



ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
ПЛАЗМЫ

АВТОРЫ:

А. И. АХИЕЗЕР, И. А. АХИЕЗЕР, Р. В. ПОЛОВИН,  
А. Г. СИТЕНКО, К. Н. СТЕПАНОВ

**Электродинамика плазмы**, под редакцией А. И. А х и е з е р а, Монография, Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974.

Книга посвящена теории коллективных электромагнитных колебаний однородной плазмы. С единой точки зрения излагается теория как высокочастотных, так и низкочастотных колебаний плазмы и даются основные принципиальные приложения этой теории. Рассмотрены колебания как малой, так и конечной амплитуды. Книга начинается с изложения общих методов описания плазмы. Далее рассматриваются низкочастотные магнито-гидродинамические волны и магнито-гидродинамические разрывы и излагается теория эволюционности магнито-гидродинамических ударных волн.

Затем изучаются высокочастотные колебания плазмы как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля, причем рассматривается как равновесная, так и неравновесная плазма. Изложена теория различного типа неустойчивостей неравновесной однородной плазмы и даны общие критерии неустойчивости плазмы. Подробно исследованы нелинейные волны в бесстолкновительной плазме и изложены квазилинейная теория плазмы и теория плазменной турбулентности.

Значительная часть книги посвящена теории флуктуаций и связанных с ними процессов рассеяния и трансформации волн и рассеяния частиц в плазме.

Рисунков 84, библиография 569 названий.

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», 1974 г.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	11
<b>Глава 1. Кинетический и гидродинамический методы описания плазмы . . . . .</b>	<b>17</b>
§ 1.1. Иерархия кинетических уравнений . . . . .	17
1.1.1. Экранированное кулоновское взаимодействие и существование плазменных колебаний (17). 1.1.2. Многочастичные функции распределения и корреляционные функции (19).	
1.1.3. Цепочка уравнений для многочастичных функций (22).	
§ 1.2. Кинетическое уравнение Власова . . . . .	24
1.2.1. Плазменный параметр (24). 1.2.2. Самосогласованное поле (25). 1.2.3. Система кинетических уравнений с самосогласованным полем для многокомпонентной плазмы (27).	
§ 1.3. Парная корреляционная функция равновесной плазмы и интеграл столкновений Ландау . . . . .	28
1.3.1. Парная корреляционная функция (28). 1.3.2. Интеграл столкновений Ландау (33).	
§ 1.4. Релаксация плазмы . . . . .	36
1.4.1. Время релаксации <sup>1</sup> плазмы (36). 1.4.2. Процесс выравнивания температур электронов и ионов (39). 1.4.3. H-теорема Больцмана для спокойной плазмы (40).	
§ 1.5. Гидродинамический метод описания плазмы . . . . .	43
1.5.1. Гидродинамическое описание (43). 1.5.2. Переход от кинетики к гидродинамике (45). 1.5.3. Уравнения магнитной гидродинамики (52).	
<b>Глава 2. Магнитогидродинамические волны . . . . .</b>	<b>58</b>
§ 2.1. Магнитозвуковые и альвеновские волны . . . . .	58
2.1.1. Фазовые скорости и поляризации (58). 2.1.2. Поляры (62). 2.1.3. Затухание магнитогидродинамических волн (65). 2.1.4. Возбуждение магнитогидродинамических волн (67). 2.1.5. Характеристики магнитогидродинамических уравнений (71).	
§ 2.2. Простые волны в магнитной гидродинамике . . . . .	75
2.2.1. Связь простых волн с волнами малой амплитуды (75). 2.2.2. Типы простых волн (77). 2.2.3. Искажение профиля простой волны (79). 2.2.4. Интегрирование уравнений простых волн (82). 2.2.5. Инварианты Римана (87). 2.2.6. Теорема Фридрикса (89).	

<b>Глава 3. Ударные волны . . . . .</b>	<b>92</b>
§ 3.1. Разрывы . . . . .	92
3.1.1. Граничные условия (92). 3.1.2. Классификация разрывов (96). 3.1.3. Теорема Цемплена (100). 3.1.4. Простые и ударные волны в релятивистской магнитной гидродинамике (102).	
§ 3.2. Устойчивость и структура ударных волн . . . . .	107
3.2.1. Эволюционность ударных волн (107). 3.2.2. Структура ударных волн (114). 3.2.3. Осцилляционная структура ударной волны при наличии внешнего магнитного поля (120). 3.2.4. Случаи вырождения (125).	
§ 3.3. Исследование разрывов . . . . .	131
3.3.1. Скачки различных величин (131). 3.3.2. Порядок следования волн (135). 3.3.3. Задача о поршне (137). 3.3.4. Расщепленные разрыва (143).	
<b>Глава 4. Высокочастотные колебания свободной плазмы . . . . .</b>	<b>145</b>
§ 4.1. Гидродинамическая теория высокочастотных колебаний свободной плазмы . . . . .	145
4.1.1. Электромагнитные волны в плазме (145). 4.1.2. Ленгмюровские колебания (149). 4.1.3. Ионно-звуковые колебания (152).	
§ 4.2. Кинетическая теория продольных плазменных колебаний . . . . .	154
4.2.1. Развитие начального возмущения (154). 4.2.2. Частота и затухание ленгмюровских колебаний (163). 4.2.3. Физическая интерпретация затухания Ландау (168). 4.2.4. Кинетическая теория ионно-звуковых колебаний (174).	
§ 4.3. Кинетическая теория электромагнитных волн в плазме . . . . .	176
4.3.1. Тензор диэлектрической проницаемости и дисперсионное уравнение электромагнитных волн для однородной плазмы (176). 4.3.2. Поляризация плазменных волн (181). 4.3.3. Возбуждение волн в плазме (183). 4.3.4. Тензор диэлектрической проницаемости в случае изотропного распределения частиц (184).	
<b>Глава 5. Колебания плазмы, находящейся в магнитном поле . . . . .</b>	<b>190</b>
§ 5.1. Гидродинамическая теория колебаний плазмы в магнитном поле . . . . .	190
5.1.1. Тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы в магнитном поле (190). 5.1.2. Плазменные (гибридные) резонансы в холодной плазме (193). 5.1.3. Общий вид спектров колебаний холодной магнитоактивной плазмы (197). 5.1.4. Высокочастотные (электронные) ветви колебаний холодной магнитоактивной плазмы (199). 5.1.5. Низкочастотные ветви колебаний холодной магнитоактивной плазмы (201). 5.1.6. Распространение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме параллельно магнитному полю (203). 5.1.7. Поперечное распространение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме (203).	
§ 5.2. Кинетическая теория колебаний плазмы в магнитном поле . . . . .	205
5.2.1. Тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы в кинетическом приближении (205). 5.2.2. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы с максвелловским распределением (211). 5.2.3. Кинетическая теория плазменных резонансов (213).	

§ 5.3. Затухание высокочастотных электромагнитных волн в магнитоактивной плазме . . . . .	219
5.3.1. Электронное циклотронное затухание необыкновенной волны в горячей плазме малой плотности (219). 5.3.2. Электронное циклотронное поглощение медленной необыкновенной волны и обыкновенной волны в плазме большой плотности (221). 5.3.3. Электронный циклотронный резонанс на кратных гармониках и электронное черенковское затухание высокочастотных волн (225). 5.3.4. Затухание волн вблизи плазменных резонансов (227).	
§ 5.4. Поглощение альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн . . . . .	229
5.4.1. Черенковское поглощение альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн в плазме низкого давления (229). 5.4.2. Ионный циклотронный резонанс (233).	
§ 5.5. Низкочастотные колебания горячей плазмы в магнитном поле . . . . .	237
5.5.1. Продольные колебания плазмы с горячими электронами и холодными ионами (237). 5.5.2. Низкочастотные электромагнитные волны в плазме конечного давления при $T_e \gg T_i$ (242). 5.5.3. Высокочастотный электронный звук (246). 5.5.4. Низкочастотный электронный звук (249).	
§ 5.6. Циклотронные волны в плазме в случае квазиперечного распространения . . . . .	250
5.6.1. Продольные ионно-циклотронные колебания плазмы при квазиперечном распространении (250). 5.6.2. Непотенциальные ионно-циклотронные колебания в изотермической плазме малого давления при квазиперечном распространении (254).	
§ 5.7. Циклотронные волны в случае поперечного распространения . . . . .	259
5.7.1. Обыкновенные циклотронные волны (259). 5.7.2. Продольные электронные циклотронные колебания (262). 5.7.3. Продольные ионные циклотронные колебания (264). 5.7.4. Необыкновенные электронные циклотронные волны (265). 5.7.5. Необыкновенные ионные циклотронные волны (267).	
<b>Глава 6. Взаимодействие потоков заряженных частиц с плазмой. Устойчивые и неустойчивые распределения частиц в плазме . . . . .</b>	<b>271</b>
§ 6.1. Взаимодействие потоков заряженных частиц с колебаниями свободной плазмы . . . . .	271
6.1.1. Дисперсионное уравнение системы плазма—пучок (271). 6.1.2. Возбуждение продольных колебаний плазмы резонансными частицами пучка (274). 6.1.3. Возбуждение продольных колебаний моноэнергетическим пучком (277). 6.1.4. Неустойчивость плазмы, электроны которой движутся относительно ионов (281). 6.1.5. Возбуждение электромагнитных волн в плазме потоками заряженных частиц (285). 6.1.6. Неустойчивость плазмы с анизотропным распределением частиц по скоростям (291).	
§ 6.2. Взаимодействие потоков заряженных частиц с колебаниями плазмы в магнитном поле . . . . .	292
6.2.1. Тензор диэлектрической проницаемости системы плазма—пучок в магнитном поле (292). 6.2.2. Возбуждение продольных колебаний плазмы в магнитном поле пучком электронов (295). 6.2.3. Неустойчивость магнитоактивной плазмы в поле низкочастотных электромагнитных волн (300). 6.2.4. Возбуждение быстрых магнитозвуковых и альвеновских волн потоками электронов и ионов (305).	

§ 6.3. Возбуждение электромагнитных волн в плазме потоками осцилляторов . . . . .	310
6.3.1. Тензор диэлектрической проницаемости системы плазма — поток осцилляторов (310). 6.3.2. Возбуждение продольных высокочастотных колебаний потоком осцилляторов-электронов (313). 6.3.3. Возбуждение быстрых магнитозвуковых и альвеновских волн потоками осцилляторов (318).	
§ 6.4. Возбуждение электромагнитных волн в плазме релятивистскими потоками заряженных частиц . . . . .	320
6.4.1. Тензор диэлектрической проницаемости релятивистского потока плазмы (320). 6.4.2. Возбуждение электромагнитных волн в свободной плазме релятивистским потоком (325). 6.4.3. Дисперсионное уравнение для косога распространения волн (327). 6.4.4. Поперечное распространение волн (330).	
§ 6.5. Общие критерии устойчивости распределений частиц в плазме . . . . .	332
6.5.1. Критерии устойчивости и неустойчивости распределений частиц в свободной плазме (332). 6.5.2. Двухлучковая неустойчивость (336). 6.5.3. Критерии устойчивости распределений электронов плазмы в магнитном поле (339).	
§ 6.6. Абсолютная и конвективная неустойчивости . . . . .	341
6.6.1. Критерии абсолютной и конвективной неустойчивости (341). 6.6.2. Метод бегущих волн (347). 6.6.3. Критерии усиления и непропускания колебаний (349). 6.6.4. Правила Стэррока (351). 6.6.5. Глобальная неустойчивость (357). 6.6.6. Неинвариантный характер понятий абсолютной и конвективной неустойчивостей (360). 6.6.7. Характер пучковой неустойчивости (361).	
<b>Глава 7. Колебания частично ионизованной плазмы . . . . .</b>	<b>364</b>
§ 7.1. Функция распределения электронов и высокочастотные электронные колебания во внешнем электрическом поле . . . . .	364
7.1.1. Кинетическое уравнение (364). 7.1.2. Стационарная функция распределения электронов (369). 7.1.3. Высокочастотные электронные колебания (371).	
§ 7.2. Ионно-звукковые колебания в сильном электрическом поле . . . . .	374
7.2.1. Ионно-звукковые колебания в отсутствие внешнего магнитного поля (374). 7.2.2. Ионно-звукковые колебания во внешних электрическом и магнитном полях (377).	
§ 7.3. Низкочастотные колебания частично ионизованной плазмы . . . . .	380
7.3.1. Колебания с несохранением чисел частиц отдельных компонент плазмы (380). 7.3.2. Однородные низкочастотные колебания большой амплитуды (383).	
<b>Глава 8. Нелинейные волны в бесстолкновительной плазме . . . . .</b>	<b>386</b>
§ 8.1. Нелинейные высокочастотные волны в холодной плазме . . . . .	386
8.1.1. Нелинейные нерелятивистские ленгмюровские колебания (386). 8.1.2. Уравнения, описывающие нелинейные волны в релятивистской плазме в отсутствие тепловых эффектов (388). 8.1.3. Продольные волны в релятивистской плазме (392). 8.1.4. Поперечные волны в релятивистской плазме (394). 8.1.5. Связанные продольно-поперечные волны в релятивистской плазме (396).	
§ 8.2. Нелинейные волны в свободной двухтемпературной плазме . . . . .	400
8.2.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в квазиравновесной плазме (400). 8.2.2. Простые волны в квазиравновес-	

ной плазме (403). 8.2.3. Периодические и уединенные волны (406).	
8.2.4. Квазизударные волны (409).	
§ 8.3. Нелинейные волны в свободной неравновесной плазме	411
8.3.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в неравновесной плазме (411).	
8.3.2. Простые волны в неравновесной плазме (412).	
8.3.3. Стационарные волны (415).	
8.3.4. Многопоточные течения в неравновесной плазме (419).	
§ 8.4. Нелинейные волны в магнитоактивной плазме с горячими электронами	424
8.4.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в плазме, находящейся в магнитном поле (424).	
8.4.2. Простые магнитозвуковые волны (426).	
8.4.3. Стационарные магнитозвуковые волны (428).	
§ 8.5. Нелинейные низкочастотные волны в холодной плазме, находящейся в магнитном поле	431
8.5.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в холодной магнитоактивной плазме (431).	
8.5.2. Нелинейные волны в случае сильного магнитного поля (433).	
8.5.3. Нелинейные волны в случае слабого магнитного поля (435).	
<b>Глава 9. Теория колебаний плазмы в квазилинейном приближении</b>	438
§ 9.1. Квазилинейная теория колебаний свободной плазмы	438
9.1.1. Квазилинейное приближение (438).	
9.1.2. Квазилинейная релаксация (445).	
9.1.3. Релаксация одномерных волновых пакетов (447).	
9.1.4. Влияние кулоновских столкновений на квазилинейную релаксацию и затухание Ландау ленгмюровских колебаний (449).	
§ 9.2. Квазилинейная теория колебаний магнитоактивной плазмы	451
9.2.1. Основные уравнения (451).	
9.2.2. Квазилинейная релаксация в магнитоактивной плазме (461).	
9.2.3. Релаксация одномерных волновых пакетов в магнитоактивной плазме (467).	
9.2.4. Влияние столкновений на квазилинейную релаксацию и черенковское и циклотронное затухание колебаний (473).	
<b>Глава 10. Нелинейное взаимодействие волн и частиц</b>	479
§ 10.1. Кинетическое уравнение для волн	479
10.1.1. Нелинейное уравнение для амплитуды волны (479).	
10.1.2. Уравнение для корреляционной функции (482).	
10.1.3. Трехволновые процессы и нелинейное затухание Ландау (486).	
§ 10.2. Турбулентные процессы с участием ленгмюровских волн	489
10.2.1. Взаимодействие ленгмюровских волн с ионно-звуковыми (489).	
10.2.2. Распадающая неустойчивость ленгмюровской волны (491).	
10.2.3. Нелинейное затухание ленгмюровских волн (494).	
§ 10.3. Ионно-звуковая турбулентность	499
10.3.1. Нелинейное затухание ионного звука (499).	
10.3.2. Стационарные распределения турбулентных волн (503).	
§ 10.4. Взаимодействие между магнитозвуковыми и альвеповскими волнами	506
10.4.1. Интеграл столкновений и Н-теорема для газа плазмонов (506).	
10.4.2. Гамильтониан системы плазмонов (509).	
10.4.3. Вероятности трехплазмонных процессов (512).	
10.4.4. Времена жизни плазмонов (515).	

Глава 11. Флуктуации в плазме . . . . .	518
§ 11.1. Флуктуационно-диссипативное соотношение . . . . .	518
11.1.1. Пространственно-временные корреляционные функции (518).	
11.1.2. Спектральное распределение флуктуаций и диссипация энергии (519).	
11.1.3. Симметрия тензора отклика (523).	
§ 11.2. Электромагнитные флуктуации в равновесной плазме . .	525
11.2.1. Электромагнитные флуктуации в средах с пространственно-временной дисперсией (525).	
11.2.2. Электромагнитные флуктуации в изотропной плазме (528).	
11.2.3. Флуктуации плотности заряда (530).	
11.2.4. Флуктуации плотности тока (533).	
11.2.5. Флуктуации электромагнитного поля (534).	
11.2.6. Флуктуации плотностей электронов и ионов (535).	
11.2.7. Флуктуации в плазме, находящейся в магнитном поле (536).	
§ 11.3. Обращение флуктуационно-диссипативного соотношения .	538
11.3.1. Связь между диэлектрической проницаемостью плазмы и корреляционной функцией флуктуаций для системы не взаимодействующих частиц (538).	
11.3.2. Диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы (540).	
11.3.3. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле (542).	
§ 11.4. Электромагнитные флуктуации в неизотермической плазме	544
11.4.1. Флуктуации в изотропной неизотермической плазме (544).	
11.4.2. Флуктуации в анизотропной неизотермической плазме (548).	
11.4.3. Флуктуации в неизотермической плазме, находящейся в магнитном поле (549).	
§ 11.5. Электромагнитные флуктуации в неравновесной плазме	550
11.5.1. Спектральные распределения флуктуаций в плазме с неравновесными, но устойчивыми функциями распределения (550).	
11.5.2. Коллективные флуктуации и эффективная температура (554).	
11.5.3. Критические флуктуации вблизи границы неустойчивости плазмы (555).	
11.5.4. Флуктуации в неравновесной плазме, находящейся в магнитном поле (559).	
§ 11.6. Кинетическая теория флуктуаций . . . . .	562
11.6.1. Флуктуации функции распределения (562).	
11.6.2. Флуктуации функций распределения в неизотермической плазме (566).	
11.6.3. Временное развитие флуктуаций (568).	
11.6.4. Флуктуации в системе плазма—пучок (572).	
11.6.5. Влияние столкновений между частицами на флуктуации в плазме (573).	
11.6.6. Переход к гидродинамической теории флуктуаций (576).	
§ 11.7. Флуктуации в частично ионизованной плазме, находящейся во внешнем электрическом поле . . . . .	582
11.7.1. Флуктуации в отсутствие внешнего магнитного поля (582).	
11.7.2. Критические флуктуации в электрическом и магнитном полях (584).	
Глава 12. Рассеяние и трансформация волн в плазме . . . . .	587
§ 12.1. Рассеяние электромагнитных волн в свободной плазме	587
12.1.1. Ток рассеяния (587).	
12.1.2. Сечение рассеяния (593).	
12.1.3. Спектральное распределение рассеянного излучения (595).	
12.1.4. Критическая опалесценция (597).	

§ 12.2. Трансформация поперечных и продольных волн в плазме	599
12.2.1. Трансформация поперечной волны в продольную (599).	
12.2.2. Трансформация и рассеяние продольных волн (600).	
12.2.3. Спонтанное свечение неравновесной плазмы (605).	
§ 12.3. Некогерентное отражение электромагнитных волн от плазмы	607
12.3.1. Коэффициент отражения (607).	
12.3.2. Спектральное распределение отраженного излучения (609).	
§ 12.4. Рассеяние и трансформация волн в плазме, находящейся в магнитном поле	612
12.4.1. Поле рассеянных волн. Сечения рассеяния и трансформации (612).	
12.4.2. Рассеяние и трансформация электромагнитных волн на некогерентных флуктуациях (615).	
12.4.3. Рассеяние и трансформация электромагнитных волн на резонансных флуктуациях (617).	
12.4.4. Рассеяние и трансформация лентмюровских волн (621).	
12.4.5. Трансформация низкочастотных волн на лентмюровских флуктуациях (623).	
§ 12.5. Рассеяние и трансформация волн в частично ионизованной плазме, находящейся во внешнем электрическом поле	624
12.5.1. Рассеяние поперечных волн в отсутствие внешнего магнитного поля (624).	
12.5.2. Рассеяние поперечных волн при наличии внешнего магнитного поля (626).	
12.5.3. Критическая опалесценция при рассеянии и трансформации продольных волн (629).	
§ 12.6. Рассеяние и трансформация волн в турбулентной плазме	634
12.6.1. Трансформация продольных волн в поперечные (634).	
12.6.2. Рассеяние электромагнитных волн на турбулентных ионно-звуковых колебаниях (638).	
12.6.3. Рассеяние электромагнитных волн на турбулентных высокочастотных колебаниях (641).	
§ 12.7. Эхо в плазме	643
12.7.1. Незатухающие колебания функции распределения и эффекты эха в плазме (643).	
12.7.2. Эховые колебания продольного поля (645).	
12.7.3. Эхо при антипараллельной ориентации волновых векторов возмущений (648).	
Глава 13. Рассеяние заряженных частиц в плазме	651
§ 13.1. Прохождение заряженных частиц через свободную плазму	651
13.1.1. Поле заряда в плазме (651).	
13.1.2. Поляризационные потери энергии при движении заряженной частицы в плазме (652).	
13.1.3. Изменение энергии движущегося заряда, обусловленное флуктуациями поля в плазме (657).	
13.1.4. Вероятность рассеяния и потери энергии частицы (662).	
§ 13.2. Коэффициенты динамического трения и диффузии в плазме	671
13.2.1. Уравнение Фоккера—Планка для пробных частиц (671).	
13.2.2. Коэффициенты динамического трения и диффузии в электронной плазме (673).	
13.2.3. Коэффициенты трения и диффузии в двухтемпературной плазме (675).	
§ 13.3. Прохождение заряженных частиц через равновесную плазму в магнитном поле	671

13.3.1. Вероятность рассеяния в магнитоактивной плазме (678).	
13.3.2. Поляризационные потери энергии частицы, обусловленные взаимодействием с продольным полем (679).	
13.3.3. Учет закручивания (682).	
13.3.4. Черенковское излучение заряда, движущегося в плазме в магнитном поле (683).	
§ 13.4. Взаимодействие заряженных частиц с неравновесной плазмой . . . . .	689
13.4.1. Рассеяние заряженных частиц на критических флуктуациях (689).	
13.4.2. Взаимодействие заряженных частиц с турбулентной плазмой (694).	
13.4.3. Взаимодействие заряженных частиц с турбулентной плазмой в магнитном поле (702).	
Литература . . . . .	705

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Свойства плазмы как особого состояния вещества определяются в значительной степени тем, что между частицами, образующими плазму, действуют электромагнитные силы, влияние которых распространяется на макроскопические расстояния. Поэтому процессы, происходящие в плазме, сопровождаются, как правило, возникновением электромагнитных полей, играющих фундаментальную роль в ходе этих процессов.

Электромагнитное взаимодействие, простирающееся на макроскопические расстояния, проявляется прежде всего в том, что в плазме возникают коллективные электромагнитные колебания, в которых принимает участие одновременно большое число частиц. Существование этих специфических коллективных электромагнитных колебаний является для плазмы как особого состояния вещества столь же характерным, как, например, кристаллическое упорядочение для твердого состояния вещества.

Этим объясняется то место, которое занимает в физике плазмы электродинамика плазмы, т. е. теория электромагнитных полей в ней — в первую очередь коллективных электромагнитных колебаний плазмы — и теория ее макроскопических электрических и магнитных свойств.

К электродинамике плазмы, понимаемой в широком смысле, относятся также и такие проблемы, как теория магнитных ловушек, проблема нагрева плазмы внешними полями и токами, теория неустойчивостей неоднородностей плазмы. В настоящей книге мы не касаемся этих проблем — не потому, что они неважны; напротив, их значение чрезвычайно велико. Мы ограничиваемся изложением теории электромагнитных свойств однородной плазмы, потому что эта теория лежит в основе всей электродинамики плазмы.

Хотя проблемам электродинамики плазмы посвящен целый ряд монографий, мы тем не менее решились написать еще одну книгу по этому предмету, имея в виду с единой точки зрения изложить теорию как низкочастотных, так и высокочастотных колебаний (не ограничиваясь лишь колебаниями малой амплитуды) и дать ее основные принципиальные приложения.

Книга начинается с изложения общих методов описания плазмы. Этому вопросу посвящена гл. 1, в которой строится цепочка кинетических уравнений Боголюбова, вводится самосогласованное

поле, выводится кинетическое уравнение Власова и интеграл столкновений Ландау. Здесь же излагается  $H$ -теорема Больцмана в применении к плазме и исследуется вопрос о релаксации плазмы. Наконец, в этой главе разъясняется переход от кинетического к гидродинамическому описанию плазмы и выводятся уравнения магнитной гидродинамики.

Изложенные методы описания плазмы позволяют далее перейти к детальному исследованию как низкочастотных, так и высокочастотных колебаний плазмы.

Мы начинаем с теории низкочастотных колебаний в случае частых столкновений, когда достаточно сокращенного гидродинамического описания плазмы. Низкочастотным колебаниям посвящены гл. 2 и 3. В гл. 2 развивается линейная теория магнито-гидродинамических волн, определяются фазовые скорости, затухание и поляризации различных волн, а также исследуется возбуждение этих волн. Далее рассматриваются простые волны: исследуется искажение их профиля, приводящее к образованию разрывов; интегрируются уравнения простых волн и, в частности, вычисляются инварианты Римана.

Гл. 3 посвящена теории ударных магнито-гидродинамических волн. Здесь доказывается теорема Цемплена, исследуются ударные волны в релятивистской магнитной гидродинамике, излагается вопрос об эволюционности и структуре ударных волн. Наконец, решается задача о поршне и о расщеплении произвольного разрыва в магнитной гидродинамике.

Изучив магнито-гидродинамические волны в случае частых соударений, мы переходим к рассмотрению другого предельного случая — колебаний в бесстолкновительной плазме. Этому вопросу посвящены гл. 4 и 5. В первой из них излагается теория колебаний в свободной бесстолкновительной плазме, а во второй — теории колебаний в бесстолкновительной плазме, находящейся во внешнем магнитном поле.

Гл. 4 начинается с изложения теории колебаний в бесстолкновительной плазме в гидродинамическом приближении, а затем эти колебания изучаются на основе кинетического уравнения. Подробно исследуются спектры как высокочастотных, так и низкочастотных колебаний (ленгмюровские волны и ионный звук). Рассматривается бесстолкновительное затухание колебаний (затухание Ландау) и решается задача об аномальном скин-эффекте.

В гл. 5 подробно изучаются спектры и затухание колебаний в бесстолкновительной магнитоактивной плазме. В начале главы рассматриваются колебания в «холодной» магнитоактивной плазме. Далее на основе кинетического уравнения определяется тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы и выводится дисперсионное уравнение для электромагнитных волн с учетом пространственной дисперсии, обусловленной тепловым

движением электронов и ионов плазмы. Находятся частоты и декременты затухания (черенковского и циклотронного) практически всех ветвей колебаний, которые могут распространяться в магнитоактивной плазме с максвелловским распределением частиц по скоростям — обыкновенной, быстрой и медленной не-обыкновенной, быстрой магнитозвуковой и альвеновской волн, быстрых и медленных ионно-звуковых колебаний, электронно-звуковых колебаний в неизотермической плазме и различных ветвей электронных и ионных циклотронных волн.

Изучив спектры колебаний в равновесной плазме, мы переходим к изучению колебаний в неравновесной однородной плазме (гл. 6). Прежде всего мы исследуем взаимодействие пучка заряженных частиц с колебаниями свободной плазмы и показываем, что система плазма—пучок неустойчива, т. е. взаимодействие частиц пучка с колебаниями плазмы приводит к экспоненциальному росту со временем малого начального возмущения. Далее находятся инкременты нарастания различных типов колебаний, возбуждаемых потоками электронов и ионов малой плотности, рассматривается задача об устойчивости плазмы в электрическом поле и исследуется возбуждение непотенциальных (электромагнитных) волн в плазме с неизотропным распределением частиц по скоростям. Изучается взаимодействие потоков заряженных частиц с медленными волнами в магнитоактивной плазме (частицы в потоках характеризуются как изотропной, так и анизотропной функциями распределения). Наконец, рассматривается возбуждение электромагнитных волн в плазме потоками релятивистских частиц.

Исследовав взаимодействие потоков заряженных частиц с плазмой, мы переходим к выяснению общих критериев устойчивости различных распределений частиц в плазме. Отдельно рассматривается свободная плазма и плазма, находящаяся во внешнем магнитном поле. Решается задача о двухпучковой неустойчивости.

В заключение гл. 6 исследуется общий вопрос о характере неустойчивости, дается определение абсолютной и конвективной неустойчивости и устанавливаются критерии обеих ее видов. Устанавливается также критерий усиления и непропускания волн и, наконец, рассматривается глобальная неустойчивость, обусловленная отражением волн от границ системы.

Вопросу о взаимодействии потоков заряженных частиц с плазмой родственен вопрос о поведении частично ионизованной плазмы во внешнем электрическом поле. Так как стационарные состояния такой плазмы характеризуются направленным движением электронов относительно ионов, то в ней возможно возникновение неустойчивости, аналогичной пучковой неустойчивости бесстолкновительной плазмы.

Изучив взаимодействие потоков заряженных частиц с плазмой, мы переходим к рассмотрению колебаний в частично ионизованной

плазме, находящейся во внешнем электрическом поле (как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля). Этому вопросу посвящена гл. 7. Здесь выводится кинетическое уравнение, описывающее электронную компоненту частично ионизованной плазмы, находящейся во внешних электрическом и магнитном полях, и определяется стационарная функция распределения электронов в такой плазме. Далее исследуются высокочастотные (поперечные электромагнитные и ленгмюровские), ионно-звуковые и магнитозвуковые колебания и показывается, что при наличии внешнего электрического поля колебания последних двух видов могут оказаться нарастающими. Наконец, в гл. 7 исследуются своеобразные колебания частично ионизованной плазмы — ионизационно-рекомбинационные колебания, при которых меняются не только плотности заряженных частиц, но и их полное число.

В гл. 8 мы снова возвращаемся к изучению полностью ионизованной плазмы. Эта глава посвящена нелинейным колебаниям в такой плазме (в отличие от гл. 4—6, в которых мы ограничивались изучением колебаний лишь малой амплитуды). Здесь рассматриваются нелинейные высокочастотные волны в холодной плазме, ленгмюровские волны в нерелятивистской плазме, продольные, поперечные и связанные продольно-поперечные волны в релятивистской плазме. Исследуются нелинейные волны в плазме, в которой средняя энергия электронов значительно превышает среднюю энергию ионов (ионно-звуковые и магнитозвуковые колебания конечной амплитуды), причем рассматриваются как простые (римановы) волны, так и волны стационарного профиля (периодические, уединенные и квазидарные волны с осцилляционной структурой). Показывается, что характер простых и стационарных волн существенно зависит от распределения электронов по скоростям.

Наконец, в гл. 8 изучаются нелинейные низкочастотные волны в холодной магнитоактивной плазме.

Гл. 9 посвящена изучению колебаний в квазилинейном приближении, в котором учитывается простейший нелинейный эффект — воздействие колебаний на резонансные частицы. Сперва мы рассматриваем взаимодействие резонансных частиц с продольными колебаниями свободной плазмы и даем вывод основного уравнения квазилинейной теории — уравнения диффузии частиц в пространстве скоростей. Далее обсуждается процесс квазилинейной релаксации, приводящий к образованию плато на функции распределения резонансных частиц, и изучается квазилинейная трансформация волн. В этой же главе рассматривается квазилинейная теория взаимодействия резонансных частиц с колебаниями магнитоактивной плазмы и исследуется вопрос о квазилинейной релаксации волновых пакетов в случаях циклотронного и черенковского резонанса.

Наконец, рассматривается влияние столкновений на процесс квазилинейной релаксации и затухание колебаний.

Изложив квазилинейную теорию, описывающую эффекты первого приближения по энергии плазменных волн, мы переходим к изучению процессов следующего порядка по энергии колебаний; взаимодействия волн друг с другом и нелинейного взаимодействия волн и частиц. Этому вопросу посвящена гл. 10, в которой мы получаем кинетическое уравнение для волн, учитывающее трехволновые процессы и нелинейное взаимодействие волн и частиц (иногда называемое нелинейным затуханием Ландау). Далее исследуются турбулентные процессы с участием ленгмюровских волн: взаимодействие их с ионным звуком, распадная неустойчивость и нелинейное затухание ленгмюровских волн; подробно изучается ионно-звуковая турбулентность, возникающая в плазме с направленным движением электронов относительно ионов. Наконец, рассматривается взаимодействие между альвеновскими и магнитозвуковыми волнами в магнитоактивной плазме.

Последние три главы книги посвящены теории флуктуаций и обусловленных ими процессов рассеяния волн и частиц в плазме.

Теория электромагнитных флуктуаций в плазме изложена в гл. 11. Мы начинаем с вывода общего флуктуационно-диссипативного соотношения, устанавливающего связь между спектральным распределением флуктуаций и диссипацией энергии в среде, и используем это соотношение для определения флуктуаций сперва в равновесной, а затем в двухтемпературной плазме — как свободной, так и находящейся в магнитном поле.

Далее развиваются теория флуктуаций в неравновесной плазме и кинетическая теория флуктуаций, находятся флуктуации функций распределения частиц, рассматриваются критические флуктуации вблизи границы неустойчивости плазмы и флуктуации в системе плазма—пучок. Здесь же разъясняется, как происходит переход к гидродинамической теории флуктуации, и, наконец, исследуются флуктуации в частично ионизованной плазме, находящейся в электрическом поле.

Гл. 12 посвящена теории процессов рассеяния и трансформации волн в плазме. Здесь исследуется рассеяние электромагнитных волн в свободной плазме и определяется спектральное распределение рассеянного излучения. Рассматривается явление критической опалесценции, связанное с рассеянием волн в плазме, находящейся вблизи границы неустойчивости, трансформация поперечных и продольных волн в свободной плазме, а также спонтанное свечение в неравновесной плазме. Излагается теория некогерентного отражения электромагнитных волн от плазмы. Исследуются процессы рассеяния и трансформации волн в магнитоактивной плазме, в частично ионизованной плазме, находящейся во внешнем электрическом поле, и в турбулентной плазме. На-

конец, изучаются эффекты эха в плазме, связанные с незатухающими колебаниями функции распределения частиц в плазме.

В гл. 13 исследуется рассеяние заряженных частиц в плазме. Здесь определяются поляризационные потери энергии при движении заряженной частицы в плазме, потери энергии, обусловленные флуктуациями поля в плазме, коэффициенты динамического трения и диффузии, исследуется прохождение заряженных частиц через магнитоактивную плазму. Изучается взаимодействие заряженных частиц с неравновесной плазмой, рассеяние частиц на критических флуктуациях и взаимодействие заряженных частиц с турбулентной плазмой.

Мы отдаем себе отчет в том, что изложенные нами вопросы не охватывают полностью теории даже однородной плазмы, и разным вопросам уделено в нашей книге далеко не равное внимание. Но такая ситуация, по-видимому, неизбежна при написании любой достаточно большой книги. Об этом удачно сказал автор одной из лучших книг по теории элементарных частиц:

«Если бы эту книгу писал другой физик, то он, несомненно, уделит бы внимание другим аспектам теории или стал бы трактовать те же вопросы, но иначе. Одно из немногих удовольствий при написании такой книги заключается в том, что автор может преподнести предмет так, как он того хочет, . . . и если эта книга спровоцирует кого-нибудь написать лучшую, то нижеподписавшийся будет одним из наиболее восторженных ее читателей».\*).

Авторы благодарят за помощь и ценные замечания В. Ф. Алексина, В. В. Ангелейко, А. С. Бакая, А. Б. Михайловского, С. С. Моисеева, В. А. Ораевского, Дж. Р. Роса, В. П. Силина.

---

\*) Дж. Бернштейн, Элементарные частицы и их токи, «Мир» 1970

## § 1.1. Иерархия кинетических уравнений

**1.1.1. Экранированное кулоновское взаимодействие и существование плазменных колебаний.** Плазма представляет собой полностью или частично ионизованный, но в среднем электрически нейтральный газ. Поэтому для плазмы всегда существенно электромагнитное взаимодействие между ее частицами.

Если плазма полностью ионизована, а мы будем далее рассматривать главным образом такую плазму, то взаимодействие между ее частицами является в основном электромагнитным; если плазма к тому же нерелятивистская, то его можно считать чисто электростатическим.

Однако электростатическое взаимодействие каких-либо двух частиц плазмы не определяется обычным законом Кулона, так как остальные частицы всегда экранируют кулоновское взаимодействие двух рассматриваемых частиц.

Это экранирование благодаря сложному движению частиц плазмы также носит сложный, динамический характер. Но представление о нем можно получить и исходя из статической картины.

В такой простейшей картине рассматривается статическое электронно-ионное облако вблизи какой-либо частицы плазмы и определяется электростатический потенциал  $\varphi$  внутри облака. Он удовлетворяет, очевидно, уравнению Пуассона

$$\Delta\varphi = -4\pi \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha},$$

где  $n_{\alpha}$  — плотность частиц сорта  $\alpha$  (с зарядом  $e_{\alpha}$ ) в облаке. Если плазма находится в состоянии термодинамического равновесия, то  $n_{\alpha}$  определяется формулой Больцмана

$$n_{\alpha} = n_{\alpha 0} \exp(-e_{\alpha} \varphi / T);$$

здесь  $T$  — температура плазмы (в энергетических единицах), и  $n_{\alpha 0}$  — плотность частиц сорта  $\alpha$  вдали от рассматриваемой точки, т. е. там, где  $\varphi = 0$ . В силу общей нейтральности плазмы для нее справедливо

$$\sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha 0} = 0.$$

Подставляя выражение для  $n_\alpha$  в уравнение Пуассона и предполагая, что

$$|e_\alpha \varphi| / T \ll 1,$$

получим следующее уравнение для определения потенциала  $\varphi$ :

$$\Delta \varphi - \frac{1}{a^2} \varphi = 0, \quad (1.1.1.1)$$

где  $a$  — так называемый *дебаевский радиус*, равный

$$a = \sqrt{\frac{T}{4\pi \sum_{\alpha} n_{\alpha 0} e_{\alpha}^2}}. \quad (1.1.1.2)$$

Нас интересует сферически симметричное решение уравнения (1.1.1.1) вида

$$\varphi \propto (1/r) \exp(-r/a),$$

которому соответствует энергия взаимодействия

$$U_{12} = (e_1 e_2 / r_{12}) \exp(-r_{12}/a) \quad (1.1.1.3)$$

между зарядами  $e_1$  и  $e_2$ , находящимися на расстоянии  $r_{12}$ .

Мы видим, что благодаря экранированию выражение для обычной кулоновской энергии взаимодействия  $e_1 e_2 / r_{12}$  умножается на экранирующий множитель  $\exp(-r_{12}/a)$ .

Формула (1.1.1.3) описывает, как уже указывалось, экранирование в термодинамически равновесной плазме. Она справедлива, если

$$n_{\alpha 0} \ll (T/e_{\alpha}^2)^3. \quad (1.1.1.4)$$

В действительности же экранирование носит не статический, а динамический характер, так что формула (1.1.1.3) определяет только среднее значение энергии взаимодействия, или потенциала, в плазме.

Благодаря динамическому характеру экранирования потенциал  $\varphi$  в облаке обязательно будет функцией времени, причем функцией осциллирующей. Это объясняется тем, что движущиеся частицы плазмы в процессе экранирования то «перелетают» соответствующие равновесные положения, то «не долетают» до них. Поэтому динамическое экранирование тесно связано с существованием в плазме коллективных колебаний.

Чтобы разъяснить это важнейшее обстоятельство, предположим, что при экранировании подвижны только электроны плазмы и рассмотрим плоско-параллельный слой плазмы. Пусть слой

электронов сместился на малую величину  $x$ . Тогда в плазме создается электрическое поле

$$E = 4\pi en_0 x,$$

где  $n_0$  — плотность электронов. Под действием этого поля электроны придут в движение, и величина  $x$  будет определяться уравнением

$$m_0 \ddot{x} = -eE = -4\pi e^2 n_0 x,$$

где  $m_0$  — масса электрона. Мы получили уравнение осциллятора с частотой колебаний

$$\omega_p = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_0}}. \quad (1.1.1.5)$$

Таким образом, в плазме действительно существуют колебания и они связаны с эффектом экранирования взаимодействия.

Формула (1.1.1.5) определяет частоту простейших плазменных колебаний, в которых участвуют только электроны, причем не учитывается их тепловое движение. Такие колебания называются *ленгмюровскими*.

Исследованию различных коллективных колебаний плазмы (как свободной, так и находящейся во внешних электромагнитных полях), а также различных процессов, связанных с этими колебаниями, посвящена настоящая книга. Но прежде чем переходить к систематическому изложению, нужно рассказать об основных методах описания плазмы.

**1.1.2. Многочастичные функции распределения и корреляционные функции.** Плазма представляет собой систему многих частиц, и поэтому для ее описания естественно пользоваться методами статистической физики. Введем с этой целью *фазовое пространство*, образуемое координатами и импульсами всех частиц плазмы. Для сокращения записи мы будем обозначать совокупность декартовых координат и проекций импульса  $l$ -й частицы на эти координаты просто через  $x_l$ ,  $x_l \equiv \mathbf{r}_l$ ,  $\mathbf{p}_l$ , где  $\mathbf{r}_l$  — радиус-вектор  $l$ -й частицы и  $\mathbf{p}_l$  — ее импульс.

Введем далее в рассмотрение плотность фазовых точек, или плотность вероятности,  $D(x_1, x_2, \dots, x_N; t) \equiv D$  в момент времени  $t$  ( $N$  — общее число частиц плазмы). Физический смысл ее заключается в том, что величина

$$dw = D dx_1 dx_2 \dots dx_N \quad (1.1.2.1)$$

представляет собой вероятность того, что в момент времени  $t$  частицы плазмы находятся соответственно в элементах своих фазовых объемов  $dx_1, dx_2, \dots, dx_N$ .

Мы не будем подробно останавливаться здесь на определении понятия вероятности, но напомним тем не менее, что вероятностное описание предполагает введение ансамбля тождественных систем, в данном случае — плазм, относительное число которых с данными значениями динамических характеристик и определяет понятие вероятности.

Вероятностная интерпретация функции плотности  $D$  предполагает нормировку ее согласно условию

$$\int D(x_1, x_2, \dots, x_N; t) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1. \quad (1.1.2.2)$$

Описание плазмы с помощью функции  $D$  является по существу полным, т. е. наиболее детальным возможным микроскопическим описанием системы многих частиц. Ясно, что так как  $N \rightarrow \infty$ , то оно не имеет практической ценности.

В действительности описание плазмы может быть менее детальным и должно базироваться не на знании функции  $D$ , а на знании вероятностей нахождения какой-либо одной или двух (в крайнем случае нескольких) частиц плазмы в данных элементах объемов соответствующих фазовых пространств безотносительно к тому, где находятся остальные частицы плазмы.

Эти вероятности могут быть, очевидно, найдены путем интегрирования функции  $D$  по всем переменным, кроме тех, которые относятся к одной, двум либо нескольким частицам. В результате мы получим так называемые одночастичную, двухчастичную и вообще многочастичные функции распределения. Так, одночастичная функция распределения  $F_1(x_1)$  определяется интегралом

$$F_1(x_1) = N \int D dx_2 dx_3 \dots dx_N, \quad (1.1.2.3)$$

двухчастичная функция  $F_2(x_1, x_2)$  — интегралом

$$F_2(x_1, x_2) = N^2 \int D dx_3 \dots dx_N$$

и  $s$ -частичная функция распределения — интегралом

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_s) = N^s \int D dx_{s+1} \dots dx_N. \quad (1.1.2.4)$$

Для простоты записи мы предполагаем, что плазма состоит из частиц одного сорта (например, электронов), распределения же частиц других сортов не рассматриваем, считая, что их роль сводится лишь к созданию нейтрализующего заряда. Ясно, что от этого предположения легко избавиться, если ввести добавочный индекс для характеристики сорта частиц. Кроме того, объем плазмы считается равным единице.

Функции распределения удовлетворяют условиям нормировки

$$\left. \begin{aligned} \int F_1(x_1) dx_1 &= N, \\ \int F_2(x_1, x_2) dx_1 dx_2 &= N^2, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2.5)$$

и связаны между собой очевидным соотношением

$$\int F_{s+1}(x_1, x_2, \dots, x_{s+1}) dx_{s+1} = N F_s(x_1, x_2, \dots, x_s), \quad (1.1.2.6)$$

Последняя формула показывает, что «старшие» функции распределения несут в себе всю информацию, содержащуюся в «младших» функциях распределения. Например, зная  $F_2(x_1, x_2)$ , можно получить  $F_1(x_1)$ . Это приводит к тому, что с увеличением числа  $s$  функции  $F_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$  становятся все более сложными.

Наряду с функциями распределения вводят *корреляционные функции*  $C_1(x_1)$ ,  $C_2(x_1, x_2)$ ,  $C_3(x_1, x_2, x_3)$ , связанные с функциями распределения соотношениями

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1) &= C_1(x_1), \\ F_2(x_1, x_2) &= C_1(x_1) C_1(x_2) + C_2(x_1, x_2), \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= C_1(x_1) C_1(x_2) C_1(x_3) + \\ &+ \sum C_1(x_1) C_2(x_1, x_2) + C_3(x_1, x_2, x_3), \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1.2.7)$$

(суммирование производится по всем возможным перестановкам частиц, приводящим к разным результатам).

Легко показать, что определенные таким образом корреляционные функции  $C_s(x_1, x_2, \dots, x_s)$  обращаются в нуль, если хотя бы одна пара из совокупности частиц 1, 2, ... статистически независима.

Ясно, что функции распределения и корреляционные функции тождественных частиц симметричны по отношению к перестановкам частиц.

Мы будем предполагать, что в момент времени  $t = -\infty$  и при достаточно большом расстоянии друг от друга частицы статистически независимы. Иными словами, мы будем предполагать, что корреляционная функция  $C_2$  удовлетворяет следующему условию:

$$\lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ r_{12} \rightarrow \infty}} C_2(x_1, x_2) = 0. \quad (1.1.2.8)$$

Это условие называется *условием ослабления корреляций* [1].

Заметим, что корреляционная функция, удовлетворяющая условию (1.1.2.8), вообще говоря, не будет обращаться в нуль при  $t \rightarrow +\infty$ ,  $r_{12} \rightarrow \infty$ , хотя взаимодействие частиц отсутствует в обоих случаях. Это значит, что между частицами, которые были статистически независимы при  $t = -\infty$ ,  $r_{12} = \infty$ , возникает корреляция при  $t = +\infty$ ,  $r_{12} = \infty$ .

**1.1.3. Цепочка уравнений для многочастичных функций.** Получим теперь уравнения, которым удовлетворяют многочастичные функции распределения. Воспользуемся с этой целью теоремой Лиувилля, в силу которой плотность вероятности  $D$  удовлетворяет уравнению непрерывности в фазовом пространстве

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{x}_i D) = 0. \quad (1.1.3.1)$$

Используя уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i}, \\ \dot{\mathbf{p}}_i &= -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_i}, \end{aligned}$$

где  $\mathcal{H}$  — гамильтониан плазмы, можно, очевидно, представить уравнение непрерывности (1.1.3.1) в виде

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \{\mathcal{H}, D\} = 0, \quad (1.1.3.2)$$

где  $\{\mathcal{H}, D\}$  — скобки Пуассона, т. е.

$$\{\mathcal{H}, D\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}_i} \frac{\partial D}{\partial \mathbf{r}_i} - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{r}_i} \frac{\partial D}{\partial \mathbf{p}_i} \right).$$

Если плазма состоит из частиц одного сорта и находится во внешнем электростатическом поле, то гамильтониан  $\mathcal{H}$  имеет вид

$$\mathcal{H} = \sum_i \mathcal{H}_i + \frac{1}{2} \sum_{i \neq i'} \frac{e^2}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{i'}|},$$

где

$$\mathcal{H}_i = \frac{p_i^2}{2m} + e\varphi_i^e;$$

здесь  $\varphi_i^e \equiv \varphi^e(\mathbf{r}_i, t)$  — потенциал внешнего поля,  $m$  и  $e$  — масса и заряд частицы (в случае частиц разных сортов нужно в  $\mathcal{H}$  произвести замену  $m \rightarrow m_\alpha$ ,  $e^2 \rightarrow e_\alpha e_\beta$ ).

Чтобы вывести уравнения для многочастичных функций распределения, проинтегрируем уравнение непрерывности в форме

(1.1.3.2) по переменным  $x_{s+1}, x_{s+2}, \dots, x_N$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial t} + N^s \sum_{l=1}^N \int \{ \mathcal{H}_l, D \} dx_{s+1} \dots dx_N + \\ + N^s \sum_{1 \leq l < l' \leq N} \int \{ \varphi(l, l'), D \} dx_{s+1} \dots dx_N = 0, \end{aligned} \quad (1.1.3.3)$$

где  $\varphi(l, l') = \frac{e^2}{|\mathbf{r}_l - \mathbf{r}_{l'}|}$ . Учитывая далее соотношения

$$\int \{ \mathcal{H}_l, D \} dx_l = 0, \quad \int \{ \varphi(l, l'), D \} dx_l dx_{l'} = 0,$$

приведем уравнение (1.1.3.3) к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial t} + \sum_{l=1}^s \{ \mathcal{H}_l, F_s \} + \sum_{1 \leq l < l' \leq s} \{ \varphi(l, l'), F_s \} + \\ + N^s \sum_{\substack{1 \leq l < l' \leq s \\ s+1 \leq l' \leq N}} \int \{ \varphi(l, l'), D \} dx_{s+1} \dots dx_N = 0. \end{aligned} \quad (1.1.3.4)$$

В силу симметрии функции  $D$  последний член здесь равен

$$N^s \frac{N-s}{N^{s+1}} \sum_{l=1}^s \int \{ \varphi(l, s+1), F_{s+1} \} dx_{s+1}.$$

Устремим теперь число частиц  $N$  и объем  $V$ , занимаемый плазмой, к бесконечности, предполагая, однако, что плотность частиц  $n = N/V$  остается конечной. Тогда последнее уравнение примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_s}{\partial t} + \sum_{l=1}^s \{ \mathcal{H}_l, F_s \} + \sum_{1 \leq l < l' \leq s} \{ \varphi(l, l'), F_s \} + \\ + \sum_{l=1}^s \int \{ \varphi(l, s+1), F_{s+1} \} dx_{s+1} = 0, \end{aligned} \quad (1.1.3.5)$$

или в развернутом виде

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(1) \right\} F_1(x_1) - \int \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} F_2(x_1, x_2) dx_2 = 0, \\ \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(2) - \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right\} F(x_1, x_2) - \\ - \int \left[ \frac{\partial \varphi(x_1, x_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \varphi(x_2, x_3)}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3)}{\partial \mathbf{p}_2} \right] dx_3 = 0, \\ \dots \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (1.1.3.6)$$

где

$$\mathcal{L}(l) = v_l \frac{\partial}{\partial r_l} + e \mathbf{E}^o(\mathbf{r}_l) \frac{\partial}{\partial p_l},$$

$\mathbf{E}^o$  — внешнее электрическое поле,  $v_l$  — скорость  $l$ -й частицы.

При выводе уравнений (1.1.3.6) мы для простоты предположили, что плазма находится во внешнем электрическом поле. Легко показать, что в общем случае, когда плазма находится в произвольном внешнем электромагнитном поле, многочастичные функции также удовлетворяют уравнениям вида (1.1.3.6), только под  $\mathcal{L}(l)$  следует понимать оператор

$$\mathcal{L}(l) = v_l \frac{\partial}{\partial r_l} + e \left\{ \mathbf{E}^o(\mathbf{r}_l) + \frac{1}{c} [\mathbf{v}_l, \mathbf{V}^o(\mathbf{r}_l)] \right\} \frac{\partial}{\partial p_l}, \quad (1.1.3.7)$$

где  $\mathbf{E}^o$  и  $\mathbf{V}^o$  — внешние электрическое и магнитное поля\*).

Уравнения (1.1.3.6) представляют собой бесконечную систему интегродифференциальных уравнений, связывающих соседние многочастичные функции распределения  $F_s$  и  $F_{s+1}$ . Эта «зацепляющая» система уравнений носит название *цепочки уравнений Боголюбова* [1]\*\*); ее называют также *иерархией уравнений Боголюбова*, *Борна* [18], *Грина* [18], *Кирквуда* [19], *Ивона* [20], или сокращенно, *иерархией ВВГКУ*.

## § 1.2. Кинетическое уравнение Власова

**1.2.1. Плазменный параметр.** Сама по себе бесконечная иерархия уравнений (1.1.3.6) не несет большей информации, чем уравнение непрерывности (1.1.3.1) для плотности вероятности  $D$ . Но ценность цепочки уравнений Боголюбова заключается в том, что в нее можно внести те или иные физические предположения, позволяющие оборвать цепочку на каком-то ее члене и выяснить возникающую при таком обрыве ошибку.

Обрыв цепочки представляет собой самое тонкое место в кинетической теории, так как его нельзя производить единым универсальным способом для всех случаев; в частности, в случае плазмы ее обрыв тесно связан с физическим состоянием плазмы.

Ясно, что обрыв цепочки соответствует уменьшению нашей информации о состоянии плазмы, ибо взамен детального микроскопического описания плазмы с помощью плотности вероятности  $D$  мы получаем ее описание с помощью нескольких первых многочастичных функций распределения (плотности вероятности  $D$  соответствует бесконечное число функций распределения).

\*) Здесь и в дальнейшем мы не будем различать магнитные векторы  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{H}$ , так как магнитная проницаемость плазмы близка к единице.

\*\*\*) Иной вывод цепочки уравнений Боголюбова см. в [22].

Переходя теперь к рассмотрению конкретной процедуры обрыва цепочки кинетических уравнений, заметим предварительно, что любой обрыв требует наличия по крайней мере одного малого параметра теории. В тех плазмах, которые мы будем изучать далее, таким малым параметром является отношение средней энергии взаимодействия двух частиц плазмы к их средней кинетической энергии, т. е.

$$\frac{e^2}{\langle r_{12} \rangle T} \ll 1, \quad (1.2.1.1)$$

где  $T$  — температура частиц и угловые скобки служат для обозначения среднего значения.

Замечая, что  $\langle r_{12} \rangle \sim n^{-1/3}$ , можно записать критерий (1.2.1.1) следующим образом:

$$e^2 n^{1/3} / T \ll 1, \quad (1.2.1.2)$$

т. е. плазма должна быть достаточно горячей и мало плотной. Вспоминая определение (1.1.1.2) дебаевского радиуса экранирования  $a$ , можно переписать (1.2.1.2) в эквивалентном виде

$$g \equiv 1/na^3 \ll 1, \quad (1.2.1.3)$$

означающем, что число частиц плазмы в объеме сферы радиуса  $a$  должно быть большим.

Итак, мы будем предполагать, что параметр  $g$  мал. Тогда корреляционные эффекты в плазме, как правило, малы. Это означает, что одночастичную функцию распределения, или, что то же самое, одночастичную корреляционную функцию  $C_1$ , следует считать величиной порядка единицы, парную корреляционную функцию  $C_2$  — величиной порядка  $g$ , трехчастичную корреляционную функцию  $C_3$  — величиной порядка  $g^2$  и т. д. (в п. 1.3.1 мы уточним последнее утверждение для плазмы, состояние которой мало отличается от состояния статистического равновесия).

**1.2.2. Самосогласованное поле.** Рассмотрим более подробно предельный случай  $g \rightarrow 0$ . Так как при этом корреляции малы, то мы можем положить

$$F_s(x_1, x_2, \dots, x_s) = \prod_{i=1}^s F_1(x_i), \quad (1.2.2.1)$$

т. е. считать многочастичную функцию распределения равной произведению соответствующих одночастичных функций.

Одночастичная функция распределения, которую мы впредь будем обозначать просто через  $F(x)$ , удовлетворяет при этом, согласно (1.1.3.6), (1.1.3.7), уравнению

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^0] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \right. \\ \left. - \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}'} \frac{e^2}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} F(x') dx' \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F(x) = 0. \quad (1.2.2.2)$$

Оно допускает простую физическую интерпретацию. Именно, входящий сюда интеграл, содержащий функцию  $F(x')$ , определяет, очевидно, электростатическое поле  $\mathbf{E}'$ , создаваемое частицами плазмы, т. е.

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \frac{eF(x') dx'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Поэтому можно сказать, что в уравнение (1.2.2.2), определяющее изменение одночастичной функции распределения, входит не одно внешнее электрическое поле, а суммарное электрическое поле, равное сумме внешнего поля и поля, порождаемого частицами самой плазмы. Последнее обычно называют *самосогласованным* электрическим полем, так как, оказывая влияние на одночастичную функцию распределения  $F \equiv F_1(x)$ , оно само определяется этой функцией:

$$\operatorname{div} \mathbf{E}' = 4\pi\rho, \quad \rho(\mathbf{r}, t) = e \int F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p. \quad (1.2.2.3)$$

Как мы видим, в кинетическое уравнение (1.2.2.2) входит только внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}^0$ . Однако в действительности изменение одночастичной функции распределения определяется не одним лишь внешним магнитным полем, а суммарным магнитным полем, складывающимся из внешнего поля  $\mathbf{B}^0$  и поля  $\mathbf{B}'$ , создаваемого частицами самой плазмы, т. е. плотностью тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \int \mathbf{v}F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p.$$

Поле  $\mathbf{B}'$ , так же как и поле  $\mathbf{E}'$ , называют *самосогласованным*.

В уравнение (1.2.2.2) самосогласованное магнитное поле не вошло потому, что при выводе этого уравнения мы пользовались выражением (1.1.3.3), содержащим только энергию электрического взаимодействия частиц плазмы и не учитывающим их магнитного взаимодействия. Учет последнего приводит в кинетическом уравнении для одночастичной функции распределения к замене внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}^0$  суммарным полем  $\mathbf{B}$  ( $\mathbf{B} = \mathbf{B}^0 + \mathbf{B}'$ ).

Итак, уравнение для одночастичной функции распределения  $F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  в пренебрежении высшими корреляционными эффектами ( $g \rightarrow 0$ ) имеет следующий вид:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0, \quad (1.2.2.4)$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — суммарные электрическое и магнитное поля, складывающиеся из внешних и самосогласованных полей, порождаемых

частицами плазмы. Они удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi(\rho^{\circ} + \rho'), & \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}^{\circ} + \mathbf{j}'), \end{aligned} \right\} \quad (1.2.2.5)$$

где  $\rho^{\circ}$  и  $\mathbf{j}^{\circ}$  — плотности внешних зарядов и токов и  $\rho'$  и  $\mathbf{j}'$  — плотности заряда и тока, создаваемые частицами самой плазмы. Эти величины связаны с одночастичной функцией распределения соотношениями

$$\rho'(\mathbf{r}, t) = e \int F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t) = e \int \mathbf{v}F(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p. \quad (1.2.2.6)$$

Уравнение (1.2.2.4) было впервые установлено А. А. Власовым [2] и носит название *кинетического уравнения Власова*.

**1.2.3. Система кинетических уравнений с самосогласованным полем для многокомпонентной плазмы.** До сих пор мы для простоты считали, что плазма содержит частицы только одного сорта. Однако это предположение не является существенным. Если плазма состоит из частиц различных сортов, то мы должны вместо одной одночастичной функции распределения ввести несколько одночастичных функций распределения — по одной на каждый сорт частиц. Обозначая эти функции через  $F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , где индекс  $\alpha$  служит для обозначения сорта частиц, получим вместо (1.2.2.4) уравнения

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F_{\alpha} = 0, \quad (1.2.3.1)$$

где  $\mathbf{v}$  и  $e_{\alpha}$  — скорость и заряд частицы  $\alpha$ -го сорта и  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — поля, удовлетворяющие уравнениям Максвелла (1.2.2.5), в которых  $\rho'$  и  $\mathbf{j}'$  равны теперь

$$\rho'(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p, \quad \mathbf{j}'(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v}F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p. \quad (1.2.3.2)$$

Функции распределения  $F_{\alpha}$  нормированы здесь согласно условию

$$\int F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3r d^3p = N_{\alpha}, \quad (1.2.3.3)$$

где  $N_{\alpha}$  — общее число частиц сорта  $\alpha$ .

Кинетические уравнения Власова (1.2.3.1) вместе с определениями (1.2.3.2) служат основой теории колебаний и волн в плазме с малым параметром  $g$  и малыми корреляционными эффектами высших порядков.

Мы специально подчеркиваем здесь условие малости корреляционных эффектов высших порядков, не связывая себя критерием

малости плазменного параметра  $g$ , хотя выше мы и считали первое следствием из второго. Эта справедливо для плазмы, состояние которой близко к состоянию термодинамического равновесия, или, как говорят, для спокойной плазмы, однако может оказаться несправедливо для плазмы, состояние которой сильно отличается от равновесного. В такой резко неравновесной и неустойчивой плазме, как правило, существуют интенсивные колебания различных типов, и высшие корреляционные функции могут быть того же порядка величины, что и одночастичная функция. В этом случае говорят о *турбулентной плазме*, исследованию которой посвящена гл. 10.

### § 1.3. Парная корреляционная функция равновесной плазмы и интеграл столкновений Ландау

**1.3.1. Парная корреляционная функция.** Перейдем теперь к выяснению роли корреляционных эффектов в том случае, когда они малы, т. е. в случае спокойной плазмы с малым параметром  $g$ .

Обратимся с этой целью к цепочке уравнений (1.1.3.6). Не пренебрегая одной лишь парной корреляционной функцией (в отличие от того, что было сделано выше при выводе уравнения (1.2.2.4) с самосогласованным полем), перепишем первое из уравнений цепочки (1.1.3.6) в виде

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F(x) = \\ = e^2 \int \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} C_2(x, x') dx'. \quad (1.3.1.1)$$

К этому уравнению следует присоединить уравнение для парной корреляционной функции  $C_2$ , которое можно получить из второго уравнения цепочки (1.1.3.6), но последнее будет содержать трехчастичную функцию распределения, т. е. трехчастичную корреляционную функцию  $C_3$ , в уравнение же для  $C_3$  входит корреляционная функция  $C_4$  и т. д. Мы предположим, что при  $g \ll 1$  в случае спокойной плазмы можно оборвать эту цепочку на третьем звене, т. е. допустим, что  $C_3 = 0$ . Тогда уравнение для парной корреляционной функции  $C_2$  приобретает вид

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(2) - [\mathcal{V}(1, 2) + \mathcal{V}(2, 1)] \right\} C_2(x_1, x_2) - \\ - \int \mathcal{V}(1, 3) F(x_1) C_2(x_2, x_3) dx_3 - \int \mathcal{V}(2, 3) F(x_2) C_2(x_1, x_3) dx_3 = \\ = F(x_2) \mathcal{V}(1, 2) F(x_1) + F(x_1) \mathcal{V}(2, 1) F(x_2), \quad (1.3.1.2)$$

где

$$\mathcal{V}(l, l') = \frac{\partial \varphi(l, l')}{\partial \mathbf{r}_l} \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l}$$

и  $\mathcal{L}(l)$  определяется формулой (1.1.3.7).

Уравнения (1.3.1.1) и (1.3.1.2) образуют замкнутую систему уравнений для определения одночастичной функции распределения и парной корреляционной функции. Для однозначного их решения должно быть еще задано граничное условие для функции  $C_2$ . Граничным условием для нее будем считать соотношение (1.1.2.8), определяющее асимптотическое поведение корреляционной функции. Это условие ослабления корреляций при  $t \rightarrow -\infty$  вводит в кинетическую теорию необратимость.

Определим прежде всего парную корреляционную функцию для равновесной плазмы при  $g \ll 1$ . В этом случае распределение частиц плазмы по скоростям является максвелловским и существует корреляция только между положениями частиц в пространстве (а не между скоростями). Поэтому парная корреляционная функция имеет вид

$$C_2(x, x') = f_0(\mathbf{p}) f_0(\mathbf{p}') \psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

где

$$f_0(\mathbf{p}) = \frac{n}{(2\pi T m)^{3/2}} \exp\left(-\frac{\mathbf{p}^2}{2mT}\right)$$

— функция распределения Максвелла и  $\psi(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$  — некоторая функция расстояния между частицами. Для нахождения  $\psi$  оценим отдельные слагаемые в уравнении (1.3.1.2). Замечая, что  $F \sim \sim n/m^3 \langle v \rangle^3$ , где  $\langle v \rangle$  — средняя тепловая скорость частицы, и отбрасывая в (1.3.1.2) производную по времени, имеем по порядку величины

$$\mathcal{L}C_2 : \mathcal{V}C_2 : \int \mathcal{V}FC_2 d\mathbf{x}_3 : F\mathcal{V}F = 1 : \frac{\varphi}{T} : \frac{\varphi}{T} nr^3 : \frac{\varphi}{T} \frac{1}{\psi},$$

где  $\varphi = e^2/r$ . Мы видим отсюда, что если  $g \equiv 1/na^3 \ll 1$ , то при  $r \gg \langle r \rangle$ , где  $\langle r \rangle = n^{-1/3}$ , в (1.3.1.2) можно пренебречь слагаемым  $[\mathcal{V}(1, 2) + \mathcal{V}(2, 1)]C_2(x_1, x_2)$ , и уравнение для функции  $\psi$  приобретает вид

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} + \frac{n}{T} \int \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_1} \mathbf{v}_1 \psi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) d^3r_3 + \\ + \frac{n}{T} \int \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)}{\partial \mathbf{r}_2} \mathbf{v}_2 \psi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3) d^3r_3 = -\frac{1}{T} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1}. \end{aligned}$$

Разлагая  $\varphi$  и  $\psi$  в интегралы Фурье

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k, \quad \psi(\mathbf{r}) = \int \psi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \quad (1.3.1.3)$$

и замечая, что

$$\varphi_{\mathbf{k}} = e^2/2\pi^2 k^2, \quad (1.3.1.4)$$

найдем

$$\psi_{\mathbf{k}} = -\frac{e^2 a^2}{2\pi^2 (1 + k^2 a^2) T}, \quad (1.3.1.5)$$

откуда

$$\psi(\mathbf{r}) = -\frac{e^2}{Tr} \exp\left(-\frac{r}{a}\right), \quad r \gg \langle r \rangle.$$

Эта формула справедлива для  $g \ll 1$ , так как при ее выводе были отброшены члены порядка  $g^2$  (в действительности отброшенные члены имеют порядок  $g^2 \ln g$  [21]).

Можно показать, что на малых расстояниях  $r \ll \langle r \rangle$  для функции  $\psi$  с такой же точностью имеем

$$\psi(\mathbf{r}) = -1 + \exp(-e^2/Tr).$$

Если под знак экспоненты ввести множитель  $\exp(-r/a)$ , то мы получим интерполяционную формулу для  $\psi$ , пригодную при всех расстояниях, а именно

$$\psi(\mathbf{r}) = -1 + \exp\left[-\frac{e^2}{Tr} \exp\left(-\frac{r}{a}\right)\right].$$

Этому выражению соответствует следующая формула для двухчастичной функции распределения равновесной плазмы:

$$F_2(x_1, x_2) = \frac{n^2}{(2\pi T m)^3} \exp\left(-\frac{W_{12}}{T}\right), \quad (1.3.1.6)$$

где

$$W_{12} = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \Phi_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \Phi_{12}(\mathbf{r}) = \frac{e^2}{r} \exp\left(-\frac{r}{a}\right).$$

Мы получили, как и следовало ожидать, распределение Гиббса для двух частиц, в которое в качестве потенциальной энергии входит экранированный кулоновский потенциал.

Заметим, что при  $r \rightarrow 0$  двухчастичная функция распределения стремится к нулю, что связано с отталкиванием частиц друг от друга.

Вычисления, аналогичные приведенным, показывают, что трехчастичная корреляционная функция равновесной плазмы имеет порядок  $g^2 \ln g$  [21].

Перейдем теперь к определению парной корреляционной функции для неравновесной плазмы, состояние которой мало отличается от равновесного. В этом случае мы можем для оценки

отдельных членов в уравнении (1.3.1.2) пользоваться результатами, полученными выше для равновесной плазмы. Мы будем по-прежнему считать, что  $g \ll 1$ . Тогда для расстояний  $r \gg \langle r \rangle$  в уравнении (1.3.1.2) можно отбросить слагаемое  $[\mathcal{V}(1, 2) + \mathcal{V}(2, 1)] \times \times C_2(x_1, x_2)$ . Если, кроме того, расстояние между частицами значительно меньше дебаевского радиуса  $a$ , т. е.  $r$  заключено в интервале  $\langle r \rangle \ll r \ll a$ , то в уравнении (1.3.1.2) можно отбросить также слагаемые

$$\int \mathcal{V}(1, 3) F(x_1) C_2(x_2, x_3) dx_3$$

и

$$\int \mathcal{V}(2, 3) F(x_2) C_2(x_1, x_3) dx_3.$$

Иными словами, для определения парной корреляционной функции в интервале расстояний  $\langle r \rangle \ll r \ll a$  можно пользоваться уравнением

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}(1) + \mathcal{L}(2) \right\} C_2(x_1, x_2) = \\ = F(x_2) \mathcal{V}(1, 2) F(x_1) + F(x_1) \mathcal{V}(2, 1) F(x_2). \quad (1.3.1.7)$$

Рассмотрим подробнее случаи, когда внешнее поле достаточно слабо и в выражении (1.3.1.7) для  $\mathcal{L}$  можно сохранить только первое слагаемое. Тогда предыдущее уравнение приобретает вид

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_2} \right) C_2(x_1, x_2) = \\ = F(x_2) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial F(x_1)}{\partial \mathbf{p}_1} + F(x_1) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_2} \frac{\partial F(x_2)}{\partial \mathbf{p}_2}. \quad [(1.3.1.8)]$$

Обратим внимание на то, что сюда входят только производные от корреляционной функции по времени и координатам, но производные от  $C_2$  по импульсам частиц в этом уравнении не содержатся. Иными словами, при сделанном предположении о малости взаимодействия и при достаточно слабом внешнем поле зависимость корреляционной функции от импульсов частиц возникает только благодаря тому, что в правую часть последнего уравнения входят в качестве параметров импульсы частиц. Можно сказать, что пренебрежение в (1.3.1.2) членами, содержащими энергию взаимодействия частиц, соответствует учету только далеких столкновений, при которых импульсы частиц испытывают очень малые изменения.

Чтобы найти решение неоднородного уравнения (1.3.1.8), удобно сперва привести его к однородному виду. Запишем формально решение этого уравнения следующим образом:

$$\Phi(t, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, C_2) = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\partial C_2}{\partial t} = - \frac{\partial \Phi / \partial \Phi}{\partial t / \partial C_2}, \quad \frac{\partial C_2}{\partial \mathbf{r}_1} = - \frac{\partial \Phi / \partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_1 / \partial C_2}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \mathbf{v}_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_1} + \mathbf{v}_2 \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{r}_2} + \\ + \left( \frac{\partial F(x_1)}{\partial \mathbf{p}_1} F(x_2) - F(x_1) \frac{\partial F(x_2)}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1} \frac{\partial \Phi}{\partial C_2} = 0. \end{aligned} \quad (1.3.1.9)$$

Мы получили однородное линейное уравнение для функции  $\Phi$ , решение которого можно найти методом характеристик. Уравнения характеристик имеют, очевидно, вид

$$\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} = \mathbf{v}_1, \quad \frac{dC_2}{dt} = \left( \frac{\partial F(x_1)}{\partial \mathbf{p}_1} F(x_2) - F(x_1) \frac{\partial F(x_2)}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \frac{\partial \varphi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{r}_1}, \quad (1.3.1.10)$$

где скорости  $\mathbf{v}_i$  следует рассматривать как постоянные параметры.

Интегрируя первое из уравнений характеристик

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{v}_1 t$$

и подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$\frac{dC_2}{dt} = \left( \frac{\partial F(x_1)}{\partial \mathbf{p}_1} F(x_2) - F(x_1) \frac{\partial F(x_2)}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{10}} \varphi(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20} + \mathbf{v}_1 t - \mathbf{v}_2 t). \quad (1.3.1.11)$$

Интегрируя его, предположим, что одночастичная функция распределения медленно меняется со временем. Тогда функция  $C_2$ , удовлетворяющая граничному условию (1.1.2.8), имеет вид

$$\begin{aligned} C_2(\mathbf{r}_{10}, \mathbf{r}_{20}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = & \left( \frac{\partial F(x_1)}{\partial \mathbf{p}_1} F(x_2) - F(x_1) \frac{\partial F(x_2)}{\partial \mathbf{p}_2} \right) \times \\ & \times \int_{-\infty}^0 \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_{10}} \varphi\left(\mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_{20} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} t - \frac{\mathbf{p}_2}{m} t\right) dt. \end{aligned} \quad (1.3.1.12)$$

Эта формула справедлива в области расстояний  $\langle r \rangle \ll r \ll a$ , если внешнее поле достаточно слабо и промежуток времени  $\tau_F$ , в течение которого существенно изменяется одночастичная функция распределения  $F$ , значительно превосходит промежуток времени  $\tau_c$ , в течение которого существенно изменяется корреляционная функция  $C_2$ , т. е. если

$$\tau_F \gg \tau_c. \quad (1.3.1.13)$$

В отсутствие переменных полей  $\tau_F \sim l \sqrt{m/T}$ , где  $l$  — средняя длина свободного пробега частиц в плазме, а  $\tau_c \sim a \sqrt{m/T}$ . Так как  $l \gg a$  (см. ниже), то

$$\tau_F \gg \tau_c.$$

Заметим, что в быстропеременном поле, частота которого  $\omega$  порядка плазменной частоты  $\omega_p$  или больше нее, условие (1.3.1.13) уже не выполняется, и поэтому формула (1.3.1.12) становится неверной. Однако соотношение (1.3.1.11) остается справедливым и при  $\omega \geq \omega_p$ .

**1.3.2. Интеграл столкновений Ландау.** Выразив в уравнении (1.3.1.1) парную корреляционную функцию  $C_2$  через одночастичную функцию распределения, согласно формуле (1.3.1.12), получим следующее кинетическое уравнение, содержащее только одночастичную функцию

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} + e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c, \quad (1.3.2.1)$$

где

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c = \frac{\partial}{\partial p_j} \int d^3 p' \left[ \frac{\partial F(p)}{\partial p_i} F(p') - F(p) \frac{\partial F(p')}{\partial p'_i} \right] I_{ij}, \quad (1.3.2.2)$$

$$I_{ij} = \int_{-\infty}^0 dt \int d^3 r'_0 \frac{\partial}{\partial r_{0i}} \varphi(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'_0 + \mathbf{u}t) \frac{\partial}{\partial r_{0j}} \varphi(\mathbf{r}_0), \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}'. \quad (1.3.2.3)$$

Величина  $(\partial F / \partial t)_c$  называется *интегралом столкновений*.

Кинетическое уравнение (1.3.2.1) справедливо, как было отмечено выше, в случае достаточно медленно меняющейся со временем функции распределения  $F$  ( $\tau_F \gg \tau_c$ ) и достаточно слабых внешних полей.

Преобразуем выражение (1.3.2.3). Представив потенциал взаимодействия в виде интеграла Фурье, легко показать, что

$$I_{ij} = 8\pi^4 \int k_i k_j |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \delta_-(\mathbf{k} \mathbf{u}) d^3 k,$$

где

$$\delta_{-}(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ikx} dk.$$

Учитывая, что  $\delta_{-}(x) = \delta(x) - (i/\pi) \mathcal{P}(1/x)$  ( $\mathcal{P}$  — символ главного значения), представим  $I_{ij}$  в виде

$$I_{ij} = K \frac{\delta_{ij} u^2 - u_i u_j}{u^3},$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера и

$$K = 8\pi^5 \int_0^{\infty} k^3 |\varphi_k|^2 dk.$$

Интеграл  $K$  логарифмически расходится как на нижнем, так и на верхнем пределе. Эти расходимости имеют простую физическую причину. Так как малым  $k$  соответствуют большие, а большим  $k$  — малые расстояния между частицами, то расходимости связаны с особенностью взаимодействия между частицами и его описанием на больших и малых расстояниях. Именно, на больших расстояниях возникает экранирование кулоновского взаимодействия, и поэтому в качестве нижнего предела в интеграле  $K$  следует взять не нуль, а величину порядка обратного дебаевского радиуса,

$$k_{\min} \sim 1/a = \sqrt{4\pi e^2 n/T}.$$

Верхний предел соответствует малым расстояниям, и поэтому следует иметь в виду, что при малых расстояниях траекторию частицы нельзя считать прямой, как допускалось в использованном выше методе характеристик. Если бы при расчете мы исходили из истинной, т. е. гиперболической траектории, то не получили бы расходимости на верхнем пределе. Вместе с тем логарифм мало чувствителен к изменению своего аргумента, и поэтому можно взять в качестве верхнего предела  $k_{\max} \sim 1/r_{\min}$ , где  $r_{\min}$  — расстояние, при котором энергия взаимодействия частиц сравнима с их средней кинетической энергией, равное  $e^2/T$ .

Вычислив интеграл  $K$  с этими пределами, получим

$$I_{ij} = 2\pi e^4 \frac{\delta_{ij} u^2 - u_i u_j}{u^3} L,$$

где величина

$$L = \ln \frac{a}{r_{\min}} = \ln \left( \frac{T}{e^2} \sqrt{\frac{T}{4\pi e^2 n}} \right) \quad (1.3.2.4)$$

называется *кулоновским логарифмом*.

Учитывая формулу (1.3.2.2), можно представить интеграл столкновений в виде

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial J_i}{\partial p_i}, \quad (1.3.2.5)$$

где

$$J_i = \pi e^4 L \int \left[ F(\mathbf{p}) \frac{\partial F(\mathbf{p}')}{\partial p'_j} - F(\mathbf{p}') \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_j} \right] \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{u^2} \right) \frac{d^3 p'}{u} \quad (1.3.2.6)$$

До сих пор мы для простоты считали, что плазма содержит частицы только одного сорта. В общем случае, когда плазма состоит из частиц различных сортов, интеграл столкновений имеет вид

$$\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\right)_c = -\frac{\partial J_{\alpha i}}{\partial p_i},$$

где

$$J_{\alpha i} = \pi e_\alpha^4 L \sum_\beta e_\beta^2 L \int \left[ F_\alpha(\mathbf{p}) \frac{\partial F_\beta(\mathbf{p}')}{\partial p'_j} - F_\beta(\mathbf{p}') \frac{\partial F_\alpha(\mathbf{p})}{\partial p_j} \right] \left( \delta_{ij} - \frac{u_i u_j}{u^2} \right) \frac{d^3 p'}{u}, \quad (1.3.2.7)$$

$u$  — относительная скорость частиц, и суммирование производится по всем сортам частиц.

Мы видим, что интеграл столкновений имеет вид дивергенции от некоторого вектора  $\mathbf{J}$  в импульсном пространстве. Этот вектор является функционалом одночастичной функции распределения и ее первых производных по компонентам импульса. Поэтому сам интеграл столкновений содержит только первые и вторые производные от функции распределения по компонентам импульса, т. е. кинетическое уравнение для одночастичной функции распределения в случае ее медленного изменения во времени имеет вид уравнения типа Фоккера—Планка.

Формула (1.3.2.7) для интеграла столкновений была впервые получена Ландау [4] и  $-\partial J_{\alpha i}/\partial p_i$  носит название *интеграла столкновений Ландау*.

Выражение (1.3.2.7) можно получить и другим способом — более простым, но менее строгим, если исходить из общего выражения

$$\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\right)_c = \sum_\beta \int w^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) [F_\alpha(\mathbf{p}_1) F_\beta(\mathbf{p}'_1) - F_\alpha(\mathbf{p}) F_\beta(\mathbf{p}')] d^3 p' d^3 p_1 d^3 p'_1 \quad (1.3.2.8)$$

для интеграла парных столкновений в кинетическом уравнении Больцмана. Здесь  $w^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1)$  — отнесенная к единице

времени плотность вероятности столкновения частиц сортов  $\alpha$  и  $\beta$ , импульсы которых до столкновения равнялись  $p, p'$ , а после столкновения стали равными  $p_1, p'_1$ . Следует принять во внимание, что вероятность столкновения велика только при малом изменении импульсов сталкивающихся частиц [4].

Обратим внимание на то обстоятельство, что при выводе выражения для интеграла столкновений Ландау нам пришлось учесть эффект экранирования кулоновского поля (в противном случае мы не получили бы конечного выражения для  $(\partial F/\partial t)_c$ ). Это значит, что на парные столкновения в действительности оказывают влияние все близлежащие частицы. В рассмотренном нами случае плазмы, состояние которой близко к термодинамически равновесному, это влияние описывается одним параметром — дебаевским радиусом экранирования, входящим в кулоновский логарифм  $L$ . Для состояний, не близких к термодинамически равновесному, ситуация сильно усложняется: на парные столкновения влияет взаимодействие частиц с волнами, которые могут распространяться в плазме, и поэтому интеграл столкновений оказывается зависящим от диэлектрической проницаемости плазмы. Мы не будем, однако, приводить здесь соответствующие выражения для интеграла столкновений (см. [5—7]).

## § 1.4. Релаксация плазмы

**1.4.1. Время релаксации плазмы.** Интеграл столкновений Ландау обладает важным свойством — для максвелловского распределения частиц

$$f_0(p) = \frac{n}{(2\pi Tm)^{3/2}} \exp\left(-\frac{p^2}{2mT}\right) \quad (1.4.1.1)$$

он обращается в нуль, т. е.

$$\left(\frac{\partial f_0}{\partial t}\right)_c = 0. \quad (1.4.1.2)$$

При других функциях распределения интеграл столкновений в нуль не обращается.

В связи с этим свойством интеграла столкновений возникает вопрос об асимптотическом поведении (при  $t \rightarrow \infty$ ) решения кинетического уравнения для свободной плазмы (т. е. плазмы, не находящейся во внешних полях). Ответ на него гласит, что независимо от начального значения функции распределения  $F(p, 0)$  при  $t \rightarrow \infty$  решение уравнения (1.3.2.1) при  $E^0 = V^0 = 0$  асимптотически стремится к максвелловской функции распределения, т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} F(p, t) = f_0(p). \quad (1.4.1.3)$$

Если бы в кинетическом уравнении (1.3.2.1) мы отбросили интеграл столкновений, то последнее соотношение не выполнялось бы. Поэтому можно сказать, что процесс приближения функции распределения к максвелловской — этот процесс носит название *релаксации* — происходит благодаря парным столкновениям частиц плазмы.

Более общее утверждение состоит в том, что за релаксацию в плазме ответственны высшие корреляционные эффекты.

Легко оценить порядок *времени релаксации*, т. е. времени, по истечении которого функция  $F(\mathbf{p}, t)$  будет мало отличаться от максвелловской  $f_0(\mathbf{p})$ .

Оценим прежде всего длины свободного пробега  $l$  частиц плазмы. Это нетрудно сделать с помощью анализа размерностей. Действительно, величина  $l$  может в принципе зависеть от следующих величин:  $e, n, T, m$ , т. е.  $l = l(e, n, T, m)$ . Но интеграл столкновений Ландау содержит заряд  $e$  и плотность  $n$  в комбинации  $e^4 n L$ , где  $L$  — кулоновский логарифм (1.3.2.4), входящий в интеграл столкновений. Следовательно,  $l = l'(e^4 n L, T, m)$ , но из аргументов можно составить единственную величину, имеющую размерность длины, а именно  $T^2/e^4 n L$ , и, значит,

$$l \sim T^2/e^4 n L. \quad (1.4.1.4)$$

Мы видим, что длина свободного пробега частиц пропорциональна квадрату температуры и обратно пропорциональна плотности плазмы; от массы же частиц она не зависит.

Зная  $l$ , можно оценить время релаксации  $\tau$ ; для этого нужно, очевидно, разделить длину свободного пробега на среднюю тепловую скорость частиц

$$\tau \sim \frac{T^{3/2} m^{1/2}}{e^4 n L}. \quad (1.4.1.5)$$

Таким образом, время релаксации пропорционально температуре в степени  $3/2$ , обратно пропорционально плотности и прямо пропорционально квадратному корню из массы частиц. В отличие от длины пробега, время релаксации зависит от массы частиц, т. е. различно для частиц различных сортов.

При высоких температурах и малых плотностях длина пробега и время релаксации могут достигать очень больших значений. Например, при  $T = 10^7$  °C и  $n = 10^{12}$  см $^{-3}$  длина пробега достигает  $2 \cdot 10^8$  см, а времена релаксации для электронов  $\tau_e$  и протонов  $\tau_p$  составляют около  $3 \cdot 10^{-4}$  сек и  $10^{-2}$  сек соответственно.

Величина, обратная  $\tau$ , определяет частоту столкновений, т. е. среднее число столкновений, испытываемых частицей в единицу времени.

Используя свойство обращения в нуль интеграла столкновений в случае максвелловской функции распределения, можно при его оценке считать, что

$$\left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_c \sim \frac{1}{\tau} (F(\mathbf{p}, t) - f_0(\mathbf{p})). \quad (1.4.1.6)$$

Тогда кинетическое уравнение (1.3.2.1) для свободной и однородной плазмы приобретает вид

$$\frac{\partial F(\mathbf{p}, t)}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} (F(\mathbf{p}, t) - f_0(\mathbf{p})), \quad (1.4.1.7)$$

откуда

$$F(\mathbf{p}, t) = f_0(\mathbf{p}) + (F(\mathbf{p}, 0) - f_0(\mathbf{p})) \exp(-t/\tau). \quad (1.4.1.8)$$

Отсюда вытекает, в соответствии с высказанным выше утверждением, что при  $t \rightarrow \infty$  функция распределения  $F(\mathbf{p}, t)$  независимо от своего начального значения  $F(\mathbf{p}, 0)$  асимптотически стремится к максвелловской  $f_0(\mathbf{p})$  и по прошествии времени  $t \sim \tau$  она уже близка к ней. Тем не менее следует иметь в виду, что процесс релаксации описывается соотношением (1.4.1.8) только в общих чертах — тонкую структуру релаксации оно не передает. В частности, согласно (1.4.1.8), релаксация происходит равномерно при всех значениях скоростей, тогда как в действительности в области больших скоростей она наступает медленнее, чем в области малых. Это связано с характером кулоновского взаимодействия и обусловленной последним зависимостью сечения рассеяния частиц от скорости; именно, сечение рассеяния, согласно формуле Резерфорда, убывает с ростом энергии частиц обратно пропорционально квадрату энергии, вследствие чего и возникает неравномерность в процессе релаксации.

Простейший вид интеграла столкновений (1.4.1.6) не описывает этой неравномерности релаксации, использование же точных выражений (1.3.2.5) и (1.3.2.6) приводит к слишком сложному интегро-дифференциальному уравнению, решение которого нельзя найти аналитически. Поэтому для решения кинетического уравнения с интегралом столкновений Ландау применялись численные методы, которые, как и ожидалось, привели к следующему результату: «хвост» максвелловского распределения устанавливается позже основной его части [8].

Выше уже указывалось, что длина свободного пробега частиц плазмы не зависит от их массы, тогда как время релаксации пропорционально квадратному корню из массы частиц. Благодаря этому для легких частиц релаксация происходит быстрее, чем для тяжелых.

Вместе с тем вследствие большой разницы в массах электрона и иона обмен энергией между одноименными частицами происходит гораздо быстрее, чем между разноименными. Поэтому только после установления термодинамически равновесных распределений электронов и ионов с, вообще говоря, различными температурами (у электронов такое распределение наступает раньше, чем у ионов) возникнет полное равновесие между электронами и ионами, характеризующееся одинаковой их температурой.

**1.4.2. Процесс выравнивания температур электронов и ионов.** Чтобы описать этот процесс, определим изменение плотности энергии ионов  $\mathcal{E}_i$  в единицу времени, обусловленное столкновениями ионов с электронами.

Изменение числа ионов с данным импульсом, вызванное столкновением с электронами, в единицу времени в единице объема равно, согласно (1.3.2.7),

$$\left(\frac{\partial F_i}{\partial t}\right)_c^{(ie)} = -\frac{\partial J_i^{(ie)}(\mathbf{p})}{\partial p_j},$$

где

$$J_j^{(ie)}(\mathbf{p}) = \pi e^4 Z L \int \left[ f_{i0}(\mathbf{p}') \frac{\partial f_{e0}(\mathbf{p}')}{\partial p'_k} - f_{e0}(\mathbf{p}') \frac{\partial f_{i0}(\mathbf{p}')}{\partial p'_k} \right] \left( \delta_{jk} - \frac{u_j u_k}{u^2} \right) \frac{1}{u} d^3 p',$$

$f_{i0}$ ,  $f_{e0}$  — максвелловские функции распределения ионов и электронов с температурами  $T_i$  и  $T_e$ , удовлетворяющие условию нормировки  $\int f_0(\mathbf{p}) d^3 p = n$ ,  $Ze$  — заряд иона,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i \approx \mathbf{v}_e$  (индексы  $i$  и  $e$  всюду служат для обозначения ионов и электронов).

Отсюда легко найти скорость изменения плотности энергии ионов

$$\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} = - \int \frac{\partial J_j^{(ie)}(\mathbf{p})}{\partial p_j} \frac{p^2}{2m_i} d^3 p = \int J_j^{(ie)}(\mathbf{p}) v_j d^3 p,$$

где  $p^2/2m_i$  — энергия иона с импульсом  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{v} = \mathbf{p}/m_i$  — его скорость. Подставляя сюда приведенное выше выражение для  $J_j^{(ie)}(\mathbf{p})$ , получим

$$\frac{\partial \mathcal{E}_i}{\partial t} = 2 \frac{e^4 Z^2}{m_i} \sqrt{2\pi m_e} L \frac{n^2}{T_e^{3/2}} (T_e - T_i). \quad (1.4.2.1)$$

Приравняв скорости изменения плотности энергии ионов и электронов, равные, очевидно,  $3/2 n T_e$ , легко найти скорость изменения температуры электронов  $T_e$ :

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} = \frac{4}{3} \frac{e^4 Z^2}{m_i} \sqrt{2\pi m_e} L \frac{n}{T_e^{3/2}} (T_i - T_e). \quad (1.4.2.2)$$

Эта формула справедлива, если  $m_i T_e \gg m_e T_i$ .

**1.4.3. H-теорема Больцмана для спокойной плазмы.** Процесс релаксации сопровождается ростом энтропии плазмы. Убедимся в этом на примере спокойной плазмы и малого плазменного параметра.

В данном случае можно не учитывать при определении энтропии корреляционных эффектов. Иными словами, мы вправе представить энтропию газа, согласно классической формуле Больцмана, в виде

$$S = - \sum_{\alpha} \int F_{\alpha}(x) \ln F_{\alpha}(x) dx, \quad (1.4.3.1)$$

где  $F_{\alpha}(x)$  — функция распределения частиц сорта  $\alpha$ , нормированная условием

$$\int F_{\alpha}(x) d^3p = n_{\alpha},$$

и суммирование производится по всем сортам частиц плазмы.

Отсюда следует, что

$$\dot{S} = - \sum_{\alpha} \int \frac{\partial F_{\alpha}(x)}{\partial t} [1 + \ln F_{\alpha}(x)] dx, \quad (1.4.3.2)$$

а  $\partial F_{\alpha}(x)/\partial t$  определяется кинетическим уравнением

$$\frac{\partial F_{\alpha}(x)}{\partial t} = - \left\{ \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F_{\alpha}(x) + \left( \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} \right)_c. \quad (1.4.3.2')$$

Здесь  $(\partial F_{\alpha}/\partial t)_c$  — интеграл столкновений частиц сорта  $\alpha$ . Подставляя в (1.4.3.2) вместо  $\partial F_{\alpha}/\partial t$  последнее выражение, получим

$$\begin{aligned} \dot{S} = \sum_{\alpha} \int [1 + \ln F_{\alpha}(x)] \left\{ \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F_{\alpha}(x) - \\ - \sum_{\alpha} \int [1 + \ln F_{\alpha}(x)] \left( \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} \right)_c dx. \end{aligned}$$

Выполнив в первом слагаемом интегрирование по частям и отбрасывая внеинтегральные слагаемые, представим  $\dot{S}$  в виде

$$\begin{aligned} \dot{S} = - \sum_{\alpha} \int \left\{ \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F_{\alpha}(x) dx - \\ - \sum_{\alpha} \int [1 + \ln F_{\alpha}(x)] \left( \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} \right)_c dx. \quad (1.4.3.3) \end{aligned}$$

Но здесь подынтегральное выражение в первом слагаемом есть не что иное, как  $\left( \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} \right)_c - \frac{\partial F_{\alpha}(x)}{\partial t}$ , а поскольку общее число частиц

плазмы сохраняется и общее число частиц каждого сорта при столкновениях не изменяется, то

$$\int \frac{\partial F_\alpha(x)}{\partial t} dx = 0, \quad \int \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right)_c dx = 0$$

и, следовательно,

$$\dot{S} = - \sum_\alpha \int \ln F_\alpha(x) \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right)_c dx.$$

Подстановка сюда выражения (1.3.2.8) для  $(\partial F_\alpha / \partial t)_c$  дает

$$\begin{aligned} \dot{S} = - \sum_{\alpha, \beta} \int \ln F_\alpha(x) w^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) [F_\alpha(x_1) F_\beta(x'_1) - \\ - F_\alpha(x) F_\beta(x')] dx dx' dx_1 dx'_1. \end{aligned} \quad (1.4.3.4)$$

Учитывая, что выражение  $w^{(\alpha, \beta)}$  остается инвариантным при преобразованиях

- 1)  $\mathbf{p} \rightleftharpoons \mathbf{p}'$ ,  $\mathbf{p}_1 \rightarrow \mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}'_1 \rightarrow \mathbf{p}'_1$ ;
- 2)  $\mathbf{p} \rightleftharpoons \mathbf{p}_1$ ,  $\mathbf{p}' \rightleftharpoons \mathbf{p}'_1$ ,

можно представить формулу (1.4.3.4) в виде

$$\begin{aligned} \dot{S} = \frac{1}{4} \sum_{\alpha, \beta} \int \ln \frac{F_\alpha(x_1) F_\beta(x'_1)}{F_\alpha(x) F_\beta(x')} \left[ \frac{F_\alpha(x_1) F_\beta(x'_1)}{F_\alpha(x) F_\beta(x')} - 1 \right] \times \\ \times F_\alpha(x) F_\beta(x') w^{(\alpha, \beta)}(\mathbf{p}, \mathbf{p}'; \mathbf{p}_1, \mathbf{p}'_1) dx dx' dx_1 dx'_1. \end{aligned} \quad (1.4.3.5)$$

Как известно, функция  $\psi(x) = (x - 1) \ln x$  неотрицательна, и поэтому из последнего соотношения следует неравенство

$$\dot{S} \geq 0. \quad (1.4.3.6)$$

Таким образом, энтропия газа плазменных частиц не убывает. Соотношение (1.4.3.6) представляет собой H-теорему Больцмана для спокойной плазмы.

Обратим внимание на то обстоятельство, что не только внешнее, но и внутреннее, самосогласованное, поле не оказывает влияния на изменение энтропии плазмы. Этот вывод связан со сделанным предположением о том, что плазма является спокойной.

В общем случае турбулентной плазмы такой вывод несправедлив, так как для нее существенны корреляционные эффекты, которые не учитываются в больцмановском определении энтропии (1.4.3.1), содержащем только одночастичную функцию распределения. Мы не будем, однако, останавливаться здесь на рассмотрении общего определения энтропии, содержащего корреляционные функции.

Выше мы упоминали, что интеграл столкновений (1.3.2.2) фактически содержится в парной корреляционной функции  $C_2$ , если на нее наложить условие ослабления корреляции (1.1.2.8). Вместе с тем учет столкновений приводит к H-теореме, т. е. к необратимости, и поэтому можно сказать, что необратимость закладывается в кинетическую теорию требованием ослабления корреляций.

Заметим, что парные столкновения не являются единственным механизмом релаксации даже в спокойной плазме. Укажем здесь на другой возможный механизм релаксации, действующий при наличии сильного внешнего магнитного поля, — *радиационную релаксацию*, обусловленную испусканием и поглощением частицами плазмы (электронами) электромагнитных волн [9].

Радиационная релаксация происходит за время, равное по порядку величины отношению средней энергии электрона к средней интенсивности излучения электрона в магнитном поле. В нерелятивистском случае это время составляет по порядку величины

$$\tau^{(r)} \sim c/r_0\omega_B^2, \quad (1.4.3.7)$$

где  $c$  — скорость света,  $r_0 = e^2/m_e c^2$  — радиус электрона и  $\omega_B = eB/m_e c$  — ларморовская частота электрона в магнитном поле.

Разъясним в заключение настоящего параграфа, какого рода физические задачи можно решать с помощью кинетических уравнений (1.2.2.4) и (1.3.2.1) с самосогласованным полем и с интегралом столкновений.

Напомним прежде всего, что эти уравнения справедливы для спокойной (не турбулентной) плазмы в случае малого плазменного параметра  $g$ , когда высшие корреляционные эффекты не играют существенной роли. Тогда учет самосогласованного поля дает эффект порядка единицы, а парные столкновения — эффект порядка  $g$ .

Отсюда сразу следует, что кинетические уравнения для одночастичных функций распределения без интеграла столкновений могут служить для исследования высокочастотных свойств спокойных плазм. При этом частоты  $\omega$  плазменных колебаний должны удовлетворять условиям

$$\omega\tau \gg 1, \quad (1.4.3.8)$$

где  $\tau$  — время релаксации, определяемое формулой (1.4.1.5); кроме того, должно выполняться условие

$$kv_{e,i}\tau \gg 1, \quad (1.4.3.8')$$

где  $k$  — модуль волнового вектора возмущения и  $v_{e,i}$  — тепловые скорости электронов и ионов соответственно. Оба условия трудно получить, если воспользоваться качественным выражением

(1.4.1.6) для интеграла столкновений и заметить, что входящие в кинетическое уравнение величины  $\partial F/\partial t$  и  $v \partial F/\partial t$  можно заменить на  $\omega F$  и  $k v_{e,i} F$ . При выполнении условий (1.4.3.8), (1.4.3.8') говорят о колебаниях в бесстолкновительной плазме.

Рассматривая кинетическое уравнение (1.3.2.1) с интегралом столкновений, отметим, что, поскольку наличие интеграла столкновений приводит к росту энтропии, т. е. к необратимости, это уравнение может служить для исследования необратимых процессов в спокойной плазме, в частности для определения ее кинетических коэффициентов: электропроводности, диффузии и теплопроводности.

Для оценки можно воспользоваться известными формулами элементарной кинетической теории газов. Например, для оценки статической электропроводности плазмы  $\sigma$  можно использовать формулу

$$\sigma \sim \frac{e^2 n}{m_e} \tau.$$

Подставляя сюда вместо  $\tau$  выражение (1.4.1.5), получим

$$\sigma \sim T^{3/2} / m_e^{1/2} e^2 L.$$

Точное выражение для  $\sigma$  имеет вид

$$\sigma = \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\pi}} \frac{T^{3/2}}{m_e^{1/2} e^2 L}. \quad (1.4.3.9)$$

## § 1.5. Гидродинамический метод описания плазмы

**1.5.1. Гидродинамическое описание.** Выше мы показали, что для описания высокочастотных колебательных процессов в спокойной плазме адекватным математическим аппаратом является совокупность уравнения с самосогласованным полем без интеграла столкновений и уравнений электромагнитного поля Максвелла для вакуума.

Если необходимое для этого условие  $\omega\tau \gg 1$  не выполняется, а напротив, справедливо соотношение

$$\omega\tau \ll 1, \quad (1.5.1.1)$$

где  $\tau$  — среднее время релаксации частиц и  $\omega$  — частота колебаний, то необходим учет высших корреляционных эффектов и в первую очередь интеграла парных столкновений. Иными словами, для исследования колебательных процессов в плазме при выполнении условия (1.5.1.1) в принципе можно пользоваться кинетическим уравнением (1.3.2.1) с самосогласованным полем и интегралом столкновений вместе с уравнениями Максвелла.

Такой метод, однако, слишком сложен и по сути дела не нужен. Действительно, соотношение (1.5.1.1), если его рассматривать как условие, налагаемое на время релаксации, означает не что иное, как предельный переход  $\tau \rightarrow 0$ , который влечет за собой предельный переход  $l \rightarrow 0$  для средней длины свободного пробега. Но тогда плазму можно рассматривать как непрерывную среду, отвлекаясь от ее корпускулярной структуры. Поэтому для описания плазмы нет нужды прибегать к функциям распределения частиц и корреляционным функциям, а достаточно пользоваться упрощенным гидродинамическим описанием, где основными понятиями являются гидродинамическая скорость среды, ее плотность и давление. Все эти величины — будем называть их макроскопическими — могут изменяться во времени и в пространстве, но изменение их происходит медленно. Именно, выполняются условия

$$T_m \gg \tau, \quad L_m \gg l, \quad (1.5.1.2)$$

где  $T_m$  и  $L_m$  — характерное время и характерная длина, соответствующие существенному изменению макроскопических величин.

Гидродинамическое описание разумно применять, когда по условиям физической задачи быстро устанавливается локальное квазиравновесное распределение частиц. Его определяют макроскопические величины, изменяющиеся в соответствии с некоторыми законами, которые мы будем называть гидродинамическими. Законы эти в принципе должны формулироваться на основе кинетического описания.

В случае плазмы вследствие большого различия в массах электрона и иона следует различать, как было показано в § 1.4, три времени релаксации:  $\tau_{ee}$  — время релаксации в системе электронов,  $\tau_{ii}$  — время релаксации в системе ионов и  $\tau_{ei}$  — время релаксации, или установления равновесия, между электронами и ионами. Эти времена связаны между собой, согласно (1.4.1.5), (1.4.2.2), соотношениями

$$\tau_{ii} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \tau_{ee}, \quad \tau_{ei} \sim \frac{m_i}{m_e} \tau_{ee}$$

( $m_i$  и  $m_e$  — массы иона и электрона), так что раньше всего устанавливается равновесное (точнее квазиравновесное) распределение электронов, затем — ионов и, наконец, наступает равновесие между электронами и ионами.

Квазиравновесные распределения электронов и ионов характеризуются различными температурами и различными средними гидродинамическими скоростями частиц, а поэтому в данном случае можно говорить о гидродинамике двухкомпонентной (или многокомпонентной) плазмы.

После установления равновесия между электронами и ионами возникает общая температура и общая гидродинамическая скорость частиц, так что плазму можно рассматривать как единую гидродинамическую среду.

Ясно, что гидродинамические скорости отдельных компонент плазмы и их температуры, так же как и общая гидродинамическая скорость и общая температура, могут изменяться во времени и в пространстве, но изменения эти происходят медленно, в соответствии с условиями (1.5.1.2).

Из характера релаксации плазмы следует, что если частота колебаний плазмы  $\omega$  удовлетворяет условиям

$$\omega\tau_{ee} \ll 1, \quad \omega\tau_{ii} \ll 1, \quad \omega\tau_{ei} \gg 1,$$

то при исследовании таких колебаний плазму можно рассматривать как двухкомпонентную (или многокомпонентную) гидродинамическую среду; если же и  $\omega\tau_{ei} \ll 1$ , то плазму можно считать однокомпонентной гидродинамической средой.

До сих пор мы связывали возможность гидродинамического описания с малостью времен релаксации, т. е. с «частыми» столкновениями частиц. В случае «редких» столкновений, когда выполняется условие  $\omega\tau \gg 1$ , мы молчаливо полагали пригодным только кинетическое описание. Однако и при «редких» столкновениях, или, как говорят иначе, для «бесстолкновительной» плазмы также возможно гидродинамическое описание. Оно допустимо при очень малом разбросе тепловых скоростей, частиц, т. е. для достаточно холодной плазмы. В последнем случае скорость частиц совпадает с гидродинамической скоростью среды.

**1.5.2. Переход от кинетики к гидродинамике.** Покажем теперь, как выводятся гидродинамические уравнения из кинетических. Рассмотрим сперва простейший случай системы, состоящей из частиц одного сорта, подчиняющихся кинетическому уравнению Больцмана

$$\mathcal{L}(F) \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right\} F = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c. \quad (1.5.2.1)$$

При столкновениях выполняются законы сохранения числа частиц, импульса и энергии, и поэтому интеграл столкновений удовлетворяет условиям

$$\int \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c d^3v = 0, \quad \int m\mathbf{v} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c d^3v = 0, \quad \int \frac{1}{2} m v^2 \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c d^3v = 0 \quad (1.5.2.2)$$

$$(d^3v = dv_x dv_y dv_z).$$

Учитывая (1.5.2.1), можно переписать эти условия в виде

$$\int \mathcal{L}(F) d^3v = 0, \quad \int m\mathbf{v} \mathcal{L}(F) d^3v = 0, \quad \int \frac{1}{2} m v^2 \mathcal{L}(F) d^3v = 0. \quad (1.5.2.3)$$

Отсюда мы и получим гидродинамические уравнения. Рассмотрим прежде всего первое из соотношений (1.5.2.3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \int F d^3v + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \mathbf{v} F d^3v + \frac{e}{m} \int \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial F}{\partial v} d^3v = 0. \quad (1.5.2.4)$$

Легко видеть, что последнее слагаемое здесь равно нулю. Действительно,

$$\int \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial F}{\partial v} d^3v = \mathbf{E} \int F dS_{\mathbf{v}} - \frac{1}{c} \int F \frac{\partial}{\partial v_j} [\mathbf{v}\mathbf{B}]_j d^3v,$$

где  $dS_{\mathbf{v}}$  — элемент граничной поверхности в пространстве  $\mathbf{v}$ . Но второй интеграл тождественно равен нулю, а первый равен нулю из-за быстрого (экспоненциального) убывания  $F$  при  $|\mathbf{v}| \rightarrow \infty$ .

Итак,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int F d^3v + \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \int \mathbf{v} F d^3v = 0,$$

или

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div} n\mathbf{u} = 0, \quad (1.5.2.5)$$

где

$$n \equiv n(\mathbf{r}, t) = \int F d^3v, \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \frac{\int \mathbf{v} F d^3v}{\int F d^3v}. \quad (1.5.2.6)$$

Величины  $n(\mathbf{r}, t)$  и  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  представляют собой плотность частиц и гидродинамическую скорость среды, а соотношение (1.5.2.5) — известное уравнение непрерывности.

Рассмотрим далее второе соотношение (1.5.2.3):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int m v_j F d^3v + \frac{\partial}{\partial x_k} \int m v_j v_k F d^3v + \\ + e \int v_j \left( E_k + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]_k \right) \frac{\partial F}{\partial v_k} d^3v = 0. \end{aligned} \quad (1.5.2.7)$$

Согласно предыдущему первое и третье слагаемые можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \int m v_j F d^3v = \frac{\partial}{\partial t} \rho_m u_j,$$

$$\begin{aligned} e \int v_j \left( E_k + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}]_k \right) \frac{\partial F}{\partial v_k} d^3v = \\ = -e E_k \int F \frac{\partial v_j}{\partial v_k} d^3v - \frac{e}{c} \int F \frac{\partial}{\partial v_k} (v_j [\mathbf{v}\mathbf{B}]_k) d^3v = -en \left( E + \frac{1}{c} [\mathbf{u}\mathbf{B}] \right)_j, \end{aligned}$$

где  $\rho_m = mn$ .

Вводя далее тензор  $\Pi_{jk}$ :

$$\Pi_{jk} = \rho_m u_j u_k + p_{jk}, \quad (1.5.2.8)$$

где

$$p_{jk} = m \int w_j w_k F d^3v, \quad \mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u},$$

можно записать второе слагаемое (1.5.2.7) в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \int m v_j v_k F d^3v = \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x_k}.$$

Итак, соотношение (1.5.2.7) приобретает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_m u_j + \frac{\partial \Pi_{jk}}{\partial x_k} = en \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right)_j.$$

Используя уравнение непрерывности, получим отсюда

$$\rho_m \frac{du_j}{dt} = - \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_k} + en \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right)_j, \quad (1.5.2.9)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_k \frac{\partial}{\partial x_k}.$$

Это соотношение представляет собой гидродинамическое уравнение Эйлера—Навье—Стокса, а  $p_{jk}$  есть не что иное, как тензор давлений.

Рассмотрим, наконец, третье соотношение (1.5.2.3). Вводя величины

$$\varepsilon_m = \frac{1}{n} \int^{1/2} w^2 F d^3v, \quad \mathbf{q}_T = \int \mathbf{w}^{1/2} m w^2 F d^3v, \quad (1.5.2.9')$$

равные внутренней энергии единицы массы и плотности потока тепла, и поступая аналогично предыдущему, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \rho_m \left( \frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_m \right) \right\} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ \rho_m u_k \left( \frac{1}{2} u^2 + \varepsilon_m \right) + u_j p_{jk} \right\} + \\ + \frac{\partial q_{Tj}}{\partial x_j} = en E_j. \end{aligned} \quad (1.5.2.10)$$

Это соотношение выражает закон сохранения энергии в гидродинамике.

Используя уравнение непрерывности и уравнение Эйлера—Навье—Стокса, можно переписать последнее соотношение в виде

$$\rho_m \frac{d\varepsilon_m}{dt} = -u_{jk} p_{jk} - \frac{\partial q_{Tj}}{\partial x_j}, \quad (1.5.2.11)$$

где  $u_{jk} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$  — тензор скоростей деформации.

Конкретное физическое содержание уравнения (1.5.2.5), (1.5.2.9), (1.5.2.10) приобретают только после того, как решено кинетическое уравнение (1.5.2.1) и с помощью формул (1.5.2.6), (1.5.2.8) вычислены гидродинамические величины  $n$ ,  $u$ ,  $p_{jk}$ . Выясним поэтому характер решений кинетического уравнения при выполнении условий применимости гидродинамического описания  $\omega\tau \ll 1$ ,  $L_m \gg l$ .

При выполнении этих условий функцию распределения частиц  $F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$  можно искать в виде суммы функций локального максвелловского распределения

$$f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = n \left( \frac{m}{2\pi T} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T} \right] \quad (1.5.2.12)$$

( $\mathbf{v}$  — скорость частицы,  $\mathbf{u}$  — гидродинамическая скорость;  $n$ ,  $u$  и  $T$  — медленно меняющиеся функции координат и времени) и малой добавкой к ней  $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ :

$$F(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = f_0(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) + f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t), \quad |f| \ll f_0. \quad (1.5.2.13)$$

Чтобы убедиться в этом, подставим последнее выражение в кинетическое уравнение (1.5.2.4). Учитывая, что максвелловское распределение обращает интеграл столкновений в нуль, т. е.  $(\partial f_0 / \partial t)_c = 0$ , и пренебрегая квадратичными по  $f$  членами, запишем интеграл столкновений в виде

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c = G(f),$$

где  $G(f)$  — некоторый линейный функционал. Тогда кинетическое уравнение примет вид

$$G(f) = \mathcal{L}(f_0) \quad (1.5.2.14)$$

(мы отбросили в правой части малую по сравнению с  $f_0$  добавку  $f$ ). Отсюда можно в принципе определить  $f$ . В общем случае это уравнение является сложным интегродифференциальным уравнением. Для оценки порядка величины  $G(f)$  можно считать, что  $G(f) = -f/\tau$ . Тогда

$$f = -\tau \mathcal{L}(f_0). \quad (1.5.2.15)$$

Но, очевидно,

$$\mathcal{L}(f_0) \sim (\omega + l/\tau L_m) f_0$$

и, следовательно, как и утверждалось,

$$|f|/f_0 \sim \omega\tau + l/L_m \ll 1.$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что уравнение (1.5.2.14), служащее для нахождения функции  $f$ , однозначно ее не определяет. Это связано с тем, что функция

$$\Phi = (c_0 + c_1 m v + \frac{1}{2} c_2 m v^2) f_0,$$

где  $c_0, c_1, c_2$  — произвольные константы, обращает функционал  $G$  в нуль, т. е.  $G(\Phi) = 0$ . Поэтому для однозначного определения функции  $f$  должны быть сформулированы еще три добавочных условия. В качестве таких условий можно взять соотношения

$$\int f d^3v = 0, \quad \int m v f d^3v = 0, \quad \int \frac{1}{2} m v^2 f d^3v = 0. \quad (1.5.2.16)$$

Эти условия означают, что плотность частиц, их средняя скорость и средняя энергия полностью определяются функцией  $f_0$ . Мы будем называть  $f_0$  нулевым и  $f_0 + f$  первым приближением функции распределения. Нулевое приближение соответствует квазиравновесному состоянию, а первое приближение учитывает малые отклонения от равновесного состояния.

Обратимся теперь к вычислению гидродинамических величин, определяемых формулами (1.5.2.6), (1.5.2.8), (1.5.2.9').

Учитывая малость поправки  $f$ , мы можем сперва произвести вычисления в нулевом приближении. При этом плотность и гидродинамическая скорость будут, очевидно, совпадать с параметрами  $n$  и  $u$ , входящими в распределение Максвелла (1.5.2.12).

Далее для тензора давлений  $p_{jk}$  мы получим в этом приближении выражение

$$p_{jk} = p \delta_{jk}, \quad (1.5.2.17)$$

где

$$p = \frac{1}{3} m \int w^2 f_0 d^3v = n T.$$

Подставляя (1.5.2.17) в (1.5.2.8), находим следующее выражение для тензора  $\Pi_{jk}$ , который называется *тензором плотности потока импульса*,

$$\Pi_{jk} = \rho_m u_j u_k + p \delta_{jk}. \quad (1.5.2.18)$$

Наконец, для  $\epsilon_m$  мы получим выражение

$$\epsilon_m = \frac{3}{2} T / m, \quad (1.5.2.19)$$

вектор же плотности потока тепла будет равен нулю,  $q_T = 0$ .

Подстановка выражений (1.5.2.17)–(1.5.2.19) для  $p_{jk}$ ,  $\varepsilon_m$  и  $q_T$  в (1.5.2.9), (1.5.2.14) приводит к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{u} &= 0, \\ \rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + en \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right), \\ \frac{dT}{dt} + \frac{T}{c_V} \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1.5.2.20)$$

где

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla$$

и  $c_V = 3/2$  — удельная теплоемкость, отнесенная к одной частице.

Эти соотношения представляют собой систему гидродинамических уравнений для идеального газа и не содержат ни вязких сил, ни тепловых потоков, обусловленных вязкостью и теплопроводностью. Иными словами, уравнения (1.5.2.20) описывают только обратимые течения газа.

Последнее обстоятельство имеет глубокий смысл и связано с характером сделанного нами приближения: в качестве функции распределения при вычислении гидродинамических величин мы взяли локальное квазиравновесное максвелловское распределение, которое соответствует предположению об обратимости процессов.

Для описания необратимых процессов недостаточно нулевого приближения функции распределения, а обязательно следует учесть поправку к ней. Именно, функция  $f$ , определяющая отклонение от локального равновесного распределения, определяет также как вязкие силы, так и диссипацию энергии.

Как следует из (1.5.2.15), вычисленные с помощью  $f$  необратимые потоки будут пропорциональны времени релаксации, как и должно быть согласно элементарной кинетической теории. Мы не будем однако приводить здесь эти вычисления\*), а перейдем к выяснению тех осложнений, которые возникают при описании реальной плазмы по сравнению с изложенной выше простейшей схемой.

Вследствие большого различия в массах электрона и иона и связанного с этим затрудненного обмена энергией между электронами и ионами в плазме имеет место, как было разъяснено в п. 1.4.1, трехступенчатая релаксация: сперва устанавливается квазиравновесное распределение электронов, затем квазиравновесное распределение ионов и, наконец, равновесие между элек-

\*) Подробные вычисления необратимых потоков содержатся в книгах [13, 14].

тронами и ионами. (Выше отмечалось, что соответствующие времена релаксации  $\tau_{ee}$ ,  $\tau_{ii}$  и  $\tau_{ei}$  связаны друг с другом соотношениями  $\tau_{ii} \sim \sqrt{m_i/m_e} \tau_{ee}$ ,  $\tau_{ei} \sim \tau_{ee} m_i/m_e$ .)

Такой характер релаксации позволяет при гидродинамическом описании плазмы рассматривать ее как совокупность нескольких «жидкостей» (по числу компонент плазмы) с различными гидродинамическими скоростями и плотностями, а также с различными температурами. Уравнения такой гидродинамики многокомпонентных жидкостей в принципе можно получить так же, как и в случае систем с частицами одного сорта, но исходить при этом придется не из одного, а из нескольких кинетических уравнений.

Повторяя приведенный выше вывод, получим в случае двухкомпонентной плазмы, состоящей из ионов одного сорта и электронов, уравнения непрерывности для электронной и ионной компонент плазмы в отдельности

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{u}_e = 0, \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{u}_i = 0 \quad (1.5.2.21)$$

и уравнения движения

$$m_e n_e \frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} = -\operatorname{div} \hat{p}_e - en_e \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_e \mathbf{B}] \right) + \mathbf{R}_e, \quad (1.5.2.22)$$

$$m_i n_i \frac{d_i \mathbf{u}_i}{dt} = -\operatorname{div} \hat{p}_i + en_i \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_i \mathbf{B}] \right) + \mathbf{R}_i, \quad (1.5.2.23)$$

где

$$\frac{d_{e,i}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}_{e,i} \nabla, \quad (\operatorname{div} \hat{p})_j = \frac{\partial p_{jk}}{\partial x_k}.$$

Эти уравнения представляют собой уравнения Эйлера—Навье—Стокса, но в них входят, однако, добавочные (по сравнению с (1.5.2.9)) члены  $\mathbf{R}_e$  и  $\mathbf{R}_i$ , которые имеют простой физический смысл: они определяют силы, действующие на электроны вследствие столкновений с ионами и на ионы вследствие столкновений с электронами. Из закона сохранения импульса следует, очевидно, что

$$\mathbf{R}_i = -\mathbf{R}_e. \quad (1.5.2.24)$$

Аналогично последнему уравнению (1.5.2.20) получим для двухкомпонентной плазмы

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} n_e T_e + \frac{3}{2} \operatorname{div} n_e T_e \mathbf{u}_e + n_e T_e \operatorname{div} \mathbf{u}_e + \\ + \hat{\pi}_e : \hat{u}_e + \operatorname{div} \mathbf{q}_{T_e} = Q_e, \end{aligned} \quad (1.5.2.25)$$

$$\begin{aligned} \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} n_i T_i + \frac{3}{2} \operatorname{div} n_i T_i \mathbf{u}_i + n_i T_i \operatorname{div} \mathbf{u}_i + \\ + \hat{\pi}_i : \hat{u}_i + \operatorname{div} \mathbf{q}_{T_i} = Q_i, \end{aligned} \quad (1.5.2.26)$$

где

$$\hat{\pi}_{e, i} = -\hat{p}_{e, i} + n_{e, i} T_{e, i} \hat{I}, \quad (\hat{u}_{e, i})_{jk} = 1/2 \left\{ \frac{\partial (u_{e, i})_j}{\partial x_k} + \frac{\partial (u_{e, i})_k}{\partial x_j} \right\}$$

и  $\mathbf{q}_{Te}$  и  $\mathbf{q}_{Ti}$  — плотности потока тепла электронной и ионной компонент,  $\hat{\pi}: \hat{u} = \pi_{jk} u_{kj}$  и  $\hat{I}$  — единичная матрица.

По сравнению с уравнением (1.5.2.10) уравнения (1.5.2.25), (1.5.2.26) содержат добавочные слагаемые  $Q_e$  и  $Q_i$ . Первое из них представляет собой количество тепла, получаемое в единицу времени электронами в результате столкновений их с ионами, а второе — аналогичную величину для ионов. Из закона сохранения энергии следует, что \*)  $Q_i = -Q_e$ .

**1.5.3. Уравнения магнитной гидродинамики.** При рассмотрении плазмы как единой гидродинамической среды основными понятиями являются гидродинамическая скорость плазмы  $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и ее плотность  $\rho_m \equiv \rho_m(\mathbf{r}, t)$ , а основными уравнениями — уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{u} = 0 \quad (1.5.3.1)$$

и уравнение Эйлера—Навье—Стокса

$$\rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \rho_m \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \nabla) \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \mathbf{f}_E + \mathbf{f}_v, \quad (1.5.3.2)$$

где  $p$  — давление и  $\mathbf{f}_E$  и  $\mathbf{f}_v$  — плотность ponderomotorной силы, обусловленной электромагнитным взаимодействием, и плотность силы, обусловленной вязкостью среды. Эти силы определяются известными формулами

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}_E &= \rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}], \\ \mathbf{f}_v &= \eta \Delta \mathbf{u} + (\zeta + 1/3 \eta) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}, \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3.3)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле,  $\mathbf{j}$  — плотность тока проводимости,  $\rho$  — плотность заряда и  $\eta$  и  $\zeta$  — коэффициенты вязкости плазмы.

Для достаточно медленных движений среды и малых частот плотность тока проводимости определяется законом Ома с учетом конвекционного тока

$$\mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \mathbf{B}] \right) + \rho \mathbf{u}, \quad (1.5.3.4)$$

\*) Формулы для  $\mathbf{q}_T$ ,  $Q$  и  $\hat{\pi}_{e, i}$  получены в работе [15], выражения для  $\rho_{jk}$  с учетом квадратичных по  $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i$  членов — в [17].

где  $\sigma$  — статическая электропроводность плазмы. (Эта формула справедлива, строго говоря, при не слишком больших магнитных полях, так как в противном случае возникает анизотропия проводимости). Заметим, что в соотношении (1.5.3.4) входит не непосредственно электрическое поле, а величина

$$E' = E + \frac{1}{c} [\mathbf{u}B],$$

равная электрическому полю в системе отсчета, связанной с движущимся элементом плазмы.

К гидродинамическим уравнениям (1.5.3.1)—(1.5.3.3) следует присоединить уравнения Максвелла

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3.5)$$

уравнение состояния плазмы

$$p = p(\rho_m, T) \quad (1.5.3.6)$$

и, наконец, уравнение переноса тепла, связывающее плотность энтропии  $s \equiv s(\rho_m, T)$  с плотностью энергии  $q$ , диссипируемой в плазме, в единицу времени

$$T\rho_m \frac{ds}{dt} \equiv q = \hat{\pi} : \hat{u} + \operatorname{div}(\kappa \nabla T) + j^2/\sigma, \quad (1.5.3.7)$$

где  $T$  — температура плазмы,  $\hat{\pi}$  — тензор вязких напряжений,

$$\pi_{jk} = \eta \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}$$

и  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности плазмы. Отдельные слагаемые в правой части (1.5.3.7) представляют собой количества тепла, выделяемые за 1 сек в 1 см<sup>3</sup> объема плазмы вследствие вязкости, теплопроводности и электропроводности соответственно.

В случае достаточно медленных движений среды и малых частот, когда выполняются неравенства

$$\omega/\sigma \ll 1, \quad V_m/\sigma L_m \ll 1, \quad V_m/c \ll 1, \quad (1.5.3.8)$$

где  $V_m$  — характерная гидродинамическая скорость,  $L_m$  — характерная длина и  $\omega$  — частота изменения макроскопических переменных, возникает ряд упрощений, а именно, ток смещения оказывается малым по сравнению с током проводимости, в котором можно не учитывать конвекционного тока  $\rho \mathbf{u}$ ; наконец, в поперечной силе можно пренебречь чисто электрической силой  $\rho \mathbf{E}$ .

Чтобы убедиться в этом, заметим прежде всего, что по порядку величин

$$\frac{1}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \sim \frac{|\mathbf{E}| \omega}{c},$$

и поэтому в силу (1.5.3.8)

$$\frac{1}{c} \left| \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right| \ll \frac{4\pi}{c} \sigma |\mathbf{E}|.$$

Далее из первого и четвертого уравнений (1.5.3.5) следуют оценки

$$E \sim \frac{L_m \omega}{c} B, \quad \rho \sim \frac{E}{L_m}, \quad (1.5.3.9)$$

и поэтому

$$\frac{|\rho \mathbf{u}|}{|\sigma \mathbf{E}|} \sim \frac{V_m}{\sigma L_m} \ll 1.$$

Наконец, используя (1.5.3.4) и полагая, что  $|\mathbf{E}| \sim \left| \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right|$ , получим

$$\frac{|\rho \mathbf{E}|}{\left| \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] \right|} \sim \frac{V_m}{\sigma L_m}.$$

Итак, если выполняются условия\*) (1.5.3.8), то наши основные уравнения приобретают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{jB}] + \mathbf{f}_v, \\ \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div} \rho_m \mathbf{u} &= 0, \quad T \rho_m \frac{ds}{dt} = q, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mathbf{j} = \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right). \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3.10)$$

Эта система вместе с уравнением состояния  $p = p(\rho_m, T)$  образует уравнения магнитной гидродинамики [16].

Легко получить соотношение, которому удовлетворяет магнитное поле. Выразим для этого электрическое поле через магнитное; имеем

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{uB}] + \frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = -\frac{1}{c} [\mathbf{uB}] + \frac{c}{4\pi\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{B}. \quad (1.5.3.11)$$

\*) Кроме того, естественно, должно выполняться условие  $\omega \tau_{ei} \ll 1$  (см. п. 1.5.1).

Подставляя далее это выражение в предпоследнее из уравнений (1.5.3.10), получим

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{uB}] - \text{rot} (\nu_m \text{rot} \mathbf{B}), \quad (1.5.3.12)$$

где  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ .

Это и есть искомое уравнение, которому удовлетворяет магнитное поле.

При заданном  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  оно вместе с уравнением  $\text{div} \mathbf{B} = 0$  однозначно определяет  $\mathbf{B}$ .

Заметим, что величина  $\nu_m$  имеет ту же размерность, что и кинематическая вязкость  $\nu = \eta/\rho_m$ , и называется *магнитной вязкостью*.

Если проводимость  $\sigma$  не зависит от координат, то уравнение (1.5.3.12) приобретает вид

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{uB}] + \nu_m \Delta \mathbf{B}. \quad (1.5.3.13)$$

В случае достаточно большой проводимости вторым слагаемым в правой части последнего уравнения можно пренебречь. Более точно, для этого должно выполняться условие

$$R_\sigma \gg 1, \quad (1.5.3.14)$$

где

$$R_\sigma = L_m V_m / \nu_m. \quad (1.5.3.15)$$

Эта величина, аналогичная числу Рейнольдса  $R_\nu = L_m V_m / \nu$ , носит название *магнитного числа Рейнольдса* или *числа Лундквиста* [10].

Итак, при  $R_\sigma \gg 1$  магнитное поле удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{uB}]. \quad (1.5.3.16)$$

Подставляя сюда

$$\text{rot} [\mathbf{uB}] = (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u}\nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{u}$$

и используя соотношение

$$\text{div} \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho_m} \frac{d\rho_m}{dt},$$

легко показать, что

$$\frac{d}{dt} \frac{\mathbf{B}}{\rho_m} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla) \right\} \frac{\mathbf{B}}{\rho_m} = \left( \frac{\mathbf{B}}{\rho_m} \nabla \right) \mathbf{u}. \quad (1.5.3.17)$$

С другой стороны, изменение элемента  $\delta l$  какой-либо «жидкой линии» удовлетворяет такому же уравнению

$$\frac{d}{dt} \delta l = (\delta l \cdot \nabla) u.$$

Поэтому можно сказать, что при  $R_s \gg 1$  магнитные силовые линии перемещаются вместе с находящимися на них частицами плазмы, т. е. эти линии как бы «приклеены» к плазме [11].

Условие  $R_s \gg 1$  означает, очевидно, малость энергии, диссипируемой вследствие проводимости среды. Аналогичным образом условие  $R_v \gg 1$  означает малость энергии, диссипируемой в результате вязкости среды. Наконец, если велико число

$$R_\chi = L_m V_m / \chi,$$

где  $\chi = \kappa / c_p \rho_m$ ,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $c_p$  — теплоемкость, отнесенная к одной частице и равная  $5/2$ , то будет мала энергия, диссипируемая вследствие теплопроводности среды.

Мы будем предполагать в дальнейшем, что выполнены три условия

$$R_s \gg 1, \quad R_v \gg 1, \quad R_\chi \gg 1, \quad (1.5.3.18)$$

и поэтому всюду, где это возможно, будем пренебрегать диссипацией энергии.

Заметим, что условия (1.5.3.18) имеют разный смысл в разных задачах. Не разбирая здесь этого вопроса подробно, отметим лишь, что для стационарных течений величина  $V_m$  имеет смысл скорости течения, а для волновых движений — смысл фазовой скорости. В п. 2.1.3 мы исследуем влияние диссипации энергии на затухание магнитогидродинамических волн.

При выполнении условий (1.5.3.18) говорят об идеальной среде. Мы выпишем здесь для удобства еще раз уравнения магнитной гидродинамики специально для идеальной среды \*):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_m \mathbf{u}) &= 0, & \frac{ds}{dt} &= 0, \\ \rho_m \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\nabla p + \frac{1}{4\pi} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot}[\mathbf{uB}], & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5.3.19)$$

Отсутствие диссипации энергии вместе с предположением о достаточно медленном протекании макроскопических процессов (это предположение необходимо для возможности применения гидро-

\*) Отметим, что эти уравнения можно получить из вариационного принципа [3, 12].

динамического описания) находит свое выражение в уравнении  $ds/dt=0$ , означающем адиабатичность процессов, т. е.  $s=\text{const}$ .

Заметим, что условие  $R_\sigma \gg 1$  в нерелятивистском случае влечет за собой первые два условия (1.5.3.8). Действительно, переписав условие  $R_\sigma \gg 1$  в виде

$$(\sigma L_m/V_m)(V_m^2/c^2) \gg 1,$$

имеем

$$\sigma L_m/V_m \gg c^2/V_m^2 \gg 1.$$

Далее из условия  $R_\sigma \gg 1$  следует неравенство  $\sigma \gg c^2/L_m V_m$ , а так как  $L_m \sim V_m/\omega$ , то  $\sigma \gg c^2\omega/V_m^2 \gg \omega$ .

Таким образом, в случае идеальной среды первые два условия (1.5.3.8) содержатся в (1.5.3.14).

## § 2.1. Магнитозвуковые и альвеновские волны

**2.1.1. Фазовые скорости и поляризации.** Перейдем теперь к систематическому исследованию колебаний, способных возбуждаться и распространяться в плазме.

Начнем с исследования низкочастотных колебаний, для описания которых можно пользоваться гидродинамическим методом. Будем сперва считать, что диссипация энергии отсутствует, так что уравнения магнитной гидродинамики имеют вид (1.5.3.19).

Рассмотрим одномерные волны, распространяющиеся вдоль оси  $z$ , для которых все магнитогидродинамические величины зависят только от  $z$  и  $t$ . В этом случае система уравнений (1.5.3.19) принимает вид

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{\partial \rho}{\partial t} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial s}{\partial t} + u_z \frac{\partial s}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{p_p}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z} + \frac{p_s}{\rho} \frac{\partial s}{\partial z} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{B_x}{4\pi\rho} \frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{B_y}{4\pi\rho} \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial B_x}{\partial t} - B_x \frac{\partial u_x}{\partial z} + B_x \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_x \frac{\partial B_x}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial B_y}{\partial t} - B_y \frac{\partial u_y}{\partial z} + B_y \frac{\partial u_z}{\partial z} + u_y \frac{\partial B_y}{\partial z} &= 0, \\
 \frac{\partial B_z}{\partial z} &= 0.
 \end{aligned} \right\} (2.1.1.1)$$

Здесь  $p_p = (\partial p / \partial \rho)_s$ ,  $p_s = (\partial p / \partial s)_\rho$ , индекс  $m$  у плотности  $\rho_m$  тут и в дальнейшем опускается.

Из последнего уравнения (2.1.1.1) следует, что  $B_z = \text{const}$ . Поэтому число магнитогидродинамических переменных в одномерной волне равно семи:  $\rho$ ,  $s$ ,  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ,  $B_x$ ,  $B_y$ .

Систему уравнений (2.1.1.1) удобно представить в матричном виде [1]

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \hat{Z}(\mathcal{Q}) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z} = 0, \quad (2.1.1.2)$$

где  $\mathcal{Q}$  — «вектор» магнитогидродинамического состояния плазмы, т. е. совокупность семи магнитогидродинамических величин,

$$\mathcal{Q} = (\rho, s, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y)$$

и  $\hat{Z}(\mathcal{Q})$  — матрица вида

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} u_x & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & u_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_x & 0 & 0 & -\frac{B_x}{4\pi\rho} \\ \frac{p_p}{\rho} & \frac{p_s}{\rho} & 0 & 0 & u_x & \frac{B_x}{4\pi\rho} & \frac{B_y}{4\pi\rho} \\ 0 & 0 & -B_x & 0 & B_x & u_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_x & B_y & 0 & u_x \end{pmatrix}. \quad (2.1.1.3)$$

Мы будем сперва рассматривать малые колебания, и поэтому линеаризуем систему (2.1.1.2). Полагая  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_0 + \tilde{\mathcal{Q}}$ , где величины  $\mathcal{Q}_0$  соответствуют равновесному однородному состоянию плазмы, и пренебрегая степенями  $\tilde{\mathcal{Q}}$  выше первой, получим

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{Q}}}{\partial t} + \hat{Z}(\mathcal{Q}_0) \frac{\partial \tilde{\mathcal{Q}}}{\partial z} = 0. \quad (2.1.1.4)$$

Выберем теперь такую систему координат, в которой матрица  $\hat{Z}$  имеет максимально простой вид. Если система координат движется со скоростью плазмы, то  $u=0$ . Вращая далее систему координат вокруг оси  $z$ , можно добиться того, чтобы  $B_y=0$ . Тогда матрица  $\hat{Z}$  приобретает вид

$$\hat{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \rho & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{B_x}{4\pi\rho} \\ \frac{p_p}{\rho} & \frac{p_s}{\rho} & 0 & 0 & 0 & \frac{B_x}{4\pi\rho} & 0 \\ 0 & 0 & -B_x & 0 & B_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -B_x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad (2.1.1.5)$$

здесь и далее  $p$ ,  $\rho$  и  $\mathbf{B}$  — давление, плотность и магнитное поле, соответствующие однородному равновесному состоянию плазмы.

Будем искать решения уравнения (2.1.1.4) в виде плоской волны

$$\mathfrak{Q} = A \exp [i(kz - \omega t)]. \quad (2.1.1.6)$$

Подстановка этого выражения в (2.1.1.4) дает

$$\hat{Z}A = \nu A, \quad (2.1.1.7)$$

где  $\nu = \omega/k$ .

Мы видим, что амплитуды различных магнитогидродинамических величин представляют собой компоненты правого собственного вектора матрицы  $\hat{Z}$ , а собственные ее значения — возможные значений фазовой скорости. Для их нахождения следует приравнять нулю детерминант системы (2.1.1.7), т. е.

$$\det(\hat{Z} - \nu \hat{I}) = 0, \quad (2.1.1.8)$$

где  $\hat{I}$  — единичная матрица. Это уравнение имеет семь корней и, следовательно, в плазме могут существовать семь типов плоских волн.

Возможные фазовые скорости этих волн равны [2]

$$\left. \begin{aligned} v^{(1, 2)} &= \varepsilon v_A |\cos \theta|, & v^{(3, 4)} &= \varepsilon v_+, \\ v^{(5, 6)} &= \varepsilon v_-, & v^{(7)} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v_A &= \frac{B}{\sqrt{4\pi\rho}}, \\ v_{\pm} &= \sqrt{\frac{1}{2}(v_A^2 + v_s^2 \pm \sqrt{(v_A^2 + v_s^2)^2 - 4v_A^2 v_s^2 \cos^2 \theta})}, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1.10)$$

$\theta$  — угол между направлением постоянного магнитного поля и направлением распространения волны,  $\varepsilon = +1$  для волн, распространяющихся в положительном направлении оси  $z$ , и  $\varepsilon = -1$  для волн, распространяющихся в противоположном направлении,

$v_s$  — скорость звука, равная  $v_s = \sqrt{(dp/d\rho)_s}$ .

Величины  $v^{(1, 2)}$  представляют собой фазовые скорости двух альвеновских волн (распространяющихся под углом  $\theta$  к магнитному полю в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$ ). Величина  $v_A$  носит название *альвеновской скорости*. Величины  $v^{(3, 4)}$  — являются фазовыми скоростями двух быстрых и  $v^{(5, 6)}$  — двух медленных магнитозвуковых волн (распространяющихся под углом  $\theta$  в положительном и отрицательном направлениях оси  $z$ ); наконец,  $v^{(7)}$  — фазовая скорость энтропийной волны, равная нулю.

Амплитуды магнитогидродинамических волн, представляющие собой правые собственные векторы матрицы  $\hat{Z}$ , равны [3]

$$\left. \begin{aligned} A^{(1,2)} &= (0, 0, 0, 1, 0, 0, -\varepsilon \sqrt{4\pi\rho} \operatorname{sgn} B_z), \\ A^{(3,4)} &= \left( \rho, 0, \frac{\varepsilon v_A^2 v_+ \sin \theta \cos \theta}{v_A^2 \cos^2 \theta - v_+^2}, 0, \varepsilon v_+, \frac{v_+^2 B \sin \theta}{v_+^2 - v_A^2 \cos^2 \theta}, 0 \right), \\ A^{(5,6)} &= \left( \rho, 0, \frac{\varepsilon v_A^2 v_- \sin \theta \cos \theta}{v_A^2 \cos^2 \theta - v_-^2}, 0, \varepsilon v_-, \frac{v_-^2 B \sin \theta}{v_-^2 - v_A^2 \cos^2 \theta}, 0 \right), \\ A^{(7)} &= (-p_s, p_p, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \right\} (2.1.1.11)$$

Мы видим, что в альвеновских волнах \*)  $A^{(1,2)}$  равны нулю возмущения плотности, плотности энтропии и тех компонент скорости и магнитного поля, которые лежат в плоскости, проходящей через невозмущенное магнитное поле  $\mathbf{B}$  и направление распространения волны, т. е.

$$\tilde{\rho} = \tilde{s} = \tilde{u}_x = \tilde{u}_z = \tilde{B}_x = 0; \quad \tilde{u}_y \neq 0; \quad \tilde{B}_y \neq 0$$

(знак  $\sim$  над буквой здесь и далее означает возмущение).

В магнитозвуковых волнах  $A^{(3,4,5,6)}$  равны нулю возмущения энтропии, а также возмущения компонент скорости и магнитного поля, перпендикулярных к направлению распространения волны и к  $\mathbf{B}$ , т. е.

$$\begin{aligned} \tilde{s} = \tilde{u}_y = \tilde{B}_y &= 0; \\ \tilde{\rho} \neq 0; \tilde{u}_x \neq 0; \tilde{u}_z \neq 0; \tilde{B}_x \neq 0. \end{aligned}$$

Иными словами, магнитозвуковые волны являются изэнтропическими и плоскополяризованными.

Наконец, в энтропийной волне возмущены лишь плотность и плотность энтропии, возмущения же скорости и магнитного поля равны нулю, т. е.

$$\tilde{u} = \tilde{\mathbf{B}} = 0; \quad \tilde{\rho} \neq 0; \quad \tilde{s} \neq 0.$$

Так как матрица  $\hat{Z}$  несимметрична, то ее левые собственные векторы  $A^+$ , определяемые уравнением

$$A^+ \hat{Z} = \nu A^+, \quad (2.1.1.12)$$

не будут совпадать с правыми собственными векторами. Собственные значения их, однако, совпадают, причем правые и левые собственные векторы, соответствующие различным фазовым скоростям, ортогональны друг другу, т. е.

$$A^{+(j)} A^{(j')} = 0, \quad \text{если } j \neq j'. \quad (2.1.1.13)$$

\*) Эти волны были впервые исследованы Альвеном [4].

Легко видеть, что

$$\left. \begin{aligned} A^{+(1,2)} &= (0, 0, 0, \sqrt{4\pi\rho}, 0, 0, -\varepsilon \operatorname{sgn} B_z), \\ A^{+(3,4)} &= \left( p_+, p_+, \frac{\varepsilon v_A^2 v_{+z} \sin \theta \cos \theta}{v_A^2 \cos^2 \theta - v_+^2}, 0, \varepsilon v_{+z}, \frac{B}{4\pi} \frac{v_+^2 \sin \theta}{v_+^2 - v_A^2 \cos^2 \theta}, 0 \right), \\ A^{+(5,6)} &= \left( p_-, p_-, \frac{\varepsilon v_A^2 v_{-z} \sin \theta \cos \theta}{v_A^2 \cos^2 \theta - v_-^2}, 0, \varepsilon v_{-z}, \frac{B}{4\pi} \frac{v_-^2 \sin \theta}{v_-^2 - v_A^2 \cos^2 \theta}, 0 \right), \\ A^{+(7)} &= (0, 1, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1.14)$$

Свойство ортогональности правых и левых собственных векторов можно использовать для представления произвольного малого возмущения магнитогидродинамических величин  $\tilde{Q}(z, t)$  в виде суперпозиции семи магнитогидродинамических волн.

Действительно, записав  $\tilde{Q}(z, t)$  в виде

$$\tilde{Q}(z, t) = \sum_{j=1}^7 \int C^{(j)}(k) A^{(j)} \exp[i(kz - \omega^{(j)}t)] dk, \quad (2.1.1.15)$$

где  $\omega^{(j)} \equiv \omega^{(j)}(k)$  — частоты различных магнитогидродинамических волн с волновым числом  $k$ , легко убедиться, что

$$C^{(j)}(k) = \frac{A^{+(j)} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{Q}(z, 0) e^{-ikz} dz}{2\pi A^{+(j)} A^{(j)}}. \quad (2.1.1.16)$$

Найденные фазовые скорости магнитогидродинамических волн  $v^{(j)}$  относятся к системе отсчета, в которой плазма покоится. Чтобы найти фазовые скорости волн  $v^{(j)}$  в плазме, движущейся со скоростью  $u$ , нужно прибавить к правым частям выражения (2.1.1.9) продольную компоненту скорости плазмы  $u_z$ ; тогда получим

$$\left. \begin{aligned} v^{(1,2)} &= u_z + \varepsilon v_A |\cos \theta|, & v^{(3,4)} &= u_z + \varepsilon v_+, \\ v^{(5,6)} &= v_z + \varepsilon v_-, & v^{(7)} &= u_z. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.1.17)$$

**2.1.2. Поляры.** Как было показано выше, фазовые скорости магнитогидродинамических волн (альвеновской и магнитозвуковых) зависят от угла  $\theta$  между направлением распространения волны и направлением постоянного магнитного поля. Кривые, изображающие эти зависимости, называются *фазовыми полярами*.

На рис. 2.1.1 представлены фазовые поляры [5, 6] для быстрой магнитозвуковой волны ( $v_+$ ), медленной магнитозвуковой волны ( $v_-$ ) и альвеновской волны ( $v_A$ ) при  $v_A > v_s$ . (Если  $v_A < v_s$ , то альвеновская поляра будет проходить не через точку  $B$ , а через точку  $A$ .)

Отрезки  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  равны, согласно (2.1.1.10),

$$OA = \min(v_A, v_s), \quad OB = \max(v_A, v_s), \quad OC = \sqrt{v_A^2 + v_s^2}.$$

Заметим, что, как непосредственно следует из (2.1.1.10), при  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  фазовая скорость быстрой магнитозвуковой волны является возрастающей функцией  $\theta$ , а фазовая скорость медленной волны — убывающей функцией  $\theta$ , причем, как видно из рис. 2.1.1,

$$v_+(\theta) \geq \max(v_A, v_s),$$

$$v_-(\theta) \leq \min(v_A, v_s).$$

В предельных случаях, когда одна из скоростей  $v_A$  или  $v_s$  значительно больше другой, фазовые полюсы превращаются в окружности. При  $v_A \gg v_s$  имеем  $v_+ = v_A$ ,  $v_- = v_s |\cos \theta|$  и при  $v_s \gg v_A$  —  $v_+ = v_s$ ,  $v_- = v_A |\cos \theta|$ .

Произвольное малое возмущение магнитогидродинамического состояния среды можно представить, как уже указывалось в п. 2.1.1, в виде суперпозиции семи магнитогидродинамических волн — двух альбеновских, четырех магнитозвуковых и одной энтропийной.

Рассмотрим более подробно волновой пакет магнитогидродинамических волн одного типа, т. е. суперпозицию волн данного типа с малым разбросом волнового вектора для какой-нибудь магнитогидродинамической величины, например для плотности

$$\bar{\rho}(\mathbf{r}, t) = \int \rho_{\mathbf{k}} \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega^{(j)} t)] d^3k,$$

где  $\omega^{(j)} \equiv \omega^{(j)}(\mathbf{k})$  и  $\rho_{\mathbf{k}}$  — частота и амплитуда Фурье возмущения плотности в магнитогидродинамической волне рассматриваемого типа с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и интегрирование производится по небольшому объему в пространстве волновых векторов  $\Delta\mathbf{k} \equiv \Delta k_x \Delta k_y \Delta k_z$  вблизи точки  $\mathbf{k} = \mathbf{k}_0$ . Используя разложение

$$\omega^{(j)}(\mathbf{k}) = \omega^{(j)}(\mathbf{k}_0) + (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \mathbf{v}_g^{(j)},$$

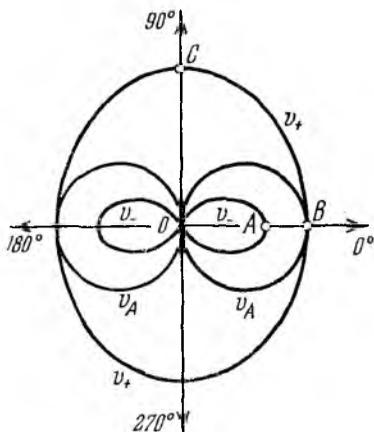


Рис. 2.1.1. Фазовые полюсы для быстрой ( $v_+$ ) и медленной ( $v_-$ ) магнитогидродинамических волн и для альбеновской волны ( $v_A$ ). Магнитное поле направлено вдоль оси абсцисс.

где  $\mathbf{v}_g = (\partial\omega^{(j)}/\partial\mathbf{k})_{\mathbf{k}=\mathbf{k}_0}$  и заменяя  $\rho_{\mathbf{k}}$  на  $\rho_{\mathbf{k}_0}$ , получим

$$\tilde{p}(\mathbf{r}, t) = \rho_{\mathbf{k}_0} \frac{\sin \xi_x}{\xi_x} \frac{\sin \xi_y}{\xi_y} \frac{\sin \xi_z}{\xi_z} \Delta k \exp [i(\mathbf{k}_0 \mathbf{r} - \omega_0^{(j)} t)],$$

где

$$\omega_0^{(j)} = \omega^{(j)}(\mathbf{k}_0), \quad \xi_l = (\mathbf{r} - \mathbf{v}_g^{(j)} t)_l \Delta k_l, \quad l \equiv x, y, z.$$

Отсюда следует, что волновой пакет существенно отличен от нуля только в том случае, если величины  $\xi_l$  невелики ( $\xi_l \ll 1$ ). Отсюда в свою очередь следует, что волновой пакет перемещается со скоростью

$$\mathbf{v}_g^{(j)} = \frac{\partial\omega^{(j)}}{\partial\mathbf{k}}, \quad j = 1, 2, \dots, 7. \quad (2.1.2.1)$$

Эта скорость называется *групповой скоростью* волн типа  $j$ .

Ясно, что для одномерных волновых пакетов в силу линейного закона дисперсии магнитогидродинамических волн их фазовая и групповая скорости совпадают. Для двумерных же и трехмерных пакетов групповая и фазовая скорости, вообще говоря, не одинаковы.

Рассмотрим сперва двумерный волновой пакет. Подставляя в (2.1.2.1)  $\omega^{(j)} = v^{(j)}(\theta)k$ , где  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и направлением постоянного магнитного поля (которое мы выберем в качестве оси  $x$ ), и учитывая, что  $\theta = \arctg(k_y/k_x)$ ,  $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ , получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} v_{gx} &= v^{(j)}(\theta) \cos \theta - \frac{dv^{(j)}}{d\theta} \sin \theta, \\ v_{gy} &= v^{(j)}(\theta) \sin \theta + \frac{dv^{(j)}}{d\theta} \cos \theta. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2.2)$$

Их можно изобразить графически, вводя плоскость  $(v_{gx}, v_{gy})$ . Каждому углу  $\theta$  будет соответствовать тогда на этой плоскости некоторая точка. Геометрическое место таких точек называют *групповой полярной*.

На рис. 2.1.2 изображены групповые полярны [7] для быстрой ( $v_{g+}$ ) и медленной ( $v_{g-}$ ) магнитогидродинамических волн \*). Отрезки  $OA$ ,  $OB$ ,  $OC$  и  $OE$  равны

$$\left. \begin{aligned} OA &= \min(v_A, v_s), & OB &= \max(v_A, v_s), \\ OC &= \sqrt{v_A^2 + v_s^2}, & OE &= \frac{v_A v_s}{\sqrt{v_A^2 + v_s^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2.3)$$

\*) Они называются быстрой и медленной групповыми полярными.

Для альвеновской волны групповая поляра вырождается, очевидно, в две точки  $B$  и  $B'$  (см. рис. 2.1.2), если  $v_A > v_s$  и в точки  $A$  и  $A'$ , если  $v_A < v_s$ .

Для энтропийной волны групповая поляра вырождается в точку  $O$ .

Мы рассмотрели двумерные волновые пакеты. В случае трехмерных волновых пакетов конец вектора групповой скорости при изменении направления распространения описывает некоторую поверхность. Ее можно получить вращением групповых поляр вокруг оси  $x$ , т. е. вокруг направления постоянного магнитного поля.

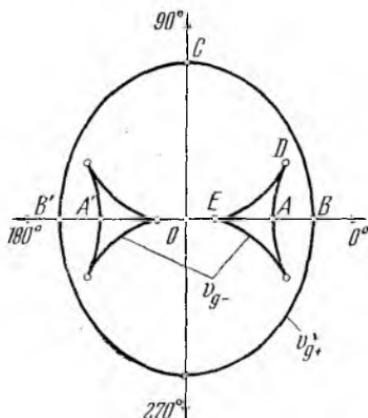


Рис. 2.1.2. Групповые поляры для быстрой ( $v_{g+}$ ) и медленной ( $v_{g-}$ ) волн.

**2.1.3. Затухание магнитогидродинамических волн.** До сих пор при исследовании магнитогидродинамических волн мы исходили из уравнений магнитной гидродинамики идеальной среды, т. е. не учитывали эффектов, приводящих к диссипации энергии. Эти эффекты приводят, в частности, к затуханию магнитогидродинамических волн, которое мы рассмотрим в настоящем разделе.

Уравнения магнитной гидродинамики с учетом диссипации имеют, согласно § 1.5, следующий вид [8, 9]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \mathbf{u} &= 0, \\ \rho T \frac{d\mathbf{s}}{dt} &= \hat{\pi} : \hat{\mathbf{u}} + \operatorname{div} (\kappa \nabla T), \\ \frac{d\mathbf{u}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{4\pi\rho} [\operatorname{rot} \mathbf{B}, \mathbf{B}] + \\ &+ \nu_1 \Delta \mathbf{u} + (\nu_2 + \frac{1}{3}\nu_1) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}, \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{u}, \mathbf{B}] + \nu_m \Delta \mathbf{B}, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.3.4)$$

где  $\hat{\pi}$  — тензор вязких напряжений:

$$\pi_{jk} = \eta \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \delta_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \right) + \zeta \delta_{jk} \frac{\partial u_l}{\partial x_l},$$

$\nu_1 = \eta/\rho$ ,  $\nu_2 = \zeta/\rho$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  — коэффициенты вязкости,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности и  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$  — магнитная вязкость,  $\sigma$  — электропроводность среды.

Будем предполагать, что все величины зависят только от  $z$  и  $t$  и введем, так же как и п. 2.1.1, вектор магнитогидродинамического состояния  $\mathfrak{Q} = (\rho, s, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y)$ . Тогда для малых возмущений мы получим вместо уравнения (2.1.1.4) уравнение

$$\frac{\partial \tilde{\mathfrak{Q}}}{\partial t} + \hat{Z} \frac{\partial \tilde{\mathfrak{Q}}}{\partial z} = \hat{D} \frac{\partial^2 \tilde{\mathfrak{Q}}}{\partial z^2}, \quad (2.1.3.2)$$

где  $\hat{Z}$  — матрица, определяемая формулой (2.1.1.5), и

$$\hat{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{xT_\rho}{\rho T} & \frac{xT_s}{\rho T} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \nu_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3}\nu_1 + \nu_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \nu_m \end{pmatrix}, \quad (2.1.3.3)$$

$$T_\rho = (\partial T / \partial \rho)_s, \quad T_s = (\partial T / \partial s)_\rho.$$

Будем искать решение уравнения (2.1.3.2) в виде плоской монохроматической волны

$$\tilde{\mathfrak{Q}} = \tilde{A} \exp [i(kz - \omega t)].$$

В этом случае имеем

$$-i\omega \tilde{A} + ik\hat{Z}\tilde{A} = -k^2\hat{D}\tilde{A}. \quad (2.1.3.4)$$

Будем считать частоту  $\omega$  заданной, а волновое число  $k$  — некоторой функцией частоты. Ясно, что вследствие диссипации энергии оно будет комплексным.

Считая элементы матрицы  $\hat{D}$  достаточно малыми, можно решить уравнения (2.1.3.4) методом последовательных приближений. Полагая  $\tilde{A} = A + A'$  и  $k = \omega/v + ik'$ , где  $A$  — правый собственный вектор матрицы  $\hat{Z}$ , определяемый формулами (2.1.1.11),  $A'$  — малая добавка к  $A$  и  $k'$  — малая добавка к  $\omega/v$ , получим

$$-i\omega A' + \frac{i\omega}{v} \hat{Z} A' - k' \hat{Z} A = -\frac{\omega^2}{v^2} \hat{D} A.$$

Умножая это уравнение на левый собственный вектор  $A^+$  матрицы  $\hat{Z}$ , найдем

$$k' = \frac{\omega^2}{v^3} \frac{A^+ \hat{D} A}{A^+ A}. \quad (2.1.3.5)$$

Легко показать, что  $A^+ \hat{D} A / A^+ A \geq 0$ ; поэтому величина  $k'$  будет положительна при  $v > 0$ . Отсюда следует, что амплитуда волны при ее распространении всегда затухает, т. е. изменяется по за-

кону  $e^{-ik'z}$  ( $z > 0$ ). Величина  $k'$  называется коэффициентом затухания.

Используя выражения (2.1.1.11), (2.1.1.14) для правого и левого собственных векторов, легко вычислить коэффициент затухания. Для альвеновских волн он имеет особенно простой вид [4]

$$k'_A = \frac{\omega^2}{2v_A^3} (v_1 + v_m). \quad (2.1.3.6)$$

Чтобы найти коэффициент затухания магнитозвуковых волн, следует использовать формулы

$$\frac{v_{\pm}^2 v_A^2 \sin^2 \theta}{v_{\pm}^2 - v_A^2 \cos^2 \theta} = v_{\pm}^2 - v_s^2$$

и

$$p_s T_p = T v_s^2 (1/c_V - 1/c_p),$$

где  $c_V$  и  $c_p$  — теплоемкости при постоянных объеме и давлении. При этом мы получим следующее выражение для коэффициента затухания [10]:

$$k'_{\pm} = \frac{\omega^2}{2v_{\pm}^3 (v_{\pm}^2 - v_s^2 \cos^2 \theta)} \left\{ (v_{\pm}^2 - v_A^2 \cos^2 \theta) \left[ \frac{v_s^2}{\rho} \left( \frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p} \right) + v_{\pm}^2 \left( \frac{4}{3} v_1 + v_2 \right) \right] + (v_{\pm}^2 - v_s^2) (v_1 v_A^2 \cos^2 \theta + v_m v_{\pm}^2) \right\}. \quad (2.1.3.7)$$

Эта формула сильно упрощается, когда  $v_s \ll v_A$ ; тогда для быстрой волны имеем

$$k'_+ = \frac{\omega^2}{2v_A^3} v_m, \quad (2.1.3.8)$$

и для медленной —

$$k'_- = \frac{\omega^2 v_m \sin^2 \theta}{2v_A^2 v_s |\cos \theta|^3}. \quad (2.1.3.9)$$

**2.1.4. Возбуждение магнитогидродинамических волн.** До сих пор мы исследовали дисперсию и поляризацию магнитогидродинамических волн. Перейдем теперь к вопросу об их возбуждении.

Магнитогидродинамические волны можно возбуждать либо механическим путем, например с помощью вращающегося диска [11], либо внешними переменными токами [12] (см. также [13]). В случае плазмы наибольший интерес представляет последний способ, на котором мы и остановимся.

Будем сперва считать среду идеально проводящей и не будем учитывать никаких процессов диссипации. Тогда исходными являются следующие линеаризованные уравнения для скорости среды  $u$ , отклонения  $\bar{\rho}$  плотности среды от равновесного значения  $\rho_0$

и отклонения  $\tilde{\mathbf{B}}$  магнитного поля от постоянного и однородного поля  $\mathbf{B}_0$ :

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -v_s^2 \nabla \bar{p} + \frac{en}{c} [\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e, \mathbf{B}_0], \\ \frac{\partial \bar{p}}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \mathbf{u} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} &= \operatorname{rot} [\mathbf{u} \mathbf{B}_0], \\ \operatorname{rot} \tilde{\mathbf{B}} &= \frac{4\pi}{c} en (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e, \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4.1)$$

где  $en (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$  — плотность «внутреннего» тока проводимости,  $\mathbf{u}_i$ ,  $\mathbf{u}_e$  — скорости ионной и электронной компонент,  $n$  — плотность частиц одного сорта и  $\mathbf{j}^e$  — плотность «внешнего» тока, возбуждающего магнитное поле,  $v_s$  — скорость звука. (В первом из этих уравнений не выписано слагаемое  $\frac{1}{c} [\mathbf{j}^e, \mathbf{B}]$ , так как оно представляет собой пондеромоторную силу, действующую на «носителя» тока, а не на плазму.)

Исключая в первом из уравнений (2.1.4.1) плотность «внутреннего» тока с помощью последнего и дифференцируя первое по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - v_s^2 \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} - [\operatorname{rot} \operatorname{rot} [\mathbf{u}, \mathbf{v}_A], \mathbf{v}_A] = \frac{1}{c\rho_0} [\mathbf{B}_0, \frac{\partial \mathbf{j}^e}{\partial t}]. \quad (2.1.4.2)$$

Это уравнение позволяет найти скорость среды  $\mathbf{u}$ , если известна плотность внешнего тока  $\mathbf{j}^e$ . Используя далее второе и третье уравнения (2.1.4.1), можно найти  $\bar{p}$  и  $\mathbf{B}$ .

Решение уравнения (2.1.4.2) проще всего находить методом Фурье. Рассмотрим, например, случай, когда плотность тока является синусоидальной функцией времени, т. е.

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{J}^e(\mathbf{r}).$$

Тогда  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  следует искать в виде

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = e^{-i\omega t} \mathbf{U}(\mathbf{r}).$$

Разлагая  $\mathbf{J}^e(\mathbf{r})$  и  $\mathbf{U}(\mathbf{r})$  в интегралы Фурье

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{r}) = \int \mathbf{J}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k, \quad \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \int \mathbf{U}_k e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k \quad (2.1.4.3)$$

и подставляя эти разложения в (2.1.4.2), получим следующее алгебраическое выражение для определения  $\mathbf{U}_k$ :

$$\{\omega^2 - (\mathbf{k}\mathbf{v}_A)^2\} \mathbf{U}_k - \{(\nu_s^2 + \nu_A^2) (\mathbf{k}\mathbf{U}_k) - (\mathbf{v}_A \mathbf{U}_k) (\mathbf{k}\mathbf{v}_A)\} \mathbf{k} + \mathbf{v}_A (\mathbf{k}\mathbf{v}_A) (\mathbf{k}\mathbf{U}_k) = \frac{i\omega}{c\rho_0} [\mathbf{B}_0 \mathbf{J}_k]. \quad (2.1.4.4)$$

Зная  $u$ , можно определить интенсивность возбужденных магнитогидродинамических волн. Вычислим для этого производную по времени от полной энергии среды

$$W = \int \left( \frac{\rho u^2}{2} + \rho \varepsilon_m + \frac{B^2}{8\pi} \right) dV,$$

где  $\rho = \rho_0 + \bar{\rho}$  — плотность среды,  $\varepsilon_m \equiv \varepsilon_m(\rho)$  — внутренняя энергия единицы массы,  $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \bar{\mathbf{B}}$  — магнитное поле и  $u$  — скорость среды. Дифференцируя это выражение по времени и используя точные (нелиinearизованные) уравнения магнитной гидродинамики (1.5.3.19), получим при постоянной энтропии следующее выражение для интенсивности возбужденных магнитогидродинамических волн:

$$I \equiv \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{1}{c} \int u [\mathbf{Bj}^0] dV. \quad (2.1.4.5)$$

Замечая, что в рассматриваемом нами случае бесконечной проводимости среды  $\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] = 0$ , можно переписать формулу (2.1.4.5) следующим образом:

$$I = - \int \mathbf{Ej}^0 dV.$$

Формула (2.1.4.5) является точной. Для волн малой амплитуды, имеем

$$I = \frac{1}{c} \int u [\mathbf{B}_0 \mathbf{j}^0] dV. \quad (2.1.4.6)$$

Если плотность тока является синусоидальной функцией времени, то, используя разложения (2.1.4.3), получим для усредненной по времени интенсивности возбужденных магнитогидродинамических волн

$$\langle I \rangle = \frac{B_0 V}{4c} \int \{ [\mathbf{J}_k \mathbf{U}_{-k}^*] + [\mathbf{J}_k^* \mathbf{U}_{-k}] \} d^3k,$$

где  $V$  — объем системы.

Рассмотрим более подробно возбуждение магнитогидродинамических волн поверхностным током, текущим в плоскости  $xy$ , перпендикулярной к направлению постоянного магнитного поля, с плотностью

$$\mathbf{j}^0 = \mathbf{j}_s \delta(z) e^{-i\omega t}.$$

Здесь  $\mathbf{j}_s$  — постоянный вектор, который мы будем полагать направленным вдоль оси  $x$ .

Разлагая  $\delta(z)$  в интеграл Фурье

$$\delta(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikz) dk$$

и подставляя это разложение в (2.1.4.4), получим

$$U_{ky} = \frac{i\omega B_0 j_S}{2\pi c \rho_0 (\omega^2 - k^2 v_A^2)}, \quad U_{kx} = U_{kz} = 0. \quad (2.1.4.7)$$

Отсюда находим скорость  $u(0, u_y, 0)$ :

$$u_y = -\frac{i\omega B_0 j_S}{2\pi c \rho_0 v_A^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ikz) dk}{k^2 - \omega^2/v_A^2}.$$

При вычислении входящего сюда интеграла следует помнить о правильном обходе полюсов  $k = \pm \omega/v_A$ . Именно, их следует обходить в соответствии с принципом излучения [14], т. е. считать, что  $\text{Im } \omega \rightarrow -i0$ . В результате интегрирования получим

$$u_y = \frac{B_0 j_S}{2c \rho_0 v_A} \exp\left(-\frac{i\omega |z|}{v_A}\right). \quad (2.1.4.8)$$

Найдем среднюю интенсивность возбужденных магнитогидродинамических волн. Подстановка (2.1.4.8) в (2.1.4.6) дает

$$\langle I \rangle = \frac{\pi j_S^2 v_A}{c^2} \int \exp\left(-\frac{i\omega |z|}{v_A}\right) \delta(z) dV.$$

Мы видим, что средняя интенсивность возбужденных волн, отнесенная к единице поверхности, равна

$$\langle I_S \rangle = \pi j_S^2 v_A / c^2. \quad (2.1.4.9)$$

Рассмотрим теперь возбуждение магнитогидродинамических волн током, имеющим вид бегущей вдоль оси  $z$  волны, с плотностью

$$\mathbf{j}^e(\mathbf{r}, t) = \mathbf{J}_0 \exp\{i\omega(t - z/v_j)\}.$$

В этом случае нельзя непосредственно воспользоваться полученными выше формулами, так как при совпадении скорости токовой волны  $v_j$  с какой-либо из фазовых скоростей магнитогидродинамических волн возникает резонанс, для исследования которого обязателен учет диссипативных процессов. Мы учтем здесь диссипацию, связанную только с конечной электропроводностью среды. При этом в системе уравнений (2.1.4.1) изменяется только третье уравнение — уравнение «вмороженности» магнитных силовых линий, которое приобретает вид

$$\frac{\partial \tilde{\mathbf{B}}}{\partial t} = \text{rot} [\mathbf{u} \mathbf{B}_0] + \nu_m \Delta \tilde{\mathbf{B}},$$

где  $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$  — коэффициент магнитной вязкости. Выбирая ось  $y$  перпендикулярно к направлению распространения волны

(ось  $z$ ) и к направлению постоянного магнитного поля, получим следующие уравнения для определения величин  $\bar{\rho}$ ,  $u$ ,  $\bar{B}$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u_z}{\partial z} &= 0, \\ \frac{\partial u_x}{\partial t} - \frac{B_{0z}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial z} &= -\frac{j_y^e B_{0z}}{\rho_0 c}, \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} - \frac{B_{0z}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial z} &= \frac{j_x^e B_{0z} - j_z^e B_{0x}}{\rho_0 c}, \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{v_s^2}{\rho_0} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \frac{B_{0x}}{4\pi\rho_0} \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial z} &= \frac{j_y^e B_{0x}}{\rho_0 c}, \\ \frac{\partial \bar{B}_x}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u_x}{\partial z} + B_{0x} \frac{\partial u_z}{\partial z} &= v_m \frac{\partial^2 \bar{B}_x}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial \bar{B}_y}{\partial t} - B_{0z} \frac{\partial u_y}{\partial z} &= v_m \frac{\partial^2 \bar{B}_y}{\partial z^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4.10)$$

Эти уравнения распадаются на две системы; систему, содержащую величины  $u_y$ ,  $\bar{B}_y$ , относящиеся к альвеновской волне, и систему, содержащую величины  $\bar{\rho}$ ,  $u_x$ ,  $u_z$ ,  $\bar{B}_x$ , относящиеся к магнитозвуковым волнам.

Решение первой системы имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_y &= \operatorname{Re} \frac{i(j_z^e B_{0x} - j_x^e B_{0z}) B_{0z} v_J}{\omega \rho_0 c [(v_J^2 - v_A^2) - i\omega v_m]}, \\ u_y &= \operatorname{Re} \frac{-v_J^2 + i\omega v_m}{v_J B_{0z}} \bar{B}_y. \end{aligned} \right\} \quad (2.1.4.11)$$

Аналогичным образом выглядит решение второй системы. Мы приведем здесь только выражение для  $\bar{B}_x$ :

$$\bar{B}_x = \operatorname{Re} \frac{i B_{0z}^2 j_y^e v_J (v_J^2 - v_s^2 \cos^2 \theta)}{\omega \rho_0 c [-(v_J^2 - v_s^2) (v_J^2 - v_s^2) + i\omega v_m (v_J^2 - v_s^2)]}, \quad (2.1.4.12)$$

где  $\theta$  — угол между осью  $z$  и направлением магнитного поля.

Полученные формулы показывают, что при совпадении скорости токовой волны с альвеновской скоростью или со скоростью одной из магнитозвуковых волн возникает резонанс, и амплитуда соответствующей магнитогидродинамической волны становится обратно пропорциональной магнитной вязкости.

**2.1.5. Характеристики магнитогидродинамических уравнений.** Уравнения магнитной гидродинамики (1.5.3.19) представляют собой систему дифференциальных уравнений в частных производных, для которой может быть поставлена следующая задача (*задача Коши*). На некоторой трехмерной гиперповерхности задан вектор магнитогидродинамического состояния  $\mathcal{A}$ . Требуется

определить вектор  $\mathcal{A}$  вне этой гиперповерхности. В частности, вектор  $\mathcal{A}$  может быть задан на гиперплоскости  $t=0$ , т. е. во всем пространстве  $(x, y, z)$  при  $t=0$ ; задача Коши состоит тогда в нахождении  $\mathcal{A}$  при  $t \neq 0$ .

Покажем прежде всего, что задача Коши не всегда имеет однозначное решение. Рассмотрим с этой целью простейший случай одного дифференциального уравнения с двумя независимыми переменными,

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + Z \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = 0, \quad (2.1.5.1)$$

где  $Z$  — некоторая функция  $\mathcal{A}$ ,  $t$ ,  $z$ , и поставим задачу нахождения решения этого уравнения, принимающего заданные значения  $\mathcal{A}_0(s)$  на некоторой кривой  $\Gamma$  на плоскости

$$\mathcal{A}(t, z)|_{\Gamma} = \mathcal{A}_0(s), \quad (2.1.5.2)$$

где  $s$  — длина дуги на кривой  $\Gamma$ , отсчитываемая от некоторой точки  $O$  (рис. 2.1.3).

Рис. 2.1.3. Характеристика одномерных волн.

Для того чтобы определить значения функции  $\mathcal{A}(t, z)$  вне кривой  $\Gamma$ , необходимо найти предварительно производную  $\partial \mathcal{A} / \partial n$  от  $\mathcal{A}$  по нормали  $\mathbf{n}$  к этой кривой. Выразим для этого величины  $\partial \mathcal{A} / \partial t$  и  $\partial \mathcal{A} / \partial z$  на кривой  $\Gamma$  через  $\partial \mathcal{A} / \partial n$  и производную  $\partial \mathcal{A} / \partial s$  от  $\mathcal{A}$  вдоль касательной [15]. Обозначая через  $v_{\Gamma}$  тангенс угла наклона касательной к кривой  $\Gamma$  по отношению к оси  $t$

$$v_{\Gamma} = \left. \frac{dz}{dt} \right|_{\Gamma},$$

имеем

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{v_{\Gamma}^2 + 1}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} - \frac{v_{\Gamma}}{\sqrt{v_{\Gamma}^2 + 1}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial n}, \quad \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = \frac{v_{\Gamma}}{\sqrt{v_{\Gamma}^2 + 1}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s} + \frac{1}{\sqrt{v_{\Gamma}^2 + 1}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial n}.$$

Подставляя эти выражения в (2.1.5.1), получим

$$(v_{\Gamma} - Z) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial n} = (1 + Z v_{\Gamma}) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s}. \quad (2.1.5.3)$$

Так как  $\partial \mathcal{A} / \partial s$  известно, то это уравнение позволяет определить  $\partial \mathcal{A} / \partial n$ , если  $v_{\Gamma} \neq Z$ . В данном случае, следовательно, задача Коши имеет решение и притом единственное. Если же  $v_{\Gamma} = Z$ , т. е.

$$\frac{dz}{dt} = Z(\mathcal{A}, t, z), \quad (2.1.5.4)$$

то уравнение (2.1.5.3) не позволяет найти  $\partial \mathcal{Q}/\partial n$ . В этом случае задача Коши либо вовсе не имеет решения (если  $\partial \mathcal{Q}/\partial s \neq 0$ ), либо имеет бесчисленное множество решений (если  $\partial \mathcal{Q}/\partial s = 0$ ).

Уравнение (2.1.5.4) определяет некоторое семейство кривых, называемых *характеристическими кривыми* или *характеристиками* дифференциального уравнения (2.1.5.1).

Таким образом, задание произвольных значений  $\mathcal{Q}_0(t, z)$  искомой функции  $\mathcal{Q}(t, z)$  на любой кривой, не являющейся характеристикой, позволяет однозначно найти решения уравнения (2.1.5.1) вне этой кривой. Напротив, задание значений  $\mathcal{Q}_0(t, z)$  на характеристике не определяет решения (2.1.5.1) вне характеристики. Более того, значения  $\mathcal{Q}_0(t, z)$  на характеристике нельзя задавать произвольно; они должны удовлетворять дополнительному условию

$$\partial \mathcal{Q}/\partial s = 0.$$

Можно сказать, что характеристики являются линиями раздела между различными типами решений. В частности, если при определенном значении  $t = t_0$  функция  $\mathcal{Q}(t, z)$  отлична от нуля только на некотором отрезке  $a \leq z \leq b$  оси  $z$  (мы будем говорить в этом случае, что в момент времени  $t = t_0$  возмущение имеет место на отрезке  $(a, b)$ ), то при  $t > t_0$  функция  $\mathcal{Q}(t, z)$ , т. е. возмущение, будет отлична от нуля в области переменных  $t, z$ , ограниченной прямой  $t = t_0$  и двумя характеристиками, проходящими через точки  $A$  и  $B$  (эта область, заштрихованная на рис. 2.1.4, называется *областью влияния*).

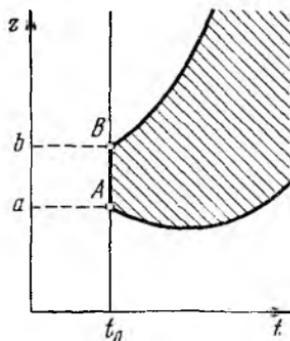


Рис. 2.1.4. Области влияния.

Перейдем теперь к рассмотрению системы магнитогидродинамических уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} + \hat{Z} \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z} = 0, \quad (2.1.5.5)$$

где  $\mathcal{Q}$  — семимерный вектор в случае одномерных возмущений (зависящих от одной пространственной координаты  $z$ ).

Считая снова, что вектор состояния  $\mathcal{Q}$  задан на кривой  $\Gamma$  и переходя к производным от  $\mathcal{Q}$  по касательной к кривой  $\Gamma$  и по нормали к ней, получим взамен (2.1.5.3) следующую систему уравнений для определения  $\partial \mathcal{Q}/\partial n$ :

$$(\hat{Z} - v_{\Gamma} \hat{l}) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial n} = -(v_{\Gamma} \hat{Z} + \hat{l}) \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial s}. \quad (2.1.5.6)$$

Для того чтобы она имела однозначное решение, необходимо и достаточно, чтобы детерминант системы

$$\Delta \equiv \det(\hat{Z} - v_{\Gamma} \hat{I})$$

был отличен от нуля. Если же детерминант  $\Delta$  равен нулю,

$$\det(\hat{Z} - v_{\Gamma} \hat{I}) = 0, \quad (2.1.5.7)$$

то система (2.1.5.6) либо вовсе не имеет решений, либо имеет их бесчисленное множество. В первом случае задача Коши не имеет решения, во втором же случае должны выполняться определенные соотношения между значениями  $\mathcal{Q}$  на кривой  $\Gamma$ , чтобы решения существовали.

Так как левая часть уравнения (2.1.5.7) представляет собой многочлен седьмой степени относительно  $v_{\Gamma}$ , то это уравнение определяет в каждой точке плоскости  $(t, z)$  семь значений, которые мы будем обозначать через  $v^{(j)}(t, z)$ ,  $j=1, 2, \dots, 7$  (все они вещественны). Поэтому мы получим семь обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dz}{dt} = v^{(j)}(t, z),$$

определяющих семь семейств кривых, причем задание на них  $\mathcal{Q}$  не определяет  $\mathcal{Q}$  вне этих кривых. Эти кривые называются *характеристиками*.

Для магнитогидродинамических уравнений матрица  $\hat{Z}$  не зависит явно от  $t$  и  $z$ , а зависит только от  $\mathcal{Q} \equiv \mathcal{Q}(t, z)$ . Поэтому величины  $v^{(j)}$  также не зависят явно от  $t$  и  $z$ , а являются функциями только  $\mathcal{Q}$ .

Легко установить физический смысл величин  $v^{(j)}$ . Так как уравнение (2.1.5.7) совпадает с уравнением (2.1.1.8) для определения фазовых скоростей магнитогидродинамических волн, то величины  $v^{(j)}$  представляют собой фазовые скорости магнитогидродинамических волн малой амплитуды, если исходное состояние магнитогидродинамической среды описывается вектором состояния  $\mathcal{Q}$ .

Существует семь типов магнитогидродинамических волн малой амплитуды, и поэтому через каждую точку плоскости  $(t, z)$  проходит семь характеристик, тангенсы углов наклона которых к оси  $t$  равны соответствующим фазовым скоростям волн малой амплитуды.

Вдоль характеристики компоненты вектора магнитогидродинамического состояния  $\mathcal{Q}$  могут изменяться, поэтому могут меняться и тангенсы угла наклона характеристик, т. е. последние представляют собой, вообще говоря, сложные кривые.

