. 51.2б). В этом случае источник L оказывается мнимым, так как из-за присутствия зеркала пересекаются не сами лучи, а их продолжения. Изображение образуется в точке L' пересечения лучей, отраженных от зеркала, и является действительным. Рассмотрим, например, изображение A_1 источника A в собирающей линзе (рис. 51.3а). Если на пути пучка света поставить зеркало (рис. 51.3б), то точку A_1 можно рассматривать как мнимый источник, а точку A_1' — как его действительное изображение в плоском зеркале.

ЗАДАЧА 51.1. Объект в виде буквы Г находится между двумя плоскими параллельными зеркалами M и M' . Построить изображение объекта.

Решение. Каждая точка буквы Г излучает пучок лучей. Рассмотрим отражения зеркалами пучка лучей, который первоначально-

но падал на зеркало M' . На рис. 51.4 подробно показан ход двух лучей пучка, падающего от основания буквы на правое зеркало. После первого отражения лучи сформируют мнимое изображение



Рис. 51.3

A_1 буквы Г в зеркале M' . Второе отражение дает мнимое изображение A_2 буквы Г в зеркале M , третье отражение — изображение A_3 в зеркале M' и т. д. Аналогично можно показать, что часть пучка, первоначально падающая на зеркало M , формирует бесконечную последовательность изображений, которые на рисунке обозначены буквами B_i ($i=1, 2, \dots$).



Рис. 51.4

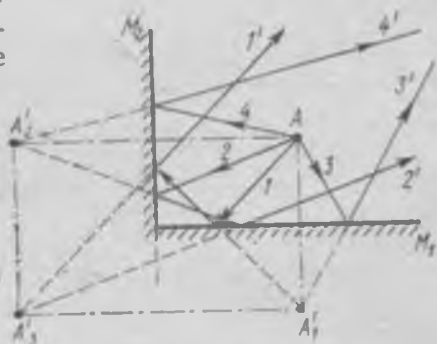


Рис. 51.5

ЗАДАЧА 51.2. Два зеркала M_1 и M_2 образуют прямой двугранный угол. Построить изображение светящейся точки A , находящейся внутри угла.

Решение. Изображения точки A'_1 и A'_2 , формируемые лучами, однократно отраженными от зеркал M_1 и M_2 , находятся просто. Из рис. 51.5 видно, что лучи, исходящие из точки A , могут испытать также два отражения: сначала от одного зеркала, затем от другого. Ход двух таких лучей показан на рис. 51.5. Пересечение продолжений этих лучей определяет третье изображение A'_3 точки A .

ЗАДАЧА 51.3. Построить изображение светящейся точки в системе из четырех одинаковых взаимно перпендикулярных зеркал (четырёхгранный калейдоскоп).

ЗАДАЧА 51.4. Плоское зеркало в виде квадратной пластинки со стороной $a=1$ м расположено в вертикальной плоскости. На расстоянии $h=1,5$ м от центра зеркала расположен небольшой предмет. Определить расстояние между исходным изображением предмета и изображением, которое образуется после поворота зеркала вокруг горизонтальной оси на угол $\alpha=30^\circ$.

Решение. Пусть точка A — предмет, A_1 — его первоначальное изображение, A_1' — изображение точки A после поворота зеркала на угол α (рис. 51.6). Отрезок AA_1 перпендикулярен к зеркалу в исходном положении, а отрезок AA_1' перпендикулярен к зеркалу, повернутому на угол α . При этом, очевидно, $\angle A_1AA_1'=\alpha$. Из построения изображений A_1 и A_1' ясно, что точки A , A_1 и A_1' лежат на окружности радиусом

$$A_1O = A_1'O = AO = \sqrt{h^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}$$

с центром в точке O . Следовательно, $\angle A_1OA_1' = 2\alpha$, а поскольку треугольник A_1OA_1' является равнобедренным, то искомое расстояние между изображениями A_1 и A_1'

$$AA_1' = 2 \sin \alpha \sqrt{h^2 + \frac{a^2}{4}} \approx 1,52 \text{ м.}$$

2. Вогнутые и выпуклые зеркала. Кроме плоских зеркал часто пользуются кривыми — вогнутыми и выпуклыми. Практически проще всего создать сферические поверхности, отражающие свойства которых мы подробно рассмотрим.

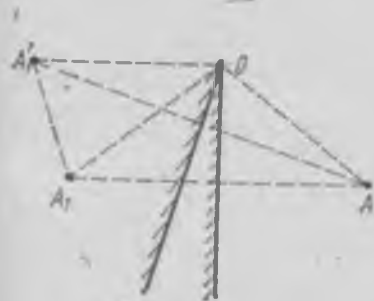


Рис. 51.6

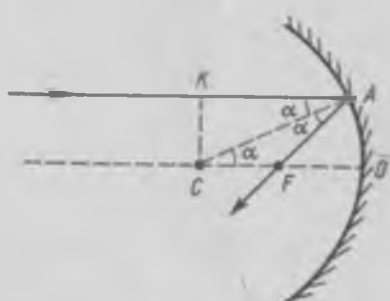


Рис. 51.7

Центр сферы, часть которой образует поверхность зеркала, называется *центром кривизны* C . Вершина шарового сегмента O называется *полюсом* зеркала. Прямая, соединяющая центр кривизны с полюсом O зеркала, называется *главной осью*. Другие прямые, проходящие через центр кривизны, называются *побочными осями*.

Если параллельный пучок упадет на плоское зеркало, то после отражения лучи останутся параллельными. Чем отличается плоское зеркало от сферического? Для того чтобы ответить на этот вопрос, решим следующую задачу.

ЗАДАЧА 51.5. Луч света падает на вогнутое сферическое зеркало радиусом R параллельно оптической оси CO на расстоянии a от нее и после отражения пересекает оптическую ось в точке F (рис. 51.7). Определить расстояние OF .

Решение. Введем обозначения $OF=F$, $CF=x$. Очевидно,

$$F=R-x. \quad (1)$$

Поскольку треугольник CFA равнобедренный, то

$$R=2x \cos \alpha. \quad (2)$$

Наконец, из прямоугольного треугольника $СКА$ находим

$$\sin \alpha = a/R. \quad (3)$$

Следовательно,

$$F=R-\frac{R}{2 \cos \alpha}=R\left(1-\frac{1}{2, \frac{1}{1-(a/R)^2}}\right). \quad (4)$$

Мы видим, что положение точки пересечения отраженного луча с главной оптической осью зависит от величины a . Параллельный пучок лучей не может собраться в одной точке. Однако для узкого пучка, лучи которого лежат близко к оси ($a \ll R$), можно пренебречь в (4) величиной a/R . В этом приближении все лучи после отражения пересекут главную ось на расстоянии $F=R/2$ от полюса зеркала.

Если параллельные лучи падают вдоль главной оси вогнутого зеркала, то они соберутся в *главном фокусе* F . Поэтому вогнутое зеркало называется собирающим. Расстояние от полюса зеркала O до точки F называется *фокусным расстоянием* (рис. 51.8). Лучи, падающие на выпуклые зеркала параллельно главной оси, отражаются таким образом, что кажутся исходящими из одной точки F , расположенной за зеркалом (рис. 51.9). Эта точка является *мнимым фокусом*.

Плоскость, проходящая через фокус зеркала перпендикулярно главной оптической оси, называется *фокальной плоскостью*. Заметим, что в точку F фокусируются только те лучи, которые проходят достаточно близко от оси, — так называемые *параксиальные лучи*. Для таких лучей фокусное расстояние равно половине радиуса кривизны зеркала. Все дальнейшие построения справедливы только для лучей, составляющих с главной осью малые углы.

При построении изображения в выпуклом зеркале можно взять два из трех лучей, изображенных на рис. 51.10, ход которых после отражения очевиден. Луч 1 падает параллельно главной оси, лучи

2 и 3 падают соответственно по направлению к центру кривизны и фокусу. Если необходимо построить ход произвольного луча 1 (рис. 51.11), образующего угол с главной осью, то проще всего воспользоваться побочной осью. Для этого через центр C проведем побочную ось параллельно лучу 1. Пучок лучей, падающих на

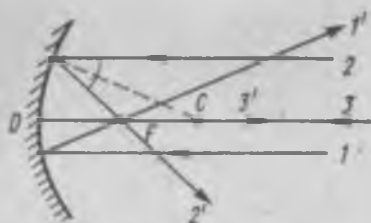


Рис. 51.8

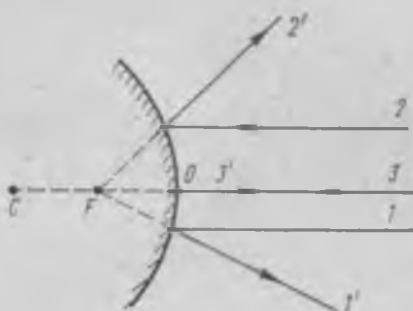


Рис. 51.9

зеркало параллельно побочной оси, кажется расходящимся из точки фокальной плоскости F_1 , в которой ее пересекает данная побочная ось. На рис. 51.11 изображены также лучи 2 и 3, параллельные данному лучу 1.

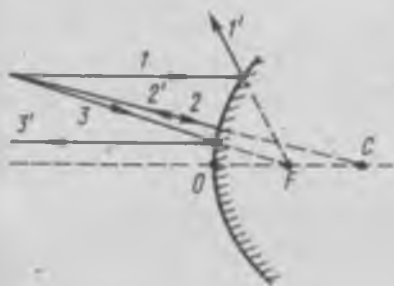


Рис. 51.10

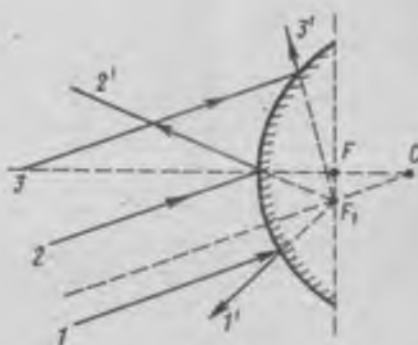


Рис. 51.11

Нетрудно видеть, что выпуклое зеркало дает только мнимое изображение независимо от того, где находится предмет. Однако если источник в присутствии зеркала является мнимым, то изображение получается действительным.

При построении изображения точки в вогнутом зеркале обычно берут два из трех лучей, показанных на рис. 51.12, или прослежи-

вают ход произвольного луча с помощью побочной оптической оси (рис. 51.13).

Вывод формулы зеркала. При изучении изображения необходимо определить его положение и величину, выяснить действитель-

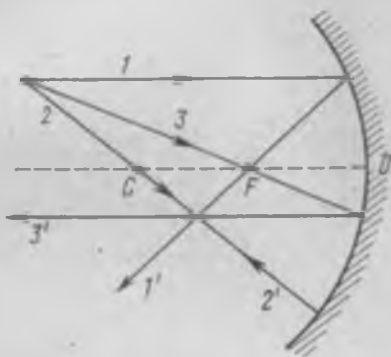


Рис. 51.12

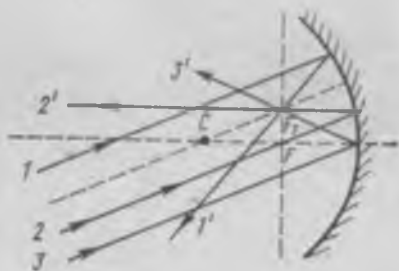


Рис. 51.13

ное оно или мнимое, прямое или перевернутое. Соотношение между расстоянием от полюса до изображения и фокусным расстоянием F определяется «формулой зеркала».

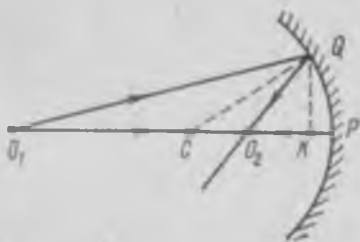


Рис. 51.14

Рассмотрим два луча, исходящих из точечного источника O_1 (рис. 51.14). Если после отражения от зеркала они одновременно пересекаются в точке O_2 , то O_2 является изображением источника O_1 . Приравняем время распространения света по траектории O_1Q , QO_2 и O_1P , PO_2 . Обозначая $O_1Q=a$, $QO_2=b$, $O_1P=d$, $O_2P=f$, получим уравнение

$$a + b = f + d.$$

Рассмотрим теперь треугольники O_1QK , O_2QK и CQK , где $CQ = CP = R$, $KP = \Delta$, $QK = h$. Учитывая приближение, сделанное в задаче 49.5, получим

$$h^2 = a^2 - (d - \Delta)^2 \simeq (a - d + \Delta)2d,$$

$$h^2 = b^2 - (f - \Delta)^2 \simeq (b - f + \Delta)2f,$$

$$h^2 = R^2 - (R - \Delta)^2 \simeq \Delta 2R.$$

Из этих уравнений находим

$$a + b = d + f + \frac{h^2}{2} \left(\frac{1}{d} + \frac{1}{f} - \frac{2}{R} \right).$$

Следовательно, формула зеркала имеет вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{R}. \quad (51.1)$$

Аналогичная формула для выпуклого зеркала отличается правой частью

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = -\frac{2}{R}. \quad (51.2)$$

Положительным значениям d, f соответствуют действительный предмет и изображение. Если $d < 0, f < 0$, то предмет и изображение мнимые.

Линейное увеличение k , определяемое отношением размера изображения к размеру предмета, дается формулой

$$k = \left| \frac{f}{d} \right|. \quad (51.3)$$

Задачи на тему этого параграфа — это задачи на определение размеров и взаимного расположения изображений, предметов и зеркал. Решение задачи надо начинать с выполнения построений. Для этого нужно нарисовать зеркало, провести главную оптическую ось, отметить на рисунке фокус, центр, полюс. Используя числовые данные, указать положение предмета, а затем построить изображение. После этого можно перейти к составлению уравнений на основании формулы зеркала и формулы увеличения.

В том случае, когда имеется система зеркал, предметом для второго зеркала служит изображение, даваемое первым зеркалом, которое может быть как действительным, так и мнимым. Увеличение, даваемое системой зеркал, равно произведению увеличений, даваемых каждым зеркалом в отдельности.

ЗАДАЧА 51.6. В центре вогнутого сферического зеркала радиусом $R_1 = 40$ см находится выпуклое сферическое зеркало радиусом $R_2 = 20$ см. Между центром и фокусом вогнутого зеркала на расстоянии $l_1 = 28$ см от его полюса поставлен предмет высотой $H_0 = 4$ см перпендикулярно главной оптической оси. Определить величину и положение первого изображения в выпуклом зеркале, даваемом лучами, отраженными от вогнутого зеркала, и величину и положение изображения в вогнутом зеркале, даваемом лучами, отраженными от выпуклого зеркала.

Решение. Рассмотрим сначала первую часть задачи. Построим изображение A_1B_1 предмета AB (рис. 51.15а) в вогнутом зеркале. По условию $F_1 = R_1/2, d_1 = l_1$. Используя уравнение зеркала

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_1}, \quad H_1 = H_0 \frac{f_1}{d_1}, \quad (1)$$

находим $f_1 = 70$ см. Изображение в отсутствие выпуклого зеркала

получалось бы за ним на расстоянии $d_2 = f_1 - R_1 = 30$ см. Следовательно, на выпуклое зеркало падает отраженный от вогнутого зеркала сходящийся пучок лучей. Поэтому при построении изображения, даваемого выпуклым зеркалом, изображение A_1B_1 необхо-

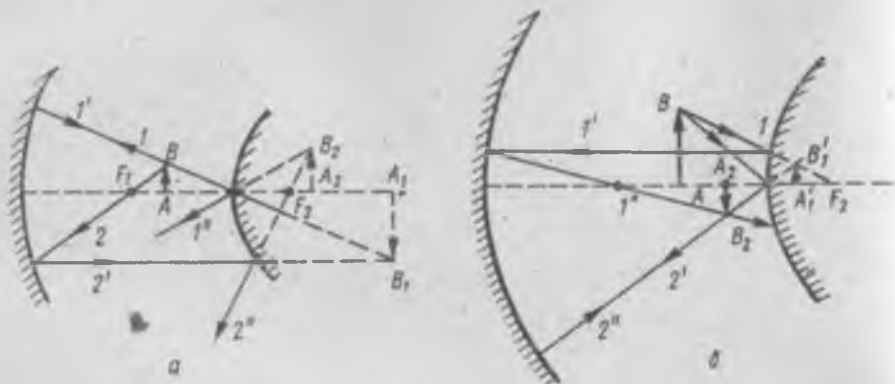


Рис. 51.15

димо рассматривать как мнимый предмет. Поскольку фокус и предмет мнимые, то

$$-\frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} = -\frac{2}{R_2}, \quad H_2 = H_1 \frac{|f_2|}{d_2}. \quad (2)$$

Подставляя числовые данные, находим, что $f_2 = -15$ см, т. е. изображение A_2B_2 также является мнимым, величина его

$$H_2 = H_0 \frac{|f_2|}{d_2} \frac{f_1}{d_1} = 5 \text{ см.}$$

Решим вторую часть задачи. Построим изображение $A_1'B_1'$ предмета AB в выпуклом зеркале (рис. 51.15б). Предмет находится от его полюса на расстоянии $d_2' = R_1 - l_1 = 12$ см. Из основного уравнения

$$\frac{1}{d_2'} + \frac{1}{f_2'} = -\frac{2}{R_2}, \quad H_2' = H_0 \frac{|f_2'|}{d_2'}$$

находим расстояние f_2' от полюса до изображения $f_2' = -60/11$ см, т. е. изображение является мнимым. На вогнутое зеркало падает отраженный от выпуклого зеркала расходящийся пучок лучей. Поэтому при построении изображения A_2B_2 в вогнутом зеркале изображение $A_1'B_1'$ надо рассматривать как действительный

предмет, находящийся на расстоянии $d_1' = R_1 + |f_2'|$ от полюса вогнутого зеркала. Используя уравнение зеркала

$$\frac{1}{d_1'} + \frac{1}{f_1'} = \frac{1}{F_1}, \quad H_1' = H_2' \frac{|f_1'|}{d_1'},$$

находим расстояние f_1' от полюса до изображения $f_1' = 250/7$ см. Изображение является действительным, его величина

$$H_1' = H_0 \frac{|f_2'|}{d_2'} \frac{|f_1'|}{d_1'} = \frac{10}{7} \text{ см.}$$

ЗАДАЧА 51.7. Вогнутое зеркало дает изображение Солнца в виде кружка радиусом $r = 14$ мм. Диаметр Солнца виден на небе под углом $\varphi = 32'$. Определить радиус R кривизны зеркала.

Ответ. $R = \frac{4r}{\alpha}$, $\alpha = \varphi^\circ \frac{2\pi}{360^\circ}$, $R = 0,6$ м.

§ 52. ЛИНЗЫ

Наиболее существенной частью почти всех оптических приборов являются линзы — прозрачные, стеклянные тела, ограниченные сферическими поверхностями (рис. 52.1). Мы будем рассматри-

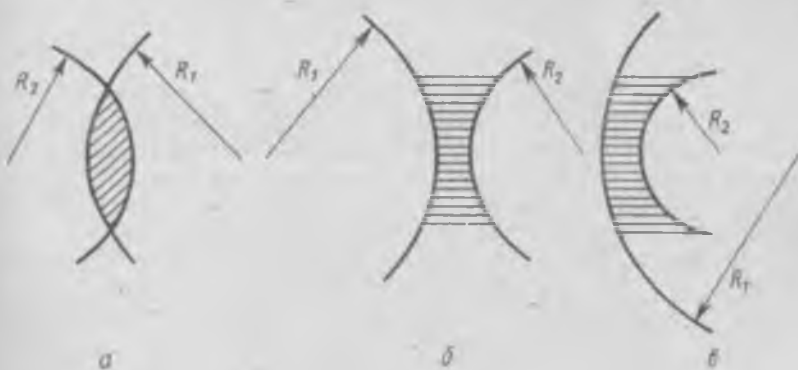


Рис. 52.1

вать только тонкие линзы, толщина которых мала по сравнению с радиусами кривизны R_1 и R_2 этих поверхностей. В силу этого полюсы сферических поверхностей можно считать совпадающими в одной точке, которую называют *оптическим центром линзы*. Прямая, проходящая через оптический центр и центры сферических поверхностей, называется *главной оптической осью*. Остальные оси, проходящие через центр линзы, называются *побочными*.

Линзы можно разбить на два типа: *собирающие* линзы, имеющие большую толщину в середине, чем по краям; *рассеивающие* линзы, которые, наоборот, толще у краев. Собирающую линзу можно представить как совокупность большого числа призм, расширяющихся к середине, а рассеивающую — как ряд призм, расширяющихся к краям. Так как призмы отклоняют лучи к основанию, т. е. к расширяющейся части призмы, то линзы, более толстые посередине, отклоняют лучи к оси линзы, а более толстые у краев отклоняют лучи от оси. Луч, проходящий через оптический центр линзы, не меняет своего направления.

Точка, в которой пересекаются после преломления лучи, падающие на линзу пучком, параллельным главной оптической оси, называется *фокусом*, а плоскость, проходящая через фокус и перпендикулярная главной оптической оси, — *фокальной плоскостью*. В случае собирающей линзы фокус действительный (рис. 52.2а), для рассеивающей линзы фокус мнимый (рис. 52.2б), так как в точке F пересекаются не сами лучи, а их продолжения. Собирающая линза концентрирует направленный поток энергии в фоку-

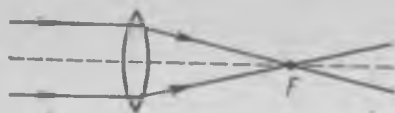


Рис. 52.2а

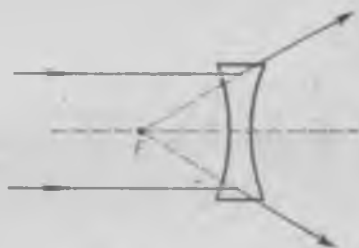


Рис. 52.2б

се. Рассеивающая линза преобразует направленный поток в расходящийся. Если линза находится в однородной среде, то у нее имеются два фокуса по разные стороны линзы, расстояние до которых от центра линзы (фокусные расстояния) одинаковы.

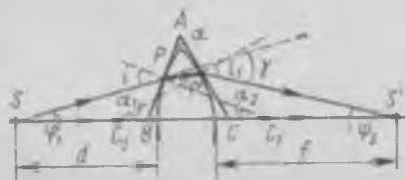


Рис. 52.3

1. Вывод формулы линзы. Рассмотрим для определенности двояковыпуклую собирающую линзу (рис. 52.3). Точки C_1 и C_2 — центры первой и второй сферических поверхностей, радиусы которых равны соответственно R_1 и R_2 . Пусть линза находится в среде с показателем преломления n_0 , а показатель преломления вещества линзы — n . Рассчитаем положение f изображения точечного источника, находящегося на оптической оси на расстоянии d от линзы. Для этого найдем положение точки пересечения луча, идущего вдоль главной оптической оси, и одного из лучей, выхо-

щего вдали от линзы. Пусть линза находится в среде с показателем преломления n_0 , а показатель преломления вещества линзы — n . Рассчитаем положение f изображения точечного источника, находящегося на оптической оси на расстоянии d от линзы. Для этого найдем положение точки пересечения луча, идущего вдоль главной оптической оси, и одного из лучей, выхо-

дящего из источника S под малым углом φ_1 к главной оптической оси. Направление распространения первого луча после преломления не изменяется, а второй луч преломляется линзой точно так же, как луч, падающий на призму, грани которой AB и AC перпендикулярны прямых C_1P и C_2P' (§ 50, рис. 50.1). Сохраняя обозначения, принятые в § 50, находим $\gamma = i + i' - r - r'$, $\alpha = r + r'$. В том случае, когда угол i падения луча на линзу мал, из закона преломления находим, что $n_0 i = nr$, $nr' = n_0 i'$ и, следовательно, $\gamma = (n/n_0 - 1)\alpha$. Далее, из простых геометрических соображений (см. рис. 52.3) находим, что $\gamma = \varphi_1 + \varphi_2$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, т. е.

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \left(\frac{n}{n_0} - 1 \right) (\alpha_1 + \alpha_2).$$

Поскольку толщина линзы очень мала, то можно считать, что точки P и P' практически совпадают и находятся на расстоянии h от главной оптической оси. Учитывая малость углов φ_1 , φ_2 , α_1 и α_2 , можно написать

$$\frac{h}{d} = \operatorname{tg} \varphi_1 \simeq \varphi_1, \quad \varphi_2 \simeq \frac{h}{f}, \quad \alpha_1 \simeq \frac{h}{R_1}, \quad \alpha_2 \simeq \frac{h}{R_2}.$$

Следовательно, формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \quad (52.1)$$

где фокусное расстояние линзы определяется соотношением

$$\frac{1}{F} = \frac{n - n_0}{n_0} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right). \quad (52.2)$$

Из вывода формулы (52.1) следует, что изображение формируется только теми лучами, которые проходят вблизи главной оптической оси. Более удаленные лучи будут пересекать оптическую ось на расстояниях, не равных f из (52.1).

Для произвольной линзы фокусное расстояние также определяется формулой (52.2). При этом знаки перед членами, содержащими радиусы кривизны, берутся положительными для выпуклых поверхностей, отрицательными — для вогнутых. Линза, изображенная на рис. 52.1а, — собирающая, для этой линзы

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) > 0,$$

а линза на рис. 52.1б — рассеивающая, так как $R_1 > R_2$,

$$\frac{1}{F} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) < 0.$$

Собирающая линза, помещенная в оптически более плотную среду ($n_0 > n$), как показывает формула (52.2), становится рассе-

вающей, и, наоборот, рассеивающая линза превращается в собирающую. По этой причине пузырек воздуха в воде играет роль рассеивающей линзы.

Заметим, что формулы (52.1), (52.2) могут быть получены последовательным двукратным применением соотношений (3), (4), полученных в примере 49.4 к каждой из преломляющих поверхностей, поскольку изображение точки, даваемое первой поверхностью, является мнимым или действительным источником для второй поверхности.

Действительно, предположим, что преломляющая поверхность $АС$ отсутствует.

Полагая в (3) $n_1 = n_0$, $n_2 = n$, $R = R_1$, найдем, что первое изображение точки S находится справа от линзы на расстоянии x ,

$$\frac{n_0}{d} + \frac{n}{x} = \frac{n - n_0}{R_1}.$$

Это изображение является мнимым предметом для поверхности $АС$. Полагая в (4) $n_1 = n$, $n_2 = n_0$, $R = -R_2$, получим

$$-\frac{n}{x} + \frac{n_0}{f} = \frac{n_0 - n}{-R_1}.$$

После сложения из этих соотношений следуют формулы (52.1) и (52.2).

2. Построение изображения в линзе. Для определения положения изображения A' светящейся точки A берут два луча, ход которых легче всего построить. На рис. 52.4 показаны лучи, которые

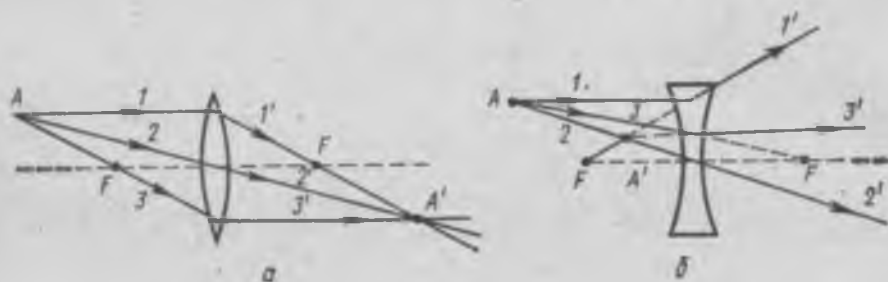


Рис. 52.4

чаще всего используются при построениях. Следует, однако, помнить, что изображение формируется в результате пересечения большого числа лучей, излучаемых источником, и их количество определяет яркость изображения.

Расстояние от линзы до предмета d , от линзы до изображения f и фокусное расстояние F связаны соотношением (52.1), причем для собирающей линзы $F > 0$, а для рассеивающей $F < 0$. Положи-

альные значения d , f соответствуют действительным предмету и изображению, а отрицательные — мнимым предмету и изображению. Коэффициент линейного увеличения, равный отношению длины изображения к длине предмета, можно представить в виде

$$k = \left| \frac{l}{d} \right|. \quad (52.3)$$

ЗАДАЧА 52.1. Отрезок ab расположен на оптической оси рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_0 = 0,1$ м. Точка b совпадает с фокусом линзы, а точка a находится на расстоянии $s = 0,15$ м от линзы. Определить длину l изображения отрезка ab .

Решение. Найдём вначале изображение точки b . Полагая в (52.1) $d = F_0$, $F = -F_0$, получим уравнение

$$\frac{1}{F_0} + \frac{1}{f_b} = -\frac{1}{F_0},$$

из которого находим $f_b = -F_0/2$. Используя еще раз формулу линзы, получим расстояние до изображения точки a :

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{f_a} = -\frac{1}{F_0}, \quad f_a = -\frac{sF_0}{s + F_0}.$$

Следовательно, изображение отрезка мнимое. Длина изображения

$$l = \frac{F_0}{2} \frac{s - F_0}{s + F_0}.$$

ЗАДАЧА 52.2. Доказать, что расстояние между двумя последовательными пересечениями луча с главной оптической осью собирающей линзы не может быть меньше $4F$.

Решение. Наша задача показать, что $d + f \geq 4F$. Воспользовавшись формулой линзы, получим функцию

$$s(d) = d + f(d) = \frac{d^2}{d - F}. \quad (1)$$

Для исследования на экстремум необходимо приравнять производную функции $s(d)$ нулю:

$$s' = \frac{2d}{d - F} - \frac{d^2}{(d - F)^2} = 0. \quad (2)$$

Корень этого уравнения $d = d_0$, $d_0 = 2F$. Значение $s(d_0) = 4F$ является наименьшим. Действительно,

$$s(d) - s(d_0) = \frac{(d - 2F)^2}{d - F} \geq 0.$$

ЗАДАЧА 52.3. Источник света и экран находятся друг от друга на расстоянии a . Тонкая собирающая линза с фокусным

расстоянием F дает действительное изображение на экране при двух положениях. Найти расстояние l между этими положениями.

Решение. Так как изображение действительное, то расстояние от предмета до линзы $d > F$ и расстояние от линзы до изображения $f > 0$. Согласно формуле линзы (52.1)

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Условие постоянства расстояния между предметом и экраном приводит к уравнению

$$d + f = a. \quad (2)$$

Из системы уравнений (1) и (2) находим два значения расстояния от предмета до линзы:

$$d_{1,2} = \frac{a}{2} \mp \frac{1}{2} \sqrt{a^2 - 4aF}.$$

Расстояние между двумя положениями линзы

$$l = d_2 - d_1 = \sqrt{a^2 - 4aF}.$$

Если возникает необходимость построить ход произвольного луча, падающего под некоторым углом к главной оптической оси, то обычно используются побочные оптические оси. Например, пусть требуется найти направление луча l после его прохождения через собирающую (рис. 52.5а) и рассеивающую линзы (рис. 52.5б).

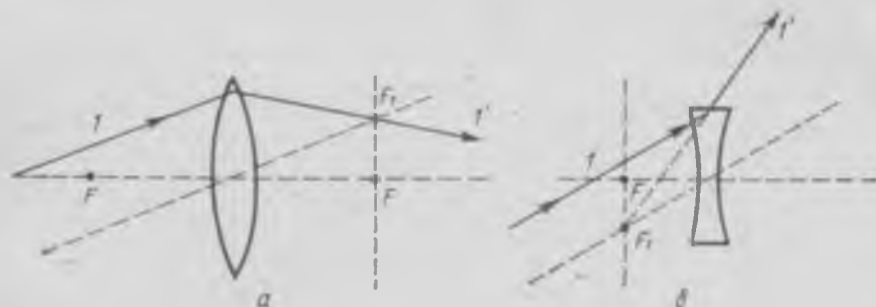


Рис. 52.5

Проведя побочную ось параллельно лучу l , найдем в точке пересечения фокальной плоскости данной осью побочный фокус F_1 . В случае собирающей линзы луч l должен сам пройти через точку F_1 ; в случае рассеивающей — через F_1 проходит продолжение преломленного луча.

ПРИМЕР 52.4. а) Известны положения светящейся точки A , ее изображения A' на главной оптической оси и плоскости линзы (рис. 52.6а). Найдём построением фокусное расстояние и тип линзы.

Поскольку изображение A' находится слева от линзы и $d > |f|$, то линза является рассеивающей. Проведем луч AQ , а затем прямую, проходящую через точки A' и Q . Прямая OF' (побочная ось), параллельная лучу AQ , пересечет прямую $A'Q$ в побочном фокусе F' . Перпендикуляр, проведенный из F' к главной оси, пересечет ее в фокусе.

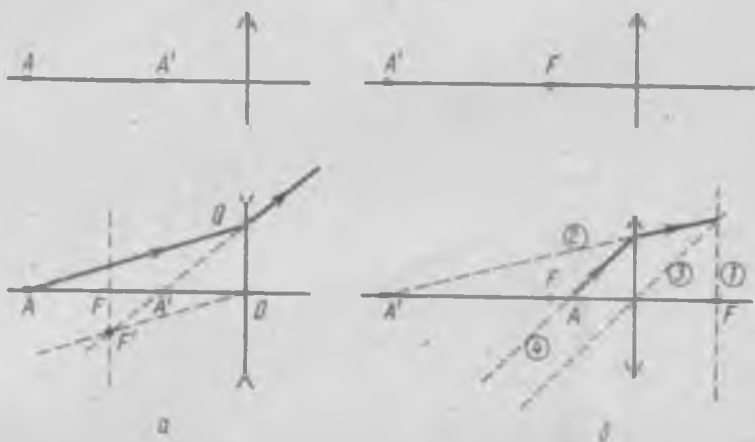


Рис. 52.6

б) Известны положения изображения точки A' фокуса F и плоскости линзы (рис. 52.6б). Найти построением положение светящейся точки A и тип линзы.

Поскольку $|f| > F$, то линза является собирающей. Последовательность необходимых построений указана на рисунке.

Когда на линзу падает сходящийся пучок лучей, которые из-за присутствия линзы не пересекаются в действительности, источник является мнимым. На рис. 52.7 построено действительное изображение A' мнимого источника A , образованного пучком, ограниченным лучами 1 и 2, в собирающей линзе. На рис. 52.8 дано построение действительного изображения A' мнимого источника A в рассеивающей линзе.

ПРИМЕР 52.5. а) Пусть точка A на рис. 52.7 находится на расстоянии $s = \frac{3}{2}F_0$ от линзы, $F = F_0$ — ее фокусное расстояние. Найдём расстояние от изображения до линзы.

Поскольку точка A находится в вершине сходящегося пучка лучей, то она является мнимым предметом. Полагая в (52.1) $d = -s$, $F = F_0$, получим

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F_0}, \quad f = \frac{3}{5} F_0.$$

Следовательно, изображение A' действительное и находится на расстоянии $\frac{2}{3}F_0$ от линзы.

б) Пусть точка A на рис. 52.8 находится на расстоянии $s = -\frac{2}{3}F_0$ от линзы, $F = -F_0$ — фокусное расстояние линзы. Найти расстояние от линзы до изображения.

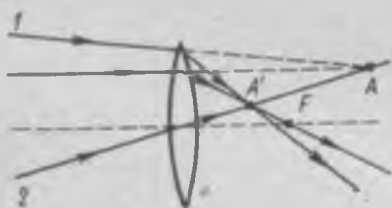


Рис. 52.7

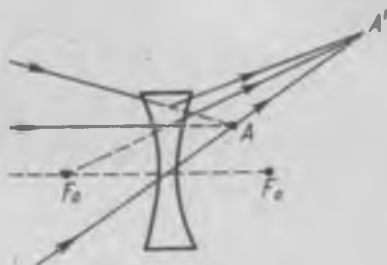


Рис. 52.8

Полагая в (52.1) $d = -s$, $F = -F_0$, получим

$$-\frac{1}{s} + \frac{1}{f} = -\frac{1}{F_0}, \quad f = 2F_0.$$

Следовательно, изображение действительное и расположено на расстоянии $2F_0$ от линзы.

Имеется определенное сходство в характере изображений, полученных с помощью линз и зеркал. Если действительный источник находится между фокусом и центром собирающей линзы (полюсом вогнутого зеркала), то образуется мнимое изображение. Если предмет находится за фокусным расстоянием, то изображение всегда действительное. Изображение действительного предмета в рассеивающей линзе (или выпуклом зеркале) всегда мнимое и уменьшенное независимо от расстояния между предметом и линзой (полюсом зеркала).

3. Фокусное расстояние системы линз. Оптической силой линзы называют величину $D = 1/F$. Величина D может быть как положительной, так и отрицательной. Оптическую силу собирающей линзы с фокусным расстоянием в 1 м принимают за единицу и называют *диоптрией*. Если тонкие линзы сложены вплотную, то *общая оптическая сила линз равна алгебраической сумме оптических сил отдельных линз*.

Это утверждение легко проверить из следующих соображений. Из вывода формулы линзы ясно, что первая линза отклоняет на угол h/F_1 . Если вторая линза расположена вплотную к первой, то луч войдет в нее на том же расстоянии h от оси и отклонится на угол h/F_2 . Полное отклонение двумя линзами равно $h/F_1 + h/F_2$. Такое же отклонение можно получить, заменив две линзы одной с фокусным расстоянием F , определяемым из условия

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F_1} + \frac{1}{F_2}. \quad (52.4)$$

Если же между линзами имеются зазоры, то это условие не выполняется.

ЗАДАЧА 52.6. Точечный источник находится на расстоянии $s_1 = 2$ м от собирающей линзы. Вплотную к линзе приложили насадочную линзу с оптической силой $D = 5$ диоптрий. На каком расстоянии от линзы следует поместить источник, чтобы положение изображения не изменилось?

Решение. В начальном положении величины s_1 , f , F подчиняются уравнению

$$\frac{1}{s_1} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \quad (1)$$

Пусть s_2 — расстояние от источника до линзы с насадкой. Согласно условию задачи

$$\frac{1}{s_2} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F} + D. \quad (2)$$

Из уравнений (1), (2) находим

$$s_2 = \frac{s_1}{1 + s_1 D} \approx 0,18 \text{ м.}$$

4. Светосила линзы. Поместим перед линзой точечный источник света. Распределение света в плоскости изображения обусловлено дифракцией на оправе линзы. Дифракционное изображение точечного источника имеет вид светлого диска, окруженного светлыми и темными кольцами, с центром в точке, удовлетворяющей формуле линзы (52.1). Интенсивность светлых колец быстро уменьшается с ростом расстояния от центра. 90% света концентрируется внутри круга, ограниченного вторым темным кольцом. Если источник находится на бесконечности, то радиус этого кольца $r = 2,232(\lambda/D)F$, где D — диаметр линзы, F — фокусное расстояние.

Найдем среднюю освещенность изображения e , пренебрегая отражением света от линзы и поглощением в стекле. Пусть Φ — световой поток, падающий на линзу. Согласно (47.1) $0,9\Phi = \pi r^2 e$.

Следовательно,

$$e \sim \frac{\Phi}{\lambda^2} \left(\frac{D}{F} \right)^2.$$

Величина D^2/F^2 называется *светосилой линзы*, D/F — *относительным отверстием линзы*.

В заключение сформулируем условия применимости метода геометрической оптики в теории оптического изображения. Во-первых, длина волны должна быть существенно меньше диаметра линзы: $\lambda \ll D$. Во-вторых, площадь линзы должна быть значительно больше площади первой зоны Френеля в области линзы. Полагая в (48.6) $a=d$, $b=f$, получим неравенство $\lambda df(d+f)^{-1} \ll D^2/4$. Учитывая формулу линзы, найдем условие $F \ll D^2/4\lambda$, соответствующее (48.11).

5. Дефекты линз. Один из наиболее крупных недостатков линз заключается в цветной кайме, которая окружает изображения предметов. Это явление называется *хроматической аберрацией* и объясняется дисперсией света. Когда преломляется белый свет, то фокусные расстояния различны для света различных цветов. Наименьшее фокусное расстояние у фиолетовых лучей, наибольшее — у красных. Потому изображение пятна получается цветным. Комбинируя несколько линз различных сортов стекла, можно устранить хроматическую аберрацию и получить, как говорят, *ахроматическую линзу*.

Другой недостаток линз, называемый *сферической аберрацией*, приводит к тому, что центральная часть изображения оказывается наиболее резкой, а периферийные участки размыты. Этот дефект изображения связан с тем, что сферическая форма преломляющих поверхностей линзы не обеспечивает фокусировку всех лучей широкого пучка, падающего на линзу. В то время как лучи, близкие к оси, еще проходят через фокус, внешние лучи широкого пучка пересекаются ближе к линзе. В результате изображение точечного предмета получается нечетким, в виде расплывчатого пятна. Эффект сферической аберрации можно устранить, если использовать только центральную часть линзы, т. е. *диафрагмированием* линзы. Однако при этом светосила линзы уменьшается. Аберрацию можно ослабить, изменив форму линзы вблизи краев или склеив несколько линз, аберрации которых взаимно компенсируются.

§ 53. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Если имеется оптическая система, состоящая из нескольких линз и зеркал, то положение изображения некоторого объекта можно найти следующим образом. Сначала найдем изображение объекта, создаваемое первой линзой или зеркалом. Положение изображе-

ния определяется формулами (51.1) или (52.1). При этом оставшая часть оптической системы не принимается во внимание. Рассмотрим первое изображение как источник мнимый или действительный для следующей линзы или зеркала, по-прежнему принимая во внимание остальную часть оптической системы. Положение второго изображения также определяется формулами (51.1) или (52.1) и может быть построено с помощью построения оптических осей. Аналогичную процедуру надо проделать последовательно для каждого элемента оптической системы. В результате получим изображение объекта, создаваемое всей оптической системой.

ПРИМЕР 53.1. На оптической оси собирающей линзы на расстоянии F помещен точечный источник света S на расстоянии $a (F < a \leq 2F)$ от линзы. За линзой на расстоянии b расположено плоское зеркало. Определим положение изображения S' источника после прохождения света через линзу, отражения в зеркале и вторичного прохождения через линзу.

Первое изображение источника S_1 находится на расстоянии f_1 от линзы,

$$f_1 = \frac{aF}{a - F}$$

от линзы, т. е. между линзой и зеркалом на расстоянии $b - f_1$. Поскольку $F < a \leq 2F$, то $2F \leq f_1 < \infty$. Далее в зависимости от положения зеркала возможны три случая.

A. $b \geq f_1$. Тогда первое изображение S_1 образуется перед зеркалом на расстоянии $b - f_1$ от его поверхности (рис. 53.1а).

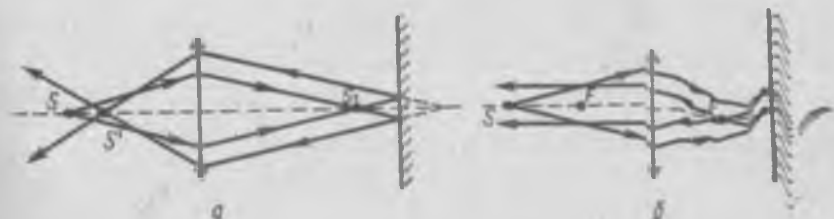


Рис. 53.1

S_1 является действительным предметом для зеркала. Второе изображение S_2 находится на расстоянии $b - f_1$ за зеркалом и является действительным предметом для линзы, причем $d_2 = 2b - f_1$. По формуле (52.1) найдем расстояние от линзы до третьего изображения S'' :

$$f_2 = \frac{F(2b - f_1)}{2b - f_1 - F}$$

Следовательно,

$$\epsilon \sim \frac{\Phi}{\lambda^2} \left(\frac{D}{F} \right)^2.$$

Величина D^2/F^2 называется *светосилой линзы*, D/F — *относительным отверстием* линзы.

В заключение сформулируем условия применимости метода геометрической оптики в теории оптического изображения. Во-первых, длина волны должна быть существенно меньше диаметра линзы: $\lambda \ll D$. Во-вторых, площадь линзы должна быть значительно больше площади первой зоны Френеля в области линзы. Полагая в (48.6) $a=d$, $b=f$, получим неравенство $\lambda df(d+f)^{-1} \ll D^2/4$. Учитывая формулу линзы, найдем условие $F \ll D^2/4\lambda$, соответствующее (48.11).

5. Дефекты линз. Один из наиболее крупных недостатков линз заключается в цветной кайме, которая окружает изображения предметов. Это явление называется *хроматической аберрацией* и объясняется дисперсией света. Когда преломляется белый свет, то фокусные расстояния различны для света различных цветов. Наименьшее фокусное расстояние у фиолетовых лучей, наибольшее — у красных. Потому изображение пятна получается цветным. Комбинируя несколько линз различных сортов стекла, можно устранить хроматическую аберрацию и получить, как говорят, *ахроматическую линзу*.

Другой недостаток линз, называемый *сферической аберрацией*, приводит к тому, что центральная часть изображения оказывается наиболее резкой, а периферийные участки размыты. Этот дефект изображения связан с тем, что сферическая форма преломляющих поверхностей линзы не обеспечивает фокусировку всех лучей широкого пучка, падающего на линзу. В то время как лучи, близкие к оси, еще проходят через фокус, внешние лучи широкого пучка пересекаются ближе к линзе. В результате изображение точечного предмета получается нечетким, в виде расплывчатого пятна. Эффект сферической аберрации можно устранить, если использовать только центральную часть линзы, т. е. *диафрагмированием* линзы. Однако при этом светосила линзы уменьшается. Аберрацию можно ослабить, изменив форму линзы вблизи краев или склеив несколько линз, аберрации которых взаимно компенсируются.

§ 53. ОПТИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Если имеется оптическая система, состоящая из нескольких линз и зеркал, то положение изображения некоторого объекта можно найти следующим образом. Сначала найдем изображение объекта, создаваемое первой линзой или зеркалом. Положение изображе-

ния определяется формулами (51.1) или (52.1). При этом оставшаяся часть оптической системы не принимается во внимание. Затем рассмотрим первое изображение как источник мнимый или действительный для следующей линзы или зеркала, по-прежнему не принимая во внимание остальной части оптической системы. Положение второго изображения также определяется формулами (51.1) или (52.1) и может быть построено с помощью побочных оптических осей. Аналогичную процедуру надо проделать последовательно для каждого элемента оптической системы. В результате получим изображение объекта, создаваемое всей оптической системой.

ПРИМЕР 53.1. На оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием F помещен точечный источник света S на расстоянии a ($F < a \leq 2F$) от линзы. За линзой на расстоянии b расположено плоское зеркало. Определим положение изображения S' источника после прохождения света через линзу, отражения от зеркала и вторичного прохождения через линзу.

Первое изображение источника S_1 находится на расстоянии

$$f_1 = \frac{aF}{a-F} \quad (1)$$

от линзы, т. е. между линзой и зеркалом на расстоянии от линзы. Поскольку $F < a \leq 2F$, то $2F \leq f_1 < \infty$. Далее в зависимости от положения зеркала возможны три случая.

A. $b \geq f_1$. Тогда первое изображение S_1 образуется перед зеркалом на расстоянии $b - f_1$ от его поверхности (рис. 53.1a). Точка

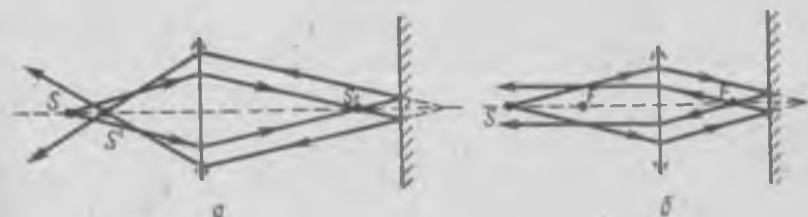


Рис. 53.1

S_1 является действительным предметом для зеркала. Второе изображение S_2 находится на расстоянии $b - f_1$ за зеркалом и является действительным предметом для линзы, причем $d_2 = 2b - f_1$. Из формулы (52.1) найдем расстояние от линзы до третьего изображения S' :

$$f_2 = \frac{F(2b - f_1)}{2b - f_1 - F} \quad (2)$$

Пусть $F=0,12$ м, $a=0,21$ м, $b=0,29$ м. Из (1), (2) получим $f_1=0,28$ м, $f_2=0,2$ м. Если $b=f_1$, то $f_2=a$, т. е. положения изображения S' и источника совпадают.

Б. $b < f_1$, $2b > f_1$. В этом случае на зеркало падает сходящийся пучок лучей. Точка S_1 является мнимым предметом для зеркала. Поэтому зеркало формирует второе изображение на расстоянии $d_2 = 2b - f_1$ от линзы. Это изображение является действительным предметом для линзы. В зависимости от знака d_2 изображение S' действительное или мнимое:

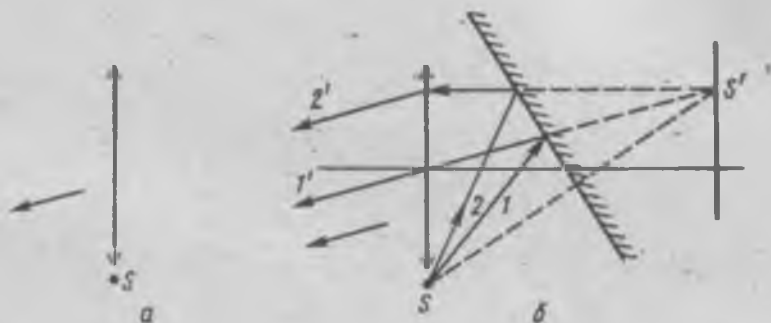


Рис. 53.2

1) если $2b - f_1 > F$, то линза формирует действительное изображение, расположенное с левой стороны от линзы;

2) если $2b - f_1 < F$, то линза формирует мнимое изображение, расположенное с правой стороны от линзы;

3) если $2b - f_1 = F$, то из линзы выходит параллельный пучок света. Положим $a = 2F$. Тогда $f_1 = 2F$. В рассматриваемом случае зеркало должно находиться на расстоянии $b = \frac{3}{2}F$ (рис. 53.1б).

В. $b < f_1$, $2b < f_1$. Теперь зеркало формирует второе изображение, находящееся на расстоянии $f_1 - 2b$ слева от линзы. На линзу падает сходящийся пучок. Точка пересечения является мнимым предметом для линзы. Изображение источника S' находится слева от линзы на расстоянии

$$f_2 = \frac{F(f_1 - 2b)}{F + f_1 - 2b}.$$

Нетрудно видеть, что формулы (1), (2) описывают все рассмотренные здесь ситуации.

ЗАДАЧА 53.2. На оправе собирающей линзы находится точечный источник света S . Каким образом надо расположить плоское зеркало, чтобы лучи света, отразившись от него и пройдя через

линзу, вышли из нее параллельным пучком в направлении, указанном стрелкой (рис. 53.2а).

Решение. Проведем главную оптическую ось и фокальную плоскость. Затем проведем побочную оптическую ось, параллельную стрелке. Она пересечет фокальную плоскость в точке S' . Если расположить зеркало перпендикулярно прямой SS' на расстоянии $SO = \frac{1}{2}SS'$, то точка S' будет мнимым изображением источника S в зеркале и одновременно действительным источником для линзы. Поскольку она лежит в фокальной плоскости, то из линзы выходит пучок параллельных лучей (рис. 53.2б).

ЗАДАЧА 53.3. Параллельный пучок падает на собирающую линзу, после нее на вогнутое зеркало с фокусным расстоянием $F_1 = 18$ см. Расстояние между линзой и зеркалом $a = 32$ см. Какое фокусное расстояние F_2 должно быть у линзы, чтобы свет, отразившись от зеркала, собрался в точке, удаленной от зеркала на $f = 6$ см?

Решение. Из построения (рис. 53.3) следует, что отраженные от зеркала лучи пересекутся между полюсом зеркала и фокусом в том случае, когда на зеркало от линзы падает сходящийся пучок лучей.

Продолжения этих лучей пересекаются за зеркалом в точке F_2 , которая является фокусом линзы. Следовательно, точку F_2 можно рассматривать как мнимый источник, находящийся на расстоянии $F_2 - a$ за зеркалом. По формуле вогнутого зеркала (51.1)

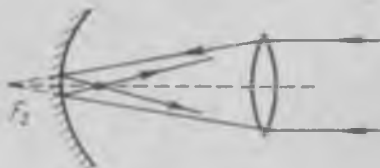


Рис. 53.3

$$\frac{1}{f} - \frac{1}{F_2 - a} = \frac{1}{F_1}$$

находим $F_2 = a + F_1 f (F_1 - f)^{-1} = 41$ см.

ЗАДАЧА 53.4. На расстоянии $d = 1$ м от линзы с оптической силой $D = 5$ дп поставлен предмет. Между линзой и изображением помещают перпендикулярно главной оптической оси плоскопараллельную пластинку толщиной $a = 18$ см с коэффициентом преломления $n = 1,5$. Где возникнет новое изображение предмета?

Решение. Вначале изображение $A'B'$ находилось на расстоянии (рис. 53.4)

$$f = \frac{Fd}{d - F} = \frac{d}{Dd - 1} = 25 \text{ см.} \quad (1)$$

После того как поставили пластинку, все падающие на нее лучи смещаются в направлении, перпендикулярном пластинке. Покажем, что, когда на пластинку падает параксиальный пучок, именно в этом приближении справедлива формула линзы, смеще-

ние всех лучей одинаково и не зависит от угла падения. В этом случае они формируют новое изображение A_1B_1 на расстоянии

$$f_1 = f + PK. \quad (2)$$

Определим, например, смещение луча, падающего на пластинку под малым углом i в точке C . Поскольку $\angle NKP = i$, то из $\triangle PNK$ находим

$$PN = PK \operatorname{tg} i \approx PK \cdot i. \quad (3)$$

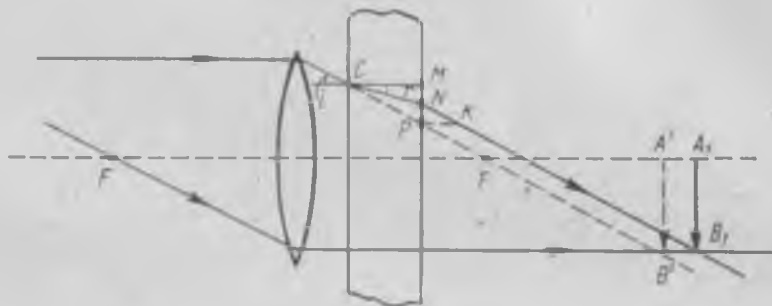


Рис. 53.4

Величина PN определяется из $\triangle CMP$ и $\triangle CMN$ ($CM = a$):

$$PN = a \operatorname{tg} i - a \operatorname{tg} r \approx a(i - r). \quad (4)$$

Угол преломления r связан с углом падения законом преломления:

$$\sin i = n \sin r \text{ или } i \approx nr. \quad (5)$$

Из уравнений (3) — (5) находим, что смещение луча

$$PK = \frac{a}{n} (n - 1) \quad (6)$$

не зависит от угла падения i . Таким образом, новое изображение возникает на расстоянии

$$f_1 = \frac{d}{Dd - 1} + \frac{a(n - 1)}{n} = 31 \text{ см.}$$

ПРИМЕР 53.5. Вогнутая сторона плосковогнутой тонкой линзы с коэффициентом преломления $n = 1.5$ и радиусом кривизны $R = 30$ см посеребрена. Найдём фокусное расстояние F этой системы.