Используя понятие характеристики, можно придать уравнениям магнитной гидродинамики (2.1.5.5) более простой вид [16, 17]. Введем для этого производную вдоль  $j$ -й характеристики:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)_j \equiv \frac{\partial}{\partial t} + v^{(j)} \frac{\partial}{\partial z}, \quad j = 1, 2, \dots, 7.$$

Тогда уравнения магнитной гидродинамики (2.1.5.5) могут быть представлены в виде

$$A^{(j)+} \left(\frac{d\mathcal{Q}_j}{dt}\right)_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7, \quad (2.1.5.8)$$

где  $A^{(j)+}$  —  $j$ -й левый собственный вектор матрицы  $\hat{Z}$ . Чтобы убедиться в справедливости уравнений (2.1.5.8), умножим слева уравнение (2.1.5.5) на  $A^{(j)+}$ . Так как  $A^{(j)+}\hat{Z} = v^{(j)}A^{(j)+}$ , то мы и приходим к уравнению (2.1.5.8).

## § 2.2. Простые волны в магнитной гидродинамике

**2.2.1. Связь простых волн с волнами малой амплитуды.** Выше мы изучали магнитогидродинамические волны малой амплитуды. Переходя теперь к изучению магнитогидродинамических волн большой амплитуды, начнем с исследования так называемых *простых волн*, т. е. таких решений уравнений магнитной гидродинамики, где все компоненты вектора состояния  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_7$  являются функциями одной из них, например  $\mathcal{Q}_1$ , которая в свою очередь зависит от  $t$  и  $z$  \*).

Для нахождения простых волн нет необходимости решать нелинейную задачу, а достаточно только знать все виды плоских волн в линейном приближении. В самом деле, в случае простых волн получаем соотношения

$$\mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}_j(\mathcal{Q}_1), \quad \mathcal{Q}_1 = \mathcal{Q}_1(t, z).$$

Их подстановка в (2.1.5.5) дает

$$\left(\hat{I} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial t} + \hat{Z} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial z}\right) \frac{d\mathcal{Q}_1}{d\mathcal{Q}_1} = 0. \quad (2.2.1.1)$$

Эти уравнения представляют собой систему семи однородных алгебраических уравнений относительно величин  $d\mathcal{Q}_j/d\mathcal{Q}_1$ , не равных одновременно нулю. Поэтому определитель системы (2.2.1.1) должен равняться нулю

$$\det \left( \hat{I} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial t} + \hat{Z} \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial z} \right) = 0.$$

\*) Простые волны в случае, когда число независимых переменных больше двух, исследованы в [31 32].

Обозначим через  $v^{(j)}(\mathcal{Q})$  ( $j = 1, 2, \dots, 7$ ) корни уравнения

$$\det(\hat{Z}(\mathcal{Q}) - v\hat{I}) = 0 \quad (2.2.1.2)$$

(все они в силу гиперболического характера системы магнито-гидродинамических уравнений вещественны); тогда функция  $\mathcal{Q}_1(t, z)$  будет удовлетворять одному из уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial t} + v^{(j)}(\mathcal{Q}) \frac{\partial \mathcal{Q}_1}{\partial z} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, 7. \quad (2.2.1.3)$$

Итак, существует семь типов простых волн, соответствующих различным значениям  $v^{(j)}(\mathcal{Q})$ , которые представляют собой, очевидно, скорость «переноса» данных величин вектора магнито-гидродинамического состояния.

Уравнение (2.2.1.2) совпадает с уравнением (2.1.1.8), определяющим фазовые скорости магнито-гидродинамических волн малой амплитуды. Поэтому можно утверждать, что величины  $v^{(j)}(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots)$  совпадают с фазовыми скоростями магнито-гидродинамических волн малой амплитуды, если исходным является состояние с заданными значениями  $\mathcal{Q}_j$  вектора этого состояния (они как бы замораживаются).

Подставляя (2.2.1.3) в (2.2.1.1), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения  $d\mathcal{Q}_k/d\mathcal{Q}_1$

$$(\hat{Z} - v\hat{I}) \frac{d\mathcal{Q}_k}{d\mathcal{Q}_1} = 0,$$

откуда

$$\frac{d\mathcal{Q}_j}{d\mathcal{Q}_1} = \mathfrak{B}_j(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_7), \quad (2.2.1.4)$$

где  $\mathfrak{B}_j$  — некоторые функции от  $\mathcal{Q}_j$ . Существенно здесь то, что для нахождения этих функций не нужно решать нелинейную магнито-гидродинамическую задачу, а достаточно воспользоваться решениями системы магнито-гидродинамических уравнений в линейном приближении. Действительно, рассматривая точное соотношение (2.2.1.4) в линейном приближении

$$\frac{d\tilde{\mathcal{Q}}_j}{d\mathcal{Q}_1} = \mathfrak{B}_j(\mathcal{Q}_{01}, \mathcal{Q}_{02}, \dots, \mathcal{Q}_{07}), \quad \mathcal{Q}_j = \mathcal{Q}_{0j} + \tilde{\mathcal{Q}}_j,$$

получим

$$\frac{\tilde{\mathcal{Q}}_j}{\mathcal{Q}_1} = \mathfrak{B}_j(\mathcal{Q}_{01}, \mathcal{Q}_{02}, \dots, \mathcal{Q}_{07}). \quad (2.2.1.5)$$

Таким образом, отношения между амплитудами  $\tilde{\mathcal{Q}}_j$  в линейном приближении непосредственно дают функции  $\mathfrak{B}_j(\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_7)$ .

Из формул (2.2.1.5), (2.1.1.7) следует, что дифференциальные уравнения для простых волн можно представить в виде

$$\frac{d\mathcal{Q}_1}{A_1(\mathcal{Q})} = \frac{d\mathcal{Q}_2}{A_2(\mathcal{Q})} = \dots = \frac{d\mathcal{Q}_7}{A_7(\mathcal{Q})}, \quad (2.2.1.6)$$

где  $A_j$  — компоненты правого собственного вектора (они определяются формулами (2.1.1.11)).

Найдя из системы уравнений (2.2.1.6) величины  $\mathcal{Q}_j$  ( $\mathcal{Q}_1$ ), можно представить решение (2.2.1.3) в виде

$$z - v^{(j)}(\mathcal{Q})t = \mathfrak{F}(\mathcal{Q}_1), \quad (2.2.1.7)$$

где  $\mathfrak{F}$  — произвольная функция, определяемая из начальных условий.

В частности, когда  $\mathfrak{F}(\mathcal{Q}_1) = 0$ , получим

$$v^{(j)}(\mathcal{Q}) = z/t. \quad (2.2.1.8)$$

В этом случае говорят, что простая волна является *автомодельной* \*). Автомодельные волны возникают во всех тех случаях, когда в начальных и граничных условиях отсутствуют параметры, имеющие размерность длины или времени.

**2.2.2. Типы простых волн.** Перейдем теперь к нахождению различных типов простых волн [33]. Начнем с альвеновских волн. Так как в нелинейной волне нельзя разделить магнитное поле на два слагаемых — невозмущенное поле и возмущение, то мы не можем непосредственно воспользоваться формулами (2.1.1.11), выведенными в предположении, что невозмущенное магнитное поле лежит в плоскости  $xz$ . При произвольной ориентации магнитного поля первая из формул (2.1.1.11) имеет вид

$$A^{(1,2)} = \left( 0, 0, -\frac{B_y}{B_x}, 1, 0, \frac{\varepsilon B_y}{B_x} \sqrt{4\pi\rho} \operatorname{sgn} B_x, -\varepsilon \sqrt{4\pi\rho} \operatorname{sgn} B_x \right),$$

( $\varepsilon = \pm 1$ , в зависимости от того, распространяется ли волна в положительном или в отрицательном направлении оси  $z$ ).

Используя (2.2.1.6) и выбирая в качестве  $\mathcal{Q}_1$  величину  $u_y$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{du_y} &= -\frac{B_y}{B_x}, & \frac{dB_x}{du_y} &= \frac{\varepsilon B_y}{B_x} \sqrt{4\pi\rho} \operatorname{sgn} B_x, \\ \frac{dB_y}{du_y} &= -\varepsilon \sqrt{4\pi\rho} \operatorname{sgn} B_x, & d\rho &= ds = du_z = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$B_x^2 + B_y^2 = \text{const}, \quad u_{x,y} = -\varepsilon \frac{B_{x,y}}{\sqrt{4\pi\rho}} \operatorname{sgn} B_x + \text{const}. \quad (2.2.2.1)$$

\*) Более общие классы автомодельных магнитогидродинамических волн исследованы в работах [18—30].

Таким образом, в альвеновской простой волне величины  $\rho$ ,  $s$ ,  $u_z$  и  $|\mathbf{V}|$  не изменяются.

Формула (2.2.1.7) принимает в рассматриваемом случае следующий вид:

$$z - \left( u_x + \frac{\varepsilon |B_x|}{\sqrt{4\pi\rho}} \right) t = \mathfrak{F}(u_y). \quad (2.2.2.2)$$

Так как в альвеновской простой волне величины  $u_x$ ,  $B_x$  и  $\rho$  сохраняют постоянное значение, то, согласно (2.2.2.2), такая волна распространяется без искажения формы.

Перейдем теперь к нахождению *простых магнитозвуковых волн*. При произвольной ориентации ориентации векторов  $\mathbf{V}$  и  $\mathbf{u}$  вторая и третья формулы (2.1.1.11) имеют вид (после деления на  $\rho$ )

$$A^{(3,4,5,6)} = \left( 1, 0, \frac{\varepsilon B_x B_z v_{\pm}}{4\pi\rho^2 (v_{Az}^2 - v_{\pm}^2)}, \frac{\varepsilon B_y B_z v_{\pm}}{4\pi\rho^2 (v_{Az}^2 - v_{\pm}^2)}, \frac{\varepsilon v_{\pm}}{\rho}, \frac{B_x v_{\pm}^2}{\rho (v_{\pm}^2 - v_{Az}^2)}, \frac{B_y v_{\pm}^2}{\rho (v_{\pm}^2 - v_{Az}^2)} \right),$$

где  $v_A = \mathbf{V}/\sqrt{4\pi\rho}$ . Верхнему знаку в индексе у величины  $v_{\pm}$  соответствует быстрая магнитозвуковая волна, нижнему — медленная волна. Из (2.2.1.6) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \frac{ds}{d\rho} &= 0, & \frac{du_x}{d\rho} &= \frac{\varepsilon B_x B_z v_{\pm}}{4\pi\rho^2 (v_{Az}^2 - v_{\pm}^2)}, & \frac{du_y}{d\rho} &= \frac{\varepsilon B_y B_z v_{\pm}}{4\pi\rho^2 (v_{Az}^2 - v_{\pm}^2)}, \\ \frac{du_z}{d\rho} &= \varepsilon \frac{v_{\pm}}{\rho}, & \frac{dB_x}{d\rho} &= \frac{B_x v_{\pm}^2}{\rho (v_{\pm}^2 - v_{Az}^2)}, & \frac{dB_y}{d\rho} &= \frac{B_y v_{\pm}^2}{\rho (v_{\pm}^2 - v_{Az}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2.2.3)$$

Из последних четырех уравнений (2.2.2.3) находим

$$B_y/B_x = \text{const}, \quad u_y - B_y u_x/B_x = \text{const}. \quad (2.2.2.3')$$

Эти формулы означают, что простые магнитозвуковые волны плоскополяризованы, т. е. их вектор  $\mathbf{V}$  лежит в определенной плоскости (плоскости  $xz$ ), причем можно выбрать систему координат таким образом, чтобы вектор  $\mathbf{u}$  лежал в той же плоскости, т. е.  $u_y = 0$ ,  $B_y = 0$ .

Формула (2.2.1.7) принимает в случае магнитозвуковых волн следующий вид:

$$z - (u_x + \varepsilon v_{\pm}) t = \mathfrak{F}(\rho). \quad (2.2.2.4)$$

Отсюда вытекает, что при  $t=0$  на участках сжатия, на которых  $d\rho/dz < 0$  (волна распространяется в положительном направлении оси  $z$ ), выполняется условие  $\mathfrak{F}'(\rho) < 0$ , а на участках разрежения ( $d\rho/dz > 0$ ) — условие  $\mathfrak{F}'(\rho) > 0$ .

Пользуясь соотношением

$$v_{\pm}^4 - (v_A^2 + v_s^2)v_{\pm}^2 + v_s^2v_{Az}^2 = 0 \quad (2.2.2.5)$$

и формулами (2.2.2.3), можно представить скорость магнитозвуковых волн  $v_{\pm}$  в виде, аналогичном ее выражению в обычной гидродинамике [3]

$$v_{\pm} = \sqrt{dp_B/d\rho}, \quad (2.2.2.6)$$

где  $p_B = p + B^2/8\pi$ .

Рассмотрим, наконец, *энтропийную простую волну*. Из уравнений (2.1.1.11), (2.2.1.6) следует, что в ней величины  $u$ ,  $B$  и  $p$  остаются постоянными, а энтропия является произвольной функцией от  $z - \epsilon u t$ .

Остановимся теперь на некоторых качественных выводах, непосредственно вытекающих из дифференциальных уравнений для простых магнитозвуковых волн. Прежде всего отметим, что давление меняется в том же направлении, что и плотность; поперечное магнитное поле  $|B_x|$  в быстрой магнитозвуковой волне изменяется в том же направлении, что и плотность, а в медленной — в обратном направлении.

**2.2.3. Искажение профиля простой волны.** В обычной гидродинамике показывается [34], что в простой волне точки, соответствующие большей плотности, движутся быстрее, чем точки, соответствующие меньшей плотности, если выполняется условие

$$\left(\frac{\partial^2 (1/\rho)}{\partial p^2}\right)_s > 0, \quad (2.2.3.1)$$

т. е. если удельный объем  $1/\rho$  является вогнутой функцией давления при постоянной энтропии. Заметим, что для идеального газа  $p/\rho^\gamma = \text{const}$  и

$$\left(\frac{\partial^2 (1/\rho)}{\partial p^2}\right)_s = \frac{1 + \gamma}{\gamma^2 p^2 \rho};$$

поэтому условие (2.2.3.1) выполняется.

Мы покажем теперь, что аналогичная ситуация имеет место также для простых магнитозвуковых волн в магнитной гидродинамике [35, 36]. Для двух других типов простых магнитогидродинамических волн — альвеновских и энтропийных — плотность постоянна, и они распространяются без изменения своей формы.

Положим для определенности, что волна движется в положительном направлении оси  $z$ . Тогда из формул (2.2.2.3) следует, что

$$\frac{dv_{ph}}{d\rho} = \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho}(\rho v_{\pm}), \quad (2.2.3.2)$$

где  $v_{ph} = u_z + v_{\pm}$ . Для вычисления производной  $d(\rho v_{\pm})/d\rho$  продифференцируем по  $\rho$  уравнение (2.2.2.5), умноженное предварительно на  $\rho^4$ ; имея в виду, что  $\rho v_{Az}^2 = \text{const}$ , получим

$$4v_{\pm} \left( v_{\pm}^2 - \frac{v_A^2 + v_s^2}{2} \right) \frac{d(\rho v_{\pm})}{d\rho} = 2v_s \frac{d(\rho v_s)}{d\rho} (v_{\pm}^2 - v_{Az}^2) + (v_{\pm}^2 v_A^2 - v_s^2 v_{Az}^2) + \frac{v_{\pm}^2}{4\pi} \frac{dB_x^2}{d\rho}.$$

Используя далее уравнения (2.2.2.3) и соотношение [34]

$$\frac{d(\rho v_s)}{d\rho} = \frac{v_s^5}{2} \left( \frac{\partial^2 (1/\rho)}{\partial \rho^2} \right)_s,$$

найдем [35]

$$4v_{\pm} \frac{d(\rho v_{\pm})}{d\rho} = \rho^3 v_s^6 \left( \frac{\partial^2 (1/\rho)}{\partial \rho^2} \right)_s \frac{v_{\pm}^2 - v_{Az}^2}{v_{\pm}^2 - 1/2 (v_A^2 + v_s^2)} + \frac{v_{\pm}^2 v_A^2 - v_s^2 v_{Az}^2}{v_{\pm}^2 - 1/2 (v_A^2 + v_s^2)} + \frac{v_{\pm}^2 B_x^2}{2\pi \rho (v_{\pm}^2 - v_{Az}^2) [v_{\pm}^2 - 1/2 (v_A^2 + v_s^2)]}. \quad (2.2.3.3)$$

Здесь все слагаемые в правой части положительны как для быстрой, так и для медленной магнитозвуковой волны. Это вытекает из условия (2.2.3.1) и из того, что в быстрой магнитозвуковой волне выполняются неравенства

$$v_+^2 \geq v_{Az}^2, \quad v_+^2 > 1/2 (v_A^2 + v_s^2), \quad v_+^2 > v_s^2 v_{Az}^2 / v_A^2, \quad (2.2.3.4)$$

а в медленной — неравенства

$$v_-^2 \leq v_{Az}^2, \quad v_-^2 < 1/2 (v_A^2 + v_s^2), \quad v_-^2 < v_s^2 v_{Az}^2 / v_A^2. \quad (2.2.3.5)$$

Поэтому  $d(\rho v_{\pm})/d\rho > 0$ , и, следовательно,

$$\frac{dv_{ph}}{d\rho} > 0, \quad v_{ph} = u_z + v_{\pm}. \quad (2.2.3.6)$$

Неравенство (2.2.3.6) означает, что при распространении простой волны точки, соответствующие большей плотности, движутся быстрее точек, соответствующих меньшей плотности [6].

Поэтому при распространении простой волны ее профиль искажается. Те участки волны, на которых  $d\rho/dz > 0$  (это участки разрежения, так как волна движется в положительном направлении оси  $z$ ) будут с течением времени растягиваться, а участки, на которых  $d\rho/dz < 0$ , будут сжиматься (рис. 2.2.1, а) [36—38]\*. Та-

\* В случае, когда магнитное поле перпендикулярно к направлению распространения волны, аналогичное исследование было проделано в работах [39—41]. Этот же результат был получен и для плазмы с анизотропным давлением [42—45, 56], а также для плазмы без столкновений при  $\beta \ll B^2/8\pi$  [46, 47].

кое искажение профиля волны приводит, как мы сейчас покажем, к образованию разрывов.

Для более подробного исследования этого вопроса воспользуемся уравнением (2.2.1.7) для  $\mathcal{Q}_1 = \rho$  при  $\varepsilon = +1$ . Дифференцируя его по  $z$  при постоянном  $t$ , получим

$$\left[ t \frac{dv_{ph}(\rho)}{d\rho} + \frac{d\mathcal{F}(\rho)}{d\rho} \right] \frac{d\rho}{dz} = 1. \quad (2.2.3.7)$$

Из соотношений (2.2.2.3) с учетом уравнения непрерывности следует

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{\rho}{v_{\pm}} \frac{du_z}{dz} = -\frac{1}{v_{\pm}} \frac{d\rho}{dt}.$$

Поэтому

$$-\frac{t \frac{dv_{ph}(\rho)/d\rho + d\mathcal{F}(\rho)/d\rho}{v_{\pm}(\rho)} \frac{d\rho}{dt} = 1. \quad (2.2.3.8)$$

Отсюда в свою очередь вытекает, что при выполнении условия  $t \frac{dv_{ph}(\rho)/d\rho + d\mathcal{F}(\rho)/d\rho > 0$  производная  $d\rho/dt$  отрицательна, т. е. имеет место разрежение; при  $t \frac{dv_{ph}(\rho)/d\rho + d\mathcal{F}(\rho)/d\rho < 0$  происходит сжатие.

В силу неравенства (2.2.3.6) в тех участках среды, где в начальный момент времени имело место разрежение ( $d\mathcal{F}/d\rho > 0$ ), оно сохранится и во все последующие моменты времени.

На участках, где  $d\mathcal{F}/d\rho < 0$ , происходит сжатие до тех пор, пока выполняется неравенство  $t \frac{dv_{ph}(\rho)/d\rho + d\mathcal{F}(\rho)/d\rho < 0$ . В момент, когда выражение  $t \frac{dv_{ph}(\rho)/d\rho + d\mathcal{F}(\rho)/d\rho$  обращается в нуль, производная  $d\rho/dz$ , согласно (2.2.3.7), обращается в бесконечность. Соответствующее значение  $t$  равно

$$t = -\frac{d\mathcal{F}/d\rho}{dv_{ph}/d\rho}. \quad (2.2.3.9)$$

Различным точкам  $z$ , т. е. различным значениям  $\rho$  соответствуют, согласно (2.2.3.9), различные моменты обращения  $d\rho/dz$  в бесконечность. Впервые  $d\rho/dz$  обращается в бесконечность при

$$t = \min \left( -\frac{d\mathcal{F}/d\rho}{dv_{ph}/d\rho} \right). \quad (2.2.3.9')$$

Из условия минимума

$$\frac{d}{d\rho} \left( \frac{d\mathcal{F}/d\rho}{dv_{ph}/d\rho} \right) = 0$$

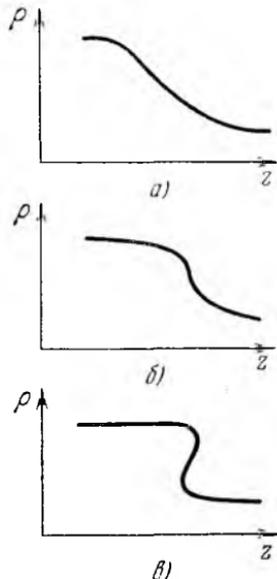


Рис. 2.2.1. Искажение профиля простой магнитозвуковой волны.

а) Начальный профиль волны; б) увеличение крутизны профиля; в) неуществвительный профиль волны, в котором плотность является многозначной функцией координаты.

следует, что в этой точке выполняется равенство

$$\left| \begin{array}{cc} dv_{\text{ph}}/d\rho & d\mathfrak{F}/d\rho \\ d^2v_{\text{ph}}/d\rho^2 & d^2\mathfrak{F}/d\rho^2 \end{array} \right| = 0. \quad (2.2.3.10)$$

Вместе с тем, дифференцируя выражение

$$z - v_{\text{ph}}(\rho)t = \mathfrak{F}(\rho)$$

по  $\rho$ , находим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_t - \frac{dv_{\text{ph}}}{d\rho}t = \frac{d\mathfrak{F}}{d\rho}, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\right)_t - \frac{d^2v_{\text{ph}}}{d\rho^2}t = \frac{d^2\mathfrak{F}}{d\rho^2}. \quad (2.2.3.11)$$

Используя соотношения (2.2.3.9), (2.2.3.10), получим

$$\left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)_t = 0, \quad \left(\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2}\right)_t = 0. \quad (2.2.3.12)$$

Эти формулы показывают, что в тот момент, когда  $\partial\rho/\partial z$  обращается в бесконечность, на профиле простой волны появляется точка перегиба с вертикальной касательной (см. рис. 2.2.1, б). Так как точки, соответствующие большей плотности, двигаются быстрее, то в дальнейшем плотность должна была бы стать многозначной функцией координат (см. рис. 2.2.1, в). Но это невозможно, и, следовательно, в момент  $t$ , определяемый формулой (2.2.3.9'), образуется разрыв, т. е. ударная волна.

Автомодельным волнам, как уже указывалось, соответствует обращение в нуль функции  $\mathfrak{F}(\rho)$ . При этом из соотношения (2.2.1.8) следует, что в фиксированной точке  $z$  с течением времени  $t$  скорость распространения автомодельной волны уменьшается. Так как скорость распространения альвеновской и энтропийной простых волн постоянна, то эти волны не могут быть автомодельными.

Из выражений (2.2.3.6), (2.2.3.7) следует, что автомодельные магнитозвуковые волны являются волнами разрежения:

$$\partial\rho/\partial z > 0, \quad d\rho/dt < 0.$$

Заметим, что, интегрируя уравнение (2.2.3.8), можно вычислить время, в течение которого магнитогидродинамическая среда переходит от плотности  $\rho_0$  к плотности  $\rho$ , а именно

$$t = \frac{1}{\rho v_{\pm}(\rho)} \int_{\rho}^{\rho_0} \frac{d\mathfrak{F}(\rho)}{d\rho} \rho d\rho. \quad (2.2.3.13)$$

**2.2.4. Интегрирование уравнений простых волн.** Если магнитогидродинамическая среда описывается уравнением состояния идеального газа  $p/\rho^\gamma = \text{const}$ , то, как показал Фридрихс (см. [38]), интегрирование уравнений простых магнитозвуковых волн (2.2.2.3)

сводится к квадратурам. В самом деле, введем безразмерные переменные

$$p_* \equiv v_s^2/v_{Az}^2 = 4\pi\gamma\rho/B_z^2, \quad q_{\pm} \equiv v_{\pm}^2/v_s^2;$$

так как  $B_x = \text{const}$ , то

$$dp_* = \frac{4\pi\gamma}{B_z^2} dp. \quad (2.2.4.1)$$

Выберем далее систему координат, в которой  $u_y \equiv 0$ ,  $B_y \equiv 0$ . Тогда уравнение

$$v_{\pm}^4 - (v_A^2 + v_s^2)v_{\pm}^2 + v_s^2v_{Az}^2 = 0$$

можно представить в виде

$$v_{Ax}v_{\pm}^2 = (v_{\pm}^2 - v_s^2)(v_{\pm}^2 - v_{Az}^2), \quad (2.2.4.2)$$

или в переменных  $p_*$  и  $q_{\pm}$

$$\frac{B_x^2}{B_z^2} = \frac{(q_{\pm} - 1)(p_*q_{\pm} - 1)}{q_{\pm}}. \quad (2.2.4.3)$$

Пользуясь формулой (2.2.4.2), преобразуем предпоследнее уравнение (2.2.2.3) к виду

$$\frac{dB_x}{dp} = \frac{4\pi(v_{\pm}^2 - v_s^2)}{B_x},$$

откуда с помощью (2.2.4.1) находим

$$\frac{dB_x^2}{dp_*} = \frac{2}{\gamma} B_x^2 (q_{\pm} - 1).$$

Используя это выражение, получим [3] из (2.2.4.3)

$$\frac{dp_*}{dq_{\pm}} = \theta_f \frac{p_*q_{\pm} - 1}{q_{\pm}^2(q_{\pm} - 1)}, \quad (2.2.4.4)$$

где

$$\theta_f = \gamma/(2 - \gamma).$$

Так как величина  $\gamma$  заключена в интервале  $1 < \gamma \leq 5/3$  [48], то

$$1 < \theta_f \leq 5.$$

Линейное уравнение (2.2.4.4) легко интегрируется [1], и мы находим

$$\frac{p_*}{(q_{\pm} - 1)^{\theta_f}} + \theta_f \int \frac{dq_{\pm}}{q_{\pm}^2(q_{\pm} - 1)^{1+\theta_f}} = \text{const}. \quad (2.2.4.5)$$

Определив отсюда  $q_{\pm}$  как функцию величины  $p_*$  и найдя далее составляющую магнитного поля  $B_x$  с помощью (2.2.4.3), можно

найти компоненты скорости из уравнений (2.2.2.3), имеющих в безразмерных переменных  $p_*$  и  $q_{\pm}$  вид

$$\frac{du_x}{dp_*} = \varepsilon \frac{v_s \sqrt{q_{\pm}}}{\gamma p_*}, \quad \frac{du_x}{dp_*} = \mp \frac{\varepsilon v_s}{\gamma p_*} \sqrt{\frac{q_{\pm} - 1}{p_* q_{\pm} - 1}} \operatorname{sgn}(B_x B_z). \quad (2.2.4.6)$$

Таким образом, задача интегрирования системы обыкновенных дифференциальных уравнений, описывающих простые магнитозвуковые волны, сводится к квадратурам.

Выясним теперь, как изменяются магнитогидродинамические величины в простых магнитозвуковых волнах. Из определения величин  $p_*$  и  $q_{\pm}$  следует, что в быстрой магнитозвуковой волне выполняются неравенства [49]

$$p_* q_+ \geq 1, \quad q_+ > 1, \quad p_* q_+^2 > 1, \quad (2.2.4.7)$$

а в медленной волне — неравенства

$$p_* q_- \leq 1, \quad q_- < 1, \quad p_* q_-^2 < 1. \quad (2.2.4.8)$$

Из неравенств (2.2.4.7), (2.2.4.8) и уравнения (2.2.4.4) следует, что  $dp_*/dq_{\pm} > 0$ . Так как величина  $p_*$ , являющаяся безразмерным давлением, изменяется, согласно (2.2.4.1), так же, как и плотность, то и  $q_{\pm}$  изменяется таким образом. В частности, в автомоделных волнах величины  $p_*$  и  $q_{\pm}$  убывают (как в быстрой, так и в медленной магнитозвуковых волнах).

Если первое из неравенств в формулах (2.2.4.7), (2.2.4.8) превращается в равенство, т. е. если  $p_* q_{\pm} = 1$ , то, согласно (2.2.4.3), поперечное магнитное поле обращается в нуль. Так как в автомоделных волнах величины  $p_*$  и  $q_{\pm}$  убывают, то написанное равенство может выполняться лишь позади быстрой или впереди медленной волны. Соответствующие волны называются *особыми*\*).

При  $p_* = 1$  и  $q_{\pm} = 1$  дифференциальное уравнение (2.2.4.4) имеет особую точку. В окрестности этой точки уравнение интегральных кривых имеет вид [3, 49]

$$p_* = 1 - \frac{\gamma(q_{\pm} - 1)}{\gamma - 1} + C(q_{\pm} - 1)^{\beta f}, \quad (2.2.4.9)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. В особой точке все интегральные кривые имеют общую касательную с наклоном

$$\frac{dp_*}{dq_{\pm}} = - \frac{\gamma}{\gamma - 1}.$$

Таким образом, особая точка  $p_* = 1$ ,  $q_{\pm} = 1$  является узлом.

\* По английской терминологии быстрая и медленная особые волны называются switch-off and switch-on waves [1].

Общий вид интегральных кривых уравнения (2.2.4.4) изображен на рис. 2.2.2. Несуществующие участки интегральных кривых, на которых нарушаются условия (2.2.4.7), (2.2.4.8), изображены пунктирной линией. Стрелками отмечено направление изменения величин  $p_*$  и  $q_{\pm}$  в фиксированной точке пространства при распространении автомоделльной волны. Знаком плюс отмечены быстрые

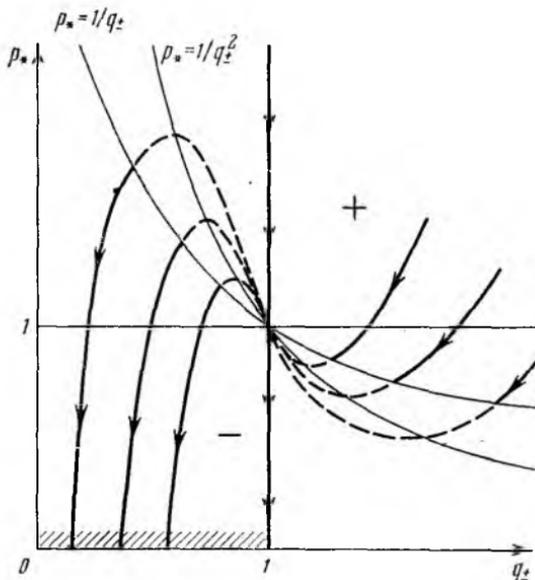


Рис. 2.2.2. Изменение величин  $p_*$  и  $q_{\pm}$  в магнитозвуковых автомоделльных волнах.

Точка  $(q_{\pm}, p_*)$  перемещается вдоль одной из интегральных кривых (жирные линии) в направлении, указанном стрелкой. Несуществующие участки интегральных кривых изображены пунктирными линиями. Область, отмеченная знаком плюс, соответствует быстрой автомоделльной волне, отмеченная знаком минус, — медленной магнитозвуковой волне. Отрезок  $(0, 1)$  оси абсцисс, соответствующий кавитации, снабжен штриховкой.

магнитозвуковые волны ( $q_{\pm} \geq 1$ ), знаком минус — медленные волны ( $q_{\pm} \leq 1$ ). Точки, расположенные позади быстрой и впереди медленной волн максимальной интенсивности, попадают на линию  $p_* = 1/q_{\pm}$ . Как видно из рис. 2.2.2, в этих точках  $p_* < 1$  в случае быстрой и  $p_* > 1$  в случае медленной волны.

На линии  $p_* = 0$  давление обращается в нуль — наступает кавитация. При этом волна имеет максимально возможную амплитуду, совместимую с данными начальными условиями. Из рис. 2.2.2 видно, что кавитация может иметь место лишь в медленной магнитозвуковой волне. В быстрой магнитозвуковой волне

кавитация невозможна, так как ее амплитуда ограничена условием  $p_* q_+ \geq 1$ .

Частными случаями быстрой и медленной магнитозвуковых волн являются *вырожденные* волны, в которых все время соблюдается равенство  $q_+ = 1$  (величина  $p_*$  в таких волнах убывает). Из формулы (2.2.4.3) следует, что поперечное магнитное поле в вырожденных волнах остается равным нулю. Вырожденные волны ничем не отличаются от простых волн в обычной гидродинамике (при отсутствии магнитного поля). В области  $p_* > 1$  такую волну следует причислять к быстрым, а в области  $p_* < 1$  — к медленным магнитозвуковым волнам.

В качестве примера [49] найдем условие кавитации в медленной автомодельной волне в том случае, когда альвееновская скорость  $v_{1A}$  впереди волны значительно меньше скорости звука  $v_{1s}$ . Согласно определению величины  $p_*$  это означает, что впереди волны выполняется условие  $p_{1*} \gg 1$ . При этом величина  $q_-$  равна  $1/p_{1*}$ . Вследствие уменьшения давления в автомодельной волне, неравенство  $p_{1*} \gg 1$  справедливо лишь впереди волны. Однако так как величина  $q_-$  убывает, неравенство  $q_- \ll 1$  будет справедливо во всей медленной волне. Из уравнения (2.2.4.4) при  $q_- \ll 1$  следует соотношение

$$p_* = \frac{1 + \theta_f}{q_{1-}} - \frac{\theta_f}{q_-} \quad (2.2.4.10)$$

(здесь и далее индекс 1 относится к области пространства, лежащей впереди волны). Из последнего выражения находим, что в точке, где наступает кавитация ( $p_{2*} = 0$ ), величина  $q_-$  равна

$$q_- = q_{2-} = 1/2 \gamma q_{1-}. \quad (2.2.4.11)$$

(здесь и далее индекс 2 относится к области пространства позади волны).

Пользуясь формулами (2.2.4.6) и выражая  $q_-$  через  $p_*$  с помощью соотношения (2.2.4.10), получим скачки компонент скорости ( $\Delta u_x \equiv u_{2x} - u_{1x}$ ,  $\Delta u_x \equiv u_{2x} - u_{1x}$ ) в медленной волне при наличии кавитации

$$\Delta u_x = \frac{\varepsilon |v_{1Ax}|}{\sqrt{2\gamma}} \int_0^1 \sigma^{-(\gamma+1)/2\gamma} \left(1 - \frac{\sigma}{\theta_f + 1}\right)^{-1/2} d\sigma, \quad (2.2.4.12)$$

$$\Delta u_x = -\frac{\varepsilon v_{1s}}{\gamma} \operatorname{sgn}(B_{1x} B_x) \int_0^1 \left(1 - \frac{\sigma}{\theta_f + 1}\right)^{1/2} (1 - \sigma)^{-1/2} \sigma^{-(\gamma+1)/2\gamma} d\sigma, \quad (2.2.4.13)$$

где  $\sigma = p_*/p_{1*}$ .

Разлагая подынтегральные выражения последних двух соотношений в степенные ряды, находим, что при  $\gamma = 5/3$

$$\frac{1}{\sqrt{2}\gamma} \int_0^1 \sigma^{-(\gamma+1)/2\gamma} \left(1 - \frac{\sigma}{\theta_j + 1}\right)^{-1/2} d\sigma = 2,78, \quad (2.2.4.14)$$

$$\frac{1}{\gamma} \int_0^1 \sigma^{-(\gamma+1)/2\gamma} \left(1 - \frac{\sigma}{\theta_j + 1}\right)^{1/2} (1 - \sigma)^{-1/2} d\sigma = 3,67. \quad (2.2.4.15)$$

**2.2.5. Инварианты Римана.** В обычной гидродинамике инвариантом Римана называется такая функция  $\mathfrak{R}$  от гидродинамических величин,  $\mathfrak{Q}_1, \mathfrak{Q}_2, \dots, \mathfrak{Q}_n$ , которая остается постоянной вдоль некоторой характеристики. Если пользоваться этим определением, то в магнитной гидродинамике инварианты Римана отсутствуют [17]\*). В самом деле, так как инвариант Римана постоянен вдоль характеристики, то

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + v_{ph}(\mathfrak{Q}_1, \dots, \mathfrak{Q}_n) \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial z} = 0, \quad (2.2.5.1)$$

где  $v_{ph}$  численно равно тангенсу угла наклона характеристики к оси  $t$ . Уравнение (2.2.5.1) должно являться следствием уравнений (2.1.1.2). Поэтому должна существовать такая вектор-функция  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ , для которой уравнение

$$\mu \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial t} + \mu Z \frac{\partial \mathfrak{Q}}{\partial z} = 0 \quad (2.2.5.2)$$

тождественно уравнению (2.2.5.1). Записав его в виде

$$\sum_j \mu_j \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathfrak{Q}_j} \frac{\partial \mathfrak{Q}_j}{\partial t} + \sum_j v_{ph} \mu_j \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathfrak{Q}_j} \frac{\partial \mathfrak{Q}_j}{\partial z} = 0 \quad (2.2.5.3)$$

и сравнивая последние два выражения, находим

$$\mu_j = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathfrak{Q}_j}, \quad (2.2.5.4)$$

$$\sum_j \mu_j Z_{jk} = v_{ph} \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \mathfrak{Q}_k} = v_{ph} \mu_k. \quad (2.2.5.5)$$

\*) Заметим, что при  $B_z = 0$  уравнения магнитной гидродинамики имеют такой же вид как и уравнения обычной гидродинамики [39], если вместо обычных давлений  $p$  и энергии единицы массы  $\epsilon_m$  ввести «полное», или эффективное, давление  $p_B = p + B^2/8\pi$  и «полную» энергию  $\epsilon_B = \epsilon_m + B^2/8\pi \rho$ . В этом случае существуют такие же инварианты Римана, как и в обычной гидродинамике [50—53]. Заметим также что инварианты Римана существуют для любой линейной системы уравнений в том числе и для линеаризованных уравнений магнитной гидродинамики [54].

Из соотношений (2.2.5.4) следуют  $1/2 n(n-1)$  уравнений

$$\frac{\partial \mu_j}{\partial \mathcal{A}_k} = \frac{\partial \mu_k}{\partial \mathcal{A}_j},$$

которым должны удовлетворять функции  $\mu_j$ . Система (2.2.5.5) содержит еще  $(n-1)$  независимых уравнений. Таким образом,  $n$  функций  $\mu_1, \dots, \mu_n$  должны удовлетворять  $(n-1) + 1/2 n(n-1) = 1/2 (n-1)(n+2)$  уравнениям, что при  $n > 2$ , вообще говоря, невозможно\*. Отсюда следует, что данное выше определение инвариантов Римана нельзя перенести в магнитную гидродинамику. Однако можно так видоизменить это определение [16], чтобы оно имело смысл и в магнитной гидродинамике. Мы назовем *инвариантом Римана* такую функцию от магнитогиродинамических величин  $\mathcal{R}(\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_n)$ , которая остается постоянной в простой волне. (В обычной гидродинамике эти два определения равносильны.)

Так как простые волны описываются системой  $n$  обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, то существует  $(n-1)$  интегралов этой системы, которые и являются инвариантами Римана. Каждой простой волне соответствует, таким образом,  $(n-1)$  инвариантов Римана.

Простой магнитозвуковой волне, согласно уравнениям (2.2.2.3'), (2.2.4.5), (2.2.4.6), соответствует шесть инвариантов Римана (мы здесь не пользуемся выбранной ранее системой координат, в которой  $u_y \equiv B_y \equiv 0$ ):

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \frac{p_*}{(q_{\pm} - 1)^{\theta_f}} + \theta_f \int \frac{dq_{\pm}}{q_{\pm}^2 (q_{\pm} - 1)^{\theta_f + 1}}, \\ \mathcal{R}_2 &= u_n - \frac{\varepsilon}{\gamma} \int \frac{v_s(p_*) \sqrt{q_{\pm}(p_*)}}{p_*} dp_*, \\ \mathcal{R}_3 &= u_x \pm \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{B_x}{B_t} \operatorname{sgn}(B_n B_x) \int \sqrt{\frac{q_{\pm}(p_*) - 1}{p_* q_{\pm}(p_*) - 1}} \frac{v_s(p_*)}{p_*} dp_*, \\ \mathcal{R}_4 &= u_y \pm \frac{\varepsilon}{\gamma} \frac{B_y}{B_t} \operatorname{sgn}(B_n B_y) \int \sqrt{\frac{q_{\pm}(p_*) - 1}{p_* q_{\pm}(p_*) - 1}} \frac{v_s(p_*)}{p_*} dp_*, \\ \mathcal{R}_5 &= \frac{p}{\rho^{\gamma}}, \quad \mathcal{R}_6 = \frac{B_y}{B_x}, \end{aligned} \right\} (2.2.5.6)$$

где индексы  $n$  и  $t$  относятся к компонентам векторов вдоль направления распространения волны и в перпендикулярном направлении.

\* Уравнения (2.2.5.4), (2.2.5.5) могли бы оказаться совместными в силу случайного вырождения. Легко показать что в случае магнитной гидродинамики такого вырождения нет, и уравнения (2.2.5.4), (2.2.5.5) не совместны.

Функция  $q_{\pm}(p_*)$  во втором, третьем и четвертом инвариантах Римана определяется с помощью первого инварианта Римана; функция  $v_s(p_*)$  — с помощью пятого инварианта Римана. Пятая формула (2.2.5.6) показывает, что одним из инвариантов Римана является энтропия.

При  $\gamma=5/3$  инвариант  $\mathcal{R}_1$  выражается через элементарные функции

$$\mathcal{R}_1 = \frac{p_* - 1}{(q_{\pm} - 1)^5} + \frac{5}{2(q_{\pm} - 1)^4} - \frac{5}{(q_{\pm} - 1)^3} + \frac{10}{(q_{\pm} - 1)^2} - \frac{25}{q_{\pm} - 1} - \frac{5}{q_{\pm}} + 30 \ln \frac{q_{\pm}}{|q_{\pm} - 1|}. \quad (2.2.5.7)$$

Инварианты  $\mathcal{R}_2$  и  $\mathcal{R}_3$  позволяют определить приращения величин  $u_z$  и  $u_x$  в простой волне:

$$\Delta u_z = -\frac{\varepsilon}{\gamma} \int_{p_{2*}}^{p_{1*}} \frac{v_s(p_*) \sqrt{q_{\pm}(p_*)}}{p_*} dp_*, \quad (2.2.5.8)$$

$$\Delta u_x = \pm \frac{\varepsilon}{\gamma} \operatorname{sgn}(B_z B_x) \int_{p_{2*}}^{p_{1*}} \frac{v_s(p_*)}{p_*} \sqrt{\frac{q_{\pm}(p_*) - 1}{p_* q_{\pm}(p_*) - 1}} dp_*; \quad (2.2.5.9)$$

мы пользуемся здесь системой координат, в которой  $B_y = 0$ .

Заметим, что все  $(n-1)$  инвариантов Римана  $\mathcal{R}_1^{(k)}, \dots, \mathcal{R}_{n-1}^{(k)}$ , соответствующих  $k$ -й простой волне, удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению. Для получения этого уравнения продифференцируем соотношение

$$\mathcal{R}_j^{(k)}(\mathcal{Q}_1, \dots, \mathcal{Q}_n) = \text{const} \quad (j = 1, \dots, n-1):$$

$$\frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}_1} d\mathcal{Q}_1 = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}_1} = \left( \frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}_n} \right).$$

Воспользовавшись теперь уравнениями (2.2.1.6), которым удовлетворяют магнитогидродинамические величины  $\mathcal{Q}_j$  в  $k$ -й простой волне, получим искомое соотношение

$$\frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}_1} A^{(k)} = 0. \quad (2.2.5.10)$$

**2.2.6. Теорема Фридрикса.** Особая роль, которую в магнитной гидродинамике играют простые волны, связана с тем, что при отсутствии разрывов только они могут граничить с областью постоянного течения ( $\mathcal{Q} = \text{const}$ ). Это утверждение, называемое *теоремой Фридрикса* [16, 55], имеет в магнитной гидродинамике несколько меньшую область применимости, чем в обычной гидродинамике. Так, в задаче о выдвигании поршня в обычной гидродинамике

с областью постоянного течения граничит вдоль характеристики  $dz/dt = u_z + v_s$  простая волна, доходящая до поршня (рис. 2.2.3, а). С другой стороны, при движении поршня в магнитогиродинамической среде (см. п. 3.3.3) из начальной точки  $z=0$  исходят две характеристики: «быстрая»  $dz/dt = u_z + v_+$  и «медленная»  $dz/dt = -u_z + v_-$  (рис. 2.2.3, б),  $v_+$  и  $v_-$  — фазовые скорости распространения быстрой и медленной магнитозвуковых волн. В области, заключенной между обеими характеристиками, возникает простая волна,

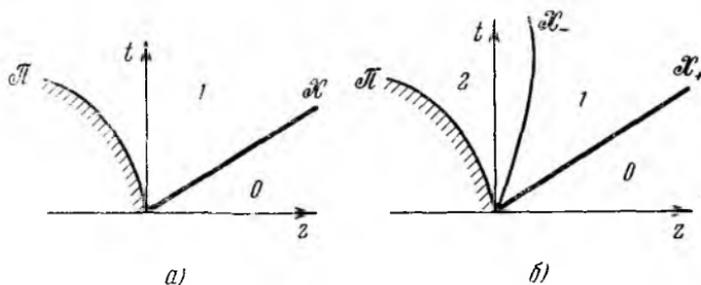


Рис. 2.2.3. Волны, образующиеся при движении поршня в рамках обычной (а) и магнитной (б) гидродинамики.

$\pi$  — линия движения поршня,  $\mathcal{L}$  — характеристика в обычной гидродинамике ( $dz/dt = u_z + v_s$ ),  $\mathcal{L}_+$  — быстрая характеристика в магнитной гидродинамике ( $dz/dt = u_z + v_+$ ),  $\mathcal{L}_-$  — медленная характеристика в магнитной гидродинамике ( $dz/dt = -u_z + v_-$ ), 0 — область покоя, 1 — простая волна, 2 — непростая волна.

тогда как в области, заключенной между медленной характеристикой и поршнем, движение среды, вообще говоря, не описывается простой волной \*).

Переходя к доказательству теоремы Фридрихса, предположим, что область постоянного течения граничит с некоторым непостоянным течением вдоль  $k$ -й характеристики.

Из соотношения (2.2.5.10) следует, что  $(n-1)$  векторов

$$\text{grad}_{\mathcal{Q}_1} \mathcal{R}_j^{(k)} \equiv \left( \frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}_1}, \dots, \frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}_n} \right) \quad (j = 1, 2, \dots, n-1)$$

ортогональны к правому собственному вектору  $A^{(k)} \equiv (A_1^{(k)}, \dots, A_n^{(k)})$ . Так как, согласно (2.1.1.13), любой левый собственный вектор  $A^{+(l)}$  при  $l \neq k$  также ортогонален к  $A^{(k)}$ , то вектор  $A^{+(l)}$  лежит

\*) Это видно хотя бы из того, что простая волна характеризуется одной произвольной функцией, тогда как на поверхности поршня должны удовлетворяться граничные условия, характеризуемые двумя произвольными функциями:  $u_x(t)$  и  $u_z(t)$  (если поршень движется в плоскости  $(x, z)$ , в которой расположено магнитное поле  $(B_x, B_z)$ ).

в подпространстве, образованном  $n-1$  векторами  $\text{grad}_{\mathcal{Q}} \mathcal{R}_1^{(k)}, \dots, \text{grad}_{\mathcal{Q}} \mathcal{R}_{n-1}^{(k)}$ . Иными словами,

$$A^{+(l)} = \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{(l)} \frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}}, \quad l \neq k, \quad (2.2.6.1)$$

где  $\alpha_j^{(l)}$  — некоторые константы.

Подставив равенство (2.2.6.1) в (2.1.5.8), получим

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{(l)} \frac{\partial \mathcal{R}_j^{(k)}}{\partial \mathcal{Q}} \left( \frac{d\mathcal{Q}}{dt} \right)_l = 0, \quad l \neq k,$$

или

$$\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j^{(l)} \left( \frac{d\mathcal{R}_j^{(k)}}{dt} \right)_l = 0. \quad (2.2.6.2)$$

Уравнения (2.2.6.2) представляют собой систему  $n-1$  уравнений в характеристическом виде (2.1.5.8), причем компонентами левого собственного вектора  $A^{+(l)}$  являются величины  $\alpha_j^{(l)}$ , а в качестве величин  $\mathcal{Q}_j$  входят инварианты Римана  $\mathcal{R}_j^{(k)}$ , соответствующие  $k$ -й волне. Так как  $l \neq k$ , то характеристиками системы (2.2.6.2) служат все характеристики исходной системы (2.1.5.8), кроме  $k$ -й. Иными словами, для полученной нами системы  $k$ -я характеристика исходной системы является обыкновенной линией, вдоль которой невозможен разрыв каких-либо производных величин  $\mathcal{R}_j^{(k)}$ . Это означает, что в рассматриваемом течении все инварианты Римана  $\mathcal{R}_1^{(k)}, \dots, \mathcal{R}_{n-1}^{(k)}$  постоянны. Из последнего утверждения следует, что все магнитогидродинамические величины  $\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n$  можно выразить через одну из них, т. е. что с областью постоянного течения граничит простая волна.

### § 3.1. Разрывы

**3.1.1. Граничные условия.** Выше было показано (см. п. 2.2.3), что наличие в простой магнитозвуковой волне участка сжатия приводит к образованию разрывов. Скачки магнитогидродинамических величин появляются также вследствие разрывных начальных или граничных условий. Например, если покоившийся поршень мгновенно приводится в движение, то возникает разрыв его скорости.

Легко видеть, что разрывы макроскопических величин возможны только в том случае, если соответствующие дифференциальные уравнения, описывающие состояние среды, обладают характеристиками. Действительно, если характеристики отсутствуют, то возможно аналитическое продолжение величин, описывающих течение, т. е. в этом случае должна иметь место непрерывность течения.

Так как на линиях разрыва дифференциальные уравнения (2.1.1.2) теряют силу, то они не определяют возникающих скачков магнитогидродинамических величин. Поэтому для однозначности решения магнитогидродинамических задач нужно к уравнениям магнитной гидродинамики (2.1.1.2) присоединить семь граничных условий (по числу магнитогидродинамических переменных) на каждой поверхности (линии) разрыва.

Для установления этих граничных условий [1] введем систему координат, связанную с каким-либо элементом поверхности разрыва и воспользуемся общими законами сохранения.

Очевидно, прежде всего, что на поверхности разрыва должна быть непрерывна нормальная (к поверхности разрыва) составляющая вектора плотности потока вещества  $\rho u$ , т. е.

$$(\rho u_n)_1 = (\rho u_n)_2, \quad (3.1.1.1)$$

где индекс  $n$  обозначает нормальную составляющую, а индексы 1 и 2 служат для обозначения величин по обе стороны поверхности разрыва. Мы будем далее пользоваться обозначением  $\Delta A = A_2 - A_1$  и перепишем (3.1.1.1) в виде

$$\Delta j_m = 0, \quad (3.1.1.2)$$

где  $j_m = \rho u_n$ .

Используем далее закон сохранения импульса. Из условия непрерывности потока импульса вытекает граничное условие

$$\Delta \Pi_{jz} = 0, \quad (3.1.1.3)$$

где  $\Pi_{jk}$  — тензор плотности потока импульса ( $j, k = x, y, z$ ; ось  $z$  направлена вдоль нормали к поверхности разрыва), определяемый формулой

$$\Pi_{jk} = \rho u_j u_k + p \delta_{jk} - \frac{1}{4\pi} (B_j B_k - \frac{1}{2} B^2 \delta_{jk}). \quad (3.1.1.4)$$

Здесь первые два слагаемых определяют тензор плотности потока импульса в обычной гидродинамике (см. формулу (1.5.2.18)), а последние два — максвелловский тензор напряжений магнитного поля.

Подставляя последнее соотношение в (3.1.1.3), получим

$$\left. \begin{aligned} \Delta \left\{ p + \rho u_n^2 + \frac{1}{8\pi} (B_t^2 - B_n^2) \right\} &= 0, \\ \Delta \left\{ \rho u_n u_t - \frac{1}{4\pi} B_n B_t \right\} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1.5)$$

где индексом  $t$  отмечены составляющие векторов, тангенциальные к поверхности разрыва.

На поверхности разрыва должен быть непрерывен также поток энергии. Плотность потока энергии (см. (1.5.2.10)) в обычной гидродинамике равна

$$\mathbf{q}_F = \rho \mathbf{u} (\frac{1}{2} u^2 + w_m),$$

где  $w_m = \varepsilon_m + p/\rho$  — тепловая функция единицы массы жидкости. К этому выражению должна быть добавлена плотность потока электромагнитной энергии

$$\mathbf{q}_E = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}],$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле, связанное с магнитным полем в случае идеально проводящей среды соотношением  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{u}\mathbf{B}]$ . Таким образом, плотность полного потока энергии определяется формулой

$$\mathbf{q} \equiv \mathbf{q}_F + \mathbf{q}_E = \rho \mathbf{u} (\frac{1}{2} u^2 + w_m) + \frac{1}{4\pi} [\mathbf{u}B^2 - \mathbf{B}(\mathbf{u}\mathbf{B})]. \quad (3.1.1.6)$$

На поверхности разрыва должна быть непрерывна нормальная составляющая этого вектора

$$\Delta q_n = 0,$$

или

$$\Delta \left\{ \rho u_n \left( \frac{1}{2} u^2 + w_m \right) + \frac{1}{4\pi} [u_n B^2 - B_n (\mathbf{uB})] \right\} = 0. \quad (3.1.1.7)$$

Наконец, на поверхности разрыва должны быть, очевидно, непрерывны нормальная составляющая магнитного поля и тангенциальная составляющая электрического поля, т. е.

$$\Delta B_n = 0, \quad \Delta (B_n u_t - B_t u_n) = 0. \quad (3.1.1.8)$$

Граничные условия (3.1.1.2), (3.1.1.5), (3.1.1.7), (3.1.1.8) относятся, как уже указывалось, к системе отсчета, движущейся вместе с разрывом. Легко видеть, однако, что к вектору  $u_t$  может быть добавлен произвольный постоянный вектор, т. е. рассматриваемая система координат фиксируется лишь своей скоростью вдоль нормали к поверхности разрыва. Учитывая это обстоятельство, можно добиться того, чтобы при  $B_n \neq 0$  векторы  $u$  и  $B$  были параллельны с одной стороны от поверхности разрыва. Тогда, как следует из второго уравнения (3.1.1.8), они будут параллельны и с другой стороны разрыва. В выбранной таким образом системе отсчета граничное условие (3.1.1.7) сильно упрощается.

$$\Delta \left( \frac{1}{2} u^2 + w_m \right) = 0. \quad (3.1.1.7')$$

Система отсчета, движущаяся вместе с разрывом, не всегда, однако, оказывается удобной. Чтобы получить соответствующие граничные условия в лабораторной системе отсчета, в которой разрыв движется со скоростью  $u_{sh}$ , нужно в формулах (3.1.1.5), (3.1.1.7), (3.1.1.8) заменить  $u_n$  на  $u_n - u_{sh}$ .

Мы сформулировали граничные условия, исходя из непрерывности плотностей потоков ряда величин — массы, импульса, энергии. Эта непрерывность в свою очередь является следствием интегральных законов сохранения вещества, импульса и энергии. На первый взгляд может показаться, что связь с этими законами сохранения здесь несущественна и для получения граничных условий на поверхности разрыва достаточно пользоваться самими уравнениями движения, но в действительности это не так, ибо, используя одни только дифференциальные уравнения, можно получить физически несуществующие граничные условия. Чтобы разъяснить последнее обстоятельство, исследуем, например, разрывные решения дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (3.1.1.9)$$

Это уравнение можно представить в виде дифференциального закона сохранения

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (1/2 u^2) = 0, \quad (3.1.1.10)$$

интегрируя его по произвольной области  $D$  в плоскости  $(t, z)$ , получим

$$\iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} 1/2 u^2 \right) dt dz = 0.$$

Преобразовав двойной интеграл по области  $D$  в криволинейный интеграл по ее границе  $\Gamma$ , получим интегральный закон сохранения

$$\int_{\Gamma} (u dz - 1/2 u^2 dt) = 0. \quad (3.1.1.11)$$

Производя интегрирование по узкому петлеобразному контуру  $\Gamma$ , окружающему линию разрыва, находим граничное условие

$$u_{sh} \Delta u = \Delta 1/2 u^2, \quad (3.1.1.12)$$

где  $u_{sh} = dz/dt$  численно равно тангенсу угла наклона линии разрыва к оси  $t$ .

С другой стороны, умножив уравнение (3.1.1.9) на  $u$ , мы получим другой дифференциальный закон сохранения

$$\frac{\partial}{\partial t} u^2 + \frac{\partial}{\partial z} 2/3 u^3 = 0, \quad (3.1.1.13)$$

которому соответствует другой интегральный закон сохранения

$$\int_{\Gamma} (u^2 dz - 2/3 u^3 dt) = 0. \quad (3.1.1.14)$$

Последний приводит к граничному условию

$$u_{sh} \Delta u^2 = 2/3 \Delta u^3,$$

которое противоречит граничному условию (3.1.1.12). Это кажущееся противоречие объясняется тем, что исходными являются законы сохранения не в дифференциальной (см. (3.1.1.10), (3.1.1.13)), а в интегральной форме (3.1.1.11), (3.1.1.14) [2]. Законы сохранения в дифференциальной форме эквивалентны друг другу, тогда как соответствующие им законы сохранения в интегральной форме не эквивалентны. Из последних граничные условия следуют уже однозначно [3].

**3.1.2. Классификация разрывов.** Перейдем теперь к рассмотрению разрывов в магнитной гидродинамике. Напомним сперва, что в обычной гидродинамике существует три типа разрывов: *ударные волны*, *тангенциальные разрывы* и *контактные разрывы*.

В ударных волнах отличны от нуля скачки давления, плотности (и плотности энтропии) и нормальной компоненты скорости, и равен нулю скачок тангенциальной компоненты скорости, т. е.

$$\Delta p \neq 0, \quad \Delta \rho \neq 0, \quad \Delta s \neq 0, \quad \Delta u_n \neq 0, \quad \Delta u_t = 0.$$

В тангенциальных разрывах испытывает скачок только тангенциальная компонента скорости:

$$\Delta u_t \neq 0, \quad \Delta p = \Delta \rho = \Delta s = \Delta u_n = 0.$$

В контактных разрывах испытывают скачок плотность и плотность энтропии и непрерывны давление и скорость:

$$\Delta \rho \neq 0, \quad \Delta s \neq 0, \quad \Delta p = 0, \quad \Delta u = 0.$$

В магнитной гидродинамике в общем случае, когда  $\mathbf{V} \neq 0$ , существуют следующие типы разрывов.

*Ударные волны*, для которых отличны от нуля скачки всех магнитогидродинамических величин:

$$\Delta \rho \neq 0, \quad \Delta p \neq 0, \quad \Delta s \neq 0, \quad \Delta u \neq 0, \quad \Delta \mathbf{B}_t \neq 0.$$

*Альвеновские разрывы*, на которых испытывают скачки скорость и магнитное поле и непрерывны плотность, давление и плотность энтропии

$$\Delta u \neq 0, \quad \Delta \mathbf{B}_t \neq 0, \quad \Delta p = \Delta \rho = \Delta s = 0.$$

*Контактные разрывы*, на которых испытывают скачки плотность и плотность энтропии и непрерывны давление, скорость и магнитное поле

$$\Delta \rho \neq 0, \quad \Delta s \neq 0, \quad \Delta p = 0, \quad \Delta u = 0, \quad \Delta \mathbf{B}_t = 0.$$

Все эти разрывы, так же как и в обычной гидродинамике, возможны благодаря существованию характеристик, причем альвеновские и контактные разрывы возникают на характеристических поверхностях, а фронт ударной волны не совпадает ни с одной из них (их совпадение имеет место только в случае ударной волны бесконечно малой интенсивности.)

Покажем теперь, что возможно существование только этих разрывов.

Рассмотрим сперва разрывы, перемещающиеся относительно среды, для которых  $j_m \neq 0$ . Эти разрывы, как мы убедимся далее, представляют собой ударные волны и альвеновские разрывы.

Выше мы показали, что при  $B_n \neq 0$  существует система отсчета, в которой векторы  $u$  и  $V$  параллельны по обе стороны поверхности разрыва, т. е.

$$u_i = \frac{u_n}{B_n} V_i. \quad (3.1.2.1)$$

Второе соотношение (3.1.1.8) в этой системе отсчета превращается в тождество, а второе соотношение (3.1.1.5) можно представить в виде

$$\left( \frac{1}{\rho_1} - \frac{B_n^2}{4\pi j_m^2} \right) V_{1i} = \left( \frac{1}{\rho_2} - \frac{B_n^2}{4\pi j_m^2} \right) V_{2i}. \quad (3.1.2.2)$$

В ударной волне  $\rho_1 \neq \rho_2$ , и поэтому отсюда следует, что векторы  $V_{1i}$  и  $V_{2i}$  параллельны. Это означает, что векторы  $V_1, V_2$  и нормаль к поверхности разрыва лежат в одной плоскости. Иными словами, ударные волны плоскополяризованы. Учитывая равенство (3.1.2.1), можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы нормаль к поверхности разрыва совпадала с осью  $z$  и по обе стороны ударной волны выполнялись соотношения  $u_y = 0, B_y = 0$ .

Задавая впереди ударной волны величины  $\rho_1, p_1, B_{1x}, B_{2x}$ , а также одну из этих величин, например  $\rho_2$ , позади ударной волны, можно из четырех граничных условий (3.1.1.2), (3.1.1.5), (3.1.1.7) определить величины  $\rho_2, B_{2x}, u_{1x}, u_{2x}$ , после чего компоненты скорости  $u_{1x}$  и  $u_{2x}$  определяются с помощью соотношений (3.1.2.1). Компонента  $u_{1z}$  равна, очевидно, скорости распространения ударной волны, которая определяется не только параметрами среды  $\rho_1, \rho_2, B_1$  впереди ударной волны, но и ее интенсивностью  $\Delta p$ .

Остановимся более подробно на трех частных случаях магнито-гидродинамических ударных волн — *параллельной, перпендикулярной и особой* волнах.

В *параллельной ударной волне* магнитное поле по обе стороны поверхности разрыва параллельно нормали к ней, т. е.  $V_{1i} = V_{2i} = 0$ . Переходя к системе отсчета, в которой скорость среды по обе стороны разрыва параллельна магнитному полю, мы добьемся того, что и скорость среды будет параллельна нормали  $u_{1z} = u_{2z} = 0$ . При этом граничные условия ничем не будут отличаться от граничных условий в обычной гидродинамике [4]. Однако, как мы увидим в п. 3.3.3, наложение магнитного поля, параллельного нормали к поверхности разрыва, приводит в ряде случаев к расщеплению параллельных ударных волн.

В *перпендикулярной ударной волне* магнитное поле перпендикулярно нормали, т. е. лежит в плоскости разрыва и  $B_n = 0$ . При этом из формулы (3.1.2.1) следует, что не существует системы отсчета, в которой скорость среды параллельна магнитному полю (и разрыв покоится). Вместе с тем для перпендикулярной ударной волны из второго граничного условия (3.1.1.5) следует, что  $\Delta u_z =$

= 0. Поэтому можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы скорость среды по обе стороны разрыва была направлена вдоль нормали\*), т. е.  $u_{1z} = u_{2z} = 0$ .

Как нетрудно убедиться, при  $B_n = 0$  одномерные движения в магнитной гидродинамике не отличаются от одномерных движений в обычной гидродинамике [5], если давление  $p$  заменить эффективным давлением

$$p_B = p + B^2/8\pi$$

и учесть, что в этом случае магнитное поле  $B = B_z$  пропорционально плотности, т. е.  $B/\rho = \text{const}$ .

Наконец, в *особой ударной волне* тангенциальная компонента магнитного поля равна нулю по одну сторону от поверхности разрыва\*\*). Из соотношения (3.1.2.2) следует, что если  $B_z = 0$  позади особой ударной волны, то нормальная компонента скорости среды впереди волны (относительно разрыва) равна нормальной компоненте альвеновской скорости  $u_{1n} = v_{1An}$ .

Из (3.1.2.1) вытекает, что тангенциальная компонента скорости среды впереди волны равна тангенциальной компоненте альвеновской скорости, т. е.  $u_{1t} = v_{1At}$ .

Если же тангенциальная компонента магнитного поля равна нулю впереди особой ударной волны, то скорость среды позади разрыва равна альвеновской скорости, т. е. при  $B_{1z} = 0$  имеем

$$u_2 = v_{2A}. \quad (3.1.2.2')$$

Перейдем теперь к *альвеновским разрывам*, для которых  $j_m \neq 0$ ,  $\rho_1 = \rho_2$ . Если  $1/\rho \neq B_n^2/4\pi j_m^2$ , то из соотношений (3.1.2.2) следует  $\Delta B_z = 0$ . Далее из (3.1.1.2), (3.1.1.5), (3.1.1.7), (3.1.2.1) вытекает, что  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta p = 0$ ,  $\Delta w_m = 0$ , т. е. разрыв отсутствует.

Таким образом, в альвеновском разрыве выполняются соотношения  $1/\rho_1 = 1/\rho_2 = B_n^2/4\pi j_m^2$ , из которых следует, что скорость распространения альвеновского разрыва равна альвеновской скорости, т. е.

$$u_{1n} = -\epsilon \frac{|B_n|}{\sqrt{4\pi\rho}}, \quad (3.1.2.3)$$

где  $\epsilon = \pm 1$  в зависимости от того, перемещается ли разрыв в положительном или отрицательном направлении оси  $z$ . Подставляя (3.1.2.3) во второе уравнение (3.1.1.5), найдем

$$\Delta u_z = -\epsilon (\text{sgn } B_n) \Delta B_z / \sqrt{4\pi\rho}. \quad (3.1.2.4)$$

\*) Такую систему отсчета можно выбрать для параллельных и перпендикулярных волн. Поэтому часто для параллельных и перпендикулярных ударных волн используют также общее название — *продольные ударные волны*.

\*\*) В английской литературе особая ударная волна, у которой  $B_z$  равно нулю впереди разрыва, называется *switch-on shock*, а позади разрыва — *switch-off shock*.

Для альвеновских разрывов первое граничное условие (3.1.1.5) упрощается и принимает вид

$$\Delta(p + B_i^2/8\pi) = 0. \quad (3.1.2.5)$$

Так как в этих разрывах  $\Delta p = 0$ , то из граничного условия (3.1.1.2) вытекает, что  $\Delta u_n = 0$ .

Используя соотношения (3.1.2.1), (3.1.2.3), можно привести граничное условие (3.1.1.7) к виду

$$\Delta(w_m + B_i^2/8\pi\rho) = 0.$$

Отсюда при учете формулы (3.1.2.5) и термодинамического тождества  $w_m = \epsilon_m + p/\rho$  следует, что  $\Delta\epsilon_m = 0$ .

Так как любые две термодинамические величины можно выбрать в качестве независимых переменных [6], то соотношения  $\Delta\rho = 0$ ,  $\Delta\epsilon_m = 0$  означают, что и  $\Delta p = 0$ . Тогда из уравнений (3.1.1.7), (3.1.2.5) находим  $\Delta B_i^2 = 0$ ,  $\Delta u_i^2 = 0$ . Отсюда следует, что в альвеновском разрыве величины поперечных компонент магнитного поля и скорости не изменяются. Иными словами, на поверхности разрыва векторы  $\mathbf{u}$  и  $\mathbf{V}$  только поворачиваются на некоторый угол \*).

Отметим, что вращение вектора скорости происходит только в избранной нами системе отсчета, в которой скорость среды параллельна магнитному полю. Если состояние среды впереди альвеновского разрыва задано, то состояние ее позади разрыва определяется одним параметром — скачком  $\Delta B_i$ .

Обычно альвеновские разрывы не являются плоскополяризованными. Исключение составляет случай, когда поворот магнитного поля происходит на  $180^\circ$  [7]. Тогда можно выбрать систему отсчета таким образом, чтобы по обе стороны разрыва выполнялось условие  $u_y = 0$ ,  $B_y = 0$ .

Рассмотрим, наконец, разрывы, которые не перемещаются относительно среды, т. е.  $j_m = 0$ ,  $u_n = 0$ .

Считая, как и прежде, что  $B_n \neq 0$ , находим из граничных условий (3.1.1.5), (3.1.1.8)  $\Delta u = 0$ ,  $\Delta \mathbf{V} = 0$ ,  $\Delta p = 0$ .

Что же касается граничного условия (3.1.1.7), то оно обращается в тождество. Подобные разрывы называются *контактными*. Контактный разрыв характеризуется скачком любой термодинамической величины, кроме давления. В качестве такой величины обычно выбирают энтропию.

Перейдем, наконец, к рассмотрению вырожденного случая, когда нормальная компонента магнитного поля равна нулю. Для ударных волн, перемещающихся относительно среды ( $j_m \neq 0$ ),

\*) Вследствие этого альвеновские разрывы иногда называют *вращательными*. Так как в них изменяются только поперечные компоненты скорости и магнитного поля, то эти разрывы называются также *поперечными*.

это не приводит к существенным изменениям. Что же касается альвеновских разрывов, то для них из формулы (3.1.2.3) следует  $j_m = 0$ . Это означает, что при  $B_n = 0$  альвеновские разрывы образуют с контактными один тип разрыва.

При выполнении соотношений  $B_n = 0$ ,  $j_m = 0$  граничные условия (3.1.1.2), (3.1.1.7), (3.1.1.8) и второе граничное условие (3.1.1.5) выполняются тождественно. Что же касается первого граничного условия (3.1.1.5), то оно принимает при  $B_n = 0$  вид

$$\Delta(p + B_n^2/8\pi) = 0. \quad (3.1.2.6)$$

Такие разрывы называются *тангенциальными\**. Так как на тангенциальном разрыве выполняются лишь два граничных условия (3.1.1.2) и (3.1.2.6), то он характеризуется пятью параметрами (смысл этих параметров будет выяснен ниже в п. 3.3.2).

**3.1.3. Теорема Цемплена.** В обычной гидродинамике при выполнении условий

$$\left(\frac{\partial^2 (1/\rho)}{\partial p^2}\right)_s > 0, \quad \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_p > 0, \quad (3.1.3.1)$$

где  $s$  — энтропия единицы массы, справедлива *теорема Цемплена* [4], согласно которой в ударной волне давление и плотность увеличиваются, т. е.  $p_2 > p_1$ ,  $\rho_2 > \rho_1$ . Иными словами, ударные волны являются волнами сжатия.

Покажем, что при выполнении условий (3.1.3.1) теорема Цемплена справедлива также в магнитной гидродинамике\*\*. Для этого выведем сначала *уравнение Гюгонио*, т. е. уравнение, определяющее скачки магнитогидродинамических величин в ударной волне.

Используя (3.1.2.1), получим из второго уравнения (3.1.1.5)

$$B_{2t} = \frac{1/\rho_1 - B_n^2/4\pi j_m^2}{1/\rho_2 - B_n^2/4\pi j_m^2} B_{1t}. \quad (3.1.3.2)$$

Вводя обозначение  $w_{2m} - w_{1m} = \Delta w_m$ , преобразуем граничное условие (3.1.1.7') к виду

$$\Delta w_m = j_m^2 \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle \frac{\Delta p}{\rho_1 \rho_2} = \frac{j_m^2}{2B_n^2} \left( \frac{B_{1t}^2}{\rho_1^2} - \frac{B_{2t}^2}{\rho_2^2} \right), \quad (3.1.3.3)$$

где  $\langle 1/\rho \rangle = 1/2 (1/\rho_1 + 1/\rho_2)$ .

\* ) Приведенная классификация магнитогидродинамических разрывов была впервые предложена Сыроватским [8].

\*\* ) Для магнитогидродинамических волн малой амплитуды теорема Цемплена была доказана Ландау и Лифшицем [10], а для ударных волн произвольной амплитуды — Иорданским [11] и Половинным и Любарским [12, 13]. Справедлива и обратная теорема: на ударных волнах сжатия плотность энтропии возрастает [11, 14].

Учитывая первое уравнение (3.1.1.5), перепишем (3.1.3.3) следующим образом:

$$j_m^2 \frac{\Delta p}{\rho_1 \rho_2} = \Delta p + \frac{B_{2t}^2 - B_{1t}^2}{8\pi}. \quad (3.1.3.4)$$

Тогда, используя (3.1.3.2), получим уравнение Гюгонио в виде

$$\Delta w_m - \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle \Delta p = \frac{(B_{2t} - B_{1t})^2}{16\pi\rho_1\rho_2} \Delta p \equiv Q. \quad (3.1.3.5)$$

Заметим, что при  $\mathbf{V} = 0$  уравнение Гюгонио переходит в ударную адиабату в обычной гидродинамике.

Как уже указывалось, в обычной гидродинамике ударные волны всегда являются волнами сжатия, поскольку, если бы существовала ударная волна разрежения ( $\Delta p < 0$ ), то на ней убывала бы энтропия. Аналогичная ситуация имеет место и в магнитной гидродинамике, причем, как мы покажем, в случае ударной волны разрежения наличие магнитного поля приводило бы к еще большему уменьшению энтропии, чем в отсутствие поля.

Чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, обратимся к уравнению Гюгонио и предположим, что существует ударная волна с  $\rho_2 < \rho_1$ . Величина  $Q$  в соотношении (3.1.3.5) отрицательна, если  $\mathbf{V} \neq 0$ , и обращается в нуль при  $\mathbf{V} = 0$ . Дифференцируя  $Q$  по  $p_2$  при постоянной  $p_2$

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial p_2} \right)_{p_2} = \left( \frac{\partial w_m}{\partial p_2} \right)_{p_2} - \left\langle \frac{1}{\rho} \right\rangle$$

и учитывая, что

$$\left( \frac{\partial w_m}{\partial p_2} \right)_{p_2} = \frac{1}{\rho_2} + T_2 \left( \frac{\partial s_2}{\partial p_2} \right)_{p_2},$$

получим

$$\left( \frac{\partial Q}{\partial p_2} \right)_{p_2} = T_2 \left( \frac{\partial s_2}{\partial p_2} \right)_{p_2} + \frac{\rho_1 - \rho_2}{2\rho_1\rho_2}.$$

Согласно второму условию (3.1.3.1) эта величина при  $\rho_2 < \rho_1$  положительна. Положительность же производной  $(\partial Q / \partial p_2)_{p_2}$  означает, что при фиксированном  $p_2$  уменьшение  $Q$  вызывает уменьшение  $p_2$ . Но уменьшение давления при постоянной плотности приводит, согласно (3.1.3.1), к уменьшению энтропии. Таким образом, в ударной волне разрежения должно быть справедливым неравенство  $s_2 < s_1$ , что невозможно.

На рис. 3.1.1 изображено взаимное расположение линий Гюгонио в обычной и магнитной гидродинамике и линии постоянной энтропии. В соответствии с теоремой Цемплена, в области  $\rho_2 < \rho_1$  линия Гюгонио в обычной гидродинамике (штрих-пунктирная

линия) расположена ниже линии постоянной плотности энтропии  $s_2 = s_1$  (пунктирная кривая). Как

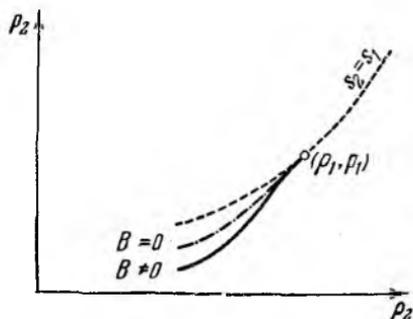


Рис. 3.1.1. Взаимное расположение линии постоянной энтропии (пунктирная кривая), линии Гюгонио в отсутствие магнитного поля (штрихпунктирная кривая) и линии Гюгонио при наличии магнитного поля (сплошная кривая).

Предполагая среду по-прежнему идеальной (т. е. считая коэффициенты вязкости и теплопроводности равными нулю, а электропроводность бесконечной), можно записать уравнения движения в четырехмерном виде\*)

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = 0 \quad (\alpha, \beta = 0, 1, 2, 3) \quad (3.1.4.1)$$

и уравнение непрерывности — в виде

$$\frac{\partial (n \xi^\alpha)}{\partial x^\alpha} = 0, \quad (3.1.4.2)$$

где  $n$  — плотность среды (в собственной системе отсчета),  $\xi^\alpha$  — 4-вектор ее гидродинамической скорости:

$$\xi^\alpha = \left( \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2}, \frac{\mathbf{u}}{c} \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right)^{-1/2} \right);$$

здесь  $\mathbf{u}$  — обычная трехмерная скорость частицы,  $T^{\alpha\beta}$  — тензор

\*) Мы пользуемся здесь обозначениями  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ; скалярное произведение двух 4-векторов  $A$  и  $B$  определяется как  $A^\alpha B_\alpha = = A^0 B^0 - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ . Метрический тензор имеет вид

$$g^{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

мы только что доказали, линия Гюгонио в магнитной гидродинамике (сплошная линия) расположена еще ниже.

**3.1.4. Простые и ударные волны в релятивистской магнитной гидродинамике.** До сих пор мы изучали магнитогидродинамические волны, не учитывая релятивистских эффектов. Поэтому, в частности, полученные результаты справедливы только в том случае, когда фазовые скорости волн значительно меньше скорости света. Теперь мы перейдем к учету релятивистских эффектов. Для этого следует исходить из уравнений релятивистской магнитной гидродинамики.

энергии — импульса [15]. Этот тензор представляет собой сумму тензора энергии—импульса гидродинамической среды  $T_F^{\alpha\beta}$  и тензора энергии—импульса электромагнитного поля  $T_E^{\alpha\beta}$ , т. е.

$$T^{\alpha\beta} = T_F^{\alpha\beta} + T_E^{\alpha\beta},$$

где

$$T_F^{\alpha\beta} = w_V \Xi^\alpha \Xi^\beta - p g^{\alpha\beta}$$

( $w_V$  — тепловая функция, отнесенная к единице объема в собственной системе отсчета,  $p$  — давление),

$$T_E^{00} = \frac{1}{8\pi} (E^2 + B^2), \quad T_E^{0j} = \frac{1}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}]_j,$$

$$T_E^{jk} = \frac{1}{4\pi} \{-E_j E_k - B_j B_k + \frac{1}{2} \delta_{jk} (E^2 + B^2)\}$$

$$(j, k = 1, 2, 3);$$

поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  связаны между собой соотношением  $\mathbf{E} = -\frac{1}{c} [\mathbf{u}\mathbf{B}]$  и удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0.$$

Заметим, что в релятивистском случае  $|\mathbf{u}| \sim c$ , и поэтому электрическое и магнитное поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  одинаковы по порядку величины. В нерелятивистской магнитной гидродинамике электрическое поле значительно меньше магнитного.

При исследовании разрывных решений уравнений (3.1.4.1) к ним нужно присоединить граничные условия на поверхности разрыва. В релятивистской магнитной гидродинамике их можно получить, так же как и в обычной магнитной гидродинамике, исходя из интегральных законов сохранения [1]

$$\left. \begin{aligned} \Delta T^{nn} &\equiv \Delta \left( \frac{w_V u_n^2 / c^2}{1 - u^2 / c^2} + p + \frac{B_t^2 - B_n^2 + E_t^2 - E_n^2}{4\pi} \right) = 0, \\ \Delta T^{tn} &\equiv \Delta \left( \frac{w_V u_n \mathbf{u}_t / c^2}{1 - u^2 / c^2} - \frac{B_n \mathbf{B}_t}{4\pi} - \frac{E_n \mathbf{E}_t}{4\pi} \right) = 0, \\ \Delta c T^{0n} &\equiv \Delta \left( \frac{w_V u_n}{1 - u^2 / c^2} - \frac{B_n (\mathbf{B}_t \mathbf{u}_t) - u_n B_t^2}{4\pi} \right) = 0, \\ \Delta (u_n \mathbf{B}_t - B_n \mathbf{u}_t) &= 0, \quad \Delta B_n = 0, \quad \Delta \left( \frac{n u_n}{\sqrt{1 - u^2 / c^2}} \right) = 0 \end{aligned} \right\} (3.1.4.3)$$

(индексами  $n$  и  $t$  снабжены нормальная и тангенциальная компоненты тензоров).

Исследуем прежде всего волны малой амплитуды в релятивистской магнитной гидродинамике. Для этого применим метод

[1], несколько отличающийся от метода, использованного в п. 2.1.1, а именно, будем исходить из системы граничных условий (3.1.4.3) и будем считать в ней скачки малыми (отождествляя их с возмущениями), т. е. пренебрежем произведениями скачков различных величин.

В волнах малой амплитуды можно выделить энтропийные волны. В остальных магнитогидродинамических волнах энтропия не изменяется. Это позволяет несколько упростить систему уравнений (3.1.4.3), отбросив последнее уравнение и заменив его условием адиабатичности

$$\Delta p = (V_s^2/c^2) \Delta w_v,$$

где  $V_s$  — величина, имеющая простую связь со скоростью звука  $v_s$ , а именно

$$V_s = \frac{v_s}{\sqrt{1 - v_s^2/c^2}}, \quad v_s = c \sqrt{\left(\frac{dp}{d\varepsilon_v}\right)}.$$

( $\varepsilon_v$  и  $s$  — внутренняя энергия единицы объема и энтропия единицы массы среды в собственной системе отсчета). Линеаризуя систему уравнений (3.1.4.3) относительно шести малых скачков  $\Delta w_v$ ,  $\Delta u$ ,  $\Delta B_z$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{u^2/c^2 + (1 - u^2/c^2) V_s^2/c^2}{1 - u^2/c^2} \Delta w_v + \frac{2w_v u \Delta u_z/c^2}{(1 - u^2/c^2)^2} + \frac{B_x \Delta B_x}{4\pi} &= 0, \\ \frac{w_v u \Delta u_x/c^2}{1 - u^2/c^2} - \frac{B_x \Delta B_x}{4\pi} &= 0, \\ \left( \frac{w_v}{1 - u^2/c^2} + \frac{B_x^2}{4\pi} \right) \frac{u \Delta u_y}{c^2} - \frac{B_x \Delta B_y}{4\pi} &= 0, \\ \frac{u \Delta w_v}{1 - u^2/c^2} + \left[ w_v \frac{1 + u^2/c^2}{(1 - u^2/c^2)^2} + \frac{B_x^2}{4\pi} \right] \Delta u_x - \\ - \frac{B_x B_z}{4\pi} \Delta u_x + \frac{u B_x}{2\pi} \Delta B_x &= 0, \\ u \Delta B_x + B_x \Delta u_x - B_x \Delta u_x &= 0, \quad u \Delta B_y - B_y \Delta u_y = 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4.4)$$

(Мы пользуемся системой отсчета, в которой ось  $z$  направлена вдоль нормали к поверхности разрыва и  $B_y = 0$ ,  $u_x = 0$ ,  $u_y = 0$ .) Заметим, что величину  $u = u_x$  нельзя полагать равной нулю, так как в выбранной системе отсчета разрыв покоится. В лабораторной системе отсчета, в которой среда покоится, величина  $u$  представляет собой, очевидно, фазовую скорость распространения малых возмущений, т. е. скорость магнитогидродинамических волн.

Уравнения (3.1.4.4) распадаются на две системы: четыре уравнения для скачков  $\Delta w_v$ ,  $\Delta u_x$ ,  $\Delta u_z$ ,  $\Delta B_x$  и два уравнения для скач-

ков  $\Delta u_y$ ,  $\Delta B_y$ . Приравняв определители этих систем нулю, получим соотношения, связывающие фазовую скорость распространения малых возмущений с магнитным полем и тепловой функцией  $w_V$ .

Добавляя к найденным волнам энтропийную волну, покоящуюся относительно среды, получим семь магнитогидродинамических волн малой амплитуды; две быстрые магнитозвуковые волны (распространяющиеся в противоположных направлениях), две медленные магнитозвуковые волны, две альвеновские волны и одну энтропийную волну. В магнитозвуковых волнах отличны от нуля возмущения  $\Delta w_V$ ,  $\Delta u_x$ ,  $\Delta u_z$ ,  $\Delta B_x$ , в альвеновских волнах —  $\Delta u_y$  и  $\Delta B_y$ , в энтропийных волнах — только величины  $\Delta \rho$  и  $\Delta s$ . Легко показать, что скорости альвеновской и магнитозвуковых волн определяются следующими формулами\*):

$$v_{\pm} = \left. \begin{aligned} v_{Ax} &= V_{Ax} (1 + V_A^2/c^2)^{-1/2}, \\ v_{\pm} &= \left\{ \frac{1}{2} \left[ v_s^2 \left( 1 + \frac{V_{Ax}^2}{c^2} \right) \right] + V_A^2 \pm \right. \\ &\quad \left. \pm \left\{ \left[ v_s^2 \left( 1 + \frac{V_{Ax}^2}{2} \right) - V_A^2 \right]^2 + 4v_s^2 \frac{V_{Ax}^2}{c^2} \right\}^{1/2} \left( 1 + \frac{V_A^2}{c^2} \right)^{-1/2} \right\}^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.1.4.5)$$

где

$$V_A = c B_0 / \sqrt{4\pi w_V},$$

$B_0$  — магнитное поле в собственной системе отсчета, т. е.  $B_{0x} = B_x$ ,  $B_{0z} = B_x \sqrt{1 - u^2/c^2}$ .

В нерелятивистском случае, когда альвеновская скорость и скорость звука малы по сравнению со скоростью света, эти формулы переходят в известные уже нам формулы (2.1.1.10).

Как было показано в п. 2.2.1, зная соотношения между амплитудами малых возмущений, можно установить дифференциальные уравнения для простых волн. То же положение справедливо и в релятивистской магнитной гидродинамике и в уравнениях (3.1.4.4) нужно заменить  $\Delta \mathcal{A}$  на  $d\mathcal{A}$ .

Так же, как и в нерелятивистской, в релятивистской магнитной гидродинамике существуют *магнитозвуковые, альвеновские и энтропийные простые волны*, причем альвеновские и энтропийные волны распространяются без искажения профиля, а профиль магнитозвуковых волн искажается.

Для того чтобы определить, как изменяется профиль магнитозвуковой волны, нужно вычислить производную  $dv_{ph}/dw_V$ , где  $v_{ph} = u_x + v_{\pm}$  — фазовая скорость распространения волны в движущейся среде.

\*) Эти формулы были получены Халатниковым [16], Цумино [17] и Гаррисом [18].

Поступая так же, как и при выводе формулы (2.2.3.3), получим

$$\frac{dv_{ph}}{dw_V} = \frac{1}{4v_{\pm}w_V(1+v_s^2/c^2)} D_1 \left[ (v_{\pm}^2 - v_s^2) v_{\pm}^2 (1 - v_s^2/c^2) + \right. \\ \left. + 2(v_{\pm}^2 V_A^2 - v_s^2 V_{A_s}^2) + 2D_2 c^4 + D_2 w_V n^2 v_s^6 \left( \frac{\partial^2 (w_V/n^2)}{\partial p^2} \right) \right], \quad (3.1.4.6)$$

где

$$D_1 = v_{\pm}^2 (1 + V_A^2/c^2) - 1/2 [V_A^2 + v_s^2 (1 + V_A^2/c^2)], \\ D_2 = v_{\pm}^2 (1 + V_A^2/c^2) - V_{A_s}^2.$$

Для быстрых магнитозвуковых волн выполняются неравенства  $v_+ > v_s$ ,  $D_1 > 0$ ,  $D_2 > 0$ ,  $v_+ > v_s |V_{A_s}|/V_A$ , а для медленных волн — неравенства  $v_- < v_s$ ,  $D_1 < 0$ ,  $D_2 < 0$ ,  $v_- < v_s |V_{A_s}|/V_A$ .

Для релятивистского газа обычно выполняется условие

$$\left( \frac{\partial^2 (w_V/n^2)}{\partial p^2} \right)_s > 0, \quad (3.1.4.7)$$

являющееся релятивистским аналогом условия (2.2.3.1) в нерелятивистской гидродинамике. При выполнении (3.1.4.7) из формулы (3.1.4.6) следует неравенство [19—21]

$$\frac{dv_{ph}}{dw_V} > 0. \quad (3.1.4.8)$$

Оно означает, что точки, соответствующие большей плотности, перемещаются с большей скоростью\*). Это приводит к тому, что на участках сжатия градиент плотности увеличивается, а на участках разрежения — уменьшается.

Дальнейшее исследование простых волн в релятивистской магнитной гидродинамике ничем не отличается от соответствующего исследования в нерелятивистской магнитной гидродинамике (см. п. 2.2.3): на участках сжатия возникают разрывы, автомодельные волны являются волнами разрежения, поперечное магнитное поле убывает в быстрой и возрастает в медленной автомодельной волне.

В релятивистской магнитной гидродинамике, так же как и в обычной магнитной гидродинамике, существуют ударные волны, альвеновские разрывы и контактные разрывы\*\*). Одно из отличий релятивистских магнитогидродинамических ударных волн от соот-

\*) В силу термодинамического тождества  $(\partial w_V/\partial n)_s > 0$  увеличению  $w_V$  соответствует увеличение плотности.

\*\*) Разрывные решения в релятивистской магнитной гидродинамике были исследованы в работах [16, 19]. В случае равенства нулю продольного магнитного поля  $B_z$  разрывы в релятивистской магнитной гидродинамике изучались в [22].

ветствующих волн в обычной магнитной гидродинамике состоит в том, что не всегда есть система отсчета, в которой скорость среды параллельна магнитному полю. Для существования такой системы отсчета необходимо и достаточно выполнение условия

$$|u_x B/B_x| < c.$$

Теорема Цемплена справедлива также и в релятивистской магнитной гидродинамике [19]. Для справедливости этой теоремы достаточно выполнение условий (3.1.4.7) и

$$\left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_{w_V/n^2} > 0. \quad (3.1.4.9)$$

Те же условия обеспечивают справедливость теоремы Цемплена и в релятивистской гидродинамике в отсутствие магнитного поля\*). Доказательство производится аналогично соответствующему доказательству в нерелятивистской магнитной гидродинамике (см. п. 3.1.3). Уравнение Гюгонио (3.1.3.5) в релятивистском случае имеет вид

$$\frac{w_{2V}^2}{n_2^2} - \frac{w_{1V}^2}{n_1^2} - (p_2 - p_1) \left( \frac{w_{1V}}{n_1^2} + \frac{w_{2V}}{n_2^2} \right) = Q, \quad (3.1.4.10)$$

где

$$Q = \frac{B_{1x}^2 (w_{2V}/n_2^2)^2 (u_{1x}/u_{2x} - 1)^2 (w_{1V}/n_1^2 - w_{2V}/n_2^2)}{8\pi (w_{2V}/n_2^2 - B_x/4\pi j_m^2)^2},$$

$$j_m = n_1 u_{1x} (1 - u_{1x}^2/c^2)^{-1/2}$$

(при доказательстве в релятивистской магнитной гидродинамике плотность  $\rho$  следует заменить величиной  $n^2/w_V$ ).

## § 3.2. Устойчивость и структура ударных волн

### 3.2.1. Эволюционность ударных волн.

Задания граничных условий на разрыве недостаточно, чтобы единственным образом определить разрывное решение. Эта трудность встречается и в обычной гидродинамике. Так, например, при выдвигании поршня из трубы формально возможны два решения: автомодельная волна разрежения, и ударная волна разрежения. Второе решение в обычной гидродинамике отбрасывается, так как в ударной волне разрежения убывает энтропия.

\*) Этот результат для ударных волн малой интенсивности был получен в работе [23], а для ударных волн произвольной интенсивности — в работе [24]. Заметим, что в релятивистской гидродинамике на ударной волне возрастают не только давление  $p$  и плотность  $n$ , но и величина  $n^2/w_V$  [25].

Как мы показали выше, в магнитной гидродинамике ударные волны разрежения невозможны, так как в них также происходит убывание энтропии. Однако в магнитной гидродинамике существует слишком большое количество ударных волн сжатия, и задача о движении среды при заданных начальных и граничных условиях часто имеет несколько решений. Например, если вдвигать идеально проводящий поршень в покоящуюся магнитогидродинамическую среду, в которой магнитное поле направлено вдоль нормали к поршню, то, как будет показано в п. 3.3.3, возможны два решения

1) Такая же ударная волна сжатия, как и в отсутствие магнитного поля (параллельная магнитогидродинамическая ударная волна, см. п. 3.1.2).

2) Две особые (см. п. 3.1.2) магнитогидродинамические ударные волны сжатия. Так как на ударных волнах сжатия энтропия возрастает, то условие возрастания энтропии, с помощью которого в обычной гидродинамике удавалось исключить «лишние» разрывы, оказывается чересчур слабым в магнитной гидродинамике.

В действительности, однако, могут осуществляться не все ударные волны, на которых выполняются граничные условия и происходит возрастание энтропии.

Для их существования необходимо, чтобы решение уравнений было устойчивым. Исследование устойчивости обычно производится следующим образом. На невозмущенные значения различных гидродинамических величин (плотности, скорости, магнитного поля) накладывают бесконечно малые возмущения. Тогда после линеаризации исходных нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих гидродинамическое состояние, для возмущений получаются линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Их решения имеют вид суперпозиции плоских волн  $\exp[i(kz - \omega t)]$ . Приравнявая нулю детерминант этой системы линейных уравнений, находим так называемое *дисперсионное уравнение*  $D(\omega, k) = 0$ , связывающее частоту и соответствующее волновое число  $k$ . Задавая действительное значение  $k$  (т. е. задавая длину волны возмущения  $\lambda = 2\pi/k$ ), можно из дисперсионного уравнения получить и значение  $\omega$ . Действительные величины  $\omega$  означают, что решение устойчиво по отношению к возмущениям с данной длиной волны  $\lambda$ . Комплексное значение  $\omega$  (с положительной мнимой частью) свидетельствует об экспоненциальном нарастании возмущения со временем, т. е. о неустойчивости исходного решения\*).

В ряде случаев предложенная выше схема исследования устойчивости неприменима, так как может оказаться, что в линеаризованной системе число уравнений не равно числу неизвест-

\* Исследованию устойчивости магнитогидродинамических ударных волн посвящены работы [26, 27].

ных \*). Тогда либо не существует решения, либо существует бесчисленное их множество [4, 28].

Вместе с тем и в обычной, и в магнитной гидродинамике задача Коши (т. е. задача нахождения магнитогидродинамических величин при  $t > 0$ , если известны их значения при  $t = 0$ ) всегда имеет решение и притом единственное. Отсутствие или неединственность решения являются нарушением принципа причинности.

Так как единственным допущением, которое делается при получении системы уравнения для возмущений, является предположение о возможности линеаризации, то отсюда следует, что бесконечно малые при  $t = 0$  возмущения сразу же становятся немалыми.

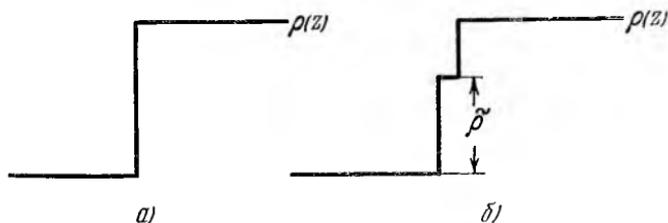


Рис. 3.2.1. Расщепление ударной волны.

а) Исходная волна; б) расщепившаяся волна.  $\bar{\rho}$  — возмущение плотности. Исходная ударная волна движется справа налево.

Например [7], если исходным решением была ударная волна, профиль которой изображен на рис. 3.2.1, а, то при бесконечно малом возмущении она расщепится на две ударные волны. При этом возмущение  $\bar{\rho}$  сразу же становится большим, хотя при малых значениях  $t$  оно локализовано лишь в малой области пространства (рис. 3.2.1, б).

Такие решения, в которых бесконечно малые возмущения вызывают конечное изменение решения, мы будем называть *неэволюционными* [29].

Исследование эволюционности значительно проще изучения обычной устойчивости, так как оно просто сводится к подсчету числа расходящихся волн. Вместе с тем условия эволюционности позволяют с единой точки зрения как объяснить неосуществимость ряда решений уравнений обычной гидродинамики, так и предсказать неосуществимость ряда решений уравнений магнитной гидродинамики. Без использования условий эволюционности невозможно решать задачи магнитной гидродинамики при наличии ударных волн.

\*) Число уравнений равно числу независимых граничных условий на поверхности разрыва, а число неизвестных — числу волн бесконечно малой амплитуды, расходящихся по обе стороны от поверхности разрыва.

Перейдем теперь к исследованию условий эволюционности магнитогидродинамических ударных волн\*). Если рассматривать одномерные волны, движущиеся вдоль оси  $z$ , то величина  $B_z$  остается постоянной, и поэтому с каждой стороны поверхности разрыва существует по семь возмущенных магнитогидродинамических величин, а именно  $\bar{\rho}$ ,  $\bar{p}$ ,  $\bar{u}_x$ ,  $\bar{u}_y$ ,  $\bar{u}_z$ ,  $\bar{B}_x$ ,  $\bar{B}_y$ . После линеаризации относительно этих возмущений граничные условия (3.1.1.2), (3.1.1.5), (3.1.1.7), (3.1.1.8) на ударной волне принимают следующий вид (мы выбрали систему отсчета, в которой невозмущенное магнитное поле и невозмущенная скорость лежат в плоскости  $xz$  и невозмущенная скорость ударной волны  $u_{sh}$  равна нулю, т. е.  $B_y=0$ ,  $u_y=0$  и  $u_{sh}=0$ ):

$$\Delta(\rho u_z \bar{u}_y - B_z \bar{B}_y / 4\pi) = 0, \quad (3.2.1.1)$$

$$\Delta(u_z \bar{B}_y - B_z \bar{u}_y) = 0, \quad (3.2.1.2)$$

$$\Delta[\rho(\bar{u}_z - \bar{u}_{sh}) + u_z \bar{p}] = 0, \quad (3.2.1.3)$$

$$\Delta[\bar{p} + 2\rho u_z(\bar{u}_z - \bar{u}_{sh}) + u_z^2 \bar{p} + B_x \bar{B}_x / 4\pi] = 0, \quad (3.2.1.4)$$

$$\Delta(\rho u_z \bar{u}_x - B_z \bar{B}_x / 4\pi) = 0, \quad (3.2.1.5)$$

$$\Delta[H_z \bar{u}_x - H_x(\bar{u}_z - \bar{u}_{sh}) - u_z \bar{B}_x] = 0, \quad (3.2.1.6)$$

$$\Delta\{\rho u_z [u_z(\bar{u}_z - \bar{u}_{sh}) + u_x \bar{u}_x + \bar{w}_m] + (u_z B_x - u_x B_z) \bar{B}_x / 4\pi\} = 0, \quad (3.2.1.7)$$

где  $\bar{u}_{sh}$  — возмущение скорости ударной волны. Как мы видим, число граничных условий равно семи. Однако эти условия не независимы, так как они содержат возмущение скорости ударной волны  $\bar{u}_{sh}$ . После его исключения мы получим систему из шести независимых граничных условий. Поэтому для эволюционности магнитогидродинамической ударной волны необходимо, чтобы число волн, расходящихся по обе стороны поверхности разрыва, равнялось шести [30]. В случае произвольной системы уравнений общее число расходящихся волн должно быть на единицу меньше числа граничных условий [31, 32].

В магнитной гидродинамике существует четырнадцать различных фазовых скоростей распространения волн малой амплитуды (по обе стороны от фронта ударной волны), а именно  $u_{1z} + v_{1Az}$ ,  $u_{1z} - v_{1Az}$ ,  $u_{1z} + v_{1+}$ ,  $u_{1z} - v_{1+}$ ,  $u_{1z} + v_{1-}$ ,  $u_{1z} - v_{1-}$ ,  $u_{2z}$ ,  $u_{2z} + v_{2Az}$ ,  $u_{2z} - v_{2Az}$ ,  $u_{2z} + v_{2+}$ ,  $u_{2z} - v_{2+}$ ,  $u_{2z} + v_{2-}$ ,  $u_{2z} - v_{2-}$ ,  $u_{2z}$  (здесь, как и выше, индекс 1 относится к области  $z < 0$  впереди ударной волны, индекс 2 — к области  $z > 0$  позади ударной волны; система

\*) Проблема эволюционности магнитогидродинамических ударных волн была решена Ахизером, Любарским и Половиним [30].

координат выбрана так, чтобы в ней разрыв покоился и находился в плоскости  $z=0$ , направление оси  $z$  — так, чтобы проекции  $u_z$  скорости среды на эту ось были положительны). Расходящимся волнам в области впереди ударной волны соответствует отрицательная, а в области позади ударной волны — положительная фазовые скорости.

Из перечисленных четырнадцати скоростей четыре соответствуют сходящимся волнам\*):  $u_{1z}+v_{1+}$ ,  $u_{1z}+v_{1-}$ ,  $u_{1z}+v_{1Az}$ ,  $u_{1z}$ , и четыре — расходящимся:  $u_{2z}+v_{2+}$ ,  $u_{2z}+v_{2-}$ ,  $u_{2z}+v_{2Az}$ ,  $u_{2z}$  (все эти фазовые скорости заведомо положительны). Остальные волны будут сходящимися или расходящимися в зависимости от соотношений между величинами  $u_z$  и  $v_+$ ,  $v_-$ ,  $v_{Az}$ . На рис. 3.2.2 показано общее число расходящихся волн [33] при различных значениях  $u_{1z}$ ,  $u_{2z}$ . Эволюционным ударным волнам соответствуют те области плоскости  $(u_{1z}, u_{2z})$ , в которых суммарное число расходящихся волн равно шести.

Однако равенства числа независимых граничных условий числу расходящихся волн еще недостаточно для существования и единственности решения. Может случиться, что уравнения, служащие для определения амплитуд расходящихся волн, и граничные условия распадутся на несколько независимых групп. Тогда условия эволюционности (равенство числа расходящихся волн числу независимых граничных условий) должны выполняться не только для всей совокупности переменных, но и для каждой изолированной группы в отдельности.

Такое разделение уравнений и граничных условий на две независимые группы имеет место в магнитной гидродинамике для волн, распространяющихся перпендикулярно к поверхности разрыва [34]. В самом деле, в альвеновских волнах малой амплитуды отличны от нуля только величины  $\tilde{u}_y$  и  $\tilde{B}_y$  (плоскость  $xz$  ориентирована так, чтобы  $B_y$  равнялось нулю); в магнитозвуковых и энтропийных волнах отличны от нуля величины  $\tilde{\rho}$ ,  $\tilde{p}$ ,  $\tilde{u}_x$ ,  $\tilde{u}_z$ ,  $\tilde{B}_x$ . На такие же две группы распадутся в граничные условия (3.2.1.1)—(3.2.1.7): первые два условия соответствуют альвенов-

$u_{2z}$	$3+7=10$	$3+6=9$	$2+6=8$	$2+5=7$
$u_{2+}$	$3+6=9$	$3+5=8$	$2+5=7$	$2+4=6$
$u_{2Az}$	$2+6=8$	$2+5=7$	$1+5=6$	$1+4=5$
$u_{2-}$	$2+5=7$	$2+4=6$	$1+4=5$	$1+3=4$
	$v_{1-}$	$v_{1Az}$	$v_{1+}$	$u_{1z}$

Рис. 3.2.2. Числа волн, расходящихся от поверхности разрыва.

Первое слагаемое — число альвеновских волн, второе — число магнитозвуковых и энтропийных волн.

\*) Мы для определенности полагаем, что  $B_z > 0$ .

ским возмущениям, остальные — магнитозвуковым и энтропийным.

Граничные условия (3.2.1.1), (3.2.1.2) не содержат  $\bar{u}_{sh}$ . Поэтому они независимы, и число расходящихся альвеновских волн должно равняться двум [34]. Граничные условия (3.2.1.3) — (3.2.1.7) содержат  $\bar{u}_{sb}$ ; после исключения этой величины остается четыре независимых граничных условия. Следовательно, число расходящихся магнитозвуковых и энтропийных волн должно равняться четырем.

На рис. 3.2.3 изображены линии Гюгонио на плоскости  $(u_{1z}, u_{2z})$ . На нем совмещены два графика \*): участок линии Гюгонио 1—2—3—4—5—6—1, соответствующий медленной ударной волне, построен при заданных значениях  $v_{1Az}, v_{1-}, v_{2Az}, v_{2-}$ , а участок линии Гюгонио 7—8—9, соответствующий быстрой волне, — при заданных  $v_{1Az}, v_{1+}, v_{2Az}, v_{2+}$  \*\*). Участки 4—5—6—1 и 7—8 соответствуют ударным волнам разрежения:  $u_{1z} < u_{2z}$ . На таких волнах энтропия убывает (см. п. 3.1.3). Участки 1—2—3—4 и 8—9 соответствуют ударным волнам сжатия:  $u_{1z} > u_{2z}$ . На таких волнах энтропия возрастает.

Области эволюционности ударных волн заштрихованы. 1—2—3—4—5—6—1 — медленная ударная волна, 7—8—9 — быстрая ударная волна.

Рис. 3.2.3. Линии Гюгонио на плоскости  $(u_{1z}, u_{2z})$ .

На рис. 3.2.3 видно, что существует две области эволюционности ударных волн [30] (обе они заштрихованы):

1) *быстрые ударные волны* (участок 8—9), для которых

$$v_{1+} < u_{1z}, \quad v_{2Az} < u_{2z} < v_{2+}, \quad (3.2.1.8)$$

2) *медленные ударные волны* (участок 1—2), для которых

$$v_{1-} < u_{1z} < v_{1Az}, \quad u_{2z} < v_{2-}. \quad (3.2.1.9)$$

\*) Если не считать такой график совмещением двух графиков, то появляются дополнительные участки линий Гюгонио (см. рис. 2.11 в книге Андерсона [35]), что неверно.

\*\*\*) Если зафиксировать другие величины, например [36]  $N_1 = v_{1A}/v_{1s}$  и  $M_1 = u_1/v_{1s}$ , то линия Гюгонио будет качественно отличной от линии, изображенной на рис. 3.2.3.

Как мы видим, быстрая ударная волна сжатия является эволюционной на всем участке 8—9, т. е. при любых амплитудах. Напротив, медленная ударная волна сжатия оказывается эволюционной лишь на участке 1—2. На участке 2—3—4 \*) медленная ударная волна сжатия неэволюционна и не может существовать, несмотря на то, что энтропия на ней возрастает.

До сих пор мы рассматривали условия эволюционности относительно возмущений, зависящих лишь от  $z$  и  $t$ . Учет возмущений общего вида (зависящих также от  $x$  и  $y$ ) приводит к тем же условиям эволюционности [39] (см. (3.2.1.8), (3.2.1.9)).

Заметим, что условия эволюционности сильнее условия возрастания энтропии [40] — на эволюционных ударных волнах энтропия всегда возрастает [41].

Следует подчеркнуть существенное различие между неэволюционностью и неустойчивостью. Неустойчивые состояния могут возникать при движении магнитогидродинамической среды под действием внутренних причин. Они существуют некоторое время, пока флуктуации не достигнут критической величины, после чего неустойчивое состояние разрушается. Что же касается неэволюционных разрывов, то они не могут возникать сами собой. Неэволюционные разрывы могут образоваться лишь под действием внешних факторов (например, при столкновении газовых масс). Они могут существовать лишь одно мгновение как разрывы в начальных условиях, после чего неэволюционные разрывы немедленно расщепляются на несколько ударных или автомодельных волн. Такое расщепление неэволюционной магнитогидродинамической ударной волны будет рассмотрено в п. 3.3.4 \*\*).

До сих пор при формулировке условий эволюционности магнитогидродинамических волн мы молчаливо предполагали, что для волн малой амплитуды отсутствует дисперсия, т. е. их скорость не зависит от частоты. В принципе фазовые скорости могут зависеть от частоты, например, в магнитной гидродинамике двухкомпонентной жидкости. В этом случае при формулировании условий эволюционности под скоростями волн малой амплитуды следует понимать фазовые скорости низкочастотных колебаний (в низкочастотном пределе дисперсия отсутствует), так как основная часть возмущения движется с фазовой скоростью низкочастотных волн [42] \*\*\*).

\*) При некоторых значениях параметров точка  $u_{1z} = v_{1+}$ ,  $u_{2z} = v_{2-}$  расположена левее [38] линии 2—3—4.

\*\*) Если ударную волну рассматривать не как разрыв, а как быстрый, но непрерывный переход из одного состояния в другое, то эволюцию нестационарных возмущений можно исследовать только с помощью электронных счетных машин. Подобные вычисления подтверждают сделанный выше вывод о расщеплении неэволюционных ударных волн [43—45].

\*\*\*) Об ошибках, связанных с неучетом дисперсии скорости звука в магнитной гидродинамике, см. [47].

ским возмущениям, остальные — магнитозвуковым и энтропийным.

Граничные условия (3.2.1.1), (3.2.1.2) не содержат  $\bar{u}_{sh}$ . Поэтому они независимы, и число расходящихся альвеновских волн должно равняться двум [34]. Граничные условия (3.2.1.3) — (3.2.1.7) содержат  $\bar{u}_{sb}$ ; после исключения этой величины остается четыре независимых граничных условия. Следовательно, число расходящихся магнитозвуковых и энтропийных волн должно равняться четырем.

На рис. 3.2.3 изображены линии Гюгонио на плоскости  $(u_{1z}, u_{2z})$ . На нем совмещены два графика \*): участок линии Гюгонио 1—2—3—4—5—6—1, соответствующий медленной ударной волне, построен при заданных значениях  $v_{1Az}$ ,  $v_{1-}$ ,  $v_{2Az}$ ,  $v_{2-}$ , а участок линии Гюгонио 7—8—9, соответствующий быстрой волне, — при заданных  $v_{1Az}$ ,  $v_{1+}$ ,  $v_{2Az}$ ,  $v_{2+}$  \*\*). Участки 4—5—6—1 и 7—8 соответствуют ударным волнам разрежения:  $u_{1z} < u_{2z}$ . На таких волнах энтропия убывает (см. п. 3.1.3). Участки 1—2—3—4 и 8—9 соответствуют ударным волнам сжатия:  $u_{1z} > u_{2z}$ . На таких волнах энтропия возрастает.

Области эволюционности ударных волн заштрихованы. 1—2—3—4—5—6—1 — медленная ударная волна, 7—8—9 — быстрая ударная волна.

На рис. 3.2.3 видно, что существует две области эволюционности ударных волн [30] (обе они заштрихованы):

1) *быстрые ударные волны* (участок 8—9), для которых

$$v_{1+} < u_{1z}, \quad v_{2Az} < u_{2z} < v_{2+}, \quad (3.2.1.8)$$

2) *медленные ударные волны* (участок 1—2), для которых

$$v_{1-} < u_{1z} < v_{1Az}, \quad u_{2z} < v_{2-}. \quad (3.2.1.9)$$

\*) Если не считать такой график совмещением двух графиков, то появляются дополнительные участки линий Гюгонио (см. рис. 2.11 в книге Андерсона [35]), что неверно.

\*\*\*) Если зафиксировать другие величины, например [36]  $N_1 = v_{1A}/v_{1s}$  и  $M_1 = u_1/v_{1s}$ , то линия Гюгонио будет качественно отличной от линии, изображенной на рис. 3.2.3.

Как мы видим, быстрая ударная волна сжатия является эволюционной на всем участке 8—9, т. е. при любых амплитудах. Напротив, медленная ударная волна сжатия оказывается эволюционной лишь на участке 1—2. На участке 2—3—4 \*) медленная ударная волна сжатия неэволюционна и не может существовать, несмотря на то, что энтропия на ней возрастает.

До сих пор мы рассматривали условия эволюционности относительно возмущений, зависящих лишь от  $z$  и  $t$ . Учет возмущений общего вида (зависящих также от  $x$  и  $y$ ) приводит к тем же условиям эволюционности [39] (см. (3.2.1.8), (3.2.1.9)).

Заметим, что условия эволюционности сильнее условия возрастания энтропии [40] — на эволюционных ударных волнах энтропия всегда возрастает [41].

Следует подчеркнуть существенное различие между неэволюционностью и неустойчивостью. Неустойчивые состояния могут возникать при движении магнитогидродинамической среды под действием внутренних причин. Они существуют некоторое время, пока флуктуации не достигнут критической величины, после чего неустойчивое состояние разрушается. Что же касается неэволюционных разрывов, то они не могут возникать сами собой. Неэволюционные разрывы могут образоваться лишь под действием внешних факторов (например, при столкновении газовых масс). Они могут существовать лишь одно мгновение как разрывы в начальных условиях, после чего неэволюционные разрывы немедленно расщепляются на несколько ударных или автомодельных волн. Такое расщепление неэволюционной магнитогидродинамической ударной волны будет рассмотрено в п. 3.3.4 \*\*).

До сих пор при формулировке условий эволюционности магнитогидродинамических волн мы молчаливо предполагали, что для волн малой амплитуды отсутствует дисперсия, т. е. их скорость не зависит от частоты. В принципе фазовые скорости могут зависеть от частоты, например, в магнитной гидродинамике двухкомпонентной жидкости. В этом случае при формулировании условий эволюционности под скоростями волн малой амплитуды следует понимать фазовые скорости низкочастотных колебаний (в низкочастотном пределе дисперсия отсутствует), так как основная часть возмущения движется с фазовой скоростью низкочастотных волн [42] \*\*\*).

\*) При некоторых значениях параметров точка  $u_{1z} = v_{1+}$ ,  $u_{2z} = v_{2-}$  расположена левее [38] линии 2—3—4.

\*\*) Если ударную волну рассматривать не как разрыв, а как быстрый, но непрерывный переход из одного состояния в другое, то эволюцию нестационарных возмущений можно исследовать только с помощью электронных счетных машин. Подобные вычисления подтверждают сделанный выше вывод о расщеплении неэволюционных ударных волн [43—45].

\*\*\*) Об ошибках, связанных с неучетом дисперсии скорости звука в магнитной гидродинамике, см. [47].

Заметим в этой связи, что скорость звука в газе, входящую в выражение (2.1.1.10), следует определять по формуле

$$v_s = \sqrt{(f+2)T/f},$$

где  $T$  — температура и  $f$  — полное число степеней свободы молекулы. Величину  $v_s$ , которую обычно называют *скоростью равновесного звука*, следует отличать от *скорости замороженного звука*  $v_\infty = \sqrt{5T/3}$ , соответствующего выключению внутренних степеней свободы молекулы.

Подчеркнем, что в условия эволюционности входит именно равновесная скорость звука (которая не превосходит скорости замороженного звука).

**3.2.2. Структура ударных волн.** Изучая разрывы в магнитной гидродинамике, мы молчаливо предполагали, что магнитогиродинамическая среда является идеальной. Это предположение носит принципиальный характер, так как в реальной среде течения всегда непрерывны и только приближенно могут рассматриваться как разрывные. Такое различие между идеальной и реальной средами связано с тем, что они описываются существенно различными дифференциальными уравнениями. Действительно, уравнения магнитной гидродинамики идеальной среды получаются путем отбрасывания членов, описывающих диссипативные эффекты (вязкость, теплопроводность и выделение Джоуля тепла). Так как эти члены содержат старшие производные по координатам, то при отбрасывании их понижается порядок дифференциальных уравнений, что приводит к уменьшению числа постоянных интегрирования, вследствие чего становится невозможным удовлетворить граничные условия. Для их удовлетворения и вводят в рассмотрение разрывные решения [48].

Поясним сказанное на примере. Пусть требуется найти решение дифференциального уравнения

$$\varepsilon \frac{d^2 \mathcal{Q}}{dz^2} + \mathcal{Q} \frac{d\mathcal{Q}}{dz} = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (3.2.2.1)$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\mathcal{Q}(-\infty) = -1, \quad \mathcal{Q}(+\infty) = 1. \quad (3.2.2.2)$$

Решение этой задачи имеет вид

$$\mathcal{Q} = \operatorname{th} \frac{z}{2\varepsilon}. \quad (3.2.2.3)$$

Вместе с тем при малых  $\varepsilon$  представляется естественным отбросить в уравнении (3.2.2.1) первый член и исходить из упрощенного уравнения

$$\mathcal{Q} \frac{d\mathcal{Q}}{dz} = 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (3.2.2.4)$$

Его решение имеет вид

$$\mathcal{A} = C, \quad (3.2.2.5)$$

где  $C$  — константа, и не удовлетворяет двум граничным условиям (3.2.2.2). Однако оно удовлетворяет уравнению (3.2.2.1) при  $|z| \gg \varepsilon$ . В самом деле, переходя в точном решении (3.2.2.3) к пределу  $\varepsilon \rightarrow 0$ , получим

$$\mathcal{A} = \begin{cases} 1, & \text{если } z > 0, \\ -1, & \text{если } z < 0. \end{cases} \quad (3.2.2.6)$$

Это решение в области  $z > 0$  соответствует (3.2.2.5) при  $C = 1$ , а в области  $z < 0$  — (3.2.2.5) при  $C = -1$ . Таким образом, при  $\varepsilon \rightarrow 0$  непрерывное решение (3.2.2.3) стремится к разрывному (3.2.2.6).

Аналогичная ситуация имеет место и в обычной, и в магнитной гидродинамиках, когда мы переходим от уравнений реальной среды, учитывающих эффекты, связанные с диссипацией энергии, к уравнениям идеальной среды, не учитывающим их; тогда из непрерывных решений дифференциальных уравнений реальной среды возникают разрывные решения дифференциальных уравнений идеальной среды. Существенно здесь то, что непрерывные решения практически совпадают с разрывными везде, кроме узкого слоя вблизи поверхности разрыва.

Мы видим, таким образом, что можно поставить задачу о *структуре разрывов*, причем для ее решения, очевидно, необходим учет эффектов диссипации.

Определим структуру установившейся магнитогидродинамической ударной волны малой интенсивности. Для этого нужно обратиться к системе дифференциальных уравнений (2.1.3.2). Чтобы, однако, не затемнять основную идею, рассмотрим некоторую математическую модель, основанную на использовании одного дифференциального уравнения

$$\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} + Z(\mathcal{A}) \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial z} = D \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial z^2} \quad (3.2.2.7)$$

для одной магнитогидродинамической переменной  $\mathcal{A}$ , зависящей от  $t$  и  $z^*$ ).

Как мы видели выше, величина  $Z(\mathcal{A})$  совпадает с фазовой скоростью распространения малых возмущений ( $Z(\mathcal{A}) = v_{ph}(\mathcal{A})$ ), а величина  $D$  определяет диссипацию энергии ( $D > 0$ ).

Рассмотрим ударную волну, движущуюся относительно среды вдоль оси  $z$  со скоростью  $u_{sh}$ . Если ударная волна является установившейся (т. е. ее профиль не меняется с течением времени),

\*) Нахождение структуры ударной волны в случае системы уравнений осуществлено в обзоре [49].

то величина  $\mathcal{Q}$  не будет зависеть от  $t$  и  $z$  порознь, а будет зависеть от  $t$  и  $z$  только в комбинации

$$u_{sh}t - z \equiv \xi,$$

и поэтому

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial t} = u_{sh} \frac{d\mathcal{Q}}{d\xi}, \quad \frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial z} = - \frac{d\mathcal{Q}}{d\xi} \quad (3.2.2.8)$$

(области пространства, расположенной впереди ударной волны, соответствует  $\xi = -\infty$ , а области позади волны —  $\xi = +\infty$ ). Подстановка последних выражений в (3.2.2.7) дает

$$u_{sh} \frac{d\mathcal{Q}}{d\xi} - v_{ph}(\mathcal{Q}) \frac{d\mathcal{Q}}{d\xi} = D \frac{d^2 \mathcal{Q}}{d\xi^2}.$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$u_{sh}\eta - \int_0^\eta v_{ph}(\eta') d\eta' = D \frac{d\eta}{d\xi}, \quad (3.2.2.9)$$

где  $\eta = \mathcal{Q} - \mathcal{Q}_1$  и  $\mathcal{Q}_1$  — значение величины  $\mathcal{Q}$  впереди ударной волны (т. е. в невозмущенной области), в которой  $d\mathcal{Q}/d\xi$  обращается в нуль.

Будем рассматривать ударные волны малой интенсивности; тогда функцию  $v_{ph}(\eta)$  можно разложить в ряд по степеням  $\eta$  и ограничиться первыми двумя членами разложения

$$v_{ph}(\eta) = v_{ph}(0) + \eta \left( \frac{dv_{ph}}{d\eta} \right)_0.$$

Подставляя это выражение в уравнение (3.2.2.9), получим

$$\eta = \frac{1}{2} \eta_0 \left( 1 + \operatorname{th} \frac{\xi}{L_{sh}} \right), \quad (3.2.2.10)$$

где

$$L_{sh} = \frac{2D}{u_{sh} - v_{ph}(0)}, \quad \eta_0 = \frac{2[u_{sh} - v_{ph}(0)]}{(dv_{ph}/d\eta)_0}, \quad (3.2.2.11)$$

мы считаем, что ударной волне соответствуют положительные значения  $\eta$ .

Рассматриваемое нами решение имеет, очевидно, смысл, если  $u_{sh} - v_{ph}(0) > 0$ . Это условие означает, что ударная волна движется относительно невозмущенной среды со скоростью, превышающей скорость распространения малых возмущений и  $u_{sh} - v_{ph}(0)$  может служить мерой интенсивности ударной волны. Формула (3.2.2.10) показывает, что профиль ударной волны малой интенсивности имеет вид гиперболической тангенсоиды [49]. Та-

кой профиль характерен для ударных волн в обычной [4] и в магнитной гидродинамике (нерелятивистской [50] и релятивистской [51]), а также в гидродинамике двухкомпонентной жидкости [52].

Заметим, что по закону (3.2.2.10) изменяются не все макроскопические величины, характеризующие ударную волну, а только те, которые не являются инвариантами Римана. Что касается инвариантов Римана,  $\mathcal{R}_j$ , то они, если учитывать в разложении  $v_{ph}(\eta)$  только два первых слагаемых, изменяются по закону [49]

$$\mathcal{R}_j = \mathcal{R}_{j0} + \frac{\Delta \mathcal{R}_j}{ch^2(\xi/L_{sh})},$$

где  $\mathcal{R}_{j0}$  и  $\Delta \mathcal{R}_j$  не зависят от  $\xi$ .

В частности, инвариантом Римана является энтропия, которая, как и все инварианты Римана, не изменяется в ударной волне, если в разложении  $v_{ph}(\eta)$  учитываются два первых слагаемых. Учет третьего слагаемого приводит, однако, как и должно быть, к росту энтропии [4].

Величина  $L_{sh}$ , входящая в формулу (3.2.2.10), представляет собой, очевидно, ширину ударной волны. Из (3.2.2.11) следует, что ширина ударной волны пропорциональна величине  $D$ , определяющей диссипацию энергии, и обратно пропорциональна величине  $u_{sh} - v_{ph}(0)$ , служащей мерой интенсивности ударной волны.

Используя формулу (2.1.3.3) для матрицы  $\hat{D}$  и замечая, что по порядку величин ее можно заменить следом матрицы  $\hat{D}$  ( $\hat{D} \sim \sim \sum_j D_{jj}$ ), получим для  $L_{sh}$  выражение

$$L_{sh} \sim \frac{\nu + \nu_m + (\kappa/\rho T)(\partial T/\partial s)_\rho}{u_{sh} - v_{ph}(0)},$$

где  $\nu$  — коэффициент вязкости,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности и  $\nu_m$  — коэффициент магнитной вязкости. Так как (см. [4])

$$\nu \sim lv_i, \quad \frac{\kappa}{\rho T} \left( \frac{\partial T}{\partial s} \right)_\rho \sim lv_e, \quad \nu_m \sim \frac{c^2}{4\pi\sigma},$$

где  $l$  — длина свободного пробега частиц плазмы (не зависящая, согласно (1.4.1.4), от их сорта),  $v_i$  и  $v_e$  — тепловые скорости ионов и электронов и  $\sigma \sim e^2 n l / m_e v_e$  — электропроводность плазмы, то

$$L_{sh} \sim l' \frac{v_i}{u_{sh} - v_{ph}(0)}, \quad (3.2.2.12)$$

где  $l' = l + d^2/l$ ,  $d^2 = m_i c^2 / 4\pi e^2 n$ ,  $m_i$  — масса иона.

Для ударной волны малой интенсивности  $u_{sh} - v_{ph}(0) \ll v_i$ , и, следовательно,  $L_{sh} \gg l'$ , т. е. ширина ударной волны малой интенсивности значительно больше длины свободного пробега частиц  $l$ .

Заметим, что в случае разреженной высокотемпературной плазмы, когда длина свободного пробега очень велика ( $l' \sim l$ ). Напротив, для плотных низкотемпературных магнитогидродинамических сред с частыми столкновениями частиц [53, 54]  $l' \sim d^2/l$ .

До сих пор мы рассматривали ударную волну малой интенсивности, что позволяло в разложении функции  $v_{ph}(\eta)$  в уравнении (3.2.2.9) по степеням  $\eta$  сохранять только два первых слагаемых. Но можно исследовать также ударную волну большой интенсивности, не разлагая функцию  $v_{ph}(\eta)$  в ряд по степеням  $\eta$ . Не останавливаясь подробно на этом исследовании, приведем здесь только основные его результаты.

Прежде всего, если учитывать следующие члены в разложении  $v_{ph}(\eta)$ , то профиль ударной волны будет описываться уже не гиперболическим тангенсом, а более сложной функцией. Далее, оказывается, что макроскопические величины могут изменяться не монотонно в ударной волне даже в отсутствие внешних полей (см. ниже п. 3.2.3). В частности, в достаточно интенсивной ударной волне температура всегда имеет максимум [55].

Если в ударной волне малой интенсивности различные диссипативные процессы в равной мере влияют на ее структуру, то в случае ударной волны большой интенсивности ситуация существенно изменяется. Так, если учитывать только вязкость, то получается непрерывная структура ударной волны (например, типа (3.2.2.10)). Если же учитывать только теплопроводность и не учитывать вязкости, то в ударной волне большой интенсивности непрерывная структура вообще не возникает [4] (см. также [42, 56—59]).

Заметим, что существование непрерывной структуры ударной волны тесно связано с ее эволюционностью. Именно, если ударная волна эволюционна, то при любых отличных от нуля значениях всех диссипативных коэффициентов существует единственная непрерывная структура ударной волны. Напротив, если эта волна не эволюционна, то уравнения гидродинамики с учетом диссипативных процессов не приводят к однозначной ее структуре [56, 60—62].

Все результаты, относящиеся к ударным волнам большой интенсивности, получены в предположении, что уравнение Навье—Стокса (или другие подобные ему дифференциальные уравнения) правильно описывают структуру ударной волны сколь угодно большой интенсивности [56]. Между тем при увеличении интенсивности ударной волны уменьшается ее ширина и при  $L_{sh} \sim l$  нарушатся условия применимости гидродинамического описания. Поэтому использование уравнения Навье—Стокса законно только при  $L_{sh} \gg l$ . Если же интенсивность ударной волны столь велика, что  $L_{sh}$  становится порядка  $l$ , то уравнение Навье—Стокса в лучшем случае может дать только качественно правильные результаты.

При  $L_{sh} \sim l$  необходимо не гидродинамическое, а кинетическое описание, базирующееся на использовании не дифференциальных, а интегродифференциальных кинетических уравнений.

Задача о структуре ударной волны в кинетической теории формулируется следующим образом. Заданы кинетические уравнения для функций распределения частиц  $F_\alpha \equiv F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{vB}]) \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right)_c,$$

где  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — самосогласованные электрическое и магнитное поля и  $(\partial F_\alpha / \partial t)_c$  — интегралы столкновений частиц (индекс  $\alpha$  служит для указания сорта частиц). Моменты функций распределения определяют различные макроскопические величины; например, плотность  $\rho$  и макроскопическую скорость  $\mathbf{u}$  находят из формул

$$\rho = \sum_\alpha m_\alpha \int F_\alpha d^3v, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{\rho} \sum_\alpha m_\alpha \int \mathbf{v} F_\alpha d^3v.$$

Требуется найти такие стационарные (т. е. не зависящие от времени) решения кинетических уравнений, которые приводили бы к скачкам магнитогидродинамических величин

$$\Delta \rho \equiv \rho|_{z=+\infty} - \rho|_{z=-\infty}, \quad \Delta \mathbf{u} \equiv \mathbf{u}|_{z=+\infty} - \mathbf{u}|_{z=-\infty},$$

связанным между собой граничными условиями, установленными в п. 3.1.1 (ось  $z$  совпадает с направлением распространения ударной волны).

В такой общей постановке эта задача слишком сложна и решение ее пока неизвестно. Некоторые упрощения наступают, если вместо точного выражения для интеграла столкновений использовать выражение вида [63]

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c = - \frac{F - f_0}{\tau},$$

где  $\tau$  — среднее время релаксации, не зависящее от скорости,  $f_0$  — локально равновесная (максвелловская) функция распределения

$$f_0 = \left[ \frac{m}{2\pi T(\mathbf{r})} \right]^{3/2} n(\mathbf{r}) \exp \left[ - \frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}))^2}{2T(\mathbf{r})} \right],$$

$n$ ,  $\mathbf{u}$  и  $T$  — локальные плотность, скорость и температура. Однако и с таким упрощенным модельным интегралом столкновений задача все еще остается очень сложной, так что решение ее удается получить только для случая ударной волны малой интенсивности и в отсутствие электромагнитных полей [64].

Особенностью полученного решения [65, 66] является то, что вдали от фронта ударной волны макроскопические величины

изменяются как  $\exp[-(|z|/L_{sh})^{2/3}]$ , тогда как в гидродинамической теории это изменение происходит по закону  $\exp(-|z|/L_{sh})$ .

Другой подход [67—73] к исследованию структуры ударной волны в рамках кинетической теории заключается в постулировании вида функции распределения; именно, принимается, что функция распределения имеет вид суперпозиции двух локально равновесных функций максвелловских распределений, т. е.

$$F = \left[ \frac{m}{2\pi T_1(\mathbf{r})} \right]^{3/2} n_1(\mathbf{r}) \exp \left\{ -\frac{m [v - \mathbf{u}_1(\mathbf{r})]^2}{2T_1(\mathbf{r})} \right\} + \left[ \frac{m}{2\pi T_2(\mathbf{r})} \right]^{3/2} n_2(\mathbf{r}) \exp \left\{ -\frac{m [v - \mathbf{u}_2(\mathbf{r})]^2}{2T_2(\mathbf{r})} \right\},$$

где  $n_1, n_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, T_1, T_2$  — некоторые функции координат; затем с помощью кинетических уравнений (которым эти функции, строго говоря, не удовлетворяют) находят моменты функции распределения, т. е. соотношения между функциями  $n_1, n_2, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, T_1, T_2$ . Мы не будем, однако, подробнее рассматривать здесь этот подход.

**3.2.3. Осцилляционная структура ударной волны при наличии внешнего магнитного поля.** Чтобы понять, какие качественно новые черты в структуре ударной волны должны возникать при увеличении ее интенсивности, рассмотрим простейший случай, когда имеются две группы частиц — ионы и электроны, — движущиеся с различными скоростями, и тепловой разброс частиц по скоростям очень мал. В этом случае скорости ионов и электронов  $\mathbf{u}_i$  и  $\mathbf{u}_e$  подчиняются уравнениям гидродинамики двухкомпонентной жидкости

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial n_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div} n_\alpha \mathbf{u}_\alpha &= 0, \\ m_\alpha n_\alpha \frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + m_\alpha n_\alpha (\mathbf{u}_\alpha \nabla) \mathbf{u}_\alpha &= e_\alpha n_\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_\alpha \mathbf{B}] \right) + \mathbf{R}_\alpha, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3.1)$$

где  $n_\alpha$  — плотность частиц сорта  $\alpha$  ( $\alpha = e, i$ ),  $\mathbf{R}_\alpha$  — сила трения, испытываемая частицами сорта  $\alpha$  со стороны частиц другого сорта

$$\mathbf{R}_e = -\mathbf{R}_i = -m_e n_e \nu \mathbf{u}_e$$

( $\nu$  — коэффициент трения, связанный с электропроводностью соотношением  $\sigma = e^2 n_e / m_e \nu$ ),  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — электрическое и магнитное поля, удовлетворяющие уравнению Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (3.2.3.2)$$

В уравнениях (3.2.3.1) отсутствуют гидродинамическое давление и силы вязкости в силу сделанного предположения о малом тепловом разбросе частиц по скоростям.

Рассмотрим теперь, основываясь на этих уравнениях, ударную волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $z$  со скоростью  $u_1$ .

Пусть впереди фронта волны ( $z = -\infty$ ) состояние плазмы характеризуется следующими значениями переменных:

$$n_e = n_i = n_1, \quad u_e = u_i = 0, \quad B_x = B_1, \quad B_y = B_z = 0, \quad E = 0.$$

Тогда из уравнений (3.2.3.1), (3.2.3.2) следует, что величины  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $B_y$ ,  $B_z$ ,  $u_{ex}$  и  $u_{ey}$  будут равны нулю не только впереди ударной волны, но и на всем ее протяжении, т. е.  $E_x = E_y = B_y = B_z = u_{ex} = u_{ix} = 0$  при  $-\infty < z < \infty$ .

Чтобы найти состояние плазмы в ударной волне, перейдем в систему отсчета, движущуюся со скоростью фронта волны  $u_1$ . В ней состояние плазмы не зависит от времени и, кроме того, все величины не зависят от  $x$  и  $y$ . Ясно, что в этой системе будет существовать постоянное электрическое поле

$$E_y = E = -u_1 B_1 / c, \quad E_x = E_z = 0. \quad (3.2.3.3)$$

Мы будем предполагать, что всюду выполняется условие квазинейтральности  $n_e = n_i = n$  и пренебрежем поперечным движением ионов. При таких предположениях справедливо, очевидно, равенство  $u_{ez} = u_{iz} = u_z$ .

Из уравнения Максвелла (3.2.3.2) следует, что

$$j_y = \frac{c}{4\pi} \frac{dB_x}{dz},$$

а так как  $j_y = -en u_{ey}$  ( $|u_{iy}| \ll |u_{ey}|$ ), то

$$u_{ey} = -\frac{c}{4\pi en} \frac{dB_x}{dz}. \quad (3.2.3.4)$$

Складывая вторые уравнения (3.2.3.1) для электронной и ионной компонент, получим

$$m_i n u_z \frac{du_z}{dz} = -\frac{d}{dz} \frac{B_x^2}{8\pi},$$

откуда

$$u_z = \frac{B_1^2 - B_x^2}{8\pi m_i n_1 u_1} + u_1. \quad (3.2.3.5)$$

Запишем далее выражение для проекции второго уравнения (3.2.3.1) для электронов на ось  $y$ :

$$m_e n u_z \frac{du_{ey}}{dz} = -en E_y - \frac{en}{c} u_z B_x - m_e n u_{ey};$$

используя теперь соотношения (3.2.3.3)—(3.2.3.5), находим следующее уравнение для  $B_x \equiv B$  [74]:

$$\frac{d^2 B}{dt_*^2} + v \frac{dB}{dt_*} + \Phi(B) = 0, \quad (3.2.3.6)$$

где  $dt_* = dz/v_z$  и

$$\Phi(B) = \frac{\omega_{pe}^2 u_1^2}{c^2} \left[ \frac{B(B^2 - B_1^2)}{8\pi m_i n_1 u_1^2} - (B - B_1) \right]$$

( $\omega_{pe}$  — электронная ленгмюровская частота).

Это нелинейное уравнение определяет магнитное поле в ударной волне. Найдем прежде всего магнитное поле позади ударной волны, т. е. при  $t_* = +\infty$  (волна распространяется в отрицательном направлении оси  $z$ ). В этой области

$$\frac{dB}{dt_*} = \frac{d^2 B}{dt_*^2} = 0,$$

и следовательно,

$$\Phi(B) = 0. \quad (3.2.3.7)$$

Последнее уравнение имеет три решения

$$B^{(1)} = B_1, \quad B^{(2,3)} = \frac{1}{2} B_1 \pm \sqrt{\frac{1}{4} B_1^2 + 8\pi m_i n_1 u_1^2}. \quad (3.2.3.8)$$

Решение  $B^{(1)}$  соответствует, очевидно, не ударной волне, для которой характерно различие в начальном и конечном состояниях  $B|_{z=-\infty} \neq B|_{z=+\infty}$ , а *уединенной волне* (или *солитону*), для которой конечное состояние совпадает с исходным, т. е.  $B|_{z=-\infty} = B|_{z=+\infty}$ . Из оставшихся двух решений  $B^{(2)}$  и  $B^{(3)}$  ударной волне соответствует решение со знаком плюс перед корнем, т. е.

$$B^{(2)} = -\frac{1}{2} B_1 + \sqrt{\frac{1}{4} B_1^2 + 8\pi m_i n_1 u_1^2} \equiv B_2.$$

Решение же  $B^{(3)}$  не имеет смысла, поскольку, как будет показано ниже (см. п. 3.3.1), поперечное магнитное поле не может изменить своего знака при переходе через фронт ударной волны. Поэтому, считая что  $B_1 > 0$ , мы должны взять в формуле (3.2.3.8) корень квадратный со знаком плюс.

Выясним теперь, как ведет себя магнитное поле при  $t_* = \pm\infty$ . Полагая, что при  $t_* = -\infty$

$$B = B_1 + \tilde{B}_1, \quad |\tilde{B}_1| \ll B_1$$

и линеаризуя уравнение (3.2.3.6) по  $\tilde{B}_1$ , получим

$$\frac{d^2 \tilde{B}_1}{dt_*^2} + v \frac{d\tilde{B}_1}{dt_*} + \omega_h (M_1^2 - 1) \tilde{B}_1 = 0, \quad (3.2.3.9)$$

где  $\omega_h = eB_1/c\sqrt{m_e m_i}$  — гибридная частота, и  $M_1 = u_1 \sqrt{4\pi m_i n_1}/B_1$  — число Маха впереди ударной волны.

Решение уравнения (3.2.3.9), обращающееся в нуль при  $t_* \rightarrow -\infty$ , имеет вид

$$B_1 = C_1 \exp(\mu_1 t_*), \quad \text{Re } \mu_1 > 0,$$

где

$$\mu_1 = -1/2\nu + (1/4\nu^2 + (M_1^2 - 1)\omega_B^2)^{1/2}$$

и  $C_1$  — некоторая константа.

Таким образом, при  $t_* \rightarrow -\infty$  магнитное поле  $B$  монотонно приближается к  $B_1$ .

Рассмотрим теперь, как ведет себя магнитное поле позади ударной волны ( $t_* = +\infty$ ).

Полагая

$$B = B_2 + \tilde{B}_2, \quad |\tilde{B}_2| \ll B_2$$

и снова линеаризуя уравнение (3.2.3.6), получим

$$\frac{d^2 \tilde{B}_2}{dt_*^2} + \nu \frac{d \tilde{B}_2}{dt_*} + \frac{\omega_{pe}^2 u_1^2}{c^2} \left( \frac{3B_2^2 - B_1^2}{8\pi m_1 n_1 u_1^2} - 1 \right) \tilde{B}_2 = 0, \quad (3.2.3.9')$$

откуда

$$\tilde{B}_2 = C_2 \exp(\mu_2 t_*), \quad \text{Re } \mu_2 < 0,$$

где

$$\mu_2 = -1/2\nu \pm \left( 1/4\nu^2 - \frac{\omega_{pe}^2 u_1^2}{c^2} \left( \frac{3B_2^2 - B_1^2}{8\pi m_1 n_1 u_1^2} - 1 \right) \right)^{1/2}$$

и  $C_2$  — константа.

Мы видим, что при достаточно малых  $\nu$ , когда справедливо неравенство

$$\nu < \frac{2\omega_{pe} u_1}{c} \left( \frac{3B_2^2 - B_1^2}{8\pi m_1 n_1 u_1^2} - 1 \right)^{1/2}, \quad (3.2.3.10)$$

величина  $\mu_2$  оказывается комплексной, т. е. ударная волна имеет осцилляционную структуру.

Легко видеть, что пространственный период осцилляции равен

$$\lambda \equiv \frac{2\pi u_1}{|\text{Im } \mu_2|} = 2\pi u_1 \left[ \frac{\omega_{pe}^2 u_1^2}{c^2} \left( \frac{3B_2^2 - B_1^2}{8\pi m_1 n_1 u_1^2} - 1 \right) - 1/4\nu^2 \right]^{-1/2}$$

а ширина ударной волны, т. е. то расстояние, на котором затухают осцилляции, равна

$$L_{sh} \equiv \frac{2\pi u_1}{|\text{Re } \mu_2|} = \frac{4\pi u_1}{\nu}.$$

При больших магнитных полях и  $M_1 \sim 1$  для периода осцилляции имеем

$$\lambda \sim c/\omega_{pe}.$$

Если величина  $\nu$  достаточно велика, т. е.

$$\nu > \frac{2\omega_{pe}u_1}{c} \left( \frac{3B_2^2 - B_1^2}{8\pi m_i n_1 u_1^2} - 1 \right)^{1/2},$$

то величина  $\mu_2$  вещественна и, следовательно, магнитное поле монотонно изменяется от  $B_1$  к  $B_2$ . Ширина ударной волны равна в этом случае

$$L'_{sh} = 2\pi u_1 \left\{ \frac{1}{2}\nu - \left[ \frac{1}{4}\nu^2 - \frac{\omega_{pe}u_1^2}{c^2} \left( \frac{3B_2^2 - B_1^2}{8\pi m_i n_1 u_1^2} - 1 \right) \right]^{1/2} \right\}^{-1}$$

Очевидно, что она больше ширины ударной волны в предыдущем («осцилляционном») случае.

Обратим внимание на то обстоятельство, что для ударной волны малой интенсивности величина  $B_2$  близка к  $B_1$ , правая часть неравенства (3.2.3.10) стремится к нулю и само неравенство не может выполняться. Таким образом, ударные волны малой интенсивности не могут иметь осцилляционную структуру. Легко видеть, что в этом случае профиль ударной волны имеет вид гиперболической тангенсоиды.

Уравнение (3.2.3.6) имеет вид уравнения одномерного ангармонического осциллятора с потенциальной энергией

$$W(B) = \int_{B_1}^B \Phi(\xi) d\xi = \frac{(B_1 - B_2)^2}{2} \left[ \frac{(B_1 + B_2)^2}{16\pi m_i n_1 u_1^2} - 1 \right],$$

Рис. 3.2.4. График потенциальной энергии осциллятора  $W(B)$ .

$a$  — состояние впереди ударной волны,  $b$  — состояние на вершине солитона,  $c$  — состояние позади ударной волны. Ломаная линия со стрелкой показывает направление изменения магнитогидродинамических величин в случае осцилляционной структуры.

причем роль координаты осциллятора играет магнитное поле (масса осциллятора равна единице).

На рис. 3.2.4 изображена потенциальная энергия  $W$  как функция  $B$ . Если бы не было «трения» ( $\nu=0$ ), то движение осциллятора происходило бы между точками  $a$  и  $b$ . Точка  $a$  соответствует исходному состоянию осциллятора, при котором  $dB/dt_* = 0$ ,  $B=B_1$ .

Вследствие трения точка, изображающая состояние осциллятора, будет перемещаться по зигзагообразной линии и стремиться к положению равновесия  $c$ . (Точка  $c$  соответствует конечному состоянию осциллятора, при котором  $dB/dt_* = 0$ ,  $B=B_2$ .)

Обратим внимание на то, что если  $v \neq 0$ , но  $v \rightarrow 0$ , то конечному состоянию осциллятора будет по-прежнему соответствовать положение  $c$ , а не  $a$ .

Картина движения осциллятора становится более наглядной, если перейти к фазовой плоскости  $(B, \dot{B})$ ,  $\dot{B} \equiv d\dot{B}/dt_*$  (рис. 3.2.5).

Легко видеть, что точка  $a$  является особенностью типа седла, а точка  $c$  — либо типа центра (при  $v=0$ ), либо типа устойчивого фокуса (при  $v \neq 0$ ). Замкнутая линия  $aba$  представляет собой сепаратрису, внутри которой заключены траектории, соответствующие финитному движению, а снаружи — траектории, соответствующие инфинитному движению (эта область на рис. 3.2.5 заштрихована).

Умножая уравнение (3.2.3.6) на  $d\dot{B}/dt_*$ , получим закон сохранения энергии

$$\frac{d}{dt_*} \left[ \frac{1}{2} \dot{B}^2 + W(B) \right] = -v \dot{B}^2 < 0. \quad (3.2.3.11)$$

При  $v=0$  точка, изображающая магнитное поле в ударной волне, движется по сепаратрисе

$$\frac{1}{2} \dot{B}^2 + W(B) = \text{const}$$

(линия  $aba$  на рис. 3.2.5). Если же  $v \neq 0$ , то фазовая траектория, выходя из точки  $a$ , будет оканчиваться в точке  $c$ .

**3.2.4. Случай вырождения.** Остановимся теперь немного подробнее на нескольких важных вырожденных магнитогидродинамических разрывах.

Мы рассмотрим прежде всего *параллельную ударную волну*, для которой граничные условия имеют такой же вид, как и в отсутствие магнитного поля. Наличие магнитного поля изменяет лишь условия эволюционности, что приводит в ряде случаев к расщеплению этой гидродинамической ударной волны. Далее мы займемся исследованием *магнитогидродинамических особых ударных волн*, существование которых было поставлено под сомнение из-за их неэволюционности в линейной теории [34, 75, 76], и, наконец, обратимся к *альвеновским разрывам*: здесь придется также выяснить вопрос об их существовании, так как эти разрывы не имеют стационарной структуры [50, 38].

Начнем с рассмотрения параллельной магнитогидродинамической ударной волны. Если впереди такой волны альвеновская

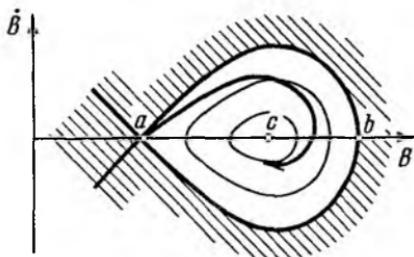


Рис. 3.2.5. Фазовые траектории, соответствующие изменению магнитного поля в ударной волне.

Недоступная область, соответствующая инфинитному движению, заштрихована. Буквы  $a$ ,  $b$ ,  $c$  имеют тот же смысл, что и на рис. 3.2.4.

скорость меньше скорости звука  $v_{1As} < v_{1s}$ , то скорости медленной и быстрой магнитозвуковых волн совпадают соответственно с альвеновской скоростью и скоростью звука, т. е.

$$v_{1-} = v_{1As}, \quad v_{1+} = v_{1s}. \quad (3.2.4.1)$$

Так как в ударной волне происходит увеличение плотности и температуры и, кроме того, альвеновская скорость является убывающей функцией плотности, а скорость звука — возрастающей функцией температуры, то позади ударной волны альвеновская скорость будет оставаться меньше скорости звука ( $v_{2As} < v_{2s}$ ); при этом позади ударной волны выполняются условия, аналогичные (3.2.4.1), а именно

$$v_{2-} = v_{2As}, \quad v_{2+} = v_{2s}. \quad (3.2.4.2)$$

Рис. 3.2.6. Условия эволюционности параллельной ударной волны при  $v_{1As} < v_{1s}$ .

Области неэволюционности отсутствуют.

Что касается условий эволюционности быстрой параллельной ударной волны, то, согласно (3.2.4.1), (3.2.4.2), они принимают вид

$$v_{1s} < u_{1z}, \quad v_{2As} < u_{2z} < v_{2s}. \quad (3.2.4.3)$$

На рис. 3.2.6 изображены линия Гюгонио  $u_{2z} \equiv u_{2z}(u_{1z})$ , а также графики функций  $v_{2As}(u_{1z})$  и  $v_{2s}(u_{1z})$  для параллельной магнитогидродинамической ударной волны в случае  $v_{1As} < v_{1s}$  (предполагается, что магнитогидродинамическая среда описывается уравнением состояния идеального газа).

Как видим, условия эволюционности быстрой параллельной магнитогидродинамической ударной волны (см. (3.2.4.3)) выполняются при любой ее интенсивности.

Более сложная картина возникает в случае параллельной ударной волны, если впереди нее альвеновская скорость превосходит скорость звука ( $v_{1As} > v_{1s}$ ). Так как на ударной волне альвеновская скорость  $v_{As}$  уменьшается, а скорость звука  $v_s$  увеличивается, то при малых интенсивностях ударной волны позади нее будет выполняться неравенство  $v_{2As} > v_{2s}$ , а при больших интенсивностях — противоположное неравенство  $v_{2As} < v_{2s}$ . Иными словами, графики функций  $v_{2As}(u_{1z})$  и  $v_{2s}(u_{1z})$  пересекаются (рис. 3.2.7).

Исследуем этот вопрос более подробно.

В случае параллельной ударной волны граничные условия (3.1.1.2), (3.1.1.3), (3.1.1.5), (3.1.1.7), (3.1.1.8) принимают такой же вид, как и в обычной гидродинамике:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 u_{1z} &= \rho_2 u_{2z}, \\ p_1 + \rho_1 u_{1z}^2 &= p_2 + \rho_2 u_{2z}^2, \\ 1/2 \rho_1 u_{1z}^2 + 5/2 \frac{p_1}{\rho_1} &= 1/2 \rho_2 u_{2z}^2 + 5/2 \frac{p_2}{\rho_2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4.4)$$

Мы воспользовались уравнением состояния идеального газа с показателем адиабаты Пуассона  $\gamma = 5/3$  и поэтому считаем тепловую функцию равной  $w_m = 5p/2\rho$ . Из (3.2.4.4) находим

$$\left. \begin{aligned} \rho_2 &= \rho_1 u_{1z} / u_{2z}, \\ p_2 &= p_1 + \rho_1 u_{1z} (u_{1z} - u_{2z}), \\ u_{2z} &= (u_{1z}^2 + 3v_{1s}^2) / 4u_{1z}, \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4.5)$$

где  $v_{1s} = \sqrt{5p_1/3\rho_1}$  — скорость звука. Последнее из уравнений (3.2.4.5) и представляет собой линию Гюгонио.

Для определения областей эволюционности ударной волны нужно еще найти  $v_{2Az}$  и  $v_{2s}$  как функции  $u_{1z}$ . Эти зависимости имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v_{2Az} &= \sqrt{u_{1z}^2 + 3v_{1s}^2} / 2u_{1z}, \\ v_{2s} &= \sqrt{(5u_{1z}^2 - v_{1s}^2)(u_{1z}^2 + 3v_{1s}^2)} / 4u_{1z}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4.6)$$

Графики функции  $u_{2z}(u_{1z})$  и функций, определяемых (3.2.4.6), изображены на рис. 3.2.7. Цифрами 1, 2, 3, 4 на нем отмечены следующие участки:

$$\begin{aligned} 1 & \quad v_{1s} < u_{1z} < v_{1Az}, \quad u_{2z} < v_{2s} < v_{2Az}, \\ 2 & \quad v_{1s} < u_{1z} < v_{1Az}, \quad u_{2z} < v_{2Az} < v_{2s}, \\ 3 & \quad v_{1s} < v_{1Az} < u_{1z}, \quad u_{2z} < v_{2Az} < v_{2s}, \\ 4 & \quad v_{1s} < v_{1Az} < u_{1z}, \quad v_{2Az} < u_{2z} < v_{2s}. \end{aligned}$$

Повторяя изложенные в п. 3.2.1 рассуждения, можно показать, что участки 1, 2, 4 эволюционны, а участок 3 — неэволюционен.

Из формул (3.2.4.5), (3.2.4.6) следует, что абсцисса точки пересечения линий  $u_{2z}(u_{1z})$  и  $v_{2Az}(u_{1z})$  равна  $u_{1z} = \sqrt{4v_{1Az}^2 - 3v_{1s}^2}$ . Поэтому

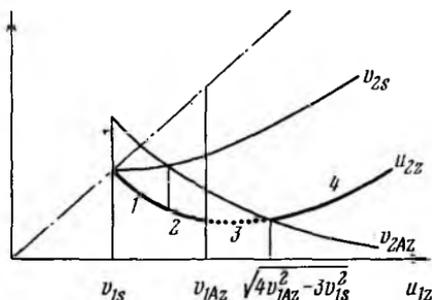


Рис. 3.2.7. Условия эволюционности параллельной ударной волны при  $v_{1Az} > v_{1s}$ .

Жирная линия — зависимость  $u_{2z}$  от  $u_{1z}$  (области эволюционности — сплошная линия, область неэволюционности — точечный пунктир). Тонкие линии — зависимость  $v_{2s}$  и  $v_{2Az}$  от  $u_{1z}$ .

параллельная ударная волна будет неэволюционной при выполнении условия

$$v_{1Az} < u_{1z} < \sqrt{4v_{1Az}^2 - 3v_{1s}^2}. \quad (3.2.4.7)$$

Перейдем теперь к рассмотрению особых ударных волн. Так как в быстрых ударных волнах тангенциальное магнитное поле  $|B_t|$  возрастает, а в медленных — убывает, то особая ударная волна с  $B_{1z}=0$  является быстрой, а волна  $B_{2z}=0$  — медленной.

Для определенности мы ограничимся случаем быстрой особой ударной волны, для которой, как было показано в п. 3.1.2,  $u_{2z} - v_{2Az} = 0$ .

Так как в быстрой ударной волне  $u_{1z} - v_{1Az} > 0$ , то из четырех альвеновских волн по обе стороны разрыва со скоростями  $u_z \pm v_{Az}$  расходящейся оказывается лишь одна волна, имеющая фазовую скорость  $u_{2z} + v_{2Az}$ . (Волна с нулевой фазовой скоростью не является расходящейся [30].)

Согласно условиям эволюционности число расходящихся альвеновских волн должно равняться двум, и поэтому на первый взгляд кажется, что особые ударные волны неэволюционны. Вместе с тем особые ударные волны обязательно возникают [49] при решении задачи о поршне, если вначале магнитное поле было перпендикулярно к его поверхности (см. ниже п. 3.3.3). В связи с этим вопрос об эволюционности особых ударных волн требует специального рассмотрения.

Так как тангенциальные компоненты магнитного поля, вообще говоря, возмущены, то особую ударную волну мы будем рассматривать как предельный случай неособой ударной волны, когда угол между вектором магнитного поля и нормалью к поверхности разрыва стремится к нулю. При этом мы ограничимся рассмотрением быстрой особой ударной волны.

Если поперечное магнитное поле впереди разрыва равно нулю  $B_{1x}=0$ , то возможны либо параллельная ударная волна (если  $B_{2x}=0$ ), либо особая ударная волна (если  $B_{2x} \neq 0$ ). Рассмотрим уравнения Гюгонио для этих ударных волн. Линия Гюгонио, соответствующая параллельной ударной волне, определяется на плоскости  $(u_{1z}, u_{2z})$  последним уравнением (3.2.4.5). Эволюционные участки для параллельной ударной волны изображены сплошной линией на рис. 3.2.8, а, а неэволюционные участки — пунктирной (для определенности полагаем, что  $v_{1Az} > v_{1s}$ ).

Мы видим, что линия Гюгонио для параллельной ударной волны состоит из двух участков, соответствующих медленной и быстрой волне.

На рис. 3.2.8, а, изображена также линия Гюгонио быстрой особой ударной волны (штрих-пунктирная линия), уравнение

которой в силу уравнений (3.1.4.1) и (3.1.2.2') имеет вид

$$u_{2z} = v_{1Az}^2 / u_{1z}. \quad (3.2.4.8)$$

Однако особая ударная волна существует не при всех значениях  $u_{1z}$ , так как при достаточно больших ее величинах поперечное магнитное поле  $B_{2z}$  позади особой ударной волны становится

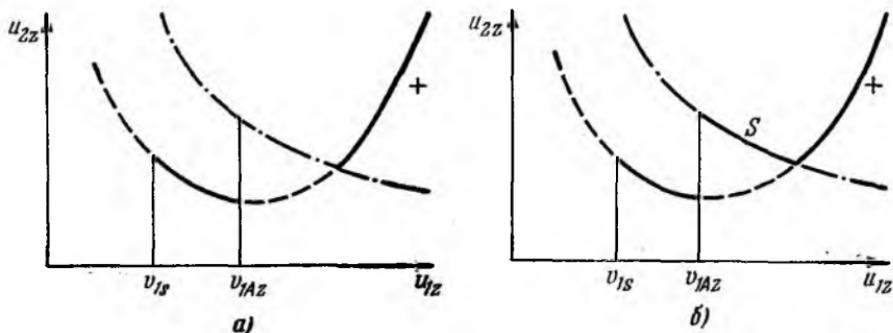


Рис. 3.2.8. Линия Гюгонио в переменных  $(u_{1z}, u_{2z})$  в случае  $B_{1z} = 0$ ,  $v_{1Az} > v_{1s}$ .

а) Параллельная ударная волна; б) параллельная и особая ударные волны. Сплошные линии — эволюционные участки линии Гюгонио. Знаком плюс отмечена быстрая параллельная ударная волна, знаком минус — медленная параллельная ударная волна, буквой  $S$  — линия Гюгонио для быстрой особой ударной волны. Точки пересечения кривых соответствуют  $\sqrt{4v_{1Az}^2 - 3v_{1s}^2}$ .

мнимым. В самом деле, из граничных условий (в случае уравнения состояния идеального газа с показателем адиабаты Пуассона  $\gamma = 5/3$ ) следует, что [77]

$$\frac{3B_z^2}{8\pi} = \frac{\rho_1 (u_{1z}^2 - v_{1Az}^2) (4v_{1Az}^2 - 3v_{1s}^2 - u_{1z}^2)}{v_{1Az}^2}. \quad (3.2.4.9)$$

Так как левая часть этого соотношения положительна и в силу условий эволюционности выполняется неравенство

$$u_{1z} > v_{1Az}, \quad (3.2.4.10)$$

то и правая часть (3.2.4.9) положительна, т. е.

$$u_{1z} < \sqrt{4v_{1Az}^2 - 3v_{1s}^2}. \quad (3.2.4.11)$$

Последние два неравенства ограничивают конечный участок (рис. 3.2.8, б), соответствующий быстрой особой ударной волне (сплошная линия, отмеченная буквой  $S$ ). В точке  $u_{1z} = \sqrt{4v_{1Az}^2 - 3v_{1s}^2}$  быстрая особая ударная волна примыкает к быстрой параллельной ударной волне.

Пусть теперь возникает бесконечно малая поперечная компонента магнитного поля  $B_{1x}$ . Тогда в уравнении Гюгоню (3.2.4.5), соответствующем параллельной волне, появятся бесконечно малые добавки. Что же касается уравнения (3.2.4.8) для особой волны, то оно будет иметь два бесконечно близких решения [78]:

$$\left. \begin{aligned} u_{2x}^{(1)} &= \frac{v_{1Ax}^2}{u_{1x}} - \frac{v_{1Ax}v_{1Ax}}{u_{1x}} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{u_{1x}^2 - v_{1Ax}^2}{4v_{1Ax}^2 - 3v_{1s}^2 - u_{1x}^2}}, \\ u_{2x}^{(2)} &= \frac{v_{1Ax}^2}{u_{1x}} + \frac{v_{1Ax}v_{1Ax}}{u_{1x}} \sqrt{\frac{3}{2} \frac{u_{1x}^2 - v_{1Ax}^2}{4v_{1Ax}^2 - 3v_{1s}^2 - u_{1x}^2}} \end{aligned} \right\} \quad (3.2.4.12)$$

Первое из них соответствует неэволюционному разрыву (линия  $cd$  на рис. 3.2.9), а второе — эволюционной ударной волне (линия  $ef$ ).

Таким образом, бесконечно близко от особой ударной волны расположена эволюционная ветвь ударной волны. Поэтому особую ударную волну следует считать эволюционной.

Вопрос об эволюционности особых ударных волн можно исследовать и другим путем — изучая изменение структуры ударной волны с течением времени. Такие вычисления, которые удается осуществить только с помощью электронных счетных машин, также приводят к заключению об эволюционности особых ударных волн [45, 79, 80].

Из аналогичных соображений следует причис-

лять к эволюционным разрывам [37] альвеновский разрыв, в котором магнитное поле поворачивается на  $180^\circ$ , а также тангенциальный разрыв, где выполняются условия  $B_{1x}/\rho_1 = B_{2x}/\rho_2$ , несмотря на то, что оба эти разрыва формально неэволюционны [41].

Перейдем, наконец, к вопросу об осуществимости альвеновских разрывов. Так как скорость распространения альвеновского разрыва не зависит от его амплитуды (см. п. 3.1.2), то в первой формуле (3.2.2.11)  $u_s = v_{ph}(0)$ , т. е. знаменатель в ней обращается в нуль,

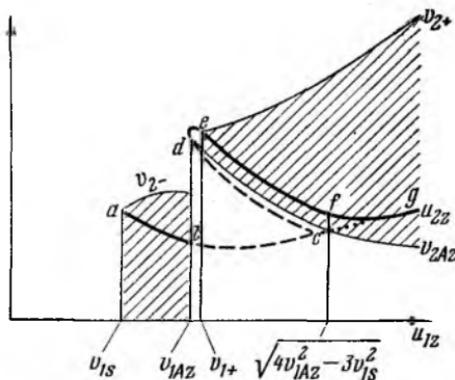


Рис. 3.2.9. Линия Гюгоню при  $|B_{1x}| \ll \ll |B_{1z}|$  и  $v_{1Ax} > v_{1s}$ .

Области эволюционности заштрихованы.  $ab$  — линия Гюгоню для ударной волны, близкой к медленной параллельной ударной волне,  $bc$  — линия Гюгоню для неэволюционного участка параллельной ударной волны,  $cd$  — неэволюционный участок линии Гюгоню, близкий к особой ударной волне,  $ef$  — быстрая ударная волна близкая к особой,  $fg$  — линия Гюгоню для ударной волны, близкой к быстрой параллельной ударной волне.

что свидетельствует об отсутствии стационарной структуры альвеновского разрыва. (Это следует также из того, что кинетическая, внутренняя и магнитная энергии среды по обе стороны альвеновского разрыва одинаковы, и поэтому не существует источника энергии, покрывающего диссипацию, связанную с поворотом вектора скорости и магнитных силовых линий.)

Вместе с тем альвеновский разрыв обязательно возникает при некоторых условиях при решении задачи о поршне (см. ниже п. 3.3.3). Поэтому такой разрыв должен иметь нестационарную структуру. Можно показать, что его ширина  $L_{sh}$  возрастает с течением времени по закону [10, 81]

$$L_{sh} \sim \sqrt{(\nu + \nu_m) t},$$

где  $\nu$  и  $\nu_m$  — гидродинамическая и магнитная вязкости. При малых значениях  $\nu$  и  $\nu_m$  время существования альвеновского разрыва может оказаться очень большим.

### § 3.3. Исследование разрывов

**3.3.1. Скачки различных величин.** При столкновении двух ударных волн или при мгновенном приведении в движение поршня возникает поверхность, на которой происходит скачок магнито-гидродинамических величин, т. е. образуется разрыв. На этой поверхности, вообще говоря, не выполняются законы сохранения (т. е. граничные условия (3.1.1.2), (3.1.1.3), (3.1.1.5), (3.1.1.7), (3.1.1.8)). Поэтому подобный разрыв не может существовать и сразу же расщепляется на ряд ударных и простых магнито-гидродинамических волн. Если пренебречь диссипацией энергии, то в задаче о расщеплении такого разрыва отсутствует параметр с размерностью длины, вследствие чего все простые волны оказываются автомодельными [4].

Каждая из возникших при расщеплении разрыва ударных и автомодельных волн «служит» для того, чтобы привести в соответствие с законами сохранения значения магнито-гидродинамических величин по обе стороны поверхности разрыва.

Для того чтобы понять необходимость возникновения той или иной волны, нужно прежде всего качественно исследовать скачки магнито-гидродинамических величин в волнах различных типов. Начнем с *простых автомодельных волн*. Пользуясь формулами (2.2.2.3), можно сделать определенные заключения о направлении изменения различных магнито-гидродинамических величин в быстрых и медленных автомодельных волнах [7]. Понимая под  $\Delta \mathcal{Q}_j$  изменение соответствующей магнито-гидродинамической величины (в данном случае изменение  $\rho$ ), имеем (см. п. 2.2.3)  $\Delta \rho < 0$ , т. е.

автомодельные волны являются волнами разрежения. Из соотношения  $dp = v_s^2 d\rho$  следует далее, что  $\Delta p < 0$ .

Переходя к исследованию направления изменения величин  $\Delta B_x$ ,  $\Delta u_x$ ,  $\Delta u_z$ , предположим для простоты, что  $\epsilon = +1$ ,  $B_x > 0$ ,  $B_z > 0$ . (В противном случае величины  $\Delta B_x$ ,  $\Delta u_z$  и  $\Delta u_x$  следует заменить на  $(\text{sgn } B_x) \Delta B_x$ ,  $\epsilon \Delta u_z$  и  $\epsilon \text{sgn } (B_x B_z) \cdot \Delta u_x$ .)

Из соотношения (2.2.2.3) находим, что в быстрых волнах  $\Delta B_x < 0$ ,  $\Delta u_z < 0$ ,  $\Delta u_x > 0$ . Знаки изменений этих величин в волнах разрежения, а также в других волнах приведены в таблице.

Таблица 3.3.1

Тип волны	Знаки		
	$\Delta B_x$	$\Delta u_z$	$\Delta u_x$
Быстрая ударная волна $U^+$	+	+	-
Быстрая волна (автомодельная) $P^+$	-	-	+
Альвеновский разрыв с поворотом магнитного поля на $180^\circ$ , $A$	-	0	+
Медленная ударная волна, $U^-$	-	+	+
Медленная автомодельная волна, $P^-$	+	-	-

Ось  $z$  направлена по нормали к поверхности разрыва, волна движется в положительном направлении оси  $z$  и  $B_z > 0$ ,  $B_x > 0$ .

В медленных автомодельных волнах находим аналогично  $\Delta B_x > 0$ ,  $\Delta u_z < 0$ ,  $\Delta u_x < 0$ .

Рассмотрим теперь альвеновский разрыв, на котором магнитное поле поворачивается на  $180^\circ$ . На таком разрыве величина  $u_z$  не изменяется ( $\Delta u_z = 0$ ), а направление тангенциального магнитного поля изменяется на противоположное (при  $B_x > 0$  получим  $\Delta B_x < 0$ ).

Далее из формулы (2.2.2.1) при  $\epsilon = +1$  следует  $\Delta u_x > 0$  (см. третью строку таблицы).

Перейдем теперь к ударным волнам. Из условий эволюционности вытекает, что в случае быстрых ударных волн числитель и знаменатель в формуле (3.1.3.2) положительны, а в случае медленных волн оба они отрицательны. Отсюда следует, что в эволюционных ударных волнах поперечное магнитное поле не изменяет своего знака [13]\*).

\*) Учет этого обстоятельства значительно снижает число возможных конфигураций магнитогидродинамических ударных волн при их исследовании в околосреднем пространстве [82].

Далее из теоремы Цемплена ( $\rho_2 > \rho_1$ ) и формулы (3.1.3.2) вытекает, что в быстрых ударных волнах тангенциальное магнитное поле  $B_x$  возрастает (при  $B_x > 0$ ), а в медленных — убывает. Из теоремы Цемплена следует также, что в ударных волнах величина  $u_z$  по абсолютной величине убывает.

Для волн, движущихся вправо,  $u_z$  отрицательно, и поэтому  $\Delta u_z > 0$ . Из второй формулы (3.1.1.5) следует, что для волн, движущихся вправо ( $j_m \equiv \rho u_z < 0$ ), при  $B_x > 0$  величины  $\Delta u_x$  и  $\Delta B_x$  имеют противоположные знаки. Поэтому  $\Delta u_x < 0$  для быстрых ударных волн и  $\Delta u_x > 0$  для медленных волн (см. первую и четвертую строки таблицы).

Установленное выше увеличение поперечного магнитного поля на быстрых ударных волнах и его уменьшение на медленных ударных волнах играют определенную роль в магнитогидродинамической турбулентности. А именно, слабые магнитные поля ( $B_x^2/8\pi < \rho_1 u_z^2/2$ ) при прохождении ударной волны усиливаются, тогда как сильные магнитные поля ( $B_x^2/8\pi > \rho_1 u_z^2/2$ ) ослабляются. Это приводит к тому, что при прохождении большого числа случайных ударных волн статистическое равновесие наступает при равенстве магнитной и кинетической энергии [33], т. е.

$$B_x^2/8\pi = 1/2 \rho u_z^2.$$

Такого рода закон равномерного распределения энергии характерен для магнитной гидродинамики. Он был получен рядом авторов из других соображений [83—89].

Перейдем теперь к более подробному исследованию скачков различных магнитогидродинамических величин на ударных волнах.

Скачки давления и энтропии являются монотонно возрастающими функциями скачка плотности в быстрой и медленной (на участке эволюционности) ударных волнах.

При большой интенсивности быстрой ударной волны ( $p_2 \gg \gg p_1 + B_1^2/8\pi$ ) магнитное давление позади волны становится значительно меньше гидростатического [90, 91], т. е.  $B_2/8\pi \ll p_2$ , причем энергией магнитного поля впереди волны можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией среды и  $B_1^2/8\pi \ll 1/2 \rho_1 u_1^2$ . Поэтому наибольшее сжатие, которого можно достичь в ударной волне, будет таким же, как и в обычной газодинамике [92, 93], т. е.  $\rho_2/\rho_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты Пуассона.

Зависимость скачка магнитного поля  $\Delta B_x \equiv B_{2x} - B_{1x}$  от скачка плотности в быстрой волне может быть двух типов [41, 92]. В волнах первого типа, которые осуществляются, если

$$\sin^2 \theta_1 \geq (\gamma - 1)(1 - p_{1*})/\gamma \quad (3.3.1.1)$$

( $p_{1*} \equiv v_{1s}^2/v_{1A}^2 = 4\pi\gamma\rho_1/B_{1z}^2$ ,  $\theta_1$  — угол между направлением магнитного поля  $B_1$  и нормалью к поверхности разрыва), при

автомодельные волны являются волнами разрежения. Из соотношения  $dp = v_s^2 d\rho$  следует далее, что  $\Delta p < 0$ .

Переходя к исследованию направления изменения величин  $\Delta B_x$ ,  $\Delta u_x$ ,  $\Delta u_z$ , предположим для простоты, что  $\epsilon = +1$ ,  $B_x > 0$ ,  $B_z > 0$ . (В противном случае величины  $\Delta B_x$ ,  $\Delta u_z$  и  $\Delta u_x$  следует заменить на  $(\text{sgn } B_x) \Delta B_x$ ,  $\epsilon \Delta u_z$  и  $\epsilon \text{sgn } (B_x B_z) \cdot \Delta u_x$ .)

Из соотношения (2.2.2.3) находим, что в быстрых волнах  $\Delta B_x < 0$ ,  $\Delta u_z < 0$ ,  $\Delta u_x > 0$ . Знаки изменений этих величин в волнах разрежения, а также в других волнах приведены в таблице.

Таблица 3.3.1

Тип волны	Знаки		
	$\Delta B_x$	$\Delta u_z$	$\Delta u_x$
Быстрая ударная волна $U^+$	+	+	-
Быстрая волна (автомодельная) $P^+$	-	-	+
Альвеновский разрыв с поворотом магнитного поля на $180^\circ$ , $A$	-	0	+
Медленная ударная волна, $U^-$	-	+	+
Медленная автомодельная волна, $P^-$	+	-	-

Ось  $z$  направлена по нормали к поверхности разрыва, волна движется в положительном направлении оси  $z$  и  $B_z > 0$ ,  $B_x > 0$ .

В медленных автомодельных волнах находим аналогично  $\Delta B_x > 0$ ,  $\Delta u_z < 0$ ,  $\Delta u_x < 0$ .

Рассмотрим теперь альвеновский разрыв, на котором магнитное поле поворачивается на  $180^\circ$ . На таком разрыве величина  $u_z$  не изменяется ( $\Delta u_z = 0$ ), а направление тангенциального магнитного поля изменяется на противоположное (при  $B_x > 0$  получим  $\Delta B_x < 0$ ).

Далее из формулы (2.2.2.1) при  $\epsilon = +1$  следует  $\Delta u_x > 0$  (см. третью строку таблицы).

Перейдем теперь к ударным волнам. Из условий эволюционности вытекает, что в случае быстрых ударных волн числитель и знаменатель в формуле (3.1.3.2) положительны, а в случае медленных волн оба они отрицательны. Отсюда следует, что в эволюционных ударных волнах поперечное магнитное поле не изменяет своего знака [13]\*).

\*) Учет этого обстоятельства значительно снижает число возможных конфигураций магнитогидродинамических ударных волн при их исследовании в околосреднем пространстве [82].

Далее из теоремы Цемплена ( $\rho_2 > \rho_1$ ) и формулы (3.1.3.2) вытекает, что в быстрых ударных волнах тангенциальное магнитное поле  $B_x$  возрастает (при  $B_x > 0$ ), а в медленных — убывает. Из теоремы Цемплена следует также, что в ударных волнах величина  $u_z$  по абсолютной величине убывает.

Для волн, движущихся вправо,  $u_z$  отрицательно, и поэтому  $\Delta u_z > 0$ . Из второй формулы (3.1.1.5) следует, что для волн, движущихся вправо ( $j_m \equiv \rho u_z < 0$ ), при  $B_x > 0$  величины  $\Delta u_x$  и  $\Delta B_x$  имеют противоположные знаки. Поэтому  $\Delta u_x < 0$  для быстрых ударных волн и  $\Delta u_x > 0$  для медленных волн (см. первую и четвертую строки таблицы).

Установленное выше увеличение поперечного магнитного поля на быстрых ударных волнах и его уменьшение на медленных ударных волнах играют определенную роль в магнитогидродинамической турбулентности. А именно, слабые магнитные поля ( $B_x^2/8\pi < \rho_1 u_z^2/2$ ) при прохождении ударной волны усиливаются, тогда как сильные магнитные поля ( $B_x^2/8\pi > \rho_1 u_z^2/2$ ) ослабляются. Это приводит к тому, что при прохождении большого числа случайных ударных волн статистическое равновесие наступает при равенстве магнитной и кинетической энергии [33], т. е.

$$B_x^2/8\pi = 1/2 \rho u_z^2.$$

Такого рода закон равномерного распределения энергии характерен для магнитной гидродинамики. Он был получен рядом авторов из других соображений [83—89].

Перейдем теперь к более подробному исследованию скачков различных магнитогидродинамических величин на ударных волнах.

Скачки давления и энтропии являются монотонно возрастающими функциями скачка плотности в быстрой и медленной (на участке эволюционности) ударных волнах.

При большой интенсивности быстрой ударной волны ( $p_2 \gg \gg p_1 + B_1^2/8\pi$ ) магнитное давление позади волны становится значительно меньше гидростатического [90, 91], т. е.  $B_2/8\pi \ll p_2$ , причем энергией магнитного поля впереди волны можно пренебречь по сравнению с кинетической энергией среды и  $B_1^2/8\pi \ll 1/2 \rho_1 u_1^2$ . Поэтому наибольшее сжатие, которого можно достичь в ударной волне, будет таким же, как и в обычной газодинамике [92, 93], т. е.  $\rho_2/\rho_1 = (\gamma + 1)/(\gamma - 1)$ , где  $\gamma$  — показатель адиабаты Пуассона.

Зависимость скачка магнитного поля  $\Delta B_x \equiv B_{2x} - B_{1x}$  от скачка плотности в быстрой волне может быть двух типов [41, 92]. В волнах первого типа, которые осуществляются, если

$$\sin^2 \theta_1 \gg (\gamma - 1)(1 - p_{1*})/\gamma \quad (3.3.1.1)$$

( $p_{1*} \equiv v_{1s}^2/v_{1As}^2 = 4\pi\gamma\rho_1/B_{1z}^2$ ,  $\theta_1$  — угол между направлением магнитного поля  $B_1$  и нормалью к поверхности разрыва), при

возрастании скачка плотности скачок магнитного поля монотонно возрастает от нуля до максимального значения, равного

$$(\Delta B_x)_{\max} = \frac{2B_{1x}}{\gamma - 1}. \quad (3.3.1.2)$$

В волнах второго типа, которые осуществляются при невыполнении условия (3.3.1.1), зависимость скачка магнитного поля от скачка плотности немонотонна: при возрастании скачка последнего скачок магнитного поля вначале увеличивается от нуля до некоторой максимальной величины, а затем убывает до значения, определяемого (3.3.1.2).

На эволюционном участке медленной ударной волны скачок магнитного поля всегда возрастает с ростом скачка плотности [33].