1-й способ. Фокусное расстояние выпуклого зеркала, покрытого стеклом, не равно половине радиуса кривизны, так как луч,

отраженный от посеребренной поверхности, изменяет направление при переходе из стекла в воздух. Расстояние OF от полюса O (рис. 53.5) до точки пересечения продолжения этого луча с главной оптической осью равно величине фокусного расстояния. Определим OF . Из $\triangle ONF$ и $\triangle ONF_0$ находим (учитывая, что $OF_0 = R/2$)

$$OF \operatorname{tg} \alpha_2 = R/2 \operatorname{tg} \alpha_1. \quad (1)$$

Закон преломления связывает углы α_1 и α_2 соотношением

$$\sin \alpha_2 = n \sin \alpha_1. \quad (2)$$

Поскольку мы рассматриваем только параксиальные пучки, то углы α_1 и α_2 должны быть настолько малы, что синусы и тангенсы этих углов можно заменить самими углами, выраженными в радианах. В этом случае вместо (1) и (2) получим уравнения

$$OF \cdot \alpha_2 = R/2 \alpha_1, \quad \alpha_2 = n \alpha_1,$$

из которых находим $OF = R/2n$. Следовательно, $F = -R/2n$.

2-й способ. Найдем сначала положение первого изображения в линзе, не обращая внимания на то, что поверхность посеребрена. Применяя (52.1), получим $f_1 = F_1$, где F_1 — фокусное расстояние линзы. F_1 можно найти из (52.2), полагая один из радиусов кривизны равным бесконечности, а другой — R : $F_1 = -R/(n-1)$. Первое изображение находится слева от линзы. Затем рассмотрим это изображение как действительный предмет для зеркала. Используя (51.2), получим

$$\frac{n-1}{R} + \frac{1}{f_2} = -\frac{2}{R}, \quad \frac{1}{f_2} = -\frac{n+1}{R}.$$

Изображение находится справа и может быть рассмотрено как действительный предмет для линзы. Применяя (52.1), найдем

$$\frac{n+1}{R} + \frac{1}{f_3} = \frac{1}{F_1}, \quad f_3 \equiv F = -\frac{R}{2n}.$$

3-й способ — самый простой. Полученный выше результат можно представить в виде

$$\frac{1}{F} = \frac{2}{F_1} - \frac{2}{R} = \frac{-2(n-1)}{R} - \frac{2}{R} = -\frac{2n}{R}. \quad (3)$$

Это соотношение — следствие того, что оптическая сила сложной системы равна сумме оптических сил отдельных ее элементов. При

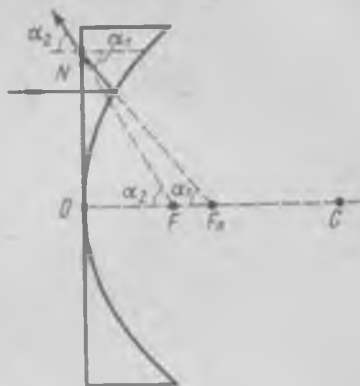


Рис. 53.5

этом поскольку через линзу свет проходит дважды (к зеркалу и от зеркала), то надо складывать оптические силы зеркала и двух линз.

Подставляя числовые значения, находим $F = -10$ см.

ПРИМЕР 53.6. Две тонкие собирающие линзы с общей главной оптической осью имеют фокусное расстояние $F_1 = 10$ см и $F_2 = 12$ см и расположены на расстоянии $a = 35$ см. Предмет расположен на расстоянии $s = 30$ см от первой линзы. Определим положение изображения и линейное увеличение системы.

Изображение, образованное первой линзой, промежуточное и служит предметом действительным или мнимым, если оказывается перед или за второй линзой, для второй линзы. Применяя формулу собирающей линзы, получим

$$f_1 = \frac{sF_1}{s - F_1} = 15 \text{ см.}$$

Это изображение располагается на расстоянии $d_2 = a - f_1 = 20$ см от второй линзы слева от нее. Следовательно, на эту линзу падает расходящийся пучок лучей, и поэтому промежуточное изображение A_1B_1 (рис. 53.6 а) является действительным предметом для линзы

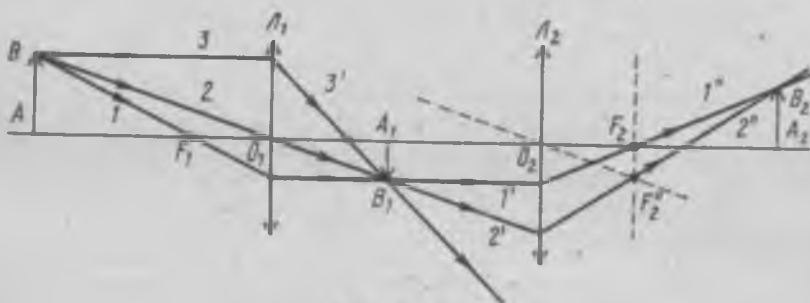


Рис. 53.6а

L_2 . По формуле линзы найдем расстояние f_2 от второй линзы до изображения $f_2 = F_2 d_2 / (d_2 - F_2) = 30$ см. Увеличение системы $k = k_1 k_2 = (f_1/s)(f_2/d_2) = 3/4$. На рис. 53.6 а показан ход лучей 1 и 2 через систему из двух линз. Ход луча 2' построен с помощью побочной оптической оси O_2F_2'' . Прямая F_2F_2'' лежит в фокальной плоскости линзы L_2 . Луч 3' не попадает в линзу L_2 .

Возьмем теперь третью собирающую линзу L_3 и поместим ее справа от первой линзы на расстоянии $f_1 = 15$ см. Поскольку положения линзы L_3 и промежуточного изображения A_1B_1 совпадают, то положение изображения A_2B_2 не изменится. Однако теперь луч 3 попадает на линзу L_2 — освещенность изображения увеличится.

На рис. 53.66 показаны фокальная плоскость F_3F_3' линзы $\mathcal{L}_3$ и побочная ось O_3F_3' .

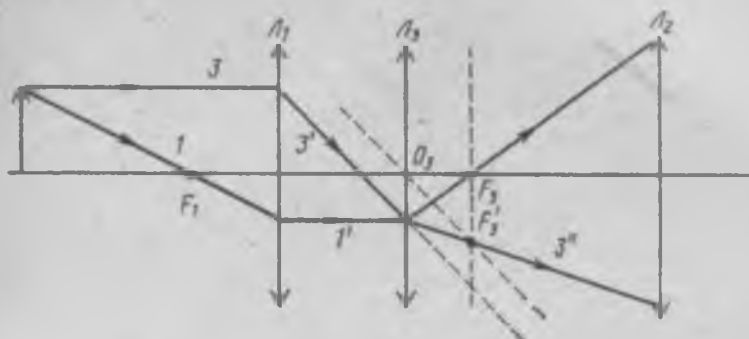


Рис. 53.66

ЗАДАЧА 53.7. Собирающая линза $\mathcal{L}_1$ с фокусным расстоянием $F_1=20$ см находится на расстоянии $a=50$ см от рассеивающей линзы $\mathcal{L}_2$ с фокусным расстоянием $F_2=36$ см, а предмет находится на расстоянии $d_1=28$ см от собирающей линзы. Определить положение изображения и увеличение системы.

Решение. Используя формулу собирающей линзы, находим, что расстояние до изображения $f_1=d_1F_1/(d_1-F_1)=70$ см больше расстояния между линзами и расположено на расстоянии $d_2=f_1-a=-20$ см за линзой $\mathcal{L}_2$, т. е. промежуточное изображение является мнимым предметом для второй линзы. Применяя формулу рассеивающей линзы, имеем $f_2=d_2F_2/(F_2-d_2)=45$ см. Увеличение $k=(f_1/d_1)(f_2/d_2)=45/8$. На рис. 53.7 показан ход лучей 1 и 2 через

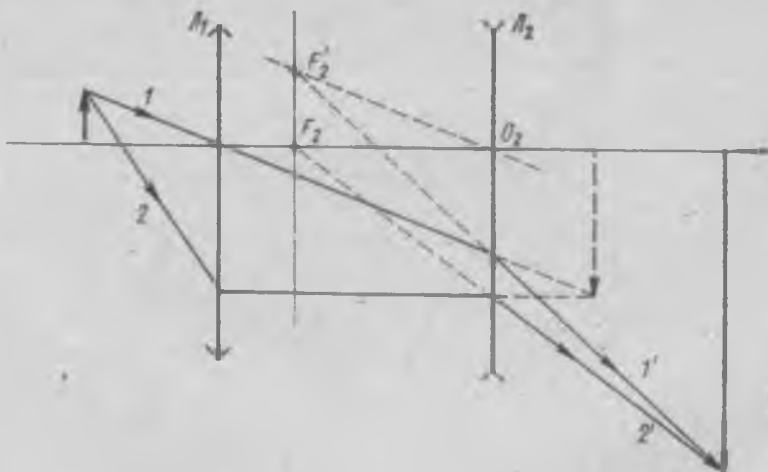


Рис. 53.7

систему линз L_1 и L_2 . Ход луча I после линзы L_2 построен с помощью побочной оптической оси O_2F_2' . Прямая F_2F_2' лежит в фокальной плоскости линзы L_2 .

§ 54. ОПТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

Оптические приборы конструируются из линз и зеркал на основе изложенных выше законов оптики. Прежде всего обсудим принцип действия самого распространенного оптического прибора—человеческого глаза.

1. Глаз. Оптическая система глаза представляет собой ряд преломляющих тел (хрусталик, стекловидное тело) и радужной оболочки, играющей роль диафрагмы. Хрусталик—прозрачное тело, похожее на собирающую линзу, состоит из прозрачного вещества, коэффициент преломления которого $\sim 1,4$. На сетчатке (которой выстлано дно глазного яблока) благодаря преломлению света в хрусталике образуется действительное изображение предметов. Поскольку расстояние между хрусталиком и сетчаткой неизменно, то для получения на сетчатке резкого изображения разнородных предметов хрусталик должен менять фокусное расстояние. Это происходит путем деформации хрусталика с помощью глазных мускулов. В соответствии с формулой (52.1) (f —постоянно) фокусное расстояние хрусталика уменьшается при приближении предмета к глазу. Способность глаза приспособливаться к видению на близком и далеких расстояниях называется *аккомодацией*. Пределы аккомодации для нормального глаза в зависимости от возраста лежат в интервале от 12 см до бесконечности.

Чтобы рассмотреть подробнее предмет, мы приближаем его. При этом увеличивается угол зрения, под которым виден предмет, т. е. угол, образованный лучами, идущими в наш глаз от крайних точек предмета.

Человеческий глаз способен видеть отдельно две точки, если угол между лучами, исходящими от этих точек, не меньше $3 \cdot 10^{-4}$ рад, или одна дуговая минута ($1'$). В этом случае острота зрения равна единице. Если угол меньше $1'$, то обе точки проецируются на один светочувствительный элемент сетчатки и сливаются в одну точку. Чем больше угол зрения, тем больше изображение на сетчатке и тем большее число деталей предмета воспринимается глазом. Однако не всегда возможно приблизить предмет к глазу, так как нельзя без утомительного напряжения глазных мышц рассматривать слишком близкие предметы.

Оптическое расстояние, на котором глаз может работать не утомляясь, называется расстоянием наилучшего зрения (для нормального глаза около 25 см). Если интересующие нас детали не видны с этого расстояния, то дальнейшее увеличение угла зрения возможно с помощью лупы или микроскопа. Однако часто

нельзя приблизиться к рассматриваемому предмету. В этом случае для увеличения угла зрения применяют телескоп.

Исследование процесса восприятия внешнего мира с помощью органов зрения — одна из интереснейших научных проблем [41, 42].

ЗАДАЧА 54.1. На сколько диоптрий возрастает оптическая сила хрусталика при переводе взгляда с очень удаленного предмета на предмет, находящийся на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 0,25$ м.

Решение. Когда глаз аккомодирован на бесконечность, то лучи, попадающие на хрусталик, почти параллельны, глазные мускулы ослаблены. В этом случае хрусталик принимает такую форму, что его фокусное расстояние F_0 равно глубине глаза — расстоянию $f_0 = 2,3$ см от хрусталика до сетчатки, оптическая сила хрусталика 43,5 дп. Когда человек переводит взгляд на предмет, находящийся на расстоянии d_0 , фокусное расстояние хрусталика становится равным $F_1 < F_0$. При этом

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0} = \frac{1}{F_1}.$$

Оптическая сила хрусталика изменяется на величину

$$\Delta D = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{F_0} = \frac{1}{d_0} = 4 \text{ дп.}$$

2. Очки. Аккомодация близоруких и дальнозорких глаз не в состоянии дать на сетчатке четкое изображение предмета, находящегося на расстоянии наилучшего зрения $d_0 = 25$ см. Если фокусное расстояние хрусталика мало (велико) по сравнению с нормальным, то изображение образуется перед (за) сетчаткой. Этот дефект глаза называется *близорукостью* (*дальнозоркостью*). Для исправления близорукости надо поместить перед глазом дополнительную линзу — очки с отрицательной оптической силой, а для исправления дальнозоркости — очки с положительной оптической силой. Оптическая сила системы хрусталик — линза очков должна равняться оптической силе нормального глаза. Первые очки появились в XIII в.

Нетрудно рассчитать оптическую силу $D_{\text{л}}$ очков, которые должен носить человек, чтобы исправить недостатки своего зрения. Предположим, что он без утомления глаз читает книгу, держа ее на расстоянии $d \neq d_0$. Поэтому

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f_0} = D_{\text{г.н.}}$$

Надев очки, человек сможет читать книгу, держа ее на расстоянии наилучшего зрения d_0 , т. е.

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0} = D_{\text{г.н.}} + D_{\text{л.}}$$

Следовательно,

$$D_d = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = \frac{d - d_0}{dd_0} \quad (54.1)$$

Если $d < d_0$ (близорукий глаз), то необходима рассеивающая линза, так как $D_d < 0$. Если $d > d_0$ (дальнозоркий глаз), то необходима собирающая линза, так как $D_d > 0$. Если $d = d_0$, то оптическая сила линзы $D_d = 0$, т. е. мы имеем плоскопараллельную пластинку. Такие «очки» можно увидеть у киноактеров, обладающих нормальным зрением.

3. Лупа. Предмет высотой h , рассматриваемый с расстояния наилучшего зрения d_0 , виден под углом $\alpha \approx \text{tg } \alpha = h/d_0$ (рис. 54.1 а).

Если мелкие детали предмета плохо различимы с этого расстояния, то приходится приближать предмет к глазу. При этом для фокусировки изображения на сетчатке аккомодационный мускул глаза должен увеличить оптическую силу хрусталика. Однако это утомительно для глаза. Для того чтобы не переутомлять глаз, применяют лупу, т. е. собирающую линзу или систему линз с положительной оптической силой. Если предмет расположить так, чтобы изображение в лупе возникало на расстоянии наилучшего зрения $f = -d_0$, то увеличение

$$k = \left| \frac{l}{d} \right| = 1 + \frac{d_0}{f}. \quad (54.2)$$

Рис. 54.1

Если $F = 12,5$ см, то $k = 3$.

Нетрудно видеть, что коэффициент увеличения равен отношению угла зрения α' , под которым мы видим изображение высотой H пользуясь лупой, к углу зрения α , под которым мы видим предмет без лупы, когда он находится на том же расстоянии. Действительно, из рис. 54.1 б видно, что $\alpha' \approx H/d_0$, $\alpha \approx h/d_0$,

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{H}{h} = k = 1 + \frac{d_0}{F}. \quad (54.3)$$

Большинство из нас пользуются лупой так, как показано на рис. 54.1 б. Однако те, для кого лупа является рабочим инструментом (например, часовые мастера), держат лупу вплотную к глазу, а предмет помещают в фокальную плоскость. Тогда ис-

ходящий от каждой точки предмета пучок лучей преобразуется линзой в параллельный пучок лучей, падающих на хрусталик (рис. 54.1 в). В этом случае глазные мышцы полностью расслаблены. На сетчатке возникает изображение, угловой размер которого $\alpha'' \approx h/F = d_0 \alpha / F$ в $(k-1)$ раз больше углового размера изображения α предмета, рассматриваемого с расстояния наилучшего зрения β помощью лупы. Короткофокусная лупа ($F < d_0$) позволяет получить значительное увеличение угла зрения.

4. Фотоаппарат. В фотоаппарате действительное обратное изображение образуется линзой (или комбинацией линз) на поверхности фотографической пленки. Линейный размер изображения удаленного объекта, видимого под углом $\theta \ll 1$, равен $F\theta$ (F — фокусное расстояние объектива). Следовательно, для получения изображения больших размеров фокусное расстояние должно быть большим. Например, при фотографировании астрономических объектов $F = 2-20$ м.

Глубина резкости. Предположим, что аппарат «сфокусирован» на объект, находящийся на расстоянии $d_0 \gg F$ от объектива. На негативе или позитиве можно увидеть, что резкими получаются не только объект, но и предметы, находящиеся ближе и дальше расстояния d_0 в некоторой области $d_1 < d < d_2$. Расстояние $d_2 - d_1$ называется *глубиной резкости*. Найдем величины d_1 и d_2 . На рис. 54.2 а — положение резкого изображения точечного объекта, находящегося на расстоянии d_0 от линзы, $OP = f_0$ — расстояние от линзы до фотопленки, $OA = R$ — радиус диафрагмы линзы.

Переместим объект в положение $d_1 < d_0$. Тогда его изображение на фотопленке представит светлый кружок радиусом PB (рис. 54.2 б). Если $PB \leq r$, где r — радиус кружка, соответствующий

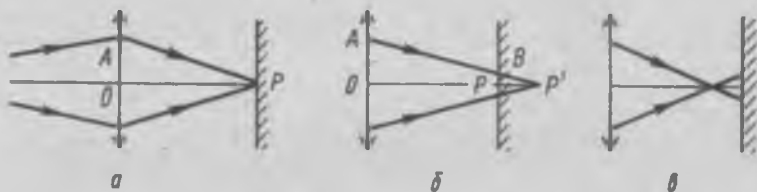


Рис. 54.2

щего минимальной площади разрешения светочувствительного материала, то изображение объекта будет достаточно четким. Из треугольника $OP'A$ находим $PB = (f_1 - f_0) \tan \alpha$, где α — угол $OP'A$, $f_1 = OP'$. Поскольку $\alpha \ll 1$, то $R/f_1 = \tan \alpha \approx \alpha$. Следовательно, должно выполняться неравенство

$$(f_1 - f_0) \frac{R}{f_1} < r. \quad (54.4)$$

Исключая f_1, f_0 из (54.4) с помощью уравнений

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{f_0} = \frac{1}{F}, \quad \frac{1}{d_1} + \frac{1}{f_1} = \frac{1}{F},$$

получим

$$d_1 \geq \frac{d_0}{1+\varepsilon}, \quad \varepsilon = \frac{rd_0}{RF} \ll 1.$$

Если переместить объект в положение $d_2 > d_0$ (рис. 54.2 в), то

$$d_2 \leq \frac{d_0}{1-\varepsilon}.$$

Следовательно, глубина резкости

$$d_2 - d_1 \simeq 2\varepsilon d_0 = \frac{2rd_0^2}{RF}. \quad (54.5)$$

Из (54.5) заключаем, что для увеличения глубины резкости следует диафрагмировать объектив, т. е. уменьшить величину R . При этом освещенность изображения уменьшается.

5. Секстант. Два плоских зеркала M_1 и M_2 , образующих двугранный угол α , обладают замечательным свойством. Пусть α_1, α_2 — углы падения луча на первое и второе зеркала. Поскольку сумма углов в треугольнике равна π , то углы в $\triangle ABC$ и $\triangle AOB$ на рис. 54.3 связаны уравнениями $2\alpha_1 + 2\alpha_2 + \pi - \theta = \pi$, $\pi/2 - \alpha_1 + \alpha + \pi/2 - \alpha_2 = \pi$. Следовательно, угол $\theta = 2\alpha$ не зависит от угла падения луча α_1 на зеркало M_1 . Это важное свойство использовано в навигационном приборе, называемом *секстантом* (рис. 54.4). Полупрозрачное зеркало M_2 и зрительная труба жестко закреплены на общем основании. Зеркало M_1 вместе с визиром может вращаться вокруг оси, проходящей через точку O . Луч SO образует угол θ с горизонтальным направлением HO . Наблюдая линию горизонта сквозь зеркало M_2 и изменяя угол наклона зеркала M_1 , можно добиться совмещения с ней изображения Солнца. При этом угол отклонения стрелки на шкале $\alpha = \theta/2$. Действительно, если плоскости зеркал M_1 и M_2 параллельны ($\alpha = 0$), то к наблюдателю придет также луч HO , падающий в горизонтальном направлении на зеркало M_1 . Пусть i — угол падения этого луча. Угол между направлениями HO и OM_2 равен $\gamma = \pi - 2i$. Поскольку луч OM_2 должен оставаться неизменным, то для получения изображения Солнца зеркало M_1 следует повернуть так, чтобы угол падения луча SO стал равен $i + \theta/2$. Это условие определяет угол поворота зеркала $\alpha = \theta/2$. Обычно шкала секстанта составляет $1/6$ часть окружности. Отсюда название (лат. *sextans* — шестой).

Секстант позволяет измерить широту места в открытом море. Во время наблюдений секстант держат в руке для компенсации корабельной качки.

6. Микроскоп. Простейший микроскоп состоит из трубки-тубуса, на концах которой находятся две собирающие линзы: объектив и окуляр. Объективом служит короткофокусная линза, пропускаю-

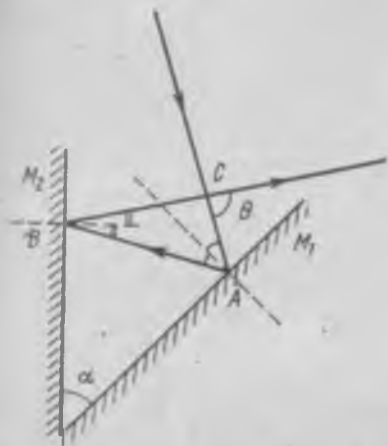


Рис. 54.3

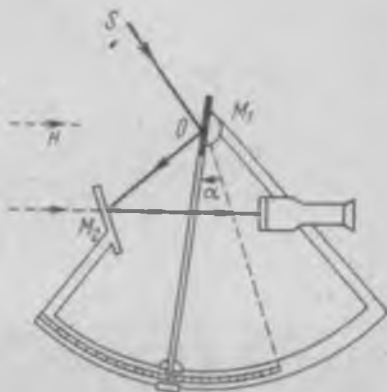


Рис. 54.4

щая широкие пучки лучей. Рассматриваемый предмет помещается перед объективом между фокусом и двойным фокусным расстоянием, ближе к фокусу.

Действительное, увеличенное и перевернутое изображение, даваемое объективом, рассматривается в окуляре, играющий роль лупы. Увеличение микроскопа $k = k_1 k_2$, где $k_1 = L/F_{об}$ (L — длина тубуса, $F_{об}$ — фокусное расстояние объектива), $k_2 = d_0/F_{ок}$ ($d_0 = 0,25$ м, $F_{ок}$ — фокусное расстояние окуляра, выраженное в метрах). Оптический микроскоп дает увеличение до 2000 раз.

7. Телескоп. Если предмет находится достаточно далеко, то лучи света, излучаемые различными точками предмета, идут к глазу под очень малым углом зрения так, что невозможно рассмотреть какие-нибудь детали предмета. В этом случае для увеличения угла зрения применяют телескоп.

Телескоп Галилея. В конце 1608 г. или в начале 1609 г. Галилею стало известно, что в Голландии изобретена подзорная труба. «Вскоре после этого, — пишет Галилей, — опираясь на учение о преломлении, я постиг суть дела и изготовил свинцовую трубу, на концах которой я поместил два оптических стекла, оба плоских с одной стороны, а с другой стороны одно стекло выпуклое, а другое — «вогнутое» (рис. 54.5).

Если предмет находится на расстоянии $d \gg F_{об}$, то от каждой точки предмета в объектив приходит практически параллельный пучок лучей. На рис. 54.5 изображены лучи от верхней точки удаленного предмета. Промежуточное мнимое изображение будет располагаться в фокальной плоскости объектива. Если, перемещая окуляр, добиться того, чтобы изображение лежало в фокальной плоскости окуляра, то лучи выйдут из рассеивающей линзы окуляра параллельным пучком (см. рис. 52.56). Наблюдатель увидит прямое мнимое изображение. Это обстоятельство делает трубу Галилея особенно удобной для театральных биноклей с увеличением $k \sim 2-3$. Из рис. 54.5 следует, что угловое увеличение системы

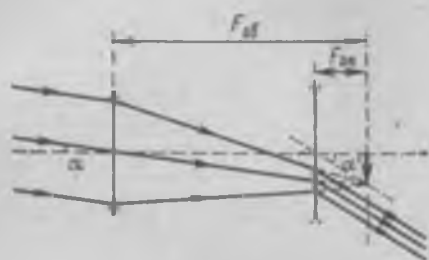


Рис. 54.5

Для системы, изображенной на рис. 54.5, $k \sim 5$.

$$k = \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{F_{об}}{F_{ок}} \approx \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Для системы, изображенной на рис. 54.5, $k \sim 5$.

Рефрактор. В 1613 г. И. Кеплер предложил новую комбинацию линз. Его зрительная труба, состоящая из двух собирающих линз — длиннофокусного объектива и короткофокусного окуляра, — показана на рис. 54.6. При большом удалении предмета от



Рис. 54.6



Рис. 54.7

объектива попадающие в трубу лучи, исходящие из каждой точки предмета, будут практически параллельными. Поэтому действительное, перевернутое и уменьшенное промежуточное изображение предмета лежит в фокальной плоскости объектива. Это изображение рассматривается в окуляр, как в лупу. Для этого окуляр помещают относительно объектива так, что его передний фокус находится вблизи заднего фокуса объектива. Если промежуточное изображение лежит в фокальной плоскости окуляра, то из него

выйдет пучок параллельных лучей (см. рис. 52.5 а). Наблюдатель увидит перевернутое изображение предмета.

Из рис. 54.6 следует, что угол α' , образуемый лучами, вышедшими из окуляра, больше угла α , под которым виден предмет невооруженным глазом. Нетрудно видеть, что увеличение угла зрения

$$k = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{F_{об}}{F_{ок}}. \quad (54.6)$$

Для большего увеличения необходимо брать длиннофокусный объектив и короткофокусный окуляр. Казалось бы, ничто не мешает сделать увеличение очень большим.

Действительно, согласно геометрической оптике, если от одной точки в телескоп попадает луч под углом α_1 к оси, а от второй — под углом α_2 , то должны быть два изображения независимо от величины углового расстояния $\delta = |\alpha_2 - \alpha_1|$ между точками. Однако явление дифракции света, рассмотренное в § 48, приводит к тому, что невозможно различить две точки, угловое расстояние между которыми меньше определенного значения. Различные лучи, проходя через объектив, диафрагируют — отклоняются под разными углами от своего первоначального направления. Эти когерентные лучи затем интерferируют и образуют в фокальной плоскости сильно освещенную центральную часть, вокруг которой расположены темные и светлые концентрические кольца — дифракционное изображение светящейся точки. При удалении от центра яркость светлых колец быстро спадает. Мы видели (см. § 48), что угол между главным максимумом и первым минимумом освещенности после прохождения лучей через круглое отверстие диаметром D равен $1,22 \lambda/D$.

Если свет приходит от двух различных точек, то возникают две системы колец. Когда точки лежат близко друг от друга (т. е. δ мало), то эти системы почти совпадают, и вместо двух точек мы увидим весьма расплывчатое светлое пятно. Чтобы увидеть две различные точки, их угловое расстояние должно быть таким, чтобы два главных максимума освещенности не перекрывались. Минимальный сдвиг, при котором получается такая картина, будет тогда, когда первый минимум одной системы колец падает на середину главного максимума другой. Этот случай изображен на рис. 54.7. По оси ординат отложена освещенность. Поэтому величина $1,22 \lambda/D$ определяет минимальное угловое расстояние, при котором две точки можно видеть раздельно. Следовательно, *условие разрешения двух светящихся точек является неравенство*

$$|\alpha_2 - \alpha_1| > 1,22 \frac{\lambda}{D}. \quad (54.7)$$

Поэтому разрешающая способность телескопа тем выше, чем боль-

ше диаметр его объектива. Большой диаметр объектива позволяет также собрать возможно большее количество света, доходящего до нас от предмета.

Однако наличие объектива большого диаметра еще не означает, что мы увидим эти точки. Мы добьемся этого, если фокусное расстояние объектива и окуляра подобрано так, чтобы согласно формуле (54.6) увеличить угол α до значения α' , соответствующего разрешающей способности глаза или другого регистрирующего устройства. Дальнейшее увеличение может сделать изображение очень большим, однако число различных точек на единице поверхности от этого не станет больше.

Разрешающая способность глаза $\Delta \sim 1,22 \lambda/d$, где d — диаметр зрачка. Для того чтобы полностью использовать разрешающую способность объектива, угол $\alpha' = k\alpha$ должен быть не меньше Δ . Следовательно, коэффициент увеличения должен быть равным $k = D/d$. Этого можно добиться, выбирая фокусное расстояние окуляра $F_{ок} = F_{об}d/D$.

Самый крупный в мире телескоп обсерватории Академии наук СССР установлен на Северном Кавказе в январе 1976 г. Диаметр главного зеркала $D = 6$ м. Подставляя в формулу (54.7) значение длины волны видимого света $\lambda = 6,5 \cdot 10^{-5}$ см, найдем его разрешение $1,32 \cdot 10^{-7}$ рад. Нетрудно рассчитать, что этот телескоп позволяет различить на Луне две точки, наименьшее расстояние между которыми составляет 50,7 м (расстояние до Луны $r = 384\,400$ км).

§ 55. ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Симметрия физических законов. Крупнейшие открытия в физике XX в. связаны с изучением различных симметрий. Может ли быть «симметричным» физический закон? Все мы имеем некоторые представления о симметрии обычных предметов. Однако наше понимание останется примитивным до тех пор, пока мы не дадим определение симметрии в математических терминах. Возьмем, например, четырехугольник. Его симметричность выявляется при преобразовании пространства: два зеркальных отражения относительно двух осей симметрии, поворот плоскости на 180° и тождественное преобразование плоскости оставляют фигуру неизменной. Мы видим, что для исследования симметрии предметов необходимо рассмотреть множество всех перемещений пространства и выделить те перемещения, при которых данный предмет отображается сам на себя. Множество таких преобразований называется группой симметрии. Группа симметрии прямоугольника содержит 4 элемента.

Можно расширить понятие симметрии и называть группой симметрии такие преобразования пространства и времени, при которых форма записи уравнений или комбинации физических величин

остаются неизменными. Именно в этом смысле говорят о симметрии физических законов. Поиски симметрий в явлениях природы играли заметную роль в создании теоретических схем еще во времена Галилея, Кеплера и Ньютона. Сейчас никто не сомневается в плодотворности исследования свойств симметрии физических явлений в познании фундаментальных закономерностей природы. Важнейшие достижения последних десятилетий в физике элементарных частиц связаны с симметриями относительно преобразований некоторых параметров, характеризующих внутренние свойства частиц.

Принцип относительности Галилея. Пусть система отсчета K' движется с постоянной скоростью $\vec{u}$ относительно инерциальной системы K . Принцип относительности Галилея состоит в утверждении, что законы механики одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, движение по инерции не влияет на механические процессы. Это означает, что, анализируя результаты механических опытов, нельзя дать ответ на вопрос, какая из систем движется и какая покоится, — все инерциальные системы равноправны. В этом важное объективное содержание принципа относительности, выражающее материальное единство мира.

Пусть $(x, y, 0)$, $(x', y', 0)$ — координаты частицы в системах K и K' , $\vec{u} = (u, 0, 0)$ — скорость системы K' относительно K (рис. 55.1). Тогда преобразование Галилея имеет вид

$$x = ut + x', \quad y = y', \quad t = t'. \quad (55.1)$$



Рис. 55.1

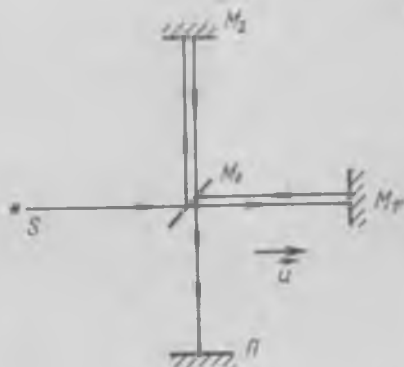


Рис. 55.2

Последнее условие означает, что часы в системах K и K' идут одинаково. Скорости частицы в двух системах отсчета связаны соотношением (5.1)

$$v_x = u + v'_x. \quad (55.2)$$

Однако ускорения частиц совпадают: $\vec{a} = \vec{a}'$. Принцип относительности — признак симметрии механических законов по отношению к любой инерциальной системе.

2. Электромагнитное поле и мировой эфир. Если принцип относительности действительно вскрывает фундаментальные закономерности, то его действие должно распространяться на все законы природы, т. е. наблюдатели, находящиеся в различных инерциальных системах, должны получать совершенно одинаковые уравнения, описывающие одни и те же физические явления. Если это так, то понятие абсолютного пространства полностью теряет смысл, поскольку невозможно отдать предпочтение одной из систем. Такая «демократия», как мы увидим ниже, достигается ценой существенного изменения наших представлений о пространстве и времени.

Во второй половине XIX столетия работы Фарадея, Максвелла и Герца привели к созданию электродинамики, ввели новые понятия. Они возникли в связи с изучением электромагнитных явлений. Теория Максвелла предсказывала новое явление — распространение электромагнитной волны в пустом пространстве. Согласно экспериментам скорость волны $c \approx 300\,000$ км/с. Сейчас в реальности электромагнитных волн нетрудно убедиться простым поворотом ручки радиоприемника. Мы теперь знаем, что пустое пространство обладает физическим свойством передавать электромагнитные волны. Сам Максвелл и его современники пытались описать распространение света с помощью механических аналогий. Одна из них: свет распространяется со скоростью c в некоторой неподвижной среде — эфире, существующем повсюду. Эта среда должна обладать необычным свойством: тела проходят сквозь эфир, не встречая сопротивления. Очевидно, должна существовать одна особая, абсолютная система координат, связанная с эфиром. Все другие системы движутся сквозь эфир. Совершенно ясно, что существование эфира противоречит принципу относительности Галилея, но в то время это никого не смущало. Более того, во всех других системах отсчета скорость света будет зависеть от скорости движения системы относительно эфира.

3. Эксперимент Майкельсона был первой попыткой ответить на вопрос, движется ли Земля относительно эфира. Он использовал прибор, называемый интерферометром (рис. 55.2).

Полупрозрачной посеребренной пластиной M_0 луч света из источника S разделяется на два перпендикулярных луча. Первый луч, пройдя сквозь пластину, отражается зеркалом M_1 , затем пластиной M_0 и попадает на фотопластинку P . Второй луч отражается зеркалом M_2 и тоже попадает на пластину, где интерферирует с первым лучом. Расстояния M_0M_1 и M_0M_2 выбираются одинаковыми, равными l . Разность хода лучей в системе отсчета, связанной с прибором, пропорциональна $|t_1 - t_2|$, где t_1 (t_2) — время

движения лучей по пути $M_0M_1M_0(M_0M_2M_0)$. Направление скорости Земли показано стрелкой. Так как точка M_1 убегает от луча, то в направлении M_0M_1 скорость света равна $c-u$, а в обратном — $c+u$. Следовательно,

$$t_1 = \frac{l}{c-u} + \frac{l}{c+u} = \frac{2cl}{c^2-u^2}. \quad (55.3)$$

Теперь найдем время t_2 , за которое в системе покоя прибора свет распространяется в направлении, перпендикулярном скорости Земли, проходя путь $2l$. В этом случае скорость света относительно эфира равна c и составляет угол α ($\cos \alpha = u/c$) с направлением движения Земли. В соответствии с формулой (55.2) скорость света в системе покоя прибора равна $c' = c \sin \alpha = \sqrt{c^2 - u^2}$. Поэтому

$$t_2 = \frac{2l}{\sqrt{c^2 - u^2}} \neq t_1. \quad (55.4)$$

Таким образом вследствие движения в неподвижном эфире, между лучами должна возникнуть разность хода, пропорциональная $t_1 - t_2 > 0$. Интерференционную картину, образованную лучами, можно наблюдать при помощи зрительной трубы. При повороте прибора на 90° разность хода между лучами будет пропорциональна $t_2 - t_1 < 0$. Следовательно, произойдет смещение интерференционных полос, определяемое величиной $\sim 2|t_1 - t_2|$.

Результат опыта, проведенного в 1881 г., был отрицательным: смещение полос не наблюдалось. Из этого результата следовало, что скорость Земли относительно эфира равна нулю. Этот опыт повторяли в разное время года. И опять никакого заметного движения Земли не было зарегистрировано. Экспериментаторы пришли в замешательство, так как Земля оказалась неподвижной относительно эфира и тем самым приобретала уникальное свойство, отличающее ее от других тел Вселенной. Впоследствии опыт Майкельсона был повторен с использованием новой аппаратуры.

Результат эксперимента Майкельсона создал большие трудности для гипотезы эфира. Майкельсон сам пытался спасти положение, предполагая, что каждая система отсчета увлекает эфир, как движущаяся комната содержащий в ней воздух. Если эфир увлекается движением системы, то световые волны распространяются в эфире, подобно тому как звуковые волны распространяются в воздухе. В этом случае скорость света (испущенного источником, жестко связанным с движущейся системой отсчета) относительно неподвижного наблюдателя определяется соотношением (55.2). Отсюда следовало, что скорость света должна зависеть от скорости источника света. Однако все эксперименты приводили к выводу, что скорость света не зависит от движения Земли. Таким образом, все попытки объяснить электромагнитные явления в движущихся системах с помощью гипотезы эфира

оказались неудачными. А. Эйнштейн первым понял, что эта гипотеза является пережитком механических воззрений и должна быть отброшена. Следует отметить, что Эйнштейн никогда не утверждал, что опыт Майкельсона оказал на него решающее влияние в период создания теории относительности.

В 1892 г. для объяснения опыта Майкельсона ирландский физик Д. Ф. Фиджеральд и нидерландский физик-теоретик Х. А. Лоренц независимо выдвинули гипотезу о сокращении движущихся тел в направлении движения. Причина сжатия тел обусловлена изменением молекулярных сил при движении сквозь эфир. В 1904 г. Лоренц вывел формулы (см. (55.10), (55.11)), связывающие пространственные координаты и моменты времени одного и того же события в двух различных системах отсчета. Однако Лоренц считал, что это преобразование имеет вспомогательный математический характер. Активное участие в создании теории относительности принял знаменитый французский математик Анри Пуанкаре (1854—1912). В 1904—1905 гг. он установил принцип относительности для электромагнитных явлений, дал анализ понятия одновременности, открыл законы релятивистской механики [43, 44]. А. Эйнштейн (1879—1955) пришел к теории относительности в результате глубокого анализа принципа относительности. В основополагающей работе «К электродинамике движущихся тел» (1905) он разрешил все противоречия, связанные с эфиром, и с единой точки зрения рассмотрел явления, изучаемые в механике и электродинамике.

4. Основным положением новой теории является принцип относительности: *все законы природы одинаковы во всех инерциальных системах отсчета. Следовательно, в любой инерциальной системе луч света распространяется с постоянной, одинаковой скоростью независимо от того, покоится или движется источник излучения.* Этот вывод несовместим с классическим правилом сложения скоростей (55.2), следующим из (55.1). Все это заставляет нас пересмотреть способ, каким координаты преобразуются при переходе от одной системы к другой.

Легко убедиться, что принцип относительности приводит к выводу, что и время не является абсолютным. Ритм часов в разных системах отсчета оказывается различным. Для уяснения этого рассмотрим две инерциальные системы, одна из которых неподвижна, а другая — K' — связана со стержнем AB , движущимся вдоль оси x со скоростью u относительно неподвижной системы K . Однако, прежде чем анализировать какие-либо явления, необходимо точно определить понятие одновременности двух событий, происходящих в разных точках пространства. Разместим часы в системе K везде, где нужно измерить время. Для синхронизации этих часов выберем некоторую точку O , из которой будем посылать световые сигналы в момент t_0 . В момент прихода сигнала в некоторую точку P поставим часы, расположенные в ней на вре-

мая $t_0 + l/c$, где l — расстояние OP , измеренное неподвижной линейкой. Тем же способом синхронизируем часы в системе K' . Предполагается, что длины линеек одинаковы, когда они покоятся относительно друг друга. Будем говорить, что два события в двух точках P и P_1 системы K произошли одновременно, если они произошли в один и тот же момент времени по часам системы K .

Пусть из середины отрезка AB отправляются в противоположных направлениях два световых сигнала (рис. 55.3а). Поскольку

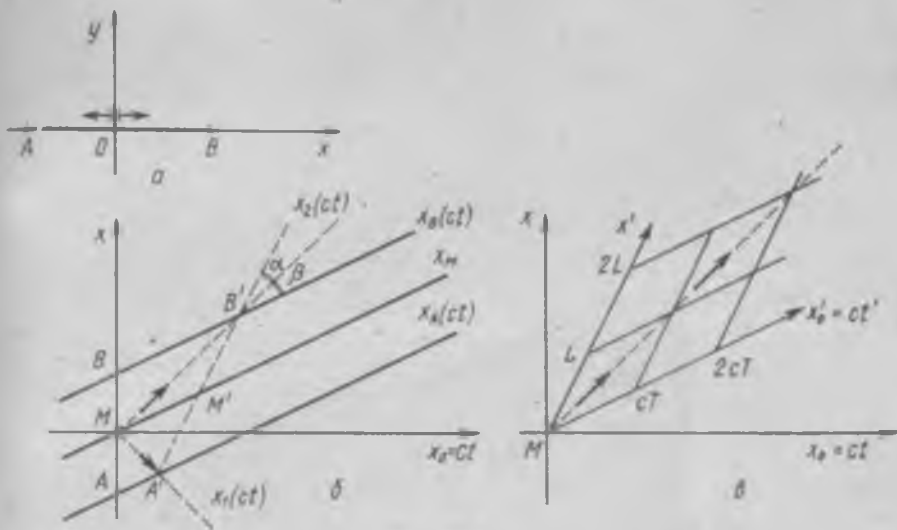


Рис. 55.3

скорость света не зависит от скорости движения источника, то наблюдатель в K' установит, что сигналы достигнут точек A и B одновременно. Для наблюдателя в системе K те же два события не будут одновременными. Действительно, скорость света относительно системы K тоже равна c и, поскольку точка A движется навстречу сигналу, а B — в противоположную сторону, то в системе K сигнал придет в точку A раньше, чем в точку B .

С этим выводом связан другой эффект теории относительности: сокращение размеров движущихся тел вдоль направления движения. В системе K' длина стержня $x'_A - x'_B = L$. Естественно определить длину стержня l в системе K как разность между координатами его концов x_A и x_B в один и тот же момент времени t . Поскольку одновременность является понятием относительным, зависящим от системы координат, то результаты измерений координат x_A и x_B в системе K будут различными в зависимости от скорости стержня (т. е. системы K'). Пространство и время оказываются неразрывно связанными между собой. После этого не-

мецкий математик Г. Минковский заметил, что «отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих, должен еще сохранить самостоятельность».

Относительность понятия одновременности становится более понятной при графическом анализе разобранных выше примера. С этой целью построим зависимость от времени координат концов стержня и световых сигналов. Предположим, что световые сигналы испущены в момент времени $t=0$ по часам наблюдателя K , когда середина стержня M совпала с началом координат системы K . В этот же момент времени наблюдатель в K' поставил стрелки часов в нулевое положение. Поскольку скорость света не зависит от скорости источника, то зависимость от времени координаты сигнала, направленного к точке B , $x_2(t)=ct$, а сигнала, направленного к точке A , $x_1(t)=-ct$. Значительно удобнее в качестве временной координаты выбрать величину $x_0=ct$ (ct — путь, проходимый фронтом световой волны за время t). В координатах x, x_0 уравнение светового луча $x=x_0$ имеет вид прямой, пересекающей ось x_0 под углом в 45° . Скорости точек A и B в новых переменных безразмерны, так как $\Delta x/\Delta x_0 = (1/c)\Delta x/\Delta t = u/c$. На рис. 55.36 изображены зависимости от времени координат точек A, M, B : $x_A(ct) = -l/2 + \beta ct$, $x_M = \beta ct$, $x_B = l/2 + \beta ct$ ($\beta = u/c$) и световых сигналов $x_1(ct)$, $x_2(ct)$, испущенных из точки M . Любая точка на этих графиках определяется заданием двух чисел x и $x_0=ct$ и называется *событием*, а графики — *мировыми линиями*. Мировая линия проходит через все события, происходящие с материальной частицей или сигналом и позволяет проследить их пространственно-временную «историю».

Сигналы, излученные в точке M , должны в системе покоя стержня одновременно пересекать его концы, так как скорость сигналов одинакова в обоих направлениях. Следовательно, два события A, B , одновременные в системе K' , не являются одновременными в системе K . Здесь событие A происходит ранее события B .

Изобразим теперь оси координат x' и x'_0 , связанные с системой K' . Очевидно, линия $x_M(x_0)$ фиксирует временную ось системы покоя стержня, т. е. $x_M(x_0) = x'_0$. Эта ось изображена на рис. 53.3в. Величина T является единицей временного масштаба в системе K' . Построим далее кривую событий, происходящих одновременно в системе K' покоя стержня, т. е. найдем положение оси x' . Поскольку события A', B' являются одновременными, то все события, лежащие на прямой $A'B'$, должны быть одновременными. Поэтому прямая $A'B'$ параллельна оси x' , проходящей на рис. 55.3в через точку M . Величина L является единицей масштаба длины в системе K' . Мировые линии сигналов во всех инерциальных системах являются биссектрисами углов между осями x' и x'_0 . Действительно, угол $B'MA'$ — прямой и $B'M' = M'A'$. Поэто-

му M' является центром окружности, проходящей через точки M, B', A' . Поэтому треугольник $MB'M'$ равнобедренный и, следовательно, $\alpha = \beta$.

5. Преобразование пространства-времени. Принцип относительности и преобразование Галилея справедливы для механических явлений, наблюдаемых в системах отсчета, движущихся со скоростями, значительно меньшими скорости света. Найдем теперь преобразование координат, удовлетворяющее принципу относительности Эйнштейна.

Пусть координаты некоторого события в системе K равны (t, x) , а в системе K' — (t', x') . Найдем преобразование, связывающее координаты этого события в двух системах отсчета. Для упрощения расчетов предположим, что при совпадении начал координат систем K и K' стрелки часов в обеих системах поставлены так, что $t = t' = 0$. Самый общий вид этого преобразования должен быть таким:

$$x = a_1 x' + a_2 ct', \quad ct = b_1 x' + b_2 ct' \quad (55.5)$$

(a_1, a_2, b_1, b_2 — постоянные коэффициенты). Для того чтобы убедиться в этом, рассмотрим два события: первое состоит в том, что из начала координат системы K отправляется световой сигнал, второе — приход сигнала в точку x в момент t . Следовательно,

$$c^2 t^2 - x^2 = 0. \quad (55.6)$$

Благодаря независимости скорости света от движения источника в системе K' справедливо точно такое же соотношение

$$c^2 t'^2 - x'^2 = 0, \quad (55.7)$$

где (t', x') — координаты второго события в системе K' . Подстановка (55.5) в (55.6) должна дать соотношение (55.7)

$$(b_2^2 - a_2^2) c^2 t'^2 + 2(b_1 b_2 - a_1 a_2) ct' x' - (a_1^2 - b_1^2) x'^2 = 0.$$

Следовательно, мы должны наложить условия

$$b_2^2 - a_2^2 = 1, \quad b_1 b_2 - a_1 a_2 = 0, \quad a_1^2 - b_1^2 = 1. \quad (55.8)$$

Из уравнений (55.8) находим

$$\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{a_2} = \beta, \quad a_1 = b_2 = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

где β — неизвестный коэффициент. Таким образом,

$$x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad ct = \frac{\beta x' + ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (55.9)$$

Для того чтобы найти β , рассмотрим в системе K движение нача-

ла координат системы отсчета K' . Тогда $x'=0$ и формулы (55.9) принимают вид

$$x = \frac{\beta ct'}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad t = \frac{t'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (55.10)$$

Разделив одно выражение на другое, получим $x/t = \beta c$. Очевидно, отношение x/t равно скорости u системы K' относительно K . Поэтому $\beta = u/c$. Окончательно находим

$$x = \frac{x' + ut'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \quad ct = \frac{(u/c)x' + ct'}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \quad (55.11 \text{ а, б})$$

Эти соотношения называются преобразованиями Лоренца. Обратное преобразование можно получить из (55.11) заменой $x \leftrightarrow x'$, $t \leftrightarrow t'$, $u \leftrightarrow -u$ или разрешая систему (55.11) относительно x' , t' :

$$x' = \frac{x - ut}{\sqrt{1-(u/c)^2}}, \quad ct' = \frac{-(u/c)x + ct}{\sqrt{1-(u/c)^2}}. \quad (55.12 \text{ а, б})$$

Положение оси ct' в плоскости (x, ct) определяется условием $x'=0$: $x = \beta ct$. Точки, лежащие на оси x' , удовлетворяют условию $t'=0$, т. е. ось x' на рис. 55.3в совпадает с прямой $x = (1/\beta)ct$.

6. Преобразование скорости. Теперь мы найдем формулы, связывающие скорость движущейся материальной частицы в системе K' со скоростью той же частицы в системе K . Пусть $v = x/t$ — скорость частицы в системе K . Разделив (55.11а) на (55.11б), найдем

$$v = \frac{u + v'}{1 + uv'/c^2}. \quad (55.13)$$

Соотношение (55.13) согласуется с выводами об универсальном характере распространения светового сигнала. Если $v' = c$ — скорость света в системе K' , то из (55.13) находим $v = c$: скорость света одна и та же во всех инерциальных системах отсчета.

Формулы (55.11) и (55.13) заменяют в теории относительности формулы (55.1) и (55.2) классической механики. Однако, если скорость u системы K' значительно меньше, чем скорость света, то формулы (55.11) и (55.13) переходят в формулы (55.1) и (55.2) классической механики. Эта особенность является отличительным свойством любой научной теории: знания, завоеванные человечеством, не отменяются новой теорией. Новая теория устанавливает границы применимости старой теории.

7. Некоторые следствия формул преобразования Лоренца. Замедление ритма часов. Пусть в системе K' покоятся часы в точке, координата которой $x'_A = 0$. В качестве часов можно использовать любой периодический процесс с периодом T . Рассмотрим два события A и B соответствующих двум положениям стрелок ($t'_A = 0$, $x'_A = 0$), ($t'_B = T$, $x'_B = 0$). В системе K' интервал времени

между этими событиями равен T . Найдем координаты этих событий в системе K . Из (55.11б) имеем

$$t_A = \frac{t'_A + (u/c^2) x'_A}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = 0, \quad t_B = \frac{t'_B + (u/c^2) x'_B}{\sqrt{1 - (u/c)^2}} = \frac{T}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}. \quad (55.14)$$

Интервал времени между событиями A и B в системе K равен t_B . Мы приходим к выводу: движущиеся часы отстают, т. е. идут медленнее неподвижных. То же утверждение может сделать наблюдатель в системе K' . Действительно, пусть два положения стрелок на часах в системе K определяются координатами $(t_E = 0, x_E = 0)$, $(t_F = T, x_F = 0)$. Согласно (55.12б) получим

$$t'_E = 0, \quad t'_F = \frac{T}{\sqrt{1 - (u/c)^2}}. \quad (55.15)$$

Соотношения (55.14) и (55.15) не противоречат друг другу. Абсолютного движения не существует: (55.14) и (55.15) выражают одно и то же — *движущиеся часы отстают относительно неподвижных*. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 55.4, где изображены линии одновременности $t'_B = T$ в системе K' и линии

одновременности $t_F = T$, t_B в системе K . Наблюдатель в системе K' видит, что часы в системе K еще не показывают время $t_F = T$, когда по его часам $t'_B = T$ (т. е. часы в системе K отстают). С другой стороны, наблюдатель в системе K видит, что стрелка на часах системы K' передвинется на одно деление (часы в K' системе покажут время $t'_B = T$), когда его часы покажут время $t_B > T$ (т. е. отстают часы в системе K'). Формально эффект замедления времени обусловлен тем, что координаты некоторого события различны в двух системах отсчета и связаны преобразованием Лоренца.