В предельном случае  $\theta_1 \rightarrow 0$ ,  $p_{1*} > 1$  быстрая ударная волна параллельна, т. е. такая же, как и в отсутствие магнитного поля, а медленная волна имеет бесконечно малую амплитуду. В случае  $\theta_1 \rightarrow 0$ ,  $p_{1*} < 1$  быстрая волна относится ко второму типу. При достаточно малой интенсивности быстрой ударной волны

$$\rho_2/\rho_1 < (\gamma + 1 - 2p_{1*})/(\gamma - 1)$$

поперечное магнитное поле позади ударной волны отлично от нуля и волна является особой. Если же

$$\rho_2/\rho_1 > (\gamma + 1 - 2p_{1*})/(\gamma - 1),$$

то поперечное магнитное поле  $B_{2x}$  позади волны обращается в нуль, а ударная волна становится параллельной [41].

Медленная ударная волна на эволюционном участке в случае  $\theta_1 \rightarrow 0$ ,  $p_{1*} < 1$  параллельна, т. е. такая же, как и в отсутствие магнитного поля.

В предельном случае  $\theta_1 \rightarrow 1/2\pi$  быстрая ударная волна относится к волнам первого типа, а медленная ударная волна превращается в тангенциальный разрыв.

Наличие магнитного поля увеличивает скачок давления при фиксированном скачке плотности [92, 93].

Медленная ударная волна не может иметь сколь угодно большую интенсивность. Поэтому при  $p_2 \gg p_1 + B_1^2/8\pi$  существует лишь одна (быстрая) ударная волна [41, 90].

Как мы видели в п. 3.1.1, если скорость среды параллельна магнитному полю по одну сторону разрыва либо из магнитогидродинамических разрывов, то она параллельна ему и по другую его сторону (в случае, когда нормальная к разрыву компонента магнитного поля отлична от нуля). Однако если наряду с разрывами появляются автомодельные волны, то подобная параллельность

нарушается. В самом деле, если векторы  $u$  и  $B$  расположены в плоскости  $(x, z)$  и параллельны, то

$$u_z B_x - u_x B_z = 0. \quad (3.3.1.3)$$

Определим теперь изменение левой части этого выражения в простых магнитозвуковых волнах. Пользуясь формулами (2.2.2.3), находим

$$\frac{d}{d\varphi} (u_z B_x - u_x B_z) = \frac{(u_z + \varepsilon v_{\pm}) B_x v_{\pm}^2}{\rho (v_{\pm}^2 - v_{Az}^2)},$$

откуда видно, что равенство (3.3.1.3) не выполняется в случае магнитозвуковой волны конечной амплитуды.

**3.3.2. Порядок следования волн.** До сих пор мы изучали изолированные разрывы и простые волны. Они возникают при движении через среду твердого тела (задача о поршне), а также при столкновении газовых масс. Однако, как правило, при этом появляется не один, а несколько разрывов разных типов. Мы покажем теперь, что не может возбуждаться более одной волны (разрывной или автомодельной) каждого типа и что они должны следовать в строго определенной последовательности.

Обратимся сперва к обычной гидродинамике. Тогда, как мы знаем, ударная волна движется со сверхзвуковой скоростью относительно среды впереди разрыва и с дозвуковой скоростью относительно среды позади разрыва. Поэтому, если в одну сторону движутся две ударные волны со скоростями  $u_{sh}^{(1)}$  и  $u_{sh}^{(2)}$  (первая волна предполагается идущей впереди), то должны выполняться неравенства

$$u_{sh}^{(1)} < v_s, \quad u_{sh}^{(2)} > v_s,$$

где  $v_s$  — скорость звука в пространстве между двумя волнами. Из этих неравенств вытекает, что  $u_{sh}^{(2)} > u_{sh}^{(1)}$ . Иными словами, вторая волна догонит первую и поэтому они не имеют общего источника. Отсюда в свою очередь следует, что две ударные волны, образовавшиеся из одного источника, не могут двигаться в одну сторону.

Рассмотрим теперь автомодельные волны. Их скорость совпадает с локальной скоростью звука (как впереди разрыва, так и позади него). Из этого следует, что в одну сторону не могут двигаться ни две автомодельные волны, ни одна ударная и одна автомодельная волна.

Иными словами, если ударные и автомодельные волны образовались из одного источника, то в одну сторону может двигаться лишь одна волна.

Повторяя предыдущие рассуждения для магнитогидродинамических волн и используя условия эволюционности, легко

показать, что и в этом случае один источник не может создавать две быстрые или две медленные ударные (или автомодельные) волны, движущиеся в одну сторону [30].

Что же касается волн различных типов, то альвеновский разрыв догоняет медленную волну (ударную или автомодельную), а быстрая ударная волна догоняет разрывные или автомодельные волны всех типов. Наконец, ударная волна догоняет автомодельную волну того же типа, что и ударная, или более медленную; автомодельная же волна догоняет как ударную волну того же типа, так и более медленную ударную волну.

Таким образом, если магнитогидродинамические волны образованы одним источником, то в одну сторону может двигаться не более трех волн: впереди движется быстрая волна (ударная или автомодельная), за ней следует альвеновский разрыв и, наконец, за ними движется медленная (ударная или автомодельная) волна. Разумеется, некоторые из перечисленных волн могут отсутствовать.

При столкновении двух магнитогидродинамических ударных волн образуется разрыв, на котором не выполняются граничные условия. Поэтому такой разрыв расщепляется на ряд разрывных и автомодельных (см. ниже п. 3.3.4). Как следует из предыдущего, максимальное число образующихся при этом волн равно семи: три волны, движущиеся вправо, — быстрая, альвеновская и медленная, такие же три волны, движущиеся влево, и между ними контактный разрыв, покоящийся относительно среды; быстрые и медленные волны могут быть либо ударными, либо автомодельными.

Выяснив картину расщепления разрыва, перейдем к исследованию вопроса о переходах между различными магнитогидродинамическими разрывами при изменении внешних параметров (скорости, магнитного поля и др.).

Прежде всего, из условий эволюционности следует, что невозможен непрерывный переход ударной волны в альвеновский разрыв. В самом деле, альвеновский разрыв может совпасть с ударной волной лишь в том случае, если магнитное поле по обе стороны разрыва лежит в плоскости, проходящей через нормаль к разрыву, т. е. в альвеновском разрыве магнитное поле поворачивается на  $180^\circ$ . Но на таком разрыве поперечная составляющая магнитного поля меняет знак, что, как мы видели выше, противоречит условиям эволюционности ударной волны \*).

Между быстрой и медленной ударными волнами также невозможен непрерывный переход. Это следует из того, что области эволюционности быстрой и медленной ударных волн не имеют

---

\*) Неучет условий эволюционности приводит к неправильной картине переходов между магнитогидродинамическими разрывами [94].

точек соприкосновения (см. рис. 3.2.3). Быстрая ударная волна не может непрерывно переходить в тангенциальный разрыв, так как это противоречило бы условию эволюционности  $u_{1z} > u_{1+}$ .

Таким образом, возможны переходы лишь между тангенциальным и контактным разрывом, между тангенциальным и альевновским разрывом и между тангенциальным разрывом и медленной ударной волной. Указанные разрывы переходят в тангенциальный разрыв в предельном случае  $B_z \rightarrow 0$ .

Смысл возможных переходов между магнитогиродинамическими разрывами становится яснее [33], если рассмотреть задачу о расщеплении разрыва в начальных условиях, когда не выполняются законы сохранения. Если при этом нормальное магнитное поле  $B_z$  отлично от нуля, то разрыв расщепляется на семь волн, каждая из которых характеризуется одним параметром.

Если же нормальное магнитное поле  $B_z$  равно нулю, то первоначальный разрыв в плоскости  $z=0$  расщепляется на три волны: быструю ударную волну, движущуюся вправо; быстро ударную волну, движущуюся влево, и тангенциальный разрыв между ними. Каждая из ударных волн характеризуется одним параметром, а тангенциальный разрыв — пятью параметрами. Общее число параметров равно семи, т. е. равно числу скачков магнитогиродинамических величин на первоначальном разрыве.

Таким образом, тангенциальный разрыв представляет собой слившиеся пять разрывов (две медленные ударные волны, два альевновских разрыва и контактный разрыв). Схема переходов между магнитогиродинамическими разрывами изображена на рис. 3.3.1.

**3.3.3. Задача о поршне.** Выше указывалось, что параллельная магнитогиродинамическая ударная волна, у которой магнитное поле по обе стороны от плоскости разрыва параллельно нормали к ней, в ряде случаев неэволюционна, и поэтому не может существовать. Чтобы выяснить вопрос о судьбе неэволюционной ударной волны, рассмотрим конкретную задачу, а именно задачу о поршне. Пусть полупространство  $z > 0$  заполнено идеально проводящей средой, находящейся в магнитном поле  $B_z$  ( $B_x = B_y = 0$ ) и покоящейся в момент времени  $t=0$ . Состояние среды характеризуется плотностью  $\rho_0$  и давлением  $p_0$ . Слева среда ограничена идеально проводящим поршнем, расположенным в плоскости  $z=0$ . В момент  $t=0$  поршень начинает двигаться с постоянной

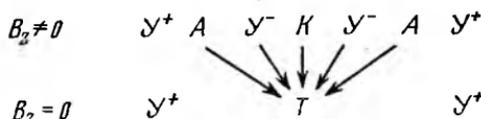


Рис. 3.3.1. Схема переходов между магнитогиродинамическими разрывами.

$U^+$ ,  $U^-$ ,  $A$ ,  $K$ ,  $T$  означают соответственно быструю и медленную ударные волны, альевновский, контактный и тангенциальный разрывы.

скоростью  $u$ . Требуется определить состояние среды при  $t > 0$ .

Рассмотрим сперва случай, когда поршень движется вдоль оси  $z$ , совпадающей с нормалью к его плоскости и с направлением магнитного поля. Тогда впереди поршня возникнет ударная волна, которая будет параллельной, т. е. такой же, как и в обычной гидродинамике. Выясним прежде всего, является ли это решение единственным; иными словами, не может ли впереди поршня вместо одной параллельной ударной волны двигаться ряд магнито-гидродинамических волн. (Очевидно, что эти волны будут перемещаться в ту же сторону, что и первоначальная волна.)

Так как поршень обладает бесконечной проводимостью, то магнитные силовые линии вморожены в него, т. е. на поверхности поршня тангенциальная компонента магнитного поля  $B_x$  равна нулю. Величина  $B_x$  должна равняться нулю впереди быстрой волны и позади медленной. С другой стороны, согласно таблице, тангенциальное магнитное поле уменьшается в быстрой автотомодельной волне и увеличивается в медленной. Поэтому ни быстрая, ни медленная волны не могут быть автотомодельными и должны быть, следовательно, ударными. Так как  $B_x$  равно нулю впереди быстрой и позади медленной особых ударных волн, то параллельная ударная волна может расщепиться лишь на две особые ударные волны. (Направление поперечного магнитного поля в области между двумя особыми ударными волнами совпадает с направлением флуктуационного поперечного магнитного поля впереди быстрой особой волны [95].) Вместе с тем условия существования особой ударной волны (3.2.4.10), (3.2.4.11) совпадают с условиями неэволюционности параллельной ударной волны (3.2.4.7). Поэтому условия эволюционности последней совпадают с условиями устойчивости ее относительно расщепления на две особые ударные волны.

Определим теперь [96] зависимость различных магнито-гидродинамических величин от скорости поршня  $u$ . Пусть скорость поршня такова, что параллельная ударная волна, возникшая впереди него, не расщепляется. Если скорость ударной волны в невозмущенной среде равна  $u_{sh}$ , то скорости среды впереди волны  $u_{0z}$  и позади нее  $u_{2z}$  в системе отсчета, где волна покоится, равны

$$u_{0z} = -u_{sh}, \quad u_{2z} = u - u_{sh} \quad (3.3.3.1)$$

(за ударной волной скорость среды в лабораторной системе отсчета равна скорости поршня).

Подставляя соотношения (3.3.3.1) в последнее уравнение (3.2.4.5) и заменяя  $v_{1s}$  на  $v_{0s}$  и  $u_{1z}$  на  $u_{0z}$  ( $v_{0s}$  — скорость звука в области  $O$  впереди волны), найдем скорость ударной волны

$$u_{sh} = \frac{2}{3}u + \sqrt{(\frac{2}{3}u)^2 + v_{0s}^2}, \quad (3.3.3.2)$$

причем предположим, что среда описывается уравнением состояния идеального газа с показателем адиабаты Пуассона  $\gamma = 5/3$ .

Из первых двух уравнений (3.2.4.5) находим для сжатия среды в ударной волне

$$\rho_2/\rho_1 = u_{sh}/(u_{sh} - u) \quad (3.3.3.3)$$

и для давления позади ударной волны

$$p_2 = p_0 + \rho_0 u u_{sh}. \quad (3.3.3.4)$$

Значениям скорости ударной волны, равным  $v_{0Az}$  и  $\sqrt{4v_{0Az}^2 - 3v_{0s}^2}$ , при которых происходит переход от параллельной ударной волны к особым ударным волнам, соответствуют две критические скорости поршня:

$$\left. \begin{aligned} u_- &= 3/4 (v_{0Az}^2 - v_{0s}^2)/v_{0Az}, \\ u_+ &= 3 (v_{0Az}^2 - v_{0s}^2)/\sqrt{4v_{0Az}^2 - v_{0s}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3.5)$$

Как видно из рис. 3.2.7, при  $u < u_-$  параллельную ударную волну следует считать медленной, а при  $u > u_+$  — быстрой. Поэтому при  $u < u_-$  скачок скорости происходит на медленной ударной волне ( $\Delta_- u_z = u$ ), а скачок скорости на быстрой ударной волне равен нулю ( $\Delta_+ u_z = 0$ ). Следовательно, при  $u < u_-$  скорость быстрой ударной волны равна скорости распространения бесконечно малых возмущений, а скорость медленной ударной волны определяется формулой (3.3.3.2)

$$\left. \begin{aligned} u_{sh}^{(+)} &= v_{0Az}, \\ u_{sh}^{(-)} &= 2/3u + \sqrt{(2/3u)^2 + v_{0s}^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.3.3.6)$$

(рис. 3.3.2). При  $u > u_+$  скачок скорости происходит на быстрой ударной волне ( $\Delta_+ u_z = u$ ,  $\Delta_- u_z = 0$ ), а скорость медленной волны равна скорости распространения бесконечно малых звуковых возмущений в среде с давлением  $p_2$  и плотностью  $\rho_2$ , движущейся со скоростью поршня  $u$ :

$$u_{sh}^{(+)} = 2/3u + \sqrt{(2/3u)^2 + v_{0s}^2}, \quad u_{sh}^{(-)} = u + \sqrt{5/3 p_2/\rho_2}, \quad (3.3.3.7)$$

где  $p_2$  и  $\rho_2$  определяются первыми двумя формулами (3.2.4.5).

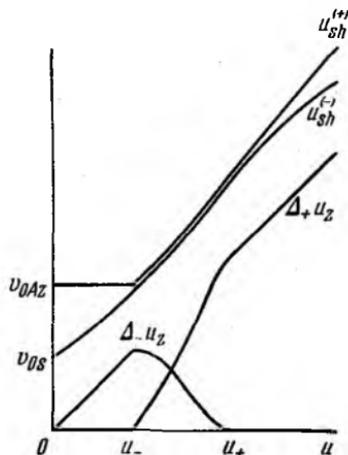


Рис. 3.3.2. Скорости распространения ударных волн, образующихся при движении поршня вдоль магнитного поля, и скачки скорости среды на этих волнах.

$u_{sh}^{(+)}$ ,  $u_{sh}^{(-)}$  — скорости быстрой и медленной ударных волн,  $\Delta_+ u_z$ ,  $\Delta_- u_z$  — скачки скорости среды на быстрой и медленной ударных волнах. По оси абсцисс отложена скорость поршня  $u$ .

Магнитное поле  $B_{1x}$  в области между быстрой и медленной особыми волнами определяется формулой (3.2.4.9).

При изменении скорости поршня от  $u_-$  до  $u_+$  амплитуда быстрой ударной волны  $\Delta_+ u_x$  изменяется от нуля до  $u_+$ , а амплитуда медленной волны  $\Delta_- u_x$  — от  $u_-$  до нуля (см. рис. 3.3.2). Зависимость сжатия среды  $\rho_1/\rho_0$  и  $\rho_2/\rho_1$  в быстрой и медленной особых ударных волнах от скорости поршня показана на рис. 3.3.3.

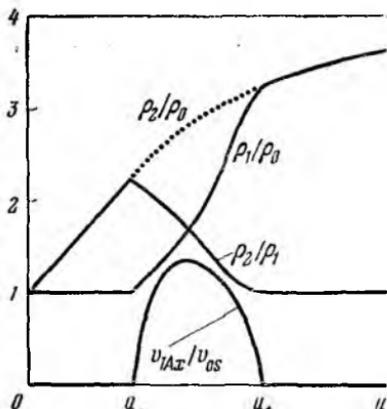


Рис. 3.3.3. Изменение плотности и магнитного поля в особых ударных волнах, образующихся при расщеплении параллельной ударной волны.

$\rho_0, \rho_1, \rho_2$  — плотности невозмущенной среды, среды между особыми волнами и среды позади обеих особых волн,  $v_{1Ax}/v_{0s}$  — безразмерная величина, характеризующая поперечное магнитное поле между особыми волнами, точечный пункт — неэволюционный участок параллельной ударной волны.

Рассмотрим теперь движение поршня в поперечном направлении, при котором скорость поршня  $u_x$  перпендикулярна нормали к его поверхности и лежит в плоскости  $(x, z)$ , проходящей через вектор магнитного поля и нормаль к поверхности поршня. Определим сперва качественно характер возникающих при этом волн [97], допустив, что магнитное поле образует произвольный угол с плоскостью поршня.

Так как магнитные силовые линии заморожены в среду и в поршень, то при  $u_x < 0$  (ось  $x$  выбрана таким образом, чтобы  $B_x$  было положительным) они деформируются (рис. 3.3.4, а). Изгибание магнитных силовых линий приводит к появлению упругих сил натяжения, которые направлены от вогнутости этих линий в среду.

При движении поршня возникают быстрая и медленная магнитогидродинамические волны (ударные или автомодельные), удаляющиеся от него. Так как вблизи поршня и на бесконечности  $u_x = 0$ , то при упругих силах, показанных на рис. 3.3.4, а, равнодействующая этих сил направлена от поршня. Поэтому впереди движется волна сжатия (ударная), а за ней — волна разрежения (автомодельная). Альвеновская волна в данном случае не возникает, так как  $B_x$  вблизи поршня и на бесконечности имеет одинаковый знак. (Напомним, что в ударной и автомодельной волнах знак  $B_x$  не меняется, а в альвеновском разрыве — меняется на противоположный.)

В случае, изображенном на рис. 3.3.4, б, равнодействующая упругих сил направлена к поршню; поэтому возникает быстрая волна разрежения и медленная ударная волна.

При увеличении скорости поршня  $u_x$  знак  $B_x$  вблизи поршня изменяется (рис. 3.3.4, *а*), что влечет за собой появление, кроме быстрой волны разрежения и медленной ударной волны, еще и альвеновской волны.

При дальнейшем увеличении  $u_x$  величина  $|B_x|$  вблизи поршня становится больше, чем на бесконечности; при этом равнодействующая сил натяжения направлена от поршня (рис. 3.3.4, *з*),

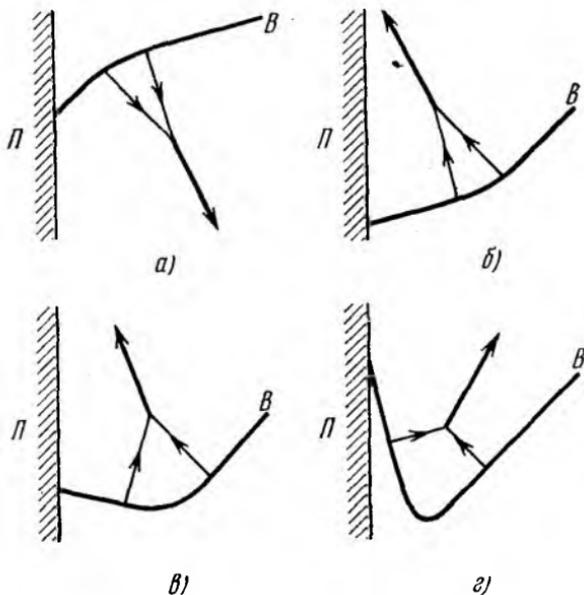


Рис. 3.3.4. Деформация магнитных силовых линий при движении поршня в поперечном направлении.

$\Pi$  — поршень,  $B$  — одна из магнитных силовых линий. Тонкие стрелки — упругие силы натяжения, жирные стрелки — равнодействующая этих сил. *а*) Поршень движется вниз; *б*), *в*), *г*) поршень движется вверх. Случай *б*) соответствует достаточно малой скорости поршня, случай *г*) — достаточно большой его скорости.

что приводит к возникновению быстрой ударной волны, альвеновского разрыва и медленной волны разрежения.

При достаточно большом значении  $|u_x|$  амплитуда медленной волны разрежения становится настолько большой, что плотность среды позади волны обращается в нуль — наступает явление *кавитации*.

Картину движения среды при  $u_z \neq 0$ ,  $u_x \neq 0$  можно получить, исходя из рассмотренного случая  $u_z = 0$ . При увеличении  $u_z$  амплитуда волны разрежения уменьшается, а амплитуда волны сжатия увеличивается. При некотором критическом значении  $u_z$ , зависящем от  $u_x$ , волна разрежения превращается в волну сжатия (т. е. в ударную волну). Аналогично, уменьшение  $u_z$  приводит

к превращению ударной волны в волну разрежения. Дальнейшее уменьшение величины  $u_x$  приводит к возникновению кавитации.

Типы волн, возникающие при движении поршня с произвольной скоростью ( $u_x, u_z$ ) (в случае  $u_y=0$ ), изображены на рис. 3.3.5. Топо-

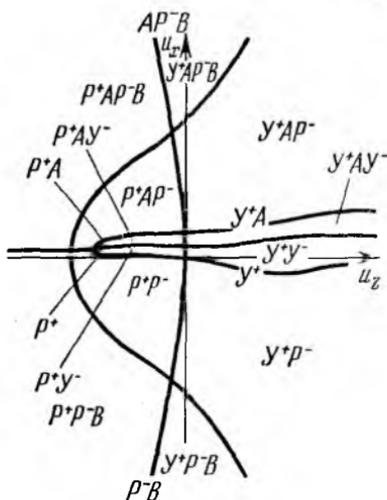


Рис. 3.3.5. Волны возникающие при движении поршня.

По оси абсцисс отложена продольная компонента скорости поршня  $u_x$ , по оси ординат — поперечная компонента  $u_z$ . Буквы  $U^+$ ,  $U^-$ ,  $P^+$ ,  $P^-$ ,  $A$ ,  $B$  означают соответственно наличие быстрой и медленной ударных волн, быстрой и медленной волн разрежения (автомодельных), наличие альвеновского разрыва и образование вакуума (кавитация).

в области между быстрой ударной волной и медленной волной разрежения  $v_{1A} \ll v_{1s}$ .

Из формул (2.2.4.12), (2.2.4.13) следует, что величиной  $\Delta u_z$  в медленной волне разрежения можно пренебречь. Так как продольная компонента скорости поршня  $u_x$  равна нулю, то, следовательно,  $u_{1x}=0$ . С другой стороны, в невозмущенной среде впереди быстрой ударной волны скорость среды равна нулю ( $u_{0z}=0$ ). Поэтому, как и утверждалось, быстрая ударная волна имеет бесконечно малую амплитуду и ею можно пренебречь.

Используя это обстоятельство, получим из формул (2.2.4.13), (2.2.4.15) условие кавитации [99] (в случае  $\gamma=5/3$ ) вида

$$|u_x| > 3,67v_{0s}.$$

В общем случае задача о движении поршня была решена лишь качественно [100—102].

логическая картина [97, 98] различных областей на этом рисунке не зависит от величины магнитного поля. При изменении  $B_x, B_z$  происходит лишь деформация линий, разграничивающих различные области.

Четырем ситуациям, отраженным рис. 3.3.4, соответствуют точки рис. 3.3.5, расположенные на оси ординат.

Определим в качестве примера момент начала кавитации при поперечном движении поршня [99], предполагая, что поперечная компонента магнитного поля  $B_x$  равна нулю. Тогда быстрая волна может быть только ударной и, следовательно, медленная волна является автомодельной волной разрежения. Легко видеть, что в данном случае быстрая ударная волна имеет бесконечно малую амплитуду. Действительно, в ударной волне плотность и температура возрастают, и поэтому условие  $v_A \ll v_s$  будет справедливо также

**3.3.4. Расщепление разрыва.** Перейдем теперь к исследованию расщепления разрыва, на котором не выполняются граничные условия (3.1.1.2), (3.1.1.3), (3.1.1.5), (3.1.1.7), (3.1.1.8). Решение этой задачи является первым шагом на пути к доказательству теоремы существования и единственности решения задачи Коши для класса эволюционных разрывов [29, 103]. К задаче о расщеплении разрыва сводится также задача о столкновении магнитогидродинамических волн друг с другом и со стенкой [104—106].

Если значения магнитогидродинамических величин по обе стороны поверхности разрыва постоянны (в пространстве и во времени), то возникающие при расщеплении разрыва волны могут быть только разрывными или автомодельными.

Рассмотрим сперва расщепление малого разрыва [31]. В первом приближении по амплитудам образовавшихся волн соотношения между скачками магнитогидродинамических величин на ударных и автомодельных волнах одинаковы. В этом приближении различие между ударной и автомодельной волной состоит только в том, что на ударной волне плотность возрастает, а на автомодельной — убывает.

Обозначая через  $\Delta \mathcal{Q}$  первоначальные скачки вектора магнитогидродинамического состояния  $\mathcal{Q} = (\rho, s, u_x, u_y, u_z, B_x, B_y)$  и через  $\Delta_k \mathcal{Q}$  — скачок вектора  $\mathcal{Q}$  в образовавшейся волне  $k$ -го типа, имеем, очевидно,

$$\Delta \mathcal{Q} = \sum_{k=1}^7 \Delta_k \mathcal{Q} \quad (3.3.4.1)$$

(под скачком  $\Delta \mathcal{Q}$  мы понимаем здесь разность  $\mathcal{Q}(z+0) - \mathcal{Q}(z-0)$ , причем ось  $z$  направлена вдоль нормали к плоскости разрыва).

Скачок  $\Delta_k \mathcal{Q}$  можно записать, согласно (2.2.1.6), в виде

$$\Delta_k \mathcal{Q} = \eta_k A^{(k)}, \quad (3.3.4.2)$$

где  $A^{(k)}$  — правый собственный вектор, соответствующий  $k$ -й волне, и  $\eta_k$  — некоторые величины, зависящие от  $\Delta \mathcal{Q}$ .

Таким образом,

$$\sum_{k=1}^7 \eta_k A^{(k)} = \Delta \mathcal{Q}. \quad (3.3.4.3)$$

Так как векторы  $A^{(1)}, A^{(2)}, \dots, A^{(7)}$  линейно независимы, то из последнего соотношения можно однозначно найти все величины  $\eta_k$ .

Поскольку мы рассматриваем разрыв малой интенсивности, то знак  $\eta_k$  определяет характер  $k$ -й волны. Именно, если  $\eta_k \varepsilon < 0$ , то  $k$ -я волна будет ударной, если же  $\eta_k \varepsilon > 0$ , то волна будет автомодельной ( $\varepsilon = \pm 1$  в зависимости от того, распространяется ли волна в положительном или отрицательном направлении оси  $z$ ).

Приведем выражения для скачков плотности в магнитозвуковых волнах [107]

$$\Delta_{\pm}^{(\varepsilon)}\rho = \mp \frac{1}{2R_{\Delta}} \left\{ \frac{v_s^2 v_{At}^2 [\Delta\rho - (\partial\rho/\partial s)_p \Delta s]}{v_{\mp}^2 - v_A^2} - \frac{B_t \Delta B_t}{4\pi} + \varepsilon \frac{\rho v_{Az}^2}{v_{\pm}} \left[ \frac{B_t \Delta u_t}{B_z} + \frac{v_{At}^2 \Delta u_z}{v_{\mp}^2 - v_{Az}^2} \right] \right\}, \quad (3.3.4.4)$$

где  $R_{\Delta} = \sqrt{(v_A^2 + v_s^2) - 4v_s^2 v_{Az}^2}$  и под скачком  $\Delta_{\pm}^{(\varepsilon)}\rho$  понимается величина  $\Delta_{\pm}^{(\varepsilon)}\rho = \rho(z \pm 0) - \rho(z - 0)$ . Знаки плюс и минус в нижнем индексе относятся соответственно к быстрой и медленной магнитозвуковым волнам, в верхнем индексе ( $\varepsilon = \pm 1$ ) — к волнам, распространяющимся влево и вправо, индекс  $t$  служит для обозначения тангенциальной составляющей.

Например, при столкновении двух газовых масс с одинаковыми значениями  $\rho$ ,  $s$ ,  $B_t$  и  $u_t$  имеем

$$\Delta\rho = \Delta s = \Delta B_t = \Delta u_t = 0, \quad \Delta u_z < 0.$$

Учитывая неравенства  $v_{\pm}^2 > v_{Az}^2$ ,  $v_{\mp}^2 < v_{Az}^2$ , получим  $\varepsilon \Delta_{\pm}^{(\varepsilon)}\rho < 0$ . Это означает, что все четыре магнитозвуковые волны, расходящиеся в обе стороны, будут ударными. Такой результат находится в согласии с тем, что в рамках магнитной гидродинамики при вдвигании поршня вдоль нормали к его поверхности всегда образуются две ударные волны [102].

Формула (3.3.4.4) относится к случаю малых разрывов. Общая задача была качественно исследована в работах [108—110] \*).

До сих пор мы предполагали, что величины  $\Delta \mathcal{Q}_j$  независимы. Если же величины  $\Delta \mathcal{Q}_j$  связаны между собой соотношениями

$$\frac{\Delta \mathcal{Q}_1}{A_1^{(i)}} = \frac{\Delta \mathcal{Q}_2}{A_2^{(i)}} = \dots = \frac{\Delta \mathcal{Q}_l}{A_l^{(i)}} \quad (3.3.4.5)$$

(такие соотношения справедливы для ударной волны  $l$ -го типа), то в выражении для результирующих волн (3.3.4.3) все слагаемые, кроме слагаемого с  $k=l$ , равны нулю. Если же магнитогидродинамические величины на разрыве не удовлетворяют соотношениям (3.3.4.5), то в формуле (3.3.4.3) будет присутствовать ряд слагаемых. Это означает неустойчивость ударной волны относительно расщепления. В частности, для неэволюционной ударной волны не выполняются соотношения (3.3.4.5), и поэтому такая ударная волна расщепляется на ряд разрывных или автомодельных волн [46, 77, 111].

\* Для идеального газа существование решения задачи о расщеплении разрыва произвольной интенсивности доказано [110], но до настоящего времени единственность решения доказать не удалось. В обычной гидродинамике такое доказательство опирается на «выпуклость» системы уравнений [103],

### § 4.1. Гидродинамическая теория высокочастотных колебаний свободной плазмы

**4.1.1. Электромагнитные волны в плазме.** В двух предыдущих главах мы изучали низкочастотные магнитогидродинамические волны, частоты которых малы по сравнению с частотой столкновений частиц. Теперь мы перейдем к исследованию волн, распространяющихся в плазме, частота которых велика по сравнению с частотой парных столкновений электронов и ионов. В этом случае можно вообще не учитывать парных столкновений, т. е. исходить из представления о бесстолкновительной плазме.

В этой главе мы исследуем колебания свободной бесстолкновительной плазмы, т. е. бесстолкновительной плазмы, не находящейся под действием внешних полей.

Начнем с рассмотрения электромагнитных волн в холодной плазме, когда можно пренебречь влиянием теплового движения частиц на распространение волн. Для этого необходимо, чтобы фазовая скорость волны была значительно больше средней тепловой скорости частиц.

В таком случае состояние плазмы можно описывать гидродинамически — заданием средних скоростей и плотностей частиц. При изучении распространения электромагнитных волн мы вправе не учитывать влияния ионов и рассматривать плазму как холодный электронный газ.

Скорость электронов  $\mathbf{u}_e \equiv \mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$  и их плотность  $n_e \equiv n_e(\mathbf{r}, t)$  удовлетворяют уравнению непрерывности

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} n_e \mathbf{u}_e = 0 \quad (4.1.1.1)$$

и уравнению движения

$$\frac{d_e \mathbf{u}_e}{dt} = -\frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_e \mathbf{B}] \right), \quad (4.1.1.2)$$

где  $m_e$  и  $-e$  — масса и заряд электрона,  $\frac{d_e}{dt} \equiv \partial/\partial t + \mathbf{u}_e \nabla$ ,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — электрическое и магнитное поля распространяющейся волны (мы считаем плазму нерелятивистской, т. е.  $u_e \ll c$ ).

Эти поля подчиняются уравнениям Максвелла \*)

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (4.1.1.3)$$

где  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  — плотность тока и плотность заряда, порождаемые электронами:

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}_e = -en_0\mathbf{u}_e, \quad \rho = \rho_e = -e(n_e - n_0) \quad (4.1.1.4)$$

( $n_0$  — равновесная плотность электронов, равная плотности ионов).

Уравнения (4.1.1.1)–(4.1.1.4) образуют полную систему уравнений, описывающих распространение электромагнитных волн в холодной плазме в гидродинамическом приближении.

Мы будем далее предполагать, что амплитуда электромагнитной волны достаточно мала. В этом случае можно исходить из линеаризованного уравнения движения электрона

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}. \quad (4.1.1.5)$$

Отсюда следует, что для гармонических колебаний

$$\mathbf{u}_e = -\frac{ie}{m_e\omega} \mathbf{E}, \quad (4.1.1.6)$$

где  $\omega$  — частота колебаний (зависимость всех переменных величин от времени считаем имеющей вид  $\exp(-i\omega t)$ ).

Так как  $\mathbf{u}_e$  представляет собой малую величину, то в линейном приближении для плотности тока можно пользоваться выражением

$$\mathbf{j} = -en_0\mathbf{u}_e \equiv \sigma \mathbf{E}, \quad (4.1.1.7)$$

где

$$\sigma \equiv \sigma(\omega) = ie^2n_0/m_e\omega.$$

Эта величина носит название *высокочастотной проводимости плазмы*.

Введем далее электрическую индукцию  $\mathbf{D}$ , определяемую следующим образом:

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \equiv \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + 4\pi\mathbf{j}. \quad (4.1.1.8)$$

Для монохроматической волны малой амплитуды отсюда вытекает соотношение

$$\mathbf{D} = \varepsilon(\omega) \mathbf{E}, \quad (4.1.1.9)$$

\*) Напомним, что магнитная проницаемость плазмы мало отличается от единицы, и поэтому мы не будем различать векторы  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$ .

где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + 4\pi i\sigma(\omega)/\omega. \quad (4.1.1.10)$$

Эта величина носит название *диэлектрической проницаемости плазмы*.

Используя (4.1.1.8), получим для нее

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2, \quad (4.1.1.11)$$

где

$$\omega_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e}}. \quad (4.1.1.11')$$

Последняя величина, имеющая размерность частоты, называется *плазменной* или *ленгмюровской* частотой.

Заметим, что при выводе выражения (4.1.1.11) для диэлектрической проницаемости плазмы мы не делали никаких предположений об ее однородности. Поэтому оно справедливо как для однородной, так и для неоднородной плазмы. Отсюда вытекает, что уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{B}, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = -\frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \mathbf{E}. \quad (4.1.1.12)$$

описывают распространение монохроматических электромагнитных волн малой амплитуды и в неоднородной холодной плазме (в отсутствие внешнего магнитного поля).

В однородной плазме возможно распространение плоских монохроматических волн вида  $\mathbf{E}, \mathbf{B} \propto \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ . Для таких волн магнитное поле связано с электрическим (см. (4.1.1.12))

$$\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}], \quad (4.1.1.13)$$

т. е. магнитное поле перпендикулярно электрическому полю и волновому вектору.

Подстановка последнего выражения во второе уравнение (4.1.1.12) дает

$$[\mathbf{k} [\mathbf{kE}]] + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \mathbf{E} = 0,$$

или

$$\mathbf{k} (\mathbf{kE}) - \left( k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon \right) \mathbf{E} = 0. \quad (4.1.1.14)$$

Умножив это соотношение скалярно на  $\mathbf{k}$ , получим

$$\varepsilon(\omega) (\mathbf{kE}) = 0. \quad (4.1.1.15)$$

Поэтому, если  $\varepsilon(\omega) \neq 0$ , то  $\mathbf{kE} = 0$ , т. е. электрическое поле в плоской монохроматической волне перпендикулярно направлению

распространения волны. Учитывая это обстоятельство, получим из (4.1.1.14)

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega). \quad (4.1.1.15')$$

Мы видим, что распространение электромагнитных волн в плазме возможно только в том случае, если  $\varepsilon(\omega) > 0$ , т. е.

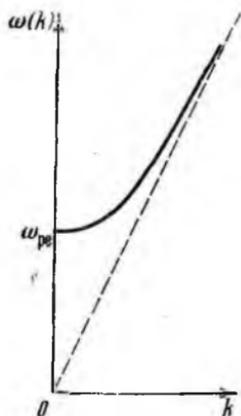


Рис. 4.1.1. Зависимость частоты электромагнитной волны от величины волнового вектора в изотропной плазме.

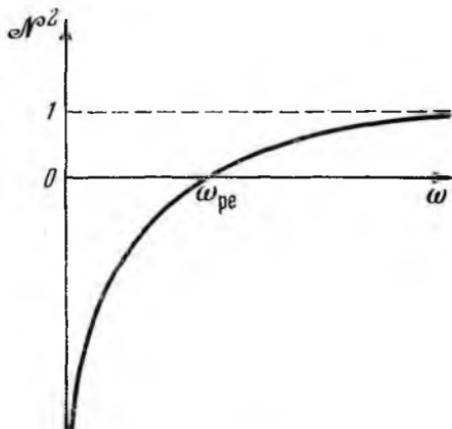


Рис. 4.1.2. Зависимость квадрата показателя преломления электромагнитной волны от частоты.

если частота волны  $\omega$  превосходит плазменную частоту  $\omega_{\text{ре}}$ . Тогда фазовая скорость волны

$$v_{\text{ph}} = \omega/k = c/\sqrt{\varepsilon} \quad (4.1.1.16)$$

больше скорости света ( $v_{\text{ph}} > c$ ), а показатель преломления  $N = c/v_{\text{ph}} = \sqrt{\varepsilon}$  меньше единицы.

При данном волновом векторе  $k$  для частоты волны, согласно (4.1.1.15'), имеем

$$\omega(k) = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_{\text{ре}}^2}. \quad (4.1.1.17)$$

Зависимость частоты от величины волнового вектора изображена на рис. 4.1.1, зависимость показателя преломления от частоты — на рис. 4.1.2.

Для частот, меньших плазменной частоты, диэлектрическая проницаемость плазмы отрицательна и, согласно (4.1.1.15), волновой вектор (а следовательно, и показатель преломления) оказывается чисто мнимым. Это значит, что волна затухает при удале-

нии от источника по экспоненциальному закону, проникая в глубь плазмы на расстояние  $\delta = 1/|k| = c/\omega \sqrt{|\varepsilon(\omega)|}$ . При  $\omega \ll \omega_{pe}$  глубина проникновения не зависит от частоты  $\omega$ ; она равна  $\delta_0 = c/\omega_{pe}$  и называется *скинковой глубиной*.

До сих пор мы не касались вопроса об изменении плотности электронов плазмы при прохождении через нее электромагнитной волны. Для выяснения его обратимся к уравнению непрерывности и положим в нем  $n_e = n_0 + \tilde{n}_e$ , где  $n_0$  — равновесная плотность электронов и  $\tilde{n}_e$  — малая добавка к ней, т. е.  $|\tilde{n}_e| \ll n_0$ . Линеаризуя уравнение непрерывности относительно  $\tilde{n}_e$ , получим в случае плоской монохроматической волны

$$\tilde{n}_e = n_0 \mathbf{k} \mathbf{u}_e / \omega,$$

или, учитывая (4.1.1.6),

$$\tilde{n}_e = -\frac{ien_0}{m_e \omega^2} (\mathbf{k} \mathbf{E}). \quad (4.1.1.18)$$

Это — общая формула, связывающая переменную часть плотности электронов с переменным электрическим полем в плазме в том случае, когда все переменные величины изменяются по закону  $\exp [i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)]$ .

При распространении в плазме электромагнитной волны электрическое поле волны, как мы видели, перпендикулярно волновому вектору, т. е.  $(\mathbf{k} \mathbf{E}) = 0$ , и поэтому  $\tilde{n}_e = 0$ .

Оценим в заключение вклад ионов в диэлектрическую проницаемость плазмы.

Считая ионы, так же как и электроны, холодными, мы можем описывать их линеаризованными уравнениями движения для скорости ионов  $\mathbf{u}_i$ , отличающимися от уравнения (4.1.1.5) или (4.1.1.6) для электрона заменой массы электрона  $m_e$  массой иона  $m_i$  и знаком заряда. Зная суммарную плотность тока электронов и ионов  $\mathbf{j} = en_0 (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$ , легко найти, используя (4.1.1.10), диэлектрическую проницаемость плазмы; она равна

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{m_e}{m_i} \right). \quad (4.1.1.19)$$

Как мы видим, роль ионов сводится лишь к тому, что в выражении для диэлектрической проницаемости плазмы слагаемое  $-\omega_{pe}^2/\omega^2$  заменяется слагаемым  $-(\omega_{pe}^2/\omega^2) (1 + m_e/m_i)$ . Различие между ними очень мало, так как  $m_e/m_i \ll 1$ .

**4.1.2. Ленгмюровские колебания.** Кроме поперечных электромагнитных колебаний, в плазме могут возбуждаться еще продольные квазиэлектростатические колебания, связанные с колебаниями плотности электронов. Механизм возникновения этих колебаний, которые носят название плазменных или ленгмюровских

тесно связан, как мы видели в п. 1.1.1, с экранированием заряда в плазме. Действительно, если представить себе, что в плазме создается неравновесное распределение заряда при смещении заряженного слоя на малое расстояние  $x$ , то он будет вести себя как конденсатор с поверхностной плотностью заряда  $en_0x$ . Поэтому в слое возникает электрическое поле  $E = -4\pi en_0x$ , стремящееся восстановить электрическую нейтральность и приводящее к колебаниям электронов.

Мы перейдем теперь к подробному исследованию продольных колебаний плазмы. Начнем с рассмотрения малых колебаний холодной плазмы. Исходными в этом случае являются линеаризованные уравнение движения электронов и уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}, \quad \frac{\partial n_e}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{u}_e = 0, \quad (4.1.2.1)$$

а также уравнения электростатики

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{E} = -4\pi e (n_e - n_0). \quad (4.1.2.2)$$

Легко установить общую зависимость от времени всех входящих в эти уравнения величин, не делая никаких предположений об их зависимости от пространственных координат. Продифференцировав уравнение непрерывности по времени и воспользовавшись уравнением движения, получим

$$\frac{\partial^2 n_e}{\partial t^2} - \frac{en_0}{m_e} \operatorname{div} \mathbf{E} = 0.$$

Используя далее второе уравнение (4.1.2.2), находим следующее уравнение для переменной части плотности электронов  $\tilde{n}_e = n_e - n_0$ :

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_e}{\partial t^2} + \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \tilde{n}_e = 0. \quad (4.1.2.3)$$

Уравнению такого же вида удовлетворяет, как легко видеть, и скорость электронов

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}_e}{\partial t^2} + \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \mathbf{u}_e = 0. \quad (4.1.2.4)$$

Общее решение уравнения (4.1.2.3) записывается, очевидно, следующим образом:

$$\tilde{n}_e(\mathbf{r}, t) = v_1(\mathbf{r}) \cos \omega_p t + v_2(\mathbf{r}) \sin \omega_p t, \quad (4.1.2.5)$$

где  $v_1(\mathbf{r})$  и  $v_2(\mathbf{r})$  — некоторые функции координат. Вид этих функций можно найти, зная начальные распределения плотности электронов  $\tilde{n}_e(\mathbf{r}, 0)$  и их скорости  $\mathbf{u}_e(\mathbf{r}, 0)$ :

$$v_1(\mathbf{r}) = \tilde{n}_e(\mathbf{r}, 0), \quad v_2(\mathbf{r}) = -\frac{1}{n_0 \omega_p} \operatorname{div} \mathbf{u}_e(\mathbf{r}, 0).$$

Подчеркнем, что вид функций  $v_1(r)$  и  $v_2(r)$  не сказывается на зависимости величин  $n_e$ ,  $E$ ,  $u_e$  от времени — все они осциллируют с одной и той же частотой  $\omega_{pe}$ , зависящей только от плотности плазмы \*).

Структура решения (4.1.2.5) уравнения для возмущения плотности электронов (4.1.2.3) показывает, что это возмущение не распространяется при плазменных колебаниях. Такая его локализация в начальной области характерна, однако, только для холодной плазмы (см. ниже § 4.2).

Легко видеть, что плазменные колебания с частотой  $\omega_{pe}$  являются продольными. Действительно, из уравнений электростатики следует, что  $E = -\nabla\varphi$ , где  $\varphi$  — электрический потенциал, удовлетворяющий уравнению Пуассона  $\Delta\varphi = 4\pi e(n_e - n_0)$ .

Поэтому для плоских монохроматических волн  $\varphi = \varphi_0 \exp[i(kr - \omega t)]$  получим  $E = -ik\varphi_0 \exp[i(kr - \omega t)]$ ; иными словами, электрическое поле направлено вдоль волнового вектора.

Продольный характер плазменных колебаний позволяет несколько по-иному понять возникновение частоты  $\omega_{pe}$ . Обратимся к соотношению (4.1.1.15), которое мы получили, основываясь только на уравнениях движения электронов и непрерывности, а также уравнениях Максвелла и не делая никаких предположений о характере поляризации волны. Предполагая, что  $\epsilon(\omega) \neq 0$ , мы пришли к выводу о поперечном характере электромагнитных волн, распространяющихся в плазме. Но мы знаем теперь, что плазменные волны являются продольными. Тогда из (4.1.1.15) следует, что для них должно выполняться условие

$$\epsilon(\omega) = 0. \quad (4.1.2.5')$$

Отсюда, учитывая выражение (4.1.1.11), получим  $\omega = \omega_{pe}$ .

Итак, при ленгмюровской частоте диэлектрическая проницаемость обращается в нуль. Это показывает, что  $\omega_{pe}$  представляет собой частоту собственных колебаний плазмы. В таком случае электрическая индукция и сторонние заряды обращаются в нуль, электрическое же поле отлично от нуля.

Заметим, что так как ионы обладают значительно большей массой, чем электроны, то они не «поспевают» за высокочастотными колебаниями электронов. Поэтому учет движения ионов дает лишь малую поправку к частоте ленгмюровских колебаний. Именно, последняя с учетом движения ионов определяется

---

\*) Рассматриваемые колебания были открыты Ленгмюром [1]. Интересно отметить, что еще до работы Ленгмюра колебания с частотой  $\omega_{pe}$  были теоретически получены Рэлеем [2] в связи с исследованием устойчивости томсоновской модели атома.

прежней формулой (4.1.1.11), в которой лишь под  $m_e$  следует понимать приведенную массу электрона и иона, т. е.

$$\omega'_{pe} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} \left(1 + \frac{m_e}{m_i}\right)} \quad (4.1.2.6)$$

При исследовании ленгмюровских колебаний мы пренебрегали тепловым движением электронов. Как уже указывалось, это возможно только тогда, когда фазовая скорость волны значительно больше тепловой скорости электронов

$$\omega/k \gg v_e, \quad v_e = \sqrt{T_e/m_i}. \quad (4.1.2.6')$$

Подставляя сюда вместо  $\omega$  ленгмюровскую частоту, получим

$$ka_e \ll 1, \quad (4.1.2.7)$$

где  $a_e$  — дебаевский радиус для электронов,

$$a_e = v_e/\omega_{pe} = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_0}.$$

Неравенство (4.1.2.7) есть, строго говоря, условие, при котором частота плазменных колебаний совпадает с ленгмюровской частотой.

Мы рассмотрели малые продольные колебания. Можно показать, что любые продольные колебания, если они являются одномерными, также совершаются с ленгмюровской частотой [3, 4].

**4.1.3. Ионно-звуковые колебания.** Выше мы говорили, что ионы очень мало влияют на высокочастотные ленгмюровские колебания и электромагнитные волны в плазме. Однако их влияние оказывается чрезвычайно существенным для низкочастотных квазиэлектростатических колебаний, которые могут возбуждаться в сильно неизотермической плазме с горячими электронами и холодными ионами \*).

Мы перейдем теперь к исследованию таких колебаний, предполагая выполненным условие  $T_e \gg T_i$ , где  $T_e$  и  $T_i$  — температуры электронов и ионов.

Как мы убедимся далее, фазовая скорость низкочастотных волн  $v_{ph} = \omega/k$  значительно меньше тепловой скорости электронов  $v_e = \sqrt{T_e/m_e}$ , но много больше тепловой скорости ионов  $v_i = \sqrt{T_i/m_i}$ , т. е.

$$v_i \ll \omega/k \ll v_e. \quad (4.1.3.1)$$

\*) Низкочастотные колебания плазмы были впервые исследованы Тонксом и Ленгмюром [5].

В этих условиях движение ионов можно описывать гидродинамически с помощью уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{d_i \mathbf{u}_i}{dt} &= -\frac{e}{m_i} \nabla \varphi, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} n_i \mathbf{u}_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (4.1.3.2)$$

где  $\mathbf{u}_i \equiv \mathbf{u}_i(\mathbf{r}, t)$  и  $n_i \equiv n_i(\mathbf{r}, t)$  — гидродинамическая скорость ионов и их плотность, а  $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{r}, t)$  — потенциал электрического поля.

Что касается движения электронов, то можно считать, что при низкочастотных колебаниях они находятся в равновесии и их плотность определяется формулой Больцмана

$$n_e(\mathbf{r}, t) = n_0 \exp[e\varphi(\mathbf{r}, t)/T_e] \quad (4.1.3.3)$$

(строгий ее вывод приведен в п. 8.2.1).

К написанным уравнениям мы должны присоединить еще уравнение для потенциала  $\varphi$ , т. е. уравнение Пуассона

$$\Delta \varphi = -4\pi e (\tilde{n}_i - \tilde{n}_e), \quad (4.1.3.4)$$

где  $\tilde{n}_i$  и  $\tilde{n}_e$  — отклонения плотности частиц от равновесного значения ( $\tilde{n}_i = n_i - n_0$ ,  $\tilde{n}_e = n_e - n_0$ ).

Будем предполагать, что колебания малы и все переменные величины изменяются по закону  $\exp[i(k\mathbf{r} - \omega t)]$ . Тогда из (4.1.3.2) вытекает соотношение

$$\mathbf{u}_i = \frac{e\mathbf{k}}{m_i\omega} \varphi$$

и, следовательно,  $\tilde{n}_i = n_0 k \mathbf{u}_i / \omega = (en_0 k^2 / m_i \omega^2) \varphi$ , а из (4.1.3.3) — соотношение

$$\tilde{n}_e = n_0 e \varphi / T_e.$$

Подставляя эти выражения в представление Фурье уравнения Пуассона  $k^2 \varphi = 4\pi e (\tilde{n}_i - \tilde{n}_e)$ , получим

$$k^2 \varphi = 4\pi e \left( \frac{en_0 k^2}{m_i \omega^2} \varphi - \frac{n_0 e}{T_e} \varphi \right),$$

откуда

$$\omega = \omega_s(k) \equiv \frac{kv_s}{\sqrt{1 + k^2 a_e^2}}, \quad (4.1.3.5)$$

где  $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$ ,  $a_e = \sqrt{T_e/4\pi e^2 n_0}$ .

Мы получили колебания с частотой  $\omega_s(k)$ , и нам остается проверить, справедливы ли для них неравенства (4.1.3.1). Легко

видеть, что условие  $\omega_s/k \ll v_e$  выполняется всегда, так как  $m_e \ll m_i$ . Условие же  $\omega/k \gg v_i$  выполняется при  $T_e \gg T_i (1 + k^2 a_e^2)$ .

Если последнее неравенство не справедливо, то фазовая скорость рассматриваемых колебаний будет порядка тепловой скорости ионов, и колебания будут сильно затухать из-за резонансного поглощения ионами. Рассмотрение этого эффекта возможно, однако, только в рамках кинетической теории (см. ниже п. 4.2.2).

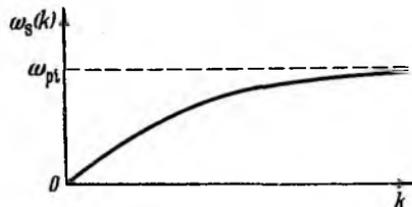


Рис. 4.1.3. Зависимость частоты ионно-звуковых колебаний от величины волнового вектора.

В длинноволновой части своего спектра ( $ka_e \ll 1$ ) рассматриваемые колебания характеризуются линейным законом дисперсии

$$\omega_s(k) = kv_s, \quad (4.1.3.6)$$

и поэтому эти колебания называют ионно-звуковыми, а величину  $v_s$  — скоростью ионного звука. Как видно из (4.1.3.5), она определяется температурой электронов и массой ионов.

В коротковолновой части спектра ( $ka_e \gg 1$ ) частота ионно-звуковых колебаний близка к ионной ленгмюровской частоте

$$\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_i}. \quad (4.1.3.7)$$

График зависимости частоты ионно-звуковых колебаний от величины волнового вектора показан на рис. 4.1.3.

## § 4.2. Кинетическая теория продольных плазменных колебаний

**4.2.1. Развитие начального возмущения.** В предыдущем параграфе была развита гидродинамическая теория высокочастотных и низкочастотных колебаний в бесстолкновительной плазме, не учитывающая влияния теплового движения частиц. Теперь мы перейдем к последовательному исследованию этого влияния на различные типы плазменных колебаний. Здесь, очевидно, недостаточно гидродинамического приближения и необходимо кинетическое описание плазмы. Иными словами, мы должны пользоваться кинетическими уравнениями Власова (1.2.2.4) с самосогласованным полем. Так как нас интересуют высокочастотные колебания, для которых  $\omega\tau \gg 1$ , где  $\tau$  — среднее время между парными столкновениями частиц, то мы можем не учитывать в кинетических уравнениях интегралов столкновений частиц.

Начнем с исследования продольных колебаний свободной плазмы, считая, так же, как и в п. 4.1.2, электрическое поле

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  квазистатическим, т. е. полагая  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ , где  $\varphi \equiv \varphi(\mathbf{r}, t)$  — электрический потенциал.

Как и выше, мы можем рассматривать только электроны и исходить поэтому из одного кинетического уравнения для функции распределения электронов  $F_e \equiv F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m_e} \nabla \varphi \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (4.2.1.1)$$

и уравнения Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi e \left( \int F_e d^3v - n_0 \right) \quad (4.2.1.2)$$

для потенциала  $\varphi$ . Функция распределения предполагается нормированной согласно условию  $\int F_e d^3v d^3r = N$ , где  $N$  — общее число электронов плазмы.

Мы будем изучать малые колебания, и положим поэтому

$$F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{e0}(\mathbf{v}) + f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (4.2.1.3)$$

где  $f_{e0}$  — функция распределения электронов в отсутствие колебаний и  $f_e$  — малая добавка к ней, обусловленная колебаниями, причем  $|f_e| \ll f_{e0}$  и  $|\partial f_e / \partial \mathbf{v}| \ll |\partial f_{e0} / \partial \mathbf{v}|$ .

Подставляя выражение (4.2.1.3) в кинетическое уравнение (4.2.1.1) и уравнение Пуассона (4.2.1.2) и производя линеаризацию относительно  $f_e$  в кинетическом уравнении, получим окончательно следующую систему уравнений для определения функций  $f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m_e} \nabla \varphi \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad \Delta \varphi = 4\pi e \int f_e d^3v. \quad (4.2.1.4)$$

Решим прежде всего, используя эту систему уравнений, общую задачу о развитии начального возмущения в плазме\*).

Задача формулируется следующим образом. Плазма находилась под внешним воздействием, которое вывело ее из состояния равновесия. В момент времени  $t=0$  внешнее воздействие было «выключено» и плазма предоставлена самой себе. Спрашивается, как будет развиваться начальное возмущение плазмы? Иными словами, каковы будут функции распределения электронов и электрическое поле во все последующие моменты времени, если известна функция распределения электронов в начальный момент  $t=0$ , т. е.

$$f_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)|_{t=0} = g(\mathbf{r}, \mathbf{v}), \quad (4.2.1.5)$$

где  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  — известная функция координат и скорости?

\*) Эта задача была сформулирована и решена Ландау [7].

Ясно, что если рассматривать промежутки времени  $t$ , большие по сравнению со временем релаксации плазмы  $\tau$ , то полная функция распределения электронов  $F_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  не будет практически отличаться от максвелловского распределения. Поэтому нас интересуют промежутки времени, малые по сравнению со временем релаксации ( $t \ll \tau$ ), когда столкновения частиц не играют существенной роли и основным является действие самосогласованного поля.

Итак, наша задача сводится к решению системы (4.2.1.4) вместе с начальным условием (4.2.1.5).

Уравнения (4.2.1.4) не содержат явно пространственных координат. Поэтому их удобно переписать для отдельных компонент Фурье функции распределения и потенциала

$$f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f_0(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3r,$$

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \varphi(\mathbf{r}, t) \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) d^3r.$$

Уравнения для  $f_{\mathbf{k}}$  и  $\varphi_{\mathbf{k}}$  имеют, как легко видеть, следующий вид:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}}{\partial t} + i\mathbf{k}\mathbf{v}f_{\mathbf{k}} + \frac{e}{m_0}\varphi_{\mathbf{k}}\mathbf{k}\frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

$$k^2\varphi_{\mathbf{k}} = -4\pi e \int f_{\mathbf{k}} d^3v. \quad (4.2.1.6)$$

Применим к этим уравнениям преобразование Лапласа по времени, умножив их на  $\exp(-pt)$  и проинтегрировав по  $t$  от нуля до бесконечности. Предполагая вещественную часть  $p$  достаточно большой, чтобы существовали интегралы

$$f_{\mathbf{k}p}(\mathbf{v}) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) dt, \quad \varphi_{\mathbf{k}p} = \int_0^{\infty} \exp(-pt) \varphi_{\mathbf{k}}(t) dt, \quad (4.2.1.7)$$

и используя начальное условие (4.2.1.5) для функции распределения, получим

$$(p + i\mathbf{k}\mathbf{v}) f_{\mathbf{k}p}(\mathbf{v}) + i\frac{e}{m_0}\varphi_{\mathbf{k}p}\mathbf{k}\frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}} = g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}),$$

$$k^2\varphi_{\mathbf{k}p} = -4\pi e \int f_{\mathbf{k}p}(\mathbf{v}) d^3v, \quad (4.2.1.8)$$

где  $g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})$  — компонента Фурье функции  $g(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ , т. е.

$$g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}) g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r.$$

Из (4.2.1.8) следует, что

$$f_{\mathbf{k}p}(\mathbf{v}) = \frac{g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v})}{p + i\mathbf{k}\mathbf{v}} + \frac{ie^{\varphi_{\mathbf{k}p}}}{m_0(p + i\mathbf{k}\mathbf{v})} \mathbf{k} \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}} \quad (4.2.1.9)$$

и

$$\varphi_{\mathbf{k}p} = -\frac{4\pi e N(k, p)}{k^2 D(k, p)}, \quad (4.2.1.10)$$

где

$$\left. \begin{aligned} N(k, p) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_{\mathbf{k}}(w)}{p + ikw} dw, \\ D(k, p) &= 1 - \frac{4\pi ie^2}{m_0 k} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{df_{e0}/dw}{p + ikw} dw, \\ g_{\mathbf{k}}(w) &= \int g_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) d^2v_i, \quad f_{e0}(w) = \int f_{e0}(\mathbf{v}) d^2v_i; \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1.11)$$

$w$  — проекция скорости частицы на направление волнового вектора  $\mathbf{k}$  ( $w = \mathbf{k}\mathbf{v}/k$ ),  $v_i$  — составляющая  $\mathbf{v}$ , перпендикулярная  $\mathbf{k}$ .

Зная  $f_{\mathbf{k}p}(\mathbf{v})$  и  $\varphi_{\mathbf{k}p}$ , можно, используя обратное преобразование Лапласа, найти  $f_{\mathbf{k}}(w, t)$  и  $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$ ; они равны

$$\left. \begin{aligned} f_{\mathbf{k}}(w, t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} f_{\mathbf{k}p}(w) \exp(pt) dp, \\ \varphi_{\mathbf{k}}(t) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \varphi_{\mathbf{k}p} \exp(pt) dp, \end{aligned} \right\} \quad (4.2.1.12)$$

где интегрирование производится вдоль прямой  $\text{Re } p = \sigma$ , параллельной мнимой оси в плоскости комплексного переменного  $p$  и лежащей правее всех особенностей функции  $\varphi_{\mathbf{k}p}$  и  $f_{\mathbf{k}p}(\mathbf{v})$ .

Наконец, применив к последним соотношениям обратное преобразование Фурье, мы найдем искомые величины  $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  и  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  при  $t > 0$ , чем и исчерпывается формальное решение нашей задачи.

Однако уже общие формулы (4.2.1.12) позволяют исследовать важный вопрос о поведении функций  $\varphi_{\mathbf{k}}(t)$  и  $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}, t)$  с ростом  $t$ .

Как известно, асимптотическое поведение функций при больших  $t$  определяется характером особенностей их преобразований Лапласа (т. е. в рассматриваемой задаче особенностей функций  $\varphi_{\mathbf{k}p}$  и  $f_{\mathbf{k}p}(\mathbf{v})$ ). Выражение (4.2.1.9) показывает, что функция  $f_{\mathbf{k}p}$  имеет те же особенности, что и  $\varphi_{\mathbf{k}p}$ , и кроме того добавочный полюс в точке  $p = -ikw$ . Рассмотрим поэтому вопрос об особенностях функции  $\varphi_{\mathbf{k}p}$ . Она была определена выше только для достаточно

больших значений  $\text{Re } p$ . Для исследования ее особенностей нужно прежде всего определить эту функцию на всей плоскости комплексного переменного, т. е. аналитически продолжить выражение (4.2.1.10) в сторону убывающих значений  $\text{Re } p$ . Вплоть до мнимой оси  $p$  аналитическое продолжение  $\varphi_{kp}$  определяется, очевидно, по-прежнему (2.4.1.10).

При  $\text{Re } p > 0$  функция  $N(k, p)$  и интеграл, входящий в выражение для  $D$ , не имеют особенностей, и поэтому особенностями функции  $\varphi_{kp}$  при  $\text{Re } p > 0$  могут быть только нули знаменателя (2.4.1.10), т. е. корни уравнения  $D(k, p) = 0$ .

Для чисто мнимых значений  $p$  знаменатели в интегралах, определяющих  $\varphi_{kp}$ , обращаются в нуль при  $w = ip/k$ . Поэтому для аналитического продолжения  $\varphi_{kp}$  в область  $\text{Re } p < 0$  необходимо деформировать путь интегрирования в интегралах (4.2.1.11) таким образом, чтобы он обходил полюс  $w = ip/k$  снизу. Такая деформация пути предполагает в свою очередь возможность аналитического продолжения функций  $df_{e0}/dw$  и  $g_k(w)$ , определенных первоначально только при вещественных значениях  $w$ , в область комплексных значений  $w$ .

Таким образом, выяснение характера особенностей функции  $\varphi_{kp}$  (а также  $f_{kp}$ ), определяющих асимптотику  $\varphi_k(t)$  и  $f_k(w, t)$  при больших значениях  $t$ , требует знания аналитических свойств функций  $f_{e0}(w)$  и  $g_k(w)$ .

Ограничимся далее рассмотрением функций  $f_{e0}(w)$ , допускающих аналитическое продолжение в область комплексных значений  $w$ . При этом функцию  $D(k, p)$ , определенную при  $\text{Re } p > 0$  соотношением (4.2.1.11), можно аналитически продолжить в область  $\text{Re } p \leq 0$ , определив ее повсюду как

$$D(k, p) = 1 - \frac{4\pi i e^2}{m_0 k} \int_c \frac{df_{e0}(w)/dw}{p + ikw} dw, \quad (4.2.1.13)$$

где интегрирование должно производиться вдоль вещественной оси  $w$  с обходом полюса  $w = ip/k$  снизу (рис. 4.2.1).

Заметим, что если распределение частиц характеризуется предельной скоростью  $w_0$ , т. е. если  $f_{e0}(w) = 0$  при  $|w| > w_0$ , то однозначное аналитическое продолжение функции  $D(k, p)$  в полуплоскость  $\text{Re } p < 0$  невозможно. При  $\text{Re } p = 0$  функция  $D(k, p)$  определяется формулой (4.2.1.13), в которой интегрирование следует производить вдоль вещественной оси  $w$  от  $-w_0$  до  $w_0$  с обходом возможного полюса  $w = ip/k$  снизу. Разумеется, при чисто мнимом значении  $p = -i\omega$ , при котором  $\omega/k > w_0$ , интегрирование в (4.2.1.13) можно производить вдоль вещественной оси. Это всегда допустимо при  $\omega/k > c$  (так как не существует частиц, скорость которых превосходит скорость света), а также в случае вырожденного электронного газа (при абсолютном нуле темпе-

ратуры), если  $\omega/k > v_F$  где  $v_F$  — граничная фермиевская скорость электронов.

Ясно, что для распределений с предельной скоростью  $w_0$  функция  $D(k, -i\omega)$  при  $\omega/k > w_0$  чисто вещественна.

Мы определили знаменатель выражения (2.4.1.10) для  $\varphi_{kp}$ , т. е. функцию  $D(k, p)$  во всей плоскости комплексного переменного  $p$ . Выясним теперь аналитические свойства числителя этого выражения — функции  $N(k, p)$ . Формула (4.2.1.14) определяет ее при  $\text{Re } p > 0$ ; как уже указывалось, в этой области функция  $N(k, p)$  не имеет особенностей. Положение и характер ее особенностей при  $\text{Re } p \leq 0$  определяются свойствами функции  $g_k(w)$ .

Если у функции  $g_k(w)$  есть особенности (разумеется, интегрируемые) при вещественных  $w$ , то  $N(k, p)$  будет иметь особенности при чисто мнимых  $p$ . В частности, это справедливо, если функция  $g_k(w)$  обладает  $\delta$ -образной особенностью или разрывом или изломом, а также если излом имеет какая-либо из ее производных (в таких случаях функция  $g_k(w)$

не допускает аналитического продолжения с вещественной осью).

Если  $g_k(w)$  не имеет особенностей на вещественной оси и допускает аналитическое продолжение в области комплексных значений  $w$ , то функция  $N(k, p)$  (а следовательно, и функция  $\varphi_{kp}$ ) не обладает особенностями на мнимой оси  $p$ , но может иметь их при  $\text{Re } p < 0$ , а именно при  $p = -ikw_r$ , причем в точке  $w_r$ , лежащей в нижней полуплоскости комплексного переменного  $w$ , функция  $g_k(w)$  имеет какую-то особенность.

Особый интерес представляют начальные возмущения  $g_k(w)$ , при которых функция  $N(k, p)$  вообще лишена особенностей при конечных  $p$ , т. е. является целой функцией. Из сказанного выше ясно, что такое положение имеет место, если функция  $g_k(w)$  также является целой \*) (не имеет особенностей при конечных значениях  $w$ ) и при этом достаточно быстро убывает при  $w \rightarrow \pm \infty$ . Например, функция  $N(k, p)$  будет целой при начальных возмущениях вида

$$g_k(w) = P(w) \exp(-\alpha w^2),$$

где  $P(w)$  — полином произвольной степени и  $\alpha$  — положительная константа.

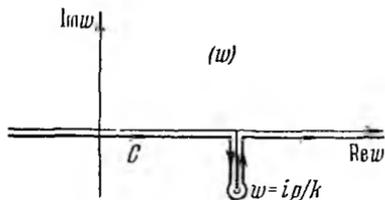


Рис. 4.2.1. Контур интегрирования  $C$  в плоскости комплексного переменного  $w$ .

\*) Строго говоря, для того чтобы функция  $N(k, p)$  была целой, достаточно, чтобы функция  $g_k(w)$  была голоморфной только в нижней полуплоскости  $w$  (включая вещественную ось).

Остановимся на исследовании целых функций  $g_k(w)$  несколько подробнее. Так как в этом случае числитель выражения (4.2.1.10) не имеет особенностей при конечных  $p$ , то единственными особенностями  $\varphi_{kp}$  будут нули знаменателя, т. е. корни уравнения

$$D(k, p) = 0, \quad (4.2.1.14)$$

где  $D$  определяется выражением (4.2.1.13).

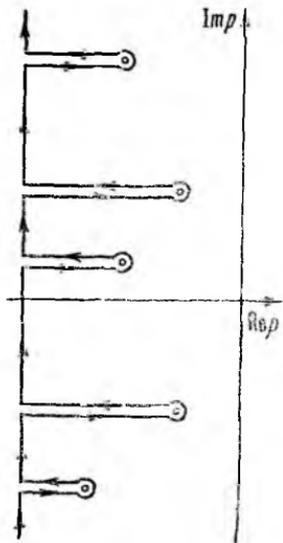


Рис. 4.2.2. Смещенный контур интегрирования в плоскости комплексного переменного  $p$ .

Обозначим через  $p_r = -i\omega^{(r)} - \gamma^{(r)}$  ( $\omega^{(r)}$  и  $\gamma^{(r)}$  вещественны,  $r=1, 2, \dots$ ) корни этого уравнения. Тогда асимптотически при больших  $t$  ( $t$  должно быть, однако, малым по сравнению со временем релаксации  $\tau$ , так как при  $t > \tau$  необходим учет парных столкновений) компонента Фурье потенциала ведет себя как

$$\varphi_k(t) \approx \sum_r \varphi_{kp_r}^{(r)} \exp[-\gamma^{(r)}t - i\omega^{(r)}t] \quad (4.2.1.15)$$

где  $\varphi_{kp_r}^{(r)}$  — вычет  $\varphi_{kp}$  в точках  $p^{(r)}$ . В данном случае контур интегрирования в (4.2.1.12) следует сместить достаточно далеко в левую полуплоскость (рис. 4.2.2).

Аналогичное выражение для  $f_k(w, t)$  имеет вид

$$f_k(w, t) \approx a_k(w) \exp(-ikwt) + \sum_r f_{kp_r}^{(r)}(w) \exp[-\gamma^{(r)}t - i\omega^{(r)}t], \quad (4.2.1.16)$$

где  $a_k$  и  $f_{kp_r}^{(r)}$  — вычеты  $f_{kp}$  в точках  $p = -ikw$  и  $p = p_r$ . (Это выражение содержит наряду с вкладом, вносимым полюсами функции

$\varphi_{kp}$ , еще вклад от полюса  $p = -ikw$ , которого нет у этой функции.)

Таким образом, в случае целых функций  $g_k(w)$  асимптотика  $\varphi_k(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  зависит только от невозмущенного распределения частиц в плазме  $f_{e0}(w)$ , которым определяются корни уравнения  $D(k, p) = 0$ , и не зависит от конкретного вида возмущения. Поэтому можно сказать, что корни уравнения (4.2.1.14) определяют спектр собственных продольных электронных колебаний плазмы; мнимые части корней представляют собой частоты колебаний, а вещественные части — декременты их затухания (если  $\gamma^{(r)} > 0$ ) или инкременты нарастания (если  $\gamma^{(r)} < 0$ ). Уравнение (4.2.1.14) называется *дисперсионным уравнением*.

Если все корни дисперсионного уравнения лежат в левой полуплоскости  $p$  ( $\gamma^{(r)} > 0$ ), то функция  $\varphi_k(t)$  при больших  $t$  (предпо-

лагаются, однако, что  $t \ll \tau$ ) стремится к нулю, т. е. колебания поля будут затухающими.

Что касается функции  $f_k(w, t)$ , то она, как видно из выражения (4.2.1.16), при  $\gamma^{(r)} > 0$  не стремится к нулю, а испытывает незатухающие колебания с амплитудой  $a_k(w)$ . Такое поведение  $f_k(w, t)$  связано с тем, что под действием одного только самосогласованного поля без парных столкновений не может установиться равновесное распределение частиц.

Если хотя бы один из корней уравнения (4.2.1.14) лежит в правой полуплоскости  $p$  ( $\gamma^{(r)} < 0$ ), то функции  $\varphi_k(t)$  и  $f_k(w, t)$  экспоненциально растут со временем (предполагается, что  $t \ll \tau$ ). В этом случае исходное распределение частиц  $f_{e0}(w)$  будет неустойчивым.

Выясним теперь характер асимптотики  $\varphi_k(t)$  при нецелых функциях  $g_k(w)$ . В этом случае к особенностям  $\varphi_{kp}$ , определяемым корнями дисперсионного уравнения  $D=0$ , прибавляются особенности функции  $N(k, p)$ . Их расположение зависит только от вида функции  $g_k(w)$ , т. е. от характера начального возмущения, и не зависит от свойств плазмы (функции  $f_{e0}(w)$ ). Как уже указывалось, существенным свойством особенностей функции  $N$  является то, что все они могут лежать только в левой полуплоскости  $p$ . Поэтому, если хотя бы один из корней дисперсионного уравнения  $D=0$  лежит в правой полуплоскости  $p$ , т. е.  $\gamma^{(r)} < 0$  (что соответствует возможности нарастания колебаний), то на асимптотику  $\varphi_k(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  характер начального возмущения не оказывает существенного влияния.

Если  $N(k, p)$  имеет особенности в точках  $p = p_n' = -\gamma'^{(n)} - i\omega'^{(n)}$  ( $n=1, 2, \dots$ ), то вклад этих особенностей в асимптотику  $\varphi_k(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  имеет вид  $\sum_n \alpha_n \exp(-\gamma'^{(n)}t - i\omega'^{(n)}t)$ , где  $\alpha_n$  — некоторые константы. Прибавив эту сумму к (4.2.1.15), найдем асимптотическое выражение для  $\varphi_k(t)$  в общем случае нецелых функций  $g_k(w)$  (не имеющих особенностей при вещественных  $w$ ) вида

$$\varphi_k(t) \approx \sum_r \varphi_{kr}^{(r)} \exp(-\gamma^{(r)}t - i\omega^{(r)}t) + \sum_n \alpha_n \exp(-\gamma'^{(n)}t - i\omega'^{(n)}t). \quad (4.2.1.17)$$

Таким образом, при больших значениях  $t$  (но, однако, при  $t \ll \tau$ ) функция  $\varphi_k(t)$  представляет суперпозицию собственных колебаний плазмы, комплексные частоты которых  $\omega^{(r)} - i\gamma^{(r)}$  определяются ее свойствами (первая сумма в выражении (4.2.1.17)), и колебаний, комплексные частоты которых  $\omega'^{(n)} - i\gamma'^{(n)}$  определяются видом начальной функции возмущения  $g_k(w)$  (вторая сумма в этом выражении).

Собственные колебания могут быть как затухающими, так и нарастающими, колебания же, частоты которых определяются видом функции  $g_k(w)$ , — только затухающими.

В дальнейшем мы будем в этой главе изучать только собственные колебания плазмы, так как только они могут быть нарастающими и интенсивно возбуждаются внешними источниками (в условиях резонанса). Здесь же приведем два примера колебаний, частоты и декременты затухания которых определяются начальным возмущением и не зависят от свойств плазмы.

В качестве первого примера рассмотрим колебания, возникающие при  $g_k(w)$  вида

$$g_k(w) = \frac{g_0 w_2}{(w - w_1)^2 + w_2^2}, \quad (4.2.1.18)$$

где  $g_0$ ,  $w_1$ ,  $w_2$  — некоторые константы. В этом случае

$$N(k, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_k(w)}{p + ikw} dw = -\frac{\pi g_0}{p + ikw_1 + kw_2}.$$

Функция  $N(k, p)$  имеет особенность при  $p = -ikw_1 - w_2$ , которая вносит в асимптотику  $\varphi_k(t)$  при больших  $t$  вклад порядка  $g_0 \exp(-kw_2 t - ikw_1 t)$ .

Мы видим, что частота и декремент затухания колебаний, возникающих в случае начального возмущения вида (4.2.1.18), равны соответственно  $kw_1$  и  $kw_2$ .

Если  $w_2 \rightarrow 0$ , то затухание исчезает. Заметим, что функция  $g_k(w)$  приобретает при этом  $\delta$ -образную особенность на вещественной оси ( $g_k(w) \rightarrow \pi g_0 \delta(w - w_1)$ ).

В качестве второго примера рассмотрим колебания, возникающие в случае разрывных функций  $g_k(w)$ . Пусть

$$g_k(w) = \begin{cases} g_0, & \text{если } -w_0 < w < w_0, \\ 0, & \text{если } |w| > w_0. \end{cases}$$

При этом функция

$$N(k, p) = \frac{g_0}{ik} \ln \frac{p + ikw_0}{p - ikw_0}$$

имеет точки ветвления  $p = \pm ikw_0$  на мнимой оси  $p$ . Вклад от особенностей функции  $N(k, p)$  в функцию  $\varphi_k(t)$  имеет вид  $g_0 \sin kw_0 t/t$ .

Таким образом, при  $\delta$ -образной особенности функции  $g_k(w)$  на вещественной оси возникают незатухающие колебания потенциала  $\varphi_k(t)$ ; при разрыве же функции  $g_k(w)$ , т. е. при  $\delta$ -образной особенности ее первой производной, колебания потенциала затухают, как  $1/t$ .

Легко показать, что в случае разрыва  $n$ -й производной функции  $g_k(w)$ , т. е.  $\delta$ -образной особенности ее  $(n+1)$ -й производной, асимптотика потенциала имеет вид  $t^{-(n+1)} \exp(ikw_0 t)$ , где  $w_0$  — точка разрыва.

Возвращаясь к исследованию собственных электронных колебаний плазмы, рассмотрим прежде всего простейшее продольное колебание, соответствующее  $k \rightarrow 0$ . В этом случае дисперсионное уравнение можно переписать в виде

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{4\pi i e^2}{m_e k p} \int \left(1 - \frac{ikw}{p}\right) \frac{df_{e0}}{dw} dw = 1.$$

Замечая, что

$$\int \frac{df_{e0}}{dw} dw = 0, \quad \int w \frac{df_{e0}}{dw} dw = -n_0,$$

где  $n_0$  — плотность частиц, получим для  $p$  чисто мнимое значение, а именно  $p = \pm i\omega_{pe}$ , где  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$ .

Таким образом, в плазме возможны собственные незатухающие продольные электронные колебания, для которых волновой вектор стремится к нулю. Частота этих колебаний (ленгмюровская частота) определяется только плотностью частиц и не зависит от характера их распределения по скоростям.

**4.2.2. Частота и затухание ленгмюровских колебаний.** Найдем теперь частоту и декремент затухания высокочастотных продольных (ленгмюровских) колебаний плазмы с максвелловским распределением электронов

$$f_{e0}(v) = \frac{n_0}{(2\pi T_e / m_e)^{3/2}} \exp(-m_e v^2 / 2T_e),$$

где  $T_e$  — температура электронов и  $n_0$  — их равновесная плотность.

Подставляя это выражение вместо исходной функции распределения в (4.2.1.13) и вводя вместо  $w$  новую переменную интегрирования  $y = w / \sqrt{2} v_e$  ( $v_e = \sqrt{T_e / m_e}$ ), получим

$$D(k, \omega') = 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \left(1 - \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int \frac{e^{-y^2}}{z - y} dy\right) = 0, \quad (4.2.2.1)$$

где  $z = \omega' / \sqrt{2} kv_e$ ,  $\omega' = ip = \omega - i\gamma$  — комплексная частота (величины  $\omega$  и  $\gamma$  вещественны) и интегрирование совершается вдоль вещественной оси с обходом полюса  $y = z$  снизу.

Уравнение (4.2.2.1) определяет комплексную частоту  $\omega' = \omega - i\gamma$  как функцию волнового вектора  $k$ ; ее вещественная часть представляет собой частоту колебаний  $\omega$ , а мнимая часть (взятая с обратным знаком) — декремент затухания колебаний  $\gamma$

(мы увидим, что  $\gamma > 0$ ). Обе эти величины являются, естественно, функциями волнового вектора.

Прежде чем переходить к решению дисперсионного уравнения (4.2.2.1), мы несколько преобразуем входящий в него контурный интеграл [15]

$$J(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{e^{-y^2}}{z-y} dy,$$

что будет полезно нам при решении ряда задач.

Рассмотрим сначала случай  $\text{Im } z > 0$ . Умножая числитель и знаменатель подынтегральной функции на  $z+y$ , представим  $J(z)$  в виде

$$J(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z \exp(-z^2) \int_0^{\infty} \frac{\exp(z^2 - y^2)}{z^2 - y^2} dy + \frac{2}{\sqrt{\pi}} z \exp(-z^2) \int_0^{\infty} \frac{dy}{z^2 - y^2}.$$

Замечая, что

$$2z \int_0^{\infty} \frac{dy}{z^2 - y^2} = -i\pi$$

и вводя обозначения

$$A(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{\exp[\xi(z^2 - y^2)] - 1}{z^2 - y^2} dy,$$

получим

$$J(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} z \exp(-z^2) A(1) - i\sqrt{\pi} \exp(-z^2).$$

Чтобы найти  $A(1)$ , продифференцируем  $A(\xi)$  по  $\xi$ :

$$A'(\xi) = \int_0^{\infty} \exp[\xi(z^2 - y^2)] dy = 1/2 \sqrt{\pi/\xi} \exp(\xi z^2),$$

откуда

$$A(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \int_0^1 \frac{\exp(\xi z^2)}{\sqrt{\xi}} d\xi$$

и, следовательно,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\exp(-y^2)}{z-y} dy = z \exp(-z^2) \int_0^1 \frac{\exp(\xi z^2)}{\sqrt{\xi}} d\xi - i\sqrt{\pi} \exp(-z^2). \quad (4.2.2.2)$$

Поступая аналогичным образом, можно показать, что та же формула справедлива и при  $\text{Im } z < 0$ .

Вводя вместо  $\xi$  новую переменную интегрирования  $t = z\sqrt{\xi}$ , можно переписать (4.2.2.2) в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\exp(-y^2)}{z-y} dy = -t\sqrt{\pi}w(z), \quad (4.2.2.2')$$

где

$$w(z) = \exp(-z^2) \left( 1 + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^z \exp(t^2) dt \right)$$

— интеграл вероятностей от комплексного аргумента. (Заметим, что имеются таблицы функции  $w(z)$  [9].)

Эти соотношения очень полезны для дальнейших исследований, так как в них можно сделать переход к вещественным  $z$ .

Рассмотрим соотношение (4.2.2.2) в нескольких предельных случаях.

Если  $|z| \ll 1$ , то, очевидно,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\exp(-y^2)}{z-y} dy = -t\sqrt{\pi} + 2z.$$

Если  $|z| \gg 1$  и  $|\operatorname{Im} z| \ll 1$ , то справедливо асимптотическое разложение

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_C \frac{\exp(-y^2)}{z-y} dy = \frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{2z^2} + \frac{3}{4z^4} + \dots \right) - t\sqrt{\pi} \exp(-z^2). \quad (4.2.2.3)$$

Действительно, сделав в (4.2.2.2) замену переменной  $\xi = 1 - \eta/z^2$ , получим

$$\exp(-z^2) \int_0^1 \frac{\exp(\xi z^2)}{\sqrt{\xi}} d\xi = \frac{1}{z^2} \int_0^{z^2} e^{-\eta/\sqrt{1-\eta/z^2}} d\eta.$$

Разложив далее  $(1 - \eta/z^2)^{-1/2}$  в ряд по степеням  $\eta$  и интегрируя его почленно от  $\eta=0$  до  $\eta=\infty$ , мы получим асимптотическое разложение (4.2.2.3).

Обратим внимание на то обстоятельство, что интеграл  $J(z)$  при вещественных  $z$  является комплексным; это связано с обходом особой точки  $y=z$  в плоскости комплексного переменного  $y$ .

Используя представление (4.2.2.2') контурного интеграла, можно переписать дисперсионное уравнение (4.2.2.1) в виде

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} [1 + i\sqrt{\pi}zw(z)] = 0. \quad (4.2.2.4)$$

Перейдем теперь к его исследованию. Рассмотрим сперва длинноволновую часть спектра ленгмюровских колебаний, для которой длина волны значительно больше дебаевского радиуса

электронов, т. е.  $ka_e \ll 1$ ,  $a_e = v_e / \omega_{pe}$ , а фазовая скорость волны значительно больше тепловой скорости электронов ( $\omega \gg kv_e$ ).

В этих условиях, как мы знаем из гидродинамической теории, частота плазменных колебаний должна быть близка к ленгмюровской частоте. Поэтому параметр  $z$  в уравнении (4.2.2.4) по модулю значительно больше единицы. Вместе с тем, как мы сейчас убедимся, плазменные волны будут затухать, но декремент их затухания очень мал. Это значит, что  $|z| \gg 1$ , причем  $|\text{Im } z| \ll 1$ . Поэтому вместо контурного интеграла в дисперсионном уравнении можно воспользоваться асимптотическим разложением (4.2.2.3). Сохраняя в нем первые три слагаемых, получим дисперсионное уравнение в виде

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega'^2} - \frac{3\omega_{pe}^2 k^2 v_e^2}{\omega'^4} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} i \sqrt{\pi} z \exp(-z^2) = 0. \quad (4.2.2.5)$$

Его можно решить методом последовательных приближений. Отбрасывая сперва последнее слагаемое, содержащее экспоненциально малый множитель  $\exp(-z^2)$  ( $|z| \gg 1$ ), и принимая во внимание, что  $kv_e / |\omega'| \ll 1$ , получим для вещественной части  $\omega'$

$$\omega = \omega(k) = \omega_{pe} (1 + \frac{3}{2} k^2 a_e^2). \quad (4.2.2.6)$$

Учитывая далее, что  $\omega' = \omega(k) - i\gamma(k)$ , и считая  $\gamma(k) \ll kv_e$ , разложим левую часть уравнения (4.2.2.5) в ряд по степеням  $\gamma(k)$  и сохраним в нем линейный член (он получается от суммы первых двух слагаемых) и не зависящий от  $\gamma$  член (последнее слагаемое в (4.2.2.5)). В результате получим следующее выражение для  $\gamma(k)$ :

$$\gamma(k) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{k^3 a_e^2} \exp(-\frac{3}{2} - 1/2 k^2 a_e^2). \quad (4.2.2.7)$$

Заметим, что эта величина, во-первых, положительна и, во-вторых, мала по сравнению с  $kv_e$ , что и предполагалось выше. Таким образом, выкладки подтвердили наши предположения о характере корня дисперсионного уравнения.

Выражения (4.2.2.6) и (4.2.2.7) определяют частоту и декремент затухания длинноволновых ленгмюровских колебаний, для которых  $ka_e \ll 1$ .

Обратим внимание на следующее важное обстоятельство. В п. 4.1.2 мы показали, что в гидродинамической теории частота плазменных колебаний не зависит от величины волнового вектора (она совпадает с ленгмюровской частотой) и затухание их отсутствует. В кинетической же теории, как мы теперь видим, появляется, во-первых, зависимость частоты от волнового вектора (ее называют *дисперсией*) и, во-вторых, возникает затухание колебаний. Оба эти эффекта связаны с тепловым движением электронов, так как, по-

ложив  $T_e=0$ , мы получим, согласно (4.2.2.6) и (4.2.2.7),  $\omega = \omega_{pe}$  и  $\gamma=0$  в соответствии с гидродинамической теорией.

Другим не менее важным обстоятельством является то, что мы получили затухание плазменных колебаний, хотя и считали плазму бесстолкновительной. Таким образом, в плазме, даже в отсутствие парных столкновений частиц, происходит затухание колебаний. Это затухание носит название затухания Ландау \*).

К физической интерпретации затухания Ландау мы вернемся в п. 4.2.3, а пока несколько подробнее проанализируем последние два выражения для частоты и декремента затухания длинноволновых ленгмюровских колебаний.

Обращаясь в нуль при  $T_e=0$ , декремент затухания растет с повышением температуры. С ростом температуры увеличивается также поправка к частоте колебаний, зависящая от величины волнового вектора. Наличие этой поправки приводит к появлению у плазменных волн отличной от нуля групповой скорости

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 3ka_e v_e, \quad (4.2.2.8)$$

пропорциональной температуре электронов. Так как  $ka_e \ll 1$ , то групповая скорость длинноволновых ленгмюровских колебаний значительно меньше тепловой скорости электронов, но сам факт существования групповой скорости, отличной от нуля и зависящей от волнового вектора, приводит к важному обстоятельству, а именно, к «расплыванию» волновых пакетов, образованных ленгмюровскими плоскими монохроматическими волнами. Поэтому возмущение плазмы не локализуется в определенном месте, что имеет место при  $T_e=0$ , а обязательно «расползается».

С увеличением волнового вектора частота длинноволновых плазменных колебаний медленно возрастает, их фазовая скорость убывает и декремент затухания колебаний быстро увеличивается ( $\gamma \sim \exp(-1/2k^2 a_e^2)$ ).

При  $ka_e \sim 1$  фазовая скорость плазменных колебаний по порядку величины равна тепловой скорости электронов, а декремент затухания — частоте колебаний, т. е.

$$\omega(k) \sim kv_e \sim \omega_{pe}, \quad \gamma(k) \sim \omega(k).$$

Однако в этой (коротковолновой) части спектра плазменных колебаний выражения (4.2.2.6) и (4.2.2.7) для частоты и декремента затухания колебаний уже неприменимы. Для нахождения

\*) Формула (4.2.2.6), определяющая частоту плазменных колебаний с учетом теплового движения электронов, была получена Власовым [6], а формула (4.2.2.7), определяющая затухание плазменных колебаний в отсутствие столкновений, — Ландау [7].

точных значений этих величин при  $ka_e \sim 1$  нужно решать дисперсионное уравнение (4.2.2.4) численно.

При дальнейшем увеличении волнового вектора затухание колебаний продолжает усиливаться и в области коротких волн, когда  $ka_e \gg 1$ , декремент затухания становится значительно больше частоты колебаний ( $\gamma(k) \gg \omega(k)$ ). В этой области можно, так же как и при  $ka_e \ll 1$ , найти точное решение дисперсионного уравнения (4.2.2.4) [7]. Оно, однако, не отражает правильной физической картины плазменных колебаний, так как при  $ka_e \gg 1$  становится существенным влияние ионов на колебания плазмы.

**4.2.3. Физическая интерпретация затухания Ландау.** Затухание колебаний поля в бесстолкновительной плазме можно просто и наглядно интерпретировать. Оно обусловлено взаимодействием электронов с полем волны, которое происходит наиболее эффективно, если составляющая скорости электрона вдоль  $k$  близка к фазовой скорости волны \*)

$$w = v_{ph} = \omega(k)/k. \quad (4.2.3.1)$$

(Математически это проявляется в том, что подынтегральное выражение (4.2.2.1) имеет полюс при  $w = \omega'/k$ , а его наличие и приводит к затуханию.)

Будем называть частицы, для которых выполняется условие (4.2.3.1), *резонансными* и рассмотрим их взаимодействие с электрическим полем бегущей ленгмюровской волны вида

$$\varphi(x) = \varphi_0(t) \cos(kx - \omega t),$$

где  $\varphi$  — потенциал поля и  $\varphi_0$  — его слабозатухающая амплитуда, пропорциональная  $\exp(-\gamma t)$  ( $\gamma$  — затухание Ландау).

В системе отсчета, движущейся со скоростью, равной фазовой скорости волны  $v_{ph} = \omega/k$ , потенциал поля колебаний имеет вид почти стационарной системы «ям» и «горбов»

$$\varphi(x') = \varphi_0 \cos kx', \quad (4.2.3.2)$$

где  $x' = x - v_{ph}t$ .

Отвлечемся на время от зависимости амплитуды  $\varphi_0(t)$  от времени. Тогда для частиц, движущихся в поле (4.2.3.2), можно написать закон сохранения энергии

$$\frac{1}{2} m_e w'^2 - e\varphi(x') = W = \text{const}, \quad (4.2.3.2')$$

\*) На это обстоятельство было указано в работе Бома и Гросса [10] (см. более подробно [16]). Поскольку резонансное условие  $\omega(k) = kv = kw$  совпадает с условием черенковского поглощения или излучения плазменной волны с частотой  $\omega$  и волновым вектором  $k$  заряженной частицей, движущейся в плазме со скоростью  $v$ , то затухание Ландау называют часто *черенковским затуханием*.

где  $w' = w - v_{ph}$  — скорость частицы в системе отсчета, связанной с волной.

У частиц с кинетической энергией  $1/2 m_e w'^2$ , значительно превышающей их потенциальную энергию  $-e\varphi_0$ , в среднем обмена энергией не происходит. «Захваченные» или «почти захваченные» в потенциальную яму частицы с малой энергией (меньшей или порядка  $e\varphi_0$ ), скорость которых  $w$  отличается от  $v_{ph}$  на величину  $\Delta w = (e\varphi_0/m_e)^{1/2}$  сильно взаимодействуют с волной. Именно эти частицы ответственны за появление затухания Ландау.

Частицы, обгоняющие волну ( $w' > 0$ ), отдают энергию волне, частицы же отстающие от нее ( $w' < 0$ ), ускоряются волной. Работа поля над ними, а следовательно, и величина декремента затухания волны пропорциональны разности числа быстрых и медленных резонансных частиц, а так как величина  $\Delta w$  мала, то эта разность пропорциональна  $-\partial f_{e0}/\partial w$ , т. е.

$$\gamma \sim - \left. \frac{\partial f_{e0}}{\partial w} \right|_{w=v_{ph}} \quad (4.2.3.3)$$

Если функция распределения  $f_{e0}(w)$  убывает при  $w \approx \omega/k$ , то число быстрых частиц меньше числа медленных и колебания затухают (рис. 4.2.3). Если же имеется область скоростей, где  $\partial f_{e0}/\partial w > 0$  (что может осуществиться, например, в случае, когда через плазму проходит пучок заряженных частиц, см. ниже гл. 6), то число быстрых частиц больше числа медленных, и колебания плазмы с фазовой скоростью, лежащей в области, где  $\left. \frac{\partial f_{e0}}{\partial w} \right|_{w=v_{ph}} > 0$ , нарастают во времени ( $\gamma < 0$ ).

Найдем изменение среднего значения кинетической энергии электронов в единице объема плазмы в результате их взаимодействия с волной (4.2.3.2). Имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda dx' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_e}{2} \left( w' + \frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{\partial F_e}{\partial t} dw', \quad (4.2.3.4)$$

где  $\lambda = 2\pi/k$  — длина волны. Это уравнение можно представить в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{m_e}{2} \left( w' + \frac{\omega}{k} \right)^2 \frac{\partial \langle F_e \rangle}{\partial t} dw', \quad (4.2.3.5)$$

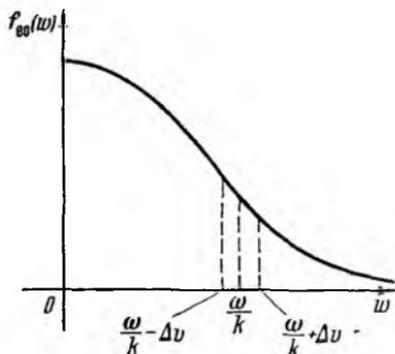


Рис. 4.2.3. Распределение частиц по скоростям в случае затухающих колебаний.

где среднее по пространству значение производной по времени от функции распределения равно

$$\frac{\partial \langle F_e \rangle}{\partial t} = -\frac{ek\varphi_0}{m_e \lambda} \int_0^\lambda \sin kx' \frac{\partial F_e}{\partial w'} dx'. \quad (4.2.3.6)$$

Полагая, как и ранее,  $F_e = f_{e0} + f_e$ , где  $f_{e0}$  — исходная функция распределения, а  $f_e$  — малое возмущение, найдем из линеаризованного уравнения Власова

$$f_e(x', w', t) = f_1(w', 0) \cos(kx - kwt) - \frac{ek\varphi_0}{m_e} \frac{\partial f_{e0}}{\partial w} (\cos kx' - \cos k(x' - w't)). \quad (4.2.3.7)$$

Из последних двух соотношений следует, что

$$\frac{\partial \langle F_e \rangle}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial w'} \left[ \frac{ek\varphi_0}{2m_e} f_1(w', 0) \sin kw't + \frac{e^2 k^2 \varphi_0^2}{2m_e^2} \frac{\partial f_{e0}}{\partial w'} \frac{\sin kw't}{kw'} \right]. \quad (4.2.3.8)$$

Подставляя это выражение в (4.2.3.5), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & \frac{1}{2} ek\varphi_0 \int_{-\infty}^{\infty} f_1(w', 0) (w' + \omega/k) \sin kw't dw' - \\ & - \frac{e^2 k^2 \varphi_0^2}{2m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_{e0}}{\partial w'} (w' + \omega/k) \frac{\sin kw't}{kw'} dw'. \end{aligned} \quad (4.2.3.9)$$

При  $t \rightarrow \infty$  первый интеграл в правой части обратится в нуль, а во втором интеграле функция  $(\sin kw't)/kw'$  будет иметь резкий пик при  $w' = 0$ , так как

$$\frac{\sin kw't}{kw'} \Big|_{t \rightarrow \infty} = \pi \delta(kw').$$

В результате получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{\pi}{2} \omega \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 n_0} \frac{\partial f_{e0}}{\partial w'} \Big|_{w=0} \frac{k^2 \varphi_0^2}{4\pi}.$$

Приравнявая скорость увеличения кинетической энергии и скорость уменьшения энергии ленгмюровских колебаний

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{8\pi} \frac{dk^2 \varphi_0^2}{dt} = \gamma \frac{k^2 \varphi_0^2}{4\pi}, \quad (4.2.3.10)$$

получим для декремента затухания ленгмюровских колебаний выражение

$$\gamma = -\frac{\pi}{2} \frac{\omega_{pe}^3}{k^2 n_0} \frac{df_{e0}(w)}{dw} \Big|_{w \rightarrow \omega/k} \quad (4.2.3.11)$$

Это выражение в точности совпадает с (4.2.2.7), вытекающим из дисперсионного уравнения (4.2.1.14).

В случае ленгмюровских колебаний в плазме с максвелловским распределением электронов при  $\omega/k \gg v_e$  резонансные электроны находятся в «хвосте» максвелловского распределения, где их число экспоненциально мало; поэтому экспоненциально мал и декремент затухания (4.2.2.7). Из формулы (4.2.3.11) в этом случае легко установить, что  $\gamma$  пропорционально характерному множителю  $\exp(-1/2k^2 a_e^2)$ . При увеличении волнового вектора фазовая скорость ленгмюровских колебаний  $\omega_{pe}/k$  убывает, число резонансных электронов, эффективно взаимодействующих с волной, возрастает, и поэтому увеличивается затухание Ландау. При  $ka_e \sim 1$  фазовая скорость продольных ленгмюровских колебаний сравнивается с тепловой скоростью электронов, и число резонансных электронов оказывается настолько большим, что по порядку величины декремент затухания совпадает с частотой.

Подчеркнем, что рассматриваемая картина поглощения колебаний резонансными электронами относится к случаю достаточно слабых полей. Именно, необходимо, чтобы за время пролета «захваченной» частицей потенциальной ямы, равного

$$\Delta t = 1/k\Delta\omega = (m_e/ek^2\varphi_0)^{1/2}, \quad (4.2.3.12)$$

могло произойти затухание амплитуды поля, т. е. чтобы

$$\gamma\Delta t = \gamma \left( \frac{m_e}{ek^2\varphi_0} \right)^{1/2} \gg 1. \quad (4.2.3.12')$$

Действительно, в противном случае резонансная частица успеет совершить несколько колебаний в потенциальной яме прежде, чем изменится амплитуда поля. Если при одном столкновении со «стенкой» такая частица приобрела энергию от поля, то в последующем столкновении она уже отдаст энергию полю и т. д. В результате обмен энергией между резонансными частицами и полем сильно замедляется и, следовательно, затухание поля существенно уменьшится по сравнению с затуханием, определяемым линейной теорией. Для учета этого эффекта необходимо нелинейное рассмотрение.

Неравенство (4.2.3.12') можно также получить из условия применимости линейной теории, которое, очевидно, имеет вид

$$|\partial f_e/\partial w| \ll |\partial f_{e0}/\partial w|. \quad (4.2.3.13)$$

Учитывая, что, согласно (4.2.1.9),

$$f_e \sim \frac{ek\varphi_0}{m_e(\omega - kw)} \frac{df_{e0}}{d\omega},$$

получим

$$\left| \frac{df_e}{d\omega} \right|_{\omega=kw} \sim \frac{ek^2\varphi_0}{m_e\gamma^2} \left| \frac{df_{e0}}{d\omega} \right|_{\omega=kw}.$$

Подставляя это выражение в неравенство (4.2.3.13), получим условие (4.2.3.12').

Таким образом, затухание Ландау имеет место только для очень слабых полей, когда выполняется условие (4.2.3.12').

Покажем теперь, что затухание ленгмюровских колебаний с большой амплитудой, когда выполняется неравенство, противоположное (4.2.3.12'), действительно происходит значительно слабее, чем в линейном случае [17].

Для этого воспользуемся выражениями (4.2.3.5), (4.2.3.6) и (4.2.3.10), определяющими декремент затухания как в линейном, так и в нелинейном случаях. Здесь, однако, мы ограничимся рассмотрением колебаний достаточно малой амплитуды, что позволит считать их частоту не зависящей от амплитуды.

В системе отсчета, связанной с волной, функция распределения имеет вид

$$F_e(x', w', t) = F_e[x'_0(x', w', t), w'_0(x', w', t), 0], \quad (4.2.3.13')$$

где  $F_e(x'_0, w'_0, 0)$  — начальная функция распределения. Функции  $x'_0(x', w', t)$  и  $w'_0(x', w', t)$  определяются в неявном виде следующим образом:

$$x' = x'(t, x'_0, w'_0), \quad w' = \frac{dx'}{dt} = w'(t, x'_0, w'_0),$$

где  $x'$  — решение уравнения движения

$$\frac{d^2x'}{dt^2} = \frac{ek\varphi_0}{m_e} \sin kx',$$

удовлетворяющее начальным условиям  $x'|_{t=0} = x'_0$  и  $w'|_{t=0} = w'_0$ .

Используя (4.2.3.2') и вводя обозначения

$$kx' = 2\xi, \quad x^2 = \frac{2e\varphi_0}{W + e\varphi_0}, \quad (4.2.3.14)$$

получим с учетом (4.2.3.12) соотношение

$$\left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 = \frac{1}{(\kappa\Delta t)^2} (1 - x^2 \sin^2 \xi). \quad (4.2.3.15)$$

Интегрируя его, находим для незахваченных частиц ( $x^2 < 1$ )

$$F(x, \xi_0) = F(x, \xi) - t/x\Delta t \quad (4.2.3.16)$$

и для захваченных частиц ( $x^2 > 1$ )

$$F(1/x, \zeta_0) = F(1/x, \zeta) - t/\Delta t, \quad (4.2.3.17)$$

где  $F(x, \xi)$  — эллиптический интеграл первого рода, а величина  $\zeta$  связана с  $\xi$  соотношением  $x \sin \xi = \sin \zeta$ .

Найдем, выбирая начальную функцию распределения в виде  $F_e(x'_0, w'_0, 0) = f_0(w'_0) + f(w'_0, 0) \cos kx'_0$ ,

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_e}{\partial t} &= \frac{\partial F_e(x'_0, w'_0, 0)}{\partial x'_0} \frac{\partial x'_0}{\partial t} + \frac{\partial F_e(x'_0, w'_0, 0)}{\partial w'_0} \frac{\partial w'_0}{\partial t} = \\ &= f(w'_0, 0) k w'_0 \sin kx'_0 + \left( \frac{\partial f_0}{\partial w'_0} + \frac{\partial f}{\partial w'_0} \cos kx'_0 \right) \frac{e k \varphi_0}{m_e} \sin kx'_0. \end{aligned}$$

Здесь следует оставить только член с  $\partial f_0 / \partial w'_0$ , который в  $\omega \Delta t \gg 1$  раз больше остальных двух слагаемых; тогда

$$\frac{\partial F_e}{\partial t} = \frac{e}{m_e} k \varphi_0 \frac{\partial f_0}{\partial w'_0} \sin kx'_0. \quad (4.2.3.18)$$

Используя выражение (4.2.3.16) и (4.2.3.17), найдем, что при  $x^2 < 1$

$$\begin{aligned} \sin kx'_0 &= 2 \sin \xi_0 \cos \xi_0 = 2 \operatorname{sn} [F(x, \xi_0), x] \operatorname{cn} [F(x, \xi_0), x] = \\ &= 2 \operatorname{sn} \left[ F(x, \xi) - \frac{t}{x\Delta t}, x \right] \operatorname{cn} \left[ F(x, \xi) - \frac{t}{x\Delta t}, x \right] \end{aligned}$$

и при  $x^2 > 1$

$$\begin{aligned} \sin kx'_0 &= 2 \sin \xi_0 \sqrt{1 - \sin^2 \xi_0} = \frac{2}{x} \sin \zeta_0 \sqrt{1 - \frac{1}{x^2} \sin^2 \zeta_0} = \\ &= \frac{2}{x} \operatorname{sn} \left[ F\left(\frac{1}{x}, \zeta_0\right), \frac{1}{x} \right] \operatorname{dn} \left[ F\left(\frac{1}{x}, \zeta_0\right), \frac{1}{x} \right] = \\ &= \frac{2}{x} \operatorname{sn} \left[ F\left(\frac{1}{x}, \zeta\right) - \frac{t}{\Delta t}, \frac{1}{x} \right] \operatorname{dn} \left[ F\left(\frac{1}{x}, \zeta\right) - \frac{t}{\Delta t}, \frac{1}{x} \right], \end{aligned}$$

где  $\operatorname{sn}$ ,  $\operatorname{cn}$  и  $\operatorname{dn}$  — эллиптические функции Якоби. Используя эти соотношения, а также учитывая, что амплитуда  $\varphi_0(t)$  изменяется мало, получим

$$\varphi_0(t) = \varphi_0(0) \exp \left( - \int_0^t \gamma(t) dt \right), \quad (4.2.3.19)$$

где

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_L \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{2n\pi^2 \sin(\pi n t / x \Delta t F)}{x^5 F^2 (1 + q^{2n}) (1 + q^{-2n})} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(2n+1)\pi^2 x \sin[(2n+1)\pi t / 2\Delta t F]}{F^2 (1 + q^{2n}) (1 + q^{-2n})} \right\} dx, \quad (4.2.3.20) \end{aligned}$$

Здесь  $\gamma_L$  — линейный декремент затухания, определяемый выражением (4.2.3.11),  $q = \exp \left\{ \frac{F(\sqrt{1-x^2}, 1/2\pi)}{F(x, 1/2\pi)} \right\}$ .

Входящий в (4.2.3.19) интеграл равен

$$\int_0^t \gamma(t) dt = \gamma_L \Delta t \sum_{n=0}^{\infty} \frac{64}{\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{2\pi [1 - \cos(\pi n t / x \Delta t F)]}{x^4 F (1 + q^{2n}) (1 + q^{-2n})} + \frac{2\pi x [1 - \cos((2n+1)\pi t / 2\Delta t F)]}{F (1 + q^{2n}) (1 + q^{-2n})} \right\} dx. \quad (4.2.3.21)$$

Нетрудно убедиться, что при  $t \ll \Delta t$  декремент затухания близок к линейному, т. е.

$$\gamma(t) = \gamma_L [1 + 0(t/\Delta t)].$$

Если  $t \rightarrow \infty$  ( $t \gg \Delta t$ ), то  $\gamma(t) \rightarrow 0$ .

Полное уменьшение амплитуды колебаний определяется выражением

$$\int_0^{\infty} \gamma(t) dt = \gamma_L \Delta t \frac{64}{\pi} \int_0^1 \left\{ \frac{1}{x^4} \left( \frac{E}{\pi} - \frac{\pi}{4} \frac{1}{F} \right) + \frac{x}{\pi} [E + (x^2 - 1)F] \right\} dx, \quad (4.2.3.22)$$

где  $E = E(x, 1/2\pi)$  — полный эллиптический интеграл второго рода. Таким образом, в соответствии с исходным предположением  $\gamma_L \Delta t \ll 1$  получаем, что резонансные частицы действительно очень мало изменяют амплитуды волн:

$$\frac{\varphi_0(0) - \varphi_0(\infty)}{\varphi_0(0)} \sim \gamma_L \Delta t \ll 1.$$

**4.2.4. Кинетическая теория ионно-звуковых колебаний.** Перейдем теперь к изучению ионно-звуковых колебаний на основе кинетической теории \*).

Будем считать, что распределения по скоростям электронов и ионов плазмы в отсутствие колебаний являются максвелловскими с температурами  $T_e$  и  $T_i$  соответственно. Линеаризуя кинетические уравнения для электронов и ионов и решая их совместно с уравнением Пуассона при помощи преобразований Фурье и Лапласа, так же как это делалось в случае чисто электронных колебаний, получим следующее дисперсионное уравнение:

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_e w(z_e)] + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_i w(z_i)] = 0, \quad (4.2.4.1)$$

где

$$z_e = \omega' / \sqrt{2} kv_e, \quad z_i = \omega' / \sqrt{2} kv_i, \quad v_e = \sqrt{T_e/m_e}, \quad v_i = \sqrt{T_i/m_i}.$$

\*) Этот вопрос был впервые рассмотрен в работе [11].

Для ионно-звуковых колебаний можно считать в соответствии с неравенствами (4.1.3.1), что  $|z_e| \ll 1$  и  $|z_i| \gg 1$ . При этом можно положить в (4.2.4.1)

$$w(z_e) = 1, \quad w(z_i) = (i/\sqrt{\pi} z_i) (1 + 1/2z_i^2 + 3/4z_i^2) + \exp(-z_i^2),$$

после чего дисперсионное уравнение примет вид

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} (1 + i\sqrt{\pi} z_e) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{3\omega_{pi}^2 k^2 v_i^2}{\omega^4} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} i\sqrt{\pi} z_i \exp(-z_i^2) = 0. \quad (4.2.4.2)$$

Пренебрегая здесь слагаемыми, пропорциональными  $z_e$  и  $z_i$  и учитывая малость величины  $k^2 v_i^2 / \omega^2$ , получим для частоты ионно-звуковых колебаний следующее выражение:

$$\omega(k) = \omega_s(k) (1 + 3/2 k^2 v_i^2 / \omega_s^2), \quad (4.2.4.3)$$

где

$$\omega_s = kv_s / \sqrt{1 + k^2 a_e^2}.$$

(Малое слагаемое с  $k^2 v_i^2 / \omega_s^2$  учитывает влияние теплового движения ионов на частоту ионного звука.)

В области коротких волн  $ka_e \gg 1$  частота  $\omega(k)$  близка к  $\omega_{pi}$ , а именно:

$$\omega(k) = \omega_{pi} (1 - 1/2 k^2 a_e^2 + 3/2 k^2 a_e^2 T_i / T_e). \quad (4.2.4.4)$$

Заметим что при  $T_i = 0$  частота  $\omega(k) = \omega_s(k)$  всегда меньше частоты  $\omega_{pi}$ , при конечных же  $T_i$  неравенство  $\omega < \omega_{pi}$  имеет место только при  $\sqrt{3} k^2 a_e^2 < \sqrt{T_e / T_i}$ . В области  $\sqrt{3} k^2 a_e^2 > \sqrt{T_e / T_i}$  частота ионно-звуковых колебаний больше  $\omega_{pi}$ .

Учитывая в следующем приближении мнимые слагаемые в (4.2.4.2), найдем декремент затухания ионно-звуковых колебаний

$$\gamma(k) = \gamma_e + \gamma_i, \quad (4.2.4.5)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma_e &= \sqrt{\frac{\pi m_e}{8 m_i}} \frac{kv_s}{(1 + k^2 a_e^2)^2}, \\ \gamma_i &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \frac{kv_s}{(1 + k^2 a_e^2)^2} \exp\left[-\frac{\omega^2(k)}{2k^2 v_i^2}\right]. \end{aligned} \right\} \quad (4.2.4.6)$$

Величина  $\gamma_e$  определяет затухание ионного звука, обусловленное поглощением ионно-звуковых колебаний резонансными электронами, а величина  $\gamma_i$  — затухание, обусловленное поглощением резонансными ионами.

При  $ka_e \ll 1$  имеем по порядку величины

$$\gamma_e / \omega(k) \sim \sqrt{m_e / m_i} \ll 1.$$

Несмотря на то, что при  $v_{ph} \sim v_s \ll v_e$  число резонансных электронов велико, разность между числом медленных и быстрых электронов, т. е. —  $df_{e0}/dw$  при  $w=v_{ph}$ , мала, и поэтому мал и декремент затухания  $\gamma_e$ .

Так как  $\omega/k \gg v_i$ , то декремент затухания  $\gamma_i$  экспоненциально мал.

При увеличении волнового вектора величина  $\gamma_i$  возрастает и при  $ka_e \sim \sqrt{T_e/T_i}$ , т. е. при  $\omega/k \sim v_i$ , колебания сильно поглощаются ионами ( $\gamma_i \sim \omega \sim \omega_{pi} \sim kv_i$ ).

Условие  $v_{ph} \gg v_i$  выполняется, если  $T_e \gg T_i (1 + k^2 a_e^2)$ . При уменьшении неизотермичности затухание ионно-звуковых колебаний, обусловленное резонансными ионами, быстро возрастает и при  $T_e \sim T_i$  ионно-звуковые колебания становятся сильно затухающими, т. е.  $\gamma_i \sim \omega_s(k)$ .

## § 4.3. Кинетическая теория электромагнитных волн в плазме

### 4.3.1. Тензор диэлектрической проницаемости и дисперсионное уравнение электромагнитных волн для однородной плазмы.

В предыдущем параграфе мы развили кинетическую теорию продольных плазменных колебаний и применили ее к конкретному случаю однородной плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям. Теперь мы перейдем к дальнейшему исследованию колебаний однородной бесстолкновительной плазмы, не делая предположения о безвихревом характере электрического поля. Таким образом, мы разовьем кинетическую теорию распространения электромагнитных волн в однородной бесстолкновительной плазме.

Один из результатов этой теории состоит в том, что в общем случае плазмы с неизотропным распределением частиц по скоростям чисто продольные и чисто поперечные колебания можно отделить только приближенно.

Будем исходить из уравнения

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t}, \quad (4.3.1.1)$$

связывающего электрическое поле  $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  с плотностью электрического тока  $\mathbf{j} = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  (оно вытекает из уравнения Максвелла (4.1.1.3)).

В интересующей нас задаче  $\mathbf{E}$  — электрическое поле электромагнитной волны, распространяющейся в плазме,  $\mathbf{j}$  — плотность тока, создаваемого частицами плазмы

$$\mathbf{j} = \sum_{\alpha} \mathbf{j}_{\alpha}(\mathbf{r}, t),$$

где  $\mathbf{j}_\alpha$  — плотность тока, создаваемого частицами сорта  $\alpha$ , определяется функцией распределения  $F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  этих частиц

$$\mathbf{j}_\alpha(\mathbf{r}, t) = e_\alpha \int \mathbf{v} F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v$$

( $e_\alpha$  — заряд частицы сорта  $\alpha$ ).

В свою очередь функция распределения  $F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  определяется кинетическим уравнением с самосогласованным полем без интеграла столкновений (мы рассматриваем случай высоких частот)

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

где  $m_\alpha$  — масса частицы сорта  $\alpha$ ,  $\mathbf{B}$  — магнитное поле волны, связанное с электрическим полем  $\mathbf{E}$  соотношением

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}. \quad (4.3.1.2)$$

В данном параграфе мы будем изучать только малые колебания плазмы, и положим поэтому

$$F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) + f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

где  $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$  — функция распределения частиц по скоростям в отсутствие колебаний и  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  — малая добавка к ней, связанная с колебаниями плазмы, причем  $|f_\alpha| \ll f_{\alpha 0}$ . Тогда кинетические уравнения можно линеаризовать по  $f_\alpha$  и мы получим

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (4.3.1.3)$$

Предположим, что в целом при исходных функциях распределения в отсутствие колебаний не возникают ни ток, ни заряд, т. е. справедливы соотношения

$$\sum_\alpha e_\alpha \int f_{\alpha 0} d^3v = 0, \quad \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_{\alpha 0} d^3v = 0.$$

Таким образом, плотность тока, входящая в (4.3.1.1) определяется формулой

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{v} f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^3v. \quad (4.3.1.4)$$

Уравнения (4.3.1.1)–(4.3.1.4) образуют замкнутую самосогласованную систему уравнений, описывающих распространение электромагнитных волн малой амплитуды в однородной бесстолкновительной плазме.

Решение этой системы уравнений вместе с соответствующими начальными условиями можно найти, поступая так же, как и

в п. 4.2.1 при исследовании продольных колебаний, т. е. используя преобразование Фурье по пространственным координатам и преобразование Лапласа по времени.

Нас будет интересовать асимптотическое поведение полей и функций распределения частиц при больших  $t$  (но при  $t \ll \tau$ ). Как мы видели в п. 4.2.1, их асимптотика в случае продольных колебаний определяется корнями некоего трансцендентного уравнения, а именно, дисперсионного уравнения, которое можно получить без решения соответствующей системы уравнений для  $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$  и  $f_\alpha$  с определенными начальными условиями. Существенно здесь то, что дисперсионное уравнение не несет на себе никаких следов начальных условий и определяется только функцией распределения частиц в исходном состоянии плазмы, т. е. в отсутствие колебаний.

С аналогичной ситуацией мы встречаемся и в общем случае непродольных колебаний плазмы; для вывода дисперсионного уравнения нужно считать, что все переменные величины  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $f_\alpha$ , входящие в систему (4.3.1.1)–(4.3.1.4), имеют вид плоских монохроматических волн, т. е.  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V}$ ,  $f_\alpha \propto \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega't)]$ , где  $\mathbf{k}$  — волновой вектор и  $\omega'$  — комплексная частота колебания, и найти условие разрешимости этой линейной системы.

Для плоских монохроматических волн уравнения (4.3.1.1), (4.3.1.2) и (4.3.1.3) приобретают, очевидно, вид

$$\left. \begin{aligned} |\mathbf{k} [\mathbf{kE}] + \frac{\omega'^2}{c^2} \mathbf{E} &= -\frac{4\pi i \omega'}{c^2} \mathbf{j}, \quad \mathbf{V} = \frac{c}{\omega'} [\mathbf{kE}], \\ f_\alpha &= -\frac{ie_\alpha}{m_\alpha (\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v})} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{V}] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.1.5)$$

причем плотность тока, определяемую (4.3.1.4), можно, учитывая последнее соотношение, записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \mathbf{j} &= \sum_\alpha \mathbf{j}_\alpha, \quad j_{\alpha i} = \sigma_{ij}^{(\alpha)} E_j, \\ \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega') &= -\frac{ie^2}{m_\alpha} \int \frac{v_i}{\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}} \left[ \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega'} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j} + \frac{v_j}{\omega'} \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right] d^3v, \end{aligned} \quad (4.3.1.6)$$

Здесь в соответствии с результатами п. 4.2.1 интегрирование по  $w = \mathbf{k}\mathbf{v}/\omega'$  проводится от  $-\infty$  до  $+\infty$  вдоль вещественной оси с обходом особой точки  $w = \omega'/k$  снизу. Можно также, что эквивалентно, пользоваться формулой

$$\frac{1}{\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}} = \mathcal{P} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}} - i\pi\delta(\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}), \quad (4.3.1.7)$$

где  $\mathcal{P}$  — символ главного значения.

Системе уравнений (4.3.1.5) и (4.3.1.6) нетрудно придать более простой и симметричный вид, если ввести электрическую индук-

цию плазмы  $\mathbf{D} = \mathbf{E} + (4\pi i / \omega') \mathbf{j}$  и тензор ее высокочастотной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega')$ ; тогда имеем

$$D_i = \varepsilon_{ij} E_j \quad (4.3.1.8)$$

где

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} 4\pi \kappa_{ij}^{(\alpha)} \quad (4.3.1.9)$$

и

$$\kappa_{ij}^{(\alpha)} = \frac{i}{\omega'} \sigma_{ij}^{(\alpha)} = \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} \omega'^2} \int \frac{df_{\alpha 0}}{dv_i} v_i \frac{[(\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta_{ij} + k_i v_j]}{\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}} d^3v \quad (4.3.1.9')$$

Величина  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$  называется *высокочастотной проводимостью  $\alpha$ -компоненты* плазмы, а  $\kappa_{ij}^{(\alpha)}$  — ее *высокочастотной поляризуемостью*.

Вводя тензор диэлектрической проницаемости плазмы, можно переписать систему уравнений (4.3.1.5) и (4.3.1.6) в виде

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega') E_j = 0 \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.3.1.10)$$

где

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega') = \mathcal{N}^2 \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega'), \quad (4.3.1.10')$$

$\mathcal{N} = ck / \omega'$  — показатель преломления.

Условие разрешимости однородной системы линейных алгебраических уравнений (4.3.1.10) для  $E_j$  и представляет собой дисперсионное уравнение для электромагнитных колебаний плазмы

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega') = \det |\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega')| = 0. \quad (4.3.1.11)$$

Это уравнение определяет при заданном  $\mathbf{k}$  ряд комплексных частот  $\omega' = \omega^{(\nu)}(\mathbf{k}) - i\gamma^{(\nu)}(\mathbf{k})$ , соответствующих различным ветвям колебаний плазмы. Здесь  $\omega^{(\nu)}(\mathbf{k})$  — частота, а  $\gamma^{(\nu)}(\mathbf{k})$  — декремент затухания (при  $\gamma^{(\nu)} > 0$ ) или инкремент нарастания (при  $\gamma^{(\nu)} < 0$ )  $\nu$ -го собственного колебания.

Соотношения (4.3.1.9) и (4.3.1.11) полностью определяют поведение плоских электромагнитных волн в однородной плазме в отсутствие внешних полей и с учетом теплового движения частиц плазмы.

Характерной особенностью полученных выражений для проводимости и диэлектрической проницаемости плазмы является их зависимость не только от частоты, но и от волнового вектора. В этом случае говорят о *временной и пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости*.

Наличие такой дисперсии означает, что величина плотности тока в некоторой точке пространства  $\mathbf{r}$  в некоторый момент времени  $t$  определяется полем не только в данной точке пространства и в данный момент времени, но и во всех других точках пространства

во все предыдущие моменты времени. Действительно, легко видеть, что

$$j_i(\mathbf{r}, t) = \iint j_i(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d^3k d\omega = \\ = \iint K_{ij}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') E_j(\mathbf{r}', t') d^3r' dt', \quad (4.3.1.12)$$

где

$$K_{ij}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \iint \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d^3k d\omega, \\ \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\alpha} \sigma_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega).$$

В силу принципа причинности величины  $K_{ij}(\mathbf{r}, t)$  должны, очевидно, обращаться в нуль, если  $ct > r$ . И действительно, нетрудно убедиться, используя конкретные выражения (4.3.1.9) для  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$ , что эти условия выполняются.

В общем случае детерминант  $\Lambda$  является комплексной функцией  $\mathbf{k}$  и  $\omega$ , и поэтому условие (4.3.1.11) сводится к требованию обращения в нуль в отдельности вещественной и мнимой частей  $\Lambda$ :

$$\operatorname{Re} \Lambda(\mathbf{k}, \omega') = 0, \quad \operatorname{Im} \Lambda(\mathbf{k}, \omega') = 0. \quad (4.3.1.13)$$

В области прозрачности плазмы (область  $\omega'$  и  $\mathbf{k}$ , в которой антиэрмитова часть тензора диэлектрической проницаемости мала по сравнению с эрмитовой частью) мнимая часть  $\Lambda$  мала по сравнению с ее вещественной частью. Поэтому, если пренебречь затуханием волн, то дисперсионное уравнение приближенно можно записать в виде  $\operatorname{Re} \Lambda(\mathbf{k}, \omega) = 0$ . Определяя отсюда собственную частоту волны  $\omega = \omega^{(v)}(\mathbf{k})$  и считая затухание малым, нетрудно найти из уравнения (4.3.1.13) декремент затухания

$$\gamma^{(v)}(\mathbf{k}) = \left. \frac{\operatorname{Im} \Lambda(\mathbf{k}, \omega)}{\frac{\partial \operatorname{Re} \Lambda(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}} \right|_{\omega = \omega^{(v)}(\mathbf{k})} \quad (4.3.1.14)$$

В заключение остановимся на вопросе о переносе энергии в диспергирующей среде с малым затуханием. Рассмотрим волновой пакет, который можно представить в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)], \quad (4.3.1.15)$$

где  $\mathbf{E}_0(\mathbf{r}, t)$  — медленно изменяющаяся в пространстве и времени амплитуда волны,  $\omega = \omega(\mathbf{k})$  — «центральная» частота волнового пакета, соответствующая «центральному» волновому вектору  $\mathbf{k}$ . Из уравнений Максвелла получим закон сохранения энергии

$$\frac{\partial E^2 + B^2}{\partial t} + \operatorname{div} \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{B}] + \mathbf{j}\mathbf{E} = 0. \quad (4.3.1.16)$$

Усредняя выражение (4.3.1.16) по времени и используя малость антиэрмитовых частей в тензоре  $\varepsilon_{ij}$  по сравнению с эрмитовыми частями  $\varepsilon'_{ij}$ , получим уравнение переноса энергии в однородной слабопоглощающей среде с пространственной дисперсией

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} + Q = 0, \quad (4.3.1.17)$$

где  $w$  и  $\mathbf{S}$  — средние значения плотности и потока энергии,  $Q$  — величина потерь энергии. Эти величины определяются выражениями

$$w = \frac{1}{\omega} \frac{\partial \omega^2 \varepsilon'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \frac{E_{0i}^* E_{0j}}{16\pi}, \quad (4.3.1.18)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} = & \frac{c^2}{8\pi\omega} \{ \mathbf{k} |E_0|^2 - 1/2 (\mathbf{k} E_0) E_0^* - 1/2 (\mathbf{k} E_0^*) E_0 \} - \\ & - \omega \frac{\partial \varepsilon'_{ij}(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \mathbf{k}} \frac{E_{0i}^* E_{0j}}{16\pi}, \end{aligned} \quad (4.3.1.19)$$

$$Q = - \frac{i\omega}{8\pi} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^*) E_{0i}^* E_{0j}. \quad (4.3.1.20)$$

Величина  $w$  включает в себя как энергию электромагнитного поля, так и кинетическую энергию колебаний частиц в поле волны. Первое слагаемое в (4.3.1.19) представляет собой поток электромагнитной энергии, а второе — поток энергии частиц плазмы. Величины  $w$  и  $\mathbf{S}$  связаны между собой соотношением

$$\mathbf{S} = \mathbf{v}_g w, \quad (4.3.1.21)$$

где  $\mathbf{v}_g$  — групповая скорость

$$\mathbf{v}_g = \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}}. \quad (4.3.1.22)$$

Как следует из (4.3.1.20), потери энергии пропорциональны антиэрмитовым частям тензора  $\varepsilon_{ij}$ .

**4.3.2. Поляризация плазменных волн.** Каждая плоская монохроматическая электромагнитная волна определенным образом поляризована. Будем называть вектором поляризации или просто поляризацией единичный вектор  $\mathbf{e}$ , направленный вдоль электрического поля волны. Согласно (4.3.1.10) вектор поляризации  $\gamma$ -й ветви колебаний  $\mathbf{e}^{(\gamma)}$  удовлетворяет уравнению

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega^{(\gamma)}(\mathbf{k})) e_j^{(\gamma)} = 0, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (4.3.2.1)$$

общее решение которого имеет вид

$$e_i^{(\gamma)} = C \lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega^{(\gamma)}(\mathbf{k})) a_j, \quad (4.3.2.2)$$

где  $\mathbf{a}$  — произвольный вектор,  $C$  — постоянная, определяемая из условия нормировки  $\mathbf{e}^{(v)} \mathbf{e}^{(v)*} = 1$  и  $\lambda_{ij}$  — алгебраическое дополнение элемента  $\Lambda_{ij}$  в детерминанте  $\Lambda = \det |\Lambda_{ij}|$ ,

$$\left. \begin{aligned} \Lambda_{ij} \lambda_{jk} &= \Lambda \delta_{ik}, \\ \lambda_{ij} &= 1/2 \varepsilon_{ikl} \varepsilon_{jmn} \Lambda_{mk} \Lambda_{nl} \end{aligned} \right\} \quad (4.3.2.3)$$

( $\varepsilon_{jkl}$  — единичный полностью антисимметричный тензор). Чтобы убедиться в справедливости (4.3.2.2), следует воспользоваться определениями (4.3.2.3) и условием равенства нулю детерминанта  $\Lambda$  для собственных частот детерминанта, т. е. условием

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega^{(v)}(\mathbf{k})) = 0.$$

Покажем, что соотношение (4.3.2.2) определяет вектор поляризации волны с точностью до фазового множителя. Заметим прежде всего, что матрицы  $\lambda_{ij}$  и  $\Lambda_{ij}$  связаны между собой соотношением

$$\lambda_{ij} \lambda_{kl} = \lambda_{il} \lambda_{kj} + \Lambda \varepsilon_{ikm} \varepsilon_{jnl} \Lambda_{nm}. \quad (4.3.2.4)$$

В справедливости этого соотношения нетрудно убедиться, умножив на  $\lambda_{aj} \lambda_{bl} \varepsilon_{ikc}$  левую и правую части равенства  $\Lambda \varepsilon_{abc} = \varepsilon_{mnp} \Lambda_{ma} \Lambda_{nb} \Lambda_{pc}$ .

Для собственных частот, удовлетворяющих дисперсионному уравнению  $\Lambda = 0$ , соотношение (4.3.2.4) упрощается:

$$\lambda_{ij} \lambda_{kl} = \lambda_{il} \lambda_{kj}. \quad (4.3.2.5)$$

Отсюда, пренебрегая в области прозрачности антиэрмитовой частью  $\varepsilon_{ij}$ , нетрудно вывести равенство

$$\frac{\lambda_{il} a_l \lambda_{jk}^* a_k}{\lambda_{mn} a_m a_n} = \frac{\lambda_{il} a_l^* \lambda_{jk} a_k'}{\lambda_{mn} a_m' a_n'}, \quad (4.3.2.6)$$

где  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{a}'$  — произвольные векторы. Отметим также, что для этих векторов скалярные произведения  $(\mathbf{a} \hat{\lambda})$  и  $(\mathbf{a}' \hat{\lambda}')$  имеют один и тот же знак:

$$(\mathbf{a} \hat{\lambda}) (\mathbf{a}' \hat{\lambda}') = |(\mathbf{a} \hat{\lambda}')|^2. \quad (4.3.2.7)$$

(В частности, одинаковый знак имеют диагональные элементы эрмитовой части матрицы  $\lambda_{ij}$ .)

Используя далее соотношение (4.3.2.5), можно записать постоянную нормировки  $C$  в виде

$$C = \{(\mathbf{a} \hat{\lambda}) \text{Sp } \lambda\}^{-1/2}.$$

Таким образом, нормированный вектор поляризации  $\mathbf{e}^{(v)}$  имеет вид

$$\mathbf{e}^{(v)} = \frac{\lambda \mathbf{a}}{\sqrt{(\mathbf{a} \hat{\lambda}) \text{Sp } \lambda}} \Big|_{\omega = \omega^{(v)}(\mathbf{k})}. \quad (4.3.2.8)$$

Согласно (4.3.2.6) произведение  $e_i e_j^*$  инвариантно относительно изменения вектора  $\mathbf{a}$ , и поэтому при произвольном повороте последнего в выражении (4.3.2.8) может измениться только фазовый множитель.

**4.3.3. Возбуждение волн в плазме.** Рассмотрим теперь вопрос о возбуждении электромагнитных волн в плазме внешними токами.

Из уравнений Максвелла следует, что приращение электромагнитной энергии плазмы в единицу времени определяется выражением

$$I = \frac{1}{4\pi} \int \left( \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{B} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right) d^3r = \frac{c}{4\pi} \int |\mathbf{E}\mathbf{B}| dS - \int \mathbf{j}_0 \mathbf{E} d^3r, \quad (4.3.3.1)$$

где  $\mathbf{j}_0(\mathbf{r}, t)$  — плотность внешних токов, которую мы считаем здесь заданной функцией координат и времени. В случае безграничной плазмы поверхностный интеграл здесь исчезает. Используя комплексную форму записи, можно в этом случае представить последнее соотношение в виде

$$I = -1/2 \operatorname{Re} \int \mathbf{j}_0^* \mathbf{E} d^3r. \quad (4.3.3.2)$$

Чтобы получить полную энергию  $P$ , передаваемую внешними токами плазме, нужно проинтегрировать это выражение по времени; имеем

$$P = -1/2 \operatorname{Re} \iint \mathbf{j}_0^* \mathbf{E} d^3r dt. \quad (4.3.3.3)$$

Разлагая внешний ток  $\mathbf{j}_0$  и электрическое поле возбуждаемых волн  $\mathbf{E}$  в интегралы Фурье, представим последнее выражение в виде

$$P = -\frac{1}{2(2\pi)^4} \operatorname{Re} \iint \mathbf{j}_0^*(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) d^3k d\omega. \quad (4.3.3.4)$$

Напряженность электрического поля  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  при наличии внешних токов определяется из уравнения

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{D}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}_0}{\partial t},$$

или, используя компоненты Фурье,

$$\Delta_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi i}{\omega} j_{0i}(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.3.3.5)$$

Отсюда находим

$$\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega \Lambda(\mathbf{k}, \omega)} \hat{\lambda} \mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega). \quad (4.3.3.6)$$

В области прозрачности в плазме возбуждаются собственные колебания, для которых справедливо соотношение

$$\lambda_{ij} = e_i e_j^* \operatorname{Sp} \hat{\lambda}; \quad (4.3.3.7)$$

поэтому

$$P = \frac{1}{(2\pi)^3} \operatorname{Re} \left( i \iint \frac{\operatorname{Sp} \hat{\lambda}}{\omega \Lambda} |e_{j_0}^*(\mathbf{k}, \omega)|^2 d^3k d\omega \right). \quad (4.3.3.8)$$

Учитывая вещественность  $\operatorname{Sp} \hat{\lambda}$ , представим последнее соотношение в виде

$$P = \frac{1}{(2\pi)^3} \iint \frac{\operatorname{Sp} \hat{\lambda} \operatorname{Im} \Lambda}{\omega |\Lambda|^2} |e_{j_0}^*(\mathbf{k}, \omega)|^2 d^3k d\omega. \quad (4.3.3.9)$$

Величину  $\operatorname{Im} \Lambda$  можно связать с величиной электрических потерь в плазме

$$Q = -\frac{i\omega}{8\pi} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) e_i^* e_j |E|^2. \quad (4.3.3.10)$$

Действительно, непосредственной проверкой легко убедиться, что в области прозрачности  $\operatorname{Im} \Lambda$  можно выразить через эрмитову часть матрицы  $\lambda_{ij}$  и антиэрмитову часть тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ :

$$\operatorname{Im} \Lambda = \frac{1}{4i} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) (\lambda_{ij}^* + \lambda_{ji}). \quad (4.3.3.11)$$

Сравнивая далее это выражение с предыдущим, находим

$$\operatorname{Im} \Lambda = \frac{\operatorname{Sp} \Lambda}{2i} (\epsilon_{ij} - \epsilon_{ji}^*) e_i^* e_j. \quad (4.3.3.12)$$

Для термодинамически устойчивых систем в силу Н-теоремы  $Q > 0$ , и поэтому должно выполняться условие

$$\frac{\operatorname{Sp} \Lambda}{\omega} \operatorname{Im} \Lambda > 0. \quad (4.3.3.13)$$

Учитывая его и замечая, что в области прозрачности

$$\frac{\operatorname{Im} \Lambda}{|\Lambda|^2} \rightarrow \pi \delta(\Lambda),$$

получим окончательно для полной энергии, передаваемой внешним током плазме, следующее выражение:

$$P = \frac{1}{8\pi^2} \iint \left| \frac{\operatorname{Sp} \hat{\lambda}}{\omega} \right| |e_{j_0}^*(\mathbf{k}, \omega)|^2 \delta\{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)\} d^3k d\omega. \quad (4.3.3.14)$$

**4.3.4. Тензор диэлектрической проницаемости в случае изотропного распределения частиц.** Пусть распределение частиц плазмы по скоростям изотропно, т. е. функция распределения зависит только от энергии частицы  $\epsilon = \frac{1}{2} m_e v^2$ , т. е.  $f_{\alpha 0} \equiv f_{\alpha 0}(\epsilon)$ ; тогда тензор поляризуемости  $\chi_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega')$  принимает вид

$$\chi_{ij}^{(\alpha)}(\mathbf{k}, \omega') = \frac{e_\alpha^2}{\omega'} \int \frac{v_i v_j}{\omega' - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}} f_{\alpha 0}'(\epsilon) d^3v, \quad (4.3.4.1)$$

где

$$f'_{\alpha 0}(\varepsilon) = df_{\alpha 0}(\varepsilon)/d\varepsilon.$$

Легко установить общую структуру этого тензора, а следовательно, и тензора  $\varepsilon_{ij}$ . Так как в рассматриваемом случае имеется только одно выделенное направление (вдоль волнового вектора), то можно построить только два независимых тензора второго ранга — единичный тензор  $\delta_{ij}$  и тензор  $k_i k_j$ . Поэтому тензор  $\varepsilon_{ij}$  должен иметь следующую структуру:

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega') = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_t(k, \omega') + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_l(k, \omega'), \quad (4.3.4.2)$$

где  $\varepsilon_t$  и  $\varepsilon_l$  — некоторые функции  $k$  и  $\omega'$ . Их называют соответственно *поперечной* и *продольной проницаемостями плазмы*.

Сравнивая последние два соотношения, легко найти продольную и поперечную проницаемости плазмы \*):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_l(k, \omega') &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{k^2} \int f'_{\alpha 0}(\varepsilon) \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}} d^3v, \\ \varepsilon_t(k, \omega') &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{2\pi e_{\alpha}^2}{\omega'^2} \int f'_{\alpha 0}(\varepsilon) \frac{v_i^2}{\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}} d^3v, \end{aligned} \right\} \quad (4.3.4.3)$$

где  $v_i$  — составляющая скорости  $\mathbf{v}$ , перпендикулярная  $\mathbf{k}$  ( $v_i = [\mathbf{k}[\mathbf{v}\mathbf{k}]]/k^2$ ).

Итак, мы видим, что в кинетической теории диэлектрические свойства плазмы с изотропным распределением частиц по скоростям описываются двумя скалярными функциями от величины волнового вектора и частоты,  $\varepsilon_t(k, \omega')$  и  $\varepsilon_l(k, \omega')$ , тогда как в гидродинамической теории эти свойства описываются только одной функцией от частоты  $\varepsilon(\omega)$ , т. е. в данном случае  $\varepsilon_l(k, \omega) = \varepsilon_t(k, \omega) = \varepsilon(\omega)$ . Тензор диэлектрической проницаемости в гидродинамической теории пропорционален единичному тензору  $\delta_{ij}$ :  $\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega) \delta_{ij}$  в соответствии с общей структурой (4.3.4.2).

Увеличение числа функций, описывающих диэлектрические свойства плазмы при переходе от гидродинамической к кинетической теории, связано, как видно из (4.3.4.2), с учетом зависимости тензора  $\varepsilon_{ij}$  от волнового вектора (при этом наряду с единичным тензором  $\delta_{ij}$  должен быть введен второй независимый тензор  $k_i k_j$ ), т. е. с учетом пространственной дисперсии. Это возможно только при учете теплового движения частиц, что и делается в кинетической теории.

Возвратимся к дисперсионному уравнению (4.3.1.11) и подставим в него (4.3.1.10) с учетом (4.3.4.2). В результате мы

\*) Величины  $\varepsilon_t$  и  $\varepsilon_l$  были введены в работе [12].

получим следующее дисперсионное уравнение для плазмы с изотропным распределением частиц по скоростям:

$$\Delta = \varepsilon_i(k, \omega') \left[ \frac{c^2 k^2}{\omega'^2} - \varepsilon_i(k, \omega') \right]^2 = 0.$$

Оно распадается на уравнение

$$\varepsilon_i(k, \omega') = 0, \quad (4.3.4.4)$$

определяющее частоты продольных колебаний\*), и уравнение

$$c^2 k^2 / \omega'^2 = \varepsilon_i(k, \omega'), \quad (4.3.4.5)$$

определяющее частоты поперечных электромагнитных волн в плазме. Ясно, что каждому решению последнего уравнения соответствуют две волны с взаимно перпендикулярными векторами поляризации (которые перпендикулярны также волновому вектору).

Фазовая скорость поперечных электромагнитных волн, распространяющихся в плазме, больше, как мы видели, скорости света, т. е.  $\omega/k > c$ . Отсюда следует, что для таких волн знаменатель подынтегрального выражения во втором соотношении (4.3.4.3) для  $\varepsilon_i(k, \omega')$  никогда не обращается в нуль (скорость частиц всегда меньше скорости света). Поэтому интегрирование здесь можно производить вдоль вещественной оси без всякого обхода особенностей. Это значит, что величина  $\varepsilon_i$  при  $\omega/k > c$  вещественна и, следовательно, для поперечных электромагнитных волн, распространяющихся в бесстолкновительной плазме, не возникает затухания, аналогичного затуханию Ландау для продольных плазменных волн. Затухание в подобном случае целиком обуславливается столкновениями частиц.

Подчеркнем, что данный вывод относится к волнам, распространяющимся в безграничной плазме, для которых  $\omega/k > c$ . Если рассматривать ограниченную плазму, например, плазму, занимающую полупространство, то вблизи ее границы возможно распространение затухающих в плазме волн, фазовая скорость которых меньше скорости света (скин-эффект). В таком случае затухание происходит и в бесстолкновительной плазме.

Прежде чем подробнее рассматривать этот эффект, вернемся к объемным поперечным волнам в случае нерелятивистской плазмы, когда  $T \ll m_\alpha c^2$  ( $T$  — температура плазмы). Тогда средняя тепловая скорость частиц значительно меньше скорости света  $v_\alpha = \sqrt{T/m_\alpha} \ll c$ , и в знаменателях подынтегральных выражений для

\*) Это уравнение совпадает с соотношением (4.2.1.14), исследованным в § 4.2.

$\varepsilon_i(k, \omega')$  можно пренебречь величиной  $kv$  по сравнению с  $\omega'$ . Замечая, что

$$\int v_i^2 f'_{\alpha 0}(\varepsilon) d^3v = -2n_{\alpha 0}/m_\alpha,$$

где  $n_{\alpha 0}$  — равновесная плотность частиц сорта  $\alpha$ , мы получим для  $\varepsilon_i$  гидродинамическое выражение

$$\varepsilon_i = 1 - \sum_\alpha \omega_{p\alpha}^2/\omega^2; \quad (4.3.4.6)$$

здесь

$$\omega_{p\alpha} = \sqrt{4\pi e^2 n_{\alpha 0}/m_\alpha}.$$

Учет теплового движения частиц дает лишь малые поправки к этому выражению порядка  $T/m_i c^2$ . (Такой же порядок имеют и не учтенные нами релятивистские члены в кинетических уравнениях).

Тепловое движение электронов может оказать существенное влияние на поведение электромагнитных волн, только если  $\omega/k \ll c$ . Такая ситуация возникает, как указывалось выше, при  $\omega \ll \omega_{pe}$ . В этом случае в плазме с большой плотностью величина волнового вектора  $|k| \approx \omega_{pe}/c$  может быть большой и тепловым движением электронов мы вправе пренебречь только при выполнении неравенства

$$\frac{v_e}{c} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \ll 1.$$

Если же оно оказывается несправедливым, то следует пользоваться вместо выражения (4.3.4.6) точным выражением для  $\varepsilon_i(k, \omega)$ .

Если электроны характеризуются максвелловским распределением по скоростям, то дисперсионное уравнение для поперечных электромагнитных волн (4.3.4.5) принимает вид

$$\frac{c^2 k^2}{\omega'^2} = \varepsilon_i = 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega' k v_e} w(z_e), \quad (4.3.4.7)$$

где  $z_e = \omega'/\sqrt{2} k v_e$ .

Рассмотрим подробнее предельный случай низких частот, когда выполняется неравенство, противоположное написанному, т. е.

$$\frac{v_e}{c} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \gg 1. \quad (4.3.4.8)$$

Предполагая, что  $|z_e| \ll 1$  и  $|\varepsilon_i| \gg 1$ , мы можем положить в правой части уравнения (4.3.4.7)  $w(z_e) = 1$  и пренебречь единицей

по сравнению с членом, содержащим  $\omega_{pe}^2$ . В результате мы получим для волнового числа, как функции  $\omega$ , выражение

$$k = \frac{\sqrt{3} + i}{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2 \omega}{c^2 v_e} \right)^{1/3}. \quad (4.3.4.9)$$

Мы видим, что если выполняется условие (4.3.4.8), то электромагнитное поле проникает в плазму на глубину порядка

$$\delta_a = \left( \frac{c^2 v_e}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/3}. \quad (4.3.4.10)$$

При выводе предыдущего соотношения мы предположили, что  $|z_0| \ll 1$  и  $|\varepsilon_l| \gg 1$ . Учитывая (4.3.4.9), нетрудно убедиться, что неравенство  $|z_0| \ll 1$  выполняется, если справедливо неравенство (4.3.4.8), а неравенство  $|\varepsilon_l| \gg 1$ , если

$$\frac{v_e}{c} \ll \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}. \quad (4.3.4.11)$$

Легко видеть, что при совместном выполнении условия

$$\frac{v_e}{c} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \geq 1$$

и неравенства (4.3.4.11) получим  $\text{Re } k \sim \text{Im } k \sim 1/\delta_a$ , и глубина проникновения электромагнитного поля в плазму по-прежнему будет порядка  $\delta_a$ .

Заметим, что глубина проникновения поля  $\delta_a$  больше скин-вой глубины  $\delta_0 = c/\omega_{pe}$ , которая соответствует пренебрежению тепловым движением электронов. Поэтому при  $\frac{v_e}{c} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \geq 1$  говорят об аномальном скин-эффекте\*), в отличие от нормального скин-эффекта, имеющего место при  $\frac{v_e}{c} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \ll 1$ .

Подведем в заключение некоторые итоги.

Проведенный анализ дисперсионного уравнения показывает, что существует четыре типа, или ветви, слабозатухающих колебаний свободной плазмы, различающиеся своими законами дисперсии, а также поляризацией. Это продольные электронные (ленгмюровские) колебания, продольные ионно-звуковые колебания и поперечные электромагнитные волны (имеется два типа поперечных волн, различающихся поляризацией).

\*) Теория аномального скин-эффекта была развита Ройтером и Зондхаймером [13] для металлов. Для плазмы с максвелловским распределением электронов по скоростям этот вопрос был рассмотрен в работе [14].

Частота ленгмюровских колебаний близка к ленгмюровской частоте (см. (4.2.2.6)). Их затухание невелико при условии  $ka_0 \ll 1$ , и в этом случае определяется взаимодействием резонансных частиц с полем волны (затухание Ландау, см. (4.2.2.7)). При  $ka_0 \geq 1$  эти колебания очень сильно затухают ( $\gamma \geq \omega$ ).

Ионно-звуковые колебания слабо затухают только в сильно неизотермической плазме с  $T_0 \gg T_i$ . При  $ka_0 \ll 1$  они характеризуются линейным законом дисперсии, если же  $ka_0 > 1$ , то их частота близка к ионной ленгмюровской частоте (см. (4.2.4.3), (4.2.4.4)).

Если  $T_0 \sim T_i$ , то ионно-звуковые колебания сильно затухают ( $\gamma \sim \omega$ ).

Поперечные электромагнитные волны, распространяющиеся в плазме, имеют фазовую скорость, большую скорости света, и в бесстолкновительной плазме не затухают. В случае нерелятивистской плазмы для их описания можно пользоваться гидродинамической теорией. При частотах, значительно меньших плазменной, возникает аномальный скин-эффект (см. (4.3.4.10)).

Схематически законы дисперсии для различных ветвей колебаний изображены на рис. 4.3.1.

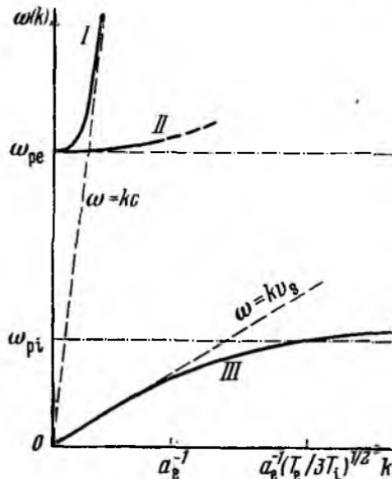


Рис. 4.3.1. Зависимость собственных частот колебаний свободной изотропной плазмы от величины волнового вектора.

*I* —  $\omega(k)$  для поперечных электромагнитных волн, *II* — то же для ленгмюровских колебаний, *III* — то же для ионно-звуковых колебаний.

## КОЛЕБАНИЯ ПЛАЗМЫ, НАХОДЯЩЕЙСЯ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

### § 5.1. Гидродинамическая теория колебаний плазмы в магнитном поле

**5.1.1. Тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы в магнитном поле.** Перейдем к изучению колебаний плазмы, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле \*). Как и в предыдущей главе, мы будем рассматривать колебания, частоты которых значительно больше частоты парных столкновений частиц.

Начнем с рассмотрения того случая, когда можно не учитывать влияния теплового движения частиц на распространение волн. Для этого необходимо, чтобы фазовая скорость волны была значительно больше тепловой скорости частиц и, кроме того, как будет показано ниже, чтобы частота волны не была близка к циклотронной частоте электронов или ионов.

Тогда для описания колебаний плазмы можно использовать гидродинамические уравнения для электронной ( $\alpha=e$ ) и ионной ( $\alpha=i$ ) ее компонент

$$\frac{d_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}}{dt} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u}_{\alpha} (\mathbf{V} + \mathbf{V}_0)] \right), \quad \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial t} + \operatorname{div} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha} = 0, \quad (5.1.1.4)$$

где

$$\frac{d_{\alpha}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u}_{\alpha} \nabla),$$

$\mathbf{V}_0$  — постоянное внешнее магнитное поле \*\*).

Электрическое  $\mathbf{E}$  и магнитное  $\mathbf{V}$  поля волны определяются из уравнений Максвелла (4.1.1.3), в которых под  $\mathbf{j}$  и  $\rho$  следует понимать  $\mathbf{j} = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha} \mathbf{u}_{\alpha}$  и  $\rho = \sum_{\alpha} e_{\alpha} n_{\alpha}$ .

\*) Излагаемые ниже результаты были получены (без учета движения ионов) в связи с исследованием распространения электромагнитных волн в ионосфере Земли в работах [1—5] и др. Движение ионов учтено в работах [6—14].

\*\*) Здесь и далее мы пользуемся сокращенными обозначениями и вместо  $\mathbf{V}_0^e$  пишем просто  $\mathbf{V}_0$ .

Ограничимся рассмотрением колебаний малой амплитуды. Считая, что в состоянии равновесия  $n_0 = n_1 = n_0$ ,  $u_\alpha = E = B = 0$ , получим, линеаризуя уравнения (5.1.1.1),

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial t} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( E + \frac{1}{c} [u_\alpha B_0] \right), \quad \frac{\partial \bar{n}_\alpha}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} u_\alpha = 0, \quad (5.1.1.2)$$

где  $\bar{n}_\alpha = n_\alpha - n_0$  — переменная часть плотности частиц сорта  $\alpha$ .

В случае плоских монохроматических волн, когда все переменные величины пропорциональны  $\exp [i(kr - \omega t)]$ , уравнения (5.1.1.2) принимают вид

$$i\omega u_\alpha + \frac{e_\alpha}{m_\alpha c} [u_\alpha B_0] = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} E, \quad \bar{n}_\alpha = n_0 \frac{ku_\alpha}{\omega}. \quad (5.1.1.3)$$

Считая, что ось  $z$  параллельна  $B_0$ , найдем отсюда компоненты скорости частиц сорта  $\alpha$

$$\left. \begin{aligned} u_{\alpha x} &= \frac{e_\alpha (i\omega E_x - \omega B_\alpha E_y)}{m_\alpha (\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}, \\ u_{\alpha y} &= \frac{e_\alpha (i\omega E_y + \omega B_\alpha E_x)}{m_\alpha (\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}, \\ u_{\alpha z} &= \frac{ie_\alpha E_z}{m_\alpha \omega}, \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1.4)$$

где  $\omega_{B\alpha} = e_\alpha B_0 / m_\alpha c$  — циклотронная частота (гибочастота) частиц сорта  $\alpha$ . Отметим, что она имеет тот же знак, что и  $e_\alpha$ .

Используя далее последние выражения, нетрудно найти плотность тока  $\mathbf{j} = en_0 (u_1 - u_c)$ , тензор проводимости  $\sigma_{ij}$  и тензор диэлектрической проводимости  $\epsilon_{ij}$ , определяемый соотношением (4.3.1.9).

Тензор диэлектрической проницаемости холодной плазмы имеет следующую структуру:

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & i\epsilon_2 & 0 \\ -i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (5.1.1.5)$$

где компоненты  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$ ,  $\epsilon_3$  равны

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_1 &= 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}, & \epsilon_2 &= - \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2 \omega_{B\alpha}}{\omega (\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}, \\ \epsilon_3 &= 1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{P\alpha}^2}{\omega^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1.6)$$

При  $B_0 = 0$  плазма изотропна и тензор  $\epsilon_{ij}$  становится пропорциональным единичному тензору  $\epsilon_{ij} = \epsilon_3 \delta_{ij}$ .

Заметим, что тензор (5.1.1.5) представляет собой хотя и не вещественный, но эрмитов тензор. Это означает, что холодная плазма, в которой не учитываются столкновения, является средой без потерь.

Появление при  $\mathbf{V}_0 \neq 0$  в (5.1.1.5) недиагональных элементов, пропорциональных  $\varepsilon_2$ , приводит к тому, что электромагнитные волны в плазме, находящейся в магнитном поле, не могут быть линейно поляризованными (за исключением частного случая распространения волны перпендикулярно магнитному полю) и поляризованы в общем случае эллиптически. Это связано с тем, что при  $\mathbf{V}_0 \neq 0$  матрица  $\Lambda_{ij}$  (4.3.1.10') не вещественна и ее нельзя привести к диагональной форме при помощи вещественного преобразования, т. е. уравнение  $\Lambda_{ij} E_j = 0$  нельзя при помощи поворота осей привести к виду  $\Lambda'_i E'_i$  (здесь по  $i$  суммирование не проводится). Следовательно, плазма в магнитном поле является не только анизотропной, но и оптически активной (гиротропной) средой. Часто ее называют поэтому *магнитоактивной плазмой*.

Величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  имеют особенность при  $|\omega| = |\omega_{D0}|$ , соответствующую циклотронному резонансу. Отметим, что, как будет показано в следующем разделе, выражения (5.1.1.6) при  $|\omega| \rightarrow |\omega_{D0}|$  становятся неприменимыми из-за появления сильного циклотронного затухания волн.

Дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в анизотропной среде с тензором диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}$  имеет вид (см. (4.3.1.11))

$$\Delta = \det(\Lambda_{ij}) = 0,$$

где

$$\Lambda_{ij} = \mathcal{N}^2 \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij}$$

и  $\mathcal{N} = ck/\omega$  — показатель преломления.

Подставляя сюда тензор  $\varepsilon_{ij}$  в виде (5.1.1.5), представим дисперсионное уравнение для холодной магнитоактивной плазмы в виде

$$\Delta = A\mathcal{N}^4 + B\mathcal{N}^2 + C = 0, \quad (5.1.1.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta, \\ B &= -\varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) - (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta, \\ C &= \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \end{aligned} \right\} \quad (5.1.1.8)$$

$\theta$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и магнитным полем  $\mathbf{V}_0$ . Коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$ , входящие в дисперсионное уравнение, представляют собой, согласно (5.1.1.6) и (5.1.1.8), известные функции частоты.

Из (5.1.1.7) следует, что в плазме возможно распространение двух волн с данной частотой, отличающихся друг от друга значениями показателя преломления:

$$\mathcal{N}^2 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}. \quad (5.1.1.9)$$

Если считать волновой вектор  $k$  заданным, то уравнение (5.1.1.7) определяет собственные частоты  $\omega = \omega^{(\nu)}(k, \theta)$ . Так как это уравнение является уравнением пятой степени относительно  $\omega^2$ , то оно определяет десять собственных частот. Поскольку каждой собственной частоте  $\omega^{(\nu)}$  соответствует собственная частота  $-\omega^{(\nu)}$ , то мы будем для простоты считать собственные частоты положительными и различать пять ветвей колебаний холодной магнитоактивной плазмы.

В явном виде зависимости  $\omega = \omega^{(\nu)}(k, \theta)$ ,  $\nu = 1, 2, 3, 4, 5$ , удастся получить только в некоторых предельных случаях. Однако характер поведения собственных частот при изменении волнового вектора, а также характер зависимости показателей преломления (см. (5.1.1.9)) от частоты, могут быть установлены в общем случае. Для этого нужно прежде всего найти области прозрачности, где  $\mathcal{N}^2 > 0$ , и области полного внутреннего отражения, где  $\mathcal{N}^2 < 0$ , а затем определить положение нулей и полюсов  $\mathcal{N}^2$ .

Для электромагнитных волн с заданной частотой векторы поляризации можно выбрать в виде

$$e = \left\{ \cos \varphi - \frac{i\varepsilon_2}{\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1} \sin \varphi, \sin \varphi + \frac{i\varepsilon_2}{\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1} \cos \varphi, \frac{\mathcal{N}^2 \sin \theta \cos \theta}{\mathcal{N}^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_1} \right\}, \quad (5.1.1.10)$$

где  $\varphi$  — полярный угол в пространстве волновых векторов  $k$ .

**5.1.2. Плазменные (гибридные) резонансы в холодной плазме.** Один из показателей преломления  $\mathcal{N}$  (см. (5.1.1.9)) стремится к бесконечности, когда частота волны приближается к резонансной частоте, определяемой из условия

$$A = 0, \quad (5.1.2.1)$$

причем он ведет себя, как

$$\mathcal{N}^2 = -B/A. \quad (5.1.2.2)$$

Другой показатель преломления при  $A = 0$  остается конечным:

$$\mathcal{N}^2 = -C/B.$$

Покажем, что при приближении к резонансной частоте электромагнитные волны становятся продольными, т. е. компонента напряженности электрического поля волны, параллельная

волновому вектору  $\mathbf{E}_i = \mathbf{k} (k\mathbf{E})/k^2$ , становится значительно больше компоненты, перпендикулярной к  $\mathbf{k}$ . Для этого умножим уравнение  $\Lambda_{ij} E_j = 0$  на  $k_i$  и просуммируем по  $i$  от 1 до 3. В результате мы получим

$$k_i \varepsilon_{ij} E_j = 0.$$

Полагая  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel$ , найдем отсюда

$$E_\parallel = - \frac{k_i \varepsilon_{ij} E_{\perp j}}{kA}, \quad (5.1.2.3)$$

где

$$A = \frac{k_i \varepsilon_{ij} k_j}{k^2} = \varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta,$$

т. е. действительно  $|E_\parallel/E_\perp| \rightarrow \infty$  при  $A \rightarrow 0$ .

Так как всегда можно положить  $\mathbf{E}_\perp = -\nabla\varphi = -ik\varphi$  и  $\mathbf{E}_\parallel = \text{rot} \mathbf{A} = -i[\mathbf{k}\mathbf{A}]$ , где  $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  — скалярный и векторный потенциалы, то мы вправе сказать, что при  $A \rightarrow 0$  колебания плазмы становятся потенциальными (квазиэлектростатическими).

В отсутствие магнитного поля продольными колебаниями являются плазменные (ленгмюровские) колебания. Поэтому при  $B_0 \neq 0$  о колебаниях с частотами, определяемыми из условия  $A=0$ , говорят как о продольных плазменных колебаниях в магнитном поле, а сами частоты называют *гибридными* или *плазменными* резонансными частотами (так как они определяются как ленгмюровскими, так и циклотронными частотами). Говорят также о плазменных или гибридных резонансах.

Подставляя в первое из соотношений (5.1.1.8) выражения (5.1.1.6) для  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_3$ , запишем его в виде

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \sin^2 \theta = 0. \quad (5.1.2.4)$$

Это уравнение третьей степени относительно  $\omega^2$  определяет три резонансных (гибридных) частоты

$$\omega = \omega_\infty^{(j)}(\theta), \quad j = 1, 2, 3. \quad (5.1.2.5)$$

Здесь индекс  $\infty$  означает, что эти частоты являются собственными частотами при бесконечно большой величине волнового вектора, т. е.  $\omega_\infty^{(j)}(\theta) = \lim_{k \rightarrow \infty} \omega^{(j+2)}(k, \theta)$ .

Уравнение (5.1.2.4) можно упростить, используя малость отношения масс электрона и иона ( $m_e/m_i \ll 1$ ). Действительно,

слагаемое, пропорциональное  $\omega_{pi}^2 \cos^2 \theta$ , можно не учитывать, так как оно в  $m_i/m_e$  раз меньше слагаемого с  $\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta$ . Слагаемое с  $\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta$  также мало по сравнению с членами, содержащими  $\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta$  или  $\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta$ , за исключением того случая, когда  $\omega$  близко к  $\omega_{Bi}$  или  $\theta$  близко к  $\pi/2$ . Пренебрегая в (5.1.2.4) вкладом ионов, получим следующие выражения для  $\omega_{\infty}^{(1,2)}(\theta)$ :

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\infty}^{(1)}(\theta) &= \left[ \frac{1}{2}(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) + \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\omega_{pe}^2\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta} \right]^{1/2}, \\ \omega_{\infty}^{(2)}(\theta) &= \left[ \frac{1}{2}(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) - \frac{1}{2}\sqrt{(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)^2 - 4\omega_{pe}^2\omega_{Be}^2 \cos^2 \theta} \right]^{1/2}. \end{aligned} \right\} (5.1.2.6)$$

При  $\theta \rightarrow 0$  резонансные частоты  $\omega_{\infty}^{(1,2)}(\theta)$  приближаются к значениям

$$\omega_{\infty}^{(1)} = \max(\omega_{pe}, |\omega_{Be}|), \quad \omega_{\infty}^{(2)} = \min(\omega_{pe}, |\omega_{Be}|). \quad (5.1.2.7)$$

При увеличении угла  $\theta$  частота  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$  возрастает, а  $\omega_{\infty}^{(2)}(\theta)$  убывает.

Если  $\theta$  близко к  $\pi/2$ , то величины  $\omega_{\infty}^{(1,2)}(\theta)$  стремятся к значениям

$$\omega_{\infty}^{(1)} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2}, \quad (5.1.2.8)$$

$$\omega_{\infty}^{(2)}(\theta) = \frac{\omega_{pe} |\omega_{Be}| \cos \theta}{\sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2}}. \quad (5.1.2.9)$$

В случае плотной плазмы, когда  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ , выражение (5.1.2.6) значительно упрощается:

$$\omega_{\infty}^{(1)}(\theta) = \omega_{pe} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2} \sin^2 \theta \right), \quad \omega_{\infty}^{(2)}(\theta) = |\omega_{Be}| \cos \theta. \quad (5.1.2.10)$$

В противоположном случае, когда  $\omega_{pe} \ll |\omega_{Be}|$ , справедливы формулы

$$\omega_{\infty}^{(1)}(\theta) = |\omega_{Be}| \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \sin^2 \theta \right), \quad \omega_{\infty}^{(2)}(\theta) = \omega_{pe} \cos \theta. \quad (5.1.2.11)$$

Частота  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$  всегда значительно больше  $\omega_{Bi}$ . В случае не очень разреженной плазмы ( $\omega_{pe} \gg \omega_{Bi}$ ) частота  $\omega_{\infty}^{(2)}(\theta)$  также значительно больше  $\omega_{Bi}$  (последний вывод несправедлив для углов  $\theta$ , близких к  $\pi/2$  при  $\omega_{pi} \leq \omega_{Bi}$ ).

Отметим, что формула (5.1.2.9) для  $\omega_{\infty}^{(2)}$  становится неприменимой при  $\theta \rightarrow \pi/2$ . Действительно, она получается при выполнении неравенства

$$\frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{|\omega^2 - \omega_{Be}^2|} \approx \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \gg \frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{|\omega^2 - \omega_{Bi}^2|} \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2},$$

которое справедливо, если

$$\cos^2 \theta \gg m_e/m_i. \quad (5.1.2.12)$$

Найдем теперь частоту  $\omega_{\infty}^{(3)}(\theta)$ . Предполагая, что  $\omega \approx \omega_{Bi}$ , но значительно меньше  $|\omega_{Be}|$  и  $\omega_{pe}$ , и сохраняя в (5.1.2.4) последнее слагаемое и слагаемое с  $\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta$ , получим

$$\omega_{\infty}^{(3)}(\theta) = \omega_{Bi} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{m_e}{m_i} \text{tg}^2 \theta \right). \quad (5.1.2.13)$$

Это соотношение, так же как и (5.1.2.9), применимо при выполнении неравенства (5.1.2.12).

Приведем в заключение выражения для  $\omega_{\infty}^{(2)}(\theta)$  и  $\omega_{\infty}^{(3)}(\theta)$  при  $\theta \approx \pi/2$ , справедливые также и в том случае, когда неравенство  $\cos^2 \theta \gg m_e/m_i$  не выполняется. Учитывая, что в этом случае  $\omega \ll |\omega_{Be}|$ , получим из (5.1.2.4) [9]

$$\omega_{\infty}^{(2,3)}(\theta) = (2 + 2q)^{-1/2} \{ \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta + \omega_{pi}^2 + \omega_{Bi}^2 \pm \sqrt{(\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta + \omega_{pi}^2 + \omega_{Bi}^2)^2 - 4(1+q)\omega_{Bi}^2 \omega_{pe}^2 \cos^2 \theta} \}^{1/2}, \quad (5.1.2.14)$$

где  $q = (\omega_{pe}/\omega_{Be})^2$ . Частоты, определяемые последними формулами, убывают при увеличении угла  $\theta$ . В области углов  $\theta$ , для которых выполняется условие  $\cos^2 \theta \gg m_e/m_i$ , эти выражения переходят в (5.1.2.9) и (5.1.2.13).

Если выполняется неравенство  $\cos^2 \theta \ll m_e/m_i$ , то из (5.1.2.14) следует, что частота  $\omega_{\infty}^{(2)}(\theta)$  остается конечной при  $\theta \rightarrow \pi/2$  [10]

$$\omega_{\infty}^{(2)}(\theta) = \sqrt{\frac{\omega_{Bi}^2 + \omega_{pi}^2}{1+q}}, \quad (5.1.2.15)$$

а частота  $\omega_{\infty}^{(3)}(\theta)$  стремится к нулю:

$$\omega_{\infty}^{(3)}(\theta) = \frac{\omega_{Bi} \omega_{pe} \cos \theta}{\sqrt{\omega_{pi}^2 + \omega_{Bi}^2}}. \quad (5.1.2.15')$$

В не сильно разреженной плазме, когда  $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$ , выражения (5.1.2.14) приобретают особенно простой вид

$$\omega_{\infty}^{(2)}(\theta) = \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta + \omega_{pi}^2}{1+q}}, \quad (5.1.2.16)$$

$$\omega_{\infty}^{(3)}(\theta) = \frac{\omega_{Bi} \omega_{pe} \cos \theta}{\sqrt{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta + \omega_{pi}^2}}. \quad (5.1.2.17)$$

Поведение резонансных частот  $\omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$  в зависимости от угла  $\theta$  схематически показано на рис. 5.1.1.

Колебания с частотой  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$  являются чисто электронными. Колебания с частотой  $\omega_{\infty}^{(2)}(\theta)$  также имеют чисто электронный характер при  $\cos^2 \theta \gg m_e/m_i$ . При  $\cos^2 \theta \ll m_e/m_i$  их дисперсия обусловливается электронами и ионами. Дисперсия колебаний с частотой  $\omega_{\infty}^{(3)}(\theta)$  определяется как электронами, так и ионами при любых  $\theta$ .

Плазменные резонансы играют существенную роль при распространении электромагнитных волн в плазме. Вблизи них резко возрастают затухание волн и уровень тепловых шумов. Показатель преломления электромагнитных волн вблизи этих резонансов велик ( $\mathcal{N} \gg 1$ ), а фазовая скорость значительно меньше скорости света, т. е. волны становятся медленными, и, следовательно, взаимодействие заряженных частиц с плазмой происходит наиболее эффективно именно вблизи плазменных резонансов.

**5.1.3. Общий вид спектров колебаний холодной магнитоактивной плазмы.** Выше мы нашли полюсы  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$  квадратов показателей преломления  $\mathcal{N}^2(\omega)$ . Для того чтобы выяснить общую картину зависимости показателей преломления от частоты, необходимо еще определить положение нулей  $\mathcal{N}^2(\omega)$ , а также найти значения  $\mathcal{N}^2$  при  $\omega=0$  и  $\omega=\infty$ . Очевидно, равенство  $\mathcal{N}^2=0$  справедливо, если  $C = \epsilon_3 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) = 0$ . Отсюда находим, пренебрегая малым вкладом ионов в величины  $\epsilon_1$ ,  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_3$ , нули  $\mathcal{N}^2$

$$\left. \begin{aligned} \omega_0^{(1)} &= \sqrt{\omega_{pe}^2 + 1/4\omega_{Be}^2} + 1/2 |\omega_{Be}|, \\ \omega_0^{(2)} &= \omega_{pe}, \\ \omega_0^{(3)} &= \sqrt{\omega_{pe}^2 + 1/4\omega_{Be}^2} - 1/2 |\omega_{Be}|; \end{aligned} \right\} \quad (5.1.3.1)$$

индекс 0 означает здесь, что величины  $\omega_0^{(j)}$  являются предельными значениями собственных частот при  $k \rightarrow 0$ , т. е.

$$\omega_0^{(j)} = \lim_{k \rightarrow 0} \omega^{(j)}(k, \theta).$$

Нетрудно убедиться, что выполняются неравенства

$$\omega_{\infty}^{(2)} < \omega_0^{(2)} < \omega_{\infty}^{(1)} < \omega_0^{(1)}; \quad \omega_{\infty}^{(3)} < \omega_0^{(3)}. \quad (5.1.3.2)$$

Частота  $\omega_0^{(3)}$  может быть как больше, так и меньше  $\omega_{\infty}^{(2)}(\theta)$  в зависимости от величины угла  $\theta$ .

Если  $\omega \rightarrow \infty$ , то  $\epsilon_2 \rightarrow 0$ ,  $\epsilon_1 \rightarrow 1$ ,  $\epsilon_3 \rightarrow 1$  и, следовательно,  $\mathcal{N}^2 \rightarrow 1$ . Если  $\omega \rightarrow 0$ , то  $\epsilon_2 \rightarrow 0$  и  $\epsilon_3 \rightarrow -\infty$  и, согласно (5.1.1.9),  $\mathcal{N}^2$  равно либо  $\mathcal{N}_A^2$  либо  $\mathcal{N}_A^2 / \cos^2 \theta$ , где

$$\mathcal{N}_A^2 = \epsilon_1(\omega) |_{\omega=0} = 1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2 + \omega_{pi}^2 / \omega_{Bi}^2.$$

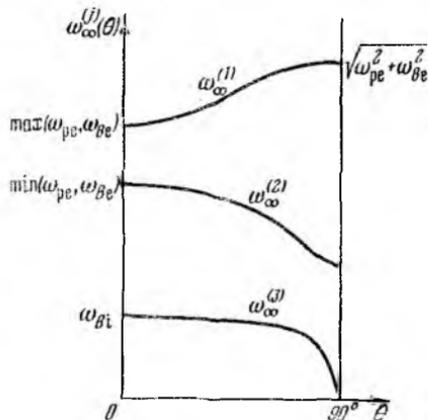


Рис. 5.1.1. Зависимость собственных частот продольных колебаний плазмы в магнитном поле от угла  $\theta$ .

Зная положения нулей и полюсов функции  $\mathcal{N}^2(\omega)$ , а также значения этой функции при  $\omega=0$  и  $\omega=\infty$ , нетрудно схематически построить ее график. На рис. 5.1.2 изображены такие графики при  $\theta \neq 0$ ,  $\theta \neq \pi/2$ . Областям распространения, где  $\mathcal{N}^2 > 0$ , соответствуют собственные частоты  $\omega = \omega^{(j)}(\theta)$ , зависимость которых от величины волнового вектора изображена схематически на рис. 5.1.3.

Всего имеется пять ветвей электромагнитных колебаний холодной плазмы, которые мы будем называть *альвеновской* (А),

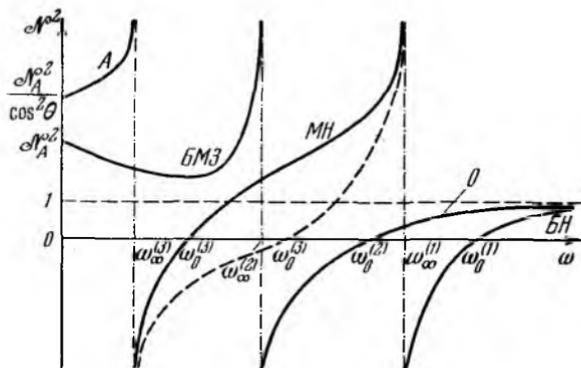


Рис. 5.1.2. Зависимость квадрата показателя преломления электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме от частоты при «косом» распространении ( $\theta \neq 0$ ,  $\theta \neq 1/2 \pi$ ).

*быстрой магнитозвуковой* (БМЗ), *медленной необыкновенной* (МН), *обыкновенной* (О) и *быстрой необыкновенной* (БН) ветвями \*). На рис. 5.1.2 и рис. 5.1.3 графики  $\mathcal{N}^2(\omega)$  и  $\omega^{(j)}(k)$  для МН-ветви показаны сплошной линией при  $\omega_0^{(3)} < \omega_\infty^{(2)}$  и пунктирной линией при  $\omega_0^{(3)} > \omega_\infty^{(2)}$ .

Как видно из рис. 5.1.2, при  $\omega < \omega_\infty^{(3)}$  возможно распространение двух волн (А и БМЗ); при  $\omega_\infty^{(3)} < \omega < \omega_0^{(3)} < \omega_\infty^{(2)}$  распространяется только одна волна (БМЗ), а при  $\omega_0^{(3)} < \omega < \omega_\infty^{(2)}$  — две волны (БМЗ и МН); если же  $\omega_0^{(3)} > \omega_\infty^{(2)}$ , то в области  $\omega_\infty^{(3)} < \omega < \omega_\infty^{(2)}$  распространяется только БМЗ-волна, в области  $\omega_\infty^{(2)} < \omega < \omega_0^{(3)}$  распространение волн невозможно, а при  $\omega_0^{(3)} < \omega < \omega_0^{(2)}$  распространяется одна волна (МН); в области  $\omega_0^{(2)} < \omega < \omega_\infty^{(1)}$  распространяются две волны (МН и О), при  $\omega_\infty^{(1)} < \omega < \omega_0^{(1)}$  — одна волна (О) и при  $\omega > \omega_0^{(1)}$  — две волны (О и БН).

Частоты распространяющихся волн  $\omega^{(j)}(k, \theta)$  монотонно возрастают при увеличении величины волнового вектора. Это означает, что в холодной плазме мы всегда имеем нормальную диспер-

\*) Эти названия, принятые в [41], очень удобны.

сию волн, а угол между направлением распространения волн и групповой скоростью  $v_g = \partial \omega / \partial k$  всегда меньше  $\pi/2$ .

**5.1.4. Высокочастотные (электронные) ветви колебаний холодной магнитоактивной плазмы.** В области высоких частот  $\omega^2 \gg |\omega_{Be}| \omega_{Bi}$  вкладом ионов в тензор  $\epsilon_{ij}$  можно пренебречь\*) и представить показатели преломления (5.1.1.9) в следующем виде [4, 5]:

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}_{\pm}^2 = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2(\omega^2 - \omega_{Be}^2)}{2\omega^2(\omega^2 - \omega_{Be}^2) - \omega^2\omega_{Be}^2 \sin^2\theta \pm \sqrt{\omega^4\omega_{Be}^4 \sin^4\theta + 4\omega^2\omega_{Be}^2(\omega^2 - \omega_{Be}^2) \cos^2\theta}} \quad (5.1.4.1)$$

Эти выражения определяют показатели преломления высокочастотных (электронных) ветвей колебаний. Величина  $\mathcal{N}_+(\omega)$  представляет собой показатель преломления обыкновенной волны (при  $\omega > \omega_{pe}$ ) и высокочастотной части волны БМЗ-ветви (при  $\omega < \omega_{\infty}^{(2)}$ ), а величина  $\mathcal{N}_-(\omega)$  — показатель преломления волны БН-ветви (при  $\omega > \omega_0^{(1)}$ ) и МН-ветви (при  $\omega_0^{(3)} < \omega < \omega_{\infty}^{(1)}$ ).

Формулы (5.1.4.1) все еще очень сложны. Упрощения возникают в ряде предельных случаев.

а) В области высоких частот  $\omega \gg |\omega_{Be}|$  анизотропия плазмы мала и показатели преломления (5.1.4.1) близки к его значению  $\mathcal{N}^2 = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$  в изотропной плазме, т. е.

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \times \left( 1 \mp \frac{|\omega_{Be}|}{\omega} \cos \theta \right). \quad (5.1.4.2)$$

Если  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ , то это выражение определяет показатель преломления волн МН-, О- и БН-ветвей в области  $\omega > \omega_{pe}$ , исключая узкую область первого гибридного резонанса

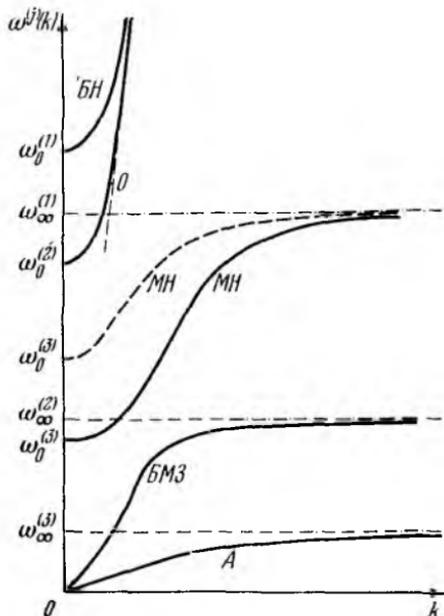


Рис. 5.1.3. Зависимость собственных частот колебаний холодной магнитоактивной плазмы от величины волнового вектора при «косом» распространении ( $\theta \neq 0, \theta \neq 1/2 \pi$ ).

\*) Для свистящих атмосфериков движение ионов несущественно и при более низких частотах, когда  $\omega \gg \omega_{Bi}$  (см. ниже).

$\omega \approx \omega_{\infty}^{(1)} \approx \omega_{pe}$  МН-ветви. Если  $\omega_{pe} \leq |\omega_{Be}|$ , то (5.1.4.2) относится лишь к области распространения О- и БН-ветвей, где  $\mathcal{N} \approx 1$ .

б) В плазме с малой плотностью ( $\omega \gg \omega_{pe}$ ,  $|\omega_{Be}| \gg \omega_{pe}$ ) показатели преломления близки к единице, если частота волны не близка к  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta) \approx |\omega_{Be}|$ ; тогда имеем

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{2\omega_{pe}^2}{2\omega^2 - \omega_{Be}^2 \sin^2 \theta \pm \sqrt{\omega_{Be}^4 \sin^4 \theta + 4\omega^2 \omega_{Be}^2 \cos^2 \theta}}. \quad (5.1.4.3)$$

Эта формула описывает поведение показателя преломления для МН-, О- и БН-ветвей в области  $\omega \gg \omega_0^{(2)} = \omega_{pe}$ .

в) В плазме с большой плотностью в области низких частот, когда  $\omega_{pe} \gg \omega$ ,  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ , при  $\theta$ , не близком к  $1/2 \pi$  [12], находим

$$\mathcal{N}^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (|\omega_{Be}| \cos \theta - \omega)}, \quad \mathcal{N}^2 = - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (|\omega_{Be}| \cos \theta + \omega)}. \quad (5.1.4.4)$$

Мы видим, что в этом случае может распространяться только одна БМЗ-волна (при  $\omega < |\omega_{Be}| \cos \theta = \omega_{\infty}^{(2)}$ ).

Так как при продольном распространении  $\theta=0$  и показатель преломления волны БМЗ-ветви определяется выражением

$$\mathcal{N}^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (|\omega_{Be}| - \omega)},$$

которое отличается от (5.1.4.4) лишь тем, что в него вместо  $|\omega_{Be}| \cos \theta$  входит  $|\omega_{Be}|$ , то рассматриваемый случай называют случаем *квазипродольного распространения*.

При квазипродольном распространении зависимость частот БМЗ-волны от величины волнового вектора определяется, согласно (5.1.4.4), выражением

$$\omega(k, \theta) = \frac{|\omega_{Be}| c^2 k^2 \cos \theta}{\omega_{pe}^2 + c^2 k^2}. \quad (5.1.4.5)$$

В области частот  $\omega \ll |\omega_{Be}|$  соотношения (5.1.4.4) и (5.1.4.5) упрощаются и принимают вид

$$\mathcal{N}^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega |\omega_{Be}| \cos \theta}, \quad (5.1.4.6)$$

$$\omega(k, \theta) = \frac{|\omega_{Be}| c^2 k^2 \cos \theta}{\omega_{pe}^2}. \quad (5.1.4.7)$$

В этой области частот БМЗ-волну с показателем преломления (5.1.4.6) и частотой (5.1.4.7), пропорциональной  $k^2$ , называют *свистящим атмосфериком* или просто *свистом* (ее называют также из-за круговой поляризации спиральной волной или геликоном).

Отметим, что, поскольку при  $\omega_{pe} \gg \omega$ ,  $|\omega_{Be}|$  последние два соотношения определяются только компонентой  $\varepsilon_2$  тензора  $\varepsilon_{ij}$  (выражение (5.1.4.6) можно представить в виде  $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_2 / \cos \theta$ ), которая значительно больше  $\varepsilon_1$ , а вклад ионных слагаемых в  $\varepsilon_2$  оказывается несущественным уже при  $\omega \gg \omega_{Bi}$ , то формулами (5.1.4.6) и (5.1.4.7) для свистов можно пользоваться в области частот  $\omega_{Bi} \ll \omega \ll |\omega_{Be}|$ .

**5.1.5. Низкочастотные ветви колебаний холодной магнитоактивной плазмы.** В области низких частот ( $\omega \ll |\omega_{Be}|$ ,  $\omega \ll \omega_{pe}$ ) существуют две ветви электромагнитных волн: альвеновская и быстрая магнитозвуковая.

Выражения (5.1.1.9) для показателей преломления этих волн можно существенно упростить, если учесть, что в области низких частот  $|\varepsilon_3| \approx \omega_{pe}^2 / \omega^2 \gg |\varepsilon_{1,2}|$  [13, 14]; тогда получим

$$\mathcal{N}^2 = \frac{1}{2 \cos^2 \theta} \left[ \varepsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \pm \sqrt{\varepsilon_1^2 (1 + \cos^2 \theta)^2 - 4 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta} \right], \quad (5.1.5.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_1 &\approx 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2}, \\ \varepsilon_2 &\approx -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega |\omega_{Be}|} - \frac{\omega_{pi}^2 \omega_{Bi}}{\omega (\omega^2 - \omega_{Bi}^2)} = -\frac{\omega_{pi}^2 \omega}{\omega_{Bi} (\omega^2 - \omega_{Bi}^2)}. \end{aligned} \right\} \quad (5.1.5.2)$$

Используя соотношение (5.1.5.1) для  $\mathcal{N}^2$ , нетрудно получить и явные выражения для частот быстрой магнитозвуковой и альвеновской волн. Если  $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$ , то

$$\omega^2(k, \theta) = \frac{1}{2} k^2 v_A^2 \left[ 1 + \cos^2 \theta + \frac{k^2 c^2 \cos^2 \theta}{\omega_{pi}^2} \pm \sqrt{\left( 1 + \cos^2 \theta + \frac{k^2 c^2 \cos^2 \theta}{\omega_{pi}^2} \right)^2 - 4 \cos^2 \theta} \right], \quad (5.1.5.3)$$

где  $v_A = c \omega_{Bi} / \omega_{pi} = B_0 / \sqrt{4\pi n_0 m_i} \ll c$  — альвеновская скорость.

В области низких частот ( $\omega \ll \omega_{Bi}$  или  $kc \ll \omega_{pi}$ ) из (5.1.5.1) и (5.1.5.3) получаем [6, 7]

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}_A^2 = c^2 / v_A^2, \quad \omega(k, \theta) = kv_A, \quad (5.1.5.4)$$

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}_A^2 / \cos^2 \theta, \quad \omega(k, \theta) = kv_A \cos \theta. \quad (5.1.5.5)$$

Эти формулы определяют показатели преломления и частоты быстрой магнитозвуковой и альвеновской волн соответственно. Интересно отметить, что в рассматриваемом случае бесстолкновительной плазмы приведенные выше выражения для частот (см. (5.1.5.4) и (5.1.5.5)) совпадают с выражениями для частот быст-

рой магнитозвуковой волны (при  $v_A \gg v_s$ ) и альвеновской волны (см. (2.1.1.9)), полученными в приближении магнитной гидродинамики, справедливым в противоположном случае большой частоты соударений, когда  $\omega\tau \gg 1$ . При сравнении выражений (5.1.5.4) и (2.1.1.9) необходимо в последнем пренебречь скоростью звука  $v_s \sim v_i = \sqrt{T/m_i}$ , поскольку для рассматриваемого случая холодной плазмы  $v_{ph} \sim v_A \gg v_s$ .

При приближении частоты  $\omega$  к ионной циклотронной частоте показатель преломления альвеновской ветви стремится к бесконечности. В этой области частот альвеновскую ветвь называют *ионно-циклотронной*. Ее показатель преломления и частота определяются, согласно (5.1.5.1) и (5.1.5.3), соотношениями [14]

$$N^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega} \quad (\omega \approx \omega_{Bi}), \quad (5.1.5.6)$$

$$\omega(k, \theta) = \omega_{Bi} \left( 1 - \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 c^2} \right) \left( \frac{\omega_{pi}}{kc} \ll 1 \right). \quad (5.1.5.7)$$

Заметим, что показатель преломления быстрой магнитозвуковой волны при  $\omega \approx \omega_{Bi}$  остается конечным:

$$N^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} \quad (\omega = \omega_{Bi}). \quad (5.1.5.8)$$

Согласно (5.1.5.6)  $N^2 \rightarrow \infty$  при  $\omega \rightarrow \omega_{Bi}$ . В действительности же показатель преломления не имеет особенности при  $\omega = \omega_{Bi}$ , так как при получении этого выражения не учитывались члены порядка  $m_e/m_i$ , и поэтому в его знаменателе разность  $\omega_{Bi} - \omega$  должна быть велика по сравнению с  $\omega_{Bi} \operatorname{tg}^2 \theta (m_e/m_i)$ . Если учесть эти малые члены, то в знаменателе (5.1.5.6) нужно заменить разность  $\omega_{Bi} - \omega$  на  $\omega_{pi}^{(3)}(\theta) - \omega$ , где резонансная частота  $\omega_{pi}^{(3)}(\theta)$  определяется формулой (5.1.2.13). Таким образом, резонансной является не ионная циклотронная частота, а близкая к ней третья гибридная частота  $\omega_{pi}^{(3)}(\theta)$ . Однако практически это различие может оказаться не особенно существенным, так как диссипативные эффекты, связанные либо со столкновениями, либо с бесстолкновительным циклотронным затуханием волны, могут наступить раньше чем разность  $|\omega_{Bi} - \omega|$  станет порядка  $\omega_{Bi} \operatorname{tg}^2 \theta (m_e/m_i)$ .

В области высоких частот ( $\omega \gg \omega_{Bi}$  или  $kc \gg \omega_{pi}$ ) из формул (5.1.5.1) и (5.1.5.3) получаем для показателя преломления и частоты свистов

$$N^2 = \omega_{pi}^2 / \omega \omega_{Bi} \cos \theta, \quad \omega(k, \theta) = \omega_{Bi} k^2 c^2 \cos \theta / \omega_{pi}^2.$$

**5.1.6. Распространение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме параллельно магнитному полю.** При  $\theta=0$  детерминант (5.1.1.7) распадается на произведение трех множителей и само дисперсионное уравнение принимает вид

$$\Lambda = \varepsilon_3 (\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1 + \varepsilon_2) = 0. \quad (5.1.6.1)$$

Уравнение  $\varepsilon_3 = 0$  имеет решение

$$\omega(k) = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2},$$

соответствующее ленгмюровским колебаниям (очевидно, что магнитное поле при  $\theta=0$  не оказывает влияния на продольные колебания).

Уравнения  $\mathcal{N}^2 = \varepsilon_1 \pm \varepsilon_2$  определяют показатели преломления двух электромагнитных волн с круговой поляризацией. Учитывая выражения для  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  (см. (5.1.1.6)), можно записать эти уравнения в виде

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega - |\omega_{Be}|)} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega + \omega_{Bi})}, \quad (5.1.6.2)$$

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega(\omega + |\omega_{Be}|)} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega(\omega - \omega_{Bi})}. \quad (5.1.6.3)$$

Показатель преломления волны, у которой вектор напряженности электрического поля вращается в том же направлении, что и электроны в магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , имеет особенность при  $\omega = |\omega_{Be}|$ , а в случае совпадения направления вращения этого вектора с направлением вращения ионов в поле  $\mathbf{B}_0$   $\mathcal{N}$  имеет особенность при  $\omega = \omega_{Bi}$ . Таким образом, показатели преломления электромагнитных волн в холодной плазме имеют особенности при  $\omega = |\omega_{B\alpha}|$  только при продольном распространении (при  $\theta \neq 0$  эти особенности возникают, как было показано выше, при гибридных частотах  $\omega_{\infty}^{(j)}(\theta) \neq |\omega_{B\alpha}|$ ).

Зависимости квадратов показателя преломления (см. (5.1.6.2) и (5.1.6.3)) от частоты, а также собственных частот  $\omega^{(j)}(k)$  от величины волнового вектора показаны на рис. 5.1.4 и рис. 5.1.5.

В отличие от общего случая, при  $\theta=0$  эти соотношения определяют частоты только четырех ветвей колебаний («исчезнувшей» ветвью фактически являются ленгмюровские колебания с частотой  $\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{pi}^2}$ ).

**5.1.7. Поперечное распространение электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме.** При  $\theta = 1/2\pi$  дисперсионное уравнение (5.1.1.7) распадается на два уравнения, а именно

$$\mathcal{N}^2 = \varepsilon_3, \quad (5.1.7.1)$$

$$\mathcal{N}^2 = (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)/\varepsilon_1. \quad (5.1.7.2)$$

Первое определяет показатель преломления линейно поляризованной обыкновенной волны с напряженностью электрического поля, параллельной внешнему магнитному полю  $B_0$ . Магнитное поле не оказывает влияния на распространение этой волны.

Зависимости показателя преломления (5.1.7.2) от частоты, а также соответствующих трех собственных частот от величины волнового вектора показаны на рис. 5.1.6 и рис. 5.1.7 (пунктирными кривыми О показаны графики  $N^2(\omega)$  и  $\omega(k)$  для обыкновенной волны).

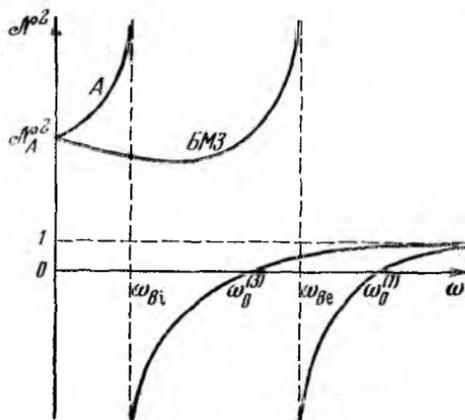


Рис. 5.1.4. Зависимость квадратов показателей преломления электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме от частоты в случае продольного распространения ( $\theta = 0$ )

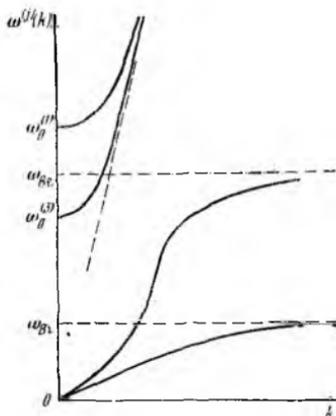


Рис. 5.1.5. Зависимость собственных частот колебаний холодной магнитоактивной плазмы от величины волнового вектора в случае продольного распространения ( $\theta = 0$ ).

При  $\theta = 1/2\pi$  (как и при  $\theta = 0$ ) имеется четыре ветви колебаний. При  $\theta \rightarrow 1/2\pi$  «исчезает» альвеновская ветвь; ее частота меньше частоты  $\omega_{\infty}^{(3)}(\theta)$ , которая при  $\theta \rightarrow 1/2\pi$  сама стремится к нулю (см. (5.1.2.17)).

Резонансные частоты  $\omega_{\infty}^{(1)}$  и  $\omega_{\infty}^{(2)}$  при  $\theta = 1/2\pi$  определяются формулами (5.1.2.8) и (5.1.2.16).

В области низких частот ( $\omega \ll \sqrt{|\omega_{Be}| |\omega_{Bi}|}$ ) частота колебаний БМЗ-ветви определяется при  $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$  соотношением  $\omega(k) = kv_A$ , справедливым, в отличие от (5.1.5.4), не только при  $\omega \ll \omega_{Bi}$ , но и в области  $\omega \gg \omega_{Bi}$ .

Подведем итоги. Мы показали, что холодная плазма, находящаяся во внешнем магнитном поле, является анизотропной средой с временной дисперсией, в которой возможно существование пяти типов волн: обыкновенной, быстрой и медленной необыкновенной.

венных волн, альвеновской и быстрой магнитозвуковых волн. Зависимости показателей преломления этих волн от частоты определяются формулой (5.1.1.8) (см. рис. 5.1.2). Все волны имеют нормальную дисперсию, т. е. их частоты растут при увеличении волнового вектора (см. рис. 5.1.3), и эллиптически поляризованы.

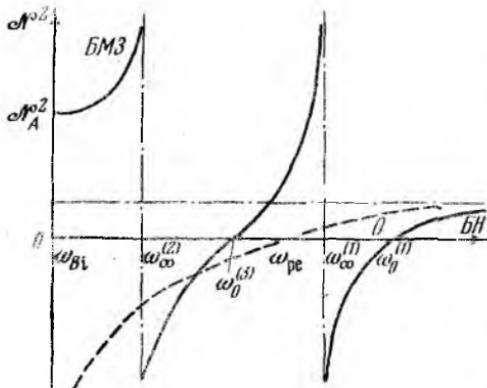


Рис. 5.1.6. Зависимость квадратов показателей преломления электромагнитных волн в холодной магнитоактивной плазме от частоты  $\omega$  при поперечном распространении ( $\theta = 1/2\pi$ ).

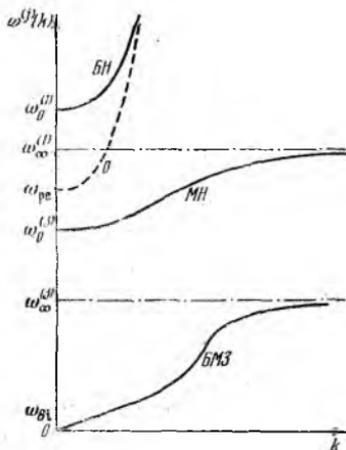


Рис. 5.1.7. Зависимость собственных частот колебаний холодной магнитоактивной плазмы в случае поперечного распространения ( $\theta = 1/2\pi$ ).

Дисперсия высокочастотных ветвей (О-, БН- и МН-, а также БМЗ-волн при  $\theta$ , не близком к  $1/2\pi$ , и  $\omega \gg \omega_{B1}$ ) определяется только электронами, а дисперсия низкочастотных ветвей (БМЗ-, А-волны при  $\omega \ll \omega_{B1}$ , а также БМЗ-волны при  $\theta \approx 1/2\pi$  и  $\omega < \omega_\infty^2(\theta)$ ) — как электронами, так и ионами.

## § 5.2. Кинетическая теория колебаний плазмы в магнитном поле

### 5.2.1. Тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы в кинетическом приближении.

Развитая в предыдущем параграфе гидродинамическая теория колебаний магнитоактивной плазмы оказывается в целом ряде случаев недостаточной, так как она не учитывает теплового движения частиц плазмы.

Наличие теплового движения электронов и ионов плазмы приводит к появлению качественно новых особенностей при распространении электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Прежде всего благодаря тепловому движению ее частиц появляется ряд новых ветвей колебаний магнитоактивной плазмы, слабо-

и сильнозатухающих, длинно- и коротковолновых, причем все они отсутствуют в холодной плазме. (Напомним, что в отсутствие магнитного поля учет теплового движения электронов в плазме с холодными ионами и горячими электронами приводит к появлению только одной ветви колебаний, а именно к ионно-звуковым волнам.) Далее, как мы видели в § 4.2, взаимодействие резонансных частиц с электрическим полем волны, распространяющейся в плазме, приводит к затуханию Ландау (речь идет о плазме с равновесным исходным состоянием). Такой эффект наблюдается и в магнитоактивной плазме. Но наряду с ним в этой плазме «работает» и другой механизм затухания — циклотронный, связанный с излучением и поглощением электромагнитных волн заряженными частицами плазмы, движущимися в магнитном поле по спирали, на циклотронной и кратной ей частотах.

Чтобы исследовать эти эффекты, мы будем исходить из кинетических уравнений для частиц плазмы с самосогласованным взаимодействием. Прежде всего получим на основе кинетической теории выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле, а затем, пользуясь им, исследуем распространение волн в магнитоактивной плазме с учетом теплового движения электронов и ионов.

Напомним, что в отсутствие колебаний функция распределения  $f_{\alpha 0}$  частиц плазмы сорта  $\alpha$  удовлетворяет уравнению

$$\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}c} [\mathbf{vB}_0] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} \right)_c, \quad (5.2.1.1)$$

из которого следует, что  $f_{\alpha 0}$  представляет собой максвелловскую функцию распределения,

$$f_{\alpha 0} = n_0 (m_{\alpha}/2\pi T)^{3/2} \exp(-m_{\alpha}v^2/2T),$$

где  $T$  — температура плазмы и  $n_0$  — равновесная плотность частиц.

В случае высокотемпературной плазмы время релаксации очень велико, и можно рассматривать квазиравновесное состояние, в котором функция распределения медленно изменяется из-за столкновений и в нулевом приближении удовлетворяет уравнению (5.2.1.1), где интеграл столкновений равен нулю

$$\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}c} [\mathbf{vB}_0] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = -\omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \phi} = 0. \quad (5.2.1.2)$$

Отсюда следует, что исходная функция распределения  $f_{\alpha 0}$  является произвольной функцией двух переменных —  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — параллельной и перпендикулярной к магнитному полю составляющих скорости, и не зависит от азимутального угла  $\phi$  в пространстве скоростей (рис. 5.2.1):

$$f_{\alpha 0} = f_{\alpha 0}(v_{\parallel}; v_{\perp}).$$

Рассмотрим теперь малые колебания плазмы, происходящие около исходного состояния, описываемого функцией распределения  $f_{\alpha 0}$ . В случае высокочастотных колебаний ( $\omega \tau \gg 1$ ) в кинетическом уравнении

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)] \right) \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c,$$

для функции распределения  $F_{\alpha}$  можно пренебречь интегралом столкновений и положить

$$F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}) + f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t),$$

где  $f_{\alpha}$  — малая осциллирующая добавка к  $f_{\alpha 0}$ . Линеаризуя кинетическое уравнение относительно  $f_{\alpha}$ , получим

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \phi} = 0. \quad (5.2.1.3)$$

Последнее уравнение вместе с уравнениями Максвелла для переменных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  определяет линейные колебания магнитоактивной плазмы. Решая совокупность этих уравнений методом Фурье — Лапласа так же, как и в § 4.2 в случае продольных колебаний, можно показать, что при  $t \rightarrow \infty$  асимптотическое поведение компонент Фурье полей определяется решениями дисперсионного уравнения. Как уже отмечалось в п. 4.3.1, для получения дисперсионного уравнения достаточно ограничиться рассмотрением плоских волн вида  $\exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega't)]$  и найти с помощью кинетического уравнения тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ . Условие разрешимости уравнений Максвелла или эквивалентных им уравнений (4.3.1.10) и даст дисперсионное уравнение.

Покажем, как найти тензор\*)  $\epsilon_{ij}$ .

Для плоских монохроматических волн уравнение (5.2.1.3) с учетом соотношения  $\mathbf{B} = (c/\omega')[\mathbf{kE}]$  принимает вид

$$-i(\omega' - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_{\alpha} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \phi} = -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left[ \mathbf{E} \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega'} \right) + \frac{\mathbf{v} (\mathbf{kE})}{\omega'} \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}. \quad (5.2.1.4)$$

\*) Выражения для тензора диэлектрической проницаемости плазмы во внешнем магнитном поле с учетом теплового движения электронов и ионов получены в работах Герденштейна [17] и Ситенко и Степанова [18] (см. также [14, 15, 19—23]).

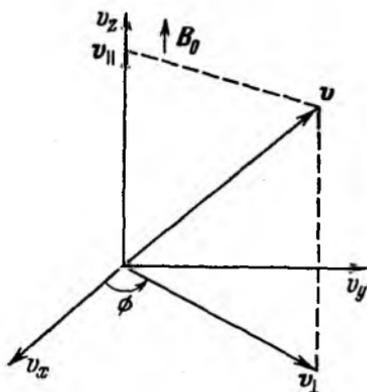


Рис. 5.2.1. Система координат в пространстве скоростей.

Интегрирование этого уравнения дает

$$f_{\alpha} = \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha} \omega_{B\alpha}} \exp \left[ \frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_0^{\phi} (\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega') d' \phi \right] \times \\ \times \left\{ \int_0^{\phi} \exp \left[ -\frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_0^{\phi'} (\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega') d \phi'' \right] \left[ \mathbf{E} \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega'} \right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{\omega'} \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} d \phi' + C \right\}, \quad (5.2.1.5)$$

где постоянная  $C = C(v_{\parallel}, v_{\perp})$ , не зависящая от  $\phi$  и определяемая из условия периодичности  $f_{\alpha}(\phi + 2\pi) = f_{\alpha}(\phi)$ , равна

$$C = \exp \left[ \frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_0^{2\pi} (\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega') d \phi \right] \int_0^{2\pi} d \phi \left[ \mathbf{E} \left( 1 - \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega'} \right) + \frac{\mathbf{v}(\mathbf{k}\mathbf{E})}{\omega'} \right] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \times \\ \times \exp \left[ -\frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_0^{\phi} (\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega') d \phi' \right]. \quad (5.2.1.6)$$

Выражение (5.2.1.5) удобно представить в несколько другом виде. Введем для этого систему координат, в которой  $k_y = 0$ , так что  $\mathbf{k} = (k_x, 0, k_z) = (k \sin \theta, 0, k \cos \theta)$ ,  $v_z = v_{\parallel}$ ; тогда

$$\int_0^{\phi} (\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega') d \phi' = (k_z v_z - \omega') \phi + k_x v_{\perp} \sin \phi. \quad (5.2.1.7)$$

Подставляя его в предыдущее выражение и производя под знаком интеграла разложение в ряд

$$\exp(-i\lambda \sin \phi) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\lambda) \exp(-in\phi), \quad (5.2.1.8)$$

где  $J_n(\lambda)$  — функция Бесселя  $n$ -го порядка,  $\lambda = k_x v_{\perp} / \omega_{B\alpha}$ , получим следующее выражение для  $f_{\alpha}$ :

$$f_{\alpha} = \frac{ie_{\alpha}}{m_{\alpha}} \exp(i\lambda \sin \phi) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{a(n)\mathbf{E}}{k_z v_z + n\omega_{B\alpha} - \omega'} \exp(-in\phi), \quad (5.2.1.9)$$

где

$$a_x(n) = \left[ \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega'} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} + \left( 1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega'} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \right] \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda), \\ a_y(n) = \left[ \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega'} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} + \left( 1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega'} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \right] i J'_n(\lambda), \\ a_z(n) = \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} J_n(\lambda) + \left( \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega'} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} - \frac{k_x v_{\parallel}}{\omega'} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda).$$

В случае слабозатухающих колебаний возмущение функции распределения имеет резкий максимум, как видно из (5.2.1.9), при

$$v_{\parallel} = v_{\parallel \text{res}} = \frac{\omega(k) - n |\omega_{B\alpha}|}{k_{\parallel}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (5.2.1.10)$$

Частицы с такой скоростью мы будем называть *резонансными*. Полагая в последнем соотношении  $n=0$ , получим

$$\omega(k) = k_{\parallel} v_{\parallel}, \quad (5.2.1.11)$$

т. е. условие *черенковского резонанса* между волной, бегущей вдоль магнитного поля  $B_0$  с фазовой скоростью  $\omega(k)/k_{\parallel}$ , и резонансной частицей (проекция скорости которой на направление магнитного поля равна  $v_{\parallel}$ ). Поглощение (возбуждение) волн этими резонансными частицами называется *черенковским поглощением (возбуждением)* волн.

При  $n \neq 0$  условия (5.2.1.10) можно интерпретировать следующим образом. Заряженную частицу, движущуюся в плазме по спирали со скоростью  $v_{\parallel}$  вдоль магнитного поля  $B_0$ , можно рассматривать как осциллятор, обладающий в собственной системе отсчета собственными частотами  $|\omega_{B\alpha}|$ ,  $2|\omega_{B\alpha}|$ ,  $3|\omega_{B\alpha}|$ , ... Условия резонанса (5.2.1.10) при  $n=1, 2, \dots$

$$\omega(k) = n |\omega_{B\alpha}| + k_{\parallel} v_{\parallel} \quad (5.2.1.12)$$

есть не что иное, как условия равенства частоты волны частоте осциллятора с учетом доплеровского смещения  $k_{\parallel} v_{\parallel}$ . При этом фазовая скорость волны вдоль  $B_0$ , равная  $\omega(k)/k_{\parallel}$ , больше скорости частицы  $v_{\parallel}$  и эффект Доплера является нормальным.

Поглощение (возбуждение) волн этими резонансными частицами мы будем называть *циклотронным поглощением (возбуждением)* волн при нормальном эффекте Доплера.

При  $n=-1, -2, -3, \dots$  условия (5.2.1.10)

$$\omega(k) = k_{\parallel} v_{\parallel} - |n \omega_{B\alpha}| \quad (5.2.1.13)$$

также означают равенство частоты волны собственной частоте осциллятора в лабораторной системе отсчета, но при  $n < 0$  фазовая скорость волны вдоль  $B_0$  меньше скорости частицы  $v_{\parallel}$ , т. е. эффект Доплера будет аномальным. Соответственно поглощение (возбуждение) волн этими резонансными частицами мы будем называть *циклотронным поглощением (возбуждением)* волн при аномальном эффекте Доплера.

Используя выражение (5.2.1.9) для  $f_{\alpha}$ , можно найти плотность тока и тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ . В системе

отсчета, в которой  $k_y=0$ , этот тензор имеет следующий вид:

$$\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{\alpha=0,1} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega^2} \left\{ \int d^3v \left( \frac{\omega' - k_{\parallel}v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})}{\omega' - k_{\parallel}v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}} - b_i b_j \int \left( f_{\alpha 0} + \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \right) d^3v \right\}, \quad (5.2.1.14)$$

где

$$\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \frac{n^2\omega_{B\alpha}^2}{k_x^2} J_n^2 & iv_{\perp} \frac{n\omega_{B\alpha}}{k_x} J_n J_n' & v_{\parallel} \frac{n\omega_{B\alpha}}{k_x} J_n^2 \\ -iv_{\perp} \frac{n\omega_{B\alpha}}{k_x} J_n J_n' & v_{\perp}^2 J_n'^2 & -iv_{\parallel} v_{\perp} J_n J_n' \\ v_{\parallel} \frac{n\omega_{B\alpha}}{k_x} J_n^2 & iv_{\parallel} v_{\perp} J_n J_n' & v_{\parallel}^2 J_n^2 \end{pmatrix}, \quad (5.2.1.15)$$

$J_n = J_n(\lambda)$  и  $J_n' = dJ_n/d\lambda$  — функция Бесселя и ее производная,  $\lambda = k_x v_{\perp} / \omega_{B\alpha}$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0 / B_0$  — единичный вектор в направлении внешнего магнитного поля.

Интегрирование по  $v_{\parallel} = v_z$  в (5.2.1.14) производится в соответствии с правилом, сформулированным в § 4.2, а именно от  $-\infty$  до  $\infty$  с обходом особых точек  $v_{\parallel} = (\omega' - n\omega_{B\alpha})/k_{\parallel}$  снизу при  $k_{\parallel} > 0$  и сверху при  $k_{\parallel} < 0$ .

Декремент затухания (или инкремент нарастания) волн определяется в случае слабого затухания (или нарастания) антиэрмитовыми частями  $\varepsilon_{ij}''$  тензора  $\varepsilon_{ij}$ . Учитывая соотношения (4.3.1.7), найдем

$$\varepsilon_{ij}'' = -i \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega^2} \int \left( k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{\omega' - k_{\parallel}v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \right) \times \\ \times \Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) \delta(\omega' - k_{\parallel}v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha}) d^3v. \quad (5.2.1.16)$$

Знаки величин  $\text{Im}\varepsilon_{ii}$ ,  $\text{Im}\varepsilon_{13}$ ,  $\text{Re}\varepsilon_{12}$ ,  $\text{Re}\varepsilon_{23}$ , которые и определяют знак мнимой части комплексной частоты, зависят от знака величины

$$\left( k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{n\omega_{B\alpha}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \right)_{\omega=k_{\parallel}v_{\parallel}+n\omega_{B\alpha}},$$

а также от знака функций  $J_n J_n'$ , входящих в  $\Pi_{12}^{(n)}$  и  $\Pi_{23}^{(n)}$ .

Для плазмы с анизотропным распределением частиц по скоростям в отсутствие пучков ( $f_{\alpha 0}$  — монотонно убывающая функция

$v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$ ) критерий неустойчивости колебаний с малым ларморовским радиусом ( $kv_{\perp}/\omega_{B\alpha} \ll 1$ ) можно получить в общем виде [22]

$$\left. \begin{aligned} \omega < n |\omega_{B\alpha}| \left( 1 - \frac{\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\perp}^2}{\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\parallel}^2} \right) \quad (n > 0, \left| \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} \right| > \left| \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} \right|), \\ \omega < n |\omega_{B\alpha}| \left( \frac{\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\perp}^2}{\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\parallel}^2} - 1 \right) \quad (n < 0, \left| \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}^2} \right| > \left| \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}^2} \right|). \end{aligned} \right\} \quad (5.2.1.17)$$

Получение критериев устойчивости колебаний, для которых  $kv_{\perp}/\omega_{B\alpha} \geq 1$ , требует детального исследования дисперсионного уравнения.

**5.2.2. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы с максвелловским распределением.** Если исходное состояние плазмы равновесно, т. е. определяется максвелловским распределением частиц по скоростям, то выражение (5.2.1.14) для тензора диэлектрической проницаемости можно сильно упростить. Интегрирование по  $v_{\perp}$  в этом случае можно провести, используя известное выражение для второго экспоненциального интеграла Вебера [24]

$$\int_0^{\infty} \exp(-p^2 t^2) J_n(at) J_n(bt) t dt = \frac{1}{2p^2} \exp\left(-\frac{a^2 + b^2}{4p^2}\right) I_n\left(\frac{ab}{2p^2}\right),$$

где  $\arg p < 1/4 \pi$ ,  $I_n(x)$  — модифицированная функция Бесселя.

Далее интегралы по  $v_{\parallel}$  сводятся, согласно (4.2.2.2'), к интегралу вероятностей

$$\int_C \frac{\exp(-v_{\parallel}^2/2v_{\alpha}^2)}{v_{\parallel} - (\omega' - n\omega_{B\alpha})/k_{\parallel}} dv_{\parallel} = i\pi w(z_n^{\alpha}), \quad (5.2.2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} w(z_n^{\alpha}) &= \exp(-z_n^2) \left( \frac{k_{\parallel}}{|k_{\parallel}|} + \frac{2i}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_n^{\alpha}} \exp t^2 dt \right), \\ z_n^{\alpha} &= (\omega' - n\omega_{B\alpha}) / \sqrt{2} k_{\parallel} v_{\alpha}, \quad v_{\alpha} = \sqrt{T_{\alpha}/m_{\alpha}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2.2)$$

В результате мы получим следующие выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы с максвелловским распределением:

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega') = \delta_{ij} + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega'^2} \left[ \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \sqrt{\pi} z_0^{\alpha} w(z_0^{\alpha}) \Pi_{ij}^{(n)} + 2z_0^{\alpha} b_i b_j \right], \quad (5.2.2.3)$$

где

$$\Pi_{ij}^{(n)} = \begin{pmatrix} \frac{n^2}{x_\alpha} A_n(x_\alpha) & inA'_n(x_\alpha) & \sqrt{\frac{2}{x_\alpha}} nz_n^2 A_n(x_\alpha) \\ -inA'_n(x_\alpha) & \frac{n^2}{x_\alpha} A_n(x_\alpha) - 2x_\alpha A'_n(x_\alpha) & -i\sqrt{2x_\alpha} z_n^2 A'_n(x_\alpha) \\ \sqrt{\frac{2}{x_\alpha}} nz_n^2 A_n(x_\alpha) & i\sqrt{2x_\alpha} z_n^2 A'_n(x_\alpha) & 2z_n^2 A_n(x_\alpha) \end{pmatrix}, \quad (5.2.2.4)$$

$$A_n(x_\alpha) = e^{-x_\alpha} J_n(x_\alpha), \quad A'_n(x_\alpha) = \frac{dA_n(x_\alpha)}{dx_\alpha},$$

$$\sqrt{x_\alpha} = k_x v_\alpha / \omega_{Dn}, \quad \text{sgn } \sqrt{x_\alpha} = e_d |e_\alpha|.$$

Отметим, что тензор  $\varepsilon_{ij}$  не является эрмитовым. Это связано с наличием поглощения, обусловленного взаимодействием волн с резонансными частицами.

Отметим далее, что справедливы соотношения

$$\varepsilon_{21} = -\varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{31} = \varepsilon_{13}, \quad \varepsilon_{32} = -\varepsilon_{23}.$$

Наконец, заметим, что при изменении знака магнитного поля  $B_0 \rightarrow -B_0$ , компоненты  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$ ,  $\varepsilon_{33}$  и  $\varepsilon_{13}$  не изменяются, а компоненты  $\varepsilon_{12}$  и  $\varepsilon_{23}$  изменяют свой знак.

Зная компоненты тензора диэлектрической проницаемости, можно, так же как и в п. 4.3.1, написать дисперсионное уравнение для электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

$$\Delta = \det(\Lambda_{ij}) = A\omega'^4 + B\omega'^2 + C = 0, \quad (5.2.2.5)$$

где

$$\left. \begin{aligned} A &= \varepsilon_{11} \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{13} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta, \\ B &= -\varepsilon_{11}\varepsilon_{33} - (\varepsilon_{22}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{23}^2) \cos^2 \theta - (\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2) \sin^2 \theta + \\ &\quad + 2(\varepsilon_{12}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}) \cos \theta \sin \theta + \varepsilon_{13}^2, \\ C &= \det(\varepsilon_{ij}) = \varepsilon_{33}(\varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{12}^2) + \varepsilon_{11}\varepsilon_{23}^2 + 2\varepsilon_{12}\varepsilon_{13}\varepsilon_{23} - \varepsilon_{22}\varepsilon_{13}^2. \end{aligned} \right\} \quad (5.2.2.6)$$

Мы приведем здесь только выражение для коэффициента  $A$  в случае плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям [25]

$$A(\mathbf{k}, \omega') = 1 + \sum_{\alpha=e, i} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_\alpha^2} \left[ 1 + i\sqrt{\pi} z_\alpha^0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x_\alpha) w(z_n^\alpha) \right]. \quad (5.2.2.7)$$

Далее будет проведен детальный анализ дисперсионного уравнения (5.2.2.5) для плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям; будет также исследовано затухание волн, обусловленное резонансными частицами, и найдены различные ветви колебаний.

**5.2.3. Кинетическая теория плазменных резонансов.** В п. 5.1.2 было показано, что при приближении частоты электромагнитной волны к частоте плазменного резонанса, определяемой из условия  $A(\omega) = 0$ , показатель преломления и волновой вектор стремятся к бесконечности, а фазовая скорость — к нулю. Однако записанными в п. 5.1.2 формулами, полученными для холодной плазмы, можно пользоваться только в случае не очень большого показателя преломления.

Теперь мы покажем, что учет теплового движения электронов качественно изменяет поведение показателя преломления в резонансной области даже для фазовых скоростей, значительно больших тепловой скорости электронов. В частности, при учете этого движения показатель преломления в резонансной области в бесконечность не обращается, хотя и остается значительно больше единицы.

Получим прежде всего выражение для тензора  $\epsilon_{ij}$ , принимая во внимание поправки, обусловленные тепловым движением электронов и ионов.

Будем предполагать, что, во-первых, длина волны в направлении, перпендикулярном магнитному полю, значительно больше ларморовского радиуса  $\rho_\alpha \equiv v_\alpha / |\omega_{B\alpha}|$  частиц с тепловой скоростью  $v_\perp = v_\alpha$ , во-вторых, фазовая скорость волны вдоль  $B_0$  существенно превышает тепловую скорость частиц и, наконец, частота волны не близка к  $|\omega_{B\alpha}|$  или к  $2|\omega_{B\alpha}|$ , и, следовательно, выполняются неравенства

$$(k\rho_\alpha \sin \theta)^2 \ll 1, \quad |z_n^\alpha| = \left| \frac{\omega - n\omega_{B\alpha}}{\sqrt{2}k_\parallel v_n} \right| \gg 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2. \quad (5.2.3.1)$$

В этом случае в выражениях (5.2.2.3) можно разложить величину  $\exp(-x_\alpha)$ , функции Бесселя  $I_n(x_\alpha)$  и их производные  $I'_n(x_\alpha)$  в ряды по степеням  $x_\alpha$  и использовать асимптотику (4.2.2.3) функций  $\omega(z_n^\alpha)$  при  $|z_n^\alpha| \gg 1$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2$ ). Сохраняя члены порядка  $(k\rho_\alpha)^2$  и  $1/(z_n^\alpha)^2$ , получим [18]

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 k^2 v_\alpha^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2} \left[ \frac{\omega^2 + 3\omega_{B\alpha}^2}{(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)^2} \cos^2 \theta + \frac{3 \sin^2 \theta}{\omega^2 - 4\omega_{B\alpha}^2} \right], \\ \epsilon_{22} &= \epsilon_1 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 k^2 v_\alpha^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2} \left[ \frac{\omega^2 + 3\omega_{B\alpha}^2}{(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega^2 + 8\omega_{B\alpha}^2}{\omega^2 (\omega^2 - 4\omega_{B\alpha}^2)} \sin^2 \theta \right], \\ \epsilon_{33} &= \epsilon_3 - \sum_\alpha \frac{\omega_{p\alpha}^2 k^2 v_\alpha^2}{\omega^4} \left( 3 \cos^2 \theta + \frac{\omega^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2} \right), \\ \epsilon_{13} &= - \sum_\alpha \frac{2\omega_{p\alpha}^2 k^2 v_\alpha^2}{(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)^2} \sin \theta \cos \theta, \end{aligned} \right\} (5.2.3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{23} &= i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{B\alpha} k^2 v_{\alpha}^2 (3\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}{\omega^3 (\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)^2} \sin \theta \cos \theta, \\ \varepsilon_{12} &= i\varepsilon_2 - i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{B\alpha} k^2 v_{\alpha}^2}{\omega (\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)} \left[ \frac{3\omega^2 + \omega_{B\alpha}^2}{(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)^2} \cos^2 \theta + \frac{6 \sin^2 \theta}{\omega^2 - 4\omega_{B\alpha}^2} \right], \end{aligned} \right\} (5.2.3.2)$$

где величины  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  определяются формулами (5.1.4.6).

Мы ограничимся исследованием высокочастотных гибридных резонансов с частотами  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$ ,  $j=1, 2$ , задаваемыми выражениями (5.1.2.6), когда движением ионов можно пренебречь. В этом случае величины  $A$ ,  $B$  и  $C$ , входящие в дисперсионное уравнение (5.2.2.5), можно представить, учитывая (5.2.3.2), в следующем виде:

$$A = A_0 - \beta_e^2 \mathcal{N}^2 A_1 \quad (5.2.3.3)$$

где

$$A_1 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left[ 3 \cos^4 \theta + \frac{6\omega^6 - 3\omega^4 \omega_{Be}^2 + \omega^2 \omega_{Be}^4}{(\omega^2 - \omega_{Be}^2)^3} \cos^2 \theta \sin^2 \theta + \frac{3\omega^4 \sin^4 \theta}{(\omega^2 - \omega_{Be}^2)(\omega^2 - 4\omega_{Be}^2)} \right],$$

$$B = B' [1 + O(x_e, 1/(z_n^e)^2)], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2,$$

$$C = C' [1 + O(x_e, 1/(z_n^e)^2)], \quad n = 0, \pm 1, \pm 2.$$

Здесь  $\beta_e = v_e/c = \sqrt{T_e/m_e c^2} \ll 1$ ,  $A_0$ ,  $B'$  и  $C'$  — гидродинамические значения величин  $A$ ,  $B$  и  $C$ , т. е. их значения при  $T_{\alpha} = 0$ . Они определяются формулами (5.1.4.8), в которых для рассматриваемого случая высоких частот можно не учитывать вклада, вносимого ионами.

При  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$ ,  $j=1, 2$ , получим

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= \frac{(\omega^2 - \omega_{\infty}^{(1)2})(\omega^2 - \omega_{\infty}^{(2)2})}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{Be}^2)}, \\ B' &= \frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)(2\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2 - \omega^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{Be}^2)}, \\ C' &= \left(1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) \left[1 - \frac{\omega_{pe}^2 (2\omega^2 - \omega_{pe}^2)}{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{Be}^2)}\right]. \end{aligned} \right\} (5.2.3.4)$$

Отбрасывая малые слагаемые порядка  $x_e$  и  $1/(z_n^e)^2$  в коэффициентах  $B'$  и  $C'$ , представим дисперсионное уравнение (5.2.2.5) в виде [16]

$$(A_0 - \beta_e^2 \mathcal{N}^2 A_1) \mathcal{N}^4 + B' \mathcal{N}^2 + C' = 0. \quad (5.2.3.5)$$

Это уравнение третьей степени относительно  $\mathcal{N}^2$ , в отличие от дисперсионного уравнения, соответствующего гидродинамическому приближению ( $\beta_e = 0$ ), которое является квадратным уравнением.

Поэтому (5.2.3.5) определяет три различных показателя преломления \*).

Последнее соотношение можно исследовать, учитывая малость величины  $\beta_e^2 \mathcal{N}^2 = (v_e/v_{ph})^2 \ll 1$  [18]. Для определенности при оценках будем предполагать, что  $\omega \sim \omega_{pe} \sim |\omega_{pe}|$ . Тогда  $A_1$ ,  $B'$ ,  $C'$  равны по порядку величины единице, а  $|A_0| \sim 1$ , если  $\omega$  не близко к  $\omega_{\infty}^{(j)}$ , и  $|A_0| \ll 1$ , если  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$ .

При  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(1)}$  или  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(2)}$  один из корней уравнения (5.2.3.5) порядка единицы. Для его нахождения можно пренебречь малым слагаемым  $(A_0 - \beta_e^2 \mathcal{N}^2 A_1) \mathcal{N}^4$  по сравнению с  $B' \mathcal{N}^2$  и  $C'$ , мы получим тогда для квадрата показателя преломления гидродинамическое выражение  $\mathcal{N}^2 = -C'/B'$ .

Два других показателя преломления при  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(j)}$  значительно больше единицы, и для их получения в уравнении (5.2.3.5) можно пренебречь слагаемым  $C' \sim 1$  по сравнению с  $B' \mathcal{N}^2$ . Тогда

$$\mathcal{N}^2 = \frac{A_0 \pm \sqrt{A_0^2 + 4A_1 B' \beta_e^2}}{2A_1 \beta_e^2}, \quad (5.2.3.6)$$

в выражениях для  $A_1(\omega)$ ,  $B'(\omega)$  и  $C'(\omega)$  можно положить  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$ .

При удалении от точки резонанса, когда  $A_0^2 \gg 4|A_1 B' \beta_e^2|$ , одно из выражений (5.2.3.6) переходит в гидродинамическое выражение (5.1.2.2)

$$\mathcal{N}^2 = -B'/A_0, \quad (5.2.3.7)$$

а другое определяется формулой [16]

$$\mathcal{N}^2 = A_0/A_1 \beta_e^2. \quad (5.2.3.8)$$

Напомним, что при  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$  волна с показателем преломления (5.2.3.7) относится к медленным необыкновенным волнам, а при  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(2)}(\theta)$  — к быстрым магнитозвуковым. Так как (5.2.3.8) является решением дисперсионного уравнения для продольных колебаний

$$A = A_0 - \beta_e^2 \mathcal{N}^2 A_1 = 0,$$

то волну с таким показателем преломления называют *плазменной волной*.

Выражения (5.2.3.6) удобно представить в виде

$$\mathcal{N}^2 = \sqrt{\frac{B'}{|A_1| \beta_e^2}} \varphi_{\pm}(x), \quad (5.2.3.9)$$

\*) Это отмечалось в работе [27], в которой тепловое движение учитывалось в гидродинамическом приближении путем введения в уравнения движения электронов градиента давления  $\nabla p_e = T_e \nabla n_e$ .

где

$$\varphi_{\pm}(x) = \alpha(x \pm \sqrt{x^2 + \alpha}), \quad (5.2.3.10)$$

$$x = \frac{A_0}{2\beta_0 \sqrt{B' |A_1|}}, \quad \alpha = \operatorname{sgn} A_1.$$

Так как коэффициенты  $A_1$  и  $B'$  не зависят от частоты, то функции  $\varphi_{\pm}(x)$  характеризуют зависимость показателей преломления

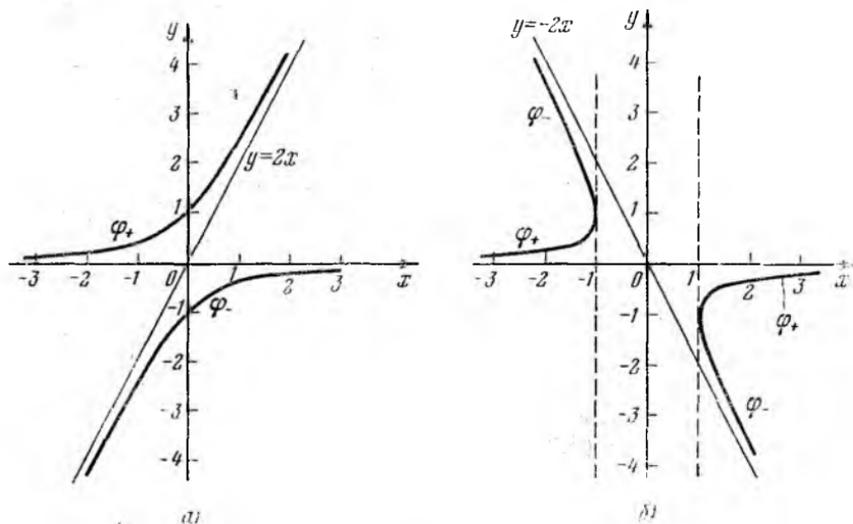


Рис. 5.2.2. Графики функций  $y = \varphi_+(x)$  и  $y = \varphi_-(x)$ :

а)  $\alpha = 1$ ; б)  $\alpha = -1$ .

от частоты в резонансной области ( $x \sim \frac{\omega - \omega_{\infty}^{(j)}}{\omega \beta_0}$ ). Графики функций  $y = \varphi_+(x)$  и  $y = \varphi_-(x)$  при  $\alpha = 1$  представлены на рис. 5.2.2, а, при  $\alpha = -1$  — на рис. 5.2.2, б.

Если  $\alpha = 1$ , то только один из показателей преломления (5.2.3.9) ( $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_+(x)$ ) соответствует распространяющейся волне ( $\mathcal{N}^2 > 0$ ); другая волна с  $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_-(x)$  распространяться не может, так как для нее  $\mathcal{N}^2 < 0$ .

Проследим за поведением показателя преломления при  $\alpha = 1$  в зависимости от частоты, т. е. от  $x$ . При увеличении частоты показатель преломления этой волны возрастает от гидродинамического значения  $\mathcal{N} \sim \sqrt{\omega / (\omega_{\infty}^{(j)} - \omega)}$  (см. (5.2.3.7)) при  $\omega < \omega_{\infty}^{(j)}$  ( $x < 0$ ,  $|x| \gg 1$ ) и достигает в области  $|\omega - \omega_{\infty}^{(j)}| \sim \beta_0 \omega$  значения  $\mathcal{N} \sim 1/\sqrt{\beta_0}$ ; при переходе в область  $\omega > \omega_{\infty}^{(j)}$  при  $x \gg 1$  эта волна превращается в электростатическую плазменную волну с показателем преломления, определяемым (5.2.3.8).

Квадрат показателя преломления нераспространяющейся волны  $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_-(x) < 0$  при уменьшении частоты убывает от гидродинамического значения (5.2.3.7) при  $\omega > \omega_\infty^{(j)}$  и  $x \gg 1$  до значения  $\mathcal{N}^2 \sim -1/\beta_0^2$ ; при переходе в область  $|x| \gg 1$  и  $\omega < \omega_\infty^{(j)}$  она становится нераспространяющейся электростатической волной с  $\mathcal{N}^2 \sim -A_0/\beta_0 < 0$ .

Иным будет поведение  $\mathcal{N}^2$  при  $\alpha = -1$ . Этот случай осуществляется при  $|\omega_{Be}| < \omega < 2|\omega_{Be}|$ , а так как  $\omega_\infty^{(2)} < |\omega_{Be}|$ , то частота должна быть близка к  $\omega_\infty^{(1)}$ .

Если  $x < -1$ , то оба показателя преломления (5.2.3.9) вещественны ( $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_\pm > 0$ ), т. е. в области частот  $\omega < \omega_\infty^{(1)}$  при  $x < -1$  возможно распространение двух волн. Волну с меньшим показателем преломления  $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_+$  следует отнести к медленной необыкновенной волне, так как при  $|x| \gg 1$  и  $x < 0$  ( $\omega < \omega_\infty^{(1)}$ ) выражение (5.2.3.9) для  $\mathcal{N}^2$  переходит в выражение (5.2.3.7) для квадрата показателя преломления МН-ветви при  $\omega \approx \omega_\infty^{(1)}$ . Волну с большим показателем преломления  $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_-$  можно назвать плазменной волной, так как при  $|x| \gg 1$ , но  $x < 0$  она переходит в продольную плазменную волну с показателем преломления, определяемым формулой (5.2.3.8). Подчеркнем, что такое разделение имеет смысл, только если задана частота волны; если же задан волновой вектор, то обе указанные волны относятся к одной ветви МН-волн. При  $x = -1$  показатели преломления (5.2.3.9) совпадают, а при  $x \sim 1$   $\mathcal{N} \sim 1/\sqrt{\beta_0}$ .

При  $x > 1$  оба значения квадрата показателя преломления (5.2.3.9) меньше нуля, так как  $\varphi_\pm < 0$ , и распространение волн невозможно (область полного внутреннего отражения). При  $x \gg 1$  волна, для которой  $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_+$ , переходит в нераспространяющуюся продольную волну, а волна с  $\mathcal{N}^2 \sim \varphi_-$  — в волну (существующую и в холодной плазме) с показателем преломления (5.2.3.7). При  $x = 1$  показатели преломления обеих волн совпадают. По порядку величины  $\mathcal{N}^2 \sim -1/\beta_0$  при  $x \sim 1$  (причем  $x > 1$ ).

При  $-1 < x < 1$  распространение волн также невозможно, так как оба выражения (5.2.3.9) комплексны, причем вещественная и мнимая части  $\mathcal{N}$  одинаковы по порядку величины.

Заметим, что в гидродинамическом приближении  $\mathcal{N}^2$  в отсутствие столкновений всегда вещественно и области непрозрачности соответствуют значения  $\mathcal{N}^2(\omega) < 0$ . Появление областей непрозрачности, для которых  $\mathcal{N}^2(\omega)$  комплексно в отсутствие диссипативных эффектов, представляет собой эффект, характерный для сред с простиранственной дисперсией.

Мы изучили поведение показателей преломления в зависимости от частоты в области высокочастотных гибридных резонансов. Рассмотрим теперь зависимость собственных частот от волнового вектора в области этих резонансов с учетом теплового движения

электронов. Напомним, что частоты гибридных резонансов  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$  являются предельными значениями собственных частот  $\omega = \omega^{(j+2)}(k, \theta)$  колебаний холодной плазмы при  $k \rightarrow \infty$ . Полагая

$$\omega^{(j+2)}(k, \theta) = \omega_{\infty}^{(j)}(\theta) [1 + \Delta_j(k, \theta)], \quad j = 1, 2, \quad (5.2.3.11)$$

где  $|\Delta_j| \ll 1$ , получим из дисперсионного уравнения (5.2.3.5), отбрасывая малое слагаемое  $C'$ , выражение

$$\Delta_j(k, \theta) = \frac{(\beta_e^2 A_1 \mathcal{A}'^4 - B') |\omega^2 - \omega_{Be}^2|}{2 [(\omega_{\infty}^{(1)})^2 - (\omega_{\infty}^{(2)})^2] \mathcal{A}'^2} \Big|_{\omega = \omega_{\infty}^{(j)}}. \quad (5.2.3.12)$$

Зависимость от  $k$  собственных частот  $\omega^{(j+2)}(k, \theta)$  МН- и БМЗ-волн в области больших значений волнового вектора ( $ck \gg \omega$ ), определяемая выражениями (5.2.3.11) и (5.2.3.12), схематически показана на рис. 5.2.3.

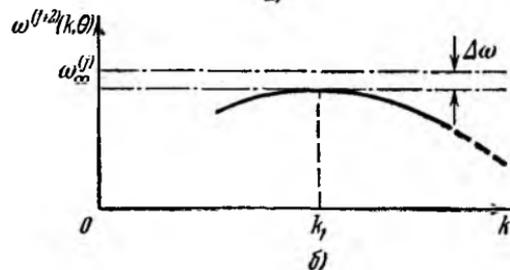
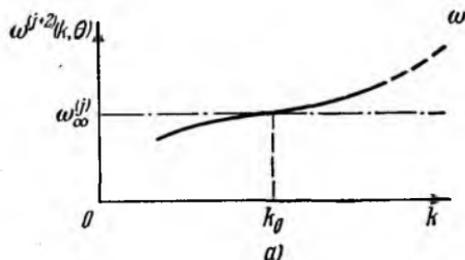


Рис. 5.2.3. Зависимость собственных частот электромагнитных волн в магнитоактивной плазме в области гибридного резонанса от величины волнового вектора с учетом теплового движения электронов при  $A_1 > 0$  (а) и  $A_1 < 0$  (б).

Если  $A_1 > 0$ , то частоты  $\omega^{(j+2)}(k, \theta)$  монотонно возрастают при увеличении величины волнового вектора, причем  $\omega^{(j+2)} < \omega_{\infty}^{(j)}$  при  $k < k_0$  и  $\omega^{(j+2)} > \omega_{\infty}^{(j)}$  при  $k > k_0$ , где

$$k_0 = \frac{\omega_{\infty}^{(j)}}{c} \left( \frac{B'}{\beta_e^2 |A_1|} \right)^{1/4}.$$

Напомним, что в холодной плазме частоты  $\omega^{(j+2)}(k, \theta)$  монотонно возрастают, приближаясь при  $k \rightarrow \infty$  к  $\omega_{\infty}^{(j)}$ , причем всегда  $\omega^{(j+2)} < \omega_{\infty}^{(j)}$ .

Если  $A_1 < 0$ , то частота медленной необыкновенной волны  $\omega = \omega^{(3)}(k, \theta)$  в области  $k < k_1$  монотонно возрастает при увеличении

при  $k = k_0$  достигает максимума и при  $k > k_1$  монотонно убывает. В точке  $k = k_0$  частота  $\omega^{(3)}(k, \theta)$  отличается от  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$  на величину порядка  $\beta_e \omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$ :

$$\omega^{(3)}(k_1, \theta) = \omega_{\infty}^{(1)}(\theta) \left\{ 1 - \beta_e \frac{\sqrt{B' |A_1|} [|\omega_{Be}^2 - (\omega_{\infty}^{(1)})^2|]}{[(\omega_{\infty}^{(1)})^2 - (\omega_{\infty}^{(2)})^2]} \right\}.$$

Таким образом, при  $k > k_0$  и  $A_1 < 0$  МН-волны обладают аномальной дисперсией. (Напомним, что в холодной плазме для всех ветвей колебаний характерна нормальная дисперсия.)

Остановимся, наконец, на условиях применимости полученных выражений для  $\mathcal{N}^2(\omega)$  и  $\omega^{(j+2)}(k, \theta)$ . При удалении частоты от  $\omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$  показатель преломления плазменной волны возрастает, а ее фазовая скорость уменьшается. В этой области возрастает бесстолкновительное затухание волн. Формулы (5.2.3.6)—(5.2.3.12) получены при выполнении неравенств (5.2.3.1), когда эффекты бесстолкновительных черенковского и циклотронного затуханий на первой и второй гармониках экспоненциально малы. В области  $|\omega - \omega_{\infty}^{(j)}| \sim \omega$  эти неравенства нарушаются, длина волны для продольных колебаний оказывается порядка дебаевского или ларморовского радиусов электрона, а декремент затухания становится порядка частоты (области сильного затухания показаны на рис. 5.2.3 пунктиром).

Подведем итоги. При учете теплового движения частиц плазмы частоты электромагнитных колебаний плазмы в магнитном поле определяются дисперсионным уравнением (5.2.2.7), в котором тензор диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  зависит как от частоты, так и от волнового вектора. Он определяется формулами (5.2.1.14) или (5.2.2.3).

Наличие особенностей в подынтегральных выражениях в (5.2.1.14) связано с эффектами черенковского и циклотронного резонанса между волной и частицами, движущимися по спирали вдоль магнитного поля со скоростью  $v_{\parallel} \approx v_{\parallel \text{res}}$ . Это резонансное взаимодействие приводит к черенковскому и циклотронному затуханию (или возбуждению) волн.

Исследование дисперсионного уравнения для частот, близких к частоте гибридных резонансов  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}$ ,  $j=1, 2$ , показывает, что при учете теплового движения электронов показатели преломления МН- и БМЗ-волн остаются конечными в резонансной области (см. формулу (5.2.3.6)), причем становится возможным появление плазменной волны. Дисперсия колебаний при  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(2)}$  нормальна, а при  $\omega \approx \omega_{\infty}^{(1)}$  может быть как нормальной, так и аномальной (при  $|\omega_{\text{pe}}| < \omega_{\infty}^{(1)} < 2|\omega_{\text{pe}}|$ ).

## § 5.3. Затухание высокочастотных электромагнитных волн в магнитоактивной плазме

### 5.3.1. Электронное циклотронное затухание необыкновенной волны в горячей плазме малой плотности.

Перейдем к исследованию затухания электромагнитных волн, обусловленного их взаимодействием с резонансными частицами. Рассмотрим сначала поглощение необыкновенной волны, частота которой близка

к электронной циклотронной частоте \*). Плотность плазмы будем считать достаточно малой, а именно, предположим, что вклад  $\delta\epsilon_{ij}$ , вносимый электронами в тензор диэлектрической проницаемости плазмы, значительно меньше единицы. В этом случае показатель преломления электромагнитных волн близок к единице, и наличие плазмы приводит лишь к незначительному изменению его вещественной части и к появлению слабого циклотронного затухания.

Так как  $\omega/k \approx c$ , то в выражениях (5.2.2.3) для компонент тензора  $\epsilon_{ij}$  величины  $x_e \sim (v_e/c)^2$  и  $1/z_n^e \sim v_e/c$  ( $n \neq -1$ ) значительно меньше единицы. Поэтому можно разложить функции  $\exp(-x_e) I_n(x_e)$  в ряды по степеням  $x_e$  и воспользоваться асимптотическим представлением функций  $w(z_n^e)$ ,  $n \neq 1$ , при  $|z_n^e| \gg 1$ . В результате мы получим следующие выражения для  $\delta\epsilon_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} \delta\epsilon_{11} = \delta\epsilon_{22} = i\delta\epsilon_{12} &= i \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \beta_e} w(z), \\ \delta\epsilon_{33} &= -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad |\delta\epsilon_{13}| \sim |\delta\epsilon_{23}| \sim |\delta\epsilon_{11}| \beta_e, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1.1)$$

где  $\beta_e = v_e/c = \sqrt{T_e/m_e c^2}$ ,  $z = (\omega - |\omega_{Be}|) / \sqrt{2} k_{\parallel} v_e$ . Подставляя эти выражения в дисперсионное уравнение (5.2.2.5), найдем поправку к показателю преломления  $\delta\mathcal{N}$  и коэффициент затухания  $\kappa = \text{Im } \mathcal{N}$  для необыкновенной волны [28]

$$\mathcal{N} = 1 + \delta\mathcal{N} + i\kappa, \quad (5.3.1.2)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\mathcal{N} &= -\frac{\omega_{pe}^2}{\sqrt{8}\omega^2\beta_e} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} \exp(-z^2) \int_0^z \exp t^2 dt, \\ \kappa &= 1/4 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pe}^2}{\beta_e \omega^2} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} \exp(-z^2). \end{aligned} \right\} \quad (5.3.1.3)$$

Мы видим, что величины  $\delta\mathcal{N}$  и  $\kappa$  при  $|z| \sim 1$  порядка  $\omega_{pe}^2/\beta_e \omega^2$ . Форма контура линий поглощения симметрична относительно резонансной частоты  $\omega = |\omega_{Be}|$  и определяется функцией  $\exp(-z^2)$ . Выражения (5.3.1.3) получены при выполнении условия  $|\delta\epsilon_{ij}| \ll 1$ , которое удовлетворяется при  $|z| \sim 1$  только для очень разреженной плазмы, когда

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \ll \beta_e \ll 1. \quad (5.3.1.4)$$

\* На существование сильного поглощения при электронном циклотронном резонансе было впервые указано Силиным [31].

Поправки к показателю преломления обыкновенной волны в  $1/\beta_e$  раз меньше  $\delta_{\mathcal{N}}$  и  $\chi$  для необыкновенной волны. Это связано с тем, что обыкновенная волна (в отличие от необыкновенной) слабо взаимодействует с электронами, так как направления вращения вектора напряженности электрического поля последней и электронов в магнитном поле  $B_0$  противоположны, а направления вращения вектора напряженности электрического поля необыкновенной волны и электронов в поле  $B_0$  одинаковы.

**5.3.2. Электронное циклотронное поглощение медленной необыкновенной волны и обыкновенной волны в плазме большой плотности.** Рассмотрим теперь электронный циклотронный резонанс в плазме с большой плотностью, когда выполняется неравенство, противоположное (5.3.1.4), а именно

$$\frac{\omega_{pe}^2}{\beta_e \omega_{ce}^2} \gg 1. \quad (5.3.2.1)$$

Будем считать, что для рассматриваемых волн  $k\rho_e \ll 1$  и  $|z_n^e| \gg 1$ . Тогда показатели преломления электромагнитных волн определяются выражениями (5.1.1.9) или (5.1.4.1), полученными для холодной плазмы. Как видно из рис. 5.1.2 и 5.1.3, в этом случае кривые  $\omega = \omega^{(j)}(k, \theta)$  ( $j=2, 3$ ), характеризующие дисперсию МН- и О-волн, могут пересекать прямую  $\omega = |\omega_{Be}|$ . Однако при приближении частоты к  $|\omega_{Be}|$  равенство

$$|z| \equiv |z_{-1}^e| = \left| \frac{\omega - |\omega_{Be}|}{\sqrt{2}k_{\perp}v_e} \right| \gg 1,$$

при выполнении которого получено выражение (5.1.4.1), нарушается, и в области  $|z| \lesssim 1$  необходимо кинетическое рассмотрение.

При  $|z| \lesssim 1$  антиэрмитовы слагаемые в тензоре  $\epsilon_{ij}$  порядка эрмитовых. Поэтому, казалось бы, в данной области МН- и О-волны должны сильно затухать. Однако, как будет показано ниже, их затухание остается слабым и при  $|z| \lesssim 1$ , за исключением тех случаев, когда угол  $\theta$  между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и магнитным полем  $B_0$  близок к нулю или к  $1/2\pi$ .

Исследуем более подробно поведение собственных частот  $\omega = \omega^{(j)}(k, \theta)$  и показателей преломления  $\mathcal{N}(\omega)$  МН- и О-волн в области циклотронного резонанса  $\omega \approx |\omega_{Be}|$  в плотной плазме. Предполагая по-прежнему, что

$$x_e \ll 1, \quad |z_n^e| = \left| \frac{\omega - n|\omega_{Be}|}{\sqrt{2}k_{\perp}v_e} \right| \gg 1 \quad (n \neq 1),$$

получим из (5.2.2.3) следующие выражения для компонент тензора  $\epsilon_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= i\sigma + 1 - 1/4q, & \epsilon_{22} &= i\sigma + 1 - 1/4q - 2i\alpha, \\ \epsilon_{12} &= \sigma - 1/4iq - \alpha, & \epsilon_{33} &= 1 - q + \epsilon'_{33}, \\ \epsilon'_{33} &= \frac{q \sin^2 \theta}{\sqrt{2} \cos \theta} \beta_0 \mathcal{N} z [1 + i\sqrt{\pi}zw(z)], \\ \epsilon_{13} &= -i\epsilon_{23} = 1/2q \operatorname{tg} \theta [1 + i\sqrt{\pi}zw(z)], \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2.2)$$

где

$$\sigma = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{qw(z)}{\beta_0 \mathcal{N} \cos \theta}, \quad \alpha = (\beta_0 \mathcal{N} \sin \theta)^2 \sigma, \quad q = \left( \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right)^2, \\ z = \frac{\omega - |\omega_{Be}|}{\sqrt{2}\beta_0 \omega \mathcal{N} \cos \theta},$$

причем величина  $z$  может принимать произвольные значения.

Будем предполагать, в соответствии с неравенством (5.3.2.1), что  $|\sigma| \gg 1$ . Тогда при  $q \leq 1$  имеем  $\epsilon_{11} \sim \epsilon_{22} \sim \epsilon_{12} \sim \sigma$  и  $\epsilon_{33} \sim \epsilon_{13} \sim \epsilon_{23} \sim 1$ . Подставляя выражения (5.3.2.2) в дисперсионное уравнение (5.2.2.5), можно убедиться, что члены порядка  $\sigma^2$  в коэффициентах  $B$  и  $C$  взаимно сокращаются; сохраняя в коэффициентах  $A$ ,  $B$  и  $C$  члены порядка  $\sigma$  и порядка единицы, представим это уравнение в виде

$$\Lambda = i\sigma\Lambda_0 + \Lambda_1 + i\sqrt{\pi}zw(z)\Lambda_2 = 0, \quad (5.3.2.3)$$

где

$$\Lambda_0 = \sin^2 \theta \mathcal{N}^4 - (2 + \sin^2 \theta - 2q) \mathcal{N}^2 + (1 - q)(2 - q), \quad (5.3.2.4) \\ \Lambda_1 = [1 - q(1 + 1/4 \sin^2 \theta)] \mathcal{N}^4 - [(1 - q)(1 - 1/4q)(1 + \cos^2 \theta) + \\ + (1 - 1/2q)(1 + q) \sin^2 \theta - 1/4q^2 \operatorname{tg}^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)] \mathcal{N}^2 + \\ + (1 - q)(1 - 1/2q) - 1/4q^2 (2 - q) \operatorname{tg}^2 \theta, \\ \Lambda_2 = q \sin^2 \theta \mathcal{N}^4 - [q(1 - 1/2q) \sin^2 \theta + \\ + 1/4q^2 \operatorname{tg}^2 \theta (1 + \cos^2 \theta)] \mathcal{N}^2 - 1/2q^2 (2 - q) \operatorname{tg}^2 \theta. \quad (5.3.2.5)$$

В уравнении (5.3.2.3) в нулевом приближении ( $\sigma \rightarrow \infty$ ), предполагая, что  $\mathcal{N}^2 \ll |\sigma|$ , можно пренебречь слагаемыми  $\Lambda_1$  и  $i\sqrt{\pi}zw(z)\Lambda_2$ . В результате мы получим следующие выражения для показателей преломления обыкновенной  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_-$  и медленной необыкновенной  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_+$  волн [18]:

$$\mathcal{N}_\pm^2 = \frac{1}{\sin^2 \theta} [1 + 1/2 \sin^2 \theta - q \pm \\ \pm \sqrt{(1 + 1/2 \sin^2 \theta - q)^2 - (1 - q)(2 - q) \sin^2 \theta}]. \quad (5.3.2.6)$$

Найденные выражения для  $\mathcal{N}_{\pm}^2$  совпадают с соотношениями (5.1.4.1) для квадратов показателей преломления электромагнитных волн в холодной плазме, если в них положить  $\omega = |\omega_{Be}|$ . Это связано с тем, что и в кинетическом, и в гидродинамическом приближениях использовались неравенства  $|\sigma| \gg 1$  и  $|\sigma| \gg \mathcal{N}^2$ , выражения же для  $\epsilon_{33}$ ,  $\epsilon_{13}$  и  $\epsilon_{23}$  в нулевое приближение не вошли.

Из формулы (5.3.2.6) следует, что  $\mathcal{N}_-^2 > 0$  только при  $q < 1$ , а  $\mathcal{N}_+^2 > 0$  только при  $q < 2$ , т. е. МН-волна может распространяться при  $q < 2$ , а О-волна — при  $q < 1$ .

Сохраняя в дисперсионном уравнении (5.3.2.3) только члены порядка единицы, мы положим, что

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\pm} + \delta\mathcal{N}_{\pm} + ix_{\pm}, \quad (5.3.2.7)$$

где  $\delta\mathcal{N}_{\pm}$  и  $x_{\pm}$  значительно меньше  $\mathcal{N}_{\pm}$ . Как нетрудно показать \*)

$$\delta\mathcal{N}_{\pm} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta_e \cos \theta \varphi(z)}{q\mathcal{N}_{\pm} (2 \sin^2 \theta \mathcal{N}_{\pm}^2 - 2 + 2q - \sin^2 \theta)}, \quad (5.3.2.8)$$

$$x_{\pm} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta_e \cos \theta \Lambda_1}{q\mathcal{N}_{\pm} (2 \sin^2 \theta \mathcal{N}_{\pm}^2 - 2 + 2q - \sin^2 \theta)} f(z), \quad (5.3.2.9)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varphi(z) &= \Lambda_1 \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\exp(-z^2) \int_0^t \exp(t^2) dt}{|w(z)|^2} - \Lambda_2 \sqrt{\pi} z, \\ f(z) &= \frac{\exp(-z^2)}{|w(z)|^2}, \quad z = \frac{\omega - |\omega_{Be}|}{\sqrt{2}\beta_e \mathcal{N}_{\pm} \omega \cos \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.2.10)$$

Если  $\theta \sim 1$ ,  $q \sim 1$ , то при  $|z| \leq 1$  имеем  $\mathcal{N}_{\pm} \sim 1$ ,  $\delta\mathcal{N}_{\pm} \sim \beta_e$  и  $x_{\pm} \sim \beta_e$ , т. е. действительно в плотной плазме циклотронное затухание МН- и О-волн мало. Контур линии поглощения, определяемый (5.3.2.10), симметричен относительно электронной циклотронной частоты  $\omega = |\omega_{Be}|$ . График функции  $f(z)$  показан на рис. 5.3.1. Ширина контура линий поглощения порядка  $\Delta\omega \sim \sim \beta_e \omega \ll \omega$ . Затухание О-волны оказывается обычно на порядок меньше затухания МН-волны из-за численной малости величины  $\Lambda_1$ , входящей в (5.3.2.9) [30].

При приближении угла  $\theta$  к нулю показатель преломления О-волны остается конечным,  $\mathcal{N}_-^2 = 1 - 1/2q$ , а коэффициент затухания стремится к нулю

$$x_- = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta_e \theta^2}{1 - q} \mathcal{N}_-.$$

\*) Выражение (5.3.2.9) было получено в работе [29] и (при  $|z| \leq 1$ ) в работе [30].

Показатель преломления МН-волны и ее коэффициент затухания при  $\theta \rightarrow 0$  увеличиваются:

$$\mathcal{N}_+^2 \approx \frac{2(1-q)}{\theta^2} \quad (\theta \ll 1), \quad (5.3.2.11)$$

$$\kappa_+ \approx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\beta_0 \mathcal{N}_+^4}{q} \quad (\theta \ll 1). \quad (5.3.2.12)$$

Однако этими выражениями можно пользоваться, если угол  $\theta$  не слишком мал, а именно должно выполняться условие  $\kappa_+ \ll \mathcal{N}_+$  или  $\mathcal{N}_+ \ll |\sigma|$ , т. е.  $\theta^3 \gg \beta_0$  ( $q \sim 1$ ).

Если угол  $\theta$  настолько близок к нулю, что  $\theta^3 \leq \beta_0$ , то, как видно из дисперсионного уравнения (5.3.2.3),  $\mathcal{N}^2 \sim i\sigma$ , т. е. при  $|z| \leq 1$

$$\operatorname{Re} \mathcal{N} \sim \kappa \sim \beta_0^{-1/3} \gg 1. \quad (5.3.2.13)$$

При  $|z| \ll 1$  дисперсионное уравнение для МН-волны имеет вид  $\mathcal{N}^2 = i\sigma$ . Отсюда при  $|z| \ll 1$  получаем [31]

$$\mathcal{N} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{v_e}{c} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^3} \right)^{1/3}. \quad (5.3.2.14)$$

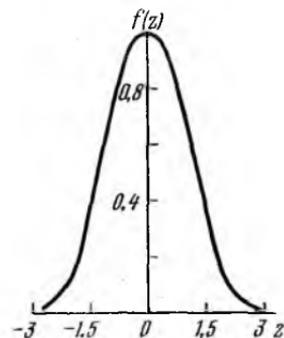


Рис. 5.3.1. График функции  $f(z)$ .

Таким образом, медленная необыкновенная волна при почти продольном распространении ( $\theta^3 \leq \beta_0$ ) сильно затухает, если  $|z| \leq 1$ .

В этом случае электромагнитная волна проникает в плазму на глубину порядка

$$\delta = \frac{1}{\operatorname{Im} k} \sim \delta_* = \left( \frac{c^2 v_e}{\omega_{pe}^2 |\omega_{Be}|} \right)^{1/3}; \quad (5.3.2.15)$$

иными словами, область частот вблизи циклотронного резонанса при  $\theta^3 \leq \beta_0$  является областью аномального скин-эффекта. Условие  $|z| \leq 1$  выполняется при

$$\left| \frac{\omega - |\omega_{Be}|}{\omega} \right| \leq \left( \frac{v_e}{c} \frac{\omega_{pe}}{|\omega_{Be}|} \right)^{2/3} \ll 1.$$

В области частот, где  $|z| \gg 1$ , плазма прозрачна для МН-волны, частота которой меньше  $|\omega_{Be}|$ , а коэффициент ее циклотронного затухания экспоненциально мал

$$\kappa = \sqrt{\frac{\pi}{32}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 \beta_0 \mathcal{N}^2} \exp(-z^2) \quad \left( z = \frac{\omega - |\omega_{Be}|}{\sqrt{2} \beta_0 \omega \mathcal{N}} \right), \quad (5.3.2.16)$$

где  $\mathcal{N}$  — показатель преломления МН-волны

$$\mathcal{N}^2 = \frac{2\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2 - \omega^2} \gg 1.$$

В промежуточном случае, когда  $\sigma \sim \frac{\omega_{pe}^2}{kv_e |\omega_{Be}|} \sim 1$  и  $|z| \sim \left| \frac{\omega - |\omega_{Be}|}{\omega_{Be}} \right| \sim 1$ , электромагнитные волны сильно затухают:

$$\text{Im } \mathcal{N} \sim \text{Re } \mathcal{N} \sim \frac{\omega_{pe}^2}{\beta_s \omega_{Be}^2} \sim 1. \quad (5.3.2.17)$$

**5.3.3. Электронный циклотронный резонанс на кратных гармониках и электронное черенковское затухание высокочастотных волн.** Если частоты волн близки к  $\omega = n|\omega_{Be}|$ ,  $n=2, 3, \dots$ , то становится существенным бесстолкновительное циклотронное затухание, обусловленное поглощением энергии этих волн резонансными электронами при нормальном эффекте Доплера.

Быстрая магнитозвуковая и медленная необыкновенная волны могут иметь фазовую скорость, значительно меньшую скорости света; поэтому они способны эффективно взаимодействовать с быстрыми электронами при черенковском резонансе и при циклотронном резонансе в условиях аномального эффекта Доплера. Следовательно, в данном случае может оказаться существенным черенковское поглощение этих волн и их циклотронное поглощение при аномальном эффекте Доплера.

Мы выведем здесь выражения для коэффициентов черенковского и циклотронного затухания высокочастотных волн (О-, МН-, БН- и БМЗ-ветвей) для случая, когда выполняются условия применимости гидродинамического приближения, т. е. при  $x_0 = k_x^2 \rho_e^2 \ll 1$  и  $|z_n^e| \gg 1$ ,  $n=0, \pm 1$ . Тогда компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_1 + \sum_{n \neq 0} 2i\sigma_n, \quad \epsilon_{12} = i\epsilon_2 - \sum_{n \neq 0} 2\sigma_n, \\ \epsilon_{33} = \epsilon_3 + 2i\sigma_0, \quad \epsilon_{13} = \epsilon_{23} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega k_{1v_e}} \frac{n^2 x_e^{|n|-1}}{2^{|n|} |n|!} \exp(-z_n^2), \\ \sigma_0 &= \sqrt{\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} z_0^3 \exp(-z_0^2), \\ z_n &\equiv z_n^e = \frac{\omega - n|\omega_{Be}|}{\sqrt{2}\beta_s \mathcal{N} \omega \cos \theta}, \quad x_e = \left( \frac{kv_e \sin \theta}{\omega_{Be}} \right)^2; \end{aligned} \right\} \quad (5.3.3.2)$$

здесь индекс суммирования и индексы у  $z_n$  и  $\sigma_n$  принимают значения  $0, \pm 1, \pm 2, \dots$ .

Величины  $\epsilon_1, \epsilon_2$  и  $\epsilon_3$  определяются гидродинамическими выражениями (5.1.1.6), в которых следует оставить только электронные члены.

Учитывая, что величины  $\sigma_n$  в (5.3.3.1) малы по сравнению с  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ , найдем из дисперсионного уравнения, что в нулевом приближении ( $\sigma_n \rightarrow 0$ ) показатели преломления определяются выражениями (5.1.4.4), справедливыми для холодной плазмы. В следующем приближении, учитывая члены порядка  $\sigma_n$ , находим для коэффициента затухания  $\kappa = \text{Im } \mathcal{N}$  соотношение

$$\kappa = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \kappa_n, \quad (5.3.3.3)$$

$$\kappa_n = \sigma_n \frac{\sin^2 \theta \mathcal{N}^4 - \epsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}^2 + 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)(\epsilon_3 - \mathcal{N}^2 \sin^2 \theta)}{2C + B\mathcal{N}^2}, \quad (5.3.3.4)$$

$$\kappa_0 = \sigma_0 \frac{\cos^2 \theta \mathcal{N}^4 - \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{2C + B\mathcal{N}^2}, \quad (5.3.3.5)$$

$$B = -\epsilon_1 \epsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta, \quad C = \epsilon_3 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2),$$

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{pe}^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_{pe}^2 |\omega_{Be}|}{\omega (\omega^2 - \omega_{Be}^2)}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}.$$

Если  $\omega \approx n |\omega_{Be}|$  ( $n \geq 2$ ) и  $\mathcal{N} \sim 1$ , то  $\kappa_n \sim \alpha_n \beta_e^{2n-3} \exp(-z_n^2)$ , причем коэффициенты  $\alpha_n$  очень быстро (как  $1/n!$ ) убывают с ростом  $n$ . Форма линии поглощения определяется в этом случае функцией  $\exp(-z_n^2)$ .

Если  $\omega \approx 2 |\omega_{Be}|$  и  $\mathcal{N} \sim 1$ , то  $\kappa_2 \sim \beta_e$ , т. е. коэффициент затухания в этом случае порядка коэффициента затухания в плотной плазме МН- и О-волн с частотой  $\omega = |\omega_{Be}|$  (см. (5.3.2.9)).

Несмотря на быстрое убывание коэффициента затухания (5.3.3.4) с ростом  $n$ , в высокотемпературной плазме циклотронное затухание может значительно превосходить затухание за счет кулоновских столкновений  $\kappa_C \sim \nu/\omega$ . Например, при  $n_0 \sim 10^{13} \text{ см}^{-3}$ ,  $T_e \sim 10^7 \text{ }^\circ\text{K}$  и  $\omega \sim 10^{11} \text{ сек}^{-1}$  получим  $\beta_e^2 \approx 2 \cdot 10^{-3}$ ,  $\kappa_C \sim 2 \cdot 10^{-7}$ ,  $\kappa_1 \sim \kappa_2 \sim \beta_e \sim 0,05$ ,  $\kappa_3 \sim 3 \cdot 10^{-5}$ ,  $\kappa_4 \sim 4 \cdot 10^{-8}$ ; иными словами, для первых трех гармоник циклотронное затухание значительно больше столкновительного, а затухание на четвертой гармонике сравнимо с ним.

Коэффициенты затухания  $\kappa_n$ , обусловленные электронным циклотронным резонансом при аномальном эффекте Доплера ( $n = -1, -2, -3, \dots$ ), и коэффициент черенковского поглощения (5.3.3.5) экспоненциально малы, так как  $|z_n| \gg 1$  ( $n = 0, -1, -2, \dots$ ).

**5.3.4. Затухание волн вблизи плазменных резонансов.** При приближении частоты волны к частоте плазменного резонанса  $\omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$ ,  $j=1, 2$ , показатели преломления БМЗ- и МН-волн и их коэффициенты затухания быстро возрастают:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \sigma_n \frac{\sin^2 \theta \mathcal{N}^2}{B'} & (n \neq 0), \\ x_0 &= \sigma_0 \frac{\cos^2 \theta \mathcal{N}^2}{B'} & (n = 0), \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4.1)$$

где  $\mathcal{N}^2 = -B'/A_0$ , а коэффициенты  $B' = B(\omega) \Big|_{\omega=\omega_{\infty}^{(j)}}$  и  $A_0$  определяются формулами (5.2.3.4). Приведенными выражениями можно пользоваться только при  $\mathcal{N}^4 \ll 1/\beta_e^2$ . Если это неравенство не выполняется, то показатели преломления электромагнитных волн в окрестности частот  $\omega_{\infty}^{(j)}$  определяются формулой (5.2.3.9).

Коэффициенты затухания волн с такими показателями преломления нетрудно получить, принимая во внимание, что  $\mathcal{N}^2 \gg 1$ , и поэтому антиэрмитовы члены в дисперсионном уравнении (5.2.2.5) нужно учитывать только в коэффициенте  $A$ . Сохраняя в выражении для  $A$ , определяемом формулой (5.2.2.7), члены порядка  $x_0$  и  $1/z_n^2$  ( $n=0, \pm 1, \pm 2$ ), получим

$$A = A_0 - \beta_e^2 \mathcal{N}^2 A_1 + 2i\epsilon_0 \cos^2 \theta + \sum_{n \neq 0} 2i\epsilon_n \sin^2 \theta, \quad (5.3.4.2)$$

где  $A_1$  задается (5.2.3.3). Коэффициенты  $B$  и  $C$  в (5.2.2.5) должны заменяться их гидродинамическими выражениями  $B'$  и  $C'$ . Тогда для коэффициентов затухания получим [29, 33]

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \sigma_n \frac{\sin^2 \theta}{2\beta_e^2 A_1 \mathcal{N}^2 - A_0} & (n \neq 0), \\ x_0 &= \sigma_0 \frac{\cos^2 \theta}{2\beta_e^2 A_1 \mathcal{N}^2 - A_0}. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4.3)$$

При удалении от резонансной точки  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}(\theta)$  в сторону уменьшения  $\mathcal{N}^2$  (т. е. при переходе к гидродинамическим участкам БМЗ- и МН-ветвей) в области  $\beta_e^2 \mathcal{N}^2 \ll |A_0|$  в знаменателях этих выражений можно пренебречь членом с  $\beta_e^2$ , и тогда они принимают прежний вид (5.3.4.1).

В области  $|A_0| \leq \beta_e^2$  имеем  $\mathcal{N}^2 \sim 1/\beta_e$ , и если  $|z_n| \leq 1$  ( $n=3, 4, \dots$ ), то для коэффициентов циклотронного затухания (см. (5.3.4.3)) находим

$$x_n \sim \beta_e^{n-3/2} \quad (n = 3, 4, \dots). \quad (5.3.4.4)$$

Сравнивая это выражение с коэффициентом затухания волн в нерезонансной области, где  $v_{ph} \sim c$  и  $x_n \sim \beta_e^{2n-3}$ , получим, что при

$\omega = \omega_{\infty}^{(1)}(\theta) = n |\omega_{Be}|$  затухание увеличивается в  $1/\beta_e^{n-1/2}$  раз ( $n \geq 3$ ). В частности, при  $\omega = \omega_{\infty}^{(1)} = 3 |\omega_{Be}|$  коэффициент затухания МН-волны в  $1/\sqrt{\beta_e}$  раз больше коэффициента затухания волн с  $v_{ph} \sim c$  при  $\omega = |\omega_{Be}|$  и  $\omega = 2 |\omega_{Be}|$ .

Для плазменной волны  $\mathcal{N}^2 \approx A_0/\beta_e^2 A_1$  и выражения (5.3.4.3) принимают вид [18, 29, 33]

$$\left. \begin{aligned} \kappa_n &= \gamma_n \sin^2 \theta / A_0 \quad (n \neq 0), \\ \kappa_0 &= \gamma_0 \cos^2 \theta / A_0. \end{aligned} \right\} \quad (5.3.4.4')$$

Коэффициенты затухания МН-волны (в области, где она переходит в электростатические плазменные колебания, см. рис. 5.2.2), определяемые формулами (5.3.4.4'), значительно больше коэффициентов затухания этой волны при  $\omega = \omega_{\infty}^{(j)}$ . При дальнейшем удалении от резонансной точки коэффициент черенковского затухания становится порядка показателя преломления; в самом деле, при  $|\omega - \omega_{\infty}^{(j)}| \sim \omega$  имеем  $A_0 \sim 1$ ,  $\mathcal{N} \sim c/v_0$ ,  $z_0 \sim 1$  и  $\kappa_0 \sim c/v_0$ , т. е. плазменная волна затухает на расстоянии порядка  $a_0 = v_0/\omega_{pe}$ .

Формулы (5.3.4.3) для  $\kappa_n$  и выражение (5.2.3.7) для  $\mathcal{N}$  получены при условии  $|z_2| = \left| \frac{\omega - 2 |\omega_{Be}|}{\sqrt{2} \beta_e \mathcal{N} \omega \cos \theta} \right| \gg 1$  и тогда коэффициент затухания  $\kappa_2$  экспоненциально мал  $\kappa_2 \sim \exp(-z_2^2)$ . При приближении частоты волны к  $2 |\omega_{Be}|$  циклотронное затухание становится очень сильным, если при этом частота  $\omega$  близка к частоте плазменного резонанса  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$ . Последний случай требует особого исследования. Поэтому рассмотрим такой двойной резонанс ( $\omega \approx \approx \omega_{\infty}^{(1)}(\theta) \approx 2 |\omega_{Be}|$ ) подробнее.

Предполагая по-прежнему, что  $x_0 \ll 1$  и  $z_n^2 \gg 1$  ( $n \neq 2$ ), найдем, что коэффициент  $A$  в дисперсионном уравнении равен

$$A = A_0 + i \sqrt{2\pi} \beta_e \mathcal{N} \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} w(z),$$

где

$$z = \frac{\omega - 2 |\omega_{Be}|}{\sqrt{2} \beta_e \mathcal{N} \omega \cos \theta}.$$

Учитывая это выражение для  $A$  и пренебрегая в дисперсионном уравнении (5.2.2.5) малым членом  $C \approx C'$ , найдем, что в области двойного резонанса оно имеет вид [29]

$$\left[ A_0 + i \sqrt{2\pi} \beta_e \mathcal{N} \frac{\sin^4 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} w(z) \right] \mathcal{N}^2 + B' = 0. \quad (5.3.4.5)$$

Отсюда находим, что при  $\omega = \omega_{\infty}^{(1)} = 2 |\omega_{Be}|$ , точнее, при  $|z| \ll 1$  и  $|A_0| \ll \beta_e \mathcal{N}$  показатель преломления определяется выражением

$$\mathcal{N} = \frac{i \pm \sqrt{3}}{2} \left( \frac{B'}{\beta_e} \frac{\cos \theta}{\sqrt{2\pi} \sin^4 \theta} \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \right)^{1/2}. \quad (5.3.4.6)$$

Если  $|A_0| \ll \beta_e \mathcal{N}$  и  $|z| \ll 1$ , то по порядку величины  $\text{Re } \mathcal{N}$  и  $\text{Im } \mathcal{N}$  также определяются выражением (5.3.4.6), т. е.

$$\text{Re } \mathcal{N} \sim \text{Im } \mathcal{N} \sim 1/\sqrt[3]{\beta_e}.$$

Таким образом, если частота волны близка к  $2 |\omega_{Be}|$  и к частоте плазменного резонанса  $\omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$ , то волна из-за сильного затухания распространяться не может и проникает в плазму только на глубину

$$\delta_a = (c^2 \nu_e)^{1/3} / \omega_{pe}. \quad (5.3.4.7)$$

Подведем краткие итоги исследования затухания высокочастотных (электронных) электромагнитных волн в бесстолкновительной магнитоактивной плазме. Это затухание обусловлено взаимодействием волн с резонансными электронами. Как в разреженной, так и в плотной плазме затухание электромагнитных волн в условиях электронных циклотронных резонансов  $\omega = n \omega_{Be}$  ( $n=2, 3, \dots$ ) очень мало. Исключениями являются лишь случаи циклотронного резонанса на основной частоте  $\omega = |\omega_{Be}|$  в плотной плазме при продольном (или почти продольном,  $\theta$  очень мало) распространении и в плазме с промежуточным значением плотности, когда  $\omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2 \sim \beta_e$ , а также случай двойного резонанса  $\omega = 2 |\omega_{Be}| = \omega_{\infty}^{(1)}(\theta)$ .

Черенковское затухание рассматриваемых волн экспоненциально мало, за исключением области коротких волн  $ka_e \geq 1$  для плазменных (электростатических) ветвей колебаний.

## § 5.4. Поглощение альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн

### 5.4.1. Черенковское поглощение альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн в плазме низкого давления.

Фазовые скорости низкочастотных А- и БМЗ-волн в достаточно плотной плазме значительно меньше скорости света, и поэтому сами волны могут эффективно взаимодействовать с электронами плазмы в условиях черенковского резонанса.

В п. 5.1.5 были получены выражения для показателей преломления и частот А- и БМЗ-волн (см. (5.1.5.1) и (5.1.5.3)) в случае холодной плазмы, для которой фазовые скорости этих волн значительно больше тепловой скорости электронов. В области частот

$\omega \leq \omega_{B1}$  фазовые скорости обеих волн порядка  $v_A$  и условие  $v_A \gg v_e$  выполняется, если

$$\xi_e \equiv 8\pi n_0 T_e / B_0^2 \ll m_e / m_1. \quad (5.4.1.1)$$

В действительности слабозатухающие А- и БМЗ-волны с показателем преломления (5.1.5.1) и частотой (5.1.5.3) существуют в плазме при значительно более слабых ограничениях, чем (5.4.1.1), а именно, при выполнении условий  $v_A \gg v_i$  и  $v_A \gg v_s$  ( $v_s = \sqrt{T_e / m_1}$ ), т. е. при

$$\xi = 8\pi n_0 (T_e + T_i) / B_0^2 \ll 1. \quad (5.4.1.2)$$

Для плазмы с газокинетическим давлением, значительно меньшим магнитного  $B_0^2 / 8\pi$ , фазовая скорость низкочастотных волн может быть порядка тепловой скорости электронов и даже значительно меньше нее. В этом случае число резонансных электронов велико, но тем не менее затухание обеих волн остается слабым.

Найдем частоты и коэффициенты затухания А- и БМЗ-волн в плазме малого давления. Будем считать, что длина волны в направлении, перпендикулярном магнитному полю, значительно больше ларморовского радиуса ионов (и электронов) с тепловой скоростью, т. е.  $k_x \rho_\alpha \ll 1$ , и фазовая скорость волны значительно больше тепловой скорости ионов и скорости звука. В этом случае имеем

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} = \varepsilon_1 &= -\frac{\omega_{p1}^2}{\omega^2 - \omega_{B1}^2}, \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_1 + \varepsilon'_{22}, \quad \varepsilon'_{22} &= i\sqrt{\pi} \frac{m_e}{m_1} \left( \frac{\omega_{p1}}{\omega_{B1}} \operatorname{tg} \theta \right)^2 \frac{w(z)}{z}, \\ \varepsilon_{12} = i\varepsilon_2 &= -\frac{i\omega_{p1}^2 \omega}{\omega_{B1} (\omega^2 - \omega_{B1}^2)}, \\ \varepsilon_{33} &= \frac{\omega_{p1}^2}{k^2 v_s^2 \cos^2 \theta} [1 + i\sqrt{\pi} z w(z)], \\ \varepsilon_{23} &= -i \frac{\omega_{p1}^2}{\omega \omega_{B1}} \operatorname{ctg} \theta [1 + i\sqrt{\pi} z w(z)], \end{aligned} \right\} \quad (5.4.1.3)$$

где

$$z = z_0^c = \frac{\omega}{\sqrt{2} k v_0 \cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{2} \beta_0 e^{\mathcal{N}} \cos \theta}.$$

Отметим, что величины  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  совпадают с соответствующими выражениями в гидродинамическом приближении. Подставляя

найденные соотношения в дисперсионное уравнение (5.2.2.5), представим его в виде

$$\begin{aligned} \epsilon_{33} [\cos^2 \theta \mathcal{N}^4 - \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2] + \epsilon_1 \sin^2 \theta \mathcal{N}^4 + \\ + [2\epsilon_{12}\epsilon_{23} \cos \theta \sin \theta - (\epsilon'_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{23}^2) \cos^2 \theta - \\ - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta] \mathcal{N}^2 + \epsilon'_{22}\epsilon_{33}\epsilon_1 + \epsilon_1\epsilon_{23}^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.4.1.4)$$

Сохраняя в этом уравнении в нулевом приближении (т. е. при  $\epsilon_{33} \rightarrow \infty$ ) наибольшие слагаемые порядка  $\epsilon_{33}\epsilon_1^2$  и  $\epsilon_{33}\epsilon_2^2$ , получим

$$\cos^2 \theta \mathcal{N}^4 - \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}^2 + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 = 0.$$

Отсюда для  $\mathcal{N}^2$  и  $\omega(k, \theta)$  следуют выражения (5.1.5.1) и (5.1.5.3), полученные выше при более жестком, чем (5.4.1.2), ограничении (5.4.1.4).

В следующем приближении, сохраняя в дисперсионном уравнении (5.4.1.4) члены порядка  $\epsilon_1 \mathcal{N}^4$  и  $\epsilon_1^2, \epsilon_2^2 \mathcal{N}^2$ , получим для коэффициента электронного черенковского затухания  $\chi = \text{Im } \mathcal{N} = \chi_e$  [33] выражение

$$\begin{aligned} \chi_e = \frac{1}{2} \text{Im} \frac{1}{\epsilon_{33}} [\epsilon_1 \mathcal{N}^4 \sin^2 \theta + \epsilon_{33} \epsilon'_{22} (\epsilon_1 - \mathcal{N}^2 \cos^2 \theta) + \\ + (2\epsilon_{12}\epsilon_{23} \cos \theta \sin \theta - \epsilon_{23}^2 \cos^2 \theta - (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2) \sin^2 \theta) \mathcal{N}^2] \times \\ \times [(1 + \cos^2 \theta) \epsilon_1 \mathcal{N} - 2\mathcal{N}^3 \cos^2 \theta]^{-1}, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \chi_e = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{m_e}{m_i} \frac{\exp(-z^2)}{z} \left[ \frac{\omega_{Bi}^2}{\omega_{Bi}^2} \text{tg}^2 \theta (\epsilon_1 - \mathcal{N}^2 \cos^2 \theta) + \right. \\ \left. + \frac{\omega^2 \sin^2 \theta \mathcal{N}^2 (\epsilon_1^2 - \epsilon_2^2 - \epsilon_1 \mathcal{N}^2)}{\omega_{Bi}^2 |1 + i\sqrt{\pi} z \omega(z)|^2} \right] [\epsilon_1 \mathcal{N} (1 + \cos^2 \theta) - \\ - 2\mathcal{N}^3 \cos^2 \theta]^{-1}. \end{aligned} \quad (5.4.1.5)$$

Исследуем его применительно к коэффициентам затухания А-и БМЗ-волн в некоторых частных случаях.

а) В области высоких частот  $\omega_{Bi} \ll \omega \ll |\omega_{Be}|$  (напомним, что в этой области БМЗ-волны называются свистящими атмосфериками) из (5.4.1.5) получим

$$\chi_e = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{|\omega_{Be}|} \varphi(z) \mathcal{N}, \quad (5.4.1.6)$$

где  $\mathcal{N} = \omega_{pe} / \sqrt{\omega |\omega_{Be}| \cos \theta}$  — показатель преломления свистящего атмосферика и

$$\varphi(z) = \frac{1}{2z} \left( 1 + \frac{1}{|1 + i\sqrt{\pi} z \omega(z)|^2} \right) \exp(-z^2). \quad (5.4.1.7)$$

Эта функция быстро убывает с ростом  $z$  (рис. 5.4.1).

В области малых фазовых скоростей ( $z \ll 1$ )  $\varphi(z) \approx 1/z$  и коэффициент затухания свиста равен

$$\kappa_0 = \sqrt{1/g\pi} \sin^2 \theta k \rho_0 \mathcal{N}, \quad (5.4.1.8)$$

где  $\rho_0 = v_0 / |\omega_{Be}|$  — ларморовский радиус электронов.

В области больших фазовых скоростей ( $z \gg 1$ ) черенковское затухание свистов экспоненциально мало [35, 36]:

$$\kappa_0 = 1/2 \sqrt{\pi} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{\omega}{|\omega_{Be}|} z^3 \exp(-z^2) \mathcal{N}. \quad (5.4.1.9)$$

б) В области частот  $\omega \leq \omega_{Bi}$  фазовая скорость обеих волн равна по порядку величины  $v_A$  (за исключением области циклотронного резонанса для А-ветви) и при  $1 \gg \xi_0 \geq m_e/m_i$ , т. е. при  $v_A \leq v_0$  имеем

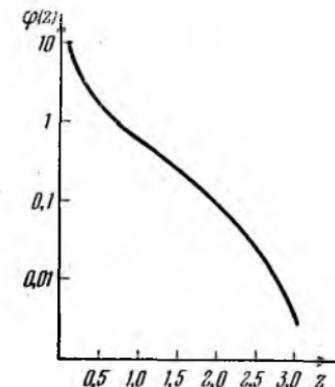


Рис. 5.4.1. График функции  $\varphi(z)$ .

$$\frac{\kappa_0}{\mathcal{N}} \sim \frac{m_e}{m_i} \frac{v_0}{v_A} = \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \frac{v_s}{v_A}} \ll 1. \quad (5.4.1.10)$$

в) Для альвеновской ветви в области ионного циклотронного резонанса показатель преломления резко возрастает

$$\mathcal{N}^2 \approx \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega} \quad (\omega \approx \omega_{Bi});$$

возрастает также и черенковское затухание

$$\kappa_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{8} \frac{m_e}{m_i} \operatorname{tg}^2 \theta \frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega} \varphi_1(z) \mathcal{N}, \quad (5.4.1.11)$$

где

$$\varphi_1(z) = \frac{1}{z |1 + i \sqrt{\pi} z \omega(z)|^2} \exp(-z^2). \quad (5.4.1.12)$$

Заметим, что при  $|z| \ll 1$  и  $z \gg 1$  можно пользоваться соответственно выражениями

$$\varphi_1(z) \approx 1/z, \quad \varphi_1(z) \approx 4z^3 \exp(-z^2).$$

Сравнение выражений (5.4.1.10) и (5.4.1.11) показывает, что при приближении частоты волны к  $\omega_{Bi}$  декремент затухания А-волны возрастает в  $\left(\frac{\omega}{\omega_{Bi} - \omega}\right)^{3/2}$  раз по сравнению с нерезонансными условиями.

г) Для магнитогидродинамических волн ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ) выражение (5.4.1.5) сильно упрощается. Для альвеновской магнитогидродинамической волны с частотой  $\omega = kv_A \cos \theta$ , имеем

$$\frac{x_e}{N} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_e}{v_A} \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2} \left[ \operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{\operatorname{tg}^2 \theta}{|1 + i \sqrt{\pi} zw(z)|^2} \right] \exp(-z^2). \quad (5.4.1.13)$$

Для быстрой магнитозвуковой волны ( $\omega = kv_A$ ) коэффициент затухания определяется соотношением \*)

$$\frac{x_e}{N} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_e}{v_A} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \exp(-z^2). \quad (5.4.1.14)$$

Отсюда следует, что альвеновская магнитогидродинамическая волна затухает значительно слабее (в  $\omega_{Bi}^2/\omega^2$  раз), чем быстрая магнитозвуковая волна.

Отметим, что альвеновская магнитогидродинамическая волна слабо затухает даже в плазме большого давления ( $\xi \sim 1$ ), когда ее фазовая скорость порядка тепловой скорости ионов; в этом случае распространение БМЗ-волны, а также А- и БМЗ-волн с частотами порядка  $\omega_{Bi}$ , становится вообще невозможным из-за сильного ионного черенковского затухания (см. [37]).

Формулы (5.4.1.13) и (5.4.1.14) неприменимы в области малых углов  $\theta^2 \ll \omega/\omega_{Bi}$ . В этом случае затухание обеих магнитогидродинамических волн одинаково по порядку величины

$$x_e/N \sim (m_e/m_i) (v_e/v_A) \theta^2$$

и стремится к нулю при  $\theta \rightarrow 0$ . Точные выражения для  $x_e$  определяются соотношениями [37]

$$\frac{x_e}{N} = \frac{\sqrt{\pi}}{4\sqrt{2}} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_e}{v_A} \theta^2 \left( 1 \pm \frac{\theta^2}{\sqrt{\theta^4 + 4\omega^2/\omega_{Bi}^2}} \right) \exp(-z^2). \quad (5.4.1.15)$$

При  $\theta^2 \gg 2\omega/\omega_{Bi}$  они переходят в выражения (5.4.1.13) и (5.4.1.14), если в последних устремить  $\theta$  к нулю.

**5.4.2. Ионный циклотронный резонанс.** Если частота БМЗ-волны близка к ионной циклотронной частоте или частоте, кратной ей ( $\omega \approx n\omega_{Bi}$ ,  $n=1, 2, \dots$ ), то возникает циклотронное поглощение этой волны \*\*).

\*) Формула (5.4.1.14) была получена в [37]; это выражение при  $z \ll 1$  было получено также в [38, 39], а при  $z \gg 1$  — в работе [39].

\*\*) Ионное циклотронное затухание было впервые рассмотрено в работе [40] для магнитогидродинамических волн ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ) при  $\theta=0$ , когда декремент затухания экспоненциально мал, и в работе [43] в области сильного затухания для А-ветви.

Частота А-волн меньше  $\omega_{\text{с}}^{(3)}(\theta) \approx \omega_{B1}$ , и поэтому их циклотронное поглощение становится существенным на краю полосы прозрачности при  $\omega \approx \omega_{B1}$ .

Будем по-прежнему считать давление плазмы малым, т. е.  $\xi \ll 1$ . Тогда при  $kp_i \ll 1$  и  $|z_n^i| = \left| \frac{\omega - n\omega_{B1}}{\sqrt{2} \beta_1 \omega \cos \theta} \right| \gg 1$  ( $n = 0, \pm 1$ ) тензор  $\epsilon_{ij}$  определяется выражениями (5.4.1.3), в которых к  $\epsilon_{11}$  и  $\epsilon_{22}$  надо добавить при  $\omega \approx n\omega_{B1}$  малое слагаемое  $2i\sigma_n$ , а к  $\epsilon_{12}$  — слагаемое  $-2\sigma_n$ , где

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{n^2}{2^{2n} n!} \frac{\omega_{p1}^2}{\omega kv_i \cos \theta} x_1^{n-1} \exp(-z_n^2), \quad (5.4.2.1)$$

$$z_n \equiv z_n^i = \frac{\omega - n\omega_{B1}}{\sqrt{2} kv_i \cos \theta}, \quad x_1 = \left( \frac{kv_i \sin \theta}{\omega_{B1}} \right)^2.$$

Используя эти соотношения для тензора  $\epsilon_{ij}$ , нетрудно получить следующее выражение для коэффициента затухания БМЗ-волны в условиях кратного ионного циклотронного резонанса [33]:

$$\chi_n = \sigma_n \frac{(1 + \cos^2 \theta) \mathcal{A}^{\prime 2} - 2(\epsilon_1 - \epsilon_2)}{2 \cos^2 \theta \mathcal{A}^{\prime 3} - \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{A}^{\prime}}. \quad (5.4.2.2)$$

Контур линии поглощения БМЗ-волны в области ионного циклотронного резонанса  $\omega \approx n\omega_{B1}$  определяется функцией  $\exp(-z_n^2)$ , ширина линии поглощения равна  $\Delta\omega/\omega \sim v_i/v_A \ll 1$ . При  $|z_n| \ll 1$  имеем

$$\chi_n/\mathcal{A}^{\prime} \sim (v_i/v_A)^{2n-3} \sim \xi_i^{n-3/2}, \quad (5.4.2.3)$$

где  $\xi_i = 8\pi n T_i/B_0^2$ .

В частности, при  $\omega = 2\omega_{B1}$  имеем  $\chi_n/\mathcal{A}^{\prime} \sim v_i/v_A \sim \xi_i^{1/2}$ .

Затухание, определяемое (5.4.2.2), быстро убывает с ростом номера гармоники  $n$  и становится меньше электронного черенковского затухания, если  $v_A \sim v_e$ , уже для сравнительно небольших значений  $n$ , так что практически циклотронное затухание БМЗ-волн существенно только для первых гармоник.

Перейдем теперь к изучению ионного циклотронного резонанса на основной частоте  $\omega \approx \omega_{B1}$ . В этом случае компонента  $\epsilon_{33}$  по-прежнему определяется (5.4.1.3), а остальные компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  равны

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \epsilon_{22} = 2i\sigma_1 - 1/4 (\omega_{p1}/\omega_{B1})^2, \\ \epsilon_{12} &= -2\sigma_1 - i^3/4 (\omega_{p1}/\omega_{B1})^2, \\ \epsilon_{23} &= -i (\omega_{p1}/\omega_{B1})^2 \left[ 3/2 + i\sqrt{\pi} zw(z) + 1/2 i\sqrt{\pi} z_1 w(z_1) \right] \operatorname{tg} \theta, \\ \epsilon_{13} &= -1/2 (\omega_{p1}/\omega_{B1})^2 \left[ 1 + i\sqrt{\pi} z_1 w(z_1) \right] \operatorname{tg} \theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.4.2.4)$$

где  $z_1 = \frac{\omega - \omega_{B1}}{\sqrt{2} kv_1 \cos \theta}$ ,  $z = \frac{\omega}{\sqrt{2} kv_e \cos \theta}$  и величина  $\sigma_1$  определяется выражением (5.4.2.1) при  $n = 1$ , умноженным на  $w(z_1)$ .

Учитывая, что  $|\varepsilon_{33}| \gg |\varepsilon_{11}| = |\varepsilon_{12}| \approx 2|\sigma_1| \gg |\varepsilon_{23}| \gg |\varepsilon_{13}|$ , можно сохранить в дисперсионном уравнении (5.2.2.5) только наибольшие члены, пропорциональные  $\varepsilon_{33}$ , и представить его в виде

$$\cos^2 \theta \mathcal{N}^4 - \varepsilon_{11} (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}^2 + \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 = 0. \quad (5.4.2.5)$$

Для БМЗ-волны  $\mathcal{N}^2 \sim c^2/v_A^2 \ll |\varepsilon_{11}|$ ; учитывая это, в нулевом приближении ( $|\varepsilon_{11}| \rightarrow \infty$ ) можно отбросить в (5.4.2.5) слагаемое  $\cos^2 \theta \mathcal{N}^4$ . В результате мы получим для  $\mathcal{N}^2$  гидродинамическое выражение (5.1.5.8)

$$\mathcal{N}^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta}.$$

В следующем приближении, сохраняя в дисперсионном уравнении члены порядка  $(c/v_A)^4$ , найдем коэффициент циклотронного затухания БМЗ-волны при  $\omega \approx \omega_{B1}$  [33]:

$$\frac{z_1}{\mathcal{N}} = \frac{\cos \theta \sin^4 \theta}{\sqrt{2\pi} (1 + \cos^2 \theta)^{5/2}} \frac{v_i}{v_A} f(z_1), \quad (5.4.2.6)$$

где функция  $f(z_1)$  определяется формулой (5.3.2.10), т. е.

$$f(z_1) = \frac{\exp(-z_1^2)}{|w(z_1)|^2}.$$

График функции  $f(z)$  был приведен выше (см. рис. 5.3.1).

При  $\theta$ , не близком к 0 или  $1/2\pi$ ,  $x/\mathcal{N} \sim v_i/v_A \sim \sqrt{\varepsilon_1} \ll 1$ . Сравнивая эту оценку с (5.4.2.3), находим, что по порядку величины затухание БМЗ-волны при  $\omega \approx \omega_{B1}$  и  $\omega \approx 2\omega_{B1}$  одинаково.

Найдем теперь затухание А-ветви в области  $\omega \approx \omega_{B1}$  (напомним, что в этой области такая волна называется ионно-циклотронной).

Показатель преломления альвеновской волны при  $\omega \approx \omega_{B1}$  велик, а именно  $\mathcal{N}^2 \sim \varepsilon_{11} \sim \sigma_1$ . Учитывая это, можно упростить дисперсионное уравнение (5.4.2.5), отбросив в нем сумму двух последних слагаемых  $\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2$ , малую по сравнению с  $\cos^2 \theta \mathcal{N}^4 \sim \varepsilon_{11}^2$  и  $\varepsilon_{11} \mathcal{N}^2 \sim \varepsilon_{11}^2$ ; тогда имеем

$$\cos^2 \theta \mathcal{N}^2 - 2i\sigma_1 (1 + \cos^2 \theta) = 0. \quad (5.4.2.7)$$

Отсюда находим, что при  $|z_1| \gg 1$  показатель преломления А-волны определяется гидродинамическим выражением (5.1.5.6)

$$\mathcal{N}^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1 + \cos^2 \theta}{2 \cos^2 \theta} \frac{\omega}{\omega_{B1} - \omega},$$

а коэффициент циклотронного затухания экспоненциально мал [41, 43]

$$\alpha/\mathcal{N} = 1/2\pi^{1/2} |z_1| \exp(-z_1^2), \quad (5.4.2.8)$$

где

$$z_1 = \left( \frac{\omega_{B1}}{\omega} - 1 \right)^{1/2} \frac{v_A}{v_i} \frac{1}{(1 + \cos^2 \theta)^{1/2}} \gg 1.$$

При приближении  $\omega$  к  $\omega_{B1}$  величина  $|z_1|$  убывает и коэффициент затухания (5.4.2.8) возрастает. В области  $|z_1| \leq 1$  затухание ионно-циклотронной волны становится настолько сильным, что ее распространение оказывается невозможным:

$$\operatorname{Re} \mathcal{N} \sim \operatorname{Im} \mathcal{N} \sim \left( \frac{c^3 (1 + \cos^2 \theta)}{v_A^2 v_i \cos^3 \theta} \right)^{1/2}. \quad (5.4.2.9)$$

При  $|z_1| \ll 1$  можно получить точное выражение для  $\mathcal{N}$  [33, 44]; имеем

$$\mathcal{N} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} \left( \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{c^3 (1 + \cos^2 \theta)}{v_A^2 v_i \cos^3 \theta} \right)^{1/2}. \quad (5.4.2.10)$$

При  $|z_1| \leq 1$  электромагнитное поле проникает в плазму на глубину порядка

$$\delta_i = (v_A^2 v_i)^{1/2} / \omega_{B1}. \quad (5.4.2.11)$$

В сильных магнитных полях и при больших плотностях плазмы скин-глубина (5.4.2.11) очень мала. Например, при  $n_0 \sim 10^{15} \text{ см}^{-3}$ ,  $B_0 \sim 10^5 \text{ гс}$ ,  $T_i \sim 10^6 \text{ }^\circ\text{К}$  и  $m_i \sim 10^{-24} \text{ г}$  получаем  $v_A \sim 10^9 \text{ см/сек}$ ,  $v_i \sim 10^7 \text{ см/сек}$ ,  $\omega_{B1} \sim 10^9 \text{ 1/сек}$  и  $\delta_i \sim 0,2 \text{ см}$ .

Подведем итоги.

Слабозатухающие низкочастотные волны (БМЗ-ветвь при  $\omega \ll \omega_{Be}$  и А-ветвь) существуют не только в плазме очень малого давления ( $v_A \gg v_e$ ), когда электронное черенковское затухание экспоненциально мало, но и в плазме значительно большего давления ( $v_i, v_s \ll v_A \leq v_e$ ). Коэффициент черенковского затухания обеих волн на электронах определяется в этом случае выражением (5.4.1.5).

Ионное циклотронное затухание БМЗ-волны, определяемое (5.4.2.2) при кратном резонансе и (5.4.2.6) при  $\omega \approx \omega_B$ , всегда мало.

Ионное циклотронное затухание А-ветви при  $\omega = \omega_{B1}$  велико, и эта волна затухает на расстоянии порядка длины волны (см. (5.4.2.11)).

## § 5.5. Низкочастотные колебания горячей плазмы в магнитном поле

**5.5.1. Продольные колебания плазмы с горячими электронами и холодными ионами.** В двух предыдущих параграфах мы изучали влияние теплового движения электронов и ионов на затухание тех ветвей электромагнитных колебаний плазмы, которые существуют и в холодной плазме, а также исследовали влияние теплового движения электронов на поведение показателей преломления вблизи высокочастотных плазменных резонансов.

Здесь и в следующих параграфах настоящей главы мы рассмотрим новые ветви колебаний магнитоактивной плазмы, возникающие только благодаря конечной температуре электронов и ионов. Начнем с рассмотрения продольных колебаний плазмы с горячими электронами и холодными ионами  $T_e \gg T_i$ , находящейся в магнитном поле [45].

Как было показано в пп. 4.1.3 и 4.2.4, в такой плазме в отсутствие внешнего магнитного поля возможно распространение слабозатухающих ионно-звуковых колебаний; закон дисперсии для них имеет вид

$$\omega = \omega_s(k) = \frac{kv_s}{\sqrt{1 + k^2 a_s^2}}. \quad (5.5.1.1)$$

Ясно, что если эта частота значительно больше ионной циклотронной частоты  $\omega_{Bi}$ , а длина волны значительно меньше ларморовского радиуса ионов  $\rho_i = v_i^2 / \omega_{Bi}$ , то магнитное поле будет оказывать слабое влияние на такие колебания. Возникает поэтому вопрос, как изменятся ионно-звуковые колебания, если  $\omega_s(k) \ll \omega_{Bi}$  и  $kr_i \ll 1$ ?

Для решения этого вопроса обратимся к дисперсионному уравнению, описывающему продольные колебания плазмы в магнитном поле:

$$A = 1 + \delta\epsilon_e + \delta\epsilon_i = 0, \quad (5.5.1.2)$$

где

$$\delta\epsilon_\alpha = \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_\alpha^2} \left[ 1 + i\sqrt{\pi} z_0^\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(-x_n) I_n(x_n) w(z_n^\alpha) \right], \quad (5.5.1.3)$$

$$z_n^\alpha = \frac{\omega - n|\omega_{B\alpha}|}{\sqrt{2} kv_\alpha \cos \theta}.$$

Предположим, что длина волны значительно больше ларморовского радиуса ионов и электронов, фазовая скорость волны много больше тепловой скорости ионов, но существенно меньше тепловой скорости электронов, частота колебаний не очень близка к ионной

циклотронной частоте и значительно меньше электронной циклотронной частоты, т. е. справедливы неравенства

$$x_a = (k x_{0a})^2 \ll 1, \quad v_i \ll |\omega/k_{\parallel}| \ll v_e, \quad |\omega - \omega_{Bi}| \gg k_{\parallel} v_i, \quad \left. \begin{array}{l} \\ |\omega_{Be}| \gg |\omega|, \quad |\omega_{Be}| \gg k_{\parallel} v_e. \end{array} \right\} \quad (5.5.1.4)$$

Тогда величины  $\delta\varepsilon_e$  и  $\delta\varepsilon_i$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \delta\varepsilon_e &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_e] + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2}, \\ \delta\varepsilon_i &= -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} + \\ &+ i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pi}^2 \omega}{k^3 v_i^3 \cos \theta} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_i^n}{2^n n!} \exp(-z_n^2), \end{aligned} \right\} \quad (5.5.1.5)$$

$$z_e = \omega/\sqrt{2} k_{\parallel} v_e, \quad z_n = (\omega - n\omega_{Bi})/\sqrt{2} k_{\parallel} v_i. \quad (5.5.1.6)$$

В выражении для  $\delta\varepsilon_e$  мы учли только одно антиэрмитово слагаемое, ответственное за черенковское поглощение колебаний электронами, так как в соответствии с условием  $|\omega_{Be}| \gg k_{\parallel} v_e$  электронное циклотронное затухание рассматриваемых колебаний экспоненциально мало. В выражении для  $\delta\varepsilon_i$  не учтены экспоненциально малые члены, ответственные за циклотронное поглощение колебаний при аномальном эффекте Доплера.

Подставляя выражения (5.5.1.5) и (5.5.1.6) в дисперсионное уравнение (5.5.1.2), получим

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_s^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \sin^2 \theta + \\ + i\sqrt{\pi} z_e \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} + i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_i^n}{2^n n!} z_0 \exp(-z_n^2) = 0. \quad (5.5.1.7)$$

Учитывая, что, согласно (5.5.1.4),  $\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2 \ll \omega_{pi}^2/k^2 v_s^2$  и пренебрегая малыми анизотропными слагаемыми, получим из дисперсионного уравнения (5.5.1.7) следующие выражения для частот продольных колебаний сильно неизотермической плазмы с горячими электронами и холодными ионами:

$$\omega^2(k, \theta) = 1/2 (\omega_s^2 + \omega_{Bi}^2) \pm 1/2 \sqrt{(\omega_s^2 + \omega_{Bi}^2)^2 - 4\omega_s^2 \omega_{Bi}^2 \cos^2 \theta}, \quad (5.5.1.8)$$

где  $\omega_s(k)$  определяется (5.5.1.1).

Таким образом, в плазме, находящейся в магнитном поле, имеются две ветви продольных низкочастотных колебаний вместо одной ветви ионно-звуковых колебаний, существующих в отсутствие магнитного поля.

Из последнего соотношения следует, что при  $k \rightarrow 0$  меньшая из частот стремится к значению

$$\omega(k, \theta) = k v_s = k v_s \cos \theta, \quad (5.5.1.9)$$

а большая — к значению

$$\omega(k, \theta) = \omega_{Bi} \left( 1 + \frac{k^2 v_s^2 \sin^2 \theta}{2\omega_{Bi}^2} \right), \quad (5.5.1.10)$$

т. е. стремится к ионной циклотронной частоте.

При  $k \rightarrow \infty$  ( $ka_e \gg 1$ ) частоты, определяемые (5.5.1.8), стремятся к предельным значениям

$$\omega_{\pm}^2(\theta) = \frac{1}{2} (\omega_{pi}^2 + \omega_{Bi}^2) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\omega_{pi}^2 + \omega_{Bi}^2)^2 - 4\omega_{pi}^2 \omega_{Bi}^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.5.1.11)$$

Зависимость этих частот от величины волнового вектора показана на рис. 5.5.1.

Выражения (5.5.1.11) получены при условии  $k^2 \rho_i^2 \ll 1$ , и поэтому ими можно пользоваться при  $(T_i/T_e) (\omega_{pi}/\omega_{Bi})^2 \ll 1$ . Если  $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$ , то последнее условие может не выполняться, соотношения (5.5.1.11) становятся неприменимыми и выражения (5.5.1.8) пригодны только в области длинных волн  $ka_e \ll 1$ . Зависимость частот, определяемых (5.5.1.8), от величины волнового вектора в этом случае изображена на рис. 5.5.2. Большая частота при  $k v_s \gg \omega_{Bi}$  (но  $ka_e \ll 1$ ) совпадает с частотой звуковых колебаний в отсутствие магнитного поля, т. е.

$$\omega(k) = k v_s, \quad (5.5.1.12)$$

а меньшая определяется выражением

$$\omega(k, \theta) = \omega_{Bi} \cos \theta, \quad (5.5.1.13)$$

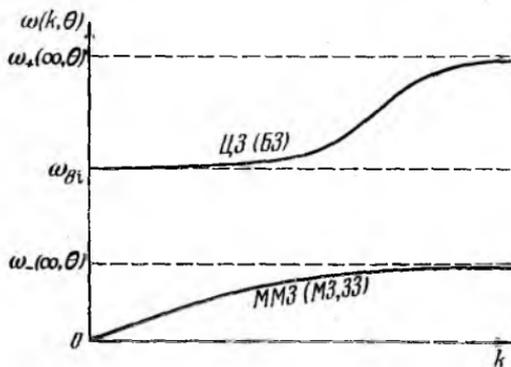


Рис. 5.5.1. Зависимость частот быстрых и медленных звуковых (циклотронно-звуковых и медленных магнитозвуковых) колебаний неизотермической плазмы ( $T_e \gg T_i$ ) от величины волнового вектора.

При  $k \rightarrow 0$  ( $k v_s \ll \omega_{Bi}$ ) большая из частот (5.5.1.8) стремится к  $\omega_{Bi}$ , а в плотной плазме ( $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$ ) в области  $ka_e \ll 1$  и  $k v_s \gg \omega_{Bi}$  частота этих колебаний совпадает с частотой звука в плазме в

отсутствие магнитного поля, поэтому данную ветвь можно назвать *циклотронно-звуковой* (ЦЗ).

Поскольку (5.5.1.9) отличается от (5.5.1.12) для частот ионно-звуковых колебаний в отсутствие магнитного поля тем, что множитель  $k$  заменен на  $k_{\parallel} = k \cos \theta$ , колебания с частотой (5.5.1.12) называют *замагниченным звуком* (ЗЗ-колебаниями), а колебания с меньшей из частот (5.5.1.8) — *замагниченными звуковыми* или *медленными магнитозвуковыми* (ММЗ) колебаниями: отметим, что (5.5.1.12) совпадает с выражением для частот медленных магнитозвуковых магнитогидродинамических волн в приближении магнитной гидродинамики, если считать колебания изотермическими и пренебрегать  $v_s^2$  по сравнению с  $v_A^2$ .

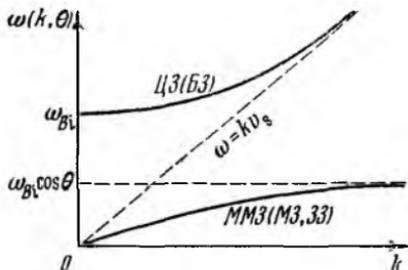


Рис. 5.5.2. Зависимость частот быстрых и медленных звуковых колебаний от величины волнового вектора в области длинных волн ( $ka_0 \ll 1$ ).

Фазовая скорость колебаний с большей из частот (5.5.1.8) больше фазовой скорости волны с меньшей из частот, определенных тем же выражением, и поэтому эти ветви естественно называть *быстрыми* (БЗ) и *медленными* (МЗ) *звуковыми колебаниями*.

Найдем теперь затухание БЗ- и МЗ-колебаний. Учитывая малые антиэрмитовы слагаемые в дисперсионном уравнении (5.5.1.7), получим следующее выражение для декремента затухания этих колебаний:

$$\gamma = \gamma_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n, \quad (5.5.1.14)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(\omega^2 - \omega_{B1}^2)^2}{\eta_0 k^2 v_s^2} z_0, \quad (5.5.1.15)$$

$$\gamma_n = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{(\omega^2 - \omega_{B1}^2)^2}{\eta_0 k^2 v_s^2} \frac{x_1^n}{2^n n!} z_0 \exp(-z_n^2), \quad (5.5.1.16)$$

$$\eta = (\omega^2 - \omega_{B1}^2)^2 \cos^2 \theta / \omega^4 + \sin^2 \theta.$$

В последних двух выражениях следует положить  $\omega = \omega_+$  для БЗ- и  $\omega = \omega_-$  для МЗ-колебаний. Для декремента затухания  $\gamma_0$ , обусловленного черенковским поглощением звуковых колебаний электронами, при  $\omega \sim kv_s \sim \omega_{B1}$  имеем  $\gamma/\omega \sim \sqrt{m_e/m_i}$ .

Декремент затухания  $\gamma_0$ , связанный с черенковским поглощением звуковых колебаний и декремент затухания  $\gamma_1$ , связанный

с циклотронным поглощением колебаний ионами на основной гармонике, экспоненциально малы, но поскольку при  $\omega \sim kv_s \sim \omega_{B1}$  величины  $z_n^2 \sim (T_e/T_i) (n\omega_{B1}/\omega - 1)^2$  ( $n=0, 1$ ) не очень велики по сравнению с единицей, то эти члены могут оказаться сравнимыми с  $\gamma_e$ . Особенно возрастает декремент затухания циклотронно-звуковой волны при  $\theta \rightarrow 0$  или при  $\omega_{B1} \gg \omega_s$ , когда частота этой волны (см. (5.5.1.10)) близка к  $\omega_{B1}$ . Однако выражениями (5.5.1.10) и (5.5.1.16) для  $\omega(k, \theta)$  и  $\gamma_1$  можно пользоваться только при условии

$$z_1 = \frac{\omega_s}{\omega_{B1}} \sqrt{\frac{1}{8} \frac{T_e}{T_i} \frac{\sin^2 \theta}{\cos \theta} \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 a_e^2}}} \gg 1,$$

которое выполняется, если угол  $\theta$  не слишком близок к нулю или величина  $\omega_s/\omega_{B1}$  не слишком мала, т. е. частота не очень близка к  $\omega_{B1}$ .

Декременты затухания  $\gamma_n$  ( $n \geq 2$ ) обусловлены циклотронным резонансом ионов на частотах, кратных  $\omega_{B1}$ , при нормальном эффекте Доплера. Так как выражения  $\gamma_n$  пропорциональны малому параметру  $x_i^2 = (k_x \rho_i)^{2n}$ , то величины  $\gamma_n$  оказываются сравнимыми с  $\gamma_e$  только при  $\omega \approx n\omega_{B1}$  в области  $|z_n| \leq 1$ .

Если частота волны задана, то показатель преломления (или волновой вектор) продольных звуковых колебаний определяется выражением

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}_s^2 \frac{\omega^2 - \omega_{B1}^2}{\omega^2 - \omega_{B1}^2 \cos^2 \theta}, \quad (5.5.1.17)$$

где  $\mathcal{N}_s = c/v_s$ .

Области прозрачности для этих волн определяются неравенствами  $\omega < \omega_{B1} \cos \theta$  либо  $\omega > \omega_{B1}$ .

График функции (5.5.1.17) показан на рис. 5.5.3.

В заключение выясним, при каких условиях можно пользоваться приближенным уравнением для продольных колебаний  $A=0$  вместо точного уравнения

$$A + B/\mathcal{N}^2 + C/\mathcal{N}^4 = 0.$$

Для этого необходимо, чтобы  $B/\mathcal{N}^2$  и  $C/\mathcal{N}^4$  были значительно меньше наибольших слагаемых, входящих в  $A$ . Полагая  $\omega \sim$

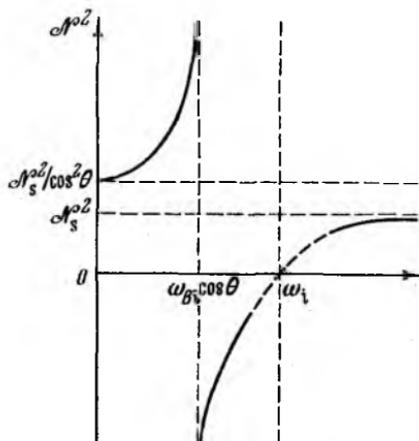


Рис. 5.5.3. Зависимость показателя преломления быстрой и медленной звуковых волн от частоты  $\omega$  в длинноволновой области ( $ka_e \ll 1$ ).

$\sim kv_s \sim \omega_{Bi}$ ,  $\cos \theta \sim \sin \theta \sim 1$  и используя (5.5.1.7), найдем, что тогда должно выполняться неравенство

$$\xi_e = 8\pi n_0 T_e / B_0^2 \sim v_s^2 / v_A^2 \sim \omega_{pi}^2 / k^2 c^2 \ll 1, \quad (5.5.1.18)$$

т. е. рассматриваемые ветви ЦЗ- и ЗЗ-колебаний являются чисто продольными только для достаточно коротких волн в плазме малого давления.

**5.5.2. Низкочастотные электромагнитные волны в плазме конечного давления при  $T_e \gg T_i$ .** Если в плазме с горячими электронами и холодными ионами давление электронного газа сравнимо с магнитным давлением или превышает его (так что неравенство (5.5.1.18) не выполняется), то циклотронно-звуковые колебания и замагниченный звук уже нельзя считать чисто продольными. В этом случае необходимо исследовать полное дисперсионное уравнение (5.2.2.5).

При выполнении условий (5.5.1.4) дисперсионное уравнение (5.2.2.5) можно представить в виде [46]

$$\cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \eta) \mathcal{N}^6 - \cos^2 \theta [2\mathcal{N}_A^2 + (1 - \eta) \mathcal{N}_s^2] \mathcal{N}^4 - \\ - [\mathcal{N}_A^2 + (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}_s^2] \mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}^2 + \mathcal{N}_A^4 \mathcal{N}_s^2 = iA_e + i \sum_{n=0}^{\infty} A_n, \quad (5.5.2.1)$$

где  $\eta = (\omega/\omega_{Bi})^2$  и

$$A_e = \sqrt{\pi} z_e \{ 2 \cos^2 \theta \sin^2 \theta (\cos^2 \theta - \eta) (\mathcal{N}_A^2 / \mathcal{N}_s^2) \mathcal{N}^6 + \\ + \cos^2 \theta [2 \sin^2 \theta (1 - \mathcal{N}_A^2 / \mathcal{N}_s^2) \mathcal{N}_A^2 + (1 - \eta) \mathcal{N}_s^2] \mathcal{N}^4 - \\ - (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}_s^2 \mathcal{N}^2 + \mathcal{N}_A^4 \mathcal{N}_s^2 \}, \quad (5.5.2.2)$$

$$A_n = 2\sigma_n \eta (1 - \eta) \cos^2 \theta (\mathcal{N}^2 / \mathcal{N}_A^2) \{ \cos^2 \theta \sin^2 \theta \eta \mathcal{N}^6 + \\ + \cos^2 \theta [2 \cos^2 \theta + \sin^2 \theta (2\eta + 2\sqrt{\eta} + 1) / (\eta + \sqrt{\eta})] \mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}^4 - \\ - [\sin^2 \theta \mathcal{N}_A^2 + (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}_s^2] \mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}^2 - 2\mathcal{N}_A^4 \mathcal{N}_s^2 / (1 + \sqrt{\eta}) \}; \quad (5.5.2.3)$$

входящая сюда величина  $\sigma_n$  определяется (5.4.2.1).

Если пренебречь правой частью уравнения (5.5.2.1), т. е. электронным и ионным черенковским затуханием и ионным циклотронным затуханием при нормальном эффекте Доплера, то такое уравнение будет определять показатели преломления (или собственные частоты) трех волн: альвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых волн (это кубическое уравнение относительно  $\mathcal{N}^2$  при заданном  $\omega$  и кубическое относительно  $\omega^2$  при заданном  $k$ ). Частоты перечисленных выше волн монотонно возрастают с увеличением волнового вектора  $k$ .

Зная  $\mathcal{N}$ , нетрудно найти коэффициент затухания

$$x = x_e + \sum_{n=0}^{\infty} x_n, \quad (5.5.2.4)$$

где

$$\kappa_e = \frac{A_e}{D} \mathcal{N}, \quad (5.5.2.5)$$

$$\kappa_n = \frac{A_n}{D} \mathcal{N} \quad (5.5.2.6)$$

и

$$D = 6 \cos^2 \theta (\cos^2 \theta - \eta) \mathcal{N}^6 - 4 \cos^2 \theta [2 \mathcal{N}_A^2 + (1 - \eta) \mathcal{N}_S^2] \mathcal{N}^4 + \\ + 2 [\mathcal{N}_A^2 + (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}_S^2] \mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}^2.$$

Исследуем дисперсионное уравнение (5.5.2.1) в некоторых предельных случаях.

а) В области низких частот  $\omega \ll \omega_{Bi}$  (или, что то же самое, в области длинных волн  $k \rightarrow 0$ ) из (5.5.2.1) находим следующие выражения для частот альвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых волн [49]:

$$\omega = k_{\parallel} v_A, \quad (5.5.2.7)$$

$$\omega = k v_{\pm}, \quad (5.5.2.8)$$

где

$$v_{\pm}^2 = 1/2 (v_A^2 + v_S^2) \pm 1/2 \sqrt{(v_A^2 + v_S^2)^2 - 4v_A^2 v_S^2 \cos^2 \theta}. \quad (5.5.2.9)$$

Заметим, что эти выражения для фазовых скоростей быстрой и медленной магнитозвуковых волн совпадают с выражениями для  $v_{\pm}$  в магнитогидродинамическом приближении (причем под  $v_S$  надо понимать скорость распространения изотермических колебаний).

Коэффициент электронного черенковского затухания магнитозвуковых волн  $\kappa_e = \kappa_{\pm}$  определяется выражением [49]

$$\frac{\kappa_{\pm}}{\mathcal{N}} = \frac{\gamma_{\pm}}{\omega} = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m_e}{m_i} \frac{v_{\pm}^2 + 2 \cos^2 \theta v_S^2 (\cos^2 \theta v_S^2 - v_{\pm}^2)}{(v_{\pm}^2 - \cos^2 \theta v_S^2) (2v_{\pm}^2 - v_A^2 - v_S^2)}}. \quad (5.5.2.10)$$

При  $v_A \sim v_S$  справедлива оценка  $\gamma/\omega \sim \sqrt{m_e/m_i}$ . Затухание альвеновской волны в этом случае оказывается значительно меньшим; а именно  $\gamma/\omega \sim \sqrt{m_e/m_i} (\omega/\omega_{Bi})^2$ .

б) В области коротких длин волн  $k \rightarrow \infty$  наименьшее из трех решений, соответствующее ММЗ-ветви уравнения (5.5.2.1), стремится к предельному значению  $\omega_{Bi} \cos \theta$ . В этой области показатель преломления и частота определяются выражениями

$$\mathcal{N}^2 = \frac{(2\mathcal{N}_A^2 + \sin^2 \theta v_S^2) \omega_{Bi}^2}{\cos^2 \theta \omega_{Bi}^2 - \omega^2}, \quad (5.5.2.11)$$

$$\omega(k, \theta) = \omega_{Bi} \cos \theta \left[ 1 - \frac{(2v_S^2 + \sin^2 \theta v_A^2) \omega_{Bi}^2}{2k^2 v_A^2 v_S^2} \right]. \quad (5.5.2.12)$$

Для плазмы малого давления ( $v_A \gg v_s$ ) последние два соотношения переходят в (5.5.1.13) и (5.5.1.17) для частоты продольных колебаний и показателя преломления.

Выражения для коэффициента затухания (5.5.2.5) и (5.5.2.6) ММЗ-волны в области коротких волн упрощаются:

$$\frac{\chi_e}{\mathcal{N}^0} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} z_e \frac{\sin^2 \theta [2\mathcal{N}_A^4 + 2\mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}_s^2 (1 + \sin^2 \theta) + \mathcal{N}_s^4]}{\mathcal{N}_s^2 (2\mathcal{N}_A^2 + \sin^2 \theta \mathcal{N}_s^2)}, \quad (5.5.2.13)$$

$$\frac{\chi_n}{\mathcal{N}^0} = \sigma_n \cos^6 \theta \sin^4 \theta \frac{\mathcal{N}_s^4}{\mathcal{N}_A^2 (2\mathcal{N}_A^2 + \sin^2 \theta \mathcal{N}_s^2)}. \quad (5.5.2.14)$$

В случае плазмы малого давления ( $\mathcal{N}_s \gg \mathcal{N}_A$ ) последние два соотношения соответствуют выражениям (5.5.1.15) и (5.5.1.16) для декремента затухания продольных ММЗ-колебаний.

Частоты двух других ветвей при  $k \rightarrow \infty$  стремятся к бесконечности ( $\omega \gg \omega_{B1}$ ). Частота БМЗ-волны при  $k \rightarrow \infty$  приближается к частоте свиста (см. (5.1.4.7))

$$\omega(k, \theta) = k^2 c^2 \omega_{B1} \cos \theta / \omega_{p1}^2,$$

а частота А-волны — к частоте звука

$$\omega(k) = kv_s.$$

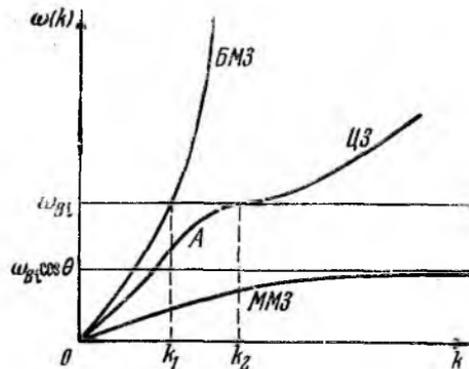


Рис. 5.5.4. Зависимость частот альвеновской (А), быстрой (БМЗ) и медленной (ММЗ) магнитозвуковых волн в неизотермической плазме конечного давления от величины волнового вектора.

ний с частотой  $\omega = kv_s$  соответствует формуле (5.5.1.15) для декремента затухания продольных колебаний.

Таким образом, в области больших значений волнового вектора  $k$  А-ветвь переходит в ЦЗ-ветвь, исследованную выше.

в) Частоты колебаний БМЗ- и А-ветвей могут совпадать с ионной циклотронной частотой (рис. 5.5.4). Соответствующие значения волнового вектора  $k = k_{1,2}$  определяются из уравнения

$$\cos^2 \theta \sin^2 \theta \mathcal{N}^6 + 2 \cos^2 \theta \mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}^4 -$$

$$- [\mathcal{N}_A^2 + (1 + \cos^2 \theta) \mathcal{N}_s^2] \mathcal{N}_A^2 \mathcal{N}^2 + \mathcal{N}_A^4 \mathcal{N}^2 = 0,$$

где  $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{1,2} = ck_{1,2} / \omega_{B1}$ . Следует, однако, отметить, что для А-ветви при  $\omega \rightarrow \omega_{B1}$  резко возрастает ионное циклотронное затухание и само дисперсионное уравнение (5.5.2.1) становится неприменимым

в области, где нарушается условие  $|z_1| = \left| \frac{\omega - \omega_{B1}}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_i} \right| \gg 1$ . Поэтому, строго говоря, нельзя утверждать, что участки кривых для А-ветви при  $\omega > \omega_{B1}$  и  $\omega < \omega_{B1}$  действительно относятся к одной ветви колебаний; такое заключение можно было бы сделать, проследив за решениями дисперсионного уравнения в области сильного затухания  $|\omega - \omega_{B1}| \leq k_{\parallel} v_i$ .

г) В случае плазмы малого давления ( $\xi_0 \ll 1$ ,  $N_A \ll N_s$ ) нетрудно найти решения дисперсионного уравнения и выяснить общую картину поведения собственных частот колебаний сильно неизотермической плазмы и зависимость показателей преломления этих волн от частоты (см. рис. 5.5.4 и рис. 5.5.5).

Частота БМЗ-волны определяется соотношением (5.1.5.3), а ее показатель преломления — соотношением (5.1.5.4), справедливым как в случае холодной плазмы, так и в рассматриваемом случае.

Частота колебаний А-ветви при  $k < k_2$  задается выражением (5.1.5.3), а ее показатель преломления — выражением (5.1.5.4), полученным для холодной плазмы, но применимым и в рассматриваемом случае. При  $k \approx k_2$  в области  $|\omega - \omega_{B1}| \leq k_{\parallel} v_i$  эти колебания сильно затухают (см. п. 5.4.2). При  $k > k_2$  зависимость  $\omega(k, \theta)$  для них определяется формулой (5.5.1.8) для частоты продольных ЦЗ-колебаний, которые в области  $kv_s \gg \omega_{B1}$  переходят в звуковые колебания с частотой  $\omega = kv_s$ . Показатель преломления ЦЗ-колебаний задается формулой (5.5.1.17). ММЗ-колебания в плазме малого давления являются продольными и их частота определяется формулой (5.5.1.8), а показатель преломления — формулой (5.5.1.17).

Для значений  $k = k_{1,2}$ , при которых  $\omega(k, \theta) = \omega_{B1}$ , получим при  $\xi_0 \ll 1$  выражения

$$k_1 = \frac{\omega_{B1}}{v_A \sqrt{1 + \cos^2 \theta}}, \quad k_2 = \frac{\omega_{B1}^2 \sqrt{1 + \cos^2 \theta}}{v_A v_s \cos \theta \sin \theta}.$$

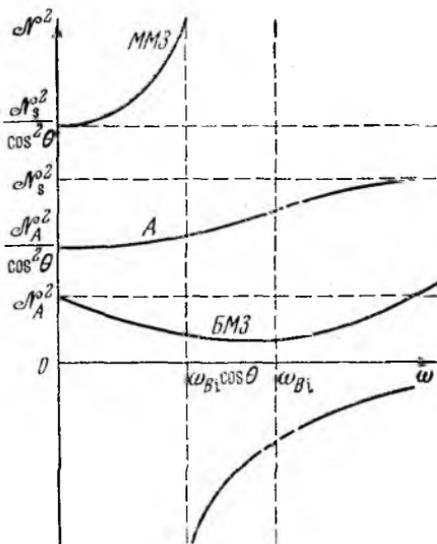


Рис. 5.5.5. Зависимость показателей преломления альвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых волн в неизотермической плазме конечного давления от частоты.

д) Для плазмы высокого давления ( $\xi_e \gg 1$ ,  $v_A \ll v_s$ ) также нетрудно получить выражения для собственных частот и показателей преломления рассматриваемых колебаний. Учитывая неравенство  $\mathcal{N}_A \gg \mathcal{N}_s$ , находим из (5.5.2.1) [47]

$$\mathcal{N}^2 = \mathcal{N}_s^2, \quad \mathcal{N}^2 = \frac{\mathcal{N}_A^2}{\cos \theta} \frac{\omega_{B1}}{\omega_{B1} \cos \theta \pm \omega}. \quad (5.5.2.15)$$

Этим значениям  $\mathcal{N}^2$  соответствуют частоты

$$\omega(k) = kv_s, \quad (5.5.2.16)$$

$$\omega(k, \theta) = 1/2 k_{\parallel} v_A (\sqrt{4 + k^2 v_A^2 / \omega_{B1}^2} + kv_A / \omega_{B1}), \quad (5.5.2.17)$$

$$\omega(k, \theta) = 1/2 k_{\parallel} v_A (\sqrt{4 + k^2 v_A^2 / \omega_{B1}^2} - kv_A / \omega_{B1}). \quad (5.5.2.18)$$

В области частот  $\omega \gg \omega_{B1}$  при  $k = k_0$ , где  $k_0 = v_s \omega_{B1}^2 / c^2 \omega_{B1}$ , происходит пересечение графиков частоты звука (см. (5.5.2.16)) и частоты свиста (см. (5.5.2.17)). При  $k \approx k_0$  получим [50] вместо этого для  $\omega(k, \theta)$  соотношение

$$\omega(k, \theta) = kv_s (1 + \Delta), \quad (5.5.2.19)$$

где

$$\Delta = 1/2 (1 - k_{\parallel} / k) (1 \pm \sqrt{1 + \eta}), \quad \eta = (\sin^2 \theta / \cos \theta) (\omega_{B1} / k_0 v_s) k^2 / (k - k_0)^2.$$

Декремент затухания при  $k \approx k_0$  определяется выражением [50]

$$\gamma = 1/2 \gamma_0 \left( 1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \eta}} \right), \quad (5.5.2.20)$$

где

$$\gamma_0 = \sqrt{1/2} \pi k \rho_e \sin^2 \theta \omega \quad (5.5.2.21)$$

— декремент затухания свиста, причем последнее выражение соответствует (5.4.1.8) для  $\alpha_e$ .

Графики функций  $\omega(k, \theta)$  и  $\mathcal{N}^2(\omega)$  для плазмы высокого давления, соответствующие формулам (5.5.2.15)—(5.5.2.19) приведены на рис. 5.5.6 и 5.5.7. На рис. 5.5.6 ВМЗ-волна представляет собой звуковую (З) волну при  $k < k_0$  и свист (С) при  $k > k_0$ . Альвеновская ветвь делится на свист (при  $k < k_0$ ) и звук (при  $k > k_0$ ). Интервал величин волновых векторов  $k \approx k_0$  соответствует взаимодействующим звуку и свисту. Частота колебаний ММЗ-ветви определяется формулой (5.5.2.18).

**5.5.3. Высокочастотный электронный звук.** Рассмотрим теперь продольные колебания сильно неизотермической плазмы с горячими ионами и холодными электронами ( $T_i \gg T_e$ ) [51].

Будем предполагать, что частота этих колебаний значительно больше ионной циклотронной частоты, длина волны много меньше ларморовского радиуса ионов с тепловой скоростью и фазовая скорость существенно меньше тепловой скорости ионов, т. е.

$|\omega| \gg \omega_{B1}$ ,  $k\rho_i \gg 1$ ,  $\omega \ll kv_i$ . В этом случае движение ионов можно считать немагнитичным, т. е. мы вправе пренебречь в кинетическом уравнении для ионов силой Лоренца. Тогда для вклада ионов  $\delta\varepsilon_i$  в дисперсионное уравнение  $A=1+\delta\varepsilon_e - \delta\varepsilon_i$  можно воспользоваться справедливым при  $B_0=0$  выражением

$$\delta\varepsilon_i = \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_i W(z_i)], \quad (5.5.3.1)$$

где  $z_i = \omega/\sqrt{2} kv_i \ll 1$ .

Предположим также, что частота волны значительно меньше электронной циклотронной частоты, длина волны много больше

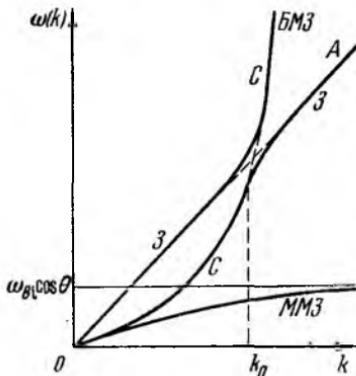


Рис. 5.5.6. Зависимость частот альвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых волн в неизотермической плазме высокого давления от величины волнового вектора.

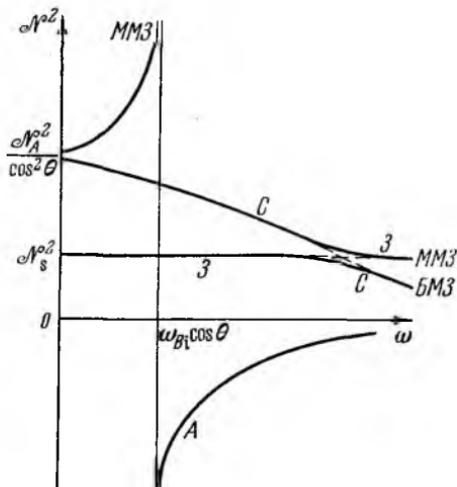


Рис. 5.5.7. Зависимость показателей преломления альвеновской, быстрой и медленной магнитозвуковых волн в плазме высокого давления от частоты.

ларморовского радиуса электронов, а фазовая скорость колебаний вдоль магнитного поля значительно больше тепловой скорости электронов ( $|\omega| \ll |\omega_{Be}|$ ,  $k\rho_e \ll 1$ ,  $|\omega| \gg k_\parallel v_e$ ). Тогда выражение (5.5.1.3) для  $\delta\varepsilon_e$  принимает следующий вид:

$$\delta\varepsilon_e = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} z_e \exp(-z_e^2), \quad (5.5.3.2)$$

где  $z_e = \omega/\sqrt{2} k_\parallel v_e$ .

Очевидно, что условия  $k v_e \cos \theta \ll |\omega| \ll k v_i$  могут выполняться только при  $\theta \approx 1/2 \pi$ , так как обычно  $v_e \gg v_i$  даже при  $T_i \gg T_e$ .

Подставляя выражения (5.5.3.1) и (5.5.3.2) в дисперсионное уравнение и учитывая, что слагаемые, ответственные за черенковское поглощение рассматриваемых колебаний электронами и ионами, малы, получим для частоты и декремента затухания выражения

$$\omega(k, \theta) = \frac{kv_{se} \cos \theta}{\sqrt{1 + k^2 \rho_0^2 + k^2 a_1^2}}, \quad (5.5.3.3)$$

$$\gamma = \gamma_e + \gamma_i, \quad (5.5.3.4)$$

$$\gamma_e = \sqrt{1/8\pi} z_e^3 \exp(-z_e^2) \omega, \quad (5.5.3.5)$$

$$\gamma_i = \sqrt{1/8\pi} \frac{m_i}{m_e} \frac{kv_{se} \cos^2 \theta}{(1 + k^2 \rho_0^2 + k^2 a_1^2)^2}, \quad (5.5.3.6)$$

где

$$v_{se} = \sqrt{T_i/m_e}, \quad \rho_0 = v_{se}/|\omega_{Be}|, \quad a_1 = v_i/\omega_{pi}.$$

В случае длинноволновых колебаний ( $k\rho_0 \ll 1$ ,  $ka_1 \ll 1$ ) выражение (5.5.3.3) для частоты принимает вид

$$\omega(k, \theta) = k v_{se}, \quad (5.5.3.7)$$

аналогичный (5.5.1.12) для частоты замагниченного ионного звука в плазме малого давления. Рассматриваемые колебания называют высокочастотными электронно-звуковыми, а  $v_{se}$  — скоростью электронного звука, так как эта величина определяется температурой ионов и массой электронов. Зависимость  $\omega(k, \theta)$  от  $k$  показана на рис. 5.5.8.

Электронное черенковское затухание электронного звука (см. (5.5.3.5)) экспоненциально мало, так как температура ионов значительно больше температуры электронов и

$$z_e^2 = \frac{T_i}{T_e} \frac{1}{2(1 + k^2 \rho_0^2 + k^2 a_1^2)} \gg 1.$$

Рис. 5.5.8. Зависимость частоты высокочастотных электронно-звуковых колебаний в неизотермической плазме ( $T_i \gg T_e$ ) от величины волнового вектора.

Для ионного черенковского затухания электронного звука (см. (5.5.3.6)) имеем

$$\frac{\gamma}{\omega} \sim \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \cos^2 \theta \ll 1 \quad (k\rho_0 \ll 1, ka_1 \ll 1).$$

Оно мало только при  $\cos \theta \ll \sqrt{m_e/m_i}$ .

Вместе с тем частота звука (5.5.3.3) должна быть много больше  $\omega_{B1}$ , что приводит к условию  $kv_{se} \cos \theta / (1 + k^2 \rho_0^2 + k^2 a_1^2)^{1/2} \gg \omega_{B1}$ . Совместное выполнение последнего неравенства и неравенства  $\cos^2 \theta \ll m_e/m_1$  возможно только в интервале близ углов  $\theta \approx \approx 1/2\pi$ . Например, при  $k\rho_0 \sim 1$  и  $\rho_0 > a_1$  эти неравенства выполняются, если  $m_e/m_1 \ll \cos \theta \ll \sqrt{m_e/m_1}$ .

**5.5.4. Низкочастотный электронный звук.** Третья гибридная частота при  $|1/2\pi - \theta| \ll \sqrt{m_e/m_1}$  значительно меньше ионной циклотронной частоты

$$\omega(k, \theta) = \omega_{\infty}^{(3)}(\theta) = \frac{\omega_{B1} \omega_{pe} \cos \theta}{\sqrt{\omega_{p1}^2 + \omega_{B1}^2}}. \quad (5.5.4.1)$$

Это выражение было получено выше для холодной плазмы (см. (5.1.2.15')) при  $k\rho_1 \ll 1$ .

Выясним сначала, как изменится последнее соотношение при конечных  $k\rho_1$  [52]. Предполагая, что  $k\rho_e \ll 1$ ,  $|\omega| \gg k_1 v_e$  и  $|\omega| \gg k_1 v_1$ , представим дисперсионное уравнение (5.5.1.2) в виде

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{p1}^2}{k^2 v_1^2} [1 - A_0(x_1)] = 0, \quad (5.5.4.2)$$

где  $x_1 = (k\rho_1)^2$ ,  $A_0(x_1) = \exp(-x_1) I_0(x_1)$ .

Отсюда получаем, что

$$\omega(k, \theta) = \frac{kv_{se} \cos \theta}{\sqrt{1 - A_0(k^2 \rho_1^2) + k^2 a_1^2}}. \quad (5.5.4.3)$$

В области  $k\rho_1 \gg 1$  и  $ka_1 \ll 1$  эта частота совпадает с частотой электронного звука  $\omega(k, \theta) = k_1 v_{se}$ . Поэтому колебания с частотой, задаваемой (5.5.4.3), являющиеся коротковолновой частью ветви медленных магнитозвуковых колебаний, называют *низкочастотным электронным звуком*. Зависимость этой частоты от величины волнового вектора показана на рис. 5.5.9.

Выражение (5.5.4.3) применимо только при  $\theta \approx 1/2\pi$ , когда  $\omega \ll \omega_{B1}$ , т. е. должно быть справедливо неравенство

$$\cos \theta \ll \sqrt{\frac{m_e \omega_{B1}}{m_1 \omega_{p1}} \left(1 + \frac{1 - A_0}{k^2 a_1^2}\right)^{1/2}}.$$

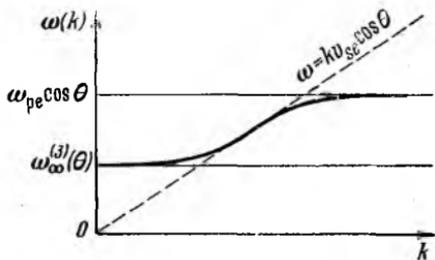


Рис. 5.5.9. Зависимость частоты низкочастотного электронного звука в неизотермической плазме ( $T_1 \gg T_e$ ) от величины волнового вектора.

В частности, при  $ka_1 \ll 1$  и  $k\rho_1 > 1$  оно выполняется, если  $\cos \theta \ll \ll (1/k\rho_1) \sqrt{m_e/m_1}$ ; иными словами, низкочастотный электронный звук существует в узком интервале углов вблизи  $\theta \approx 1/2\pi$ .

Подведем некоторые итоги. В сильно неизотермической плазме с горячими электронами и холодными ионами  $T_e \gg T_i$  в области низких частот  $\omega \ll \omega_{Be}$  существуют три слабозатухающие длинноволновые ( $k\rho_i \ll 1$ ) ветви колебаний — ММЗ, А и БМЗ. В области длинных волн ( $k \rightarrow 0$ ) они соответствуют магнитогиродинамическим ММЗ-, А- и БМЗ-ветвям. В области коротких волн частота колебаний ММЗ-ветви близка к частоте продольных колебаний  $\omega_{Bi} \cos \theta$ , колебания А-ветви переходят в незамагниченные ионно-звуковые, а БМЗ-ветвь — в свистящий атмосферик.

В сильно неизотермической плазме с горячими ионами и холодными электронами ( $T_i \gg T_e$ ) при  $\theta \approx 1/2\pi$  в области  $\omega \gg \omega_{Bi}$  существует ветвь коротковолновых ( $k\rho_i \gg 1$ ) высокочастотных электронно-звуковых колебаний, в области  $\omega \ll \omega_{Bi}$  — ветвь низкочастотных электронно-звуковых колебаний, являющаяся продолжением в область коротких волн ( $k\rho_i \gg 1$ ) А-ветви.

## § 5.6. Циклотронные волны в плазме в случае квазиперечного распространения

### 5.6.1. Продольные ионно-циклотронные колебания плазмы при квазиперечном распространении.

Выше было показано, что если частота волны близка к частоте, кратной электронной или ионной циклотронной частоте, то возникает бесстолкновительное затухание, обусловленное резонансным взаимодействием частиц плазмы с волной. Циклотронное затухание на кратных гармониках ( $\omega \approx n |\omega_{B\alpha}|$ ,  $n \geq 2$ ) представляет собой эффект, связанный с конечностью ларморовского радиуса частиц; именно, декремент затухания длинноволновых колебаний ( $k\rho_\alpha < 1$ , где  $\rho_\alpha$  — ларморовский радиус частиц сорта  $\alpha$ ) при  $\omega \approx n |\omega_{B\alpha}|$  пропорционален  $(k\rho_\alpha)^{2n}$  и исчезает при  $\rho_\alpha \rightarrow 0$ .

Другой эффект, обусловленный конечностью ларморовского радиуса частиц, — появление при  $\theta \approx 1/2\pi$  ряда новых ветвей собственных колебаний плазмы, частоты которых при  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$  стремятся к частотам  $n |\omega_{B\alpha}|$  ( $n=1, 2, \dots$ ). Такие колебания называются *циклотронными*.

Поведение ионных циклотронных колебаний существенно зависит от близости угла  $\theta$  к  $1/2\pi$ . Если фазовая скорость волны вдоль магнитного поля значительно меньше тепловой скорости электронов, но много больше тепловой скорости ионов

$$v_i \ll \omega/k_{\parallel} \ll v_e, \quad (5.6.1.1)$$

то мы будем говорить о квазиперечном распространении циклотронных волн. Если  $\omega/k_{\parallel} \gg v_e$ , то мы будем говорить о поперечном их распространении.

Начнем с изучения продольных ионно-циклотронных колебаний в случае квазиперечного их распространения в плазме ма-

лого давления [53, 54] \*). Будем считать, что выполняются неравенства (5.6.1.1) и, кроме того, неравенства

$$|z_n^1| = \frac{|\omega - n\omega_{Bi}|}{\sqrt{2} k_n v_i} \gg 1 \quad (n = 0, \pm 1, \dots). \quad (5.6.1.2)$$

Тогда величины  $\delta\varepsilon_0$  и  $\delta\varepsilon_1$  в дисперсионном уравнении для продольных колебаний  $A = 1 + \delta\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_1 = 0$  будут определяться формулами

$$\delta\varepsilon_0 = \frac{\omega_{p0}^2}{k^2 v_0^2} (1 + i\sqrt{\pi} z_0), \quad (5.6.1.3)$$

$$\delta\varepsilon_1 = \frac{\omega_{p1}^2}{k^2 v_1^2} \left[ 1 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} A_n(k^2 \rho_i^2) \right] +$$

$$+ i\sqrt{\pi} \frac{\omega_{p1}^2}{k^2 v_1^2} z_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(k^2 \rho_i^2) \exp(-z_n^2), \quad (5.6.1.4)$$

$$A_n(x) = \exp(-x) I_n(x).$$

Предполагая для простоты, что  $k^2 \ll \omega_{pa}^2/v_a^2$ , можно пренебречь в (5.5.1.2) единицей по сравнению с  $\delta\varepsilon_0$  и  $\delta\varepsilon_1$ . Отбрасывая далее малые диссипативные члены в  $\delta\varepsilon_n$ , представим дисперсионное уравнение  $1 + \delta\varepsilon_0 + \delta\varepsilon_1 = 0$  в виде

$$1 + T_i/T_e = f(\omega), \quad (5.6.1.5)$$

где

$$f(\omega) =$$

$$= A_0(k^2 \rho_i^2) + 2\omega^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n(k^2 \rho_i^2)}{\omega^2 - n^2 \omega_{Bi}^2}. \quad (5.6.1.6)$$

Уравнение (5.6.1.5) удобно решать графически. На рис. 5.6.1 схематически изображен график функции  $f(\omega)$ . Точкам пересечения  $I'$ ,  $2'$ , ... кривых  $y=f(\omega)$  с прямой  $y=1+T_i/T_e$  соответствуют решения дисперсионного уравнения (5.6.1.5)

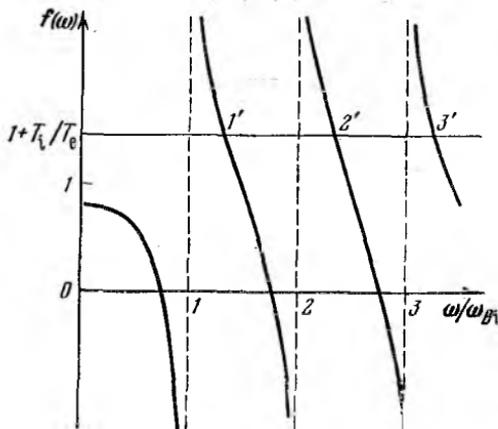


Рис. 5.6.1. Графическое решение дисперсионного уравнения (5.6.1.5).

$$\omega = \omega^{(n)}(k), \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.6.1.7)$$

\* На существование этих колебаний указывается в работе [53].

Из рис. 5.6.1 видно, что чем больше величина  $T_i/T_e$ , тем ближе  $\omega^{(n)}(k)$  к  $n\omega_{B1}$ . Поведение частот  $\omega^{(n)}(k)$  в зависимости от  $k$  схематически показано на рис. 5.6.2.

В предельных случаях длинных ( $kr_i \ll 1$ ) и коротких ( $kr_i \gg 1$ ) волн частоты  $\omega^{(n)}(k)$  близки к  $n\omega_{B1}$ . Учитывая это, положим

$$\omega^{(n)}(k) = n\omega_{B1} [1 + \phi_n(k)], \quad (5.6.1.8)$$

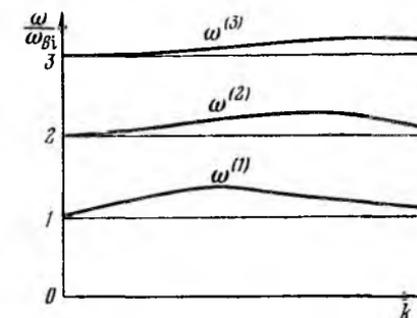
где  $|\phi_n| \ll 1$ . Легко показать, что

$$\phi_n(k) = \frac{A_n(k^2\rho_i^2)}{1 + T_i/T_e - \sum_{m=-\infty}^{\infty} [n/(m-n)] A_m(k^2\rho_i^2)}. \quad (5.6.1.9)$$

Частота  $\omega^{(n)}(k)$  близка к  $n\omega_{B1}$  при произвольных значениях  $kr_i$  в случае неизотермической плазмы с горячими ионами и холодными электронами ( $T_i \gg T_e$ ).

В этом случае

$$\omega^{(n)}(k) = n\omega_{B1} [1 + (T_e/T_i) A_n(k^2\rho_i^2)]. \quad (5.6.1.10)$$



При  $T_e > T_i$  частоты  $\omega^{(n)}(k)$  при  $kr_i \gg 1$  не близки к  $n\omega_{B1}$ , а при  $T_e \gg T_i$  они могут мало отличаться от  $(n+1)\omega_{B1}$ . На рис. 5.6.3 показаны графики частот  $\omega^{(1)}(k)$  и  $\omega^{(2)}(k)$  в зависимости от  $(kr_i)^2$  для различных значений параметра  $T_i/T_e$ , полученные путем численного решения уравнения (5.6.1.5).

Рис. 5.6.2. Схематическая зависимость частот продольных ионно-циклотронных колебаний от величины волнового вектора.

Учитывая в выражениях (5.6.1.3) и (5.6.1.4) малые антиэрмитовы

члены, нетрудно найти декременты затухания рассматриваемых колебаний

$$\gamma^{(n)} = \gamma_e^{(n)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m^{(n)}, \quad (5.6.1.11)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_e^{(n)} &= V \sqrt{\frac{\pi m_e T_i^2}{32 m_i T_e^2} \frac{\omega_{B1}}{kr_i \cos \theta F(\omega^{(n)})}}, \\ \gamma_m^{(n)} &= V \sqrt{\frac{\pi}{32} \frac{\omega_{B1}}{kr_i \cos \theta F(\omega^{(n)})} A_m(k^2\rho_i^2) \exp(-z_m^2)}, \\ F(\omega^{(n)}) &= \sum_{m'=1}^{\infty} \frac{m'^2 \omega_{B1}}{(\omega^{(n)2} - m'^2 \omega_{B1}^2)^2} A_{m'}(k^2\rho_i^2), \\ z_m &= (\omega^{(n)} - m\omega_{B1}) / \sqrt{2} kv_i \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (5.6.1.12)$$

Величины  $\gamma_0^{(n)}$  и  $\gamma_n^{(n)}$  — декременты затухания, обусловленные электронным и ионным черенковским поглощением колебаний, а  $\gamma_m^{(n)}$  ( $m \neq 0$ ) — декременты ионного циклотронного затухания. Так как  $n\omega_{B1} < \omega^{(n)} < (n+1)\omega_{B1}$  и  $\omega \gg k_{\parallel} v_i$ , то в сумме (5.6.1.11) можно отбросить все экспоненциально малые слагаемые  $\gamma_m^{(n)} \sim \exp(-z_m^2)$ , за исключением слагаемых с наименьшими  $z_m^2$ , т. е. оставить  $\gamma_n^{(n)}$  и  $\gamma_{n+1}^{(n)}$ .

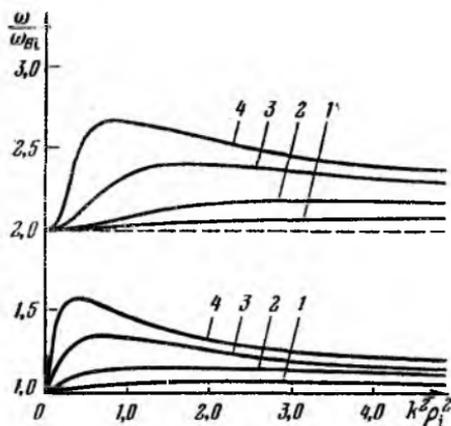


Рис. 5.6.3. Зависимость частот продольных ионно-циклотронных колебаний от  $(kr_1)^2$  для различных значений параметра  $T_i/T_e$ .

Кривым 1—4 отвечают значения  $T_i/T_e$ , равные 0,1; 0,3; 1; 3 соответственно.

Если  $\omega^{(n)}$  близко к  $n\omega_{B1}$ , то  $\gamma^{(n)} \approx \gamma_0^{(n)} + \gamma_n^{(n)}$ , где

$$\left. \begin{aligned} \gamma_0^{(n)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{m_e}{m_i} \frac{T_i^8}{T_e^8} \frac{n^2 \omega_{B1} \psi_n^2}{k \rho_1 \cos \theta A_n (k^2 \rho_1^2)}, \\ \gamma_n^{(n)} &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{n^2 \psi_n^2 \omega_{B1}}{k \rho_1 \cos \theta} \exp(-z_n^2), \\ z_n^2 &= \frac{n^2 \psi_n^2}{2k \rho_1 \cos^2 \theta} \gg 1, \end{aligned} \right\} \quad (5.6.1.13)$$

и функция  $\psi_n$  определяется формулой (5.6.1.9).

Слабозатухающие ионно-циклотронные колебания существуют при изменении величины волнового вектора  $k$  в ограниченном интервале и в узком интервале изменения углов  $\theta$  (близких к  $1/2\pi$ ).

Область изменения величины волнового вектора  $k$  ограничена условием  $\gamma_n^{(n)} \ll n\omega_{B1}$ : при его уменьшении или увеличении частота  $\omega^{(n)}(k)$  оказывается настолько близкой к  $n\omega_{B1}$ , что величина  $z_n$  становится порядка единицы, а декремент циклотронного затухания  $\gamma_n^{(n)}$  — порядка  $k_{\parallel} v_i$ .

При приближении угла  $\theta$  к  $1/2\pi$  возрастает декремент электронного черенковского затухания  $\gamma_e^{(n)}$ , а при удалении этого угла от  $1/2\pi$  — декремент циклотронного затухания  $\gamma_m^{(n)}$ ; область изменения угла  $\theta$ , в которой колебания затухают слабо, ограничена условиями

$$z_e \approx \frac{n\omega_{Bi}}{kv_e \cos \theta} \ll 1, \quad |z_m| = \left| \frac{\omega^{(n)} - m\omega_{Bi}}{\sqrt{2} kv_i \cos \theta} \right| \gg 1.$$

Частоты  $\omega^{(n)}(k)$  при увеличении номера ветви  $n$  становятся все ближе к  $n\omega_{Bi}$  (так как величины  $A_n(k^2 \rho_i^2)$  значительно меньше единицы при  $n \gg 1$ , то для достаточно больших значений  $n$  можно использовать выражения (5.6.1.8)). Поэтому затухание  $\gamma_n^{(n)}$  при достаточно больших  $n$  становится сравнимым с частотой и, значит, слабозатухающих ионно-циклотронных колебаний с большим номером ветви  $n$  не существует.

Отметим в заключение, что приближенным дисперсионным уравнением для продольных ионно-циклотронных колебаний можно пользоваться, если величины  $\delta\varepsilon_e$  и  $\delta\varepsilon_i$  значительно больше  $|B|/\mathcal{H}^2$  и  $|C|/\mathcal{H}^4$ . Эти условия выполняются только в плазме малого давления, если, кроме того,

$$\xi_e = 8\pi n T_e / B_0^2 \ll \cos^2 \theta \ll 1. \quad (5.6.1.14)$$

**5.6.2. Непотенциальные ионно-циклотронные колебания в изотермической плазме малого давления при квазиперечном распространении.** Если  $\xi_e \geq \cos^2 \theta$ , то ионно-циклотронные колебания, рассмотренные в п. 5.6.1, уже не будут чисто продольными. Мы исследуем теперь ионно-циклотронные колебания в этом случае, предполагая по-прежнему, что давление плазмы мало по сравнению с магнитным давлением, т. е.  $\xi_e \ll 1$ . Кроме того, допустим, что  $T_e \sim T_i$ .

Считая, как и выше, что выполняются неравенства

$$\cos^2 \theta \ll 1, \quad z_e = \frac{\omega}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_e} \ll 1, \quad |z_n| = \left| \frac{\omega - n\omega_{Bi}}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_i} \right| \gg 1,$$

получим для компонент тензора  $\varepsilon_{ij}$  выражения

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{x_i} A_n \left[ \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} - i\sqrt{\pi} z_0 \exp(-z_n^2) \right], \\ \varepsilon_{22} &= 1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{n^2}{x_i} A_n - 2x_i A_n' \right) \left( \frac{\omega}{\omega - n\omega_{Bi}} - \right. \\ &\quad \left. - i\sqrt{\pi} z_0 \exp(-z_n^2) \right) + 2 \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} i\sqrt{\pi} z_e x_i \frac{T_e}{T_i}, \end{aligned} \right\} \quad (5.6.2.1)$$

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{33} &= 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[ \frac{\omega}{\omega - n\omega_{B1}} - i\sqrt{\pi} z_n \exp(-z_n^2) \right] + \\
 &\quad + \frac{\omega_p^2}{k^2 v_e^2 \cos^2 \theta} (1 + i\sqrt{\pi} z_e), \\
 \varepsilon_{12} &= -i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n \left[ \frac{\omega}{\omega - n\omega_{B1}} - i\sqrt{\pi} z_0 \exp(-z_n^2) \right] - \\
 &\quad - i \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_{B1}}, \\
 \varepsilon_{13} &= -\frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n A_n \left[ \frac{\omega \omega_{B1} \cos \theta}{(\omega - n\omega_{B1})^2} - \right. \\
 &\quad \left. - i\sqrt{\frac{2\pi}{x_1}} z_0 z_n \exp(-z_n^2) \right], \\
 \varepsilon_{23} &= i \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sqrt{2x_1} A'_n \left[ \frac{z_0}{2z_n^2} - i\sqrt{\pi} z_0 z_n \exp(-z_n^2) \right] - \\
 &\quad - i \frac{\omega_p^2}{\omega \omega_{B1}} \operatorname{tg} \theta (1 + i\sqrt{\pi} z_e),
 \end{aligned} \tag{5.6.2.1}$$

$$A_n = \exp(-x_1) I_n(x_1), \quad A'_n = dA_n(x_1)/dx_1.$$

Учитывая их, представим дисперсионное уравнение  $A + B/\mathcal{N}^2 + C/\mathcal{N}^4 = 0$  в виде

$$\delta\varepsilon_e + \delta\varepsilon_i - \varepsilon_{11}\varepsilon_{33}/\mathcal{N}^2 = 0, \tag{5.6.2.2}$$

где  $\delta\varepsilon_e$  и  $\delta\varepsilon_i$  определяются формулами (5.6.1.3) и (5.6.1.4). Это уравнение, в отличие от дисперсионного уравнения для продольных циклотронных колебаний  $\delta\varepsilon_e + \delta\varepsilon_i = 0$ , содержит дополнительное слагаемое  $-\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}/\mathcal{N}^2$  и описывает непотенциальные ионно-циклотронные волны.