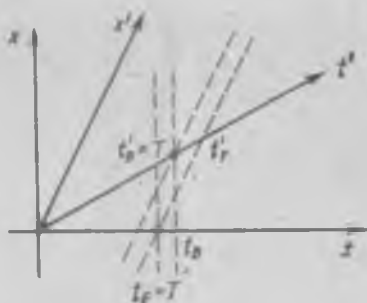


Рис. 55.4

8. Сокращение размеров движущихся тел. Пусть два наблюдателя движутся относительно друг друга. В системе K расположена линейка, а в системе K' точно такая же линейка, которую мы будем называть стержнем. Длина L линейки в системе K равна длине L стержня в его системе покоя, т. е. в системе K' . Измерение длины осуществляется регистрацией показаний с обоих концов измеряемого стержня или линейки в один и тот же момент времени. Пусть в момент $t = t' = 0$ левый конец E линейки EF совпадает с левым концом A стержня AB . Измерим длину стержня в системе K в момент времени $t = 0$, т. е. найдем разность прост-

ранственных координат x_A — x_B событий A и B . Подставляя значения координат $(t_A=0, x_A=0)$, $(t_B=0, x_B)$, $(t'_B, x'_B=L)$ в формулы (55.11) или в (55.12), получим

$$x_B = L\sqrt{1-\beta^2}, \quad ct_B = -\beta L, \quad \beta = u/c.$$

Следовательно, *стержень будет короче линейки*. Найдем теперь длину линейки в системе K' в момент времени $t'=0$: определим разность координат x'_F — x'_E событий F и E . Подставляя в (55.11) или в (55.12) значения координат $(t'_E=0, x'_E=0)$, $(t'_F=0, x'_F)$, $(t_F, x_F=L)$, находим

$$x_F = L\sqrt{1-\beta^2}, \quad ct_F = \beta L.$$

Мы приходим к выводу, что *линейка короче стержня*. В обоих случаях продольные размеры движущихся объектов сокращаются. На рис. 55.5 прямые $x_F=L$, $x_E=0$ изображают мировые линии концов линейки EF , прямые $x'_B=L$, $x'_A=0$ (в координатах системы K') изображают мировые линии концов стержня AB .

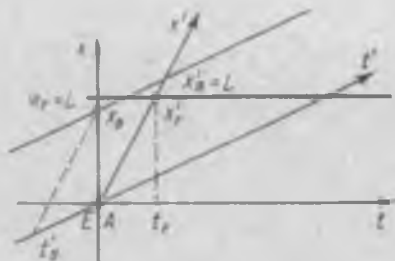


Рис. 55.5

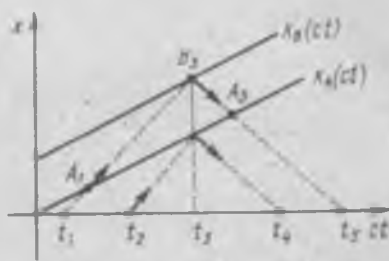


Рис. 55.6

Полезно обсудить, как наблюдатель, находящийся в начале координат неподвижной системы K , измеряет длину стержня. На концах стержня закреплены зеркала. Для того чтобы измерить расстояния до правого и левого концов стержня, наблюдателю следует подобрать времена t_1 и t_2 посылки световых сигналов, чтобы они отразились от зеркал, закрепленных на концах A и B , в один и тот же момент времени t_3 . На рис. 55.6 параллельные прямые изображают положение концов стержня x_A и x_B в зависимости от ct . Тангенс угла наклона этих прямых равен u/c , а зависимость координат световых сигналов от ct изображается отрезками прямых, пересекающими ось ct под углом 45° . Наблюдатель в системе K принимает сигнал, отраженный от конца A в момент времени t_4 , а от конца B — в момент t_5 . В этой системе координат длина стержня $L=c(t_5-t_4)$. Графики движения концов стержня и сигналов в зависимости от ct делают этот вывод очевидным.

9. Измерение длины стержня — процедура, не связанная с фотографированием стержня. Когда мы видим или фотографируем какое-нибудь тело, мы регистрируем различные фотоны, одновременно пришедшие на сетчатку глаза или на фотопленку. Но это означает, что эти фотоны были испущены разными точками тела неодновременно [45, 46]. Что же увидит наблюдатель, находящийся в начале координат системы K ? Пусть на концах стержня A и B закреплены источники света. Если наблюдатель видит стержень в момент времени t_3 (рис. 55.7), то на сетчатке глаза получается «искаженное» изображение, поскольку стержень занимал различные положения, когда источники A и B послали фотоны, образовавшие видимую картину. Наблюдатель увидит два луча: один, испущенный источником в точке A в момент времени t_0 , и другой, испущенный в точке B в момент времени t_3 . Время запаздывания $t_0 - t_3$ связано с наблюдаемой длиной стержня l соотношением $l = c(t_0 - t_3)$. Поскольку отрезки $t'_0 M = MB = c(t_0 - t_3)$, $MA = (u/c)(t_0 - t_3)$, $BA = x_B$, то из равенства $AB = BM + MA$ следует, что видимый размер стержня

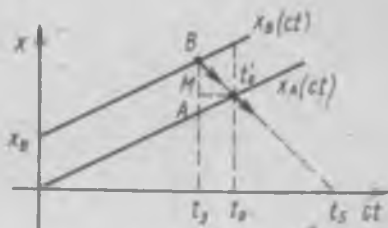


Рис. 55.7

$$l = \frac{x_B}{1 + \beta} = \frac{1}{k} L, \quad k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

окажется даже меньше, чем длина стержня, измеренная в системе K .

10. Геометрическое место единиц масштаба [47]. Мы убедились, что координаты некоторого события при переходе из одной системы координат в другую изменяются. Однако результаты измерения масштабов времени T и длины L в двух разных системах совпадают. Причина этого в том, что при преобразованиях Лоренца остается неизменной, т. е. сохраняется, величина

$$s_{12} = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2, \quad (55.16)$$

где (ct_2, x_2) , (ct_1, x_1) — координаты двух событий. Положим $t_1 = x_1 = 0$, $t_2 = t$, $x_2 = x$. Тогда из (55.11) получим

$$ct' - x' = k(t - x), \quad ct + x = (1/k)(t + x), \quad (55.17)$$

где коэффициент k можно представить в виде

$$k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} = \frac{1}{\gamma(1 - \beta)} = \gamma(1 + \beta), \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c}.$$

(Эти обозначения мы будем использовать в дальнейшем.) Из (55.17) следует

$$(ct)^2 - x^2 = (ct')^2 - x'^2. \quad (55.18)$$

Это соотношение можно использовать для калибровки масштабов: задавая эталоны единиц времени и длины в одной инерциальной системе, которую мы изображаем прямоугольными осями, получим те же единицы масштаба в любых инерциальных системах.

1. Построим кривую — гиперболу, задаваемую уравнением $(ct)^2 - x^2 = c^2 T^2$. В осях $\xi = ct + x$, $\eta = ct - x$, повернутых относительно осей ct , x , уравнение гиперболы $\xi\eta = c^2 T^2$ (рис. 55.8). Гипербола пе-

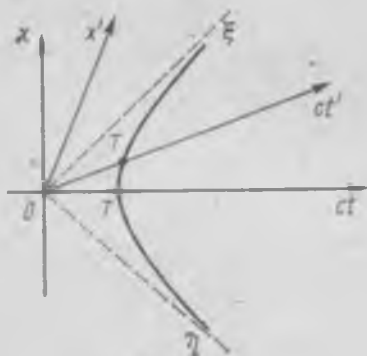


Рис. 55.8

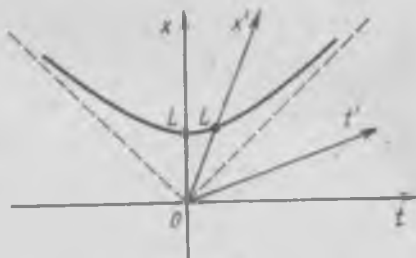


Рис. 55.9

ресекает ось ct в точке ct , которая задает временной масштаб в системе K . Проведем теперь оси ct' , x' системы K' . Гипербола — геометрическое место эталонных точек T на временных осях любой инерциальной системы. Действительно, поскольку согласно (55.18) $(ct')^2 - x'^2 = c^2 T^2$, то в точках пересечения гиперболой оси ct' системы K' мы имеем $t' = T$. Отрезок OT можно использовать в качестве единицы масштаба времени в системе K' . (Сравните рис. 55.4 и 55.8.)

2. Построим гиперболу, задаваемую уравнением $(ct)^2 - x^2 = -L^2$ (рис. 55.9). Поскольку при $t=0$ $x=L$, то L задает масштаб длины в системе K . Проведем оси ct' , x' . В силу (55.18) $(ct')^2 - x'^2 = -L^2$. Поэтому в точке пересечения гиперболы с осью x' (где $t'=0$) мы имеем $x'=L$. Отрезок OL на оси x' является единицей длины в системе K' . (Сравните рис. 55.5 и 55.9.)

11. Парадоксы в теории относительности. Эффект сокращения размеров движущихся тел породил множество парадоксов в теории относительности. Рассмотрим один из них [48]. Возьмем шест AB длиной $L=20$ м и будем двигать его с такой скоростью, чтобы в системе K он оказался длиной $l=10$ м. Тогда в некото-

рый момент этот шест целиком помещается в сарае, длина которого также 10 м. Однако в системе K' длина сарая будет равна 5 м. Как же можно спрятать 20-метровый шест в 5-метровом сарае?

Подобные «парадоксы» немедленно разрешаются, если выделить в явлении самое существенное: в задаче рассматриваются четыре события, связанные с точками A, B, E, F шеста AB и линейки EF , концы которой E и F определяют границы сарая. Пусть события B, F и A, E одновременны в системе K . Тогда в системе K' они уже не будут одновременными и вопрос, поставленный в условии, не имеет смысла. Полезно, однако, подробно изучить последовательность событий в двух системах координат.

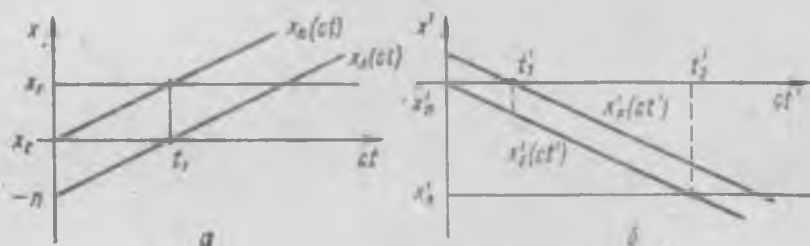


Рис. 55.10

На рис. 55.10а изображены мировые линии точек A, B, E, F в системе K :

$$x_F = n, \quad x_E = 0, \quad x_B = \beta ct, \quad x_A = -n + \beta ct. \quad (55.19)$$

Поскольку $L = n\gamma$, то по условию задачи $\gamma = 2$, $\beta = \sqrt{3}/2$. Полагая $x_F(t_1) = x_B(t_1)$ или $x_E(t_1) = x_A(t_1)$, найдем момент времени $t_1 = n/c\beta = 20/c\sqrt{3}$, в который шест и линейка накладываются друг на друга. Подставляя (55.19) в (55.12), получим мировые линии событий в системе K' :

$$x'_F = n/\gamma - ut', \quad x'_E = -ut', \quad x'_B = 0, \quad x'_A = -L.$$

В этой системе шест длиной $L = 20$ м неподвижен, а сарай длиной $n/\gamma = 5$ м движется в отрицательном направлении оси x' . Из рис. 55.10б видно, что в момент $t' = 0$ конец B шеста войдет в сарай и выйдет из него в момент $t'_1 = n/c\beta\gamma = 10/c\sqrt{3}$, когда события B и F одновременны, а события $x'_E(ct'_1)$ и $x'_A(ct'_1)$ — неодновременны. Затем сарай движется вдоль стержня и в момент $t'_2 = L/c\beta = 40/c\sqrt{3}$ происходят одновременные события $x'_B(ct'_2) = x'_A(ct'_2)$ — передняя стенка сарая поравнялась с концом A шеста.

12. Движение со сверхсветовой скоростью. В настоящее время в научной литературе идет обсуждение проблемы о возможности существования частиц, движущихся со сверхсветовыми скоростями. Они получили название «тахiony» (греч. *tachys* — быстрый). Анализ экспериментальных данных не позволяет пока говорить о реальности этих объектов. Обсудим, какие «сюрпризы» могут ожидать нас при встрече с тахионом.

Пусть наблюдатель в системе K' встретился с наблюдателем K в момент времени $t'=t=0$ и удаляется от него со скоростью $u=5/13$ с. Оба наблюдателя регистрируют положение тахиона, движущегося со сверхсветовой скоростью $v=5/3c > c$. Рассмотрим два события: $(t_A=40$ мин, $x_A=0$) — встреча тахиона с наблюдателем в системе K и (t_B, x_B) — встреча тахиона с наблюдателем в системе K' (рис. 55.11). В момент времени t_A тахион излучил

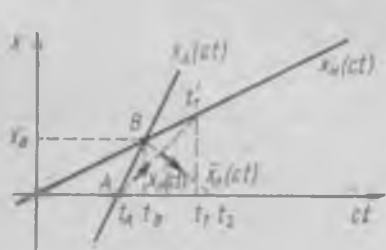


Рис. 55.11

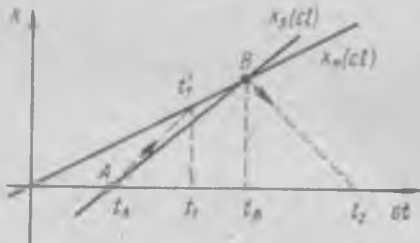


Рис. 55.12

сигнал, который примет наблюдатель в системе K' в момент времени t'_1 . Сравнивая информацию, полученную в моменты времени t'_B и t'_1 , он сделает выводы об изменениях, происходящих с тахионом. С другой стороны, наблюдатель в системе K , приняв в момент времени t_2 сигнал, излученный тахионом в момент времени t'_B , сделает свои выводы об изменениях состояния тахиона, происшедших за время t_2-t_A . На рис. 55.11 изображены мировые линии тахиона $x_A(ct)$, наблюдателя в системе K' и двух лучей:

$$x_s = v(t-t_A), \quad x_n = ut, \quad x_A = c(t-t_A), \quad \bar{x}_A = -c(t-t_2).$$

Из условия $x_s(t_B) = x_n(t_B)$ найдем

$$t_B = \frac{t_A}{1-u/v} = 52 \text{ мин.}$$

Подставляя в (55.126) значения t_B , $x_B = ut_B$, найдем временную координату события B по часам наблюдателя в системе K' :

$$t'_B = \frac{1}{\gamma} t_B = \frac{1-\beta}{1-u/v} kt_A = 48 \text{ мин.}$$

Из условия $x_n(t_1) = x_A(t_1)$ находим $t_1 = t_A(1 - \beta)^{-1} = 65$ мин. Подставляя t_1 , $x_1 = ut_1$ в (55.126), найдем время прихода луча к наблюдателю в системе K' : $t_1' = 60$ мин. Наконец, из соотношения $x_n(t_B) = x_A(t_B)$ получим значение $t_2 = (1 + \beta)t_B = 72$ мин.

Таким образом, с точки зрения наблюдателя в системе K тахион сначала пролетел мимо него в момент времени $t_A = 40$ мин, а потом мимо наблюдателя в системе K' в 1 ч 12 мин. По мнению наблюдателя, в K' тахион сначала пролетел мимо него в момент времени $t'_B = 48$ мин, а затем мимо наблюдателя в системе K в момент времени $t_1' = 60$ мин. Следовательно, хронологический порядок событий A и B будет различным для каждого из наблюдателей. Предположим, что параметры, характеризующие внутреннее состояние тахиона, подчиняются уравнению некоторого необратимого процесса. Если наблюдатель в системе K видит «старение» тахиона, то наблюдатель в системе K' увидит обратную последовательность событий — тахион «молодеет». Для событий x_A и x_B понятия «раньше», «позже» относительно и, следовательно, понятия причины и следствия лишены смысла.

13. Абсолютные прошлое и будущее. Попросим наших наблюдателей провести последний эксперимент: зафиксировать встречи с частицей, движущейся с досветовой скоростью. Рассмотрим два события: $(t_A = 40$ мин, $x_A = 0)$ — встреча наблюдателя в системе K с частицей, движущейся со скоростью $v = 5/11 c$, (t_B, x_B) — встреча частицы с наблюдателем в системе K' (рис. 55.12). Частица излучает световые сигналы в моменты времени t_A и t_B . По аналогии с предыдущим примером находим $t_1' = 60$ мин, $t'_B = 240$ мин, $t_2 = 360$ мин. Если внутреннее состояние частицы изменяется, то оба наблюдателя увидят последовательность различных состояний в одном и том же порядке. Можно сделать общее утверждение, что понятия «раньше» и «позже» имеют абсолютный смысл для любых двух событий на мировой линии частицы, движущейся с досветовой скоростью. Действительно, путь, который проходит частица между обоими событиями, меньше $c(t_2 - t_1)$, так как скорость частицы меньше скорости света. Поэтому всегда $(x_2 - x_1)^2 < c^2(t_2 - t_1)^2$. Согласно (55.18) это свойство сохраняется во всех инерциальных системах отсчета.

14. Энергия и импульс частицы. В теории относительности вместо привычных для нас кинетической энергии $K = Mv^2/2$ и импульса $p = Mv$ Эйнштейн ввел новые понятия — релятивистскую энергию E и релятивистский импульс частицы $\vec{p}$:

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad \vec{p} = \frac{M\vec{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \quad (55.20)$$

В дальнейшем для краткости мы будем опускать термин релятивистский. Энергия и импульс частицы связаны соотношением

$$M^2c^4 = E^2 - p^2c^2. \quad (55.21)$$

Энергия неподвижной частицы ($v=0$) не обращается в ноль, а равна Mc^2 . Ее называют *энергией покоя*, а величину M — *массой покоя* частицы. При небольших значениях скорости ($v \ll c$) энергию и импульс можно представить в виде

$$E = Mc^2 + \frac{Mv^2}{2} + \dots, \quad \vec{p} = M\vec{v} + \dots \quad (55.22)$$

Эти выражения можно получить, используя приближение

$$(1+\epsilon)^N \simeq 1 + N\epsilon + \dots, \quad \epsilon \ll 1,$$

где N — любое число.

Мы видим, что к энергии покоя добавляется знакомое выражение для кинетической энергии частицы. По аналогии с этим соотношением релятивистскую энергию E (55.20) можно представить в виде суммы энергии покоя и релятивистской кинетической энергии:

$$E = Mc^2 + K. \quad (55.23)$$

15. Преобразование Лоренца энергии и импульса. Рассмотрим как и раньше две системы отсчета, движущиеся относительно друг друга в направлении оси x . Как связаны энергия и импульс частицы, измеряемые каждым наблюдателем в своей системе отсчета? Закон преобразования величин $(E, \vec{p})$, измеренных в системе K , и $(E', \vec{p}')$, измеренных в системе K' , имеет форму, аналогичную (55.11):

$$p_x = \gamma \left(p'_x + \frac{u}{c^2} E' \right), \quad E = \gamma (E' + up'_x). \quad (55.24)$$

Компоненты импульса $p_y = p'_y$, $p_z = p'_z$ не изменяются. Таким образом, энергия и импульс частицы зависят от выбора системы отсчета. Однако существует величина, которая имеет абсолютный смысл. Подставляя в (55.21) E и p из (55.24), мы получим соотношение

$$E^2 - p^2 c^2 = E'^2 - p'^2 c^2 = M^2 c^4,$$

из которого следует, что масса покоя одинакова во всех системах отсчета. Масса покоя — одна из важнейших характеристик, содержащихся в «паспорте» частицы, наряду с зарядом и другими параметрами, о которых мы здесь не упоминаем.

Сделаем важное замечание. Означает ли эйнштейновское утверждение об эквивалентности массы и энергии, что энергия и масса сходны по существу? [48, с. 177]. Нет, не означает. Масса покоя — инвариант, величина, не зависящая от выбора системы отсчета. Энергия же — динамическая переменная совсем другой природы (как и импульс); она зависит от того, в какой системе

отсчета мы рассматриваем частицу. Взаимосвязь массы и энергии имеет смысл только в системе покоя частицы. По этой причине понятие «релятивистской массы» $m = M(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$, функционально зависящей от скорости, лишено физического содержания [48, с. 178]. Это утверждение становится очевидным при рассмотрении систем, состоящих из двух и более частиц.

16. Масса покоя системы невзаимодействующих частиц. Рассмотрим две частицы с массами покоя M_1 и M_2 . Импульс и энергия этой системы

$$E = E_1 + E_2, \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2. \quad (55.25)$$

Из (55.20), (55.25) следует, что две частицы эквивалентны одной сложной составной частице с энергией E и импульсом $\vec{p}$ и массой покоя M . В соответствии с (55.21) масса покоя определяется формулой

$$M^2 c^4 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 c^2, \quad (55.26)$$

а скорость движения согласно (55.20) и (55.25) равна

$$\vec{v} = \frac{\vec{p} c^2}{E} = \frac{\vec{p}_1 + \vec{p}_2}{E_1 + E_2} c^2. \quad (55.27)$$

Хотя все системы отсчета равноправны, наибольший интерес представляет система, в которой $\vec{p} = 0$, так называемая система покоя составной частицы. Ее скорость совпадает со скоростью движения частиц как целого. Поскольку в этой системе $\vec{p}_{10} = -\vec{p}_{20} = \vec{p}_0$, то формула (55.26) заметно упрощается:

$$M c^2 = \sqrt{M_1^2 c^4 + p_0^2 c^2} + \sqrt{M_2^2 c^4 + p_0^2 c^2}. \quad (55.28)$$

Следовательно, $M > M_1 + M_2$ — масса покоя системы невзаимодействующих частиц больше суммы масс покоя первой и второй частиц. Масса M системы частиц является инвариантом, т. е. одинакова во всех системах отсчета.

17. Масса покоя системы взаимодействующих частиц. Энергия связи. После знакомства с новыми понятиями выясним физический смысл массы покоя бесструктурной частицы.

Предположим, что частица покоится, а ее масса равна M . При увеличении скорости частицы до значения v ее энергия возрастет от величины $M c^2$ до E . При этом кинетическая энергия $K = E - M c^2$ равна работе внешних сил. Но тогда становится очевидным, что энергия покоя $M c^2$ была приобретена при сотворении частицы; ее создание связано с произведенной работой. Энергия покоя $M c^2$ входит в правую часть (55.23) на равных правах с кинетической энергией. Однако долгое время величина $M c^2$ интер-

претиривалась как математическая константа, от которой идет отсчет кинетической энергии тела. Только после открытия ядерных реакций появилась возможность понять смысл энергии покоя.

Рассмотрим теперь систему, состоящую (в простейшем случае) из двух частиц. Наибольший интерес представляет атом водорода, в котором протон и электрон связаны электромагнитными дальнедействующими силами, или дейтрон, образованный протоном и нейтроном благодаря короткодействующим ядерным силам. В системе покоя составной частицы ее масса определяется выражением, подобным (55.28)

$$Mc^2 = E_1 + E_2 + \Pi_{12},$$

где $E_n = m_n c^2 + K_n$, Π_{12} — потенциальная энергия взаимодействия. Следовательно,

$$Mc^2 = (M_1 + M_2)c^2 + (K_1 + K_2 + \Pi_{12}).$$

Величину $E_{св} = -(K_1 + K_2 + \Pi_{12}) > 0$ называют энергией связи частиц составной системы. Следовательно, масса составной системы

$$M = M_1 + M_2 - \frac{E_{св}}{c^2} \quad (55.29)$$

меньше суммы масс покоя составляющих ее частиц на величину $E_{св}/c^2$. Соотношение (55.29) имеет общий характер и относится к частицам, связанным силами различной природы. Например, для ядра, образованного Z протонами и $(A-Z)$ нейтронами (A — общее число нуклонов), масса покоя ядра

$$M_A = (A-Z)m_n + Zm_p - E_{св}/c^2. \quad (55.30)$$

Величина $E_{св}$ находится методами ядерной физики. Таким образом, энергия покоя ядра $E = M_A c^2$, где M_A определяется формулой (55.30). Именно в этом смысл широко известной формулы Эйнштейна.

Соотношение (55.30), определяющее массу составной частицы, представляет одно из фундаментальных следствий теории относительности. Нетрудно видеть, что тело, состоящее из большого числа сильно взаимодействующих частиц, может иметь ничтожно малую массу.

ЗАДАЧА 55.1. Атом углерода $^{12}_6\text{C}$ содержит 6 протонов, 6 нейтронов и 6 электронов, а атом кислорода $^{16}_8\text{O}$ — 8 протонов, 8 нейтронов и 8 электронов. До 1960 г. атомной единицей массы являлась $1/16$ массы $^{16}_8\text{O}$. Объяснить, почему принятая сейчас а. е. м. отличается от прежней?

Массы элементарных частиц измеряются в атомных единицах массы (а. е. м.), которая равна $1/12$ массы атома углерода, т. е. $1,6582 \cdot 10^{-27}$ кг. В ядерной физике обычно приводят значения масс, умноженных на c^2 , в электронвольтах. Переводной множитель между кг и электронвольтами можно получить из соотношения

$$1 \text{ МэВ}/c^2 = 1,7827 \cdot 10^{-30} \text{ кг}, \quad (55.31)$$

$$\text{а. е. м.} = 931,5016 \text{ МэВ}/c^2.$$

Массы покоя протона и нейтрона

$$m_p = 1,007276 \text{ а. е. м.} = 938,2796 \text{ МэВ}, \quad (55.32)$$

$$m_n = 1,008665 \text{ а. е. м.} = 939,5731 \text{ МэВ}.$$

Рассмотрим несколько примеров.

1. Масса атома водорода в основном состоянии на $2,34 \cdot 10^{-32}$ г меньше суммы масс протона и электрона. Следовательно, энергия связи $E_{св} = (m_p + m_e - M_{\text{H}})c^2 = 13,6$ эВ.

2. Дейтрон имеет одно связанное состояние. Найдём энергию связи нейтрона и протона. Учитывая, что $M_D c^2 = 1878,322$ МэВ, находим $E_{св} = (m_n + m_p - M_D)c^2 = 2,224$ МэВ. Энергия связи нейтрона и протона в дейтроне в миллион раз больше $E_{св}$ атома водорода, поскольку ядерные силы значительно превосходят электромагнитные силы.

Образование дейтрона. Предположим, что нейтрон и протон находятся вне области действия ядерных сил. В системе покоя энергия этих частиц $E_p + E_n > M_D c^2$. Поскольку процесс образования дейтрона должен подчиняться закону сохранения энергии, то мы приходим к выводу, что слияние протона и нейтрона возможно только при потере части энергии. Действительно, образование дейтрона сопровождается испусканием γ кванта с энергией, равной 2,224 МэВ. Неправильно было бы говорить, что при этом масса переходит в энергию. Правильное утверждение состоит в том, что в процессе образования дейтрона энергия переходит из одной формы (механической) в другие (электромагнитную и ядерную).

§ 56. КВАНТЫ. ФОТОНЫ. ВОЛНОВЫЕ СВОЙСТВА ЧАСТИЦ

1. Квант энергии. Первый шаг на пути к самому революционному событию теоретической физики XX в. — открытию квантовой механики — был сделан при изучении весьма распространенного явления — изменения цвета тел при нагревании. При температуре $\sim 550^\circ\text{C}$ кусок железа начинает излучать свет красного цвета. По мере повышения температуры цвет излучения меняется: при 1000°C становится желтым, при 1500°C — белым. В этом явлении видна определенная закономерность: *с повышением температуры максимум излучения сдвигается в область коротких длин волн*. Классическая физика оказалась не в состоянии объяснить зависимость интенсивности излучения от температуры тела и длины волны излучаемых электромагнитных волн. Эта задача в проблеме излучения, выходящего из небольшого отверстия в непрозрачном нагретом сосуде, была решена в 1900 г. немецким физиком Максом Планком (1858—1947). Для этого ему пришлось сделать совершенно «необоснованное» предположение, что *полная энергия атома вещества кратна целому числу наименьших порций энергии*. Минимальное количество энергии Планк назвал *квантом энергии* (нем. — количество).

Рассмотрим простой пример: колебания маятника — частицы массой m , подвешенной на нити длиной l . Полная энергия связана с амплитудой колебаний a соотношением (§ 42)

$$E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{1}{2} m\omega^2 a^2, \quad \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (56.1)$$

Если увеличить амплитуду a , то увеличится и полная энергия. Это увеличение может быть и сколь угодно малым. *Никаких запретов на приращение энергии в классической механике не существует*. Согласно Планку, полная энергия E квантуется, т. е. принимает лишь *дискретные значения*

$$E_n = h\nu \left(n + \frac{1}{2} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (56.2)$$

где $\nu = \omega/2\pi$. В этой формуле

$$h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} = 4,14 \cdot 10^{-15} \text{ эВ} \cdot \text{с}$$

— постоянная Планка. Наименьшая порция энергии — квант $h\nu$. Следовательно, невозможно изменить энергию частицы на какую-то долю кванта. Этот вывод противоречил основным представлениям классической теории. Поэтому сам Планк относился к своей теории весьма сдержанно: он надеялся, что будет найдено более приемлемое решение проблемы излучения.

Действительно, почему мы не замечаем квантования энергии маятника? Дело в том, что квант энергии для макроскопических тел очень мал. Пусть $m=1$ г, $\nu=1$ Гц, $a=1$ см. Тогда $E = 2 \cdot 10^{-6}$ Дж, а квант энергии $h\nu = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж. Пылинка массой 10^{-9} г изменит полную энергию маятника на величину $\Delta E = 2 \cdot 10^{-15}$ Дж, большую кванта энергии в 10^{19} раз. Ясно, что $h\nu \ll E$. Для микрообъектов положение меняется. Например, частота обращения электрона в атоме водорода $\nu \approx 10^{15}$ Гц. В этом случае величина кванта $h\nu \approx 4,1$ эВ сравнима с энергией основного состояния электрона в атоме $E_0 = -13,6$ эВ.

2. Фотон. Волновая теория правильно объясняет явления интерференции и дифракции и успешно применяется для расчетов современных приемных и передающих устройств. Однако волновая теория и механика Ньютона оказались не в состоянии объяснить строение атома, фотоэффект и другие явления, последовательное и непротиворечивое истолкование которых стало возможным только на основе квантовой теории.

А. Эйнштейн первым осознал реальность квантов энергии, предположив, что монохроматическое излучение частотой ν состоит из «частиц» — *носителей квантов энергии электромагнитного поля*, равных $h\nu$. Эти частицы позднее в 1929 г. назвали *фотонами* (греч. — свет).

Имеется целый ряд явлений, которые невозможно истолковать в рамках волновой теории, но которые становятся понятными с точки зрения гипотезы квантов. К числу таких явлений относится *фотоэффект*.

Наблюдения А. Г. Столетова в 1880—1890 гг. и последующие эксперименты позволили установить следующие закономерности. 1. При освещении металлов светом последние заряжаются положительно. Это означает, что металл отдает отрицательный электрический заряд, т. е. происходит испускание электронов, вылетающих из металла. 2. Скорость вылетающих из металла электронов не зависит от интенсивности падающего света. С ростом освещенности увеличивается до некоторого значения число испущенных электронов. 3. Фотоэффект возникает при освещении металла светом, частота которого больше некоторой вполне определенной для каждого металла частоты ν_m . Значение этой частоты на-

зывают порогом, или *красной границей*, фотоэффекта. С ростом частоты света возрастает энергия испущенных электронов.

Согласно классическим представлениям увеличение освещенности должно увеличить силу воздействия на электроны металла. Вследствие этого кинетическая энергия испускаемых электронов должна возрасти. Увеличение частоты при постоянной освещенности должно привести к уменьшению энергии электронов, так как электрон благодаря наличию массы слабее реагирует на более быстропеременное электромагнитное поле. Таким образом, эти выводы противоречат опытным данным. В 1905 г. А. Эйнштейн дал правильное объяснение фотоэлектрического эффекта на основе квантовой теории света.

Внутри металла электроны могут двигаться почти свободно, но их выводу наружу в вакуум препятствует потенциальный барьер. Теория фотоэффекта основывается на предположении, что *электроны металла поглощают фотоны*, увеличивая свою энергию.

Исходя из этих представлений весь процесс внешнего фотоэффекта можно разделить на три этапа: поглощение фотона электроном, перемещение электрона к поверхности металла, преодоление потенциального барьера при выходе в вакуум. Согласно закону сохранения энергии энергия фотона $h\nu$ расходуется на работу A для отрыва электрона с поверхности металла и на сообщение ему кинетической энергии:

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2} \quad (56.3)$$

Работа выхода A обычно не превышает нескольких электрон-вольт: для меди она составляет 4,3 эВ, для платины — 6,3 эВ.

Приведенная выше элементарная квантовая теория легко объясняет основные закономерности фотоэффекта. Например, более интенсивная волна несет большее число квантов, и соответственно этому увеличивается число элементарных актов, приводящих к выбиванию электронов из металла — фототок растет. Из формулы (56.3) следует линейная зависимость кинетической энергии электронов от частоты света. Красная граница фотоэффекта, т. е. наименьшая частота, при которой еще может наблюдаться фотоэффект, определяется условием $h\nu_m = A$.

ЗАДАЧА 56.1. Параллельный пучок лучей с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см падает нормально на поверхность, создавая освещенность $e = 1,37 \cdot 10^3$ Вт/м². Определить: 1) число фотонов в 1 см³ пучка, 2) число фотонов, падающих на 1 см² в 1 с.

Решение. Число фотонов N в единице объема (т. е. концентрация фотонов) может быть найдено как частное от деления энергии фотонов в единице объема w (объемной плотности энергии пучка) на энергию одного фотона:

$$N = \frac{w}{h\nu} = \frac{w\lambda}{hc} \quad (1)$$

Из решения задачи 47.1 следует, что $\omega = e/c$. Подставляя это значение ω в (1), находим $N = e\lambda/hc^2 = 1,15 \cdot 10^7$ фот/см³.

Рассмотрим вторую часть задачи: Число фотонов, падающих в единицу времени на единицу поверхности, равно энергии пучка, падающей в единицу времени на единицу поверхности, т. е. освещенности, деленной на энергию одного фотона: $e\lambda/hc = 3,4 \cdot 10^{17}$ фот/см²·с.

ЗАДАЧА 56.2. КПД 100-ваттной электролампы в видимой области равен 1%. Оценить число фотонов, излучаемых за 1 с.

Решение. Для оценки будем считать, что излучается свет с длиной волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см. Тогда число фотонов, излучаемых в 1 с равно

$$\frac{\eta P}{h\nu} = \frac{[\eta P \lambda]}{hc} = \frac{0,01 \cdot 100 \cdot 5 \cdot 10^{-7}}{6,62 \cdot 10^{-34} \cdot 3 \cdot 10^8} = 2,5 \cdot 10^{18} \frac{\text{фот}}{\text{с}}.$$

ЗАДАЧА 56.3. Найти энергию фотона в излучении: а) радиоволн с длиной волны $\lambda = 30$ м, б) инфракрасных лучей ($\lambda = 10^{-3}$ см), в) видимого света ($\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см), г) рентгеновских лучей ($\lambda = 10^{-8}$ см). Результат выразить в электрон-вольтах.

Решение. Энергия фотона $\epsilon = h\nu$. Поскольку частота связана с длиной волны соотношением $\nu = c/\lambda$, то $\epsilon = hc/\lambda$. Энергия фотона соответственно равна: а) $\epsilon = 4,1 \cdot 10^{-8}$ эВ, б) $\epsilon = 1,2 \cdot 10^{-1}$ эВ, в) $\epsilon = 2,5$ эВ, г) $\epsilon = 12,0$ кэВ.

ПРИМЕР 56.4. Найдем граничную частоту при освещении пластины цезия. Работа выхода для цезия $A = 1,9$ эВ.

Согласно определению граничная частота $\nu_m = A/h \approx 4,6 \cdot 10^{14}$ Гц, длина волны излучения $\lambda_m = c/\nu_m = ch/A \approx 6,5 \cdot 10^{-5}$ см. Следовательно, фотоэффект возникает при освещении цезия видимым светом.

ЗАДАЧА 56.5. Найти кинетическую энергию электронов, выбитых из серебра при облучении ультрафиолетовым светом длиной волны $\lambda = 2 \cdot 10^{-5}$ см. Работа выхода для серебра $A = 4,7$ эВ.

Ответ. $hc/\lambda - A = 6,21$ эВ — $4,7$ эВ = $1,51$ эВ.

3. Становление квантовой теории света. Рассмотрим другой опыт, подтверждающий гипотезу фотонов. Возьмем источник видимого света, который будем регистрировать с помощью фотоэлемента, содержащего электрод из цезия. Согласно (47.1), (47.4) световой поток $\Phi = (I/r^2)S$ (S — площадь фотокатода), падающий на фотоэлемент, расположенный на достаточно большом расстоянии r , может быть сколь угодно малым. Однако фотоэлемент по-прежнему регистрирует свет. Уменьшается только скорость счета, так как число выбитых электронов изменяется обратно пропорционально r^2 . Свет далеких звезд, испущенный сотни или тысячи лет назад, пройдя огромные расстояния, заставляет фотоэлемент срабатывать.

Большинство ученых с недоверием встретили гипотезу световых квантов, предложенную 26-летним Эйнштейном. Все понима-

ли, что корпускулярная теория несовместима с волновой теорией, позволившей объяснить интерференцию и дифракцию света. Волновые представления были уже незыблемыми. Планк только в 1919 г. решился с оговорками признать кванты света [24].

В 1912 г. было обнаружено, что при рассеянии рентгеновских лучей на кристалле образуется дифракционная картина. Эта картина равноценна оптическому изображению и позволяет расшифровать кристаллическую структуру. Дифракция на кристаллах, без сомнения, подтверждает, что рентгеновские лучи — электромагнитные волны с длиной волны порядка $\sim 10^{-8}$ см.

С другой стороны, сомнения в корпускулярных свойствах фотонов исчезли после опытов по рассеянию рентгеновских лучей, проведенных в 1922 г. американским физиком А. Комптоном. Он показал, что взаимодействие рентгеновского излучения с электронами среды носит характер столкновения двух частиц (см. § Д.14). Фотон обладает не только энергией $h\nu$, но и импульсом $h\nu/c$ и движется со скоростью света. Фотоны могут поглощаться или излучаться атомами только поодиночке. *При взаимодействии фотонов с атомами выполняются законы сохранения энергии и импульса.* Фотон нельзя расщепить на две части так, чтобы сумма их энергий была равна $h\nu$, но частота каждого из них оставалась бы равной ν . Какой же из этих двух результатов по рассеянию рентгеновских лучей считать правильным?

Последовательная теория взаимодействия атомов с электромагнитным излучением была создана в 1927 г. гениальным английским физиком П. А. М. Дираком (1902—1984). В его интерпретации величины, квадратично зависящие от амплитуды волны, определяют *вероятность* того, что фотон достигнет определенной точки регистрирующего прибора.

Соответствие между квантовым и волновым представлениями состоит в следующем: большое число фотонов воспринимается нами как световая волна. При этом освещенность дифракционных колец (см. рис. 48.4) пропорциональна среднему числу фотонов, попавших в соответствующее место экрана. А теперь уменьшим интенсивность падающего пучка настолько, что фотоны будут пролетать через отверстие поодиночке с интервалом, скажем, в несколько секунд. По мере ослабления интенсивности кольца становятся все более и более тусклыми и уже не сохраняют свои очертания. Тем не менее *фотон имеет наибольшую вероятность попасть в то место экрана, где находится самый яркий участок дифракционной картины.* Вероятность попасть в область темных колец равна практически нулю. Увеличивая время экспозиции, мы получим такую же четкую дифракционную картину, как и в случае сильного источника света.

4. Волновые свойства частиц. Итак, эксперименты указывают, что свет в одних процессах ведет себя как волна, а в других — как обычная частица. В истории учения о природе света эти две

точки зрения всегда выступали как диаметрально противоположные. Тем не менее в 1923 г. французский ученый Луи де Бройль выдвинул гипотезу, согласно которой каждой частице присущи волновые свойства. Эта гипотеза была подтверждена в 1927 г. опытами, в которых, пропуская пучок электронов через металлическую фольгу из олова, удалось получить интерференционную картину распределения плотности электронов. Дифракционные явления — признак волнового поведения электронов. Движущийся электрон, импульс которого p , ведет себя подобно волне. Связь между длиной волны и импульсом

$$\lambda = \frac{h}{p} \quad (56.4)$$

справедлива для любых частиц. Тем самым опыт показывает, что электрон не есть частица в классическом смысле этого слова. Согласно классическому описанию электроны, имеющие одинаковые начальные положение и скорость, должны были бы попасть в одну и ту же точку. Возникновение дифракционной картины позволяет сделать вывод, что поведение электронов не может быть описано механикой Ньютона. Теряет смысл также понятие траектории. В 1929 г. была обнаружена дифракция атомов гелия и молекул водорода в согласии с теорией де Бройля. В настоящее время корпускулярные и волновые свойства элементарных частиц, атомов и молекул подтверждены многочисленными экспериментами. Тем самым согласно современной теории корпускулярные и волновые свойства частиц следует рассматривать не как взаимоисключающие, а как *взаимодополняющие* друг друга.

Этот вывод кажется парадоксальным и удивительным. Причина этого в том, что мы безуспешно пытаемся использовать привычные нам понятия и законы классической физики. Однако анализ экспериментальных фактов вынуждает признать ограниченность старых понятий как не соответствующих реальности. По этому поводу А. Эйнштейн заметил: «Наука вынуждает нас создавать новые теории. Их задача — разрушить стену противоречий, которые часто преграждают дорогу научному прогрессу. Все существенные идеи в науке родились в драматическом конфликте между реальностью и нашими попытками ее понять».

Для описания поведения микрочастиц в 20-е годы нашего столетия была разработана *квантовая механика*. Только после ее создания стало возможным правильное объяснение объективных закономерностей природы, проявляющихся в различных явлениях и экспериментах по изучению свойств ядер, атомов, молекул и т. д. Построение квантовой механики потребовало существенно-го изменения основных физических законов, основанных на классических представлениях: механике Ньютона и волновой теории. Стало ясно, что *законы классической физики являются приближенными, применимыми при определенных ограничениях*. Таким

образом, квантовая теория, включая классическую как частный случай, выражает более общие законы природы.

5. Соотношение неопределенностей. Разумеется, новая теория не отменяет законов классической физики, а включает их как предельный случай, указывая пределы применимости классических понятий — траектория, координата и т. д. Впервые это заметил В. Гейзенберг в 1927 г.; он сформулировал *принцип неопределенностей*, ограничивающий возможность классического описания поведения микрочастиц. Например, нельзя утверждать, что частица занимает определенное положение и обладает определенным импульсом. Согласно Гейзенбергу, в любом эксперименте

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2\pi}, \quad (56.5)$$

где Δx и Δp_x — неопределенности в определении координаты и импульса. Следовательно, в отличие от классического описания, *нельзя точно одновременно измерить положение и импульс частицы*. Важным является то, что невозможность одновременного точного определения координаты и импульса не связано с несовершенством процесса измерения, а является особенностью поведения микрочастиц.

Для упрощения формул физики-теоретики обычно используют постоянную Планка, деленную на 2π . Эта постоянная имеет специальное обозначение $\hbar \equiv h/2\pi = 1,0546 \cdot 10^{-34}$ Дж·с = $0,658 \cdot 10^{-15}$ эВ·с. Используя $\hbar$, запишем (56.5) в виде

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar. \quad (56.6)$$

Рассмотрим теперь, при каких условиях допустимо классическое описание движения частицы. Пусть a — размеры области, в которой движется частица, p — ее импульс. Измерение положения частицы с точностью $|\Delta x| \ll a$ приводит одновременно к неопределенности в значении импульса $\Delta p \geq \hbar/|\Delta x| \gg \hbar/a$, т. е. к *квантово-механической дифракции*. Если $\Delta p \ll p$, то волновые свойства частицы становятся несущественными. Поэтому мы приходим к условию $a \gg \hbar/p$,

$$a \gg \frac{\hbar}{2\pi p}. \quad (56.7)$$

В этом случае поведение частицы определяется вторым законом Ньютона.

В то же время соотношение неопределенностей позволяет пояснить ограниченность понятия траектории частицы. Попробуем, например, определить положение электрона в атоме водорода. Поскольку атом занимает область пространства, линейные размеры которой $a \sim 0,5 \cdot 10^{-8}$ см, то точность в определении положения электрона должна удовлетворять условию $|\Delta x| \ll a$. Согласно

(56.6) попытка измерения положения электрона приведет к возникновению неопределенности импульса и кинетической энергии:

$$\Delta p \gtrsim \frac{\hbar}{|\Delta x|} \sim \frac{\hbar}{a}, \quad \Delta K = \frac{\Delta p^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{2ma^2} = 13,7 \text{ эВ.}$$

Неопределенность энергии оказывается порядка энергии ионизации электрона, равной 13,6 эВ. Поэтому попытка измерить положение электрона с точностью $|\Delta x| \ll a$ приведет к развалу атома. Приходится говорить о положении электрона в пределах атома в целом и отказаться от понятия «орбита электрона в атоме». Роль траектории — непрерывной кривой — теперь играет область пространства, в которой вероятность обнаружить электрон отлична от нуля.

Из соотношения неопределенностей следует, что невозможно предсказать поведение каждого взятого отдельно атома. Вместо этого квантовая механика позволяет вычислять средние значения экспериментально наблюдаемых величин.

Соотношение неопределенностей для энергии. В квантовой механике значения энергии частицы E_2 и E_1 в два различных момента времени t_2 и t_1 связаны соотношением

$$\Delta E \Delta t \gtrsim \hbar, \quad (56.8)$$

где $\Delta E = E_2 - E_1$, $\Delta t = t_2 - t_1$. Это соотношение играет важную роль в интерпретации атомных и ядерных процессов (§ 60).

§ 57. СТРОЕНИЕ АТОМА. ТЕОРИЯ БОРА. ИЗЛУЧЕНИЕ И ПОГЛОЩЕНИЕ СВЕТА. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ. ЛАЗЕРЫ

1. Строение атома. Основы современных представлений о радиоактивности и строении атома были заложены выдающимся английским ученым Э. Резерфордом (1871—1937). В 1899 г. он обнаружил, что уран испускает бета-лучи (электроны) и излучение, обладающее слабой проникающей способностью. Это излучение он назвал *альфа-лучами*. Однако установление опытным путем их действительной природы заняло у него десять лет напряженного труда [19]. Только в 1909 г. было доказано, что α -частица представляет положительно заряженное ядро гелия ${}^4\text{He}$. Ее заряд равен $2|e|$, масса почти в четыре раза больше массы атома водорода. Будучи талантливым экспериментатором, Резерфорд использовал α -частицы как инструмент для исследования строения атома. Его метод заключался в подсчете числа α -частиц, рассеянных тонкой фольгой под различными углами. Число рассеянных α -частиц определялось в темноте по вспышкам на экране из сернистого цинка при попадании в него α -частиц.

Благодаря большой массе α -частицы не отклоняются сколько-

нибудь заметным образом при столкновении с электронами атома и, следовательно, результат рассеяния существенно зависит от размеров области, в пределах которой распределен положительный заряд атома. Если частицы рассеиваются на золотой фольге толщиной $d \sim 10^{-7}$ м, то согласно (19.3) на толщине фольги укладывается $d(\rho N_A/\mu)^{1/3} \sim 400$ атомов золота. (Плотность золота $\rho = 2 \cdot 10^4$ кг/м³, относительная атомная масса $\mu = 197$.) Опыты показали, что в основном частицы рассеивались под малыми углами ($< 10^\circ$) к направлению движения, но некоторые α -частицы — примерно одна на 20 000, — как заметил сотрудник Резерфорда Марсден, отклонялись на углы, большие 90° . Это позволило Резерфорду в 1911 г. прийти к выводу, что где-то внутри атома находится массивный положительно заряженный центр — ядро атома и те α -частицы, которые проходят на весьма малом расстоянии от него, сильно с ним взаимодействуют.

Радиус ядра можно оценить из закона сохранения полной энергии, записанного для случая лобового столкновения. Потенциальная энергия взаимодействия α -частицы и ядра зарядом Ze ($Z = 79$, $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл) определяется формулой (30.13): $P = 2k(Ze^2/r)$. До столкновения α -частица находится на очень большом расстоянии от ядра, и поэтому потенциальная энергия в этом положении равна нулю. Кинетическая энергия α -частицы, излучаемой радиоактивным источником, известна и равна W . При движении α -частицы к ядру потенциальная энергия возрастает, а кинетическая уменьшается. В тот момент, когда α -частица находится на наименьшем расстоянии r_0 от центра ядра, ее кинетическая энергия равна нулю, а потенциальная — $2k(Ze^2/r_0)$. Приравнивая полные энергии в двух положениях, найдем значение $r_0 = 2k(Ze^2/W)$. Таким образом, α -частица с данной энергией W не может приблизиться к ядру на расстояние меньшее r_0 . Предполагая, что α -частица имеет энергию $W = 5$ МэВ (именно таков порядок величины энергии α -частиц от радиоактивных источников, которые использовал Резерфорд), получим $r_0 \simeq 4,5 \cdot 10^{-12}$ см. Отсюда следует, что размеры ядра золота не превышают $5 \cdot 10^{-12}$ см.

Измерения размеров ядер различными методами дают величину, лежащую в пределах $(1,2-1,3) \cdot 10^{-13}$ см. Таким образом было установлено, что атом — основной строительный материал вещества — представляет собой «атом пустоты»: отношение объема, занимаемого ядром, к объему области, в которой движутся электроны, $\sim 10^{-15}$.

2. Спектральный анализ. Если атомы или молекулы химического элемента возбудить, сообщая достаточное количество энергии, то они становятся источниками электромагнитного излучения. Используя призму или другие оптические элементы, можно добиться пространственного разделения излучения по монохроматическим составляющим, т. е. получить *спектр излучения* в виде линий или полос.

Эксперименты с различными источниками света показали, что при введении в пламя горелки химических элементов в спектре появляется множество ярких линий, причем каждая линия характерна для определенного элемента. (Эти линии дают пары элементов, образующиеся в пламени горелки.) Появление новых, ранее не наблюдавшихся линий дает возможность обнаружить новые элементы. С помощью этого метода создатели современного спектрального анализа Г. Кирхгоф и Р. Бунзен открыли в 1861 г. рубидий и цезий — металлы, названные по наиболее ярким для них красной и голубой линиям.

Триумфом метода стало изучение спектров Солнца и звезд, показавших наличие в их атмосферах элементов, присутствующих на Земле. В 1868 г. в солнечном спектре была обнаружена линия нового элемента — гелия, открытого на Земле лишь в 1895 г. В 1888 г. Гельмгольц писал, что «это открытие вызвало восхищение всех людей и возбудило их фантазию в большей мере, чем какое-либо другое открытие, потому что позволило заглянуть в миры, представлявшиеся нам совершенно недоступными для изучения».

Если на пути лучей белого света поместить раскаленное вещество в газообразном состоянии, то на экране получится сплошной спектр, пересеченный темными линиями, — *спектр поглощения*. Положение этих линий соответствует положению цветных линий в спектре испускания того же вещества. Это явление есть следствие *закона Кирхгофа*, согласно которому вещество в газообразном состоянии поглощает световые волны такой же частоты, какой оно само испускает.

Различные вещества отличаются внутренней структурой и дают различные спектры поглощения и испускания. Поэтому спектральный анализ активно используется в физических исследованиях и позволяет получить информацию о строении вещества.

3. Квантовая теория атома. В 1885 г. швейцарский физик И. Я. Бальмер обнаружил закономерность в спектральных линиях атома водорода. Частота волн ν_n видимой части спектра определяется формулой

$$\nu_n = R \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2} \right), \quad n = 3, 4, \dots \quad (57.1)$$

где постоянная величина $R = 3,1 \cdot 10^{15}$ Гц. Это открытие послужило толчком для обнаружения других серий в инфракрасной и ультрафиолетовой частях спектра. Общий закон для частот ν_{nk} излучаемых водородом волн имеет вид

$$\nu_{nk} = R \left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{n^2} \right). \quad (57.2)$$

Полагая $k = 1, 2, 3, \dots$, получим различные серии линий спектра.

С точки зрения классической теории существование резко выраженных спектральных линий (57.2) непостижимо.

Планетарная модель атома поставила перед физиками проблему устойчивости атома. Согласно классической теории ускоренно движущиеся заряды излучают электромагнитные волны. Электрон, вращающийся в атоме, должен непрерывно излучать, а его энергия должна постепенно убывать. Вследствие этого он будет двигаться не по круговой орбите, а по спирали и в конце концов упадет на ядро. Однако из опыта следует, что атом представляет собой устойчивое образование.

Теория атома водорода, предложенная выдающимся датским физиком-теоретиком Н. Бором (1885—1962), впервые указала путь к построению новой механики атома. В 1913 г. он сформулировал два принципа:

1. Атом может находиться лишь в определенных стационарных состояниях, каждое из которых характеризуется определенным значением полной энергии.

2. При переходе атома из состояния с энергией E_n в состояние с энергией E_k ($E_k < E_n$) испускается фотон, энергия которого

$$h\nu_{nk} = E_n - E_k. \quad (57.3)$$

При поглощении фотона с энергией

$$h\nu_{sn} = E_s - E_n \quad (57.4)$$

происходит переход атома из состояния с энергией E_n в состояние с энергией $E_s > E_n$.

Далее Бор предложил теорию атома водорода. В наиболее простом случае электрон движется по круговой орбите радиусом r . В соответствии с (13.56) $mv^2/r = ke^2/r^2$. Для определения радиуса орбиты Бор ввел квантовое условие

$$mvr = n\hbar, \quad n = 1, 2, \dots \quad (57.5)$$

Из этих уравнений следует

$$r_n = \frac{\hbar^2 n^2}{mke^2}, \quad v_n = \frac{ke^2}{\hbar n}. \quad (57.6)$$

Величина $a = \hbar^2/mke^2 = 0,53 \cdot 10^{-8}$ см получила название боровского радиуса атома водорода. Нас интересует полная энергия электрона

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{2r_n}.$$

Подставляя значение r_n , находим

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, \quad E_0 = \frac{m\hbar^2 e^4}{2\hbar^2} = 13,6 \text{ эВ}. \quad (57.7)$$

Для $n=1, 2, \dots$ возникает дискретный ряд допустимых значений энергии. Наименьшему значению энергии $E_1 = -13,6$ эВ соответствует $n=1$. Если атому, находящемуся в этом состоянии, попытаться передать энергию $\Delta E \neq E_n - E_1$, то его энергия не изменится. Величина $|E_1|$ называется энергией связи электрона: сообщив атому энергию 13,6 эВ, мы переведем его в состояние $E_\infty = 0$, соответствующее свободному движению электрона и однократно ионизированного атома — в нашем случае ядра атома водорода (протона).

Сильно возбужденные атомы называют *ридберговскими* атомами. Они обладают множеством необычных свойств [20]. Для $n=330$ диаметр атома водорода приближается к сотой доле миллиметра.

Для того чтобы объяснить известные спектральные линии, достаточно использовать формулу (57.7) и постулаты Бора. Например, полагая в (57.3) $k=2$, $n=3, 4, \dots$, получим частоту излучения при переходах атома из состояния E_n в состояние E_2 :

$$\nu_{n2} = \frac{E_0}{h} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right).$$

Величина E_0/h совпадает с постоянной R в формуле Бальмера (57.1). Для переходов $E_n \rightarrow E_k$ получим соотношение (57.2). Именно теоретическое обоснование этих формул принесло большой успех гипотезам Бора.

В 1914 г. вышла работа немецких физиков Д. Франка и Г. Герца, которая явилась экспериментальным доказательством существования энергетических уровней. Ими было показано, что при столкновениях электронов с атомами ртути полная энергия атомов возрастает скачком при одной и той же энергии электронов, равной 4,9 эВ. В соответствии с теорией Бора это явление связано с переходом атома из одного стационарного состояния E_1 в другое с энергией $E_2 > E_1$.

ПРИМЕР 57.1. Рассмотрим движение спутника вокруг Земли по круговой орбите радиусом r . Поскольку кулоновская и гравитационная силы $\sim r^{-2}$, то, заменяя в приведенных выше формулах ke^2 на $\gamma m M = mgR^2$ (M, R — масса и радиус Земли), мы сможем проквантовать движение спутника. Энергетические уровни определяются формулой (57.7), где $E_0 = \frac{1}{2} m (mgR^2/h)^2$. Найдем значение квантового числа n для спутника массой $m=100$ кг, движущегося по орбите радиусом $r=R$, $n = m\hbar^{-1} g^{1/2} R^{3/2} = 5 \cdot 10^6$. Следовательно, спутник находится в «сверхвозбужденном» состоянии.

Теория Бора была промежуточным этапом на пути к созданию современной квантовой механики: в ней рассматриваются только одноэлектронные атомы, не учитывается существование произвольно ориентированных некруговых орбит. Поэтому теория Бора оказалась неспособной объяснить спектры гелия, лития и других атомов. Формула (57.7) также имеет приближенный характер.

Рождение квантовой механики началось с выдающейся работы 24-летнего немецкого теоретика В. Гейзенберга (1901—1976). В 1926 г. австрийский физик-теоретик Э. Шредингер (1887—1961) установил уравнение, играющее в изучении атомных явлений такую же роль, как законы Ньютона в классической механике. За короткое время квантовая механика стала обычной рабочей теорией, способной предсказать с поразительной степенью точности закономерности огромного числа физических явлений.

В 1925 г. немецкий физик-теоретик В. Паули сформулировал один из важнейших принципов новой механики: *в каждом энергетическом состоянии может быть не более двух электронов*. После этого можно было теоретически обосновать структуру периодической системы элементов Менделеева. В 1927 г. был выполнен первый расчет молекулы водорода, положивший начало *квантовой химии*. Советский физик-теоретик В. А. Фок (1898—1974) разработал в 1928 г. методы описания многоэлектронных атомных систем.

Построение квантовой механики привело к отказу от привычных понятий классической физики и использованию нового математического аппарата. *Движению частицы ставится в соответствие волновой процесс — распространение волны вероятности* в том смысле, что она определяет вероятность обнаружить частицу в определенном месте пространства или вероятность ожидания некоторого значения любой экспериментально наблюдаемой величины.

Согласно современным представлениям атом может находиться в различных состояниях, которые определяются различными значениями так называемых *квантовых чисел*. Каждому состоянию соответствует некоторый вид движения электронов, не сопровождающийся излучением электромагнитных волн, т. е. атом находится в стационарном состоянии. Полная энергия электронов, связанных с ядром, может принимать только дискретные значения. Графически возможные значения энергии изображают в виде схемы *термов* или *уровней энергии* — горизонтальных прямых на расстояниях, соответствующих разности дозволённых значений. Взаимное расположение уровней энергии различно для атомов различных элементов. Очень важно отметить, что атом не имеет состояний с энергией, меньшей некоторого значения E_0 (рис. 57.1). Стационарное состояние с энергией E_0 называется *основным*, а остальные — *возбужденными*. В возбужденных состояниях атом живет недолго. Обычно он излучает квант света в среднем за время 10^{-8} с, переходит в более низкое энергетическое состояние и в конце концов, излучив один или несколько квантов, оказывается в основном состоянии. Из сказанного следует, что основное состояние является наиболее устойчивым, так как обладает наименьшим значением полной энергии.

Заметим, что характерная единица «атомного времени» $a/c \sim$

$\sim 10^{-19}$ с (a — размер атома). В этих единицах время жизни возбужденного состояния необычайно велико. Причина этого в том, что $a \ll \lambda$. Поэтому согласно (45.9) атом является весьма «неэффективным» излучателем.

4. Излучение и поглощение света. Рассмотренные переходы с более высоких энергетических уровней на более низкие называются самопроизвольными, или *спонтанными*, поскольку они возникают без каких-либо внешних воздействий. Механизмом спонтанного излучения объясняют спектры испускания. Квант света,

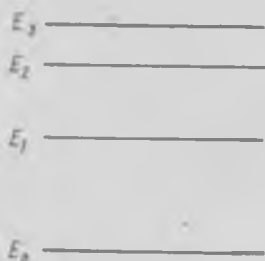


Рис. 57.1

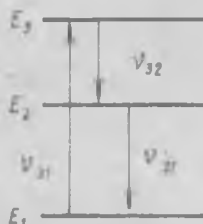


Рис. 57.2

излученный атомом, уносит с собой энергию, равную той энергии, которую теряет атом. Если до излучения электрон имел энергию E_n , а после излучения — энергию E_k , то энергия фотона должна быть равна $E_n - E_k$. Фотоны, образующие свет определенной частоты, тождественны, и каждый фотон обладает энергией $h\nu$. В нашем примере частота излучения определяется из закона сохранения энергии (57.3).

Каким образом могут появляться атомы, находящиеся в возбужденных состояниях? Одна из причин — неупругие столкновения атомов. При неупругом столкновении атом может перейти из основного состояния в возбужденное. При этом энергия атома увеличивается за счет кинетической энергии сталкивающихся частиц. На практике этот эффект можно получить нагреванием газа атомов, бомбардировкой атомов электронами или другими частицами, пропусканием тока через газы и т. д. Другой тип возбуждения связан со способностью электромагнитного поля передавать свою энергию атомам, молекулам или ионам и таким образом вынуждать их перейти на более высокий уровень энергии. Так, когда на атом падает излучение от внешних источников с частотой, совпадающей с одной из возможных частот ν_{sn} , которые определяются формулой (57.4), то атом переходит из состояния с энергией E_n в состояние с большей энергией E_s . Увеличение энергии атома происходит за счет энергии поглощенного кванта. Энергия

электромагнитного поля при этом уменьшается. Рассмотренный механизм вынужденного поглощения делает теперь понятным возникновение спектров поглощения.

Под действием внешнего электромагнитного поля может происходить также переход из возбужденного состояния в более низкое. При этом происходит излучение. Такое излучение называется *вынужденным*, или *индуцированным*.

Индукцированное излучение обладает важным свойством: излученная волна полностью тождественна внешней волне, вызвавшей ее излучение, совпадают частоты, фазы, направления распространения и векторов (но не величин) напряженностей электрического и магнитного полей. Это означает, что излученная и внешняя волны являются когерентными. Складываясь, они составляют одну волну, *амплитуда которой возрастает с увеличением числа актов индуцированного излучения*. Таким образом, в результате индуцированного излучения энергия электромагнитного поля возрастает. Этот процесс является физической основой нового направления квантовой механики — *квантовой радиофизики*. В 1954 г. советские физики Н. Г. Басов и А. М. Прохоров и американский физик Ч. Таунс предложили использовать индуцированное излучение квантовых систем для генерации и усиления электромагнитных волн. В 1954 г. был создан мазер — прибор, работающий в диапазоне ультракоротких волн. В конце 1960 и в начале 1961 г. появились квантовые генераторы света — лазеры. Термин «лазер» — аббревиатура английского выражения *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation* — усиление света вынужденным излучением. Лазеры используют и для усиления проходящего извне света.

5. Лазеры. Основной элемент первого рубинового лазера — цилиндрический стержень кристалла рубина длиной 3—20 см и диаметром 0,5—2 см. Торцы стержня представляют плоские поверхности, расположенные перпендикулярно оси стержня и покрытые тонкой пленкой серебра, которая используется в качестве зеркала. Одно из зеркал делают частично прозрачным для вывода излучения. Выясним, какие условия необходимы для генерации света?

На рис. 57.2 показано расположение тех уровней энергии кристалла рубина, которые используются для получения красного луча на волне $\lambda = 6,943 \cdot 10^{-5}$ см.

В состоянии теплового равновесия атомы стремятся занять состояние с наименьшей энергией. Вследствие этого число атомов N_1 , имеющих значение энергии E_1 , больше числа атомов N_2 , имеющих энергию E_2 . Поток света частоты ν_{21} , проходя через рубин, вызывал бы переходы из состояния 1 в состояние 2 (с поглощением света) и переходы из состояния 2 в 1 (с индуцированным излучением). Следовательно, изменение светового потока $\Delta\Phi \sim N_2 - N_1$. Поскольку разность $N_2 - N_1$ — величина отрицательная, наша система будет поглощать свет.

Для того чтобы система работала как генератор, необходимо выполнение условия $N_2 > N_1$. Для его реализации используют внешний источник света частотой ν_{31} (генератор накачки). Под действием накачки атомы переходят с уровня E_1 на уровень E_3 и с уровня E_3 на E_1 . При этом число атомов N_3 в состоянии с энергией E_3 становится больше N_1 . Уровни энергии подбирают таким образом, что за время $\sim 10^{-7}$ с вследствие не сопровождающихся излучением потерь энергии атомы переходят на уровень E_2 , время жизни которого составляет несколько тысячных долей секунды. Поэтому за промежуток времени $\sim 10^{-3}$ с описанный механизм приведет к накоплению возбужденных атомов в состоянии E_2 . В результате такого накопления N_2 может стать значительно больше N_1 . Теперь достаточно появиться одному кванту частотой ν_{21} , движущемуся вдоль кристалла, чтобы возникло индуцированное излучение.

Излученные кванты, отражаясь от зеркальных стенок, многократно пролетают возле возбужденных атомов, вызывая появление все новых и новых квантов. Световой поток лавинообразно нарастает и через полупрозрачное зеркало выходит наружу.

Важнейшая особенность лазерного излучения — монохроматичность и направленность. Энергия излучения рубинового лазера заключена в очень узком интервале длин волн $\Delta\lambda \sim 10^{-9}$ см в окрестности основной длины $\lambda = 6,943 \cdot 10^{-5}$ см. Ширина спектра лампы накаливания составляет около $3 \cdot 10^{-5}$ см, т. е. в 30 000 раз больше. Первые рубиновые лазеры излучали импульс света с энергией порядка 1 Дж за время около 10^{-3} с, т. е. имели мощность 1000 Вт. Через некоторое время, используя новые методы накопления энергии, удалось осуществить *режим гигантского импульса*: при длительности $2 \cdot 10^{-8}$ с излучается энергия 20 Дж, т. е. импульсная мощность достигает млрд Вт. Частота повторения импульсов 1—2 Гц.

Значительный прогресс в создании мощных импульсных лазеров связан с использованием неодимового стекла — обычного стекла, в которое введены атомы неодима (Nd). Излучение происходит на волне $10,6 \cdot 10^{-5}$ см в инфракрасном диапазоне. В неодимовом стержне удается получить плотность энергии $0,5$ Дж/см³ — эта энергия распределена в огромном числе возбужденных ионов неодима. К сожалению, поток энергии 1—2 Вт/см² приводит к разрушению стекла. Поэтому, стремясь получить большую мощность, создают многокаскадные и многоканальные лазеры. В них несколько многокаскадных усилителей получают первичный импульс от общего генератора, затем излучение всех параллельных каналов собирается на общей мишени. Установка, созданная в 1979 г. в Физическом институте АН СССР, имеет 216 каналов по 50 Дж, суммарная энергия излучения — около 10 кДж. При длительности импульса 10^{-9} с она дает мощность в импульсе 10 млрд кВт, или 10 ТВт (тера... от греч *teras* — чудовище). Дос-

тигнутая в настоящее время длительность τ ультракоротких импульсов приближается к теоретическому пределу $\tau_m \geq 1/\nu$, где ν — частота излучения. Для неодимового лазера $\nu \sim 3 \cdot 10^{14}$ Гц, $\tau_m \sim 3 \cdot 10^{-15}$ с.

Наиболее перспективными оказались лазеры, использующие смесь углекислого газа CO_2 с азотом и гелием. Здесь источником накачки является тлеющий разряд, в процессе которого молекулы N_2 легко получают энергию от электронов. Затем молекула азота передает при столкновениях энергию молекуле CO_2 , которая излучает на волне $106 \cdot 10^{-5}$ см. Для возбуждения газовых лазеров используют новые эффективные методы накачки: электрический разряд или поток нейтронов непосредственно от атомного реактора. Заметное продвижение в область больших мощностей обеспечили газодинамические лазеры. Нагретую смесь N_2 , CO_2 и воды пропускают через расширяющееся сопло. Охлаждение газовой смеси в оптическом резонаторе приводит к непрерывному излучению мощностью до 100 кВт, расход газа — 1 кг на 10–20 кДж энергии.

6. Применение лазеров. Сейчас созданы десятки разнообразных лазеров: газодинамических, полупроводниковых, химических, работающих на красителях, парах меди и т. д. Лазерный луч представляет поток чрезвычайно высококачественной энергии когерентного излучения, сконцентрированной в пределах небольшого телесного угла. Благодаря этому удается получить огромные плотности энергии. При фокусировке в пятно размерами порядка нескольких длин волн плотность энергии $\sim 10^{10}$ – 10^{12} Дж/см³, а освещенность $\sim 10^{17}$ Вт/см². Поэтому лазеры открыли принципиально новые возможности использования светового излучения в технологических процессах (сварка, резка и плавление металлов), медицине, сверхскоростной фотографии, спектроскопии, геодезии, в термоядерном синтезе [51]. С появлением лазеров связано рождение новых разделов науки.

Лазерная химия. В больших молекулах, состоящих из большого числа атомов, сила связей зависит от рода атомов и формы молекулы. Когда молекула получает энергию, то параметры связей меняются. При нагреве молекулы энергия распределяется равномерно по всем атомам — с ростом энергии будут разрываться самые слабые связи. Поэтому таким способом можно проводить ограниченное число реакций. Поскольку лазеры могут сообщать энергию за очень короткое время и в очень узких спектральных интервалах, то появляется возможность *селективного* (избирательного) *возбуждения* определенных молекулярных связей, оставляя другие «замороженными». Следовательно, можно управлять химическими реакциями, разрывая нужные связи.

Нелинейная оптика. Сильное световое излучение изменяет оптические характеристики среды, которые становятся теперь функциями напряженности электрического поля волны. Нелинейная оптика — область физики, изучающая явления, которые возникают

при распространении мощных световых пучков. Рассмотрим некоторые нелинейные явления.

Нелинейный фотоэффект. В интенсивном поле увеличивается вероятность поглощения не одного, а нескольких фотонов. Поэтому (56.3) следует заменить уравнением

$$N h \nu = A + \frac{m v^2}{2},$$

где N — число поглощенных фотонов.

Самофокусировка света. Вместо дифракционной расходимости параллельного пучка может наблюдаться его сжатие. Это явление обусловлено тем, что коэффициент преломления в области, занятой пучком, уменьшается к периферии. В результате пучок действует сам на себя, как собирающая линза.

Самопросветление среды. Среда, непрозрачная для слабого излучения, может стать прозрачной для интенсивного пучка света. Значительная доля атомов переходит из основного в возбужденное состояние. Наступает насыщение, и среда перестает поглощать.

В последние годы форсируется разработка американской программы СОИ, направленной, в частности, на создание лазерного оружия. По оценкам экспертов, для того чтобы лазер смог в течение 1 с прожечь обшивку ракеты с расстояния 3000 км, интенсивность излучения должна составлять 10^{17} Дж/ср при мощности излучения 100 МВт (мощность обычной атомной электростанции 1000 МВт, а тепловых ~ 700 МВт). Интенсивность излучения самого мощного лазера в 10^4 раз меньше, чем необходимо для целей СОИ. Поэтому все усилия СОИ направлены на разработку рентгеновского лазера. В рамках СОИ предусмотрено также создание пучкового оружия (направленного потока электронов) и электромагнитной пушки, выстреливающей болванку массой 3 кг со скоростью 15—30 км/с.

§ 58. НЕКОТОРЫЕ СЛЕДСТВИЯ КВАНТОВЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ

Классическое описание, основанное на законах Ньютона и электродинамике Максвелла, приближенно отражает закономерности реальных явлений. Огромное число экспериментальных данных позволяет утверждать, что квантовая теория является более высоким уровнем познания явлений природы. В этом параграфе рассматриваются несколько явлений, имеющих важное значение для понимания квантовых представлений. Приведенные примеры относятся к различным областям физики.

1. Квантово-механическая дифракция. Волновые свойства частиц ограничивают область применимости классического описания. Рассмотрим, например, пучок электронов с импульсами p , прошедший через круглое отверстие диаметром $D \gg \lambda$, $\lambda = h/p$ (рис. 48.4). Предположим, что в плоскости экрана положение

электрона определяется с точностью $\Delta r = D$. В соответствии с (56.5) составляющая импульса электрона $p_{\perp}$ в направлении, перпендикулярном оси пучка, имеет неопределенность $\Delta p_{\perp} \geq \hbar/D$. Это означает, что измерения проекции импульса дадут нам значения $p_{\perp}$, лежащие в интервале $(-\hbar/D, \hbar/D)$, причем вероятности появления различных значений $p_{\perp}$ различны. По этой причине электрон может отклоняться от оси пучка в пределах угла $\alpha = \Delta p_{\perp}/p \approx \hbar/pD$. На расстоянии z от экрана неопределенность в положении электрона $z\alpha \approx z\hbar/pD$. Если эта величина существенно меньше D : $z\hbar/pD \ll D$, то на расстояниях $z \ll pD^2/\hbar = L$ волновые свойства электрона не проявляются — электрон движется по прямой линии в соответствии с классическими представлениями. Однако на расстояниях $z \geq L$ из-за волновых свойств электронов пучок размывается. В кинескопах телевизоров $U=15$ кВ, $D \approx 10^{-3}$ см, длина трубки $l=0,25$ м. Следовательно, $p \approx 6,2 \cdot 10^{-23}$ кг·м/с, $v = 6,2 \cdot 10^7$ м/с, $\lambda = 10^{-11}$ м, характерное расстояние L оказывается равным 62,4 м. Поэтому движение электронов в кинескопе можно рассматривать по классической теории.

Записывая полученное выше неравенство в виде $z \ll L = 2\pi D^2/\lambda$, где λ — длина волны де Бройля, замечаем, что оно ничем не отличается от условия (48.11). Таким образом, геометрическая оптика и механика учитывают корпускулярные свойства объектов, а волновая оптика и квантовая механика — волновые свойства микроробъектов — фотонов и частиц вещества.

2. Принцип неразличимости одинаковых частиц. В состоянии теплового равновесия согласно (20.2) импульс молекулы $p \approx \sqrt{3mkT}$, а длина волны де Бройля $\lambda = \hbar/p = (\hbar^2/3mkT)^{1/2}$. Чтобы оценить типичные расстояния a между молекулами, допустим, что каждая молекула находится в центре куба объемом a^3 . Тогда $a^3 N = V$, где N — число молекул в объеме V . Теперь условие применимости классического рассмотрения (56.7) принимает вид

$$\frac{\lambda}{2\pi a} \approx \frac{\hbar}{\sqrt{mkT}} \left(\frac{N}{V} \right)^{1/3} \ll 1. \quad (58.1)$$

Неравенство (58.1) нарушается при высоких концентрациях атомов N/V , низких температурах и малой массе атомов. Приведем численную оценку. Для гелия, находящегося в нормальных условиях, из (21.9) получим $N/V = p_0/kT_0 = 2,6 \cdot 10^{25}$ молек/м³, $kT_0 = 3,77 \cdot 10^{-21}$ Дж, $a = 36 \cdot 10^{-8}$ см, $\lambda = 2 \cdot 10^{-11}$ см. Таким образом, условие (58.1) выполняется.

Полезно дать наглядное истолкование критерию (58.1). Запишем его в виде

$$\frac{N_p}{N} \gg 1, \quad N_p = V \frac{(mkT)^{3/2}}{\hbar^3}. \quad (58.2)$$

Величина N_p имеет смысл числа возможных квантовых состояний,

в которых могут находиться молекулы газа. Тогда заключаем, что условие $N_p \gg N$ эквивалентно неравенству

$$T \gg T_0, \quad T_0 = \frac{h^2}{k\pi} \left(\frac{N}{V} \right)^{2/3}. \quad (58.3)$$

Очевидно, при $T < T_0$ число возможных состояний меньше, чем полное число молекул газа. В этом случае должны проявиться квантовые эффекты в поведении газа. Любопытно, что проявление квантовых свойств газа связано с методом подсчета числа возможных состояний.

В классической теории частицы не теряют своей индивидуальности: их можно «пронумеровать» и следить за движением каждой из них по своей траектории. Однако реальные молекулы неразличимы. Измеряя, например, координаты молекул дважды с интервалом Δt , мы не в состоянии определить их перемещения. Поэтому принцип неразличимости одинаковых частиц играет основную роль при подсчете числа возможных состояний. Пусть, например, имеются две ячейки, т. е. два состояния, в которые мы хотим поместить частицы A и B . Тогда возможны 4 состояния (рис. 58.1). Если частицы неразличимы ($A=B$), то возможны только 3 комбинации. Заметим, что принцип неразличимости впервые был использован в работе Планка. Однако в классической статистике число возможных состояний по-прежнему равно 4. При $T > T_0$ разница в результатах расчета на основе двух статистик не проявляется, поскольку число молекул меньше числа возможных состояний. Положение меняется при $T < T_0$: число возможных состояний резко уменьшается. В этом случае использование классической статистики недопустимо. Из (58.3) следует, что наиболее благоприятные условия для наблюдения квантового поведения возможны при $T \ll T_0$, т. е. при низкой температуре в плотном газе с малой относительной массой.

3. Энергия нулевых колебаний. Гелий ^4He не переходит из газообразного состояния в жидкое при температуре, равной всего 4,22 К (при атмосферном давлении). Такое малое значение температуры связано со слабым межатомным взаимодействием инертных атомов гелия, у которых внешняя оболочка полностью заполнена. Далее гелий остается жидким и при температуре $T=0$ К. Странное поведение жидкого гелия объясняется существованием энергии нулевых колебаний. Согласно принципу неопределенностей кинетическая энергия атома

$$E_0 = \frac{p^2}{2m} \gg \frac{h^2}{2ma^2}, \quad (58.4)$$

где a — диаметр области, занимаемой атомом. Подставляя плотность гелия $\rho=0,145$ г/см³, $\mu=4$ в (19.3), находим, что на каждый атом приходится объем $V_0=4,5 \cdot 10^{-23}$ см³. Значит, $a=(6V_0/\pi)^{1/3}=$

$=4,5 \cdot 10^{-8}$ см, $E_0=88$ эВ. Кинетическая энергия E_0 оказывается существенно больше, чем энергия взаимодействия молекул. И только заметное давление может сблизить атомы гелия и связать их в твердую кристаллическую решетку. Этот процесс происходит при давлении ~ 25 атм.

У водорода энергия нулевых колебаний больше, чем у гелия. Однако из-за большой величины энергии взаимодействия он кристаллизуется. Для остальных жидкостей нулевые колебания несущественны. Жидкий гелий называют квантовой жидкостью, подчеркивая роль квантовых законов, объясняющих его поведение при низких температурах.

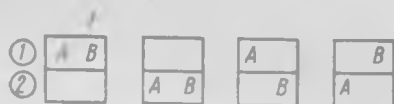


Рис. 58.1

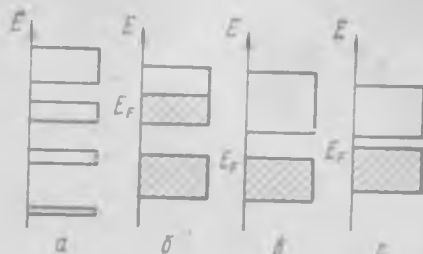


Рис. 58.2

4. Квантовая теория химической связи. Очевидно, отталкивание ядер атомов в молекуле должно компенсироваться некоторым эффективным отрицательным зарядом, расположенным между ними. Поэтому авторы моделей молекул старались найти траектории, для которых время пребывания электронов между ядрами максимально. Однако все модели имели существенный недостаток: они не могли объяснить устойчивость молекулы. Только с созданием квантовой механики удалось решить проблему химической связи и валентности. Основную роль здесь сыграли принцип неразличимости одинаковых частиц и принцип Паули. Математический аппарат квантовой механики впервые позволил описать системы тождественных частиц.

При образовании, например, молекулы водорода повышается вероятность пребывания электронов между ядрами, т. е. области движения электронов, принадлежащих разным атомам, перекрываются. Причина этого явления в том, что из-за неразличимости электронов нельзя определить, какой из них принадлежит одному атому, а какой — другому. Электрическое притяжение между областью повышенной плотности отрицательного заряда электронов и ядрами приводит к возникновению химической связи. Образуется устойчивая система — молекула. Таким образом, *химическая связь — существенно квантовый эффект*.

5. Металлы и изоляторы. Твердые вещества состоят из типично квантовых объектов — атомов. Поэтому мы вправе ожидать, что при изучении свойств различных веществ могут выявиться явления, объяснение которых можно получить только в рамках кван-

товой теории. Мы обсудим один аспект квантовой теории кристаллов — установим причину, по которой твердые тела разделяются на металлы, диэлектрики и полупроводники.

Все электроны в кристалле, в том числе и принадлежащие внутренним оболочкам атома, могут перемещаться по всему кристаллу. Ответ на вопрос, будет ли кристалл металлом или диэлектриком, дается при квантово-механическом рассмотрении состояния электронов в поле кристаллической решетки.

В основе представлений о металлах и изоляторах лежит понятие об *энергетическом спектре* электронов этих тел. Оказывается, что, так же как и в случае атома, энергия электрона в решетке не может принимать любые значения. Однако теперь возможные значения энергии не резко разграничены, как в атоме, а образуют практически непрерывные интервалы уровней энергии, разделенных интервалами *запрещенных* значений энергии (рис. 58.2а). Полосы *разрешенных* значений энергии называют *энергетическими зонами*. Характерной особенностью энергетического спектра является то, что с увеличением энергии ширина «разрешенных» полос увеличивается, а «запрещенных» уменьшается.

При температуре, равной абсолютному нулю, наиболее устойчивым состоянием кристалла является состояние с наименьшей энергией. Поэтому все электроны стремятся занять состояния с возможными наименьшими значениями энергии. При этом должен выполняться принцип Паули: одним и тем же значением энергии могут обладать не более двух электронов. Следовательно, электроны заполняют все нижайшие энергетические уровни, вплоть до некоторого значения E_F , которое называется *энергией Ферми*. Для серебра, например, $E_F = 5,5$ эВ. Скорость электронов, соответствующая этой энергии, равна $1,39 \cdot 10^8$ см/с. Тем самым, при нулевой температуре электроны обладают кинетической энергией нетеплового происхождения.

После размещения всех электронов в зависимости от характера их взаимодействия с решеткой могут появиться как полностью (рис. 58.2в, г), так и частично (рис. 58.2б) заполненные зоны. В соответствии с этим кристалл будет обладать свойствами диэлектрика или проводника.

В отсутствие внешних воздействий число электронов, движущихся в одном направлении, оказывается точно равным числу электронов, движущихся в противоположном направлении, — ток равен нулю. Если зона заполнена полностью, то электрическое поле не изменит этого положения. Действительно, при наличии внешнего электрического поля электроны не могут ускоряться, так как это означало бы их переход на более высокие энергетические уровни, в то время как зона полностью заполнена и свободных уровней нет. В случае частично заполненной зоны часть электронов под воздействием электрического поля перейдет в свободные состояния, порождая электрический ток. Поэтому кристал-

лы с незаполненными зонами являются хорошими проводниками электричества. Естественно, что *в проводимости могут участвовать только те электроны, энергия которых близка к энергии E_F* (рис. 58.2б). Для перевода «глубинных» электронов на свободные уровни требуется значительная энергия, так как ближайшие к ним энергетические состояния заняты. Целиком заполненные зоны также можно не рассматривать при исследовании проводимости. Поскольку в проводимости участвуют только электроны частично заполненных зон, то такие зоны называют *зонами проводимости*.

Таким образом, энергетический спектр, изображенный на рис. 58.2 в, г, характерен для изоляторов, а на рис. 58.2б — для металлов.

Тепловое движение вносит существенные изменения в эту классификацию: благодаря тепловому движению электроны могут перейти из заполненной зоны в свободную зону. В этом случае электроны обеих зон могут участвовать в проводимости. Если ширина энергетической щели велика по сравнению с энергией теплового движения, то вещество остается изолятором даже при высоких температурах. Однако имеется целая группа веществ, у которых уже при комнатной температуре заметное число электронов перебрасывается из заполненной зоны в свободную. Для этих веществ заполненная и свободная зоны расположены сравнительно близко друг к другу (рис. 58.2г). Такие вещества называются полупроводниками.

ПРИМЕР 58.1. Хорошо установлено, что медь, серебро и золото имеют по одному свободному электрону проводимости на атом. В этих элементах на каждый атом приходится по одному валентному электрону, которые в металле становятся электронами проводимости. В первом приближении электроны проводимости ведут себя как газ, состоящий из невзаимодействующих частиц. Поэтому среднее расстояние между электронами $a \approx (V/N)^{1/3}$, где N — число атомов в объеме V . Максимальное значение импульса электрона определяется соотношением неопределенностей (56.6): $p_0 \approx \hbar(N/V)^{1/3}$. Следовательно, энергия Ферми $E_F \approx (\hbar^2/2m)(N/V)^{2/3}$. Значения E_F для металлов лежат в области 1,5–7 эВ. В то же время энергия теплового движения электронов $E \approx kT$ при комнатной температуре равна 0,025 эВ. Мы приходим к выводу, что *электроны в металле являются типично квантовыми объектами — увеличение энергии, обусловленное подводом тепла, ничтожно мало по сравнению с энергией E_F , имеющей квантово-механическое происхождение*. Условие $E_F \approx kT$ определяет нижнюю границу T_0 температуры области, в которой можно пренебречь квантовыми эффектами: $T_0 \approx E_F/k = 18\,000\text{--}82\,000$ К. Верхняя граница принадлежит меди ($E_F = 7$ эВ). Поскольку любой металл расплавится и обратится в плазму задолго до того, как будет достигнута температура T_0 , то электроны в металле никогда не достигнут классического режима.

§ 59. РАДИОАКТИВНОСТЬ. ЯДЕРНЫЕ РЕАКЦИИ

Важнейшие события в рождении ядерной физики происходили в маленьких лабораториях, оснащенных простейшим оборудованием. Изучением экзотических и, казалось бы, далеких от практических приложений явлений занимались небольшие группы энтузиастов в разных странах мира. В этом проявилась интеллектуальная привлекательность науки для тех, кто хочет обнаружить или объяснить нечто, ранее неведомое. Спустя полвека ядерная физика оказывает огромное влияние на жизнь всего человечества.

1. Радиоактивность. В 1896 г. А. Беккерель открыл излучение солей урана, сходное по своим действиям с рентгеновскими лучами. Через год он обнаружил, что активность урана не изменилась. Новый этап исследований был начат работами Марии Кюри-Склодовской (1867—1934) и Пьера Кюри (1859—1906). Спустя три года после окончания Парижского университета в 1894 г. Мария Кюри узнает об открытии Беккереля и сразу же начинает поиск новых источников излучения. Она обнаружила, что активность урановой руды в два раза превосходит активность самого урана. Этот факт подтвердил ее предположение, что руда содержит неизвестный активный элемент. При растворении урановой руды и последующем осаждении солей обнаружилось, что осадок и фильтрат радиоактивны. Это дало основание подозревать, что в руде находятся два новых элемента, которые Кюри предложили назвать полонием и радием (лат. — луч), а само явление — радиоактивностью. Основная цель их работы с 1898 г. — добыть чистый радий. Вначале они предполагали, что содержание радия в руде около 0,1%. На самом деле отношение оказалось равным 1 : 300 000. Рабочие дни превратились в месяцы, годы. В первый год Кюри работали совместно над химическим выделением радия, но затем Пьер занялся постановкой экспериментальных исследований, а Мария продолжила обработку руды. Окруженная клубами дыма, разбегающего глаза и горло, она день за днем перерабатывала кипящую массу руды и соляной кислоты. Иногда в день приходилось обрабатывать до 20 кг руды. В течение четырех лет изнурительного труда из 8 т руды Кюри удалось выделить 0,1 г соли радия RaCl_2 . Эта титаническая работа вызвала восхищение во всем мире. Позднее в 1910 г. Мария Кюри разработала технологию получения металлического радия. В дальнейшем она занималась изучением воздействия радиоактивности на живые клетки, исследовала наведенную радиоактивность. Ни одна женщина-ученый не пользовалась такой популярностью, как Мария Кюри. Две Нобелевские премии, присужденные ей в 1903 и 1911 гг., — уникальное событие в научном мире. Она была избрана почетным членом 106 научных обществ [52].

В 1899 г. Резерфорд показал наличие двух компонентов излучения урана. Уже в 1902 г. стало ясно, что *β-лучи являются элект-*

ронами. В 1909 г. было окончательно установлено, что α -лучи — дважды ионизированные атомы гелия. Третий компонент излучения — γ -лучи — был открыт французским физиком П. У. Вилларом в 1900 г.

Один грамм радия выделяет за час 135 кал. Интенсивность этого излучения спадает в два раза по истечении 1622 лет. Общий выход энергии в миллионы раз превышает энергию любого равного по массе взрывчатого вещества. Каков источник этой энергии? Радий бросал вызов незыблемым основам физики. Действительно, как понимать теперь второй закон Ньютона, если масса тела не остается неизменной. Процесс ломки старых понятий воспринимался многими учеными как *кризис физики*.

2. Ленинский анализ «кризиса физики». В 1909 г. вышла книга В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм», пятая глава которой была посвящена теории познания и «новейшей революции в естествознании». В. И. Ленин, не будучи физиком, сумел глубоко понять сущность новых открытий. Он писал: «„Материя исчезает“ — это значит исчезает тот предел, до которого мы знали материю до сих пор, наше знание идет глубже; исчезают такие свойства материи, которые казались раньше абсолютными, неизменными, первоначальными (непроницаемость, инерция, масса и т. п.) и которые теперь обнаруживаются как относительные, присущие только некоторым состояниям материи. Ибо *единственное* «свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство *быть объективной реальностью*, существовать вне нашего сознания» [53, с. 275].

В период становления новых представлений В. И. Ленин увидел главное: диалектический характер развития физической науки; крах механистического мировоззрения и необходимость подняться к диалектическому материализму. «Этот шаг, — писал В. И. Ленин, — делает и сделает современная физика, но она идет к единственно верному методу и единственно верной философии естествознания не прямо, а зигзагами, не сознательно, а стихийно, не видя ясно своей «конечной цели», а приближаясь к ней ошупью, шатаясь, иногда даже задом» [53, с. 331–332].

Спустя десять лет после открытия электрона В. И. Ленин делает поразительное утверждение: «Электрон так же *неисчерпаем*, как и атом, природа бесконечна...» [53, с. 277], которое блестяще подтвердилось последующим развитием физики элементарных частиц.

3. Радиоактивные превращения. В 1903 г. стало ясно, что все изучавшиеся случаи радиоактивного распада сводятся к образованию одного элемента из другого. Были построены цепочки превращений радиоактивных элементов. В 1913 г. установлено, что заряд ядра численно равен атомному номеру элемента в таблице Менделеева.

Самое сенсационное открытие 20-х годов — искусственное расщепление ядра — было сделано Резерфордом в 1919 г. При облучении ядер азота α -частицами образовались ядра кислорода и водорода. Резерфорд предложил термин протон для ядра водорода и впервые высказал предположение о том, что протоны являются составной частью ядер атомов. В 1920 г. он рассмотрел возможность образования частицы из электрона и протона. Такие нейтральные частицы (термин нейтрон еще не существовал) должны легко проникать в ядра. Сотрудники Резерфорда немедленно приступили к экспериментальным поискам нейтрона.

4. Открытие нейтрона — начало современной ядерной физики. В 1932 г. французские ученые Ирен Жоллио-Кюри и ее муж Фредерик Жоллио-Кюри обнаружили, что при бомбардировке бериллия α -частицами возникало излучение, обладающее поразительным свойством выбивать протоны из вещества, содержащего водород, — парафина. Этот результат они объяснили γ -излучением бериллиевой мишени. Истинную сущность явления разгадал ученик Резерфорда английский физик Дж. Чедвик. Несколько дней напряженной работы привели к доказательству того, что при попадании α -частицы в ядро бериллия образуется углерод и нейтральная частица с массой протона. Новая частица была названа *нейтроном*. «И все же, — писал Чедвик в 1962 г., — я не могу избавиться от чувства, что должен был бы добиться цели быстрее. Я мог бы выдвинуть в свое оправдание ряд извиняющих обстоятельств: нехватку оборудования и т. д. Но, несмотря на все это, я должен признать, хотя бы для себя, что не смог достаточно глубоко продумать свойства нейтрона, особенно те из них, которые наиболее ясно свидетельствуют о его существовании. Это успокаивающая мысль. Утешаю себя тем, что всегда гораздо труднее сказать первое слово о предмете, каким бы очевидным он впоследствии не оказался, чем последнее слово. Это известная истина, и, может быть, она послужит мне извинением» [54, с. 10].

В 1932 г. советский физик-теоретик Д. Д. Иваненко впервые рассмотрел нейтрон как элементарную частицу. Предложенная Д. Д. Иваненко и В. Гейзенбергом протон-нейтронная модель ядра была подтверждена последующими экспериментами. Ядро состоит из N нейтронов и Z протонов. В ядре протоны и нейтроны связаны ядерными силами, радиус действия которых $\sim 1,5 \cdot 10^{-13}$ см. В нормальном состоянии вокруг ядра движется Z электронов, т. е. атом электрически нейтрален. Атомный номер элемента в таблице Менделеева равен числу протонов. Общее число нуклонов, т. е. протонов и нейтронов, называется *массовым числом*.

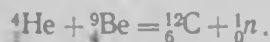
Элементы, ядра которых содержат одинаковое число протонов, называются *изотопами*. В таблице Менделеева они расположены в одной и той же клетке, отличаясь друг от друга массовым чис-

лом. К 1987 г. было известно 276 стабильных изотопов, принадлежащих природным элементам с $Z < 83$ и более 2000 радиоактивных изотопов, принадлежащих 110 природным и искусственно синтезированным элементам.

Взаимопревращения ядер записываются подобно химическим реакциям. В обозначении ${}^A_ZX$ X — символ элемента, A — массовое число, Z — атомный номер. Теперь мы можем записать реакцию расщепления азота (Резерфорд, 1919)



и образования нейтрона (Чедвик, 1932 г.)



Нейтрон устойчив только внутри ядра. Свободный нейтрон распадается со средним временем жизни $\tau = 15,3$ мин. Масса нейтрона $m_n = 1,675 \cdot 10^{-27}$ кг.

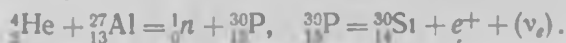
5. Открытие позитрона. В 1931 г. Дирак получил релятивистское уравнение, из которого следовало, что у электрона должен существовать «двойник» — *античастица*, имеющая ту же массу, но отличающаяся от него знаком заряда. *Позитрон* — элементарная частица с положительным зарядом, античастица по отношению к электрону. Позднее было показано, что у любой частицы может быть «двойник» — античастица. Столкновение частицы и античастицы должно приводить к *аннигиляции* — уничтожению этой пары с рождением двух или более других частиц.

Первая античастица — позитрон была обнаружена в 1932 г. К. Д. Андерсоном в космических лучах. Открытие позитрона имело фундаментальное значение, так как он не входил в состав «обычного» вещества на Земле. В 1933 г. было получено экспериментальное доказательство аннигиляции электрона и позитрона. *Антипротон* был открыт в 1955 г., а в 1956 г. — *антинейтрон*. Согласно современной теории могут существовать устойчивые конфигурации атомов и молекул, состоящие из античастиц, подобные существующим из обычных частиц. Материю, построенную из античастиц, называют *антивеществом*. В 1965 г. на ускорителе было получено первое антиядро — антидейтрон — связанное состояние антинейтрона и антипротона. Вопрос о распространенности антивещества во Вселенной остается открытым.

6. Искусственная радиоактивность. Открытие нейтрона привело в дальнейшем к возникновению нейтронной физики (нейтронная оптика, нейтронография, нейтронная спектроскопия) с ее уникальными методами исследования жидкостей и твердых тел. В практических приложениях нейтроны играют ключевую роль в ядерной энергетике, химическом анализе, геологической разведке и т. д.

В 1932 г. еще никто не мог предвидеть тех удивительных возможностей, которые откроет нейтронная физика для науки и техники, и ужасающих последствий, ныне угрожающих самому существованию человечества. Открытие нейтрона воспринималось как событие первостепенного значения: впервые в природе встретилась элементарная частица, не имеющая электрического заряда. Вскоре появились результаты первых экспериментов с нейтронами. Началось, по удачному выражению Б. М. Кедрова, «великое трехлетие» фундаментальных открытий [54, с. 18].

Упустив возможность открыть нейтрон, супруги Жоллио-Кюри с упорством продолжали свои опыты. Они установили, что алюминевая фольга в окошке, через которую пропускали α -лучи, становится радиоактивной, испуская не только нейтроны, но и позитроны. Однако их сообщение об открытии нейтронно-позитронного распада алюминия было встречено с недоверием. Вскоре Жоллио-Кюри поняли свою ошибку: реакция шла по схеме



Позитроны возникали вследствие распада радиоактивного фосфора. Но как убедить в этом химиков, если его период полураспада 2,5 мин? Пришлось изобрести экспресс-анализ фосфора. Нобелевская премия по химии (1935) подвела итог их настойчивости. Так была открыта искусственная радиоактивность, которая впоследствии приобрела особенно важное значение. Из общего числа 2000 радиоактивных изотопов лишь около 300 природного происхождения, а остальные получены в результате ядерных реакций.

7. Закон радиоактивного распада. Атомное ядро является квантовой системой многих сильно взаимодействующих нуклонов. Поэтому анализ механизма ядерных реакций — сложнейшая проблема, решением которой в наши дни занимаются большие группы экспериментаторов и теоретиков во всем мире. Наша задача существенно скромнее: мы найдем зависимость макроскопического числа $N(t)$ нераспавшихся ядер от времени, используя экспериментально измеряемую величину γ , называемую постоянной распада. Эта величина равна вероятности распада ядра в единицу времени.

Существенным свойством радиоактивности является независимость γ от времени. Поэтому вероятность распада одинакова как для ядра, «прожившего» год, так и для ядра, «прожившего» десять лет. Отметим важнейшие особенности статистического описания распадов: невозможно предсказать, какие именно ядра распадутся за время Δt , нельзя также предсказать, в какой момент времени распадется данное ядро.

Пусть $N(t)$ — функция, определяющая макроскопическое число одинаковых ядер в момент t , а ΔN — приращение, обусловленное распадом ядер ($\Delta N < 0$). Тогда, согласно определению

$$\nu = -\frac{1}{N} \frac{\Delta N}{\Delta t}.$$

Следовательно, количество ядер, распавшихся за интервал $(t, t + \Delta t)$, пропорционально числу нераспавшихся ядер

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = -\nu N. \quad (59.1)$$

Из этого уравнения находим

$$N(t) = N_0 e^{-\nu t}, \quad (59.2)$$

где N_0 — число ядер в момент времени $t=0$.

Величина ν называется активностью. Единица активности в СИ — беккерель (Бк), равный одному распаду в 1 с. Внесистемная единица кюри (Ки): 1 Ки = $3,7 \cdot 10^{10}$ Бк.

Скорость распада характеризуется периодом полураспада $T_{1/2}$ — промежутком времени, за который число радиоактивных ядер уменьшается в два раза. Полагая в (59.2) $t = T_{1/2}$, $N(T_{1/2}) = N_0/2$, получим $1 = 2 \exp(-\nu T_{1/2})$. Это соотношение позволяет исключить ν из (59.2):

$$N(t) = N_0 \left(\frac{1}{2} \right)^{t/T_{1/2}}. \quad (59.3)$$

Таким образом, число ядер уменьшается по закону геометрической прогрессии. Однако отдельные ядра могут существовать в течение длительного промежутка времени $t \gg T_{1/2}$. По этой причине полезно ввести среднее время жизни τ радиоактивного ядра. Учитывая, что величина $-\Delta N(t) > 0$ означает число ядер, «проживших» t с и распавшихся в интервале $(t, t + \Delta t)$, найдем среднее время жизни

$$\tau = - \int_0^{\infty} \frac{t dN}{N_0} = \int_0^{\infty} \nu t e^{-\nu t} dt = \nu^{-1}. \quad (59.4)$$

8. Типы распадов. Кроме давно известных α -, β - и γ -распадов советскими физиками Г. Н. Флеровым и К. А. Петржаком открыт в 1940 г. четвертый тип распада: самопроизвольное деление ядер урана на две примерно равные части. В 1970 г. обнаружили протонную радиоактивность: выброс протона из ядра. Шестой тип распада теоретический предсказал в 1960 г. советский физик В. И. Гольданский — это двухпротонная или двухнейтронная радиоактивность. Обнаружить этот вид распада еще не удалось [55].

9. Вековое равновесие. Все химические элементы на Земле образовались практически одновременно. Возраст наиболее старых пород оценивается в 4,6 млрд лет, или $1,5 \cdot 10^{17}$ с. Оценим период полураспада радиоактивного элемента, «дожившего» до

наших дней. Изотоп можно считать практически исчезнувшим, если с момента его рождения прошло десять периодов полураспада, так как его количество уменьшается в $2^{10}=1024$ раз. Следовательно, период полураспада должен быть не менее $4,5 \cdot 10^8$ лет. Поэтому первичными являются три самых долгоживущих элемента: торий ${}_{90}^{232}\text{Th}$ ($T_{1/2}=1,39 \cdot 10^{10}$ лет), уран ${}_{92}^{238}\text{U}$ ($T_{1/2}=4,51 \cdot 10^9$ лет) и уран ${}_{92}^{235}\text{U}$ ($T_{1/2}=7,1 \cdot 10^8$ лет).

А как удалось обнаружить радий, период полураспада которого $T_{1/2}(\text{Ra})=1620$ лет? Дело в том, что изотоп радия ${}_{86}^{226}\text{Ra}$ может образоваться как промежуточный продукт распада урана ${}_{92}^{238}\text{U}$. Вначале количество ядер радия растет, несмотря на их убыль, за счет распада. Затем наступает стационарное состояние: скорость образования ядер радия равна скорости их распада. В результате относительное содержание радия не меняется: в одной тонне урана содержится 0,36 г радия.

10. Острова стабильности [56, с. 18]. Ученых давно интересовал вопрос: почему в природе не встречаются трансурановые элементы, т. е. элементы с атомным номером $Z > 92$?

Время жизни известных нам трансурановых элементов убывает с увеличением Z . Поэтому все они к настоящему времени распались. Однако сейчас теоретики предсказывают существование «островов стабильности» в области неизвестных элементов ${}_{114}^{298}\text{X}$ и ${}_{140}^{304}\text{X}$. Поскольку поиски этих элементов не привели к успеху, то физики пытаются получить их искусственно в результате столкновения ускоренных тяжелых ионов.

§ 60. ФИЗИКА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

1. Физика элементарных частиц. Наиболее фундаментальная область исследований в физике всегда была связана со структурой материи и выяснением законов взаимодействия составляющих ее частиц. В современной физике термин «элементарная частица» употребляется в качестве общего названия частиц, не являющихся атомами и ядрами (исключение составляет ядро водорода — протон). Основная задача экспериментальных и теоретических исследований элементарных частиц заключается в том, чтобы открыть основные принципы, которые позволят понять, почему вещество, атомы, ядра, реакции частиц таковы, какими мы их наблюдаем. Сейчас общепризнано, что *изучение элементарных частиц представляет самый прямой, а возможно, единственный путь к пониманию фундаментальных законов Природы.*

В 50–60-е годы с помощью ускорителей открывались все новые и новые частицы с таким множеством свойств, что физики стали называть это смещение частиц «зоопарком». Порядок в «зоопарке» был наведен после открытия новых «паспортных данных» частиц, новых типов симметрии и математического анализа на основе *теории групп*. Создание гигантских ускорителей привело в

последние тридцать лет к открытию более трехсот новых частиц. В результате перед нами предстал такой же удивительный мир частиц, каким Менделееву казался мир атомов перед созданием периодической системы элементов. Всё это потребовало значительных усилий теоретиков в попытках построить единую теорию материи. Такая теория позволила бы описать физические явления в чрезвычайно широком диапазоне масштабов — от космологических до сверхмалых; объяснить преобладание вещества над антивеществом, дискретность масс и зарядов частиц, раскрыть тайну рождения и эволюции Вселенной и многие другие. Ряд теорий, предложенных в последнее время, не могут еще удовлетворить всем имеющимся экспериментальным данным. Однако общая идея «великого объединения» представляется настолько плодотворной, что все усилия направлены на то, чтобы создать единую теорию всех сил, включая теорию тяготения, и на ее основе построить полную картину мироздания.

В кратком очерке истории развития физики элементарных частиц невозможно рассказать о многочисленных и остроумных экспериментах, открывших множество новых частиц, и математическом аппарате, который опирается на самые современные разделы, изучаемые только в университетских курсах. Дополнительный материал читатель может найти в статьях и книгах [25, 57–63].

2. Распады и столкновения. Основную часть наших сведений об элементарных частицах получают из экспериментов по распаду и столкновениям частиц.

Изучение распадов позволяет сравнить теоретические расчеты времени жизни, углового и энергетического распределения продуктов реакции с экспериментальными данными.

Столкновения дают более богатую информацию о взаимодействии частиц. Основная динамическая характеристика реакций — *вероятность или сечение рассеяния*.

Пусть частица типа *a* падает на мишень, содержащую частицы типа *b*. Частицы *a* и *b* образуют *входной канал* реакции. В результате взаимодействия рождаются с разной степенью вероятности новые частицы, т. е. может существовать несколько *выходных каналов* реакции. Если в выходном канале появились те же частицы *a* и *b*, то реакция называется *упругим рассеянием*.

Рассмотрим определенный канал реакции, который обозначим буквой *f*. Представим, что частица *a* эффективно взаимодействует с частицей *b* в пределах диска площадью σ_f , расположенного перпендикулярно скорости $\vec{v}_a$. Полная площадь поверхности, закрытая дисками в объеме $Sv_a\Delta t$, равна $S_f = \sigma_f n_b Sv_a\Delta t$, где n_b — концентрация частиц мишени. Вероятность того, что частица испытает взаимодействие в течение интервала времени Δt ,

$$\Delta W_f = \frac{S_f}{S} = \sigma_f n_b v_a \Delta t.$$

Если с мишенью взаимодействует не одна частица, а пучок частиц типа a с концентрацией n_a , то число столкновений, происходящих в объеме ΔV в течение времени Δt , равно $\Delta n = \sigma_1 v_a n_a n_b \Delta t \Delta V$. Величина σ_1 , называемая *сечением рассеяния*, определяется из эксперимента:

$$\sigma_1 = \frac{1}{v_a n_a n_b} \frac{\Delta n}{\Delta t \cdot \Delta V} \quad (60.1)$$

Вычисление сечений различных реакций σ_1 — основная динамическая проблема физики элементарных частиц. Аналогичным путем можно определить сечение рассеяния при рождении других частиц. Полное сечение рассеяния равно сумме сечений рассеяния всех возможных реакций.

Множественные процессы. При возрастании энергии взаимодействующих частиц открываются все новые и новые каналы, значительно увеличивается число вторичных частиц, возникших в результате столкновения. При энергиях частиц, значительно больших $2m_p c^2$ (m_p — масса протона), процесс взаимодействия называется *глубоко неупругим рассеянием*. При этом возникают струи — направленные пучки огромного числа частиц. Разнообразие возможных реакций и сложность наблюдения большого числа частиц затрудняют теоретический анализ опытных данных. В этих условиях оказался весьма плодотворным новый метод исследования неупругих процессов, предложенный в 1967 г. советским физиком-теоретиком А. А. Логуновым. Основа метода состоит в том, что выделяется одна или несколько определенных частиц, образующихся в реакции, а по вероятностям рождения всех остальных частиц производится суммирование. Получаемые таким образом сечения называют *инклюзивными*.

3. Релятивистская кинематика. Одним из требований, которое следует наложить на теорию, используемую для описания реакций с участием атомов, ядер и элементарных частиц, должна быть ее совместность со специальной теорией относительности. В настоящее время динамические свойства таких реакций все еще остаются в значительной мере неизвестными, поскольку не существует законченной теории взаимодействий элементарных частиц. Поэтому рассмотрим вначале те аспекты реакций, которые полностью характеризуются значениями энергии и импульса частиц. Эта область физики называется *релятивистской кинематикой*. В ее основе лежат теория относительности и законы сохранения энергии и импульса замкнутой системы частиц. Знание релятивистской кинематики крайне необходимо для правильной интерпретации экспериментальных данных и продвижения вперед на пути к построению динамической теории реакций [58].

А. Распад частицы. Пусть частица массой M , имеющая энергию E и импульс p , распадается на несколько частиц с массами

$m_1, m_2, \dots$ Закон сохранения энергии и импульса в этом процессе можно выразить равенствами

$$E = E_1 + E_2 + \dots, \quad \vec{p} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \dots \quad (60.2)$$

Очевидно, распад частицы проще всего выглядит в системе отсчета, в которой наблюдатель движется со скоростью, равной скорости частицы. В его системе отсчета энергия и импульс частицы $E_0 = Mc^2$, $\vec{p}_0 = 0$. Поэтому вместо (60.2) получим

$$Mc^2 = E_{10} + E_{20} + \dots = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_{10}^2 c^2} + \sqrt{m_2^2 c^4 + p_{20}^2 c^2} + \dots,$$

$$0 = \vec{p}_{10} + \vec{p}_{20} + \dots$$

Индекс «ноль» отмечает энергии и импульсы в системе отсчета, связанной с частицей. Из этих уравнений следует, что распад возможен при условии

$$M > m_1 + m_2 + \dots \quad (60.3)$$

Поэтому вся энергия частицы $E = Mc^2 + K$, даже будучи сколь угодно большой величиной, не может полностью перейти в энергию родившихся частиц. Только часть этой энергии, равная энергии покоя Mc^2 , участвуя в процессе распада, расходуется на создание ограниченного числа новых частиц. Положение меняется, если частицы сталкиваются.