Пренебрегая в (5.6.2.2) малыми антиэрмитовыми членами, представим это уравнение в виде

$$1 + \frac{T_1}{T_e} \frac{1}{1 - \zeta(\omega)} = f(\omega), \tag{5.6.2.3}$$

где

$$\zeta(\omega) = \left( \frac{T_1}{T_e} \right)^2 \frac{\xi_e}{2x_1^2 \cos^2 \theta} \frac{\omega^2}{\omega_{B1}^2},$$

а функция  $f(\omega)$  определяется формулой (5.6.1.6).

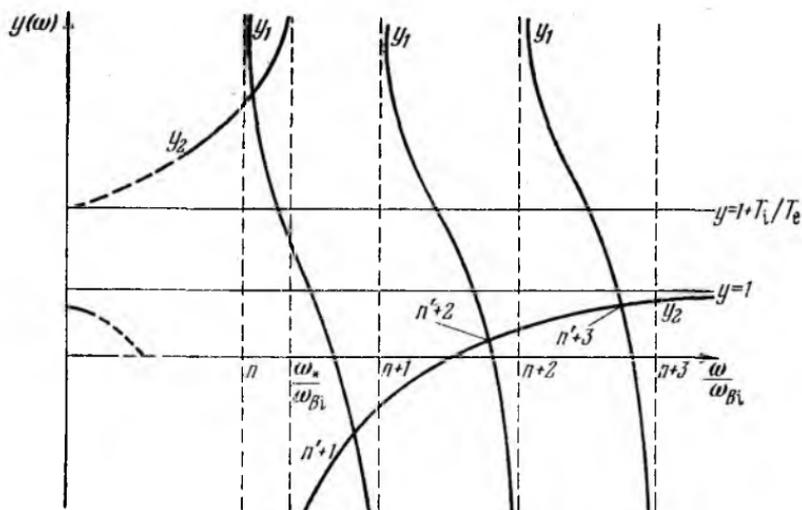


Рис. 5.6.4. Графическое решение уравнения  $y_1(\omega) = y_2(\omega)$  при  $n\omega_{B1} < \omega_* < (n+1)\omega_{B1}$ .

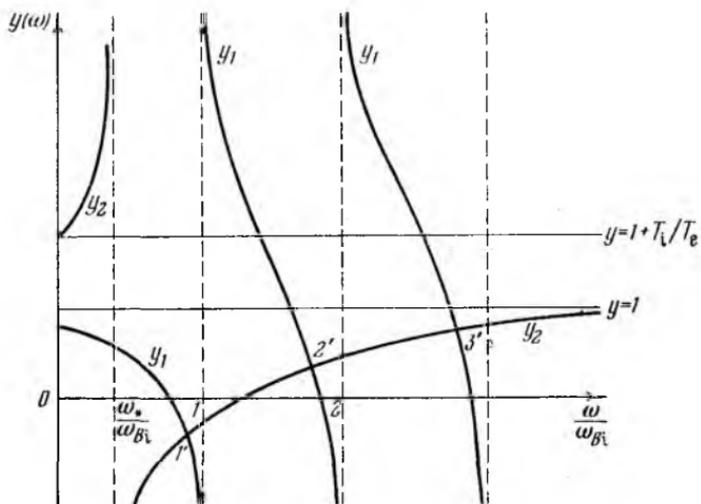


Рис. 5.6.5. Графическое решение уравнения  $y_1(\omega) = y_2(\omega)$  при  $\omega_* < \omega_{B1}$ .

Если  $|\zeta| \ll 1$ , что эквивалентно при  $k\rho_1 \sim 1$  и  $\omega \sim \omega_{B1}$  неравенству (5.6.1.16), то дисперсионное уравнение (5.6.2.3) переходит в дисперсионное уравнение для продольных ионно-циклотронных колебаний (5.6.1.5).

Исследуем уравнение (5.6.2.3) более подробно графически. Графики функций  $y_1 = f(\omega)$  и  $y_2 = \frac{T_1}{T_0} \frac{1}{1 - \zeta(\omega)} + 1$  схематически показаны на рис. 5.6.4 и 5.6.5. На рис. 5.6.4 точка  $\omega = \omega_*$ , в которой  $\zeta(\omega_*) = 1$ , лежит в интервале  $n\omega_{B1} < \omega_* < (n+1)\omega_{B1}$  ( $n=1, 2, \dots$ ). На рис. 5.6.5 эта точка лежит левее  $\omega_{B1}$ . Решениям уравнения (5.6.2.3)  $\omega = \omega^{(n)}(k, \theta)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) соответствуют точки пересечения  $1', 2', 3', \dots$  кривых  $y = y_1$  и  $y = y_2$ .

Как видно из рис. 5.6.5, уравнение (5.6.2.3) для частот непотенциальных волн, в отличие от дисперсионного уравнения (5.6.1.5) для продольных волн, имеет дополнительный корень  $\omega = \omega^{(1)}(k, \theta)$ , который меньше  $\omega_{B1}$ . В области  $n\omega_{B1} < \omega < (n+1)\omega_{B1}$  уравнение (5.6.2.3) при  $\zeta \neq 0$  имеет два решения, в отличие от случая продольных колебаний ( $\zeta=0$ ), когда имеется только одно решение.

Частота  $\omega^{(n)}(k, \theta)$  равна  $n\omega_{B1}$  при  $k = k_n$  ( $\zeta = 1$ ), где

$$k_n(\theta) = \frac{\omega_{B1}}{v_1} \left[ \left( \frac{T_1}{T_0} \frac{n}{\cos \theta} \right)^2 \frac{\xi_0}{2} \right]^{1/4}. \quad (5.6.2.4)$$

Схематические графики зависимости собственных частот  $\omega^{(n)}(k, \theta)$  от квадрата волнового вектора  $k^2$  представлены на рис. 5.6.6.

Продольные циклотронные колебания можно выделить, если устремить параметр  $\xi_0$  к нулю. В этом случае  $k_n \rightarrow 0$  и получающиеся графики совпадают с графиками, изображенными на рис. 5.6.2.

Частота  $\omega^{(n)}(k, \theta)$  близка к  $n\omega_{B1}$  при  $T_0 \gg T_1$  в трех случаях: при  $k\rho_1 \ll 1$ , при  $k\rho_1 \gg 1$  и при  $k \approx k_n$ ; при  $T_1 \gg T_0$  она мало отличается от  $n\omega_{B1}$  при произвольных значениях  $k\rho_1$ .

В этих случаях нетрудно показать, что

$$\omega^{(n)}(k, \theta) = n\omega_{B1}(1 + \Delta_n), \quad (5.6.2.5)$$

где

$$\Delta_n = \frac{A_n}{(T_i/T_e) [1 - \zeta (n\omega_{Bi})]^{-1} + 1 - \sum_{m \neq n} A_m n / (m - n)}. \quad (5.6.2.6)$$

Формулой (5.6.2.6) можно пользоваться при  $k$ , не слишком близких к  $k_n$ , только если

$$1 \gg \left| \frac{k - k_n}{k} \right| \gg \frac{T_i}{T_e} \frac{kv_1}{n\omega_{Bi}} \frac{\cos \theta}{A_n}. \quad (5.6.2.7)$$

Если последнее неравенство не выполняется, то возникает сильное циклотронное затухание.

В области длинных волн ( $k\rho_1 \ll 1$ ) в дисперсионном уравнении (5.6.2.2) величина  $\delta\epsilon_e \approx \epsilon_{33} \cos^2 \theta$  значительно больше  $\delta\epsilon_i$ , если  $\omega$  не близко к  $n\omega_{Bi}$ . Учитывая это, представим уравнение (5.6.2.2) в виде

$$\mathcal{N}^2 = \frac{\epsilon_{11}}{\cos^2 \theta} \approx \frac{\omega_{pi}^2}{\cos^2 \theta (\omega_{Bi}^2 - \omega^2)}. \quad (5.6.2.8)$$

Полученное соотношение совпадает с дисперсионным уравнением для альвеновской ветви (А-ветви) колебаний при  $\theta \approx 1/2\pi$  в холодной плазме (см. (5.1.5.1)). Частота этих колебаний равна

$$\omega(k, \theta) = \frac{kv_A \cos \theta}{\sqrt{1 + (k_1 c / \omega_{pi})^2}}. \quad (5.6.2.9)$$

При  $k_1 c \ll \omega_{pi}$  она совпадает с частотой альвеновской магнито-гидродинамической волны  $\omega = k_1 v_A$ . Таким образом, дополнительная ветвь колебаний, имеющая при  $k < k_1$  частоту, меньшую  $\omega_{Bi}$ , является альвеновской ветвью. При  $k > k_1$  она переходит в циклотронные колебания. Отметим, что при  $k \approx k_1$  они сильно затухают.

Найдем теперь декремент затухания рассматриваемых колебаний, считая, что частоты  $\omega^{(n)}(k, \theta)$  известны. Учитывая в (5.6.2.2) малые антиэрмитовы члены, получим

$$\gamma = \gamma_e^{(n)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty} \gamma_m^{(n)};$$

здесь

$$\gamma_e^{(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} \frac{T_i}{T_e} z_e \left[ 1 + \frac{T_i \xi_e \omega^2 (f-1)}{T_e 2x_1^2 \omega_{Bi}^2 \cos^2 \theta} \right] \omega, \quad (5.6.2.10)$$

$$\gamma_m^{(n)} = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} A_m z_0 \exp(-z_m^2) \left[ 1 - \frac{T_i^2 \xi_e n^2}{2T_e^2 x_1^2 \cos^2 \theta} + \frac{T_i \xi_e (\omega / \omega_{Bi} - n)^2}{4T_e x_1^2 \cos^2 \theta} (f-1) \right] \omega, \quad (5.6.2.11)$$

где  $\alpha = (\zeta - 1) \omega \frac{df}{d\omega} + 2\zeta (f - 1)$ , причем в  $\alpha = \alpha(\omega)$  и  $f = f(\omega)$  следует положить  $\omega = \omega^{(n)}(k, \theta)$ .

При  $|\zeta| \ll 1$  эти выражения совпадают с выражениями (5.6.1.12), полученными выше для продольных циклотронных волн.

Так как величины  $z_m^2$  велики, то, очевидно, из экспоненциально малых величин  $\gamma_m^{(n)} \sim \exp(-z_m^2)$  следует учитывать наибольшие  $\gamma_n^{(n)}$  и  $\gamma_{n\pm 1}^{(n)}$ .

## § 5.7. Циклотронные волны в случае поперечного распространения

### 5.7.1. Обыкновенные циклотронные волны.

Перейдем к изучению циклотронных волн в случае их поперечного распространения \*).

При  $\theta = 1/2\pi$  компоненты тензора диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{13}$  и  $\epsilon_{23}$  обращаются в нуль и дисперсионное уравнение (5.2.2.5) распадается на два уравнения. Одно из них имеет вид

$$\mathcal{N}^2 - \epsilon_{33} = 0 \quad (5.7.1.1)$$

и в области высоких частот ( $\omega > \omega_{pe}$ ) определяет показатель преломления линейно поляризованной обыкновенной волны (см. п. 5.1.7). Кроме того, оно имеет решения  $\omega = \omega(k)$ , стремящиеся при  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow \infty$  к  $n|\omega_{Be}|$ ,  $n=1, 2, \dots$ . Эти ветви колебаний называют *обыкновенными электронными и ионными циклотронными волнами*.

Начнем с исследования обыкновенных электронных циклотронных волн. Пренебрегая вкладом ионов в  $\epsilon_{33}$ , можно исходить из следующего дисперсионного уравнения:

$$\mathcal{N}^2 = \epsilon_{33} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(x_e)}{\omega - n|\omega_{Be}|}. \quad (5.7.1.2)$$

Прежде чем приступить к его анализу, отметим, что мы не учитываем релятивистских эффектов порядка  $v_0^2/c^2$ , в частности поперечного (релятивистского) эффекта Доплера, и поэтому в (5.7.1.2) при оценке  $\epsilon_{33}$ , а также остальных компонент тензора  $\epsilon_{ij}$  следует считать разность  $\omega - n|\omega_{Be}|$  достаточно большой, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \frac{\omega - n|\omega_{Be}|}{\omega} \right| \gg \frac{v_0^2}{c^2}. \quad (5.7.1.3)$$

Релятивистскими эффектами можно пренебречь только при выполнении этого условия.

\*) Продольные электронные циклотронные волны были обнаружены Гроссом [62]. На существование циклотронных волн в ферми-газе и ферми-жидкости было указано Силиным [65]. Позднее эти колебания изучались в работах [16, 18, 57—60, 64] и др.

Если длина волны равна по порядку величины ларморовскому радиусу электронов ( $k\rho_e \sim 1$ ), то при  $\omega \sim |\omega_{Be}|$  имеем для квадрата показателя преломления обыкновенной циклотронной волны  $\mathcal{N}^2 \sim c^2/v_e^2 \gg 1$ . Поэтому в (5.7.1.2) можно пренебречь единицей по сравнению с  $\mathcal{N}^2$  и членами, содержащими  $\omega_{pe}^2$ . Очевидно, что члены с  $\frac{\omega_{pe}^2 A_n}{\omega(\omega - n|\omega_{Be}|)}$  в  $\epsilon_{33}$  всегда могут стать сравнимыми (при достаточно малых  $|\omega - n|\omega_{Be}|$ ) с величиной  $\mathcal{N}^2 \sim c^2/v_e^2$ . Однако

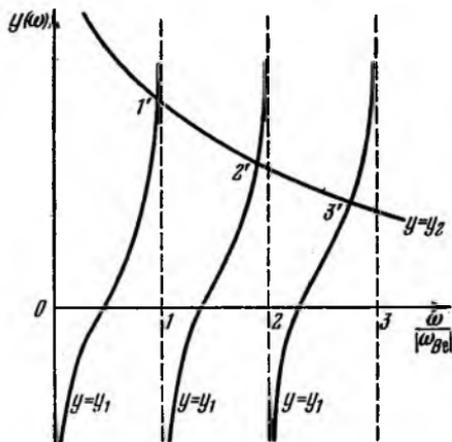


Рис. 5.7.1. Графическое решение уравнения (5.7.1.2).

если  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ , то поскольку  $A_n < 1$ , это возможно только при  $|(\omega - n|\omega_{Be}|)\omega| \leq v_e^2/c^2$ , что противоречит условию (5.7.1.3). Поэтому мы должны ограничиться исследованием случая, когда  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ .

Исследуем уравнение (5.7.1.2) графически. Его решениям  $\omega = \omega^{(n)}(k)$  ( $n=1, 2, \dots$ ) соответствуют точки пересечения  $1', 2', 3', \dots$  кривых  $y_1(\omega) = \epsilon_{33}(k, \omega)$  и  $y_2(\omega) = (ck/\omega)^2$  (рис. 5.7.1). Как мы видим, частота  $\omega^{(n)}(k)$  лежит в таком интервале:  $(n-1)|\omega_{Be}| < \omega^{(n)} < n|\omega_{Be}|$ ,  $n=1, 2, \dots$

Аналитические выражения для собственных частот

$\omega^{(n)}(k)$  можно получить в случае плазмы малого давления  $\xi_e = 8\pi n_0 T_e / B_0^2 \ll 1$ .

Учитывая при  $x_e = k^2 \rho_e^2 \gg \xi_e$  в выражении для  $\epsilon_{33}$  (см. (5.7.1.2)) только резонансное слагаемое, пропорциональное  $A_n/(\omega - n|\omega_{Be}|)$ , получим

$$\omega^{(n)}(k) = n|\omega_{Be}| \left[ 1 - \xi_e \frac{A_n(x_e)}{2x_e} \right], \quad n=1, 2, \dots \quad (5.7.1.4)$$

В области коротких волн ( $k\rho_e \gg 1$ ) эта формула приобретает вид

$$\omega^{(n)}(k) = n|\omega_{Be}| \left( 1 - \frac{\xi_e}{\sqrt{8\pi} x_e^{3/2}} \right). \quad (5.7.1.5)$$

Если  $x_e \leq \xi_e$ , то в  $\epsilon_{33}$  нужно учитывать, кроме резонансного слагаемого, также член с  $n=0$ , и тогда мы получим соотношение

$$\omega^{(n)}(k) = n|\omega_{Be}| \left[ 1 - \xi_e \frac{A_n(x_e)}{2x_e + \xi_e} \right], \quad n=1, 2, \dots \quad (5.7.1.6)$$

Оно определяет частоты  $\omega^{(n)}(k)$  при  $\xi_e \ll 1$  для произвольных значений  $kr_e$ .

Поведение частот  $\omega^{(n)}(k)$ , задаваемых последними соотношениями, в зависимости от величины волнового вектора схематически показано на рис. 5.7.2.

Частоты  $\omega^{(n)}(k)$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$  убывают в области  $k < k_{\min}$ , где  $k_{\min} r_e \sim 1$ , при  $k = k_{\min}$  достигают минимума, в котором  $n|\omega_{Be}| - \omega \sim \xi_e \omega$ , а затем возрастают, приближаясь к  $n|\omega_{Be}|$ .

Для плазмы конечного давления ( $\xi_e \geq 1$ ) поведение частот  $\omega^{(n)}(k)$  качественно оказывается таким же, как и при  $\xi_e \ll 1$ . Однако если в последнем случае частоты  $\omega^{(n)}(k)$  близки к  $n|\omega_{Be}|$  при произвольных значениях  $kr_e$ , то при  $\xi_e \geq 1$  и  $kr_e \sim 1$  они значительно отличаются от  $n|\omega_{Be}|$ .

При  $kr_e \ll 1$  формула (5.1.7.6) для  $\omega^{(n)}$  справедлива и для плазмы конечного давления; в этом случае

$$\omega^{(n)}(k) = n|\omega_{Be}| [1 - A_n(x_e)] \quad (\xi_e \geq 1), \quad (5.1.7.7)$$

где

$$A_n(x_e) = x_e^n / 2^n \cdot n!$$

Перейдем теперь к исследованию обыкновенных ионных циклотронных волн. Считая, что  $x_e \ll 1$ ,  $\omega \sim \omega_{Bi} \ll \omega_{Be}$ , сохраним в выражении для  $\epsilon_{33}$  только одно электронное слагаемое с  $n=0$ :

$$\epsilon_{33} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A_n(x_i)}{\omega - n\omega_{Bi}}. \quad (5.7.1.8)$$

Решение дисперсионного уравнения (5.7.1.2) в этом случае находится так же, как и для электронных циклотронных волн.

Схематически поведение собственных частот обыкновенных ионных циклотронных волн в зависимости от  $k$  показано на рис. 5.7.2, где нужно заменить индекс  $e$  на  $i$ .

Отметим, что из-за наличия в  $\epsilon_{33}$  большого электронного члена  $-\omega_{pe}^2/\omega^2$  дисперсионное уравнение может быть удовлетворено только при  $\omega \approx n\omega_{Bi}$ . Сохраняя в выражении для  $\epsilon_{33}$ , кроме

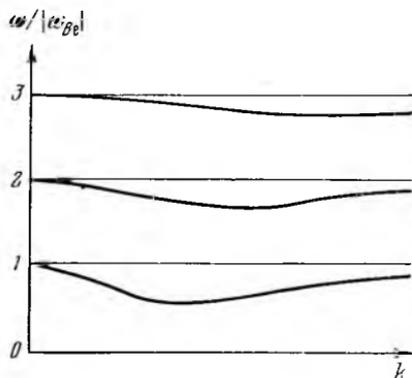


Рис. 5.7.2. Зависимость частот обыкновенных электронных циклотронных волн от величины  $k$ .

электронного слагаемого, резонансное ионное слагаемое, пропорциональное  $1/(\omega - n\omega_{Bi})$ , получим

$$\omega^{(n)}(k) = n\omega_{Bi} \left[ 1 - \xi_i \frac{A_n(x_i)}{2x_i + \xi_i(m_i/m_e)} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7.1.9)$$

Отсюда следует, что частоты  $\omega^{(n)}(k)$  чрезвычайно близки к  $n\omega_{Bi}$  как при  $\xi_i \leq 1$ , так и при  $\xi_i \geq 1$ . Если  $\xi_i \geq x_i(m_e/m_i)$ , то  $\Delta\omega/\omega^{(n)} \sim (m_e/m_i)A_n(x_i)$ .

**5.7.2. Продольные электронные циклотронные колебания.** При  $\theta = 1/2\pi$  дисперсионное уравнение для продольных колебаний  $A = \varepsilon_{11} = 0$  в области высоких частот ( $\omega \gg \omega_{Bi}$ ), когда можно пренебречь движением ионов, принимает вид

$$\varepsilon_{11} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{x_e} A_n(x_e) \frac{1}{\omega - n|\omega_{Be}|} = 0. \quad (5.7.2.1)$$

Это уравнение нетрудно решить графически аналогично графическому решению (5.6.1.5) (см. рис. 5.6.1). Точкам пересечения  $1'$ ,  $2'$ , ... кривой

$$y = y_1(\omega) = \frac{\omega_{Be}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2 A_n}{x_e (\omega - n|\omega_{Be}|)}$$

с прямой  $y = y_2(\omega) = \omega_{Be}^2/\omega_{pe}^2$  соответствуют решения уравнения (5.7.2.1)  $\omega = \omega^{(n)}(k)$ , лежащие в интервале  $n|\omega_{Be}| < \omega^{(n)}(k) < (n+1)|\omega_{Be}|$ .

В области длинных волн  $k\rho_e \ll 1$ , разлагая величины  $A_n(x_e)$  в ряды по степеням  $x_e = k^2\rho_e^2$ , получим, что при  $\omega$ , не близком к  $n|\omega_{Be}|$ , частота продольных колебаний мало отличается от гибридной частоты  $\omega_{\infty}^{(1)}$ , а именно

$$\omega(k) = \omega_{\infty}^{(1)}(1 + \xi), \quad (5.7.2.2)$$

где

$$\omega_{\infty}^{(1)} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2}, \quad \xi(k) = \frac{3k^2\rho_e^2\omega_{pe}^2\omega_{Be}^2}{2\omega^2(\omega^2 - 4\omega_{Be}^2)} \Big|_{\omega=\omega_{\infty}^{(1)}}$$

С другой стороны, при  $k\rho_e \ll 1$  величина  $A_n$  мала, и уравнение (5.7.2.1) можно решить, считая частоту  $\omega(k)$  близкой  $n|\omega_{Be}|$ , т. е.

$$\omega(k) = n|\omega_{Be}|(1 + \xi'), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (5.7.2.3)$$

где

$$\xi'(k) = \frac{(n^2 - 1)\omega_{pe}^2 A_n(x_e)}{x_e [(n^2 - 1)\omega_{Be}^2 - \omega_{pe}^2]}.$$

В области коротких волн ( $kr_0 \gg 1$ ) величина  $A_n/x_0$  также мала, и в этом случае существует решение уравнения (5.7.2.1), близкое к  $n|\omega_{Be}|$ , а именно

$$\omega(k) = n|\omega_{Be}| \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2\pi x_0^3}} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right). \quad (5.7.2.4)$$

Поведение частот  $\omega^{(n)}(k)$  в зависимости от величины волнового вектора схематически показано на рис. 5.7.3 при  $\omega_{pe}^2 < 3\omega_{Be}^2$  и на рис. 5.7.4 при  $l^2 < 1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2 < (l+1)^2$  ( $l \geq 2$ ).

Как видно из рис. 5.7.4, частоты  $\omega^{(n)}(k)$  при  $n < l$  монотонно убывают при увеличении  $k$ , стремясь при  $kr_0 \rightarrow \infty$  к  $n|\omega_{Be}|$  (при

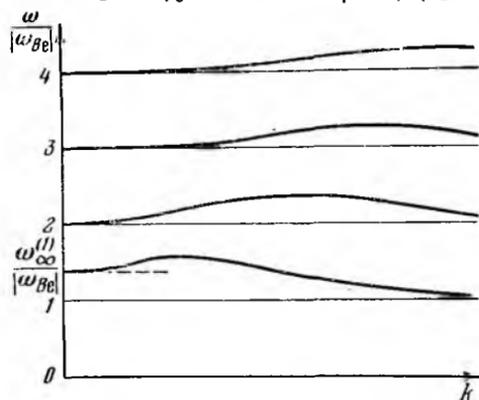


Рис. 5.7.3. Зависимость частот продольных электронных циклотронных колебаний от величины волнового вектора при  $\omega_{pe}^2 < 3\omega_{Be}^2$ .

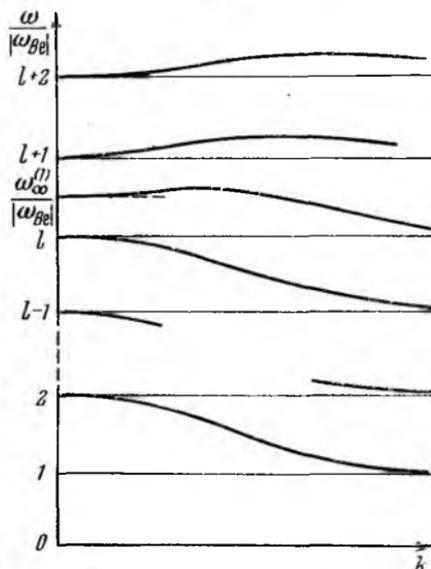


Рис. 5.7.4. Зависимость частот продольных электронных циклотронных колебаний от величины волнового вектора при  $l^2 < 1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}\right)^2 < (l+1)^2$  ( $l \geq 2$ ).

$kr_0 \gg 1$  частота этой волны определяется формулой (5.7.2.4). Частота  $\omega^{(l)}(k)$  ( $l|\omega_{Be}| < \omega_{\infty}^{(l)} < (l+1)|\omega_{Be}|$ ) при малых  $kr_0$  определяется соотношением (5.7.2.3); она монотонно возрастает при  $l \geq 2$  с ростом  $k$ , достигая максимума при  $kr_0 \sim 1$ , а затем убывает, стремясь к  $l|\omega_{Be}|$  при  $kr_0 \gg 1$ . Если  $l=1$ , то эта частота монотонно убывает с ростом  $k$  от значения  $\omega_{\infty}^{(1)}$  при  $k=0$  до  $|\omega_{Be}|$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Частоты  $\omega^{(n)}(k)$ , большие  $l|\omega_{Be}|$  ( $n > l$ ), возрастают с ростом  $k$  от значений  $n|\omega_{Be}|$  при  $k=0$ , достигают максимума при  $kr_0 \gg 1$ , а затем убывают, приближаясь к  $n|\omega_{Be}|$  при  $k \rightarrow \infty$ .

При  $kr_0 \ll 1$  собственные частоты определяются выражениями (5.7.2.2) и (5.7.2.3), а при  $kr_0 \gg 1$  — выражением (5.7.2.4). При  $kr_0 \sim 1$  уравнение (5.7.2.1) необходимо решать численно.

Отметим, что формулы (5.7.2.2) и (5.7.2.3) неприменимы, если гибридная частота  $\omega_{\infty}^{(1)}$  близка к  $n|\omega_{B0}|$ , а  $n=l$  или  $n=l+1$ . В этом случае, учитывая в сумме уравнения (5.7.2.1) слагаемые с  $n=\pm 1$  и резонансный член с  $n=l$  (либо  $n=l+1$ ), получим

$$\omega(k) = \omega_{\infty}^{(1)}(1 + \xi_{\pm}), \quad (5.7.2.5)$$

где

$$\xi_{\pm} = 1/2 \left( \frac{n|\omega_{B0}|}{\omega_{\infty}^{(1)}} - 1 \right) \pm 1/2 \sqrt{\left( \frac{n|\omega_{B0}|}{\omega_{\infty}^{(1)}} - 1 \right)^2 + \frac{2(n^2-1)^2}{n^2 x_e} A_n}. \quad (5.7.2.6)$$

Если разность  $\omega_{\infty}^{(1)} - n|\omega_{B0}|$  достаточно велика и  $(n|\omega_{B0}|/\omega_{\infty}^{(1)} - 1)^2 \gg \gg A_n/x_e$ , то (5.7.2.5) переходит либо в (5.7.2.2), либо в (5.7.2.3).

Отсюда следует, что собственные частоты всегда отличны от  $n|\omega_{B0}|$ . В частности, при  $\sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{B0}^2} = n|\omega_{B0}|$  собственные частоты отделены друг от друга конечными интервалами («щели» Гросса). Например, при  $\omega_{\infty}^{(1)} = 2|\omega_{B0}|$  получим из (5.7.2.5) и (5.7.2.6)  $\omega(k) = 2|\omega_{B0}|(1 \pm 3/8 kr_0)$ , т. е. расстояние между двумя соседними ветвями  $\Delta\omega = 3/2 kr_0 |\omega_{B0}| = 3/2 kv_e$  конечно.

**5.7.3. Продольные ионные циклотронные колебания.** В области низких частот  $\omega \ll |\omega_{B0}|$  дисперсионное уравнение для продольных ионных колебаний  $\varepsilon_{11} = 0$  при  $kr_0 \ll 1$  имеет вид

$$\frac{\omega_{B1}^2}{\omega_{pi}^2} \left( 1 + \frac{\omega_{B0}^2}{\omega_{pe}^2} \right) = \frac{\omega_{B1}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{x_i} A_n(x_i) \frac{1}{\omega - n\omega_{B1}}. \quad (5.7.3.1)$$

Как и в случае высокочастотных колебаний, нетрудно убедиться, что последнее уравнение имеет решения  $\omega = \omega^{(n)}(k)$ , лежащие в интервале

$$n\omega_{B1} < \omega^{(n)}(k) < (n+1)\omega_{B1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

В области длинных волн ( $kr_0 \ll 1$ ) одно из решений уравнения (5.7.3.1) близко к гибридной частоте  $\omega_{\infty}^{(2)}$ :

$$\omega(k) = \omega_{\infty}^{(2)}(1 + \xi), \quad (5.7.3.2)$$

где

$$\xi(k) = \frac{3k^2 r_0^2 \omega_{pi}^2 \omega_{B1}^2 \omega_{B0}^2}{2(\omega_{\infty}^{(2)})^2 (\omega_{pe}^2 + \omega_{B0}^2)} \left[ \frac{1}{(\omega_{\infty}^{(2)})^2 - 4\omega_{B1}^2} + 1/4 \frac{T_e}{T_i} \frac{(\omega_{\infty}^{(2)})^2 - \omega_{B1}^2}{\omega_{B0}^2 \omega_{B1}^2} \right].$$

Другие решения уравнения (5.7.3.1) при  $kr_1 \ll 1$  близки к  $n\omega_{B1}$ , а именно:

$$\omega(k) = n\omega_{B1}(1 + \xi'), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (5.7.3.3)$$

где

$$\xi'(k) = \frac{(n^2 - 1) A_n(k^2 \rho_1^2) \omega_{p1}^2}{x_1 [\omega_{B1}^2 (1 + \omega_{pe}^2 / \omega_{Be}^2) (n^2 - 1) - \omega_{p1}^2]}.$$

В области коротких волн  $kr_1 \gg 1$  решения уравнения (5.7.3.1) также близки к  $n\omega_{B1}$ :

$$\omega^{(n)}(k) = n\omega_{B1} \left[ 1 + \frac{\omega_{p1}^2 \omega_{Be}^2}{\omega_{B1}^2 (\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) \sqrt{2\pi x_1^2}} \right]. \quad (5.7.3.4)$$

При  $kr_1 \sim 1$  для нахождения собственных частот нужно решать уравнение (5.7.3.1) численно.

Зависимость от величины волнового вектора частот  $\omega^{(n)}(k)$  продольных ионно-циклотронных колебаний при поперечном распространении схематически представлена на рис. 5.7.3 и 5.7.4 (на этих рисунках нужно только заменить индекс  $e$  на индекс  $i$ , а частоту  $\omega_{\infty}^{(1)}$  на  $\omega_{\infty}^{(2)}$ ).

Если гибридная частота  $\omega_{\infty}^{(2)}$  близка к  $n\omega_{B1}$  ( $n$  равно  $l$  или  $l+1$ ), то формула (5.7.3.2) для частоты  $\omega^{(l)} \approx \omega_{\infty}^{(2)}$  и формула (5.7.3.3) для близкой к ней соседней частоты могут оказаться неприменимыми. В этом случае вместо них нужно пользоваться выражениями

$$\omega(k) = \omega_{\infty}^{(2)} (1 + \xi_{\pm}), \quad (5.7.3.5)$$

где

$$\xi_{\pm} = 1/2 \left( \frac{n\omega_{B1}}{\omega_{\infty}^{(2)}} - 1 \right) \pm 1/2 \sqrt{\left( \frac{n\omega_{B1}}{\omega_{\infty}^{(2)}} - 1 \right)^2 + 2 \frac{(n^2 - 1)^2 A_n(x_1)}{n^2 x_1}}.$$

В области  $(n\omega_{B1}/\omega_{\infty}^{(2)} - 1)^2 \gg A_n(x_1)/x_1$ , формула (5.7.3.5) «сшивается» с формулами (5.7.3.2) и (5.7.3.3).

Минимальное расстояние между соседними частотами при  $\omega_{\infty}^{(2)} = n\omega_{B1}$  равно

$$\Delta\omega = 2n\omega_{B1} |\xi_{\pm}| = \sqrt{\frac{(n^2 - 1)^2}{2^{n-1} n!}} (kr_1)^{n-1} \omega_{B1}.$$

**5.7.4. Необыкновенные электронные циклотронные волны.** При  $\theta = 1/2\pi$  второе дисперсионное уравнение, на которое распадается общее уравнение (5.2.2.5), имеет вид

$$\epsilon_{11} \mathcal{A}^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{22} - \epsilon_{12}^2 = 0. \quad (5.7.4.1)$$

В случае высокочастотных (электронных) колебаний вклад ионов в  $\epsilon_{ij}$  пренебрежимо мал и сами эти величины имеют вид

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{x_0} A_n(x_0) \frac{1}{\omega - n |\omega_{Be}|}, \\ \epsilon_{22} &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{n^2}{x_0} A_n(x_0) - 2x_0 A_n'(x_0) \right] \frac{1}{\omega - n |\omega_{Be}|}, \\ \epsilon_{12} &= i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} n A_n'(x_0) \frac{1}{\omega - n |\omega_{Be}|}. \end{aligned} \quad (5.7.4.2)$$

При  $T_0=0$  уравнение (5.7.4.1) определяет в области высоких частот показатель преломления высокочастотной необыкновенной волны. Поэтому мы будем называть циклотронные волны, частоты которых определяются уравнением (5.7.4.1), *необыкновенными циклотронными волнами*.

Выше были исследованы приближенные решения уравнения (5.7.4.1), соответствующие продольным циклотронным колебаниям ( $\epsilon_{11}=0$ ). При  $\omega \sim \omega_{pe} \sim |\omega_{Be}|$  такие колебания существуют, если  $\mathcal{N}^2 \gg 1$ . Поскольку мы рассматривали волны с  $k\rho_0 \sim 1$  и  $\mathcal{N} \sim c/v_0$ , то поправки к уравнению  $\epsilon_{11}=0$  будут порядка  $v_0^2/c^2$  и их можно не учитывать.

Однако, кроме продольных циклотронных волн, уравнение (5.7.4.1) имеет, как мы покажем ниже, дополнительные корни, близкие к  $n |\omega_{Be}|$ .

Перейдем к исследованию дисперсионного уравнения (5.7.4.1), предполагая, как и в п. 5.7.1, что  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$  и давление плазмы мало ( $\xi_0 \ll 1$ ).

Если  $x_0 \gg \xi_0$ , то в выражениях (5.7.4.2) для  $\epsilon_{ij}$  можно сохранить только резонансные слагаемые; тогда

$$\omega(k) = n |\omega_{Be}| [1 - \xi_0 \varphi(x_0)], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.7.4.3)$$

где

$$\varphi(x_0) = \frac{1}{2} A_n(x_0) \left[ \frac{n^2}{x_0^2} + 1 - \left( \frac{I_n'(x_0)}{I_n(x_0)} \right)^2 \right]. \quad (5.7.4.4)$$

Функция  $\varphi(x_0)$  в области малых значений  $x_0$  монотонно возрастает, достигает максимума при  $x_0 \sim 1$  и затем стремится к нулю.

В области  $x_0 \leq \xi_0$  при  $\omega \approx n |\omega_{Be}|$  ( $n=2, 3, \dots$ ) в тензоре  $\epsilon_{ij}$  нужно учитывать, кроме резонансных членов, пропорциональных  $1/(\omega - n |\omega_{Be}|)$ , также слагаемые, пропорциональные  $1/(\omega \pm |\omega_{Be}|)$ . Тогда вместо (5.7.4.3) получим

$$\omega(k) = n |\omega_{Be}| \left[ 1 - \frac{\xi_0 \varphi(x_0)}{1 + n \xi_0 / x_0 (n+1)} \right], \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.7.4.5)$$

При  $\xi_0 \ll x_0 \ll 1$  формулы (5.7.4.3) и (5.7.4.5) сшиваются друг с другом.

Кроме ветви электронно-циклотронных колебаний с частотами, определяемыми (5.7.4.3) и (5.7.4.4), имеются еще ветви колебаний, частоты которых при  $k\rho_0 \ll 1$  задаются выражениями

$$\omega(k) = n |\omega_{Be}| \left[ 1 - 2I_n(x_0) \frac{(n^2 - 1)x_0 + n(n-1)\xi_0}{x_0(2x_0 + \xi_0)} \right] \quad (n = 2, 3, \dots). \quad (5.7.4.6)$$

Частоты колебаний этих ветвей при данном  $k$  гораздо дальше отстоят от  $n |\omega_{Be}|$ , чем частоты (5.7.4.3) или (5.7.4.5).

В области  $\xi_0 \ll x_0 \ll 1$  последнее выражение переходит в (5.7.2.3) для частот продольных циклотронных колебаний. Таким образом, колебания с частотами (5.7.4.6) являются длинноволновой частью ветви продольных циклотронных колебаний. В области  $k\rho_0 \geq 1$  частоты этих колебаний определяются из уравнения  $\varepsilon_{11} = 0$  и при  $k\rho_0 \gg 1$  они стремятся к  $(n-1) |\omega_{Be}|$ .

Графики, показывающие схематически зависимость частот необыкновенных электронных циклотронных волн от величины волнового вектора, приведены на рис. 5.7.5.

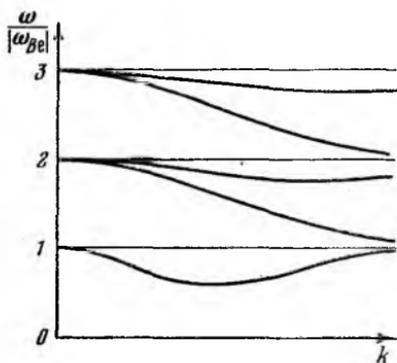


Рис. 5.7.5. Зависимость частот необыкновенных электронных циклотронных волн от величины волнового вектора при  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ .

**5.7.5. Необыкновенные ионные циклотронные волны.** В области низких частот  $\omega \sim \omega_{Bi}$  ( $\omega \ll \sqrt{\omega_{Bi} |\omega_{Be}|}$ ) при  $k\rho_0 \ll 1$  для плотной плазмы ( $\omega_{pi} \gg \omega_{Bi}$ ) компоненты тензора  $\varepsilon_{ij}$  определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n^2}{x_1} A_n(x_1) \frac{1}{\omega - n\omega_{Bi}}, \\ \varepsilon_{22} &= -\frac{\omega_{pi}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{n^2}{x_1} A_n(x_1) - x_1 A_n'(x_1) \right] \frac{1}{\omega - n\omega_{Bi}}, \\ \varepsilon_{12} &= -i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{n A_n(x_1)}{\omega - n\omega_{Bi}} - i \frac{\omega_{pi}^2}{\omega \omega_{Bi}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7.5.1)$$

Займемся теперь исследованием дисперсионного уравнения (5.7.4.1) в области низких частот, используя приведенные выше выражения для компонент диэлектрической проницаемости.

Прежде всего напомним, что при  $kr_i \ll 1$ , когда можно пренебречь тепловым движением ионов, уравнение (5.7.4.1) имеет решение, соответствующее быстрой магнитозвуковой волне

$$\omega(k) = kv_A. \quad (5.7.5.2)$$

Кроме того, это уравнение имеет дополнительные корни, соответствующие циклотронным волнам. Частоты последних получим, сохраняя в выражениях (5.7.5.1) только резонансные члены; тогда

$$\omega(k) = n\omega_{B1} \left[ 1 - \frac{\xi_i x_i \varphi(x_i)}{x_i - x_0} \right], \quad n = 1, 2, \dots \quad (5.7.5.3)$$

и

$$\omega(k) = n\omega_{B1} \left[ 1 - \frac{2(n^2 - 1) I_n(x_i)(x_i - x_0)}{x_i(2x_i - n^2 \xi_i)} \right], \quad n = 2, 3, \dots; \quad (5.7.5.4)$$

здесь величина  $\varphi(x_i)$  определяется формулой (5.7.4.4), где индекс  $e$  заменен индексом  $i$ , и

$$x_0 = \xi_i \frac{n^2}{n^2 + 1}.$$

Соотношение (5.7.5.4) получено при  $x_i \ll 1$ . Отметим, что при  $x_i \gg \xi_i$  оно совпадает с выражением (5.7.3.3) для частоты продольных колебаний. Частота, определяемая (5.7.5.4), имеет экстремумы в точках

$$x_i = x_{\pm} = \frac{1}{4}\xi_i \frac{n^2}{n+1} (n+4 \pm \sqrt{n^2+8}), \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.7.5.4')$$

Формулы (5.7.5.2) и (5.7.5.4) (а также формула (5.7.5.3) при  $n=1$ ) неприменимы в области пересечения этих ветвей, т. е. при  $x_i \approx \frac{1}{2}n^2 \xi_i$ . В этом случае вместо них следует пользоваться соотношениями

$$\omega(k) = \omega_{\pm} = \frac{1}{2}\omega_{B1} \left[ \sqrt{\frac{2x_i}{\xi_i} + n} \pm \sqrt{\left( \sqrt{\frac{2x_i}{\xi_i}} - n \right)^2 + 2n^2(n-1)^2 \frac{I_n(x_i)}{x_i}} \right], \quad n = 2, 3, \dots \quad (5.7.5.5)$$

и

$$\omega = \omega_{\pm} = \frac{1}{2}\omega_{B1} \left[ \sqrt{\frac{2x_i}{\xi_i} + 1} \pm \sqrt{\left( \sqrt{\frac{2x_i}{\xi_i}} - 1 \right)^2 + \frac{1}{2}x_i^2} \right], \quad n = 1. \quad (5.7.5.6)$$

При  $(\sqrt{2x_i/\xi_1} - n)^2 \gg I_n(x_i)/x_i$  и  $(\sqrt{2x_i/\xi_j} - 1)^2 \gg x_i^2$  они переходят в (5.7.5.2) и (5.7.5.4) и (5.7.5.2) и (5.7.5.3) соответственно.

Выражения (5.7.5.3) и (5.7.5.4) также неприменимы при  $x_i \approx x_0$ . В этом случае вместо них получим

$$\omega(k) = \omega_{\pm}^* = n\omega_{B1} \left[ 1 + \frac{\sqrt{1+n}}{n} I_n(x_i) \psi_{\pm}(x_i) \right], \quad n = 2, 3, \dots, \quad (5.7.5.7)$$

где

$$\psi_{\pm}(x) = x \pm \sqrt{x^2 + 1}, \quad x = \frac{n\sqrt{n+1}}{x_0^2} (x_i - x_0).$$

В области  $|x| \gg 1$  формула (5.7.5.7) дает для  $\omega(k)$  выражение (5.7.5.3) и (5.7.5.4).

Зависимость частот  $\omega^{(n)}(k)$ , определенных соотношениями (5.7.5.2)–(5.7.5.7), от величины волнового вектора характеризуется кривыми, показанными на рис. 5.7.6, где по оси абсцисс отложено  $kr_1 = \sqrt{x_i}$ .

Рассмотрим на нем подробнее участки кривых 1, 2, 3. Кривая 1 в области  $2x_i < \xi_1$  соответствует быстрой магнитозвуковой волне с частотой (5.7.5.2). В области  $2x_i \approx \xi_1$  ее частота определяется (5.7.5.6) для  $\omega_-$ , а при  $2x_i > \xi_1$  — (5.7.5.3). Кривая 1 достигает в этой области максимума при  $x_i = \xi_1$ , затем с ростом  $k$  убывает, достигает минимума при  $x_i \sim 1$  и снова возрастает, приближаясь к  $\omega_{B1}$ .

Частота ветви колебаний 2 определяется формулой (5.7.5.3) при  $2x_i < \xi_1$ , (5.7.5.6) для  $\omega_+$  при  $2x_i \approx \xi_1$ , (5.7.5.2) при  $\xi_1 < 2x_i < 4\xi_1$ , формулой (5.7.5.5) для  $\omega_-$  при  $n = 2$  и (5.7.5.4) для  $n = 2$  при  $2\xi_1 < x_i \ll 1$ . В области  $x_i > 2\xi_1$  частота  $\omega(k)$  убывает, приближаясь при  $k \rightarrow \infty$  к  $\omega_{B1}$  (при  $x_i \gg \xi_1$  эти колебания становятся продольными).

Кривые с  $l = 2n - 1 = 3, 5, 7, \dots$ , вид которых определяется при  $x_i < x_0$  выражением (5.7.5.4), убывают с ростом  $k$  от значения  $\omega^{(l)} = n\omega_{B1}$  (при  $k = 0$ ), достигают минимума при  $x_i = x_-$ , а затем возрастают. При  $x_i \approx x_0$  вид кривых определяется выражением (5.7.5.7) для  $\omega_+$ , а при  $|x_i - x_0| \gg \xi_1^2$  — соотношением (5.7.5.3).

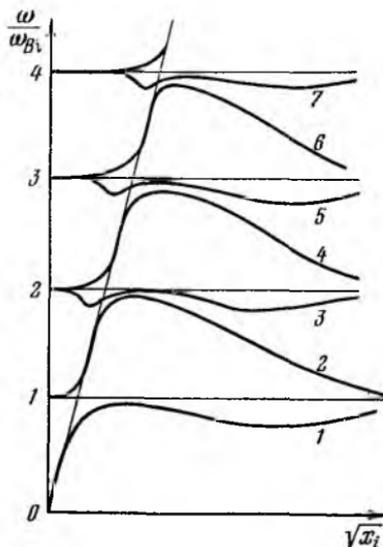


Рис. 5.7.6. Зависимость частот необыкновенных ионных циклотронных волн и быстрой магнитозвуковой волны от волнового вектора.

В этой области кривая  $l$  достигает максимума при  $x_i = x_+$ , затем убывает, достигает минимума при  $x_i = x_n \sim 1$  и затем приближается к  $n\omega_{Vi}$ . Точка  $x_n$  с ростом  $n$  сдвигается вправо.

Частоты колебаний, соответствующие кривым  $l = 2n = 4, 6, \dots$ , определяются формулой (5.7.5.3) при  $x_i < x_0$ , (5.7.5.7) для  $\omega_-^*$  при  $x_i \approx x_0$ , (5.7.5.4) при  $x_0 < x_i < 1/2 n^2 \xi_i$ , (5.7.5.5) для  $\omega_+$  при  $x_i \approx 1/2 n^2 \xi_i$ , (5.7.5.2) при  $1/2 n^2 \xi_i < x_i < 1/2 (n+1)^2 \xi_i$ , (5.7.5.5) для  $\omega_-$  при  $x_i \approx 1/2 (n+1)^2 \xi_i$ . При  $x_i \gg \xi_i$  частота этих колебаний, которые являются чисто продольными, определяется из уравнения  $\epsilon_{11} = 0$ ; в этой области частота колебаний ветви  $l = 2n$  монотонно убывает, приближаясь к  $n\omega_{Vi}$ . Кривая  $l = 2n$  имеет максимум при  $x_i = x_+$ , который лежит ниже минимума кривой  $l = 2n + 1$  в точке  $x_i = x_-$ , где величина  $x_-$  определяется формулой (5.7.5.4'), в которой надо заменить  $n$  на  $n + 1$ .

Подведем итоги. При  $\theta = 1/2 \pi$  существуют несколько групп ветвей электронных и ионных циклотронных волн: обыкновенные циклотронные волны, продольные циклотронные колебания и необыкновенные циклотронные волны. Зависимость частот этих волн от величины волнового вектора показана на рис. 5.7.1—5.7.6. В случае плазмы малого давления можно получить явные выражения для собственных частот  $\omega(k)$  циклотронных волн, применимые для произвольных значений  $k\rho_a$ .

## ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ПОТОКОВ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С ПЛАЗМОЙ. УСТОЙЧИВЫЕ И НЕУСТОЙЧИВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

---

### § 6.1. Взаимодействие потоков заряженных частиц с колебаниями свободной плазмы

**6.1.1. Дисперсионное уравнение для системы плазма — пучок.** В предыдущих главах мы нашли спектры колебаний равновесной и квазиравновесной (двухтемпературной) плазмы и показали, что ее колебания затухают даже в том случае, если пренебрегать парными столкновениями частиц. Эта важная особенность таких колебаний объясняется тем, что в бесстолкновительной плазме затухание колебаний обусловлено резонансным взаимодействием частиц с волнами, при котором частицы, движущиеся в фазе с волной, получают от поля энергии больше, чем отдают ему. Последнее обстоятельство связано в свою очередь с характером функции распределения частиц, которая в равновесном и квазиравновесном случаях изотропна и убывает с увеличением энергии частиц.

Представим себе теперь, что распределение частиц плазмы отличается от равновесного. Как уже указывалось, с ростом температуры увеличивается длина свободного пробега и возрастает время установления равновесия. Поэтому для достаточно горячей и не слишком плотной плазмы распределения частиц в течение больших промежутков времени могут значительно отличаться от равновесного. Такие распределения, естественно, не обязательно должны быть изотропными и монотонно убывающими функциями скорости частиц. В этом случае колебания плазмы, обусловленные самосогласованным полем, могут и не быть затухающими (как в случае равновесного распределения), так как для неравновесных распределений энергия, отдаваемая волнами частицам, не должна обязательно превосходить энергию, получаемую ими от частиц. Если распределение частиц таково, что волны получают от частиц энергии больше, чем отдают ее частицам, то амплитуды колебаний плазмы будут нарастать с течением времени и распределение частиц станет неустойчивым.

Такая ситуация возникает, например, в плазме, в которой распределение частиц по скоростям имеет вид суммы максвелловского распределения и узкого пика около некой скорости  $u$ . Такое распределение соответствует прохождению пучка заряженных

частиц, движущихся со скоростью  $u$  через равновесную плазму. Флуктуации плотности и скорости частиц пучка распространяются вследствие коллективного взаимодействия этих частиц с плазмой в виде волн с нарастающей амплитудой; такой же характер имеет и возникающее при этом электрическое поле. Увеличение амплитуды волн и указывает, что система плазма—пучок является неустойчивой \*).

Итак, возникает общий вопрос об установлении критериев, при выполнении которых колебания плазмы будут затухающими (или нарастающими). Изучению характера колебаний в неравновесной (но пространственно однородной) плазме и выяснению критериев устойчивости и неустойчивости различных распределений частиц в плазме и посвящена настоящая глава.

Простейшим и вместе с тем наиболее важным примером неравновесной плазмы (с его изучения мы и начнем здесь) является система плазма—пучок, т. е. равновесная свободная плазма, через которую проходит скомпенсированный пучок заряженных частиц.

Предположим, что частицы сорта  $\alpha$  плазмы и пучка имеют максвелловские распределения  $f_{\alpha 0}$  и  $f'_{\alpha 0}$  и температуры  $T_{\alpha}$  и  $T'_{\alpha}$ , т. е.

$$f_{\alpha 0} = n_0 \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m_{\alpha} v^2}{2T_{\alpha}} \right),$$

$$f'_{\alpha 0} = n'_0 \left( \frac{m_{\alpha}}{2\pi T'_{\alpha}} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m_{\alpha} (v - u)^2}{2T'_{\alpha}} \right],$$

где  $n_0$  и  $n'_0$  — плотности частиц (одного сорта) плазмы и пучка и  $u$  — средняя направленная скорость пучка, которая считается малой по сравнению со скоростью света.

Как было показано в п. 4.3.1, колебательные свойства плазмы определяются тензором диэлектрической проницаемости. Используя общую формулу (4.3.1.9) и подставляя в нее вместо функции распределения частиц сорта  $\alpha$  суммы  $f_{\alpha 0} + f'_{\alpha 0}$ , определим тензор диэлектрической проницаемости системы плазма—пучок

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(p)} + \epsilon_{ij}^{(b)}. \quad (6.1.1.1)$$

Здесь  $\epsilon_{ij}^{(p)}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы с максвелловским распределением частиц по скоростям, определяемый

\* Неустойчивость системы плазма—пучок (пучковая неустойчивость), обусловленная возбуждением высокочастотных колебаний, была открыта Ахиезером и Файнбергом [1—3] и Вомом и Гроссом [4, 5]. Возможность возбуждения низкочастотных колебаний при движении электронов относительно ионов была установлена Пирсом [6, 8]. Теория усиления колебаний в двухлучевой лампе с двумя холодными электронными пучками была развита Гаевым [9, 10].

формулами (4.3.4.2) и (4.3.4.3):

$$\varepsilon_{ij}^{(b)} = \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \varepsilon_i(k, \omega) + \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_i(k, \omega),$$

$$\varepsilon_i(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega k v_{\alpha}} w(z_{\alpha}),$$

$$\varepsilon_i(k, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{\alpha}^2} [1 + i \sqrt{\pi} z_{\alpha} w(z_{\alpha})],$$

где  $z_{\alpha} = \omega / \sqrt{2} k v_{\alpha}$ ,  $\omega_{p\alpha} = \sqrt{4\pi e^2 n_{\alpha} / m_{\alpha}}$ . Добавка к тензору диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  обусловлена частицами пучка и определяется выражениями (см. также [10])

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \cos^2 \Theta i \sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha}) + \\ &\quad + \left( \frac{\omega'_{p\alpha} \omega' \sin \Theta}{\omega k v'_{\alpha}} \right)^2 [1 + i \sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha})], \\ \varepsilon_{22}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 i \sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha}), \\ \varepsilon_{33}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \sin^2 \Theta i \sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha}) + \\ &\quad + \left( \frac{\omega'_{p\alpha} (\omega \cos \Theta + k u \sin^2 \Theta)}{\omega k v'_{\alpha}} \right)^2 [1 + i \sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha})], \\ \varepsilon_{13}^{(b)} &= \varepsilon_{31}^{(b)} = \sum_{\alpha} - \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \sin \Theta \cos \Theta i \sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha}) + \\ &\quad + \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \frac{\omega' \sin \Theta}{k^2 v_{\alpha}^2} (\omega \cos \Theta + k u \sin^2 \Theta) [1 + i \sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha})], \\ \varepsilon_{12}^{(b)} &= \varepsilon_{21}^{(b)} = \varepsilon_{23}^{(b)} = \varepsilon_{32}^{(b)} = 0, \end{aligned} \tag{6.1.1.2}$$

где  $\Theta$  — угол между волновым вектором  $\mathbf{k}$  и скоростью пучка  $\mathbf{u}$ ,  $\omega' = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u} = \omega - k_x u$ ,  $z'_{\alpha} = \omega' / \sqrt{2} k_x v'_{\alpha}$ ,  $v'_{\alpha} = \sqrt{T'_{\alpha} / m_{\alpha}}$ ,  $\omega'_{p\alpha} = \sqrt{4\pi e^2 n'_{\alpha} / m_{\alpha}}$ . Выражение для тензора  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  приведено в системе координат, в которой ось  $z$  параллельна скорости пучка, а вектор  $\mathbf{k}$  лежит в плоскости  $xz$ , так что  $k_x = k \sin \Theta$ ,  $k_y = 0$ ,  $k_z = k \cos \Theta$ .

Для системы плазма — пучок общее дисперсионное уравнение для электромагнитных волн (4.3.1.11) распадается на два уравнения

$$A/\mathcal{N}^2 = \varepsilon_{22}, \tag{6.1.1.3}$$

$$A/\mathcal{N}^2 - \varepsilon_{11} \varepsilon_{33} + \varepsilon_{13}^2 = 0, \tag{6.1.1.4}$$

где

$$A = \varepsilon_{11} \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{13} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{33} \cos^2 \theta.$$

Уравнение (6.1.1.3) определяет частоту поперечных электромагнитных волн ( $\mathbf{kE}=0$ ), а уравнения (6.1.1.4) — частоты продольно-поперечных колебаний ( $\mathbf{kE} \neq 0$  и  $[\mathbf{kE}] \neq 0$  при  $\theta \neq 0$ ).

Поперечные колебания оказываются не нарастающими, и мы поэтому не будем далее их рассматривать. Что же касается колебаний продольно-поперечных, то их амплитуды могут нарастать и, следовательно, система плазма—пучок будет неустойчивой. Изучение их представляет поэтому особенно большой интерес.

Если отдельные слагаемые, входящие в коэффициент  $A$ , значительно больше  $\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}/\omega^2$  и  $\varepsilon_{13}^2/\omega^2$ , то дисперсионное уравнение (6.1.1.4) приобретает вид

$$A = 1 + \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega_{p\alpha}}{kv_{\alpha}} \right)^2 [1 + i\sqrt{\pi} z_{\alpha} w(z_{\alpha})] + \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{kv'_{\alpha}} \right)^2 [1 + i\sqrt{\pi} z'_{\alpha} w(z'_{\alpha})] = 0. \quad (6.1.1.5)$$

Это уравнение описывает продольные колебания системы плазма—пучок; оно имеет, очевидно, следующую структуру:

$$A \equiv \varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = 1 + 4\pi \sum_{\alpha} \chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega - \mathbf{k}u_{\alpha}) = 0, \quad (6.1.1.6)$$

где  $\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)$  — продольная диэлектрическая проницаемость системы плазма—пучок,  $\chi_{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$  — поляризуемость частиц данного сорта; суммирование производится по всем сортам частиц плазмы и пучка.

**6.1.2. Возбуждение продольных колебаний плазмы резонансными частицами пучка.** Как было показано в гл. 4, в изотропной плазме существуют две ветви слабозатухающих колебаний, а именно, высокочастотная ветвь ленгмюровских колебаний и низкочастотная ветвь ионно-звуковых колебаний (в сильно неизолированной плазме). При прохождении пучка электронов через плазму электроны пучка, находящиеся в фазе с волной, для которых  $\omega(\mathbf{k}) \approx kv$  (будем называть эти электроны резонансными), могут раскачивать колебания обеих ветвей.

Найдем инкременты нарастания этих колебаний для пучка электронов малой плотности с большим тепловым разбросом по скоростям (случай горячего пучка).

Исследуем сначала возбуждение ленгмюровских колебаний [4, 5]. Для ленгмюровских колебаний  $|\omega|/k \gg v_0$ , и влиянием ионов можно пренебречь. Тогда дисперсионное уравнение (6.1.1.5) принимает следующий вид:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_0^2} i\sqrt{\pi} z_0 \exp(-z_0^2) + \left( \frac{\omega'_{pe}}{kv'_0} \right)^2 [1 + i\sqrt{\pi} z'_0 w(z'_0)] = 0. \quad (6.1.2.1)$$

Считая влияние пучка малым  $\omega'_{pe} \ll kv'_e$ , находим отсюда для частоты  $\omega(\mathbf{k}) = \text{Re } \omega$  и инкремента нарастания  $\gamma = \text{Im } \omega$  \*) ленгмюровских колебаний, возбуждаемых горячим пучком, соотношения

$$\left. \begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= \omega_{pe} \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{2k^2 v_e'^2} \left[ 1 - 2z'_e \exp(-z_e'^2) \int_0^{z_e'} \exp(t^2) dt \right] \right), \\ \gamma(\mathbf{k}) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \omega_{pe} \left[ \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e'^2} z_e \exp(-z_e^2) + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e'^2} z_e' \exp(-z_e'^2) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.1.2.2)$$

где

$$z_e = \frac{\omega(\mathbf{k})}{\sqrt{2} kv_e}, \quad z_e' = \frac{\omega(\mathbf{k}) - k_z u}{\sqrt{2} kv_e'}.$$

Мы видим, что частота колебаний только малым слагаемым, пропорциональным плотности пучка, отличается от ленгмюровской частоты плазмы. Что же касается инкремента нарастания колебаний, то, хотя вклад электронов пучка пропорционален малому параметру  $(\omega'_{pe}/kv'_e)^2$ , он все же существует в силу экспоненциальной малости затухания Ландау на резонансных частицах плазмы ( $z_e \gg 1$ ).

Если затухание ленгмюровских колебаний на электронах плазмы пренебрежимо мало, то возбуждение колебаний происходит при  $\omega_{pe}/k_z < u$  (в этой области  $df'_{e0}/dv_z > 0$ ), а при  $\omega_{pe}/k_z > u$  взаимодействие ленгмюровских колебаний с резонансными частицами пучка приводит к их затуханию (в этой области  $df'_{e0}/dv_z < 0$ ). Инкремент нарастания достигает максимального значения при  $z_e' = -1/\sqrt{2}$ , т. е. при  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_{pe} = k_z u - kv'_e$ ; тогда

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{8e}} \left( \frac{\omega'_{pe}}{kv'_e} \right)^2 \omega_{pe}. \quad (6.1.2.3)$$

При уменьшении направленной скорости пучка и область фазовых скоростей нарастающих колебаний уменьшается и при некотором критическом значении скорости пучка  $u = u_c$  колебания становятся затухающими. Так как для ленгмюровских колебаний фазовая скорость больше тепловой скорости электронов плазмы, то, очевидно,  $u_c > v_e$ .

Пучок с большим тепловым разбросом по скоростям и малой средней скоростью ( $u < v_e$ ) не может возбуждать колебания в плазме при  $T_e \ll T_1$ , так как такие колебания сильно поглощаются электронами плазмы.

\*) В этой главе, в отличие от предыдущих глав, мы будем считать, что положительным значениям  $\gamma$  соответствуют нарастающие во времени колебания.

Если  $T_e \gg T_i$ , то возможно возбуждение слабозатухающих (в отсутствие пучка) ионно-звуковых колебаний [12]. В этом случае дисперсионное уравнение (6.1.1.5) принимает следующий вид:

$$1 + \left(\frac{\omega_{pe}}{kv_e}\right)^2 (1 + i\sqrt{\pi}z_e) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + \left(\frac{\omega'_{pe}}{kv'_e}\right)^2 [1 + i\sqrt{\pi}z'_e \omega(z'_e)] = 0.$$

Отсюда легко найти частоту и инкремент нарастания колебаний; имеем

$$\left. \begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) &= \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1 + (\omega_{pe}/kv_e)^2 + (\omega'_{pe}/kv'_e)^2 \left(1 - 2z'_e \exp(-z'^2_e) \int_0^{z'_e} \exp(t^2) dt\right)}}, \\ \gamma(\mathbf{k}) &= -\frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega^3(\mathbf{k})}{\omega_{pi}^2} \left[ \frac{\omega(\mathbf{k}) \omega_{pe}^2}{\sqrt{2} k^3 v_e^3} + \left(\frac{\omega'_{pe}}{kv'_e}\right)^2 z'_e \exp(-z'^2_e) \right], \end{aligned} \right\} \quad (6.1.2.4)$$

где

$$z'_e = \frac{\omega(\mathbf{k}) - k_z u}{\sqrt{2} kv'_e}.$$

Для возбуждения ионно-звуковых колебаний необходимо, чтобы скорость пучка превысила их фазовую скорость  $\omega(\mathbf{k})/k \sim v_s$ .

Однако, для того чтобы инкремент колебаний, обусловленный электронами пучка, превышал затухание колебаний, вызванное резонансными электронами плазмы ( $\gamma > 0$ ), необходимо выполнение более жесткого условия, а именно

$$v'_e \geq u > u_e = v_s \frac{n_0}{n'_0} \left(\frac{T'_e}{T_e}\right)^{3/2} \frac{1}{(1 + k^2 a_e^2)^{1/2}}.$$

Резонансные ионы пучка также могут возбуждать ленгмюровские и ионно-звуковые колебания. Инкременты нарастания и добавки к частотам этих колебаний, обусловленные ионами пучка, определяются формулами (6.1.2.2)–(6.1.2.4), в которых нужно заменить индекс  $e$  на индекс  $i$  у величин  $\omega'_{pe}$ ,  $v'_e$  и  $z'_e$ . Максимальный инкремент нарастания ленгмюровских колебаний, обусловленный ионами пучка

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \left(\frac{\omega'_{pi}}{kv'_i}\right)^2 \omega_{pe} \quad (6.1.2.5)$$

(при  $T'_i \sim T'_e$ ), того же порядка, что и (6.1.2.3).

Однако интервал фазовых скоростей неустойчивых ленгмюровских колебаний, возбуждаемых ионным пучком  $\Delta(\omega/k_z) \sim v'_i$ , значительно уже интервала фазовых скоростей колебаний, вызванных электронным пучком, т. е.  $\Delta(\omega/k_z) \sim v'_e$ . Поэтому взаимодействие ионного пучка с ленгмюровскими колебаниями значи-

тельно слабее, чем электронного пучка той же плотности. По этой же причине взаимодействие ионно-звуковых колебаний с ионами пучка происходит менее эффективно, чем с электронами.

В рассматриваемом случае пучков заряженных частиц с большим тепловым разбросом по скоростям колебания возбуждаются резонансными частицами. Можно сказать, что каждая резонансная частица возбуждает колебания независимо. Инкремент нарастания колебаний в этом случае пропорционален плотности частиц пучка  $n'_0$ . Далее будет показано, что при достаточно малом разбросе частиц пучка по скоростям возможна ситуация, при которой они возбуждают колебания когерентно; при этом инкремент нарастания колебаний пропорционален либо  $(n'_0)^{1/2}$ , либо  $(n'_0)^{1/3}$ .

**6.1.3. Возбуждение продольных колебаний моноэнергетическим пучком.** Полученные выше выражения для инкрементов нарастания продольных колебаний применимы, если  $\gamma_{\max} \ll kv'_0$ . Так как  $\gamma_{\max} \propto n'_0/T'_e$ , то это неравенство выполняется, если тепловой разброс частиц пучка по скоростям достаточно велик, а плотность мала.

Если выполняется противоположное неравенство  $\gamma_{\max} \gg kv'_0$  (случай холодного, или моноэнергетического, пучка), то разброс частиц пучка по скоростям несуществен.

Рассмотрим сначала возбуждение ленгмюровских колебаний моноэнергетическим пучком [2—5]. Полагая в этом случае  $|z_0| \gg 1$  и  $|z'_0| \gg 1$  и пренебрегая вкладом ионов в дисперсионное уравнение (6.1.1.5), получим

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^{\prime 2}}{(\omega - k_z u)^2} = 0, \quad (6.1.3.1)$$

т. е. уравнение четвертой степени относительно  $\omega$ . Поэтому наличие пучка существенно изменяет дисперсионные свойства плазмы. Найдём решения дисперсионного уравнения (6.1.3.1) в случае пучка малой плотности ( $n'_0 \ll n_0$ ). Так как  $\omega'_{pe} \ll \omega_{pe}$ , то два его корня близки к  $\pm \omega_{pe}$ , а именно

$$\omega^{(1, 2)} = \pm \omega_{pe} \left[ 1 + \frac{\omega_{pe}^{\prime 2}}{2(k_z u \mp \omega_{pe})^2} \right]. \quad (6.1.3.2)$$

Другие два корня близки к  $k_z u$ . Полагая

$$\omega^{(3, 4)} = k_z u + \eta^{(3, 4)}, \quad (6.1.3.3)$$

где  $|\eta^{(3, 4)}| \ll |k_z u|$ , получим

$$\eta^{(3, 4)} = \pm \frac{\omega_{pe}'}{\sqrt{1 - (\omega_{pe}/k_z u)^2}}. \quad (6.1.3.4)$$

Отсюда следует, что длинноволновые колебания ( $k_x u < \omega_{pe}$ ) неустойчивы, причем инкремент их нарастания равен

$$\gamma = \text{Im } \eta = \frac{\omega'_{pe}}{\sqrt{(\omega_{pe}/k_x u)^2 - 1}}.$$

Тогда получаем, что при  $k_x u < \omega_{pe}$

$$\gamma \sim \sqrt{n'_0/n_0} k_x u \sim \sqrt{n'_0/n_0} \omega. \quad (6.1.3.5)$$

При  $k_x u \sim \omega_{pe}$  находим отсюда, что  $\gamma \sim \omega'_{pe}$ .

Формулы (6.1.3.2) и (6.1.3.4) для  $\omega = \omega^{(1)}$  и  $\omega = \omega^{(3, 4)}$  применимы вблизи резонансной точки  $k_x u = \omega_{pe}$ , в которой пересекаются (в пределе  $n'_0 \rightarrow 0$ ) ветви колебаний с частотами  $\omega^{(1)} = \omega_{pe}$  и  $\omega^{(3, 4)} = k_x u$ . В этом случае, полагая по-прежнему  $\omega^{(j)} = k_x u + \eta^{(j)}$  ( $j = 1, 3, 4$ ), получим для добавки к частоте  $\eta = \eta^{(j)}$  кубическое уравнение

$$\eta^3 + (1 - \omega_{pe}/k_x u) \omega_{pe} \eta^2 - 1/2 \omega_{pe} \omega'^2_{pe} = 0. \quad (6.1.3.6)$$

При  $|\eta| \gg |k_x u - \omega_{pe}|$  находим отсюда, что

$$\eta = \xi (1/2 \omega_{pe} \omega'^2_{pe})^{1/3}, \quad (6.1.3.7)$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{1} = \left(1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Инкремент нарастания колебаний для неустойчивой ветви равен

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{2/3}} \left(\frac{n'_0}{n_0}\right)^{1/3} \omega_{pe}. \quad (6.1.3.8)$$

Таким образом, колебания системы плазма—пучок малой плотности имеют в условиях резонанса ( $\omega_{pe} = k_x u$ ) максимальный инкремент нарастания, пропорциональный  $(n'_0/n_0)^{1/3}$ .

Отметим, что полученными выражениями можно пользоваться только при выполнении неравенства  $|z'_e| \sim |\eta|/k v'_e \gg 1$ . Это неравенство для колебаний с инкрементом (6.1.3.5) выполняется, если  $u \gg v'_e (n'_0/n_0)^{1/3}$ , т. е. если разброс электронов пучка по скоростям очень мал. Для колебаний с максимальным инкрементом нарастания условие  $|z'_e| \gg 1$  несколько слабее, а именно,  $u \gg v'_e (n'_0/n_0)^{1/3}$ .

Если эти условия не выполняются, то когерентное возбуждение ленгмюровских колебаний невозможно. Однако в этом случае могут возбуждаться ионно-звуковые колебания [11, 12]. Дисперсионное уравнение для ионно-звуковых колебаний при наличии моноэнергетического электронного пучка имеет вид

$$1 + \frac{1}{k^2 a_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_x u)^2} = 0. \quad (6.1.3.9)$$

Так же как и уравнение (6.1.3.1), оно четвертой степени относительно  $\omega$ . При  $n'_0 \ll n_0 (m_e/m_i)$  корни этого уравнения определяются формулами (6.1.3.2)–(6.1.3.4), в которых нужно заменить  $\omega_{pe}$  на  $\omega_s = kv_s/\sqrt{1 + k^2 a_e^2}$  (где  $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$  — скорость звука) и  $\omega'_{pe}$  на  $\omega'_{pe} (1 + 1/k^2 a_e^2)^{-1/2}$ . Неустойчивыми являются колебания при  $k_z u < \omega_s(k)$ . Инкремент нарастания в этом случае равен по порядку величины

$$\gamma \sim \left( \frac{n'_0 m_i}{n_0 m_e} \right)^{1/2} k_z u \quad (ka_e \sim 1, \quad ku < \omega_{pe}).$$

Инкремент нарастания достигает максимума в условиях резонанса, т. е. при  $\omega_s(k) = k_z u$ ; тогда имеем

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/2}} \left( \frac{\omega'_{pe}}{\omega_{pi}} \right)^{2/3} \omega_s. \quad (6.1.3.10)$$

Остановимся на условиях применимости этих выражений. Они получены при соблюдении условия  $|z'| \gg 1$ , которое выполняется в нерезонансном случае, если

$$u \gg \left( \frac{n_0 m_e}{n'_0 m_i} \right)^{1/2} v'_e,$$

а в резонансном случае (при  $\omega_s = k_z u$ ) — если

$$u \gg v'_e \left( \frac{n_0 m_e}{n'_0 m_i} \right)^{1/2},$$

т. е. только при  $u \gg v'_e$ . Кроме того, должны выполняться условия  $|\omega| \gg kv_i$  и  $|\omega| \ll kv_e$ . Так как  $\omega \sim ku$ , то необходимо, чтобы были справедливы неравенства  $v_i \ll u \ll v_e$ . Очевидно, что полученные неравенства будут совместны только при очень малой тепловой скорости частиц пучка.

Если плотность пучка такова, что  $n'_0 \gg n_0 (m_e/m_i)$ , то с учетом малого слагаемого, пропорционального  $\omega_{pi}^2$  в уравнении (6.1.3.9), получим

$$\omega(\mathbf{k}) = k_z u \pm \omega'_s(k) \pm \frac{(\omega'_s)^3 \omega_{pi}^2}{(k_z u \pm \omega'_s)^2 \omega_{pe}^2}, \quad (6.1.3.11)$$

где

$$\omega'_s(k) = \frac{\omega'_{pe}}{\sqrt{1 + 1/k^2 a_e^2}}.$$

Два других корня этого уравнения значительно меньше  $k_z u$ ; они равны

$$\omega = \pm \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1 + 1/k^2 a_e^2 - (\omega'_{pe}/k_z u)^2}}. \quad (6.1.3.12)$$

Неустойчивы те колебания, для которых  $k_z u < \omega'_s(k)$ . В этом случае для инкремента нарастания колебаний имеем по порядку величины

$$\gamma \sim \left(\frac{n_0 m_e}{n'_0 m_i}\right)^{1/2} k_z u \quad (ka_0 \sim 1).$$

В условиях резонанса, когда  $\omega'_s(k) = k_z u$ , находим

$$\omega = \xi \left(\frac{n_0 m_e}{2n'_0 m_i}\right)^{1/2} \omega'_s, \quad (6.1.3.13)$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{1} = \left(1, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Максимальный инкремент нарастания равен, согласно (6.1.3.13),

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/2}} \left(\frac{n_0 m_e}{n'_0 m_i}\right)^{1/2} \omega'_s.$$

Условия применимости полученных выражений ( $|z'_e| \gg 1$ ,  $|z_e| \ll \ll 1$ ,  $|z_i| \gg 1$ ) выполняются при  $\omega'_s \sim ku$ , если  $v_i, v'_e \ll u \ll v_e$ .

Мы исследовали возбуждение моноэнергетическим пучком ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний плазмы, слабо затухающих в отсутствие пучка. Покажем теперь, что такой пучок может возбуждать колебания плазмы с фазовой скоростью порядка тепловой скорости электронов и ионов, которые в отсутствие пучка сильно затухают. Считая по-прежнему, что  $|z'_e| \gg 1$ , представим дисперсионное уравнение для продольных колебаний  $A=0$  в виде

$$\epsilon_i^{(p)}(\mathbf{k}, \omega) - \left(\frac{\omega'_{pe}}{\omega - k_z u}\right)^2 = 0, \quad (6.1.3.14)$$

где  $\epsilon_i^{(p)} = A(\mathbf{k}, \omega)$  при  $n'_0 = 0$ . Так как величина  $\omega'_{pe}$  мала, то, полагая  $\omega = k_z u + \eta$ , найдем

$$\eta = \pm \frac{\omega'_{pe}}{\sqrt{\epsilon_i^{(p)}(\mathbf{k}, k_z u)}}. \quad (6.1.3.15)$$

Величина  $\epsilon_i^{(p)}$  имеет мнимую часть (обусловленную наличием резонансных частиц в плазме), и поэтому у одного из корней (6.1.3.15) она всегда положительна. Например, при  $u$  порядка  $v_e$  и  $ka_0$  порядка единицы получим  $\text{Re}\epsilon_i^{(p)} \sim \text{Im}\epsilon_i^{(p)} \sim 1$ , так что  $\gamma \sim \omega'_{pe}$ . При  $u \sim v_i$  и  $ka_{0,i} \sim 1$  также находим  $\gamma \sim \omega'_{pe}$ . В рассматриваемом случае раскачка колебаний моноэнергетическим пучком обусловлена сильным их поглощением резонансными электронами и ионами плазмы. Этот механизм эффективен лишь в области скоростей  $u \sim v_{e,i}$ . Если  $u \gg v_e$ , то число резонансных электронов

экспоненциально мало. В этом случае формула (6.1.3.15) имеет вид

$$\eta = \pm \omega'_{pe} \left[ 1 - (\omega_{pe}/k_z u)^2 + i \sqrt{\pi/2} (\omega_{pe} k_z u / k^2 v_e^3) \exp(-k_z^2 u^2 / 2k^2 v_e^2) \right]^{-1/2}.$$

При  $\omega < \omega_{pe}$  происходит когерентная раскачка колебаний и малым мнимым слагаемым под знаком квадратного корня в этом выражении можно пренебречь. Если  $\omega > \omega_{pe}$ , то инкремент нарастания экспоненциально мал, а именно

$$\gamma = \text{Im } \eta = \frac{\omega'_{pe}}{[1 - (\omega_{pe}/k_z u)^2]^{3/2}} \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}^2 u}{k^2 v_e^3} \exp\left(-\frac{u^2}{2v_e^2}\right).$$

Отсюда следует, что при приближении к резонансной области ( $k_z u = \omega_{pe}$ ) раскачка колебаний из-за черенковского поглощения усиливается.

Остановимся еще на вопросе о возбуждении колебаний плазмы моноэнергетическим ионным пучком малой плотности. Полученные выше выражения для частот и инкрементов нарастания колебаний остаются применимыми и в данном случае, но с заменой  $\omega'_{pe}$  на  $\omega'_{pi}$ . Так как в нерезонансных условиях инкременты нарастания пропорциональны  $\omega'_{pe}$ , то когерентная раскачка колебаний плазмы моноэнергетическим ионным пучком малой плотности менее эффективна, чем их раскачки электронным пучком.

В заключение рассмотрим возбуждение ионно-звуковых колебаний во взаимопроникающих плазменных потоках сравнимой плотности [13—15]. Предполагая, что  $|z_0| \ll 1$ ,  $|z'_0| \ll 1$ ,  $|z_1| \gg 1$  и  $|z'_1| \gg 1$ , представим дисперсионное уравнение (6.1.1.5) в виде

$$1 + \frac{1}{k^2 a_e^2} + \frac{1}{k^2 a_e'^2} - \left(\frac{\omega_{pi}}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega'_{pi}}{\omega - k_z u}\right)^2 = 0,$$

где  $a'_e = v'_e/\omega'_{pe}$ . В случае длинноволновых колебаний ( $ka_e \ll 1$ ,  $ka'_e \ll 1$ ) можно пренебречь здесь единицей по сравнению с  $1/k^2 a_e^2$  и  $1/k^2 a_e'^2$ . В результате получим следующий критерий неустойчивости:

$$\cos^2 \Theta u^2 < \frac{(v_e v'_e)^2 [(n_0/m_1)^{1/3} + (n'_0/m'_1)^{1/3}]^3}{n_0 v_e'^2/m_1 + n'_0 v_e^2/m'_1},$$

где  $\Theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{u}$ . При выполнении этого неравенства во взаимопроникающих потоках возникает сильная неустойчивость с инкрементом нарастания колебаний, равным по порядку величины  $\gamma \sim k_z u$  ( $n'_0 \sim n_0$ ,  $T'_0 \sim T_0$ ).

Следует отметить, что величина  $u \cos \Theta$  должна быть значительно больше тепловой скорости ионов в обоих пучках, так как в противном случае возбуждение колебаний становится невозможным из-за появления сильного затухания на резонансных ионах.

**6.1.4. Неустойчивость плазмы, электроны которой движутся относительно ионов.** Выше мы рассмотрели возбуждение продольных колебаний плазмы скомпенсированным пучком электронов.

Рассмотрим теперь этот процесс в плазме, электроны которой движутся относительно ионов. Такое движение может быть вызвано постоянным электрическим полем  $E_0$ . Двигаясь в этом поле, электроны на длине свободного пробега  $l$  приобретают энергию  $\delta\varepsilon = eE_0l$  (напомним, что  $l = 1/\sigma n_0$ ,  $\sigma = \pi e^4 L / T_e^2$  — сечение рассеяния при кулоновских столкновениях,  $L$  — кулоновский логарифм). Если  $\delta\varepsilon \ll T_e$ , электрон будет отдавать свою энергию другим частицам плазмы, в результате чего будет происходить джоулев нагрев плазмы; при этом электронный газ движется относительно ионов с некоторой скоростью  $u = eE_0/v_c$ , значительно меньшей тепловой скорости электронов ( $v_c = v_0/l$  — частота кулоновских столкновений).

Ситуация существенно меняется в сильных электрических полях, когда  $\delta\varepsilon > T_e$ . Так как длина свободного пробега электрона быстро увеличивается с ростом энергии, то кулоновские столкновения сами по себе не способны помешать электронам перейти в режим непрерывного ускорения, при котором скорость электронного газа линейно возрастает со временем, т. е. при  $u = (e/m_e) E_0 t$ .

Такому переходу может воспрепятствовать не кулоновское рассеяние электронов на ионах, а другой механизм, а именно рассеяние электронов на неустойчивых продольных колебаниях плазмы, возникающих при движении электронов относительно ионов.

Рассмотрим подробнее возникновение этой неустойчивости [6, 8, 16—19]. Будем считать, что электрическое поле больше критического  $E_0 > E_c$ , определяемого из условия  $eE_c l = T_e$ , а скорость направленного движения электронов  $u$  значительно больше тепловой скорости. Вместе с тем допустим, что поле  $E_0$  не слишком велико, и за время  $1/\gamma$ , где  $\gamma$  — инкремент нарастания рассматриваемых колебаний, приращение скорости электронов  $\Delta u = (e/m_e \gamma) E_0$  очень мало по сравнению с  $u$ , и можно считать, что за время нарастания колебаний электронный пучок движется равномерно и прямолинейно (адиабатическое приближение). Вследствие большой массы ионов они приобретают в поле  $E_0$  скорость, значительно меньшую скорости электронов, и в отсутствие колебаний их можно считать покоящимися.

В этих условиях дисперсионное уравнение для продольных колебаний плазмы будет иметь вид

$$1 + 4\pi k^{(e)}(k, \omega - k_z u) + 4\pi k^{(i)}(k, \omega) = 0.$$

Пренебрегая тепловым движением электронов и ионов перепишем его следующим образом:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_z u)^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0, \quad (6.1.4.1)$$

где  $\omega_{pi} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_i}$  — ионная ленгмюровская частота.

Если  $\omega \geq k_z u$ , то, очевидно, ионное слагаемое здесь пренебрежимо мало; тогда из этого уравнения получим выражения для частот обычных ленгмюровских колебаний, смещенных на величину  $\Delta\omega = k_z u$  из-за эффекта Доплера,

$$\omega = k_z u \pm \omega_{pe}.$$

Нас будет интересовать низкочастотная ветвь электронно-ионных колебаний ( $\omega \ll k_z u$ ). В этом случае в уравнении (6.1.4.1) следует сохранить ионное слагаемое, и тогда имеем

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{k_z^2 u^2} \left(1 + 2 \frac{\omega}{k_z u}\right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} = 0. \quad (6.1.4.2)$$

Пренебрегая здесь при  $k_z u$ , не близких к  $\omega_{pe}$ , малым слагаемым порядка  $\omega/k_z u$ , получим

$$\omega = \pm i \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{(\omega_{pe}/k_z u)^2 - 1}}; \quad (6.1.4.3)$$

итак, рассматриваемые колебания неустойчивы при  $k_z u < \omega_{pe}$ .

Инкремент нарастания этих колебаний равен по порядку величины

$$\gamma \sim (m_e/m_i)^{1/2} k_z u.$$

Он становится особенно большим при  $k_z u \rightarrow \omega_{pe}$ . В этом случае, однако, выражение (6.1.4.3) становится неприменимым и величину  $\omega$  следует определять из кубического уравнения (6.1.4.2).

При  $\omega_{pe} = k_z u$  из (6.1.4.2) находим

$$\omega = \zeta^{(1)} (1/2 \omega_{pe} \omega_{pi}^2)^{1/3},$$

где

$$\zeta = \sqrt[3]{-1} = \left(-1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right).$$

Таким образом, максимальный инкремент нарастания равен

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3} \omega_{pe} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/3} \omega_{pi}. \quad (6.1.4.4)$$

В заключение остановимся на условиях применимости использованного нами адиабатического приближения [20]. Очевидно, последним выражением можно пользоваться, если за время порядка  $1/\gamma_{\max}$  условие резонанса  $|\omega_{pe} - k_z u| \leq \gamma_{\max}$  не успевает нарушиться из-за ускорения в электрическом поле, т. е. если  $k\Delta u \leq \gamma_{\max}$ , где  $\Delta u = eE_0/m_e \gamma_{\max}$  и  $k = \omega_{pe}/u$ .

В достаточно сильных полях и коротких системах плазма может оказаться устойчивой, так как не только резонансные ( $k u \approx \omega_{pe}$ ), но и нерезонансные колебания с инкрементом  $\gamma \sim (m_e/m_i)^{1/2} k u$

не успеют раскачаться. Действительно, при учете ускорения электронов колебания плотности ионов описываются уравнением

$$\frac{\partial^2 \tilde{n}_1}{\partial t^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega_{pe}/k_z u)^2 - 1} \tilde{n}_1 = 0,$$

где  $u = (eE_0/m_0)t$ . При  $\omega_{pe} > k_z u$  его решения нарастают; они равны

$$\tilde{n}_1 = \sqrt{t} [C_1 I_{1/4}(t^2/t_1^2) + C_2 I_{-1/4}(t^2/t_1^2)],$$

где  $t_1 = (4m_0 m_1/k_z^2 e^2 E_0^2)^{1/4}$ . В области  $k_z u > \omega_{pe}$  решения этого уравнения осциллируют.

При  $t < t_1$  колебания плотности нарастают очень медленно, а при  $t \ll t_1$  имеем

$$\tilde{n}_1 = C_1 + C_2 t.$$

Поэтому при  $t \ll t_1$  начальное возмущение не успевает развиваться. При  $t > t_1$  происходит экспоненциальный рост этих колебаний, соответствующий адиабатическому приближению,

$$\tilde{n} \sim (1/\sqrt{t}) \exp(t^2/t_1^2).$$

Чтобы колебания не успели развиваться, необходимо, чтобы за время  $t \leq t_1$  нарушилось условие  $k_z u < \omega_{pe}$  для самых длинноволновых колебаний с  $k_{z \min} \sim 2\pi/L_{\parallel}$ , где  $L_{\parallel}$  — длина системы. Отсюда получаем критерий устойчивости

$$k_{z \min} \frac{eE_0}{m_0} t_1 > \omega_{pe},$$

или

$$E_0 > E_{\min},$$

где

$$E_{\min} = en_0 L_{\parallel} \sqrt{m_0/m_1}.$$

В полях  $E_0 > E_{\min}$  электронно-ионная пучковая неустойчивость не развивается.

Если плазма находится в электрическом поле  $E_0$ , значительно меньшем  $E_c$ , то средняя скорость электронов будет значительно меньше тепловой их скорости. Если в такой плазме температура электронов существенно превышает температуру ионов, то движение электронов и ионов друг относительно друга может приводить к возбуждению ионно-звуковых колебаний [21].

Будем считать, что в отсутствие колебаний распределения электронов и ионов являются максвелловскими, причем средние скорости ионов и электронов равны нулю и  $u$  соответственно. Тогда дисперсионное уравнение для ионно-звуковых колебаний примет вид

$$1 + \frac{1}{k^2 a_e^2} \left( 1 + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega - k_z u}{k v_e} \right) - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} + i \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\omega_{pi}^2 \omega}{k^3 v_i^3} \exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2 v_i^2}\right) = 0.$$

Отсюда легко найти частоту  $\omega(k)$  и инкремент нарастания колебаний  $\gamma(k)$ ; имеем

$$\omega(k) = \omega_s(k), \quad \gamma(k) = \gamma_0(k) - \gamma_i(k),$$

где

$$\left. \begin{aligned} \omega_s(k) &= \frac{kv_s}{\sqrt{1 + k^2 a_0^2}}, \\ \gamma_0(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m_e}{m_i}} \frac{kv_s}{(1 + k^2 a_0^2)^2} \left( \frac{k_z u}{\omega_s} - 1 \right), \\ \gamma_i(k) &= \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_s^4}{k^3 v_i^3} \exp\left(-\frac{\omega_s^2}{2k^2 v_i^2}\right). \end{aligned} \right\} \quad (6.1.4.5)$$

Очевидно, что неустойчивость ионно-звуковых колебаний может возникнуть только при  $u > \omega_s/k$ . При  $ka_0 \sim 1$  и  $u \geq v_s$  получим, пренебрегая затуханием на ионах,

$$\omega(k) \sim \omega_{pi}, \quad \gamma(k) \sim \omega_{pi}(u/v_0). \quad (6.1.4.6)$$

При уменьшении скорости дрейфа электронов уменьшается инкремент нарастания. Неустойчивость возникает только при  $u > u_c$ , а величина критической скорости определяется из условия  $\gamma_0 = \gamma_i$  ( $\gamma < 0$  при  $u < u_c$  при любых  $k$ ). По порядку величины имеем  $u_c \sim (3 \div 4)v_i$ .

**6.1.5. Возбуждение электромагнитных волн в плазме потоками заряженных частиц.** Мы рассмотрели возбуждение неустойчивых продольных (потенциальных) колебаний в плазме в том случае, когда через нее проходят потоки заряженных частиц. Покажем теперь, что в этом случае в плазме могут возбуждаться и электромагнитные (непотенциальные) колебания [22—24]. Чтобы разъяснить механизм их возникновения и связанной с ним неустойчивости плазмы, обратимся к следующему простому примеру [22]. Рассмотрим два электронных потока, движущихся вдоль оси  $z$  навстречу друг другу с относительной скоростью  $2u$ , тогда

$$f_{e0} = \frac{1}{2} n_0 \delta(v_x) \delta(v_y) [\delta(v_z - u) + \delta(v_z + u)].$$

При появлении магнитного поля, направленного вдоль оси  $y$ , вида  $B_y \propto \exp(ikx)$  оно будет искривлять траекторию электрона. За время  $\Delta t$   $c$  скорости электронов  $v_z = u$ , добавится скорость вдоль оси  $x$ , равная

$$\Delta v_x = -\frac{e}{m_e c} [vB]_x \Delta t = \frac{eu}{m_e c} B_y \Delta t.$$

Поэтому вдоль оси  $x$  возникает поток  $z$  компоненты импульса электронов

$$\frac{1}{2} m_e n_0 v_x \Delta v_x = \frac{1}{2} (n_0 u^2 / c) B_y \Delta t.$$

К скорости электронов  $v_z = -u$  добавится за время  $\Delta t$  составляющая вдоль оси  $x$ , равная  $-\Delta v_x$ . Поток  $z$ -компоненты импульса этих

электронов через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ , также будет равен  $1/2(n_0u^2/c)B_y\Delta t$ .

Суммарный поток  $z$ -компонент импульсов обеих групп электронов в единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную оси  $x$ , составит

$$\frac{\partial p_{zx}}{\partial t} = \frac{n_0u^2}{c} B_y. \quad (6.1.5.1)$$

Перенос импульса приведет к появлению переменной составляющей скорости электронов вдоль оси  $z$ , и мы получим

$$m_e n_0 \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} = -\frac{\partial p_{zx}}{\partial x} = -ikp_{zx}. \quad (6.1.5.2)$$

В результате возникнет электрический ток в направлении  $z$  с плотностью

$$j_z = -en_0\bar{v}_z. \quad (6.1.5.3)$$

Вместе с тем для компоненты плотности тока  $j_z$  можно написать

$$j_z = \frac{c}{4\pi} \text{rot}_z B = \frac{ick}{4\pi} B_y. \quad (6.1.5.4)$$

Дифференцируя соотношение (6.1.5.2) по времени и учитывая (6.1.5.1), (6.1.5.3) и (6.1.5.4), получим следующее уравнение для  $B_y$ :

$$\frac{\partial^2 B_y}{\partial t^2} = \frac{u^2}{c^2} \frac{4\pi e^2 n_0}{m_e} B_y. \quad (6.1.5.5)$$

Мы видим, что поле  $B_y$  будет экспоненциально нарастать со временем с инкрементом

$$\gamma = \frac{u}{c} \omega_{pe}. \quad (6.1.5.6)$$

Таким образом, механизм рассматриваемой неустойчивости заключается в том, что магнитное поле возмущения  $B_y$  искривляет траектории электронов и обуславливает наличие потока  $z$ -компоненты импульса электронов в направлении оси  $x$ . Изменение этого потока вызывает появление переменной составляющей скорости электронов  $\bar{v}_z$ , т. е. тока  $j_z$ , в результате чего возрастает первоначальное магнитное поле.

Проведенный анализ, однако, неполон, так как он не учитывает появления вихревого электрического поля

$$E_z = -\frac{i}{ck} \frac{\partial B_y}{\partial t}.$$

В уравнении движения

$$\frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} E_z - \frac{1}{m_e n_0} \frac{\partial p_{zx}}{\partial x}$$

им можно пренебречь только в том случае, если

$$\left| \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial t} \right| \sim \gamma |\bar{v}_z| \sim \frac{ck\gamma}{4\pi en_0} B_y \gg \frac{e}{m_0} |E_x| \sim \frac{e\gamma}{m_0 ck} |B_y|,$$

т. е. при выполнении условия  $k^2 c^2 \gg \omega_{pe}^2$ .

Рассмотрим теперь ту же неустойчивость с учетом возникающего вихревого электрического поля, а также с учетом теплового движения частиц плазмы и пучка [24]. Для этого используем общее дисперсионное уравнение (6.1.1.4) для электромагнитных волн в системе плазма — пучок. В случае волн, распространяющихся перпендикулярно оси  $z$  в направлении оси  $x$ , оно принимает вид

$$\varepsilon_{11} (\omega'^2 - \varepsilon_{33}) + \varepsilon_{13}^2 = 0. \quad (6.1.5.7)$$

Компоненты тензора диэлектрической проницаемости для плазмы и пучка с максвелловскими распределениями частиц по скоростям в этом случае равны

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{k^2 v_{\alpha}^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_{\alpha} w(z_{\alpha})] + \frac{\omega_{p\alpha}'^2}{k^2 v_{\alpha}'^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_{\alpha}' w(z_{\alpha}')], \\ \varepsilon_{33} &= 1 + \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} i\sqrt{\pi} z_{\alpha} w(z_{\alpha}) + \frac{\omega_{p\alpha}'^2}{\omega'^2} i\sqrt{\pi} z_{\alpha}' w(z_{\alpha}') + \\ &\quad + \frac{\omega_{p\alpha}'^2}{\omega^2} \frac{u^2}{v_{\alpha}'^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_{\alpha}' w(z_{\alpha}')], \\ \varepsilon_{13} &= \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}'^2 u}{\omega k v_{\alpha}'^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_{\alpha}' w(z_{\alpha}')], \end{aligned} \right\} (6.1.5.8)$$

где

$$z_{\alpha} = \omega/\sqrt{2} kv_{\alpha}, \quad z_{\alpha}' = \omega'/\sqrt{2} kv_{\alpha}'.$$

Исследуем уравнение (6.1.5.7) в ряде предельных случаев.

Рассмотрим сначала область больших фазовых скоростей, когда тепловой разброс частиц по скоростям несуществен ( $|\omega|/k \gg v_{\alpha}, v_{\alpha}'$ ), тогда тензор  $\varepsilon_{ij}$  имеет вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 + \omega_{p\alpha}'^2}{\omega^2}, \\ \varepsilon_{33} &= 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{p\alpha}'^2}{\omega'^2} \left(1 + \frac{k^2 u^2}{\omega^2}\right), \\ \varepsilon_{13} &= - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}'^2 (ku)}{\omega^3}. \end{aligned} \right\} (6.1.5.9)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.1.5.7) и решая его относительно  $\omega^2$ , получим

$$\omega^2 = -k^2 \frac{(\sum \omega_{pe}^2)(\sum \omega_{pe}^2 u^2) - (\sum \omega_{pe}^2 u)^2}{(k^2 c^2 + \sum \omega_{pe}^2) \sum \omega_{pe}^2}, \quad (6.1.5.10)$$

где суммирование проводится по частицам плазмы и пучка. Так как  $\omega^2 < 0$ , то рассматриваемые колебания неустойчивы. В системе отсчета, в которой  $\sum \omega_{pe}^2 u = 0$ , выражение (6.1.5.10) упрощается и принимает вид

$$\omega^2 = -k^2 \frac{\sum \omega_{pe}^2 u^2}{k^2 c^2 + \sum \omega_{pe}^2} < 0. \quad (6.1.5.11)$$

В частном случае двух одинаковых пучков, движущихся навстречу друг другу, последнее соотношение совпадает при  $k^2 c^2 \gg \gg \omega_{pe}^2$  с выражением (6.1.5.6) для  $\gamma$ .

Перейдем теперь к исследованию случаев, когда тепловой разброс частиц существен. Для простоты будем рассматривать систему, состоящую из покоящейся плазмы с плотностью  $n_0$  и движущегося со скоростью  $u$  скомпенсированного пучка с плотностью  $n'_0$ . Температуры электронов и ионов в плазме и пучке обозначим, как всегда, через  $T_e, T_i, T'_e, T'_i$ .

а) Если пучок холодный, а электроны плазмы горячие, то  $v_i, v'_i, v'_e \ll |\omega|/k \ll v_e$  и тензор  $\epsilon_{ij}$  принимает вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^{\prime 2}}{\omega^2}, \\ \epsilon_{33} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} i \sqrt{\pi} z_0 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^{\prime 2} (\omega^2 + k^2 u^2)}{\omega^4}, \\ \epsilon_{13} &= -\frac{\omega_{pe}^{\prime 2} k u}{\omega^3}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.5.12)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.1.5.7) и пренебрегая в соотношении для  $\epsilon_{33}$  слагаемым, пропорциональным  $iz_0$ , получим

$$A' \omega^4 + B' \omega^2 + C' = 0, \quad (6.1.5.13)$$

где

$$\begin{aligned} A' &= (\omega_{pe} k v_e)^2 (k^2 c^2 + \omega_{pe}^{\prime 2} + \omega_{pi}^2), \\ B' &= -(k^2 c^2 + \omega_{pe}^{\prime 2} + \omega_{pi}^2) (\omega_{pe}^{\prime 2} + \omega_{pi}^2) + (u/v_e)^2 \omega_{pe}^2 \omega_{pe}^{\prime 2}, \\ C' &= -\omega_{pi}^2 \omega_{pe}^{\prime 2} k^2 u^2. \end{aligned}$$

Решая (6.1.5.13) относительно  $\omega^2$ , находим

$$\omega^2 = \frac{-B' \pm \sqrt{B'^2 - 4A'C'}}{2A'}. \quad (6.1.5.14)$$

Так как  $A'C' < 0$ , то один из корней всегда отрицателен, т. е. рассматриваемые колебания с фазовой скоростью, значительно меньшей  $v_0$ , всегда неустойчивы. Следует, однако, отметить, что условия, при которых получены решения (6.1.5.14), выполняются при довольно жестких ограничениях.

Нетрудно убедиться, что такие колебания возбуждаются и при  $u \ll v_e$ .

б) Если пучок холодный, а электроны и ионы плазмы горячие, то  $v'_0, v'_i \ll |\omega|/k \ll v_e, v_i$  и компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  равны

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} - \frac{\omega'^2}{\omega^2}, \\ \epsilon_{33} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} i \sqrt{\pi} z_e + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} i \sqrt{\pi} z_i - \frac{\omega_{pe}^2 (k^2 u^2 + \omega^2)}{\omega^4}, \\ \epsilon_{13} &= -\frac{\omega_{pe}^2 k u}{\omega^3}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (6.1.5.7), найдем

$$\omega^2 = -\omega_{pe}^2 \left( \frac{k^2 u^2}{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2} - \frac{k^2 v_e^2 v_i^2}{\omega_{pe}^2 v_i^2 + \omega_{pi}^2 v_e^2} \right). \quad (6.1.5.15)$$

Колебания неустойчивы, если выполняется неравенство

$$\frac{u^2}{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2} > \frac{v_e^2 v_i^2}{\omega_{pe}^2 v_i^2 + \omega_{pi}^2 v_e^2}.$$

в) В области фазовых скоростей, значительно меньших тепловых скоростей электронов плазмы и пучка и значительно больших тепловых скоростей ионов плазмы и пучка, т. е. при  $v_i, v'_i \ll |\omega|/k \ll v_e, v'_e$ , тензор  $\epsilon_{ij}$  имеет вид

$$\begin{aligned}\epsilon_{11} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e'^2} - \frac{\omega_{pi}^2 + \omega_{pi}^2}{\omega^2}, \\ \epsilon_{33} &= 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} i \sqrt{\pi} z_e + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} i \sqrt{\pi} z'_e + \frac{\omega_{pe}^2 u^2}{\omega^2 v_e'^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{k^2 u^2}{\omega^2} \right), \\ \epsilon_{13} &= \frac{\omega_{pe}^2 u}{\omega k v_e'^2} - \frac{\omega_{pi}^2 k u}{\omega^3}.\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в уравнение (6.1.5.7), получим, пренебрегая в  $\epsilon_{33}$  членами, пропорциональными  $iz_e$  и  $iz'_e$ , уравнение

вида (6.1.5.13) с коэффициентами

$$\left. \begin{aligned} A' &= \left( \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} + \frac{\omega_{pe}'^2}{k^2 v_e'^2} \right) \left( k^2 c^2 + \omega_{pi}^2 + \omega_{pi}'^2 - \frac{u^2}{v_e'^2} \omega_{pe}'^2 \right) + \frac{\omega_{pe}'^4 u^2}{k^2 v_e'^4}, \\ B' &= -(\omega_{pi}^2 + \omega_{pi}'^2) \left( k^2 c^2 + \omega_{pi}^2 + \omega_{pi}'^2 - \frac{u^2}{v_e'^2} \omega_{pe}'^2 \right) - \\ &\quad - \left( \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} + \frac{\omega_{pe}'^2}{k^2 v_e'^2} \right) \omega_{pi}^2 k^2 u^2 - 2 \frac{u^2}{v_e'^2} \omega_{pe}'^2 \omega_{pi}^2, \\ C' &= -\omega_{pi}^2 \omega_{pi}'^2 k^2 u^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.5.16)$$

Величина  $\omega^2$  определяется формулой (6.1.5.14). Колебания будут неустойчивы при  $A' > 0$  либо при  $A' < 0$  и  $B' < 0$ . Если, например,  $n_0' \sim n_0$  и  $u \sim v_e \sim v_e'$ , то для инкремента нарастания колебаний получим  $\gamma \sim kv_e (m_e/m_i)^{1/2}$ . Условие  $|\omega| \gg kv_i$  выполняется только в том случае, если  $T_e \gg T_i$ .

г) Наконец, если электроны пучка горячие, а плазмы — холодные, то в области фазовых скоростей  $v_e \ll |\omega|/k \ll v_e'$  компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\omega_{pe}'^2}{k^2 v_e'^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \\ \epsilon_{33} &= \frac{\omega_{pe}'^2 u^2}{\omega^2 v_e'^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pe}'^2}{\omega^2} i \sqrt{\pi} Z_e' \left( 1 + \frac{u^2}{v_e'^2} \right), \\ \epsilon_{13} &= \frac{\omega_{pe}'^2 u}{\omega k v_e'^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.1.5.17)$$

Если  $|\epsilon_{13}|^2 \ll |\epsilon_{11} \epsilon_{33}|$ , то в уравнении (6.1.5.7) можно пренебречь величиной  $\epsilon_{13}^2$ , и оно запишется следующим образом:

$$\mathcal{N}^2 - \epsilon_{33} = 0.$$

Подставляя сюда найденное выше выражение для  $\epsilon_{33}$ , получим

$$\omega = i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{kv_e'^2}{\omega_{pe}'^2 (v_e'^2 + u^2)} \left( \frac{u^2}{v_e'^2} \omega_{pe}'^2 - k^2 c^2 - \omega_{pe}^2 \right), \quad (6.1.5.18)$$

где

$$k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 \approx (u/v_e')^2 \omega_{pe}'^2.$$

Неустойчивость возникает в этом случае при выполнении неравенства

$$k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 < (u/v_e')^2 \omega_{pe}'^2.$$

Мы остановились так подробно на неустойчивостях, связанных с возбуждением электромагнитных волн, потому, что они по-

являются при скоростях направленного движения пучков, как больших, так и меньших тепловой скорости электронов и ионов. Пучковые неустойчивости, связанные с возбуждением продольных колебаний и характеризующиеся, вообще говоря, значительно большими инкрементами нарастания колебаний, при малых скоростях пучка развиваться не могут.

**6.1.6. Неустойчивость плазмы с анизотропным распределением частиц по скоростям.** Выше мы исследовали устойчивость системы, состоящей из двух скомпенсированных плазменных потоков. Покажем, что и в отсутствие потоков плазмы, т. е. при функции распределения частиц плазмы, монотонно убывающей в любом направлении с ростом их скорости, также возникает неустойчивость, если само распределение частиц анизотропно. Рассмотрим устойчивость плазмы с функцией распределения электронов по скоростям вида [25—27]

$$f_{e0}(\mathbf{v}) = f_{e0}(v_x^2, v_{\perp}^2),$$

где  $v_{\perp} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$  — составляющая скорости, перпендикулярная выделенному направлению анизотропии (оси  $z$ ).

Будем по-прежнему рассматривать волны, распространяющиеся вдоль оси  $x$ . Тогда, предполагая, что  $|\varepsilon_{13}|^2 \ll |\varepsilon_{11}\varepsilon_{33}|$ , получим из (6.1.1.4) дисперсионное уравнение

$$\mathcal{N}^2 = \varepsilon_{33},$$

или

$$k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 (1 - \eta) = -2\omega_{pe}^2 \omega \int v_x^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial (v_x^2)} \frac{1}{kv_x - \omega} d^3v, \quad (6.1.6.1)$$

где

$$\eta \equiv -2 \int v_x^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial (v_x^2)} d^3v. \quad (6.1.6.2)$$

Предполагая, что  $|\omega| \ll k \langle v_x \rangle$ , получим отсюда

$$\omega = \frac{ik}{2\pi} \frac{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 (1 - \eta)}{\omega_{pe}^2 \left( \frac{\partial}{\partial (v_x^2)} \int \int v_x^2 f_{e0} dv_y dv_z \right)_{v_x^2=0}}. \quad (6.1.6.3)$$

Если, в частности, распределение электронов по скоростям представляет собой анизотропное распределение Максвелла

$$f_{e0} = \frac{n_0 m_e^{3/2}}{(2\pi)^{3/2} T_{\perp}^{1/2} T_{\parallel}} \exp\left(-\frac{m_e v_{\perp}^2}{2T_{\perp}} - \frac{m_e v_{\parallel}^2}{2T_{\parallel}}\right),$$

где  $T_{\perp}$  и  $T_{\parallel}$  — «поперечная» и «продольная» температуры электронов, определяющие средние значения  $v_{\perp}^2$  и  $v_{\parallel}^2$ , то формула (6.1.6.3) примет вид

$$\omega = -ik \sqrt{\frac{2T_{\perp}}{\pi m_e}} \frac{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 (1 - \eta)}{\eta \omega_{pe}^2}, \quad \eta = \frac{T_{\parallel}}{T_{\perp}}. \quad (6.1.6.4)$$

Мы видим, что неустойчивость возникает, если  $\eta > 1$ , т. е.  $T_{\parallel} > T_{\perp}$ .

Отметим, что неравенство  $|\omega| \ll k|v_x|$ , справедливость которого подразумевалась при выводе (6.1.6.3) и (6.1.6.4), выполняется, если

$$k^2 \approx k_0^2 = (\omega_{pe}/c)^2 (T_{\parallel}/T_{\perp} - 1).$$

Если  $T_{\parallel} < T_{\perp}$ , то также возникает неустойчивость. Но, в отличие от случая  $T_{\parallel} > T_{\perp}$ , когда неустойчивы колебания, распространяющиеся перпендикулярно оси анизотропии, при  $T_{\parallel} < T_{\perp}$  неустойчивы колебания, распространяющиеся вдоль оси анизотропии (оси  $z$ ). Для электромагнитных волн, распространяющихся вдоль оси  $z$ , дисперсионное уравнение имеет вид

$$\mathcal{N}^2 = \epsilon_{11},$$

где

$$\epsilon_{11} = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 n_0} \int \frac{1}{v_x - \omega/k} \left( \frac{\partial}{\partial v_x} \int_0^{\infty} v_{\perp}^3 f_{e0}(v_x^2, v_{\perp}^2) dv_{\perp} \right) dv_x.$$

Предполагая, что  $|\omega| \ll k|v_x|$ , найдем отсюда

$$\omega = \frac{ik}{\pi} \frac{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 (1 - \zeta)}{\omega_{pe}^2 \Phi'(0)}, \quad (6.1.6.5)$$

где

$$\Phi(v_x^2) = \frac{2\pi}{n_0} \int_0^{\infty} v_{\perp}^3 f_{e0}(v_x^2, v_{\perp}^2) dv_{\perp},$$

$$\zeta = - \frac{1}{n_0} \int v_{\perp}^2 \frac{\partial f_{e0}}{\partial (v_x^2)} d^3v.$$

Для анизотропного распределения Максвелла параметр  $\zeta$  равен  $T_{\perp}/T_{\parallel}$ . Очевидно,  $\text{Im } \omega > 0$ , если  $\zeta > 1$  ( $T_{\perp} > T_{\parallel}$ ) и  $k^2 < k_0^2 \equiv (\omega_{pe}/c)^2 (\zeta - 1)$ . Условие  $|\omega| \ll k|v_x|$  выполняется только в том случае, если  $k \approx k_0$ .

## § 6.2. Взаимодействие потоков заряженных частиц с колебаниями плазмы и магнитном поле

### 6.2.1. Тензор диэлектрической проницаемости системы плазма — пучок в магнитном поле.

Перейдем теперь к исследованию взаимодействия пучка заряженных частиц с плазмой при наличии внешнего постоянного и однородного магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ .

Среднюю скорость частиц пучка  $u$  будем считать направленной по полю  $B_0$ , а распределения частиц плазмы и пучка по скоростям — максвелловскими.

Для рассмотрения дисперсионных свойств такой системы нужно знать тензор ее диэлектрической проницаемости. Его, очевидно, можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(b)}, \quad (6.2.1.1)$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  — тензор диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, определяемый формулами (5.2.2.3), а  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  — вклад в тензор  $\varepsilon_{ij}$ , вносимый частицами пучка. Используя общие выражения (5.2.1.14) для тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, получим в случае максвелловского распределения частиц, сдвинутого на величину  $u$  [28],

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \frac{n^2}{x'_{\alpha}} A_n(x'_{\alpha}) i \sqrt{\pi} z'_0 w(z'_n), \\ \varepsilon_{22}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{n^2}{x'_{\alpha}} A_n(x'_{\alpha}) - 2x'_{\alpha} A'_n(x'_{\alpha}) \right] i \sqrt{\pi} z'_0 w(z'_n), \\ \varepsilon_{33}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2 \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 [y_0^2 + y_n^2 i \sqrt{\pi} z'_0 w(z'_n)] A_n(x'_{\alpha}), \\ \varepsilon_{12}^{(b)} &= - \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 n A'_n(x'_{\alpha}) \sqrt{\pi} z'_0 w(z'_n), \\ \varepsilon_{13}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \frac{n}{\sqrt{x'_{\alpha}}} A_n(x'_{\alpha}) y_n i \sqrt{2\pi} z'_0 w(z'_n), \\ \varepsilon_{23}^{(b)} &= - \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \sqrt{x'_{\alpha}} A'_n(x'_{\alpha}) y_n \sqrt{2\pi} z'_0 w(z'_n), \end{aligned} \quad (6.2.1.2)$$

где

$$\begin{aligned} A_n(x'_{\alpha}) &= \exp(-x'_{\alpha}) I_n(x'_{\alpha}), \quad A'_n(x_{\alpha}) = \frac{dA_n(x'_{\alpha})}{dx'_{\alpha}}, \\ x'_{\alpha} &= \left(\frac{k_x v'_{\alpha}}{\omega_{B\alpha}}\right)^2, \quad z'_n = \frac{\omega - n\omega_{B\alpha} - k_y u}{\sqrt{2} k_y v'_{\alpha}}, \quad y_n = \frac{\omega - n\omega_{B\alpha}}{\sqrt{2} k_x v'_{\alpha}}. \end{aligned}$$

В случае холодного (моноэнергетического) пучка заряженных частиц, когда  $x'_\alpha \ll 1$ ,  $|z'_n| \gg 1$ , получим из (6.2.1.2)

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(b)} &= \varepsilon_{22}^{(b)} = - \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \frac{(\omega - k_{\parallel} u)^2}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \omega_{B\alpha}^2}, \\ \varepsilon_{33}^{(b)} &= - \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \left[ \frac{\omega^2}{(\omega - k_{\parallel} u)^2} + \frac{(k_x u)^2}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \omega_{B\alpha}^2} \right], \\ \varepsilon_{12}^{(b)} &= -i \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \frac{(\omega - k_{\parallel} u) \omega_{B\alpha}}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \omega_{B\alpha}^2}, \\ \varepsilon_{13}^{(b)} &= - \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \frac{(\omega - k_{\parallel} u) k_x u}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \omega_{B\alpha}^2}, \\ \varepsilon_{23}^{(b)} &= i \sum_{\alpha} \left( \frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega} \right)^2 \frac{\omega_{B\alpha} k_x u}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \omega_{B\alpha}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.1.3)$$

Прежде всего отметим, что антиэрмитовы части тензора  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$ , обусловленные наличием резонансных частиц, пропорциональны величине  $z'_0$ , т. е.  $\omega - k_{\parallel} u$ . В отсутствие пучка в плазме с максвелловским распределением частиц по скоростям резонансные частицы всегда вызывают затухание электромагнитных волн. При наличии же пучка медленные волны будут раскачиваться его резонансными частицами (при выполнении условия  $u > \omega(\mathbf{k})/k_{\parallel}$ ), и если их затухание на резонансных частицах плазмы достаточно мало, то амплитуда волн будет экспоненциально нарастать со временем.

В случае моноэнергетического пучка компоненты тензора  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  имеют особенность при

$$\omega = k_{\parallel} u, \quad \omega = k_{\parallel} u \pm |\omega_{B\alpha}|. \quad (6.2.1.4)$$

Отсюда следует, что при прохождении через магнитоактивную плазму пучка малой плотности, кроме ветвей колебаний  $\omega^{(j)}(\mathbf{k})$ , существующих в плазме в отсутствие пучка, появляются новые ветви колебаний с частотами, определяемыми (в пределе  $n'_0 \rightarrow 0$ ) выражениями (6.2.1.4).

Таким образом, холодный пучок существенно изменяет дисперсионные свойства магнитоактивной плазмы. Напомним в этой связи, что при прохождении моноэнергетического пучка через свободную плазму также возникали новые ветви колебаний с частотами  $\omega = k_{\parallel} u$  (при  $n'_0 \rightarrow 0$  частота  $\omega = k_{\parallel} u$  была двукратно вырождена).

Колебания пучка с частотами  $\omega = k_{\parallel} u$  и  $\omega = k_{\parallel} u - |\omega_{B\alpha}|$  могут быть неустойчивыми. Эта неустойчивость особенно велика в резонансной области, где частота собственных колебаний плазмы  $\omega^{(j)}(\mathbf{k})$  становится близкой к частотам  $\omega = k_{\parallel} u$  или к  $\omega = k_{\parallel} u -$

—  $|\omega_{B\alpha}|$ . В этом случае говорят о *черенковском резонансе* между частицами пучка и волной, если  $\omega^{(j)} = k_{\parallel} u$ , и о *циклотронном резонансе* в условиях аномального эффекта Доплера, если  $\omega^{(j)} = k_{\parallel} u - |\omega_{B\alpha}|$ .

Колебания пучка с частотой  $\omega = k_{\parallel} u + |\omega_{B\alpha}|$  устойчивы. При циклотронном резонансе в условиях нормального эффекта Доплера, когда  $\omega^{(j)} = k_{\parallel} u + |\omega_{B\alpha}|$ , неустойчивость также не возникает\*).

Далее мы рассмотрим возбуждение различных ветвей колебаний магнитоактивной плазмы как резонансными частицами пучка, так и моноэнергетическим пучком.

**6.2.2. Возбуждение продольных колебаний плазмы в магнитном поле пучком электронов.** Начнем с изучения возбуждения высокочастотных (электронных) продольных колебаний в системе плазма — пучок электронами пучка [28—32]. Чтобы найти комплексные частоты продольных колебаний (точнее, почти продольных колебаний, когда  $E_{\perp} \gg E_{\parallel}$ ), следует приравнять нулю величину  $A$  в дисперсионном уравнении (5.2.2.5). Так как мы рассматриваем высокочастотные колебания, то при вычислении  $A$  можно не учитывать вклада, вносимого в тензор  $\epsilon_{ij}$  ионной компонентой плазмы и пучка.

Используя выражения (6.2.1.2), представим дисперсионное уравнение  $A=0$  в виде

$$A = 1 + \delta\epsilon^{(p)} + \delta\epsilon^{(b)} = 0, \quad (6.2.2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \delta\epsilon^{(p)} &= \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \left[ 1 + i\sqrt{\pi} z_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x_e) w(z_n) \right], \\ \delta\epsilon^{(b)} &= \frac{\omega_{pe}^{\prime 2}}{k^2 v_e^{\prime 2}} \left[ 1 + i\sqrt{\pi} z_0' \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x_e') w(z_n') \right], \\ z_n &= \frac{\omega - n |\omega_{Be}|}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_e}, \quad z_n' = \frac{\omega - n |\omega_{Be}| - k_{\parallel} u}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_e'}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.2.2)$$

Рассмотрим сначала возбуждение колебаний холодной плазмы пучком малой плотности с большим тепловым разбросом частиц по скоростям. В этом случае

$$\delta\epsilon^{(p)} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \sin^2 \theta, \quad (6.2.2.3)$$

и в отсутствие пучка дисперсионное уравнение  $A=1+\delta\epsilon^{(p)}=0$

\*) Обсуждение неустойчивости колебаний магнитоактивной плазмы, вызываемой черенковским и циклотронным излучением резонансных частиц пучка, с квантовой точки зрения проведено в работах [33, 34].

имеет два решения  $\omega = \omega_{\pm}^{(1, 2)}(\theta) \equiv \omega_{\pm}$ , определяемые формулами (5.1.2.6). Полагая  $\omega = \omega_{\pm} + i\gamma$  и пренебрегая вещественной частью  $\delta\varepsilon^{(b)}$ , учет которой даст только небольшое изменение частоты колебаний, получим

$$\gamma = -\frac{\sqrt{\pi} \omega_{pe}^2 \omega}{2k^2 v_e'^2} z_0' \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x_0') \exp(-z_n'^2) \left[ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{pe}^2 \omega^2 \sin^2 \theta}{(\omega^2 - \omega_{Be}^2)^2} \right]^{-1}, \quad (6.2.2.4)$$

где

$$z_n' = \frac{\omega_{\pm} - n |\omega_{Be}| - k_{\parallel} u}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_e'}.$$

Таким образом, величина  $\gamma$  положительна, т. е. колебания нарастают, если скорость пучка превосходит фазовую скорость колебаний вдоль магнитного поля ( $u > \omega_{\pm}/k_{\parallel}$ ). Если  $u < \omega_{\pm}/k_{\parallel}$ , то наличие пучка приводит к затуханию колебаний.

Формула (6.2.2.4) получена в предположении, что  $\gamma \ll k_{\parallel} v_e'$ , т. е. для пучков с большим тепловым разбросом частиц по скоростям и с малой плотностью. В этом случае инкремент нарастания пропорционален  $n_0'$  (так же, как и в отсутствие магнитного поля).

Если  $u \gg v_e'$ , то величина  $|z_n'|$  значительно больше единицы, если частоты  $\omega_{\pm}$  не близки к  $k_{\parallel} u + n |\omega_{Be}|$ . Поэтому при  $u \gg v_e'$  в сумме по  $n$  в (6.2.2.4) можно сохранить только одно слагаемое, соответствующее минимальному  $|z_n'|$ . Поэтому при выполнении условия

$$\omega_{\pm} \approx k_{\parallel} u + n |\omega_{Be}| \quad (n = 0, \pm 1, \dots) \quad (6.2.2.5)$$

инкремент нарастания определяется выражением

$$\gamma = -\frac{\sqrt{\pi} \omega_{pe}^2 \omega_{\pm}}{2k^2 v_e'^2} \frac{(x_e')^{|n|}}{2^{|n|} |n|!} \left[ \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{\pm}^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{\pm}^2 \sin^2 \theta}{(\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2)^2} \right]^{-1} z_0' \exp(-z_n'^2). \quad (6.2.2.6)$$

При выводе этой формулы мы учли, что  $x_e' = (k_x v_e' / \omega_{Be})^2 \ll 1$  и  $A_n(x_e') = (x_e')^{|n|} / 2^{|n|} |n|!$

Если условие (6.2.2.5) выполняется при  $n=0$ , то имеет место черенковское возбуждение колебаний, при  $n=-1, -2, -3, \dots$  — циклотронное возбуждение.

Как видно из выражения (6.2.2.6), инкремент нарастания длинноволновых колебаний ( $k_x v_e' = \sqrt{x_e'} \ll 1$ ) очень быстро убывает с ростом номера возбуждаемой гармоники.

Формулы (6.2.2.4) и (6.2.2.6) определяют инкремент нарастания в системе холодная плазма — горячий пучок. Рассмотрим теперь возбуждение колебаний в системе холодная плазма — холодный пучок.

В этом случае дисперсионное уравнение (6.2.2.1) принимает следующий вид:

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{(\omega - k_{\parallel} u)^2} - \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \omega_{Be}^2} = 0. \quad (6.2.2.7)$$

Это уравнение в отсутствие пучка определяет четыре собственные частоты  $\omega = \pm \omega_+$  и  $\omega = \pm \omega_-$ ; при наличии пучка число собственных частот продольных колебаний плазмы становится равным восьми.

Если плотность пучка мала ( $n_0' \ll n_0$ ), то, полагая  $\omega = k_{\parallel} u + \eta$  и считая  $\eta$  малым ( $|\eta| \ll |k_{\parallel} u|$ ), получим

$$\eta = \pm \omega_{pe}' \sqrt{\frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{Be}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\pm}^2) (\omega^2 - \omega^2)}} \Big|_{\omega = k_{\parallel} u}. \quad (6.2.2.8)$$

Очевидно, что величина  $\eta$  будет чисто мнимой (что соответствует неустойчивости колебаний), если  $k_{\parallel} u < \omega_-$ , либо если  $|\omega_{Be}| < k_{\parallel} u < \omega_+$ .

По порядку величины для инкремента нарастания имеем

$$\gamma \sim \sqrt{n_0'/n_0} k_{\parallel} u \quad (\omega_{pe} \sim |\omega_{Be}| \geq k_{\parallel} u).$$

Как видно из формулы (6.2.2.8), инкремент нарастания становится особенно большим при приближении частоты  $k_{\parallel} u$  к одной из собственных частот продольных колебаний плазмы  $\omega_+$  или  $\omega_-$ . Однако при  $\omega \approx k_{\parallel} u \approx \omega_{\pm}$  формула (6.2.2.8) может стать неприменимой. В этом случае величина  $\eta$  определяется из уравнения

$$\eta^3 + (k_{\parallel} u - \omega_{\pm}) \eta^2 - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta (\omega_{\pm}^2 - \omega^2) \omega_{\pm}}{2 |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2|} = 0.$$

Если  $|k_{\parallel} u - \omega_{\pm}| \ll \eta$ , то

$$\eta = \xi \left[ \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta (\omega_{\pm}^2 - \omega^2) \omega_{\pm}}{2 |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2|} \right]^{1/3}, \quad (6.2.2.9)$$

где

$$\xi = \sqrt[3]{1} = \left( 1, \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2} \right).$$

Отсюда получаем для максимального инкремента нарастания выражение

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta (\omega_{\pm}^2 - \omega^2) \omega_{\pm}}{2 |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2|} \right]^{1/3}. \quad (6.2.2.10)$$

При  $\omega_{pe} \sim |\omega_{Be}|$  имеем

$$\gamma_{\max} \sim \omega_{pe} \sqrt{n'_0/n_0}.$$

Таким образом, в условиях черенковского резонанса  $\omega_{\pm} = k_{\parallel} u$  инкремент нарастания колебаний пропорционален  $(n'_0)^{1/3}$  так же, как и в случае черенковского резонанса в плазме в отсутствие магнитного поля ( $\omega_{pe} = k_{\parallel} u$ ).

Рассмотрим теперь колебания в системе холодная плазма — холодный пучок малой плотности с частотами, близкими к  $\omega = k_{\parallel} u - |\omega_{Be}|$ . Полагая, что  $\omega = k_{\parallel} u - |\omega_{Be}| + \eta$ , где  $|\eta| \ll |k_{\parallel} u - |\omega_{Be}||$ , и при  $\omega$ , не близком к  $\omega_{\pm}$ , поправка к частоте чисто вещественна, получим

$$\eta = - \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta (\omega^2 - \omega_{Be}^2) \omega^2}{2 |\omega_{Be}| (\omega^2 - \omega_{\pm}^2) (\omega^2 - \omega_{\mp}^2)} \Big|_{\omega = k_{\parallel} u - |\omega_{Be}|}.$$

При  $k_{\parallel} u - |\omega_{Be}| \approx \omega_{\pm}$  имеем

$$\eta = 1/2 (\omega_{\pm} - k_{\parallel} u + |\omega_{Be}|) \pm$$

$$\pm 1/2 \sqrt{(\omega_{\pm} - k_{\parallel} u + |\omega_{Be}|)^2 - \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2| \omega_{\pm}}{|\omega_{Be}| (\omega_{\mp}^2 - \omega_{\pm}^2)}}. \quad (6.2.2.11)$$

Отсюда следует, что при приближении частоты  $\omega = k_{\parallel} u - |\omega_{Be}|$  к частоте собственных колебаний плазмы возникает неустойчивость, причем инкремент нарастания

$$\gamma = 1/2 \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2| \omega_{\pm}}{|\omega_{Be}| (\omega_{\mp}^2 - \omega_{\pm}^2)} - (\omega_{\pm} - k_{\parallel} u + |\omega_{Be}|)^2}$$

достигает максимального значения при  $\omega_{\pm} = k_{\parallel} u - |\omega_{Be}|$ , равного

$$\gamma_{\max} = 1/2 \sqrt{\frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2| \omega_{\pm}}{|\omega_{Be}| (\omega_{\mp}^2 - \omega_{\pm}^2)}}. \quad (6.2.2.12)$$

При  $\omega_{pe} \sim |\omega_{Be}|$  находим

$$\gamma_{\max} \sim \omega_{pe} (n'_0/n_0)^{1/2},$$

т. е. максимальный инкремент нарастания колебаний с частотой  $\omega_{\pm}$  при циклотронном резонансе в условиях аномального эффекта Доуплера меньше их инкремента нарастания при черенковском резонансе. Напомним, что в последнем случае  $\gamma_{\max} \sim (n'_0/n_0)^{1/3} \omega_{pe}$ .

Колебания системы с частотой, близкой к  $\omega = k_{\parallel} u + |\omega_{Be}|$ , всегда устойчивы. Действительно, полагая  $\omega = k_{\parallel} u + |\omega_{Be}| + \eta$ , где  $|\eta| \ll k_{\parallel} u + |\omega_{Be}|$ , получим для  $\eta$  чисто вещественное выражение

$$\eta = \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta \omega^2 (\omega^2 - \omega_{Be}^2)}{2 |\omega_{Be}| (\omega^2 - \omega_{\pm}^2) (\omega^2 - \omega_{\mp}^2)} \Big|_{\omega = k_{\parallel} u + |\omega_{Be}|},$$

если  $k_{\perp}u + |\omega_{Be}|$  не близко к  $\omega_{\pm}$ , и

$$\eta = 1/2 (\omega_{\pm} - k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|) \pm$$

$$\pm 1/2 \sqrt{(\omega_{\pm} - k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|)^2 + \frac{\omega_{pe}'^2 \sin^2 \theta |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2| \omega_{\pm}}{|\omega_{Be}| (\omega_{\pm}^2 - \omega_{\mp}^2)}},$$

если  $k_{\perp}u + |\omega_{Be}| \approx \omega_{\pm}$ .

Рассмотрим теперь взаимодействие холодного пучка малой плотности с горячей плазмой. В этом случае дисперсионное уравнение (6.2.2.1) имеет вид

$$1 + \delta\epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, \omega) - \frac{\omega_{pe}'^2 \cos^2 \theta}{(\omega - k_{\parallel}u)^2} - \frac{\omega_{pe}'^2 \sin^2 \theta}{(\omega - k_{\parallel}u)^2 - \omega_{Be}^2} = 0, \quad (6.2.2.13)$$

где  $\delta\epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, \omega)$  определяется выражением (5.2.2.7).

Если скорость пучка  $u$  того же порядка, что тепловая скорость электронов плазмы  $v_e$  или меньше нее, то для колебаний с частотами  $\omega = k_{\parallel}u$  либо  $\omega = k_{\parallel}u \pm |\omega_{Be}|$  уже нельзя пренебрегать тепловым движением электронов плазмы.

Полагая в этом случае  $\omega = k_{\parallel}u + \eta$ , найдем

$$\eta = \pm \frac{\omega_{pe}'^2 \cos \theta}{\sqrt{1 + \delta\epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, k_{\parallel}u)}}. \quad (6.2.2.14)$$

Так как  $\text{Im } \delta\epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, k_{\parallel}u) \neq 0$  из-за наличия резонансного черенковского и циклотронного поглощения колебаний электронами, то один из корней последнего уравнения всегда имеет положительную мнимую часть, т. е. из-за наличия затухания собственных колебаний плазмы колебания системы с частотой  $\omega = k_{\parallel}u$ , возбуждаемые моноэнергетическим пучком, всегда неустойчивы. По порядку величины при  $u \sim v_e$  и  $ka_e \leq 1$  имеем

$$\gamma \sim kv_e (n'_0/n_0)^{1/2}. \quad (6.2.2.14')$$

Колебания с частотой  $\omega = k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|$  также неустойчивы из-за наличия затухания собственных колебаний плазмы. Полагая  $\omega = k_{\parallel}u - |\omega_{Be}| + \eta$ , найдем, что

$$\eta = - \frac{\omega_{pe}'^2 \sin^2 \theta}{2 |\omega_{Be}| |1 + \delta\epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|)|}. \quad (6.2.2.15)$$

Отсюда получаем

$$\gamma = \text{Im } \eta = \frac{\omega_{pe}'^2 \sin^2 \theta \text{Im } \delta\epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|)}{2 |\omega_{Be}| |1 + \delta\epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|)|^2}.$$

Так как  $\text{Im } \delta\epsilon^{(p)} > 0$ , то  $\gamma > 0$ , т. е. действительно колебания с частотой  $\omega = k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|$  неустойчивы.

Если  $k\rho_e \ll 1$  ( $\rho_e$  — ларморовский радиус электрона),  $ka_e \ll 1$  и  $\omega_{pe} \sim |\omega_{Be}|$ , то

$$\gamma \sim (n'_0/n_0) kv_e.$$

Из сравнения последнего соотношения с (6.2.2.14) следует, что возбуждение колебаний за счет поглощения при  $\omega = k_{\parallel}u$  происходит значительно эффективнее, чем при  $\omega = k_{\parallel}u - |\omega_{Be}|$ .

Отметим, что колебания системы с частотой  $\omega = k_{\parallel}u + |\omega_{Be}|$  устойчивы. Действительно, полагая  $\omega = k_{\parallel}u + |\omega_{Be}| + \eta$ , получим

$$\eta = \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{2 |\omega_{Be}| [1 + \delta \varepsilon^{(1)}(\mathbf{k}, k_{\parallel}u + |\omega_{Be}|)]}.$$

Отсюда следует, что  $\gamma = \text{Im } \eta > 0$ .

Отметим в заключение, что возбуждение низкочастотных продольных колебаний с частотами

$$\omega = \omega_{\infty}^{(2)}(\theta) \text{ при } \theta \approx 1/2\pi \text{ и } \omega = \omega_{\infty}^{(3)}(\theta)$$

пучком малой плотности можно рассматривать точно так же, как это было сделано для высокочастотных колебаний [35].

При движении электронов относительно ионов под действием внешнего электрического поля со скоростью  $u$ , значительно большей тепловой скорости электронов, при наличии магнитного поля также возможно возбуждение неустойчивых продольных колебаний с инкрементом  $\gamma \sim (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{pe}$  [36, 37].

Если электроны дрейфуют под действием электрического поля вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  со скоростью  $u$ , лежащей в интервале  $v_e \ll u < v_e$ , то в плазме малого давления с горячими электронами и холодными ионами ( $T_e \gg T_i$ ) возможно возбуждение медленных магнитозвуковых волн и циклотронно-звуковых колебаний (см. п. 5.5.1), а в плазме малого давления при  $T_i \gg T_e$  возможно возбуждение продольных ионно-циклотронных колебаний (см. п. 5.6.1). Декременты затухания (инкременты нарастания) ММЗ- и ЦЗ-колебаний и ионно-циклотронных колебаний по-прежнему определяются формулами (5.5.1.14)—(5.5.1.16) и (5.6.1.11) и (5.6.1.12) соответственно, в которых необходимо только умножить величину  $\gamma_e$  на  $1 - k_{\parallel}u/\omega(\mathbf{k})$  [38—40].

**6.2.3. Неустойчивость магнитоактивной плазмы в поле низкочастотных электромагнитных волн.** Пусть плазма находится в переменном электрическом поле  $E_0$  (например, в поле ионной циклотронной или быстрой магнитозвуковой волн), имеющем составляющие, перпендикулярные внешнему постоянному магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ ; тогда электроны и ионы плазмы приобретут под действием этого поля различные скорости  $u_e$  и  $u_i$ . Если частота поля  $\omega_0$  значительно меньше электронной циклотронной частоты,

то скорости электронов и ионов определяются выражениями

$$\mathbf{u}_e = c \frac{[\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0]}{B_0^2} - i \frac{e (\mathbf{E} \mathbf{b}) \mathbf{b}}{m_e \omega_0},$$

$$\mathbf{u}_i = \frac{e}{m_i (\omega_{Bi}^2 - \omega_0^2)} (\omega_{Bi} [\mathbf{E} \mathbf{b}] + i \omega_0 [[\mathbf{E}_0 \mathbf{b}] \mathbf{b}]),$$

где  $\mathbf{b} = \mathbf{B}_0/B_0$  — единичный вектор в направлении внешнего магнитного поля. В низкочастотном поле составляющая электрического поля  $\mathbf{E}_\parallel = \mathbf{b} (\mathbf{E}_0 \mathbf{b})$ , параллельная магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , мала, и поэтому дрейфовые скорости электронов и ионов плазмы в направлении, перпендикулярном магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , могут иметь величину, сравнимую со скоростью электронов вдоль магнитного поля или даже превышающую ее. Рассмотрением этого случая мы и ограничимся.

Различие в относительных скоростях электронной и ионной компонент плазмы  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e$  может привести к появлению пучковой неустойчивости [44—47].

Предположим, что частота и инкремент нарастания возникающих колебаний значительно больше ионной циклотронной частоты, а их длина волны — значительно меньше ларморовского радиуса ионов. В этом случае движение ионов в поле возникающих неустойчивых высокочастотных продольных колебаний плазмы можно считать немагнитичным, т. е. в кинетическом уравнении для ионов можно пренебречь силой Лоренца. Далее мы вправе допустить, что во время развития неустойчивых колебаний ионный газ движется равномерно относительно электронного газа с постоянной скоростью  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e$ .

В системе отсчета, связанной с электронами, дисперсионное уравнение для продольных колебаний имеет вид

$$A = 1 + \delta\varepsilon^{(e)} + \delta\varepsilon^{(i)} = 0, \quad (6.2.3.1)$$

где

$$\delta\varepsilon^{(e)} = \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} \left[ 1 + i \sqrt{\pi} z_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n(x_0) w(z_n) \right],$$

$$\delta\varepsilon^{(i)} = \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + i \sqrt{\pi} z_1 w(z_1)],$$

$$z_n = \frac{\omega - n |\omega_{Be}|}{\sqrt{2} k_\parallel v_e}, \quad z_1 = \frac{\omega - k u}{\sqrt{2} k v_i}.$$

Исследуем уравнение (6.2.3.1) в ряде предельных случаев.

а) Если относительная скорость  $u$  значительно больше тепловой скорости электронов, то ионный пучок возбуждает высокочастотные длинноволновые ( $k_x \rho_e \ll 1$ ) колебания плазмы с большой

фазовой скоростью  $|\omega/k_{\parallel}| \gg v_e$  [46]. Тогда и электроны, и ионы плазмы можно считать холодными, и выражения для  $\delta\epsilon^{(e, i)}$  примут вид

$$\delta\epsilon^{(e)} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \sin^2 \theta, \quad \delta\epsilon^{(i)} = -\frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2}.$$

Используя последние два соотношения, находим для корней (6.2.3.1)

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{u} \pm \eta,$$

где

$$\eta = \pm \left[ \frac{(\omega^2 - \omega_{\pm}^2)(\omega^2 - \omega_{\pm}^2)}{\omega^2(\omega^2 - \omega_{Be}^2)} \right]_{\omega = \mathbf{k}\mathbf{u}}^{-1/2} \omega_{pi}. \quad (6.2.3.2)$$

Эти колебания неустойчивы, если  $\mathbf{k}\mathbf{u} < \omega_{-}$  либо если  $|\omega_{Be}| < \mathbf{k}\mathbf{u} < \omega_{+}$ . По порядку величины при  $\omega_{pe} \sim |\omega_{Be}|$  имеем

$$\eta \sim (m_e/m_i)^{1/2} \mathbf{k}\mathbf{u}.$$

В области резонанса ( $\mathbf{k}\mathbf{u} \approx \omega_{\pm}$ ), где инкремент нарастания максимален, получим вместо (6.2.3.2)

$$\eta = \mp \left[ \frac{\omega_{pi}^2 |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2| \omega_{\pm}}{2(\omega_{\pm}^2 - \omega_{\pm}^2)} \right]^{1/2}. \quad (6.2.3.3)$$

Отметим, что для рассматриваемых колебаний условие  $|z_0| \gg 1$  выполняется при  $\sin \theta \sim \cos \theta \sim 1$ , если  $u \gg v_e$ . Однако и при  $u \leq v_e$  (и даже при  $u \ll v_e$ ) возможно возбуждение гидродинамических колебаний на второй гибридной частоте, если угол  $\theta$  близок к  $1/2\pi$ . В этом случае  $|\omega| \ll |\omega_{Be}|$ ,  $\omega_{pe}$  и формулы (6.2.3.2) и (6.2.3.3) упрощаются:

$$\left. \begin{aligned} \eta &= \pm \omega_{pi} \left[ \frac{\omega_{Be}^2 (\mathbf{k}\mathbf{u})^2}{(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2) ((\mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \omega_{\pm}^2)} \right]^{1/2}, \\ \eta &= \mp \left[ \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2 \omega_{\pm}}{2(\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2)} \right]^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3.4)$$

где

$$\omega_{\pm} = \frac{\omega_{pe} \cos \theta}{\sqrt{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2}}.$$

Этими выражениями можно пользоваться при  $\cos^2 \theta \gg m_e/m_i$ . Если  $\cos^2 \theta \sim m_e/m_i$ , то дисперсионное уравнение для рассматриваемых колебаний с частотой  $|\omega| \ll |\omega_{Be}|$  принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{\omega_{pi}^2}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2} = 0. \quad (6.2.3.5)$$

Если  $\cos^2 \theta \sim m_e/m_i$ , то по порядку величины получаем отсюда

$$\operatorname{Re} \omega \sim \operatorname{Im} \omega \sim \mathbf{k} \mathbf{u} \sim \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1 + \omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2}}. \quad (6.2.3.6)$$

В частности, в плотной плазме ( $\omega_{pe}^2 \gg \omega_{Be}^2$ ) имеем

$$\operatorname{Re} \omega \sim \operatorname{Im} \omega \sim \mathbf{k} \mathbf{u} \sim \sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{Bi}}.$$

б) При  $u \leq v_e$  возможна раскачка колебаний за счет их поглощения (или раскачки) резонансными электронами [46]. Считая по-прежнему ионный пучок холодным, т. е. полагая  $|z_i| \gg 1$ , получим

$$\omega = \mathbf{k} \mathbf{u} + \eta,$$

где

$$\eta = \pm \frac{\omega_{pi}}{\sqrt{1 + \delta \varepsilon^{(e)}(\mathbf{k}, \mathbf{k} \mathbf{u})}}. \quad (6.2.3.7)$$

При  $u \sim v_e$ ,  $\omega_{pe} \sim \omega_{Be}$  и  $\cos \theta \sim \sin \theta \sim 1$  получим

$$\operatorname{Re} \omega \sim \operatorname{Im} \omega \sim k v_s \quad (k a_0 \leq 1).$$

Условие  $|z_i| \gg 1$  выполняется только при  $T_e \gg T_i$ . В частности, при  $u \leq v_s \ll v_e$  находим следующие выражения для частоты и инкремента нарастания ионно-звуковых колебаний:

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \mathbf{k} \mathbf{u} \pm \omega_s(k), \\ \gamma &= \mp 1/2 \sqrt{\pi} [z_0 A_0(x_0) + (T_e/T_i) z_i \exp(-z_i^2)] \omega_s / (1 + k^2 a_0^2), \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3.8)$$

где

$$\omega_s(k) = \frac{k v_s}{\sqrt{1 + k^2 a_0^2}}, \quad z_0 = \frac{k u \pm \omega_s}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_e}, \quad z_i = \pm \frac{\omega_s}{\sqrt{2} k v_i}.$$

Ионно-звуковая неустойчивость возникает, если  $u_{\perp} > u_e \sim 2 \div 3 v_{i1}$ . Инкремент нарастания достигает максимального значения при  $k r_e \gg 1$  и равен

$$\gamma_{\max} \sim 0,2 \sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{Bi}} \quad (\cos \theta \sim u/v_e),$$

причем должно еще выполняться условие  $k r_e < v_e/u$ .

в) В плазме с горячими ионами и холодными электронами относительное движение ионов и электронов поперек магнитного поля может привести к раскачке электронного звука [47] (см. п. 5.5.3). Для этих колебаний  $k r_e \ll 1$ ,  $k_{\parallel} v_e \ll |\omega| \ll k v_i$ , так что дисперсионное уравнение (6.2.3.1) принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} (1 + i \sqrt{\pi} z_i) = 0.$$

Отсюда получаем при  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$

$$\omega(\mathbf{k}) = \frac{k_{\parallel} v_{se}}{\sqrt{1 + k^2 \rho_0^2}}, \quad \gamma(\mathbf{k}) = \sqrt{\frac{\pi m_i}{8 m_e} \frac{\cos \theta (\mathbf{k} \mathbf{u} - \omega(\mathbf{k}))}{(1 + k^2 \rho_0^2)^{3/2}}}, \quad (6.2.3.9)$$

где

$$v_{se} = \sqrt{T_i/m_e}, \quad \rho_0 = v_{se}/|\omega_{Be}|.$$

Условие  $|\omega| \gg k_{\parallel} v_e$  выполняется, если  $1 + k^2 \rho_0^2 \ll T_i/T_e$ , а условия  $\omega_{Bi} \ll |\omega| \ll |\omega_{Be}|$ , если  $k_{\parallel} \rho_0 [(T_i/T_e)(1 + k^2 \rho_0^2)]^{1/2} \ll 1$  и  $k_{\perp} \rho_i [(m_i/m_e)(1 + k^2 \rho_0^2)]^{1/2} \gg 1$ .

Электронно-звуковая неустойчивость возникает при выполнении неравенства

$$k_{\perp} u_{\perp} \cos \psi > \omega = \frac{k_{\parallel} v_{se}}{\sqrt{1 + k^2 \rho_0^2}},$$

где  $\psi$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_{\perp}$  и  $\mathbf{u}_{\perp}$ . Эти колебания нарастают наиболее быстро при  $\psi = 0$ ,  $k \rho_0 = 1$  и  $\cos \theta = \frac{u_{\perp}}{\sqrt{2} v_{se}}$ . В этом случае частота и инкремент нарастания колебаний равны

$$\left. \begin{aligned} \omega_{\max} &= \frac{u_{\perp}}{2v_i} \sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{Bi}}, \\ \gamma_{\max} &= \frac{\sqrt{\pi}}{16 \sqrt{2}} \left( \frac{u_{\perp}}{v_i} \right)^2 \sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{Bi}}. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3.10)$$

Отношение  $\gamma_{\max}/\omega_{\max} \approx 0,15 (u_{\perp}/v_i)$  остается малым при  $u_{\perp} \sim \sim v_i$  только за счет малого численного множителя. Отметим, что электронно-звуковая неустойчивость возможна и при  $u_{\perp} \ll v_i$ .

Полученные выражения (6.2.3.9) и (6.2.3.10) для частоты и инкремента нарастания электронно-звуковых колебаний применимы при  $\gamma \ll \omega_0$ . Если частота  $\omega_0$  волны, вызывающей относительное движение электронов и ионов, порядка ионной циклотронной частоты, то это условие при  $\gamma \sim \gamma_{\max}$  принимает вид

$$(u_{\perp}/v_i)^2 \gg 10 \sqrt{m_e/m_i},$$

т. е. отношение  $u_{\perp}/v_i$  не может быть очень малым.

г) Если плазма изотермична ( $T_e \sim T_i$ ), то при  $u \geq v_i$  неустойчивость рассматриваемых продольных колебаний также имеет место [47], причем в этом случае дисперсионное уравнение (6.2.3.1) с учетом неравенства  $|\omega| \ll |\omega_{Be}|$  принимает вид

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} [1 + i \sqrt{\pi} z_0 w(z_0) A_0(x_0)] + \frac{\omega_{pi}^2}{k^2 v_i^2} [1 + i \sqrt{\pi} z_1 w(z_1)] = 0. \quad (6.2.3.11)$$

В случае длинноволновых колебаний  $ka_0 \ll 1$ ,  $x_0 \ll 1$  и  $ka_1 \ll 1$  в последнем уравнении можно пренебречь единицей по сравнению с  $(\omega_{pe}/k\nu_\alpha)^2$  и положить  $A_0=1$ . Приравнявая при  $\phi=0$  и  $\gamma=0$  нулю мнимую и вещественную части этого уравнения, получим два уравнения, определяющие границу области устойчивости  $u_\perp = u_c$  (при  $u_\perp > u_c$  плазма неустойчива):

$$\left. \begin{aligned} z_0 \exp(-z_0^2) + (T_0/T_1) z_1 \exp(-z_1^2) &= 0, \\ 1 - 2z_0 \int_0^{z_0} \exp(t^2 - z_0^2) dt + \\ + (T_0/T_1) \left[ 1 - 2z_1 \int_0^{z_1} \exp(t^2 - z_1^2) dt \right] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.2.3.12)$$

При  $T_0 = T_1$  из первого уравнения получим, что  $z_0 = -z_1$ , где  $z_0$  определяется из второго уравнения

$$1 - z_0 \int_0^{z_0} \exp(t^2 - z_0^2) dt = 0,$$

из которого находим, что  $z_0 \approx 0,9$ . Таким образом, при  $T_0 = T_1$  граничное значение скорости  $u$  равно  $u_c = \sqrt{2}z_0\nu_1 \approx 1,3\nu_1$ .

Если  $T_0 \sim T_1$  и  $u_\perp > u_c$ , так что  $|u_\perp - u_c| \sim u_c$ , то по порядку величины имеем

$$\operatorname{Re} \omega \sim \operatorname{Im} \omega \sim k_\perp u_\perp \sim \sqrt{|\omega_{B0}| |\omega_{B1}|} \quad (\omega_{pe} > |\omega_{B0}|).$$

**6.2.4. Возбуждение быстрых магнитозвуковых и альвеновских волн потоками электронов и ионов.** Электронные и ионные потоки могут возбуждать не только медленные продольные колебания плазмы, но и любую медленную волну. Напомним, что в плазме, состоящей из электронов и ионов одного сорта, к медленным волнам относятся альвеновская (А) и быстрая магнитозвуковая (БМЗ) волны.

В области высоких частот  $\omega \gg \omega_{B1}$  в плазме с большой плотностью БМЗ-ветвь является чисто электронной ветвью и ее показатель преломления и частота определяются выражениями

$$N^2 = \frac{\omega_{pe}^2}{\omega (|\omega_{B0}| \cos \theta - \omega)}, \quad \omega(k, \theta) = \frac{|\omega_{B0}| \cos \theta}{1 + r}, \quad (6.2.4.1)$$

где  $r = (\omega_{pe}/k c)^2$ ; угол  $\theta$  предполагается не очень близким к  $1/2\pi$ . Напомним, что в области частот  $\omega_{B1} \ll |\omega| \ll |\omega_{B0}|$  ( $r \gg 1$ ) эта ветвь колебаний называется свистящим атмосфериком.

Исследуем возбуждение колебаний с частотой (6.2.4.1) электронным пучком малой плотности [28]. Считая и плазму, и пучок

холодными и используя выражения (5.1.1.5) и (6.2.1.3), получим из дисперсионного уравнения (5.2.2.5) в условиях черенковского резонанса ( $\omega(k, \theta) = k_{\parallel} u$ )

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{3/2}} \left( \frac{n'_0}{n_0} \frac{\sin^2 \theta}{1+r} \right)^{1/2} \omega(k, \theta). \quad (6.2.4.2)$$

При циклотронном резонансе ( $\omega(k, \theta) = k_{\parallel} u - |\omega_{Be}|$ ) инкремент нарастания равен

$$\gamma = \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)^{1/2} \frac{(1+r + \cos \theta)(1 - \cos \theta) |\cos \theta - r|}{2(1+r)(\cos \theta)^{3/2}} \omega(k, \theta). \quad (6.2.4.3)$$

Отметим, что инкременты нарастания, описываемые двумя последними соотношениями, сравнимы по порядку величины при  $r \sim 1$  с инкрементами нарастания продольных колебаний плазмы на второй гибридной частоте  $\omega = \omega_{-} \approx |\omega_{Be}| \cos \theta$  (см. (6.2.2.10) и (6.2.2.12)). Это обстоятельство не должно нас удивлять, так как при  $r \ll 1$  БМЗ-волна становится продольной и ее частота, определяемая (6.2.4.2), стремится при  $r \rightarrow 0$  к частоте второго гибридного резонанса.

При возбуждении БМЗ-волны потоком электронов с большим тепловым разбросом по скоростям инкременты нарастания определяются следующими формулами:

при черенковском резонансе ( $\omega(k, \theta) \approx k_z u$ )

$$\frac{\gamma}{\omega} = - \frac{\sqrt{\pi} \sin^2 \theta \omega^2}{2k_z^2 v_e'^2 (1+r)} \frac{n'_0}{n_0} z_0 \exp(-z_0^2), \quad (6.2.4.4)$$

где

$$z_0 = \frac{\omega(k, \theta) - k_z u}{\sqrt{2} k_z v_e'}.$$

при циклотронном резонансе в условиях аномального эффекта Доплера ( $\omega(k, \theta) \approx k_{\parallel} u - n |\omega_{Be}|$ )

$$\frac{\gamma}{\omega} = \frac{\sqrt{\pi} (x'_0)^{n-1} n |\omega_{Be}|}{2^{n+3/2} n! k v_e'} \frac{(1 - \cos \theta)^2 [nr(1+r) - \cos \theta - \cos^2 \theta]^2}{\cos^3 \theta (1+r)^3} \frac{n'_0}{n_0} \exp(-z_n^2), \quad (6.2.4.5)$$

где

$$z_n = \frac{\omega(k, \theta) - k_{\parallel} u + n |\omega_{Be}|}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_e'}.$$

Эти выражения получены при  $k \rho'_e \ll 1$ . Если  $k \rho'_e \geq 1$ , то нетрудно получить для инкремента нарастания общее соотношение, аналогичное выражению (6.2.2.4) для инкремента нарастания продольных колебаний.

Отметим, что при понижении частоты инкременты нарастания (6.2.4.2)—(6.2.4.4) убывают, т. е. возбуждение БМЗ-волны электронным пучком наиболее эффективно в высокочастотной области при  $\omega \sim |\omega_{Be}|$ ; свисты ( $\omega \ll |\omega_{Be}|$ ) возбуждаются слабее [28, 48, 49].

Рассмотрим теперь возбуждение колебаний плазмы потоками быстрых ионов с большим тепловым разбросом по скоростям [51]. Из условия резонанса  $\omega \approx k_{\parallel} u - n |\omega_{Bi}|$  ( $n=0, 1, \dots$ ) следует, что частота возбуждаемой волны  $\omega(k, \theta)$  при большой скорости потока может значительно превышать ионную циклотронную частоту. Поэтому условие резонанса может выполняться для гармоник высокого порядка ( $n \gg 1$ ). В этом случае циклотронное излучение ионов потока, приводящее к неустойчивости, имеет квазинепрерывный спектр.

Будем рассматривать случай, когда спектр излучения ионов лежит в области частот  $\omega_{Bi} \ll \omega \ll |\omega_{Be}|$ . Тогда в плазме с большой плотностью будут возбуждаться электромагнитные волны (свисты) с частотой

$$\omega(k, \theta) = |\omega_{Be}| \cos \theta / r \quad (r = \omega_{pe}^2 / k^2 c^2 \gg 1).$$

Предположим далее, что длины возбуждаемых волн значительно меньше ларморовского радиуса ионов потока ( $k \rho_i = kv'_i / \omega_{Bi} \gg 1$ ). Тогда можно пренебречь действием магнитного поля на ионы потока и воспользоваться выражениями (6.1.1.2) для компонент тензора диэлектрической проницаемости пучка, справедливыми при  $B_0 = 0$ . Антиэрмитовы части компонент тензора  $\epsilon_{ij}^{(b)}$ , ответственные за возбуждение свистящих атмосфериков, имеют вид

$$\begin{aligned} (\epsilon_{11}^{(b)})'' &= (\epsilon_{22}^{(b)})'' (1 + 2z_1^2 \operatorname{tg}^2 \theta) \cos^2 \theta = \\ &= \left( \frac{\omega'_{pi}}{\omega} \right)^2 \sqrt{\pi} z_1 \exp(-z_1^2) (\cos^2 \theta + 2z_1^2 \sin^2 \theta), \end{aligned} \quad (6.2.4.6)$$

где  $z_1 = (\omega(k, \theta) - k_{\parallel} u) / \sqrt{2} kv'_i$ . Остальные компоненты  $(\epsilon_{ij}^{(b)})''$  не превосходят (6.2.4.6), но в дисперсионном уравнении их можно не учитывать, так как они умножаются на малый множитель  $\omega / |\omega_{Be}|$ .

Подставляя найденные выражения в дисперсионное уравнение (5.2.2.5) и учитывая, что  $|\epsilon_{33}| = |\epsilon_3| \gg |\epsilon_2| \gg |\epsilon_1|$ , где  $\epsilon_{ij}$  определяются формулами (5.1.1.6), получим для инкремента нарастания колебаний выражение

$$\gamma / \omega = - (\omega / \sqrt{2} k_{\parallel} c)^2 ((\epsilon_{11}^{(b)})'' + (\epsilon_{22}^{(b)})'' \cos^2 \theta),$$

или

$$\frac{\gamma}{\omega} = - \sqrt{\pi} \frac{n'_0}{n_0} \frac{\omega_{Bi} \cos \theta}{\omega} z_1 (1 + 2z_1^2 \operatorname{tg}^2 \theta) \exp(-z_1^2). \quad (6.2.4.7)$$

Этот инкремент пропорционален малому параметру  $n'_0/n_0$  (как и во всех других случаях возбуждения медленных волн горячим пучком) и, кроме того, второму малому параметру  $\omega_{B1}/\omega$ .

При  $u \gg v'_i$  инкремент (6.2.4.7) экспоненциально мал, если  $k_\perp u$  не близко к  $\omega(k, \theta)$ . Резонанс возникает при  $k = k_0$ , где  $k_0 = \omega_{pe}^2/c^2\omega_{Be}^2$ . Инкремент достигает максимума при заданном  $\theta$ , если  $z_i = -z_m$ , где

$$z_m^2 = 1/2 \operatorname{ctg}^2 \theta [\sqrt{(2 - 3 \operatorname{tg}^2 \theta)^2 + 8 \operatorname{tg}^2 \theta} - 2 + 3 \operatorname{tg}^2 \theta].$$

Максимальный инкремент равен

$$\gamma_{\max} = \sqrt{\pi} \frac{n'_0}{n_0} f(\theta) \omega_{B1}, \quad (6.2.4.8)$$

где

$$f(\theta) = \cos \theta (1 + z_m^2 \operatorname{tg}^2 \theta) z_m \exp(-z_m^2).$$

При  $\theta = 0$  имеем  $z_m = 1/\sqrt{2}$  и  $f(\theta) = 0,43$ . Если  $\theta = 1/2\pi$ , то  $z_m = \sqrt{3}$  и  $f(\theta) \approx \frac{0,70}{\cos \theta} \gg 1$ . Таким образом, максимальный инкремент возрастает при приближении  $\theta$  к  $1/2\pi$ . Однако приведенными выражениями для инкрементов, равно как и выражением  $\omega(k, \theta) = \omega_{Be} |\cos \theta|/r$  для частоты свистящего атмосферика, можно пользоваться только при  $\theta$ , не близких к  $1/2\pi$ .

Рассмотрим поэтому отдельно возбуждение волн с частотами  $\omega_{B1} \ll |\omega| \ll \omega_{Be}$  ионным потоком при  $\theta \approx 1/2\pi$ . Предполагая, по-прежнему, что  $\omega_{pe} \gg \omega_{Be}$ , получим следующее выражение для частоты колебаний БМЗ-ветви:

$$\omega^2(k, \theta) = \frac{\omega_{pe}^2 [(m_e/m_i)(1+r) + \cos^2 \theta]}{(1+r) [1 + (1+r) (\omega_{pe}/\omega_{Be})^2]}. \quad (6.2.4.9)$$

При  $r \gg 1$  и  $\cos^2 \theta \gg m_e/m_i$  получаем отсюда выражение для частоты свистящего атмосферика.

Инкремент нарастания колебаний с такой частотой (см. (6.2.4.9)) определяется соотношением

$$\frac{\gamma}{\omega} = -\frac{\omega^2}{2k^2 c^2} \frac{(1+r) (\epsilon_{11}^{(b)})''}{r [(m_e/m_i)(1+r) + \cos^2 \theta]}, \quad (6.2.4.10)$$

где  $(\epsilon_{11}^{(b)})''$  задается формулой (6.2.4.6).

При  $(m_e/m_i)(1+r) \ll \cos^2 \theta$  эта формула совпадает с формулой (6.2.4.7), если пренебречь  $(\epsilon_{11}^{(b)})'' \cos^2 \theta$  по сравнению с  $(\epsilon_{11}^{(b)})''$ .

Если  $\cos^2 \theta \sim m_e/m_i$ ,  $r \sim 1$  и  $k \sim k_0$ , то по порядку величины максимальный инкремент равен

$$\gamma_{\max} \sim \frac{n'_0}{n_0} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \omega_{B1} = \frac{n'_0}{n_0} \sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{B1}}.$$

При  $\cos^2 \theta \leq (m_e/m_i)(1+r)$  и  $\omega_{pe} \geq |\omega_{Be}|$  имеем по порядку величины

$$\left. \begin{aligned} \omega(k, \theta) &\sim \sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{Bi}}, \\ \gamma &\sim (n'_0/n_0) \omega z^3 \exp(-z^2). \end{aligned} \right\} \quad (6.2.4.11)$$

Инкремент нарастания достигает максимума при  $k \sim k_0 \sim \frac{\sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{Bi}}}{u \cos \theta}$

$$\gamma_{\max} \sim (n'_0/n_0) \omega \sim (n'_0/n_0) \sqrt{|\omega_{Be}| \omega_{Bi}}. \quad (6.2.4.12)$$

Таким образом, инкремент нарастания высокочастотной части БМЭ-ветви достигает максимума при  $\cos^2 \theta \leq m_e/m_i$ , который в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз больше инкремента нарастания колебаний при  $\cos \theta \sim 1$ .

Перейдем теперь к изучению возбуждения низкочастотных ( $\omega \sim \omega_{Bi}$ ) альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн потоками ионов и электронов, движущимися в направлении внешнего магнитного поля через плазму малого давления и скорости со скоростью порядка альвеновской скорости  $u \sim v_A$  [28, 48—51]. Дисперсионное уравнение для этих волн в плазме малого давления ( $v_A \gg v_i, v_s$ ) при наличии пучка имеет вид

$$\cos^2 \theta \mathcal{A}^2 - (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} \cos^2 \theta) \mathcal{A}^2 + \epsilon_{11} \epsilon_{22} + \epsilon_{12}^2 = 0. \quad (6.2.4.13)$$

(При получении этого соотношения из общего дисперсионного уравнения (5.2.2.5) мы учли, что компонента  $\epsilon_{33}$  значительно больше остальных компонент тензора  $\epsilon_{ij}$ .)

В отсутствие пучка отсюда находим

$$\omega^2(k, \theta) = \frac{1}{2} k^2 v_A^2 [1 + \cos^2 \theta + q \cos^2 \theta \pm \sqrt{(1 + \cos^2 \theta + q \cos^2 \theta)^2 - 4 \cos^2 \theta}], \quad (6.2.4.14)$$

где  $q = (kc/\omega_{pi})^2$ .

При моноэнергетическом пучке частиц получим, используя выражения для компонент тензора его диэлектрической проницаемости, при циклотронном резонансе ( $\omega(k, \theta) = k_{\parallel} u - |\omega_{B\alpha}|$ )

$$\gamma = \left\{ \frac{\omega_{p\alpha}^2 |\omega_{B\alpha}|}{4\omega Q} \left[ (1 + \cos^2 \theta) \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\omega_{pi}^2}{\omega_{Bi}(\omega_{Bi} \mp \omega)} \right] \right\}^{1/2}, \quad (6.2.4.15)$$

где

$$Q = \frac{\omega_{pi}^4}{(\omega^2 - \omega_{Bi}^2)^2} \left[ (1 + \cos^2 \theta) \frac{k^2 v_A^2}{\omega^2} + \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2} - 2 \right].$$

В знаменателе последнего выражения верхний знак берется, если резонанс имеет место для ионов пучка, а нижний — для электронов пучка.

Если в пучке велик разброс по скоростям, то при черенковском резонансе ( $\omega(k, \theta) = k_{\parallel} u$ ) инкремент нарастания равен

$$\gamma = -\frac{\sqrt{\pi} \omega_{pa}^{\prime 2} x_{\alpha}^{\prime}}{\omega Q} \left( \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^2} + \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2 - \omega_{Bi}^2} \right) z_0 \exp(-z_0^2). \quad (6.2.4.16)$$

При циклотронном резонансе для частиц пучка ( $\omega(k, \theta) \approx k_{\parallel} u - n |\omega_{B\alpha}|$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ) получим

$$\gamma = -\frac{\sqrt{\pi} \omega_{pa}^{\prime 2} n^2 (x_{\alpha}^{\prime})^{n-1}}{2^n \cdot n! \omega Q} \left[ (1 + \cos^2 \theta) \frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \frac{2\omega_{pi}^2}{\omega(\omega_{Bi} \mp \omega)} \right] z_0 \exp(-z_n^2), \quad (6.2.4.17)$$

где

$$z_n = \frac{\omega(k, \theta) - k_{\parallel} u + n |\omega_{B\alpha}|}{\sqrt{2} k_{\parallel} v_{\alpha}^{\prime}}.$$

Так как  $x_{\alpha} = (k_{\parallel} \rho_{\alpha})^2 \ll 1$ , то циклотронное возбуждение резонансными частицами пучка происходит наиболее сильно при однократном резонансе  $\omega = k_{\parallel} u - |\omega_{B\alpha}|$ . Отметим, что при возбуждении продольных длинноволновых колебаний ( $k \rho_{\alpha} \ll 1$ ) инкремент нарастания максимален в случае черенковского резонанса  $\omega \approx k_{\parallel} u$ .

## § 6.3. Возбуждение электромагнитных волн в плазме потоками осцилляторов

**6.3.1. Тензор диэлектрической проницаемости системы плазма — поток осцилляторов.** Выше мы исследовали устойчивость системы плазма—поток, предполагая, что распределения частиц по скоростям в плазме и пучке совпадают с максвелловским. Теперь мы будем предполагать, что распределение частиц в плазме остается по-прежнему максвелловским, распределение же частиц в потоке существенно отличается от максвелловского.

Будем предполагать, что в отсутствие колебаний частицы пучка имеют одинаковый ларморовский радиус (такие частицы называют *осцилляторами* \*), а их распределение вдоль магнитного поля по скоростям является максвелловским

$$f'_{\alpha 0} = \frac{n'_0}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha}^{\prime} v_{\perp}} \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0}) \exp \left[ -\frac{(v_{\parallel} - u)^2}{2v_{\alpha}^{\prime 2}} \right], \quad (6.3.1.1)$$

где  $v_{\alpha}^{\prime} = \sqrt{T'_{\alpha}/m_{\alpha}}$ ,  $T'_{\alpha}$  — «продольная температура» потока.

\* На возможность появления неустойчивости в плазме, электроны которой имеют одинаковый ларморовский радиус, было указано в работе Малмфорса [52]. В работе Сена [53] были получены критерии неустойчивости такой плазмы. Впоследствии устойчивость плазмы при наличии в ней осцилляторов — электронов и ионов — исследовалась в ряде работ (см. [54—66] и др.).

Тензор диэлектрической проницаемости системы плазма—поток осцилляторов можно представить в виде

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(b)},$$

где  $\varepsilon_{ij}^{(p)}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы в отсутствие потока и  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  — тензор диэлектрической проницаемости потока осцилляторов. Для потока с функцией распределения (6.3.1.1) компоненты тензора  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  имеют вид [59]

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(b)} &= -\left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2x'_a}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{z'_n}{x'_a} n^2 J_n + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{B\alpha} y'_0}{\omega \lambda} 2n^3 J_n J'_n \right] i \sqrt{\pi} w(z'_n), \\ \varepsilon_{22}^{(b)} &= -\left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2x'_a}\right) + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\lambda^2 z'_n}{x'_a} J_n'^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n \omega_{B\alpha} y'_0}{\omega \lambda} (\lambda^2 J_n'^2)' \right] i \sqrt{\pi} w(z'_n), \\ \varepsilon_{33}^{(b)} &= \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \left(2y_0'^2 + \frac{\lambda^2}{2x'_a} \operatorname{tg}^2 \theta - \operatorname{tg}^2 \theta\right) + \\ &\quad + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 y_n'^2 \left[ z'_n J_n'^2 + \frac{2x'_a y'_0 \omega_{B\alpha}}{\lambda \omega} n J_n J'_n \right] 2i \sqrt{\pi} w(z'_n), \\ \varepsilon_{12}^{(b)} &= -\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{n^2 y'_0 \omega_{B\alpha}}{\omega \lambda} (\lambda J_n J'_n)' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n \lambda z'_n}{x'_a} J_n J'_n \right] \sqrt{\pi} w(z'_n), \\ \varepsilon_{13}^{(b)} &= \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \left(1 - \frac{\lambda^2}{2x'_a}\right) \operatorname{tg} \theta + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 \frac{\omega}{\omega_{B\alpha}} y_n' \operatorname{tg} \theta \times \\ &\quad \times \left[ \frac{2n^2 \omega_{B\alpha}}{\omega \lambda} J_n J'_n + \frac{n z'_n}{y'_0 x'_a} J_n'^2 \right] i \sqrt{\pi} w(z'_n), \\ \varepsilon_{23}^{(b)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{pa}}{\omega}\right)^2 y_n' \operatorname{tg} \theta \left[ \frac{n}{\lambda} (\lambda J_n J'_n)' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda z'_n \omega}{x'_a y'_0 \omega_{B\alpha}} J_n J'_n \right] \sqrt{\pi} w(z'_n), \end{aligned} \tag{6.3.1.2}$$

где  $J_n \equiv J_n(\lambda)$  — функции Бесселя,  $J'_n = dJ_n/d\lambda$ ,

$$\lambda = \frac{k_x v_{\perp 0}}{\omega_{B\alpha}}, \quad x'_\alpha = \left( \frac{k_x v'_\alpha}{\omega_{B\alpha}} \right)^2,$$

$$y'_n = \frac{\omega - n\omega_{B\alpha}}{\sqrt{2}k_{\parallel}v'_\alpha}, \quad z'_n = \frac{\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u}{\sqrt{2}k_{\parallel}v'_\alpha}.$$

В случае холодного потока осцилляторов, когда можно пренебречь тепловым разбросом по продольным скоростям ( $T'_\alpha \rightarrow 0$ ,  $|z'_n| \rightarrow \infty$ ), тензор  $\epsilon_{ij}^{(b)}$  упрощается и его компоненты записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(b)} &= -\left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega_{B\alpha}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta n^2 J_n^2}{(\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\omega_{B\alpha} n^3 J_n J'_n}{\lambda (\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)} \right], \\ \epsilon_{22}^{(b)} &= -\left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega_{B\alpha}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta \lambda^2 J_n^2}{(\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\omega_{B\alpha} n (\lambda^2 J_n^2)'}{\lambda (\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)} \right], \\ \epsilon_{33}^{(b)} &= -\left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{(\omega - n\omega_{B\alpha})^2 J_n^2}{(\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2 \operatorname{tg}^2 \theta (\omega - n\omega_{B\alpha})^2 n J_n J'_n}{\lambda \omega_{B\alpha} (\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)} \right], \\ \epsilon_{12}^{(b)} &= -i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega_{B\alpha}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta n \lambda J_n J'_n}{(\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)^2} + \frac{\omega_{B\alpha} n^2 (\lambda J_n J'_n)'}{\lambda (\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)} \right], \\ \epsilon_{13}^{(b)} &= \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega_{B\alpha} (\omega - n\omega_{B\alpha}) \operatorname{ctg} \theta n^2 J_n^2}{(\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2(\omega - n\omega_{B\alpha}) \operatorname{tg} \theta n^2 J_n J'_n}{\lambda (\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)} \right], \\ \epsilon_{23}^{(b)} &= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\frac{\omega'_{p\alpha}}{\omega}\right)^2 \left[ \frac{\omega_{B\alpha} (\omega - n\omega_{B\alpha}) \operatorname{ctg} \theta \lambda J_n J'_n}{(\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\omega - n\omega_{B\alpha}) \operatorname{tg} \theta n (\lambda J_n J'_n)'}{\lambda (\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel}u)} \right] \end{aligned} \quad (6.3.1.3)$$

Возбуждение колебаний плазмы потоком осцилляторов обладает существенными особенностями.

Во-первых, как известно, для горячего потока с изотропной функцией распределения возбуждение колебаний резонансными частицами происходит в условиях черенковского и циклотронного резонансов при аномальном эффекте Доплера ( $\omega/k_{\parallel} < u$ ), а циклотронный резонанс для частиц потока при нормальном эффекте Доплера вызывает затухание колебаний. Для горячего потока осцилляторов возбуждение колебаний резонансными частицами может наступать и при циклотронном резонансе в условиях нормального эффекта Доплера, а затухание колебаний при черенковском и циклотронном резонансах — в условиях аномального эффекта Доплера. Антиэрмитовы части тензора  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  для потока осцилляторов, в отличие от потока частиц с максвелловской функцией распределения частиц, не пропорциональны величине  $z'_0 = (\omega - k_{\parallel}u)/\sqrt{2}k_{\parallel}v'_{\alpha}$  и могут изменять знак при изменении величины  $\lambda \equiv k_{x'}v'_{\alpha} = k_{x'}v'_{\perp}(\omega_{B\alpha})$ ; знак антиэрмитовых слагаемых в  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$ , ответственных за затухание или раскачку колебаний, определяется как знаком величины  $z'_n$ , так и знаком величин  $J_n J'_n$  и  $(\lambda J_n J'_n)'$ .

Во-вторых, как видно из выражений (6.3.1.3), величины  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  содержат резонансные знаменатели, пропорциональные  $(\omega - n|\omega_{B\alpha}| - k_{\parallel}u)^2$ , где  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ , тогда как в случае пучка с максвелловским распределением  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  содержит резонансные знаменатели только при  $n=0$ . Поэтому инкремент нарастания собственных колебаний плазмы с частотой  $\omega(\mathbf{k})$  при резонансе  $\omega(\mathbf{k}) \approx k_{\parallel}u + n|\omega_{B\alpha}|$  ( $n=0, \pm 1, \dots$ ) для потока осцилляторов пропорционален  $(n_0)^{1/3}$ , так же как и при черенковском резонансе для изотропного пучка (напомним, что при циклотронном резонансе  $(\omega(\mathbf{k}) \approx k_{\parallel}u - |\omega_{B\alpha}|)$  для изотропного пучка инкремент нарастания колебаний пропорционален  $(n_0)^{1/2}$ ).

Таким образом, циклотронное возбуждение колебаний плазмы потоком осцилляторов является более сильным, чем возбуждение потоком частиц с максвелловским распределением по скоростям.

Наконец, поток осцилляторов неустойчив сам по себе (в отсутствие плазмы), тогда как поток частиц с максвелловским распределением по скоростям, естественно, устойчив в отсутствие плазмы.

**6.3.2. Возбуждение продольных высокочастотных колебаний потоком осцилляторов-электронов.** Дисперсионное уравнение для высокочастотных продольных колебаний имеет вид

$$A = 1 + \delta\varepsilon^{(p)} + \delta\varepsilon^{(b)}, \quad (6.3.2.1)$$

где величина  $\delta\varepsilon^{(p)}$  определяется выражением (6.2.2.2), а величина  $\delta\varepsilon^{(b)}$  равна

$$\delta\varepsilon^{(b)} = \left(\frac{\omega_{px}}{kv'_{\alpha}}\right)^2 \left[ 1 + l\sqrt{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( z'_n J_n^2 + \frac{2n|\omega_{B\alpha}|}{\omega} x'_\alpha y'_0 J_n J'_n \right) w(z'_n) \right]. \quad (6.3.2.2)$$

Если тепловой разброс по продольным скоростям в потоке осцилляторов мал, то

$$\delta\epsilon^{(b)} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega'_{px}{}^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta J_n^2}{(\omega - n |\omega_{Be}| - k_{\parallel} u)^2} + \frac{2 \sin^2 \theta J_n J'_n}{\lambda |\omega_{Be}| (\omega - n |\omega_{Be}| - k_{\parallel} u)} \right]. \quad (6.3.2.3)$$

В предельном случае малого ларморовского радиуса ( $\lambda \rightarrow 0$ ) это выражение переходит в выражение для  $\delta\epsilon^{(b)}$  для холодного моноэнергетического пучка.

В случае потока осцилляторов малой плотности дисперсионное уравнение (6.3.2.1) нетрудно исследовать таким же образом, как и выше. Займемся несколькими предельными случаями [59, 60].