ПРИМЕР 60.1. Покажем, что законы сохранения энергии и импульса запрещают процесс излучения фотона свободной частицей.

Пусть $\vec{p}, \vec{p}'$ — импульсы электрона до и после излучения, $(h\nu/c)\vec{n}$ — импульс фотона, $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении излучения фотона. Из (60.2) находим уравнение

$$(E - h\nu)^2 - \left(\vec{p} - \frac{h\nu}{c} \vec{n} \right)^2 c^2 = E'^2 - \vec{p}'^2 c^2 = m^2 c^4,$$

из которого следует $\vec{c} \vec{n} = E$. Это соотношение эквивалентно равенству $\cos \alpha = c/v$, где α угол между векторами $\vec{n}$ и $\vec{p}$. Поскольку $c > v$, то $\cos \alpha > 1$. Мы приходим к выводу, что в вакууме свободная частица сохраняет импульс и энергию.

В. Столкновения частиц. В настоящее время большую часть информации о структуре частиц и природе сил, действующих между ними, получают с помощью ускорителей в результате анализа процесса столкновения. Обычно этот процесс записывают в виде $a + b \rightarrow c + d + \dots$. Здесь a и b — начальные частицы, $c, d, \dots$ — частицы, образующиеся после столкновения. При упругом столкновении внутреннее состояние частиц не меняется: $a + b \rightarrow a + b$. При неупругих столкновениях возможно рождение новых частиц.

Законь сохранения энергии и импульса

$$E_a + E_b = E_c + E_d + \dots, \quad \vec{p}_a + \vec{p}_b = \vec{p}_c + \vec{p}_d + \dots \quad (60.4)$$

выполняются независимо от того, является ли столкновение упругим или неупругим. Следовательно, приращения импульса и энергии в процессе столкновения равны нулю.

Наша задача — найти условия, при которых может осуществиться рассматриваемая реакция. Мы сведем задачу к уже решенной, если, сопоставив (60.4) и (60.2), будем считать, что происходит распад фиктивной частицы с энергией $E_a + E_b$ и импульсом $\vec{p}_a + \vec{p}_b$. Фиктивная частица движется со скоростью (55.27), ее масса

$$M = \frac{1}{c^2} \sqrt{(E_a + E_b)^2 - (\vec{p}_a + \vec{p}_b)^2 c^2}. \quad (60.5)$$

Ответ на вопрос, как дальше распорядится природа энергией покоя Mc^2 , зависит от вероятности рождения групп различных частиц. Разумеется, что при этом должны выполняться все законы сохранения, характерные для данного типа реакции. Допустим, что разрешена реакция с образованием частиц, массы покоя которых равны $m_c, m_d, \dots$. Тогда должно выполняться условие (60.3). Рассмотрим два случая.

1. *Рассеяние на неподвижной мишени:* $\vec{p}_b = 0, E_b = m_b c^2$. Из (60.3), (60.5) находим

$$M = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + 2 \frac{E_a}{c^2} m_b} \geq M_x, \quad M_x = m_c + m_d + \dots$$

Если представить E_a в виде суммы энергии покоя и кинетической энергии: $E_a = m_a c^2 + K_a$, то это условие примет вид

$$\sqrt{(m_a + m_b)^2 + 2 \frac{K_a}{c^2} m_b} \geq m_c + m_d + \dots \quad (60.6)$$

Законь сохранения приводят к наличию «порога» реакции. Из (60.6) находим $K_a > K_{a \text{ пор}}$, где

$$K_{a \text{ пор}} = \frac{c^2}{2m_b} (M_x + m_a + m_b) (M_x - m_a - m_b) \quad (60.7)$$

— пороговая энергия, т. е. наименьшее значение энергии K_a , при котором рождаются частицы массой M_x . При $K_a = K_{a \text{ пор}}$ все родившиеся частицы неподвижны в системе отсчета, движущейся со скоростью (55.27).

2. *Взаимодействие встречных пучков.* Рассмотрим столкновение двух пучков одинаковых частиц, импульсы которых удовлет-

воряют условию $\vec{p}_a + \vec{p}_b = 0$. В этом случае лабораторная система отсчета совпадает с системой покоя. Полагая $m_a = m_b = m$, $E = mc^2 + K$, получим из (60.3), (60.5) условие

$$2mc^2 + 2K > M_x c^2.$$

Пороговая энергия реакции

$$K_{\text{пор}} = \left(\frac{1}{2} M_x - m \right) c^2. \quad (60.8)$$

Условия (60.7), (60.8) позволяют понять, почему строят громадные ускорители частиц: появляется возможность производить новые частицы — более тяжелые, чем сталкивающиеся частицы и в большем количестве. С определенной вероятностью может идти также процесс, не сопровождающийся рождением новых частиц, — упругое рассеяние.

ПРИМЕР 60.2. Столкновение протонов. 1. С какой максимальной массой может родиться частица Z в реакции $p + p \rightarrow p + p + Z$?

а) При столкновении с неподвижной мишенью из (60.6) находим

$$M_Z = \sqrt{2m_p^2 + 2 \cdot \frac{K_p}{c^2} m_p} - 2m_p. \quad (1)$$

Часть энергии покоя Mc^2 , равная $2m_p c^2$, будет затрачена на возрождение двух протонов, остаток — на рождение частицы Z . Для Серпуховского ускорителя (1967) $K_p = 76$ ГэВ. Подставляя в (1) $m_p = 0,938$ ГэВ, найдем $M_Z = 11,25$ ГэВ. Для ускорителя в Батавии (США, 1983) $K_p = 800$ ГэВ, $M_Z = 37$ ГэВ.

б) При столкновении встречных пучков $M_Z = 2K/c^2$, т. е. вся кинетическая энергия пучков идет на образование новых частиц. Самая крупная ускорительно-накопительная установка создана в 1976 г. Европейским центром ядерных исследований (ЦЕРН) вблизи Женевы. Энергия каждого протон-антипротонного пучка $K = 270$ ГэВ, $M_Z = 540$ ГэВ.

2. Найти пороговую энергию в реакции рождения протон — антипротон: $p + p \rightarrow 3p + \bar{p}$.

Если мишень неподвижна, то из (60.7) находим $K_{\text{а пор}} = 6m_p c^2 = 5,628$ ГэВ. Для реакции на встречных пучках из (60.8) следует $K_{\text{пор}} = mc^2 = 0,938$ ГэВ.

ПРИМЕР 60.3. Сравним энергию K частиц в ускорителях с неподвижной мишенью и энергию пучка K_0 в ускорителе на встречных пучках при условии, что они имеют равные возможности производить новые частицы.

Если массы частиц $m_a = m_b = m$ одинаковы, то полезная энергия, которая может участвовать в реакции, согласно (60.6), равна

$$\Delta E = \sqrt{4m^2 c^4 + 2K m c^2} - 2m c^2.$$

Аналогичная величина для ускорителя на встречных пучках $\Delta E = 2K_0$. Приравнивая эти выражения, находим

$$K = 4K_0 + \frac{2K_0^2}{mc^2}.$$

Для нерелятивистских частиц ($K_0 \ll mc^2$) выигрыш незначителен: $K \approx 4K_0$. В релятивистском случае $K_0 \gg mc^2$ получаем существенное увеличение эквивалентной энергии: $K \approx 2K_0/mc^2$.

Для суперпротонного синхротрона (SPS) в ЦЕРНе $K_0 = 270$ ГэВ, $K = 156\,000$ ГэВ. Самая крупная накопительная установка со встречными электрон-позитронными пучками PETRA (Positron-Electron Tandem Ring Accelerator) создана в Гамбурге (ФРГ) в 1978 г. Недавно на ней были получены пучки с энергиями $K_0 = 45$ ГэВ [64]. Подставляя $mc^2 = 0,511$ МэВ, находим, что по своим возможностям она превосходит обычный ускоритель на энергию K , равную 8 млн ГэВ! Самый крупный в мире линейный ускоритель электронов Стэнфордского университета (США), построенный в 1966 г., позволяет получить электроны с энергией $K = 31,4$ ГэВ.

Следует отметить, что обычные ускорители и ускорители на встречных пучках взаимно дополняют друг друга, поскольку неподвижные мишени позволяют получить более разнообразные типы вторичных частиц.

4. Спин элементарных частиц. К 1932 г. были открыты четыре типа частиц: электрон, протон, фотон и нейтрон. Одновременно были сделаны первые шаги в классификации взаимодействий частиц и их характеристик. Общими характеристиками для всех частиц являются масса m , заряд Q и спин J (от англ. *spin* — вертеться). Поясним понятие спин, которое вошло в физику в 1925 г.

Ориентацию траектории частицы в пространстве можно задать вектором $M = [r \cdot p]$, где r — радиус-вектор, p — импульс. Эта величина называется *моментом импульса*; ее размерность совпадает с размерностью постоянной Планка. При анализе спектров атома водорода оказалось, что электрон обладает *собственным моментом импульса, не связанным с его движением в пространстве*. В дальнейшем было доказано, что каждая элементарная частица обладает собственным моментом импульса. Это свойство частиц является специфическим квантовым и поэтому принципиально не допускает классической интерпретации.

Величина спинового момента измеряется в единицах $\hbar$ и равна $J\hbar$, где J — целое или полуцелое число, называемое *спиновым квантовым числом*, или просто спином. Более того, квантуется не только величина спина, но также его направление или ориентация. Число возможных проекций вектора спинового момента на любую фиксированную ось может принимать $2J+1$ значений. Таким образом, частица со спином $J = 1/2$ может иметь два спино-

вых состояния, а у частицы со спином $J=1$ возможны только три ориентации. Частицы с полуцелым спином называют *фермионами*, а с целым спином — *бозонами*.

Спин электрона, протона, нейтрона и их античастиц $J=1/2$, спин фотона $J=1$.

5. Гипотеза нейтрино и его открытие. Электроны, образующиеся при β -распаде, должны согласно закону сохранения энергии обладать определенным значением энергии Δmc^2 , где Δm — разность масс начального и конечного ядер. Однако в эксперименте наблюдались электроны, энергия которых принимала значения от нулевого до Δmc^2 . В связи с этим предлагалось отказаться от закона сохранения энергии в микропроцессах. Эту точку зрения в 1932 г. поддержал даже Н. Бор. Однако ранее в 1930 г. В. Паули в частном сообщении выдвинул гипотезу об излучении одновременно с электроном нейтральной частицы с малой массой и спином $J=1/2$. Итальянский физик Э. Ферми назвал ее нейтрино (от итал. *neutrino* — маленькое, нейтральное). Распределение энергии между нейтрино и электроном приводит к наблюдаемому спектру энергий электрона. Известный физик Б. М. Понтекоров в своих воспоминаниях о развитии нейтринной физики пишет: «Трудно найти пример, где слово «интуиция» так соответствовало бы характеру научного достижения, как в случае предсказания нейтрино Вольфгангом Паули. Во-первых, 50 лет назад были известны только две элементарные частицы — электрон и протон, и даже идея, что для лучшего понимания природы необходимо ввести новую частицу, была сама по себе революционной. Как это отличается от положения в наши дни, когда по малейшему поводу масса людей готова изобрести любое количество частиц!..» [65].

Последовательная теория β -распада была создана Э. Ферми в 1934 г. Например, распад нейтрона представляет собой процесс

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e, \quad (60.9)$$

где $\bar{\nu}_e$ — электронное антинейтрино.

Нейтрино очень слабо взаимодействует с веществом. Это позволяет ему проникать на большие расстояния и создает трудности при регистрации. Нейтрино можно детектировать только в большой массе вещества. В этом случае увеличивается вероятность взаимодействия нейтрино с веществом. Прямым доказательством существования нейтрино является наблюдение в 1955–1956 гг. обратного β -распада ($\bar{\nu}_e + p \rightarrow n + e^+$). Источником нейтрино с энергией 4 МэВ служил ядерный реактор, в котором происходит β -распад осколков деления ^{235}U и ^{239}Pu .

Совсем недавно физики предложили использовать нейтрино для зондирования Земли с целью проведения геологических и геофизических исследований [66]. Пучок нейтрино, пересекающий

нашу планету по различным хордам, позволит произвести томографическое исследование распределения веществ и даст информацию о месторождениях полезных ископаемых.

Нейтринная астрономия. Самый близкий естественный источник нейтрино — Солнце. Измерение потока нейтрино позволило получить новые сведения об основных термоядерных процессах, происходящих в его недрах. В результате реакций



возникает огромный поток нейтрино (в течение 1 с человеческое тело пронизывает 10^{14} нейтрино).

Глубоководный нейтринный телескоп. Известно, что появление сначала радиоастрономии, а затем рентгеновской и гамма-астрономии привело к открытию радиогалактик, квазаров и пульсаров. Детектирование космических нейтрино могло бы принести новые данные о широком круге астрофизических явлений.

Несколько лет назад группа физиков предложила детектировать нейтрино космического происхождения, используя массу океанской воды. Взаимодействие нейтрино с молекулой воды вызывает каскад заряженных частиц, обладающих значительными энергиями. В воде эти частицы испускают характерный для черенковского излучения голубой свет. 2000 приемников, расположенных в одном кубическом километре воды на глубине 5 км, регистрируют слабые вспышки, сигналы от которых будут поступать в расположенный на берегу компьютер. В результате шестилетних поисков местом для установки детектора были выбраны Гавайские острова. Здесь на глубине 4,5 км вспышка голубого света затухала на неожиданно большом расстоянии ~ 50 м [67].

Масса нейтрино. До сих пор неизвестно точное значение массы нейтрино. Во всех расчетах предполагается, что $m_\nu = 0$. В уникальной работе, выполненной в Институте теоретической и экспериментальной физики (СССР, 1980), получена оценка массы ν_e в интервале 14–46 эВ. Наличие массы у нейтрино ведет к фундаментальным космологическим следствиям. В частности, это могло бы объяснить природу «темного вещества» в галактиках (на существование «скрытой массы» указывают опытные данные) и некоторые другие астрофизические «загадки».

6. Космические лучи. До создания крупных ускорителей значительное число новых элементарных частиц было обнаружено при изучении *космических лучей* — потока частиц, преимущественно протонов (более 90%), приходящих на Землю из космического пространства. Лучи галактического происхождения имеют уникально большие энергии — до 10^{21} эВ. Солнечные космические лучи наблюдаются эпизодически — от одного до 10 событий в год. В результате взаимодействия с ядрами атомов воздуха рождается множество вторичных частиц, среди которых главную роль играют π -мезоны.

Космические ливни. Нейтральный π^0 -мезон распадается на два γ -кванта, каждый из которых в поле ядра рождает электрон-позитронную пару ($\gamma \rightarrow e^+ + e^-$). Далее электрон и позитрон, сталкиваясь с ядрами, образуют новые γ -кванты в процессе «тормозного излучения»: $e^\pm + Ze \rightarrow e^\pm + Ze + \gamma$. Вторичные γ -кванты вновь генерируют e^+e^- -пары и т. д. — число пар и квантов увеличивается в геометрической прогрессии. Образуется *атмосферный «ливень»* частиц. Процесс прекращается, когда энергия отдельных γ -квантов становится меньше $2m_e c^2 \approx 1 \text{ МэВ}$. Если исходный квант обладает энергией 10^{14} эВ, то ливень может достичь поверхности Земли: он состоит из 10^6 – 10^9 e^+e^- -пар и γ -квантов, распределенных по площади, достигающей 100–1000 м². Ливни, возбуждаемые γ -лучами меньших энергий, не доходят до Земли. Однако частицы генерируют вспышки черенковского излучения, которое можно регистрировать с поверхности Земли.

Первые фотографии космических ливней были получены в 1933 г. «Пожалуй, ни одно открытие, ни одна новая идея на моей памяти, — пишет советский физик-теоретик Д. Д. Иваненко, — не подействовали на нас подобным образом. Стало, наконец, ясно, что физика вступает в новую релятивистско-квантовую эпоху элементарных частиц... В Ленинградском физико-техническом институте на несколько дней чуть ли не приостановилась работа ряда отделов, люди ходили и дискутировали, завороченные новыми перспективами» [54, с. 30].

Визуальное наблюдение космических лучей. Интересно, что в космических полетах космонавты видели «световые точки», «молнии», «двойные точки», даже когда их глаза были закрыты. Причина вспышек — возбуждение сетчатки глаза космическими лучами, проникшими сквозь корпус космического корабля. Часть вспышек могла быть обусловлена черенковским излучением частиц в стекловидном теле глаза. Аналогичные опыты провели ученые: поместив свои головы в поток ионов от ускорителя, наблюдали световые вспышки [68].

Космические γ -всплески. Приблизительно раз в сутки в непредсказуемой области неба происходят всплески интенсивного γ -излучения, впервые обнаруженные с помощью спутников. Длительность импульса от 1 с до 10 с. Однако известны и более короткие всплески. 5 марта 1979 г. был зарегистрирован сверхмощный импульс длительностью $\tau = 2 \cdot 10^{-4}$ с. Так как источник размером $\sim D$ не может существенно изменить яркость за время, меньшее, чем D/c , то излучающий объект, по-видимому, является нейтронной звездой диаметром $D \sim c\tau = 60$ км.

7. Мюоны и пионы. В 1937 г. в космических лучах была обнаружена частица массой, равной 207 массам электрона. Сейчас ее называют мюоном. Первоначальное название μ -мезон (от греч. *mesos* — средний) обусловлено значением массы — промежуточной между массой электрона и протона. Спин мюона $J = 1/2$.

Мюоны существуют в двух разновидностях: отрицательно заряженная частица μ^- и ее положительно заряженная античастица μ^+ .

Мюоны нестабильны; их распад происходит по схеме

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu, \quad \mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu, \quad (60.11)$$

где $\nu_{e,\mu}$ ($\bar{\nu}_{e,\mu}$) — электронное и мюонное нейтрино (антинейтрино). Время жизни мюона $\tau_\mu \approx 2,2 \cdot 10^{-6}$ с: В веществе μ^- «живет» меньше: потеряв энергию в столкновениях, он замедляется, притягивается ядром атома и образует *мюонный атом*. Захват мюона сопровождается выбросом одного из атомных электронов.

В 1947 г. в фотоэмульсии, облученной космическими лучами, были открыты заряженные частицы, получившие название *пионов* (или π -мезонов). π^+ и π^- являются частицей и античастицей по отношению друг к другу. Масса пионов $m_{\pi^\pm} = 0,14$ ГэВ. Они распадаются по схеме

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu, \quad \pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (60.12)$$

за время $\tau_\pi \approx 2,6 \cdot 10^{-8}$ с. В 1950 г. были обнаружены нейтральные π^0 -мезоны массой $m_{\pi^0} = 0,135$ ГэВ, которые распадались на два γ -кванта за время $\tau_{\pi^0} \approx 8,3 \cdot 10^{-15}$ с. Спин пионов $J=0$. π^0 рождался в столкновениях γ -квантов и протонов с ядрами.

Пионы сильно взаимодействуют с ядрами, вызывая, как правило, их расщепление. Сейчас для изучения взаимодействия пионов с веществом созданы «*мезонные фабрики*». Основой «фабрики» является сильноточный протонный ускоритель. Мезоны и нейтрино рождаются при взаимодействии протонов с ядрами мишени. Благодаря большому среднему току (до 1 МА) интенсивность пучка достигает 10^{10} пионов в 1 с.

ЗАДАЧА 60.4. Найти порог реакции $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + \pi^- + \pi^+ + p$ при рассеянии π^+ -мезона на неподвижном протоне.

Решение. Полагая в (60.7) $M_x = m_p + 3m_\pi$, получим

$$K_{a \text{ пор}} = 2m_\pi c^2 \left(1 + 2 \frac{m_\pi}{m_p} \right) = 0,36 \text{ ГэВ.}$$

ЗАДАЧА 60.5. Найти пороговую энергию фоторождения π^0 -мезона на неподвижном протоне.

$$\text{Ответ. } h\nu = m_{\pi^0} \left(1 + \frac{m_{\pi^0}}{2m_p} \right) c^2 = 0,145 \text{ ГэВ.}$$

8. Резонансы. В 60-х годах на ускорителях было обнаружено большое число нестабильных частиц, получивших название резонансов. Они распадаются за время $\tau \approx 10^{-22} - 10^{-24}$ с. Как же обнаружить существование такой частицы, если она «проходит»

расстояние $\sigma \approx 10^{-12} - 10^{-14}$ см, порядка размеров ядра, не оставляя никаких следов?

Первый резонанс был обнаружен в 1951–1953 гг. при упругом рассеянии заряженных пионов на неподвижной протонной мишени. Он проявился в максимуме зависимости сечения рассеяния $\pi^+ + p \rightarrow \pi^+ + p$ от инвариантной массы $\pi^+ p$ -системы при значении

$$mc^2 = \sqrt{(E_\pi + m_p c^2)^2 - p_\pi^2 c^2} = 1,238 \text{ ГэВ},$$

соответствующем $K_\pi = 0,195$ ГэВ. Физический смысл резонансного пика на кривой рис. 60.1 заключается в том, что при $m = 1,238$ ГэВ вероятность образования слабосвязанной $\pi^+ p$ -системы максимальна. Поэтому резонансный пик свидетельствует о существовании нестабильной частицы, называемой резонансом.

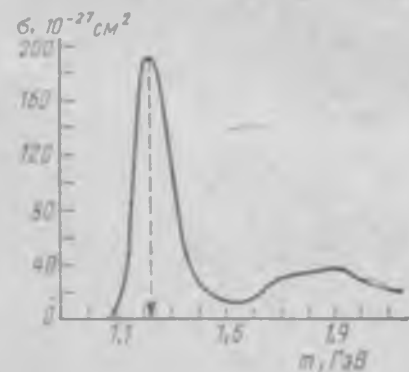


Рис. 60.1

Ширина резонансной кривой на половине максимальной высоты $\Gamma = 116$ МэВ. Это означает, что масса резонанса, т. е. системы, состоящей из пиона и протона, не является постоянной величиной. Все дело в том, что резонанс «живет» так недолго, что его масса не успевает установиться. Ширина Γ резонансного максимума является мерой неопределенности энергии возбужденного состояния $\Delta E = \Gamma$. Прин-

цип неопределенности (56.8) позволяет оценить длительность существования резонанса от момента возникновения до момента распада $\Delta t \sim \hbar/\Gamma = 5,7 \cdot 10^{-24}$ с. На практике оказывается, что доступные детектированию резонансы должны иметь ширину на порядок меньше, чем масса. Тот же резонанс может появиться не только в упругом рассеянии, но и в конечном состоянии целого ряда сложных реакций. Так, в конечных продуктах реакции



можно обнаружить $\pi^+ p$ - и $\pi^- p$ -резонансы и новый $\pi^+ \pi^- p$ -резонанс массой 1,518 ГэВ.

В настоящее время известно более 300 резонансов, возникающих в результате сильного взаимодействия.

9. **Классы взаимодействий.** Различные процессы при существующих энергиях заметно отличаются интенсивностью взаимодействия. В настоящее время все многообразие взаимодействия материи относят к четырем типам: сильному, электромагнитному, слабому и гравитационному.

Сильное взаимодействие приводит к связи нейтронов и протонов в атомном ядре. Согласно существующим теориям сила, действующая на каждую из двух частиц, возникает при *обмене* несколькими другими частицами, в частности π -мезонами. Поскольку эти частицы ненаблюдаемы в процессе обмена, то они находятся, как говорят, в виртуальном состоянии. Гипотезу обмена предложил в 1935 г. японский физик Х. Юкава (1907–1981). Возникновение виртуальных π -мезонов можно обосновать, исходя из соотношения неопределенностей (56.8): в течение промежутка времени Δt будет существовать пион с энергией $\Delta E \sim m_\pi c^2$. За время Δt он сможет пройти путь не меньший, чем $c\Delta t$. Следовательно, радиус действия ядерных сил, возникающих при обмене пионом, $R \sim \hbar/m_\pi c$.

Сечения рассеяния реакций, в которых проявляется сильное взаимодействие, $\sigma = 10^{-23} - 10^{-27}$ см². По порядку величины σ совпадает с поперечным сечением ядер.

Электромагнитное взаимодействие проявляется в образовании атомов и молекул. Это взаимодействие обусловлено наличием у частиц заряда. Переносчиком взаимодействия является фотон. Сечения электромагнитных процессов $\sigma = 10^{-27} - 10^{-32}$ см².

Следующее по интенсивности **слабое взаимодействие** приводит к процессам с участием нейтрино и антинейтрино: β -распад ядер, реакции (60.11), (60.12). Характерная особенность — большое время протекания процессов слабого взаимодействия. Нейтрон, например, распадается ($n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$) примерно за 1000 с. Сечения слабых процессов $\sigma = 10^{-38} - 10^{-42}$ см². Переносчиком слабых взаимодействий является положительно заряженный W^+ -бозон, отрицательно заряженный W^- -бозон и нейтральный Z^0 -бозон.

Открытие в 1983 г. W^- - и Z^0 -бозонов было величайшим достижением экспериментаторов и теоретиков, предсказавших их существование. Оно подтвердило теоретические модели, исходящие из представлений о единой природе слабого и электромагнитного взаимодействия, называемого теперь **электрослабым**.

Гравитационное взаимодействие — четвертый и пока последний тип взаимодействий — несущественно на ядерных расстояниях $\sim 10^{-13}$ см. Однако оно может стать определяющим на расстояниях $\sim 10^{-33}$ см.

10. Новые квантовые числа. При обобщении экспериментальных данных было установлено, что, кроме закона сохранения электрического заряда, можно ввести законы сохранения для новых квантовых чисел. В первую очередь они должны проявиться в реакциях сильно взаимодействующих частиц.

Изотопический спин. Разность масс нейтрона и протона составляет всего 0,14% массы протона. В 1932 г. Гейзенберг обратил внимание на то, что при сильном взаимодействии протона и нейтрона различия между ними становятся несущественными: замена протона нейтроном не изменяет величины силы взаимодей-

ствия. Это свойство, свидетельствующее о *зарядовой независимости* ядерных сил, получило название *изотопической инвариантности*. Протон и нейтрон проявляют себя как различные состояния одной и той же частицы — *нуклона*; они образуют изотопический мультиплет.

Для математического описания двух состояний нуклона вводят вектор *изотопического спина* $\vec{T}$ (кратко — *изоспин*), величина которого $T=1/2$ является новым квантовым числом. Число возможных проекций изоспина на некоторую ось в абстрактном изотопическом пространстве равно $2T+1$. Значение проекции $T_3=1/2$ соответствует протону, для нейтрона $T_3=-1/2$.

Обобщение этих идей привело к установлению симметрий, составляющих в настоящее время основу классификации частиц. Изотопическая инвариантность пион-нуклонного взаимодействия означает, что изоспин пионов $T=1$; они существуют в трех ($2T+1=3$) различных состояниях: π^+ ($T_3=1$), π^0 ($T_3=0$), π^- ($T_3=-1$).

В процессах, обусловленных сильными взаимодействиями, сохраняется проекция T_3 изотопического спина.

Барионный заряд. Для объяснения стабильности протона и сохранения числа нуклонов в реакциях ввели понятие барионного заряда. Стали считать, что нуклон имеет барионный (от греч. *barys* — тяжелый) заряд $B=1$, а антинуклон — заряд $B=-1$. Барионный заряд мезонов $B=0$. Электрический заряд Q нуклонов и мезонов можно записать в виде

$$Q = \frac{1}{2}B + T_3. \quad (60.14)$$

Частицы с барионным зарядом $B=1$ получили название *барионов*. Во всех процессах выполняется закон сохранения барионного заряда.

11. Новые барионы и мезоны. В начале 50-х годов все чаще стали появляться сообщения об открытии новых частиц с необычными свойствами, существование которых ранее не предсказывали. Первой из вновь открытых частиц был лямбда (Λ^0)-гиперон. Его масса $m=1,116$ ГэВ больше нуклонной — отсюда название (от греч. *hyper* — выше). Λ^0 -гиперон образуется в реакции

$$\pi^- + p \rightarrow \Lambda^0 + K^0. \quad (60.15)$$

Ему следует приписать барионный заряд $B=1$. Одновременно был обнаружен K^0 -мезон. Эти частицы распадаются по схеме

$$\Lambda^0 \rightarrow p + \pi^-, \quad K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-. \quad (60.16)$$

В дальнейшем были обнаружены $\Sigma^\pm$ -гипероны, а также $K^\pm$ -мезоны. Об их существовании удалось узнать из наблюдений распадов

$$\Sigma^- \rightarrow n + \pi^-, \quad K^- \rightarrow \pi^+ + \pi^- \quad (60.17)$$

в реакциях

$$\pi^- + p \rightarrow \Sigma^- + K^+, \quad \pi^+ + p \rightarrow \Sigma^+ + K^+. \quad (60.18)$$

Рождение нового кси-минус-гиперона (Ξ^-) сопровождалось появлением двух K -мезонов

$$\pi^- + p \rightarrow \Xi^- + K^+ + K^0, \quad \Xi^- \rightarrow \Lambda^0 + \pi^-. \quad (60.19)$$

Частицы Λ , Σ , Ξ имеют барнионный заряд $B=1$.

Рождение новых частиц связано с сильными взаимодействиями. Поэтому время распада должно быть $\sim 10^{-23}$ с. Однако выяснилось, что они живут «значительно» дольше — около 10^{-10} с. Поэтому физики стали называть новые частицы «странными». Было замечено, что в реакциях (60.15) и (60.18) странные частицы рождаются парами, однако в реакции (60.19) появляются три странные частицы. В 1953 г. в эту довольно запутанную картину была внесена ясность. Японский физик К. Нишиджима и независимо американский физик М. Гелл-Манн ввели *новое квантовое число — странность*, являющееся сейчас одной из основных характеристик элементарных частиц. Все странные частицы рождаются при участии сильных взаимодействий и живут в масштабе ядерного времени «почти вечно». Это означает, что в сильных взаимодействиях должен выполняться закон сохранения странности. Λ - и Σ -гиперонам приписали странность $S=1$, K^+ , K^0 -мезоны имеют странность $S=1$, K^- -мезон обладает странностью $S=-1$. Нуклоны и Λ -мезоны не принадлежат к странным частицам, для них $S=0$. Заряд частиц определяется выражением

$$Q = \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}S + T_3 \quad (60.20)$$

обобщающим формулу (60.14). Если ввести еще одно квантовое число — гиперзаряд $Y=B+S$, то получим соотношение $Q=\frac{1}{2}Y+T_3$.

Схема Гелл-Манна и Нишиджима предсказывала существование новых частиц. Например, Σ^+ - и Σ^- -гипероны, имеющие почти одинаковые массы, не могут образовать дублет с $T=\frac{1}{2}$. В этом случае соотношение (60.20) нарушается. Если $T=1$, то должна существовать нейтральная частица Σ^0 . Позже в 1956 г. были предприняты поиски Σ^0 -гиперона, и он был обнаружен в результате анализа реакции (60.15). Оказалось, что реакция идет по схеме $\pi^- + p \rightarrow \Sigma^0 + K^0$, а затем происходит почти мгновенный распад $\Sigma^0 \rightarrow \Lambda^0 + \gamma$ с сохранением странности. В распадах (60.16), (60.17), порождаемых слабыми взаимодействиями, странность не сохраняется. Аналогичным образом можно показать, что K^0 -, K^+ - и K^- -мезоны не могут образовать триплета с $T=1$. Иначе говоря,

теория предсказывает существование двух дублетов частиц K^0 , K^+ и K^- , K^0 с $T=1/2$.

12. Кварковая модель строения вещества. Частицы, участвующие в реакциях, обусловленных сильным взаимодействием, называются собирательным термином — *адроны* (от греч. *hadros* — большой, сильный). Адроны включают две большие группы частиц: барионы и мезоны. Адроны участвуют и в электрослабых взаимодействиях. Но существуют частицы, которые принимают участие только в электрослабых процессах. К ним относятся электрон, мюон, электронное и мюонное нейтрино. Эти частицы получили название *лептонов* (от греч. *leptos* — легкий). В 1975 г. в это семейство вошли «тяжелый» тау-мезон (τ) массой 1,8 ГэВ и тау-нейтрино.

Введение странности как нового квантового числа позволило из хаоса частиц получить упорядоченные группы — *супермультиплеты* в пространстве квантовых чисел. В таблицах 1 и 2 отраже-

Таблица 1

T_3 Y	-1	-1/2	0	1/2	1
1		n		p	
0	Σ^-		Λ^0, Σ^0		Σ^+
-1		Ξ^-		Ξ^0	

Таблица 2

T_3 Y	-1	-1/2	0	1/2	1
1		K^0		K^+	
0	π^-		π^0, η		π^+
-1		K^-		$\bar{K}^0$	

ны экспериментально наблюдаемые свойства *октетов барионов и мезонов*.

Две частицы эта-мезон (η) и K^0 -мезон были обнаружены в 1961 г. Трудно сомневаться в том, что мы наблюдаем здесь проявление некоторой скрытой от нас симметрии природы.

Существование большого числа адронов, с одной стороны, и явная симметрия барионов и мезонов, с другой, позволили прийти к выводу, что все они являются сложными системами, образованными из триплета субчастиц. Эта гипотеза была выдвинута в 1964 г. М. Гелл-Манном и независимо Дж. Цвейгом. Три новых объекта Гелл-Манн назвал *кварками*. Их обозначают буквами u , d , s (от начальных букв английских слов: *up* — вверх, *down* — вниз и *strange* — странный). Кваркам приписываются квантовые числа, указанные в табл. 3. Кварки, таким образом, являются фермионами и имеют дробные электрический и барионный заряды. Для антикварков $\bar{u}$, $\bar{d}$, $\bar{s}$ все квантовые числа, исключая спин J , имеют знаки, обратные указанным в таблице.

Согласно кварковой модели мезоны составлены из кварков и антикварков, а барионы из трех кварков. Например, $\pi^+ = u\bar{d}$, $\pi^- = \bar{u}d$, $n = udd$, $p = uud$. π^0 -мезон является смесью $u\bar{u}$ и $d\bar{d}$ кварков. s -кварк входит в состав странных барионов и мезонов: $K^+ = u\bar{s}$, $K^0 = d\bar{s}$, $K^- = s\bar{u}$, $K^0 = s\bar{d}$, $\Lambda^0 = uds$, $\Sigma^+ = uus$, $\Sigma^- = dds$.

Совокупность квантовых чисел, отличающих один тип кварка от другого, принято называть *ароматом* (*flavor*).

Цвет. Со времени своего появления кварковая модель претерпела существенные изменения и стала более развитой. Детальный анализ структуры барионов показал, что существуют частицы, в которых находятся кварки с одинаково направленными спинами, в противоречии с принципом Паули. Решение этой проблемы было найдено в 1965 г. советскими физиками Н. Н. Боголюбовым, Б. В. Струминским и

А. Н. Тавхелидзе, которые предложили ввести новое квантовое число, названное *цветом*. Цвет каждого кварка может принимать 3 значения (условно: красный, зеленый, синий). По определению цвета антикварков являются дополнительными к цветам кварков.

Таблица 3

	Q	B	J	T_3	S
u	$2/3$	$1/3$	$1/2$	$1/2$	0
d	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	$-1/2$	0
s	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	0	-1

Таблица 4

	Q	B	J	T	S	C	b	t
c	$2/3$	$1/3$	$1/2$	0	0	1	0	0
b	$-1/3$	$1/3$	$1/2$	0	0	0	1	0
t	$2/3$	$1/3$	$1/2$	0	0	0	0	1

Их естественно назвать антицветами. Теперь любой барион должен содержать кварки трех цветов. Так как кваркам приписаны основные цвета, то такая комбинация может быть названа белой, или бесцветной. Мезоны являются смесью цвета и антицвета, т. е. тоже бесцветны.

Очарованный кварк. 10 ноября 1974 г. две американские группы экспериментаторов сообщили об открытии новой частицы — мезонного резонанса массой $3,1$ ГэВ и чрезвычайно малой шириной $\Gamma = 0,06$ МэВ. Она была названа одной группой J -частицей, а другой ψ -частицей. Сейчас ее называют J/ψ -частицей. Необы-

чайно большое время жизни $\sim 10^{-20}$ с указало на то, что новая частица является связанным состоянием нового четвертого кварка s и антикварка $\bar{s}$. Новый кварк получил название «очарованного» (*charmed*). Он обладает новым квантовым числом $C=1$, названным «очарование» (*charm*), или «чарм». Это открытие стало одним из крупных последних достижений в физике частиц.

Согласно кварковой модели должны существовать возбужденные состояния системы $s\bar{s}$, названной *чармонием*. Вскоре они были найдены. В 1979 г. были обнаружены «очарованные» барiony, содержащие «очарованные» кварки. Таким образом, была открыта новая форма материи, возникающая только при высоких энергиях взаимодействующих частиц.

Открытие чармония стимулировало поиск еще более тяжелых кварков. Имелись основания считать, что они будут появляться парами. Поэтому следующая пара кварков, вслед за уже известными, была названа b -кварком (от англ. *bottom* — дно) и t -кварком (*top* — вершина). В 1976 г. был открыт боттомоний-мезон, который рассматривается как связанное состояние пятого кварка b и антикварка $\bar{b}$. Кварк несет квантовое число «красота» (*beauty*) $b=+1$. Имеются указания на существование по крайней мере еще одного тяжелого t -кварка, которого также называют «истинным» (*truth*). Система $t\bar{t}$ — топоний — еще пока не обнаружена. Квантовые числа c -, b -, t -кварков указаны в табл. 4.

13. В поисках единой теории. Не следует думать, что главное в новой теории — арифметические действия с квантовыми числами. Современный подход к построению единой теории основывается на двух фундаментальных устоях: теории относительности и квантовой механике. *Внутренняя цветовая симметрия, проявляющаяся в рассмотренных законах сохранения, лежит в основе динамической теории взаимодействия кварков.* С 1972 г. стремительно развивается теория цветных сил. Она напоминает электродинамику и называется *квантовой хромодинамикой*. Согласно этой теории кварки обладают *цветовым зарядом*, а переносчиками взаимодействия являются 8 различных частиц — *глюонов* (от англ. *glue* — клей). Необходимость введения глюонов диктуется одной из самых глубоких идей физики XX в.: переход от глобальной симметрии к локальной симметрии в окрестности любой точки пространства приводит к появлению так называемых *калибровочных полей*. К ним относятся, как выяснилось, электромагнитное и гравитационное поля.

Наиболее важное отличие глюонов от фотонов состоит в том, что глюоны сами несут цветовой заряд, тогда как фотон электрически нейтрален. Это приводит к существованию прямого взаимодействия между глюонами. Когда два кварка или же кварк и антикварк близко подходят друг к другу, то цветные силы уменьшаются. Это свойство получило название *асимптотической свободы*.

Есть основания полагать, что на больших расстояниях силы взаимодействия навечно удерживают кварки внутри адронов. Свободные кварки не наблюдались, несмотря на все попытки их обнаружить. Из-за трудностей проведения расчетов до сих пор нет строгого решения проблемы конфайнмента (от англ. *confinement* — тюремное заключение).

Электрослабое взаимодействие. Сильное взаимодействие определяется цветом кварков, но не зависит от аромата. В свою очередь ароматы определяют электромагнитное и слабое взаимодействие (квантовая ароматодинамика). В 1967 г. американский физик С. Вайнберг и независимо в 1968 г. пакистанский физик А. Салам создали единую теорию электрослабых взаимодействий. Переносчиками взаимодействия являются фотон, $W^\pm$ и Z^0 -бозоны. Триумфом теории стало открытие этих мезонов в сложнейших экспериментах, проведенных в 1983 г. на встречных протон-антипротонных пучках (SPS, ЦЕРН). Бозоны рождались в реакциях

$$p + \bar{p} \rightarrow W^\pm + X, \quad W^+ \rightarrow e^+ + \nu_e, \quad W^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e,$$

$$p + \bar{p} \rightarrow Z^0 + Y, \quad Z^0 \rightarrow e^+ + e^-, \quad \mu^+ + \mu^-,$$

где X, Y — прочие частицы. Массы $W^\pm$, Z^0 -бозонов оцениваются соответственно в 81 ГэВ и 93 ГэВ — это самые тяжелые из известных частиц.

В 1970 г. Ш. Глешоу из Гарвардского университета модифицировал теорию электрослабых взаимодействий, включив в нее очарованные кварки. Объединение квантовой хромодинамики и теории Вайнберга — Салама — Глешоу получило название *стандартной модели*.

14. Суперобъединение — начало физики XXI в. Существование кварков сейчас не вызывает сомнений, особенно после открытия очарованных частиц и обнаружения в e^+e^- -аннигиляции адронных струй. Первоочередной задачей стало прямое наблюдение глюонов и изучение их свойств и взаимодействий.

В целом можно сказать, что физика элементарных частиц вступила в новый этап своего развития. Говоря о достижениях стандартной модели, следует отметить, что в ней содержится достаточно много произвольных параметров, не определяемых в рамках самой теории. Кроме того, объединение сильных и электрослабых взаимодействий имеет формальный характер. Существуют также аргументы в пользу гипотезы о целочисленном заряде кварков.

Великое объединение. При увеличении энергии взаимодействующих частиц интенсивность электрослабого взаимодействия растет, а сильного — убывает. Поэтому реальный шаг на пути построения к действительно единой теории связан с гипотезой о том, что при некоторой энергии E_m интенсивность всех трех взаимодей-

модействий будет одинакова. В разных моделях Великого объединения предсказываются различные значения E_m . В большинстве моделей $E_m \simeq 10^{14} - 10^{16}$ ГэВ. В области энергий $E \ll E_m$ степень симметрии в организации материи понижается, а единое взаимодействие «разделяется» на сильное, слабое и электромагнитное. При достижимых сейчас энергиях стандартная модель является хорошим приближением. В соответствии с современными представлениями о происхождении Вселенной энергии E_m были характерны в промежутке между 10^{-43} и 10^{-38} с после Большого взрыва. Несмотря на ничтожно малую величину этого промежутка времени, его влияние на последующую эволюцию Вселенной было огромным. Как оказалось, физика микромира дает ключ к пониманию процессов в космических масштабах.

В единой теории фундаментальных частицами являются кварки и лептоны. Руководящими принципами построения теории являются: 1) *локальная инвариантность цветовой симметрии*, приводящая к взаимодействию между фундаментальными частицами посредством обмена векторными бозонами, 2) *спонтанное нарушение симметрии*, выражающееся в том, что система частиц находится в состоянии, не обладающим симметрией взаимодействия. Переход в это состояние осуществляется благодаря взаимодействию первоначально безмассовых бозонов. Взаимодействие изменяет энергию бозонов и приводит к появлению у части бозонов масс.

Энергии E_m недостижимы в обозримом будущем. Поэтому для экспериментальной проверки теории предстоит большая работа по вычислению наблюдаемых эффектов в низкоэнергетической области, либо проверка космологических следствий. Одно из предсказаний теории — нарушение закона сохранения барионного заряда вызвало особенно большой интерес.

Распадается ли протон? В простейшем варианте теории 24 частицы порождают различные силы: фотон служит переносчиком электромагнитного взаимодействия; $W^\pm$, Z^0 — три посредника слабых взаимодействий; восемь глюонов, передающих «хромодинамическое» взаимодействие и двенадцать очень массивных частиц — переносчиков нового сверхслабого взаимодействия. Эти новые силы могут превращать кварки в лептоны и поэтому ведут к распаду протона — самому драматическому предсказанию теории. Наиболее вероятная реакция распада $p \rightarrow e^+ + \pi^0$. Время жизни протона $\tau_p \simeq 5 \cdot 10^{31}$ лет (возраст Вселенной $\sim 10^{10}$ лет). Чтобы увидеть распад протона, не обязательно ждать так «долго». В веществе, содержащем $5 \cdot 10^{33}$ протонов, будет происходить согласно (59.1), (59.4) 100 распадов в год. Распад регистрируется по черенковскому излучению позитрона. Полученные в ряде экспериментов результаты ($\tau_p > 10^{32}$ лет) не подтверждают простую модель теории. Другие схемы Великого объединения, предсказывающие большее время жизни протона, недоступны пока эксперименту.

Супергравитация. Обсуждаемое объединение взаимодействий не является полным, поскольку не включает гравитацию. Однако существует область масс и расстояний, в которой гравитационные эффекты становятся существенными. Действительно, для того чтобы энергия взаимодействия двух частиц $\gamma m^2/r$ на расстоянии длины волны де Бройля $r = h/mc$ стала порядка mc^2 , масса частицы должна достигать величины $m = \sqrt{hc/\gamma} \approx 5 \cdot 10^{-5}$ кг. Эта сверхтяжелая частица получила название *планкион* (или *максимон*). Расстояние $r = \sqrt{\gamma h/c^3} \approx 10^{-33}$ см носит название *планковской длины*. На расстояниях, меньших 10^{-33} см, происходит объединение всех четырех взаимодействий.

В последние годы значительное развитие получили *суперсимметричные модели*, обладающие симметрией нового типа, которая связывает между собой фермионы и бозоны. Постулируется, что у каждой обычной частицы имеется «суперпартнер» с аналогичными свойствами, за исключением спина.

Суперпартнеры фермионов имеют спин $J=0$, их названия образуются из названий обычных частиц с помощью приставки «с». Например, электрон, кварки и лептоны имеют суперпартнеров — сэлектрон, скварки, слептоны. Суперпартнеры бозонов имеют спин $1/2$. Их названия получают добавлением суффикса «ино» к корню обычной частицы. Например, фотон — фотино, глюон — глюино, гравитон — гравитино и т. д.

В настоящее время физики ведут поиск экспериментальных фактов, которые позволили бы проверить следствия суперсимметричных теорий. Основная надежда связана с пуском ускорителей нового поколения. Развиваемая теория может стать решающим шагом в цепи открытий законов, объясняющих строение вещества и эволюцию Вселенной. «Но самым замечательным, — говорит М. Гелл-Манн, который уже три десятилетия задает темп в исследовании элементарных частиц, — будет то, что горстка существ, находящихся на небольшой планете, обращающейся вокруг незначительной звезды, проследит свое происхождение до самого начала — небольшая крупинка Вселенной, постигающая все в целом».

§ 61. ЯДЕРНАЯ ЭНЕРГЕТИКА

1. Открытие Ферми. Познакомившись в марте 1934 г. с сообщением об открытии искусственной радиоактивности, Э. Ферми — известный теоретик, работавший в Римском университете, — первым понял, что, используя нейтроны, можно получить новые радиоактивные элементы. Облучая нейтронным источником различные элементы, начиная с водорода, ему удалось уже в середине марта получить β -радиоактивный азот в реакции захвата нейтрона фтором: ${}^{19}_9\text{F} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{20}_{10}\text{N} + {}^1_0\text{n}$. К лету было облучено 60 элементов

и получено 40 радиоактивных продуктов. В ходе работы выяснилось, что интенсивность активации, вызываемой нейтронами, зависит от условий облучения. 22 октября Ферми получил необычный эффект: активация серебра возрастает, если между источником нейтронов и серебряной пластинкой поместить кусок парафина. «Около часа дня работа была, как обычно, прервана, а когда мы вернулись к трем, Ферми уже нашел объяснение этого странного поведения отфильтрованных нейтронов», — пишет участник эксперимента Э. Амальди [54, с. 76].

Оказалось, что вероятность взаимодействия нейтрона с ядром зависит от его энергии. Медленные нейтроны сильно взаимодействуют с ядрами. Для быстрых нейтронов это взаимодействие слабее. Попадая в кусок парафина, нейтроны сталкивались с протонами водородных атомов и замедлялись (см. пример 12.12). В результате возрастала вероятность захвата нейтронов ядрами серебра и соответственно увеличивалось число радиоактивных ядер.

Наиболее универсальными реакциями являются радиационный захват нейтрона ядром с последующим испусканием γ -кванта и упругое рассеяние. Реакции на легких ядрах сопровождаются испусканием протонов или α -частиц. На средних и тяжелых ядрах эти реакции подавлены большим электростатическим взаимодействием, препятствующим вылету протонов и α -частиц из ядра: радиоактивные продукты реакции оказывались изотопами бомбардируемых ядер. Возникла соблазнительная идея получить несуществующие в природе элементы, облучая нейтронами ядра урана $^{238}_{92}\text{U}$. Ферми предположил, что ядро урана, захватив нейтрон, станет β -радиоактивным и после испускания электрона превратится в ядро элемента с порядковым номером 93. Началась упорная четырехлетняя погоня за трансурановыми элементами, которая привела к открытию расщепления ядер.

2. Открытие деления урана. В Берлине этой проблемой занялись первоклассный химик О. Ган, Лизе Мейтнер и Ф. Штрассман. В течение четырех лет они исследовали продукты реакции урана с нейтронами. К концу 1938 г. Ган и Штрассман обнаружили вещество, химические свойства которого соответствовали барию ($Z=56$). Но исследователи еще не могли решиться отождествить его с барием, так как этот шаг противоречил бы всем прежним представлениям ядерной физики. До сих пор ядерные реакции приводили к образованию изотопов исходного элемента или соседних с ним элементов. Деление ядра было равносильно тому, что валун раскалывается от легкого удара маленьким камушком. Однако теоретические исследования, проведенные в начале января 1939 г. Л. Мейтнер и английским физиком О. Фришем, подтвердили возможность деления ядра урана на барий ($Z=56$) и криптон ($Z=36$). Энергия осколков по предварительным оценкам составляла 200 МэВ.

Далее события развивались стремительно. Было открыто испускание вторичных нейтронов при делении. Это означало, что при распаде урана скорость реакции будет лавинообразно возрастать. В классических работах Н. Бора, Дж. А. Уилера и советского физика Я. И. Френкеля была разработана первая теория процесса деления (1939). Советские ученые Я. Б. Зельдович и Ю. Б. Харитон первыми разработали метод расчета цепной ядерной реакции. Наметились перспективы практического использования внутренней ядерной энергии.

3. Деление и синтез ядер. Согласно теории относительности масса покоя ядра $M(Z, A)$ с атомным номером Z и массовым числом A определяется формулой (55.30)

$$M(Z, A) = Zm_p + (A - Z)m_n - \frac{E_{\text{св}}(Z, A)}{c^2}. \quad (61.1)$$

Из (61.1) следует, что, измеряя массу ядер, можно экспериментально найти энергию связи любого ядра.

Для выяснения вопроса о том, какие ядерные реакции пригодны для ядерной энергетики, необходимо знать зависимость энергии связи нуклонов в ядре от атомной массы. С ростом числа нуклонов A энергия связи быстро растет, пока не достигает значения ~ 500 МэВ при $A=56$ в области ядер железа. В области $A > 56$ энергия связи растет с увеличением A почти по линейному закону. В литературе обычно приводят кривую зависимости удельной связи ядра $\epsilon(A)$ (энергия связи на один нуклон). В области $A < 50-60$ величина $\epsilon(A)$ быстро растет, а затем медленно спадает. Такая зависимость позволяет объяснить выделение энергии при слиянии легких ядер и распаде тяжелых ядер.

Рассмотрим два ядра ${}^A_1X$, ${}^A_2Y$ и ядро ${}^A_2B$, где $A=A_1+A_2$, $Z=Z_1+Z_2$. Учитывая уравнение (61.1), получим соотношение между массами ядер

$$M(Z, A) = M(Z_1, A_1) + M(Z_2, A_2) - \frac{\Delta E}{c^2}. \quad (61.2)$$

$$\Delta E = E_{\text{св}}(Z, A) - E_{\text{св}}(Z_1, A_1) - E_{\text{св}}(Z_2, A_2). \quad (61.3)$$

А. Деление ядра. В соответствии с (55.28) распад ядра B возможен при условии $\Delta E < 0$. Значение энергии $-\Delta E > 0$, высвободившейся при делении ядра, определяет величину кинетической энергии ядер X и Y . В результате деления *внутриядерная энергия переходит в обычную механическую энергию движения осколков деления*: $K_X + K_Y = -\Delta E > 0$. При распаде на два почти одинаковых осколка нетрудно оценить величину

$$\Delta E \approx E_{\text{св}}(Z, A) - 2E_{\text{св}}(1/2Z, 1/2A) = A(7,6 - 8,4) \text{ МэВ} = -0,8A \text{ МэВ}.$$

Деление ядра урана ${}^{235}_{92}\text{U}$. Ядро урана делится чаще всего на два осколка, причем наиболее вероятным является образование

элементов с массовыми числами 92 и 144. Кроме того, в каждом акте деления образуются в среднем 2,5 нейтронов и около 8—10 γ -квантов. Осколки деления являются интенсивными источниками γ -квантов, электронов и нейтрино, возникающих при β -распаде.

В среднем в результате деления ядра ${}_{92}^{235}\text{U}$ выделяется около 200 МэВ энергии, которая распределяется следующим образом:

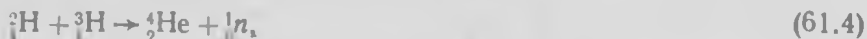
кинетическая энергия осколков	166 МэВ
кинетическая энергия нейтронов	5 МэВ
мгновенное γ -излучение	7 МэВ
энергия β -распада осколков	22 МэВ

Таким образом, приращение массы в акте деления $\Delta mc^2 = \Delta E < 0$ ($|\Delta E| \sim 200$ МэВ). При делении 1 кг урана ($2,56 \cdot 10^{24}$ атомов) освобождается $8,19 \cdot 10^{13}$ Дж, что эквивалентно сжиганию 1900 т сырой нефти, или энергии, высвобождающейся при взрыве 20 000 т тринитротолуола (удельная теплота сгорания соответственно $4,3 \cdot 10^7$ Дж/кг и $4,1 \cdot 10^6$ Дж/кг). Таким образом, ядерная «взрывчатка» эффективней химической в двадцать миллионов раз.

Для того чтобы ядро разделилось, необходимо сообщить ему некоторую энергию. Нейтроны с энергиями свыше 400 МэВ вызывают деление всех ядер. При энергиях нейтронов ~ 1 МэВ делятся только тяжелые ядра с $A > 210$. Изотоп урана ${}_{92}^{238}\text{U}$ делится только быстрыми нейтронами с энергией $\geq 1,5$ МэВ. Некоторые ядра, прежде всего изотопы урана ${}_{92}^{233}\text{U}$, ${}_{92}^{235}\text{U}$ и плутоний ${}_{94}^{239}\text{Pu}$, делятся нейтронами всех энергий. Важно отметить, что в среднем каждый нейтрон деления обладает энергией $\sim 1\text{--}3$ МэВ.

Синтез легких ядер. Пусть $\Delta E > 0$. В этом случае распад энергетически запрещен и ядро В устойчиво в отношении деления на ядра Х и Y. Для развала ядра необходимо сообщить энергию ΔE . Однако теперь возможно выделение энергии в реакции слияния ядер: $M(Z_1, A_1) + M(Z_2, A_2) = M(Z, A) + \Delta E/c^2$. Подобный процесс называется *синтезом*.

Обычно в реакциях синтеза образуется несколько ядер. В результате освобождается энергия в форме кинетической энергии продуктов синтеза. Если бы удалось объединить тяжелые изотопы водорода — тритий и дейтерий — в реакции



то выделилось бы 17,6 МэВ энергии. Приращение массы покоя частиц, участвующих в реакции $\Delta mc^2 = -\Delta E$, $\Delta E = 17,6$ МэВ. Около 80% выделяющейся энергии уносят нейтроны, а остальные — α -частицы с энергией 3,6 МэВ.

Трудности осуществления такого процесса связаны с тем, что силы электростатического отталкивания между положительно заряженными ядрами препятствуют их сближению. Для сближения

изотопов водорода на расстояние $r \sim 10^{-12}$ см необходимо затратить энергию $ke^2/r \approx 0,15$ МэВ. Поэтому реакция (61.4) остается энергетически выгодной. При равных весовых количествах реагирующих веществ в реакции синтеза (61.4) выделяется в четыре раза больше энергии, чем при делении ядра урана.

4. Цепная реакция деления. Допустим, что в среде чистого $^{235}_{92}\text{U}$ произошло деление ядра на два осколка (обычно один из них в 1,5 раза массивнее другого), сопровождающееся вылетом двух нейтронов. Последующее расщепление, вызванное этими нейтронами, происходит не позднее чем через $\tau = 10^{-8}$ с. Тогда в n -м поколении образуется $2^n \approx 10^{0,3n}$ нейтронов. Деление 1 кг урана произойдет в 46 поколении нейтронов ($0,3n \approx 14$) спустя всего $4,6 \cdot 10^{-7}$ с после начала ядерной реакции. При этом образуется около 80 радиоактивных изотопов более легких элементов. Так происходит взрыв атомной бомбы. В ядерном реакторе, напротив, как только плотность нейтронов достигает определенной величины, реакция поддерживается на постоянном уровне. *Утилизация кинетической энергии осколков деления — основа использования ядерной энергии.*

Рассмотренный выше процесс деления является слишком упрощенным. В реальных условиях реакция должна протекать в ограниченном объеме. Поэтому часть нейтронов будет уходить наружу, поглощаться замедлителем, конструктивными элементами и продуктами распада. Возможен также процесс захвата нейтронов ядрами урана, не приводящий к делению: возбужденное ядро испускает γ -кванты. Этот процесс будет конкурировать с делением.

Основной характеристикой процесса захвата нейтрона с последующим делением является сечение деления σ_f , определенное согласно (60.1). Аналогичная характеристика для процесса радиационного захвата — σ_γ . Полное сечение захвата $\sigma_a = \sigma_f + \sigma_\gamma$. Величины сечений очень сильно зависят от энергии нейтронов. Основным интерес представляют реакции с быстрыми ($E > 0,1$ МэВ) и тепловыми нейтронами ($E < 0,1$ эВ). В табл. 1 приведены сечения деления σ_f и захвата σ_a при взаимодействии тепловых и быстрых нейтронов с изотопами $^{235}_{92}\text{U}$ и $^{238}_{92}\text{U}$, ν — среднее число нейтронов в одном акте деления. Буквой Б (барн) обозначается удобная единица измерения сечений: $1 \text{ Б} = 10^{-24} \text{ см}^2$.

Важнейшей характеристикой, определяющей развитие цепной реакции, является *коэффициент размножения вторичных нейтронов* η , равный числу новых нейтронов деления на один нейтрон, поглощенный в активной зоне реактора.

Пусть реактор работает на уране, содержащем в единице объема n_1 ядер $^{235}_{92}\text{U}$ и n_2 ядер $^{238}_{92}\text{U}$. Вероятности того, что поглощенный нейтрон вызовет деление ядер каждого из изотопов, соответственно равны

Таблица 1

$^{235}_{92}\text{U}$	тепловые	быстрые
σ_f	582 Б	1,4 Б
σ_{a1}	694 Б	1,65 Б
ν_1	2,47	2,6

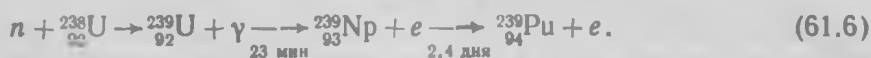
$^{238}_{92}\text{U}$	тепловые	быстрые
σ_f	0	0,1 Б
σ_{a2}	2,7 Б	0,26 Б
ν_2	0	2,6

$$\frac{\sigma_{f1}n_1}{\sigma_{a1}n_1 + \sigma_{a2}n_2} \quad \frac{\sigma_{f2}n_2}{\sigma_{a1}n_1 + \sigma_{a2}n_2}$$

Следовательно, среднее число вторичных нейтронов на один захват нейтрона

$$\eta = \frac{\nu_1 \sigma_{f1} n_1 + \nu_2 \sigma_{f2} n_2}{\sigma_{a1} n_1 + \sigma_{a2} n_2} \quad (61.5)$$

На практике наиболее важно осуществить процесс деления в природном уране, который содержит изотоп $^{238}_{92}\text{U}$ и всего 0,71% изотопа $^{235}_{92}\text{U}$: на одно ядро $^{235}_{92}\text{U}$ приходится 140 ядер $^{238}_{92}\text{U}$. Изотоп $^{238}_{92}\text{U}$ почти не принимает участия в делении, так как вследствие столкновений энергия нейтронов быстро падает до значений ≤ 1 МэВ. Нейтроны таких энергий поглощаются ядрами $^{238}_{92}\text{U}$, но ядра не распадаются, а образуют через два последовательных β -распада плутоний



Плутоний, открытый в 1941 г., делится при облучении медленными нейтронами, испуская в среднем 2,9 нейтронов, т. е. сам представляет цепное ядерное горючее. Отделение плутония от урана — значительно более простая проблема, чем разделение изотопов урана, не отличающихся химическими свойствами.

Из (61.5) находим, что коэффициент размножения при поглощении нейтрона естественным ураном $\eta = 0,64 < 1$. Таким образом, быстрые нейтроны не способны поддерживать цепную реакцию в естественной смеси изотопов.

5. Реактор на тепловых нейтронах. Из табл. 1 видно, что в области тепловых энергий нейтронов малое содержание $^{235}_{92}\text{U}$ должно компенсироваться большим значением сечения деления. Действительно, из (61.5) находим $\eta = 1,34 > 1$. Для осуществления самоподдерживающейся реакции необходимо использовать замедлители — вещества, способные уменьшить энергию нейтронов до

значений < 1 эВ. Потеря энергии происходит при столкновении нейтронов с ядрами замедлителя. Процесс замедления должен идти достаточно быстро, так как в области энергий от 1 кэВ до 8 эВ сечение радиационного захвата имеет несколько максимумов, в 10–15 раз превосходящих сечение деления. Поэтому вещество-замедлитель должно состоять из относительно легких элементов (см. пример 12.12). Хороший замедлитель не должен поглощать нейтроны. Этим условиям удовлетворяют тяжелая вода, графит и бериллий [69].

Основная величина, определяющая развитие цепной реакции в реакторе — *эффективный коэффициент размножения* ($k_{эф}$) — отношение числа нейтронов в данном поколении к числу нейтронов в предыдущем поколении. Пусть θ — доля нейтронов, избежавших утечки в результате вылета наружу из объема реактора или поглощения замедлителем, теплоотводящими элементами, продуктами распада и т. д. Тогда $k_{эф} = \eta\theta$. При протекании стационарной цепной реакции необходимо выполнить условие критичности: $k_{эф} = 1$.

Мощность, развиваемая реактором. Пусть σ_f , n_f — эффективное сечение деления и концентрация $^{235}_{92}\text{U}$; n — концентрация нейтронов, включая вклад запаздывающих нейтронов, образующихся при β -распаде осколков деления. Согласно определению сечения (60.1) количество делений в единицу времени в объеме ΔV — $\sigma_f n_f n \nu \Delta V$. Если в каждом акте деления выделяется энергия $Q = \Delta Mc^2$, то мощность, выделяемая в объеме ΔV ,

$$\Delta P = Q \sigma_f n_f n \nu \Delta V. \quad (61.7)$$

Полная мощность реактора

$$P = Q \sigma_f \Phi V n_f, \quad (61.8)$$

где V — объем реактора, Φ — средний поток нейтронов в активной зоне реактора, $\Phi = \langle n \nu \rangle$.

Первая цепная реакция на тепловых нейтронах была осуществлена 2 декабря 1942 г. физиками Колумбийского университета, возглавляемыми Э. Ферми. В Советском Союзе первый реактор создан группой физиков под руководством И. В. Курчатова 25 декабря 1946 г.

6. **Открытие природного ядерного реактора [70].** Для осуществления цепной реакции необходимо выполнить, как мы видим, ряд условий. Поэтому создание установки для получения ядерной энергии — дело весьма непростое. Тем удивительнее было открытие природного ядерного реактора в урановом карьере в Габоне (Западная Африка). В 1972 г. было обнаружено, что содержание изотопа $^{235}_{92}\text{U}$ в руде временами достигало 0,64% вместо значения 0,71% обычного для земных пород, метеоритов и образцов лунного грунта. Дальнейшие исследования показали отклонения рас-

пределения продуктов деления от природного: обнаружен избыток плутония и элементов, образующихся в процессе деления. Это и послужило доказательством существования в далеком прошлом самопроизвольной цепной реакции.

Месторождение сформировалось около $1,8 \cdot 10^9$ лет назад. Руда содержит двуокись урана UO_2 , воду и минералы, являющиеся слабыми поглотителями нейтронов. Из-за различия в периодах полураспада содержание ^{235}U в то время превышало 3%. В результате тектонических процессов урановая жила растрескивалась и в нее проникали грунтовые воды — возникла ситуация, благоприятная для образования естественного реактора. Было обнаружено шесть очагов реакции на расстоянии нескольких десятков метров. Продолжительность работы реактора 600 млн. лет, средняя мощность — 25 кВт.

Возникает вопрос: почему реактор не взорвался вначале цепной реакции? Причина — в механизме саморегулирования. При увеличении температуры содержание водяного пара падало, ухудшались условия замедления и коэффициент размножения нейтронов уменьшался. В результате температура понижалась и вновь возникали условия для развития реакции и нового всплеска мощности. При определенных условиях возник устойчивый автоколебательный режим реакции деления.

Предварительные исследования обнаружили связь повышенного уровня радиации с более высокой степенью эволюции простейших форм жизни в окрестности очага реакции.

7. Реактор на быстрых нейтронах. Если в активной зоне реактора замедлитель отсутствует, то нейтроны поглощаются, прежде чем успевают существенно снизить свою энергию при столкновениях. Для поддержания реакции деления на быстрых нейтронах необходимо обогатить природный уран изотопом ^{235}U . При обогащении до 20–40% число вторичных нейтронов на один захват резко увеличивается. Большая часть нейтронов, избежавших утечки, участвует в реакции (61.6). Образовавшийся плутоний также делится, испуская в среднем 2,9 нейтронов. Поскольку нейтроны образуются в количестве большем, чем необходимо для поддержания цепной реакции, то происходит накопление плутония. Это и есть процесс воспроизводства ядерного топлива. Другое достоинство реактора на быстрых нейтронах состоит в том, что число делений ядер ^{238}U может составить около четверти всех делений в реакторе. Это означает, что четверть мощности реактора обязана выгоранию материала, неделящегося в реакторах на тепловых нейтронах.

Отсутствие замедлителя позволяет сделать активную зону весьма компактной. Для предотвращения утечки из сравнительно небольшого объема топливную зону окружают экраном из ^{238}U . Такой отражатель возвращает часть нейтронов в активную зону, а остальные поглощает с образованием плутония. При выгорании

1 кг урана-235 и плутония можно накопить свыше 2 кг плутония. Замена части $^{235}_{92}\text{U}$ на $^{239}_{92}\text{Pu}$ еще более повышает эффективность накопления плутония.

8. Реакторы атомных электростанций. Ядерный реактор на АЭС является источником тепла для превращения воды в пар высокого давления ($\sim 1,3$ МПа), который приводит в движение рабочее колесо турбины, находящееся на общем валу электрогенератора. Тепло от активной зоны реактора отводится циркулирующим теплоносителем (вода, газ, натрий и др.). Основной, наиболее ответственной частью активной зоны является *твел* (тепловыделяющий элемент), заполненный ураном. Он должен работать при температуре свыше 300°C в условиях интенсивного облучения нейтронами. Со временем состав ядерного горючего меняется; накапливаются продукты распада. Обычным является 60%-я степень выгорания ^{235}U перед перегрузкой топлива. За время службы активной зоны реактор потребляет почти половину ядерного топлива.

Первая в мире АЭС мощностью 5 МВт была пущена 27 июня 1954 г. в г. Обнинске. Она стала базой для развития атомной энергетики в СССР. Сейчас в эксплуатации находятся 40 блоков АЭС общей мощностью 28 млн кВт. Уже освоены реакторы на тысячу мегаватт, а в 1983 г. введен в эксплуатацию первый блок Игналинской АЭС на 1500 МВт. С 1968 г. пущено несколько АЭС с реакторами на быстрых нейтронах. Ведутся работы по созданию атомных станций теплоснабжения (АСТ). Передача пара экономически выгодна на расстояние до 5–10 км, а горячей воды до 18–30 км. Следовательно, АСТ должны сооружаться в непосредственной близости от городов.

В Советском Союзе используют в основном два вида реакторов на тепловых нейтронах [74]. В *водо-водяном энергетическом реакторе* (ВВЭР) замедление нейтронов и теплосъем производятся одним и тем же количеством воды. Вся активная зона находится при высокой температуре, корпус реактора должен выдерживать давление ~ 15 МПа. Реактор работает на обогащенном до 3% изотопом ^{235}U уране, так как вода довольно сильно поглощает нейтроны. В этом случае коэффициент η возрастает до 1,83. При увеличении температуры воды эффект замедления уменьшается. Это приводит к обратной связи, которая делает устойчивой и безопасной работу реактора. Аварийное отключение может быть произведено откачкой воды из активной зоны, что совершенно невозможно при использовании твердых замедлителей. Однако относительно низкая температура воды $\sim 300^\circ\text{C}$ ограничивает КПД АЭС.

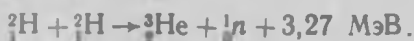
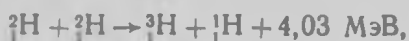
В *уран-графитовом реакторе* РБМК (реактор большой мощности канальный) теплоносителем является вода, а замедлителем графит. Первый реактор этого типа мощностью 1000 МВт построен на Ленинградской АЭС. Активная зона диаметром 11,8 м, вы-

сотой 7 м сложена из графитовых призм с вертикальными отверстиями для труб, в которых находятся твелы и теплоноситель — вода. Полная длина трубы 22 м, ее средняя семиметровая часть сделана из циркониевого сплава. Наружный диаметр твелоов 1,35 см. Вода подается снизу. Обтекая твелы, она закипает и отводится из верхней части трубы. Преобразование энергии происходит по одноконтурной схеме: насыщенный пар ($T=280^\circ\text{C}$, $p=60$ атм) поступает на два турбогенератора. Стационарная загрузка реактора — 192 т урана, обогащенного до 1,8%. Перегрузка топлива — «на ходу». КПД станции — 31%.

После создания первой советской АЭС капиталистические страны сразу же приступили к строительству энергетических реакторов. К началу 1986 г. в различных странах мира работают более 370 атомных реакторов, производя 15% всей потребляемой электроэнергии. Будущее мировой экономики трудно представить без развития атомной энергетики.

Безопасность любого реактора зависит от того, как он защищен от проникновения в окружающую среду радиоактивного излучения, которое может возникнуть в результате выброса радиоактивных веществ. При перегреве активной зоны цепная реакция прекращается. Однако продукты распада продолжают выделять большое количество тепла, если его не отводить, то температура будет расти и твелы разрушатся. При этом вода проникает в графитовую кладку активной зоны и под действием нейтронов разлагается, образуя гремучую смесь. Возникает опасность взрыва — не атомного, а обычного [74]. Безопасность существующих реакторов обеспечивается системами многократного дублирования для повышения надежности ключевых узлов АЭС. Управление реактором требует высокой культуры работы операторов: профессионализма, мастерства, дисциплины. В настоящее время уже разработаны полностью безопасные конструкции водо-водяных реакторов с пассивной защитой. Любой срыв в работе системы теплоносителя приводит к остановке цепной реакции и отводу тепла. Для приведения в действие этого механизма не потребуются ни действия оператора, ни аварийные электромеханические устройства.

9. Управляемый термоядерный синтез. Кроме реакции (61.4) основными процессами, в результате которых происходит синтез с выделением энергии, являются



Следует отметить, что продукты последних двух реакций являются исходными реагентами для двух других. Это означает, что в

реальной ситуации могут идти одновременно все реакции с превращением дейтерия в гелий, нейтроны и протоны:



Высвобождающаяся энергия, отнесенная к одному нуклону дейтерия (около 3,6 МэВ), значительно превосходит энергетический выход на один нуклон делящегося изотопа ^{235}U ($\sim 0,85$ МэВ).

Реакция слияния ядер, в отличие от реакций деления, не является цепной, она протекает спокойно, подобно большинству химических реакций. В результате реакций синтеза образуется «зола» — безобидный гелий, в отличие от радиоактивных отходов современных АЭС. Убегающие в реакции (61.9) нейтроны можно использовать для производства трития в реакции



или для превращения ^{238}U в ^{239}Pu и последующего применения в обычных ядерных реакторах.

Если бы удалось овладеть управляемой термоядерной энергией, то человечество навсегда избавилось бы от угрозы энергетического голода, поскольку тяжелый водород — дейтерий — содержится в обыкновенной или морской воде. Теоретически один литр воды может дать столько же энергии, сколько выделяется при сгорании 300 л бензина.

Некоторые показатели источников получения теплоты

Источник	Удельная теплота сгорания, Дж/кг	Суточная потребность электростанции мощностью 1000 МВт в источнике теплоты
Каменный уголь	$3 \cdot 10^7$	6750 т (100 вагонов при КПД = 0,4)
Нефть	$4,3 \cdot 10^7$	4600 т (при КПД = 0,4)
Делящийся изотоп урана ^{235}U	$8,2 \cdot 10^{13}$	3 кг ^{235}U или 430 кг природного урана (при КПД = 0,3)
Тяжелый водород — дейтерий ^2H (синтез ядер в управляемой термоядерной реакции)	$2,4 \cdot 10^{14}$	1 кг ^2H или 30 м ³ морской воды (при КПД = 0,3)

Практическое овладение термоядерной энергией связано со значительными техническими трудностями. Частицы должны обладать энергией ~ 100 кэВ для преодоления электростатического отталкивания. Однако сечение процесса при этой энергии слишком мало для поддержания реакции. Наиболее удобной средой для проведения реакции является плазма. Температура плазмы, в которой средняя энергия частиц $E \sim 10$ кэВ, чрезвычайно высока: $T \sim 2E/3k \sim 0,7 \cdot 10^8$ К. Для протекания реакции плотность плазмы n и время удержания τ должны удовлетворять критерию Лоусона

на: $n\tau \geq 10^{14}$ с/см³. В настоящее время надежды на успех связывают с использованием двух совершенно разных методов [71, 72].

Магнитное удержание. Более половины средств в термоядерных исследованиях во всем мире направлены на развитие реакторов типа ТОКАМАК (тороидальная камера с магнитными катушками), созданных в 1954 г. в Советском Союзе. В 1956 г. И. В. Курчатов, выступив с докладом в английском центре атомных исследований, сделал идею советских ученых достоянием всего научного сообщества и положил начало международному сотрудничеству термоядерщиков. Сейчас в мире работают десятки ТОКАМАКов. В настоящее время достигнута температура 200 млн градусов в течение 0,2 с.

Инерционное удержание. Еще в 1962 г. советские физики Н. Г. Басов и О. К. Крохин предложили использовать лазеры для поджигания термоядерного горючего, а Е. К. Завойский в 1968 г. высказал идею применить для этой цели пучок электронов от ускорителя. В настоящее время представляется перспективной мишень в виде шарика из пластика, внутри которого находятся жидкие дейтерий и тритий. При облучении 10 или 20-ю симметрично расположенными лазерами оболочка устремляется внутрь. Когда давление в центре мишени достигает максимума, температура поднимается до 100 млн градусов. Горение распространяется радиально наружу. Затем мишень разваливается и термоядерный огонь гаснет. Если 10 таких мишеней будут воспламеняться каждую секунду, то мощность реактора достигнет 1000 МВт. В этих предварительных расчетах предполагается, что световая энергия сообщается при мощности лазера $3 \cdot 10^{14}$ Вт в течение от 5 до 10 нс, т. е. энергия импульса $\sim 1,5$ млн Дж [72].

Результаты выполненных теоретических и экспериментальных исследований позволяют надеяться, что в ближайшие 10 лет наука добьется поставленной цели. Академик Б. Б. Кадомцев, возглавляющий советскую группу по созданию международного термоядерного реактора, как-то сказал: «Как известно, реакция слияния легких ядер в тяжелые с выделением громадной энергии во всей своей исполинской мощи представила себя миру взрывами термоядерных бомб, и пока не удастся заставить ее служить энергетике. Реакция деления ядер с высвобождением энергии первой родила бомбу, но она же дала миру и атомные электростанции. А вот термоядерная реакция пока еще не укрощена. И, на мой взгляд, моральный долг физиков перед человечеством состоит в том, чтобы решить эту проблему».

10. Физиологическое действие излучения. Дозиметрия. Все излучения могут привести к ионизации биологической ткани, которую можно представить как смесь атомов легких элементов: водорода, кислорода, углерода и азота. В среднем для образования ионной пары требуется энергия ≥ 32 эВ. Заряженные частицы взаимодействуют в основном с электронами атомов. Нейтроны не

имеют электрического заряда. Они выбивают протоны из водородосодержащих молекул или в результате неупругого рассеяния на ядрах порождают γ -излучение. Фотоны малых энергий ($E_\gamma < 0,8$ МэВ) ионизируют молекулы. При энергии $E_\gamma > 1$ МэВ возможно образование e^+e^- -пар.

В результате взаимодействия ионов с веществом возникают свободные радикалы, которые легко вступают в реакции и образуют большое количество перекисей. Действие перекисей приводит к нарушению функций ферментов в окислительных процессах, протекающих в организме. При радиационном поражении клеток происходит разрыв хромосом, мутации или нарушается механизм деления и функционирования клеток.

Степень облучения связана с энергией, переданной живой ткани. В практических приложениях используют *дозовые характеристики*.

Поглощенная доза излучения (D) равна средней энергии, переданной ионизирующим излучением одному килограмму вещества. Единица поглощенной дозы в СИ называется *грэй* (Гр): $1 \text{ Гр} = 1 \text{ Дж/кг}$. Внесистемная единица поглощенной дозы — рад (от англ. *radiation absorbed dose*), $1 \text{ Гр} = 100 \text{ рад}$.

Для оценки биологического действия излучения произвольного состава потребовалось введение новой характеристики дозы: *эквивалентная доза* ($D_{\text{экв}}$). Она равна произведению дозы излучения на *коэффициент качества* k данного излучения: $D_{\text{экв}} = Dk$. Приведем значения k для различных видов излучения: рентгеновские лучи, электроны — 1, α -частицы — 20, протоны, быстрые нейтроны — 10. Единица эквивалентной дозы — *зиверт* (Зв): $1 \text{ Зв} = 10^2 \text{ бэр}$, где *бэр* — внесистемная единица. Природный радиационный фон составляет $2,8 \cdot 10^{-4}$ Зв/год. Согласно «нормам радиационной безопасности», принятым в 1976 г., предельно допустимая доза облучения всего тела для лиц, работающих непосредственно с источниками излучений, равна $5 \cdot 10^{-2}$ Зв/год.

Для оценки облучения рентгеновским излучением используют понятие *экспозиционная доза*: 1 Кл/кг . Внесистемная единица экспозиционной дозы — *рентген* (Р). При поглощении в биологической ткани энергетический эквивалент рентгена равен $9,6 \cdot 10^{-3}$ Гр.

Реакция живого организма на воздействие излучения зависит от поглощенной дозы. Значение дозы, от которой в течение 30 сут погибает 50% живых существ, принято обозначать $LD_{50}(30)$. Значение этой величины для человека — 3 Гр [8]. При $D = 5$ Гр наступают необратимые нарушения жизненно важных систем. Для обезьян $LD_{50}(30) = 5,5$ Гр, для золотых рыбок — 20 Гр.

11. Ядерный конфликт — угроза цивилизации. 16 июля 1945 г. в США был осуществлен экспериментальный взрыв атомной бомбы, созданной усилиями американских и европейских физиков. Однако после бессмысленной бомбардировки Хиросимы и Нагасаки многие из них испытывали чувство вины за свое уча-

стие в работе над ядерным оружием. Атомная бомба незримо присутствовала при формировании внешней политики США.

29 августа 1949 г. была ликвидирована атомная монополия США. В этот день в СССР успешно прошло испытание атомной бомбы, а 12 августа 1953 г. была испытана водородная бомба. Наша наука, наша промышленность обеспечили обороноспособность страны. Осмысливая результаты испытания, руководитель проблемы И. В. Курчатов говорил тогда: «Нельзя допустить, чтобы это оружие начали применять». Он решительно выступил за полное запрещение ядерного оружия.

При взрыве атомной бомбы образуется более 200 радиоактивных элементов. Наибольшую опасность представляют иод-131, стронций-90 и цезий-137. Они биологически активны и имеют период полураспада соответственно 8 сут, 28 лет и 30 лет. При ядерном взрыве образуется ударная волна. Радиус поражения R определяется из соотношения $10^5 \text{ Па} = E/R^3$, где E — энергия, выделяющаяся в ядерном взрыве. Для атомной бомбы (20 кт) $R = 1$ км, для термоядерной (1 Мт) $R = 3,7$ км. Диаметр ярко светящегося огненного шара через 10 с достигает максимального размера ~ 2000 м. Спустя минуту после взрыва, находясь на высоте 7 км от центра взрыва, шар перестает испускать видимое излучение. За время свечения в электромагнитное излучение переходит 25–35% энергии взрыва. Спустя 10 мин грибовидное облако достигает максимальной высоты (~ 20 км). После этого оно рассеивается ветрами на сотни и более километров. Радиоактивные частицы выпадают на поверхность Земли. Особенно опасен приземный взрыв — радиоактивное облако сильно загрязнено частицами грунта, которые выпадают из него в концентрации, губительной для человека.

В последнее время получены результаты исследования климатических последствий ядерных взрывов на основе физико-математических моделей ядерной войны [75]. Численное моделирование выполнено независимо учеными США и советскими учеными.

Сейчас во всем мире имеется не менее 50 тыс. ядерных зарядов общей мощностью 18 000 Мт: на долю каждого живущего на Земле приходится свыше 3 т. Заметим, что суммарная мощность взрывчатых веществ израсходованных во второй мировой войне равна 3 Мт. По оценке экспертов американский ядерный арсенал содержит свыше 15 тыс. ядерных боеголовок мощностью от 50 кт до 10 Мт, в которых сосредоточено 100 т плутония и около 1000 т урана-235. Ударный заряд подводной лодки типа «Трайдент» составляет 24 Мт.

В основном сценарии ядерного конфликта предполагается, что мощность бомб достигнет 5000 Мт. Диапазон мощности отдельных бомб задан для наиболее типичных боеголовок в пределах 0,2–1 Мт, а число взрывов $\sim 10,4$ тыс.

Самые тяжелые последствия, помимо прямых воздействий ядерных взрывов, связаны с радиоактивными выпадениями. Особенно опасен плутоний-239, являющийся источником α -радиоактивности. Считается, что будет выброшено до 50 т плутония.

В результате взрывов произойдет образование и выброс в атмосферу до двадцати миллионов тонн окислов азота. Через 10–15 сут они достигнут озонового слоя. Разрушение слоя приведет к образованию гигантского «окна» и к гибели растительности, не защищенной от ультрафиолетового излучения. В модели было учтено влияние многочисленных пожаров, а также выброс в атмосферу частиц сажи, а в стратосферу — пыли. Расчеты показали, что сразу после взрыва в Северном полушарии происходит быстрое похолодание. Через 100 сут после конфликта загрязнение стратосферы становится преобладающим. Это приведет к уменьшению освещенности. Поверхность нашей планеты быстро остынет. Лето превратится в зиму. Погибнет весь урожай. Свыше 2 млрд людей будут страдать от голода и других последствий «ядерной зимы». По-видимому, воздействия ядерных взрывов на глобальный климат исчезают примерно через два года [75].

Модельные оценки последствий ядерного конфликта позволяют сделать уверенный вывод, что, наряду с разрушительными «быстрыми» эффектами ядерных взрывов (которые согласно данным Всемирной организации здравоохранения могут привести к гибели миллиарда человек), неизбежные глобальные климатические изменения создают потенциальную угрозу жизни десятков или сотен миллионов людей.

В настоящее время гонка вооружений отвлекает огромные материальные и интеллектуальные ресурсы, которые могли бы обеспечить экономическое и культурное развитие многих стран мира. Наша страна готова к самым радикальным решениям, которые позволили бы отвести угрозу ядерной войны; договориться о полном прекращении испытаний ядерного оружия и уничтожить его запасы.

I. МЕХАНИКА

§ 1. Кинематика

ЗАДАЧА 1.1. Два тела, соединенные стержнем или натянутым тросом, имеют скорости $\vec{v}_1(t)$ и $\vec{v}_2(t)$. Показать, что проекции скоростей на прямую, проходящую через эти тела, одинаковы (рис. Д.1.1).

Решение. По условию задачи расстояние s между телами не изменяется. Вводя прямоугольные координаты, запишем это условие в виде

$$(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = s^2. \quad (1)$$

Здесь $x_1(x_2)$, $y_1(y_2)$ — координаты первого (второго) тела. При

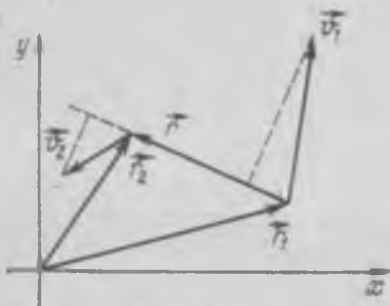


Рис. Д.1.1

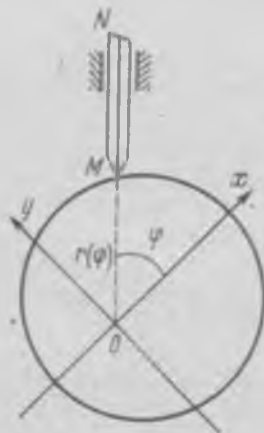


Рис. Д.1.2

движении стержня координаты тел являются функциями времени. Поскольку нас интересует соотношение, связывающее скорости тел, то необходимо продифференцировать (1) по времени

$$(x_2 - x_1)(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) + (y_2 - y_1)(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) = 0. \quad (2)$$

Далее заметим, что согласно определению (3.3) скорости тел равны $\vec{v}_1 = (\dot{x}_1, \dot{y}_1)$, $\vec{v}_2 = (\dot{x}_2, \dot{y}_2)$. Поскольку координаты тел являются проекциями радиус-векторов $\vec{r}_1 = (x_1, y_1)$, $\vec{r}_2 = (x_2, y_2)$, то,

используя определение скалярного произведения (1.5), перепишем (2) в виде

$$(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0. \quad (3)$$

Учитывая, что вектор, соединяющий первое и второе тела, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$, получим из (3) $r(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = 0$. Из последнего соотношения следует $r\vec{v}_1 = r\vec{v}_2$, или $v_1 \cos \alpha_1 = v_2 \cos \alpha_2$. Этот результат поясняет, почему скорость человека на водных лыжах может быть больше скорости катера.

ПРИМЕР 1.2. Преобразование вращательного движения в колебательное движение по прямой. Проведем на плоскости числовую ось x и луч, выходящий из начала координат под углом φ к оси x . Зададим далее функцию $r(\varphi) = l + R \cos \varphi$ и отметим на луче расстояние $r(\varphi)$. Различным значениям φ соответствуют различные в общем случае значения функции $r(\varphi)$. Отмечая эти точки на плоскости, получим замкнутую линию, которая называется улиткой Паскаля [35].

На рис. Д.1.2 в осях x, y изображена функция $r(\varphi) = 3 + \cos \varphi$. Изготовим профиль, соответствующий этой кривой, и начнем вращать его с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси, проходящей через точку O . Тогда стержень MN , скользящий концом M по этому профилю, будет совершать гармонические колебания вдоль своей оси. Зависимость от времени вертикальной координаты точки M — $3 + \cos \omega t$.

§ 2. Равномерное движение

ЗАДАЧА 2.1. Два тела равномерно движутся по прямым, которые пересекаются под углом α . Скорости тел одинаковы и равны v . В начальный момент времени тела находились в точках O_1 и O_2 (рис. Д.2.1). Расстояние $O_1O_2 = l$. Определить промежуток времени, через который расстояние между телами будет наименьшим, и каково это расстояние.

Решение. Из теоремы косинусов нетрудно найти расстояние $s(t)$ между точками в момент времени $t > 0$:

$$s^2(t) = (vt)^2 - 2vt(l - vt) \cos \alpha + (l - vt)^2.$$

Раскрывая это выражение и выделяя полный квадрат, находим, что

$$s^2(t) = l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2} + 4 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \left(vt - \frac{l}{2} \right)^2 \geq l^2 \sin^2 \frac{\alpha}{2},$$

поскольку всегда $(vt - l/2)^2 \geq 0$. Таким образом, в момент времени $t_1 = l/2v$ расстояние между точками минимально и равно $l \sin(\alpha/2)$.

ЗАДАЧА 2.2. Два поезда, следующих в противоположных направлениях, встречаются в пути. Пассажир второго поезда засек по часам, что встречный поезд промелькнул за окном за $\tau=6$ с. Найти длину первого поезда, если скорости поездов $v_2=45$ км/ч, $v_1=36$ км/ч.

Решение. На рис. Д.2.2 построены графики функций $x_A(t)$, $x_B(t)$, $x_H(t)$, определяющих зависимость от времени x -координаты первого и последнего вагона первого поезда и x -координату наб-

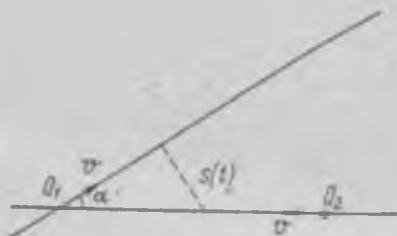


Рис. Д.2.1

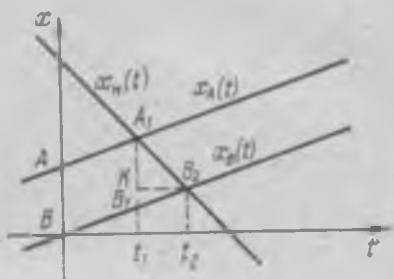


Рис. Д.2.2

людателя, сидящего во втором поезде. В момент времени $t=t_1$ он увидел первый вагон, а в момент времени $t=t_2$ — последний вагон. По условию задачи $t_2-t_1=\tau$. Длина первого поезда $l_1=A_1K+KB_1$. Поскольку $A_1K=v_2\tau$, $KB_1=v_1\tau$, то $l_1=(v_1+v_2)\tau$, $l_1=135$ м. А теперь решите эту задачу самостоятельно в системе отсчета, движущейся вместе со вторым поездом (см. § 9).

§ 3. Прямолинейное движение с постоянным ускорением

ЗАДАЧА 3.1. Пассажир первого вагона прогуливался по перрону. Когда он был у последнего вагона, поезд начал двигаться с ускорением a . Пассажир сразу же побежал к своему вагону. С какой наименьшей постоянной скоростью он должен бежать, чтобы успеть сесть в первый вагон. Длина поезда равна l .

Решение. Поместим начало координат оси x у последнего вагона, положительно направление оси x совпадает с направлением ускорения поезда. Функции $x_1(t)=l+\frac{1}{2}at^2$, $x_2(t)=vt$ определяют зависимость от времени координат первого вагона и пассажира. В момент времени $t=T$ пассажир догоняет поезд, $x_1(T)=x_2(T)$. Следовательно, $l+\frac{1}{2}aT^2=vT$. Из этого уравнения находим два корня

$$T_{2,1} = \frac{1}{a} (v \pm \sqrt{v^2 - 2al}).$$

Из рис. Д.3.1 видно, что наименьшему значению скорости соответствует слияние корней, т. е. $T_1 = T_2 = T_0$ при $v_{\min} = \sqrt{2al}$.

ЗАДАЧА 3.2. Камень брошен вертикально вверх. На некоторой высоте камень находится в моменты времени t_1 и t_2 . Определить начальную скорость камня.

Решение. Выберем координатную ось, направленную вертикально вверх. Начало отсчета находится в точке бросания, т. е. вектор начального положения $\vec{r}_0 = 0$. Проекция векторного соотношения (6.5) на вертикаль дает зависимость координаты $y(t)$ камня от времени:

$$y(t) = v_0 t - \frac{1}{2} g t^2.$$

По условию задачи в моменты времени t_1 и t_2 камень находится на одной и той же высоте, т. е. $y(t_1) = y(t_2)$. Подставляя в это соотношение значения функции $y(t)$ в моменты времени t_1 и t_2 , получим уравнение

$$v_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 = v_0 t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2,$$

из которого определим $v_0 = \frac{1}{2} g (t_1 + t_2)$.

§ 4. Законы Ньютона

ПРИМЕР 4.1. К концу B каната AB длиной l , лежащего на горизонтальной плоскости, приложена сила F (рис. Д.4.1). Найти силу упругости, действующую на часть каната AC длиной x .

В горизонтальном направлении на часть AC со стороны части CB действует сила упругости $\vec{T}_1$. Согласно третьему закону Ньютона на часть CB действует сила упругости $\vec{T}_2 = -\vec{T}_1$. Из второго закона Ньютона, записанного для двух частей каната

$$m_x \vec{a} = m_x \vec{g} + \vec{N}_x + \vec{T}_1,$$

$$(m - m_x) \vec{a} = (m - m_x) \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_2 + \vec{F},$$

находим

$$m_x a = T, \quad (m - m_x) a = F - T,$$

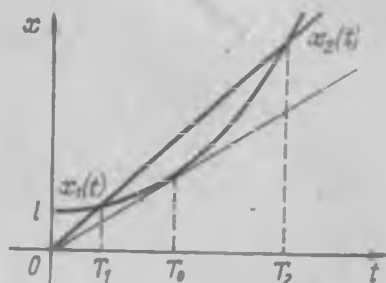


Рис. Д.3.1

где $T = |\vec{T}_1| = |\vec{T}_2|$. Следовательно,

$$ma = F, \quad T = \frac{m_x}{m} F = \frac{x}{l} F.$$

ЗАДАЧА 4.2. Маляр работает в подвесном кресле. С какой силой он должен тянуть за веревку, чтобы подниматься вверх с ускорением a ? Чему равны давление маляра на кресло и полная нагрузка на блок? Масса кресла $m_2 = 24$ кг, масса маляра $m_1 = 76$ кг, $a = 1/5 g$.

Решение. Перечислим силы, действующие на кресло: сила тяжести $m_2 g$, сила упругости веревки $\vec{T}_2$, сила давления $\vec{N}'$ со стороны маляра. На маляра действуют: сила тяжести $m_1 g$, сила упругости веревки $\vec{T}_1$ и сила реакции $\vec{N}$ со стороны кресла (рис. Д.4.2). Согласно второму закону Ньютона

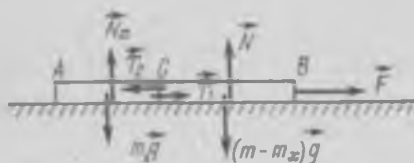


Рис. Д.4.1

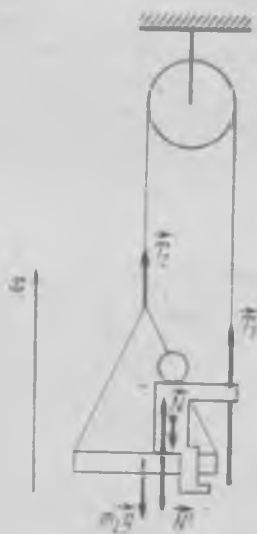


Рис. Д.4.2

$$m_1 \vec{a} = m_1 \vec{g} + \vec{N} + \vec{T}_1, \quad (1)$$

$$m_2 \vec{a} = m_2 \vec{g} + \vec{N}' + \vec{T}_2. \quad (2)$$

Проекция (1), (2) на ось x приводит к системе уравнений

$$m_1 a = -m_1 g + N + T, \quad (3)$$

$$m_2 a = -m_2 g - N + T. \quad (4)$$

(Мы учли, что $N = N'$, $T_1 = T_2 = T$.) Из (3), (4) находим

$$T = \left(1 + \frac{a}{g}\right) T_0, \quad T = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) g.$$

Здесь T_0 — сила упругости веревки в равновесии ($a=0$),

$$N = \frac{1}{2} (m_1 - m_2) (a + g).$$

Подставляя числовые значения, находим $T=60$ кгс, $N=31,2$ кгс. Полная нагрузка на блок равна $2T=120$ кгс.

ЗАДАЧА 4.3. Электровоз движется вверх по уклону с постоянным ускорением. Найти «силу тяги» электровоза.

Решение. На электровоз действуют сила тяжести, сила реакции со стороны рельс и сила трения, возникающая вследствие сопротивления проскальзыванию ведущих колес. Проекция этих сил на ось x , направленную вверх по уклону,

$$F(\alpha) = mg(k \cos \alpha - \sin \alpha),$$

где α — угол уклона. Величина этой силы максимальна при движении по горизонтально расположенным рельсам: $F_{\max} = kmg$ и быстро падает с ростом угла α . Уже при значении $k=0,2$, $\alpha_1 = 0,1$ ($=6^\circ$) величина силы $F(\alpha_1) \approx 0,5 F_{\max} = 0,5 kmg$, т. е. уменьшается в два раза. Предельный уклон определяется углом α_0 , $\operatorname{tg} \alpha_0 = k$. В этом случае $F(\alpha_0) = 0$. Учитывая, что реальное значение $k \approx 0,2$, находим $\alpha_0 = 11^\circ$. Следовательно, можно сделать вывод: для эффективного использования мощности двигателя полотно железной дороги не должно иметь больших уклонов, а массу электровоза желательно увеличить.

ЗАДАЧА 4.4. Тело массой m находится на наклонной плоскости, которая составляет угол $\alpha = 10^\circ$ с горизонтом. Определить ускорение a тела относительно наклонной плоскости, если коэффициент трения $k=0,2$. Нарисуйте график зависимости силы трения от угла наклона α .

Решение задачи следует из анализа графика функции $F_x^{\text{тр}}(F_x)$, изображенного на рис. 9.9 б. Поскольку $F_x = mg \sin \alpha$, $N = mg \cos \alpha$, то $F_x^{\text{тр}} = -mg \sin \alpha$, если $F_x < kN$, и $F_x^{\text{тр}} = -kmg \cos \alpha$ при $F_x > kN$. Следовательно, функция $F_x^{\text{тр}}(\alpha)$ имеет вид

$$F_x^{\text{тр}}(\alpha) = \begin{cases} -mg \sin \alpha, & \alpha < \alpha_1, \\ -kmg \cos \alpha, & \alpha \geq \alpha_1. \end{cases}$$

Значение угла α_1 определяется условием $F_x = kN$: $\operatorname{tg} \alpha_1 = k$. При $\alpha < \alpha_1$ тело неподвижно, при $\alpha > \alpha_1$ тело скользит по наклонной плоскости. Подставляя значение k , получим $\alpha_1 = 11^\circ 20'$. Вывод: тело будет находиться в покое.

§ 5. Закон сохранения импульса

Центр масс. Рассмотрим систему, состоящую из n частиц. Полный импульс системы частиц

$$\vec{P} = \sum_{a=1}^n m_a \vec{v}_a.$$

Найдем связь между $\vec{P}$ и полным импульсом частиц $\vec{P}'$ в другой системе отсчета K' , движущейся относительно исходной со скоростью $\vec{u}$. Учитывая (5.5), получим

$$\vec{P} = m\vec{u} + \vec{P}', \quad \vec{P}' = \sum_{a=1}^n m_a \vec{v}_a,$$

m — масса всех частиц. Если скорость системы отсчета выбрать равной

$$\vec{u} = \vec{P}/m, \quad (Д.5.1)$$

то $\vec{P}' = 0$. В этом случае говорят, что *система частиц покоится* относительно системы отсчета K' . Тогда скорость (Д.5.1) приобретает смысл *скорости движения системы частиц «как целого»* с импульсом $\vec{P}$ и массой m . Правая часть (Д.5.1) может быть представлена как производная по времени от выражения

$$\vec{R} = \frac{1}{m} \sum_{a=1}^n m_a \vec{r}_a. \quad (Д.5.2)$$

Вектор $\vec{R}$ соединяет начало координат и точку, которая называется *центром масс* системы частиц. Закон сохранения импульса замкнутой системы можно сформулировать как утверждение о том, что ее центр масс движется прямолинейно с постоянной скоростью $\vec{u}$.

На рис. Д.5.1 изображена система, состоящая из двух частиц, например атом водорода, причем $m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t) = 0$. Импульс атома $\vec{P} = (m_1 + m_2)\vec{u}$. Если $\vec{u} = 0$, то атом покоится, однако протон и электрон движутся. Это утверждение является естественным обобщением понятия покоя отдельной материальной точки.

Заметим, что в определении температуры (20.2) величина $E = \frac{1}{2} m u^2$ — кинетическая энергия движения молекулы «как целого».

ЗАДАЧА 5.1. Два конькобежца массами $m_1 = 80$ кг и $m_2 = 50$ кг, держась за концы длинного натянутого невесомого шнура, неподвижно стоят на льду один против другого. Один из них начинает укорачивать шнур, причем в некоторый момент времени скорость выгибания шнура $v_0 = 1$ м/с. С какой скоростью движутся

конькобежцы в этот момент времени. Трением коньков о лед пренебречь.

Решение. Поскольку внешние силы в горизонтальном направлении отсутствуют (трением пренебрегаем), сила натяжения шнура, являясь внутренней силой, не может изменить горизонтальной составляющей полного импульса конькобежцев. В начальном состоянии импульс равен нулю. После того как конько-

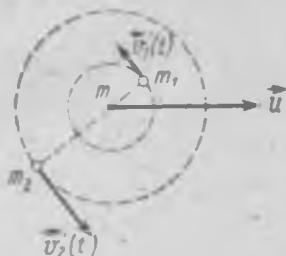


Рис. Д.5.1

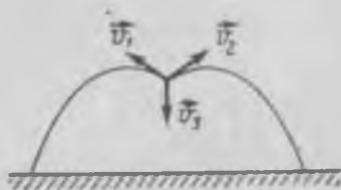


Рис. Д.5.2

бежцы начали двигаться навстречу друг другу, горизонтальная составляющая суммарного импульса стала равна $m_1 v_1 - m_2 v_2$, где v_1 и v_2 — величины скорости в системе отсчета, связанной с поверхностью льда. Согласно закону сохранения импульса

$$0 + 0 = m_1 v_1 - m_2 v_2. \quad (1)$$

С другой стороны, относительная скорость конькобежцев $v_1 + v_2$ равна скорости выбирания шнура:

$$v_1 + v_2 = v_0. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v_0 = 0,385 \text{ м/с}, \quad v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_0 = 0,615 \text{ м/с}.$$

ЗАДАЧА. 5.2. Снаряд, летящий вертикально вверх, разрывается в верхней точке траектории на три равных осколка, которые разлетаются в вертикальной плоскости. Один из них, двигаясь по вертикали, упал через T_0 с после выстрела, два других упали одновременно через T ($T_0 < T$) на одинаковых расстояниях от орудия. Найти высоту, на которой разорвался снаряд.

Решение. Поскольку изменение состояния снаряда происходит за короткий интервал времени Δt , то в процессе разрыва импульсом внешней силы $mg\Delta t$ можно пренебречь по сравнению с приращениями импульса каждого из осколков. Тогда из (10.3) следует, что $\Delta \vec{P} \approx 0$ в течение интервала Δt . Поскольку в точке раз-

рыва скорость снаряда равна нулю, то из этого условия следует уравнение

$$m \cdot 0 = \frac{m}{3} \vec{v}_1 + \frac{m}{3} \vec{v}_2 + \frac{m}{3} \vec{v}_3. \quad (1)$$

На рис. Д.5.2 изображены векторы $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$, ориентированные в соответствии с (1) и условием $T_0 < T$. Предлагая далее самостоятельно продолжить решение, приведем ответ: $H = \frac{1}{2} g T_0 T (T_0 + 2T) / (2T_0 + T)$.

§ 6. Статика

Момент силы. На рис. Д.6.1 изображено тело, к которому приложена сила $\vec{F}$. Вектор $\vec{r}$ соединяет начало координат и точку приложения силы $\vec{F}$. Определим вектор $\vec{L}$, образованный векторным произведением $\vec{r}$ и $\vec{F}$:

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{F}]. \quad (Д.6.1)$$

Поскольку $\vec{r} = (r \cos \alpha, r \sin \alpha, 0)$, $\vec{F} = (F \cos \beta, F \sin \beta, 0)$, то согласно (1.8) $L_x = L_y = 0$,

$$L_z = xF_y - yF_x = Fr \sin(\beta - \alpha) = Fh. \quad (Д.6.2)$$

Рис. Д.6.1

Таким образом, введенная в § 11 величина L является, строго говоря, проекцией вектора (Д.6.1) на ось, перпендикулярную плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{F}$. Вектор $\vec{L}$ называется **моментом силы $\vec{F}$** . Момент силы зависит от выбора начала координат, относительно которого он определен.

Рассмотрим теперь неподвижное тело, к которому приложено несколько сил. Тогда сумма всех сил $\vec{F} = 0$. В этом случае сумма моментов сил, действующих на систему, не зависит от выбора начала координат. Действительно, пусть вектор $\vec{c}$ соединяет начала исходной системы и системы координат K' . Новые радиус-векторы $\vec{r}'$ точек приложения сил связаны со старыми соотношениями (5.2): $\vec{r} = \vec{c} + \vec{r}'$. Поэтому

$$\sum_{a=1}^n [\vec{r}_a \cdot \vec{F}_a] = \sum_{a=1}^n [\vec{c} \cdot \vec{F}_a] + \sum_{a=1}^n [\vec{r}'_a \cdot \vec{F}_a]$$

или $\vec{L} = [\vec{c} \cdot \vec{F}] + \vec{L}'$. Поскольку $\vec{F} = 0$, то $\vec{L} = \vec{L}'$.

ЗАДАЧА 6.1. Концы однородного тонкого стержня находятся на гранях прямого двугранного угла. Одна из граней образует угол α с горизонтальной плоскостью. Найти угол φ между стержнем и другой гранью в положении равновесия и силы реакции граней. Масса стержня m , поверхности граней абсолютно гладкие.

Решение 1. В положении равновесия сумма сил, действующих на стержень, равна нулю (рис. Д.6.2а): $\vec{mg} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = 0$. Приравни-

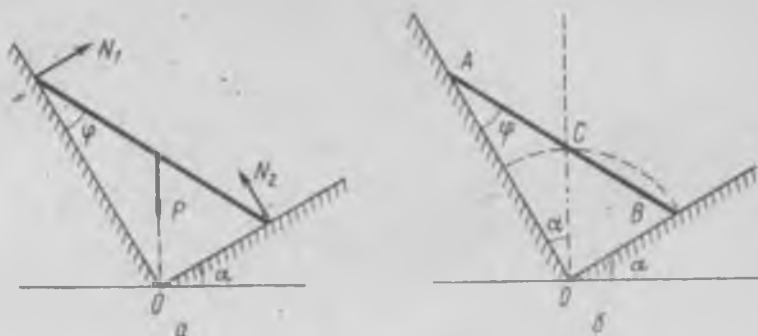


Рис. Д.6.2

вая нулю сумму проекций всех сил на горизонталь и вертикаль, получим

$$N_1 \cos \alpha - N_2 \sin \alpha = 0, \quad N_1 \sin \alpha + N_2 \cos \alpha - mg = 0.$$

Следовательно,

$$N_1 = mg \sin \alpha, \quad N_2 = mg \cos \alpha. \quad (1)$$

Записывая равенство нулю моментов сил относительно центра тяжести стержня, получим уравнение

$$N_1 \frac{L}{2} \cos \varphi - N_2 \frac{L}{2} \sin \varphi = 0. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим $\varphi = \alpha$.

2. Угол φ можно найти более простым способом, если заметить, что при смещениях стержня центр тяжести движется по окружности с центром в точке O (рис. Д.6.2б), ее радиус равен $L/2$. Поэтому в положении равновесия центр тяжести должен находиться в точке C пересечения этой окружности и вертикали, проходящей через точку O . Поскольку $\triangle ACO$ равнобедренный, то $\varphi = \angle COA = \alpha$. Очевидно, положение равновесия стержня неустойчиво.

ЗАДАЧА 6.2. Квадрат из однородной проволоки, у которого отрезана одна сторона, одним углом подвешен на гвоздь. Определить угол, образуемый средней стороной с вертикалью.

Решение. Поскольку мы можем мысленно заменить любое тело одним грузом, сосредоточенным в центре тяжести, ясно, что в равновесии этот груз будет лежать на вертикали. Значит, для решения задачи достаточно найти положение центра тяжести квадрата (рис. Д.6.3).