Рассмотрим прежде всего возбуждение высокочастотных продольных колебаний холодной плазмы ( $\omega = \omega_{\infty}^{(1, 2)}(\theta) \equiv \omega_{\pm}$ , причем частоты  $\omega_{\infty}^{(1, 2)}(\theta)$  определены (5.1.2.6)) потоком осцилляторов с большим разбросом по скоростям вдоль магнитного поля. В этом случае инкремент нарастания колебания определяется выражением

$$\gamma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n. \quad (6.3.2.4)$$

где

$$\gamma_n = - \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left( \frac{\omega'_{px}}{k v'_x} \right)^2 \left[ z'_n J_n^2 + \frac{2n |\omega_{Be}|}{\omega \lambda} x'_n y'_0 J_n J'_n \right] \frac{|\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2|}{\omega_{\pm}^2 - \omega_{\pm}^2} \omega_{\pm} \exp(-z_n^2),$$

$$z'_n = \frac{\omega_{\pm} - n |\omega_{Be}| - k_{\parallel} u}{\sqrt{2} k_{\parallel} v'_x}. \quad (6.3.2.5)$$

Если величина  $v'_0$  достаточно мала, то существенный вклад в сумму (6.3.2.4) вносит слагаемое с наименьшим  $|z'_n|$ , так что

$\gamma \approx \gamma_n$ . Величина  $\gamma_n$  пропорциональна выражению  $z'_n J_n^2 + \frac{2n |\omega_{Be}|}{\lambda \omega} \times x'_n y'_0 J_n J'_n$ , которое может иметь разные знаки в зависимости от параметров, входящих в него, и поэтому при  $\omega \approx n |\omega_{Be}| + k_{\parallel} u$  и  $u \gg v'_0$  может происходить как циклотронное возбуждение, так и циклотронное затухание колебаний и при нормальном и при аномальном эффекте Доплера. Например, при  $z'_n = 0$  возбуждение колебаний при нормальном эффекте Доплера ( $n > 0$ ) происходит, если  $J_n J'_n < 0$ , а затухание — при  $J_n J'_n > 0$ ; в условиях же аномального эффекта Доплера ( $n < 0$ ) колебания возбуждаются, если  $J_n J'_n > 0$ , и затухают, если  $J_n J'_n < 0$ .

При возбуждении колебаний холодной плазмы моноэнергетическим потоком осцилляторов, в выражении (6.3.2.3) следует

удержать лишь слагаемые, обратно пропорциональные  $(\omega - n|\omega_{Be}| - k_{\parallel}u)^2$ . Полагая в этом случае

$$\omega = k_{\parallel}u + n|\omega_{Be}| + \eta, \quad n = 0, \pm 1, \dots,$$

где  $|\eta| \ll |\omega|$ , получим, что

$$\eta = \pm \omega'_{pe} \cos \theta |J_n(\lambda)| \left[ \frac{\omega^2 (\omega^2 - \omega_{Be}^2)}{(\omega^2 - \omega_{\pm}^2) (\omega^2 - \omega_{\mp}^2)} \right]^{1/2} \omega = k_{\parallel}u + n|\omega_{Be}|. \quad (6.3.2.6)$$

Неустойчивость возникает, если  $\omega < \omega_{-}$  или  $|\omega_{Be}| < \omega < \omega_{+}$ .

В условиях резонанса  $\omega = k_{\parallel}u + n|\omega_{Be}| = \omega_{\pm}$  вместо последнего соотношения получим

$$\eta = \xi \left[ \frac{\omega'_{pe} \cos^2 \theta J_n^2(\lambda) |\omega_{\pm}^2 - \omega_{Be}^2| \omega_{\pm}^2}{2(\omega_{\pm}^2 - \omega_{\mp}^2)} \right]^{1/2}. \quad (6.3.2.7)$$

Эти выражения применимы, только если угол  $\theta$  не очень близок к  $1/2\pi$ , так что выполняются условия

$$\frac{\cos^2 \theta J_n^2}{|\eta|} \gg \frac{\sin^2 \theta |J_n J'_n|}{|\lambda \omega_{Be}|}.$$

Последнее неравенство также нарушается при  $\lambda \rightarrow 0$  для  $n = \pm 1$  и  $n = \pm 2$ . В этом случае выражения (6.3.2.7) применимы только при  $\lambda^2 \gg |\gamma/\omega_{Be}|$ . Если же  $\lambda^2 \ll |\gamma/\omega_{Be}|$ , то нарастание колебаний возможно только при резонансе с  $n = -1$ ; в этом случае инкремент нарастания колебаний определится выражением (6.2.2.12).

Таким образом, действительно максимальный инкремент нарастания колебаний плазмы в условиях циклотронного резонанса для потока осцилляторов пропорционален  $(n'_0)^{1/2}$ , как и в случае черенковского резонанса.

В случае моноэнергетического потока осцилляторов, проходящего через плазму, с большим тепловым разбросом по скоростям, возможно возбуждение колебаний за счет их поглощения резонансными электронами плазмы. В этом случае величина  $\eta$  равна

$$\eta = \pm \frac{\omega'_{pe} \cos \theta J_n(\lambda)}{\sqrt{1 + \delta \epsilon^{(p)}(\mathbf{k}, k_{\parallel}u + n|\omega_{Be}|)}}. \quad (6.3.2.8)$$

Остановимся в заключение на вопросе об устойчивости плазмы, состоящей из электронов с максвелловским их распределением по скоростям и моноэнергетических ионов-осцилляторов [62—65]. Такое распределение ионов может существовать в адиабатической ловушке при инжекции в нее молекулярных ионов в направлении, перпендикулярном к магнитному полю. Заполнение ловушки плазмой осуществляется за счет диссоциации молекулярных ионов на остаточном газе. Такое же распределение ионов по скоростям

имеется в ловушках, когда захват ионов в них происходит в результате лоренцевской ионизации, т. е. ионизации атомов, движущихся перпендикулярно к магнитному полю.

Мы будем считать плотность плазмы достаточно малой ( $|\omega_{Be}| \gg \gg \omega_{pe}$ ) и рассмотрим колебания плазмы с частотами  $\omega \sim \omega_{pe} \gg \omega_{Bi}$ .

Дисперсионное уравнение продольных колебаний такой плазмы имеет вид

$$A = 1 + \delta\epsilon^{(e)} + \delta\epsilon^{(i)}, \quad (6.3.2.9)$$

где  $\delta\epsilon^{(e)}$  определяется выражением (6.2.2.2), а  $\delta\epsilon^{(i)}$  — выражением (6.3.2.3), в котором нужно заменить индекс  $\alpha$  на индекс  $i$  и положить  $n'_0 = n_0$ .

Учитывая, что в рассматриваемом случае возбуждаются колебания с малой частотой ( $|\omega| \ll |\omega_{Be}|$ ) и большой длиной волны ( $k\rho_0 \ll 1$ ), представим последнее уравнение в виде

$$1 + \frac{\omega_{pe}^2}{k^2 v_e^2} [1 + i\sqrt{\pi} z_0 W(z_0)] - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \omega_{pi}^2 \left[ \frac{\cos^2 \theta J_n^2}{(\omega - n\omega_{Bi})^2} + \frac{2 \sin^2 \theta n J_n J'_n}{\lambda \omega_{Bi} (\omega - n\omega_{Bi})} \right] = 0, \quad (6.3.2.10)$$

где  $z_0 = \omega/\sqrt{2} k_{\parallel} v_e$ .

Если фазовая скорость возбуждаемых колебаний значительно больше тепловой скорости электронов, то  $|z_0| \gg 1$ . Удерживая в этом случае в последнем соотношении только одно резонансное слагаемое, пропорциональное  $(\omega - n|\omega_{Bi}|)^{-2}$ , получим

$$\omega = n\omega_{Bi} + i\gamma,$$

где

$$\gamma = \frac{\omega_{pi} |\cos \theta J_n(\lambda)|}{\sqrt{(\omega_{pe} \cos \theta / n\omega_{Bi})^2 - 1}}. \quad (6.3.2.11)$$

Неустойчивость возникает при  $\cos \theta > n\omega_{Bi}/\omega_{pe}$ . Для выполнения этого условия необходимо, чтобы выполнялось условие  $\omega_{pe} > > \omega_{Bi}$ . Инкремент нарастания колебаний максимален, очевидно, при резонансе, когда частота  $\omega = n\omega_{Bi}$  близка ко второй гибридной частоте  $\omega = \omega_{\omega}^{(2)}(\theta) \approx |\omega_{Be}| \cos \theta$ ; в этом случае

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/2}} \left( \frac{m_e}{m_i} J_n^2(\lambda) \right)^{1/2} n\omega_{Bi}. \quad (6.3.2.12)$$

В нерезонансных условиях при  $\lambda \sim 1$  и небольших значениях номера  $n$  имеем  $\gamma \sim (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{Bi}$ , а при резонансе ( $\omega_{pe} \cos \theta = n\omega_{Bi}$ ) получим  $\gamma \sim (m_e/m_i)^{1/2} \omega_{Bi}$ .

Выражения (6.3.2.11) и (6.3.2.12) справедливы, если угол  $\theta$  не близок к  $1/2\pi$ , так что

$$\left| \frac{J_n \cos^2 \theta}{\gamma} \right| \gg \left| \frac{J'_n}{\lambda \omega_{Bi}} \right|.$$

Если это неравенство не выполняется то вместо (6.3.2.11) имеем

$$\omega = n\omega_{Bi} + \eta,$$

где

$$\eta = \frac{1}{1 - (\omega_{pe} \cos \theta / n\omega_{Bi})^2} \left\{ \frac{\omega_{pi}^2 n J_n J'_n}{\lambda \omega_{Bi}} \pm \left[ \left( \frac{\omega_{pi}^2 n J_n J'_n}{\lambda \omega_{Bi}} \right)^2 + \left( 1 - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{n^2 \omega_{Bi}^2} \right) \omega_{pi}^2 \cos^2 \theta \right]^{1/2} \right\} \quad (6.3.2.13)$$

Отсюда следует, что при  $\theta \approx 1/2\pi$  колебания неустойчивы, если

$$\cos \theta > \frac{n^2 J_n J'_n \omega_{pi}}{\lambda \sqrt{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta - n^2 \omega_{Bi}^2}}$$

и  $\omega_{pe} \cos \theta > n\omega_{Bi}$ .

При  $\omega \leq k_{\parallel} v_i$  моноэнергетический ионный поток возбуждает колебания за счет затухания Ландау на резонансных электронах. Действительно, полагая по-прежнему  $\omega = n\omega_{Bi} + \eta$ , получим

$$\eta = \pm \frac{\omega_{pi} \cos \theta J_n(\lambda)}{\sqrt{1 + (\omega_{pe}/k v_e)^2 [1 + i \sqrt{\pi} z_e W(z_e)]}}, \quad (6.3.2.14)$$

где  $z_e = n\omega_{Bi}/\sqrt{2} k_{\parallel} v_e$ .

Таким образом, из-за наличия затухания Ландау неустойчивость может возникнуть и при  $\omega_{pe} < \omega_{Bi}$ .

Итак, в плазме малой плотности с резко анизотропным распределением ионов по скоростям  $f_{i0} \sim \delta(v_{\perp} - v_{\perp 0})$  возникают неустойчивые продольные колебания с частотой, равной или кратной циклотронной частоте ионов. Этот вид неустойчивости называют *циклотронной неустойчивостью*. Циклотронная неустойчивость может развиваться не только в плазме, состоящей из ионов-осцилляторов, но и в плазме с произвольной анизотропной функцией распределения ионов  $f_{i0}(v_{\perp}, v_{\parallel})$  (если анизотропия достаточно велика), в частности в плазме с анизотропным максвелловским распределением ионов ( $T_{\perp} \neq T_{\parallel}$ ) [63—65, 114, 115]. При увеличении плотности (при  $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ ) становится возможным возбуждение гармоник с высоким номером, причем инкремент нарастания колебаний становится больше циклотронной частоты ионов. В этом случае циклотронная неустойчивость плазмы с немонотонной зависимостью функции распределения ионов от скорости в направлении, перпендикулярном к магнитному

полю  $\partial f_{i0}(v_x)/\partial v_x > 0$ , переходит в так называемую *конусную неустойчивость* [65, 116—118] (здесь  $f_{i0}(v_x) = \int \int f_{i0}(v_\perp, v_\parallel) dv_y dv_\parallel$ ).

**6.3.3. Возбуждение быстрых магнитозвуковых и альвеновских волн потоками осцилляторов.** Рассмотрим теперь возбуждение высокочастотной части БМЗ-ветви ( $\omega \gg \omega_{Bi}$ ) в плотной плазме ( $\omega_{pe} \gg |\omega_{Be}|$ ) потоком осцилляторов-электронов [62].

Используя (6.3.1.3) для  $\epsilon_{ij}^{(b)}$ , получим следующие выражения для инкремента нарастания этих волн в случае горячего пучка осцилляторов:

$$\gamma = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{n'_0}{n_0} \frac{R}{1+r} \exp(-z_n'^2) \omega(k, \theta), \quad (6.3.3.1)$$

где  $\omega(k, \theta) = |\omega_{Be}| \cos \theta / (1+r)$  — частота волны, близкая к  $k_\parallel u + n |\omega_{Be}|$ ,  $r = \omega_{pe}^2 / k^2 c^2$ ,

$$R = \left( z_n' J_n^2 + \frac{2n\omega_{Be}}{\omega \lambda} y_0' J_n J_n' \right) \left[ (2y_0'^2 \cos^2 \theta + n^2 \frac{r}{x_e'}) \left( 1+r - \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \right) + \right. \\ \left. + 2ry_n'^2 (1+r) \right] - 2r \frac{\omega_{Be}}{\omega} \left( \sin^2 \theta + rn \frac{\omega_{Be}}{\omega} \right) \left[ \frac{ny_0'}{\lambda} (\lambda J_n J_n')' + \right. \\ \left. + \frac{\lambda z_n'}{x_e' \omega_{Be}} J_n J_n' \right] - r^2 (1+r) \left[ \frac{\lambda^2 z_n'}{x_e'} J_n'^2 + \frac{ny_0' \omega_{Be}}{\lambda \omega} (\lambda^2 J_n'^2)' \right];$$

$x_e' = (k_x v_e' / \omega_{Be})^2 \ll 1$ ,  $v_e' \ll u$  (в выражении для  $R$  считается, что  $\omega = \omega(k, \theta)$ ).

Как следует из (6.3.3.1), нарастание колебаний возможно как при аномальном, так и при нормальном эффекте Доплера.

В случае холодного потока осцилляторов инкремент нарастания колебаний при резонансе ( $\omega(k, \theta) \approx k_\parallel u + n\omega_{Be}$ ) определяется выражением

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left[ \frac{n'_0}{n_0} \frac{\text{ctg}^2 \theta |R|}{(1+r)^2} \right]^{1/3} \omega, \quad (6.3.3.2)$$

где

$$R = -J_n^2 \left[ \left( 1 - \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \right) \left( \sin^2 \theta + rn^2 \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \right) + r \sin^2 \theta + \right. \\ \left. + r(1+r) \text{tg}^2 \theta \left( 1 - \frac{n\omega_{Be}}{\omega} \right)^2 + n^2 r^2 \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \right] + \\ + 2r \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \left( \sin^2 \theta + nr \frac{\omega_{Be}}{\omega} \right) \lambda J_n J_n' + r^2 (1+r) \frac{\omega_{Be}^2}{\omega^2} \lambda^2 J_n'^2.$$

В правой части последнего выражения считается, что  $\omega = \omega(k, \theta)$ . При  $n \sim 1$  и  $\lambda \sim 1$  имеем

$$\gamma/\omega \sim (n'_0/n_0)^{1/3}.$$

Выражение (6.3.3.2) получено при условии, что резонансные члены в  $\epsilon_{ij}^{(b)}$ , пропорциональные  $(\omega - n\omega_{Be} - k_\parallel u)^{-2}$ , значительно

больше членов, пропорциональных  $(\omega - n\omega_{Be} - k_{\parallel}u)^{-1}$ . В области длинных волн ( $\lambda \equiv k_x v_{\perp 0} / \omega_{Be} \ll 1$ ) это условие может не выполняться для  $n = \pm 1$  и  $n = \pm 2$ , если нарушится условие  $|\gamma| \ll \lambda^2 \omega$ .

Если  $\gamma \gg \lambda^2 \omega$ , то циклотронное возбуждение возможно на первой гармонике только при аномальном эффекте Доплера. В этом случае инкремент нарастания имеет такой же вид, как и в случае холодного моноэнергетического пучка (см. (6.2.4.3)).

Таким образом, как и в случае продольных колебаний, возбуждение БМЗ-волны потоком осцилляторов возникает при циклотронном резонансе между волной и частицами пучка и при аномальном и при нормальном эффекте Доплера.

Рассмотрим теперь возбуждение А- и БМЗ-ветвей с частотами порядка  $\omega_{B1}$  в плазме малого давления потоком осцилляторов. Если тепловое движение частиц потока существенно ( $\gamma \ll \ll k_{\parallel} v_e'$ ), то инкремент нарастания этих волн определяется выражением

$$\gamma = -\frac{\sqrt{\pi} \omega_{pa}'^2 P_1}{2\omega Q} \exp(-z_n'^2), \quad (6.3.3.3)$$

где

$$\begin{aligned} P_1 = & (\mathcal{N}'^2 - \varepsilon_1) \left[ \frac{z_n'}{x_{\alpha}'} n^2 J_n'^2 + 2 \frac{\omega_{B1}}{\omega} \frac{y_0'}{\lambda} n^3 J_n J_n' \right] + \\ & + (\mathcal{N}'^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_1) \left[ \frac{\lambda^2 z_n'}{x_{\alpha}'} J_n'^2 + \frac{\omega_{B1}}{\omega} \frac{y_0'}{\lambda} n (\lambda^2 J_n'^2)' \right] + \\ & + 2\varepsilon_2 \left[ \frac{\omega_{B1}}{\omega} \frac{y_0'}{\lambda} n^2 (\lambda J_n J_n')' + \frac{\lambda z_n'}{x_{\alpha}'} n J_n J_n' \right], \\ Q = & \varepsilon_1^2 \left[ (1 + \cos^2 \theta) \frac{k^2 v_A^2}{\omega^2} - 2 + \frac{\omega^2}{\omega_{B1}^2} \right]. \end{aligned}$$

(В этих формулах  $\omega$  считается функцией  $k$  и  $\theta$ , определяемой (6.2.4.14)).

Моноэнергетический поток осцилляторов возбуждает А- и БМЗ-колебания с частотой  $\omega = k_{\parallel} u + n\omega_{B\alpha}$ , причем инкремент нарастания максимален при резонансе  $\omega(k, \theta) = k_{\parallel} u + n\omega_{B\alpha}$ :

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left( \frac{\omega_{pa}'^2 \omega_{B\alpha}^2 \operatorname{ctg}^2 \theta P_2}{\omega^4 Q} \right)^{1/3} \omega, \quad (6.3.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} P_2 = & (\mathcal{N}'^2 - \varepsilon_1) n^2 J_n'^2 + (\mathcal{N}'^2 \cos^2 \theta - \varepsilon_1) \lambda^2 J_n'^2 + 2\varepsilon_2 \lambda n J_n J_n', \\ \varepsilon_1 = & \frac{\omega_{p1}^2}{\omega_{B1}^2 - \omega^2}, \quad \varepsilon_2 = \frac{\omega_{p1}^2 \omega}{\omega_{B1} (\omega_{B1}^2 - \omega^2)}. \end{aligned}$$

## § 6.4. Возбуждение электромагнитных волн в плазме релятивистскими потоками заряженных частиц

**6.4.1. Тензор диэлектрической проницаемости релятивистского потока плазмы.** Выше в данной главе мы изучали взаимодействие нерелятивистских потоков заряженных частиц с колебаниями плазмы и показали, что оно приводит к возбуждению в плазме медленных электромагнитных волн, фазовая скорость которых значительно меньше скорости света ( $v_{ph} \ll c$ ).

Перейдем теперь к исследованию взаимодействия колебаний плазмы с релятивистскими потоками заряженных частиц и покажем, что в этом случае возможно возбуждение как медленных, так и быстрых волн ( $v_{ph} \geq c$ )\*.

Дисперсионные свойства системы плазма—релятивистский пучок определяются ее тензором диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , который, так же как и в случае прохождения через плазму нерелятивистского пучка, имеет вид суммы

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(p)} + \epsilon_{ij}^{(b)},$$

где  $\epsilon_{ij}^{(p)}$  и  $\epsilon_{ij}^{(b)}$  — тензоры диэлектрической проницаемости плазмы и пучка.

Тензор  $\epsilon_{ij}^{(p)}$  определяется формулами (5.1.1.5) и (5.1.1.6). Что же касается тензора  $\epsilon_{ij}^{(b)}$ , то для него должны быть получены новые формулы, учитывающие релятивистские эффекты. При этом мы можем по-прежнему исходить из соотношения

$$\epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi i}{\omega} \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega),$$

где  $\sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор проводимости, связывающий плотность тока  $j(\mathbf{k}, \omega)$  с электрическим полем  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$

$$\left. \begin{aligned} j_i(\mathbf{k}, \omega) &= \sigma_{ij}(\mathbf{k}, \omega) E_j(\mathbf{k}, \omega), \\ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) d^3p, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1.1)$$

и  $F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  — функция распределения частиц сорта  $\alpha$  (в координатном ( $\mathbf{r}$ ) и импульсном ( $\mathbf{p}$ ) пространствах). Эта функция удовлетворяет в случае бесстолкновительной плазмы кинетическому уравнению

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + e_{\alpha} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} (\mathbf{B} + \mathbf{B}_0)] \right) \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{p}} = 0, \quad (6.4.1.2)$$

\*) На возможность возбуждения быстрых электромагнитных волн пучком осцилляторов было указано в работах [54, 55].

где импульс  $\mathbf{p}$  и скорость  $\mathbf{v}$  частиц сорта  $\alpha$  связаны между собой релятивистским соотношением

$$\mathbf{p} = \frac{m_\alpha \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}.$$

(Здесь  $\mathbf{B}_0$  — внешнее постоянное и однородное магнитное поле,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  — самосогласованные переменные электрическое и магнитное поля). Линеаризуя кинетическое уравнение (6.4.1.2) по отклонению функции распределения от исходной  $f'_{\alpha 0}(\mathbf{p}) = f'_{\alpha 0}(p_\perp, p_\parallel)$  и разлагая возмущенные величины в ряды Фурье, получим, согласно (6.4.1.1), следующие выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости пучка  $\varepsilon_{ij}^{(b)} \equiv \varepsilon_{ij}^{(b)}(\mathbf{k}, \omega)$  [70, 74]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(b)} &= - \sum_\alpha \frac{2\pi\omega' p_\alpha^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty p_\perp^2 dp_\perp \int \frac{n^2 J_n^2}{\lambda^2 (n+b)} R dp_\parallel, \\ \varepsilon_{22}^{(b)} &= - \sum_\alpha \frac{2\pi\omega' p_\alpha^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty p_\perp^2 dp_\perp \int \frac{J_n^2}{n+b} R dp_\parallel, \\ \varepsilon_{33}^{(b)} &= \sum_\alpha \frac{2\pi\omega' p_\alpha^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \int_0^\infty dp_\perp \int p_\parallel \frac{\omega_{B\alpha}}{\omega} \left( p_\perp \frac{\partial f'_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} - p_\parallel \frac{\partial f'_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} \right) dp_\parallel - \\ &\quad - \sum_\alpha \frac{2\pi\omega' p_\alpha^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty dp_\perp \int \frac{p_\parallel^2 J_n^2}{n+b} R dp_\parallel, \\ \varepsilon_{12}^{(b)} &= -i \sum_\alpha \frac{2\pi\omega' p_\alpha^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty p_\perp^2 dp_\perp \int \frac{n J_n J'_n}{\lambda^2 (n+b)} R dp_\parallel, \\ \varepsilon_{13}^{(b)} &= - \sum_\alpha \frac{2\pi\omega' p_\alpha^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty p_\perp dp_\perp \int \frac{n J_n^2}{\lambda (n+b)} R p_\parallel dp_\parallel, \\ \varepsilon_{23}^{(b)} &= i \sum_\alpha \frac{2\pi\omega' p_\alpha^2}{\omega\omega_{B\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty p_\perp dp_\perp \int \frac{J_n J'_n}{n+b} R p_\parallel dp_\parallel, \end{aligned} \quad (6.4.1.3)$$

где  $J_n \equiv J_n(\lambda)$ ,  $J'_n = dJ_n(\lambda)/d\lambda$ ,  $\lambda = \frac{k_\perp v_\perp}{\omega_{B\alpha}}$ ,  $b = \frac{k_\parallel v_\parallel - \omega}{\omega_{B\alpha}}$ ,

$$R = \frac{1}{n'_{\alpha 0}} \left[ \left( 1 - \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \right) \frac{\partial f'_{\alpha 0}}{\partial p_\perp} + \frac{k_\parallel v_\parallel}{\omega} \frac{\partial f'_{\alpha 0}}{\partial p_\parallel} \right],$$

$$\omega'_{p\alpha} = \sqrt{\frac{4\pi e^2 n'_{\alpha 0}}{m_\alpha}}, \quad \omega_{B\alpha} = \frac{e_\alpha B_0}{m_\alpha c}, \quad \tilde{\omega}_{B\alpha} = \omega_{B\alpha} \sqrt{1 - \beta^2}, \quad \beta^2 = \frac{v_\perp^2 + v_\parallel^2}{c^2},$$

$n'_{\alpha 0}$  — плотность частиц сорта  $\alpha$  пучка в лабораторной системе отсчета.

В частности, для пучка осцилляторов с исходной функцией распределения

$$f'_{\alpha 0} = \frac{n'_{\alpha 0}}{2\pi p_{\perp}} \delta(p_{\perp} - p_{\perp 0}) \delta(p_{\parallel} - p_{\parallel 0}), \quad (6.4.1.4)$$

компоненты тензора  $\epsilon_{ij}^{(b)}$  определяются соотношениями [70]

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{2}{\lambda} n J_n J_n' P + n^2 J_n^2 Q \right), \\ \epsilon_{22}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{1}{\lambda} (\lambda^2 J_n'^2)' P + \lambda^2 J_n'^2 Q \right], \\ \epsilon_{33}^{(b)} &= - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}'^2}{\omega^2} (1 - \beta_0^2) + \\ &+ \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{2k_{\parallel} u}{\omega - k_{\parallel} u} J_n^2 + \frac{u^2}{v_{\perp 0}^2} 2\lambda J_n J_n' \right) P + \frac{u^2}{v_{\perp 0}^2} \lambda^2 J_n^2 Q \right], \\ \epsilon_{12}^{(b)} &= -i \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \frac{n}{\lambda} (\lambda J_n J_n')' P + n \lambda J_n J_n' Q \right], \\ \epsilon_{13}^{(b)} &= \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\text{ctg} \theta n \omega_{B\alpha}}{\omega - k_{\parallel} u} J_n^2 + \frac{u}{v_{\perp 0}} 2n J_n J_n' \right) P + \frac{u}{v_{\perp 0}} \lambda n J_n^2 Q \right], \\ \epsilon_{23}^{(b)} &= i \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[ \left( \frac{\text{ctg} \theta \omega_{B\alpha}}{\omega - k_{\parallel} u} \lambda J_n J_n' + \frac{u}{v_{\perp 0}} (\lambda J_n J_n')' \right) P + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u}{v_{\perp 0}} \lambda^2 J_n J_n' Q \right], \end{aligned} \quad (6.4.1.5)$$

где

$$\begin{aligned} P &= \frac{\omega_{p\alpha}'^2 (\omega - k_{\parallel} u) (1 - \beta_0^2)^{1/2}}{\omega^2 (\omega - k_{\parallel} u - n \bar{\omega}_{B\alpha})^2}, \\ Q &= \frac{\omega_{p\alpha}'^2 \bar{\omega}_{B\alpha}^2 (h - \text{ctg}^2 \theta) (1 - \beta_0^2)^{1/2}}{\omega^2 (\omega - k_{\parallel} u - n \bar{\omega}_{B\alpha})^2}, \\ \bar{\omega}_{B\alpha} &= \omega_{B\alpha} (1 - \beta_0^2)^{1/2}, \quad \beta_0^2 = \frac{v_{\perp 0}^2 + u^2}{c^2}, \quad h = \frac{\omega^2}{c^2 k_x^2}. \end{aligned}$$

Эти формулы являются релятивистским обобщением формул для  $\epsilon_{ij}^{(b)}$ , полученных в п. 6.3.1 для медленного ( $u \ll c$ ) пучка.

Если  $p_{10} = 0$ , т. е. пучок движется параллельно магнитному полю, то [71]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11}^{(b)} &= \varepsilon_{22}^{(b)} = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^{\prime 2} (\omega - k_{\parallel} u)^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}{\omega^2 [(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \bar{\omega}_{B\alpha}^2]}, \\ \varepsilon_{33}^{(b)} &= - \sum_{\alpha} \left\{ \frac{\omega_{p\alpha}^{\prime 2} (1 - \beta^2)^{3/2}}{(\omega - k_{\parallel} u)^2} + \frac{\omega_{p\alpha}^{\prime 2} k_x^2 u^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}{\omega^2 [(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \bar{\omega}_{B\alpha}^2]} \right\}, \\ \varepsilon_{12}^{(b)} &= - i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^{\prime 2} (\omega - k_{\parallel} u) \bar{\omega}_{B\alpha} (1 - \beta^2)^{1/2}}{\omega^2 [(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \bar{\omega}_{B\alpha}^2]}, \\ \varepsilon_{13}^{(b)} &= - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^{\prime 2} (\omega - k_{\parallel} u) k_x u (1 - \beta^2)^{1/2}}{\omega^2 [(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \bar{\omega}_{B\alpha}^2]}, \\ \varepsilon_{23}^{(b)} &= i \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^{\prime 2} \bar{\omega}_{B\alpha} k_x u (1 - \beta^2)^{1/2}}{\omega^2 [(\omega - k_{\parallel} u)^2 - \bar{\omega}_{B\alpha}^2]}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1.6)$$

где  $\beta = u/c$ .

Эти формулы представляют собой релятивистское обобщение выражений (6.2.1.3) для компонент тензора  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$ , полученных в нерелятивистском случае для моноэнергетического пучка, движущегося вдоль внешнего магнитного поля.

В заключение выведем формулы преобразования тензора диэлектрической проницаемости при переходе из одной системы отсчета в другую [9, 68, 70].

В системе отсчета, в которой пучок покоится, компоненты плотности тока определяются выражениями

$$j'_j = \frac{\omega'}{4\pi i} (\varepsilon_{jl} - \delta_{jl}) E_l, \quad j, l = 1, 2, 3; \quad (6.4.1.7)$$

здесь штрихом снабжены переменные в системе отсчета  $\mathcal{K}'_b$ , связанной с пучком; компоненты тензора  $\varepsilon'_{jl} \equiv \varepsilon_{jl}(\mathbf{k}', \omega')$  определяются нерелятивистскими формулами (при  $u=0$ ), а частота  $\omega'$  и волновой вектор  $\mathbf{k}'$  в этой системе отсчета связаны с  $\omega$  и  $\mathbf{k}$  в лабораторной системе отсчета соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \omega' &= \frac{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \\ \mathbf{k}' &= \mathbf{k} - \frac{\mathbf{u}(\mathbf{k}\mathbf{u})}{u^2} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) - \frac{\mathbf{u}\omega}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1.8)$$

где  $\beta = u/c$ .

Плотность тока в лабораторной системе связана с плотностью тока и плотностью объемного заряда  $\rho'$  в системе отсчета  $\mathcal{K}'_b$

соотношением

$$\mathbf{j} = \mathbf{j}' - \frac{\mathbf{u}}{u^2} (\mathbf{u} \mathbf{j}') \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) + \frac{\mathbf{u} \rho'}{c^2 \sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Подставляя сюда вместо  $\rho'$  выражение  $\rho' = (\mathbf{k}' \mathbf{j}') / \omega'$  и учитывая соотношения (6.4.1.8), получим

$$j_j = \frac{\omega'}{\omega} \beta_{jm} j'_m, \quad (6.4.1.9)$$

где

$$\beta_{lm} = \frac{\omega'}{\omega} \delta_{lm} + \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \right) \frac{u_l u_m}{u^2} + \frac{k_m u_l}{\omega \sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (6.4.1.10)$$

Напряженность электрического поля в системе отсчета  $\mathcal{H}_b$  связана с электрическим и магнитным полем в лабораторной системе отсчета соотношением [73]

$$\mathbf{E}' = (\mathbf{E} \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{u^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left\{ \mathbf{E} - (\mathbf{E} \mathbf{u}) \frac{\mathbf{u}}{u^2} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \mathbf{B}] \right\}.$$

Так как мы рассматриваем плоские монохроматические волны, то  $\mathbf{V} = (c/\omega) [\mathbf{k} \mathbf{E}]$ , и поэтому

$$E'_i = \beta_{ni} E_n, \quad (6.4.1.11)$$

где величины  $\beta_{ni}$  определяются формулами (6.4.1.10). Учитывая соотношения (6.4.1.7) и (6.4.1.11), получим из (6.4.1.9)

$$j_j = \frac{\omega'}{\omega} \beta_{jm} \frac{\omega'}{4\pi i} (\varepsilon'_{mi} - \delta_{mi}) E'_i = \frac{\omega'}{4\pi i} \beta_{jm} (\varepsilon'_{mi} - \delta_{mi}) \beta_{ni} E_n.$$

Кроме того, имеем  $j_j = (\omega/4\pi i) (\varepsilon_{jn} - \delta_{jn}) E_n$ . Поэтому окончательные формулы преобразования тензора  $\varepsilon_{ij}$  имеют вид

$$\varepsilon_{jn} - \delta_{jn} = (\varepsilon'_{mi} - \delta_{mi}) \beta_{jm} \beta_{ni}. \quad (6.4.1.12)$$

Если ось  $z$  параллельна  $\mathbf{V}_0$ , а ось  $x$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{V}_0$ , то эти формулы приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} - 1 &= \frac{\omega'^2}{\omega^2} (\varepsilon'_{11} - 1), \\ \varepsilon_{22} - 1 &= \frac{\omega'^2}{\omega^2} (\varepsilon'_{22} - 1), \\ \varepsilon_{33} &= \varepsilon'_{33} + \frac{k_x^2 u^2 (\varepsilon'_{11} - 1)}{\omega^2 (1 - \beta^2)} + \frac{2k_x u \varepsilon'_{13}}{\omega (1 - \beta^2)}, \\ \varepsilon_{12} &= -\varepsilon_{21} = \frac{\omega'^2}{\omega^2} \varepsilon'_{12}, \\ \varepsilon_{13} &= \varepsilon_{31} = \frac{\omega' k_x u}{\omega^2 \sqrt{1 - \beta^2}} (\varepsilon'_{11} - 1) + \frac{\omega'}{\omega} \varepsilon'_{13}, \\ \varepsilon_{32} &= -\varepsilon_{23} = \frac{\omega' k_x u}{\omega^2 \sqrt{1 - \beta^2}} \varepsilon'_{12} + \frac{\omega'}{\omega} \varepsilon'_{32}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4.1.13)$$

Отметим, что при использовании этих соотношений следует помнить, что плотность пучка в лабораторной системе отсчета  $n'_{\alpha 0}$  и плотность пучка в системе, где он покоится,  $n^*_{\alpha 0}$  связаны соотношением  $n'_{\alpha 0} = n^*_{\alpha 0} (1 - \beta^2)^{-1/2}$ .

Из формул (6.4.1.13) можно, зная тензор диэлектрической проницаемости для покоящейся плазмы, найти его для движущейся плазмы. В частности, используя эти формулы, нетрудно получить из соотношений (6.2.1.3) выражения для тензора диэлектрической проницаемости моноэнергетического релятивистского пучка (см. (6.4.1.6)).

**6.4.2. Возбуждение электромагнитных волн в свободной плазме релятивистским потоком.** Рассмотрим прежде всего взаимодействие релятивистского потока со свободной плазмой (см. также [67, 68]).

Полагая  $B_0 = 0$ , найдем  $\epsilon_{12} = \epsilon_{23} = 0$ .

Легко видеть, что уравнение  $\Delta = 0$  при этом распадается на два уравнения. Одно из них

$$\omega'^2 = \epsilon_{11}$$

определяет частоту поперечной электромагнитной волны

$$\omega(k) = \pm \sqrt{k^2 c^2 + \omega_{pe}^2 + \omega_{pe}^2 (1 - \beta^2)^{1/2}},$$

которая является устойчивой.

Второе уравнение имеет вид

$$\epsilon_l \omega'^2 - \epsilon_{11} \epsilon_{33} + \epsilon_{13}^2 = 0. \quad (6.4.2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_l &= \epsilon - \frac{\omega_{pe}^2 (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) (1 - \beta^2)^{1/2}}{(\omega - k_{\parallel} u)^2}, \\ \epsilon_{11} &= \epsilon - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} (1 - \beta^2)^{1/2}, \\ \epsilon_{33} &= \epsilon - \frac{\omega_{pe}^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}{(\omega - k_{\parallel} u)^2} \left( 1 - \beta^2 + \frac{k_{\perp}^2 u^2}{\omega^2} \sin^2 \theta \right), \\ \epsilon_{13} &= - \frac{\omega_{pe}^2 (1 - \beta^2)^{1/2} k u \sin \theta}{\omega (\omega - k_{\parallel} u)}, \\ \epsilon &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \end{aligned} \right\} \quad (6.4.2.2)$$

( $\theta$  — угол между волновым вектором и скоростью пучка).

При  $\theta=0$  это дисперсионное уравнение распадается на два уравнения. Одно из них  $\omega'^2 = \epsilon_{11}$  также задает частоту поперечной

электромагнитной волны, а другое определяет частоты продольных колебаний и имеет вид

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}'^2}{(\omega - k_{\parallel}u)^2} (1 - \beta^2)^{3/2} = 0. \quad (6.4.2.3)$$

Оно совпадает с дисперсионным уравнением для продольных колебаний при прохождении через плазму нерелятивистского электронного пучка (необходимо только заменить плотность пучка  $n'_0$  на  $n'_0(1 - \beta^2)^{3/2}$ ).

Эти колебания, так же как в нерелятивистском случае, неустойчивы. Для пучка малой плотности инкремент нарастания колебаний с частотой  $\omega = k_{\parallel}u$  равен

$$\gamma = \frac{\omega_{pe}' (1 - \beta^2)^{3/4}}{\sqrt{(\omega_{pe}/k_{\parallel}u)^2 - 1}}. \quad (6.4.2.4)$$

Мы видим, что по сравнению с нерелятивистским случаем инкремент нарастания уменьшается в  $(1 - \beta^2)^{-3/4}$  раз.

В условиях резонанса  $\omega = k_{\parallel}u = \omega_{pe}$  инкремент нарастания определяется формулой

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/2}} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)^{1/2} (1 - \beta^2)^{1/2} \omega_{pe}. \quad (6.4.2.5)$$

и уменьшается по сравнению с нерелятивистским случаем в  $(1 - \beta^2)^{-1/2}$  раз.

Таким образом, инкремент нарастания продольных колебаний существенно уменьшается при  $u \rightarrow c$ . Это связано с релятивистским увеличением «продольной» массы электрона  $m_{\parallel} = m_e (1 - \beta^2)^{-3/2}$ .

В случае косо́го распространения ( $\theta \neq 0$ ,  $\theta \neq 1/2\pi$ ) и пучков малой плотности ( $n'_0 \ll n_0$ ) в дисперсионном уравнении (6.4.2.1) можно пренебречь малым слагаемым  $\varepsilon_{13}^2$ ; имеем

$$\varepsilon(\mathcal{A}^2 - \varepsilon) - \frac{\omega_{pe}'^2 (1 - \beta^2)^{1/2}}{(\omega - k_{\parallel}u)^2} \left[ (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) \mathcal{A}^2 - \varepsilon \left( 1 - \beta^2 + \frac{k_{\perp}^2 u^2}{\omega^2} \right) \right] = 0. \quad (6.4.2.6)$$

Это уравнение, как и исходное уравнение (6.3.2.4), имеет шесть корней, соответствующих в пределе  $n'_0 \rightarrow 0$  ленгмюровским колебаниям ( $\omega = \pm \omega_{pe}$ ), поперечным электромагнитным волнам ( $\omega = \pm \sqrt{c^2 k^2 + \omega_{pe}^2}$ ) и колебаниям пучка ( $\omega = k_{\parallel}u$ ).

Найдем решение уравнения (6.4.2.6), соответствующее невозмущенной частоте  $\omega = k_{\parallel}u$ . Полагая, как обычно,

$$\omega = k_{\parallel}u + \eta,$$

где  $|\eta| \ll k_{\parallel}u$ , получим

$$\eta = \pm i \omega_{pe}' \left[ \frac{(1 - \beta^2 \cos^2 \theta) (1 - \beta^2 \varepsilon) (1 - \beta^2)^{1/2}}{\beta^2 \cos^2 \theta (\varepsilon - \mathcal{A}^2) \varepsilon} \right]_{\omega = k_{\parallel}u}^{1/2}. \quad (6.4.2.7)$$

Эти колебания неустойчивы, как и в нерелятивистском случае, если  $k_{\parallel} u < \omega_{pe}$ . В отличие от случая  $\theta = 0$  инкремент нарастания уменьшается (по сравнению с нерелятивистским случаем) не в  $(1 - \beta^2)^{-3/4}$ , а только в  $(1 - \beta^2)^{-1/4}$  раз.

При приближении частоты  $\omega = k_{\parallel} u$  к ленгмюровской частоте  $\omega = \omega_{pe}$  инкремент нарастания, определяемый последним соотношением, возрастает, а сами колебания становятся при  $k_{\parallel} u \approx \omega_{pe}$  почти продольными. В этом случае величина  $\eta$  определяется из уравнения

$$\varepsilon_r = 2\eta/\omega_{pe} + 2(1 - \omega_{pe}/k_{\parallel} u) - (\omega'_{pe}/\eta)^2 (1 - \beta^2)^{1/2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta) = 0.$$

При  $|k_{\parallel} u - \omega_{pe}| \ll \eta$  получаем отсюда

$$\eta = \xi [1/2 \omega_{pe}'^2 (1 - \beta^2)^{1/2} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)]^{1/3}.$$

Максимальный инкремент нарастания равен

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left( \frac{n'_0}{n_0} \right)^{1/3} \omega_{pe} (1 - \beta^2)^{1/4} (1 - \beta^2 \cos^2 \theta)^{1/3}. \quad (6.4.2.8)$$

Таким образом, при  $\theta \neq 0$  максимальный инкремент нарастания уменьшается по сравнению с нерелятивистским случаем только в  $(1 - \beta^2)^{-1/4}$  раз в отличие от случая  $\theta = 0$ , когда он уменьшается в  $(1 - \beta^2)^{-1/2}$  раз.

Заметим, что хотя инкременты нарастания колебаний, возбуждаемых релятивистским пучком, уменьшаются по сравнению со случаем нерелятивистского пучка той же плотности, релятивистский пучок может более эффективно передавать свою энергию колебаниям плазмы. Это связано с тем, что условие резонанса  $\omega_{pe} = k_{\parallel} u$ , при выполнении которого колебания нарастают быстрее всего, для нерелятивистского пучка нарушается из-за обратного действия колебаний (изменяющих скорость пучка) при меньших значениях амплитуды возбуждаемых высокочастотных полей, чем для релятивистского пучка.

Существенно также, что для релятивистского пучка условие когерентного возбуждения

$$kv'_e \ll \gamma \quad (6.4.2.9)$$

(где  $v'_e$  — тепловой разброс электронов пучка по скоростям) выполняется при  $u \approx c$  значительно легче, чем для нерелятивистского пучка (с тем же тепловым разбросом по энергиям, т. е. с той же температурой).

**6.4.3. Дисперсионное уравнение для косо́го распространения волн.** Подставив в общее дисперсионное уравнение (5.2.2.5) вместо тензора диэлектрической проницаемости сумму тензоров диэлектрической проницаемости плазмы (5.1.1.5) и пучка (6.4.1.3),  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{(p)} + \varepsilon_{ij}^{(b)}$ , мы получим, как уже указывалось, дисперсионное уравнение для системы плазма—релятивистский пучок, находящейся во внешнем магнитном поле  $B_0$ .

Исследуем это уравнение в случае пучка малой плотности [70]. Учитывая в уравнении (5.2.2.5) только линейные по  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  члены, представим дисперсионное уравнение в виде

$$\Lambda = \Lambda_0 + \Lambda' = 0, \quad (6.4.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \Lambda_0 &= \Lambda|_{n'_0=0} = (\varepsilon_1 \sin^2 \theta + \varepsilon_3 \cos^2 \theta) \mathcal{N}^4 - \\ &\quad - [\varepsilon_1 \varepsilon_3 (1 + \cos^2 \theta) + (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \sin^2 \theta] \mathcal{N}^2 + \varepsilon_3 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2), \\ \Lambda' &= [\varepsilon_{11}^{(b)} \sin^2 \theta + 2\varepsilon_{13}^{(b)} \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{33}^{(b)} \cos^2 \theta] \mathcal{N}^4 + \\ &\quad + [2 \cos \theta \sin \theta (\varepsilon_2 \varepsilon_{23}^{(b)} - \varepsilon_1 \varepsilon_{13}^{(b)}) - (\varepsilon_1 \varepsilon_{33}^{(b)} + \varepsilon_3 \varepsilon_{11}^{(b)}) - \\ &\quad - (\varepsilon_1 \varepsilon_{33}^{(b)} + \varepsilon_3 \varepsilon_{22}^{(b)}) \cos^2 \theta - (\varepsilon_1 \varepsilon_{22}^{(b)} + \varepsilon_1 \varepsilon_{11}^{(b)} + 2i\varepsilon_2 \varepsilon_{12}^{(b)})] \mathcal{N}^2 + \\ &\quad + (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \varepsilon_{33}^{(b)} + \varepsilon_3 (\varepsilon_{11}^{(b)} \varepsilon_1 + \varepsilon_{22}^{(b)} \varepsilon_1 + 2i\varepsilon_{12}^{(b)} \varepsilon_2). \end{aligned} \quad (6.4.3.2)$$

Мы ограничимся рассмотрением возбуждения электромагнитных волн релятивистским моноэнергетическим потоком осцилляторов. В этом случае величины  $\varepsilon_{ij}^{(b)}$  в (6.4.3.2) определяются выражениями (6.4.1.5).

В нулевом приближении ( $n'_0 \rightarrow 0$ ) корни дисперсионного уравнения (6.4.3.1) имеют вид

$$\omega = \omega^{(p)}(\mathbf{k}), \quad \omega = \omega^{(b)} = k_{\parallel} u + n |\bar{\omega}_{Be}|, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (6.4.3.3)$$

где  $\omega^{(p)}(\mathbf{k})$  — собственные частоты колебаний плазмы в отсутствие пучка, являющиеся корнями уравнения

$$\Lambda_0 = 0.$$

Наибольший интерес представляет случай, когда невозмущенные частоты (6.4.3.3) совпадают, так как тогда инкремент нарастания колебаний особенно велик. Рассматривая в дальнейшем только этот случай, положим в дисперсионном уравнении

$$\omega = \omega^{(b)} + \eta, \quad \omega^{(b)} = \omega^{(p)},$$

где  $|\eta| \ll |\omega^{(b)}|$ . Величина  $\Lambda'$ , входящая в дисперсионное уравнение, примет тогда вид

$$\Lambda' = \frac{\omega^2 R}{(\omega - k_{\parallel} u - n \bar{\omega}_{Be})^2} + \frac{\omega S}{\omega - k_{\parallel} u - n \bar{\omega}_{Be}}, \quad (6.4.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} R &= \frac{\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2 (h - \operatorname{ctg} \theta) (1 - \beta^2)^{1/2}}{\omega^4} \left\{ \frac{\omega^2}{\omega_{Be}^2} \sin^2 \theta J_n^2 \mathcal{N}^4 - \right. \\ &\quad - \left[ 2 \sin \theta \cos \theta \frac{u}{v_{1.0}} (\varepsilon_1 \lambda n J_n^2 + \varepsilon_2 \lambda^2 J_n J_n') + \frac{u^2}{v_{1.0}^2} (1 + \cos^2 \theta) \varepsilon_1 \lambda^2 J_n^2 - \right. \\ &\quad - \varepsilon_3 (n^2 J_n^2 + \cos^2 \theta \lambda^2 J_n'^2) + \varepsilon_1 (n^2 J_n^2 + \lambda^2 J_n'^2) \sin^2 \theta + \\ &\quad \left. \left. + 2\varepsilon_2 \sin^2 \theta \lambda n J_n J_n' \right] \mathcal{N}^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3 (n^2 J_n^2 + \lambda^2 J_n'^2) + \right. \\ &\quad \left. + 2\varepsilon_2 \varepsilon_3 \lambda n J_n J_n' + \frac{u^2}{v_{1.0}^2} \lambda^2 J_n^2 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) \right\} \Big|_{\omega = \omega^{(b)}}. \end{aligned} \quad (6.4.3.5)$$

В выражении (6.4.3.4) слагаемое, пропорциональное  $S$ , нужно учитывать только в том случае, когда  $\lambda = k_x v_{\perp 0} / \bar{\omega}_{Be} \ll 1$ , так как при  $\lambda \geq 1$  это слагаемое значительно меньше первого слагаемого, пропорционального  $R(\omega - k_x u - n \bar{\omega}_{Be})^{-2}$ . Поэтому мы приведем здесь выражение для величины  $S$  только при  $\lambda \ll 1$ :

$$S = - \frac{\omega_{pe}^2 (1 - \beta_0^2)^{1/2} (\omega - k_{\parallel} u)}{\omega^3} \frac{2 |n^3| J_n^2}{\lambda^2} W, \quad (6.4.3.6)$$

где

$$W = \frac{\bar{\omega}^2}{n^2 \bar{\omega}_{Be}^2} \sin^2 \theta \mathcal{N}^4 - \left[ 2 \cos \theta \sin \theta \frac{k u}{n \bar{\omega}_{Be}} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \right. \\ \left. + \frac{k_x^2 u^2}{n^2 \bar{\omega}_{Be}^2} (1 + \cos^2 \theta) \varepsilon_1 + (1 + \cos^2 \theta) \varepsilon_3 + 2 \sin^2 \theta (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] \mathcal{N}^2 + \\ + \frac{k_x^2 u^2}{n^2 \bar{\omega}_{Be}^2} (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2) + 2 \varepsilon_3 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2).$$

Если  $\lambda \geq 1$ , то, пренебрегая в дисперсионном уравнении (6.4.3.1) членом, пропорциональным  $S$ , получим для  $\eta$  уравнение третьей степени

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial \omega} (\eta + \omega^{(b)} - \omega^{(p)}) + (\omega/\eta)^2 R = 0. \quad (6.4.3.7)$$

Отсюда получаем при  $|\omega^{(b)} - \omega^{(p)}| \ll |\eta|$

$$\gamma = \text{Im } \eta = \frac{\sqrt{3}}{2} \left| \frac{R \omega^2}{\partial \Delta_0 / \partial \omega} \right|_{\omega = \omega^{(p)}}^{1/2}. \quad (6.4.3.8)$$

Как и в исследованных выше случаях возбуждения медленных волн нерелятивистским потоком осцилляторов, инкремент нарастания колебаний с частотой  $\omega = \omega^{(b)} = \omega^{(p)}$ , вызванных релятивистским потоком осцилляторов, пропорционален  $(n_0')^{1/2}$ .

Для быстрых волн ( $v_{ph} \geq c$ ,  $\mathcal{N} \sim 1$ ), возбуждаемых релятивистским пучком ( $v_{\perp 0} \sim u \sim c$ ), инкремент нарастания колебаний, описываемый (6.4.3.8), равен по порядку величины

$$\gamma \sim \left( \frac{n_0'}{n_0} \sqrt{1 - \beta_0^2} \right)^{1/2} \omega^{(p)}. \quad (6.4.3.9)$$

Заметим, что нерелятивистский пучок в условиях резонанса ( $\omega^{(b)} = \omega^{(p)}$ ) также может возбуждать быстрые волны, однако поскольку  $\lambda \sim v_{\perp 0}/c \ll 1$  и инкремент нарастания колебаний оказывается значительно меньше выведенного ранее (см. (6.4.3.9)), он будет равен

$$\gamma \sim \left( \frac{n_0'}{n_0} \right)^{1/2} \left( \frac{v_{\perp 0}}{c} \right)^{2/3 n} \omega^{(p)}. \quad (6.4.3.10)$$

Выясним теперь условия применимости для инкремента выражений (6.4.3.8) — (6.4.3.10) при  $\lambda \ll 1$ . Если  $\lambda \ll 1$ , то

$$R \sim (n'_0/n_0) J_n^2, \quad S \sim (n'_0/n_0) |J_n(\lambda)/\lambda|^2.$$

Условие применимости приведенных выше трех выражений (см. (6.4.3.8) — (6.4.3.10))  $(\omega/\gamma)^2 |R| \gg (\omega/\gamma) |S|$  выполняется, если  $|\gamma/\omega| \ll \lambda^2$ .

Так как при  $\mathcal{A} \gg 1$  и  $\omega \sim |\omega_{Be}| \sim \omega_{pe}$ , имеем

$$\gamma \sim \left( \frac{n'_0}{n_0} \sqrt{1 - \beta_0^2} \right)^{1/2} \lambda^{2/3} \omega,$$

то условие  $\gamma \ll \lambda^2 \omega$  может нарушаться только при  $n = \pm 1$  и  $n = \pm 2$ .

Если  $\omega^{(p)} \approx \omega^{(b)}$  ( $n = \pm 1, \pm 2$ ) и  $\lambda \ll 1$ , то в выражении для  $\Lambda'$  можно пренебречь величиной  $(\omega/\eta)^2 R$  по сравнению с  $(\omega/\gamma) S$ , и дисперсионное уравнение (6.4.3.1) примет вид

$$\frac{\partial \Delta_0}{\partial \omega} (\eta + \omega^{(p)} - \omega^{(b)}) + \frac{\omega}{\eta} S = 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\eta}{\omega} = \frac{1}{2\omega \partial \Delta_0 / \partial \omega} \left[ \frac{\omega^{(b)}}{\omega^{(p)}} - 1 \pm \sqrt{\left( \frac{\omega^{(b)}}{\omega^{(p)}} - 1 \right)^2 - 4S\omega \frac{\partial \Delta_0}{\partial \omega}} \right]. \quad (6.4.3.11)$$

Если  $S \partial \Delta_0 / \partial \omega > 0$ , то при  $\omega^{(p)} = \omega^{(b)}$  для инкремента нарастания находим

$$\gamma = \sqrt{\frac{S\omega}{\partial \Delta_0 / \partial \omega}}. \quad (6.4.3.12)$$

Отсюда получаем

$$\gamma \sim \left( \frac{n'_0}{n_0} \sqrt{1 - \beta_0^2} \right)^{1/2} \lambda^{1/3} \omega.$$

Итак, при прохождении релятивистского пучка осцилляторов через магнитоактивную плазму становится возможным эффективное возбуждение быстрых электромагнитных волн, хотя релятивистское возрастание массы и несколько уменьшает инкремент нарастания колебаний ( $\gamma \propto (1 - \beta_0^2)^{1/6}$ ). Заметим, что быстрые волны могут возбуждаться и нерелятивистским потоком осцилляторов, однако инкремент нарастания колебаний в этом случае в  $(c/v_{\perp 0})^{2/3}$  раз меньше, чем в случае релятивистского пучка.

**6.4.4. Поперечное распространение волн.** Полученные выше выражения для инкрементов нарастания колебаний существенно упрощаются в случае поперечного распространения волн ( $\theta = 1/2 \pi$ ). Изучение такой ситуации особенно интересно потому, что при  $\theta = 1/2 \pi$  обычный доплеровский член  $k_{\parallel} u$  в тензоре  $\epsilon_{ij}^{(b)}$  исчезает и обычный нерелятивистский пучковой механизм раскачки колебаний не действует. Рассмотрим этот случай подробнее [70].

Если  $\theta = 1/2\pi$ , то общее дисперсионное уравнение распадается на два уравнения, описывающие обыкновенную и необыкновенные волны.

Для обыкновенной волны дисперсионное уравнение имеет вид

$$\mathcal{N}^2 = \varepsilon_{33},$$

или

$$\mathcal{N}^2 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} (1 - \beta_0^2)^{1/2} - \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{v_{10}^2} \left[ \frac{\omega_{pe}^2 (1 - \beta_0^2)^{1/2} 2\lambda n J_n J_n'}{\omega (\omega - n\tilde{\omega}_{Be})} - \frac{\omega_{pe}^2 (1 - \beta_0^2)^{1/2} \omega_{Be}^2 \lambda^2 J_n^2}{\mathcal{N}^2 \omega^2 (\omega - n\tilde{\omega}_{Be})^2} \right]. \quad (6.4.4.1)$$

В нулевом приближении ( $n'_0 \rightarrow 0$ ) отсюда находим частоту обыкновенной волны

$$\omega(k) = \sqrt{c^2 k^2 + \omega_{pe}^2}.$$

Инкремент нарастания колебаний максимален при  $\omega(k) = n |\omega_{Be}|$  и имеет в этом случае вид

$$\gamma_{\max} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left[ \frac{\omega_{pe}^2 \sqrt{1 - \beta_0^2}}{\omega^2(k)} \frac{u^2}{c^2} J_n^2(\lambda) \right]^{1/3} \omega(k). \quad (6.4.4.2)$$

Таким образом, быстрая поперечная обыкновенная электромагнитная волна возбуждается пучком осцилляторов, если он движется вдоль магнитного поля. Инкремент нарастания пропорционален  $(n'_0 u^2 / n_0 c^2)^{1/3}$  и отличен от нуля только благодаря релятивистским эффектам.

Дисперсионное уравнение для необыкновенных (быстрой и медленной) волн в системе плазма—пучок осцилляторов при  $\theta = 1/2\pi$  имеет вид

$$\varepsilon_1 \mathcal{N}^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_{11}^{(b)} \mathcal{N}^2 - \varepsilon_1 (\varepsilon_{11}^{(b)} + \varepsilon_{22}^{(b)}) - 2i\varepsilon_2 \varepsilon_{12}^{(b)} = 0. \quad (6.4.4.3)$$

Отсюда в нулевом приближении  $n'_0 \rightarrow 0$  находим частоты необыкновенных волн

$$\omega^{(1,2)}(k) = \frac{1}{\sqrt{2}} [2\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2 + k^2 c^2 \pm \sqrt{4\omega_{pe}^2 \omega_{Be}^2 + (\omega_{Be}^2 - k^2 c^2)^2}]^{1/2}. \quad (6.4.4.4)$$

Учитывая далее в (6.4.4.3) члены, пропорциональные  $n'_0$ , можно найти инкременты нарастания для необыкновенных волн. Особенно велики они будут в условиях резонанса ( $\omega^{(1,2)}(k) = n |\tilde{\omega}_{Be}|$ ); тогда

$$\frac{\gamma_{\max}}{\omega^{(1,2)}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{1/3}} \left| \frac{\omega_{pe}^2 (1 - \beta_0^2)^{1/2} \tilde{\omega}_{Be} (\omega^2 - \omega_{Be}^2) (\varepsilon_1 \lambda J_n' + \varepsilon_2 n J_n)^2}{\mathcal{N}^2 \omega^2 (\omega_1^2 - \omega_2^2) [(\omega^{(1,2)})^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{Be}^2]} \right|^{1/3}. \quad (6.4.4.5)$$

Сравнивая это выражение с выражением (6.4.4.2), мы видим, что при  $\omega \sim |\omega_{Be}| \sim \omega_{pe} \sim kc$  инкременты нарастания обыкновенной и необыкновенных волн одинаковы по порядку величины.

В нерелятивистском случае ( $v_{10} \ll c$ ,  $\lambda \ll 1$ ) последнее соотношение принимает вид

$$\frac{\gamma_{\max}}{\omega^{(1,2)}} = \frac{\sqrt{3}}{2^{3/2}} \left| \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^4} \frac{(\omega + \omega_0^{(1)})^2 (\omega - \omega_0^{(2)})^2 (\omega - \omega_{Be})^2}{(\omega^{(1)2} - \omega^{(2)2}) (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - \omega_{Be}^2)} J_n^2 \right|^{1/3}, \quad (6.4.4.6)$$

где  $\omega_0^{(1,2)} = \omega^{(1,2)}(k)/k = 0$ .

Учитывая, что при  $|v_{Be}| \sim \omega_{pe} \sim ck$  и  $\mathcal{N} \sim 1$  это выражение по порядку величины равно

$$\frac{\gamma_{\max}}{\omega} \sim \left( \frac{n_0'}{n_0} J_n^2 \right)^{1/3}, \quad (6.4.4.7)$$

и сравнивая последнее с (6.4.4.2), найдем, что инкремент нарастания быстрых необыкновенных волн, возбуждаемых нерелятивистским пучком, в  $(c/u)^{1/3}$  раз больше инкремента нарастания обыкновенной волны.

## § 6.5. Общие критерии устойчивости распределений частиц в плазме

**6.5.1. Критерии устойчивости и неустойчивости распределений частиц в свободной плазме.** В предыдущих параграфах мы рассмотрели взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой и показали, что оно может привести к нарастанию колебаний, т. е. к неустойчивости системы плазма—пучок. Теперь перейдем к исследованию общего вопроса о критериях устойчивости и неустойчивости распределений частиц в плазме, иными словами, к выяснению условий, которым должны удовлетворять функции распределения частиц для того, чтобы колебания плазмы были затухающими или нарастающими.

Рассмотрим сначала свободную плазму, в которой происходят продольные колебания. Согласно результатам § 4.2 исходная функция распределения электронов  $f_0(w)$  ( $w$  — проекция скорости электрона на направление волнового вектора  $k$ ) будет устойчивой, если все корни уравнения

$$\frac{i\omega_{pe}^2}{k} \int \frac{f_0'(w) dw}{p + ikw} = 1 \quad (6.5.1.1)$$

лежат в левой полуплоскости  $p$ . Интегрирование производится вдоль вещественной оси  $w$  с обходом возможного полюса  $w = ip/k$  снизу; функция  $f_0(w)$  предполагается нормированной, а именно,  $\int f_0(w) dw = 1$ . В этом случае пространственная Фурье потенциала  $\varphi_k(t)$  будет стремиться при больших  $t$  к нулю (см. (4.2.1.15); напомним, что  $t$  должно быть малым по сравнению со временем релаксации  $\tau$ ). Компонента же Фурье отклонения функ-

ции распределения  $f_k(w, t)$  от исходной функции будет испытывать незатухающие колебания постоянной амплитуды с частотой  $k\omega$ , зависящей от скорости частиц (см. (4.2.1.16)).

Напротив, если хотя бы один из корней уравнения (6.5.1.1) лежит в правой полуплоскости  $p$ , то функции  $\varphi_k(t)$  и  $f_k(w, t)$  будут неограниченно возрастать со временем и исходное распределение будет неустойчивым.

Если в колебаниях принимают участие несколько сортов частиц, то в формуле (6.5.1.1) следует сделать замену

$$\omega_{\text{pe}}^2 f_0(w) \rightarrow \psi(w) \equiv \sum_{\alpha} \omega_{\text{p}\alpha}^2 f_{\alpha 0}(w),$$

где  $f_{\alpha 0}$  — начальная функция распределения частиц сорта  $\alpha$ , нормированная на единицу, и  $\omega_{\text{p}\alpha}^2 = 4\pi e^2 n_{\alpha} / m_{\alpha}$ .

Таким образом, необходимое и достаточное условие устойчивости распределения частиц свободной плазмы по отношению к продольным колебаниям состоит в отсутствии корней уравнения

$$y = G(\zeta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(w) dw}{w - \zeta} = k^2 \quad (6.5.1.2)$$

в верхней полуплоскости комплексной переменной  $\zeta$  ( $\zeta = ip/k$ ) при любом значении  $k$  ( $k > 0$ ).

Легко видеть, что наличие корней в верхней полуплоскости  $\zeta$  у уравнения (6.5.1.2) равносильно тому, что кривая  $K$ , которую описывает точка  $y = G(\zeta)$ , когда  $\zeta$  пробегает вещественную ось, пересекает положительную полуось  $y$ . Действительно, если эта кривая пересекает ее, например, в точке  $A$  (см. ниже рис. 6.5.1, б), то вблизи точки  $A$  всегда найдется другая точка  $B$ , соответствующая  $\text{Im } \zeta > 0$ , для которой  $\text{Re } y > 0$ ,  $\text{Im } y = 0$ . Величина  $\zeta_B$ , соответствующая точке  $B$ , служит корнем уравнения (6.5.1.2) при  $k^2 = \text{Re } y_B$ .

Если же кривая  $K$  не пересекает положительную полуось  $y$ , то уравнение (6.5.1.2) не имеет корней в верхней полуплоскости. Действительно, интеграл, определяющий функцию  $y = G(\zeta)$ , существует при любых значениях  $\zeta$ , лежащих в верхней полуплоскости. Поэтому вся область  $\mathfrak{D}$ , являющаяся отображением верхней полуплоскости  $\zeta$ , будет лежать в конечной части плоскости  $y$ . Так как границей области  $\mathfrak{D}$  является кривая  $K$ , то последняя должна быть замкнутой. Таким образом, область  $\mathfrak{D}$  должна лежать внутри кривой  $K$ , которая не пересекает положительной полуоси  $y$ . Из этого следует, что функция  $y = G(\zeta)$  ни при каком значении  $\zeta$ , лежащем в верхней полуплоскости, не может равняться никакому положительному значению  $k^2$ , т. е. уравнение (6.5.1.2) не имеет корней в верхней полуплоскости  $\zeta$ .

Три типичные кривые изображены на рис. 6.5.1, *a*, *b*, *в* [74—76]. Рис. 6.5.1, *a* соответствует отсутствию корней уравнения (6.5.1.2) в верхней полуплоскости, т. е. устойчивости, рис. 6.5.1, *b*, *в* — наличию таких корней, т. е. неустойчивости.

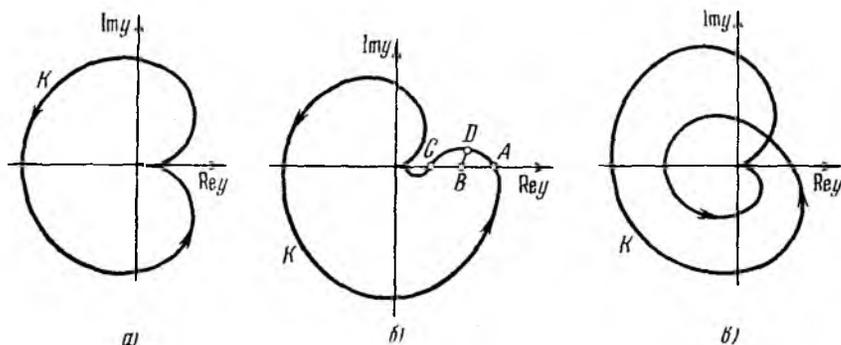


Рис. 6.5.1. Контур  $K$ .

*a*) Устойчивое распределение; *b*), *в*) различные типы неустойчивых распределений.

Определим, при каких условиях кривая  $K$  пересекает положительную полуось  $y$ . Такое пересечение означает, что для некоторого вещественного значения  $\zeta$  величина

$$y = \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(w) dw}{w - \zeta} + \pi i \psi'(\zeta) \quad (6.5.1.3)$$

( $\mathcal{P}$  — главное значение) положительна, т. е.

$$\psi'(\zeta) = 0, \quad \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(w) dw}{w - \zeta} > 0.$$

Первое из этих условий выполняется в экстремальных точках  $w_1, w_2, \dots, w_n$  функции  $\psi(w)$ . Поэтому для неустойчивости функции распределения необходимо и достаточно выполнение хотя бы одного из неравенств

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(w) dw}{w - w_j} > 0, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6.5.1.4)$$

Если во всех экстремальных точках функции  $\psi(w)$  выполняются обратные неравенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(w) dw}{w - w_j} < 0 \quad (6.5.1.5)$$

при всех значениях  $j=1, 2, \dots, n$ , то распределение  $\psi(w)$  будет устойчивым.

Легко показать, что если условия (6.5.1.5) выполняются только в точках минимума, то они выполняются во всех экстремальных точках, т. е. распределение  $\psi(w)$  будет в этом случае устойчивым.

В самом деле, при движении точки  $\zeta$  по вещественной оси от  $-\infty$  до  $+\infty$  верхняя полуплоскость  $\zeta$  остается слева. Поэтому при движении точки  $u$  вдоль кривой  $K$  область  $\mathfrak{D}$ , лежащая внутри кривой  $K$ , также остается слева. Так как точкам  $\zeta = \pm\infty$  соответствует начало координат плоскости  $u$ , то кривая  $K$  либо вовсе не пересекает положительную полуось, либо хотя бы один раз пересекает ее, переходя из нижней полуплоскости в верхнюю (см. рис. 6.5.1, б, в). При этом, согласно (6.5.1.3), производная  $\psi'(w)$  переходит от отрицательных значений к положительным, что возможно только в окрестности минимума  $\psi(w)$ .

Итак, критерий устойчивости функции распределения имеет вид \*)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(w) dw}{w - w_j} < 0, \quad \psi'(w_j) = 0, \quad \psi''(w_j) > 0. \quad (6.5.1.6)$$

Условию устойчивости (6.5.1.6) можно придать другой вид, если выполнить интегрирование по частям [75, 77]; имеем

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi(w) - \psi(w_j)}{(w - w_j)^2} dw < 0, \quad \psi'(w_j) = 0, \quad \psi''(w_j) > 0. \quad (6.5.1.7)$$

Отсюда можно заключить, что распределение будет неустойчивым, если функция  $\psi(w)$  обращается в изолированной точке в нуль (так как по определению  $\psi(w) \geq 0$ , то в этой точке  $\psi(w)$  имеет минимум).

Покажем, что если распределение  $\psi(w)$  неустойчиво, то справедливо неравенство

$$\psi'(v_{ph}) > 0, \quad (6.5.1.8)$$

где  $v_{ph} = \operatorname{Re} \zeta$  и  $\zeta$  — корень уравнения (6.5.1.2).

Доказательство непосредственно следует из рис. 6.5.1, б. Пусть  $A$  — точка минимума  $\psi(w)$ .  $B$  — точка, в которой  $\zeta$  является корнем уравнения (6.5.1.2) и  $C$  — точка максимума  $\psi(w)$ . Проведем через точку  $B$  линию  $\operatorname{Re} \zeta = \operatorname{const}$ , которая пересекает кривую  $K$  в точке  $D$ , лежащей между минимумом  $A$  и максимумом  $C$ . Так как при движении по дуге  $AC$  значения  $\zeta$  и  $\psi(\zeta)$  возрастают,

\*) Этот критерий независимо установлен в работах [74—77].

то во всех точках этой дуги, в том числе и в точке  $D$ , производная  $\psi'(\zeta)$  будет положительной.

Условие неустойчивости (6.5.1.8) имеет простой физический смысл.  $v_{ph}$  представляет собой, очевидно, фазовую скорость волны. С волной эффективно взаимодействуют частицы, скорость которых близка к  $v_{ph}$ . При этом частицы, движущиеся быстрее волны ( $w > v_{ph}$ ), отдают энергию волне, а частицы, движущиеся медленнее, — отбирают у нее энергию. Условие (6.5.1.8) означает, что число частиц, отдающих энергию, больше числа частиц, получающих энергию [7]. Напомним, что в равновесной плазме  $f'_{s0}(v_{ph}) < 0$ , т. е. число частиц, получающих энергию от волны, больше числа частиц, отдающих ей энергию; поэтому, как указывалось выше, колебания в равновесной плазме затухают.

Из критерия устойчивости (6.5.1.6) непосредственно следует, что функция распределения, имеющая только один максимум, является устойчивой [74, 78, 79] \*). В частности, если исходные функции распределения  $f_{s0}(v)$  сферически симметричны (с произвольным числом максимумов и минимумов) и нигде не обращаются в нуль, то функция  $\psi(w)$  имеет, как нетрудно убедиться, единственный максимум (в точке  $w=0$ ). Поэтому сферически симметричные распределения частиц являются устойчивыми [19, 33].

При выводе критерия неустойчивости функции распределения (6.5.1.4) мы не учитывали столкновений между частицами. Эти столкновения препятствуют, очевидно, развитию неустойчивости. Поэтому инкремент нарастания колебаний в случае неустойчивой функции распределения должен превосходить некоторое минимальное значение, определяемое эффективной частотой столкновений, для того чтобы неустойчивость действительно развилась [82].

Если функция распределения неустойчива, то вместе с нарастанием колебаний будет происходить изменение распределения частиц, приводящее к уменьшению и в конечном счете к прекращению этого нарастания. Исследование данного явления требует учета нелинейных эффектов, к которому мы вернемся в § 9.1.

**6.5.2. Двухпучковая неустойчивость.** Условия (6.5.1.6), (6.5.1.7) можно использовать при исследовании вопроса об устойчивости системы двух бесконечных взаимопроникающих пучков заряженных частиц, движущихся с параллельными или антипараллельными скоростями.

Обозначим через  $f_1(w)$  и  $f_2(w)$  функции распределения в этих пучках и определим функцию  $\psi(w)$ :

$$\psi(w) = \omega_{p1}^2 f_1(w) + \omega_{p2}^2 f_2(w).$$

Обозначим далее через  $v_1$  и  $v_2$  тепловые скорости и через  $u_1$  и  $u_2$  — направленные скорости частиц в пучках.

\*) В случае четной функции распределения это утверждение было доказано в работах [80, 81].

Ясно, что если разность направленных скоростей  $u_1$  и  $u_2$  достаточно велика, чтобы выполнялось неравенство

$$|u_1 - u_2| \gg v_1 + v_2, \quad (6.5.2.1)$$

то минимальное значение  $\psi$  будет близко к нулю. Отсюда, согласно условию (6.5.1.7), можно заключить, что функция распределения будет неустойчивой.

Итак, при выполнении неравенства (6.5.2.1) система двух пучков неустойчива [83—86]. Подчеркнем, что этот критерий справедлив независимо от величин плотности пучков.

Условие неустойчивости (6.5.2.1) в одинаковой мере годится как для скомпенсированного электронного пучка, движущегося через плазму (если пренебречь колебаниями ионов), так и для плазмы, электроны которой движутся относительно ионов (с учетом ионных колебаний), причем, в отличие от результатов предыдущих параграфов, мы не делаем здесь предположения о малости плотности пучка.

Рассмотрим теперь различные случаи, когда условие (6.5.2.1) не выполняется.

Если

$$|u_1 - u_2| \ll v_1 + v_2, \quad v_1 \sim v_2, \quad (6.5.2.2)$$

то система двух пучков устойчива, так как функция  $\psi(w)$  не имеет минимума.

Если

$$|u_1 - u_2| \ll v_1, \quad v_1 \gg v_2, \quad a_1 \leq a_2, \quad (6.5.2.3)$$

где  $a_1$ ,  $a_2$  — дебаевские радиусы частиц в пучках, то вклад от второго пучка в интеграл (6.5.1.7) бесконечно мал. Поэтому значение этого интеграла мало отличается от его значения в точке максимума функции  $f_1(w)$ , в которой он отрицателен. Отсюда следует, что при выполнении условий (6.5.2.3) система двух пучков устойчива.

Наконец, в случае

$$|u_1 - u_2| \ll v_1, \quad v_1 \gg v_2, \quad a_1 \gg a_2 \quad (6.5.2.4)$$

из существования минимума у функции  $\psi(w)$  следует условие неустойчивости [8]

$$|u_1 - u_2| \gg v_2. \quad (6.5.2.5)$$

В частном случае плазмы с горячими электронами, которые движутся относительно холодных ионов, как показано в п. 6.1.4, неустойчивость связана с возбуждением ионных ленгмюровских колебаний. Можно показать, что эта неустойчивость связана с нарастанием колебаний с большими значениями  $k$  ( $1/a_1 \ll k \ll 1/a_2$ ) [85, 87].

В табл. 6.5.1 сведены условия устойчивости и неустойчивости двух пучков в различных случаях.

Таблица 6.5.1

Неустойчивость	$ u_1 - u_2  \gg v_1 + v_2$		$ u_1 - u_2  \ll v_1 + v_2$		
	Устойчивость	$v_1 \sim v_2$	$v_1 \gg v_2$		
		Устойчивость	$a_1 \ll a_2$	$a_1 \gg a_2$	
			$ u_1 - u_2  \ll v_2$	$ u_1 - u_2  \gg v_2$	Устойчивость

Если при условии  $v_1 \gg v_2$  величины  $|u_1 - u_2|$  и  $v_1$  одного порядка, то условие устойчивости имеет сложный вид [7, 85, 87]. Качественно область неустойчивости изображена на рис. 6.5.2, а [88, 89].

До сих пор мы занимались двухкомпонентной системой, но точно таким же образом можно рассмотреть устойчивость четырехкомпонентной системы, например устойчивость двух плазм,

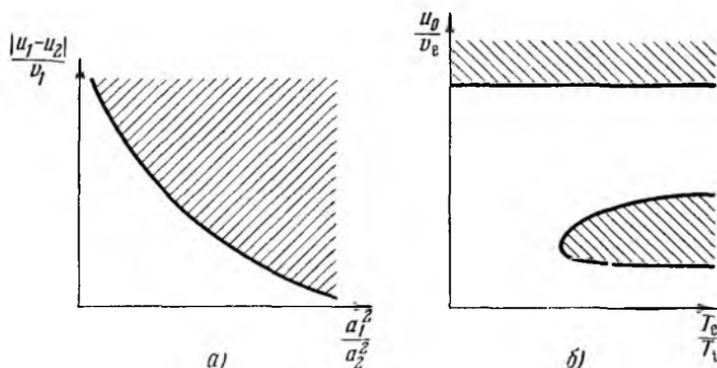


Рис. 6.5.2. Области неустойчивости.

а) Два пучка; б) две одинаковые плазмы, движущиеся навстречу друг другу. Области неустойчивости заштрихованы.

движущиеся навстречу друг другу. Рассмотрим для определенности тот случай, когда плотности частиц в них, а также температуры

электронов  $T_e$  и ионов  $T_i$  одинаковы (величины  $T_e$  и  $T_i$  могут отличаться друг от друга). Легко видеть, что если  $v_i \ll u_0 \ll v_e$ , где  $u_0$  — скорость одной плазмы относительно другой и  $v_e, v_i$  — тепловые скорости электронов и ионов, то условие неустойчивости имеет вид

$$u_0 > \sqrt{T_i/m_e}. \quad (6.5.2.6)$$

Если  $u_0 \ll v_i, u_0 \ll v_e$ , то плазмы, движущиеся навстречу друг другу, устойчивы, а если  $u_0 \gg v_i, u_0 \gg v_e$ , — то неустойчивы.

При произвольных соотношениях между  $u_0, v_e$  и  $v_i$  область неустойчивости [90] изображена на рис. 6.5.2, б.

Взаимодействие двух плазм с различными плотностями и температурами рассмотрено в [91].

**6.5.3. Критерии устойчивости распределений электронов плазмы в магнитном поле.** Приведенные выше рассуждения, относящиеся к свободной плазме, можно обобщить на случай плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле.

Выясним, например, условия устойчивости распределения электронов плазмы, находящейся в магнитном поле, по отношению к продольным электронным колебаниям.

Пусть длина волны плазменных колебаний достаточно велика, чтобы выполнялось условие  $kv_e/\omega_{pe} \ll 1$ . Тогда дисперсионное уравнение для продольных колебаний можно, согласно (5.2.2.7), представить в виде

$$1 - \frac{\omega_{pe}^2 \cos^2 \theta}{k_{\parallel}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f'_0(w) dw}{k_{\parallel} w - \omega} + \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \theta}{2\omega_B} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{1}{k_{\parallel} w - \omega + \omega_B} - \frac{1}{k_{\parallel} w - \omega - \omega_B} \right) f_0(w) dw = 0, \quad (6.5.3.1)$$

где  $f_0(w)$  — функция распределения электронов по продольной (относительно внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$ ) составляющей скорости  $w$ ;  $k_{\parallel} = k \cos \theta$  и  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ . Введем обозначение

$$\psi_B(w) = f_0(w) \cos^2 \theta + \sin^2 \theta \int_0^w \frac{f_0(w + \zeta_B) - f_0(w - \zeta_B)}{2\zeta_B} dw, \quad (6.5.3.2)$$

где  $\zeta_B = \omega_B/k_{\parallel}$ , перепишем уравнение (6.5.3.1) в виде

$$G_B(\zeta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'_B(w) dw}{w - \zeta} = \frac{k_{\parallel}^2}{\omega_{pe}^2}, \quad (6.5.3.3)$$

где  $\zeta = \omega/k_{\parallel}$ .

Сравнивая это уравнение с уравнением (6.5.1.2) в отсутствие магнитного поля, легко заключить, что необходимое и достаточное условие устойчивости функции распределения  $f_0(w)$  состоит в том, что корни уравнения (6.5.3.3) не должны лежать в верхней полуплоскости  $\zeta$ .

В случае неустойчивости, как было показано выше, функция  $y = G_B(\zeta)$  отображает вещественную ось  $\zeta$  на некоторую кривую  $K$ , пересекающую вещественную положительную полуось  $y$  (напомним, что в этом случае при увеличении  $\zeta$  кривая  $K$  хотя бы один раз пересечет вещественную положительную полуось, переходя из нижней полуплоскости в верхнюю).

Распределение электронов будет устойчивым, если во всех точках минимума  $w_j$  функции  $\psi_B(w)$  выполняются условия [76]

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'_B(w) dw}{w - w_j} < 0. \quad (6.5.3.4)$$

Заметим, что функция  $\psi_B(w)$  переходит в  $f_0(w)$  при  $\theta=0$ , а также либо при  $\zeta_B=0$ , либо при  $\zeta_B=\infty$ . Поэтому, если  $\theta=0$  или  $\zeta_B=0$ , или  $\zeta_B=\infty$ , то приведенные выше условия устойчивости совпадают с условиями устойчивости в отсутствие магнитного поля. Отсюда следует, что магнитное поле, вообще говоря, сужает класс устойчивых функций распределения [92].

Можно показать [93], что условия устойчивости (6.5.3.4) выполняются только для четной функции распределения, имеющей один максимум.

В частности, анизотропное распределение  $f_0(v) = f(v_{\parallel}^2, v_{\perp}^2)$  устойчиво относительно длинноволновых продольных электронных колебаний. Эта функция может, однако, оказаться неустойчивой относительно продольных колебаний, если учесть члены высшего порядка в разложении дисперсионного уравнения по степеням  $kv_c/\omega_{pe}$  (см. [53, 94—97]), а также относительно поперечных колебаний [98].

До сих пор, исследуя условие устойчивости функций распределения, мы не фиксировали величины  $k$  (при исследовании устойчивости функций распределения в магнитном поле нефиксированными были также величины  $\omega_{pe}$  и  $\theta$ ).

Возможна, однако, другая постановка задачи об устойчивости [96], при которой устанавливается условие неустойчивости при фиксированных значениях  $k$ ,  $\theta$  и  $\omega_{pe}$ . Критерий устойчивости при такой постановке вопроса можно получить, если несколько изменить изложенные выше рассуждения.

Когда значение  $k^2$ , стоящее в правой части уравнения (6.5.1.2), не фиксировано, неустойчивость имеет место, если кривая  $K$ , являющаяся отображением вещественной оси на плоскость  $y = G(\zeta)$ , пересекает положительную полуось  $y$  в произвольной

точке. При этом всегда можно выбрать такое значение  $k$ , чтобы область  $\mathfrak{D}$ , ограниченная контуром  $K$ , содержала точку  $\operatorname{Re} y = k^2$ , что и означает наличие неустойчивости.

Если же значение  $k$  фиксировано, то для неустойчивости недостаточно, чтобы контур  $K$  пересекал положительную полуось  $y$ . Необходимо также, чтобы точка  $k^2$  лежала в области  $\mathfrak{D}$ . Иными словами, критерий устойчивости при фиксированном значении  $k$  состоит в том, что функция

$$\mathfrak{B}(\zeta) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'(w) dw}{w - \zeta} - k^2$$

должна отображать верхнюю полуплоскость  $\operatorname{Im} \zeta > 0$  на область  $\mathfrak{D}$ , не содержащую начала координат  $\mathfrak{B} = 0$ .

Так же точно формулируется критерий устойчивости при наличии магнитного поля, если фиксированы значения величин  $k$ ,  $\theta$  и  $\omega_{pe}$ . При этом нужно только заменить функцию  $\mathfrak{B}(\zeta)$  функцией  $\mathfrak{B}_B(\zeta)$ :

$$\mathfrak{B}_B(\zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\psi'_B(w) dw}{w - \zeta} - \frac{k_{||}^2}{\omega_{pe}^2}$$

Чтобы выяснить, попадает ли точка  $\mathfrak{B} = 0$  в область  $\mathfrak{D}$ , достаточно знать знаки величин  $\mathfrak{B}(w_1)$ ,  $\mathfrak{B}(w_2)$ , ...,  $\mathfrak{B}(w_n)$ , где  $w_j$  — точки, в которых функция  $\psi_B(w)$  имеет экстремумы [96]. Если знаки величин  $\mathfrak{B}(w_j)$  известны, то вопрос об устойчивости или неустойчивости распределения выясняется следующим образом.

Расположим все величины  $w_1, w_2, \dots, w_n$  в порядке их возрастания:  $w_1 < w_2 < \dots < w_n$ . В том же порядке расположим знаки (плюс или минус) величин  $\mathfrak{B}(w_1)$ ,  $\mathfrak{B}(w_2)$ , ...,  $\mathfrak{B}(w_n)$ . Будем последовательно вычеркивать два одинаковых знака, стоящих рядом. Если после такого вычеркивания останется только один знак (это может быть только минус), то распределение устойчиво. Если после вычеркивания останется знакочередующаяся последовательность (это могут быть только последовательности  $- + -$  или  $- + - + -$ , или  $- + - + - + -$  и т. д.), то распределение неустойчиво [99].

Например, последовательность знаков  $++ - + -$  означает неустойчивость, а последовательность знаков  $+ - - + -$  означает устойчивость.

## § 6.6. Абсолютная и конвективная неустойчивости

### 6.6.1. Критерии абсолютной и конвективной неустойчивости.

В предыдущих параграфах при исследовании устойчивости функции распределения частиц в плазме мы исходили из линеаризованных кинетических уравнений и уравнений Максвелла и получали

как условие их разрешимости дисперсионное уравнение, связывающее частоту  $\omega$  и волновой вектор  $k$  колебаний. Если при этом вещественным  $k$  соответствуют комплексные  $\omega$  с  $\text{Im } \omega > 0$ , то возмущение, имеющее вид плоской монохроматической волны  $\exp [i(kx - \omega t)]$  неограниченно возрастает со временем, и функция распределения неустойчива.

В действительности, однако, малые возмущения имеют вид не отдельных плоских монохроматических волн, а представляют собой волновые пакеты, т. е. суперпозиции плоских монохроматических волн. Асимптотическое же поведение волнового пакета может существенно отличаться от поведения отдельных плоских монохроматических волн. Именно, если в волновом пакете отдельные компоненты неограниченно возрастают со временем, то тем не менее весь пакет в целом может оставаться ограниченным в фиксированной точке пространства, так как возмущение может «сноситься» вниз по течению.

Если в волновом пакете  $\mathcal{Q}(x, t)$  ( $\mathcal{Q}$  — одна или несколько величин, характеризующих состояние системы; для простоты мы рассматриваем одномерный пакет), несмотря на наличие компонент с  $\text{Im } \omega > 0$ , возмущение при  $x = \text{const}$  и  $t \rightarrow \infty$  остается ограниченным (обычно оно стремится при этом к нулю), т. е.

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x = \text{const}}} \mathcal{Q}(x, t) = 0, \quad (6.6.1.1)$$

то говорят о *конвективной*, или *сносовой*, неустойчивости.

Если же возмущение  $\mathcal{Q}(x, t)$  неограниченно возрастает при фиксированном  $x$  и  $t \rightarrow \infty$ , а именно

$$\lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ x = \text{const}}} \mathcal{Q}(x, t) = \infty, \quad (6.6.1.2)$$

то неустойчивость называют *абсолютной* \*).

Таким образом, при исследовании неустойчивости недостаточно убедиться в существовании комплексных частот у дисперсионного уравнения  $D(k, \omega) = 0$ , а необходимо еще выяснить, как ведет себя волновой пакет в фиксированной точке пространства при  $t \rightarrow \infty$ . Ясно, что такая постановка вопроса характерна не только для плазмы, но и для любой колебательной системы, лишь бы она была достаточно протяженной.

Для решения проблемы устойчивости системы необходимо решить задачу о развитии начального возмущения подобно тому, как это было сделано в п. 4.2.1 при исследовании продольных колебаний плазмы.

\*) Понятия абсолютной и конвективной неустойчивостей были введены Твиссом [100] и Ландау и Лифшицем [101].

Будем предполагать, что вектор состояния  $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_1, \mathcal{Q}_2, \dots, \mathcal{Q}_n)$  удовлетворяет системе дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами:

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{Q}_j(x, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (6.6.1.3)$$

где  $P_{ij}$  — некоторые полиномы относительно  $\partial/\partial x$  и  $\partial/\partial t$  с постоянными коэффициентами.

Мы должны найти решение этой однородной системы, удовлетворяющее определенным начальным условиям. Удобнее, однако, перейти к эквивалентной задаче решения системы неоднородных уравнений

$$\sum_{j=1}^n P_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{Q}_j(x, t) = f_i(x, t), \quad (6.6.1.4)$$

где  $f_i(x, t)$  — некоторые заданные функции («внешние силы»), непрерывные и отличные от нуля в ограниченных интервалах  $(x_1, x_2)$  и  $(t_1, t_2)$ .

Решение  $\mathcal{Q}_i(x, t)$  системы (6.6.1.4) можно выразить через матрицу Грина  $g_{ij}$

$$\mathcal{Q}_i(x, t) = \sum_j \int \int g_{ij}(x', t') f_j(x - x', t - t') dx' dt', \quad (6.6.1.4')$$

где  $g_{ij}(x, t)$  — решение более простой системы уравнений

$$\sum_j P_{ij} g_{jk}(x, t) = \delta_{ik} \delta(x) \delta(t). \quad (6.6.1.5)$$

Введем в рассмотрение преобразование Фурье по координате и преобразование Лапласа по времени от матрицы Грина  $g_{ij}(x, t)$ :

$$g_{ij}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \exp(pt) dp \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) g_{ij}(k, p) dk, \quad (6.6.1.6)$$

$$g_{ij}(k, t) = \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ikx) g_{ij}(x, t) dx, \quad (6.6.1.7)$$

где контур интегрирования  $L$  представляет собой прямую, параллельную мнимой оси плоскости комплексного переменного  $p$  и расположенную правее всех особенностей функции

$$\varphi_{ij}(x, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) g_{ij}(k, p) dk.$$

Из (6.6.1.5) находим

$$g_{ij}(k, p) = \frac{1}{2\pi} P_{ij}^{-1}(ik, p),$$

где  $P_{ij}^{-1}$  — элемент матрицы, обратной матрице  $P_{ij}$ . Отсюда и из (6.6.1.6) следует

$$g_{ij}(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \exp(-i\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) P_{ij}^{-1}(ik, -i\omega) dk, \quad (6.6.1.8)$$

где  $\omega = ip$  и контуром интегрирования  $\Omega$  служит прямая, параллельная вещественной оси плоскости комплексного переменного  $\omega$  и расположенная выше всех особенностей функций  $\varphi_{ij}(x, -i\omega)$ .

Замечая, что детерминант  $\det P_{ij}(ik, -i\omega)$  совпадает с левой частью дисперсионного уравнения  $D(k, \omega) = 0$ , представим выражение (6.6.1.8) в виде

$$g_{ij}(x, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Omega} \exp(-i\omega t) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ikx) \frac{A_{ji}(k, \omega)}{D(k, \omega)} dk, \quad (6.6.1.9)$$

где  $A_{ji}(k, \omega)$  — алгебраические дополнения элементов матрицы  $P_{ij}(ik, -i\omega)$ .

Выполним в формуле (6.6.1.9) сперва интегрирование по  $\omega$ . С этой целью дополним контур  $\Omega$  снизу полуокружностью бесконечно большого радиуса. Учитывая, что  $A_{ji}/D$  стремится к нулю при  $|\omega| \rightarrow \infty$ , и применяя теорему о вычетах, получим

$$g_{ij}(x, t) = -\frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{m=1}^n \frac{A_{ji}[k, \omega_m(k)]}{D_{\omega}[k, \omega_m(k)]} \exp[ikx - i\omega_m(k)t] dk, \quad (6.6.1.10)$$

где  $D_{\omega} \equiv \partial D / \partial \omega$  и суммирование производится по всем корням дисперсионного уравнения  $\omega = \omega_m(k)$ . Заметим, что в точках ветвления функции  $\omega = \omega_m(k)$  выполняется равенство  $\omega_r(k) = \omega_s(k)$  и знаменатель соответствующих слагаемых подынтегрального выражения (6.6.1.10) обращается в нуль ( $D_{\omega} = 0$ ). При этом обращаются в бесконечность два слагаемых, соответствующих  $m=r$  и  $m=s$ . Однако при суммировании этих двух членов бесконечности взаимно уничтожаются.

Предположим теперь, что некоторым вещественным значениям  $k$  соответствуют комплексные значения  $\omega_m(k)$ , и выясним, с каким видом неустойчивости — абсолютной или конвективной — мы здесь имеем дело. Для этого положим в формуле (6.6.1.10)

$x=0$  и заменим в подинтегральном выражении переменную интегрирования  $k$  на  $\omega_m$ :

$$g_{ij}(0, t) = -\frac{i}{2\pi} \sum_m \int_{\Omega_m} \frac{A_{ji}[k(\omega_m), \omega_m]}{D_\omega[k(\omega_m), \omega_m]} \exp(-i\omega_m t) \frac{d\omega_m}{v_m},$$

где  $v_m = d\omega_m/dk$  и  $\Omega_m$  — контур в комплексной плоскости  $\omega_m$ , соответствующий вещественной оси комплексной плоскости  $k$ .

Учитывая, что

$$D_\omega \frac{d\omega}{dk} + D_k = 0 \quad (D_k \equiv \frac{\partial D}{\partial k}),$$

последнее выражение можно переписать в виде

$$g_{ij}(0, t) = \frac{i}{2\pi} \sum_m \int_{\Omega_m} \frac{A_{ji}[k(\omega_m), \omega_m]}{D_k[k(\omega_m), \omega_m]} \exp(-i\omega_m t) d\omega_m. \quad (6.6.1.11)$$

Если ни при каком  $m$  между контуром  $\Omega_m$  и вещественной осью  $\omega_m$  нет особых точек подинтегрального выражения (6.6.1.11), то все контуры интегрирования  $\Omega_m$  можно деформировать в вещественную ось, и мы получим

$$g_{ij}(0, t) = \frac{i}{2\pi} \sum_m \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A_{ji}}{D_k} \exp(-i\omega_m t) d\omega_m.$$

Это выражение представляет собой преобразование Фурье функции  $A_{ji}/D_k$  и, согласно теореме Римана—Лебега [102], стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$ , что означает наличие конвективной неустойчивости.

Таким образом, конвективная неустойчивость имеет место в том случае, если ни при каком  $m$  между контуром  $\Omega_m$  и вещественной осью  $\omega_m$  нет особых точек подинтегрального выражения (6.6.1.11).

Если же между каким-либо контуром  $\Omega_m$  и вещественной осью  $\omega_m$  имеется хотя бы одна особая точка  $\omega'_r + i\omega''_r$  ( $\omega''_r > 0$ ) подинтегрального выражения (6.6.1.11), то при деформировании контура  $\Omega_m$  в вещественную ось появляется вклад от особой точки вида  $\exp(\omega''_r t) \exp(-i\omega'_r t)$ , что означает наличие абсолютной неустойчивости.

Таким образом, в этом случае функция  $\mathcal{Q}(0, t)$  при  $t \rightarrow \infty$  имеет следующий вид:

$$\mathcal{Q}(0, t) = \sum_r a_r \exp(\omega''_r t) \exp(-i\omega'_r t),$$

где  $\omega'_r + i\omega''_r$  ( $\omega''_r > 0$ ) — особые точки функции  $A_{ji}/D_k$ , расположенные между контуром  $\Omega_m$  и действительной осью  $\omega_m$ , и  $a_r$  — некоторые константы.

Рассмотрим теперь характер особых точек  $\omega'_r + i\omega''_r$  функции  $A_{j,i}/D_k$ . Эти особые точки могут быть двух типов: 1) нули функции  $D_k$ , 2) точки ветвления функции  $k=k(\omega_m)$ .

Для определения точек ветвления функции  $k(\omega)$  выясним поведение левой части дисперсионного уравнения  $D(k, \omega)$  вблизи точки  $(k_0, \omega_0)$ , где  $k_0$  и  $\omega_0$  связаны дисперсионным уравнением  $D(k_0, \omega_0) = 0$ .

Разлагая  $D(k, \omega)$  в ряд по степеням  $(k - k_0)$  и  $(\omega - \omega_0)$ , получим

$$D_\omega(\omega - \omega_0) + D_k(k - k_0) + 1/2 D_{kk}(k - k_0)^2 + \dots = 0,$$

где  $D_\omega$ ,  $D_k$ ,  $D_{kk}$  — частные производные функции  $D(k, \omega)$  в точке  $(k_0, \omega_0)$ .

Если  $D_\omega \neq 0$  и  $D_k \neq 0$ , то  $k(\omega)$  является однозначной аналитической функцией в точке  $\omega = \omega_0$ . Если же  $D_k = 0$ ,  $D_\omega \neq 0$ ,  $D_{kk} \neq 0$ , то вблизи точки  $\omega = \omega_0$  функция  $k(\omega)$  ведет себя как

$$k - k_0 = \pm \sqrt{2D_\omega/D_{kk}} \sqrt{\omega - \omega_0} + \dots,$$

т. е. точка  $\omega = \omega_0$  представляет собой точку ветвления второго порядка функции  $k(\omega)$ . Если  $D_\omega \neq 0$ ,  $D_k = 0$ ,  $D_{kk} = 0$ ,  $D_{kkk} \neq 0$ , то точка  $\omega = \omega_0$  является точкой ветвления третьего порядка.

Мы видим, что для нахождения точек ветвления второго порядка нужно решить систему уравнений

$$D(k, \omega) = 0, \quad D_k(k, \omega) = 0,$$

а для нахождения точек ветвления третьего порядка — систему уравнений

$$D(k, \omega) = 0, \quad D_k(k, \omega) = 0, \quad D_{kk}(k, \omega) = 0.$$

Ясно, что первая система, как правило, имеет решение, а вторая не имеет решений. Поэтому мы можем ограничиться рассмотрением только точек ветвления второго порядка.

Мы видим, что нули функции  $D_k$  являются точками ветвления функции  $k(\omega)$ , т. е. характер неустойчивости определяется расположением этих точек. Именно, если ни при каком  $m$  между контуром  $\Omega_m$  и вещественной осью нет точек ветвления функции  $k=k(\omega_m)$ , то неустойчивость будет конвективной; в противном случае имеется абсолютная неустойчивость [103].

В качестве примера исследуем дисперсионное уравнение

$$(\omega - kv)^2 = k^2 c^2 - \nu^2 \quad (\nu, c, v > 0).$$

Решая его, находим

$$\omega_{1,2}(k) = kv \pm \sqrt{k^2 c^2 - \nu^2}. \quad (6.6.1.12)$$

При  $-\nu/c < k < \nu/c$  частота  $\omega$  становится комплексной, т. е. появляется неустойчивость. Для выяснения ее характера найдем

обратную функцию

$$k(\omega) = \frac{v\omega \pm \sqrt{c^2\omega^2 - (v^2 - c^2)\omega^2}}{v^2 - c^2}.$$

Мы видим, что функция  $k(\omega)$  имеет точки ветвления при

$$\omega = \pm \frac{v}{c} \sqrt{v^2 - c^2}.$$

Если  $v > c$ , то точки ветвления лежат на вещественной оси. В этом случае контур  $\Omega_m$  можно деформировать в вещественную ось, т. е. неустойчивость является конвективной.

Покажем, что при  $v < c$  одна из точек ветвления

$$\omega_0 = i(v/c) \sqrt{c^2 - v^2}$$

функции  $k(\omega)$  лежит между контуром  $\Omega_m$  и вещественной осью  $\omega$ , т. е. при  $v < c$  имеет место абсолютная неустойчивость. Заметим, что контур  $\Omega_m$  описывается точкой  $\omega_m(k)$ , если  $k$  пробегает вещественную ось от  $-\infty$  до  $+\infty$  ( $\omega_m(k)$  определяется формулой (6.6.1.12)), причем двум знакам перед радикалом в выражении (6.6.1.12) соответствуют два контура  $\Omega_1$  и  $\Omega_2$ . Для идентификации абсолютной неустойчивости достаточно рассмотреть только контур  $\Omega_1$ , расположенный в верхней полуплоскости  $\omega$ .

Как мы видим (см. (6.6.1.12)), контур  $\Omega_1$  пересекает мнимую ось при  $k=0$  в точке  $\omega_* = i v$ .

Так как  $\text{Im } \omega_0 < \text{Im } \omega_*$ , то точка ветвления  $\omega_0$  расположена между контуром  $\Omega_1$  и вещественной осью, т. е. при  $v < c$  имеет место абсолютная неустойчивость.

**6.6.2. Метод бегущих волн.** При получении критерия абсолютной и конвективной неустойчивости мы интегрировали (6.6.1.9) сперва по  $\omega$ . Мы найдем другую его форму, если выполним сперва интегрирование по  $k$ .

Дополним с этой целью вещественную ось  $k$  полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости при  $x > 0$  и в нижней полуплоскости при  $x < 0$ . Учитывая, что подынтегральное выражение стремится к нулю при  $|k| \rightarrow \infty$ , и применяя теорему о вычетах, получим

$$g_{ij}(x, t) = \left[ \begin{aligned} & \frac{i}{2\pi} \int_{\Omega} \sum_{\alpha} \frac{A_{j\alpha} [k_{\alpha}(\omega), \omega]}{D_k [k_{\alpha}(\omega), \omega]} \exp[ik_{\alpha}(\omega)x - i\omega t] d\omega \text{ при } x > 0, \\ & - \frac{i}{2\pi} \int_{\Omega} \sum_{\beta} \frac{A_{j\beta} [k_{\beta}(\omega), \omega]}{D_k [k_{\beta}(\omega), \omega]} \exp[ik_{\beta}(\omega)x - i\omega t] d\omega \text{ при } x < 0, \end{aligned} \right] \quad (6.6.2.1)$$

где  $D_k \equiv \partial D / \partial k$ , а  $k_{\alpha}(\omega)$ ,  $k_{\beta}(\omega)$  — корни дисперсионного уравнения, лежащие при  $\text{Im } \omega > M$  (прямая  $\text{Im } \omega = M$  расположена

выше всех особенностей подынтегральных выражений (6.6.2.1)) соответственно в верхней или нижней полуплоскости, т. е.

$$\operatorname{Im} k_{\alpha}(\omega) > 0, \quad \operatorname{Im} k_{\beta}(\omega) < 0.$$

Будем говорить, что слагаемые, входящие в сумму первого соотношения, описывают волны, распространяющиеся вправо, а слагаемые, входящие во вторую сумму, — волны, распространяющиеся влево.

Нас интересует асимптотическое поведение  $g_{ij}(x, t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Чтобы установить его, будем сдвигать контур  $\Omega$  вниз. Ясно, что если первая особенность подынтегрального выражения  $\varphi(x, -i\omega)$ , которую мы при этом встретим, находится в точке  $\omega_0$ , то  $g_{ij}(x, t)$  будет вести себя при  $t \rightarrow \infty$  как  $\exp(-i\omega_0 t)$ , т. е. будут стремиться к бесконечности при  $\operatorname{Im} \omega_0 > 0$  и к нулю при  $\operatorname{Im} \omega_0 \leq 0$ .

Таким образом, конвективная неустойчивость существует в том случае, если в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} \omega > 0$  нет особых точек подынтегрального выражения  $\varphi(x, -i\omega)$ .

Повторяя рассуждения, изложенные выше, находим, что особыми точками подынтегрального выражения (6.6.2.1) могут быть только точки ветвления функции  $k(\omega)$ . Однако не все эти точки вносят вклад в интеграл (6.6.2.1). Если в точке ветвления  $\omega_0$  становятся равными величины  $k_r(\omega_0)$  и  $k_s(\omega_0)$ , соответствующие двум волнам, распространяющимся в одну сторону, то, поскольку в соотношениях (6.6.2.1) производится суммирование по  $\alpha$  или по  $\beta$ , точка  $\omega_0$  не будет в действительности точкой ветвления подынтегрального выражения.

Поэтому критерий абсолютной неустойчивости состоит в том, что в верхней полуплоскости  $\operatorname{Im} \omega > 0$  должна находиться точка ветвления функции  $k(\omega)$ , в которой совпадают две ее ветви, соответствующим волнам, распространяющимся в противоположные стороны [104].

Исследуем этим методом характер неустойчивости системы, характеризуемой дисперсионным уравнением

$$(\omega - kv)^2 = k^2 c^2 - v^2 \quad (v, c, v > 0),$$

которое мы рассматривали выше.

Если  $v > c$ , то мнимая часть функции

$$k(\omega) = \frac{v(\omega) \pm \sqrt{c^2 \omega^2 - (v^2 - c^2)v^2}}{v^2 - c^2}$$

при  $\operatorname{Im} \omega \rightarrow +\infty$  будет положительной. Поэтому при  $v > c$  обе волны распространяются вправо и, следовательно, неустойчивость является конвективной.

Если же  $v < c$ , то одна из волн  $k(\omega)$  распространяется вправо, а другая влево. При этом одна из точек ветвления, а именно

$\omega = i(v/c)\sqrt{c^2 - v^2}$  расположена в верхней полуплоскости. Таким образом, при  $v < c$  мы имеем дело с абсолютной неустойчивостью.

**6.6.3. Критерии усиления и непропускания колебаний.** Колебательные системы, дисперсионные уравнения которых допускают комплексные решения, можно в принципе использовать для генерирования и усиления колебаний.

Если неустойчивость в системе носит абсолютный характер, то система способна служить генератором колебаний, частоты которых лежат в интервале абсолютной неустойчивости.

При конвективной неустойчивости возмущение сносится по течению; это значит, что неустойчивости такого типа соответствует усиление, а не генерирование колебаний\*), иными словами, системы с конвективной неустойчивостью могут быть усилителями колебаний.

Усиливаются могут, очевидно, те колебания, для которых  $\text{Im } k < 0$  при вещественных  $\omega$  (система предполагается полубесконечной  $x > 0$ , а ось  $x$  выбрана так, чтобы усиливаемые волны двигались в сторону возрастающих значений  $x$ ).

Однако само по себе условие  $\text{Im } k < 0$  при вещественных  $\omega$  еще недостаточно для усиления колебаний. Например, в волноводе не могут распространяться колебания с частотами ниже критической, хотя им и соответствуют мнимые значения  $k$ . Аналогичная ситуация имеет место в плазме при отсутствии магнитного поля для электромагнитных волн с частотами, меньшими ленгмюровской частоты.

Таким образом, существование комплексных  $k$  при вещественных  $\omega$  может означать либо *усиление*, либо *непропускание* колебаний\*\*).

Для установления критерия усиления и непропускания колебаний выберем внешние силы  $f_j(x, t)$ , входящие в правые части уравнений (6.6.1.4), таким образом, чтобы все волны распространялись в положительном направлении оси  $x$ , т. е. чтобы выполнялось условие

$$\mathcal{A}_j(x, t) = 0 \quad \text{при } x < 0. \quad (6.6.3.1)$$

При этом, согласно (6.6.2.1), мнимая часть  $k(\omega)$  для волн, движущихся вправо, должна быть при  $\text{Im } \omega > M$  положительной. Кроме того, условие пространственного нарастания колебаний имеет, очевидно, вид

$$\text{Im } k(\omega) < 0 \quad (\omega \text{ — вещественно}).$$

\*) Тем не менее системы с конвективной неустойчивостью также можно использовать для генерирования колебаний, если связать в них вход и выход; благодаря этому осуществляется обратная связь и «снесенное» возмущение возвращается обратно, т. е. неустойчивость в системе приобретает абсолютный характер.

\*\*) Понятия усиления и непропускания колебаний были введены Твиссом [105].

Таким образом, для усиления волн необходимо, чтобы мнимая часть  $k(\omega)$  имела при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  и  $\text{Im } \omega = 0$  противоположные знаки. Если же знаки величины  $\text{Im } k(\omega)$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  и  $\text{Im } \omega = 0$  одинаковы, то имеет место непропускание колебаний [104].

Рассмотрим в качестве примера систему, дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$\omega^2 = k^2 c^2 + \nu^2. \quad (6.6.3.2)$$

Комплексные значения  $k$  возможны, очевидно, лишь при  $-\nu < \omega < \nu$ , причем каждому значению  $\omega$  соответствуют два решения дисперсионного уравнения

$$k_1(\omega) = \frac{i}{c} \sqrt{\nu^2 - \omega^2}, \quad k_2(\omega) = -\frac{i}{c} \sqrt{\nu^2 - \omega^2}. \quad (6.6.3.3)$$

Легко видеть, что при  $\text{Im } \omega = 0$  и при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  справедливы неравенства

$$\text{Im } k_1(\omega) > 0, \quad \text{Im } k_2(\omega) < 0,$$

т. е. в интервале частот  $-\nu < \omega < \nu$  система не пропускает колебаний.

Заметим, что этот результат физически очевиден, так как уравнение (6.6.3.2) представляет собой дисперсионное уравнение волновода с критической частотой  $\nu$ , а он, как известно, не пропускает колебаний, частота которых ниже критической.

В качестве второго примера рассмотрим систему с дисперсионным уравнением

$$(\omega - kv)^2 = k^2 c^2 - \nu^2.$$

Решая это уравнение относительно  $k$ , получим

$$k_1(\omega) = \frac{v\omega + \sqrt{c^2\omega^2 - (v^2 - c^2)\nu^2}}{v^2 - c^2},$$

$$k_2(\omega) = \frac{v\omega - \sqrt{c^2\omega^2 - (v^2 - c^2)\nu^2}}{v^2 - c^2}.$$

Если  $v < c$ , то любым вещественным значениям  $\omega$  соответствуют вещественные значения  $k$ . В этом случае происходит пропускание колебаний. (В действительности, как было показано выше, при  $v < c$  система абсолютно неустойчива.)

Если же  $v > c$ , то при

$$-\frac{\nu}{c} \sqrt{v^2 - c^2} < \omega < \frac{\nu}{c} \sqrt{v^2 - c^2},$$

величина  $k(\omega)$  становится комплексной и оба решения  $k_1(\omega)$  и  $k_2(\omega)$  имеют при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  положительную мнимую часть. При  $\text{Im } \omega = 0$  справедливы неравенства

$$\text{Im } k_1(\omega) > 0, \quad \text{Im } k_2(\omega) < 0.$$

Поэтому решению  $k_1(\omega)$  соответствует непропускание колебаний, а решению  $k_2(\omega)$  — их усиление.

**6.6.4. Правила Стэррока.** Практическое применение сформулированных выше критериев неустойчивости и усиления волн связано, вообще говоря, с большими трудностями, так как нахождение точек ветвления функций в областях, ограниченных вещественными осями плоскостей  $\omega_m$  и контурами  $\Omega_m$  (которые сами должны быть определены), а также направления распространения волн представляет собой сложную и трудоемкую задачу.

Значительные упрощения наступают в том случае, когда дисперсионное уравнение  $D(k, \omega) = 0$  представляет собой алгебраическое уравнение с вещественными коэффициентами, левая часть которого в области больших значений  $|k|$  (или, что эквивалентно, в области больших значений  $|\omega|$ ) распадается на произведение множителей вида  $\omega - vk$ , где  $v$  — некоторая константа, отличная от нуля. В этом случае характер неустойчивости можно установить из общего вида кривой, соответствующей дисперсионному уравнению в плоскости  $(k, \omega)$ .

Предположим сперва, что  $D(k, \omega)$  представляет собой полином второго порядка относительно  $k$  и  $\omega$ . Тогда возможны четыре типа дисперсионных кривых (рис. 6.6.1).

Выясним сперва вопрос о неустойчивости систем, соответствующих этим дисперсионным кривым. Рассмотрим для этого их пересечение с прямыми, параллельными оси  $k$ .

Прямая  $k = \text{const}$  пересекает кривые, изображенные на рис. 6.6.1, *a* и *b*, в двух точках при любом значении  $\text{const}$ . Поэтому этим дисперсионным кривым соответствуют устойчивые системы.

Напротив, в случаях дисперсионных кривых, изображенных на 6.6.1, *в* и *г*, прямая  $k = \text{const}$  пересекает дисперсионные кривые не при всех значениях  $\text{const}$ . Именно, имеется интервал вещественных значений  $k$  ( $k_A, k_B$ ), которым соответствуют комплексные значения  $\omega$ . Так как коэффициенты дисперсионного уравнения предполагаются вещественными, то комплексные значения  $\omega$  будут комплексно сопряженными и одно из них будет иметь положительную мнимую часть. Поэтому таким дисперсионным кривым соответствуют неустойчивые системы.

Заметим, что направление распространения волн также можно непосредственно установить из вида дисперсионной кривой. Действительно, в области больших  $|\omega|$  каждая ветвь дисперсионной кривой описывается уравнением вида  $k = \omega/v$ , где  $v$  — вещественно. Но, согласно п. 6.6.2, для волны, распространяющейся вправо,  $\text{Im } k > 0$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ , а для волны, распространяющейся влево,  $\text{Im } k < 0$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ . Поэтому волнам, распространяющимся вправо, соответствуют положительные значения  $v$ , а волнам, распространяющимся влево, — отрицательные его значения. Вместе с тем положительным  $v$  соответствуют

асимптоты дисперсионной кривой, наклоненные вправо, а отрицательным  $v$  — асимптоты, наклоненные влево. Таким образом, наклон асимптот определяет направление распространения соответствующих волн.

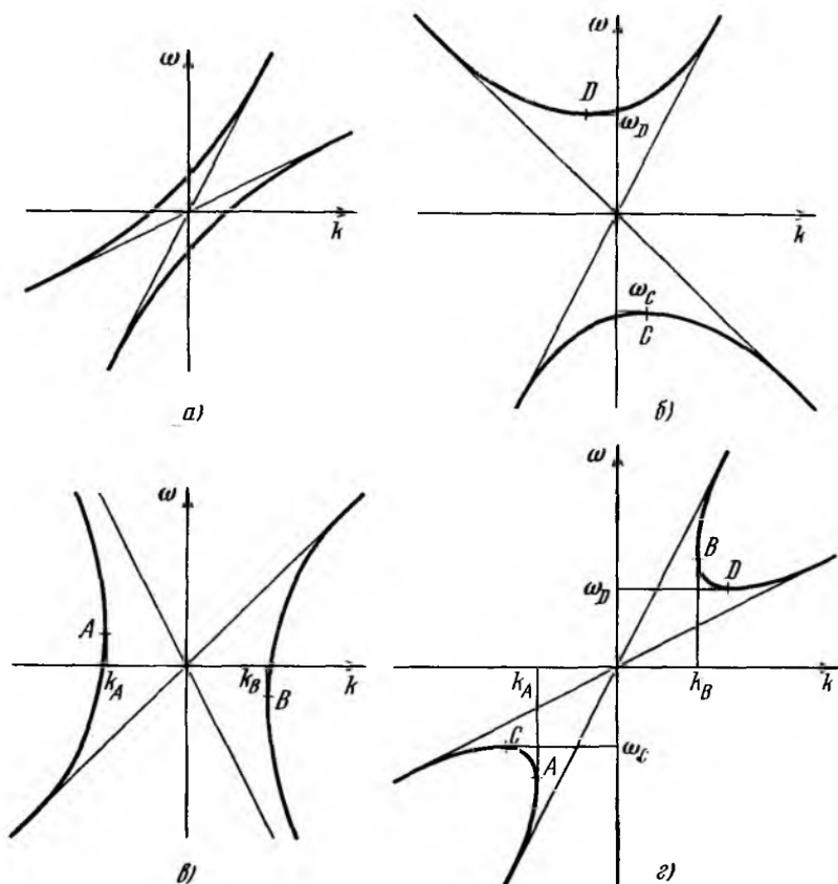


Рис. 6.6.1. Дисперсионные кривые в случае когда дисперсионное уравнение является полиномом второго порядка.

а) Устойчивость, пропускание; б) устойчивость, непропускание; в) абсолютная неустойчивость, пропускание; г) конвективная неустойчивость, усиление.

Легко выяснить физический смысл найденного результата.

Напомним, что для нахождения наклона асимптот нужно представить уравнение  $D(k, \omega) = 0$  в виде

$$D(k, \omega) \equiv \prod_{j=1}^n (\omega - v_j k) + D_1(k, \omega) = 0, \quad (6.6.4.1)$$

где  $D_1(k, \omega)$  — многочлен порядка  $n_1$ , причем  $n_1 < n$  и  $v_j$  — константы. Пренебрегая в этом уравнении слагаемым  $D_1$ , найдем наклоны асимптот  $\omega/k = v_j$ .

Величины  $v_j$ , очевидно, представляют собой фазовые скорости волн, распространяющихся в системе, при пренебрежении слагаемым  $D_1$  в дисперсионном уравнении (6.6.4.1). Эти волны мы будем называть *свободными* волнами.

При учете слагаемого  $D_1$  дисперсионные свойства волн, распространяющихся в системе, будут отличаться от свойств свободных волн. Можно сказать, что слагаемое  $D_1$  описывает взаимодействие между свободными волнами.

Так как величины  $v_j$  действительны, а величины  $\omega$  при неустойчивости должны быть комплексными, то мы вправе считать, что неустойчивость возникает вследствие взаимодействия между свободными волнами.

Возвратимся теперь к вопросу о характере неустойчивости.

Как мы уже видели, неустойчивым системам соответствуют рис. 6.6.1, *в*, *г*. Различие между ними заключается в том, что в первом случае асимптоты наклонены в разные стороны, а во втором — в одну сторону. Как было показано выше, рис. 6.6.1, *в* соответствуют волны, распространяющиеся в противоположные стороны, а рис. 6.6.1, *г* — волны, распространяющиеся в одну сторону. Поэтому на первом из них в точках ветвления функции  $k(\omega)$  совпадают две ветви, соответствующие волнам, распространяющимся в противоположные стороны, а на втором — две ветви, соответствующие волнам, распространяющимся в одну сторону.

Кроме того, в ситуации, отвечающей рис. 6.6.1, *в*, в точке ветвления функции  $k(\omega)$  мнимая часть  $\omega$  положительна, т. е.  $\text{Im } \omega > 0$ . Последнее утверждение следует из того, что в точках ветвления функции  $k(\omega)$  справедливо равенство  $d\omega/dk=0$ ; иными словами, при вещественных  $\omega$  и  $k$  в этих точках касательная к дисперсионной кривой горизонтальна. Так как кривые на рис. 6.6.1, *в* не имеют горизонтальных касательных, то в точке ветвления по крайней мере одна из величин  $\omega$  или  $k$  должна быть комплексной. Из этого рисунка видно, что вещественным значениям  $\omega$  не могут соответствовать комплексные значения  $k$ . Поэтому в точках ветвления функции  $k(\omega)$  комплексна величина  $\omega$ . Так как полином  $D(k, \omega)$  имеет вещественные коэффициенты, то значения  $\omega$  в точках ветвления функции  $k(\omega)$  комплексно сопряжены и у одного из них мнимая часть  $\omega$  будет положительной.

Согласно критериям абсолютной и конвективной неустойчивости, установленным в п. 6.6.2, рис. 6.6.1, *в* соответствует абсолютная неустойчивость, а рис. 6.6.1, *г* — конвективная неустойчивость.

Таким образом, неустойчивость будет абсолютной или конвективной в зависимости от того, наклонены ли асимптоты в разные стороны или в одну сторону (*первое правило Стэррока* [106]).

Разъясним теперь, как по дисперсионной кривой различить пропускание, непропускание и усиление колебаний.

В случае пропускания всем вещественным значениям  $\omega$  соответствуют вещественные значения  $k$ , т. е. прямая  $\omega = \text{const}$  пересекает дисперсионную кривую при любых значениях  $\text{const}$ . Этому случаю соответствуют рис. 6.6.1, а и в.

Напротив, для рис. 6.6.1, б и рис. 6.6.1, г прямая  $\omega = \text{const}$  пересекает дисперсионную кривую не при всех значениях константы. Таким ее значениям соответствуют комплексные  $k$ , т. е. имеет место либо усиление, либо непропускание колебаний. Различие между рис. 6.6.1, б и рис. 6.6.1, г состоит в том, что в первом случае всем вещественным значениям  $k$  соответствуют вещественные значения  $\omega$ , а во втором — значениям  $k$ , расположенным в интервале  $(k_A, k_B)$ , соответствуют комплексные значения  $\omega$ .

Отсюда следует, что в ситуации, отвечающей рис. 6.6.1, б, знак  $\text{Im } k$  в верхней полуплоскости комплексного переменного  $\omega$  не может измениться, и тогда, согласно критерию, установленному в п. 6.6.3, имеет место непропускание колебаний [110].

В ситуации же, отвечающей рис. 6.6.1, г определенным вещественным значениям  $k$  соответствуют комплексные значения  $\omega$ , при которых знак  $\text{Im } k$  изменяется. Так как, по предположению, коэффициенты дисперсионного уравнения вещественны, то значения  $\omega$ , при которых  $\text{Im } k$  изменяет знак, комплексно сопряжены, и одно из них лежит в верхней полуплоскости. Тогда, согласно критерию, установленному в п. 6.6.3, имеет место усиление колебаний.

Различие между рис. 6.6.1, б и рис. 6.6.1, г заключается в том, что на первом асимптоты наклонены в разные стороны, а на втором — в одну сторону.

Таким образом, если асимптоты дисперсионной кривой наклонены в разные стороны, то имеет место непропускание колебаний, если же они наклонены в одну сторону, — то усиление колебаний (*второе правило Стэррока* \*)).

Мы видим, что одна и та же дисперсионная кривая соответствует и неустойчивости и усилению волн, причем, если имеется абсолютная неустойчивость, то существует также пропускание колебаний. Если же мы имеем дело с конвективной неустойчивостью, то происходит также усиление колебаний. Какая из этих ситуаций осуществляется зависит, естественно, от конкретной физической постановки задачи.

\*) Эти правила были сформулированы Стэрроком [106], строгое доказательство было дано Половинным [107, 108], эвристический вывод приведен в [109].

До сих пор мы предполагали, что функция  $D(k, \omega)$  представляет собой полином второго порядка относительно  $k$  и  $\omega$ . Покажем теперь, что общий случай, когда эта функция является полиномом произвольного порядка  $n$ , сводится к рассмотренному выше случаю  $n=2$ .

Представим себе, что коэффициенты полинома  $D(k, \omega)$  зависят от некоего параметра  $\xi$ , варьируя который можно добиться того, чтобы полином  $D(k, \omega)$  распался на произведение линейных множителей вида  $\omega - v_j k - a_j$ . Для определенности будем считать, что значение параметра  $\xi=1$  соответствует исходному полиному, а значение  $\xi=0$  — его распадению на множители.

Очевидно, что при  $\xi=0$  дисперсионная кривая будет иметь вид совокупности прямых. Пусть в каждой точке пересекается не более двух прямых, а при изменении  $\xi$  в интервале  $0 < \xi \leq 1$  топологический характер дисперсионных кривых не изменяется.

При малых  $\xi$  полосы неустойчивости (или усиления) будут расположены вблизи точек пересечения прямых  $\omega - v_j k - a_j = 0$ , на которые распадается дисперсионная кривая при  $\xi=0$ . С другой стороны, предполагается, что прямые пересекаются попарно, и поэтому при малых  $\xi$  дисперсионные кривые должны быть, очевидно, подобны кривым, изображенным на рис. 6.6.1. Иными словами, при малых  $\xi$  исследование общего случая полинома произвольного порядка  $n$  сводится к рассмотренному ранее случаю  $n=2$ .

Можно показать, что при непрерывном увеличении параметра  $\xi$  характер неустойчивости не может измениться [107]. Это позволяет определить характер неустойчивости исходного дисперсионного уравнения, соответствующего значению параметра  $\xi=1$ .

Рассмотрим в качестве примера дисперсионное уравнение

$$\frac{\omega_b^2}{(\omega - kv_b)^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2 v_p^2} = 1, \quad (6.6.4.2)$$

которому в случае

$$\omega_b < \omega_p, \quad v_p < u_b < v_p \sqrt{1 + \omega_b^2/\omega_p^2} \quad (6.6.4.3)$$

соответствует дисперсионная кривая, изображенная на рис. 6.6.2, а. Будем считать величину  $\omega_p^2$  переменной и заменим ее на  $\omega_p^2 \xi$ ; тогда имеем

$$\frac{\omega_b^2}{(\omega - kv_b)^2} + \frac{\omega_p^2 \xi}{\omega^2 - k^2 v_p^2} = 1. \quad (6.6.4.4)$$

При  $\xi=0$  уравнение (6.6.4.4) распадается на четыре линейных уравнения

$$\omega - kv_b = \pm \omega_b, \quad \omega = \pm kv_p,$$

и дисперсионная кривая вырождается в четыре прямые.

При малых  $\xi$  дисперсионная кривая имеет вид, изображенный на рис. 6.6.2, б. Как мы видим, система, описываемая дисперсионным уравнением (6.6.4.4), обладает при малых  $\xi$  конвективной

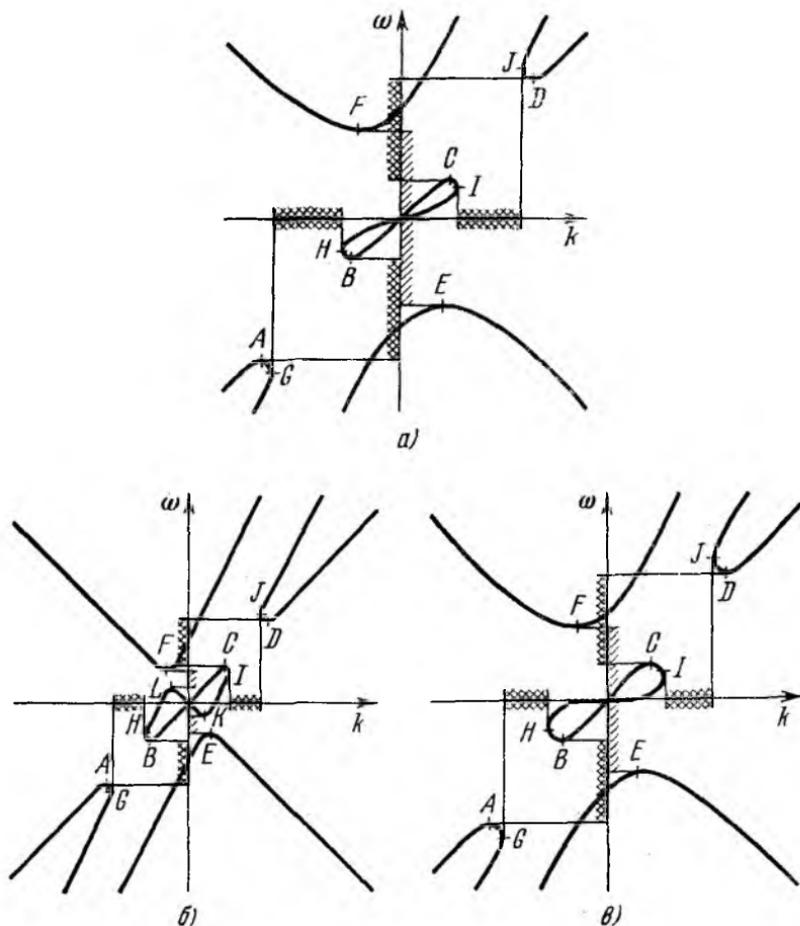


Рис. 6.6.2. Сведение дисперсионного уравнения к полиному второго порядка.

а)  $\xi=1$ ; б) малые  $\xi$ ; в)  $\xi=\xi_0$ .

неустойчивостью. (Полосам конвективной неустойчивости соответствуют интервалы волновых чисел  $(k_G, k_H)$  и  $(k_I, k_J)$ ).

Если решать задачу об усилении колебаний в системе, описываемой дисперсионным уравнением (6.6.4.4) при малых  $\xi$ , то из рис. 6.6.2, б непосредственно видно, что имеются две полосы уси-

ления в интервалах частот  $(\omega_A, \omega_B)$  и  $(\omega_C, \omega_D)$ , а также две полосы непропускания в интервалах частот  $(\omega_E, \omega_K)$  и  $(\omega_L, \omega_F)$ .

При увеличении  $\xi$  дисперсионная кривая (6.6.4.4) деформируется, но топологически она не изменяется. Когда параметр  $\xi$  достигнет значения

$$\xi_0 = (\omega_b^2/\omega_p^2)(v_p^2/u_b^2),$$

то касательная к одной из ветвей дисперсионной кривой, проходящей через начало координат, становится горизонтальной (см. рис. 6.6.2, *в*). При этом две полосы непропускания  $(\omega_E, \omega_K)$  и  $(\omega_L, \omega_F)$  сливаются в одну полосу непропускания  $(\omega_E, \omega_F)$ . Из неравенств (6.6.4.3) следует, что такое слияние полос непропускания происходит при  $\xi_0 < 1$ .

При дальнейшем увеличении  $\xi$  дисперсионная кривая принимает вид, изображенный на рис. 6.6.2, *а*. Так как кривые, изображенные на всех трех рисунках, топологически эквивалентны, то заключение о характере неустойчивости при малых  $\xi$  остается справедливым и при  $\xi=1$ , т. е. для исходного дисперсионного уравнения (6.6.4.2).

Из сравнения приведенных рисунков можно заключить, что исходная система, описываемая дисперсионным уравнением (6.6.4.2), обладает конвективной неустойчивостью в интервалах волновых чисел  $(k_G, k_H)$  и  $(k_I, k_J)$ . Кроме того, рассматриваемая система имеет две полосы усиления в интервалах частот  $(\omega_A, \omega_B)$  и  $(\omega_C, \omega_D)$ , а также полосу непропускания  $(\omega_E, \omega_F)$ .

**6.6.5. Глобальная неустойчивость.** До сих пор при исследовании неустойчивости динамических систем мы считали их бесконечно протяженными и не учитывали поэтому наличия границ. Между тем наличие границы может оказаться очень существенным из-за отражения от нее волн. Вследствие этого может осуществляться обратная связь между «входом» и «выходом» системы, в результате чего система, обладающая конвективной неустойчивостью, будет вести себя так, как если бы она обладала абсолютной неустойчивостью. Важным здесь является то обстоятельство, что подобная эффективная абсолютная неустойчивость (она носит название *глобальной неустойчивости* \*) будет существовать и в предельном случае бесконечно протяженных систем. Представляет интерес также независимость этого вывода от конкретного вида граничных условий.

Собственные колебания в ограниченных системах возникают, как известно, в результате суперпозиции бегущих в разных направлениях волн. Частоты этих колебаний дискретны, и система будет неустойчивой, если по крайней мере одна из частот обладает положительной мнимой частью.

\*) Понятие глобальной неустойчивости было введено Куликовским [111].

Чтобы различить волны, бегущие вправо и влево, следует, согласно результатам, изложенным в п. 6.6.2, определить знак мнимой части функции  $k \equiv k(\omega)$  при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ : если  $\text{Im } k > 0$ , то волна бежит вправо, если же  $\text{Im } k < 0$ , то волна бежит влево. Обозначим в соответствии с этим определением волновые числа волн, бегущих вправо, через  $k_1(\omega), k_2(\omega), \dots, k_s(\omega)$ , а волновые числа волн, бегущих влево, — через  $k_{s+1}(\omega), k_{s+2}(\omega), \dots, k_n(\omega)$ . Заметим, что эти функции являются решениями дисперсионного уравнения

$$D(k, \omega) = 0$$

для безграничной системы.

Пусть теперь  $\omega$  представляет собой собственную частоту ограниченной системы. Расположим мнимые части волновых чисел волн, бегущих в одну сторону, в порядке убывания  $\text{Im } k(\omega)$ :

$$\text{Im } k_1(\omega) > \text{Im } k_2(\omega) > \dots > \text{Im } k_s(\omega) > \text{Im } k_{s+1}(\omega) > \dots > \text{Im } k_n(\omega). \quad (6.6.5.1)$$

Заметим, что при конечных  $\omega$  величины  $\text{Im } k_\alpha(\omega)$  ( $1 \leq \alpha \leq s$ ) не обязательно должны быть положительными, а величины  $\text{Im } k_\beta(\omega)$  ( $s+1 \leq \beta \leq n$ ) — отрицательными.

Чтобы получить уравнение для собственной частоты  $\omega$ , предположим, что на левом конце системы ( $x=-L$ ) возбуждены все волны 1, 2, ...,  $n$  с волновыми числами  $k_1(\omega), k_2(\omega), \dots, k_n(\omega)$ . Тогда вправо будут двигаться только первые  $s$  волн. В силу неравенств (6.6.5.1) при достижении правого конца системы ( $x=L$ ) при больших значениях  $L$  наибольшую амплитуду будет иметь  $s$ -я волна. Если при  $x=-L$  амплитуда этой волны равнялась единице, то при  $x=L$  ее амплитуда будет равна  $\exp[-2L \text{Im } k_s(\omega)]$ . При отражении  $s$ -й волны на правом конце возникнут волны  $s+1, s+2, \dots, n$  с волновыми числами  $k_{s+1}, k_{s+2}, \dots, k_n$  и сами волны будут двигаться влево. При достижении левого конца системы наибольшую амплитуду будет иметь  $(s+1)$ -я волна. Ее амплитуда при  $x=-L$  будет равна

$$T_+ \exp[-2L \text{Im } k_s + 2L \text{Im } k_{s+1}],$$

где  $T_+$  — коэффициент трансформации  $s$ -й волны в  $(s+1)$ -ю волну на правом конце системы. При отражении  $(s+1)$ -й волны от левого конца системы снова возникает  $s$ -я волна с амплитудой  $T_+ T_- \exp(-2L \text{Im } k_s + 2L \text{Im } k_{s+1})$ , где  $T_-$  — коэффициент трансформации  $(s+1)$ -й волны в  $s$ -ю волну на левом конце системы. Приравнявая оба выражения единице и устремляя  $L$  к бесконечности, получим следующее уравнение для собственных частот  $\omega$ :

$$\text{Im } k_s(\omega) = \text{Im } k_{s+1}(\omega). \quad (6.6.5.2)$$

Это уравнение вместе с дисперсионным уравнением  $D(k, \omega) = 0$  определяет некоторую линию в плоскости комплексного переменного  $\omega$ . Если эта линия имеет точки, расположенные в верхней полуплоскости  $\text{Im } \omega > 0$ , то система будет глобально неустойчивой \*).

Заметим, что вместо дискретного спектра собственных частот мы получили непрерывную линию, описываемую (6.6.5.2), так как выполнили предельный переход  $L \rightarrow \infty$ : каждая точка этой линии представляет предельную точку дискретных собственных частот при  $L \rightarrow \infty$ .

Отметим, что система, обладающая абсолютной неустойчивостью, всегда глобально неустойчива.

В самом деле, абсолютная неустойчивость означает, что в верхней полуплоскости  $\text{Im } \omega > 0$  существуют точки, удовлетворяющие дисперсионному уравнению  $D(k, \omega) = 0$ , для которых

$$k_{\alpha}(\omega) = k_{\beta}(\omega) \quad (1 \leq \alpha \leq s, s+1 \leq \beta \leq n).$$

При этом, очевидно, выполняется условие  $\text{Im } k_{\alpha}(\omega) = \text{Im } k_{\beta}(\omega)$ , более слабое, чем (6.6.5.2). В силу неравенств (6.6.5.1) из последнего уравнения в свою очередь следует  $\text{Im } k_s(\omega) \leq \text{Im } k_{s+1}(\omega)$ . С другой стороны, в соответствии с определением волн, бегущих вправо и влево, при  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$  справедливо неравенство  $\text{Im } k_s(\omega) > \text{Im } k_{s+1}(\omega)$ . В силу непрерывности функции  $\text{Im}[k_s(\omega) - k_{s+1}(\omega)]$  отсюда вытекает существование решений уравнения (6.6.5.2) в верхней полуплоскости  $\omega$ , т. е. наличие глобальной неустойчивости.

В качестве примера рассмотрим систему, дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$3\omega^2 - 4\omega k + k^2 + 1 = 0.$$

Ему соответствуют две волны 1 и 2 с волновыми числами  $k_{1,2}(\omega) = 2\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}$ .

Легко видеть, что рассматриваемая система конвективно неустойчива. Действительно, полагая  $\text{Im } \omega \rightarrow +\infty$ , получим  $\text{Im } k_1 > 0$ ,  $\text{Im } k_2 > 0$ . Следовательно, обе волны распространяются вправо, т. е. отсутствуют точки ветвления, в которых становятся равными волновые числа волн, движущихся в разные стороны.

Выясним теперь вопрос о глобальной неустойчивости этой системы. Так как обе волны перемещаются вправо, то в данном случае не существует уравнения типа (6.6.5.2), т. е. система оказывается глобально устойчивой.

Рассмотрим теперь второй пример, в котором дисперсионное уравнение имеет вид

$$(3\omega^2 - 4\omega k + k^2 + 1)(\omega + k) = 0.$$

\*) Мы привели эвристический вывод критерия глобальной неустойчивости; строгое доказательство см. в [111].

В данном случае возникают три волны 1, 2, 3 с волновыми числами

$$k_{1,2} = 2\omega \pm \sqrt{\omega^2 - 1}, \quad k_3 = -\omega,$$

причем волны 1 и 2 двигаются вправо, а волна 3 — влево.

Ясно, что эта система конвективно неустойчива, так как волновые числа первых двух волн не отличаются от волновых чисел  $k_1$  и  $k_2$ , рассмотренных в предыдущем примере (третья волна не приводит к неустойчивости).

Однако, в отличие от предыдущего примера, теперь система будет глобально неустойчивой, причем неустойчивость возникнет из-за существования третьей волны. Чтобы убедиться в этом, определим собственные частоты из уравнения (6.6.5.2). Полагая  $\omega = \alpha + \beta i$ , получим

$$2\beta - \left\{ \frac{1}{2} \left[ \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 1)^2 + 4\alpha^2\beta^2} - (\alpha^2 - \beta^2 - 1) \right] \right\}^{1/2} = -\beta \quad (\beta > 0), \quad (6.6.5.3)$$

и, следовательно,

$$\alpha^2 + 17\beta^2 - 1 = \sqrt{(\alpha^2 - \beta^2 - 1)^2 + 4\alpha^2\beta^2}. \quad (6.6.5.4)$$

Возводя обе части этого уравнения в квадрат, находим уравнение линии

$$8\alpha^2 + 72\beta^2 = 9. \quad (6.6.5.5)$$

Заметим, что при решении иррационального уравнения (6.6.5.4) у нас могли получиться посторонние корни. Правильные его корни соответствуют знаку плюс перед радикалом, т. е. задаются условием

$$\alpha^2 + 17\beta^2 \geq 1. \quad (6.6.5.6)$$

Легко видеть, что эллипс, описываемый (6.6.5.5), целиком лежит в области, определяемой (6.6.5.6). Отсюда следует, что все точки этого эллипса удовлетворяют уравнению (6.6.5.3). Так как часть получающегося эллипса расположена в верхней полуплоскости ( $\beta > 0$ ), то рассматриваемая система является глобально неустойчивой.

**6.6.6. Инвариантный характер понятий абсолютной и конвективной неустойчивостей.** Легко видеть, что понятия абсолютной и конвективной неустойчивостей не инвариантны относительно выбора движущейся системы координат. Напротив, понятия усиления и непропускания носят инвариантный характер. Это можно проиллюстрировать с помощью правил Стэррока.

Переход от системы отсчета  $K$  к системе  $K'$  соответствует, очевидно, повороту асимптот к дисперсионным кривым на некоторый угол: если обозначить через  $\varphi$  и  $\varphi'$  углы наклона асимптот

к оси  $k$  в системах  $K$  и  $K'$ , то мы получим  $\operatorname{tg} \varphi' = \operatorname{tg} \varphi - v$ , где  $v$  — скорость системы  $K'$  относительно системы  $K$ .

При изменении величины  $v$  асимптоты поворачиваются, переходя через горизонтальное, но не через вертикальное положение. Поэтому дисперсионная кривая, показанная на рис. 6.6.1, *в*, может перейти в дисперсионную кривую, изображенную на рис. 6.6.1, *г*. Отсюда следует, что абсолютная неустойчивость может перейти в конвективную и наоборот.

Напротив, при переходе из системы отсчета  $K$  в систему отсчета  $K'$  дисперсионные кривые, приведенные на рис. 6.6.1, *б*

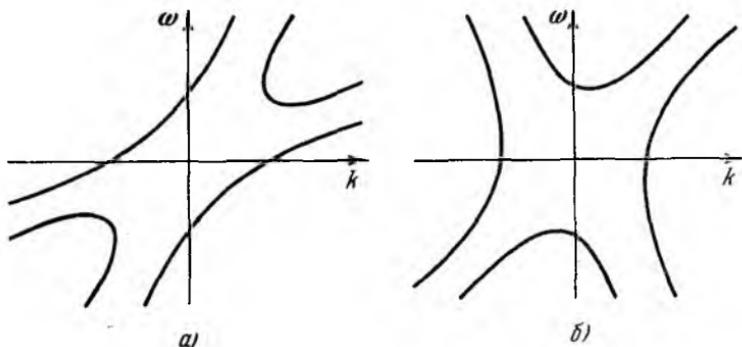


Рис. 6.6.3. Дисперсионная кривая двухлучевой лампы.

а) скорости пучков параллельны; б) скорости пучков антипараллельны.

и  $г$ , не могут перейти друг в друга, так как при таком переходе асимптота прошла бы через вертикальное положение, что невозможно. Поэтому при переходе от системы  $K$  к системе  $K'$  полосы усиления и непропускания могут исчезнуть, но не могут перейти друг в друга.

**6.6.7. Характер пучковой неустойчивости.** Проиллюстрируем изложенную теорию на примере двухлучевой лампы [412], дисперсионное уравнение которой имеет вид

$$\frac{\omega_1^2}{(\omega - ku_1)^2} + \frac{\omega_2^2}{(\omega - ku_2)^2} = 1,$$

где  $\omega_{1,2}^2 = 4\pi e^2 n_{1,2} / m_{1,2}$ ,  $n_{1,2}$  и  $u_{1,2}$  — плотности и скорости частиц обоих сортов,  $m_{1,2}$  — массы частиц. Этому уравнению соответствует дисперсионная кривая, изображенная на рис. 6.6.3, *а*, если скорости  $u_1$  и  $u_2$  направлены в одну сторону, и кривая, приведенная на рис. 6.6.3, *б*, если они направлены в противоположные стороны. Из этих рисунков непосредственно видно, что при одинаковых знаках  $u_1$  и  $u_2$  имеется полоса усиления и полоса конвективной неустойчивости, а при разных их знаках — полоса непропускания и полоса абсолютной неустойчивости.

Вьясним теперь характер неустойчивости, возникающей при взаимодействии пучка заряженных частиц с плазмой. Если описывать плазму и пучок при помощи кинетических уравнений, то,

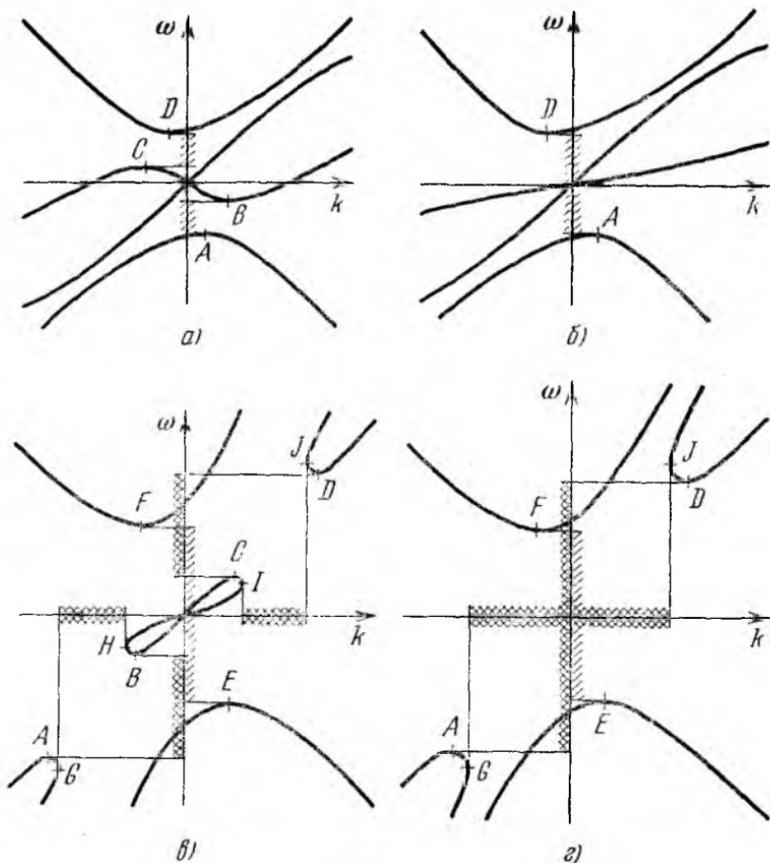


Рис. 6.6.4. Дисперсионные кривые соответствующие взаимодействию холодного пучка с горячей плазмой.

а)  $u_b < v_p$  ( $\omega_b/\omega_{pe}$ ); б)  $v_p$  ( $\omega_b/\omega_{pe}$ )  $< u_b < v_p$ ; в)  $v_p < u_b < v_p \sqrt{1 + (\omega_b^2/\omega_{pe}^2)}$ ; г)  $v_p \sqrt{1 + \omega_b^2/\omega_{pe}^2} < u_b$ . Полосы непропускания отмечены штриховкой на оси  $\omega$ , полосы усиления — двойной штриховкой на оси  $\omega$ , полосы конвективной неустойчивости — двойной штриховкой на оси  $k$ .

как мы видели в п. 6.1.1, дисперсионное уравнение системы плазма—пучок будет трансцендентным. Поэтому упростим задачу и будем описывать плазму гидродинамически (давление плазмы предполагается равным  $n_0 T$ ), пучок будем считать холод-

ным. При таких предположениях дисперсионное уравнение системы плазма—пучок имеет вид [1, 2]

$$\frac{\omega_b^2}{(\omega - kv_b)^2} + \frac{\omega_p^2}{\omega^2 - k^2v_p^2} = 1, \quad (6.6.7.1)$$

где  $\omega_{pe}$ ,  $\omega_b$  ленгмюровские частоты плазмы и пучка;  $v_p$  — тепловая скорость электронов плазмы;  $u_b$  — скорость пучка. Это уравнение является алгебраическим с действительными коэффициентами, и мы можем поэтому воспользоваться правилами Стэррока.

Дисперсионные кривые, соответствующие уравнению (6.6.7.1), изображены на рис. 6.6.4 (для определенности полагаем  $\omega_b < \omega_{pe}$ ). Рис. 6.6.4, а, б относятся к случаю  $u_b < v_p$ , рис. 6.6.4, в, г — к случаю  $u_b > v_p$ .

Мы видим, что в случае, изображенном на рис. 6.6.4, а, имеются две полосы непропускания, заключенные между точками А и В и С и D (полосы непропускания отмечены штриховкой на оси  $\omega$ ). На рис. 6.6.4, б обе полосы непропускания сливаются в одну (А, D).

Из этих рисунков следует, что при  $u_b < v_p$  система плазма—пучок устойчива и усиление волн в ней невозможно \*).

Если  $u_b > v_p$ , то существует полоса непропускания в интервале (Е, F) (см. рис. 6.6.4, в, г). Кроме того, существуют либо две полосы усиления в интервалах (А, В) и (С, D) (см. рис. 6.6.4, в; полосы усиления отмечены двойной штриховкой на оси  $\omega$ ), либо одна полоса усиления (А, D) (см. рис. 6.6.4, г). На рис. 6.6.4, в видны также две полосы конвективной неустойчивости (G, H) и (I, J) (они отмечены двойной штриховкой на оси  $k$ ); на рис. 6.6.4, г эти две полосы конвективной неустойчивости сливаются в одну полосу \*\*) (G, J). Области абсолютной неустойчивости отсутствуют.

Заметим, что уравнение такого же типа, что и (6.6.7.1), описывает колебания пучка, проходящего через волновод. При этом следует лишь заменить  $\omega_p$  на граничную частоту волновода и  $v_p$  — на скорость волны в волноводе в отсутствие пучка. Если  $u_b > v_p$ , то имеется конвективная неустойчивость или усиление колебаний (в зависимости от условий возбуждения). Если  $u_b < v_p$ , то движение пучка устойчиво, и усиление колебаний невозможно, хотя в таком случае дисперсионное уравнение приводит к комплексным значениям  $k$  при вещественных значениях  $\omega$ .

\*) Это утверждение справедливо лишь в гидродинамическом приближении. Если учитывать кинетические эффекты, то система плазма—пучок может оказаться неустойчивой и при  $u_b < v_p$  (см. п. 6.1.3).

\*\*) Отметим, что данный вывод не связан с предположением о малости плотности пучка.

## § 7.1. Функция распределения электронов и высокочастотные электронные колебания во внешнем электрическом поле

**7.1.1. Кинетическое уравнение.** Исследовав колебания полностью ионизованной плазмы, мы перейдем теперь к изучению колебаний частично ионизованной плазмы.

Если наряду с электронами и ионами в плазме имеются еще и нейтральные частицы, то влияние последних на колебания плазмы проявляется прежде всего в добавочном затухании колебаний, обусловленном столкновениями электронов и ионов с нейтральными частицами. По мере возрастания плотности нейтральных частиц декремент затухания колебаний увеличивается, и в плазме с достаточно большой плотностью нейтральных частиц (когда декремент затухания колебаний становится равным по порядку величины их частоте) распространение слабозатухающих колебаний, таких, как ленгмюровские или ионно-звуковые, становится невозможным.

В частично ионизованной плазме могут, однако, существовать специфические колебания, принципиально отличающиеся от колебаний полностью ионизованной плазмы. Характерной их особенностью является несохранение чисел электронов, ионов и нейтральных частиц, связанное с процессами ионизации и рекомбинации. Поэтому частоты этих колебаний имеют тот же порядок величины, что и обратные времена процессов ионизации и рекомбинации.

Наличие в плазме нейтральных частиц может оказать существенное влияние на характер плазменных колебаний и в области частот, много больших обратных времен всех процессов рассеяния частиц (как упругого, так и неупругого). Такая ситуация возникает в плазме, находящейся во внешнем постоянном электрическом поле. В подобной плазме столкновения нейтральных частиц с электронами приводят к появлению существенно немаксвелловской функции распределения электронов, характеризующейся направленной скоростью и очень высокой средней энергией хаотического движения электронов (эффективной температурой). Такое распределение электронов по скоростям (а уже не сами по себе столкновения с нейтральными частицами) приводит в свою

очередь к особенностям ионно-звуковых колебаний, в том числе к возможности нарастания этих колебаний.

Мы исследуем сперва колебания, возникающие в частично ионизованной плазме с функцией распределения электронов, модифицированной постоянным и однородным внешним электрическим полем, а затем рассмотрим на простейшем примере специфические плазменные колебания, сопровождающиеся изменением чисел частиц отдельных компонент плазмы.

Электронную компоненту плазмы будем описывать с помощью кинетического уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e} (\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0]) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c, \quad (7.1.1.1)$$

где  $(\partial F / \partial t)_c$  — интеграл столкновений,  $\mathbf{E}_0$ ,  $\mathbf{B}_0$  — постоянные и однородные внешние электрическое и магнитное поля. Будем считать, что среди процессов, вносящих вклад в интеграл столкновений, главную роль играют соударения электронов с нейтральными частицами. В этом случае из-за большого различия масс сталкивающихся частиц изменение энергии электрона при соударении  $\Delta \epsilon$  мало и равно по порядку величины  $\epsilon m_e / m_0$ , где  $\epsilon$  — энергия электрона,  $m_0$  — масса нейтральной частицы. Что же касается характерного изменения  $\Delta v$  скорости электрона  $v$ , то по порядку величины они одинаковы ( $|\Delta v| \sim v$ ). Таким образом, при столкновении нейтральных частиц — электроны, последние быстро «перемешиваются» в направлениях скорости и медленно — по абсолютной ее величине. Поэтому в результате таких столкновений должно устанавливаться распределение электронов, близкое к изотропному. Иными словами, если представить электронную функцию распределения в виде ряда по сферическим функциям  $Y_{lm}(\mathbf{v}/v)$

$$F(\mathbf{v}) = F_0(v) + (v/v) F_1(v) + \Delta F(\mathbf{v}), \quad (7.1.1.2)$$

где

$$\Delta F(\mathbf{v}) = \sum_{l \geq 2; m} F_{lm}(v) Y_{lm}(\mathbf{v}/v),$$

$F_0(v)$ ,  $F_1(v)$ ,  $F_{lm}(v)$  — функции абсолютного значения скорости, то следует ожидать, что наибольшим слагаемым в (7.1.1.2) будет  $F_0(v)$ . Далее мы покажем, что приведенное разложение является фактически разложением по степеням малого параметра  $\sqrt{m_e/m_0}$ . Мы сохраним в (7.1.1.2) два первых слагаемых, через которые выражаются плотность электронов и плотность электронного тока  $\mathbf{j}_e$ :

$$\left. \begin{aligned} n_e &= \int F(\mathbf{v}) d^3v = \int F_0(v) d^3v, \\ \mathbf{j}_e &= -e \int \mathbf{v} F(\mathbf{v}) d^3v = -1/3 e \int v F_1(v) d^3v. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.1.3)$$

Подставляя (7.1.1.2) в кинетическое уравнение (7.1.1.1) и вводя нулевой и первый моменты интеграла столкновений

$$J_0 = \int \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c \frac{d\mathbf{v}}{4\pi}, \quad \mathbf{J}_1 = \frac{1}{3} \int \frac{\mathbf{v}}{v} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c \frac{d\mathbf{v}}{4\pi},$$

получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial F_0}{\partial t} + \frac{1}{3} v \operatorname{div} \mathbf{F}_1 - \frac{e}{3m_e v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 \mathbf{E}_0 \mathbf{F}_1) - J_0 &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial t} + v \operatorname{grad} F_0 - \frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \frac{\partial F_0}{\partial v} - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{B}_0 \mathbf{F}_1] - \mathbf{J}_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.1.4)$$

Тот факт, что абсолютная величина скорости электронов мало меняется при их соударениях с нейтральными частицами, позволяет получить простые замкнутые выражения для величин  $J_0$ ,  $\mathbf{J}_1$ . Заметим, что число электронов со скоростями в интервале  $(v, v+dv)$  изменяется в результате соударений за время  $dt$  на

$$\left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c v^2 dv d\mathbf{v} dt = - \left\{ F(\mathbf{v}) v^2 2\pi \int_0^\pi w(\vartheta, v) \sin \vartheta d\vartheta - \int F(\mathbf{v}') W(\vartheta, v', \Delta v) v'^2 d\Delta v d\mathbf{v}' \right\} dv d\mathbf{v} dt, \quad (7.1.1.5)$$

где  $W(\vartheta, v, \Delta v)$  — вероятность перехода в единицу времени электрона из состояния со скоростью  $\mathbf{v}$  в состояние со скоростью  $\mathbf{v}'$

$$w(\vartheta, v) = \int_{-\vartheta}^{\infty} W(\vartheta, v, \Delta v) d\Delta v; \quad (7.1.1.6)$$

$\vartheta$  — угол рассеяния (угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{v}'$ ) и  $\Delta v = |\mathbf{v}'| - |\mathbf{v}|$  — изменение абсолютной величины скорости электрона при рассеянии. Подставляя в (7.1.1.5) разложение (7.1.1.2) и считая, что  $\Delta F \ll F_0, F_1$ , получим

$$\left. \begin{aligned} J_0 &= -2\pi F_0(v) \int_0^\pi w(\vartheta, v) \sin \vartheta d\vartheta + \\ &+ \int F_0(v') W(\vartheta, v', \Delta v) (v'/v)^2 d\Delta v d\mathbf{v}', \\ (v/v) \mathbf{J}_1 &= -2\pi (v/v) \mathbf{F}_1(v) \int_0^\pi w(\vartheta, v) \sin \vartheta d\vartheta + \\ &+ \int (v'/v') \mathbf{F}_1(v') W(\vartheta, v', \Delta v) (v'/v)^2 d\Delta v d\mathbf{v}'. \end{aligned} \right\} \quad (7.1.1.7)$$

Вычислим сперва величину  $J_0$ . Учитывая, что  $\Delta v \ll v$ , можно разложить подынтегральное выражение в правой части первого уравнения в ряд по степеням  $\Delta v$ :

$$F_0(v') W(\vartheta, v', \Delta v) (v'/v)^2 = F_0(v) W(\vartheta, v, \Delta v) + \\ + \frac{\Delta v}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \{v^2 F_0(v) W(\vartheta, v, \Delta v)\} + \frac{(\Delta v)^2}{2v^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \{v^2 F_0(v) W(\vartheta, v, \Delta v)\} + \dots$$

Используя далее (7.1.1.6) и вводя обозначения

$$\left\langle \frac{\Delta v}{\Delta t} \right\rangle = \int \Delta v W(\vartheta, v, \Delta v) d\Delta v d\omega, \\ \left\langle \frac{\Delta v^2}{\Delta t} \right\rangle = \int (\Delta v)^2 W(\vartheta, v, \Delta v) d\Delta v d\omega, \quad (7.1.1.8)$$

получим

$$J_0 = v^{-2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ v^2 F_0(v) \left\langle \frac{\Delta v}{\Delta t} \right\rangle + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ v^2 F_0(v) \left\langle \frac{\Delta v^2}{\Delta t} \right\rangle \right] \right\}. \quad (7.1.1.9)$$

Величины  $\langle \Delta v / \Delta t \rangle$  и  $\langle \Delta v^2 / \Delta t \rangle$  зависят, разумеется, от вида функции распределения нейтральных частиц и от явного вида потенциала взаимодействия нейтральная частица — электрон. Мы покажем сейчас, что в случае максвелловского распределения нейтральных частиц по скоростям обе эти величины можно выразить через один параметр — длину свободного пробега электронов  $l(v)$ , связанную с вероятностью  $w(\vartheta, v)$  соотношением

$$l(v) = v \left\{ \int w(\vartheta, v) (1 - \cos \vartheta) d\omega \right\}^{-1}. \quad (7.1.1.10)$$

Отметим, что величина  $l(v)$  характеризует скорость торможения электронного потока, а именно, уменьшение среднего значения проекции импульса электронов на направление их первоначального движения (а не скорость изменения средней энергии электронов).

Вычислим сначала величину  $\langle \Delta v^2 / \Delta t \rangle$ . Заметим, что изменение абсолютной величины скорости электрона при столкновении с нейтральной частицей связано со скоростью последней  $\bar{v}$  соотношением

$$\Delta v = 2 \sin \frac{1}{2} \vartheta |\mathbf{v} - \mathbf{v}'|^{-1} \bar{v} (\mathbf{v} - \mathbf{v}'), \quad (7.1.1.11)$$

где  $\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{v}'$  — скорости электрона до и после рассеяния,  $\vartheta$  — угол рассеяния электрона. В самом деле, из законов сохранения энергии и импульса имеем

$$v' = v - 2(\mathbf{v} - \mathbf{v}') m_0 (m_e + m_0)^{-1} [v^2 - \mathbf{v}(\bar{v} + \mathbf{v}') + \bar{v}\mathbf{v}'] (\mathbf{v} - \mathbf{v}')^{-2}.$$

Учтем далее, что угол рассеяния  $\vartheta$  отличается от угла рассеяния  $\vartheta_0$  в системе центра масс лишь слагаемыми, пропорциональными малому параметру  $m_e/m_0$ , причем

$$\vartheta_0 = 2 \arcsin \frac{v^2 - \mathbf{v}(\bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}') + \bar{\mathbf{v}}\mathbf{v}'}{|\mathbf{v} - \mathbf{v}'| |\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}|}.$$

Пренебрегая членами, квадратичными по параметру  $m_e/m_0$ , получим соотношение (7.1.1.11). Подставляя его во второе из соотношений (7.1.1.8), выполняя интегрирование по  $\Delta v$  и усреднение по скоростям нейтральной частицы  $\bar{\mathbf{v}}$ , находим

$$\left\langle \frac{\Delta v^2}{\Delta t} \right\rangle = 2/3 \langle \bar{v}^2 \rangle \int w(\vartheta, v) (1 - \cos \vartheta) d\vartheta,$$

где  $\langle \bar{v}^2 \rangle$  — среднее значение квадрата скорости нейтральной частицы. Замечая, что в случае максвелловского распределения нейтральных частиц по скоростям  $\langle \bar{v}^2 \rangle = 3T_0/m_0$ , и используя (7.1.1.10), можно выразить величину  $\langle \Delta v^2/\Delta t \rangle$  через длину свободного пробега электронов  $l(v)$  и температуру нейтральных частиц  $T_0$ :

$$\left\langle \frac{\Delta v^2}{\Delta t} \right\rangle = 2 \frac{T_0 v}{m_0 l(v)}. \quad (7.1.1.12)$$

Определим теперь величину  $\langle \Delta v/\Delta t \rangle$ . Заметим, что первый момент интеграла столкновений (см. (7.1.1.9)) должен обращаться в нуль, если в качестве электронной функции распределения подставить в него распределение Максвелла с температурой  $T_0$ . Поэтому

$$\left\langle \frac{\Delta v}{\Delta t} \right\rangle = -1/2 \exp\{mv^2/2T_0\} v^{-2} \frac{\partial}{\partial v} \left( v^2 \exp\{-mv^2/2T_0\} \left\langle \frac{\Delta v^2}{\Delta t} \right\rangle \right).$$

Подставляя сюда (7.1.1.12), получим

$$\left\langle \frac{\Delta v}{\Delta t} \right\rangle = \frac{m_e v^2}{m_0 l(v)} - \frac{T_0}{m_0 v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{v^3}{l(v)} \right). \quad (7.1.1.13)$$

Подставляя (7.1.1.12) и последнее соотношение в (7.1.1.9), найдем окончательно выражение для величины  $J_0$ :

$$J_0 = v^{-2} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \frac{m_e v^4}{m_0 l(v)} F_0(v) + \frac{v^3 T_0}{m_0 l(v)} \frac{\partial F_0(v)}{\partial v} \right\}. \quad (7.1.1.14)$$

Вычислим, наконец, величину  $J_1$ . Пренебрегая пропорциональными  $\Delta v/v$  поправками и используя (7.1.1.6), представим второе из соотношений (7.1.1.7) в виде

$$(\mathbf{v}/v) \mathbf{J}_1 =$$

$$= -2\pi (\mathbf{v}/v) \mathbf{F}_1(v) \int_0^\pi w(\vartheta, v) \sin \vartheta d\vartheta + \mathbf{F}_1(v) \int (\mathbf{v}'/v') w(\vartheta', v') d\vartheta'.$$

Умножая это соотношение на  $1/3vdo/4\pi$  и выполняя интегрирование по  $do$ , получим

$$\mathbf{J}_1 = -\frac{v}{l(v)} \mathbf{F}_1(v), \quad (7.1.1.15)$$

где  $l(v)$  — длина свободного пробега электронов, определяемая формулой (7.1.1.10).

Кинетические уравнения (7.1.1.4) вместе с моментами интеграла соударений (7.1.1.14) и (7.1.1.15) полностью описывают электронную компоненту частично ионизованной плазмы в случае близких к изотропному распределений по скоростям \*).

**7.1.2. Стационарная функция распределения электронов.** Определим теперь стационарную функцию распределения электронов в постоянном и однородном внешнем электрическом поле  $E_0$ . Второе из уравнений (7.1.1.4) в этом случае дает

$$F_1 = \frac{eE_0 l}{m_e v} \frac{dF_0}{dv}. \quad (7.1.2.1)$$

Подставляя это соотношение в (7.1.1.4), получим

$$\left. \begin{aligned} F_0(v) &= C \exp \left\{ - \int \frac{3m_e v^3 dv}{3(m_e v)^2 T_0 + m_0 (eE_0 l)^2} \right\}, \\ F_1(v) &= -eE_0 l \{ T_0 + 1/3 m_0 (eE_0 l / m_e v)^2 \}^{-1} F_0, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.2.2)$$

где  $C$  — нормировочная постоянная и  $l \equiv l(v)$ . Легко видеть, что в случае слабого электрического поля ( $eE_0 l \ll \sqrt{m_e/m_0} T_0$ ,  $l$  — среднее значение длины свободного пробега электронов) распределение (7.1.2.2) близко к максвелловскому распределению с температурой  $T_0$ . В случае же сильного поля ( $eE_0 l \gg \sqrt{m_e/m_0} T_0$ ), которым мы главным образом и будем интересоваться, из (7.1.2.2) находим

$$F_0(v) = C \exp \left\{ \frac{-3m_e^2}{m_0 (eE_0)^2} \int \frac{v^3 dv}{l^2(v)} \right\}, \quad F_1(v) = \frac{-3E_0 (mv)^2}{eE_0^2 l m_0} F_0(v). \quad (7.1.2.3)$$

Если нейтральные частицы ведут себя при столкновениях с электронами, как жесткие упругие шары, то длина свободного пробега  $l$  не зависит от скорости электрона  $v$ . В этом случае распределение (7.1.2.3) принимает вид [2]

$$\left. \begin{aligned} F_0(v) &= C \exp \left\{ - \left( \frac{m_e v^2}{2T_e} \right)^2 \right\}, \\ F_1(v) &= -\frac{E_0}{E_0} \sqrt{\frac{3m_e}{m_0}} \frac{m_e v^2}{T_e} F_0(v), \quad C = \frac{n_0}{\pi \Gamma(3/4)} \left( \frac{m_e}{2T_e} \right)^{3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.2.4)$$

где  $n_0$  — равновесная плотность электронов и

$$T_e = \sqrt{m_0/3m_e} eE_0 l. \quad (7.1.2.5)$$

\*) Эти уравнения были установлены Давыдовым [1]. Они в равной мере пригодны для описания кинетических процессов в слабо ионизованной плазме и в полупроводниках.

Плотность электронного тока в этом случае равна

$$\mathbf{j} = \frac{4en_0}{3\sqrt{\pi}} \Gamma(5/4) \frac{eE_0 l}{m_e T_e}. \quad (7.1.2.6)$$

Мы видим, что в частично ионизованной плазме, находящейся в сильном внешнем электрическом поле, распределение электронов по скоростям характеризуется очень большой средней энергией хаотического движения (эффективной температурой)  $T_e$  и сравнительно малой средней направленной скоростью  $j/en_0 \sim \sqrt{T_e/m_0}$ . Характерной особенностью этого распределения является относительно небольшое (по сравнению с распределением Максвелла) число электронов с энергиями, превосходящими среднюю энергию.

Если плазма находится не только в электрическом  $\mathbf{E}_0$ , но и в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , то вместо (7.1.2.1) получаем соотношение

$$\mathbf{F}_1 = \frac{el}{m_e v} \frac{dF_0}{dv} \left[ 1 + \left( \frac{eB_0 l}{m_e v c} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ \mathbf{E}_0 - \frac{el}{m_e v c} [\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0] + \left( \frac{el}{m_e v c} \right)^2 \mathbf{B}_0 (\mathbf{E}_0 \mathbf{B}_0) \right\}. \quad (7.1.2.7)$$

Подставляя его в первое из уравнений (7.1.1.4), находим

$$F_0(v) = C \exp \left\{ - \int \frac{3(m_e v)^3 dv}{3(m_e v)^2 T_0 + m_0 (eE_0 l)^2 \xi} \right\}, \quad (7.1.2.8)$$

где  $C$  — нормировочная постоянная,

$$\xi = \left[ 1 + \left( \frac{eB_0 l}{m_e v c} \right)^2 \right]^{-1} \left\{ 1 + \cos^2 \beta \left( \frac{eB_0 l}{m_e v c} \right)^2 \right\},$$

$\beta$  — угол между векторами  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ .

Выражения (7.1.2.7) и (7.1.2.8) для электронной функции распределения справедливы в произвольных по величине и направлению однородных полях  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{B}_0$ . В случае слабого магнитного поля ( $eB_0 l \ll m_e v_e c$ ,  $v_e$  — средняя скорость хаотического движения электронов) эти формулы переходят в (7.1.2.2).

Особый интерес представляет случай, когда плазма находится в сильных электрическом и магнитном полях ( $eE_0 l \gg \sqrt{m_e/m_0} T_0$ ,  $eB_0 l \gg m_e v_e c$ ). В этом случае при  $l = \text{const}$  имеем

$$\left. \begin{aligned} F_0(v) &= C \exp \left\{ - (m_e v^2 / 2T_B)^2 \right\}, \\ F_1(v) &= (\mathbf{B}_0 / B_0) \sqrt{3m_e/m_0} (m_e v^2 / T_B) \cos^2 \beta F_0(v), \end{aligned} \right\} \quad (7.1.2.9)$$

где

$$C = \frac{n_0}{\pi \Gamma(3/4)} (m_e / 2T_B)^{3/2}, \quad T_B = \sqrt{m_0 / 3m_e} eE_0 l |\cos \beta| \quad (7.1.2.10)$$

(предполагается, что поля  $E_0$  и  $B_0$  не перпендикулярны друг к другу,  $\cos \beta \gg m_e v_e c / e l B_0$ ). Плотность электронного тока в этом случае равна

$$\mathbf{j} = \frac{4en_0}{\sqrt{3\pi}} \Gamma(5/4) \frac{B_0}{B_0} \sqrt{\frac{T_B}{m_0 |\cos \beta|}}. \quad (7.1.2.11)$$

Сравнивая формулы (7.1.2.9) с соотношениями (7.1.2.4), (7.1.2.5), мы видим, что включение наряду с сильным электрическим полем еще и сильного магнитного поля не меняет общей структуры электронной функции распределения. А именно, выражения для эффективной температуры  $T_e$  и функции  $F_1$  в случае сильного магнитного поля можно получить из соответствующих выражений для случая  $B_0=0$  с помощью замены  $T_e$  на  $T_B$  и  $E_0$  на  $B_0 E_0 \cos^2 \beta / B_0$ . Заметим в заключение, что, согласно (7.1.2.1), (7.1.2.7),  $F_1 \sim F_0 \sqrt{m_e/m_0}$ , как и утверждалось выше. Используя кинетическое уравнение (7.1.1.1) и явный вид интеграла соударений (7.1.1.5), легко убедиться, что разложение (7.1.1.2) электронной функции распределения по сферическим функциям представляет собой (в случае стационарных и пространственно однородных распределений) фактически ряд по степеням малого параметра  $\sqrt{m_e/m_0}$ .

Подчеркнем еще раз двухступенчатый характер релаксации электронов в частично ионизованной плазме. Сначала за время порядка  $l/v_e$  в такой плазме устанавливается распределение электронов по скоростям, близкое к изотропному; этот этап релаксации плазмы описывается самым общим интегралом соударений (7.1.1.5). Затем за время порядка  $\sqrt{m_0/m_e} l/v_e$  происходит «размешивание» электронов по энергиям, в результате чего устанавливается окончательно стационарное распределение электронов; этот этап релаксации описывается интегралами соударений (7.1.1.14), (7.1.1.15).

**7.1.3. Высокочастотные электронные колебания.** Перейдем теперь к изучению колебаний частично ионизованной плазмы, находящейся в постоянных и однородных внешних полях  $E_0$  и  $B_0^*$ ). Будем для этого исходить из кинетического уравнения (7.1.1.4), заменив в нем  $E_0$  и  $B_0$  на  $E_0 + E$  и  $B_0 + B$ , где  $E$  и  $B$  — переменные поля. Функцию распределения электронов будем искать в виде  $F = f_0 + f$ , где  $f_0 = F_0(v) + (v/v)F_1(v)$  — стационарная функция распределения, найденная выше, и  $f$  — переменная добавка к функции распределения. Линеаризуя уравнение (7.1.1.4) по  $E$  и  $B$ , получим

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e} \left( E_0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} B_0] \right) \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{m_e} \left( E + \frac{1}{c} [\mathbf{v} B] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c. \quad (7.1.3.1)$$

\* ) Высокочастотные колебания плазмы при наличии постоянного однородного электрического поля рассмотрены в [3].

В случае высокочастотных колебаний ( $\omega \gg \nu_e$ ,  $\nu_e$  — средняя частота столкновений электронов с нейтральными частицами), последнее уравнение можно упростить, если учесть, что благодаря большому различию масс электронов и нейтральных частиц время релаксации электронов по энергии значительно больше их времени релаксации по направлениям импульса. В самом деле, вводя среднюю энергию хаотического движения электронов  $\varepsilon$ , найдем

$$\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \sim \frac{eE_0}{\varepsilon} l \nu_e f.$$

В сильном электрическом поле ( $T_e \gg T_0$ ), согласно (7.1.2.5) (или (7.1.2.9)), имеем  $\varepsilon \sim T_e$ ; в слабом электрическом поле ( $T_e \ll T_0$ ), очевидно, что  $\varepsilon \sim T_0$ . Замечая, что  $(\partial f / \partial t)_c \sim \nu_e f$ , получим

$$\frac{e}{m_e} \mathbf{E}_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \sim \sqrt{\frac{m_e}{m_0}} \min \left\{ 1; \frac{T_e}{T_0} \right\} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c \ll \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_c.$$

Мы видим, что слагаемым с постоянным электрическим полем в уравнении (7.1.3.1) можно пренебречь по сравнению с интегралом соударений.

Обратим внимание на то, что в кинетическом уравнении для стационарной функции распределения  $f_0$  (в отличие от кинетического уравнения для высокочастотной добавки  $f$  к функции распределения) относительный вклад слагаемого, содержащего постоянное электрическое поле, был не мал, причем это слагаемое в точности компенсировалось интегралом соударений. Такое различие связано с двухступенчатым характером релаксации электронов в частично ионизованной плазме: «эффективный» интеграл соударений  $(\partial f_0 / \partial t)_c$ , входящий в кинетическое уравнение для почти изотропной функции  $f_0$ , в  $\sqrt{m_0 / m_e}$  раз меньше интеграла соударений  $(\partial f / \partial t)_c$ , описывающего начальный этап изменения добавки  $f$  к стационарной функции распределения.

Заметим далее, что в случае высокочастотных колебаний ( $\omega \gg \nu_e$ ) интеграл столкновений в уравнении (7.1.3.1) мал по сравнению со слагаемым  $\partial f / \partial t$ . Поэтому столкновения достаточно учитывать только качественно, исходя из простейшей модели интеграла соударений  $(\partial f / \partial t)_c = -\nu_e f$ . Таким образом, для исследования высокочастотных свойств частично ионизованной плазмы при наличии внешнего постоянного и однородного электрического поля  $\mathbf{E}_0$  можно исходить из кинетического уравнения, полностью аналогичного использованному в гл. 4 для изучения колебаний плазмы в отсутствие поля  $\mathbf{E}_0$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} + \nu_e f = 0. \quad (7.1.3.1')$$

Рассмотрим сперва колебания частично ионизованной плазмы в области частот  $\omega \gg kv_e$ . В отсутствие внешнего магнитного

поля тензор диэлектрической проницаемости плазмы в этой области частот имеет вид

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{4\pi e^2}{m_e \omega^2} \int \frac{v_i [(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) \delta_{ij} + k_i v_j]}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu_e} \frac{\partial f_0}{\partial v_i} d^3v \quad (7.1.3.2)$$

(электрическими восприимчивостями ионной и нейтральной компонент в данной области можно, очевидно, пренебречь).

Чтобы определить частоты и декременты затухания собственных колебаний плазмы, следует, согласно (4.3.1.11), построить тензор  $\hat{\Lambda}$ ,

$$\Lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega),$$

и приравнять его детерминант нулю. В результате мы получим выражения для частот слабозатухающих колебаний двух типов: поперечных электромагнитных волн с частотой  $\omega_t(\mathbf{k}) = \sqrt{\omega_{pe}^2 + c^2 k^2}$  и продольных электронных (ленгмюровских) колебаний с частотой

$$\omega_l(\mathbf{k}) = \omega_{pe} + \frac{k^2 \bar{v}^2}{2\omega_{pe}} + \mathbf{k}\mathbf{u}, \quad (7.1.3.3)$$

где  $\omega_{pe}$  — электронная плазменная частота ( $\omega_{pe} = (4\pi e^2 n_0 / m_e)^{1/2}$ ,  $n_0$  — равновесная плотность электронов),  $\bar{v}^2$  — средний квадрат скорости хаотического движения электронов,  $\mathbf{u}$  — средняя скорость их направленного движения, вычисленные с помощью функции распределения  $f_0$ ,

$$\bar{v}^2 = n_0^{-1} \int F_0 v^2 d^3v, \quad \mathbf{u} = 1/3 n_0^{-1} \int \mathbf{F}_1 v d^3v. \quad (7.1.3.4)$$

Декремент затухания поперечных волн  $\gamma_t$  равен по порядку величины частоте соударений нейтральная частица — электрон ( $\gamma_t \sim \nu_e$ ). Что же касается декремента затухания продольных волн  $\gamma_l$ , то при не очень малой частоте соударений ( $\gamma_l^{(0)} \leq \nu_e$ ) имеем по порядку величины  $\gamma_l \sim \nu_e$ ; в случае же очень редких соударений ( $\gamma_l^{(0)} \gg \nu_e$ ) получим  $\gamma_l = \gamma_l^{(0)}$ , где  $\gamma_l^{(0)}$  — декремент бесстолкновительного затухания Ландау, который для электронной функции распределения (7.1.2.4) имеет вид

$$\gamma_l^{(0)}(\mathbf{k}) = \frac{\Gamma(1/4) \omega_{pe}^4 m_e^{3/2}}{4k^3 T_e^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{m_e \omega_{pe}^2}{k^2 T_e} \sqrt{\frac{3m_e}{m_0}} \cos \chi \right\} \quad (7.1.3.5)$$

( $\chi$  — угол между векторами  $\partial \omega / \partial \mathbf{k}$  и  $\mathbf{u}$ ); мы считаем для определенности внешнее электрическое поле сильным ( $T_e \gg T_0$ ).

При наличии внешнего магнитного поля в частично ионизованной плазме могут распространяться две ветви продольных электронных колебаний и две ветви поперечных электромагнитных волн. Частоты всех четырех ветвей колебаний определяются

общими формулами, приведенными в гл. 5 (в качестве электронной функции распределения в них следует подставить функцию  $f_0 = F_0 + (v/v)F_1$ , определенную в п. 7.1.2). Что же касается декрементов затухания колебаний, то  $\gamma_t \sim \nu_e$ ,  $\gamma_l \sim \max\{\nu_e; \gamma_l^{(0)}\}$ , где  $\gamma_l^{(0)}$  задается (7.1.3.5).

Мы приведем здесь выражения для частот быстрых и медленной продольных ( $\omega_{l\pm}$ ) и поперечных ( $\omega_{t\pm}$ ) волн только для случая не очень сильных магнитных полей ( $\omega_{Be} \ll \omega_{pe}$ ):

$$\left. \begin{aligned} \omega_{t+}(\mathbf{k}) &= \omega_{pe} + \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}} \sin^2 \theta + \frac{k^2 v^2}{2\omega_{pe}} + k\mathbf{u}, \\ \omega_{l-}(\mathbf{k}) &= \omega_{Be} |\cos \theta| + \frac{k^2 v^2}{2\omega_{pe}} + k\mathbf{u}, \\ \omega_{t\pm}(\mathbf{k}) &= \sqrt{\omega_{pe}^2 + c^2 k^2} \pm \frac{1}{2} \omega_{Be} |k\mathbf{u}|/k\mathbf{u}, \end{aligned} \right\} \quad (7.1.3.6)$$

где  $\omega_{Be} = eB_0/m_e c$  — электронная гирочастота и  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ . Волны, бегущие в противоположную сторону, имеют, очевидно, частоты  $-\omega_\lambda(-\mathbf{k})$ , где  $\lambda = l+, l-, t+, t-$ .

## § 7.2. Ионно-звуковые колебания в сильном электрическом поле

### 7.2.1. Ионно-звуковые колебания в отсутствие внешнего магнитного поля.

Перейдем теперь к изучению колебаний частично ионизованной плазмы, находящейся во внешнем электрическом поле, в области не очень высоких частот ( $k\nu_e \gg \omega \gg \nu_e$ ). В этой области частот необходимо учитывать движение не только электронной, но и ионной компоненты плазмы. Поэтому при изучении таких колебаний мы должны добавить к кинетическому уравнению для электронной функции распределения (7.1.3.1) и уравнениям электростатики

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = -4\pi e (n_e - Zn_i), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} \quad (7.2.1.1)$$

( $\epsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость нейтральной компоненты) еще кинетическое уравнение для ионной функции распределения  $F_i$

$$\frac{\partial F_i}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{r}} + \frac{Ze}{m_i} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial F_i}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\partial F_i}{\partial t} \right)_c, \quad (7.2.1.2)$$

где  $m_i$  — масса и  $Ze$  — заряд иона,  $(\partial F_i / \partial t)_c$  — интеграл столкновений для ионов,  $n_e, n_i$  — плотности электронов и ионов.

Заметим прежде всего, что ввиду большой массы ионов их стационарное распределение по скоростям во внешнем электрическом поле мало отличается от максвелловского распределения  $f_{i0}$ , а их температура  $T_i$  — от температуры нейтральных частиц  $T_0$ . Поэтому в случае сильного внешнего электрического поля (кото-

рым мы далее и будем интересоваться) средняя энергия хаотического движения электронов  $T_e = \sqrt{m_0/3m_e} eE_0 l$  может значительно превысить температуру ионов. В таких условиях, как отмечалось в гл. 4, в плазме могут распространяться ионно-звуковые колебания, частоты которых лежат в области  $kv_e \gg \omega \gg kv_i$  ( $v_i$  — средняя тепловая скорость ионов).

Используя выражение (7.1.3.2) и кинетическое уравнение (7.2.1.2), нетрудно представить продольную диэлектрическую проницаемость плазмы в области частот  $kv_e \gg \omega \gg kv_i$ ,  $\omega \gg v_e$  в виде

$$\epsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_0 + (a_e k)^{-2} - (\omega_{pi}/\omega)^2 + 4\pi i \{x_e''(\mathbf{k}, \omega) + x_i''(\mathbf{k}, \omega)\}, \quad (7.2.1.3)$$

где  $\omega_{pi} = (4\pi Z^2 e^2 n_{i0}/m_i)^{1/2}$  — ионная плазменная частота,

$$a_e = \sqrt{\frac{T_e \Gamma(3/4)}{2\pi e^2 n_{e0} \Gamma(1/4)}} \approx 0,815 \sqrt{\frac{T_e}{4\pi e^2 n_{e0}}} \quad (7.2.1.4)$$

— дебаевский электронный радиус,  $n_{\alpha 0}$  — равновесное значение плотности частиц сорта  $\alpha$  ( $\alpha = e, i$ ),

$$x_e''(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\pi}{4a_e^2 k^2} \sqrt{\frac{6m_e}{m_0}} \Gamma^{-2}(1/4) \left\{ \frac{2^{3/4} \operatorname{sgn} \omega}{\sqrt{3\pi(1+a_e^2 k^2)}} \sqrt{\frac{Zm_0}{m_i} - \frac{\mathbf{kE}_0}{kE_0}} \right\}, \quad (7.2.1.5)$$

$$x_i''(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2T_i}{\pi m_i}} \frac{\omega_{pi}^2}{k^2} \operatorname{Im} \int \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega - i\nu_i} \exp\left\{-\frac{m_i v^2}{2T_i}\right\} d^3v. \quad (7.2.1.6)$$

Здесь и далее мы считаем для простоты длину свободного пробега электронов  $l$  не зависящей от скорости и выбираем ионный интеграл соударений в простейшем виде  $(\partial F_i/\partial t)_c = -\nu_i f_i$ , где  $f_i = F_i - f_{i0}$ , а  $\nu_i^{-1}$  — среднее время релаксации ионной компоненты плазмы.

Приравняв  $\epsilon_l$  нулю, получим уравнение для определения частот собственных колебаний плазмы. Мы видим, что при  $\omega \gg v_e, i$  в плазме могут распространяться слабозатухающие ионно-звуковые колебания с частотой [4, 5]:

$$\omega_s(\mathbf{k}) = \frac{kv_s}{\sqrt{1+a_e^2 k^2}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{2ZT_e \Gamma(3/4)}{m_i \Gamma(1/4)}} \approx 0,662 \sqrt{\frac{ZT_e}{m_i}} \quad (7.2.1.7)$$

и декрементом затухания

$$\gamma_s(\mathbf{k}) = \frac{2\pi\omega_{pi}(a_e k)^3}{(1+a_e^2 k^2)^{3/2}} \{x_e''(\mathbf{k}, \omega) + x_i''(\mathbf{k}, \omega)\} \quad (7.2.1.8)$$

(для простоты мы не учитываем электрической восприимчивости нейтральной компоненты плазмы, полагая  $\epsilon_0 = 1$ ).

Второе слагаемое в фигурных скобках выражения (7.2.1.8) для функции  $\gamma_s(\mathbf{k})$  всегда положительно и описывает затухание ионно-звуковых колебаний, обусловленное ионами плазмы. По

порядку величины это слагаемое равно  $\max \{v_i; \gamma_i^{(0)}\}$ , где  $\gamma_i^{(0)}$  — декремент бесстолкновительного затухания Ландау

$$\gamma_i^{(0)}(\mathbf{k}) = 1/2 \left( \frac{2\pi m_i}{T_i} \right)^{3/2} \frac{k v_s^4}{(1 + a_e^2 k^2)^2} \exp \left\{ - \frac{m_i v_s^2}{2T_i (1 + a_e^2 k^2)} \right\}. \quad (7.2.1.9)$$

Что же касается первого слагаемого в (7.2.1.8), описывающего взаимодействие ионно-звуковых колебаний с электронами плазмы, то в зависимости от угла  $\chi$  между векторами  $\partial \omega / \partial \mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}_0$  это слагаемое может быть как положительным (что соответствует поглощению колебаний), так и отрицательным (что соответствует возбуждению колебаний электронами). Поэтому функция  $\gamma_s(\mathbf{k})$  не обязательно положительна и может принимать отрицательные значения; в последнем случае величина  $|\gamma_s(\mathbf{k})|$  представляет собой, как известно, инкремент нарастания колебаний.

Ограничиваясь для определенности случаем  $\gamma_i^{(0)} \gg v_i$ , представим выражение (7.2.1.8) в виде

$$\gamma_s(\mathbf{k}) = \omega_s(\mathbf{k}) \frac{\pi^2}{1 + a_e^2 k^2} \sqrt{\frac{3m_e}{2m_0}} \Gamma^{-2}(1/4) (\Psi - \cos \chi), \quad (7.2.1.10)$$

где

$$\Psi = \frac{2^{3/4}}{\sqrt{1 + a_e^2 k^2}} \sqrt{\frac{Zm_0}{3\pi m_i}} \left[ 1 + \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1/4)} Z \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \left( \frac{T_e}{T_i} \right)^{3/2} \exp \left\{ - \frac{m_i v_s^2}{2T_i (1 + a_e^2 k^2)} \right\} \right]. \quad (7.2.1.11)$$

Легко видеть, что если  $\Psi > 1$ , то  $\gamma_s(\mathbf{k}) > 0$ , и колебания плазмы затухают. Если  $\Psi < 1$ , то затухают колебания, распространяющиеся под углом  $\chi$  к направлению внешнего электрического поля, большим, чем  $\chi_c = \arccos \Psi$ . При  $\chi \rightarrow \chi_c$  декремент затухания обращается в нуль; в области  $\chi < \chi_c$  колебания плазмы нарастают с инкрементом  $|\gamma_s(\mathbf{k})|$ .

Наличие в плазме нарастающих колебаний приводит при  $\Psi \leq 1$  к неустойчивости плазмы. По своей природе неустойчивость частично ионизованной плазмы, находящейся во внешнем электрическом поле, аналогична неустойчивости двухтемпературной плазмы с направленным движением электронов (см. гл. 6).

Проследим за тем, как зависит характер ионно-звуковых колебаний от напряженности внешнего электрического поля. При не очень больших ее значениях  $\Psi > 1$ , и поэтому все колебания затухают. При увеличении  $E_0$  раньше всего начинают нарастать длинноволновые колебания ( $a_e k \ll 1$ ), распространяющиеся вдоль поля. Для соответствующего критического значения поля, используя (7.2.1.10), получим

$$E_c = \frac{\alpha T_i}{Z e l} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \ln \frac{m_i}{m_e}; \quad \alpha = \frac{\sqrt{3} \Gamma(1/4)}{2 \Gamma(3/4)} \approx 2,62. \quad (7.2.1.12)$$

При дальнейшем увеличении напряженности поля становятся нарастающими колебания с большими  $k$  и большими значениями угла  $\chi$  между векторами  $\partial\omega/\partial k$  и  $E_0$ . Угол раствора конуса, внутри которого колебания нарастают, растет с увеличением  $E_0$ , стремясь при  $E_0 \rightarrow \infty$  к максимальному значению, определяемому отношением масс ионов и нейтральных частиц плазмы, а именно

$$\chi_{\max} = \arccos \left( 2^{3/4} \sqrt{\frac{Zm_0}{3\pi m_1}} \right). \quad (7.2.1.13)$$

В частности, если  $Zm_0/m_1 > 3\pi \cdot 2^{-3/2} \approx 3,34$ , то ни при каких значениях напряженности внешнего электрического поля ионно-звуковые колебания не будут нарастающими, так что неустойчивости плазмы не возникнет.

**7.2.2. Ионно-звуковые колебания во внешних электрическом и магнитном полях.** Рассмотрим теперь ионно-звуковые колебания частично ионизованной плазмы, находящейся не только в сильном внешнем электрическом поле, но еще и в сильном внешнем магнитном поле ( $\omega_{Be} \gg \nu_e$ ) [6, 7]. Стационарная функция распределения электронов  $f_{e0}$  определяется в этом случае соотношениями (7.1.2.9); стационарную функцию распределения ионов можно по-прежнему считать максвелловской. Используя кинетические уравнения (7.1.3.1) и (7.2.1.2) и полагая для определенности  $\gamma_i^{(0)} \gg \nu_i$ , получим следующее выражение для продольной (по волновому вектору  $k$ ) диэлектрической проницаемости плазмы:

$$\epsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = 1 + 4\pi \sum_{\alpha=e, i} x_\alpha(\mathbf{k}, \omega), \quad \left. \begin{aligned} x_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = & \frac{2\pi e_\alpha^2}{k^2 m_\alpha \omega_{B\alpha}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dv_{\parallel} \int_0^{\infty} \frac{J_n(k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{B\alpha})}{(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega) / \omega_{B\alpha} + n} \left[ k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} + \right. \\ & \left. + \frac{n \omega_{B\alpha}}{k_{\perp} v_{\perp}} k_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \right] v_{\perp} dv_{\perp}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.2.1)$$

где  $\omega_{B\alpha} = |e_\alpha| B_0 (m_\alpha c)^{-1}$ ;  $k_{\perp}$ ,  $k_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$ ,  $v_{\parallel}$  — перпендикулярные и параллельные магнитному полю составляющие векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{v}$ ,  $J_n$  — функция Бесселя.

Считая электронную компоненту плазмы сильно замагниченной ( $\omega_{Be} \gg \omega$ ), можно в последнем соотношении для электрической восприимчивости электронов  $x_e$  ограничиться учетом слагаемого с  $n=0$ . В результате получим

$$x_e(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{4\pi (a_e k)^2} + \frac{i\pi e^2}{k^2 m_e} \operatorname{sgn} \omega \int \delta \left( v_{\parallel} - \frac{\omega}{k_{\parallel}} \right) \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} d^3v, \quad (7.2.2.2)$$

где  $a_e$  — электронный дебаевский радиус, связанный с эффективной температурой электронов  $T_B = \sqrt{m_0/3m_e} e E_0 l |\cos \beta|$  соотношением

$$a_e = \sqrt{\frac{T_B \Gamma(3/4)}{2\pi e^2 n_{e0} \Gamma(1/4)}} \approx 0,815 \sqrt{\frac{T_B}{4\pi e^2 n_{e0}}}. \quad (7.2.2.3)$$

При учете ионной компоненты плазмы мы рассмотрим два предельных случая: случай слабо замагниченных ионов ( $\omega_{B1} \ll \omega$ ) и случай сильно замагниченных ионов ( $\omega_{B1} \gg \omega$ ). В первом случае для электрической восприимчивости ионов  $x_i$  можно пользоваться формулами предыдущего раздела. Во втором случае, ограничиваясь в выражении (7.2.2.1) для функции  $x_i$  вкладом слагаемого с  $n = 0$ , имеем

$$x_i(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{\omega_{pi}^2}{4\pi\omega^2} + i \frac{Z^2 e^2 n_{i0}}{k^2 T_i} \sqrt{\frac{\pi m_i}{2T_i}} \frac{\omega}{k_{\parallel}} \exp\left\{-\frac{m_i \omega^2}{2T_i k_{\parallel}^2}\right\}. \quad (7.2.2.4)$$

Остановимся сперва на случае слабо замагниченных ионов ( $\omega_{B1} \ll \omega$ ). Приравнявая функцию  $\epsilon_i$  нулю, найдем частоту и декремент затухания ионно-звуковых колебаний

$$\omega_s(\mathbf{k}) = \frac{kv_s}{\sqrt{1 + a_e^2 k^2}}, \quad v_s = \sqrt{\frac{2ZT_B \Gamma(3/4)}{m_i \Gamma(1/4)}} \approx 0,662 \sqrt{\frac{ZT_B}{m_i}}, \quad (7.2.2.5)$$

$$\gamma_s(\mathbf{k}) = \omega_s(\mathbf{k}) \frac{\pi^2 \mu^{\pm}}{\Gamma^2(1/4) (1 + a_e^2 k^2) |\cos \chi|} \sqrt{\frac{3m_e}{2m_0}} (\Psi^{\pm} - \cos \chi), \quad (7.2.2.6)$$

где  $\chi$  — угол между групповой скоростью  $\partial\omega/\partial\mathbf{k}$  и внешним магнитным полем,

$$\left. \begin{aligned} \Psi^{\pm} &= 2^{3/4} \sqrt{Zm_0/m_i} (\mu^{\pm})^{-1} [3\pi(1 + a_e^2 k^2)]^{-1/2}, \\ \mu^{\pm} &= 1 \mp \frac{2^{1/2} Z^{3/2} \Gamma(3/4)}{\pi \sqrt{3} (1 + a_e^2 k^2)} \sqrt{\frac{m_0}{m_i}} \left(\frac{T_B}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left\{-\frac{m_i v_s^2}{2T_i (1 + a_e^2 k^2)}\right\}; \end{aligned} \right\} \quad (7.2.2.7)$$

верхний (нижний) знак относится к случаю  $\chi < 1/2\pi$  ( $\chi > 1/2\pi$ ); выражение (7.2.2.6) для декремента затухания применимо в области углов  $\chi$ , не слишком близких к  $1/2\pi$  ( $\cos \chi \gg \max\{\sqrt{Zm_0/m_0}; v_{e,i}/\omega_s\}$ ).

Мы видим, что (как и в отсутствие внешнего магнитного поля), если  $\Psi^+ > 1$ , то  $\gamma_s > 0$ , и колебания плазмы затухают. Если  $\Psi^+ < 1$ , то затухают колебания, распространяющиеся под углом  $\chi$  к направлению внешнего магнитного поля, большим, чем  $\chi_c^+ = \arccos \Psi^+$ . При  $\chi \rightarrow \chi_c^+$  декремент затухания обращается в нуль; в области  $\chi < \chi_c^+$  колебания плазмы нарастают с инкрементом  $|\gamma_s(\mathbf{k})|$ . Наличие в плазме нарастающих колебаний приводит при  $\Psi^+ \leq 1$  к ее неустойчивости.

Проследим, как зависит характер ионно-звуковых колебаний от величины и направления внешнего электрического поля. При не очень больших значениях поля  $\Psi^+ > 1$ , и поэтому все колебания оказываются затухающими. При увеличении  $E_0$  раньше всего начинают нарастать длинноволновые колебания ( $a_e k \ll 1$ ), распространяющиеся вдоль внешнего магнитного поля. Для со-

ответствующей критической величины электрического поля, используя соотношения (7.2.2.6), (7.2.2.7), получим

$$E'_c = |\cos \beta|^{-1} E_c, \quad (7.2.2.8)$$

где величина  $E_c$  определяется формулой (7.2.1.12). При дальнейшем увеличении  $E_0$  становятся нарастающими колебания с большими  $k$  и большими значениями угла  $\chi$  между векторами  $\partial\omega/\partial k$  и  $\mathbf{V}_0$ . Угол раствора конуса, внутри которого колебания нарастают, растет с увеличением  $E_0$ , стремясь при  $E_0 \cos \beta \rightarrow \infty$  к максимальному значению, определяемому формулой (7.2.1.13).

Если ионная компонента плазмы сильно замагничена ( $\omega_{Bi} \gg \omega$ ), то для частоты и декремента затухания колебаний (называемых в этом случае магнитозвуковыми), используя (7.2.2.2), (7.2.2.4), получим

$$\left. \begin{aligned} \omega_m(\mathbf{k}) &= \frac{kv_s |\cos \chi|}{\sqrt{1 + a_e^2 k^2}}, \\ \gamma_m(\mathbf{k}) &= \omega_m(\mathbf{k}) \frac{\pi^2}{1 + a_e^2 k^2} \sqrt{\frac{3m_e}{m_0}} \Gamma^{-2}(1/4) \{ \xi(E_0) - \operatorname{sgn} \cos \chi \}, \end{aligned} \right\} \quad (7.2.2.9)$$

где скорость  $v_s$  по-прежнему определяется (7.2.2.5),

$$\xi(E_0) = 2^{3/4} \sqrt{\frac{Zm_0}{3\pi m_i}} \left[ 1 + \frac{Z\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{m_0}{m_e}} \left( \frac{T_B}{T_I} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_i v_s^2}{2T_I(1 + a_e^2 k^2)} \right\} \right]. \quad (7.2.2.10)$$

В случае не очень сильного внешнего электрического поля имеем  $\xi(E_0) > 1$ ; при этом колебания плазмы затухают. При увеличении напряженности внешнего электрического поля функция  $\xi(E_0)$  уменьшается, становясь равной единице при критическом значении поля  $E'_c$ , определяемом формулой (7.2.2.8). При дальнейшем увеличении электрического поля колебания с волновыми векторами, лежащими в полупространстве  $\chi < 1/2\pi$ , становятся нарастающими. Это приводит к тому, что при  $E_0 \geq E'_c$  плазма делается неустойчивой.

Обратим внимание на то, что в очень сильном магнитном поле ( $\omega_{Bi} \gg \omega$ ) при достижении критического значения электрического поля нарастающими становятся все колебания с волновыми векторами, лежащими в полупространстве  $\chi < 1/2\pi$ . В противоположность этому, при  $\omega_{Bi} \ll \omega$  (как и в отсутствие внешнего магнитного поля) нарастают лишь колебания, распространяющиеся внутрь конуса с углом  $\chi_c^+$  при вершине.

Подчеркнем в заключение, что если  $Zm_0/m_i > 3\pi \cdot 2^{-3/2} \approx 3,34$ , то как в отсутствие, так и при наличии внешнего магнитного поля ионно-звуковые (или магнитозвуковые) колебания частично ионизованной плазмы остаются ненарастающими при сколь угодно больших значениях внешнего электрического поля.

### § 7.3. Низкочастотные колебания частично ионизованной плазмы

**7.3.1. Колебания с несохранением чисел частиц отдельных компонент плазмы.** Наряду с рассмотренными типами колебаний, при которых полные числа электронов  $N_e$  и ионов  $N_i$  во всем объеме плазмы не меняются со временем, в частично ионизованной плазме важную роль играют колебания, сопровождающиеся изменением числа всех заряженных частиц. В частности, именно такие колебания приводят, по-видимому, к возникновению страт в положительном столбе газового разряда.

Чтобы изучить эти колебания плазмы (иногда их называют *ионизационными волнами*), следует, вообще говоря, исходить из полной системы кинетических уравнений для электронов, ионов и нейтральных частиц (а также из уравнений электростатики). Наряду с самосогласованным полем и обычными интегралами столкновений (учитывающими процессы упругого рассеяния частиц), в эти уравнения должны быть введены интегралы столкновений, описывающие неупругие процессы (процессы ионизации и рекомбинации, переход атомов и ионов в возбужденные состояния и т. п.). Если линеаризовать эту систему уравнений и искать ее решения в виде плоских монохроматических волн, можно в принципе определить частоты и декременты (или инкременты) ионизационных волн.

Задача теоретического изучения спектров ионизационных волн оказывается, однако, чрезвычайно сложной. Дело в том, что интегралы столкновений, описывающие как упругие процессы, так и процессы с изменением чисел частиц, являются очень сложными функциями скоростей сталкивающихся частиц. Определяются эти функции обычно из эксперимента, причем во многих случаях они пока даже не найдены. Между тем законы дисперсии ионизационных волн очень чувствительны к конкретному виду интегралов столкновений.

Уравнения, описывающие ионизационные волны, можно несколько упростить, если учесть, что в этих волнах (в отличие от обычных плазменных волн) обычно меняются лишь плотности частиц, а не импульс единицы объема плазмы. Поэтому при описании ионизационных волн можно вместо кинетических уравнений использовать уравнения непрерывности для каждого сорта частиц, включающие диффузионные слагаемые и слагаемые, учитывающие неупругие процессы (а для заряженных частиц — еще условие квазинейтральности плазмы или уравнения движения, содержащие коэффициенты подвижности). Однако даже при таком подходе уравнения остаются очень сложными. Поэтому до сих пор теоретически изучены лишь немногие частные случаи и не существует последовательного теоретического исследования ионизаци-

ционных волн в широком диапазоне параметров плазмы (плотностей, температур, напряженностей внешнего магнитного поля).

Мы не собираемся с достаточной полнотой излагать теоретические результаты, касающиеся ионизационных волн \*). Заметим лишь, что частоты ионизационных волн равны по порядку величины обратным временам процессов, ответственных за возникновение этих волн (процессов ионизации, рекомбинации и т. п.) и составляют  $10^3$ — $10^5$  сек<sup>-1</sup>. Поэтому колебания частично ионизованной плазмы, сопровождающиеся изменением полных чисел частиц, называют иногда (в отличие от обычных плазменных колебаний) низкочастотными колебаниями такой плазмы.

Чтобы разъяснить механизм этих колебаний частично ионизованной плазмы, рассмотрим простейший пример однородных колебаний [10]. Предполагая, что размеры плазмы велики по сравнению с дебаевским радиусом, можно считать, что  $N_i = N_e$  (ионы предполагаются однозарядными). Будем исходить из простейшей системы уравнений для производных по времени от полного числа электронов  $N_e$  и от полного числа нейтральных частиц  $N$ :

$$\left. \begin{aligned} \dot{N}_e &= A_0 + A_1 N + A_2 N_e + A_3 N N_e + A_4 N^2 + A_5 N_e^2, \\ \dot{N} &= B_0 + B_1 N + B_2 N_e + B_3 N N_e + B_4 N^2 + B_5 N_e^2. \end{aligned} \right\} (7.3.1.1)$$

Здесь  $A_0$ ,  $B_0$  — числа частиц, инжектируемых в рассматриваемый объем плазмы (или покидающих его) в единицу времени;  $A_1$ ,  $A_2$  и  $B_1$ ,  $B_2$  — коэффициенты, характеризующие скорости тех из ответственных за изменение чисел частиц процессов, которые не связаны со столкновениями частиц (например, процесса ионизации из-за высокой температуры в искровом разряде); наконец,  $A_3$ ,  $A_4$ ,  $A_5$  и  $B_3$ ,  $B_4$ ,  $B_5$  — коэффициенты, характеризующие скорости процессов ионизации и рекомбинации в результате столкновений между частицами.

Уравнения (7.3.1.1) аналогичны уравнениям в классической задаче Вольтерра о численности двух видов рыб, пожирающих друг друга (см., например, [11]). Как известно, такие уравнения могут иметь ограниченные, периодические решения.

Рассмотрим для определенности объем  $V$  плазмы, в который за единицу времени инжектируется  $B_0$  нейтральных частиц. Ионы могут покидать этот объем через поверхность  $S$  (например, сечение, перпендикулярное магнитным силовым линиям); утечка ионов за единицу времени составляет, очевидно,

$$A_2 N_e = -1/4 N_e v_i S/V,$$

где  $v_i$  — средняя тепловая скорость ионов.

\*) Подробный обзор эксперимента и теории этих волн содержится в работах Недоспасова [8] и Пекарека [9].

Допустим, что ионы образуются главным образом вследствие ионизации нейтральных частиц при их столкновениях с электронами. Вводя сечение такого процесса  $\sigma$ , можно представить обусловленные этим процессом изменения чисел нейтральных и заряженных частиц в единицу времени в виде

$$A_3 NN_e = -B_3 NN_e = NN_e \langle \sigma v \rangle / V,$$

где  $v$  — относительная скорость сталкивающихся частиц. Не учитывая других возможных процессов, способных изменить числа заряженных и нейтральных частиц, получим следующие уравнения для функций  $N$  и  $N_e$ :

$$\dot{N} = B_0 - A_3 NN_e, \quad \dot{N}_e = N_e (A_2 + A_3 N). \quad (7.3.1.2)$$

Приравнявая нулю правые их части, получим для равновесных чисел частиц  $N_0$ ,  $N_{e0}$ :

$$N_0 = -A_2/A_3, \quad N_{e0} = -B_0/A_2 \quad (7.3.1.3)$$

(напомним, что коэффициенты  $B_0$  и  $A_3$  положительны, а коэффициент  $A_2$  отрицателен). Вводя отклонения чисел частиц от их равновесных значений  $\Delta N = N - N_0$ ,  $\Delta N_e = N_e - N_{e0}$  и линеаризуя уравнения (7.3.1.2), имеем

$$\begin{aligned} \Delta \dot{N} &= -\omega_0 \sqrt{N_0/N_{e0}} \Delta N_e - \omega_0 \sqrt{N_{e0}/N_0} \Delta N, \\ \Delta \dot{N}_e &= \omega_0 \sqrt{N_{e0}/N_0} \Delta N, \end{aligned} \quad (7.3.1.4)$$

где

$$\omega_0 = A_3 \sqrt{N_0 N_{e0}} = \langle \sigma v \rangle \sqrt{N_0 N_{e0}} / V. \quad (7.3.1.5)$$

Определяя из условия совместности уравнений (7.3.1.4) частоты  $\omega$  и декременты затухания  $\gamma$  колебаний, получим

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - N_{e0}/4N_0}, \quad \gamma = 1/2 \omega_0 \sqrt{N_{e0}/N_0}. \quad (7.3.1.6)$$

Мы видим, что колебания, описываемые уравнениями (7.3.1.2), являются, вообще говоря, затухающими. Однако в случае слабо ионизованной плазмы, когда  $N_{e0} \ll N_0$ , декремент затухания этих колебаний мал по сравнению с частотой.

Уравнения вида (7.3.1.1) могут иметь решения и в виде незатухающих (или даже нарастающих) колебаний. Остановимся кратко на простейшем примере незатухающих колебаний. Будем считать, что увеличение числа нейтральных частиц за единицу времени пропорционально их числу (такая экспериментальная ситуация описана Росом [12]). Тогда следует исходить не из (7.3.1.2), а из уравнений

$$\dot{N} = N (B_1 - A_3 N_e), \quad \dot{N}_e = N_e (A_2 + A_3 N). \quad (7.3.1.7)$$

Равновесные числа частиц связаны в этом случае с коэффициентами  $B_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  соотношениями

$$N_0 = -A_2/A_3, \quad N_{e0} = B_1/A_3. \quad (7.3.1.8)$$

Линеаризуя уравнения (7.3.1.7) по малым отклонениям чисел частиц от их равновесных значений, получим

$$\Delta \dot{N} = -\omega_0 \sqrt{N_0/N_{e0}} \Delta N_e, \quad \Delta \dot{N}_e = \omega_0 \sqrt{N_{e0}/N_0} \Delta N, \quad (7.3.1.9)$$

где частота  $\omega_0$  определяется (7.3.1.5). Эти уравнения описывают, очевидно, незатухающие однородные колебания плазмы с частотой  $\omega_0$ .

Не останавливаясь подробно на случае неоднородных колебаний плазмы, сопровождающихся изменением полных чисел частиц, заметим, что такие колебания могут характеризоваться самыми разнообразными законами дисперсии и самыми разнообразными зависимостями декрементов (или инкрементов) от волнового вектора. Частоты и декременты этих колебаний сильно меняются даже при небольших изменениях давления и температуры плазмы. Скорости ионизационных волн обычно лежат в диапазоне от  $10^3$  до  $10^5$  см/сек, причем групповая и фазовая скорости могут сильно отличаться друг от друга и даже быть направлены в противоположные стороны.

**7.3.2. Однородные низкочастотные колебания большой амплитуды.** Рассмотрим теперь однородные низкочастотные колебания частично ионизованной плазмы, не предполагая, что амплитуда колебаний мала [10]. Изучение таких нелинейных колебаний позволяет, во-первых, определить зависимость частоты колебаний от их амплитуды и, во-вторых, найти характерную форму пульсаций (она оказывается синусоидальной лишь в предельном случае малой амплитуды).

Для слабо ионизованной плазмы ( $N_e \ll N$ ), рассмотрением которой мы ограничимся, уравнения (7.3.1.2) можно значительно упростить. Исключая из них величину  $\dot{N}$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{N}_e - A_3 B' N_e + A_3^2 \bar{N} N_e^2 + \Delta N A_3 N_e (A_3 N_e - 2A_3 \bar{N} - 2A_2) - \\ - (\Delta N)^2 A_3^2 N_e = 0, \end{aligned} \quad (7.3.2.1)$$

где  $\bar{N}$  — среднее (по времени) значение функции  $N(t)$ ,  $\Delta N = N - \bar{N}$  и  $B' = B_0 + A_3^{-1} (A_2 + A_3 \bar{N})^2$ .

В случае слабо ионизованной плазмы, как будет показано ниже, относительная амплитуда колебаний числа нейтральных частиц мала ( $\Delta N/\bar{N} \ll 1$ ), однако относительная амплитуда колебаний числа электронов, вообще говоря, не мала ( $\Delta N_e/N_e \sim 1$ ). Мы можем поэтому, пренебрегая в уравнении (7.3.2.1) членами, содержащими  $\Delta N$ , исходить из уравнения

$$\dot{N}_e - A_3 B' N_e + A_3^2 \bar{N} N_e^2 = 0. \quad (7.3.2.2)$$

К аналогичному уравнению сводятся при  $N_e \ll N$  и уравнения (7.3.1.7). В самом деле, исключая из этих уравнений  $\dot{N}$  и пренебрегая членами, содержащими  $\Delta N$ , получим то же уравнение (7.3.2.2), в которое в качестве величины  $B'$  следует подставить  $B_1 \bar{N}$ .

Выбирая за начало отсчета времени момент, когда производная  $\dot{N}_e(t)$  обращается в нуль ( $\dot{N}_e(0) = 0$ ) и вводя обозначения

$$N_e = N_{e0}(1 + Q), \quad \eta = B'(A_3 \bar{N} N_{e0})^{-1}, \quad (7.3.2.3)$$

где  $N_{e0} \equiv N_e(0)$  — экстремальное значение функции  $N_e(t)$ , перепишем уравнение (7.3.2.2) в виде

$$\omega_0^2 \dot{Q} + Q^2 + (2 - \eta)Q + (1 - \eta) = 0, \quad (7.3.2.4)$$

где частота  $\omega_0$  определяется формулой (7.3.1.5). Решение этого уравнения можно выразить через эллиптические функции Якоби. Умножим последнее уравнение на  $\dot{Q}$  и выполним одно интегрирование:

$$(\dot{Q}/\omega_0)^2 + \frac{2}{3}Q(Q - Q_1)(Q - Q_2) = 0, \quad (7.3.2.5)$$

где

$$Q_{1,2} = -\frac{3}{4} \left\{ (2 - \eta) \pm \sqrt{(\eta - \frac{2}{3})(\eta + 2)} \right\}.$$

Рассмотрим сперва случай, когда  $\frac{2}{3} < \eta < 1$ . Интегрируя уравнение (7.3.2.5) и учитывая, что в нем обе величины  $Q_1, Q_2$  отрицательны, получим

$$Q = Q_2 \operatorname{sn}^2(\sqrt{1/6} |Q_1| \omega_0 t; \sqrt{Q_2/Q_1}), \quad (7.3.2.6)$$

где  $\operatorname{sn}(x, k)$  — эллиптический синус Якоби, удовлетворяющий уравнению (см., например, [13])

$$d \operatorname{sn}(x; k)/dx = [1 - \operatorname{sn}^2(x; k)]^{1/2} [1 - k^2 \operatorname{sn}^2(x; k)]^{1/2}.$$

В рассматриваемом случае частота колебаний равна

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_0 \sqrt{1/6} |Q_1| K^{-1}(\sqrt{Q_2/Q_1}), \quad (7.3.2.7)$$

где  $K(k)$  — полный эллиптический интеграл первого рода и  $\omega_0$  определяется (7.3.1.5).

Остановимся теперь на случае  $\eta > 1$ . Тогда для функции  $Q$  можно по-прежнему пользоваться формулой (7.3.2.6). Учитывая, однако, что  $Q_2 > 0 > Q_1$  и используя известное соотношение (см. [13])

$$\operatorname{sn}(x; ik) = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} \operatorname{sn}\left(x \sqrt{1+k^2}; \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) \times \left\{ 1 - \frac{k^2}{1+k^2} \operatorname{sn}^2\left(x \sqrt{1+k^2}; \frac{k}{\sqrt{1+k^2}}\right) \right\}^{-1/2},$$

можно привести формулу для  $Q$  к виду

$$Q = \frac{Q_1 Q_2 \operatorname{sn} \left( \frac{1}{2} \omega_0 t \left[ (\eta - \frac{2}{3}) (\eta + 2) \right]^{1/4}; \left[ Q_2 / (Q_2 - Q_1) \right]^{1/2} \right)}{Q_1 - Q_2 + Q_2 \operatorname{sn}^2 \left( \frac{1}{2} \omega_0 t \left[ (\eta - \frac{2}{3}) (\eta + 2) \right]^{1/4}; \left[ Q_2 / (Q_2 - Q_1) \right]^{1/2} \right)}. \quad (7.3.2.8)$$

В этом случае частота колебаний равна

$$\omega = \frac{1}{4} \omega_0 \left[ (\eta - \frac{2}{3}) (\eta + 2) \right]^{1/4} K^{-1} \left( Q_2^{1/2} / (Q_2 - Q_1)^{1/2} \right). \quad (7.3.2.9)$$

При  $\eta \approx 1$  имеем  $Q \ll 1$ . В этом случае уравнение (7.3.2.2) описывает гармонические колебания малой амплитуды с частотой  $\omega_0$ , рассмотренные выше. Случай  $\eta=1$  соответствует стационарному режиму  $N_e(t) = N_{e0}$ .

Оценим величину  $\Delta N$ , которой мы пренебрегали при переходе от (7.3.1.2) и (7.3.1.7) к уравнению (7.3.2.2). Учитывая, что, согласно первому из уравнений (7.3.1.2) или (7.3.1.7),  $\Delta N \sim \omega_0^{-1} N_3 N_{e3} A_3$ , мы видим, что  $\Delta N / N_3 \sim \sqrt{N_{e0} / N_3}$ .

Таким образом, уравнение (7.3.2.2) правильно описывает колебания плазмы, если степень ее ионизации мала ( $N_{e0} \ll N_0$ ).

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

### § 8.1. Нелинейные высокочастотные волны в холодной плазме

**8.1.1. Нелинейные нерелятивистские ленгмюровские колебания.** В предыдущих главах мы рассмотрели малые колебания в бесстолкновительной плазме. Теперь мы перейдем к изучению волн конечной амплитуды в такой плазме. Начнем с исследования продольных электронных колебаний в плазме в пренебрежении тепловыми эффектами [1]. Состояние плазмы при этом вместо функции распределения может характеризоваться плотностью электронов  $n_e \equiv n_e(\mathbf{r}, t)$ , а взамен кинетического уравнения можно исходить из гидродинамического уравнения для определения скорости электронов  $\mathbf{u}_e \equiv \mathbf{u}_e(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{d\mathbf{u}_e}{dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \nabla) \mathbf{u}_e = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}, \quad (8.1.1.1)$$

где  $\mathbf{E}$  — электрическое поле, удовлетворяющее уравнениям Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e (n_0 - n_e), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} e n_e \mathbf{u}_e = 0, \quad (8.1.1.2)$$

$e$  — абсолютная величина заряда электрона,  $m_e$  — его масса и  $n_0$  — равновесная плотность электронов, равная плотности ионов, которые мы считаем неподвижными; действием магнитного поля мы пренебрегаем, считая, что  $u_e \ll c$ . Присоединив к этим соотношениям уравнение непрерывности

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \operatorname{div} (n_e \mathbf{u}_e) = 0, \quad (8.1.1.3)$$

получим полную систему уравнений, определяющих состояние плазмы.

Рассмотрим одномерное движение вдоль оси  $z$ . Тогда предыдущие четыре уравнения можно представить в виде

$$\frac{du_z}{dt} = -\frac{e}{m_e} E, \quad \frac{dE}{dt} \equiv \frac{\partial E}{\partial t} + u_e \frac{\partial E}{\partial z} = 4\pi e n_0 u_e$$

( $u_e \equiv u_{e_x}$ ,  $u_{e_x} = u_{e_y} = 0$ ). Дифференцируя первое из них по  $t$  и подставляя результат во второе, получим следующее уравнение для

нелинейных колебаний скорости в лагранжевых координатах [2]:

$$\frac{d^2 u_e}{dt^2} + \omega_{pe}^2 u_e = 0, \quad (8.1.1.4)$$

где  $\omega_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m_e}$  — ленгмюровская частота.

Это уравнение не отличается от уравнения для продольных плазменных колебаний плазмы при малых амплитудах колебаний в отсутствие внешних полей и приводит к важному выводу, что частота нелинейных ленгмюровских колебаний не зависит от их амплитуды [1]. Уравнение (8.1.1.4) легко обобщается на случай, когда к плазме приложено постоянное магнитное поле; и в этом случае частота колебаний также не зависит от амплитуды [3, 4].

Подчеркнем, что вывод о независимости частоты колебаний от амплитуды справедлив только в случае холодной плазмы и в пренебрежении движением ионов: учет теплового движения электронов [5—7] и движения ионов [8] приводит к зависимости частоты колебаний от амплитуды \*).

Рассмотрим более подробно установившиеся нелинейные ленгмюровские волны в холодной плазме, для которых плотность и скорость электронов являются функциями некой комбинации  $\bar{t}$  переменных  $t$  и  $z$ , а именно:

$$\bar{t} = t - z/V,$$

где  $V$  — какая-то константа, представляющая собой скорость распространения нелинейной волны. Из (8.1.1.1)—(8.1.1.3) получим

$$\left. \begin{aligned} V \frac{dn_e}{d\bar{t}} - \frac{d}{d\bar{t}} (n_e u_e) &= 0, \\ V \frac{du_e}{d\bar{t}} - u_e \frac{du_e}{d\bar{t}} &= -\frac{e}{m_e} \frac{d\varphi}{d\bar{t}}, \\ -\frac{d^2 \varphi}{d\bar{t}^2} &= 4\pi e (n_0 - n_e) V^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.1.5)$$

здесь  $\varphi$  — потенциал электрического поля,  $E = -\partial\varphi/\partial z$ .

Из первого уравнения (8.1.1.5) находим

$$n_e = \frac{A}{V - u_e},$$

\*) Заметим, что содержащееся в [9] утверждение о зависимости частоты нелинейных ленгмюровских колебаний в холодной плазме от амплитуды основано на ошибке: автор меняет местами операторы  $\frac{\partial}{\partial z}$  и  $\frac{d}{d\bar{t}} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u_e \frac{\partial}{\partial z}$  (см. [10]), чего нельзя делать, так как  $u_e$  является функцией  $z$ . Полученная в [11] зависимость частоты от амплитуды также основана на ошибке: в этой работе постоянная интегрирования выбирается таким образом, чтобы равнялась нулю средняя скорость  $\bar{u}$ , тогда как нулю равна средняя плотность тока  $\bar{j}$ .

где  $A$  — постоянная интегрирования. Так как в отсутствие колебаний ( $u_e=0$ ) плотность электронов должна равняться плотности ионов ( $n_e=n_0$ ), то  $A=n_0V$ .

Интегрируя далее второе уравнение (8.1.1.5), получим

$$V - u_e = \sqrt{2e\varphi/m_e}. \quad (8.1.1.6)$$

Пользуясь полученными соотношениями, представим третье уравнение (8.1.1.5) в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 4\pi en_0 V^2 \{1 - V(2e\varphi/m_e)^{-1/2}\} = 0.$$

После умножения на  $d\varphi/dt$  оно легко интегрируется [1] (см. также [12]):

$$\omega_{pe} t = \arcsin \left\{ (1/C) [(2e\varphi/m_e V^2)^{1/2} - 1] \right\} - \left\{ C^2 - [(2e\varphi/m_e V^2)^{1/2} - 1]^2 \right\}^{1/2}, \quad (8.1.1.7)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Отсюда следует, что частота нелинейных колебаний совпадает с ленгмюровской частотой  $\omega_{pe}$  и что потенциал  $\varphi$  изменяется в пределах

$$\frac{m_e V^2}{2e} (1 - C)^2 \leq \varphi \leq \frac{m_e V^2}{2e} (1 + C)^2.$$

Соотношение (8.1.1.6) показывает, что величина  $C$  представляет собой максимум отношения скорости частиц к скорости распространения волны, т. е.

$$-C \leq u_e/V \leq C.$$

**8.1.2. Уравнения, описывающие нелинейные волны в релятивистской плазме в отсутствие тепловых эффектов.** Обобщим теперь результаты, полученные выше, на случай релятивистской плазмы. Плазму будем по-прежнему считать достаточно холодной; что же касается характера колебаний, то мы не будем предполагать, что они обязательно продольны.

Основные уравнения для определения скорости электронов  $u_e$  их плотности  $n_e$  и полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{V}$  имеют теперь вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} + (\mathbf{u}_e \nabla) \mathbf{p} &= -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{u}_e \mathbf{B}], \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} en_e \mathbf{u}_e, \\ \text{div } \mathbf{E} &= 4\pi e (n_0 - n_e), \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2.1)$$

где  $n_0$  — равновесная плотность электронов, равная плотности ионов (предполагается, что они бесконечно тяжелы и неподвижны) и  $\mathbf{p} = m_e \mathbf{u}_e (1 - u_e^2/c^2)^{-1/2}$  — импульс электрона.

Мы будем заниматься здесь исследованием установившихся волновых движений релятивистской холодной плазмы, т. е. таких

движений электронов, при которых все переменные величины являются функциями не порознь  $\mathbf{r}$  и  $t$ , а одной их комбинации  $\mathbf{ir} - Vt$ , где  $\mathbf{i}$  — постоянный единичный вектор и  $V$  — некоторая константа. Смысл такого подхода заключается в том, что мы рассматриваем плоские установившиеся волны, распространяющиеся в направлении  $\mathbf{i}$  со скоростью  $V$ .

Обозначая производную по аргументу  $\mathbf{ir} - Vt$  штрихом, перепишем уравнения (8.1.2.1) в виде

$$[\mathbf{iE}'] = \beta \mathbf{V}', \quad (8.1.2.2)$$

$$[\mathbf{iB}'] = -\beta \mathbf{E}' - \frac{4\pi}{c} en_e \mathbf{u}_e, \quad (8.1.2.3)$$

$$\mathbf{iB}' = 0, \quad (8.1.2.4)$$

$$\mathbf{iE}' = -4\pi e (n_e - n_0), \quad (8.1.2.5)$$

$$(\mathbf{i}u_e - V) \mathbf{p}' = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c} [\mathbf{u}_e \mathbf{B}], \quad (8.1.2.6)$$

где  $\beta = V/c$ . Интегрируя (8.1.2.2), получим

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\beta} [\mathbf{iE}] + \mathbf{B}_0; \quad (8.1.2.7)$$

здесь  $\mathbf{B}_0$  — напряженность внешнего постоянного и однородного магнитного поля, действующего в плазме. Если такого поля нет, то

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\beta} [\mathbf{iE}].$$

Тогда

$$\mathbf{iB} = 0, \quad \mathbf{EB} = 0. \quad (8.1.2.8)$$

Иными словами, в отсутствие внешнего магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  переменное магнитное поле  $\mathbf{B}$  поперечно и ортогонально к электрическому полю.

Из (8.1.2.3) и (8.1.2.8) следует, что

$$n_e = \frac{n_0 V}{V - \mathbf{i}u_e}. \quad (8.1.2.9)$$

Так как  $n_0 > 0$ , то  $\mathbf{i}u_e < V$ , т. е. проекция скорости электронов на направление распространения волны всегда меньше скорости волны.

Умножая (8.1.2.6) слева векторно на  $\mathbf{i}$  и используя (8.1.2.7), найдем

$$\mathbf{B} = \frac{c}{e} |\mathbf{ip}'| + \frac{V\mathbf{B}_0 - \mathbf{u}_e (\mathbf{iB}_0)}{V - \mathbf{i}u_e}. \quad (8.1.2.10)$$

Умножая далее (8.1.2.3) слева векторно на  $\mathbf{i}$ , получим

$$\mathbf{B}' = -\frac{4\pi}{c} \frac{en_e}{\beta^2 - 1} [\mathbf{i}u_e]. \quad (8.1.2.11)$$

Из двух последних соотношений следует, что

$$[\mathbf{i}p]'' + \frac{4\pi e^2 n_0}{(\beta^2 - 1)c^2} [\mathbf{i}u_0] = -\frac{e}{c} \left( \frac{V\mathbf{B}_0 - \mathbf{u}_0 (i\mathbf{B}_0)}{V - i\mathbf{u}_0} \right)'. \quad (8.1.2.12)$$

Умножая (8.1.2.6) скалярно на  $\mathbf{i}$  и используя (8.1.2.5), найдем

$$(\mathbf{i}u_0 - V) \mathbf{i}p' + [\mathbf{i}u_0] [\mathbf{i}p]' + e\beta \frac{\mathbf{i}[u_0 \mathbf{B}_0]'}{V - i\mathbf{u}_0} = 4\pi e^2 n_0 \frac{\mathbf{i}u_0}{V - i\mathbf{u}_0}. \quad (8.1.2.13)$$

Последние два соотношения определяют поперечные и продольную составляющие скорости электрона в общем случае, когда внешнее магнитное поле  $\mathbf{B}_0$  отлично от нуля [13].

Считая, что вектор  $\mathbf{i}$  направлен вдоль оси  $z$  и вводя безразмерный импульс  $\rho = \mathbf{p}/m_0 c$  и безразмерную скорость  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u}_0/c$ , перепишем уравнения (8.1.2.12), (8.1.2.13) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho_x}{d\tilde{t}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \tilde{u}_x}{\beta - \tilde{u}_x} - \beta \frac{d}{d\tilde{t}} \frac{\beta \omega_{By} - \tilde{u}_y \omega_{Bz}}{\beta - \tilde{u}_x} &= 0, \\ \frac{d^2 \rho_y}{d\tilde{t}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \tilde{u}_y}{\beta - \tilde{u}_x} + \beta \frac{d}{d\tilde{t}} \frac{\beta \omega_{Bx} - \tilde{u}_x \omega_{Bz}}{\beta - \tilde{u}_x} &= 0, \\ \frac{d}{d\tilde{t}} \left\{ (\tilde{u}_x - \beta) \frac{\partial \rho_x}{\partial \tilde{t}} + u_x \frac{\partial \rho_x}{\partial \tilde{t}} + u_y \frac{\partial \rho_y}{\partial \tilde{t}} - \right. \\ \left. - \frac{\beta^2}{\beta - \tilde{u}_x} (\tilde{u}_x \omega_{By} - \tilde{u}_y \omega_{Bx}) \right\} &= \omega_{pe}^2 \frac{\beta^2 \tilde{u}_x}{\beta - \tilde{u}_x}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2.14)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{t} &= t - z/V, & \omega_{pe}^2 &= 4\pi e^2 n_0/m_0, & \omega_B &= eB_0/m_0 c, \\ \omega_{Bx} &= eB_{0x}/m_0 c, & \omega_{By} &= eB_{0y}/m_0 c, & \omega_{Bz} &= eB_{0z}/m_0 c. \end{aligned}$$

В отсутствие внешнего поля  $\mathbf{B}_0$  уравнения (8.1.2.14) приобретают вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho_x}{d\tilde{t}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \tilde{u}_x}{\beta - \tilde{u}_x} &= 0, \\ \frac{d^2 \rho_y}{d\tilde{t}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \tilde{u}_y}{\beta - \tilde{u}_x} &= 0, \\ \frac{d}{d\tilde{t}} \left\{ (\tilde{u}_x - \beta) \frac{d\rho_x}{d\tilde{t}} + \tilde{u}_x \frac{d\rho_x}{d\tilde{t}} + \tilde{u}_y \frac{d\rho_y}{d\tilde{t}} \right\} &= \omega_{pe}^2 \frac{\beta^2 \tilde{u}_x}{\beta - \tilde{u}_x}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2.15)$$

или

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho_x}{d\tilde{t}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_x}{\beta \sqrt{1 + \rho^2} - \rho_x} &= 0, \\ \frac{d^2 \rho_y}{d\tilde{t}^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_y}{\beta \sqrt{1 + \rho^2} - \rho_x} &= 0, \\ \frac{d^2}{d\tilde{t}^2} (\beta \rho_x - \sqrt{1 + \rho^2}) + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2 \rho_x}{\beta \sqrt{1 + \rho^2} - \rho_x} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2.16)$$

Первые два уравнения (8.1.2.15) для поперечных составляющих скорости допускают, очевидно, ограниченные решения только в том случае, если  $\beta > 1$ , т. е.  $V > c$ . Что же касается третьего уравнения (8.1.2.15) для продольной составляющей скорости  $\tilde{u}_z$ , то оно допускает ограниченные решения при любых значениях  $\beta$ , если  $\tilde{u}_x = \tilde{u}_y = 0$ . Такие чисто продольные движения при  $\beta < 1$ , однако, неустойчивы вследствие связи продольного движения с поперечным.

Вводя вместо составляющих импульса новые переменные

$$\xi = \rho_x \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \eta = \rho_y \sqrt{\beta^2 - 1}, \quad \zeta = \beta \rho_z - \sqrt{1 + \rho^2},$$

перепишем уравнения (8.1.2.16) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \xi}{\sqrt{\beta^2 - 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} &= 0, \\ \frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \eta}{\sqrt{\beta^2 - 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} &= 0, \\ \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \zeta}{\sqrt{\beta^2 - 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2.17)$$

Эти уравнения можно получить из функции Лагранжа

$$L_r = \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \left[ \beta \sqrt{\beta^2 - 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \zeta \right]. \quad (8.1.2.18)$$

Таким образом, общая задача о релятивистских волновых движениях плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля эквивалентна задаче о нерелятивистском движении частицы с массой, равной единице, в поле с потенциальной энергией

$$U_r = \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \left( \beta \sqrt{\beta^2 - 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \zeta \right). \quad (8.2.1.18')$$

Функция Лагранжа, записанная в таком виде, сразу же позволяет получить законы сохранения энергии  $W_r$  и момента  $M_r$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] + \\ + \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} \left[ \beta \sqrt{\beta^2 - 1 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \zeta \right] &= W_r, \\ \xi \frac{d\eta}{dt} - \eta \frac{d\xi}{dt} &= M_r. \end{aligned}$$

Если перейти от переменных  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$  к полям  $E$ ,  $B$  и скорости  $u_e$ , то законы сохранения приобретут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\beta}{8\pi} (E^2 + B^2) + \frac{\beta n_0 m_e c}{\sqrt{1 - u_e^2/c^2}} - \frac{i |EB|}{4\pi} = \text{const}, \\ \mathbf{p}B = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (8.1.2.19)$$

Заметим, что эти соотношения являются простыми следствиями основных уравнений. Действительно, умножая (8.1.2.3) скалярно на  $B'$ , легко убедиться, что  $u_e B' = 0$ , т. е.  $\mathbf{p}B' = 0$ . Умножая далее (8.1.2.6) скалярно на  $B$ , получим  $\mathbf{p}'B = 0$ . Складывая оба соотношения, придем ко второй из формул (8.1.2.19). Аналогичным образом можно получить и первую формулу (8.1.2.19).

**8.1.3. Продольные волны в релятивистской плазме.** Перейдем к рассмотрению продольных нелинейных волн в релятивистской плазме в пренебрежении тепловыми эффектами. Полагая в (8.1.2.14)  $\tilde{u}_x = \tilde{u}_y = 0$ , получим

$$\frac{d}{d\tilde{t}} \left\{ (\tilde{u} - \beta) \frac{d\rho}{d\tilde{t}} \right\} = \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2 \tilde{u}}{\beta - \tilde{u}},$$

где  $\tilde{u} = \tilde{u}_z$  и  $\rho = \rho_z$  — безразмерные скорость и импульс электрона. Выражая импульс через скорость, нетрудно привести это уравнение к виду

$$\frac{d^2}{d\tilde{t}^2} \frac{1 - \beta \tilde{u}}{\sqrt{1 - \tilde{u}^2}} = \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2 \tilde{u}}{\beta - \tilde{u}}.$$

Умножая его на  $\frac{d}{d\tilde{t}} \frac{1 - \beta \tilde{u}}{\sqrt{1 - \tilde{u}^2}}$  и интегрируя, найдем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{d}{d\tilde{t}} \frac{1 - \beta \tilde{u}}{\sqrt{1 - \tilde{u}^2}} \right)^2 = \beta^2 \omega_{pe}^2 \left( C - \frac{1}{\sqrt{1 - \tilde{u}^2}} \right), \quad (8.1.3.1)$$

где  $C$  — постоянная интегрирования. Полагая  $C = (1 - \tilde{u}_{\max}^2)^{-1/2}$ , мы видим, что  $\tilde{u}$  лежит в интервале  $-\tilde{u}_{\max} \leq \tilde{u} \leq \tilde{u}_{\max}$ . Интегрируя (8.1.3.1), получим [14]

$$\int (\beta - \tilde{u}) (1 - \tilde{u}^2)^{-3/2} [(1 - \tilde{u}_{\max}^2)^{-1/2} - (1 - \tilde{u}^2)^{-1/2}]^{-1/2} d\tilde{u} = \sqrt{2} \beta \omega_{pe} \tilde{t}. \quad (8.1.3.2)$$

Эта формула в принципе решает поставленную задачу, определяя  $\tilde{u}$  как функцию от  $\tilde{t} = t - z/V$ .

Ясно, что  $\tilde{u}$  является периодической функцией  $\tilde{t}$ . Ее период, который мы обозначим через  $T_r$ , задается соотношением

$$2 \int_{-\tilde{u}_{\max}}^{\tilde{u}_{\max}} (\beta - \tilde{u}) (1 - \tilde{u}^2)^{-3/2} [(1 - \tilde{u}_{\max}^2)^{-1/2} - (1 - \tilde{u}^2)^{-1/2}]^{-1/2} d\tilde{u} = \sqrt{2} \beta \omega_{pe} T_r.$$

Вводя вместо периода частоту колебаний  $\omega = 2\pi/T$ , получим

$$\left. \begin{aligned} \omega &= \frac{\pi\omega_{pe}}{I(\bar{u}_{\max})\sqrt{2}}, \\ I(\bar{u}_{\max}) &= \int_0^{\bar{u}_{\max}} (1 - \bar{u}^2)^{-3/4} [(1 - \bar{u}^2)^{1/2} (1 - \bar{u}_{\max}^2)^{-1/2} - 1]^{-1/2} d\bar{u}. \end{aligned} \right\} (8.1.3.3)$$

Простые формулы\*) можно получить в двух предельных случаях — малых и больших амплитуд скорости. В первом случае, когда  $\bar{u}_{\max} \ll 1$ , имеем для частоты

$$\omega = \omega_{pe} \left(1 - \frac{3}{16} \bar{u}_{\max}^2\right), \quad (8.1.3.4)$$

во втором предельном случае, когда  $1 - \bar{u}_{\max} \ll 1$ ,

$$\omega = \pi\omega_{pe} \sqrt[4]{1 - \bar{u}_{\max}^2} / 2\sqrt{2}. \quad (8.1.3.5)$$

При  $\bar{u}_{\max} \rightarrow 0$  частота колебаний становится равной, как и должно быть,  $\omega_{pe}$ . При  $\bar{u}_{\max} \rightarrow 1$  она стремится к нулю. Это связано с тем, что при  $\bar{u}_{\max} \rightarrow 1$  эффективная масса электрона стремится к бесконечности.

В общем случае для промежуточных значений  $\bar{u}_{\max}$  интеграл, определяющий  $\bar{t}$  (см. (8.1.3.2)), и период колебаний можно выразить через эллиптические функции [13, 17].

Зная  $\bar{u}$ , легко найти плотность частиц и электрическое поле в направлении распространения волны. Используя (8.1.2.6) и (8.1.2.9), получим

$$\left. \begin{aligned} n_e(\bar{t}) &= \frac{n_0^3}{\beta - \bar{u}}, \\ eE(\bar{t}) &= \pm m_e \omega_{pe} c [(1 - \bar{u}_{\max}^2)^{-1/2} - (1 - \bar{u}^2)^{-1/2}] \sqrt{2}. \end{aligned} \right\} (8.1.3.6)$$

Максимальное значение поля пропорционально  $\bar{u}_{\max}$  при малых скоростях и определяется формулой

$$eE_{\max} = m_e \omega_{pe} c \sqrt{2} (1 - \bar{u}_{\max}^2)^{-1/4}, \quad (8.1.3.7)$$

если  $1 - \bar{u}_{\max} \ll 1$ .

\*) Интересно отметить, что в собственной системе отсчета электронов частота нелинейных колебаний равна [15]

$$\omega'_{pe} = \sqrt{4\pi e^2 n_0 / m'_e}, \quad m'_e = m_e / \sqrt{1 - u_e^2 / c^2}.$$

Формула (8.1.3.4) в лабораторной системе отсчета получается путем преобразования частоты. Влияние теплового разброса электронов на релятивистские продольные нелинейные волны исследовано в [16].

**8.1.4. Поперечные волны в релятивистской плазме.** Для чисто поперечных колебаний  $\rho_z=0$  и третье уравнение (8.1.2.16) дает  $\rho^2=\text{const}$ . Такой же результат мы получим и при  $\mathbf{V}_0$ , отличном от нуля, если только это поле направлено вдоль распространения волны.

Полагая в первых двух уравнениях (8.1.2.16)  $\rho_z=0$ , находим

$$\rho_x = \rho \cos \omega \vec{t}, \quad \rho_y = \rho \sin \omega \vec{t}, \quad (8.1.4.1)$$

где

$$\omega = \omega_{pe} \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} \frac{1}{\sqrt{1 + \rho^2}}. \quad (8.1.4.1')$$

Отсюда следует, что безразмерную скорость волны  $\beta=V/c$  можно представить в виде

$$\beta = 1/\sqrt{\varepsilon_p},$$

где

$$\varepsilon_p = 1 - \omega_{pe}'^2/\omega^2, \quad \omega_{pe}' = \sqrt{4\pi e^2 n_0/m_e'}, \quad m_e' = \frac{m_e}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}.$$

Таким образом, в случае чисто поперечных волн электроны движутся по окружностям с угловой скоростью  $\omega$ , и возможны только волны с круговой поляризацией \*). Это связано с тем, что при большой амплитуде колебаний в силу нелинейности уравнений (8.1.2.16) суперпозиция двух волн с различными круговыми поляризациями невозможна. При малых амплитудах, когда эти уравнения линейны, такая суперпозиция возможна, что и приводит к появлению поперечных линейно поляризованных волн.

Используя формулы (8.1.2.10) (при  $\mathbf{V}_0=0$ ) и (8.1.4.1), легко показать, что магнитное поле  $\mathbf{B}$  параллельно импульсу электрона и определяется формулами

$$eB_x = \frac{m_e c \omega}{\beta} \rho_x = \frac{m_e c \omega \rho}{\beta} \cos \omega \vec{t},$$

$$eB_y = \frac{m_e c \omega}{\beta} \rho_y = \frac{m_e c \omega \rho}{\beta} \sin \omega \vec{t}.$$

Электрическое поле, согласно (8.1.2.7), равно

$$eE_x = -m c \omega \rho \sin \omega \vec{t}, \quad eE_y = m c \omega \rho \cos \omega \vec{t}.$$

Если внешнее магнитное поле отлично от нуля и его направление совпадает с направлением распространения волны, то

\*) Этот вывод практически теряет свою силу при  $\beta \gg 1$ , когда вследствие малости продольных составляющих скорости становятся возможными колебания, близкие к поперечным линейно поляризованным (см. ниже п. 8.1.5). Решение (8.1.4.1) можно также обобщить на случай, когда электроны движутся по спирали и в поперечном движении принимают участие ионы [18].

уравнения движения для поперечных колебаний приобретают вид

$$\frac{d^2 \rho_x}{dt^2} - \omega_B \frac{d\tilde{u}_y}{dt} + \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \omega_{pe}^2 \tilde{u}_x = 0,$$

$$\frac{d^2 \rho_y}{dt^2} + \omega_B \frac{d\tilde{u}_x}{dt} + \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \omega_{pe}^2 \tilde{u}_y = 0,$$

причем по-прежнему  $\tilde{u}_x^2 + \tilde{u}_y^2 = \text{const}$ . Замечая, что  $\rho = \tilde{u} (1 - \tilde{u}^2)^{-1/2}$  и полагая  $\tilde{u}_x = U \cos \omega t$ ,  $\tilde{u}_y = U \sin \omega t$ , найдем следующее выражение для частоты  $\omega$ :

$$\omega = \sqrt{\frac{\omega_B'^2}{4} + \frac{\beta^2}{\beta^2 - 1} \omega_{pe}'^2 \pm \frac{\omega_B'}{2}}; \quad (8.1.4.2)$$

отсюда

$$\frac{1}{\beta^2} = 1 - \frac{\omega_{pe}'^2}{\omega^2 \pm \omega \omega_B'},$$

где

$$\omega_{pe}'^2 = \omega_{pe}^2 \sqrt{1 - \tilde{u}^2}, \quad \omega_B' = \omega_B \sqrt{1 - \tilde{u}^2}.$$

Перейдем теперь к рассмотрению колебаний, мало отличающихся от поперечных, при которых траектории электронов близки к окружностям. Для этого преобразуем основные уравнения (8.1.2.16), вводя вместо  $\rho_x$  и  $\rho_y$  новые переменные  $\rho_\perp$  и  $\varphi_r$ , связанные с ними соотношением  $\rho_x + i\rho_y = \rho_\perp \exp(i\varphi_r)$ . Первые два уравнения (8.1.2.16) можно представить в виде

$$\frac{d^2 \rho_\perp}{dt^2} - \rho_\perp \left( \frac{d\varphi_r}{dt} \right)^2 + \frac{\beta^2 \omega_{pe}^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_\perp}{\beta \sqrt{1 + \rho_\perp^2 + \rho_r^2} - \rho_r} = 0,$$

$$2\rho_\perp \frac{d\rho_\perp}{dt} \frac{d\varphi_r}{dt} + \rho_\perp^2 \frac{d^2 \varphi_r}{dt^2} = 0.$$

Интегрирование последнего дает

$$\rho_\perp^3 \frac{d\varphi_r}{dt} = M_r,$$

где  $M_r$  — постоянная. Подставляя найденный результат в первое уравнение, находим

$$\frac{d^2 \rho_\perp}{dt^2} - \frac{M_r^2}{\rho_\perp^3} + \frac{\beta^2 \omega_{pe}^2}{\beta^2 - 1} \frac{\beta \rho_\perp}{\beta \sqrt{1 + \rho_\perp^2 + \rho_r^2} - \rho_r} = 0. \quad (8.1.4.3)$$

Полагая здесь  $\rho_r = 0$ , мы придем к поперечным колебаниям с постоянным значением  $\rho_\perp$ . Обозначая его через  $\rho_0$ , получим, согласно (8.1.4.3),

$$M_r^2 = \frac{\omega_\perp^2 \rho_0^4}{\sqrt{1 + \rho_0^2}}, \quad \text{где} \quad \omega_\perp^2 = \frac{\beta^2 \omega_{pe}^2}{\beta^2 - 1}. \quad (8.1.4.4)$$

Рассмотрим теперь малые колебания величины  $\rho_{\perp}$ , происходящие около  $\rho_0$ . Полагая  $\rho_{\perp} = \rho_0 + \delta$  и предполагая, что  $\delta$  и  $\rho_x$  малы по сравнению с  $\rho_0$ , получим из (8.1.4.3) с учетом (8.1.4.4) соотношение

$$\frac{d^2\delta}{dt^2} + \frac{\omega_{\perp}^2 (4 + 3\rho_{\perp}^2)}{(1 + \rho_0^2)^{3/2}} \delta + \frac{\omega_{\perp}^2 \rho_0 \rho_x}{\beta (1 + \rho_0^2)} = 0.$$

Произведя аналогичные операции с третьим уравнением (8.1.2.16), получим второе уравнение для определения  $\delta$  и  $\rho_x$ :

$$\beta \frac{d^2\rho_x}{dt^2} - \frac{\rho_0}{\sqrt{1 + \rho_0^2}} \frac{d^2\delta}{dt^2} + \omega_{pe}^2 \frac{\beta \rho_x}{\sqrt{1 + \rho_0^2}} = 0.$$

Полагая  $\delta = D \exp(i\omega t)$ ,  $\rho_x = P \exp(i\omega t)$ , находим следующее уравнение для определения частот  $\omega$  связанных поперечно-продольных колебаний:

$$\omega^4 - \frac{\omega_{pe}^2 (4\beta^2 \rho_0^2 + 5\zeta^2 - 1)}{(\zeta^2 - 1) (1 + \rho_0^2)^{3/2}} \omega^2 + \frac{\omega_{pe}^4 \zeta^2 (4 + 3\rho_0^2)}{(\zeta^2 - 1) (1 + \rho_0^2)^2} = 0,$$

откуда [13]

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{\omega_{\perp}}{\sqrt{1 + \rho_0^2}} \left\{ \frac{4\zeta^2 \rho_0^2 + 5\zeta^2 - 1}{2\zeta^2 \sqrt{1 + \rho_0^2}} \pm \left[ \left( \frac{4\zeta^2 \rho_0^2 + 5\zeta^2 - 1}{2\zeta^2 \sqrt{1 + \rho_0^2}} \right)^2 - \frac{(\zeta^2 - 1) (4 + 3\rho_0^2)}{\zeta^2} \right]^{1/2} \right\}. \quad (8.1.4.5)$$

Отметим некоторые предельные случаи. Если  $\rho_0 \ll 1$ , то

$$\omega_1 = \pm 2\omega_{\perp}, \quad \omega_2 = \pm \omega_{pe}. \quad (8.1.4.6)$$

Если  $\rho_0 \gg 1$ , то

$$\omega_{1,2} = \pm \omega_{\perp} \rho_0^{-1/2} (2 \pm \sqrt{3 + \beta^2/\beta})^{1/2}. \quad (8.1.4.7)$$

Когда  $\beta - 1 \ll 1$ , частоты связанных колебаний при любых  $\rho_0$  равны

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \pm \frac{2\omega_{\perp}}{\sqrt{1 + \rho_0^2}}. \quad (8.1.4.8)$$

Если  $\beta \gg 1$ , то при любом  $\rho_0$

$$\omega_1 = \pm \omega_{pe} \frac{(4 + 3\rho_0^2)^{1/2}}{(1 + \rho_0^2)^{3/4}}, \quad \omega_2 = \pm \frac{\omega_{pe}}{(1 + \rho_0^2)^{1/4}}. \quad (8.1.4.9)$$

**8.1.5. Связанные продольно-поперечные волны в релятивистской плазме.** Выше мы рассмотрели продольные, поперечные и близкие к поперечным волны в плазме. Исследование общего случая, который можно назвать случаем продольно-поперечных

волн, сводится к интегрированию уравнений (8.1.2.17) и представляет собой очень сложную задачу, допускающую решение в нескольких предельных случаях, а именно, уравнения (8.1.2.17) можно проинтегрировать при больших  $\beta$  и  $\beta$ , близких к единице.

Рассмотрим сначала случай  $\beta \gg 1$ , причем будем предполагать, что  $\beta^2$  и  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$  — величины одного порядка. (Если  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \ll \beta^2$ , то мы приходим к случаю малых колебаний, так как тогда  $\xi$ ,  $\eta$  и  $\zeta$  пропорциональны  $\rho_x$ ,  $\rho_y$  и  $\rho_z$ ). При этих предположениях в выражении для потенциальной энергии  $U_r$ , характеризующей движение плазмы (см. (8.1.2.18')), можно отбросить слагаемое  $\zeta$ . Поэтому задача сводится к интегрированию уравнений движения частицы в центральном поле с функцией Лагранжа, имеющей, согласно (8.1.2.18), следующий вид:

$$L_r = 1/2 \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] - \omega_{pe}^2 \beta \sqrt{\beta^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Введем вместо  $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ,  $t$ ,  $L_r$  новые переменные  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ,  $\theta_r$ ,  $\mathcal{L}_r$ , связанные со старыми соотношениями  $X = \xi/\beta$ ,  $Y = \eta/\beta$ ,  $Z = \zeta/\beta$ ,  $\theta_r = \omega_{pe} t$ ,  $\mathcal{L}_r = \omega_{pe}^2 \beta^2 L_r$ ; тогда мы получим

$$\mathcal{L}_r = 1/2 \left[ \left( \frac{dX}{d\theta_r} \right)^2 + \left( \frac{dY}{d\theta_r} \right)^2 + \left( \frac{dZ}{d\theta_r} \right)^2 \right] - \sqrt{1 + \rho^2},$$

где  $\rho = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$ . Эта величина при  $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \sim \beta^2 \gg 1$  совпадает с введенным в п. 8.1.2 безразмерным импульсом  $\rho$ . Так как движение в центральном поле является плоским, то удобно повернуть систему координат таким образом, чтобы плоскость  $(X, Y)$  была перпендикулярна моменту количества движения. При этом функция Лагранжа примет вид

$$\mathcal{L}_r = 1/2 \left[ \left( \frac{d\rho}{d\theta_r} \right)^2 + \rho^2 \left( \frac{d\varphi_r}{d\theta_r} \right)^2 \right] - \sqrt{1 + \rho^2},$$

где  $\varphi_r$  — полярный угол. Написав законы сохранения энергии и момента количества движения

$$1/2 \left( \frac{d\rho}{d\theta_r} \right)^2 + \frac{M_r^2}{2\rho^2} + \sqrt{1 + \rho^2} = W_r,$$

$$\rho \frac{d\varphi_r}{d\theta_r} = M_r,$$

найдем в результате интегрирования последних двух уравнений [13]

$$\omega_{pe} \tilde{t} = \int [2W_r - M_r^2/\rho^2 - 2(1 + \rho^2)^{1/2}]^{-1/2} d\rho. \quad (8.1.5.1)$$

Из последнего соотношения следует, что величина  $\rho$  колеблется между значениями  $\rho_1$  и  $\rho_2$ , связанными с  $W_r$  и  $M_r$  следующим образом:

$$M_r^2 = \frac{2\rho_1^2\rho_2^2}{\sqrt{1+\rho_1^2} + \sqrt{1+\rho_2^2}},$$

$$W_r = \frac{\rho_1^2 + \rho_2^2 + 1 + \sqrt{(1+\rho_1^2)(1+\rho_2^2)}}{\sqrt{1+\rho_1^2} + \sqrt{1+\rho_2^2}}.$$

Частота колебаний равна

$$\omega = \frac{\pi\omega_{pe}}{I(\rho_1, \rho_2)\sqrt{2}}, \quad (8.1.5.2)$$

где

$$I(\rho_1, \rho_2) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} [W_r - M_r^2/2\rho^2 - (1 + \rho^2)^{1/2}]^{-1/2} d\rho.$$

Если  $\rho_1 = 0$ , то этот интеграл при  $\rho_2 = \tilde{u}_{\max}(1 - \tilde{u}_{\max}^2)^{-1/2}$  совпадает с интегралом  $I(\tilde{u}_{\max})$ , определяющим частоту продольных колебаний. Однако рассматриваемый нами случай  $\beta \gg 1$  при  $\rho_1 = 0$  не сводится к чисто продольным колебаниям, разобранным ранее, так как это могут быть колебания, близкие к линейно поляризованным вдоль любого направления. В частности, это могут быть колебания, близкие к поперечным линейно поляризованным колебаниям, для которых  $\rho_x$  отлично от нуля,  $\rho_y = 0$  и  $\rho_z$  отлично от нуля, но значительно меньше  $\rho_x$  ( $\rho_z \sim \rho_x/\beta$ ). Возможность существования таких колебаний не противоречит высказанному ранее утверждению о том, что чисто поперечные колебания соответствуют круговой, а не линейной поляризации.

Если  $\rho_1 = \rho_2$ , то  $\rho = \text{const}$  и вектор  $\rho(X, Y, Z)$  описывает окружность с угловой частотой, равной

$$\omega = \omega_{pe}(1 + \rho^2)^{-1/2}.$$

Эта формула находится в соответствии с формулой (8.1.4.1') для частоты поперечных колебаний, если в последней положить  $\beta \gg 1$ . В случае  $\rho_1 = \rho_2$  поляризация рассматриваемых колебаний близка к круговой, но плоскость колебаний не обязательно перпендикулярна к направлению распространения волны.

Перейдем теперь к рассмотрению случая  $\beta - 1 \ll 1$ . Основные уравнения (8.1.2.17) можно тогда представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 \rho_x}{d\theta_r^2} + \frac{\rho_x}{\sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z} &= 0, \\ \frac{d^2 \rho_y}{d\theta_r^2} + \frac{\rho_y}{\sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z} &= 0, \\ \frac{d^2}{d\theta_r^2} (\rho_z - \sqrt{1 + \rho^2}) + \frac{(3^2 - 1) \rho_z}{\sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.5.3)$$

где  $\theta_r = \omega_{pe} \bar{t} (\beta^2 - 1)^{-1/2}$ . Пренебрегая в третьем уравнении последним членом, получим

$$\sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z = C^2, \quad (8.1.5.4)$$

где  $C$  — постоянная. Первые два уравнения (8.1.5.3) приобретают при этом вид

$$\frac{d^2 \rho_x}{d\theta_r^2} + \frac{\rho_x}{C^2} = 0, \quad \frac{d^2 \rho_y}{d\theta_r^2} + \frac{\rho_y}{C^2} = 0,$$

откуда

$$\rho_x = R_x \cos(\theta_r/C), \quad \rho_y = R_y \sin(\theta_r/C). \quad (8.1.5.5)$$

Подставляя их в (8.1.5.4), найдем

$$\rho_z = \frac{1}{4c^2} [R_x^2 + R_y^2 - 2(C^4 - 1) - (R_x^2 - R_y^2) \cos(2\theta_r/C)]. \quad (8.1.5.6)$$

Между константами  $C$ ,  $R_x$  и  $R_y$  существует связь, задаваемая равенством нулю среднего значения  $n_e u_{ez}$ . Это условие вытекает из равенства нулю средних значений  $E'$  и  $B'$  (см. (8.1.2.3)). Замечая, что  $\bar{u}_z = \rho_z (1 + \rho^2)^{-1/2}$  и используя (8.1.2.9) и (8.1.5.4), получим при  $\beta - 1 \ll 1$

$$n_e \bar{u}_{ez} \approx \frac{n_0 \bar{u}_z}{1 - \bar{u}_z} = \frac{n_0 \rho_z}{\sqrt{1 + \rho^2} - \rho_z} = \frac{n_0}{C^2} \rho_z.$$

Так как среднее значение  $n_e u_{ez}$  равно нулю, то отсюда вытекает, что равно нулю и среднее значение величины  $\rho_z$ . Поэтому в (8.1.5.6) можно положить

$$R_x^2 + R_y^2 = 2(C^4 - 1), \quad C^2 = \sqrt{1 + 1/2(R_x^2 + R_y^2)}.$$

Окончательно  $\rho_x$ ,  $\rho_y$ ,  $\rho_z$  приобретают следующий вид [13]:

$$\left. \begin{aligned} \rho_x &= R_x \cos \omega \bar{t}, \quad \rho_y = R_y \sin \omega \bar{t}, \\ \rho_z &= \frac{(R_x^2 - R_y^2) \cos 2\omega \bar{t}}{4 \sqrt{1 + 1/2(R_x^2 + R_y^2)}}, \end{aligned} \right\} \quad (8.1.5.7)$$

где

$$\omega = \omega_{pe} (\beta^2 - 1)^{-1/2} [1 + 1/2(R_x^2 + R_y^2)]^{-1/4}. \quad (8.1.5.8)$$

Эти результаты находятся в соответствии с формулами (8.1.4.1) и (8.1.4.8), описывающими волны, близкие к поперечным волнам с круговой поляризацией. Действительно, при  $R_x \approx R_y$  частота колебаний величины  $\rho_x$  совпадает со значением, даваемым формулой (8.1.4.8).

Остановимся еще на рассмотрении случая больших энергий, когда выполняется неравенство

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \gg \beta^2 - 1,$$

величина же  $\beta$  произвольна ( $\beta > 1$ ). Функцию Лагранжа, описывающую движение плазмы, можно в этом случае представить в виде

$$L_r = 1/2 \left[ \left( \frac{d\xi}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\eta}{dt} \right)^2 + \left( \frac{d\zeta}{dt} \right)^2 \right] - \frac{\omega_{pe}^2 \beta^2}{\beta^2 - 1} (\beta \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2} + \zeta).$$

При замене переменных

$$\xi = \mu \xi', \quad \eta = \mu \eta', \quad \zeta = \mu \zeta', \quad \bar{t} = \sqrt{\mu} \bar{t}',$$

где  $\mu$  — произвольная постоянная, функция Лагранжа умножается на  $\mu$ . Отсюда вытекает, что если возможны траектории

$$\xi = \xi(\bar{t}), \quad \eta = \eta(\bar{t}), \quad \zeta = \zeta(\bar{t}),$$

то будут возможны также и подобные траектории

$$\xi' = \xi(\bar{t}'), \quad \eta' = \eta(\bar{t}'), \quad \zeta' = \zeta(\bar{t}').$$

В частности, отсюда вытекает определенный вид зависимости частоты колебаний от величины  $p_0$ , характеризующей импульс электрона, а именно, частота должна быть обратно пропорциональна  $\sqrt{p_0}$ :

$$\omega = \text{const} \cdot p_0^{-1/2}. \quad (8.1.5.9)$$

Эта формула находится в соответствии с полученными ранее выражениями для частоты в области больших энергий (см. (8.1.3.5), (8.1.4.1'), (8.1.4.7), (8.1.5.8)).

## § 8.2. Нелинейные волны в свободной двухтемпературной плазме

### 8.2.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в квазиравновесной плазме.

Перейдем к рассмотрению волн конечной амплитуды в квазиравновесной плазме, электроны и ионы которой характеризуются максвелловскими распределениями по скоростям с различными температурами, причем температура электронов значительно выше температуры ионов. В такой плазме, как было показано в гл. 4, могут распространяться низкочастотные колеба-

ния с линейным законом дисперсии в длинноволновой области (ионный звук). Фазовая скорость ионно-звуковой волны велика по сравнению со средней тепловой скоростью ионов; поэтому для описания движения ионов в такой волне можно исходить из гидродинамических уравнений с самосогласованным полем

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left( \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} + \frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (8.2.1.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \operatorname{div} (n_i \mathbf{u}) = 0, \quad (8.2.1.2)$$

где  $n_i$  и  $\mathbf{u}$  — плотность и гидродинамическая скорость ионов,  $Ze$  — заряд,  $m_i$  — масса иона и  $\varphi$  — электростатический потенциал, связанный с плотностью электронов  $n_e$  и плотностью ионов  $n_i$  уравнением Пуассона

$$\Delta \varphi = 4\pi e (n_e - Zn_i) \quad (8.2.1.3)$$

(среднее время релаксации ионов  $\nu_i^{-1}$  предполагается большим,  $\omega \nu_i^{-1} \gg 1$ ).

Электронную компоненту плазмы следует описывать кинетическим уравнением для электронной функции распределения  $F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ . Так как фазовая скорость ионного звука мала по сравнению со средней тепловой скоростью электронов, то в этом кинетическом уравнении можно пренебречь слагаемым  $\partial F_e / \partial t$  по сравнению со слагаемым  $\mathbf{v} \partial F_e / \partial \mathbf{r}$ . Если, кроме того, частота электронных соударений  $\nu_e$  достаточно мала, так что выполняется неравенство  $k v_e \gg \nu_e$  (но неравенство  $\omega \gg \nu_e$  может не иметь места;  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  — волновой вектор и частота возмущения), то мы вправе пренебречь интегралом столкновений и исходить из уравнения

$$\mathbf{v} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (8.2.1.4)$$

Для случая квазиравновесной плазмы, электроны которой характеризуются максвелловским распределением по скоростям (и температурой  $T_e$ ), легко сразу написать решение последнего уравнения:

$$F_e(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \exp \left\{ \frac{e\varphi(\mathbf{r}, t)}{T_e} \right\} f_{e0}(\mathbf{v}), \quad (8.2.1.5)$$

где  $f_{e0}(\mathbf{v})$  — функция распределения в точке с потенциалом  $\varphi=0$ . Интегрируя это соотношение, получим плотность электронов

$$n_e(\mathbf{r}, t) = n_{e0} \exp \left\{ \frac{e\varphi(\mathbf{r}, t)}{T_e} \right\}, \quad (8.2.1.6)$$

где  $n_{e0}$  — плотность электронов в точке с  $\varphi=0$ .

Распределение (8.2.1.6) представляет собой, очевидно, просто распределение Больцмана для электронов в электростатическом поле с меняющимся в пространстве и времени потенциалом  $\varphi(\mathbf{r}, t)$ . Тот факт, что плотность электронов и электронная функция распределения зависят от координат и времени только через посредство потенциала  $\varphi$ , связан с малостью фазовой скорости рассматриваемых колебаний по сравнению со средней тепловой скоростью электронов, вследствие чего в каждый момент времени и в каждой точке пространства успевают установиться локальные распределения Больцмана для электронов. Подчеркнем, что при этом не требуется выполнения условия  $\omega\tau \ll 1$ , где  $\tau \sim v_e^{-1}$ .

Уравнения (8.2.1.1)–(8.2.1.3), (8.2.1.6) образуют полную систему нелинейных уравнений, описывающих ионно-звуковые колебания квазиравновесной плазмы.

Наряду с нелинейным соотношением (8.2.1.6), связывающим плотность электронов  $n_e$  с электростатическим потенциалом  $\varphi$ , нелинейность содержит также гидродинамическое уравнение (8.2.1.1) (слагаемое  $(\mathbf{u} \partial/\partial \mathbf{r}) \mathbf{u}$ ). Разумеется, если ограничиться (как делалось в предыдущих главах) изучением слабых возмущений плазмы, то, линеаризуя указанные уравнения, легко получить формулу  $\omega = (1 + a_e^2 k^2)^{-1/2} k v_s$ , связывающую частоту и волновой вектор ионно-звуковых колебаний малой амплитуды.

В случае длинноволновых возмущений ( $a_e k \ll 1$ ) система уравнений, описывающих ионный звук, несколько упрощается. В этом случае можно не учитывать пространственного разделения заряда и считать, что

$$n_e = Z n_i. \quad (8.2.1.7)$$

Используя последнее соотношение и вводя обозначение

$$p = n_e T_e, \quad (8.2.1.8)$$

перепишем уравнение (8.2.1.1) в виде

$$m_i n_i \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}) \mathbf{u} \right\} + \frac{\partial p}{\partial \mathbf{r}} = 0. \quad (8.2.1.9)$$

Уравнения (8.2.1.2), (8.2.1.8), (8.2.1.9) формально совпадают с уравнениями обычной гидродинамики, если считать в них показатель адиабаты  $\gamma = 1$ , или, что то же самое, считать постоянной температуру (а не энтропию единицы массы).

Таким образом, длинноволновые колебания произвольной амплитуды в квазиравновесной плазме с  $T_e \gg T_i$  описываются уравнениями изотермической гидродинамики. Подчеркнем, однако, в значительной мере формальный характер указанной аналогии. Уравнения (8.2.1.2), (8.2.1.8), (8.2.1.9) описывают колебания с частотой  $\omega \gg \nu_i$  и являются следствием кинетического урав-

нения без интеграла столкновений, тогда как аналогичные им уравнения обычной гидродинамики относятся к случаю  $\omega \ll \nu_{e,1}$  (и их можно получить из кинетического уравнения лишь при учете столкновений между частицами).

Заметим, что, как будет показано в § 8.3, уравнения, аналогичные (8.2.1.1)—(8.2.1.4), описывают ионно-звуковые колебания и в случае неравновесной плазмы, электроны которой характеризуются немаксвелловским распределением по скоростям. В случае неравновесной плазмы эти уравнения не сводятся, однако, к уравнениям типа (8.2.1.8), (8.2.1.9) (ни при каком показателе адiabаты).

**8.2.2. Простые волны в квазиравновесной плазме.** В предыдущем разделе были получены нелинейные уравнения, описывающие движения квазиравновесной плазмы, состоящей из горячих электронов и холодных ионов. Переходя к изучению нелинейных колебаний различного типа в такой плазме, рассмотрим прежде всего одномерные простые (римановы) волны [19]. Наряду с возможностью проследить за эволюцией начального возмущения, изучение простых волн представляет большой интерес еще и потому, что только область простых волн может (в отсутствие разрывов) граничить с невозмущенной плазмой (см. в этой связи гл. 3).

Простые волны могут возбуждаться только в случае длинноволновых возмущений плазмы ( $a_e k \ll 1$ ), когда зависимость фазовой скорости от волнового вектора не играет существенной роли; поэтому при изучении таких волн мы будем исходить не только из уравнений (8.2.1.4), (8.2.1.2), (8.2.1.6), но и (8.2.1.7). Выбирая ось  $x$  в направлении распространения волны, перепишем эти уравнения в виде

$$\frac{du_x}{dt} + \frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad \frac{du_{\perp}}{dt} = 0, \quad (8.2.2.1)$$

$$\frac{dn_i}{dt} + n_i \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0, \quad (8.2.2.2)$$

$$n_e = Zn_i = n_{e0} \exp\{e\varphi/T_e\}, \quad (8.2.2.3)$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x}$  и  $u_{\perp}$  — перпендикулярная к направлению распространения волны составляющая вектора  $u$ .

В случае простых волн все характеризующие плазму величины могут быть, как известно, представлены в виде функций одной из них (например,  $n_i$ ), которая в свою очередь зависит от  $x$  и  $t$ . Система уравнений (8.2.2.1)—(8.2.2.3) превращается тогда в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $u$  ( $n_i$ ),  $\varphi$  ( $n_i$ ), причем фазовая скорость волны определяется из условия разрешимости этой системы.

Вводя обозначение  $v_s = \sqrt{ZT_e/m_i}$ , после несложных преобразований получим

$$\frac{du_x}{dn_i} = \varepsilon \frac{v_s}{n_i}; \quad \frac{du_{\perp}}{dn_i} = 0; \quad \frac{d\varphi}{dn_i} = \frac{T_e}{en_i}; \quad n_e = Zn_i; \quad (8.2.2.4)$$

$$V = u_x + \varepsilon v_s, \quad (8.2.2.5)$$

где  $\varepsilon = +1$  ( $\varepsilon = -1$ ), если волна распространяется в положительном (отрицательном) направлении оси  $x$ .

Система уравнений (8.2.2.4) позволяет исследовать направление изменения характеризующих плазму величин и проследить за развитием возмущения конечной амплитуды.

Заметим прежде всего, что величины  $v_s$  и  $u_{\perp}$  не зависят от  $n_i$  и, следовательно, являются интегралами движения. Не меняются при распространении волны также температура электронов и нормированная на одну частицу электронная функция распределения  $F_e/n_e$ . Далее, в волне сжатия возрастают плотности частиц обоого сорта и электростатический потенциал; в волне разрежения указанные величины убывают.

Для того чтобы определить, как изменяется форма ионно-звуковой волны при ее распространении, нужно вычислить производную  $dV/dn_i$ . Используя (8.2.2.4), (8.2.2.5) и полагая для определенности  $\varepsilon = +1$ , имеем

$$\frac{dV}{dn_i} = \frac{v_s}{n_i}. \quad (8.2.2.6)$$

Мы видим, что (как и в обычной гидродинамике) производная  $\Delta V/dn_i$  положительна; иными словами, участки с большой плотностью движутся с большей скоростью. Поэтому на участках сжатия профиль волны становится все более и более крутым, а на участках разрежения — все более и более пологим.

В обычной гидродинамике такое изменение профиля волны приводит, как известно, к возникновению ударных волн (см., например, [20]). При этом уравнение Эйлера (вместе с уравнением непрерывности и уравнением состояния жидкости) позволяет проследить за эволюцией возмущения до тех пор, пока градиенты гидродинамических величин не сделаются столь большими, что станет необходимым учет диссипативных процессов. Благодаря последним в конце концов и устанавливается стационарная ударная волна (см. гл. 3).

В бесстолкновительной плазме вследствие малости диссипативных эффектов мы имеем несколько иную картину. Когда ширина переднего фронта волны сжатия сравнивается с дебаевским электронным радиусом, уравнение (8.2.2.3) становится неприменимым и возникает необходимость в учете дисперсии ионного звука. При дальнейшем увеличении градиентов на участках сжа-

тия могут возникать многопоточные течения [19] или квазиударные волны [21, 22].

Остановимся еще кратко на автомодельных одномерных движениях двухтемпературной плазмы\*), т. е. таких движениях, при которых все характеризующие плазму величины зависят от координат и времени лишь в комбинации  $x/t$ . Как и в случае простых волн, характер автомодельных волн определяется, как известно (см. гл. 3), знаком производной  $dV/dn_1$ . Согласно (8.2.2.6)  $dV/dn_1 > 0$ , и поэтому автомодельные волны в квазиравновесной плазме всегда являются волнами разрежения.

С вопросом об автомодельных волнах связан вопрос о движениях двухтемпературной плазмы, возникающих при равномерном изменении ее объема (аналог гидродинамической задачи о поршне см. [20]).

Будем считать, что плазма заполняет полупространство  $x > u_0 t$ , ограниченное равномерно движущейся плоскостью (такая граница может представлять собой, в частности, область очень сильного магнитного поля). Как известно, установившиеся движениями равномерно сжимающейся или расширяющейся среды могут быть (в отсутствие разрывов) только автомодельные волны. В рассматриваемом случае автомодельные волны, являющиеся волнами разрежения, возникают при расширении плазмы ( $u_0 < 0$ ).

Используя (8.2.2.4), (8.2.2.5), можно связать изменения всех характеризующих плазму величин  $X$  в автомодельной волне со скоростью «поршня»  $u_0$ . Вводя обозначения

$$\Delta X = X_{x=u_0 t} - X_{x \rightarrow \infty}$$

и считая для простоты, что  $u_0 \ll v_s$ , получим

$$\frac{\Delta n_1}{n_1} = \frac{\Delta n_e}{n_e} = \frac{u_0}{v_s}; \quad \Delta u_1 = 0; \quad \Delta \varphi = \frac{T_e u_0}{e v_s}. \quad (8.2.2.7)$$

Заметим в заключение, что при выводе исходных уравнений мы не учитывали затухания Ландау для ионно-звуковых волн (математически это выражается в пренебрежении слагаемым  $\partial F_e / \partial t$  в кинетическом уравнении для электронов). Учитывая, что затухание ионно-звуковых волн малой амплитуды пропорционально малому параметру  $\sqrt{m_e/m_1}$  (см. гл. 4), легко видеть, что для преобладающей роли в развитии возмущения нелинейных эффектов (а не затухания звука) амплитуда возмущения  $\Delta n_e$  должна быть не слишком мала, т. е.  $\Delta n_e/n_e \gg \sqrt{m_e/m_1}$ .

\*) Автомодельные волны в бесстолкновительной плазме с бoльцмановским распределением электронов в случае горячих ионов изучались в работе [23].

**8.2.3. Периодические и уединенные волны.** Одномерные простые (римановы) и автомодельные волны, рассмотренные выше, представляют собой простейшие типы нестационарных движений квазиравновесной плазмы. Волны обоих этих типов возникают, как мы видели, в случае длинноволновых возмущений плазмы ( $a_0 k \ll 1$ ). Вообще говоря, любые длинноволновые возмущения должны вследствие зависимости скорости распространения возмущения от его амплитуды распространяться в плазме в виде нестационарных волн.

Иначе обстоит дело с коротковолновыми возмущениями. На участках волны, на которых характерный размер неоднородности сравним с дебаевским электронным радиусом, становится необходимым учет дисперсии ионного звука, обуславливающий зависимость скорости распространения возмущения от длины волны. При этом зависимости скорости распространения возмущения от его амплитуды и от длины волны могут взаимно компенсироваться. Таким образом, при учете дисперсии звука в плазме становятся возможными стационарные волны, к изучению которых мы сейчас и перейдем.

В одномерной стационарной волне все величины зависят, очевидно, от координат и времени в комбинации  $x' = x - Vt$ , где  $V$  — постоянная. Переходя к системе отсчета, движущейся вместе с волной (т. е. движущейся со скоростью  $V$  по отношению к лабораторной системе), и используя (8.2.1.1) и (8.2.1.2), получим

$$un_1 = u_0 n_{10}, \quad \frac{1}{2} m_1 u^2 + Ze\varphi = \frac{1}{2} m_1 u_0^2, \quad (8.2.3.1)$$

где  $u_0$  и  $n_{10}$  — значения скорости и плотности ионов в точке, в которой потенциал  $\varphi$  принят равным нулю (здесь и далее мы опускаем индекс  $x$  у компоненты скорости  $u_x$ ). Уравнения (8.2.3.1) выражают, очевидно, тот факт, что число ионов и полная энергия иона являются интегралами движения. Вместе с соотношением (8.2.1.6) и уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 4\pi e (n_e - Zn_1) \quad (8.2.3.2)$$

соотношения (8.2.3.1) образуют полную систему уравнений, определяющих распределение величин  $u$ ,  $n_1$ ,  $n_e$ ,  $\varphi$  в одномерной стационарной волне.

Решая эти уравнения и вводя электрическое поле  $E = -\partial\varphi/\partial x$ , получим

$$E^2 = 8\pi e \int_0^\varphi \{n_e(\varphi) - Zn_1(\varphi)\} d\varphi, \quad (8.2.3.3)$$

где функция  $n_e(\varphi)$  определяется формулой (8.2.1.6), а

$$n_i(\varphi) = n_{i0} \left\{ 1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i u_0^2} \right\}^{-1/2}; \quad (8.2.3.4)$$

за начало отсчета потенциала  $\varphi$  выбрана точка, в которой  $E=0$ ;  $n_{e0}$  — значение плотности электронов в этой точке.

Выполняя в (8.2.3.3) интегрирование, получим

$$E^2 = 8\pi n_{i0} T_e \left\{ \frac{n_{e0}}{n_{i0}} \left( \exp \left\{ \frac{e\varphi}{T_e} \right\} - 1 \right) + \frac{m_i u_0^2}{T_e} \left( \sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i u_0^2}} - 1 \right) \right\}. \quad (8.2.3.5)$$

Зная функцию  $E^2(\varphi)$ , легко получить уравнение, определяющее потенциал  $\varphi$  как функцию координат и времени; имеем

$$x - Vt = \pm \int \frac{d\varphi}{\sqrt{E^2(\varphi)}}. \quad (8.2.3.6)$$

В общем случае, когда  $n_{e0} \neq Zn_{i0}$ , соотношения (8.2.1.6), (8.2.3.4) — (8.2.3.6) определяют распределение характеризующих плазму величин в одномерной периодической волне. Распределение потенциала в такой волне представлено схематически на рис. 8.2.1. Амплитуда потенциала волны  $\varphi_{\max}$  определяется, очевидно, из уравнения

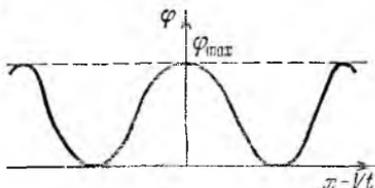


Рис. 8.2.1. Распределение электростатического потенциала в одномерной периодической стационарной волне.

$$\frac{n_{e0}}{n_{i0}} \left( \exp \left\{ \frac{e\varphi_{\max}}{T_e} \right\} - 1 \right) + \frac{m_i u_0^2}{T_e} \left[ \left( 1 - \frac{2Ze\varphi_{\max}}{m_i u_0^2} \right)^{1/2} - 1 \right] = 0. \quad (8.2.3.7)$$

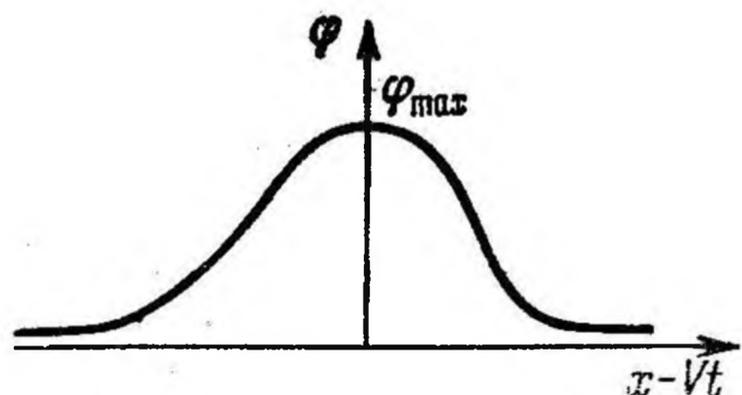
Для длины волны имеем

$$\lambda = (2\pi n_{i0} T_e)^{-1/2} \int_0^{\varphi_{\max}} \left\{ \frac{n_{e0}}{n_{i0}} \left( \exp \left\{ \frac{e\varphi}{T_e} \right\} - 1 \right) + \frac{m_i u_0^2}{T_e} \left[ \left( 1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i u_0^2} \right)^{1/2} - 1 \right] \right\}^{-1/2} d\varphi. \quad (8.2.3.8)$$

В особом случае, когда в некоторой точке одновременно обращаются в нуль плотность заряда и электрическое поле ( $n_{e0} = Zn_{i0}$ ), уравнения (8.2.1.6), (8.2.3.4) описывают так называемую *уединенную волну*, представляющую собой равномерно движущийся сквозь плазму всплеск потенциала [19] (см. также [22]). Уединенная волна соответствует вырожденному случаю периодической волны: последняя переходит в уединенную волну, если  $\lambda \rightarrow \infty$ . (Заметим, что аналогичная ситуация имеет место в обычной гидродинамике в теории распространения волн в канале конечной

глубины, где также возможны периодические и уединенные волны [24]).

Остановимся на структуре уединенной волны несколько подробнее. (Распределение потенциала в уединенной волне схематически представлено на рис. 8.2.2.) Учитывая, что вдали от гребня волны — в невозмущенной области — плазма покоится (в лабораторной системе), имеем  $u_0 = -V$ . Используя (8.2.3.6), нетрудно определить потенциал  $\varphi$  вдали от гребня волны ( $|x - Vt| \rightarrow \infty$ ):



$$\varphi \sim \exp \left\{ \frac{-|x - Vt|}{a_e} \sqrt{1 - v_s^2/V^2} \right\}, \quad (8.2.3.9)$$

Рис. 8.2.2. Распределение электростатического потенциала в уединенной волне сжатия.

где  $v_s$  — скорость ионного звука и  $a_e$  — электронный дебаевский радиус. Мы видим, что уединенная волна движется (в лабораторной системе отсчета) со сверхзвуковой скоростью ( $V > v_s$ ), причем возмущение вдали от гребня волны убывает по экспоненциальному закону.

Полагая в (8.2.3.7)  $n_{e0} = Zn_{i0}$ ,  $u_0 = -V$ , получим уравнение, определяющее амплитуду потенциала в уединенной волне:

$$1 + \frac{v_s^2}{V^2} - \sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi_{\max}}{m_i V^2}} - \frac{v_s^2}{V^2} \exp \left\{ \frac{e\varphi_{\max}}{T_e} \right\} = 0. \quad (8.2.3.10)$$

Нетрудно показать, что это уравнение имеет решение лишь в области  $\varphi_{\max} > 0$ . Замечая, что амплитуды плотностей электронов и ионов  $n_{e \max}$ ,  $n_{i \max}$  связаны, согласно (8.2.1.6), (8.2.3.4), с  $\varphi_{\max}$  соотношениями

$$n_{e \max} = n_{e0} \exp \left\{ \frac{e\varphi_{\max}}{T_e} \right\}, \quad n_{i \max} = n_{i0} \left( 1 - \frac{2Ze\varphi_{\max}}{m_i V^2} \right)^{-1/2}, \quad (8.2.3.11)$$

мы видим, что  $n_{e \max} > n_{e0}$  и  $n_{i \max} > n_{i0}$ . Таким образом, уединенная волна в квазиравновесной плазме с максвелловским распределением электронов по скоростям всегда является волной сжатия.

Согласно (8.2.3.10) между амплитудой волны и скоростью ее распространения существует однозначная зависимость [19]

$$V^2 = \frac{v_s^2}{2} \frac{(\exp \{e\varphi_{\max}/T_e\} - 1)^2}{\exp \{e\varphi_{\max}/T_e\} - 1 - e\varphi_{\max}/T_e}. \quad (8.2.3.12)$$

Если амплитуда уединенной волны мала ( $e\varphi_{\max} \ll T_e$ ), то скорость ее распространения стремится, согласно (8.2.3.12),

к скорости ионного звука  $v_s$ . Распределение потенциала в этом случае определяется формулой

$$\varphi = \frac{\varphi_{\max}}{\operatorname{ch}^2 \left\{ \frac{x - Vt}{2a_e} \sqrt{1 - v_s^2/V^2} \right\}}, \quad \varphi_{\max} = \frac{3T_e}{2e} (1 - v_s^2/V^2). \quad (8.2.3.13)$$

Заметим, что уравнение (8.2.3.10) имеет решения лишь при не слишком больших значениях  $\varphi_{\max}$ . Это означает, что уединенные волны не могут иметь сколь угодно большой амплитуды. Максимально возможное значение амплитуды уединенной волны можно определить из уравнения  $1/2 m_i V^2 = Ze\varphi_{\max}$ , представляющего собой условие того, что ионы на гребне волны полностью теряют свою кинетическую энергию (при больших значениях  $\varphi_{\max}$  ионы были бы уже не в состоянии перевалить через образованный волной потенциальный барьер). Решая это уравнение совместно с уравнением (8.2.3.12), получим

$$e\varphi_{\max} \approx 1,3T_e; \quad V \approx 1,6v_s.$$

Заметим в заключение, что уединенные волны (называемые также *солитонами*) играют, по-видимому, особую роль в процессах распространения возмущений в бесстолкновительной плазме. Как показали машинные эксперименты [25, 26] (проведенные с нелинейными уравнениями типа уравнения Кортевега — де Вриза), возмущение произвольной формы является, вообще говоря, неустойчивым и распадается с течением времени на последовательность бегущих друг за другом солитонов.

**8.2.4. Квазиударные волны.** В случае уединенных волн состояние плазмы позади волны совпадает с состоянием плазмы перед передним фронтом волны: при  $x - Vt \rightarrow -\infty$ , как и при  $x - Vt \rightarrow +\infty$ , плазма (в лабораторной системе) покоится, причем как электрическое поле, так и плотность заряда в ней равны нулю. В бесстолкновительной плазме возможны стационарные волны еще и другого типа, когда состояние плазмы позади волны не совпадает с состоянием плазмы перед фронтом волны — так называемые *квазиударные волны* [22]. В этом смысле они аналогичны ударным волнам. Однако, в отличие от обычных ударных волн, структура которых существенно определяется диссипативными эффектами, квазиударные волны возникают и в отсутствие диссипации, причем ширина фронта этих волн может быть значительно меньше длины свободного пробега частиц плазмы (в частности, в плазме в отсутствие магнитного поля ширина фронта квазиударной волны равна по порядку величины электронному дебаевскому радиусу).

Квазиударная волна возникает в том случае, если по какой-либо причине в плазме нарушилась симметрия пространственного распределения плотностей частиц или электрического поля. В случае квазиравновесной плазмы с максвелловским распределением

электронов по скоростям [21] такой причиной может быть отражение ионов от образованного волной потенциального барьера. Передний фронт возмущения имеет при этом ту же форму, что и передний фронт уединенной волны, но позади гребня волны возмущение не спадает экспоненциально, а осциллирует. Профиль такой квазиударной волны представлен схематически на рис. 8.2.3.

Считая для простоты плотность отраженных ионов  $n_{ir}$  малой ( $n_{ir} \ll n_i$ ), мы можем, очевидно, определить распределение потенциала в переднем фронте волны (область I), подставляя в уравнения (8.2.3.5), (8.2.3.6)  $n_{e0} = Zn_{i0}$  и  $u_0 = -V$ . В результате получим

$$x - Vt = (8\pi n_{e0} T_e)^{-1/2} \int_0^\varphi \left[ \exp \{e\varphi/T_e\} - 1 + \frac{V^2}{v_s^2} \left( \sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i V^2}} - 1 \right) \right]^{-1/2} d\varphi. \quad (8.2.4.1)$$

Максимум потенциала  $\varphi_{\max}$  и максимумы плотностей электронов и ионов  $n_{e\max}$ ,  $n_{i\max}$  определяются по прежнему из соотношений (8.2.3.10), (8.2.3.11). Мы видим, что, как и в случае уединенной волны,  $n_{i\max} > n_{i0}$ ; поэтому квазиударную волну в плазме с максвелловским распределением электронов можно назвать *квазиударной волной сжатия*.

В области осцилляций (область II) имеем

$$x - Vt = (8\pi n_{e\max} T_e)^{-1/2} \int_0^{\varphi - \varphi_{\max}} \left[ \exp \{e\varphi/T_e\} - 1 + Z \frac{n_{i\max} - n_{ir}}{n_{e\max}} \frac{u_{\max}^2}{v_s^2} \left( \sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i u_{\max}^2}} - 1 \right) \right]^{-1/2} d\varphi, \quad (8.2.4.2)$$

где  $u_{\max}^2 = V^2 - 2Ze\varphi_{\max}/m_i$ . Для минимального значения потенциала в области осцилляций  $\varphi_{\min}$  и для длины волны осцилляций  $\lambda$  получим

$$\exp \left\{ \frac{e(\varphi_{\min} - \varphi_{\max})}{T_e} \right\} - 1 + Z \frac{n_{i\max} - n_{ir}}{n_{e\max}} \frac{u_{\max}^2}{v_s^2} \left( \sqrt{1 - \frac{2Ze(\varphi_{\min} - \varphi_{\max})}{m_i u_{\max}^2}} - 1 \right) = 0, \quad (8.2.4.3)$$

$$\lambda = (2\pi n_{e\max} T_e)^{-1/2} \int_{\varphi_{\min} - \varphi_{\max}}^0 \left[ \exp \{e\varphi/T_e\} - 1 + Z \frac{n_{i\max} - n_{ir}}{n_{e\max}} \frac{u_{\max}^2}{v_s^2} \left( \sqrt{1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i u_{\max}^2}} - 1 \right) \right]^{-1/2} d\varphi. \quad (8.2.4.4)$$

Таким образом, квазиударная волна связывает между собой два различных состояния плазмы — невозмущенную плазму перед фронтом волны и плазму с периодическими осцилляциями величин  $E$ ,  $n_e$ ,  $n_i$ ,  $\varphi$  и т. д. — позади фронта волны. Если при этом под шириной фронта волны  $x_0$  понимать размеры пространственной области, разделяющей эти два состояния плазмы, то, согласно (8.2.4.1), имеем

$$x_0 \sim a_e (1 - v_s^2/V^2)^{-1/2},$$

где  $a_e$  — электронный дебаевский радиус. Мы видим, что ширина фронта квазиударной волны в бесстолкновительной плазме может быть значительно меньше длины свободного пробега частиц, определяющей, как известно, ширину ударной волны в обычной газодинамике (см. гл. 3).

Разумеется, осцилляции в квазиударной волне будут в результате диссипативных эффектов медленно затухать. Мы не будем останавливаться на вопросе о затухании осцилляций подробнее.

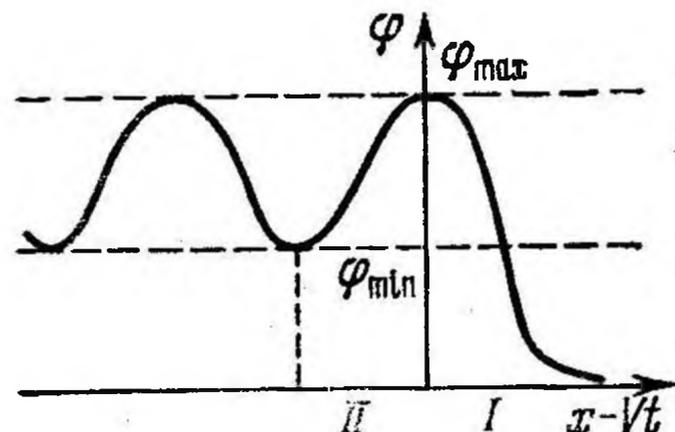


Рис. 8.2.3. Распределение электростатического потенциала в квазиударной волне сжатия.

### § 8.3. Нелинейные волны в свободной неравновесной плазме

8.3.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в неравновесной плазме. Слабозатухающие ионно-звуковые колебания могут распространяться не только в двухтемпературной плазме, но и в плазме с произвольными (не обязательно максвелловскими) распределениями частиц по скоростям, если только средняя энергия хаотического движения электронов значительно превосходит среднюю энергию хаотического движения ионов. При этом ионно-звуковые колебания малой амплитуды характеризуются по-прежнему законом дисперсии

$$\omega = v_s k (1 + a_e^2 k^2)^{-1/2}, \quad (8.3.1.1)$$

где

$$v_s = a_e (4\pi e^2 Z n_{i0} / m_i)^{1/2}$$

и  $a_e$  — дебаевский электронный радиус, связанный с функцией распределения электронов по скоростям  $F_e(v)$  соотношением

$$a_e = \left| \frac{4\pi e^2}{m_e} \int \left( \mathbf{k} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{d^3 v}{(k\mathbf{v})} \right|^{-1/2}; \quad (8.3.1.2)$$

$n_{i0}$  и  $n_{e0} = Z n_{i0}$  — по-прежнему невозмущенные значения плотностей ионов и электронов.

Таким образом, характер дисперсии ионно-звуковых колебаний малой амплитуды в плазме с немаксвелловскими распределениями частиц по скоростям ничем не отличается от характера дисперсии аналогичных колебаний в плазме с максвелловскими распределениями; следует лишь под температурой электронов понимать величину

$$T_e = \frac{n_{e0} m_e}{\left| \int \left( \mathbf{k} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} \right) \frac{d^3 v}{(k v)} \right|}. \quad (8.3.1.3)$$

Иначе обстоит дело в случае нелинейных ионно-звуковых колебаний; поведение последних, как будет показано ниже, оказывается существенно зависящим от вида электронной функции распределения.

При изучении нелинейных ионно-звуковых колебаний в неравновесной плазме мы можем по-прежнему исходить из уравнений (8.2.1.1)—(8.2.1.4), понимая под  $F_e(\mathbf{v})$  уже немаксвелловскую функцию распределения электронов по скоростям. В случае одномерных колебаний, рассмотрением которых мы ограничимся, легко найти решение кинетического уравнения (8.2.1.4). Вводя обозначение  $F_e(\mathbf{v}) \equiv F_e(v_x^2; \mathbf{v}_\perp)$ , получим

$$F_e(v_x^2; \mathbf{v}_\perp, x, t) = F_e\left(v_x^2 - \frac{2e}{m_e} \varphi(x, t); \mathbf{v}_\perp\right) \quad (8.3.1.4)$$

(ось  $x$  соответствует направлению распространения волны).

Интегрируя последнее соотношение по скоростям электронов, получим «уравнение состояния» электронов

$$n_e = n_e(\varphi), \quad (8.3.1.5)$$

заменяющее в случае неравновесной плазмы соотношение (8.2.1.6). Вместе с уравнением Пуассона (8.2.3.2) и соотношениями (8.2.2.1), (8.2.2.2), это уравнение состояния образует полную систему уравнений, описывающих нелинейные одномерные движения плазмы с произвольным распределением частиц по скоростям.

**8.3.2. Простые волны в неравновесной плазме.** Переходя к изучению простых (римановых) волн в неравновесной плазме [27], заметим прежде всего, что, как и в случае плазмы с максвелловским распределением электронов, такие волны могут возбуждаться лишь в случае длинноволновых возмущений плазмы ( $a_e k \ll 1$ ). В этом случае можно не учитывать возникновения в плазме пространственного заряда, считая, что  $n_e = Z n_i$ . Поэтому при исследовании простых волн можно исходить из уравнений (8.2.2.1), (8.2.2.2) и уравнения состояния

$$n_e = Z n_i = n_e(\varphi). \quad (8.3.2.1)$$

Учитывая, что в случае простых волн все характеризующие плазму величины могут быть представлены в виде функций одной

из них (например,  $n_i$ ), получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $u(n_i)$ ,  $\varphi(n_i)$ , причем фазовая скорость волны  $V(n_i)$  определится из условия разрешимости этой системы. Вводя обозначения

$$v_s^2 = \frac{eZ^2 n_i}{m_i D^{(1)}}; \quad D^{(j)} = \frac{\partial^j n_e(\varphi)}{\partial \varphi^j} \quad (j = 0, 1, 2, \dots), \quad (8.3.2.2)$$

находим

$$\left. \begin{aligned} V &= u_x \pm \varepsilon v_s, \\ \frac{du_x}{dn_i} &= \varepsilon \frac{v_s}{n_i}, \quad \frac{du_{\perp}}{dn_i} = 0, \quad \frac{d\varphi}{dn_i} = \frac{m_i v_s^2}{eZ n_i}, \\ n_e &= Z n_i, \end{aligned} \right\} \quad (8.3.2.3)$$

где  $\varepsilon = \pm 1$  в зависимости от того, распространяется ли волна в положительном или отрицательном направлении оси  $x$ .

Система уравнений (8.3.2.3) вместе с соотношением (8.3.1.4) позволяет исследовать направление изменения характеризующих плазму величин (включая функцию распределения электронов) и проследить за развитием возмущения конечной амплитуды.

Заметим прежде всего, что на участках сжатия возрастают плотности частиц обоих сортов и электростатический потенциал, а на участках разрежения эти величины убывают.

Проследим, как меняется в простой волне функция распределения электронов. Замечая, что  $d\varphi/dn_i > 0$  и используя (8.3.1.4), легко показать, что при значениях скорости, для которых  $v_x \frac{\partial F_e}{\partial v_x} < 0$ , число электронов со скоростями в интервале  $(v, v + dv)$  в волне сжатия увеличивается, а в волне разрежения уменьшается. Наоборот, при значениях  $v$ , для которых  $v_x \frac{\partial F_e}{\partial v_x} > 0$ , число электронов со скоростями в интервале  $(v, v + dv)$  увеличивается в волне разрежения и уменьшается в волне сжатия. В частности, если исходное распределение электронов по скоростям имеет, наряду с максимумом при  $v_x = 0$ , еще узкий всплеск, охватывающий небольшую область скоростей, то по мере движения волны сжатия (разрежения) всплеск перемещается в область больших (меньших) значений  $|v_x|$ .

Чтобы определить, как изменяется форма ионно-звуковой волны, нужно вычислить производную  $dV/dn_i$ . Используя (8.3.2.3) и полагая для определенности  $\varepsilon = +1$ , получим

$$\frac{dV}{dn_i} = \frac{v_s}{2n_i} \left( 3 - \frac{n_e D^{(2)}}{(D^{(1)})^2} \right) \quad (8.3.2.4)$$

В зависимости от вида электронной функции распределения величина  $dV/dn_i$  может быть положительной, отрицательной,

равной нулю или знакопеременной, т. е. положительной при одних и отрицательной при других значениях потенциала  $\varphi$ . (Напомним, что как в обычной, так и в магнитной гидродинамике величина  $dV/dn_i$  всегда положительна).

Если  $dV/dn_i > 0$  (нормальный случай), то, как и в обычной гидродинамике, участки большей плотности движутся с большей скоростью; поэтому на участках сжатия возникают разрывы\*). Автомодельные волны в этом случае являются волнами разрежения. Такая возможность осуществляется, в частности, при максвелловском распределении электронов по скоростям (см. выше) и при распределении в форме ступеньки

$$F_e(v) = \begin{cases} 0, & v > v_0(n_i), \\ \text{const}, & v < v_0(n_i). \end{cases}$$

Если при всех значениях потенциала  $dV/dn_i = 0$ , то при распространении волны все участки движутся с одной и той же скоростью, поэтому профиль волны не искажается и разрывы не возникают. Учитывая (8.3.2.3), можно убедиться, что скорость ионного звука и величина  $\sqrt{\varphi}$  меняются в этом случае обратно пропорционально плотности, т. е.

$$v_s n_i = \text{const}, \quad \varphi n_i^2 = \text{const}.$$

Случай  $dV/dn_i = 0$  реализуется, в частности, при распределении вида  $F_e(v) = \text{const} \{v^2 + v_0^2(n_i)\}^{-2}$ .

Если  $dV/dn_i < 0$  (аномальный случай), то участки большей плотности движутся с меньшей скоростью. Поэтому разрывы возникают на участках разрежения; автомодельные волны являются волнами сжатия. Это реализуется, в частности, если функция распределения электронов по скоростям имеет вид

$$F_e(v) = \text{const} \{v^2 + v_0^2(n_i)\}^{-\beta},$$

где  $3/2 < \beta < 2$ . Заметим, что в данном случае скорость звука  $v_s$  в волне разрежения увеличивается, а в волне сжатия уменьшается.

Остановимся, наконец, на случае, когда величина  $dV/dn$  может быть в зависимости от значения потенциала  $\varphi$  как положительной, так и отрицательной. Для определенности будем считать, что  $dV/dn_i > 0$  при  $\varphi < \varphi_1$  и  $dV/dn_i < 0$  при  $\varphi > \varphi_1$ , где  $\varphi_1$  — некоторое критическое значение потенциала. При движении в такой плазме волны сжатия «вершина» волны (т. е. участки с  $n_i > n_{i1}$ ,

\* Мы применяем термин разрыв к узким областям, в которых градиенты характеризующих плазму величин становятся столь большими, что исходное соотношение  $n_e = Zn_i$  делается неприменимым. При  $a_0 k \geq 1$  необходимо учитывать дисперсию ионного звука. При дальнейшем увеличении градиентов в этих областях могут возникать многопоточные течения или ударные волны.

где  $n_{i1}$  определяется из уравнения  $\varphi(n_{i1}) = \varphi_1$  будет отставать от ее «основания» (т. е. от участков с  $n_i < n_{i1}$ ); поэтому значение плотности в точке разрыва, развивающегося из такой волны, не может превосходить  $n_{i1}$ . При движении волны разрежения также может возникнуть разрыв; значение плотности в точке разрыва не может быть меньше  $n_{i1}$ .

Если, наоборот,  $dV/dn_i < 0$  при  $\varphi < \varphi_2$  и  $dV/dn_i > 0$  при  $\varphi > \varphi_2$ , то, как нетрудно убедиться, плотность в точке разрыва не может превосходить  $n_{i2}$ , если разрыв развился из волны разрежения, и не может быть меньше  $n_{i2}$ , если он развился из волны сжатия (критическое значение плотности  $n_{i2}$  определяется из уравнения  $\varphi(n_{i2}) = \varphi_2$ ).

Обе указанные возможности реализуются, в частности, если распределение электронов по скоростям является суперпозицией двух максвелловских распределений — «горячего» и «холодного», т. е.

$$F_e(v) = v_1(n_i) \exp\{-m_e v^2/2T_1\} + v_2(n_i) \exp\{-m_e v^2/2T_2\}, \quad T_1 \gg T_2.$$

Остановимся еще кратко на вопросе о движениях неравновесной плазмы, возникающих при ее равномерном сжатии или расширении (аналог гидродинамической задачи о поршне).

Как известно, установившимися движениями равномерно сжимаемой (или расширяющейся) плазмы могут быть (в отсутствие разрывов) только автомодельные волны. Если  $dV/dn_i > 0$ , то автомодельная волна (являющаяся в этом случае волной разрежения) возникает при расширении плазмы. Если  $dV/dn_i < 0$ , то автомодельная волна (представляющая собой в этом случае волну сжатия) возникает при сжатии плазмы.

Используя (8.3.1.4), (8.3.2.3), можно связать изменения  $\Delta X$  характеризующих плазму величин  $X$  в автомодельной волне со скоростью поршня  $u_0$ . В частности, если  $u_0 \ll v_s$ , то

$$\left. \begin{aligned} \frac{\Delta n_e}{n_e} = \frac{\Delta n_i}{n_i} = \frac{u_0}{v_s}, \quad \Delta n_{\perp} = 0, \quad \Delta \varphi = \frac{m_i v_s u_0}{eZ}, \\ \Delta v_s = 1/2 u_0 \left( 1 - \frac{n_e D^{(2)}}{(D^{(1)})^2} \right), \quad \Delta F_e(v) = \frac{-m_i v_s u_0}{m_e Z} \frac{\partial F_e(v)}{v_x \partial v_x}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.2.5)$$

**8.3.3. Стационарные волны.** При распространении в плазме длинноволновых ионно-звуковых колебаний с линейным законом дисперсии профиль волны, вообще говоря, меняется со временем (исключение составляет случай плазмы с электронной функцией распределения вида  $F_e(v) = \text{const} (v^2 + v_0^2)^{-2}$ , для которой звуковая волна распространяется без искажения формы).

На участках волны с характерным размером неоднородности порядка электронного дебаевского радиуса существенное значение приобретает дисперсия ионного звука, вследствие которой

становится возможным существование волн стационарного профиля — уединенных, периодических и квазударных. К изучению распространения таких волн в неравновесной плазме мы сейчас и перейдем [28].

В случае неравновесной плазмы распределения скорости, плотности ионов и электростатического потенциала в одномерной стационарной волне (в системе отсчета, движущейся вместе с волной) определяются, очевидно, теми же соотношениями (8.2.3.1), (8.2.3.2), что и в случае плазмы с максвелловскими распределениями частиц. Добавляя к ним уравнение состояния (8.3.1.5), получим полную систему уравнений, описывающих такую волну.

Решая эти уравнения, нетрудно убедиться, что распределение физических величин в стационарной волне определяется в случае неравновесной плазмы теми же соотношениями (8.2.3.3), (8.2.3.4), (8.2.3.6), что и в случае плазмы с максвелловским распределением электронов по скоростям, если только под  $n_e(\varphi)$  понимать функцию, получающуюся при интегрировании по скоростям немаксвелловской функции распределения (8.3.1.4).

В общем случае, когда  $n_{e0} \neq Zn_{i0}$ , эти соотношения определяют распределение характеризующих плазму величин в одномерной периодической волне. Экстремальное значение потенциала  $\varphi_{\text{extr}}$  находится, очевидно, из уравнения

$$\int_0^{\varphi_{\text{extr}}} \{n_e(\varphi) - Zn_i(\varphi)\} d\varphi = 0, \quad (8.3.3.1)$$

а длина волны равна

$$\lambda = (2\pi c)^{-1/2} \int_0^{\varphi_{\text{extr}}} \left\{ \int_0^{\varphi} [n_e(\varphi') - Zn_i(\varphi')] d\varphi' \right\}^{-1/2} d\varphi. \quad (8.3.3.2)$$

В особом случае, когда плотность заряда и электрическое поле обращаются в нуль в одной и той же точке ( $n_{e0} = Zn_{i0}$ ), соотношения (8.2.3.3), (8.2.3.4), (8.2.3.6) описывают уединенную волну, на структуре которой мы остановимся несколько подробнее.

Заметим прежде всего, что вдали от гребня волны ( $|x - Vt| \rightarrow \infty$ ) распределение потенциала в уединенной волне в случае неравновесной плазмы определяется, согласно этим соотношениям, той же формулой (8.2.3.9), что и в случае плазмы с максвелловскими распределениями частиц; только в случае неравновесной плазмы для электронного дебаевского радиуса  $a_e$  следует пользоваться выражением (8.3.1.2) или эквивалентным ему выражением

$$a_e = (4\pi e D^{(1)})^{-1/2}. \quad (8.3.3.3)$$

Мы видим, что и в случае неравновесной плазмы уединенная волна движется (в лабораторной системе отсчета) со сверхзвуковой скоростью ( $V > v_{s0}$ ,  $v_{s0}$  — значение скорости ионного звука при

$n_1 = n_{i0}$ ), причем возмущение вдали от гребня волны убывает по экспоненциальному закону.

Полагая в (8.2.3.4), (8.3.3.1)  $n_{e0} = Zn_{i0}$ ,  $u_0 = -V$ , получим уравнение, определяющее величину  $\varphi_{\text{extr}}$ :

$$\int_0^{\varphi_{\text{extr}}} \{n_e(\varphi) - n_{e0}(1 - 2Ze\varphi/m_i V^2)^{-1/2}\} d\varphi = 0. \quad (8.3.3.4)$$

При максвелловском распределении электронов по скоростям последнее уравнение (принимаящее в этом случае вид (8.2.3.10)), как указывалось выше, имеет решение  $\varphi_{\text{extr}} > 0$ . При этом вместе с потенциалом возрастают, очевидно, плотности ионов и электронов (*уединенная волна сжатия*).

Возможны, однако, такие распределения электронов по скоростям, при которых уравнение (8.3.3.4) имеет решение не в области положительных, а в области отрицательных значений потенциала  $\varphi_{\text{extr}}$ . При этом плотности ионов и электронов в уединенной волне убывают (*уединенная волна разрежения*). Такой случай реализуется, в частности, для распределений, имеющих вид  $F_0(v) = \text{const}(v^2 + v_0^2)^{-\beta}$ , где  $3/2 < \beta < 2$ .

Покажем, что уединенная волна сжатия возникает при функциях распределения, приводящих к увеличению градиентов на участках сжатия (нормальный случай), а уединенная волна разрежения — при функциях распределения, приводящих к увеличению градиентов на участках разрежения (аномальный случай).

Заметим, что подынтегральное выражение в соотношении (8.3.3.4) обращается в нуль при  $\varphi = 0$  и при  $\varphi = \varphi_1$ , где  $\varphi_1$  лежит в интервале  $(0, \varphi_{\text{extr}})$ . Поэтому величина

$$A = \frac{d}{d\varphi} \left\{ n_e^{-2}(\varphi) - n_{e0}^{-2} \left( 1 - \frac{2Ze\varphi}{m_i V^2} \right) \right\}$$

обращается в нуль при некотором значении  $\varphi = \varphi_2$ , лежащем в интервале  $(0, \varphi_1)$ . Учитывая, что в силу условия  $V > v_{s0}$  величина  $A$  при  $\varphi = 0$  отрицательна, имеем

$$(\text{sgn } \varphi_{\text{extr}}) \frac{d^2}{d\varphi^2} (n_e(\varphi))^{-2} > 0. \quad (8.3.3.5)$$

Кроме того, профиль простой волны искажается в нормальном направлении, если выражение (8.3.2.4) положительно, и в аномальном направлении, если оно отрицательно, причем, согласно (8.3.3.5), это выражение имеет тот же знак, что и величина  $\varphi_{\text{extr}}$  \*).

\*) Функция  $\frac{d^2(n_e(\varphi))^{-2}}{d\varphi^2}$  предполагается монотонной; в случае немонотонных функций градиенты в простой волне могут, как указывалось выше, возрастать в зависимости от величины возмущения и на участках сжатия, и на участках разрежения.

Если по какой-либо причине нарушилась симметрия пространственного распределения физических величин в плазме, то возникает волна, передний фронт которой имеет ту же форму, что и передний фронт уединенной волны, но позади гребня волны возмущение не спадает экспоненциально, а осциллирует (квазиударная волна).

В случае уединенной волны сжатия такой причиной, нарушающей симметрию пространственного распределения величин и приводящей к возникновению квазиударной волны сжатия, может

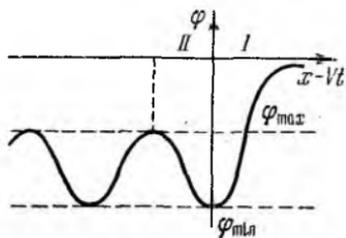


Рис. 8.3.1. Распределение электростатического потенциала в квазиударной волне разрежения.

служить отражение ионов от образуемого волной потенциального барьера. В случае уединенной волны разрежения аналогично может происходить отражение электронов от образуемого волной потенциального барьера; в результате может возникнуть квазиударная волна разрежения.

Профиль квазиударной волны разрежения представлен схематически на рис. 8.3.1. Распределение величин на переднем фронте волны (область I) описывается по-прежнему уравнениями (8.2.3.3), (8.2.3.4), (8.2.3.6) (с  $n_{e0} = Zn_{i0}$  и  $u_0 = -V$ ), причем экстремум потенциала  $\varphi_{extr} \equiv \varphi_{min}$  (являющийся в этом случае минимумом) определяется из соотношения (8.3.3.4). В области II уравнение (8.2.3.3) должно быть заменено соотношением

$$E^2 = 8\pi e \int_{\varphi_{min}}^{\varphi} [n_e^+(\varphi) - Zn_i(\varphi)] d\varphi, \quad (8.3.3.6)$$

где  $n_e^+ \equiv n_e - n_{er}$  ( $n_{er}$  — плотность отраженных электронов). Отсюда для максимального значения потенциала в области осцилляций  $\varphi_{max}$  и для длины волны осцилляций  $\lambda$  получим соотношения

$$\int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} [n_e^+(\varphi) - Zn_i(\varphi)] d\varphi = 0. \quad (8.3.3.7)$$

$$\lambda = (2\pi e)^{-1/2} \int_{\varphi_{min}}^{\varphi_{max}} \left\{ \int_{\varphi}^0 [n_e^+(\varphi') - Zn_i(\varphi')] d\varphi' \right\}^{-1/2} d\varphi. \quad (8.3.3.8)$$

Аналогичную структуру имеет квазиударная волна сжатия (при этом, очевидно,  $\varphi_{extr} \equiv \varphi_{max} > 0$ ). Чтобы определить характеризи-

ющие эту волну величины, следует сделать в формулах (8.3.3.6) — (8.3.3.8) замены  $n_{er} \rightarrow -Zn_{ir}$ ,  $\varphi_{max} \rightarrow \varphi_{min}$ ,  $\varphi_{min} \rightarrow \varphi_{max}$  ( $n_{ir}$  — плотность отраженных ионов). Разумеется, осцилляции в квазиударных волнах обоих типов будут в результате диссипативных эффектов медленно затухать.

Как отмечалось выше, уединенная, а следовательно, и квазиударная волна движется по отношению к невозмущенной плазме со сверхзвуковой скоростью ( $V > v_{s0}$ ). По отношению же к плазме, находящейся позади гребня волны, квазиударная волна движется со скоростью, меньшей скорости звука ( $u < v_s$ ). В самом деле, выражение в правой части (8.3.3.6) положительно и обращается в нуль в точках  $\varphi = \varphi_{min}$  и  $\varphi = \varphi_{max}$ ; поэтому оно должно иметь отрицательную вторую производную. Вместе с тем эта производная равна  $8\pi eD^{(1)}(1 - v_s^2/u^2)$ .

**8.3.4. Многопоточковые течения в неравновесной плазме.** Рассмотрим теперь нелинейные многопоточковые течения в неравновесной плазме, в которой средняя энергия электронов значительно превосходит среднюю энергию ионов [28]. Как отмечалось выше, такие течения могут возникать при распространении волн конечной амплитуды в плазме, содержащей первоначально лишь один ионный поток. Кроме того, многопоточковые течения могут возникать и при распространении в плазме уединенных и квазиударных волн. В частности, в случае квазиударной волны сжатия ионы, отражаясь от создаваемого волной потенциального барьера, могут образовывать перед фронтом волны три потока. В случае уединенной (или квазиударной) волны разрежения возможно появление многопоточкового течения внутри возмущенной области, создаваемого захваченными волной ионами.

Особенностью плазмы с несколькими потоками ионов является возможность возникновения в ней неустойчивости ионно-звуковых колебаний. При этом, как будет показано ниже, могут реализоваться два случая: либо волна удалится с течением времени от пространственной границы области неустойчивости, либо на границе этой области возникнет разрыв.

При описании многопоточковых течений плазмы будем исходить из гидродинамических уравнений с самосогласованным полем для ионов каждого потока. Ограничиваясь одномерными движениями, имеем

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{eZ_i}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad (8.3.4.1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(n_i u_i) = 0, \quad (8.3.4.2)$$

где  $n_i$  и  $u_i$  — плотность и гидродинамическая скорость ионов  $i$ -го потока ( $i=1, 2, \dots, N$ ),  $m_i$  и  $eZ_i$  — масса и заряд иона, при-

надлежащего к  $i$ -му потоку (ось  $x$  выбрана в направлении распространения волн; здесь и далее мы опускаем индекс  $x$  у компоненты скорости  $u_x$ ). Вместе с уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 4\pi e \left( n_e - \sum_{i=1}^N Z_i n_i \right) = 0 \quad (8.3.4.3)$$

и уравнением состояния электронов (8.3.1.5) соотношения (8.3.4.1), (8.3.4.2) образуют полную систему уравнений, описывающих многопоточковые течения плазмы.

В случае крупномасштабных движений, когда длина, на которой существенно меняются характеризующие плазму величины, велика по сравнению с электронным дебаевским радиусом, в (8.3.4.3) можно не учитывать первого слагаемого. При этом уравнения (8.3.4.1) — (8.3.4.3) допускают решения в виде простых волн, соответствующие таким движениям плазмы, при которых возмущения всех величин распространяются с одной и той же скоростью.

В случае простых волн все величины, характеризующие плазму, можно, как известно, представить как функции одной из них, которая в свою очередь является функцией  $x$  и  $t$ . Выбирая в качестве такой величины потенциал  $\varphi$ , получим для функций  $n_i = n_i(\varphi)$ ,  $u_i = u_i(\varphi)$  систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_i}{d\varphi} &= \frac{eZ_i}{m_i} \frac{n_i}{(V - u_i)^2}, \quad \frac{du_i}{d\varphi} = \frac{eZ_i}{m_i} \frac{1}{V - u_i}, \\ n_e &= \sum_{i=1}^N Z_i n_i, \end{aligned} \right\} \quad (8.3.4.4)$$

где  $V \equiv V(\varphi)$  — фазовая скорость волны. Она определяется из условия разрешимости этой системы, т. е. из уравнения

$$\Phi(V) = 1, \quad (8.3.4.5)$$

где

$$\Phi(V) = \sum_{i=1}^N \frac{v_{si}^2}{(V - u_i)^2}; \quad v_{si}^2 = \frac{eZ_i^2 n_i}{m_i D^{(1)}} \quad (8.3.4.6)$$

(здесь, как и ранее, используется обозначение  $D^{(j)} = \partial^j n_e / \partial \varphi^j$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots$ ).

Дисперсионное уравнение (8.3.4.5), являющееся алгебраическим уравнением степени  $2N$  ( $N$  — число ионных потоков), имеет  $2N$  корней, из которых два — наименьший и наибольший — всегда вещественны, а остальные  $2(N-1)$  корней могут быть как

вещественными, так и комплексными. График функции  $\Phi(V)$  представлен на рис. 8.3.2.

Если все  $2N$  корней дисперсионного уравнения (8.3.4.5) вещественны, то ионно-звуковые колебания будут устойчивыми. При этом в плазме могут распространяться простые волны  $2N$  типов, характеризующиеся различными фазовыми скоростями  $V_{\pm i}$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ). Мы обозначаем через  $V_{\pm i}$  ближайšie к  $u_i$  корни дисперсионного уравнения (8.3.4.5), причем  $V_{-i} < u_i < V_{+i}$ .

На участках сжатия в каждой из простых волн возрастают потенциал  $\varphi$ , плотность электронов  $n_e$  и плотности  $n_i$  ( $i=1, 2, \dots, N$ ) ионов, принадлежащих к каждому из  $N$  потоков; на участках разрежения указанные величины убывают.

Заметим, что если фазовая скорость какой-либо волны близка к  $u_i$ , то ионы  $i$ -го потока, как видно из уравнений (8.3.4.4), взаимодействуют с этой волной особенно интенсивно.

Определим, как изменяется форма ионно-звуковой волны при ее движении в плазме. Используя (8.3.4.4)–(8.3.4.6), получим

$$\frac{dV}{d\varphi} = \frac{D^{(1)}}{n_e} \left( -\frac{\partial\Phi}{\partial V} \right)^{-1} \left\{ 3G - \frac{n_e D^{(2)}}{(D^{(1)})^2} \right\}, \quad (8.3.4.7)$$

где

$$G = n_e \sum_{i=1}^N \frac{v_{si}^4}{Z_i n_i (V - u_i)^4}. \quad (8.3.4.8)$$

Знаменатель в этом выражении всегда положителен для волн с фазовой скоростью  $V_{+i}$  и отрицателен для волн с фазовой скоростью  $V_{-i}$ ; числитель же в зависимости от характера электронной функции распределения и, следовательно, в зависимости от вида уравнения состояния  $n_e = n_e(\varphi)$  может иметь оба знака.

Легко убедиться, что  $G \geq 1$  (случай  $G=1$  реализуется, если в плазме существует лишь один ионный поток, т. е.  $N=1$ ). Поэтому в случае электронных распределений, для которых  $n_e D^{(2)} (D^{(1)})^{-2} < 3$ , разность в фигурных скобках в (8.3.4.7) всегда положительна. Чтобы проанализировать, как меняется в этом случае профиль волны, движущейся со скоростью  $V_{+i}$  или  $V_{-i}$ , удобно перейти к системе отсчета, в которой ионы  $i$ -го потока

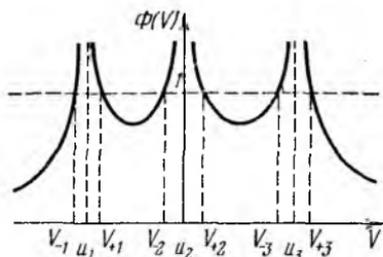


Рис. 8.3.2. График функции  $\Phi(V)$  для случая трех ионных потоков.

Уравнение  $\Phi(V)=1$  определяет фазовые скорости шести ветвей колебаний  $V_{-1}, V_{+1}, V_{-2}, V_{+2}, V_{-3}, V_{+3}$  в плазме с тремя ионными потоками ( $u_1, u_2, u_3$  — скорости потоков).

покоятся. В этой системе участки с большей плотностью движутся в обеих указанных волнах с большей по абсолютной величине скоростью. Поэтому, как и в обычной гидродинамике, на участках сжатия возникают разрывы (или дополнительные ионные потоки); автомодельные волны являются волнами разрежения.

Случай  $3G - n_e D^{(2)} (D^{(1)})^{-2} > 0$  мы будем называть нормальным случаем. Нормальный случай реализуется, в частности, при максвелловском распределении электронов по скоростям [29]. Как показано в п. 8.3.2, существует также класс функций распределения, для которых  $n_e D^{(2)} (D^{(1)})^{-2} > 3$ , так что разность в фигурных скобках в (8.3.4.7) может быть отрицательна. При этом разрывы возникают не на участках сжатия, как в нормальном случае, а на участках разрежения; автомодельные волны представляют собой волны сжатия (аномальный случай) [28]. Этот случай может реализовываться, в частности, для распределений, имеющих вид

$$F_e(v) = \text{const} (v^2 + v_0^2)^{-\beta}, \quad \text{где } 3/2 < \beta < 2.$$

Подчеркнем, что в нормальном (аномальном) случае разрывы возникают на тех участках волны с фазовой скоростью  $V_{\pm i}$ , которые являются участками сжатия (разрежения) для наблюдателя, двигающегося вместе с  $i$ -м потоком ионов. Разумеется, понятие участков сжатия (разрежения) не инвариантно относительно перехода в движущуюся систему отсчета. Например, наблюдателю, движущемуся со скоростью, большей  $V_{+i}$  (в частности, движущемуся вместе с  $(i+1)$ -м потоком ионов), участки сжатия представляются участками разрежения и наоборот.

Если среди корней дисперсионного уравнения (8.3.4.5) есть комплексные корни, то ионно-звуковые колебания в плазме неустойчивы. Легко видеть, что при приближении к границе области устойчивости фазовые скорости волн каких-либо двух типов приближаются друг к другу,  $V_{+(i-1)} \rightarrow V_{-i} \rightarrow V_c$ , причем граница области устойчивости и критическая фазовая скорость определяются из уравнений

$$\Phi(V_c) = 1, \quad \Phi'(V_c) = 0 \quad (8.3.4.9)$$

(штрих у функции  $\Phi$  означает дифференцирование по  $V$ ).

В частности, в плазме, содержащей два ионных потока, условие устойчивости, как следует из (8.3.4.9), имеет вид]

$$(u_1 - u_2)^2 \geq u_c^2, \quad (8.3.4.10)$$

где

$$u_c = (v_{s1}^2 + v_{s2}^2)^{1/2} \quad (8.3.4.10')$$

и  $v_{s1} (v_{s2})$  — скорость ионного звука для ионов первого (второго) потока. Вблизи границы области устойчивости имеем

$$\left. \begin{aligned} V_{1,-2} &= V_c \mp \frac{1}{\sqrt{3}} (u_c v_{s1} v_{s2})^{1/2} \sqrt{\left(\frac{u_1 - u_2}{u_c}\right)^2 - 1}, \\ V_c &= u_c^{-1/2} (u_1 v_{s1}^2 + u_2 v_{s2}^2). \end{aligned} \right\} \quad (8.3.4.11)$$

Чтобы исследовать эволюцию волны вблизи границы области устойчивости, заметим, что величина  $W = \pm \Phi' (V_{\pm i})$ , положительная в области устойчивости и обращающаяся в нуль на ее границе, является, как и все величины в простой волне, функцией  $x - Vt$ . Поэтому неустойчивость не может возникнуть в простой волне, если в начальный момент плазма была устойчивой во всем пространстве; пространственная граница области неустойчивости  $x = x_c(t)$ , определяемая из уравнения  $W(x_c(t), t) = 0$ , сносится вдоль характеристики.

Учитывая, что

$$\frac{dW}{d\varphi} = \pm \Phi''(V_{\pm i}) \frac{dV}{d\varphi}, \quad \Phi'' > 0,$$

легко видеть, что величина  $dW/d\varphi$  положительна (отрицательна) в нормальном (аномальном) случае. Поэтому, если в нормальном (аномальном) случае пространственная граница области устойчивости в начальный момент проходила по участку сжатия (разрежения), то в дальнейшем на этой границе разовьется разрыв. Если же граница области устойчивости приходилась на участок разрежения (сжатия), то расстояние между гребнем простой волны и точкой  $x_c(t)$  с течением времени будет увеличиваться.

Заметим, что на границе области устойчивости величина  $dV/d\varphi$ , характеризующая скорость изменения профиля простой волны (и, в частности, определяющая момент возникновения разрывов), обращается, согласно (8.3.4.7), (8.3.4.9), в бесконечность.

Рассмотрим подробнее двухпоточковые течения в том случае, когда плотность одного из потоков мала ( $n_2 \ll n_1$ ). При этом могут распространяться простые волны четырех типов. Волны двух типов имеют фазовые скорости  $V_{\pm 1} = u_1 \pm v_{s1}$ , близкие к скорости ионного звука в плазме с  $n_2 = 0$ , движущейся со скоростью  $u_1$ . Для таких волн, в соответствии с (8.3.2.4),

$$\frac{dV_{\pm 1}}{d\varphi} = \pm \frac{D^{(1)}v_{s1}}{2n_0} \left\{ 3 - \frac{n_0 D^{(2)}}{(D^{(1)})^2} \right\}. \quad (8.3.4.12)$$

Поэтому в зависимости от вида электронной функции распределения разрывы могут возникать либо на участках сжатия (нормальный случай), либо на участках разрежения (аномальный случай).

Волны двух других типов имеют фазовые скорости, близкие к  $u_2$ :

$$V_{\pm 2} = u_2 \pm v_{s2} \{1 - v_{s1}^2/(u_2 - u_1)^2\}^{-1/2}. \quad (8.3.4.13)$$

Уравнения (8.3.4.4) принимают при этом вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{dn_1}{d\varphi} &= \frac{eZ_1 n_1}{m_1 (u_2 - u_1)^2}, & \frac{dn_2}{d\varphi} &= \frac{eZ_2 n_2}{m_2 v_{s2}^2} \left\{ 1 - \frac{v_{s1}^2}{(u_2 - u_1)^2} \right\}, \\ \frac{du_1}{d\varphi} &= \frac{eZ_1}{m_1 (u_2 - u_1)}, & \frac{du_2}{d\varphi} &= \pm \frac{eZ_2}{m_2 v_{s2}} \left\{ 1 - \frac{v_{s1}^2}{(u_2 - u_1)^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (8.3.4.14)$$

Для производных  $dV_{\pm 2}/d\varphi$ , согласно (8.3.4.7) получим

$$\frac{dV_{\pm 2}}{d\varphi} = \pm \frac{3D^{(1)}v_{s2}}{2Z_2n_2} \left\{ 1 - \frac{v_{s1}^2}{(u_2 - u_1)^2} \right\}^{1/2} \quad (8.3.4.15)$$

Величина  $dV/d\varphi$ , характеризующая скорость изменения формы волны, в волнах этого типа велика (она пропорциональна  $n_2^{-1/2}$ ), причем, независимо от вида электронной функции распределения, возможно лишь обычное направление изменения профиля волны (нормальный случай).

Заметим, что поток ионов малой плотности очень интенсивно взаимодействует с такими волнами. В частности,  $\frac{dn_2}{dn_1} \gg \frac{n_2}{n_1}$ .

## § 8.4. Нелинейные волны в магнитоактивной плазме с горячими электронами

**8.4.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в плазме, находящейся в магнитном поле.** В предыдущем параграфе были рассмотрены нелинейные волны в свободной неравновесной плазме с горячими электронами. Теперь мы перейдем к изучению нелинейных волн в плазме с горячими электронами, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле [30], причем рассмотрим случаи как равновесной, так и неравновесной плазмы.

При описании движения ионов в магнитоактивной плазме с горячими электронами мы можем по-прежнему исходить из гидродинамических уравнений с самосогласованным полем, а при описании движения электронов — из кинетического уравнения для электронной функции распределения  $F_e(\mathbf{v})$ ,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \left( \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} - \frac{Ze}{m_i c} [\mathbf{u} \mathbf{B}_0] + \frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} = 0, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div} (n_i \mathbf{u}) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.1.1)$$

$$\mathbf{v} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m_e c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_0] \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial F_e}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (8.4.1.2)$$

где  $\mathbf{B}_0$  — внешнее магнитное поле,  $Ze$  и  $m_i$  — заряд иона и его масса. Добавляя к этим уравнениям уравнение Пуассона (8.2.1.3), получим полную систему уравнений, описывающих нелинейные движения неравновесной плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле.

Мы будем далее интересоваться случаем сильных магнитных полей, когда  $v_A/c \gg Za_e km_e/m_i$ , где  $v_A = B_0(4\pi n_i m_i)^{-1/2}$  — альвеновская скорость,  $a_e$  — электронный дебаевский радиус,  $k^{-1}$  — длина, на которой существенно меняются величины, характеризующие плазму. В этом случае (о котором обычно говорят, как о случае

сильно замагниченных электронов) удобно перейти от кинетического уравнения (8.4.1.2) к усредненному по быстрому вращению электронов уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{e}{m_e} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial v_z}\right) f_e = 0, \quad (8.4.1.3)$$

где  $f_e$  — функция распределения, проинтегрированная по перпендикулярным к магнитному полю составляющим скорости электронов («одномерная» функция распределения)

$$f_e(v_z^2) = \int F_e(\mathbf{v}) dv_x dv_y \quad (8.4.1.4)$$

(ось  $z$  выбрана в направлении внешнего магнитного поля).

Решая уравнение (8.4.1.3), имеем

$$f_e(v_z^2; \mathbf{r}, t) = f_0\left(v_z^2 - \frac{2e}{m_e} \varphi(\mathbf{r}, t)\right). \quad (8.4.1.5)$$

Интегрируя далее это соотношение по скоростям электронов, получим «уравнение состояния» электронов

$$n_e = n_e(\varphi), \quad (8.4.1.6)$$

связывающее плотность электронов с электростатическим потенциалом.

Система уравнений (8.4.1.1), (8.2.1.3), (8.4.1.6) описывает нелинейные движения плазмы с произвольным распределением электронов по скоростям, если средняя энергия электронов значительно превосходит среднюю энергию ионов, причем в зависимости от вида электронной функции распределения различный вид будет иметь уравнение состояния (8.4.1.6).

Рассмотрим прежде всего случай не очень сильных магнитных полей, когда  $v_A/c \ll a_0 k$ , но по-прежнему  $v_A/c \gg Z a_0 k m_e / m_i$ . В этом случае, о котором обычно говорят, как о случае слабо замагниченных ионов, в первом из уравнений (8.4.1.1) можно не учитывать слагаемого с магнитным полем. Рассматривая одномерные движения плазмы и вводя переменную  $\xi = \mathbf{Vr}/V$ , перепишем уравнения (8.4.1.1), (8.2.1.3) в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial \xi}\right) u + \frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0; \quad \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \xi} (n_i u) = 0; \quad (8.4.1.7)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} - 4\pi e (n_e - Z n_i) = 0, \quad (8.4.1.8)$$

где  $u = \mathbf{Vu}/V$  и  $V$  — скорость волны.

Система уравнений (8.4.1.6)—(8.4.1.8) полностью аналогична системе уравнений, описывающих нелинейные движения неравновесной плазмы в отсутствие магнитного поля. Единственное существенное различие между ними заключается в виде уравнения

состояния: в магнитных полях, удовлетворяющих условию  $v_A/c \gg Z a_0 k m_e / m_1$ , величина  $n_e(\varphi)$  является функционалом «одномерной» функции распределения электронов  $f_e$ , а не полной функции распределения  $F_e$ , как в случае  $B_0=0$ .

Нелинейные движения неравновесной плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля подробно изучены в § 8.3. Указанная выше аналогия позволяет непосредственно перенести все выводы этого параграфа на случай плазмы, находящейся в не очень сильных магнитных полях ( $v_A/c \ll a_0 k$ ). В частности, нелинейные волны в такой плазме должны иметь различный характер в нормальном случае, когда величина

$$Q = 3 - \frac{n_e D^{(2)}}{(D^{(1)})^2} \quad (8.4.1.9)$$

положительна, и в аномальном, когда величина  $Q$  отрицательна.

В нормальном случае разрывы (или многопоточные течения) возникают в простой волне на участках сжатия, автомодельные волны являются волнами разрежения, уединенная волна представляет собой волну сжатия. В результате отражения ионов от образуемого такой волной потенциального барьера может возникнуть квазиударная волна сжатия. Нормальный случай реализуется, в частности, при максвелловском распределении электронов по скоростям.

В аномальном случае разрывы (или многопоточные течения) возникают в простой волне на участках разрежения, автомодельные волны являются волнами сжатия, уединенная волна представляет собой волну разрежения. В результате отражения электронов от образуемого такой волной потенциального барьера может возникнуть квазиударная волна разрежения. Аномальный случай реализуется, в частности, если «одномерная» электронная функция распределения имеет вид

$$f_e = \text{const} (v_z^2 + v_0^2)^{-\beta},$$

где  $1/2 < \beta < 1$ .

Наряду с нормальным и аномальным случаями возможен (как и в отсутствие магнитного поля) также и промежуточный случай  $Q=0$ . При этом профиль волны при ее движении не искажается и разрывы не возникают. Случай  $Q=0$  реализуется, в частности, если «одномерная» электронная функция распределения по скоростям имеет вид

$$f_e = \text{const} (v_z^2 + v_0^2)^{-1}.$$

**8.4.2. Простые магнитозвуковые волны.** Рассмотрим теперь нелинейные волны в случае сильного магнитного поля ( $v_A/c \gg a_0 k$ ). В этом случае (о котором обычно говорят как о случае сильно замагниченных ионов) удобно перейти от гидродинамических урав-

нений (8.4.1.1) к усредненным по быстрому вращению ионов уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial z} \right) u_x + \frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial z} (n_i u_x) = 0, \quad [\mathbf{B}_0, \text{grad}(\epsilon_t + Ze\varphi)] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.2.1)$$

где  $\epsilon_t$  — среднее значение кинетической энергии циклотронного вращения ионов,  $\epsilon_t = 1/2 m_i (\bar{u}^2 - u_x^2)$ .

Эти уравнения вместе с уравнением Пуассона (8.4.1.8) и уравнением состояния электронов (8.4.1.6) образуют полную систему уравнений, описывающих нелинейные движения плазмы с горячими электронами, находящейся в сильном магнитном поле (нелинейные магнитозвуковые волны).

В случае крупномасштабных движений ( $a_0 k \ll 1$ ) в уравнении (8.4.1.8) можно не учитывать первого слагаемого. При этом уравнения (8.4.1.6), (8.4.1.8), (8.4.2.1) допускают решения в виде простых волн. В случае простых волн, как мы уже неоднократно говорили, все характеризующие плазму величины могут быть представлены в виде функций одной из них, например плотности ионов  $n_i$ , которая в свою очередь является функцией  $\xi$ ,  $t$ . Уравнения (8.4.2.1) превращаются при этом в систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций  $\varphi(n_i)$ ,  $u_x(n_i)$ ,  $\epsilon_t(n_i)$ :

$$\frac{du_x}{dn_i} = \frac{v_s}{n_i}, \quad \frac{d\epsilon_t}{dn_i} = -\frac{m_i v_s^2}{n_i}, \quad \frac{d\varphi}{dn_i} = \frac{m_i v_s^2}{eZn_i}, \quad (8.4.2.2)$$

а фазовая скорость  $V = V(n_i)$  определяется из условия разрешимости этой системы,

$$V = (u_x + v_s) \cos \theta, \quad (8.4.2.3)$$

где  $v_s$  — скорость ионного звука, определяемая формулой (8.3.2.2), и  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и магнитным полем (мы полагаем для определенности  $\theta < 1/2\pi$ ).

Соотношения (8.4.2.2), (8.4.2.3) позволяют исследовать направление изменения характеризующих плазму величин и проследить за развитием возмущения конечной амплитуды. Заметим прежде всего, что на участках сжатия возрастают потенциал  $\varphi$  и плотности электронов и ионов; на участках разрежения эти величины убывают. Что же касается  $\epsilon_t$ , то эта величина возрастает на участках разрежения и убывает на участках сжатия.

Чтобы установить, как меняется форма магнитозвуковой волны при ее движении в плазме, вычислим производную  $dV/dn_i$ . Используя (8.4.2.2), (8.4.2.3), получим

$$\frac{dV}{dn_i} = \frac{v_s}{2n_i} Q \cos \theta, \quad (8.4.2.4)$$

где величина  $Q$  определяется формулой (8.4.1.9). В зависимости от знака величины  $Q$ , т. е. в зависимости от вида электронной функции распределения, производная  $dV/dn_1$  может быть положительной (нормальный случай), отрицательной (аномальный случай) или равной нулю. (Напомним, что как в обычной, так и в магнитной гидродинамике производная  $dV/dn_1$  всегда положительна.)

Если  $dV/dn_1 > 0$ , то (как и в магнитной гидродинамике) участки с большей плотностью движутся с большей скоростью; поэтому на участках сжатия возникают разрывы (или многопоточковые течения). Автомоделльные волны являются при этом волнами разрежения.

Если  $dV/dn_1 = 0$ , то при распространении волны все участки движутся с одной и той же скоростью; поэтому профиль волны не искажается и разрывы не возникают.

Наконец, если  $dV/dn_1 < 0$ , то участки с большей плотностью движутся с меньшей скоростью. При этом разрывы (или многопоточковые течения) возникают на участках разрежения и автомоделльные волны являются волнами сжатия.

**8.4.3. Стационарные магнитозвуковые волны.** При распространении в плазме длинноволновых магнитозвуковых колебаний с линейным законом дисперсии профиль волны, как мы видели, меняется со временем (исключение составляет плазма с электронной функцией распределения вида  $f_e = \text{const} (v_x^2 + v_y^2)^{-1}$ ; в такой плазме магнитозвуковая волна распространяется без искажения формы).

На участках волны, на которых характерный размер неоднородности сравним с электронным дебаевским радиусом ( $a_e k \sim 1$ ), необходим учет дисперсии звука, описываемой первым слагаемым в уравнении (8.4.1.8). При наличии дисперсии звука становятся возможными, как известно, волны стационарного профиля: уединенные, периодические и квазиударные.

Переходя к изучению стационарных магнитозвуковых волн, заметим прежде всего, что для таких волн нетрудно получить решение уравнений (8.4.2.1) в замкнутой форме. Используя (8.4.1.8), получим полную систему уравнений, описывающих стационарную волну:

$$\left. \begin{aligned} n_i (V - u_x \cos \theta) &= n_{i0} V; \\ \frac{1}{2} m_i \left( u_x - \frac{V}{\cos \theta} \right)^2 + Ze\varphi &= \frac{m_i V^2}{2 \cos^2 \theta}; \\ \epsilon_i + Ze\varphi &= \epsilon_0; \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} = 4\pi e \{ n_e(\varphi) - Zn_i \}, \end{aligned} \right\} \quad (8.4.3.1)$$

где  $V$  — скорость волны,  $\theta$  — угол между направлением распространения волны и магнитным полем;  $n_{i0}$  и  $\epsilon_0$  — значения плотности ионов и средней энергии их циклотронного вращения в точке,

в которой  $u_z = 0$  (электростатический потенциал в точке, где  $u_z = 0$ , принят равным нулю).

Решая эти уравнения, получим

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 = 8\pi e \int_0^{\varphi} [n_e(\varphi) - Zn_i(\varphi)] d\varphi, \quad (8.4.3.2)$$

где

$$n_i(\varphi) = n_{i0} (1 - 2Ze\varphi \cos^2 \theta / m_i V^2)^{-1/2}. \quad (8.4.3.3)$$

Интегрируя далее (8.4.3.2), получим соотношение, определяющее потенциал  $\varphi$  как (неявную) функцию координат и времени

$$\xi - Vt = \pm (8\pi e)^{-1/2} \left\{ \int_0^{\varphi} [n_e(\varphi') - Zn_i(\varphi')] d\varphi' \right\}^{-1/2} d\varphi. \quad (8.4.3.4)$$

В общем случае, когда  $n_{e0} \neq Zn_{i0}$ , это соотношение определяет распределение потенциала в периодической магнитозвуковой волне. Амплитуда такой волны  $|\varphi_{\text{extr}}|$  и длина волны  $\lambda$  определяются уравнениями (8.3.3.1), (8.3.3.2), в которые в качестве функции  $n_i(\varphi)$  следует подставить выражение (8.4.3.3).

Когда плотность заряда обращается в нуль одновременно со скоростью  $u_z$  (т. е.  $n_{e0} = Zn_{i0}$ ), то  $\lambda \rightarrow \infty$  и периодическая волна вырождается в уединенную волну. Легко видеть, что все соотношения, описывающие уединенную магнитозвуковую волну, могут быть получены из соответствующих соотношений, описывающих уединенную ионно-звукую волну в отсутствие магнитного поля, если произвести в последних замену  $V$  на  $V/\cos \theta$ .

Это позволяет, используя результаты предыдущего параграфа, сразу сделать ряд выводов о структуре уединенной магнитозвуковой волны.

Во-первых, возмущение в уединенной магнитозвуковой волне убывает вдали от гребня волны (при  $|\xi - Vt| \rightarrow \infty$ ) по экспоненциальному закону

$$\varphi \sim \exp \left\{ -\frac{|\xi - Vt|}{a_e} \sqrt{1 - v_{s0}^2 \cos^2 \theta / V^2} \right\}, \quad (8.4.3.5)$$

где  $v_{s0}$  — значение скорости ионного звука при  $|\xi - Vt| \rightarrow \infty$  и  $a_e$  — электронный дебаевский радиус, определяемый формулой (8.3.3.3).

Отсюда, в частности, легко заключить, что уединенная волна движется относительно невозмущенной плазмы со скоростью, превосходящей скорость магнитозвуковых волн малой амплитуды ( $V > v_s |\cos \theta|$ ).

Далее экстремальное значение потенциала в уединенной магнитозвуковой волне  $\varphi_{\text{extr}}$  определяется, очевидно, из уравнения

$$\int_0^{\varphi_{\text{extr}}} [n_e(\varphi) - Zn_{i0}(1 - 2Ze\varphi \cos^2 \theta / m_i V^2)^{-1/2}] d\varphi = 0. \quad (8.4.3.6)$$

В случае максвелловского распределения электронов это уравнение имеет решение в области положительных значений  $\varphi$ ,  $\varphi_{\text{extr}} > 0$ . Вместе с потенциалом в такой волне возрастают, очевидно, плотности ионов и электронов (уединенная волна сжатия).

Возможны также и такие распределения электронов по скоростям, при которых уравнение (8.4.3.6) имеет решение не с положительным, а с отрицательным  $\varphi_{\text{extr}}$ . Тогда плотности ионов и электронов в уединенной волне убывают (уединенная волна разрежения). Этот случай реализуется, в частности, для распределений, имеющих в основной области скоростей вид  $f_e = \text{const} (v_x^2 + v_0^2)^{-\beta}$ , где  $1/2 < \beta < 1$ .

Можно показать, что в плазме, находящейся в магнитном поле, уединенная волна сжатия возникает в случае электронных распределений, приводящих к увеличению градиентов на участках сжатия (нормальный случай), а уединенная волна разрежения — в случае электронных распределений, приводящих к увеличению градиентов на участках разрежения (аномальный случай). Доказательство этого утверждения полностью аналогично изложенному в § 8.3 доказательству для случая свободной плазмы, и поэтому мы здесь его не приводим.

Если по какой-либо причине нарушилась симметрия пространственного распределения физических величин в плазме, то возникает волна, передний фронт которой имеет ту же форму, что и передний фронт уединенной волны, но позади гребня волны возмущение не спадает экспоненциально, а осциллирует (квазиударная волна). Как и в отсутствие магнитного поля, в случае уединенной волны сжатия (разрежения) такой причиной, нарушающей симметрию пространственного распределения величин и приводящей к возникновению квазиударной волны сжатия (разрежения), может быть отражение ионов (электронов) от образуемого волной потенциального барьера. Все соотношения, характеризующие квазиударную магнитозвуковую волну, нетрудно получить из соответствующих соотношений § 8.3, если подставить в последние функцию  $n_i(\varphi)$ , определяемую формулой (8.4.3.3); мы не будем поэтому приводить здесь соответствующих выражений.

Заметим в заключение, что уединенная, а следовательно, и квазиударная волна движутся по отношению к невозмущенной

плазме со скоростью, превосходящей скорость магнитозвуковой волны малой амплитуды ( $V > v_{sn} |\cos \theta|$ ). По отношению же к плазме, находящейся позади фронта волны, квазиударная волна движется со скоростью, меньшей магнитозвуковой скорости.

### § 8.5. Нелинейные низкочастотные волны в холодной плазме, находящейся в магнитном поле

**8.5.1. Уравнения, описывающие нелинейную волну в холодной магнитоактивной плазме.** В трех предыдущих параграфах мы изучали нелинейные волны в плазме с горячими электронами и показали, что в случае крупномасштабных возмущений профиль волны при ее движении искажается, что приводит к возникновению разрывов (или дополнительных ионных потоков). В коротковолновой же области возмущения в плазме с горячими электронами могут распространяться в виде волн стационарного профиля — периодических, уединенных и квазиударных.

Возможность распространения стационарных волн была существенно связана с дисперсией ионно-звуковых (или магнитозвуковых) колебаний. Длина дисперсии таких колебаний (т. е. тот характерный размер неоднородности, при котором дисперсионные эффекты начинают играть существенную роль) определяется электронным дебаевским радиусом; поэтому ширина фронта волны (уединенной или квазиударной) в плазме с горячими электронами совпадает по порядку величины с дебаевским радиусом.

Теперь мы рассмотрим нелинейные низкочастотные волны в холодной плазме, находящейся в магнитном поле. (Высокочастотные волны в холодной плазме были рассмотрены в § 8.1.) В такой плазме, как известно, могут распространяться колебания с линейным законом дисперсии в длинноволновой области, причем их фазовая скорость совпадает с альвеновской скоростью. При распространении такой волны, как мы увидим, профиль ее искажается, что приводит к возникновению разрывов (или многопоточковых течений). В коротковолновой же области в плазме могут распространяться возмущения в виде волн стационарного профиля. Возможность распространения стационарных волн по-прежнему существенно связана с дисперсионными эффектами. Длина дисперсии колебаний холодной плазмы, находящейся в магнитном поле, определяется выражением

$$l = (4\pi e^2 n_0)^{-1/2} \max \left\{ \sqrt{\frac{B^2}{4\pi n_0}}; \sqrt{m_e c^2} \right\},$$

где  $n_0$  — плотность электронов и  $B$  — магнитное поле. Ширина фронта волны (уединенной или квазиударной) должна по порядку величины совпадать с длиной  $l$ .

Мы ограничимся изучением нелинейных волн, распространяющихся в холодной плазме ( $T \ll B^2/8\pi n_e$ ;  $T$  — температура плазмы) поперек магнитного поля [31—34]. При этом можно исходить из гидродинамических уравнений для плотностей электронов и ионов  $n_e$ ,  $n_i$  и их скоростей  $u_e$ ,  $u_i$ :

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_{ex} \frac{\partial u_e}{\partial x} + \frac{e}{m_e c} [u_e \mathbf{B}] + \frac{e}{m_e} \mathbf{E} = 0, \quad (8.5.1.1)$$

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_e u_{ex}) = 0, \quad (8.5.1.2)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_{ix} \frac{\partial u_i}{\partial x} - \frac{Ze}{m_i c} [u_i \mathbf{B}] - \frac{Ze}{m_i} \mathbf{E} = 0, \quad (8.5.1.3)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (n_i u_{ix}) = 0; \quad (8.5.1.4)$$

ось  $x$  выбрана в направлении распространения волны.

Остановимся сперва на случае сильного магнитного поля, когда  $B^2/4\pi n_e \gg m_e c^2$  (случай слабого магнитного поля  $B^2/4\pi n_e \ll m_e c^2$  будет рассмотрен в п. 8.5.3). Тогда, решая уравнение (8.5.1.1), получим

$$u_e = cB^{-2} [\mathbf{E}\mathbf{B}]. \quad (8.5.1.5)$$

Легко убедиться, что при выполнении условия  $m_e c^2 \ll B^2/4\pi n_e \ll m_i c^2$  в уравнении (8.5.1.3) можно не учитывать силы Лоренца. Вводя электрический потенциал  $\varphi$ , удовлетворяющий уравнению Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - 4\pi e (n_e - Zn_i) = 0, \quad (8.5.1.6)$$

получим

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{Ze}{m_i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0 \quad (8.5.1.7)$$

(здесь и далее мы опускаем индекс  $x$  у компоненты скорости  $u_{ix}$ ).

Уравнения (8.5.1.4), (8.5.1.6), (8.5.1.7) полностью совпадают с аналогичными уравнениями §§ 8.2.8.3, описывающими движение плазмы в отсутствие магнитного поля.

Покажем теперь, что соотношения (8.5.1.2), (8.5.1.5) вместе с уравнениями Максвелла

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (8.5.1.8)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{4\pi e n_e}{c} u_{ey} - \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad (8.5.1.9)$$

можно свести к уравнению, эквивалентному уравнению состояния электронов  $n_e = n_e(\varphi)$  (ось  $z$  выбрана в направлении магнитного поля).

Подставляя (8.5.1.5) в (8.5.1.2) и сравнивая полученное соотношение с (8.5.1.8), легко убедиться, что плотность электронов меняется пропорционально магнитному полю,

$$n_e/B = \text{const.} \quad (8.5.1.10)$$

Используя далее (8.5.1.9) и (8.5.1.5) и замечая, что в первом из этих соотношений можно не учитывать слагаемого  $\frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}$ , получим

$$B - 4\pi e\varphi \frac{n_e}{B} = \text{const.} \quad (8.5.1.11)$$

Сравнение (8.5.1.10) с (8.5.1.11) приводит к уравнению состояния электронов

$$n_e(\varphi) = n_{e0} \left( 1 + 4\pi e\varphi \frac{n_{e0}}{B_0^2} \right), \quad (8.5.1.12)$$

где  $n_{e0}$  и  $B_0$  — значения плотности электронов и магнитного поля в точке, в которой потенциал  $\varphi$  равен нулю.

Таким образом, мы привели задачу о нелинейных движениях холодной плазмы в сильном магнитном поле к виду, полностью аналогичному задаче о нелинейных движениях плазмы с горячими электронами в отсутствие внешнего поля. (Роль средней энергии теплового движения электронов при этом играет, согласно (8.5.1.12), величина  $T_{\text{eff}} \sim B_0^2/4\pi n_e$ ).

**8.5.2. Нелинейные волны в случае сильного магнитного поля.** Переходя к изучению нелинейных колебаний холодной плазмы, находящейся в сильном магнитном поле ( $B^2/4\pi n_e \gg m_e c^2$ ), заметим прежде всего, что, согласно (8.5.1.12) и (8.3.3.3), длина дисперсии для таких колебаний равна

$$l = B/4\pi n_e e. \quad (8.5.2.1)$$

(Обратим внимание на тот факт, что длина дисперсии  $l$  является, согласно (8.5.1.10), интегралом движения.)

В случае крупномасштабных возмущений ( $kl \ll 1$ ), когда можно не учитывать первого слагаемого в соотношении (8.5.1.6), уравнения (8.5.1.4), (8.5.1.6), (8.5.1.7), (8.5.1.12) допускают решения в виде простых (римановых) волн. Вводя альвеновскую скорость

$$v_A = B(4\pi n_i m_i)^{-1/2} \quad (8.5.2.2)$$

(играющую здесь ту же роль, что скорость ионного звука  $v_s$  в случае плазмы с горячими электронами, ср. (8.3.2.2)), получим

уравнения, которым удовлетворяют функции  $u_i(n_i)$ ,  $\varphi(n_i)$ ,  $n_e(n_i)$ ,  $B(n_i)$ ,  $E_y(n_i)$  в случае простой волны:

$$\left. \begin{aligned} \frac{du_i}{dn_i} &= \frac{v_A}{n_i}, & \frac{d\varphi}{dn_i} &= \frac{m_i v_A^2}{e Z n_i}, & n_e &= Z n_i, \\ \frac{dB}{dn_i} &= \frac{B}{n_i}, & \frac{dE_y}{dn_i} &= \frac{u_i + v_A}{c} \frac{B}{n_i}; \end{aligned} \right\} \quad (8.5.2.3)$$

мы полагаем для определенности, что волна распространяется в положительном направлении оси  $x$ . Фазовая скорость волны связана с альвеновской скоростью  $v_A$  соотношением

$$V = u_i + v_A. \quad (8.5.2.4)$$

Как было показано в § 8.3, направление искажения фронта простой волны определяется знаком величины  $Q = 3 - n_e D^{(2)} (D^{(1)})^{-2}$ . Используя уравнение состояния (8.5.1.12), имеем  $Q = 3$ . Таким образом, при распространении в холодной плазме простой волны градиенты характеризующих плазму величин возрастают на участках сжатия, что приводит к возникновению на этих участках разрывов (или многопоточковых течений). Автомодельные волны в такой плазме являются волнами разрежения.

Остановимся теперь на распространении стационарных волн в холодной плазме, находящейся в сильном магнитном поле.

Все соотношения, описывающие эти волны, могут быть получены из соответствующих соотношений п. 8.3.3, если произвести в последних замены  $v_s \rightarrow v_A$ ,  $a_e \rightarrow l$  и понимать под  $n_e(\varphi)$  функцию, определяемую формулой (8.5.1.12). Разумеется, уединенные волны являются в данном случае волнами сжатия. Вместе с плотностями электронов и ионов в таких волнах возрастают магнитное поле и электростатический потенциал.

Используя (8.3.3.4), (8.5.1.10), (8.5.1.11), можно установить связь между скоростью уединенной волны  $V$  и ее амплитудой, а именно, если  $B_{\max}$  — амплитуда магнитного поля, то

$$V = v_{A0} \frac{B_{\max} + B_0}{2B_0}, \quad (8.5.2.5)$$

где  $B_0$  и  $v_{A0}$  — значения магнитного поля и альвеновской скорости в невозмущенной области (при  $|x - Vt| \rightarrow \infty$ ).

Заметим в заключение, что амплитуда уединенной волны (а следовательно, и ее скорость) не может быть сколь угодно большой. В самом деле, выражение в скобках в (8.4.3.3) для плотности ионов должно быть неотрицательным. Подставляя в него (8.5.2.5), используя (8.5.1.10) и (8.5.1.11) и учитывая, что, как отмечалось выше,  $B_{\max} \geq B_0$ , получим

$$B_0 \leq B_{\max} \leq 3B_0, \quad v_{A0} \leq V \leq 2v_{A0}. \quad (8.5.2.6)$$

**8.5.3. Нелинейные волны в случае слабого магнитного поля.** Рассмотрим теперь нелинейные волны в холодной плазме, находящейся в слабом магнитном поле ( $T \ll B^2/4\pi n_e \ll m_e c^2$ ). В этом случае мы можем по-прежнему исходить из гидродинамических уравнений (8.5.1.1)–(8.5.1.4) и уравнений Максвелла. Замечая, что при  $B^2/4\pi n_e \ll m_e c^2$  можно не учитывать возникновения в плазме пространственного заряда, и пренебрегая поправками, пропорциональными малому параметру  $Zm_e/m_i$ , приведем эти уравнения к виду

$$n_e = Zn_i, \quad u_{ex} = u_{ix} \equiv u_x, \quad (8.5.3.1)$$

$$\frac{dn_i}{dt} + n_i \frac{du_x}{dt} = 0, \quad (8.5.3.2)$$

$$\frac{du_x}{dt} = -\frac{e}{m_e} \left( E_x + \frac{u_{ey}}{c} B \right), \quad (8.5.3.3)$$

$$E_x + \frac{u_{ey}}{c} B = \frac{Zm_e}{m_i c} u_{ey} B, \quad (8.5.3.4)$$

$$\frac{du_{ey}}{dt} + \frac{e}{m_e} \left( E_y - \frac{u_x}{c} B \right) = 0, \quad (8.5.3.5)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t}, \quad (8.5.3.6)$$

$$\frac{\partial B}{\partial x} = \frac{4\pi Ze}{c} u_{ey} n_e, \quad (8.5.3.7)$$

где  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x}$ ; ось  $x$  по-прежнему выбрана в направлении распространения волны, ось  $z$  — в направлении магнитного поля. Подставляя соотношения (8.5.3.4) и (8.5.3.7) в уравнение (8.5.3.3), получим

$$m_i n_i \frac{du_x}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{B^2}{8\pi}. \quad (8.5.3.8)$$

Уравнения движения (8.5.3.5) и (8.5.3.8) (последнее представляет собой, очевидно, уравнение Эйлера, в котором роль давления играет магнитное давление  $B^2/8\pi$ ) вместе с уравнением непрерывности (8.5.3.2) и уравнениями Максвелла (8.5.3.6), (8.5.3.7) образуют полную систему уравнений, описывающих нелинейные движения плазмы в слабом магнитном поле.