Центры тяжести сторон лежат на их серединах в точках A, B, C, D . Точки A и C расположены симметрично, поэтому удобно найти вначале центр тяжести этих точек. Он лежит на середине прямой, соединяющей точки A и C в точке E . Теперь найдем центр тяжести рамки, т. е. точки D массой $2m/3$ и точки B массой $m/3$. Сумма моментов сил тяжести точек B и D относительно центра

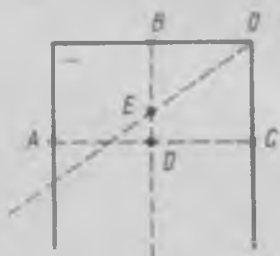


Рис. Д.6.3

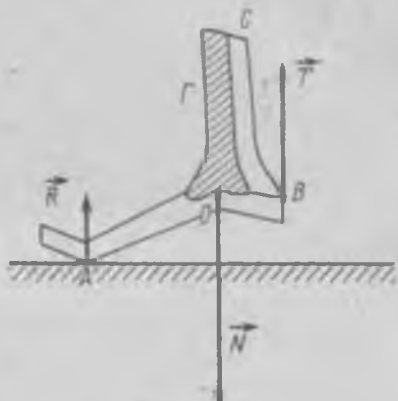


Рис. Д.6.4

тяжести (точка E) должна быть равна нулю. Учитывая, что $BD = a/2$ (a — сторона квадрата), запишем условие равновесия в явном виде:

$$BE \frac{mg}{3} - \left(\frac{a}{2} - BE \right) \frac{2mg}{3} = 0.$$

Отсюда находим $BE = a/3$. Если квадрат подвешен за вершину O , то угол средней стороны с вертикалью найдем из треугольника OBE : $\operatorname{tg} \alpha = BE/BO = 2/3$.

ПРИМЕР 6.3. Модель стопы. Найдем условия равновесия человека, стоящего на цыпочках [1].

На рис. Д.6.4 схематически изображена модель стопы: OB — пятка, AO — плюсна, O — точка соприкосновения лодыжки и голени OG , CB — ахилловы сухожилия. Перечислим силы, действующие на стопу: $\vec{R}$ — сила реакции пола, величина которой $R = mg$ (m — масса человека), $\vec{T}$ — сила упругости сухожилий, $\vec{N}$ — сила давления голени на лодыжку. Поскольку сумма сил равна нулю, то $N = mg + T$. Плечо силы $\vec{R}$ относительно оси, проходящей через точку O (равное обычно 12 см), в два раза боль-

ше плеча силы T . Следовательно, $T=2mg$. В наиболее уязвимом месте касания голени и лодыжки сила давления $N=3mg$ в три раза превосходит вес человека.

§ 7. Закон изменения и сохранения полной энергии

ЗАДАЧА 7.1. Ракета, запущенная вертикально, достигла высоты $h=192$ км. Во время работы двигателей ускорение ракеты $a=2$ м/с². Сколько времени работали двигатели? Сопротивление атмосферы не учитывать.

Решение. В момент выключения двигателей t_1 ракета достигла высоты $at_1^2/2$ и приобрела скорость at_1 . Далее ракета движется в поле тяжести с ускорением g . Общая высота подъема $h=at_1^2/2+(at_1)^2/2g=1/2at_1^2(1+a/g)$. Из этого уравнения находим $t_1=400$ с.

ЗАДАЧА 7.2. На гладкой горизонтальной плоскости покоится доска массой M . На доске лежит тело массой m , которому сообщают начальную скорость v . Коэффициент трения между телом и доской равен k . На какое расстояние сместится тело относительно доски?

Решение. В горизонтальном направлении на тело действует сила трения скольжения $F=kmg$, а на доску — сила трения $\vec{F}'=-\vec{F}$. После того как скорость тела относительно доски станет равной нулю, доска и тело как целое будут двигаться со скоростью u . Поскольку сумма проекций всех внешних сил (сил реакции и тяжести) на горизонтальное направление равна нулю, то сохраняется горизонтальная составляющая импульса системы

$$0+mv=(M+m)u. \quad (1)$$

Теперь в системе отсчета, связанной с Землей, запишем закон изменения полной энергии (12.16) каждого тела системы:

$$\frac{1}{2}mu^2-\frac{1}{2}mv^2=-kmgx_2 < 0,$$

$$\frac{1}{2}Mu^2-0=kmgx_1 > 0,$$

где x_2 , x_1 — перемещения тела и доски относительно Земли. Обратите внимание, что сила трения, действующая на доску, совершает положительную работу. Складывая эти соотношения, получим закон изменения полной энергии системы

$$\frac{1}{2}(m+M)u^2-\frac{1}{2}mv^2=-kmg(x_2-x_1) < 0. \quad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим перемещение тела относительно доски

$$x_2 - x_1 = \frac{mv^2}{2kg(m+M)}.$$

При $m \ll M$ перемещение тела $x_2 - x_1 = v^2/2kg$ оказывается таким же, как и в случае закрепленной доски.

ПРИМЕР 7.3. Длина капроновой страховочной веревки равна l_0 . На испытаниях относительное удлинение веревки под действием силы тяжести альпиниста оказалось равным ε_1 , а при предельной нагрузке — ε_m . Найдём условие, при котором альпинист сможет воспользоваться веревкой при падении.

Мы будем считать, что при растяжении веревка подчиняется закону Гука, пока относительное удлинение не достигнет значения ε_m . Величина ε_1 связана с массой альпиниста и жесткостью веревки соотношением

$$\varepsilon_1 = \frac{mg}{kl_0}. \quad (1)$$

Удлинение и натяжение веревки будут наибольшими в том случае, когда альпинист сорвется с высоты l_0 относительно точки закрепления веревки. Для определения максимальной длины веревки l_2 воспользуемся законом изменения полной энергии (12.16):

$$[0 + \frac{1}{2}k(l_2 - l_0)^2 - mgl_2] - (0 + mgl_0) = 0. \quad (2)$$

Учитывая (1), получим из (2) уравнение относительно неизвестной величины $\varepsilon = (l_2 - l_0)/l_0$: $\varepsilon^2 - 2\varepsilon\varepsilon_1 - 4\varepsilon_1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $\varepsilon = \varepsilon_1 + \sqrt{\varepsilon_1^2 + 4\varepsilon_1}$. Из неравенства $\varepsilon < \varepsilon_m$ найдем искомое условие

$$\varepsilon_1 < \frac{\varepsilon_m^2}{2(2 + \varepsilon_m)}.$$

Ускорение альпиниста достигает наибольшей величины в нижней точке траектории. Из второго закона Ньютона, записанного в проекции на вертикальную координатную ось, следует уравнение

$$ma = -k(l_2 - l_0) + mg,$$

из которого находим $a = -g\sqrt{1 + 4/\varepsilon_1}$. Пусть $l_0 = 10$ м, $\varepsilon = 0,01$, $\varepsilon_m = 0,25$. В этом случае ускорение $a \approx -20g$.

§ 8. Космические полеты

ЗАДАЧА 8.1. Космический аппарат (КА) движется по круговой орбите на расстоянии $h \ll R$ от поверхности Земли. В результате кратковременного изменения величины скорости он перешел

на орбиту приземления. Пренебрегая сопротивлением атмосферы, найти время движения КА до поверхности Земли.

Решение. После изменения скорости КА движется по эллиптической орбите, большая полуось которой $a = (R+r)/2$ (рис. Д.8.1). Здесь R — радиус Земли, $r = R+h$. Время спуска на Землю $\tau = T_s/2$, где T_s — период обращения по эллиптической орбите. Пусть T — период обращения КА по круговой орбите. Тогда из третьего закона Кеплера получим $T_s = T(a/r)^{3/2}$. Подставляя значение T (см. пример 14.4), найдем

$$\tau = \frac{1}{2} T_1 \left(\frac{a}{R} \right)^{3/2}, \quad T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} = 84 \text{ мин.}$$

Поскольку $h \ll R$, то

$$\tau = \frac{1}{2} T_1 \left(\frac{2R+h}{2R} \right)^{3/2} \simeq \frac{1}{2} T_1 \left(1 + \frac{3}{4} \frac{h}{R} \right).$$

Заметим, что задержка времени включения двигателей на Δt с приведет к смещению района посадки на

$$\Delta s = \left(\frac{R}{r} \right)^{3/2} v_1 \Delta t, \quad v_1 = \sqrt{gR}.$$

Полагая $h = 200$ км, $\Delta t = 1$ мин, получим $\Delta s \simeq 474$ км.

ЗАДАЧА 8.2. Чему равна потенциальная энергия тонкого кольца массой m_1 , радиусом a и точечного тела массой m_2 , находящегося на прямой, перпендикулярной плоскости кольца, на расстоянии r от его центра? Исследовать случаи $r \gg a$, $r \ll a$.

Решение. При вычислении потенциальной энергии мы не можем воспользоваться формулой (14.6), так как для небольших расстояний r кольцо нельзя считать материальной точкой. Поэтому поступим следующим образом. Разобьем кольцо на N малых элементов Δm_i , которые уже можно считать материальными точками. Тогда энергия взаимодействия Π_i такого элемента массой Δm_i с точечной массой определяется формулой (14.6)

$$\Pi_i = - \frac{\gamma m_2 \cdot \Delta m_i}{\sqrt{a^2 + r^2}}.$$

Здесь $\sqrt{a^2 + r^2}$ — расстояние между массами Δm_i и m_2 . Потенциальная энергия взаимодействия кольца с телом массой m_2 равна сумме потенциальных энергий взаимодействия всех элементарных масс Δm_i с точечной массой m_2 :

$$\Pi = \sum_{i=1}^N \Pi_i = - \frac{\gamma m_2}{\sqrt{a^2 + r^2}} \sum_{i=1}^N \Delta m_i = - \frac{\gamma m_1 m_2}{\sqrt{a^2 + r^2}}. \quad (1)$$

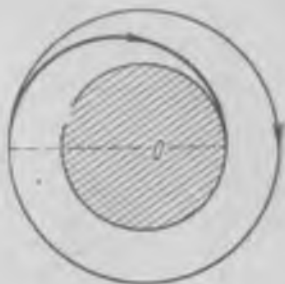


Рис. Д.8.1

Если $r \gg a$, то в сумме $a^2 + r^2$ под радикалом можно пренебречь слагаемым a^2 по сравнению с r^2 . В этом случае кольцо можно считать материальной точкой. Тогда энергия взаимодействия (1), как и в случае взаимодействия точечных масс, имеет вид (14.6).

Если же масса m_2 находится вблизи кольца на таких расстояниях, что $r \ll a$, то энергия взаимодействия

$$\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{a} + \gamma \frac{m_1 m_2}{a^3} r^2 + \dots$$

ЗАДАЧА 8.3. Какую скорость нужно сообщить ракете, чтобы она достигла Луны? Расстояние до Луны равно 60 земным радиусам.

1. Парадокс спутника [73]. На первом этапе развития космических исследований наибольшее распространение получили искусственные спутники Земли (ИСЗ), не имеющие систем посадки. Большинство из них после вывода на орбиту вследствие сопротивления атмосферы снижались и, попадая в плотные слои атмосферы, сгорали. Тормозящее действие атмосферы определяется ее плотностью. До запусков ИСЗ сведения о плотности атмосферы до высоты 200 км были получены благодаря полетам геофизических ракет. Позднее анализ движения ИСЗ позволил уточнить эти данные и получить новые. Оказалось, что плотность атмосферы зависит не только от высоты над уровнем моря, но и от других факторов. Так, плотность верхней атмосферы заметно увеличивается с усилением солнечной активности. Зависит она и от времени суток. Приведем средние значения плотности на некоторых высотах.

h , км	0	120	160	200	500
ρ , кг/м ³	1,225	10^{-6}	10^{-9}	$5 \cdot 10^{-10}$	10^{-13}

Атмосфера существует и на больших высотах. На расстояниях порядка 1000 км плотность $\rho = 10^{-15}$ кг/м³.

Мы видим, что уже на высоте 160 км плотность в миллиард раз меньше, чем на уровне моря. Поэтому может вызвать удивление тот факт, что спутник, начинающий движение на этой высоте, через два-три оборота прекращает свое существование, так как из-за сильного торможения быстро теряет высоту. «Время жизни» спутника, запущенного на круговую орбиту высотой 200 км, несколько больше 10 ч.

Сила сопротивления, действующая на спутник, обусловлена столкновениями с молекулами воздуха. При приближенных расчетах сила сопротивления определяется выражением $\vec{F}_c = -k\vec{v}$,

$k = c\rho S v$, где S — площадь поперечного сечения спутника, ρ — плотность атмосферы на высоте h . Коэффициент c , зависящий от аэродинамических свойств спутника, можно положить равным единице. Сравним теперь величины ускорений a_c и a_g , сообщаемых спутнику силой сопротивления и силой притяжения. Предположим, что спутник массой $m = 100$ кг имеет сечение $S = 1$ м² и движется на высоте $h = 160$ км со скоростью $v = 8$ км/с. В этом случае величина ускорения, создаваемого силой сопротивления

$$a_c = \rho \frac{S}{m} v^3 = 10^{-3} \cdot 10^{-3} (8 \cdot 10^3)^3 = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

В то же время ускорение, создаваемое силой тяжести,

$$a_g = g \left(\frac{R}{r} \right)^2 = 9,33 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, отношение возмущающего ускорения к основному составляет примерно одну пятнадцатитысячную часть. Тем не менее влияние атмосферы приводит к существенным изменениям траектории спутника.

Первый советский ИСЗ имел форму шара диаметром 58 см и массой 83,6 кг. Ракета-носитель была значительно больше по размерам, чем спутник. На первый взгляд казалось, что, поскольку ракета испытывает большее сопротивление, то ее скорость окажется меньше скорости спутника. На самом деле ракета-носитель значительно опередила спутник. Приведенный ниже простой расчет объясняет этот парадокс.

Если бы сопротивление отсутствовало, то полная энергия спутника (14.7) на круговой орбите радиусом r

$$E = \frac{mv^2}{2} - mg \frac{R^2}{r} \quad (\text{Д.8.1})$$

оставалась бы постоянной. Влияние сопротивления приводит к тому, что полная энергия убывает. Ее приращение согласно (12.17) равно работе сил сопротивления. На бесконечно малом перемещении $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$

$$\Delta E = \delta A = -k \vec{v} \Delta \vec{r} = -k v^2 \Delta t.$$

Переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение

$$E' = -k v^2 \quad (\text{Д.8.2})$$

(E' — производная энергии по времени). Траектория спутника представляет спиралеобразную кривую. Если эта траектория в те-

Если $r \gg a$, то в сумме $a^2 + r^2$ под радикалом можно пренебречь слагаемым a^2 по сравнению с r^2 . В этом случае кольцо можно считать материальной точкой. Тогда энергия взаимодействия (1), как и в случае взаимодействия точечных масс, имеет вид (14.6).

Если же масса m_2 находится вблизи кольца на таких расстояниях, что $r \ll a$, то энергия взаимодействия

$$\Pi = -\gamma \frac{m_1 m_2}{a} + \gamma \frac{m_1 m_2}{a^3} r^2 + \dots$$

ЗАДАЧА 8.3. Какую скорость нужно сообщить ракете, чтобы она достигла Луны? Расстояние до Луны равно 60 земным радиусам.

1. Парадокс спутника [73]. На первом этапе развития космических исследований наибольшее распространение получили искусственные спутники Земли (ИСЗ), не имеющие систем посадки. Большинство из них после вывода на орбиту вследствие сопротивления атмосферы снижались и, попадая в плотные слои атмосферы, сгорали. Тормозящее действие атмосферы определяется ее плотностью. До запусков ИСЗ сведения о плотности атмосферы до высоты 200 км были получены благодаря полетам геофизических ракет. Позднее анализ движения ИСЗ позволил уточнить эти данные и получить новые. Оказалось, что плотность атмосферы зависит не только от высоты над уровнем моря, но и от других факторов. Так, плотность верхней атмосферы заметно увеличивается с усилением солнечной активности. Зависит она и от времени суток. Приведем средние значения плотности на некоторых высотах.

h , км	0	120	160	200	500
ρ , кг/м ³	1,225	10^{-8}	10^{-9}	$5 \cdot 10^{-10}$	10^{-12}

Атмосфера существует и на больших высотах. На расстояниях порядка 1000 км плотность $\rho = 10^{-15}$ кг/м³.

Мы видим, что уже на высоте 160 км плотность в миллиард раз меньше, чем на уровне моря. Поэтому может вызвать удивление тот факт, что спутник, начинающий движение на этой высоте, через два-три оборота прекращает свое существование, так как из-за сильного торможения быстро теряет высоту. «Время жизни» спутника, запущенного на круговую орбиту высотой 200 км, несколько больше 10 ч.

Сила сопротивления, действующая на спутник, обусловлена столкновениями с молекулами воздуха. При приближенных расчетах сила сопротивления определяется выражением $F_c = -kv$,

$k = c\rho Sv$, где S — площадь поперечного сечения спутника, ρ — плотность атмосферы на высоте h . Коэффициент c , зависящий от аэродинамических свойств спутника, можно положить равным единице. Сравним теперь величины ускорений a_c и a_g , сообщаемых спутнику силой сопротивления и силой притяжения. Предположим, что спутник массой $m = 100$ кг имеет сечение $S = 1$ м² и движется на высоте $h = 160$ км со скоростью $v = 8$ км/с. В этом случае величина ускорения, создаваемого силой сопротивления

$$a_c = \rho \frac{S}{m} v^2 = 10^{-9} \cdot 10^{-2} (8 \cdot 10^3)^2 = 6,4 \cdot 10^{-4} \text{ м/с}^2.$$

В то же время ускорение, создаваемое силой тяжести,

$$a_g = g \left(\frac{R}{r} \right)^2 = 9,33 \text{ м/с}^2.$$

Следовательно, отношение возмущающего ускорения к основному составляет примерно одну пятнадцатитысячную часть. Тем не менее влияние атмосферы приводит к существенным изменениям траектории спутника.

Первый советский ИСЗ имел форму шара диаметром 58 см и массой 83,6 кг. Ракета-носитель была значительно больше по размерам, чем спутник. На первый взгляд казалось, что, поскольку ракета испытывает большее сопротивление, то ее скорость окажется меньше скорости спутника. На самом деле ракета-носитель значительно опередила спутник. Приведенный ниже простой расчет объясняет этот парадокс.

Если бы сопротивление отсутствовало, то полная энергия спутника (14.7) на круговой орбите радиусом r

$$E = \frac{mv^2}{2} - mg \frac{R^2}{r} \quad (\text{Д.8.1})$$

оставалась бы постоянной. Влияние сопротивления приводит к тому, что полная энергия убывает. Ее приращение согласно (12.17) равно работе сил сопротивления. На бесконечно малом перемещении $\Delta \vec{r} = \vec{v} \Delta t$

$$\Delta E = \delta A = -k \vec{v} \Delta \vec{r} = -k v^2 \Delta t.$$

Переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим уравнение

$$E' = -k v^2 \quad (\text{Д.8.2})$$

(E' — производная энергии по времени). Траектория спутника представляет спиралеобразную кривую. Если эта траектория в те-

чение периода незначительно отклоняется от окружности, то (см. пример 14.4)

$$v^2 = g \frac{R^2}{r}. \quad (\text{Д.8.3})$$

Однако теперь r и v являются функциями времени. Исключая из (Д.8.1) и (Д.8.3) r , получим $E = -mv^2/2$. Подставим далее это выражение в (Д.8.2), получим уравнение

$$mv' = +kv, \quad (\text{Д.8.4})$$

из которого видно, что скорость спутника растет по величине. Правая часть уравнения (Д.8.4) выглядит так, как будто сила сопротивления изменила знак и толкает спутник в направлении движения. Уравнение (Д.8.4) объясняет наблюдаемый эффект: поскольку для ракеты-носителя отношение k/m больше, чем для спутника, то скорость ракеты увеличивается быстрее.

Действие силы трения приводит к тому, что спутник начинает «падать», при этом его потенциальная энергия убывает. Полная энергия согласно (Д.8.2) тоже убывает, однако приращение кинетической энергии оказывается положительным. Следовательно, потенциальная энергия убывает настолько быстро (оставаясь отрицательной), что обеспечивает убыль полной энергии при одновременном росте кинетической.

Получим теперь соотношения, определяющие скорость изменения «радиуса» r орбиты и периода вращения. Для этого необходимо вспомнить правило дифференцирования степенных функций и сложных функций.

Выведем вначале уравнение, определяющее скорость изменения «радиуса» r орбиты. Для этого, учитывая (Д.8.3), перепишем (Д.8.1) в виде $E = -1/2 mgR^2/r$. Подставляя E в закон изменения полной энергии (Д.8.2), получим

$$r' = -2(k/m)r < 0. \quad (\text{Д.8.5})$$

Аналогичным образом найдем уравнение, определяющее эволюцию периода вращения $T' = -3(k/m)T$. Учитывая значение k , можно оценить приращение радиуса орбиты и периода спутника, запущенного на высоту $h = 160$ км. Полагая $m = 100$ кг, $S = 1$ м², $\Delta t = T$, найдем $\Delta r = -2(k/m)rT = -5,37$ км, $\Delta T = -3(k/m)T = -6,4$ с.

2. Невесомость и другие проблемы. Для осуществления полетов в космос потребовалось преодолеть огромные технические трудности, связанные с созданием ракеты-носителя, топлива, космического корабля, стартового комплекса. Каждый новый космический корабль совершеннее предыдущих. Однако и сейчас полет в космос — сложный процесс, требующий мужества и высокой профессиональной подготовки. Главное своеобразие полетов в космос — невесомость.

Человек не имеет отработанных реакций на невесомость, которая вызывает перестройку многих процессов в организме: он

обезвоживается, возникает нагрузка на вестибулярный аппарат, мышцы слабеют и уменьшаются в объеме. Невесомость оказывает также влияние на психологическое состояние космонавта. Увеличивается время, затрачиваемое на выполнение операций по управлению кораблем. Большие проблемы возникают и с привыканием к земной тяжести после возвращения из полета.

В космосе существует несколько видов излучений, представляющих опасность для живых организмов. К ним относятся прежде всего космические лучи — протоны и ядра с энергией $\geq 10^7$ эВ.

Еще один источник опасности — радиационные пояса Земли. Учитывая их расположение, траекторию полета выбирают таким образом, чтобы не попасть в центральную часть поясов. Третий, наиболее опасный для космонавтов вид радиации — протоны и альфа-частицы, испускаемые во время солнечных вспышек. Доза радиации от одной вспышки создает непосредственную угрозу здоровью и жизни человека [6, 7].

3. Спутник, свободный от сноса. На спутник действуют два типа сил: гравитационные и поверхностные, обусловленные давлением солнечного света, взаимодействием с атмосферой, с потоками микрометеоритов и частиц, испущенных Солнцем. В отсутствие поверхностных сил спутник должен двигаться по траектории, называемой геодезической. Эта кривая не зависит от формы спутника и его массы. Действие поверхностных сил приводит к тому, что за сутки спутник смещается в непредсказуемом направлении на сотни метров от геодезической.

Если внутри полого спутника поместить тело, то оно должно двигаться под действием только гравитационных сил, по геодезической, так как оболочка предохраняет его от внешних поверхностных сил. Как заставить спутник повторить движение тела? С этой целью на оболочке размещают газовые двигатели, корректирующие ее положение так, чтобы датчик, фиксирующий смещение оболочки всегда был расположен в центре масс всего спутника. Это устройство представляет развитие модели искусственной планеты, предложенной немецким физиком К. Шварцшильдом. Результаты испытаний показали, что уход спутника с геодезической траектории высотой 800 км составляет 200 м за месяц. Таким образом, спутники, свободные от сноса, могут служить навигационными ориентирами.

Другой способ осуществления геодезического движения состоит в использовании материала большой плотности. В этом случае поверхностные силы будут минимальными. Спутник такого типа запущен во Франции в 1975 г. Он изготовлен из урана-238 массой 47 кг, его радиус 25 см. Поверхность покрыта уголковыми отражателями и обеспечивает точность локации наземных объектов до 2 см. Это позволит измерять деформацию Земной коры, предсказывать землетрясения, а также проводить точные опыты по проверке эффектов теории относительности.

чение периода незначительно отклоняется от окружности, то (см. пример 14.4)

$$v^2 = g \frac{R^2}{r}, \quad (\text{Д.8.3})$$

Однако теперь r и v являются функциями времени. Исключая из (Д.8.1) и (Д.8.3) r , получим $E = -mv^2/2$. Подставим далее это выражение в (Д.8.2), получим уравнение

$$mv' = +kv, \quad (\text{Д.8.4})$$

из которого видно, что скорость спутника растет по величине. Правая часть уравнения (Д.8.4) выглядит так, как будто сила сопротивления изменила знак и толкает спутник в направлении движения. Уравнение (Д.8.4) объясняет наблюдаемый эффект: поскольку для ракеты-носителя отношение k/m больше, чем для спутника, то скорость ракеты увеличивается быстрее.

Действие силы трения приводит к тому, что спутник начинает «падать», при этом его потенциальная энергия убывает. Полная энергия согласно (Д.8.2) тоже убывает, однако приращение кинетической энергии оказывается положительным. Следовательно, потенциальная энергия убывает настолько быстро (оставаясь отрицательной), что обеспечивает убыль полной энергии при одновременном росте кинетической.

Получим теперь соотношения, определяющие скорость изменения «радиуса» r орбиты и периода вращения. Для этого необходимо вспомнить правило дифференцирования степенных функций и сложных функций.

Выведем вначале уравнение, определяющее скорость изменения «радиуса» r орбиты. Для этого, учитывая (Д.8.3), перепишем (Д.8.1) в виде $E = -1/2 mgR^2/r$. Подставляя E в закон изменения полной энергии (Д.8.2), получим

$$r' = -2(k/m)r < 0. \quad (\text{Д.8.5})$$

Аналогичным образом найдем уравнение, определяющее эволюцию периода вращения $T' = -3(k/m)T$. Учитывая значение k , можно оценить приращение радиуса орбиты и периода спутника, запущенного на высоту $h = 160$ км. Полагая $m = 100$ кг, $S = 1$ м², $\Delta t = T$, найдем $\Delta r = -2(k/m)rT = -5,37$ км, $\Delta T = -3(k/m)T \approx -6,4$ с.

2. Невесомость и другие проблемы. Для осуществления полетов в космос потребовалось преодолеть огромные технические трудности, связанные с созданием ракеты-носителя, топлива, космического корабля, стартового комплекса. Каждый новый космический корабль совершеннее предыдущих. Однако и сейчас полет в космос — сложный процесс, требующий мужества и высокой профессиональной подготовки. Главное своеобразие полетов в космос — невесомость.

Человек не имеет отработанных реакций на невесомость, которая вызывает перестройку многих процессов в организме: он

обезвоживается, возникает нагрузка на вестибулярный аппарат, мышцы слабеют и уменьшаются в объеме. Невесомость оказывает также влияние на психологическое состояние космонавта. Увеличивается время, затрачиваемое на выполнение операций по управлению кораблем. Большие проблемы возникают и с привыканием к земной тяжести после возвращения из полета.

В космосе существует несколько видов излучений, представляющих опасность для живых организмов. К ним относятся прежде всего космические лучи — протоны и ядра с энергией $\geq 10^7$ эВ.

Еще один источник опасности — радиационные пояса Земли. Учитывая их расположение, траекторию полета выбирают таким образом, чтобы не попасть в центральную часть поясов. Третий, наиболее опасный для космонавтов вид радиации — протоны и альфа-частицы, испускаемые во время солнечных вспышек. Доза радиации от одной вспышки создает непосредственную угрозу здоровью и жизни человека [6, 7].

3. Спутник, свободный от сноса. На спутник действуют два типа сил: гравитационные и поверхностные, обусловленные давлением солнечного света, взаимодействием с атмосферой, с потоками микрометеоритов и частиц, испущенных Солнцем. В отсутствие поверхностных сил спутник должен двигаться по траектории, называемой геодезической. Эта кривая не зависит от формы спутника и его массы. Действие поверхностных сил приводит к тому, что за сутки спутник смещается в непредсказуемом направлении на сотни метров от геодезической.

Если внутри полого спутника поместить тело, то оно должно двигаться под действием только гравитационных сил, по геодезической, так как оболочка предохраняет его от внешних поверхностных сил. Как заставить спутник повторить движение тела? С этой целью на оболочке размещают газовые двигатели, корректирующие ее положение так, чтобы датчик, фиксирующий смещение оболочки всегда был расположен в центре масс всего спутника. Это устройство представляет развитие модели искусственной планеты, предложенной немецким физиком К. Шварцшильдом. Результаты испытаний показали, что уход спутника с геодезической траектории высотой 800 км составляет 200 м за месяц. Таким образом, спутники, свободные от сноса, могут служить навигационными ориентирами.

Другой способ осуществления геодезического движения состоит в использовании материала большой плотности. В этом случае поверхностные силы будут минимальными. Спутник такого типа запущен во Франции в 1975 г. Он изготовлен из урана-238 массой 47 кг, его радиус 25 см. Поверхность покрыта уголковыми отражателями и обеспечивает точность локации наземных объектов до 2 см. Это позволит измерять деформацию Земной коры, предсказывать землетрясения, а также проводить точные опыты по проверке эффектов теории относительности.

§ 9. Движение тел в неинерциальных системах отсчета

1. До сих пор мы рассматривали движение тел в инерциальных системах отсчета. В таких системах ускорения тел вызываются реальными силами, т. е. действием каких-либо тел друг на друга. Если же сумма сил, действующих на тело, равна нулю, то оно либо покоится, либо движется равномерно и прямолинейно. Система отсчета, в которой это условие не выполняется, называется *неинерциальной системой*. В неинерциальных системах даже в отсутствие сил тело движется неравномерно. Поэтому для объяснения ускоренного движения свободного тела в неинерциальной системе вводят дополнительные силы — силы инерции, возникновение которых уже нельзя объяснить действием каких-либо тел. Их появление обусловлено особыми свойствами самой системы отсчета, а именно ее ускорением относительно инерциальной системы.

Чтобы сделать яснее сказанное, вернемся к примеру, рассмотренному в § 5. Однако теперь предположим, что поезд движется с ускорением $\vec{w}$ относительно платформы. Велосипедист по-прежнему движется равномерно со скоростью $\vec{v}$ относительно платформы. Выясним, каким будет казаться это движение наблюдателю, находящемуся в вагоне и считающему его неподвижным. Он установит, что относительная скорость велосипедиста и вагона, т. е. скорость велосипедиста относительно системы K' равна $\vec{v}' = \vec{v} - (\vec{u} + \vec{w}t)$. Другими словами, в системе K' велосипедист движется с ускорением, равным $-\vec{w}$, хотя мы знаем, что сумма реальных сил, действующих на него, равна нулю. Если наш наблюдатель верит в справедливость второго закона Ньютона, т. е. в то, что силы вызывают ускорение, то для объяснения поведения велосипедиста он должен предположить, что ускорение $-\vec{w}$ создается некоторой силой $\vec{F}_u = -m\vec{w}$. Другими словами, в неинерциальной системе отсчета на тело помимо «истинных» сил будет действовать добавочная псевдосила $\vec{F}_u = -m\vec{w}$. Эта дополнительная сила не вызывается действием каких-либо тел, так как действие этих тел остается таким же, как в инерциальной системе отсчета, а возникает вследствие ускоренного движения самой системы отсчета. Подобного рода силы называют силами инерции. Действительно, подставляя (5.6) в (9.1), мы получим второй закон Ньютона в неинерциальной системе отсчета

$$m\vec{a}' = \vec{F} - m\vec{w}, \quad (Д 9.1)$$

где $\vec{a}'$ — ускорение тела относительно неинерциальной системы

отсчета, $\vec{F}$ — результирующая сил, обусловленных взаимодействием тел.

Важным свойством сил инерции является их пропорциональность массе тела, на которое они действуют. Только одна сила в природе — сила тяготения — обладает тем же свойством. Аналогия между поведением тел в гравитационном поле и неинерциальной системе отсчета видна на следующем примере. Человек, помещенный в изолированный ящик, находит, что он давит на пол с силой, пропорциональной массе $P=mg$. Если бы не было Земли, т. е. в отсутствие поля тяготения, а ящик двигался с ускорением g , то человек опять бы обнаружил силу инерции, прижимающую его к полу, равную также mg . Равноценность сил инерции и тяжести представляет содержание так называемого *принципа эквивалентности Эйнштейна*.

ПРИМЕР 9.1. Рассмотрим задачу о перегрузках (см. пример 9.5) с точки зрения космонавта.

Система отсчета, связанная с ускоренно движущимся аппаратом, является неинерциальной. На космонавта действуют сила притяжения mg , сила упругости $\vec{N}$ и сила инерции $F_u = -m\vec{a}$. Поскольку в неинерциальной системе ускорение космонавта $\vec{a}' = 0$, то

$$0 = mg + \vec{N} - m\vec{a}. \quad (1)$$

Следовательно, $N = m(g + a)$. Этот пример еще раз показывает, что силы инерции обладают всеми свойствами сил тяготения. Влияние ускорения на величину силы N эквивалентно дополнительному полю тяготения: в ускоренно движущемся аппарате ускорением свободного падения можно назвать величину $g_{\text{эф}} = g + a$.

В том случае, когда неинерциальная система движется с ускорением a , направление которого не совпадает с вектором g , механические явления в такой системе можно описать, считая, что ускорение свободного падения есть векторная сумма $\vec{g}$ и $\vec{a}$, т. е. согласно (Д.9.1) $\vec{g}_{\text{эф}} = \vec{g} - \vec{a}$. Так, например, если в лифте находится маятник, то период его колебаний можно найти, заменяя в формуле (42.14) величину g на $|\vec{g} - \vec{a}|$. В лифте, движущемся ускоренно вверх, $T = 2\pi \sqrt{l/(g + a)}$. В лифте, движущемся ускоренно вниз, $T = 2\pi \sqrt{l/(g - a)}$. Эта формула имеет смысл при $a < g$. При $a = g$ (лифт свободно падает) наступает состояние невесомости. При этом грузик может висеть неподвижно в любом фиксированном положении (если начальная скорость равна нулю).

Определим период колебаний, если лифт движется вниз с ускорением $a > g$. В этом случае в положении равновесия грузик на-

ходитсЯ над точкой подвеса и при небольшом отклонении от положения равновесия колеблется с периодом $T = 2\pi \sqrt{l/(a-g)}$.

ПРИМЕР 9.2. Определим положение равновесия и период колебаний маятника, помещенного в вагоне, движущемся с ускорением относительно Земли (рис. Д.9.1 а).

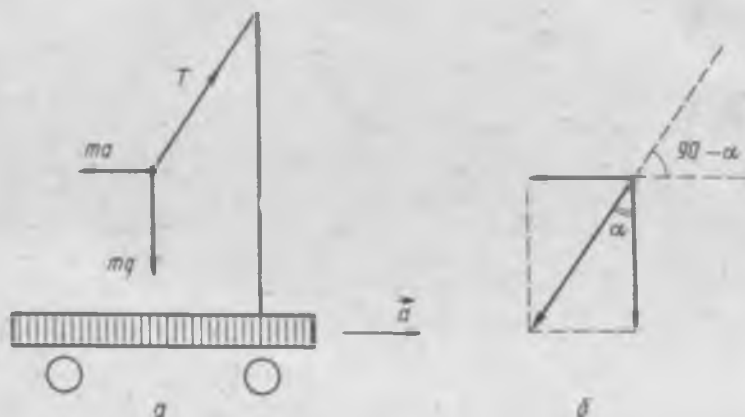


Рис. Д.9.1

В системе отсчета, связанной с вагоном, на грузик действуют сила притяжения Земли $\vec{mg}$, натяжение нити $\vec{T}$ и сила инерции $-\vec{ma}$. В положении равновесия сумма этих сил равна нулю. Это условие в явном виде может быть записано как равенство нулю суммы проекций сил на вертикаль и горизонталь, т. е.

$$T \sin \alpha - ma = 0, \quad T \cos \alpha - mg = 0.$$

Отсюда находим $\tan \alpha = a/g$. Наблюдатель, находящийся в вагоне, почувствует, что в вертикальном положении стоять трудно. Чтобы не упасть, он будет стремиться расположить свое тело, подобно нити маятника, т. е. под углом α к вертикали. Таким образом, он обнаруживает, что его «вертикаль» косая и направлена под углом $90^\circ - \alpha$ к направлению движения (рис. Д.9.1 б). Если вагон движется равномерно, то $a = 0$ и наблюдатель может стоять спокойно, поскольку его система отсчета стала инерциальной.

Определим период малых колебаний вблизи положения равновесия. Для этого в формулу для периода колебаний надо подставить величину вектора $\vec{g}_\Phi = \vec{g} - \vec{a}$. Из рис. Д.9.1 б видно, что $g_\Phi = \sqrt{g^2 + a^2}$. Итак, период колебаний маятника, помещенного в ускоренно движущемся вагоне, равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{\sqrt{g^2 + a^2}}}.$$

ЗАДАЧА 9.3. Сосуд с водой движется по горизонтальной плоскости с ускорением a . Определить положение поверхности воды.

ЗАДАЧА 9.4. Нить длиной l с грузиком на конце подвешена на тележке, которая без трения соскальзывает с наклонной плоскости с углом наклона α . Определить отклонение нити от вертикали в положении равновесия и период малых колебаний маятника.

Ответ. В положении равновесия нить образует угол α с вертикалью, период линейных колебаний $T = 2\pi\sqrt{l/g\cos\alpha}$.

ПРИМЕР 9.5. На краю доски длиной l массой m_2 лежит груз массой m_1 . С какой минимальной силой F надо тянуть доску по горизонтальной поверхности, чтобы груз соскользнул за время τ ? Коэффициент трения между доской и грузом k , трение между доской и плоскостью отсутствует (рис. Д.9.2).

В системе отсчета, связанной с неподвижной плоскостью, на

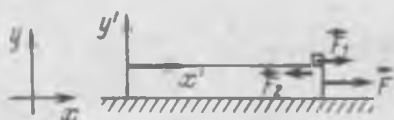


Рис. Д.9.2

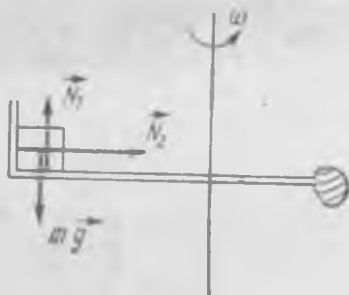


Рис. Д.9.3

груз действует только сила трения скольжения со стороны доски $F_{тр} = km_1g$. Согласно второму закону Ньютона под действием этой силы груз движется с ускорением

$$a_1 = kg. \quad (1)$$

Доска движется с ускорением a_2 под действием силы F и силы трения km_1g со стороны груза. Из второго закона Ньютона следует, что

$$m_2 a_2 = F - km_1 g. \quad (2)$$

В системе отсчета, связанной с доской, груз, двигаясь относительно нее с ускорением $a_1' \neq a_1$, пройдет путь l за время τ , т. е.

$$l = \frac{a_1' \tau^2}{2}. \quad (3)$$

Определим a_1' из второго закона Ньютона, записанного в неинерциальной системе отсчета, связанной с доской. В этой системе на

груз кроме силы трения действует сила инерции $-m_1 \vec{a}_2$. Из уравнения (Д.9.1) получим $m_1 a_1' = k m_1 g - m_1 a_2$,

$$a_1' = kg - a_2. \quad (4)$$

Исключая из (2) — (4) a_2 и a_1' , найдем

$$F = 2 \frac{lm_2}{r^2} + k(m_1 + m_2)g.$$

Ускорение a_1' груза относительно доски можно также найти, не прибегая к понятиям, введенным в этом параграфе. Действительно, согласно (5.6) ускорение груза $a_1' = a_1 - a_2$.

2. Центробежная сила инерции. Мы рассмотрели поведение тел в неинерциальных системах, движущихся поступательно с постоянным по величине и направлению ускорением относительно некоторой инерциальной системы. Рассмотрим теперь вопрос о том, какие силы инерции появляются в системе отсчета, которая равномерно вращается с угловой скоростью ω , т. е. в системе отсчета, ускорение которой направлено к оси вращения. Ограничимся при этом только тем случаем, когда тела неподвижны относительно этой системы.

Представим, что системой отсчета является вращающийся диск. Наблюдатель, находящийся на диске, установит, например, что отвес образует с вертикалью некоторый угол, поверхность воды в сосуде будет наклонена к горизонтали и т. д. Учитывая только «истинные» силы и написав условия равновесия, наблюдатель не сможет объяснить эти явления.

Однако если он помимо «истинных» сил введет добавочную силу $-m\vec{\omega}$, направленную от центра по радиусу и равную $m\omega^2 r$ (r — расстояние от центра диска до тела), то теперь условия равновесия дадут правильное объяснение поведению тел на вращающемся диске. Эта дополнительная сила инерции, которую приходится вводить во вращающейся системе отсчета, называется *центробежной силой инерции*, она равна $m\omega^2 r$ и направлена от оси вращения. Для точек, лежащих на одной окружности, центробежная сила одинакова, поскольку угловая скорость ω одна и та же для всех точек диска. Пропорциональность центробежной силы массе тела позволяет утверждать, что с точки зрения неинерциального наблюдателя возникает дополнительная сила тяжести, направленная по радиусу от центра.

Найдем силы реакции, действующие на тело, вращающееся в центрифуге с угловой скоростью ω (рис. Д.9.3). На тело действуют истинные силы притяжения к Земле $m\vec{g}$ и силы реакции N_1 и N_2 . С точки зрения наблюдателя, находящегося в покое на Земле, $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2$, где $\vec{a}$ — центростремительное ускорение, направ-

ленное перпендикулярно оси вращения. Это уравнение эквивалентно двум уравнениям (13.56) и (13.5 в)

$$m\omega^2 r = N_2', \quad 0 = N_1 - mg. \quad (\text{Д.9.2})$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в центрифуге, тело покоится под действием истинных сил и центробежной силы инерции. Поэтому условие равновесия приводит к двум уравнениям, формально не отличающимся от уравнений (Д.9.2)

$$0 = N_2 - m\omega^2 r, \quad 0 = N_1 - mg.$$

Из них следует, что сила реакции $N = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2}$. Полагая $r = 10$ м, $\omega = 2,21$ рад/с, получим $N = mg_{\text{эф}}$, где $g_{\text{эф}} \approx 5g$.

В период подготовки к полетам космонавты проводят тренировки на центрифуге: отрабатывается реакция на перегрузки, возникающие в реальном космическом полете.

Другой пример: состояние невесомости в спутнике. В спутнике на подставке лежит тело массой m . Допустим, что оно давит на подставку (с силой, равной, конечно, весу тела P), а подставка действует на него с силой реакции $N = P$. С точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле, сумма действующих сил (реакции $\bar{N}$ и силы притяжения к Земле mg) должна создавать центростремительное ускорение, поскольку тело вместе со спутником вращается по круговой орбите со скоростью v : $mv^2/R = mg - N$. Центростремительное ускорение спутника равно g (так как $v^2 = gR$). Таким образом, $N = 0$. Это означает, что вес тела на спутнике равен нулю.

В системе отсчета, связанной со спутником, на тело кроме сил реакции и притяжения действует также центробежная сила инерции $mv^2/R = mg$. Под действием этих сил тело покоится относительно спутника. Следовательно, из условия равновесия

$$m \cdot 0 = mg - N - \frac{mv^2}{R}$$

находим, что, с точки зрения наблюдателя, находящегося на спутнике, вес тела также равен нулю.

Если тело движется относительно неинерциальной системы, то на него кроме центробежной силы действует еще *сила Кориолиса*, свойства которой мы здесь не рассматриваем. Эту силу необходимо принимать во внимание при объяснении различных явлений, возникающих при движении тела относительно Земли, так как Земля является неинерциальной системой (см. § 8).

3. Космический лифт. Предположим, что на экваторе возведена башня, в которой действует лифт. При медленном подъеме с постоянной скоростью к грузу необходимо приложить силу $mgR^2/r^2 - m\omega^2 r$, направленную вертикально вверх, где ω — угловая скорость вращения Земли. На расстоянии $r_1 = (gR^2\omega^{-2})^{1/3} =$

груз кроме силы трения действует сила инерции $-m_1\vec{a}_2$. Из уравнения (Д.9.1) получим $m_1 a_1' = k m_1 g - m_1 a_2$,

$$a_1' = kg - a_2. \quad (4)$$

Исключая из (2) — (4) a_2 и a_1' , найдем

$$F = 2 \frac{lm_2}{\tau^2} + k(m_1 + m_2)g.$$

Ускорение a_1' груза относительно доски можно также найти, не прибегая к понятиям, введенным в этом параграфе. Действительно, согласно (5.6) ускорение груза $a_1' = a_1 - a_2$.

2. **Центробежная сила инерции.** Мы рассмотрели поведение тел в неинерциальных системах, движущихся поступательно с постоянным по величине и направлению ускорением относительно некоторой инерциальной системы. Рассмотрим теперь вопрос о том, какие силы инерции появляются в системе отсчета, которая равномерно вращается с угловой скоростью ω , т. е. в системе отсчета, ускорение которой направлено к оси вращения. Ограничимся при этом только тем случаем, когда тела неподвижны относительно этой системы.

Представим, что системой отсчета является вращающийся диск. Наблюдатель, находящийся на диске, установит, например, что отвес образует с вертикалью некоторый угол, поверхность воды в сосуде будет наклонена к горизонтали и т. д. Учитывая только «истинные» силы и написав условия равновесия, наблюдатель не сможет объяснить эти явления.

Однако если он помимо «истинных» сил введет добавочную силу $-m\vec{\omega}$, направленную от центра по радиусу и равную $m\omega^2 r$ (r — расстояние от центра диска до тела), то теперь условия равновесия дадут правильное объяснение поведению тел на вращающемся диске. Эта дополнительная сила инерции, которую приходится вводить во вращающейся системе отсчета, называется *центробежной силой инерции*, она равна $m\omega^2 r$ и направлена от оси вращения. Для точек, лежащих на одной окружности, центробежная сила одинакова, поскольку угловая скорость ω одна и та же для всех точек диска. Пропорциональность центробежной силы массе тела позволяет утверждать, что с точки зрения неинерциального наблюдателя возникает дополнительная сила тяжести, направленная по радиусу от центра.

Найдем силы реакции, действующие на тело, вращающееся в центрифуге с угловой скоростью ω (рис. Д.9.3). На тело действуют истинные силы притяжения к Земле mg и силы реакции N_1 и N_2 . С точки зрения наблюдателя, находящегося в покое на Земле, $m\vec{a} = mg + N_1 + N_2$, где a — центростремительное ускорение, направ-

ленное перпендикулярно оси вращения. Это уравнение эквивалентно двум уравнениям (13.56) и (13.5в)

$$m\omega^2 r = N_2, \quad 0 = N_1 - mg. \quad (\text{Д.9.2})$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в центрифуге, тело покоится под действием истинных сил и центробежной силы инерции. Поэтому условие равновесия приводит к двум уравнениям, формально не отличающимся от уравнений (Д.9.2)

$$0 = N_2 - m\omega^2 r, \quad 0 = N_1 - mg.$$

Из них следует, что сила реакции $N = \sqrt{(mg)^2 + (m\omega^2 r)^2}$. Полагая $r = 10$ м, $\omega = 2,21$ рад/с, получим $N = mg_{\text{эф}}$, где $g_{\text{эф}} \approx 5g$.

В период подготовки к полетам космонавты проводят тренировки на центрифуге: отрабатывается реакция на перегрузки, возникающие в реальном космическом полете.

Другой пример: состояние невесомости в спутнике. В спутнике на подставке лежит тело массой m . Допустим, что оно давит на подставку (с силой, равной, конечно, весу тела P), а подставка действует на него с силой реакции $N = P$. С точки зрения наблюдателя, находящегося на Земле, сумма действующих сил (реакции $\vec{N}$ и силы притяжения к Земле $\vec{mg}$) должна создавать центростремительное ускорение, поскольку тело вместе со спутником вращается по круговой орбите со скоростью v : $m v^2 / R = mg - N$. Центростремительное ускорение спутника равно g (так как $v^2 = gR$). Таким образом, $N = 0$. Это означает, что вес тела на спутнике равен нулю.

В системе отсчета, связанной со спутником, на тело кроме сил реакции и притяжения действует также центробежная сила инерции $m v^2 / R = mg$. Под действием этих сил тело покоится относительно спутника. Следовательно, из условия равновесия

$$m \cdot 0 = mg - N - \frac{m v^2}{R}$$

находим, что, с точки зрения наблюдателя, находящегося на спутнике, вес тела также равен нулю.

Если тело движется относительно неинерциальной системы, то на него кроме центробежной силы действует еще *сила Кориолиса*, свойства которой мы здесь не рассматриваем. Эту силу необходимо принимать во внимание при объяснении различных явлений, возникающих при движении тела относительно Земли, так как Земля является неинерциальной системой (см. § 8).

3. Космический лифт. Предположим, что на экваторе возведена башня, в которой действует лифт. При медленном подъеме с постоянной скоростью к грузу необходимо приложить силу $mgR^2/r^2 - m\omega^2 r$, направленную вертикально вверх, где ω — угловая скорость вращения Земли. На расстоянии $r_1 = (gR^2\omega^{-2})^{1/3} =$

— 42 164 км от центра Земли груз приобретет скорость равную местной первой космической скорости относительно инерциальной системы отсчета. Для подъема груза на большую высоту уже не потребуется совершать работу, так как центробежная сила становится больше силы притяжения. На расстоянии $r_2 = 2^{1/3} r_1 = 53\,123$ км груз будет иметь скорость равную местной второй космической; если его освободить, то груз навсегда покинет Землю. Расчеты показывают, что доставка людей и космических аппаратов в космос с помощью лифта более экономична по сравнению с другими способами.

Известным пропагандистом этой идеи является английский писатель-фантаст Артур Кларк. Сейчас он проживает на Цейлоне и уже нашел там место для привязки лифта. Башню для лифта надо строить с «крыши». Со стационарного спутника выпускают два троса — вверх и вниз. Затем подбирают их длину так, чтобы вся система вращалась как целое с угловой скоростью ω в процессе увеличения длины тросов. После зацепления нижнего конца за Землю можно заняться устройством лифта. Основная трудность — отсутствие материалов необходимой прочности.

II. ЖИДКОСТИ И ГАЗЫ

§ 10. Гидростатика и гидродинамика

1. Сила давления воды на стенку плотины. Гидроузел на реке Вахш в Таджикистане мощностью 2700 МВт имеет уникальную плотину из камня высотой 300 м. Такой же будет плотина на реке Ингури в Закавказье. Плотина гидростанции в районе села Шушенского на Енисее мощностью 6000 МВт поднимается над руслом реки на 225 м.

Найдем силу давления воды на стенку плотины. Уровень воды у плотины H , ширина перекрытия L . Сила, действующая на прямоугольную площадку высотой Δx и шириной L , расположенную на глубине x , равна $\Delta F = \rho g x L \Delta x$. Поэтому сила, действующая на стенку плотины,

$$F_0 = \int_0^H \rho g L x dx = \rho g L \frac{H^2}{2}.$$

Найдем силу, действующую на часть стенки, расположенную между дном плотины и горизонтальным уровнем на расстоянии h от дна,

$$F(h) = \int_{H-h}^H \rho g L x dx = \frac{1}{2} \rho g L (2H - h) h.$$

Если $h = H/2$, то $F(H/2) = 3/4 F_0$, т. е. нижняя половина плотины должна выдержать $3/4$ всей нагрузки. На верхнюю половину плотины действует сила $1/4 F_0$. Положим теперь $h = H/4$. В этом случае $F(H/4) = 1/16 F_0$. Следовательно, нижняя четверть стенки плотины должна выдержать почти половину всей нагрузки. По этой причине основание плотины делают более массивным по сравнению с ее верхней частью.

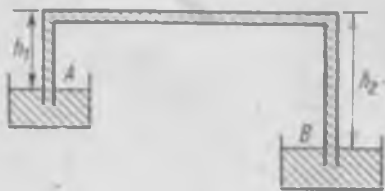


Рис. Д.10.1

ЗАДАЧА 10.1. Объясните, почему вода будет перетекать из сосуда А в сосуд В (рис. Д.10.1)? Рассмотрите также случай, когда $\rho_B g h_1 = p_{\text{атм}}$.

Указание. Давление на уровне А больше давления на уровне В: $p_A = p_{\text{атм}} - \rho g h_1$, $p_B = p_{\text{атм}} - \rho g h_2$.

ЗАДАЧА 10.2. Тонкая однородная палочка шарнирно закреплена за верхний конец. Нижняя часть палочки погружена в воду, причем равновесие достигается, когда в воде находится половина длины палочки. Определить плотность материала, из которого сделана палочка.

Решение. На палочку действуют сила притяжения mg , приложенная к середине палочки, выталкивающая сила F , приложенная в середине погруженной части, и сила реакции со стороны шарнира. Приравнявая моменты этих сил относительно шарнирно закрепленного конца палочки, найдем

$$mg \frac{l}{2} - F \frac{3}{4} l = 0, \quad (1)$$

где l — длина палочки. Пусть ρ — плотность палочки, V — ее объем. Тогда $m = \rho V$. Выталкивающая сила $F = \rho_B \cdot 1/2 V$. Подставляя значение m и F в (1), получим значение плотности палочки $\rho = 0,75 \rho_B$.

ПРИМЕР 10.3. В бассейне плавает лодка массой m_1 , в которой находится предмет массой m_2 . Насколько изменится уровень воды, если: а) снять предмет, б) снять предмет и опустить в воду?

а) Уровень воды в бассейне $H_0 = h_0 + (m_1 + m_2) / \rho_B S$. После того как предмет сняли, уровень понизится до значения $H_1 = h_0 + m_1 / \rho_B S < H_0$, $\Delta H = -m_2 / \rho_B S$.

б) Если предмет плавает, то уровень воды не изменится: $H_2 = H_0$. Если же предмет утонет, то $H_2 = H_1 + m_2 / \rho_B S < H_0$, $\Delta H = (m_2 / S) (\rho_B^{-1} - \rho_B^{-1}) < 0$.

ЗАДАЧА 10.4. Кусок льда плавает в воде, к которой долили слой керосина. Как изменятся уровни воды и керосина после таяния льда?

Решение. Введем обозначения: $V_{\text{л}}$ — объем льда; $V_{\text{лк}}, V_{\text{лв}}$ — объемы льда, находящиеся в керосине и в воде; $V_{\text{в}}$ — объем воды, образовавшейся после таяния льда. Поскольку масса льда равна массе воды, то условие плавания приводит к уравнению

$$\rho_{\text{к}} V_{\text{лк}} + \rho_{\text{в}} V_{\text{лв}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{в}}. \quad (1)$$

Объем погруженной части льда

$$V_{\text{п}} = V_{\text{лк}} + V_{\text{лв}} = V_{\text{лк}} \left(1 - \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{в}}} \right) + V_{\text{в}} > V_{\text{в}}.$$

Следовательно, верхний слой керосина понизится. Далее из (1) находим

$$V_{\text{лв}} = V_{\text{в}} - V_{\text{лк}} \frac{\rho_{\text{к}}}{\rho_{\text{в}}} < V_{\text{л}},$$

т. е. нижний слой керосина повысится.

ЗАДАЧА 10.5. В стенках большого сосуда, наполненного водой, просверлены два маленьких отверстия на расстояниях H от основания и края сосуда. Показать, что струи, вытекающие из отверстий, пересекутся на уровне основания.

Решение. Обозначим через h расстояние между отверстиями. Пренебрегая падением уровня воды в сосуде, найдем скорости истечения из верхнего и нижнего отверстий $v_1 = \sqrt{2gH}$, $v_2 = \sqrt{2g(H+h)}$. Время «падения» воды от верхнего отверстия до основания — $t_1 = \sqrt{2(H+h)/g}$ и от нижнего отверстия до основания — $t_2 = \sqrt{2H/g}$. Расстояния от сосуда до точек пересечения струй с горизонтальной прямой, проведенной на уровне основания сосуда, оказываются равными, так как $v_1 t_1 = v_2 t_2$.

III. МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА. ТЕПЛОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ

ЗАДАЧА 1. Водолаз выпускает в воду отработанный воздух пузырьками радиусом $R_1 = 0,5$ см. На какой глубине h работает водолаз, если на поверхности воды пузырьки имеют радиус $R_2 = 1$ см?

Решение. Прежде всего заметим, что задача сформулирована некорректно — не указан процесс, связывающий два состояния. Наиболее вероятный процесс всплытия пузырьков воздуха — адиабатический. Тогда из (23.7) получим

$$(\rho_{\text{вт}} + \rho g h) \left(\frac{4\pi R_1^3}{3} \right)^{\gamma} = \rho_{\text{вт}} \left(\frac{4\pi R_2^3}{3} \right)^{\gamma}.$$

где $\gamma = 1,4$. Следовательно, искомая глубина

$$h = \frac{p_{\text{ат}}}{\rho g} \left[\left(\frac{R_2}{R_1} \right)^{3\gamma} - 1 \right] \simeq 10,33 \cdot 17,4 \text{ м} \simeq 180 \text{ м}.$$

ЗАДАЧА 2. Вертикальный градиент температуры $\Delta T/\Delta z = -k_1$, $k_1 = 0,75 \cdot 10^{-3}$ К/м. Из трубы высотой $h = 25$ м выходит дым с температурой, превышающей температуру окружающей среды на $\Delta T = 1$ К. На какую высоту поднимется дым?

Решение. Пусть T_0 — температура воздуха у поверхности Земли. Тогда температура воздуха изменяется по закону

$$T_{\text{в}}(z) = T_0 - k_1 z.$$

Температура дыма, выходящего из трубы, $T_{\text{д}} = T_0 - k_1 h + \Delta T$. При «всплывании» дыма его температура изменяется в соответствии с (23.8) по закону

$$T(z) = T_{\text{д}} - k_0(z - h).$$

На высоте H , где температуры дыма и окружающей атмосферы сравниваются, $T(H) = T_{\text{в}}(H)$,

$$T_0 - k_1 h + \Delta T - k_0(H - h) = T_0 - k_1 H.$$

Из этого уравнения находим

$$H = h + \frac{\Delta T}{k_0 - k_1} = (25 + 400) \text{ м} = 425 \text{ м}.$$

На этой высоте H плотности дыма и атмосферы одинаковы. Следовательно, дым будет плавать в окрестности высоты $\simeq 425$ м.

ЗАДАЧА 3. Колонна Исаакиевского собора в Ленинграде имеет высоту $h = 30$ м. Найти относительное сжатие на высоте z . Модуль Юнга гранита — $8,8 \cdot 10^{10}$ Па, плотность — $2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

Решение. Направим ось z по оси колонны вертикально вверх. На высоте z давление создается силой $-\rho g S(h - z)$, где S — сечение колонны. Следовательно, напряжение $\sigma(z) = -\rho g(h - z)$. Относительное удлинение согласно (24.1)

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = -\frac{\rho g}{E}(h - z).$$

«Удлинение» части колонны высотой z

$$u(z) = -\frac{\rho g}{E} \int_0^z (h - z) dz = -\frac{\rho g z}{E} \left(h - \frac{z}{2} \right).$$

Полагая $z = h$, находим, что колонна сжата на величину $|u(h)| = -(\rho g/2E)h^2 \simeq 1,4 \cdot 10^{-4}$ м.

IV. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

§ 11. Переменные токи в электрических цепях

ЗАДАЧА 11.1. Напряжение, подаваемое на вход цепи (рис. Д.11.1), имеет вид последовательности прямоугольных импульсов, изображенных на рис. 41.6 а. Найти среднее значение напряжения на RC -звене в установившемся режиме, если $\tau \sim T - t_0$, $\tau = R_0 C$, $R_0 = Rr/(R+r)$.



Рис. Д.11.1

$$Ir + U = \mathcal{E}(t), \quad I = I_1 + I_2,$$

$$I_1 = \frac{U}{R}, \quad I_2 = CU'$$

находим после исключения I_1, I_2, I_3

$$\tau U' + U = \frac{R_0}{r} \mathcal{E}(t).$$

При указанных условиях средние значения $U(t)$ и $\mathcal{E}(t)$ связаны соотношением $U_{\text{ср}} = (R_0/r) \mathcal{E}_{\text{ср}}$, $\mathcal{E}_{\text{ср}} = (t_0/T) \mathcal{E}_0$. Следовательно,

$$U_{\text{ср}} = \frac{R}{R+r} \frac{t_0}{T} \mathcal{E}_0.$$

ЗАДАЧА 11.2. Найти напряжение на конденсаторе после замыкания ключа K (рис. Д.11.2 а).

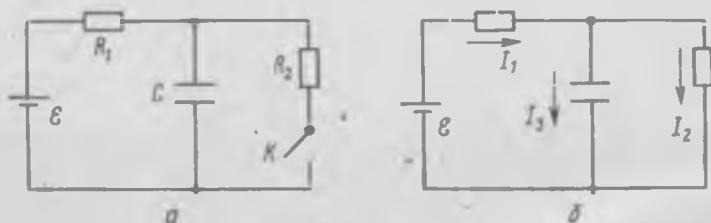


Рис. Д.11.2

Решение. Обозначим стрелками на рис. Д.11.2 б положительные направления токов. Четыре независимые величины I_1, I_2, I_3

и напряжение V на RC -цепи удовлетворяют уравнениям

$$I_1 = I_2 + I_3, \quad \mathcal{E} = I_1 R_1 + V,$$

$$V = I_2 R_2, \quad I_3 = CV'.$$

Исключая токи, получим уравнения

$$\tau V' + V = \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E}, \quad \tau = C \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Начальное условие: $V(0) = \mathcal{E}$. Следовательно,

$$V(t) = \mathcal{E} e^{-t/\tau} + \frac{R_2}{R_1 + R_2} \mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau}).$$

При $t \gg \tau$ $V(t) \rightarrow R_2(R_1 + R_2)^{-1} \mathcal{E}$. Сила тока, протекающего в цепи конденсатора,

$$I_3 = CV' = -\frac{\mathcal{E}}{R_2} e^{-t/\tau}.$$

Очевидно, конденсатор разряжается через параллельно соединенные резисторы R_1 и R_2 . Направление тока при разряде — обратное указанному стрелкой на рис. Д.11.2 б.

ЗАДАЧА 11.3. Найти напряжение на конденсаторе после замыкания ключа (рис. Д.11.3).

Ответ. $V(t) = R(R + R_1)^{-1} \mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau})$,
 $\tau = C R R_1 (R + R_1)^{-1}$.

ЗАДАЧА 11.4. В схеме, показанной на рис. Д.11.4а, замыкают ключ K . Найти напряжения на вольтметре V и катушке индуктивности как функцию времени ($R_1 = R_2 = R$, $R_3 = r$).

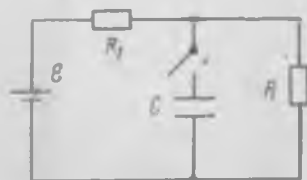


Рис. Д.11.3

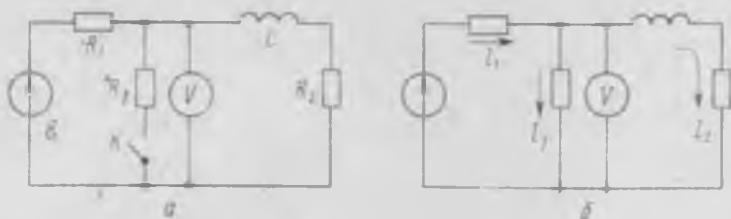


Рис. Д.11.4

Решение. Пусть $t=0$ — момент времени, в который замкнули ключ. Обозначим стрелками положительные направления токов, текущих между узлами, рис. Д.11.4 б. При $t < 0$ $I_3 = 0$, $I_1 = I_2 =$

$=\mathcal{E}/2R$. Вольтметр показывает напряжение $V_0=\mathcal{E}/2$. При $t>0$ токи I_1, I_2, I_3 удовлетворяют уравнениям

$$I_1=I_2+I_3, \quad \mathcal{E}=I_1R_1+I_3R_3, \quad (1)$$

$$I_2R_2+LI_2'=I_3R_3. \quad (2)$$

Из (1) находим

$$I_3=\frac{\mathcal{E}}{R}-I_2\frac{R+r}{R}. \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), получим уравнение

$$\tau I_3'+I_3=\frac{\mathcal{E}}{R+2r}, \quad \tau=\frac{R+r}{R+2r}\frac{L}{R}. \quad (4)$$

Найдем теперь значение $I_3(0)$, т. е. начальное условие. Поскольку при $t=0$ в катушке возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая изменению тока, то $I_2(0)=\mathcal{E}/2R$. Подставляя $I_2(0)$ в (3), получим

$$I_3(0)=\frac{\mathcal{E}}{2(R+r)}.$$

По аналогии с (41.18) решение уравнения (4) имеет вид

$$\begin{aligned} I_3(t) &= \frac{\mathcal{E}}{2(R+r)} e^{-t/\tau} + \frac{\mathcal{E}}{R+2r} (1 - e^{-t/\tau}) = \\ &= \frac{\mathcal{E}}{R+2r} \left(1 - \frac{R}{2(R+r)} e^{-t/\tau} \right). \end{aligned}$$

Из (3) находим

$$I_2(t) = \frac{\mathcal{E}}{R+2r} \left(\frac{r}{R} + \frac{1}{2} e^{-t/\tau} \right),$$

а затем напряжение на катушке

$$U_L(t) = LI_2' = -\frac{R}{2(R+r)} \mathcal{E} e^{-t/\tau}.$$

Очевидно, напряжение на катушке в момент времени $t=0$

$$U_L(0) = [I_3(0) - I_2(0)]R = -\frac{R}{2(R+r)} \mathcal{E}.$$

Рассмотрим два частных случая.

А. $R=100$ Ом, $r=0$, $L=10$ Гн, $\mathcal{E}=300$ В. Тогда $\tau=0,1$ с, $I_2(0)=-1,5$ А. После замыкания ключа ток $I_3(t)$ изменяется от нуля до 1,5 А, а затем возрастает до постоянного значения 3 А, ток $I_2(t)$ убывает от значения 1,5 А до нуля. Напряжение на вольтметре при $t>0$ равно нулю.

Б. $R=r=100$ Ом. Тогда $\tau=1/15$ с. После замыкания ключа ток $I_3(t)$ изменяется от нуля до 0,75 А, а затем возрастает до значения 1 А. Напряжение на вольтметре

$$V(t) = \begin{cases} \mathcal{E}/2, & t < 0, \\ 1/4 \mathcal{E} e^{-t/\tau} + 1/3 \mathcal{E} (1 - e^{-t/\tau}), & t \geq 0. \end{cases}$$

Следовательно, при $t=0$ напряжение V скачком изменяется от 150 В до 75 В, а затем возрастает до значения 100 В.

Трансформатор. Трансформатором называется устройство, предназначенное для преобразования электрической энергии и передачи ее из одних цепей в другие. Кроме того, трансформатор обладает свойством (см. ниже), позволяющим реализовать передачу к нагрузке максимальной энергии от источника внешнего напряжения. Впервые трансформатор был использован в 1878 г. русским электротехником П. Н. Яблочковым для питания изобретенных им дуговых ламп.

Трансформатор состоит из замкнутого стального сердечника и двух обмоток. Одна из них (называемая первичной) подключена к источнику переменного напряжения, другая — вторичная — соединена с нагрузкой — резистором R (рис. Д.11.5а). Каждую

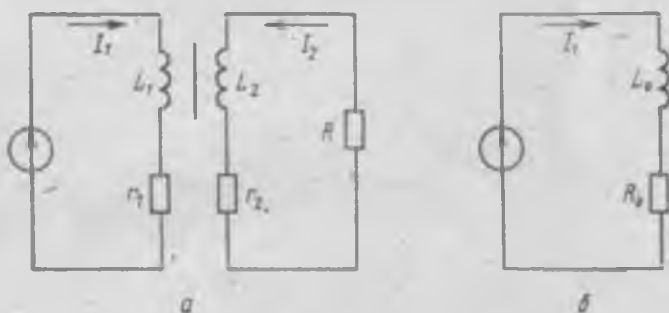


Рис. Д.11.5

из обмоток можно рассматривать как последовательно соединенные индуктивность L_n и резистор r_n . Общее активное сопротивление вторичной обмотки $R_2 = R + r_2$. Благодаря сердечнику обе обмотки связаны общим магнитным потоком. Если в первом контуре протекает ток $I_1(t)$, а второй контур разомкнут, то изменение магнитного потока создает в первом контуре ЭДС самоиндукции $\mathcal{E}_1 = -L_1 I_1'$. Поскольку магнитный поток, замыкаясь внутри сердечника, пронизывает второй контур, то в катушке L_2 наводится ЭДС взаимной индукции

$$\mathcal{E}_2 = -M I_1', \quad (\text{Д.11.1})$$

где M — коэффициент взаимной индукции. Если весь магнитный поток, создаваемый током первичной обмотки, пересекает вторичную обмотку, то в каждом витке катушки L_2 ЭДС индукции будет такой же, как и в каждом витке катушки L_1 . Поэтому отношение $\mathcal{E}_1$ к $\mathcal{E}_2$ равно отношению числа витков n_1 первичной обмотки к числу витков n_2 вторичной обмотки:

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{L_1}{M} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (\text{Д.11.2})$$

К аналогичному результату мы приходим и в том случае, когда первый контур будет разомкнут, а по второму контуру протекает ток I_2 : $\mathcal{E}_2 = -L_2 I_2$, $\mathcal{E}_1 = -M I_2$,

$$\frac{\mathcal{E}_1}{\mathcal{E}_2} = \frac{L_2}{M} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (\text{Д.11.3})$$

Из (Д.11.2), (Д.11.3) находим

$$M = \sqrt{L_1 L_2}, \quad \frac{L_1}{L_2} = \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2. \quad (\text{Д.11.4})$$

Режим холостого хода. Поскольку вторичная обмотка разомкнута, то первый контур является частным случаем схемы, рассмотренной в § 43. Если генератор создает напряжение $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, то

$$\mathcal{E}_2(t) = \frac{X}{Z_1} \mathcal{E}_0 \sin(\omega t + \varphi), \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{X_1}{Z_1},$$

где $Z_1 = \sqrt{r_1^2 + X_1^2}$, $X_1 = \omega L_1$, $X = \omega M$. Мощность, потребляемая трансформатором, $P_{1x} = 1/2 r_1 \mathcal{E}_0^2 / Z_1^2$. Очевидно, при $r_1 \ll X_1$ ($Z_1 \simeq X_1$) амплитуда напряжения на концах вторичной обмотки близка к значению $(n_2/n_1) \mathcal{E}_0$.

Рабочий режим. Вторичная обмотка замкнута. Записывая второй закон Кирхгофа для каждого из контуров

$$L_1 I_1' + r_1 I_1 = \mathcal{E}(t) - M I_2', \quad (\text{Д.11.5})$$

$$L_2 I_2' + R_2 I_2 = -M I_1', \quad (\text{Д.11.6})$$

где $\mathcal{E}(t) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t$, найдем решение этой системы в установившемся режиме. В этом случае токи I_1 и I_2 также изменяются по гармоническому закону

$$I_1(t) = i_1 \cos(\omega t + \varphi_1), \quad I_2(t) = i_2 \cos(\omega t + \varphi_2). \quad (\text{Д.11.7})$$

Подставляя (Д.11.7) в (Д.11.5), (Д.11.6), получим два тождества:

$$-i_1 X_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + i_1 r_1 \cos(\omega t + \varphi_1) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t + i_2 X \cos(\omega t + \varphi_2), \quad (\text{Д.11.8})$$

$$-i_2 X_2 \sin(\omega t + \varphi_2) + i_2 R_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = i_1 X \sin(\omega t + \varphi_1). \quad (\text{Д.11.9})$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$ в тождестве (Д.11.9), получим два уравнения:

$$-i_2 X_2 \sin \varphi_2 + i_2 R_2 \cos \varphi_2 - i_1 X \sin \varphi_1 = 0,$$

$$i_2 X_2 \cos \varphi_2 + i_2 R_2 \sin \varphi_2 + i_1 X \cos \varphi_1 = 0,$$

из которых находим

$$i_2 \cos \varphi = -i_1 \frac{X X_2}{Z_2^2}, \quad i_2 \sin \varphi = i_1 \frac{X R_2}{Z_2^2}, \quad Z_2^2 = R_2^2 + X_2^2, \quad (\text{Д.11.10})$$

где $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$. Амплитуды токов связаны соотношением $i_2 = i_1 (X/Z_2)$. Представляя $\omega t + \varphi_2$ в виде $\omega t + \varphi_1 - \varphi$, исключим из (Д.11.8) переменные i_2 , φ_2 , относящиеся ко второму контуру. Тогда из (Д.11.8), (Д.11.10) получим

$$i_1 R_0 \cos(\omega t + \varphi_1) - i_1 X_0 \sin(\omega t + \varphi_1) = \mathcal{E}_0 \cos \omega t, \quad (\text{Д.11.11})$$

$$R_0 = r_1 + \frac{X^2}{Z_2^2} R_2, \quad X_0 = X_1 - \frac{X^2}{Z_2^2} X_2.$$

Заметим, что уравнение (Д.11.11) описывает схему (изображенную на рис. Д.11.5 б), эквивалентную исходной схеме трансформатора. Используя формулы (43.12) и (43.14), получим

$$i_1 = \frac{\mathcal{E}_0}{Z}, \quad Z = \sqrt{R_0^2 + X_0^2}. \quad (\text{Д.11.12})$$

Амплитуда напряжения на резисторе R_2

$$U_{20} = i_2 R_2 = \frac{X}{Z_2} \frac{R_2}{Z} \mathcal{E}_0. \quad (\text{Д.11.13})$$

Мощность, потребляемая трансформатором в рабочем режиме,

$$P = \frac{1}{2} i_1^2 R_0 = \frac{1}{2} i_1^2 \left(r_1 + \frac{X^2}{Z_2^2} R_2 \right) = P_1 + P_2, \quad (\text{Д.11.14})$$

$$P_1 = \frac{1}{2} i_1^2 r_1, \quad P_2 = \frac{1}{2} i_2^2 R_2.$$

Это соотношение является следствием закона сохранения энергии: мощность, развиваемая источником напряжения, равна сумме мощностей, рассеиваемых в первичном и вторичном контурах. Идеальный трансформатор ($r_1 = r_2 = 0$) целиком передает на нагрузку мощность, развиваемую источником напряжения.

В наиболее часто встречающемся случае $X_2 \gg R_2 = R + r_2$. Тогда $Z_2 \simeq X_2$, $X/Z_2 \simeq X/X_2 = n_1/n_2$. Следовательно,

$$R_0 = r_1 + \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 R_2, \quad X_0 \simeq 0. \quad (\text{Д.11.15})$$

Таким образом, трансформатор, присоединенный к резистору R , представляет для источника напряжения цепь, активное сопротивление которой равно R_0 . Рассмотрим, например, подключение громкоговорителя к выходу усилителя низкой частоты напряжением $\mathcal{E}_{\text{эф}} = 100$ В. Громкоговоритель имеет сопротивление $R_2 = 2$ Ом, для его питания необходимо напряжение $U_{2\text{эф}} = 2$ В. Поэтому низкоомная нагрузка включается через понижающий трансформатор, который преобразует малое сопротивление R_2 в большое сопротивление R_0 . Поскольку $n_1 = 50$ n_2 , то $R_0 = 5$ кОм, $i_{1\text{эф}} = 0,02$ А, $i_{2\text{эф}} = 1$ А. Таким образом, в выходной цепи усилителя как бы включен резистор сопротивлением 5 кОм.

Мы получили весьма важный результат: входное сопротивление трансформатора можно менять при постоянном значении сопротивления нагрузки, изменяя только отношение n_2/n_1 . Эта особенность позволяет достичь равенства внутреннего сопротивления источника напряжения и сопротивления присоединенной к нему цепи — условия, при выполнении которого источник отдает максимальную мощность (см. § 36).

Пренебрегая в (Д.11.15) величиной r_1 , получим из (Д.11.12) — (Д.11.14)

$$U_{20} = \frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}_0, \quad P \simeq \frac{1}{2} i_1 \mathcal{E}_0 = \frac{1}{2} i_2 U_{20}.$$

Приведем основные формулы, связывающие напряжения и токи в обмотках трансформатора, при условиях

$$\omega L_2 \gg R_2, \quad r_1 \ll \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 R_2.$$

Пренебрегая в (Д.11.15) величинами X_0 , r_1 , получим из (Д.11.12) — (Д.11.14)

$$U_{2\text{эф}} = \frac{n_2}{n_1} \mathcal{E}_{\text{эф}}, \quad P \simeq i_{1\text{эф}} \mathcal{E}_{\text{эф}} = i_{2\text{эф}} U_{2\text{эф}}.$$

У. КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

ЗАДАЧА. Найти частоту малых колебаний маятника — невесомого стержня, на котором закреплены точечные массы m_1 и m_2 на расстояниях l_1 и l_2 от точки подвеса стержня.

Решение. Запишем закон сохранения полной энергии системы. В случае малых колебаний потенциальная энергия системы

$$П = -m_1 g l_1 \cos \varphi - m_2 g l_2 \cos \varphi \simeq -(m_1 l_1 + m_2 l_2) g (1 - \varphi^2/2).$$

Поскольку угловая скорость масс m_1 и m_2 одинакова, то полная энергия

$$E = \frac{1}{2} (m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2) \omega^2 + \frac{1}{2} (m_1 l_1 + m_2 l_2) \varphi^2 - (m_1 l_1 + m_2 l_2) g. \quad (1)$$

Согласно (13.1) $\omega = \varphi'$, $\omega' = \varphi''$. Поэтому дифференцируя (1) по времени, получим уравнение

$$\varphi'' + \omega^2 \varphi = 0, \quad \omega_p = \sqrt{\frac{m_1 l_1 + m_2 l_2}{m_1 l_1^2 + m_2 l_2^2}} g. \quad (2)$$

Уравнение (2) совпадает с уравнением гармонических колебаний (42.5). Следовательно, частота колебаний маятника равна ω_0 .

VI. ОПТИКА

§ 12. Основы специальной теории относительности

ПРИМЕР 12.1. Измерение скорости тел. Пусть тело, к которому прикреплено зеркальце, движется вдоль луча зрения наблюдателя, удаляясь от него. Попытаемся с помощью источника направленного излучения (скажем от лазера) измерить скорость тела, с которым свяжем систему K' . Предположим, что в момент пролета тела мимо начала координат системы K часы в обеих системах показывали время $t = t' = 0$. Пошлем в момент времени t_1 световой импульс и вновь примем его после отражения от зеркала. Мировые линии падающего $x_f(t) = c(t - t_1)$, отраженного $x_r = -c(t - t_3)$ сигналов и тела $x = \beta ct$ изображены на рис. Д.12.1. Из условий $x(t_2) = x_f(t_2) = x_r(t_2)$ находим

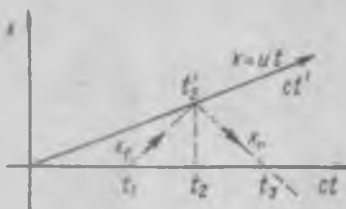


Рис. Д.12.1

$$t_2 = \frac{t_1}{1 - \beta}, \quad t_3 = t_2(1 + \beta) = k^2 t_1, \quad k = \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}}.$$

Следовательно, скорость тела

$$u = c \frac{t_3 - t_1}{t_3 + t_1}.$$

Пусть $t_1 = 40$ мин, $t_3 = 90$ мин. Тогда скорость тела составляет $\beta = 5/13$ скорости света. Найдем время прихода вспышки к телу по часам системы K' . Полагая в (55.12 б) $x = \beta ct$, найдем

$$t_2' = \frac{1}{\gamma} t_2 = k t_1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{13}{12}, \quad k = \frac{3}{2}.$$

Таким образом, световая вспышка наблюдается в системах K' и K в моменты времени $t_2' = k t_1$, $t_3 = k t_2' = k^2 t_1$. Подставляя числовые значения, получим $t_2 = 65$ мин, $t_2' = 60$ мин.

ЗАДАЧА 12.2. Наблюдатель после посылки светового сигнала поставил зеркало, которое отражает лучи обратно к движущемуся телу. Найти последовательность моментов времени, в которые световой импульс отражается от обоих зеркал (рис. Д.12.2).

ПРИМЕР 12.3. Эффект Допплера — изменение частоты волны ν , испускаемой движущимся источником по сравнению с «собственной» частотой ν' того же источника в системе отсчета, в которой он покоится. На рис. Д.12.3 изображены мировые линии источника $x(t) = \beta ct$, двух наблюдателей $x_B(t) = L$, $x_A(t) = 0$ и световых импульсов, испущенных источником с интервалом времени $t'_4 - t'_1 = T'$. Найдем интервал времени $T_A = t_6 - t_2$ между моментами прихода сигнала к наблюдателю А. Учитывая соотношения,

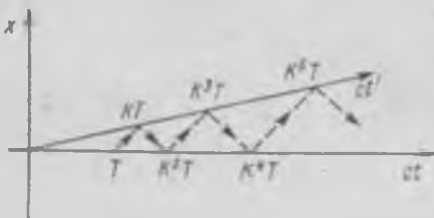


Рис. Д.12.2

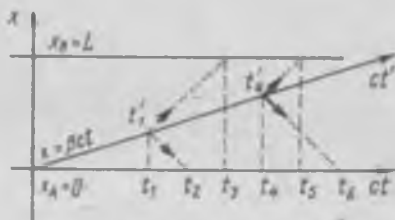


Рис. Д.12.3

полученные в примере 12.1, находим $t_2 = kt'_1$, $t_6 = kt'_4$. Следовательно, $T_A = kT'$.

Найдем теперь интервал времени $T_B = t_5 - t_3$ между моментами прихода сигналов к наблюдателю В. Мировая линия сигнала, испущенного в момент времени t'_1 к наблюдателю В, $x_A(t) = L + c(t - t_3)$. Из условия $x(t_1) = x_A(t_1)$ получим $t_3 = L/c + (1 - \beta)t'_1$. Аналогичным образом находим $t_5 = L/c + (1 - \beta)t'_4$. Поэтому $T_B = (1 - \beta)(t'_4 - t'_1) = (1 - \beta)\gamma(t'_4 - t'_1) = (1/k)T'$. Мы нашли соотношения, связывающие интервалы времени между событиями в двух системах отсчета. Предположим, что T' — период некоторого процесса, ν' — его частота. Тогда частота волны, принимаемой от удаляющегося источника, $\nu_A = (1/k)\nu' < \nu'$, так как $k > 1$. Частота волны, принимаемой наблюдателем В от приближающегося источника, $\nu_B = k\nu' > \nu'$.

ПРИМЕР 12.4. Обсудим эксперимент Майкельсона с точки зрения теории относительности. Предположим, что два наблюдателя — неподвижный в системе К и движущийся в системе К', жестко связанной с прибором, проводят анализ эксперимента (см. рис. 55.2). В системе К' расстояния M_0M_1 и M_0M_2 равны L , а в системе К $M_0M_2 = L$, $M_0M_1 = l = L\sqrt{1 - (u/c)^2}$. Поскольку скорость света не зависит от выбора системы отсчета, то в системе К' время t'_1 прохождения светового сигнала от M_0 до M_1 и в обратном направлении от M_1 до M_2 равно $t'_1 = 2L/c$. Время движе-

ния сигнала по пути $M_0 \rightarrow M_2 \rightarrow M_0$ также равно $t_2' = 2L/c$. Следовательно, разность хода $t_2' - t_1' = 0$ и интерференция отсутствует.

Найдем теперь t_1 и t_2 с точки зрения наблюдателя в системе K . Интервал t_1 представим в виде суммы $t_1 = t_1^+ + t_1^-$, где $t_1^+(t_1^-)$ — время, в течение которого свет идет от точки M_0 до M_1 (от M_1 до M_0). В направлении от M_0 до M_1 свет проходит путь $l + ut_1^+$ за время t_1^+ , т. е.

$$l + ut_1^+ = ct_1^+, \quad t_1^+ = l/(c-u).$$

Аналогично находим $t_1^-(=)l/(c+u)$. Следовательно, $t_1 = 2cl/(c^2 - u^2)$.

Для вычисления t_2 представим ход второго луча с точки зрения неподвижного наблюдателя. Из рис. Д.12.4 видно, что

$$\left(\frac{ct_2}{2}\right)^2 = \left(\frac{ut_2}{2}\right)^2 + L^2, \quad t_2 = \frac{2L}{\sqrt{c^2 - u^2}}.$$

Учитывая, что $l = L\sqrt{1 - (u/c)^2}$, находим, что $t_2 = t_1$. Поэтому разность хода лучей, пропорциональная $t_2 - t_1$, равна нулю — интерференционная картина отсутствует.

ПРИМЕР 12.5. Два наблюдателя договорились провести совместный опыт. В системе K' находится стержень AB . Наблюдатель в системе K' посылает из точки A одновременно два сигнала: один к наблюдателю в системе K , другой — к зеркалу, за-



Рис. Д.12.4

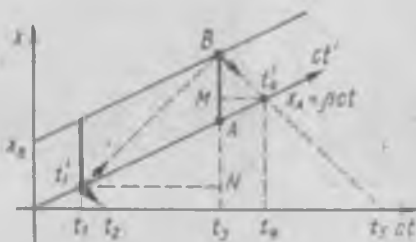


Рис. Д.12.5

крепляемому на конце B . Этот луч отражается и идет в обратном направлении. Показать, что наблюдатель в системе K получит информацию о собственной длине стержня.

На рис. Д.12.5 мировая линия $x_A = \beta ct$ определяет в системе K' прямую $x'_A = 0$, т. е. совпадает с осью времени t' . Промежуток времени $t_4' - t_1' = 2L/c$, где L — длина стержня в системе K' . Из соотношений, полученных в примере 12.1, находим $t_5 = kt_4'$, $t_2 = kt_1'$. Следовательно, собственная длина стержня

$$L = \frac{c}{2k} (t_5 - t_2)$$

определяется в системе K в результате измерения моментов прихода t_2 и t_3 первого и второго сигналов.

В качестве полезного упражнения найдем связь интервалов $t_4 - t_1$ с длиной $x_B = l$ стержня AB в системе K . Поскольку отрезок $t_1'N = NB = c(t_3 - t_1)$, $AN = u(t_3 - t_1)$, то $c(t_3 - t_1) = L + u(t_3 - t_1)$. Отсюда находим

$$t_3 - t_1 = \frac{l}{c(1 - \beta)}.$$

Далее, учитывая, что отрезок $t_4'M = MB = c(t_4 - t_3)$, $MA = u(t_4 - t_3)$, $l = AM + MB$, получим

$$t_4 - t_3 = \frac{l}{c(1 + \beta)}.$$

Следовательно,

$$t_4 - t_1 = 2l\gamma^2, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Поскольку $t_4 - t_1 = \gamma(t_4' - t_1') = 2\gamma L/c$, то $l\gamma = L$.

VII. АТОМНАЯ И ЯДЕРНАЯ ФИЗИКА

§ 13. Соотношение неопределенностей

Рассмотрим падение частицы массой m с высоты $y = H$. Начальная скорость частицы равна нулю. Сопротивлением воздуха пренебрегаем. «Знает» ли частица, что она должна падать по прямой линии, согласно классической механике? Для того чтобы ответить на этот вопрос, оценим наименьшее отклонение частицы по горизонтали на уровне $y = 0$.

Пусть Δx , Δv_x — неопределенности положения и скорости частицы на уровне $y = H$. Тогда смещение от вертикали в точке на уровне $y = 0$

$$s = \Delta x + \Delta v_x T, \quad T = \sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Учитывая соотношение неопределенностей (56.6) $\Delta v_x \geq \hbar/m \cdot \Delta x$, получим неравенство

$$s^2 > \left(\Delta x - \frac{\hbar T}{m \Delta x} \right)^2 + 4 \frac{\hbar T}{m} \geq 4 \frac{\hbar T}{m}.$$

Следовательно, величина искомого смещения

$$\sqrt{s^2} > \Delta = 2 \left(\frac{2\hbar^2 H}{m^2 g} \right)^{1/4}.$$

Положим $m=1$ г, $H=1$ м. Тогда $\Delta=4 \cdot 10^{-16}$ м. Попробуем теперь «уронить» электрон. В этом случае отклонение достигает заметной величины $\Delta \sim 1,3$ см. Таким образом, мы приходим к выводу, что вероятность обнаружения частицы принимает наибольшее значение в окрестности классической траектории.

§ 14. Столкновение частиц

ПРИМЕР 14.1. Рассмотрим упругое центральное столкновение частицы массой m_1 , обладающей энергией E_1 , с неподвижной частицей массой m_2 и найдем энергии обеих частиц после столкновения. Решение этой задачи в рамках ньютоновой механики приведено в примере 12.12. Интересно выяснить новые особенности в поведении частиц, предсказываемые теорией относительности.

Отметим штрихом энергию и импульс частиц после рассеяния. Тогда из (60.3) получим систему, которую запишем в виде

$$E_1 - E_2 = E_1' - m_2 c^2, \quad \vec{p}_1 - \vec{p}_2 = \vec{p}_1'. \quad (1)$$

Наша задача — найти E_1' , E_2' , когда импульсы всех частиц лежат на одной прямой. Умножим второе уравнение (1) на c , затем возведем в квадрат оба уравнения и вычтем первое из второго. В результате получим

$$\vec{p}_1 \vec{p}_2 c^2 = (E_1 + m_2 c^2)(E_2 - m_2 c^2). \quad (2)$$

Введем новую переменную $x = E_2' - m_2 c^2$. Возводя (2) в квадрат, найдем $x = 2m_2 p_1^2 / M^2$, где M — масса покоя системы:

$$M^2 c^4 = (E_1 + m_2 c^2)^2 - p_1^2 c^2 = (m_1 + m_2)^2 c^4 + 2W_1 m_2 c^2,$$

$W_1 = E_1 - m_1 c^2$. Поскольку $E_1' = E_1 - x$, то окончательно находим

$$E_1' = E_1 - 2 \frac{m_2}{M^2} p_1^2, \quad E_2' = m_2 c^2 + 2 \frac{m_2}{M^2} p_1^2.$$

В предельном случае малых скоростей

$$E \simeq mc^2 + \frac{1}{2}mv^2, \quad p \simeq mv, \quad M \simeq m_1 + m_2,$$

получаем формулы (6), (7) примера 12.12. Согласно классической механике при $m_1 \ll m_2$ легкая частица могла бы передать тяжелой энергию $K_2' = 4(m_1/m_2)W_1 \ll W_1$. Положение меняется в релятивистской теории: если $m_1 \ll m_2$, $E_1 \gg m_1 c^2$, то $E_1' \simeq p_1 c$, а переданная энергия

$$E_2' - m_2 c^2 \simeq \frac{2E_1^2}{m_2 c^2 + 2E_1}$$

может быть порядка энергии налетающей частицы.

ПРИМЕР 14.2. Для того чтобы лучше понять смысл новых непривычных понятий релятивистской кинематики, решим заново задачу 12.15. Рассмотрим неупругое столкновение электрона массой m_1 , обладающего кинетической энергией K_1 , с неподвижным атомом массой m_2 . В конечном состоянии образуются возбужденный атом и электрон.

Решение задачи следует из (60.5), где $M_x = m_1 + m_2'$, m_2' — масса покоя возбужденного атома после столкновения:

$$m_2' = \sqrt{(m_1 + m_2)^2 + \frac{2K_1}{c^2} m_2} - m_1.$$

В предельном случае малых энергий $K_1 \ll (m_1 + m_2)c^2$ получим

$$m_2'^2 c^2 = m_2^2 c^2 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} K_1. \quad (1)$$

Второе слагаемое соответствует энергии, переданной атому, — в результате уменьшилась энергия связи и возросла масса атома. Предположим теперь, что вторая частица является макроскопическим телом. В этом случае второе слагаемое в (1) является количеством теплоты, переданной телу в результате неупругого столкновения. Возрастание массы покоя тела связано как раз с той энергией, которая перешла в теплоту.

Рассмотрим другую ситуацию: электрон сталкивается с неподвижным возбужденным атомом. В этом случае часть массы покоя атома переходит в кинетическую энергию электрона и «разрядившегося» атома. В системе покоя атом и электрон разлетаются в противоположные стороны с импульсом $\vec{p}_0$. Закон сохранения энергии приобретает вид

$$\sqrt{(m_1 + m_2')^2 c^4 + 2K_1 c^2 m_2'} = \sqrt{m_1^2 c^4 + p_0^2 c^2} + \sqrt{m_2'^2 c^4 + p_0^2 c^2},$$

где m_2' — масса «разрядившегося» атома. Такие процессы называют *«сверхупругими»*.

ПРИМЕР 14.3. Рассеяние фотона свободным электроном. В начальном состоянии энергия и импульс электрона и фотона $(E, \vec{p})$, $(h\nu, c^{-1}h\nu\vec{n})$, $\vec{n}$ — единичный вектор в направлении движения фотона. Соответствующие величины в конечном состоянии $(E', \vec{p}')$, $(h\nu', c^{-1}h\nu'\vec{n}')$. Наша задача — найти величины E' и ν' в зависимости от вектора $\vec{n}'$, направленного по импульсу рассеянного фотона.

Запишем законы сохранения энергии и импульса (60.3) в виде

$$E + h\nu - h\nu' = E', \quad \vec{p} + \frac{h\nu}{c} \vec{n} - \frac{h\nu'}{c} \vec{n}' = \vec{p}'. \quad (1)$$

Умножим второе уравнение (1) на c , затем возведем каждое в квадрат и вычтем одно из другого. В результате получим

$$\nu' = \frac{\nu(E - \vec{n} \cdot \vec{p}c)}{E - \vec{n}' \cdot \vec{p}c + h\nu(1 - \vec{n} \cdot \vec{n}')} \quad (2)$$

Энергия электрона после рассеяния

$$E' = E + h\nu \frac{h\nu(1 - \vec{n} \cdot \vec{n}') + (\vec{n} - \vec{n}') \cdot \vec{p}c}{E - \vec{n}' \cdot \vec{p}c + h\nu(1 - \vec{n} \cdot \vec{n}')} \quad (3)$$

Из (2) следует, что при рассеянии вперед, т. е. при $\vec{n}' = \vec{n}$, частота рассеянного фотона не меняется, так как $\nu = \nu'$, $E = E'$. Рассмотрим два частных случая.

А. Рассеяние рентгеновских лучей на свободных электронах.

Полагая $\vec{p} = 0$, получим

$$\nu' = \nu \left[1 + \frac{h\nu}{mc^2} (1 - \vec{n} \cdot \vec{n}') \right]^{-1}, \quad E' = mc^2 + \frac{h^2 \nu^2 (1 - \vec{n} \cdot \vec{n}')}{mc^2 + h\nu(1 - \vec{n} \cdot \vec{n}')} \quad (4)$$

Эти формулы были получены А. Комптоном при анализе рассеяния. Самый главный результат — удлинение длины волны рассеянного излучения:

$$\lambda' = \frac{c}{\nu'} = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \vec{n} \cdot \vec{n}'),$$

не зависящее от длины волны падающего излучения. Максимальное смещение $\Delta\lambda = 2h/mc$ наблюдается при рассеянии назад ($\vec{n}' = -\vec{n}$).

Комптон-эффект является основной причиной возникновения мощного электромагнитного импульса длительностью менее 1 с непосредственно после ядерного взрыва. γ -кванты, образующиеся при делении урана $^{235}_{92}\text{U}$, имеют в среднем энергию $h\nu = 0,8$ МэВ. Взаимодействуя с воздухом, они выбивают из атомов электроны, которые приобретают релятивистские энергии. Например, для рассеяния назад ($\vec{n}' = -\vec{n}$) из (4) находим

$$E' = mc^2 + K_e, \quad K_e = \frac{2(h\nu)^2}{mc^2 + 2h\nu} \simeq 0,63 \text{ МэВ.}$$

При наземном или воздушном взрывах возникает асимметрия движения электронов в вертикальном направлении. Такое движение аналогично действию обычного провода, в котором мгновенно возник импульс тока. В результате генерируется мощное излучение, образующее первую часть характерного сигнала ядерного взрыва, и происходит разделение зарядов (электронов и ионов)

в объеме ионизированного воздуха. Затем электроны под действием электрического поля ионов движутся в обратном направлении. Это обуславливает появление второго импульса тока и излучения. Затухающие колебания плазмы поддерживают некоторое время излучение в диапазоне радиочастот. Поражающее действие импульса излучения связано с возбуждением большой величины ЭДС индукции в цепях радиоэлектронной и электротехнической аппаратуры. Кроме того, воздействие ионизации, возникшей в результате ядерных взрывов на высотах от 16 км, и выше возмущает ионосферу и нарушает режим нормального распространения радиоволн.

Б. *Преобразование света в рентгеновское излучение.* Направим свет от лазера навстречу пучку электронов, движущихся с релятивистскими энергиями. Полагая $\vec{n} = -\vec{p}/p$, $\vec{n}' = -\vec{n}$, получим из (4)

$$\nu' = \nu \frac{E + pc}{E - pc + 2h\nu}, \quad E' = E - 2h\nu \frac{pc + h\nu}{E - pc + 2h\nu}. \quad (5)$$

Из (5) следует, что даже при взаимодействии фотонов небольших энергий $h\nu \ll m^2 c^4 / E$ с релятивистскими электронами ($E \gg mc^2$, $E \simeq pc$) рассеянные фотоны приобретают громадную энергию. Частота рассеянного «света»

$$\nu' \simeq \nu \frac{E + pc}{E - pc} = \nu \frac{(E + pc)^2}{m^2 c^4} \simeq \nu \left(\frac{2E}{mc^2} \right)^2 \gg \nu.$$

Этот эксперимент впервые был поставлен в Физическом институте АН СССР. При $E = 250$ МэВ, $\nu = 5 \cdot 10^{14}$ Гц найдем значения $\nu' = \nu \cdot 10^6 = 5 \cdot 10^{20}$ Гц. Длина волны $\lambda = 6 \cdot 10^{-11}$ см рассеянного излучения лежит в области рентгеновского спектра.

НЕКОТОРЫЕ СПРАВОЧНЫЕ ДАННЫЕ

Физические постоянные

Гравитационная постоянная	γ	$6,6720 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 \cdot \text{кг}^{-2}$
Постоянная Авогадро	N_A	$6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
Молярная газовая постоянная	R	$8,314 \text{ Дж} \cdot \text{моль}^{-1} \cdot \text{К}^{-1}$
Постоянная Больцмана	$k = R/N_A$	$1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ Дж} \cdot \text{К}^{-1}$
Масса электрона	m_e	$9,1095 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
Масса протона	m_p	$1,6726 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
Заряд электрона (абс. величина)	e	$1,6022 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
Скорость света в вакууме	c	$2,99792 \cdot 10^8 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$
Постоянная Планка	h	$6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$
Масса Земли	$M_{\oplus}$	$5,976 \cdot 10^{24} \text{ кг}$
Средний радиус Земли	$R_{\oplus}$	$6,371 \cdot 10^6 \text{ м}$
Сутки	сут.	$8,64 \cdot 10^4 \text{ с}$
Один год		$3,16 \cdot 10^7 \text{ с}$
Масса Солнца	$M_{\odot}$	$1,989 \cdot 10^{30} \text{ кг}$
Световой год	св. год	$9,46 \cdot 10^{15} \text{ м}$
Парсек	пк	$3,086 \cdot 10^{16} \text{ м}$

Солнечная система

Планеты Солнечной системы	Расстояние от Солнца, млн км	Радиус, км	Масса (Земля-1,0)	Плотность, $\text{кг}/\text{м}^3$
Меркурий	57,9	2 440	0,055	$5,4 \cdot 10^3$
Венера	108,2	6 052	0,816	$5,2 \cdot 10^3$
Земля	150	6 371	1,000	$5,5 \cdot 10^3$
Марс	227,9	3 393	0,107	$3,9 \cdot 10^3$
Юпитер	740—814	71 400	318	$1,3 \cdot 10^3$
Сатурн	1427	60 400	95	$0,7 \cdot 10^3$
Уран	2869	24 300	14,6	$1,6 \cdot 10^3$
Нептун	4497	25 050	17,2	$1,7 \cdot 10^3$
Плутон	5900	1 500	0,0017	$0,7 \cdot 10^3$

Приставки для образования десятичных кратных и дробей

пико	п	10^{-12}	дека	Да	10
нано	н	10^{-9}	гекто	г	10^2
микро	мк	10^{-6}	кило	к	10^3
милли	м	10^{-3}	мега	М	10^6
санти	с	10^{-2}	гига	Г	10^9
деци	д	10^{-1}	тера	Т	10^{12}

1. Мэрион Дж. Б. Общая физика с биологическими примерами. — М.: Высшая школа, 1986.
2. Ишлинский А. Ю. Механика. Идеи, задачи, приложения. — М.: Наука, 1985.
3. Кириллин В. А. Страницы истории науки и техники. — М.: Наука, 1986.
4. Липсон Г. Великие эксперименты в физике. — М.: Мир, 1972.
5. Силин А. А. Трение и его роль в развитии техники. — М.: Наука, 1976.
6. Серегин А. В. Путь в космос. — М.: Просвещение, 1974.
7. Хачатурьянц Л. С., Хрунов Е. В. Побеждая невесомость. — М.: Знание, 1985.
8. Дэвис Д. Энергия. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
9. Франкфурт У. И. Закон сохранения и превращения энергии. — М.: Наука, 1978.
10. Смирнов Г. В. Под знаком необратимости. — М.: Знание, 1977.
11. Гребеников Е. А., Рябов Ю. А. Поиски и открытия планет. — М.: Наука, 1984.
12. Белецкий В. В. Гравилет // Техника — молодежи. 1970. № 3.
13. Космодемьянский А. А. Теоретическая механика и современная техника. — М.: Просвещение, 1969.
14. Космонавтика. Энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1985.
15. Физика космоса. Маленькая энциклопедия. — М.: Сов. энциклопедия, 1986.
16. Стройк Д. Я. Краткий очерк истории математики. — М.: Наука, 1964.
17. Капица П. Л. Эксперимент. Теория. Практика. — М.: Наука, 1981.
18. Пушкин А. С. Поли. собр. соч. Т. VII. — М.: Наука, 1978.
19. Содди Ф. История атомной энергии. — М.: Атомиздат, 1979.
20. Клейнер Д., Литтман, М., Циммерман М. Сильно возбужденные атомы // Успехи физических наук. 1982. Т. 137, вып. 2. С. 339—360.
21. Энгельс Ф. Диалектика природы // Маркс К., Энгельс Ф. Соч. 2-е изд. Т. 20.
22. Демин В. Г. Судьба Солнечной системы. — М.: Наука, 1975.
23. Шмидт-Нильсен К. Как работает организм животного. — М.: Мир, 1976.
24. Вьяльцев А. Н. Открытие элементарных частиц. — М.: Наука, 1981.
25. Вайнберг С. Открытие субатомных частиц. — М.: Мир, 1986.
26. Карцев В. Приключения великих уравнений. — М.: Знание, 1986.
27. Фью А. Гром // Успехи физических наук. 1976. Т. 119, вып. 4. С. 735—748.
28. Фейнман Р. Вы, конечно, шутите, мистер Фейнман! // Успехи физических наук. 1986. Т. 48, вып. 3. С. 509—526.
29. Фейнман Р., Лейтон Р., Сэндс М. Фейнмановские лекции по физике. Т. 5. Электричество и магнетизм. — М.: Мир, 1977.
30. Соколов А. Тайны золотого сечения // Техника — молодежи. 1978. № 5.
31. Прохоров А. И. Золотая спираль // Квант. 1984. № 9. С. 15—17, 33.
32. Богданов К. Ю. Физик в гостях у биолога. — М.: Наука, 1986.
33. Браун С. Краткая история газовой электроники // Успехи физических наук. 1981. Т. 133, вып. 4. С. 693—706.

34. Райзер Ю. П. Оптические разряды // Успехи физических наук. 1980. Т. 132, вып. 3. С. 549—581.
35. Виленкин Н. Я. Функции в природе и технике. — М.: Просвещение, 1985.
36. Бишоп Р. Колесания. — М.: Наука, 1979.
37. Планк М. Единство физической картины мира. — М.: Наука, 1966.
38. Кляус Е. М. Поиски и открытия. — М.: Наука, 1986.
39. Вьяльцев А. Н., Григорьян А. Г. Генрих Герц. — М.: Наука, 1968.
40. Тарасов Л. В., Тарасова А. Н. Беседы о преломлении света. — М.: Наука, 1982.
41. Грегори Р. Разумный глаз. — М.: Мир, 1972.
42. Демидов В. Как мы видим то, что видим. — М.: Знание, 1979.
43. Логунов А. А. К работам Анри Пуанкаре о динамике электрона. — М.: Ин-т ядерных исследований АН СССР, 1984.
44. Гинзбург В. Л. О физике и астрофизике. — М.: Наука, 1985, с. 273.
45. Бонди Г. Относительность и здравый смысл. — М.: Мир, 1967.
46. Вайскопф В. Видимая форма быстро движущихся тел // Успехи физических наук. 1964. Т. 84, вып. 1. С. 183—188.
47. Либшер Д. Э. Теория относительности с циркулем и линейкой. — М.: Мир, 1980.
48. Тейлор Э., Уилер Дж. Физика пространства-времени. — М.: Мир, 1971.
49. Мигдал А. Б. Нильс Бор и квантовая физика // Успехи физических наук, 1985. Т. 147, вып. 2. С. 303—342.
50. Герц Г. Из первых лет квантовой физики // Успехи физических наук. 1977. Т. 122, вып. 3. С. 497—511.
51. Тарасов Л. В. Лазеры: действительность и надежды. — М.: Наука, 1985.
52. Кюри Е. Мария Кюри. — М.: Атомиздат, 1979.
53. Ленин В. И. Материализм и эмпириокритицизм // Полн. собр. соч. Т. 18.
54. 50 лет современной ядерной физике. — М.: Энергоатомиздат, 1982.
55. Шадинец А. Б., Фадеев Г. Н. Радиоактивные элементы. — М.: Просвещение, 1981.
56. Барашенков В. С. Новые профессии тяжелых ионов. — М.: Атомиздат, 1977.
57. Карпов И. И., Лисневский Ю. И. Кварки. — М.: Наука, 1976.
58. Копылов Г. И. Всего лишь кинематика. — М.: Наука, 1981.
59. Боровой А. А. Как регистрируют частицы. — М.: Наука, 1981.
60. Хоффт Г. Т. Калибровочная теория сил между элементарными частицами // Успехи физических наук. 1981. Т. 135, вып. 3. С. 479—512.
61. Намбу Е. Кварки. — М.: Мир, 1984.
62. Дубовой Э. И. По следам невидимых частиц. — М.: Знание, 1985.
63. Фритш Г. Основа нашего мира. — М.: Энергоатомиздат, 1985.
64. Адо Ю. М. Ускорители заряженных частиц высоких энергий // Успехи физических наук. 1985. Т. 145, вып. 1. С. 87—112.
65. Понтекоров Б. М. Детство и юность нейтринной физики. Некоторые воспоминания // Природа. 1983. № 1. С. 43—57.
66. Аскарьян Г. А. Исследование Земли с помощью нейтрино, нейтринная геология // Успехи физических наук. 1984. Т. 144, вып. 3. С. 523—530.
67. Лернд Дж., Эйхлер Д. Глубоководный нейтринный телескоп // Успехи физических наук. 1982. Т. 137, вып. 3. С. 449—465.
68. Гинзбург М. А. Визуальное наблюдение космических лучей // Успехи физических наук. 1973. Т. 109, вып. 2. С. 411—413.
69. Гарднер Д. Атомы сегодня и завтра. — М.: Знание, 1979.
70. Петров Ю. В. Естественный ядерный реактор Окло // Успехи физических наук. 1977. Т. 123, вып. 3. С. 473—486.
71. Воронов Г. С. Штурм термоядерной крепости. — М.: Наука, 1985.
72. Кракстон Р. С., Мак-Крори Р. Л., Сорес Д. М. Лазерный термоядерный синтез // В мире науки. 1986. № 10. С. 4—16.
73. Павленко Ю. Г. Парадокс спутника // Квант. 1986. № 5. С. 14—15.
74. Петросьянц А. М. От первой атомной до гигантов наших дней // Наука в СССР. 1985. № 4. С. 16—23.
75. Кондратьев К. Я., Байбаков С. Н., Никольский Г. А. Ядерная война, атмосфера и климат // Наука в СССР. 1985. № 3. С. 3—11, 97—101.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Павленко Юрий Григорьевич,

НАЧАЛА ФИЗИКИ

Зав. редакцией *С. И. Зеленский*
Редактор *О. В. Семененко*
Переплет художника *В. Б. Гордона*
Художественный редактор *Ю. М. Добрянская*
Технический редактор *Л. Р. Черемискина*
Корректоры *М. И. Эльмус, Л. А. Костылева*

ИБ № 2636

Сдано в набор 02.02.87.
Подписано в печать 15.12.87.
Л-62395. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 3.
Гарнитура литературная. Высокая печать.
Усл. печ. л. 40,00. Уч.-изд. л. 39,97.
Тираж 30000 экз. Заказ 45
Цена 1 р. 50 к Изд. № 4696

Ордена «Знак Почета» издательство
Московского университета.
103009, Москва, ул. Герцена, 5/7.
Типография ордена «Знак Почета» изд-ва МГУ.
119899, Москва, Ленинские горы