Рассмотрим прежде всего распространение в плазме длинноволновых возмущений ( $k^2 \ll 4\pi e^2 n_e / m_e c^2$ ). В этом случае, пренебрегая первым слагаемым в левой части уравнения (8.5.3.5), имеем

$$E_y = \frac{u_x}{c} B. \quad (8.5.3.9)$$

Система уравнений (8.5.3.2), (8.5.3.6), (8.5.3.8), (8.5.3.9) допускает решения в виде простых волн, соответствующих таким колебаниям плазмы, при которых характеризующие ее величины могут быть представлены в виде функций одной из них (в качестве нее мы выберем плотность ионов  $n_i$ ). Считая для определенности, что простая волна распространяется в положительном направлении оси  $x$ , имеем

$$\frac{du_x}{dn_i} = \frac{v_A}{n_i}, \quad \frac{dB}{dn_i} = \frac{B}{n_i}, \quad \frac{dE_y}{dn_i} = \frac{u_x + v_A}{c} \frac{B}{n_i}, \quad (8.5.3.10)$$

причем фазовая скорость волны  $V$  связана с альвеновской скоростью  $v_A$  соотношением (8.5.2.4).

Чтобы проследить за тем, как изменяется профиль простой волны при ее движении, вычислим производную  $dV/dn_i$ ; имеем

$$\frac{dV}{dn_i} = \frac{3v_A}{2n_i}. \quad (8.5.3.11)$$

Так как производная  $dV/dn_i$  положительна, то градиенты характеризующих плазму величин в простой волне возрастают на участках сжатия, что приводит к возникновению на этих участках разрывов (или многопоточковых течений). Автомоделные волны в холодной плазме являются волнами разрежения.

Рассмотрим теперь стационарные волны в холодной плазме, находящейся в слабом магнитном поле. Исключая из уравнений (8.5.3.2), (8.5.3.5)–(8.5.3.8) все переменные, кроме магнитного поля  $B$ , получим

$$l^2 \left( \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_{i0} V^2} - 1 \right) \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left( \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_{i0} V^2} - 1 \right) \frac{\partial B}{\partial x} \right\} + \left( \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_i n_{i0} V^2} - 1 \right) B + B_0 = 0, \quad (8.5.3.12)$$

где  $n_{i0}$  и  $B_0$  — значения плотности ионов и магнитного поля в точке, в которой  $u_x = 0$ ,  $V$  — фазовая скорость волны и

$$l = \sqrt{\frac{m_e c^2}{4\pi Z e^2 n_{i0}}}. \quad (8.5.3.13)$$

В общем случае, когда при  $B = B_0$  производная  $\partial B/\partial x$  отлична от нуля, уравнение (8.5.3.12) определяет распределение магнитного поля в периодической волне.

В особом случае, когда величины  $(B - B_0)$  и  $\partial B/\partial x$  обращаются в нуль в одной и той же точке, длина волны стремится к бесконечности и периодическая волна вырождается в уединенную.

Интегрируя уравнение (8.5.3.12), получим соотношение, определяющее распределение магнитного поля в уединенной волне как неявную функцию переменной  $x - Vt$

$$x - Vt = \pm \int \frac{dB}{B - B_0} \left( \frac{B^2 - B_0^2}{8\pi m_1 n_{10} V^2} - 1 \right) \left\{ 1 - \frac{(B + B_0)^2}{16\pi m_1 n_{10} V^2} \right\}^{-1/2}. \quad (8.5.3.14)$$

Обратим внимание на то, что ширина уединенной волны в плазме, находящейся в слабом магнитном поле, согласно (8.5.3.13), (8.5.3.14), равна по порядку величины  $l = \sqrt{m_e c^2 / 4\pi e^2 n_e}$  (тогда как в случае сильного магнитного поля ширина уединенной волны составляет по порядку величины, согласно (8.5.2.1),  $l = B / 4\pi e n_e$ ).

Используя (8.5.3.14), легко убедиться, что амплитуда уединенной волны  $B_{\max}$  и ее скорость  $V$  связаны в случае слабого магнитного поля тем же соотношением (8.5.2.5), что и в случае сильного магнитного поля. Величины  $B_{\max}$  и  $V$  не могут быть сколь угодно велики и удовлетворяют по-прежнему неравенствам (8.5.2.6).

Мы рассмотрели, таким образом, нелинейные волны, распространяющиеся в холодной плазме поперек магнитного поля. Аналогичным образом можно рассмотреть нелинейные волны, распространяющиеся в холодной плазме под углом к магнитному полю [22, 35—38]. Не останавливаясь подробно на структуре таких волн, обратим внимание на одну их существенную особенность. Как мы видели в гл. 5, фазовая скорость волн, распространяющихся в холодной плазме под углом к магнитному полю, отличным от  $1/2 \pi$ , возрастает при увеличении волнового вектора (а не убывает, как в случае волн, распространяющихся в холодной плазме перпендикулярно к магнитному полю, или волн в плазме с горячими электронами.) Такая зависимость фазовой скорости от волнового вектора приводит к тому, что уединенные волны, распространяющиеся в холодной плазме под углом к магнитному полю, не близким к  $1/2 \pi$ , оказываются уединенными волнами разрежения (а не уединенными волнами сжатия).

## ТЕОРИЯ КОЛЕБАНИЙ ПЛАЗМЫ В КВАЗИЛИНЕЙНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

---

### § 9.1. Квазилинейная теория колебаний свободной плазмы

**9.1.1. Квазилинейное приближение.** При исследовании малых (линейных) колебаний в плазме мы разбивали функцию распределения частиц на два слагаемых — неосциллирующую часть (исходная функция распределения) и малую к ней добавку, осциллирующую с частотой плазменных колебаний, и предполагали, что неосциллирующая часть никак не связана с происходящими в плазме колебаниями.

В действительности, однако, колебания плазмы оказывают влияние на неосциллирующую часть функции распределения частиц, причем это влияние растет с ростом амплитуды колебаний.

При увеличении амплитуды колебаний нарушается также основное свойство линейных колебаний — независимость распространения колебаний с различными волновыми векторами и частотами (принцип суперпозиции), так как все большую роль начинают играть процессы взаимодействия между различными колебаниями.

Мы перейдем теперь к исследованию этих так называемых *нелинейных процессов*.

Простейшим из нелинейных процессов, с изучения которого мы начнем, является обратное воздействие колебаний плазмы на неосциллирующую часть функции распределения частиц. Амплитуду колебаний мы будем при этом считать достаточно малой, чтобы можно было еще не учитывать взаимодействия волн друг с другом, т. е. нарушения принципа суперпозиции.

Теория колебаний плазмы, в которой учитывается влияние колебаний на неосциллирующую часть функции распределения частиц, но предполагается еще справедливым принцип суперпозиции колебаний, носит название *квазилинейной теории*, а такой подход к изучению плазменных колебаний называется *квазилинейным приближением*.

Так как амплитуда колебаний предполагается достаточно малой, то в квазилинейном приближении фактически рассматривается влияние колебаний плазмы только на распределение резонансных частиц, т. е. частиц, проекция скорости которых  $w$  на направление распространения близка к фазовой скорости

волны  $\omega/k$ ; т. е.  $w \approx \omega(\mathbf{k})/k$ , где  $\omega(\mathbf{k})$  — частота плазменных колебаний с волновым вектором  $\mathbf{k}$ . Мы знаем, что такие частицы ответственны как за затухание, так и за раскачку колебаний, поскольку они сильно взаимодействуют с плазменными колебаниями. Нерезонансные частицы в среднем не обмениваются энергией с волнами; поэтому можно считать, что распределение их не испытывает влияния со стороны колебаний плазмы.

Чтобы получить основные уравнения квазилинейной теории обратимся к кинетическому уравнению для функции распределения частиц  $F_\alpha = F_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  с самосогласованным полем  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (9.1.1.1)$$

предполагая для простоты, что имеется один сорт частиц и колебания являются продольными, т. е.

$$\mathbf{E} = -\nabla\varphi,$$

$$\Delta\varphi = -4\pi e_\alpha \left( \int F_\alpha d^3v - n_0 \right). \quad (9.1.1.2)$$

Так как для поля допускается справедливым принцип суперпозиции, то электрическое поле  $\mathbf{E}$  удобно представить в виде

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t], \quad (9.1.1.3)$$

здесь частота  $\omega(\mathbf{k})$  колебаний с волновым вектором  $\mathbf{k}$  определяется дисперсионным уравнением линейной теории, а комплексная амплитуда колебания  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$  предполагается медленно изменяющейся функцией времени.

Это изменение может обуславливаться либо затуханием Ландау, либо нарастанием колебаний, связанным с немонотонным характером изменения исходной функции распределения, но во всех случаях мы потребуем, чтобы декремент затухания или инкремент нарастания колебаний  $\gamma(\mathbf{k})$  был достаточно мал, так что  $|\gamma(\mathbf{k})| \ll \omega(\mathbf{k})$ ,  $|\gamma(\mathbf{k})| \ll kv_\alpha$ , где  $v_\alpha$  — средняя тепловая скорость частиц.

Кроме предположения о малости  $\gamma$ , мы сделаем еще два предположения о свойствах волнового пакета (9.1.1.3). Во-первых, мы будем предполагать, что фазы  $\delta(\mathbf{k})$  отдельных комплексных амплитуд  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)$  независимы и случайны, т. е. что усреднение по фазе каждой амплитуды дает нуль  $\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0$ , где угловые скобки означают усреднение по  $\delta(\mathbf{k})$ . Кроме того, из этого предположения следует, что

$$\langle \mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{E}_{\mathbf{k}'}^*(t) \rangle = |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)|^2 \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

Аналогичные формулы справедливы и для комплексных амплитуд фурье-потенциала

$$\langle \varphi_{\mathbf{k}}(t) \rangle = 0, \quad \langle \varphi_{\mathbf{k}}(t) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(t') \rangle = \varphi_{\mathbf{k}}(t) \varphi_{\mathbf{k}'}^*(t') \delta_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$$

Во-вторых, мы будем считать волновой пакет (9.1.1.3) достаточно узким (в  $\mathbf{k}$ -пространстве), чтобы число резонансных частиц, взаимодействующих с ним, было значительно меньше полного числа частиц

$$\int_{\Delta\omega} d\omega \int F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) d^2v_{\perp} \ll n_0,$$

где  $\Delta\omega = \Delta(\omega(\mathbf{k})/k)$  — интервал фазовых скоростей, соответствующий интервалу  $\Delta\mathbf{k}$  изменения  $\mathbf{k}$  в волновом пакете (9.1.1.3). Это предположение делается для того, чтобы частота  $\omega(\mathbf{k})$  формально определялась тем же дисперсионным уравнением, что и в линейной теории.

Подставим поле (9.1.1.3) в кинетическое уравнение (9.1.1.4) и усредним его по фазам. С этой целью выделим из функции распределения частиц слагаемое

$$f_{\alpha 0} = \langle F_{\alpha} \rangle, \quad (9.1.1.4)$$

представляющее собой усредненную по фазам  $\delta(\mathbf{k})$  функцию распределения (она носит название *фоновой* или *усредненной* функции распределения), т. е. положим

$$F_{\alpha} = f_{\alpha 0} + f_{\alpha}, \quad (9.1.1.5)$$

Так как  $\langle f_{\alpha} \rangle = 0$ , то мы получим следующее уравнение для  $f_{\alpha 0}$ :

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0, \quad (9.1.1.6)$$

где  $f_{\alpha}$  в свою очередь удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle = 0.$$

В левой его части мы можем пренебречь двумя слагаемыми, ответственными за нелинейное взаимодействие волн, которое не учитывается в квазилинейном приближении; имеем

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \mathbf{E} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = 0. \quad (9.1.1.7)$$

Плазму мы будем считать однородной; поэтому фоновая функция распределения не будет зависеть от координат и уравнение для нее приобретает вид

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \mathbf{E} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (9.1.1.8)$$

Наша задача заключается теперь в том, чтобы выразить с помощью (9.1.1.7)  $f_\alpha$  через  $f_{\alpha 0}$ , т. е. найти функцию  $f_\alpha = f_\alpha \{f_{\alpha 0}\}$  и, подставив ее в (9.1.1.8), составить уравнение, содержащее одну только функцию  $f_{\alpha 0}$ .

Легко видеть, что мы получим таким образом дифференциальное уравнение второго порядка вида

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} D_{ij} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_j}, \quad (9.1.1.9)$$

где  $D_{ij} = D_{ij}(\mathbf{v}, t)$  — некоторые функции скорости и времени, т. е. уравнение типа уравнения диффузии (в пространстве скоростей). По этой причине величины  $D_{ij}$  называются *коэффициентами диффузии в пространстве скоростей*.

Итак, наша задача заключается в нахождении коэффициентов диффузии при сделанных выше предположениях о свойствах волнового пакета (9.1.1.3).

Разложим функцию  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в ряд (или интеграл) Фурье

$$f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = \sum_{\mathbf{k}} f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega(\mathbf{k})t],$$

где  $f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t)$  — медленно изменяющиеся функции времени, определяемые соотношениями

$$\frac{\partial f_{\alpha \mathbf{k}}}{\partial t} + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega(\mathbf{k}))f_{\alpha \mathbf{k}} = i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \varphi_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}.$$

Интегрируя их, получим, считая для простоты, что начальное возмущение функции распределения  $f_\alpha(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  равно нулю,

$$f_{\alpha \mathbf{k}}(\mathbf{v}, t) = i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \exp[i(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v})t] \times \\ \times \int_0^t \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega(\mathbf{k}))t'] dt' \varphi_{\mathbf{k}}(t') \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t')}{\partial \mathbf{v}}. \quad (9.1.1.10)$$

Подставляя далее это выражение в уравнение Пуассона, получим

$$\varphi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{4\pi i e_\alpha^2}{m_\alpha k} \int_0^t I(t, t') \varphi_{\mathbf{k}}(t') dt', \quad (9.1.1.11)$$

где

$$I(t, t') = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[t(kw - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)] \frac{\partial f_{\alpha 0}(w, t')}{\partial w} dw,$$

$$f_{\alpha 0}(w, t) = \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) d^2v_t.$$

Легко видеть, что основной вклад в интеграл (9.1.1.11) при достаточно больших значениях времени  $t$  ( $\omega t \gg 1$ ) вносят значения  $t'$ , близкие к  $t$  ( $t \leq t' < t + \Delta t$ ;  $\Delta t \ll t$ ).

Действительно, вклад нерезонансных частиц в интеграл  $I(t, t')$  при значениях  $t'$ , не близких к  $t$  ( $|\omega - k\omega|(t-t') \gg 1$ ), будет мал из-за сильной осцилляции подынтегрального выражения. Что же касается вклада в  $I(t, t')$ , вносимого резонансными частицами, то при  $t'$ , не близком к  $t$ , он будет пропорционален интервалу  $\Delta\omega$ , занимаемому резонансными частицами в пространстве  $\omega$ , и им также можно пренебречь из-за малого числа резонансных частиц. Поэтому при интегрировании по  $t'$  нужно учитывать только значения  $t'$ , близкие к  $t$ .

Выбирая интервал изменения  $t'$  таким, чтобы

$$\left. \begin{aligned} \omega(\mathbf{k}) \Delta t \gg 1, \quad kv_a \Delta t \gg 1, \\ |\gamma(\mathbf{k})| \Delta t \ll 1, \quad \Delta t \ll \tau_k(\omega), \end{aligned} \right\} \quad (9.1.1.12)$$

где

$$\gamma(\mathbf{k}) \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \varphi_{\mathbf{k}}(t), \quad \frac{1}{\tau_{\mathbf{k}}(\omega)} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f_{a0}(\omega, t)}{\partial \omega}, \quad (9.1.1.13)$$

получим

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t}^t \varphi_{\mathbf{k}}(t') \frac{\partial f_{a0}(t')}{\partial \omega} \exp[i(k\omega - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)] dt' &\approx \\ \approx \varphi_{\mathbf{k}}(t) \frac{\partial f_{a0}(t)}{\partial \omega} \int_{t-\Delta t}^t \exp\{i[k\omega - \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) - i/\tau_{\mathbf{k}}(\omega)](t' - t)\} dt'. \end{aligned}$$

Учитывая приведенные неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \int_{t-\Delta t}^t \exp\{i[k\omega - \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) - i/\tau_{\mathbf{k}}(\omega)](t' - t)\} dt' &= \\ = \frac{(1 - \exp\{-i[k\omega - \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) - i/\tau_{\mathbf{k}}(\omega)]\Delta t\})}{i[k\omega - \omega(\mathbf{k}) - i\gamma(\mathbf{k}) - i/\tau_{\mathbf{k}}(\omega)]} &\approx \\ \approx -i \mathcal{P} \frac{1}{k\omega - \omega(\mathbf{k})} + \pi \delta(\omega(\mathbf{k}) - k\omega), \quad (9.1.1.14) \end{aligned}$$

где  $\mathcal{P}$  — символ главного значения.

Поэтому уравнение (9.1.1.11) принимает вид

$$\begin{aligned} 1 - \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k^2} \mathcal{P} \int \frac{d\omega}{k\omega - \omega(\mathbf{k}) + i\gamma(\mathbf{k})} \frac{\partial f_{a0}(\omega, t)}{\partial \omega} - \\ - \sum_{\alpha} i\pi \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k^2} \frac{\partial f_{a0}(\omega, t)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=\omega(\mathbf{k})/k} = 0. \quad (9.1.1.15) \end{aligned}$$

В интеграл по  $\omega$  в этом соотношении главный вклад вносят нерезонансные частицы, для которых величина  $\partial f_{\alpha 0} / \partial \omega$  практически не зависит от времени. Получившееся уравнение совпадает с дисперсионным уравнением для продольных слабозатухающих колебаний свободной плазмы.

Таким образом, при сделанных предположениях ( $|\gamma| \ll \omega$ ,  $|\gamma| \ll kv_{\alpha}$ ) мы можем пользоваться дисперсионным уравнением линейной теории, заменив в нем исходную функцию распределения частиц фоновой функцией распределения.

Преобразуем теперь уравнение (9.1.1.8). Разлагая в нем  $E(\mathbf{r}, t)$  и  $f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$  в ряды Фурье и учитывая соотношение (9.1.1.10), представим это уравнение в виде

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} \mathbf{k} \varphi_{\mathbf{k}}^*(t) \int_0^t dt' \exp [i(\mathbf{k}' \mathbf{v} - \omega(\mathbf{k}'))(t' - t)] \varphi_{\mathbf{k}'}(t') \mathbf{k}' \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t')}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle$$

Производя здесь усреднение по фазам и переходя от суммы к интегралу, получим

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_i} J_i, \quad (9.1.1.16)$$

где

$$J_i(\mathbf{v}, t) = \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int d^2 k_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} k_{\parallel} k_j \varphi_{\mathbf{k}}^*(t) dk_{\parallel} \int_0^t \exp [i(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)] \times \\ \times \varphi_{\mathbf{k}}(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t')}{\partial v_j} dt' \quad (9.1.1.17)$$

( $k_{\parallel}$  и  $\mathbf{k}_{\perp}$  — составляющие волнового вектора, параллельная и перпендикулярные скорости частицы  $\mathbf{v}$ ).

В интеграл по  $t'$  в (9.1.1.17) главный вклад вносят только значения  $t'$ , близкие к  $t$ . Действительно, если  $t'$  не близко к  $t$ , то при интегрировании по  $k_{\parallel}$  основной вклад вносят значения  $k_{\parallel}$ , близкие к  $k_0$ , где величина  $k_{\parallel} = k_0$  определяется из условия  $k_{\parallel} v = \omega(\mathbf{k})$ . Разлагая выражение в экспоненте в (9.1.1.17) в ряд вблизи точки  $k_{\parallel} = k_0$ , найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} k_j k_j \varphi_{\mathbf{k}}^*(t) \varphi_{\mathbf{k}}(t') \exp [i(k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k}))(t' - t)] dk_{\parallel} \approx \\ \approx \int_{-\infty}^{\infty} k_j k_j \varphi_{\mathbf{k}}^*(t) \varphi_{\mathbf{k}}(t') \exp \left\{ i \left[ v - \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial k_{\parallel}} \right] \Delta k_{\parallel} (t' - t) \right\} d\Delta k_{\parallel}.$$

Так как  $t'$  не близко к  $t$ , то этот интеграл пренебрежимо мал из-за сильных осцилляций подынтегрального выражения

$$\left( \left| v - \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial k_{\parallel}} \right| \Delta k_{\parallel} (t' - t) \gg 1 \right).$$

Остается вычислить интегралы по  $t'$  в (9.1.1.17) при  $t' \approx t$ . Выбирая интервал интегрирования  $\Delta t$  так, чтобы выполнялись условия (9.1.1.12), мы можем положить, как и в (9.1.1.14), что

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi_{\mathbf{k}}(t') \frac{\partial f_{\omega 0}(\mathbf{v}, t')}{\partial v_j} \exp \{i[k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k})](t' - t)\} dt' &\approx \\ &\approx \varphi_{\mathbf{k}}(t) \frac{\partial f_{\omega 0}(\mathbf{v}, t)}{\partial v_j} \left\{ \mathcal{P} \frac{1}{i[k_{\parallel} v - \omega(\mathbf{k})]} + \pi \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в правую часть соотношения (9.1.1.17) и учитывая, что из-за нечетности подынтегрального выражения интеграл в смысле главного значения обращается в нуль, найдем, что уравнение (9.1.1.16) принимает вид уравнения диффузии (9.1.1.9), где коэффициенты  $D_{ij}$  определяются выражениями

$$D_{ij}(\mathbf{v}, t) = \pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int k_i k_j |\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2 \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3 k, \quad (9.1.1.18)$$

или

$$D_{ij}(\mathbf{v}, t) = \pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int \frac{k_i k_j |\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2}{\left| v - \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial k_{\parallel}} \right|} \Big|_{k_{\parallel} v = \omega(\mathbf{k})} d^2 k_{\perp}.$$

Уравнение (9.1.1.9) с таким значением  $D_{ij}$  определяет изменение усредненной функции распределения резонансных частиц под действием высокочастотных колебаний\*). (Тот факт, что оно относится только к резонансным частицам, связан с наличием  $\delta$ -функции в выражении (9.1.1.18).)

Уравнение (9.1.1.9), как уже отмечалось, имеет вид уравнения диффузии в пространстве скоростей, происходящей под действием случайных колебаний. К нему следует еще добавить уравнение, определяющее зависимость амплитуд поля от времени

$$\frac{d|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)|^2}{dt} = 2\gamma(\mathbf{k}) |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)|^2, \quad (9.1.1.19)$$

\*) Оно было установлено в работах Романова и Филиппова [1], Веденова, Велихова и Сагдеева [2, 4] и Драмонта и Пайнса [5].

где инкремент нарастания (декремент затухания) колебаний определяется, согласно (9.1.1.15), выражением

$$\gamma(\mathbf{k}) = - \sum_{\alpha} \frac{\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha} k} \left. \frac{\partial f_{\alpha 0}(w, t)}{\partial w} \right|_{w=\omega(\mathbf{k})/k} \times \\ \times \left[ \sum_{\beta} \frac{e_{\beta}^2}{m_{\beta}} \frac{\partial}{\partial \omega(\mathbf{k})} \mathcal{P} \int \frac{\partial f_{\beta 0}}{\partial w} \frac{dw}{kw - \omega(\mathbf{k})} \right]^{-1}. \quad (9.1.1.20)$$

Система уравнений (9.1.1.9), (9.1.1.18)—(9.1.1.20) для функций  $f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t)$  и  $|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}(t)|^2$  определяет изменение фоновой функции распределения резонансных частиц, а также затухание (или нарастание) колебаний в квазилинейном приближении.

**9.1.2. Квазилинейная релаксация.** Покажем, что в результате диффузии частиц вследствие рассеяния на волнах система резонансных частиц и колебания плазмы придут при  $t \rightarrow \infty$  к некоторому стационарному состоянию. Этот процесс называется *квазилинейной релаксацией*.

Умножим обе части уравнения (9.1.1.9) на  $f_{\alpha 0}$  и проинтегрируем по всему пространству скоростей:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \int f_{\alpha 0}^2 d^3v = -\pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \int |\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2 \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right)^2 \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v d^3k. \quad (9.1.2.1)$$

Правая часть этого уравнения отрицательна, т. е. величина  $\sigma(t) \equiv \int f_{\alpha 0}^2 d^3v$  убывает и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к постоянному значению. Поэтому

$$\left. \frac{d\sigma(t)}{dt} \right|_{t \rightarrow \infty} \rightarrow 0;$$

отсюда следует, что при  $t \rightarrow \infty$  равна нулю и правая часть уравнения (9.1.2.1). Поскольку в нем под знаком интеграла стоят неотрицательные величины, то при  $t \rightarrow \infty$  должно быть справедливо равенство

$$|\varphi_{\mathbf{k}}(t)|^2 \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\mathbf{k}\mathbf{v}=\omega(\mathbf{k})}^2 = 0.$$

Таким образом, при  $t \rightarrow \infty$  должно выполняться либо равенство

$$|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = 0, \quad (9.1.2.2)$$

либо равенство

$$\left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right)_{\mathbf{k}\mathbf{v}=\omega(\mathbf{k})} = 0. \quad (9.1.2.3)$$

Иными словами, колебания либо затухнут, либо на функции распределения должно образоваться плато

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{v}_i, w, t)|_{t \rightarrow \infty} = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}_i), \quad (9.1.2.4)$$

т. е. функция распределения не будет изменяться вдоль направления распространения волны \*).

В одномерном случае образование плато на функции распределения возможно, однако, он является особым. Для трехмерных же волновых пакетов образование плато на функции распределения в трехмерном объеме в пространстве скоростей невозможно. Дело в том, что для известных спектров колебаний (ленгмюровских и ионно-звуковых) конечному объему  $V_k$  в пространстве волновых чисел, в котором  $|\varphi_k|^2 \neq 0$ , соответствует бесконечно большой объем  $V_v$ , занимаемый резонансными частицами в пространстве скоростей (в этом легко убедиться, учитывая, что величина  $V_v$  определяется из условия  $\omega(k) = kv$ , где  $k$  приобретает все возможные значения). Число резонансных частиц сохраняется, и поэтому при образовании плато в бесконечной области  $V_v$  резонансные частицы получили бы бесконечно большую энергию, что невозможно, так как полная энергия (кинетическая энергия резонансных частиц плюс энергия колебаний) сохраняется. Отсюда следует, что в случае трехмерных волновых пакетов, для которых фазовый объем, занимаемый резонансными частицами  $V_v$ , достаточно велик, в результате квазилинейной релаксации колебания либо полностью затухнут, либо спектр колебаний станет одномерным, а на функции распределения при этом образуется одномерное плато [6].

В заключение отметим, что процесс квазилинейной релаксации сопровождается возрастанием плотности энтропии резонансных частиц:

$$s = - \int f_{a0} \ln f_{a0} d^3v. \quad (9.1.2.5)$$

Действительно, подставляя в соотношение

$$\frac{ds}{dt} = - \int (1 + \ln f_{a0}) \frac{\partial f_{a0}}{\partial t} d^3v$$

выражение (9.1.1.9) для  $\partial f_{a0}/\partial t$  и интегрируя по частям, получим

$$\frac{ds}{dt} = \pi \frac{e_a^2}{m_a^2} \int d^3v \int |\varphi_k|^2 \frac{1}{f_{a0}} \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{a0}}{\partial v} \right)^2 \delta(\omega(k) - kv) d^3k.$$

Здесь под знаком интеграла  $\int$  стоят положительные величины, т. е.  $ds/dt > 0$ .

Заметим, что возрастание плотности энтропии при квазилинейной релаксации функции распределения не противоречит вы сказанному в п. 1.4.3 утверждению, что самосогласованное поле

\* Возможностъ образования плато на функции распределения была показана в случае одномерных колебаний в работах [2—5]; приведенный вывод дан в работах [6, 7].

само по себе не приводит к увеличению энтропии. Действительно, переход к квазилинейному приближению связан с добавочным усреднением по фазам случайных колебаний. Кроме того, мы теперь определили энтропию через фоновую (усредненную) функцию распределения, тогда как в (1.4.3.1) входит полная функция распределения.

**9.1.3. Релаксация одномерных волновых пакетов.** В случае одномерных колебаний можно детальнее проследить процесс квазилинейной релаксации и найти в стационарном состоянии (когда на функции распределения образовалось плато) энергию колебаний [3—5]. Ограничимся для простоты рассмотрением только ленгмюровских колебаний. В этом случае основные уравнения, описывающие квазилинейную релаксацию функции распределения электронов и амплитуд поля, принимают вид

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial w} \left( \mathcal{E} b \frac{\partial f_{e0}}{\partial w} \right), \quad (9.1.3.1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} = a \mathcal{E} \frac{\partial f_{e0}}{\partial w}, \quad (9.1.3.2)$$

где  $a = \pi \omega_{pe} w^2 / n_0$ ,  $b = \omega_{pe}^2 / m_e n_0 w$ ,  $\mathcal{E}(k, t)$  — спектральная плотность энергии колебаний ( $\mathcal{E}(k, t) = |E_k(t)|^2 / 4\pi$ ); волновое число  $k$  и скорость частицы  $w$  связаны соотношением  $\omega_{pe} = kw$ .

Пусть в начальный момент времени заданы спектральная плотность энергии колебаний

$$\mathcal{E}(k, t)|_{t=0} = \begin{cases} \mathcal{E}_0(k) & \text{при } k_1 < k < k_2, \\ 0 & \text{при } k < k_1 \text{ или } k > k_2, \end{cases}$$

и фоновая функция распределения электронов

$$f_{e0}(w, t)|_{t=0} = f_0(w) \quad (w_1 < w < w_2),$$

где  $w_1 = \omega_{pe} / k_2$  и  $w_2 = \omega_{pe} / k_1$ . Если  $\partial f_{e0} / \partial w < 0$ , то колебания будут затухать, причем величина производной от функции распределения  $|\partial f_{e0} / \partial w|$  будет уменьшаться до тех пор, пока не образуется плато и не прекратится обмен энергией между волнами и частицами (рис. 9.1.1). В точках  $w = w_{1,2}$  функция распределения претерпевает скачок. Заметим, однако, что вид функции распределения на этом рисунке соответствует полному пренебрежению

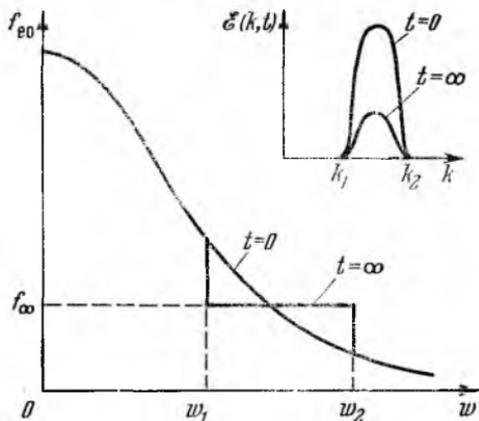


Рис. 9.1.1. Плато на функции распределения резонансных частиц  $f_{e0}$  и затухание энергии волнового пакета  $\mathcal{E}(k, t)$ .

парными столкновениями. Учет столкновений (даже очень редких) приводит к «размытию» функции распределения, так что вблизи точек  $w = w_{1,2}$  она изменяется непрерывно (подробнее см. п. 9.1.4).

Найдем энергию колебаний в установившемся состоянии с плато. Подставляя выражение для  $\partial f_{e0}/\partial w$  из (9.1.3.2) в уравнение (9.1.3.1), получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( f_{e0} - \frac{\partial}{\partial w} \frac{b}{a} \mathcal{E} \right) = 0,$$

т. е.

$$f_{e0} - \frac{\partial}{\partial w} \frac{b}{a} \mathcal{E} = f_0(w) - \frac{b}{a} \mathcal{E}_\infty = \text{const.} \quad (9.1.3.3)$$

Отсюда находим спектральную плотность энергии колебаний

$$\mathcal{E}(k, t) = \mathcal{E}_0(k) + \frac{a}{b} \int_{w_1}^{\omega_{pe}/k} (f_{e0} - f_0) dw. \quad (9.1.3.4)$$

В частности, при  $t \rightarrow \infty$  имеем

$$\mathcal{E}_\infty(k) = \mathcal{E}_0(k) + \frac{a}{b} \int_{w_1}^{\omega_{pe}/k} (f_\infty - f_0) dw, \quad (9.1.3.5)$$

где  $\mathcal{E}_\infty(k) = \mathcal{E}(k, t)|_{t \rightarrow \infty}$ .

Высота плато  $f_\infty$  находится из условия сохранения числа резонансных частиц,

$$\int_{w_1}^{w_2} f_{e0}(w, t) dt = \int_{w_1}^{w_2} f_0(w) dw;$$

отсюда при  $t = \infty$  получим

$$f_\infty = \frac{1}{w_2 - w_1} \int_{w_1}^{w_2} f_0(w) dw. \quad (9.1.3.6)$$

В результате релаксации резонансные частицы получают, очевидно, энергию

$$\Delta \mathcal{E} = \mathcal{E}_0 - \mathcal{E}_\infty = \int_{w_1}^{w_2} \frac{1}{2} m_e w^2 (f_0 - f_\infty) dw.$$

Несколько иначе происходит релаксация в том случае, когда начальное распределение неустойчиво, т. е. имеется область скоростей  $w^* < w < w_0$ , где  $\partial f_0/\partial w > 0$ . Такое распределение электронов реализуется, например, тогда, когда через плазму

проходит пучок малой<sup>†</sup> плотности (рис. 9.1.2.). В данном случае колебания с фазовыми скоростями, лежащими в интервале  $\omega^* < \omega_{pe}/k < \omega_0$ , будут нарастать во времени, а колебания с фазовыми скоростями вне этого интервала — затухать. Однако из-за деформации функции распределения область неустойчивых колебаний с течением времени будет расширяться (см. пунктир-

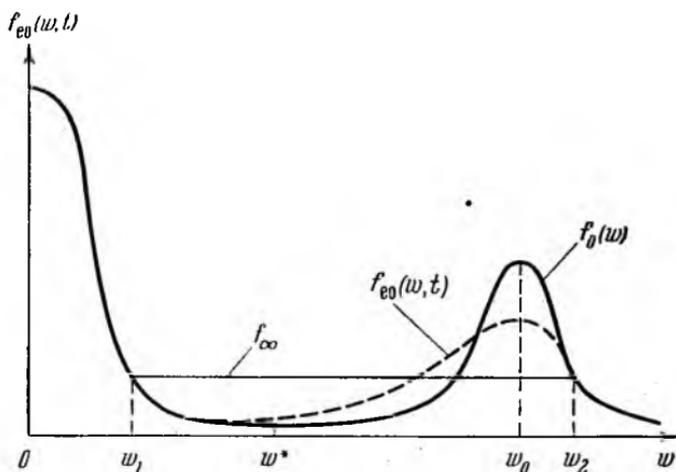


Рис. 9.1.2. Образование плато на функции распределения резонансных электронов при возбуждении колебаний электронным пучком малой плотности.

ную кривую на рис. 9.1.2) и в конечном, стационарном состоянии образуется плато.

Спектральная плотность энергии колебаний и высота плато по-прежнему будут задаваться формулами (9.1.3.5) и (9.1.3.6), однако положение точек  $\omega_1$  и  $\omega_2$  определяется уже не положением границ начального возмущения, а условием непрерывности функции  $f_e(\omega, t)$ , т. е.  $f_{\infty} = f_0(\omega_1)$ ,  $f_{\infty} = f_0(\omega_2)$ .

**9.1.4. Влияние кулоновских столкновений на квазилинейную релаксацию и затухание Ландау ленгмюровских колебаний.** Состояние плазмы с плато на функции распределения является, естественно, не равновесным, а квазистационарным, так как парные (кулоновские) столкновения между частицами стремятся превратить распределение частиц в максвелловское.

Кулоновские столкновения, даже очень редкие, оказывают существенное влияние на бесстолкновительное поглощение волн в том случае, когда диффузия резонансных частиц в пространстве скоростей, вызванная кулоновскими столкновениями, сравнима с диффузией, обусловленной взаимодействием частиц с волнами. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Интеграл столкновений Ландау (1.3.2.7), который надо теперь добавить в правую часть уравнения (9.1.1.9) удобно представить в следующем виде [16]:

$$\left(\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t}\right)_c = -\frac{2\pi e_\alpha^2 L}{m_\alpha} \sum_{\beta} e_{\beta}^2 \left[ -\frac{8\pi}{m_{\beta}} f_{\alpha 0} f_{\beta 0} + \right. \\ \left. + \frac{1}{m_\alpha} \frac{\partial^2 f_{\alpha 0}}{\partial v_i \partial v_j} \frac{\partial^2 \Psi_{\beta}}{\partial v_i \partial v_j} + \left(\frac{1}{m_\alpha} - \frac{1}{m_{\beta}}\right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_i} \frac{\partial^3 \Psi_{\beta}}{\partial v_i \partial v_j^2} \right], \quad (9.1.4.1)$$

где  $\Psi_{\beta}(\mathbf{v}) = \int f_{\beta 0}(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d^3 v'$ ,  $L$  — кулоновский логарифм.

Для узких одномерных волновых пакетов, когда число резонансных частиц невелико, мы вправе пренебречь столкновениями резонансных частиц друг с другом. В этом случае интеграл столкновений (9.1.4.1) можно упростить, учитывая, что для нерезонансных частиц функция распределения является максвелловской, а для резонансных частиц мало отличается от максвелловской  $f_M$ . Пренебрегая величинами  $\partial(f_{e0} - f_M)/\partial v_{\perp} \sim (f_{e0} - f_M)/v_e$  по сравнению с  $\partial(f_{e0} - f_M)/\partial \omega \sim (f_{e0} - f_M)/\Delta \omega$ , представим уравнение для фоновой функции распределения электронов в случае одномерных ленгмюровских колебаний с учетом столкновений в виде

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left( D \frac{\partial f_{e0}}{\partial \omega} \right) + \frac{\partial}{\partial \omega} \left[ D_c \frac{\partial (f_{e0} - f_M)}{\partial \omega} \right], \quad (9.1.4.2)$$

$$D_c = \nu_e \frac{2v_e^3}{\omega^3} (v_{\perp}^2 + v_e^2), \quad \nu_e = \frac{2\pi e^4 n_0 L}{m_e^2 v_e^3}. \quad (9.1.4.3)$$

Как следует из последнего соотношения, диффузия частиц в резонансной области за счет парных кулоновских столкновений происходит за характерное время [8, 9]  $\tau = (1/\nu_e)(\Delta \omega/v_e)^2$ , значительно меньшее среднего времени релаксации  $1/\nu_e$ .

Величина производной  $\partial f_{e0}/\partial \omega$ , а следовательно, и скорость поглощения энергии колебаний, определяются теперь конкуренцией двух процессов — «платообразования» за счет диффузии на волнах и «максвеллизации» за счет столкновений.

В квазистационарном состоянии диффузия вследствие рассеяния на волнах уравновешивается диффузией вследствие столкновений (такое состояние может установиться, например, в случае вынужденных колебаний при наличии внешнего источника колебаний, либо в случае свободных колебаний с достаточно большим начальным уровнем шумов). Тогда, пренебрегая в уравнении (9.1.4.2)  $\partial f_{e0}/\partial t$ , получим

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial \omega} = \frac{\partial f_M}{\partial \omega} \frac{1}{1 + D/D_c}. \quad (9.1.4.4)$$

Отметим, что входящая сюда величина  $D_c$  зависит от  $v_{\perp}$ .

Величина декремента затухания при учете соотношения (9.1.4.4) определяется в соответствии с (9.1.1.20) выражением [7]

$$\gamma = \gamma_M \Phi(y), \quad (9.1.4.5)$$

где  $\gamma_M$  — коэффициент затухания ленгмюровских колебаний плазмы с максвелловским распределением электронов по скоростям, и

$$\Phi(y) = 1 + y \exp(y + 1/2) \text{Ei}(-y - 1/2), \quad (9.1.4.6)$$

$$\text{Ei}(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt, \quad y = D/D_{e0}, \quad D_{e0} = v_e^4 w_e^5 / w^3.$$

Таким образом, уменьшение декремента затухания, обусловленное эффектом «платообразования», и характеризуемое монотонно убывающей функцией  $\Phi(y)$ , зависит от отношения  $y = D/D_{e0}$  коэффициента диффузии резонансных электронов в результате рассеяния на волнах к характерному коэффициенту диффузии вследствие столкновений  $D_{e0}$ .

Для волнового пакета малой амплитуды  $y \ll 1$  декремент затухания ленгмюровских колебаний совпадает с  $\gamma_M$ . В случае волнового пакета большой амплитуды ( $y \gg 1$ ) величина  $\partial f_{e0}/\partial w$  примерно в  $y$  раз меньше  $\partial f_M/\partial w$ ; настолько же меньше и декремент затухания:

$$\gamma = 3/2 \frac{1}{y} \gamma_M.$$

## § 9.2. Квазилинейная теория колебаний магнитоактивной плазмы

**9.2.1. Основные уравнения.** В предыдущем параграфе была развита квазилинейная теория колебаний свободной плазмы. Теперь мы рассмотрим в квазилинейном приближении колебания магнитоактивной плазмы. Для этого необходимо изучить действие колебаний плазмы на резонансные частицы в магнитном поле.

Как мы видели в гл. 5, характер взаимодействия резонансных частиц в плазме при наличии магнитного поля существенно изменяется по сравнению со случаем свободной плазмы, а именно, кроме черенковского резонанса важное значение приобретают циклотронные резонансы.

Как и в предыдущем параграфе, мы будем рассматривать взаимодействие резонансных частиц с волновым пакетом, образованным колебаниями малой амплитуды со случайным набором фаз, которые медленно нарастают (или затухают) во времени. Число резонансных частиц по-прежнему будем считать малым. В отличие от предыдущего параграфа, мы не будем, однако, ограничиваться только продольными колебаниями, а рассмотрим общий случай непотенциальных электромагнитных колебаний.

Положим

$$F_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) = f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) + f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t), \quad (9.2.1.1)$$

где  $f_{\alpha 0} = \langle F_{\alpha} \rangle$  — среднее значение функции распределения, которое мы будем считать не зависящим от пространственных координат, и  $f_{\alpha}$  — осциллирующая часть функции распределения ( $\langle f_{\alpha} \rangle = 0$ ). Разложим функцию  $f_{\alpha}$  и напряженности электрического и магнитного полей в ряды Фурье по пространственным координатам

$$\left. \begin{aligned} f_{\alpha}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, j} f_{\mathbf{k}}^{(j)}(\mathbf{v}, t) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega^{(j)}(\mathbf{k})t], \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)}(t) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega^{(j)}(\mathbf{k})t], \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{(j)}(t) \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - i\omega^{(j)}(\mathbf{k})t], \end{aligned} \right\} \quad (9.2.1.2)$$

где суммирование проводится по всем значениям волнового вектора  $\mathbf{k}$  и всем ветвям колебаний  $j$ ,  $\omega^{(j)}(\mathbf{k})$  — собственная частота  $j$ -й ветви колебаний с волновым вектором  $\mathbf{k}$ .

Получим теперь уравнение для фоновой функции распределения  $f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t)$ , учитывая обратное действие колебаний на резонансные частицы, и уравнения, определяющие изменение во времени амплитуд поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)}(t)$  и  $\mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{(j)}(t)$ .

Подставляя выражение (9.2.1.1) в кинетическое уравнение

$$\frac{\partial F_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \phi} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial F_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} = 0,$$

где  $\phi$  — азимутальный угол в пространстве скоростей (см. рис. 5.2.1), и производя усреднение по фазам, получим

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \phi} = -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle. \quad (9.2.1.3)$$

Осциллирующая часть функции распределения  $f_{\alpha}$  определяется из уравнения

$$\frac{\partial f_{\alpha}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{r}} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \phi} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (9.2.1.4)$$

в котором отброшены нелинейные слагаемые

$$\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left\langle \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_{\alpha}}{\partial \mathbf{v}} \right\rangle,$$

ответственные за нелинейное взаимодействие волн.

Учитывая, что колебания с различными значениями  $k$  и  $j$  статистически независимы, получим из (9.2.1.3)

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \phi} = Q(\mathbf{v}, t), \quad (9.2.1.5)$$

где

$$Q(\mathbf{v}, t) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{\mathbf{k}, j} \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)*} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{(j)*}] \right) f_{\mathbf{k}}^{(j)}.$$

Здесь компонента Фурье осциллирующей части функции распределения  $f_{\mathbf{k}}^{(j)}(\mathbf{v}, t)$  определяется, в соответствии с (9.2.1.4), из уравнения

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(j)}}{\partial t} + i(\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})) f_{\mathbf{k}}^{(j)} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(j)}}{\partial \psi} = R(\mathbf{k}, \mathbf{v}), \quad (9.2.1.6)$$

где

$$R = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)*} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{(j)*}] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}}$$

и  $\psi = \phi - \varphi$ ,  $\varphi$  — азимутальный угол в пространстве волновых векторов с полярной осью, параллельной  $\mathbf{B}_0$ .

Представим фоновую функцию распределения в виде ряда Фурье по угловой переменной  $\phi$ :

$$f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f_{\alpha 0}^{(n)}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t) \exp(in\phi), \quad (9.2.1.7)$$

где  $v_{\perp}$  и  $v_{\parallel}$  — составляющие скорости частицы  $\mathbf{v}$ , перпендикулярная и параллельная магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ .

Вводя систему координат с единичными ортами  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  и  $\mathbf{e}_3$ , где  $\mathbf{e}_3$  параллельно  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{e}_1$  параллельно составляющей волнового вектора  $\mathbf{k}_{\perp} = \frac{[\mathbf{B}_0 [k\mathbf{B}_0]]}{B_0^2}$ , перпендикулярной  $\mathbf{B}_0$ , и  $\mathbf{e}_2 = [\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1]$ , представим уравнение (9.2.1.6) в следующем виде:

$$\frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(j)}}{\partial t} + i(k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}) + k_{\perp} v_{\perp} \cos \psi) f_{\mathbf{k}}^{(j)} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{\mathbf{k}}^{(j)}}{\partial \psi} = R; \quad (9.2.1.8)$$

здесь функция  $R$  определяется формулой

$$R = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R^{(n)}(k_{\parallel}, k_{\perp}, v_{\parallel}, v_{\perp}, t) \exp(in\psi). \quad (9.2.1.9)$$

Найдем решения этого уравнения. Представим функцию  $f_{\mathbf{k}}^{(j)}$  в виде

$$f_{\mathbf{k}}^{(j)} = u_{\mathbf{k}}(\mathbf{v}) \exp(i\lambda \sin \psi), \quad \lambda = k_{\perp} v_{\perp} / \omega_{B\alpha}.$$

Благодаря этому свойству фоновой функции распределения величины  $P^{(n)}$ , входящие в соотношение (9.2.1.12), упрощаются:

$$P^{(n)} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} (-1)^n \left\{ E_{k3}^{(j)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_3} J_n(\lambda) - \right. \\ \left. - \left[ \left( E_{k1}^{(j)} - \frac{v_1}{c} B_{k2}^{(j)} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_1} + \frac{v_1}{c} B_{k2}^{(j)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_1} \right] \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) + \right. \\ \left. + i \left[ \left( E_{k2}^{(j)} + \frac{v_1}{c} B_{k1}^{(j)} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_1} - \frac{v_1}{c} B_{k2}^{(j)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_1} \right] J_n'(\lambda) \right\}. \quad (9.2.1.15)$$

Компоненты Фурье напряженности магнитного поля  $B_k^{(j)}$  можно с помощью уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

выразить через компоненты Фурье напряженности электрического поля

$$B_{ki}^{(j)} = \frac{c \varepsilon_{ilm} k_l E_{km}^{(j)}}{\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i \gamma_m^{(j)}(\mathbf{k})}, \quad (9.2.1.16)$$

где  $\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k}, t)$  — локальный (т. е. относящийся к данному моменту времени) инкремент нарастания  $m$ -й компоненты амплитуды электрического поля, равный

$$\gamma_m^{(j)} = \gamma_m^{(j)'} + i \gamma_m^{(j)''} = \frac{\partial}{\partial t} \ln E_{km}^{(j)}(t). \quad (9.2.1.17)$$

Найдем теперь выражение для плотности тока в квазилинейном приближении. Разлагая плотность тока в ряд Фурье по пространственным переменным

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{j}_k^{(j)}(t) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})t)]$$

и используя соотношение (9.2.1.11), запишем компоненты Фурье плотности тока в виде двух слагаемых

$$\mathbf{j}_k^{(j)} = \mathbf{j}_{k1}^{(j)} + \mathbf{j}_{k2}^{(j)},$$

где

$$\mathbf{j}_{k1}^{(j)} = \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_{\alpha} \int \exp(i\lambda \sin \phi + in\phi) \mathbf{v} u_{\alpha}^{(n)}(v_1, v_1, 0) \times \\ \times \exp[-i(k_1 v_1 - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))t] d^3v, \\ \mathbf{j}_{k2}^{(j)} = \sum_{\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_{\alpha} \int \mathbf{v} \exp(i\lambda \sin \phi + in\phi) d^3v \times \\ \times \int_0^t P^{(n)}(v_1, v_1, t') \exp[i(k_1 v_1 - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dt', \quad (9.2.1.18)$$

где функция  $P^{(n)}(v_1, v_1, t)$  определяется формулой (9.2.1.15).

Слагаемое  $j_{k_1}^{(1)}$  обусловлено начальным возмущением осциллирующей части функции распределения. Это слагаемое играет роль внешнего тока и не влияет на дисперсионное уравнение. Поэтому будем полагать далее для простоты, что  $j_{k_1}^{(j)} = 0$ .

Перейдем к вычислению величины  $j_{k_2}^{(j)}$ , определяемой соотношением (9.2.1.18). Входящие в него интегралы по  $v_{\parallel}$  имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(v_{\parallel}, t') \exp [i(k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dv_{\parallel}, \quad (9.2.1.19)$$

где

$$S(v_{\parallel}, t') = E_{k'l}^{(j)}(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t')}{\partial v_{\parallel, \perp}}.$$

Если  $t'$  не близко к  $t$  ( $|k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})|(t - t') \gg 1$ ), то в (9.2.1.19) основной вклад дадут значения  $v_{\parallel}$ , близкие к  $v_{\parallel \text{res}} = (\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + n\omega_{B\alpha})/k_{\parallel}$ ; тогда весь интеграл будет пропорционален интервалу  $\Delta v_{\parallel}$  (т. е. пропорционален числу резонансных частиц) и им можно пренебречь.

Если  $t'$  близко к  $t$ , то область значений  $v_{\parallel}$ , где  $|k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})|(t - t') \gg 1$ , не дает вклада в интеграл (9.2.1.19) из-за сильных осцилляций подынтегрального выражения.

Остается вычислить интегралы, входящие в (9.2.1.18) при  $t' \approx t$  в области  $v_{\parallel} \approx v_{\parallel \text{res}}$ , где  $|k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})|(t - t') \leq 1$ . Выбирая интервал интегрирования  $\Delta t$  по  $t'$  ( $t - \Delta t < t' < t$ ) таким, что  $|\gamma_l^{(j)}(\mathbf{k})| \Delta t \ll 1$ ,  $\Delta t \ll \tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})$ ,  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) \Delta t \gg 1$ ,  $k_{\parallel} v_{\alpha} \Delta t \gg 1$ , получим

$$\int_{t-\Delta t}^t E_{k'l}^{(j)}(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(t')}{\partial v_{\parallel, \perp}} \exp [i(k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dt' \approx$$

$$\approx - \frac{iE_{k'l}^{(j)}(t) \partial f_{\alpha 0}(t) / \partial v_{\parallel, \perp}}{k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}) - i\gamma_l^{(j)}(\mathbf{k}) - i/\tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})}, \quad (9.2.1.20)$$

где  $\tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})$  — времена релаксации фоновой функции распределения

$$\frac{1}{\tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)}{\partial v_{\parallel, \perp}}.$$

Учитывая соотношение (9.2.1.20), представим компоненты Фурье плотности тока  $j_{\mathbf{k}}^{(j)} = j_{k_2}^{(j)}$  в виде

$$j_{k'l}^{(j)}(t) = \sigma_{lm}^{(j)}(t) E_{k_m}^{(j)}(t), \quad (9.2.1.21)$$

где  $\sigma_{lm} = \sum_{\alpha} \sigma_{lm}^{(\alpha)}$ , а  $\sigma_{lm}^{(\alpha)}$  — вклад частиц сорта  $\alpha$  в тензор проводимости плазмы. В системе координат, в которой ось  $\mathcal{Z}$  направлена

Благодаря этому свойству фоновой функции распределения величины  $P^{(n)}$ , входящие в соотношение (9.2.1.12), упрощаются:

$$P^{(n)} = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} (-1)^n \left\{ E_{k3}^{(j)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel} J_n(\lambda) - \right. \\ \left. - \left[ \left( E_{k1}^{(j)} - \frac{v_\parallel}{c} B_{k2}^{(j)} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp} + \frac{v_\perp}{c} B_{k2}^{(j)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel} \right] \frac{n}{\lambda} J_n(\lambda) + \right. \\ \left. + i \left[ \left( E_{k2}^{(j)} + \frac{v_\parallel}{c} B_{k1}^{(j)} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\perp} - \frac{v_\perp}{c} B_{k2}^{(j)} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_\parallel} \right] J_n'(\lambda) \right\}. \quad (9.2.1.15)$$

Компоненты Фурье напряженности магнитного поля  $B_k^{(j)}$  можно с помощью уравнения

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

выразить через компоненты Фурье напряженности электрического поля

$$B_{ki}^{(j)} = \frac{c \varepsilon_{ilm} k_l E_{km}^{(j)}}{\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i \gamma_m^{(j)}(\mathbf{k})}, \quad (9.2.1.16)$$

где  $\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k}, t)$  — локальный (т. е. относящийся к данному моменту времени) инкремент нарастания  $m$ -й компоненты амплитуды электрического поля, равный

$$\gamma_m^{(j)} = \gamma_m^{(j)'} + i \gamma_m^{(j)''} = \frac{\partial}{\partial t} \ln E_{km}^{(j)}(t). \quad (9.2.1.17)$$

Найдем теперь выражение для плотности тока в квазилинейном приближении. Разлагая плотность тока в ряд Фурье по пространственным переменным

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mathbf{k}, j} \mathbf{j}_k^{(j)}(t) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})t)]$$

и используя соотношение (9.2.1.11), запишем компоненты Фурье плотности тока в виде двух слагаемых

$$\mathbf{j}_k^{(j)} = \mathbf{j}_{k1}^{(j)} + \mathbf{j}_{k2}^{(j)},$$

где

$$\mathbf{j}_{k1}^{(j)} = \sum_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_\alpha \int \exp(i\lambda \sin \phi + in\phi) \mathbf{v} u_{k1}^{(n)}(v_\parallel, v_\perp, 0) \times \\ \times \exp[-i(k_\parallel v_\parallel - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))t] d^3v, \\ \mathbf{j}_{k2}^{(j)} = \sum_\alpha \sum_{n=-\infty}^{\infty} e_\alpha \int \mathbf{v} \exp(i\lambda \sin \phi + in\phi) d^3v \times \\ \times \int_0^t P^{(n)}(v_\parallel, v_\perp, t') \exp[i(k_\parallel v_\parallel - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dt', \quad (9.2.1.18)$$

где функция  $P^{(n)}(v_\parallel, v_\perp, t)$  определяется формулой (9.2.1.15).

Слагаемое  $j_{k_1}^{(1)}$  обусловлено начальным возмущением осциллирующей части функции распределения. Это слагаемое играет роль внешнего тока и не влияет на дисперсионное уравнение. Поэтому будем полагать далее для простоты, что  $j_{k_1}^{(j)} = 0$ .

Перейдем к вычислению величины  $j_{k_2}^{(j)}$ , определяемой соотношением (9.2.1.18). Входящие в него интегралы по  $v_{\parallel}$  имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} S(v_{\parallel}, t') \exp [i(k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dv_{\parallel}, \quad (9.2.1.19)$$

где

$$S(v_{\parallel}, t') = E_{k'l}^{(j)}(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t')}{\partial v_{\parallel, \perp}}.$$

Если  $t'$  не близко к  $t$  ( $|k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})|(t - t') \gg 1$ ), то в (9.2.1.19) основной вклад дадут значения  $v_{\parallel}$ , близкие к  $v_{\parallel \text{res}} = (\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + n\omega_{B\alpha})/k_{\parallel}$ ; тогда весь интеграл будет пропорционален интервалу  $\Delta v_{\parallel}$  (т. е. пропорционален числу резонансных частиц) и им можно пренебречь.

Если  $t'$  близко к  $t$ , то область значений  $v_{\parallel}$ , где  $|k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})|(t - t') \gg 1$ , не дает вклада в интеграл (9.2.1.19) из-за сильных осцилляций подынтегрального выражения.

Остается вычислить интегралы, входящие в (9.2.1.18) при  $t' \approx t$  в области  $v_{\parallel} \approx v_{\parallel \text{res}}$ , где  $|k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})|(t - t') \leq 1$ . Выбирая интервал интегрирования  $\Delta t$  по  $t'$  ( $t - \Delta t < t' < t$ ) таким, что  $|\gamma^{(j)}(\mathbf{k})|\Delta t \ll 1$ ,  $\Delta t \ll \tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})$ ,  $\omega^{(j)}(\mathbf{k})\Delta t \gg 1$ ,  $k_{\parallel} v_{\parallel} \Delta t \gg 1$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{t-\Delta t}^t E_{k'l}^{(j)}(t') \frac{\partial f_{\alpha 0}(t')}{\partial v_{\parallel, \perp}} \exp [i(k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dt' \approx \\ & \approx - \frac{iE_{k'l}^{(j)}(t) \partial f_{\alpha 0}(t) / \partial v_{\parallel, \perp}}{k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}) - i\gamma^{(j)}(\mathbf{k}) - i/\tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})}, \end{aligned} \quad (9.2.1.20)$$

где  $\tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})$  — времена релаксации фоновой функции распределения

$$\frac{1}{\tau_{\parallel, \perp}(\mathbf{v})} \equiv \frac{\partial}{\partial t} \ln \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)}{\partial v_{\parallel, \perp}}.$$

Учитывая соотношение (9.2.1.20), представим компоненты Фурье плотности тока  $j_{\mathbf{k}}^{(j)} = j_{k_2}^{(j)}$  в виде

$$j_{k'l}^{(j)}(t) = \sigma_{lm}^{(j)}(t) E_{k'm}^{(j)}(t), \quad (9.2.1.21)$$

где  $\sigma_{lm} = \sum_{\alpha} \sigma_{lm}^{(\alpha)}$ , а  $\sigma_{lm}^{(\alpha)}$  — вклад частиц сорта  $\alpha$  в тензор проводимости плазмы. В системе координат, в которой ось  $\mathcal{Z}$  направлена

параллельно  $\mathbf{B}_0$ , а ось  $I$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ , величины  $\sigma_{ij}^{(\alpha)}$  имеют вид

$$\sigma_{ij}^{(\alpha)} = \frac{i}{2} \omega_{\beta\alpha}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int \Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) \hat{R}_j f_{\alpha 0} dv_{\perp} dv_{\parallel} + \\ + \frac{i}{4\pi} \frac{\omega_{\beta\alpha}^2}{\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_3^{(j)}(\mathbf{k})} \left( 1 + \int \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} d^3v \right) b_i b_j, \quad (9.2.1.22)$$

где коэффициенты  $\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})$  определяются соотношением (5.2.1.15) и

$$\hat{R}_m f_{\alpha 0} = \frac{1}{k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{\beta\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}) - i\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k}) - i/\tau_{\perp}(\mathbf{v})} \times \\ \times \left( 1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel} - i\delta_{3m}/\tau_{\perp}(\mathbf{v})}{\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k})} \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + \\ + \frac{(v_{\perp}/v_{\parallel}) [k_{\parallel} v_{\parallel} - i\delta_{3m}/\tau_{\parallel}(\mathbf{v})]}{[k_{\parallel} v_{\parallel} + n\omega_{\beta\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}) - i\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k}) - i/\tau_{\parallel}(\mathbf{v})] [\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k})]} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}}. \quad (9.2.1.23)$$

Используя соотношения (9.2.1.21), получим из уравнений Максвелла

$$\Lambda_{lm} E_{\mathbf{k}m}^{(j)} = 0, \quad (9.2.1.24)$$

где

$$\Lambda_{lm} = \frac{c^2 (k_l k_m - k^2 \delta_{lm})}{[\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_l^{(j)}(\mathbf{k})] [\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k})]} + \varepsilon_{lm}, \quad (9.2.1.25)$$

$$\varepsilon_{lm} = \delta_{lm} + \frac{4\pi i}{\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_l^{(j)}(\mathbf{k})} \sigma_{lm}. \quad (9.2.1.26)$$

Величины  $\varepsilon_{lm}$  и  $\sigma_{lm}$ , определяемые соотношениями (9.2.1.26) и (9.2.1.22), представляют собой тензор диэлектрической проницаемости и тензор проводимости магнитоактивной плазмы в квазилинейном приближении. Они существенно отличаются от соответствующих формул линейной теории. Различие состоит в том, что в выражениях для  $\sigma_{lm}$  и  $\varepsilon_{lm}$  в квазилинейном приближении входит фоновая функция распределения  $f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t)$ , зависящая от времени, а не начальная функция распределения. Кроме того, в (9.2.1.22) и (9.2.1.26) для  $\sigma_{lm}$  и  $\varepsilon_{lm}$  входят величины  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_l^{(j)}(\mathbf{k})$  и  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k}) + i/\tau_{\parallel, \perp}$ , содержащие три локальных инкремента нарастания  $\gamma_1^{(j)}$ ,  $\gamma_2^{(j)}$ ,  $\gamma_3^{(j)}$  и времена релаксации  $\tau_{\parallel}(\mathbf{v})$  и  $\tau_{\perp}(\mathbf{v})$ , тогда как в выражениях для  $\varepsilon_{lm}$  и  $\sigma_{lm}$  в линейной теории входит лишь комплексная частота  $\omega = \omega^{(j)}(\mathbf{k}) + i\gamma_l^{(j)}(\mathbf{k})$ , содержащая один инкремент нарастания  $\gamma^{(j)}(\mathbf{k})$ , не зависящий от времени.

Система уравнений (9.2.1.24) определяет поведение амплитуд электрического поля  $E_{kl}^{(j)}(t)$  во времени.

Если антиэрмитовы слагаемые в тензоре  $\epsilon_{lm}$  малы по сравнению с эрмитовыми слагаемыми, то, согласно (9.2.1.24), отношение компонент электрического поля  $E_{kl}^{(j)}(t)/E_{km}^{(j)}(t)$  будет определяться только эрмитовыми частями тензора  $\epsilon_{ij}$ , которые не зависят от поведения фоновой функции  $f_{a0}(\mathbf{v}, t)$  в области, занимаемой резонансными частицами, и, следовательно, это отношение не будет зависеть от времени. Отсюда следует, что величины  $E_{kl}^{(j)}(t)$  одинаково изменяются во времени, т. е. в данном случае локальные инкременты нарастания  $\gamma_I^{(j)}(\mathbf{k})$  равны между собой. Очевидно также, что они равны друг другу и в случае потенциальных колебаний, когда  $E_{\mathbf{k}}^{(j)} = -ik\phi_{\mathbf{k}}^{(j)}$ . Тогда уравнение  $\Lambda = \det(\Lambda_{lm}) = 0$ , в котором в силу малости числа резонансных частиц можно пренебречь величинами  $1/\tau_{\parallel, \perp}$ , совпадает с дисперсионным уравнением линейной теории. В общем же случае различные компоненты амплитуды напряженности электрического поля имеют неодинаковые локальные инкременты нарастания  $\gamma_I^{(j)}(\mathbf{k})$ , так как в отношении  $E_{kl}^{(j)}(t)/E_{km}^{(j)}(t)$  входят антиэрмитовы слагаемые тензора  $\epsilon_{ij}$ , существенно зависящие от значений величин  $\partial f_{a0}/\partial v_{\parallel}$  и  $\partial f_{a0}/\partial v_{\perp}$ , которые из-за диффузии частиц вследствие их рассеяния на волнах изменяются со временем.

Преобразуем теперь уравнение (9.2.1.5) для фоновой функции распределения. Вкладом функции  $f_{\mathbf{k}1}^{(j)}(\mathbf{v})$  в правую часть этого уравнения можно пренебречь, так как он пропорционален числу резонансных частиц. Тогда уравнение (9.2.1.5) с учетом соотношения (9.2.1.12) для  $f_{\mathbf{k}2}^{(j)}(\mathbf{v})$  примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{a0}}{\partial t} - \omega_{B\alpha} \frac{\partial f_{a0}}{\partial \phi} = \\ = - \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \sum_{\mathbf{k}, j} \left( E_{\mathbf{k}}^{(j)*} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}_{\mathbf{k}}^{(j)*}] \right) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(i\lambda \sin \phi + in\phi) \times \\ \times \int_0^t P^{(n)}(t') \exp[i(k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dt'. \end{aligned} \quad (9.2.1.27)$$

В правую часть этого уравнения входят интегралы по  $k_{\parallel}$ , которые имеют вид

$$I \equiv \int f(k_{\parallel}, t') \exp[i(k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k}))(t' - t)] dk_{\parallel}, \quad (9.2.1.28)$$

где  $f(k_{\parallel}, t)$  пропорционально  $E_{kl}^{(j)}(t) E_{km}^{(j)}(t) \frac{\partial f_{a0}(\mathbf{v}, t)}{\partial v_{\parallel, \perp}}$ . При  $t'$ , не близких к  $t$ , подынтегральное выражение в (9.2.1.28) сильно осцилли-

рует и не дает вклада в интеграл, если величина  $k_{\parallel} v_{\parallel} - n\omega_{B\alpha} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})$  не близка к нулю. Основной вклад в этот интеграл вносят резонансные значения  $k_{\parallel} \approx k_0$ , где  $k_{\parallel} = k_0$  определяется из условия  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel} = 0$ .

Для узких волновых пакетов  $|\Delta k_{\parallel}| \ll k_{\parallel} \sim k_0$  соотношение (9.2.1.28) можно записать в виде

$$I \approx \int f(k_{\parallel}, t') \exp \left[ i \left( v_{\parallel} - \frac{\partial \omega^{(j)}}{\partial k_{\parallel}} \right) \Big|_{k_{\parallel}=k_0} (k_{\parallel} - k_0) (t' - t) \right] dk_{\parallel}.$$

Если выполняется условие

$$\left| \left( k_{\parallel} - \frac{\partial \omega^{(j)}}{\partial k_{\parallel}} \right) \Big|_{k_{\parallel}=k_0} (t' - t) \Delta k_{\parallel} \right| \gg 1 \quad (\Delta k_{\parallel} = k_{\parallel} - k_0), \quad (9.2.1.29)$$

то из-под знака интеграла можно вынести функцию  $f(k_{\parallel}, t')$ , взяв ее в точке  $k_{\parallel} = k_0$ . Оставшийся интеграл будет близок к  $\delta(t - t')$ , и поэтому он не дает вклада в интеграл по  $t'$  в (9.2.2.27) ( $t'$  не близко к  $t$ ). Поскольку мы рассматриваем также времена  $\Delta t = t - t'$ , малые по сравнению с  $1/\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k})$ , то для выполнения условия (9.2.1.29) необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{\Delta k_{\parallel}}{k_{\parallel}} \gg \frac{|\gamma_m^{(j)}(\mathbf{k})|}{k_{\parallel} |v_{\parallel} - \partial \omega^{(j)}(\mathbf{k})/\partial k_{\parallel}| \Big|_{k_{\parallel}=k_0}}. \quad (9.2.1.30)$$

Таким образом, при выполнении этого условия основной вклад в интегралы по  $t'$  в (9.2.1.27) дают значения  $t' \approx t$ . Учитывая последнее обстоятельство и используя при вычислении интегралов по  $k_{\parallel}$  и  $t'$  в (9.2.1.27) те же соображения, что и при вычислении плотности тока  $\mathbf{j}_{\mathbf{k}} = \mathbf{j}_{\mathbf{k}2}$ , получим, пренебрегая членами порядка  $\gamma_m^{(j)}/\omega^{(j)}$  и  $1/\tau_{\parallel, \perp} \omega^{(j)}$ , следующее окончательное уравнение\*) для функции  $f_{\alpha 0}$ :

$$\begin{aligned} f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t) &= \frac{1}{2\pi} \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t) d\phi \approx f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, t), \\ \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} &= \pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \sum_j \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3k \frac{1}{v_{\perp}} \hat{R} \left\{ v_{\perp} |E_{\mathbf{k}1}^{(j)}| \frac{n}{|\lambda|} J_n(|\lambda|) + \right. \\ &\quad \left. + i\eta_{\alpha} E_{\mathbf{k}2}^{(j)} J'_n(|\lambda|) + E_{\mathbf{k}3}^{(j)} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(|\lambda|)^2 (\hat{R} f_{\alpha 0}) \right\} \times \\ &\quad \times \delta(\omega^{(j)}(\mathbf{k}) - n|\omega_{B\alpha}| - k_{\parallel} v_{\parallel}), \end{aligned} \quad (9.2.1.31)$$

где  $\eta_{\alpha} = e_{\alpha}/|e_{\alpha}|$ ,

$$\hat{R} = \left( 1 - \frac{k_{\parallel} v_{\parallel}}{\omega^{(j)}(\mathbf{k})} \right) \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} + \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega^{(j)}(\mathbf{k})} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}}. \quad (9.2.1.32)$$

Система уравнений (9.2.1.31) и (9.2.1.24) для функций  $f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  и  $E_{\mathbf{k}m}^{(j)}(t)$  ( $m = 1, 2, 3$ ) определяет затухание (или нарастание) электромагнитного поля и релаксацию усредненной

\*) Уравнение (9.2.1.31) было получено в работах [40—43].

функции распределения в квазилинейном приближении в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле.

В заключение отметим, что условие (9.2.1.30), при выполнении которого получено уравнение (9.2.1.31), не выполняется для волн с линейным законом дисперсии (или с законом дисперсии, близким к линейному,  $\omega^{(j)} \approx k_{\parallel} v$ ). Такими волнами являются альвеновская волна ( $\omega = k_{\parallel} v_A$ ), медленная магнитозвуковая волна в плазме низкого давления ( $\omega = k_{\parallel} v_s$ ,  $\xi_{\alpha} = 8\pi n_0 T_{\alpha} / B_0^2 \ll 1$ ) и быстрая магнитозвуковая волна, распространяющаяся почти параллельно магнитному полю ( $\omega = k v_A$ ,  $k_{\parallel} \approx k$ ) в плазме низкого давления ( $\xi_{\alpha} \ll 1$ ). Для этих колебаний уравнение для фоновой функции распределения имеет нелокальный по времени вид [13], т. е. скорость изменения функции  $f_{\alpha}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  в момент времени  $t$  определяется значениями амплитуды электрического поля и производной  $\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\parallel}$  во все предшествующие моменты времени. Это уравнение нетрудно получить из (9.2.1.27), удерживая в правой его части только слагаемые с  $n=0$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = & \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \int d^3 k \left[ E_{k3}^{(j)} J_0(|\lambda|) + i \eta_{\alpha} E_{k2}^{(j)} J_0'(|\lambda|) \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega^{(j)}(\mathbf{k})} \right]^* \times \\ & \times \int_0^t dt' \left[ E_{k3}^{(j)}(t') J_0(|\lambda|) + i \eta_{\alpha} E_{k2}^{(j)}(t') J_0'(|\lambda|) \frac{k_{\parallel} v_{\perp}}{\omega^{(j)}(\mathbf{k})} \right] \frac{\partial f_{\alpha}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t')}{\partial v_{\parallel}} \times \\ & \times \exp \{ i [k_{\parallel} v_{\parallel} - \omega^{(j)}(\mathbf{k})] (t' - t) \}. \end{aligned}$$

### 9.2.2. Квазилинейная релаксация в магнитоактивной плазме.

Обратное действие колебаний на резонансные частицы приводит к диффузии частиц в пространстве скоростей параллельно и перпендикулярно магнитному полю. Переходя к рассмотрению квазилинейной релаксации в магнитоактивной плазме [6, 7, 11], ограничимся рассмотрением колебаний, для которых антиэрмитовы части в тензоре  $\epsilon_{ij}$  малы по сравнению с эрмитовыми частями и локальные инкременты нарастания различных компонент электрического поля одинаковы.

Легко убедиться, что в процессе квазилинейной релаксации в магнитоактивной плазме, как и в случае свободной плазмы, плотность энтропии резонансных частиц возрастает. Действительно, используя определение (9.1.2.5) и уравнение (9.2.1.31), получим

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt} = & - \int (1 + \ln f_{\alpha 0}) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} d^3 v = \\ = & \pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_j \int d^3 k \int d^3 v \frac{1}{f_{\alpha 0}} (\hat{R} f_{\alpha 0})^2 \left| E_{k1}^{(j)} \frac{n}{|\lambda|} J_n(|\lambda|) + \right. \\ & \left. + i \eta_{\alpha} E_{k2}^{(j)} J_n'(|\lambda|) + E_{k3}^{(j)} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(|\lambda|) \right|^2 \delta(\omega^{(j)}(\mathbf{k}) - n |\omega_{B\alpha}| - k_{\parallel} v_{\parallel}) > 0. \end{aligned} \quad (9.2.2.1)$$

Покажем теперь, что рассматриваемая система колебаний и резонансных частиц релаксирует к некоторому стационарному состоянию. Для этого умножим уравнение (9.2.1.34) на  $f_{\alpha 0}$  и проинтегрируем по скоростям. Интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int f_{\alpha 0}^2 d^3v = & -\frac{2\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \sum_f \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int d^3v \int d^3k (\hat{R}f_{\alpha 0})^2 \left| E_{\mathbf{k}1}^{(j)} \frac{n}{|\lambda|} J_n(|\lambda|) + \right. \\ & \left. + i\eta_{\alpha} E_{\mathbf{k}2}^{(j)} J'_n(|\lambda|) + E_{\mathbf{k}3}^{(j)} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(|\lambda|) \right|^2 \delta(\omega^{(j)}(\mathbf{k}) - n|\omega_{B\alpha}| - k_{\parallel}v_{\parallel}). \end{aligned} \quad (9.2.2.2)$$

Так как правая часть этого уравнения отрицательна, то положительная величина  $\sigma(t) = \int f_{\alpha 0}^2 d^3v$  убывает и при  $t \rightarrow \infty$  стремится к постоянному пределу. Следовательно, при  $t \rightarrow \infty$  левая часть уравнения стремится к нулю. Тогда из (9.2.2.2) следует, что при  $t \rightarrow \infty$  либо

$$E_{\mathbf{k}1}^{(j)} \frac{n}{|\lambda|} J_n(|\lambda|) + i\eta_{\alpha} E_{\mathbf{k}2}^{(j)} J'_n(|\lambda|) + E_{\mathbf{k}3}^{(j)} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(|\lambda|) \Big|^2 = 0, \quad (9.2.2.3)$$

либо

$$(\hat{R}f_{\alpha 0})_{\omega^{(j)}(\mathbf{k})=k_{\parallel}v_{\parallel}+n|\omega_{B\alpha}|} = 0. \quad (9.2.2.4)$$

Если выполняется условие (9.2.2.3), то, учитывая, что амплитуды  $E_{\mathbf{k}m}^{(j)}$  связаны линейными соотношениями (9.2.1.24), можно заключить, что при  $t \rightarrow \infty$   $|E_{\mathbf{k}m}^{(j)}| = 0$ , т. е. колебания затухнут.

Если же в конечном состоянии энергия колебаний отлична от нуля, то выполняются условия (9.2.2.4) и мы получим

$$\left( n|\omega_{B\alpha}| \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} v_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right)_{\omega^{(j)}(\mathbf{k})=k_{\parallel}v_{\parallel}+n|\omega_{B\alpha}|} = 0. \quad (9.2.2.5)$$

В этом случае говорят об установлении *обобщенного плато* на функции распределения  $f_{\alpha 0}$ .

Так как антиэрмитовы слагаемые в тензоре  $\varepsilon_{ij}$ , определяющие инкремент нарастания  $\gamma^{(j)}(\mathbf{k})$ , представляют собой интегралы по скоростям от выражений, пропорциональных  $(\hat{R}f_{\alpha 0}) \delta(\omega^{(j)} - n|\omega_{B\alpha}| - k_{\parallel}v_{\parallel})$ , то при выполнении условия (9.2.2.4) инкремент нарастания  $\gamma^{(j)}(\mathbf{k})$  обратится в нуль, т. е. в этом случае отсутствует обмен энергией между резонансными частицами и волнами.

В уравнении (9.2.2.5) величина  $k_{\parallel}$ , вообще говоря, произвольна, и поэтому оно может удовлетворяться только при одновременном выполнении двух условий

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} = 0,$$

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} = 0.$$

Таким образом, в общем случае трехмерных волновых пакетов на функции распределения  $f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  устанавливается трехмерное плато во всей области скоростей  $V_{\mathbf{v}}$ , занимаемой резонансными частицами на плоскости  $(v_{\parallel}, v_{\perp})$ .

Размеры этой области по  $v_{\parallel}$  определяются из условия  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) = k_{\parallel} v_{\parallel} + n |\omega_{B\alpha}|$  для всех возможных значений  $\mathbf{k}$ ,  $n$  и  $j$ , для которых  $E_{\mathbf{k}}^{(j)} \neq 0$ . При данных  $n$  и  $j$  такое условие определяет область резонансных частиц  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$ . Если области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  не пересекаются, то в каждой из них устанавливается свое плато.

Пусть начальная функция распределения  $f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, 0)$  такова, что или колебания с частотой  $\omega^{(j)}(\mathbf{k})$  неустойчивы, или начальная интенсивность колебаний, принадлежащих ветви  $j$ , велика, а остальные ветви колебаний либо имеют малый инкремент нарастания, либо их начальная амплитуда мала; тогда можно рассматривать только развитие колебаний с частотой  $\omega^{(j)}(\mathbf{k})$ . При этих условиях на функции распределения  $f_{\alpha 0}$  в области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  может образоваться обобщенное плато. Может случиться, что функция распределения с плато в области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  неустойчива для колебаний с частотами  $\omega^{(j')}(\mathbf{k}')$ . В этом случае наступает вторая стадия квазилинейной релаксации, в течение которой происходит нарастание колебаний ветви  $j'$  и дальнейшая деформация функции распределения (*квазилинейная трансформация волн* \*). В результате такой двухступенчатой релаксации в конечном состоянии колебания либо затухнут, либо образуется обобщенное плато во всей области  $V_{\mathbf{v}}$ , для которой  $E_{\mathbf{k}}^{(j)}$  и  $E_{\mathbf{k}}^{(j')}$  отличны от нуля.

О квазилинейной трансформации волны можно также говорить и в том случае, когда на первой стадии происходит затухание (раскачка) колебаний ветви  $j$ , приводящее к установлению плато в области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  и обусловленное резонансными частицами, для которых  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) = k_{\parallel} v_{\parallel} + n |\omega_{B\alpha}|$ , а на второй стадии — либо медленная раскачка той же ветви колебаний резонансными частицами, для которых  $\omega^{(j')}(\mathbf{k}') = k'_{\parallel} v_{\parallel} + n' |\omega_{B\alpha}|$ , где  $n' \neq n$  и  $\mathbf{k}' \neq \mathbf{k}$ , причем области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  и  $V_{\mathbf{v}}^{(n', j')}$  пересекаются.

\* На возможность квазилинейной трансформации волн было указано в работе [11].

Рассмотрим, например, задачу о прохождении пучка электронов малой плотности через холодную плазму, находящуюся в сильном магнитном поле ( $|\omega_{Be}| \gg \omega_{pe}$ ) [15]. Такой пучок может возбуждать продольные высокочастотные колебания с частотами

$$\omega = \omega_{\infty}^{(1)}(\theta) \equiv \omega_+(k_{\parallel}, k_{\perp}) \approx |\omega_{Be}| \left( 1 + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right),$$

$$\omega = \omega_{\infty}^{(2)}(\theta) \equiv \omega_-(k_{\parallel}, k_{\perp}) \approx \omega_{pe} \cos \theta = \omega_{pe} \frac{k_{\parallel}}{\sqrt{k_{\parallel}^2 + k_{\perp}^2}}.$$

Тогда инкремент нарастания колебаний с частотой  $\omega_+$  в  $|\omega_{Be}|/\omega_{pe}$  раз меньше инкремента нарастания колебаний с частотой  $\omega_-$  (см. (6.2.2.4)) и возбуждение этой ветви колебаний можно не учитывать.

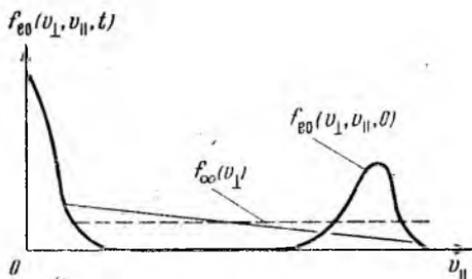


Рис. 9.2.1. Изменение функции распределения электронов при прохождении электронного пучка через плазму в сильном магнитном поле при двухступенчатой квазилинейной релаксации.

продольные колебания ( $k_{\parallel} \gg k_{\perp}$ ) с частотой  $\omega_- \approx \omega_{pe}$ . Диффузия резонансных частиц вследствие их рассеяния на этих колебаниях приведет к образованию плато на функции распределения электронов по продольным скоростям  $\partial f_{e0}/\partial v_{\parallel} = 0$  при  $v_{\parallel} = \omega_-/k_{\parallel}$ , и к ограничению возрастания черенковской неустойчивости. В конце первой стадии релаксации функция распределения электронов будет иметь вид, изображенный на рис. 9.2.1, и в области плато будет зависеть только от  $v_{\perp}$  ( $f_{e0} = f_{\infty}(v_{\perp})$ ).

На следующей стадии происходит более медленное циклотронное возбуждение колебаний с частотой  $\omega = \omega_-$  в условиях аномального эффекта Доплера\*),

$$\omega_-(k'_{\parallel}, k'_{\perp}) = k'_{\parallel} v_1 + n |\omega_{Be}|, \quad n = -1, -2, \dots,$$

\*) На возможность возбуждения в условиях аномального эффекта Доплера ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний плазмы в сильном магнитном поле группой «убегающих» электронов, для которых условие  $\partial f_{e0}(v_{\parallel}, v_{\perp})/\partial v_{\parallel} > 0$  не выполняется, указано в работе [14].

причем так как  $\omega_- \ll |\omega_{B0}|$ , то резонансные частицы, для которых  $v_{\perp} \approx |n\omega_{B0}|/k'_{\perp}$ , будут находиться в области плато, если  $k'_{\perp} \gg k_{\parallel}$  ( $k_{\parallel}$  — величина продольного волнового вектора колебаний с частотой  $\omega_-$ , раскачиваемых при черенковском резонансе).

Действительно, для продольных колебаний плазмы в магнитном поле основные уравнения квазилинейной теории принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \pi \frac{e^2}{m_e^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int k_{\perp} \left( \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} k_{\parallel} + \frac{n|\omega_{B0}|}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \right) \times \\ \times \left( k_{\parallel} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{n|\omega_{B0}|}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} \right) \frac{|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 J_n^2(|\lambda|)}{|v_{\parallel} - v_g|} dk_{\perp}, \\ \frac{\partial |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\partial t} = 2\gamma |\varphi_{\mathbf{k}}|^2, \end{aligned} \right\} \quad (9.2.2.6)$$

где

$$\gamma = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma_n(k_{\parallel}, k_{\perp}),$$

$$\gamma_n = \frac{\pi}{2} \frac{\omega^3}{k^2 k_{\parallel} n_0} \int J_n^2(\lambda) \left( k_{\parallel} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} + \frac{n|\omega_{B0}|}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\perp}} \right)_{\omega_- = k_{\parallel} v_{\parallel} + n|\omega_{B0}|} d^2 v_{\perp} \quad (9.2.2.7)$$

и  $v_g = \partial\omega_-/\partial k_{\parallel}$  — групповая скорость. (При получении первого уравнения (9.2.2.6) предполагалось, что величина  $|\varphi_{\mathbf{k}}|^2$  не зависит от азимутального угла. Это условие, очевидно, выполняется, если начальное значение  $|\varphi_{\mathbf{k}}|^2$  не зависело от этого угла).

Переходя от переменных  $v_{\parallel}$ ,  $v_{\perp}$  к новым переменным  $v_{\parallel}$ ,  $w$ , определяемым как

$$w(n, k_{\perp}) \equiv v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2 - 2 \int (\omega_-/k_{\parallel}) dv_{\parallel},$$

представим (9.2.2.6) и (9.2.2.7) в виде

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \pi \frac{e^2}{m_e^2} \int \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \frac{k_{\parallel} k_{\perp}^2 J_n^2(\lambda)}{|v_{\parallel} - v_g|} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \right] dk_{\perp}, \quad (9.2.2.8)$$

$$\gamma_n(k_{\parallel}, k_{\perp}) = \frac{\pi}{2} \frac{\omega^3 \cos^2 \theta}{k k_{\parallel} n_0} \int J_n^2(\lambda) \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} d^2 v_{\perp}. \quad (9.2.2.9)$$

(Здесь производные по  $v_{\parallel}$  берутся при  $w(n, k_{\perp}) = \text{const.}$ ) Из уравнения (9.2.2.8) следует, что диффузия резонансных частиц происходит вдоль линий  $w(n, k_{\perp}) = \text{const.}$

Учитывая, что

$$v_{\perp}^2 = w(n, k'_{\perp}) + 2 \int \frac{\omega_{-}(k'_{\parallel}, k'_{\perp})}{k'_{\parallel}} dv_{\parallel} - v_{\parallel}^2,$$

где  $v_{\parallel} = \omega_{-}(k_{\parallel}, k_{\perp})/k_{\parallel}$ , получим в состоянии, соответствующем плато на функции распределения,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \right)_{w(n, k'_{\perp}) = \text{const}} &= \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} f_{\infty} \left[ w(n, k'_{\perp}) + 2 \int \frac{\omega_{-}(k'_{\parallel}, k'_{\perp})}{k'_{\parallel}} dv_{\parallel} - v_{\parallel}^2 \right] = \\ &= 2 \left[ \frac{\omega_{-}(k'_{\parallel}, k'_{\perp})}{k'_{\parallel}} - v_{\parallel} \right] \frac{\partial f_{\infty}}{\partial (v_{\perp}^2)}. \end{aligned}$$

Используя это соотношение, найдем инкремент нарастания колебаний с частотой  $\omega_{-}(k'_{\parallel}, k'_{\perp})$  при циклотронном возбуждении в том случае, когда на функции распределения имеется плато

$$\gamma_n(k'_{\parallel}, k'_{\perp}) = \pi \frac{\omega_{-}(k'_{\parallel}, k'_{\perp})}{(k'_{\parallel})^3 n_0} [v_{ph}(k'_{\parallel}, k'_{\perp}) - v_{ph}(k_{\parallel}, k_{\perp})] \int \frac{df_{\infty}}{d(v_{\perp}^2)} J_n^2(\lambda) d^2 v_{\perp}.$$

Здесь фазовые скорости определяются соотношениями

$$v_{ph}(k'_{\parallel}, k'_{\perp}) = \omega_{-}(k'_{\parallel}, k'_{\perp})/k'_{\parallel}, \quad v_{ph}(k_{\parallel}, k_{\perp}) = \omega_{-}(k_{\parallel}, k_{\perp})/k_{\parallel} = v_{\parallel}.$$

Так как  $v_{ph}(k'_{\parallel}, k'_{\perp}) = v_{\parallel} + n |\omega_{Be}|/k'_{\parallel}$ , то для функций распределения  $f_{\infty}(v_{\perp}^2)$ , убывающих с ростом  $v_{\perp}$ , инкремент  $\gamma_n$  положителен, если  $n < 0$ . Таким образом, действительно образование плато вследствие черенковского возбуждения приводит к циклотронному возбуждению колебаний в условиях аномального эффекта Доплера.

При циклотронном возбуждении колебаний с частотой  $\omega_{-}$  будет происходить диффузия частиц вдоль линий  $w(n, k'_{\perp}) = \text{const}$ , т. е. как вдоль, так и поперек магнитного поля (рис. 9.2.2). На этих линиях

$$\frac{dv_{\perp}}{dv_{\parallel}} = - \frac{v_{\parallel} - \omega_{-}(k'_{\parallel}, k'_{\perp})/k'_{\parallel}}{v_{\perp}} < 0$$

Рис. 9.2.2. Линия диффузии резонансных частиц при циклотронном возбуждении продольных колебаний плазмы электронным пучком при аномальном эффекте Доплера.

и диффузия будет сопровождаться увеличением энергии поперечного движения частиц пучка и уменьшением энергии их продольного движения, т. е. наклоном плато ( $\partial f_{e0}/\partial v_{\parallel} < 0$ ).

При  $\partial f_{e0}/\partial v_{\parallel} < 0$  колебания, возбужденные на первой стадии релаксации, будут медленно затухать. В конце концов они затухнут и значительно возрастет энергия поперечного движения

частиц пучка за счет уменьшения энергии их поступательного движения.

**9.2.3. Релаксация одномерных волновых пакетов в магнитоактивной плазме.** Рассмотрим более подробно квазилинейную релаксацию одномерных волновых пакетов, распространяющихся под фиксированным углом  $\theta$  к магнитному полю  $\mathbf{B}_0$  [7]. Будем считать, что спектральная плотность рассматриваемого волнового пакета отлична от нуля в узком интервале величин волновых векторов,  $k_1 < k < k_2$ , где  $k_2 - k_1 \ll k$ .

Резонансной области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  соответствуют в этом случае скорости частиц вдоль магнитного поля, лежащие в интервале  $v_{\min}(n, j) < v_{\parallel} < v_{\max}(n, j)$ , где  $v_{\max(\min)} = \max(\min) \frac{(\omega^{(j)}(\mathbf{k}) - n|\omega_{Bk}|)}{k \cos \theta}$ . Очевидно, что области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  с различными  $n$  и  $j$  не перекрываются, если  $v_{\max}(n', j') < v_{\min}(n, j)$  или  $v_{\max}(n, j) < v_{\min}(n', j')$ . Здесь мы будем рассматривать только тот случай, когда области  $V_{\mathbf{v}}^{(n, j)}$  не пересекаются, так что в правой части уравнения (9.2.1.31) в суммах по  $n$  и  $j$  можно оставить только одно слагаемое.

Исследуем прежде всего взаимодействие резонансных частиц с одномерным волновым пакетом при черенковском резонансе. При этом уравнение (9.2.1.31) принимает вид

$$\frac{\partial f_{a0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} D(v_{\parallel}, v_{\perp}) \frac{\partial f_{a0}}{\partial v_{\parallel}}, \quad (9.2.3.1)$$

где коэффициент диффузии  $D$  равен

$$D(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \pi \frac{e_a^2}{m_a^2} \frac{\left| E_{\mathbf{k}3}^{(j)} J_0(|\lambda|) + i\eta_a E_{\mathbf{k}2}^{(j)} J_0'(|\lambda|) \frac{v_{\perp}}{v_{\parallel}} \right|^2}{|v_{\parallel} \cos \theta - v_g|} \Big|_{\omega^{(j)}(k, \theta) = k_{\parallel} v_{\parallel}} \quad (9.2.3.2)$$

$$v_g = \frac{\partial \omega^{(j)}(k, \theta)}{\partial k}.$$

Из уравнения (9.2.3.1) следует, что в условиях черенковского резонанса диффузия частиц из-за их рассеяния на волнах происходит только в направлении магнитного поля. Однако так как коэффициент диффузии зависит от  $v_{\perp}$ , то вследствие диффузии частиц вдоль  $\mathbf{B}_0$  функция  $f_{a0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  изменяется для различных значений  $v_{\perp}$  с различной скоростью.

Отметим, что если в начальный момент времени  $t = 0$  функция  $f_{a0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  имела вид произведения

$$f_{a0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, 0) = f_1(v_{\perp}) f_2(v_{\parallel}),$$

то в случае продольных колебаний ( $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)} = -ik\Phi_{\mathbf{k}}^{(j)}$ ) решение уравнения (9.2.3.1) запишется следующим образом:

$$f_{a0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t) = f_1(v_{\perp}) f_2(v_{\parallel}, J_0^2(\lambda) t), \quad (9.2.3.3)$$

где  $J_0(\lambda)$  — функция Бесселя,  $\lambda = k_x v_x / \omega_{B\alpha}$ . Отсюда вытекает, что если пренебречь эффектами, связанными с конечностью лармовского радиуса частиц ( $|\lambda| \ll 1$ ,  $J_0(\lambda) \approx 1$ ), то функцию  $f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp}, t)$  можно представить в виде произведения  $f_{\alpha 0} = f_1(v_{\parallel}) f_2(v_{\perp}, t)$ , т. е. в этом случае распределение частиц по поперечным скоростям не изменяется во времени.

Рассмотрим теперь взаимодействие резонансных частиц с одномерным волновым пакетом при циклотронном резонансе, когда  $\omega = \omega^{(j)}(\mathbf{k}) = k_{\parallel} v_{\parallel} + n |\omega_{B\alpha}|$  ( $n \neq 0$ ). Будем считать для простоты, что частота собственных колебаний слабо зависит от  $k$ , т. е.  $v_g = \partial \omega^{(j)}(k, \theta) / \partial k \ll v_{\parallel}$ . В этом случае удобно ввести вместо переменных  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  новые независимые переменные  $w_1$  и  $w_2$ , определяемые соотношением

$$w_{1,2} = \frac{v_{\parallel}^2}{\omega - n |\omega_{B\alpha}|} \pm \frac{v_{\perp}^2}{n |\omega_{B\alpha}|}. \quad (9.2.3.4)$$

Тогда уравнение (9.2.1.31) принимает вид одномерного уравнения диффузии

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial w_1} D(w_1, w_2) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial w_1}, \quad (9.2.3.5)$$

где

$$D = \frac{16\pi e^2}{m_{\alpha}^2} \frac{\left| E_{k3}^{(j)} v_{\parallel} J_n(|\lambda|) + i\eta_{\alpha} E_{k2}^{(j)} v_{\perp} J'_n(|\lambda|) + E_{k1}^{(j)} \frac{n\omega_{B\alpha}}{k_{\perp}} J_n(|\lambda|) \right|^2}{\omega^2 |v_{\parallel} \cos \theta - v_g|}. \quad (9.2.3.6)$$

Таким образом, в условиях циклотронного резонанса диффузия в пространстве скоростей происходит вдоль линий  $w_2(v_{\parallel}, v_{\perp}) = \text{const}$ .

Коэффициент диффузии  $D$  (см. (9.2.3.6)) может обращаться в нуль в некоторых точках

$$w_1 = q_m(w_2), \quad m = 0, 1, \dots,$$

где  $q_{m+1} > q_m$ . В области  $q_m < w_1 < q_{m+1}$  число частиц сохраняется, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{q_m}^{q_{m+1}} f_{\alpha 0}(w_1, w_2, t) dw_1 = D(w_1, w_2) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial w_1} \Big|_{w_1=q_{m+1}}^{w_1=q_m} = 0,$$

и, следовательно,

$$\int_{q_m}^{q_{m+1}} f_{\alpha 0}(w_1, w_2, t) dw_1 = \int_{q_m}^{q_{m+1}} f_{\alpha 0}(w_1, w_2, 0) dw_1.$$

Если в конечном состоянии энергия колебаний отлична от нуля, то из уравнения (9.2.3.5) следует, что  $\partial f_{\alpha 0} / \partial w_1 = 0$ , т. е. вдоль линий  $w_2 = \text{const}$  образуется плато

$$f_{\alpha 0} = f_{\infty}(w_2).$$

Если начальное распределение частиц по скоростям является максвелловским, то

$$f_{\infty} = \frac{4 \exp[-(\omega - n|\omega_{B\alpha}|)w_2/4v_{\alpha}^2]}{(2\pi)^{3/2} (q_{m+1} - q_m) \omega v_{\alpha}} \left[ \exp\left(-\frac{\omega q_m}{4v_{\alpha}^2}\right) - \exp\left(-\frac{\omega q_{m+1}}{4v_{\alpha}^2}\right) \right]. \quad (9.2.3.7)$$

Найдем вид этой функции в случае электромагнитных волн с частотой  $\omega \approx n|\omega_{B\alpha}|$ , распространяющихся в холодной плазме, когда  $kv_{\alpha} \ll |\omega_{B\alpha}|$ . Выражая при помощи уравнений (9.2.1.24) компоненты поля  $E_{k1}^{(j)}$  и  $E_{k3}^{(j)}$  через  $E_{k2}^{(j)}$ , найдем

$$D = 16\pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \frac{v_{\perp}^2 |E_{k2}^{(j)}|^2 \left| \eta_{\alpha} J_n'(|\lambda|) + \frac{n}{|\lambda|} J_n(|\lambda|) \xi \right|^2}{\omega^2 |v_{\parallel} \cos \theta - v_g|}, \quad (9.2.3.8)$$

где

$$\xi = (\epsilon_1 - \mathcal{N}^2)/\epsilon_2, \quad \mathcal{N} = ck/\omega,$$

$$\epsilon_1 = 1 - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2}, \quad \epsilon_2 = - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2 \omega_{B\alpha}}{\omega(\omega^2 - \omega_{B\alpha}^2)}.$$

Для рассматриваемого узкого волнового пакета, для которого скорость резонансных частиц вдоль магнитного поля изменяется в пределах  $v_1 \leq v \leq v_2$ , переменная  $w_1$  при фиксированном  $w_2$  изменяется в пределах, определяемых из неравенств

$$v_1^2 \leq \frac{1}{2}(\omega - n|\omega_{B\alpha}|)(w_1 + w_2) \leq v_2^2. \quad (9.2.3.9)$$

Коэффициент диффузии (9.2.3.8) обращается в нуль в следующих точках: на границах волнового пакета, т. е. при  $v_{\parallel} = v_{1,2}$ , в точке  $v_{\perp} = 0$ , а также в точках  $v_{\perp} = v_{\perp}^{(v)}$ ,  $v = 1, 2, \dots$ , определяемых из условия  $\eta_{\alpha} J_n'(|\lambda|)|\lambda| + n J_n(|\lambda|) \xi = 0$ . Так как  $v_{\perp}^{(v)} \geq \omega_{B\alpha}/k_{\perp} \gg v_{\alpha}$ , то при  $|1/2\pi - \theta| \gg kv_{\alpha}/|\omega_{B\alpha}|$  точки  $v_{\perp}^{(v)}$  не попадают в интервал (9.3.2.9), для которого  $D \neq 0$ . Рассмотрением этого случая мы и ограничимся.

Точка  $w_1 = w_2$  попадает в интервал (9.2.3.9), если

$$\left. \begin{aligned} \frac{(v_{\parallel} - v_1) v_1}{v_{\perp}^2} &> \frac{\omega - n|\omega_{B\alpha}|}{2n|\omega_{B\alpha}|} \quad \text{при} \quad \omega - n|\omega_{B\alpha}| > 0, \\ \text{либо если} \\ \frac{(v_2 - v_{\parallel}) v_2}{v_{\perp}^2} &> \frac{n|\omega_{B\alpha}| - \omega}{2n|\omega_{B\alpha}|} \quad \text{при} \quad \omega - n|\omega_{B\alpha}| < 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.2.3.10)$$

При невыполнении неравенства (9.2.3.10) плато устанавливается между точками  $q_m < w_1 < q_{m+1}$ , где положение точек  $q_m$  и  $q_{m+1}$  определяется из условия обращения в нуль коэффициента диффузии  $D$  при  $v_{\parallel} = v_{1,2}$ :

$$w_1 = w_2 + \frac{2v_{1,2}^2}{\omega - n|\omega_{B\alpha}|}.$$

В этом случае функция  $f_{\infty}(v_{\parallel}, v_{\perp})$ , задаваемая (9.2.3.7), принимает вид

$$\left. \begin{aligned} f_{\infty}(v_{\parallel}, v_{\perp}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha}^3} \exp \left[ -\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_{\alpha}^2} + \frac{v_{\parallel}(v_{\parallel} - v_1)n|\omega_{B\alpha}|}{v_{\alpha}^2(\omega - n|\omega_{B\alpha}|)} \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{x} (1 - \exp(-x)), \quad \omega - n|\omega_{B\alpha}| > 0, \\ f_{\infty}(v_{\parallel}, v_{\perp}) &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha}^3} \exp \left[ -\frac{v_{\perp}^2 + v_{\parallel}^2}{2v_{\alpha}^2} + \frac{v_{\parallel}(v_2 - v_{\parallel})n|\omega_{B\alpha}|}{v_{\alpha}^2(n|\omega_{B\alpha}| - \omega)} \right] \times \\ &\quad \times \frac{1}{x} (1 - \exp(-x)), \quad \omega - n|\omega_{B\alpha}| < 0, \end{aligned} \right\} (9.2.3.11)$$

где  $x = \omega(v_2 - v_1)/k_{\parallel}v_{\alpha}^2$ .

Рассмотрим теперь случай, когда точка  $w_1 = w_2$  попадает в интервал (9.2.3.9), т. е. выполняется одно из неравенств (9.2.3.10). Если  $\omega > n|\omega_{B\alpha}|$ , то образование плато в области  $q_m = w_2$  и  $q_{m+1} = -w_2 + 2v_2^2/(\omega - n|\omega_{B\alpha}|)$  приводит к установлению следующего распределения частиц по скоростям:

$$\begin{aligned} f_{\infty}(v_{\parallel}, v_{\perp}) &= \frac{2 \exp \left[ -v_{\parallel}^2/2v_{\alpha}^2 + v_{\perp}^2(\omega - n|\omega_{B\alpha}|)/2n|\omega_{B\alpha}|v_{\alpha}^2 \right]}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha} \omega [(v_{\parallel}^2 - v_1^2)/(\omega - n|\omega_{B\alpha}|) + v_{\perp}^2/n|\omega_{B\alpha}|]} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\omega}{2v_{\alpha}^2} \left( \frac{v_{\parallel}^2 - v_1^2}{\omega - n|\omega_{B\alpha}|} + \frac{v_{\perp}^2}{n|\omega_{B\alpha}|} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если же  $\omega < n|\omega_{B\alpha}|$ , то плато устанавливается между точками  $q_m = -w_2 + 2v_2^2/(\omega - n|\omega_{B\alpha}|)$  и  $q_{m+1} = w_2$ ; при этом

$$\begin{aligned} f_{\infty}(v_{\parallel}, v_{\perp}) &= \frac{2 \exp \left[ -v_{\parallel}^2/2v_{\alpha}^2 + v_{\perp}^2(\omega - n|\omega_{B\alpha}|)/2n|\omega_{B\alpha}|v_{\alpha}^2 \right]}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha} \omega [(v_{\parallel}^2 - v_1^2)/(n|\omega_{B\alpha}| - \omega) + v_{\perp}^2/n|\omega_{B\alpha}|]} \times \\ &\quad \times \left\{ 1 - \exp \left[ -\frac{\omega}{2v_{\alpha}^2} \left( \frac{v_{\parallel}^2 - v_1^2}{n|\omega_{B\alpha}| - \omega} + \frac{v_{\perp}^2}{n|\omega_{B\alpha}|} \right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (9.2.3.12)$$

Рассмотрим последние выражения для функций распределения  $f_{\alpha 0} = f_{\infty}(v_{\parallel}, v_{\perp})$  в конечном состоянии с плато вдоль направ-

ления  $w_1(v_{\parallel}, v_{\perp})$  в частных случаях узкого ( $v_2 - v_1 \ll k_{\parallel} v_{\alpha}^2 / |\omega_{B\alpha}|$ ) и широкого ( $v_2 - v_1 \gg k_{\parallel} v_{\alpha}^2 / |\omega_{B\alpha}|$ ) волновых пакетов.

В первом случае неравенства (9.2.3.10) не могут выполняться при  $v_{\perp} \sim v_{\alpha}$ . Диффузия частиц, вызванная рассеянием на волнах, приводит, как видно из выражений (9.2.3.14), к образованию плато в направлении  $v_{\parallel}$  в узком интервале и не изменяет распределения по  $v_{\perp}$  в области не очень малых  $v_{\perp}$ .

Для широких волновых пакетов неравенства (9.2.3.10) выполняются для любых  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  (за исключением значений  $v_{\parallel}$ , очень близких к  $v_1$  или  $v_2$ ). Диффузия частиц вследствие их рассеяния на волнах приводит, как следует из выражений (9.2.3.14), к сильному изменению функции распределения частиц и по  $v_{\parallel}$ , и по  $v_{\perp}$ .

Рассмотрим процесс релаксации для широких волновых пакетов более подробно. На начальной стадии в правой части уравнения (9.2.1.31) можно пренебречь слагаемыми, содержащим  $k_{\parallel} \partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\parallel} \sim f_{\alpha 0} k_{\parallel} / \Delta v_{\parallel}$  по сравнению со слагаемыми ( $n \omega_{B\alpha} / v_{\perp}$ )  $\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\perp} \sim \sim f_{\alpha 0} n \omega_{B\alpha} / v_{\alpha}^2$  ( $\Delta v_{\parallel} = v_2 - v_1$ ). Тогда уравнение (9.2.1.31) примет вид

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} = \frac{1}{v_{\perp}} \frac{\partial}{\partial v_{\perp}} \left( D_{\perp} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} \right), \quad (9.2.3.13)$$

где

$$D_{\perp} = \pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \frac{v_{\perp} \left| \frac{E_{k1}^{(j)}}{|\lambda|} J_n(|\lambda|) + i \eta_{\alpha} E_{k2}^{(j)} J'_n(|\lambda|) + E_{k3}^{(j)} \frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} J_n(|\lambda|) \right|^2}{|v_g - v_{\parallel} \cos \theta|}. \quad (9.2.3.14)$$

Таким образом, под действием электромагнитного поля широких волновых пакетов на начальной стадии происходит диффузия частиц вдоль  $v_{\perp}$ , обусловленная циклотронным ускорением частиц.

Для длинных волн и резонансных частиц с не очень большой поперечной скоростью ( $|\lambda| \ll 1$ ) уравнение (9.2.3.13) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \tau} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x^n \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x} \right), \quad (9.2.3.15)$$

где  $x = v_{\perp}^2 / 2v_{\alpha}^2$ ,  $\tau = \int_0^t D dt$ ,

$$D = \pi \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \left( \frac{k_{\perp} v_{\alpha}}{\omega_{B\alpha}} \right)^{2(|n|-1)} \frac{|E_{k1}^{(j)} + i \eta_{\alpha} E_{k2}^{(j)} + (k_{\perp} v_{\parallel} / n |\omega_{B\alpha}|) E_{k3}^{(j)}|^2}{2^{|n|} [ (|n| - 1)! ]^2 |v_g - v_{\parallel} \cos \theta| v_{\alpha}^2}.$$

Приведем решение уравнения (9.2.3.15) для  $n = 1, 2, 4$  [7]:

$$f_{\alpha 0} = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha}^3 (1 + \tau)} \exp\left(-\frac{v_{\parallel}^2}{2v_{\alpha}^2} - \frac{x}{1 + \tau}\right), \quad n = 1, \quad (9.2.3.16)$$

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x} = -\frac{\sqrt{\pi} \exp(-v_{\parallel}^2/2v_{\alpha}^2)}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha}^3 \sqrt{\tau}} \int_0^{\infty} e^{-x'} \left(\frac{x}{x'}\right)^{-4[\tau - \ln(x/x')]^{2/\tau}} dx', \quad n = 2, \quad (9.2.3.17)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial x} = & -\frac{\sqrt{\pi} \exp(-v_{\parallel}^2/2v_{\alpha}^2)}{(2\pi)^{3/2} v_{\alpha}^3 \sqrt{\tau}} \int_0^{\infty} e^{-x'} \left\{ \exp\left[-\left(\frac{1}{x'} - \frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{4\tau}\right] + \right. \\ & \left. + \exp\left[-\left(\frac{1}{x'} + \frac{1}{x}\right)^2 \frac{1}{4\tau}\right] \right\} dx', \quad n = 4. \quad (9.2.3.18) \end{aligned}$$

Из (9.2.3.16) следует, что распределение частиц по  $v_{\perp}$  с течением времени остается максвелловским, причем увеличивается поперечная температура частиц

$$T_{\perp}(t) = T_{\alpha} + T_{\alpha} \int_0^t D dt.$$

Затухание колебаний происходит по линейному закону, т. е.

$$|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)}(t)|^2 = |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)}(0)|^2 \exp(-2\gamma_{\mathbf{M}} t), \quad (9.2.3.19)$$

где  $\gamma_{\mathbf{M}}$  — декремент затухания, определяемый формулами линейной теории для максвелловского распределения частиц по скоростям.

В случае двукратного резонанса  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) = 2|\omega_{B\alpha}|$  декремент затухания для длинноволновых широких волновых пакетов задается соотношением

$$\gamma^{(j)}(\mathbf{k}, t) = -\gamma_{\mathbf{M}} \exp(8\tau). \quad (9.2.3.20)$$

Используя его, нетрудно показать, что затухание будет происходить по закону

$$|\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)}(t)|^2 = |\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(j)}(0)|^2 \frac{1 + \zeta}{\zeta + \exp[2\gamma_{\mathbf{M}}(1 + \zeta)t]}, \quad (9.2.3.21)$$

где

$$\zeta = \frac{\pi e_{\alpha}^2 k_{\perp}^2}{4m_{\alpha}^2 \gamma_{\mathbf{M}}} \frac{|\mathbf{E}_{\mathbf{k}2}^{(j)}(0)|^2 |1 + \xi|^2}{|v_{\mathbf{g}} - v_{\parallel} \cos \theta| \omega_{B\alpha}^2}.$$

Из соотношений (9.2.3.20) и (9.2.3.21) следует, что в рамках квазилинейного приближения затухание для широких волновых пакетов с частотой  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) \approx 2|\omega_{B\alpha}|$  происходит быстрее, чем в линейной теории.

**9.2.4. Влияние столкновений на квазилинейную релаксацию и черенковское и циклотронное затухание колебаний.** Как было показано в п. 9.1.4, кулоновские столкновения резонансных частиц с остальными частицами плазмы могут существенно влиять на изменение функции распределения во времени и на величину производной  $\partial f_{e0}/\partial \omega$ , определяющей скорость бесстолкновительного затухания колебаний.

Исследуем теперь влияние столкновений резонансных частиц на их диффузию в пространстве скоростей и на бесстолкновительное черенковское и циклотронное поглощение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме [7].

В случае узких волновых пакетов, когда число резонансных частиц невелико (интервал скоростей, занимаемых резонансными частицами  $\Delta v_{\parallel} = v_2 - v_1$  мал,  $\Delta v_{\parallel} \ll v_{\parallel}$ ,  $v_1 < v_{\parallel} < v_2$ ), можно пренебречь столкновениями резонансных частиц между собой.

Для резонансных электронов, имеющих скорость  $v_1$ , значительно большую тепловой скорости ионов  $v_i$ , интеграл столкновений (9.1.4.1) можно представить в виде

$$\left(\frac{\partial f_{e0}}{\partial t}\right)_c = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ D_{\infty} \frac{\partial (f_{e0} - f_{eM})}{\partial v_{\parallel}} \right], \quad (9.2.4.1)$$

где  $f_{eM}$  — максвелловская функция распределения, а коэффициент диффузии  $D_{\infty}$  определяется формулой

$$D_{\infty} = \frac{v_e^3}{\tau_e} \left( \frac{v_{\perp}^2}{v^3} + \frac{\partial^2 \Psi_e}{\partial v_{\parallel}^2} \right); \quad (9.2.4.2)$$

здесь

$$\frac{1}{\tau_e} = \frac{2\pi e^4 n_0 L}{m_e^2 v_e^3},$$

$$\Psi_e = \int f_{eM}(\mathbf{v}') |\mathbf{v} - \mathbf{v}'| d^3 v' = \sqrt{2/\pi} v_e \exp\left(-\frac{v^2}{2v_e^2}\right) + \frac{v_e^2 + v^2}{v} \Phi(v/\sqrt{2}v_e), \quad (9.2.4.3)$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt. \quad (9.2.4.4)$$

Первое слагаемое в (9.2.4.2) учитывает столкновения электронов с ионами, а второе — столкновения электронов между собой. Если  $v_{\parallel} \gg v_e$ , то выражение (9.2.4.2) принимает простой вид

$$D_{\infty} = \frac{2v_e^3}{\tau_e v_{\parallel}^2} (v_{\perp}^2 + v_e^2). \quad (9.2.4.5)$$

Для резонансных ионов можно учитывать только их столкновения с остальными (нерезонансными) ионами и пренебречь столкновениями с электронами. В этом случае получим из (9.1.4.4)

$$\left(\frac{\partial f_{i0}}{\partial t}\right)_e = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ D_{ei} \frac{\partial (f_{i0} - f_{iM})}{\partial v_{\parallel}} \right], \quad (9.2.4.6)$$

где

$$D_{ei} = \frac{v_i^3}{\tau_e} \frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial v_{\parallel}^2}, \quad \frac{1}{\tau_e} = \frac{2\pi e^4 n_0 L}{m_i^2 v_i^3} \quad (9.2.4.7)$$

и  $\Psi_i$  определяется выражением (9.2.4.3), в котором нужно заметить  $v_e$  на  $v_i$ . При  $v_{\parallel} \gg v_i$  первое выражение (9.2.4.7) упрощается

$$D_{ei} = \frac{1}{\tau_e} \frac{v_i^3}{v_{\parallel}^3} (v_{\perp}^2 + 2v_i^2). \quad (9.2.4.8)$$

При выводе формул (9.2.4.1)–(9.2.4.8), как и в п. 9.1.4, учитывалось, что функции распределения электронов и ионов в резонансной области мало отличаются от максвелловских, а вне резонансной области являются максвелловскими, и пренебрегались величинами  $\partial(f_{\alpha 0} - f_M)/\partial v_{\perp} \sim (f_{\alpha 0} - f_M)/v_{\alpha}$  по сравнению с  $\partial(f_{\alpha 0} - f_M)/\partial v_{\parallel} \sim (f_{\alpha 0} - f_M)/\Delta v_{\parallel}$ .

Рассмотрим сначала влияние столкновений резонансных частиц на черенковское затухание в случае узких волновых пакетов, распространяющихся под фиксированным углом  $\theta$  к направлению внешнего магнитного поля в плазме малого давления ( $4\pi n_0 T_{\alpha} \ll B_0^2$ ). Будем изучать только колебания с длиной волны, значительно большей ларморовского радиуса частиц (к числу таких волн относятся различные ветви продольных колебаний, альвеновская и быстрая магнитозвуковая волны, см. гл. 5). Так как фазовая скорость этих волн значительно больше тепловой скорости ионов, то можно пренебречь экспоненциально малым черенковским затуханием колебаний, обусловленным ионами, и учитывать только черенковское затухание, обусловленное электронами.

Удерживая в (9.2.1.31) для электронов только одно слагаемое с  $n=0$  и добавляя в правую часть этого уравнения интеграл столкновений в форме (9.2.4.1), представим уравнение для  $f_{e0}$  в виде

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v_{\parallel}} \left[ D \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} + D_{ce} \frac{\partial (f_{e0} - f_{eM})}{\partial v_{\parallel}} \right], \quad (9.2.4.9)$$

где  $D_{ce}$  определяется выражением (9.2.4.2) и

$$D = \pi \frac{e^2}{m_e^2} \int \left| E_{\mathbf{k}3}^{(j)} + i \frac{v_{\perp}}{2v_{\parallel}} E_{\mathbf{k}2}^{(j)} \right|^2 \delta(\omega^{(j)}(\mathbf{k}) - k_{\parallel} v_{\parallel}) d^3 k. \quad (9.2.4.10)$$

В квазиравновесном состоянии, когда диффузия электронов вследствие рассеяния на волнах уравновешивается столкновениями ( $\partial f_{e0}/\partial t \approx 0$ ), из уравнения (9.2.4.9) получим

$$\frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} = \frac{\partial f_{eM}}{\partial v_{\parallel}} \frac{1}{1 + D/D_{ce}}. \quad (9.2.4.11)$$

Антиэрмитово слагаемое в дисперсионном уравнении продольных колебаний  $(k_{\parallel} k_j / k^2) \varepsilon_{ij} = 0$  (и, следовательно, декремент затухания) пропорционально интегралу

$$\int_0^{\infty} v_{\perp} \left. \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} \right|_{v_{\parallel} = \omega^{(j)}(\mathbf{k})/k_{\parallel}} dv_{\perp}.$$

Учитывая соотношение (9.2.4.11), найдем для декремента затухания  $\gamma^{(j)}(\mathbf{k})$

$$\gamma^{(j)}(\mathbf{k}) = -\gamma_M \Phi_0, \quad (9.2.4.12)$$

где  $\gamma_M$  — декремент затухания продольных колебаний для плазмы с максвелловским распределением электронов по скоростям и

$$\Phi_0 = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{1}{1 + \eta(x)} dx, \quad x = \frac{v_{\perp}^2}{2v_e^2}, \quad \eta = \frac{D(v_{\parallel}, v_{\perp})}{D_c(v_{\parallel}, v_{\perp})}. \quad (9.2.4.13)$$

Если фазовая скорость рассматриваемых колебаний значительно больше тепловой скорости электронов ( $\omega^{(j)}/k_{\parallel} = v_{\parallel} \gg v_e$ ), то  $D/D_{ce} = y/(x + 1/2)$ , где

$$y = \frac{D}{D_0}, \quad D_0 = \frac{4v_e^5}{\tau_c v_{\parallel}^3}, \quad D = \pi \frac{e^2}{m_e^2} \int |E_{k3}^{(j)}|^2 \delta(\omega^{(j)} - k_{\parallel} v_{\parallel}) d^3k.$$

В этом случае

$$\Phi_0 = 1 + y \exp(y + 1/2) \text{Ei}(-1/2 - y), \quad \text{Ei}(-x) = - \int_x^{\infty} \frac{\exp(-t)}{t} dt.$$

Для колебаний большой амплитуды  $y \gg 1$  и  $\Phi_0 \approx 3/(2y)$ , поэтому декремент затухания пропорционален частоте столкновений.

Формула (9.2.4.12) определяет декремент черенковского затухания продольных колебаний плазмы в квазилинейном приближении с учетом столкновений электронов.

Аналогично нетрудно получить в квазистационарном состоянии декремент черенковского затухания альвеновской и быстрой магнитозвуковой волн в плазме малого давления в квазилинейном приближении с учетом столкновений электронов, когда их диффузия вследствие рассеяния на волнах уравновешивается столкно-

венями. Для этого следует использовать соотношение (9.2.4.11) и дисперсионное уравнение (5.4.1.4). Мы приведем только окончательный результат:

$$\Upsilon^{(j)}(\mathbf{k}) = -\frac{\sqrt{\pi}\omega_{pi}^2 k_{\perp}^2 v_s^2 Q}{2\omega^{(j)}\omega_{Bi}^2 \varepsilon_1 P}, \quad (9.2.4.14)$$

где

$$\begin{aligned} v_s &= \sqrt{T_e/m_i}, \quad \varepsilon_1 = \omega_{pi}^2 / (\omega_{Bi}^2 - \omega^{(j)2}), \\ P &= \frac{(1 + \cos^2 \theta) k^2 c^2 \omega_{Bi}^2}{\omega^{(j)2} (\omega_{Bi}^2 - \omega^{(j)2})} - \varepsilon_1 \left( 2 - \frac{\omega^{(j)2}}{\omega_{Bi}^2} \right), \\ Q &= 2 \left( \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^{(j)2} - \varepsilon_1} \right) \Phi_1 + \frac{1}{\Psi^2 + \pi \Phi_2^2} \left[ \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^{(j)2} - \omega_{Bi}^2} \times \right. \\ &\quad \times \left( 2\Phi_3 - \Phi_2 - \frac{k^2 c^2 \omega_{Bi}^2}{\omega^{(j)2} \omega_{pi}^2} \Phi_2 \right) + \\ &\quad \left. + \left( \varepsilon_1 - \frac{k_{\parallel}^2 c^2}{\omega^{(j)2}} \right) (2\Psi^2 \Phi_3 - \Psi^2 \Phi_2 + \pi \Phi_2 \Phi_3^2) \right], \\ \Phi_1 &= -\frac{\pi^{3/2}}{4v_s^2} \int_0^{\infty} v_{\perp}^5 \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} dv_{\perp}, \\ \Phi_2 &= -2\pi^{3/2} v_e^2 \int_0^{\infty} v_{\perp} \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} dv_{\perp}, \\ \Phi_3 &= -\pi^{3/2} \int_0^{\infty} v_{\perp}^3 \frac{\partial f_{e0}}{\partial v_{\parallel}} dv_{\perp}, \\ \Psi &= 1 - 2z_e \exp(-z_e^2) \int_0^{z_e} \exp t^2 dt, \quad z_e = \omega^{(j)}(\mathbf{k}) / \sqrt{2} k_{\parallel} v_e. \end{aligned} \quad (9.2.4.15)$$

Если фазовая скорость альвеновской и быстрой магнитозвуковой волны значительно больше тепловой скорости электронов, то выражение для  $Q$  (см. (9.2.4.15)) упрощается, а мы получим

$$Q = \frac{2\varepsilon_1 \omega^{(j)2} z_e^3}{v_e^2 \omega_{Bi}^2} \left( \Phi_0 + \frac{k^2 c^2 \omega_{Bi}^2}{\omega^{(j)2} \omega_{pi}^2} \Phi_0 - 2\Phi \right) \exp(-z_e^2), \quad (9.2.4.16)$$

где  $\Phi_0 = \Phi_0(y)$  определяется формулой (9.2.4.13),  $\Phi(y) = 1 - y - y(1/2 + y) \exp(1/2 + y) \text{Ei}(-1/2 - y)$ ,  $y = D/D_0$  и  $D$  определяется (9.2.4.10), где отброшено слагаемое, пропорциональное  $\bar{E} k_{\perp}^2$ .

Для слабых полей ( $D \ll D_0$ ) соотношение (9.2.4.14) соответствует выражению (5.4.1.5) для коэффициента затухания в линейной теории для плазмы с максвелловским распределением элек-

тронов. Для сильных полей ( $D \gg D_0$ ) декремент затухания (9.2.4.14) в  $D/D_0$  меньше, чем в линейной теории.

Исследуем теперь влияние кулоновских столкновений на циклотронное затухание для одномерных волновых пакетов. Ограничимся рассмотрением узких волновых пакетов ( $\Delta v_{\parallel} \ll v_{\alpha}$ ,  $k_{\parallel} v_{\alpha}^2 / |\omega_{B\alpha}| \ll v_{\alpha}$ ). В этом случае диффузия частиц вследствие рассеяния на волнах происходит практически в направлении магнитного поля. Пренебрегая диффузией частиц в направлении, перпендикулярном к нему, представим уравнение (9.2.1.31) с учетом столкновений в виде (9.2.4.9), где

$$D = \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \left( \frac{k_{\perp} v_{\alpha}}{\omega_{B\alpha}} \right)^{2n-4} \frac{v_{\alpha}^4 |1 + \xi|^2 k_{\parallel}^2 |E_{k2}^{(j)}|^2}{2^{n+1} [(n-1)!]^2 |v_{\alpha} - v_{\parallel} \cos \theta| (\omega^{(j)})^2} \left( \frac{v_{\perp}}{\sqrt{2} v_{\alpha}} \right)^{2n}. \quad (9.2.4.17)$$

В установившемся состоянии, когда диффузия частиц, вызванная рассеянием на волнах, уравнивается столкновениями, величина производной  $\partial f_{\alpha 0} / \partial v_{\parallel}$  будет определяться формулой (9.2.4.11). Учитывая, что антиэрмитовы члены в тензоре  $\epsilon_{ij}$  и, следовательно, декремент затухания, пропорциональны интегралу

$$\int_0^{\infty} v_{\perp}^{2n+1} \frac{\partial f_{\alpha 0}(v_{\parallel}, v_{\perp})}{\partial v_{\parallel}} dv_{\perp},$$

и используя соотношение (9.2.4.11), получим

$$\gamma^{(j)}(\mathbf{k}) = -\gamma_M F, \quad (9.2.4.18)$$

где

$$F = \frac{1}{n!} \int_0^{\infty} x^n e^{-x} \frac{1}{1+x} dx, \quad x = v_{\perp}^2 / 2v_{\alpha}^2, \quad \eta = D/D_0.$$

В случае электронного циклотронного резонанса ( $\omega^{(j)} \approx n |\omega_{Be}|$ ) при  $v_{\parallel} \gg v_e$  величина  $\eta$  принимает более простой вид

$$\eta = \eta_0 \frac{x^n}{1+2x}, \quad \eta_0 = \frac{D(v_{\perp}) \tau_c v_{\parallel}^3}{2v_e^5} \Big|_{v_{\perp} = \sqrt{2} v_e}. \quad (9.2.4.19)$$

Используя это выражение для  $\eta$ , получим при  $\omega \approx |\omega_{Be}|$

$$F = x [3 - 2x + x(1 - 2x)e^x \text{Ei}(-x)], \quad v_{\parallel} \gg v_e, \quad (9.2.4.20)$$

где  $x = 1/(1 + \eta_0)$ . Для слабых полей ( $\eta_0 \ll 1$ )  $F \approx 1$  и  $\gamma \approx -\gamma_M$ ; для сильных полей  $\eta_0 \gg 1$  декремент затухания уменьшается и  $F \approx 3/\eta_0 \ll 1$ .

Если  $\omega^{(j)} \approx 2|\omega_{Be}|$ , то учитывая (9.2.4.19), нетрудно показать, что

$$F = \frac{3}{2\eta_0} \left\{ 1 - \frac{4}{3\eta_0} - \frac{2(\eta_0 - 2)}{\eta_0 \sqrt{1 - \eta_0}} [(x_1 + p)e^{-x_1} \text{Ei}(x_1) - (x_2 + p)e^{-x_2} \text{Ei}(x_2)] \right\}, \quad (9.2.4.21)$$

где

$$p = \frac{\eta_0 - 4}{4(\eta_0 - 2)}, \quad x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \eta_0}}{\eta_0}.$$

Если  $\eta_0 \ll 1$ , то  $F \approx 1$ , а если  $\eta_0 \gg 1$ , то  $F \approx 3/(2\eta_0)$ .

В области сильных полей ( $\eta_0 \gg 1$ ) функция  $F$  асимптотически приближается к значению

$$F = \frac{3}{n!} \frac{1}{\eta_0} \quad (v_{\parallel} \gg v_e). \quad (9.2.4.22)$$

Для ионного циклотронного резонанса ( $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) \approx n\omega_{Bi}$ ) при  $v_{\parallel} \gg v_i$  имеем

$$\eta = \eta_0 \frac{x^n}{1+x}, \quad \eta_0 = \frac{D(v_{\perp}) \tau_e v_{\parallel}^3}{2v_i^5} \Big|_{v_{\perp} = \sqrt{2} v_i}. \quad (9.2.4.23)$$

Используя это выражение, получим при  $\omega^{(j)}(\mathbf{k}) \approx n\omega_{Bi}$  ( $n = 1, 2$ )

$$F = x[2 - x + e^x \text{Ei}(-x)x(1-x)], \quad x = 1/(1 + \eta_0), \quad n = 1, \quad (9.2.4.24)$$

и

$$F = \frac{1}{\eta_0} \left\{ 1 - \frac{1}{2\eta_0} + \frac{2\eta_0 - 1}{\eta_0 \sqrt{1 - 4\eta_0}} [(x_1 + p)e^{-x_1} \text{Ei}(x_1) - (x_2 + p)e^{-x_2} \text{Ei}(x_2)] \right\}, \quad (9.2.4.25)$$

где

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\eta_0}}{2\eta_0}, \quad p = \frac{\eta_0 - 1}{2\eta_0 - 1}.$$

В случае сильных полей ( $\eta_0 \gg 1$ ) при  $\omega^{(j)} \approx n\omega_{Bi}$  и  $v_{\parallel} \gg v_i$  находим

$$F = \frac{2}{n!} \frac{1}{\eta_0}.$$

Таким образом, для узких волновых пакетов диффузия частиц вследствие рассеяния на волнах в условиях циклотронного резонанса всегда приводит к уменьшению декремента затухания. В сильных полях циклотронное затухание определяется столкновениями и

$$\gamma^{(j)} \sim -\gamma_M/\eta_0,$$

т. е. декремент затухания пропорционален частоте столкновений.

## § 10.1. Кинетическое уравнение для волн

**10.1.1. Нелинейное уравнение для амплитуды волны.** Квазилинейное приближение, рассмотренное в предыдущей главе, учитывает из различных нелинейных процессов, происходящих в плазме, только процессы самого низкого порядка по энергии плазменных колебаний, а именно обратное влияние колебаний на усредненную функцию распределения частиц, а также влияние медленного изменения функции распределения частиц на скорость нарастания колебаний.

По мере роста амплитуды колебаний становится необходимым учет нелинейных процессов более высокого порядка — нелинейного взаимодействия волн и рассеяния волн частицами плазмы. К исследованию этих процессов мы теперь и перейдем.

Ограничиваясь для простоты случаем продольных колебаний плазмы в отсутствие внешних полей, будем исходить из кинетических уравнений для функций распределения  $F_\alpha$  частиц сорта  $\alpha$  ( $\alpha = e, i$ ) и уравнений электростатики

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (10.1.1.1)$$

$$\Delta \varphi = -4\pi \sum_\alpha e_\alpha \int F_\alpha d^3v. \quad (10.1.1.2)$$

Здесь  $F_\alpha$  — точная (не усредненная по флуктуациям или по малым интервалам времени) функция распределения частиц,

$$F_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) = V^{-1} \sum_j \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_j(t)) \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_j(t)), \quad (10.1.1.3)$$

где  $\mathbf{r}_j$  и  $\mathbf{v}_j$  — координаты и скорость  $j$ -й частицы и суммирование производится по всем частицам сорта  $\alpha$  ( $V$  — объем плазмы,  $e_\alpha$  и  $m_\alpha$  — заряд и масса частицы сорта  $\alpha$ ).

При таком определении функций распределения уравнение (10.1.1.1) является, очевидно, точным и оно полностью эквивалентно уравнениям движения

$$\dot{\mathbf{r}}_j(t) = \mathbf{v}_j(t), \quad \dot{\mathbf{v}}_j(t) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right)_{\mathbf{r}=\mathbf{r}_j}. \quad (10.1.1.4)$$

Решение этих уравнений будет зависеть от начальных условий, по которым естественно произвести усреднение (такое усреднение эквивалентно усреднению по ансамблю тождественных и независимых плазм, ср. § 1.1). Для плазмы в отсутствие внешнего электрического поля (рассмотрением такого случая мы и ограничимся) усредненный потенциал будет равен нулю,  $\langle \varphi \rangle = 0$  (угловые скобки служат здесь и далее для обозначения усреднения); тогда мы получим, согласно (10.1.1.1), следующее уравнение для усредненных функций распределения  $\langle F_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) \rangle \equiv f_{\alpha 0}(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ :

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \left\langle f_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}} \right\rangle, \quad (10.1.1.5)$$

где  $f_\alpha = F_\alpha - f_{\alpha 0}$  — осциллирующая добавка к функции распределения.

Вычитая из соотношения (10.1.1.1) соотношение (10.1.1.5) и переходя к компонентам Фурье

$$f(\mathbf{k}, \omega) = (2\pi)^{-4} \int \exp\{-i\mathbf{k}\mathbf{r} + i\omega t\} f(\mathbf{r}, t) d\mathbf{r} dt,$$

получим следующее уравнение для функции  $f_\alpha(\mathbf{k}, \omega) \equiv f_\alpha$ :

$$\begin{aligned} -i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_\alpha(\mathbf{k}, \omega) - i\mathbf{k} \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \varphi(\mathbf{k}, \omega) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} = \\ = i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k}' \{ \varphi(\mathbf{k}', \omega') f_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') - \\ - \langle \varphi(\mathbf{k}', \omega') f_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \rangle \} d^3k' d\omega', \end{aligned} \quad (10.1.1.6)$$

где  $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента Фурье электростатического потенциала, связанная с функциями  $f_\alpha$  соотношением

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{k^2} \sum_\alpha e_\alpha \int f_\alpha(\mathbf{k}, \omega) d^3v. \quad (10.1.1.7)$$

Вводя далее оператор

$$\mathbf{g}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{e_\alpha}{m_\alpha} (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0)^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \quad (10.1.1.8)$$

( $0$  — бесконечно малая положительная величина, введенная для правильного обхода полюса при  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ ), можно представить это уравнение в более компактной форме:

$$\begin{aligned} f_\alpha(\mathbf{k}, \omega) - \varphi(\mathbf{k}, \omega) \mathbf{k} \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) f_{\alpha 0} = \int \mathbf{k}' \mathbf{g}_\alpha(\mathbf{k}, \omega) \{ \varphi(\mathbf{k}', \omega') \times \\ \times f_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') - \langle \varphi(\mathbf{k}', \omega') f_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}', \omega - \omega') \rangle \} d^3k' d\omega'. \end{aligned} \quad (10.1.1.9)$$

Это уравнение удобно для исследования нелинейных процессов в плазме в случае так называемых слабо турбулентных состояний, т. е. таких ее состояний, при которых энергия плазмен-

ных колебаний мала по сравнению с энергией частиц. В этом случае можно пользоваться разложением в ряд по степеням амплитуды колебаний.

Обычно слабо турбулентные состояния плазмы возникают при нарастании колебаний, инкремент которых (даваемый линейной теорией) мал по сравнению с частотой ( $\gamma \ll \omega$ ). Заметим, однако, что неравенство  $\gamma \ll \omega$  отнюдь не является достаточным условием возникновения слабой турбулентности. Если нелинейные эффекты (как, например, при так называемых взрывных неустойчивостях [1]) приводят к возрастанию инкремента с ростом амплитуды колебаний, то в плазме развивается сильная турбулентность даже при малых значениях инкремента нарастания, полученного в линейной теории.

Итерируя уравнение (10.1.1.9), мы можем найти в случае слабой турбулентности функции  $f_\alpha$  в любом (конечном) приближении по амплитуде колебаний.

Чтобы учесть взаимодействие между волнами и нелинейное взаимодействие волн и частиц в плазме (в первом исчезающем приближении по энергии волн), достаточно, итерируя уравнение (10.1.1.9), ограничиться слагаемыми, кубичными по амплитуде колебаний. Вводя для удобства записи обозначения  $g_\alpha \equiv g_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ ;  $\varphi_n \equiv \varphi(\mathbf{k}_n, \omega_n)$ ;  $g_{\alpha n} \equiv g_\alpha(\mathbf{k}_n, \omega_n)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), получим

$$\begin{aligned}
 f_\alpha(\mathbf{k}, \omega) = & (\mathbf{k}g_\alpha) f_{\alpha 0} \varphi(\mathbf{k}, \omega) + \int (\mathbf{k}_1 g_\alpha) (\mathbf{k}_2 g_{\alpha 2}) f_{\alpha 0} (\varphi_1 \varphi_2 - \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle) \times \\
 & \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d^3 k_1 d^3 k_2 d\omega_1 d\omega_2 + \int (\mathbf{k}_1 g_\alpha) \times \\
 & \times \{ \mathbf{k}_2 g_\alpha(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \} (\mathbf{k}_3 g_{\alpha 3}) f_{\alpha 0} (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_1 \langle \varphi_2 \varphi_3 \rangle - \langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle) \times \\
 & \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.
 \end{aligned}
 \tag{10.1.1.10}$$

Подставляя (10.1.1.10) в (10.1.1.7) и учитывая, что диэлектрическая проницаемость плазмы связана с усредненными функциями распределения частиц соотношением

$$\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = 1 - \frac{4\pi}{k^2} \sum_\alpha e_\alpha \int \mathbf{k} g_\alpha(\mathbf{k}, \omega) f_{\alpha 0} d^3 v,$$

получим следующее нелинейное уравнение для электростатического потенциала:

$$\begin{aligned}
 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \varphi(\mathbf{k}, \omega) = & \int V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) (\varphi_1 \varphi_2 - \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle) \times \\
 & \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d^3 k_1 d^3 k_2 d\omega_1 d\omega_2 + \\
 & + \int V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2) (\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 - \varphi_1 \langle \varphi_2 \varphi_3 \rangle - \langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle) \times \\
 & \times \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d^3 k_1 d^3 k_2 d^3 k_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3,
 \end{aligned}
 \tag{10.1.1.11}$$

где

$$\begin{aligned}
 V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int (\mathbf{k}_1 \mathbf{g}_{\alpha}) (\mathbf{k}_2 \mathbf{g}_{\alpha 2}) \times \\
 &\quad \times f_{\alpha 0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2) d^3 v d^3 k_2 d\omega_2, \\
 V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2) &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int (\mathbf{k}_1 \mathbf{g}_{\alpha}) \times \\
 \times \{ \mathbf{k}_2 \mathbf{g}_{\alpha}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \} (\mathbf{k}_3 \mathbf{g}_{\alpha 3}) f_{\alpha 0} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times \\
 &\quad \times \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d^3 v d^3 k_3 d\omega_3.
 \end{aligned} \tag{10.1.1.12}$$

**10.1.2. Уравнение для корреляционной функции.** Нелинейное уравнение для электростатического потенциала (10.1.1.11) является следствием динамических уравнений (10.1.1.4) (или, что то же самое, кинетического уравнения (10.1.1.1)) и уравнений электростатики. Обратим внимание на то, что при выводе этого уравнения неявно использовалось предположение о случайном характере колебаний плазмы. В самом деле, при решении кинетических уравнений мы выбрали не общие, а частные решения типа  $f_{\alpha} = k\varphi g_{\alpha} f_{\alpha 0}$ , в результате чего уравнения (10.1.1.9) — (10.1.1.11) не содержат начального возмущения функций распределения частиц. Иными словами, при выводе этих уравнений мы неявно подразумевали, что система успевает «забыть» явный вид начального возмущения, так что функция  $\varphi$  определяется лишь свойствами самой системы. Мы не будем, однако, останавливаться на выяснении критериев того, в каких случаях наступает «забывание» начальных условий (стохастизация колебания) \*).

Интенсивность случайных колебаний и их распределение по частотам и волновым векторам характеризуется корреляционными функциями, т. е. усредненными произведениями вида  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle$ ,  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle$ ,  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \rangle$  и т. д. Мы выведем сейчас уравнение для парной корреляционной функции  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle$ , которому придадим форму кинетического уравнения \*\*). Умножим для этого уравнение (10.1.1.11) на  $\varphi^*(\mathbf{k}', \omega')$  и произведем усреднение

\*) Обоснованию статистического подхода к различным системам и выяснению критериев стохастичности посвящена книга [2].

\*\*\*) Метод исследования нелинейных процессов в плазме с помощью кинетического уравнения для волн развит в работах Кадомцева и Петвиашвили [3], Галеева и Карпмана [4, 5] и Силина [6], Нелинейным взаимодействиям волн и частиц в плазме посвящена обширная литература, нашедшая уже свое отражение в ряде обзоров и монографий [7—9].

по случайным фазам; в результате мы получим

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) \langle \varphi(\mathbf{k}, \omega) \varphi^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \\ = \int V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) \langle \varphi^*(\mathbf{k}', \omega') \varphi(\mathbf{k}_1, \omega_1) \varphi(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) \rangle d^3k_1 d\omega_1 + \\ + \int V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}_2, \omega_2) \{ \langle \varphi^*(\mathbf{k}', \omega') \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle - \\ - \langle \varphi^*(\mathbf{k}', \omega') \varphi_1 \rangle \langle \varphi_2 \varphi_3 \rangle \} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \times \\ \times \delta(\omega - \omega_1 - \omega_2 - \omega_3) d^3k_1 d^3k_2 d^3k_3 d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3. \quad (10.1.2.1) \end{aligned}$$

Это соотношение связывает парную корреляционную функцию  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle$  с тройной корреляционной функцией  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \rangle$  и четверной корреляционной функцией  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \rangle$ . При этом тройная корреляционная функция может быть сведена к четверной, если, используя (10.1.1.11), подставить в нее величину  $\varphi$  с точностью до членов второго порядка. Что же касается четверной корреляционной функции, то для случайных колебаний, фазы которых полностью нескоррелированы, ее можно представить в виде суммы произведений парных корреляционных функций

$$\langle \varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 \varphi_4 \rangle = \langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle \langle \varphi_3 \varphi_4 \rangle + \langle \varphi_1 \varphi_3 \rangle \langle \varphi_2 \varphi_4 \rangle + \langle \varphi_1 \varphi_4 \rangle \langle \varphi_2 \varphi_3 \rangle. \quad (10.1.2.2)$$

В результате соотношение (10.1.2.1) превратится в нелинейное интегральное уравнение для одной функции — парной корреляционной функции  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle$ .

Замечая, что функция  $\langle \varphi_1 \varphi_2 \rangle$  пропорциональна  $\delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \times \delta(\omega_1 + \omega_2)$ , введем коррелятор  $I(\mathbf{k}, \omega)$ , определяемый как

$$\langle \varphi(\mathbf{k}, \omega) \varphi^*(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega') I(\mathbf{k}, \omega). \quad (10.1.2.3)$$

Используя (10.1.1.11), (10.1.2.2), приведем (10.1.2.1) к виду

$$\begin{aligned} \varepsilon(\mathbf{k}, \omega) I(\mathbf{k}, \omega) = I(\mathbf{k}, \omega) \int U(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) I(\mathbf{k}_1, \omega_1) d^3k_1 d\omega_1 + \\ + I(\mathbf{k}, \omega) \int \frac{v(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) v(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1 + i0)} I(\mathbf{k}_1, \omega_1) d^3k_1 d\omega_1 + \\ + \frac{1}{2\varepsilon^*(\mathbf{k}, \omega)} \int |v(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1)|^2 I(\mathbf{k}_1, \omega_1) I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) d^3k_1 d\omega_1, \end{aligned} \quad (10.1.2.4)$$

где

$$\left. \begin{aligned} v(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) &= V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) + V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1), \\ U(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) &= V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; -\mathbf{k}_1, -\omega_1) + V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}, \omega) \end{aligned} \right\} \quad (10.1.2.5)$$

и величины  $V$  определяются формулами (10.1.1.12).

В интересующем нас случае слабо турбулентной плазмы билинейное по коррелятору  $I$  выражение в правой части уравнения (10.1.2.4) оказывается пропорциональным малому параметру  $\gamma/\omega$ , где  $|\gamma|$  — инкремент нарастания колебаний, даваемый линейной теорией. Вводя обозначения  $\varepsilon'(\mathbf{k}, \omega) \equiv \text{Re } \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ ,  $\varepsilon''(\mathbf{k}, \omega) \equiv \text{Im } \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  и учитывая, что инкремент нарастания колебаний в линейной теории пропорционален мнимой части диэлектрической проницаемости

$$\gamma(\mathbf{k}) = \varepsilon''(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) \left( \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})}^{-1} \quad (10.1.2.6)$$

( $\omega(\mathbf{k})$  — частота соответствующего собственного колебания плазмы), получим в нулевом приближении по параметру  $\gamma/\omega$

$$\varepsilon'(\mathbf{k}, \omega) I(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (10.1.2.7)$$

Решение этого уравнения имеет, очевидно, следующую структуру:

$$I(\mathbf{k}, \omega) = I_+(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) + I_-(\mathbf{k}) \delta(\omega + \omega(-\mathbf{k})),$$

где  $I_+$  и  $I_-$  — некоторые функции волнового вектора  $\mathbf{k}$  (чтобы не усложнять формул, мы ограничимся здесь учетом коллективных колебаний только одного какого-либо типа; обобщение на случай нескольких ветвей колебания будет дано ниже). Учитывая, что  $I(\mathbf{k}, \omega) = I(-\mathbf{k}, -\omega)$ , мы видим, что функции  $I_+$  и  $I_-$  не независимы, а связаны соотношением  $I_+(\mathbf{k}) = I_-(-\mathbf{k})$ . Поэтому, если условиться под  $\omega(-\mathbf{k})$  понимать  $-\omega(\mathbf{k})$ , то можно представить коррелятор  $I(\mathbf{k}, \omega)$  в более компактном виде:

$$I(\mathbf{k}, \omega) = I(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})). \quad (10.1.2.8)$$

Уравнение следующего приближения по параметру  $\gamma/\omega$  определяет, очевидно, обусловленное нелинейными эффектами дополнительное затухание колебаний и сдвиг их собственной частоты. При этом поправка к собственной частоте колебаний  $\Delta\omega$  мала по сравнению с самой частотой ( $\Delta\omega \sim \gamma$ ). Что же касается дополнительного затухания колебаний, то соответствующий декремент может оказаться того же порядка величины, что и инкремент нарастания, даваемый линейной теорией, или даже превосходить последний. Мы ограничимся поэтому определением декремента нелинейного затухания колебаний и не будем интересоваться обусловленной нелинейными эффектами поправкой к их частоте.

Подставляя (10.1.2.8) в уравнение (10.1.2.4), представим мнимую часть получающегося соотношения в виде

$$\left( \frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t} \right)_c = 0, \quad (10.1.2.9)$$

где

$$\left(\frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t}\right)_c \equiv -\hat{\gamma}\{I(\mathbf{k})\} I(\mathbf{k}),$$

$$\hat{\gamma}\{I(\mathbf{k})\} =$$

$$= \gamma(\mathbf{k}) - \left(\frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})} \int \text{Im} \left\{ U(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1)) + \right.$$

$$+ \frac{v(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1)) v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1); \mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))}{\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) + i0)} I(\mathbf{k}_1) d^3k_1 -$$

$$\left. - \frac{1}{2} \pi I^{-1}(\mathbf{k}) \left(\frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})} \int |v(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))|^2 \times \right.$$

$$\left. \times I(\mathbf{k}_1) I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) d^3k_1 \right\} \quad (10.1.2.10)$$

Величина  $\hat{\gamma}\{I(\mathbf{k})\}$  представляет собой сумму (алгебраическую) инкремента нарастания колебаний, даваемого линейной теорией, и декремента затухания, обусловленного нелинейными эффектами.

Уравнение (10.1.2.9) определяет коррелятор  $I(\mathbf{k})$  в случае стационарного и однородного распределения случайных волн. Это уравнение легко обобщить на случай нестационарных и неоднородных распределений волн. Заметим, что если бы нелинейные эффекты полностью отсутствовали, то в случае слабых неоднородностей ( $k\lambda \ll 1$ ;  $\lambda$  — характерный размер неоднородности) функция  $I(\mathbf{k})$  удовлетворяла бы уравнению

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}} + 2\gamma(\mathbf{k}) I = 0.$$

Очевидно, чтобы учесть нелинейные взаимодействия волн с частицами и друг с другом, необходимо заменить здесь декремент затухания линейной теории  $\gamma(\mathbf{k})$  полным декрементом затухания  $\hat{\gamma}\{I\}$ , определяемым формулой (10.1.2.10). В результате мы получим уравнение

$$\frac{\partial I}{\partial t} + \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial I}{\partial \mathbf{r}} = \left(\frac{\partial I}{\partial t}\right)_c, \quad (10.1.2.11)$$

которое называется *кинетическим уравнением для волн*.

Используя функцию  $I(\mathbf{k})$ , можно придать уравнению для усредненной функции распределения частиц сорта  $\alpha$  (10.1.1.5) форму

$$\frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial t} + v \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\pi \epsilon_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k} I(\mathbf{k}) \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \left( \mathbf{k} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right) d^3k. \quad (10.1.2.12)$$

Это уравнение вместе с уравнением (10.1.2.11) для  $I(\mathbf{k})$  образует полную систему уравнений для описания слабо турбулентных состояний плазмы.

Заметим, что соотношение (10.1.2.12), описывающее медленное изменение функций распределения частиц под влиянием волн, представляет собой, разумеется, не что иное, как уравнение квазилинейной теории для функций распределения частиц (ср. гл. 9).

Кинетическому уравнению для волн можно придать более привычную форму, если вместо коррелятора  $I(\mathbf{k})$  ввести функцию распределения волн (плазмонов)  $N(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$ , т. е. число волн в единице объема, имеющих волновые векторы в интервале  $(\mathbf{k}, \mathbf{k}+d\mathbf{k})$ . Эта функция связана с плотностью энергии  $W$  соотношением

$$W = \int \hbar \omega(\mathbf{k}) N(\mathbf{k}) \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \quad (10.1.2.13)$$

(в числе аргументов  $N$  мы опускаем здесь и далее  $\mathbf{r}$  и  $t$ ).

Плотность энергии колебаний плазмы определяется формулой

$$W = \frac{1}{8\pi} \int k^2 \left| \frac{\partial}{\partial \omega} [\varepsilon'(\mathbf{k}, \omega) \omega] \right|_{\omega=\omega(\mathbf{k})} I(\mathbf{k}) d^3k. \quad (10.1.2.14)$$

Поэтому для  $N(\mathbf{k})$  мы получим

$$N(\mathbf{k}) = \frac{\pi^2 k^2}{\hbar} \left( \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})} I(\mathbf{k}). \quad (10.1.2.15)$$

Подчеркнем, что введение функции распределения  $N(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$  квазичастиц (плазмонов), зависящей как от импульса  $\hbar\mathbf{k}$  плазмона, так и от координат  $\mathbf{r}$  и времени  $t$ , имеет смысл только в том случае, если число плазмонов  $N(\mathbf{k}, \mathbf{r}, t)$  медленно меняется в пространстве и времени. Это значит, что изменение функции на расстояниях порядка длины волны  $\lambda = 2\pi/k$  и в течение промежутков времени порядка периода волны  $T = 2\pi/\omega(\mathbf{k})$  должны быть значительно меньше самой функции  $N$ .

Подставляя (10.1.2.15) в (10.1.2.11) и вводя интеграл столкновений для плазмонов

$$\left( \frac{\partial N}{\partial t} \right)_c = -\frac{\pi^2 k^2}{\hbar} \left( \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})} \left( \frac{\partial I}{\partial t} \right)_c,$$

получим следующее кинетическое уравнение для плазмонов:

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial \omega(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{k}} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{r}} = \left( \frac{\partial N}{\partial t} \right)_c. \quad (10.1.2.16)$$

Это уравнение аналогично хорошо известному кинетическому уравнению для фононов в твердом теле (см., например, [10]).

**10.1.3. Трехволновые процессы и нелинейное затухание Ландау.** Остановимся теперь на физической интерпретации различных слагаемых в правой части соотношения (10.1.2.10).

Учитывая, что в области прозрачности (когда  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ )

$$\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{k}, \omega + i0)} = \mathcal{P} \frac{1}{\varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)} + \pi i \left| \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega(\mathbf{k})}^{-1} \times \\ \times \{ \delta(\omega - \omega(\mathbf{k})) + \delta(\omega + \omega(\mathbf{k})) \} \operatorname{sgn} \omega$$

можно представить величину  $(\partial I(\mathbf{k})/\partial t)_0$  в виде

$$\left( \frac{\partial I(\mathbf{k})}{\partial t} \right)_0 = \gamma_0(\mathbf{k}) I(\mathbf{k}) + \gamma_1(\mathbf{k}) I(\mathbf{k}) + S \{ I(\mathbf{k}) \}, \quad (10.1.3.1)$$

где  $\gamma_0(\mathbf{k})$  — взятый с обратным знаком инкремент нарастания колебаний, даваемый линейной теорией (см. гл. 4), а величины  $\gamma_1(\mathbf{k})$  и  $S \{ I(\mathbf{k}) \}$  определяются формулами

$$\gamma_1(\mathbf{k}) = - \left( \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})}^{-1} \mathcal{P} \int \operatorname{Im} \left\{ U(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1)) + \right. \\ \left. + \frac{v(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1)) v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1); \mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}))}{\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1))} \right\} I(\mathbf{k}_1) d^3 k_1, \quad (10.1.3.2)$$

$$S \{ I(\mathbf{k}) \} = \pi I(\mathbf{k}) \left( \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})}^{-1} \int \left( \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)}^{-1} \times \\ \times \operatorname{Re} \{ v(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1)) v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1); \mathbf{k}, \omega(\mathbf{k})) \} \times \\ \times I(\mathbf{k}_1) \delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) d^3 k_1 - \\ - 1/2 \pi \left( \frac{\partial \varepsilon'(\mathbf{k}, \omega)}{\partial \omega} \right)_{\omega=\omega(\mathbf{k})}^{-2} \int |v(\mathbf{k}, \omega(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega(\mathbf{k}_1))|^2 \times \\ \times I(\mathbf{k}_1) I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) d^3 k_1 \quad (10.1.3.3)$$

(символ  $\mathcal{P}$  означает, что интеграл от соответствующей величины берется в смысле главного значения).

Выражение (10.1.3.3) для  $S$  содержит  $\delta$ -функцию, которая выражает закон сохранения энергии при взаимодействии между волнами

$$\omega(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}_1) + \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1). \quad (10.1.3.4)$$

Поэтому величина  $S$  характеризует нелинейное затухание волн в результате *трехволновых* (или, как иногда говорят, *трехглазмонных*) процессов — распада одной волны на две и слияния двух волн в одну. Легко видеть, что эта величина отлична от нуля (а следовательно, трехволновые процессы возможны) не при всяком законе дисперсии  $\omega = \omega(\mathbf{k})$ . Например, в изотропной среде условие (10.1.3.4) удовлетворяется, если фазовая скорость возрастает с увеличением волнового числа  $\left( \frac{\partial}{\partial k} \left[ \frac{\omega(\mathbf{k})}{k} \right] > 0 \right)$  (в таких случаях говорят, что спектр колебаний является *распадным*). Если, наоборот, фазовая скорость убывает с увеличением  $k \left( \frac{\partial}{\partial k} \left[ \frac{\omega(\mathbf{k})}{k} \right] < 0 \right)$ , то условию (10.1.3.4) удовлетворить нельзя (*нераспадный* спектр).

В случае нераспадных спектров (т. е. когда условие (10.1.3.4) не выполняется) взаимодействие между волнами возникает лишь в следующем приближении по энергии колебаний, — например, возможен четырехплазмонный процесс рассеяния волн друг на друге, вносящий в величину  $(dI/dt)_e$  вклад, кубичный по функции  $I(\mathbf{k})$ . Ограничиваясь эффектами, квадратичными по этой функции, мы не будем рассматривать такие процессы.

Слагаемое  $\gamma_1(\mathbf{k})I(\mathbf{k})$  в выражении (10.1.3.1) не содержит  $\delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1))$ , и поэтому его нельзя интерпретировать как затухание, обусловленное взаимодействием между волнами. Чтобы выяснить физический смысл этого слагаемого, вернемся к определениям входящих в (10.1.3.2) функций  $U$  и  $v$  (см. (10.1.2.5), (10.1.1.12)), представив последние в виде интегралов по скоростям частиц. Нетрудно убедиться, что в результате выражение для  $\gamma_1(\mathbf{k})$  примет вид

$$\gamma_1(\mathbf{k}) = \int \mathcal{X}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{v}) \delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_1) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) d^3k_1 d^3v, \quad (10.1.3.5)$$

где  $\mathcal{X}_1(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \mathbf{v})$  — некоторая функция, явный вид которой для нас сейчас несуществен.

Входящая в это выражение  $\delta$ -функция означает, что выполняется закон сохранения энергии при поглощении частицей (имеющей скорость  $\mathbf{v}$ ) колебания с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega(\mathbf{k})$  и одновременном испускании той же частицей колебания с волновым вектором  $\mathbf{k}_1$  и частотой  $\omega(\mathbf{k}_1)$ . Вспомним теперь, что декремент обыкновенного (линейного) затухания Ландау можно представить в виде

$$\gamma_0(\mathbf{k}) = \int \mathcal{X}_0(\mathbf{k}, \mathbf{v}) \delta(\omega(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v;$$

по аналогии между этим выражением и (10.1.3.5) величина  $\gamma_1(\mathbf{k})$  называется *декрементом нелинейного затухания Ландау*. Очевидно, он представляет собой декремент затухания, обусловленного нелинейным взаимодействием волн с частицами.

Покажем теперь, как записать кинетическое уравнение для волн, если в плазме могут распространяться слабозатухающие колебания не одного, а нескольких типов. Легко видеть, что решение уравнения (10.1.2.7) в этом случае имеет вид

$$I(\mathbf{k}, \omega) = \sum_{\mu} I_{\mu}(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_{\mu}(\mathbf{k})), \quad (10.1.3.6)$$

где индекс  $\mu$  нумерует ветви колебаний. Поэтому кинетическое уравнение (10.1.2.11) будет справедливо для каждой из функций  $I_{\mu}(\mathbf{k})$ , если в выражении (10.1.2.10) для функционала  $\hat{\gamma}\{I\}$  заменить  $I(\mathbf{k})$ ,  $I(\mathbf{k}_1)$ ,  $I(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$  соответственно на  $I_{\mu}(\mathbf{k})$ ,  $I_{\nu}(\mathbf{k}_1)$ ,  $I_{\rho}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)$  и вместе с интегрированием по  $\mathbf{k}_1$  произвести суммирование по  $\mu_1$  и  $\mu_2$ .

## § 10.2. Турбулентные процессы с участием ленгмюровских волн

**10.2.1. Взаимодействие ленгмюровских волн с ионно-звуковыми.** В полностью равновесной плазме в отсутствие внешнего магнитного поля возможны, как известно, продольные колебания лишь одного типа — ленгмюровские колебания, спектр которых является нераспадным. Если температура электронов значительно превышает температуру ионов, то появляется еще одна ветвь продольных колебаний — ионный звук, также характеризующийся нераспадным спектром. Отвлекаясь от возможных процессов с участием поперечных электромагнитных волн, можно сказать, что в изотропной двухтемпературной плазме возможны трехплазменные процессы с участием одной ионно-звуковой и двух ленгмюровских волн — поглощение (или испускание) ленгмюровской волной ионно-звуковой волны, распад ионно-звуковой волны на две ленгмюровские и обратный процесс слияния двух ленгмюровских волн с образованием ионно-звуковой волны. К изучению этих процессов мы сейчас и перейдем.

Интенсивность ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний мы будем характеризовать функциями  $I_l(\mathbf{k})$  и  $I_s(\mathbf{k})$ , связанными с коррелятором  $I(\mathbf{k}, \omega)$  соотношением

$$I(\mathbf{k}, \omega) = I_l(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{k})) + I_s(\mathbf{k}) \delta(\omega - \omega_s(\mathbf{k})), \quad (10.2.1.1)$$

где  $\omega_l(\mathbf{k})$  и  $\omega_s(\mathbf{k})$  — частоты ленгмюровских колебаний и ионного звука:

$$\begin{aligned} \omega_l(\mathbf{k}) &= \omega_{pe} + \frac{3}{2} \omega_{pe} (a_e k)^2, \\ \omega_s(\mathbf{k}) &= v_s k; \end{aligned} \quad (10.2.1.2)$$

$\omega_{pe}$  — электронная плазменная частота,  $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$  — скорость ионного звука,  $T_e$  — температура электронов и  $a_e$  — электронный дебаевский радиус (напомним, что мы используем представление, в котором частоты  $\omega_l$  и  $\omega_s$  могут быть как положительными, так и отрицательными, причем  $\omega_\mu(-\mathbf{k}) = -\omega_\mu(\mathbf{k})$ ;  $\mu = l, s$ ).

Кинетические уравнения для взаимодействующих между собой ленгмюровских и ионно-звуковых колебаний имеют, согласно (10.1.2.11), (10.1.3.1), вид

$$\frac{\partial I_l}{\partial t} + U_l \frac{\partial I_l}{\partial \mathbf{r}} + 2S \{I_l\} = 0, \quad (10.2.1.3)$$

$$\frac{\partial I_s}{\partial t} + U_s \frac{\partial I_s}{\partial \mathbf{r}} + 2S \{I_s\} = 0, \quad (10.2.1.4)$$

где  $U_l$  и  $U_s$  — соответствующие групповые скорости

$$\begin{aligned} U_l(\mathbf{k}) &= \pm 3\omega_{pe} a_e^2 \mathbf{k}, \\ U_s(\mathbf{k}) &= \pm v_s \mathbf{k}/k. \end{aligned} \quad (10.2.1.5)$$

При определении функций  $V(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1)$ , входящих, согласно (10.1.2.5) и (10.1.3.3), в выражения для  $S\{I\}$ , будем исходить из общих формул (10.1.1.12). Замечая, что вклад ионов в функции  $V$  как для ленгмюровских, так и для ионно-звуковых колебаний мал, имеем

$$V(\mathbf{k}, \omega_\mu(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_\nu(\mathbf{k}_1)) = -\frac{4\pi e^3}{k^2 m_e^3} \int \{ \omega_\mu(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0 \}^{-1} \times \\ \times \left( \mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) \left\{ \{ \omega_\mu(\mathbf{k}) - \omega_\nu(\mathbf{k}_1) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)\mathbf{v} + i0 \}^{-1} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} f_{\nu 0} \right\} d^3 v \\ (\mu, \nu = l, s). \quad (10.2.1.6)$$

Входящие сюда интегралы по скоростям легко вычисляются, если учесть, что главный вклад в них вносит область скоростей  $\mathbf{v}$ , для которых  $\omega_l \gg \mathbf{k}\mathbf{v} \gg \omega_s$ :

$$\left. \begin{aligned} V(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) &= -k^{-2} \mathbf{k}\mathbf{k}_1 e / T_e, \\ V(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) &= k^{-6} \mathbf{k}\mathbf{k}_1 (k^2 - \mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2 e / T_e. \end{aligned} \right\} (10.2.1.7)$$

(мы не выписываем выражения для функции  $V(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_s(\mathbf{k}_1))$ , так как она содержит по сравнению с двумя другими дополнительный малый параметр  $(a_e k)^2$ ).

Подставляя последние соотношения в первое из уравнений (10.1.2.5), имеем

$$\left. \begin{aligned} v(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) &= -k^{-2} \mathbf{k}\mathbf{k}_1 e / T_e, \\ v(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) &= k^{-4} \mathbf{k}\mathbf{k}_1 (k^2 - \mathbf{k}\mathbf{k}_1) e / T_e. \end{aligned} \right\} (10.2.1.8)$$

Используя далее (10.1.3.3), получим окончательно следующие кинетические уравнения, описывающие взаимодействующие между собой ленгмюровские и ионно-звуковые колебания:

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_l(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) I_l(\mathbf{k}) + \\ + \frac{\pi e^2 \omega_p^2}{4 T_e^2 k^2} \int k_1^2 \cos^2 \vartheta \{ I_l(\mathbf{k}) I_s(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) - I_l(\mathbf{k}_1) I_s(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \} \times \\ \times \delta(\omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1) - \omega_s(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) d^3 k_1 = 0, \quad (10.2.1.9)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{U}_s(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) I_s(\mathbf{k}) - \\ - \frac{\pi e^2 k^2 v_s^2}{4 m_e^2 \omega_p^4} \int k_1^2 \cos^2 \vartheta (k - k_1 \cos \vartheta)^2 I_l(\mathbf{k}_1) I_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \times \\ \times \delta(\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) d^3 k_1 = 0, \quad (10.2.1.10)$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ .

Последним двум уравнениям можно придать форму кинетических уравнений для квазичастиц — квантов плазменных коле-

баний — если вместо функций  $I_l, I_s$  ввести, согласно (10.1.2.15), функции распределения плазмонов

$$N_l(\mathbf{k}) = \frac{2\pi^2 k^2}{\hbar \omega_{pe}} I_l(\mathbf{k}), \quad N_s(\mathbf{k}) = \frac{2\pi^2}{\hbar k v_s a_0^2} I_s(\mathbf{k}). \quad (10.2.1.11)$$

Подставляя эти выражения в (10.2.1.9), (10.2.1.10), получим

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U_\mu(\mathbf{k}) \frac{\partial}{\partial \Gamma} \right) N_\mu(\mathbf{k}) = \left( \frac{\partial N_\mu(\mathbf{k})}{\partial t} \right)_c, \quad (\mu = l, s), \quad (10.2.1.12)$$

где интегралы столкновений  $(\partial N_\mu / \partial t)_c$  имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial N_l(\mathbf{k})}{\partial t} \right)_c &= \frac{-e^2 \hbar v_s}{8\pi m_e T_e k^2} \int \cos^2 \vartheta |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1| \{ k_1^2 N_l(\mathbf{k}) - \\ &- k^2 N_l(\mathbf{k}_1) \} N_s(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1) - \omega_s(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) d^3 k_1, \\ \left( \frac{\partial N_s(\mathbf{k})}{\partial t} \right)_c &= \frac{e^2 \hbar k v_s}{8\pi m_e T_e} \int \cos^2 \vartheta |\mathbf{k} - \mathbf{k}_1|^{-2} (k - k_1 \cos \vartheta)^2 \times \\ &\times N_l(\mathbf{k}_1) N_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \delta(\omega_s(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1) - \omega_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)) d^3 k_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.1.13)$$

Обратим внимание на то, что интеграл столкновений в кинетическом уравнении для ионно-звуковых волн всегда положителен ( $(\partial N_s / \partial t)_c > 0$ ). Поэтому число этих волн, а следовательно, и их энергия со временем всегда увеличиваются.

Увеличение со временем энергии ионно-звуковых колебаний приводит к тому, что всякое распределение ленгмюровских волн в двухтемпературной плазме с  $T_e \gg T_i$  оказывается неустойчивым. Физический механизм неустойчивости заключается в том, что низкочастотные биения, возникающие при взаимодействии двух ленгмюровских волн, превращаются в ионно-звуковые колебания, что приводит к возбуждению ионного звука. Такой механизм неустойчивости становится возможным потому, что для двух ленгмюровских волн и одной ионно-звуковой волны можно удовлетворить распадным условиям (10.1.3.4)

$$\omega_l(\mathbf{k}_0) = \omega_l(\mathbf{k}_l) + \omega_s(\mathbf{k}_s), \quad \mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_l + \mathbf{k}_s; \quad (10.2.1.14)$$

поэтому и сама неустойчивость называется обычно *распадной*.

**10.2.2. Распадная неустойчивость ленгмюровской волны.** Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости отдельной ленгмюровской волны конечной амплитуды, распространяющейся в двухтемпературной плазме. Заметим прежде всего, что уравнения (10.2.1.9), (10.2.1.10) (как и исходное кинетическое уравнение для волн (10.1.2.11)) предназначены для изучения взаимодействия между достаточно широкими (в пространстве волновых векторов) волновыми пакетами и требуют некоторой модификации, если рассмотрению подлежат процессы с участием монохроматических волн. Будем поэтому исходить вначале не из этих уравнений,

а из уравнений (10.1.1.11); затем мы покажем, как получить те же результаты, исходя из кинетических уравнений (10.2.1.9) и (10.2.1.10).

Возвращаясь, таким образом, к уравнению (10.1.1.11), представим его для случая взаимодействующих между собой ленгмюровских и ионно-звуковых волн в виде

$$\left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_l(\mathbf{k})} (\omega - \omega_l(\mathbf{k})) \varphi_l(\mathbf{k}, \omega) = \\ = \int V(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) \varphi_l(\mathbf{k}_1, \omega_1) \varphi_s(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) d^3k_1 d\omega_1, \quad (10.2.2.1)$$

$$\left(\frac{\partial \varepsilon'}{\partial \omega}\right)_{\omega=\omega_s(\mathbf{k})} (\omega - \omega_s(\mathbf{k})) \varphi_s(\mathbf{k}, \omega) = \\ = \int v(\mathbf{k}, \omega_s(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) \varphi_l(\mathbf{k}_1, \omega_1) \varphi_l(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1) d^3k_1 d\omega_1, \quad (10.2.2.2)$$

где  $\varphi_\mu$  ( $\mu=l, s$ ) — соответствующие части электростатического потенциала, а функции  $V, v$  определяются формулами (10.2.1.7), (10.2.1.8) (мы симметризовали уравнение для величины  $\varphi_s$  и пренебрегли в обоих уравнениях слагаемыми, содержащими потенциал в степени выше второй).

Будем считать, что в исходном состоянии в плазме распространяется одна ленгмюровская волна с амплитудой  $\varphi_0$  и волновым вектором  $\mathbf{k}_0$ , т. е.

$$\varphi_0(\mathbf{k}, \omega) = \varphi_0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{k}_0)). \quad (10.2.2.3)$$

Интересуясь устойчивостью этой волны относительно распада на ионно-звуковую волну с волновым вектором  $\mathbf{k}_s$  и ленгмюровскую волну с волновым вектором  $\mathbf{k}_l$ , представим возмущение электростатического потенциала  $\varphi(\mathbf{k}, \omega)$  в виде

$$\varphi(\mathbf{k}, \omega) = 2 \int \{ \varphi_s \cos(\mathbf{k}_s \mathbf{r} - \omega_s(\mathbf{k}_s) t) + \\ + \varphi_l \cos(\mathbf{k}_l \mathbf{r} - |\omega_l(\mathbf{k}_l)| t) \} \frac{d^3r dt}{(2\pi)^4}, \quad (10.2.2.4)$$

где  $\varphi_s$  и  $\varphi_l$  — медленно меняющиеся функции времени.

Чтобы указанный распад был возможен, векторы  $\mathbf{k}_l$  и  $\mathbf{k}_s$  должны быть связаны с  $\mathbf{k}_0$  уравнениями (10.2.1.14). Решая последние и полагая для определенности  $a_e k_0 \gg \sqrt{m_e/m_i}$ , получим

$$k_l = k_0, \quad k_s = 2k_0 \sin \frac{1}{2}\alpha,$$

где  $\alpha$  — угол между векторами  $\mathbf{k}_0$  и  $\mathbf{k}_l$ .

Подставляя далее (10.2.2.3) и (10.2.2.4) в уравнения (10.2.2.1), (10.2.2.2) и производя линеаризацию, имеем

$$\left. \begin{aligned} (\omega - \omega_l(\mathbf{k}_l)) \varphi_l &= -\frac{1}{2} \omega_{pe} \frac{e\varphi_0}{T_e} \varphi_s \cos \alpha, \\ (\omega - \omega_s(\mathbf{k}_s)) \varphi_s &= -\frac{k_0^2 v_s^2}{m_e \omega_{pe}^2} e\varphi_0 \varphi_l \sin^3 \frac{1}{2} \alpha. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.2.5)$$

Полагая для каждой из возбуждаемых волн  $\omega = \omega_\mu(\mathbf{k}_\mu) + i\gamma(\alpha)$ , найдем квадрат инкремента нарастания колебаний  $\gamma^2(\alpha)$ :

$$\gamma^2(\alpha) = \frac{1}{2} \omega_{pe}^2 (a_e k_0)^3 \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{(e\varphi_0)^2}{T_e^2} (-\cos \alpha \sin^3 \frac{1}{2} \alpha). \quad (10.2.2.6)$$

Мы видим, что нарастают возмущения, для которых  $\alpha > \frac{1}{2}\pi$ , причем наибольшим инкрементом характеризуются возмущения, для которых  $\alpha = \pi$ , т. е.  $\mathbf{k}_l = -\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_s = 2\mathbf{k}_0$ . Таким образом, инкремент распадной неустойчивости  $\max\{\gamma(\alpha)\} \equiv \gamma_l$  определяется формулой [11]

$$\gamma_l = \omega_{pe} (a_e k_0)^{3/2} T_e^{-1} |e\varphi_0| (m_e/4m_i)^{1/4}. \quad (10.2.2.7)$$

Покажем теперь, как определить инкремент распадной неустойчивости, если исходить не из уравнения (10.1.1.11), а из кинетических уравнений (10.2.1.9), (10.2.1.10) для взаимодействующих между собой ленгмюровских и ионно-звуковых волн. Заметим, что при учете нарастания (или затухания) волн в выражении (10.1.3.3) для функции  $S\{I\}$  следует произвести замену  $\delta(\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_l) - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_l)) \rightarrow$

$$\rightarrow (\gamma_l/\pi) \{(\omega(\mathbf{k}) - \omega(\mathbf{k}_l) - \omega(\mathbf{k} - \mathbf{k}_l))^2 + \gamma_l^2\}^{-1}.$$

Рассмотрим в качестве невозмущенного состояния системы волн состояние, характеризующееся коррелятором

$$I(\mathbf{k}, \omega) = I_0 \{ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_j) \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{k}_0)) + \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_0) \delta(\omega + \omega_l(\mathbf{k}_0)) \},$$

и наложим возмущение вида

$$\begin{aligned} \delta I(\mathbf{k}, \omega) &= A_l \{ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_l) \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{k}_l)) + \\ &+ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_l) \delta(\omega + \omega_l(\mathbf{k}_l)) \} \exp\{\gamma_l t\} + A_s \{ \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s) \delta(\omega - \omega_s(\mathbf{k}_s)) + \\ &+ \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}_s) \delta(\omega + \omega_s(\mathbf{k}_s)) \} \exp\{\gamma_l t\} \end{aligned}$$

( $A_l$  и  $A_s$  — некоторые константы). Полагая  $\mathbf{k}_l = -\mathbf{k}_0$ ,  $\mathbf{k}_s = 2\mathbf{k}_0$ , получим после линеаризации кинетических уравнений

$$\gamma_l A_l = \frac{e^2 \omega_{pe}^2 I_0}{4\gamma_l T_e^2} A_s, \quad \gamma_l A_s = \frac{e^2 v_s^2 k_0^2 I_0}{m_e^2 \omega_{pe}^4 \gamma_l} A_l, \quad (10.2.2.8)$$

откуда [7]

$$\gamma_l = \omega_{pe} (a_e k_0)^{3/2} T_e^{-1} \sqrt{e^2 I_0} (m_e/4m_i)^{1/4}. \quad (10.2.2.9)$$

Это выражение отличается от (10.2.2.7) лишь тем, что в него вместо амплитуды отдельной ленгмюровской волны  $\varphi_0$  входит средняя квадратичная амплитуда случайных ленгмюровских волн  $\sqrt{I_0}$ .

Заметим, что выражения (10.2.2.7), (10.2.2.9) для инкремента распадной неустойчивости ленгмюровской волны справедливы, если он превосходит декременты затухания всех трех волн, участвующих в процессе распада. Что же касается самой возможности распадной неустойчивости, то для ее возникновения достаточно, чтобы инкремент распадной неустойчивости превосходил декременты затухания хотя бы для двух (а не обязательно для всех трех) волн, участвующих в процессе [12].

Мы рассмотрели распадную неустойчивость, считая все три волны, участвующие в процессе, монохроматическими. В реальной физической ситуации мы имеем дело, разумеется, не с монохроматическими волнами, а с волновыми пакетами, существующими конечное время. Учет немонохроматичности волновых пакетов [13, 14] приводит к уменьшению инкремента распадной неустойчивости по сравнению с (10.2.2.7). При достаточно большой ширине пакета величина  $\gamma_l^2$  может даже сделаться отрицательной; в этом случае, разумеется, величина  $|\gamma_l|$  является уже не инкрементом нарастания колебаний, а поправкой к их частоте.

**10.2.3. Нелинейное затухание ленгмюровских волн.** Как было показано в гл. 4, декремент обычного (линейного) затухания Ландау для ленгмюровских волн экспоненциально мал ( $\gamma_{l0}/\omega \sim \sim \exp\{-1/2(a_e k)^{-2}\}$ ). Это связано с тем, что экспоненциально мало число резонансных частиц — электронов со скоростями, близкими к фазовой скорости ленгмюровской волны, и поэтому интенсивно взаимодействующих с последней.

При нелинейном взаимодействии двух ленгмюровских волн должны возникать низкочастотные биения с фазовыми скоростями порядка  $a_e k v_e$ , где  $v_e$  — средняя тепловая скорость электронов. Эти биения, поглощение которых частицами приводит к нелинейному затуханию Ландау, взаимодействуют с электронами значительно интенсивнее, чем исходные ленгмюровские волны. Поэтому даже при не очень больших амплитудах уменьшение энергии ленгмюровских волн должно определяться главным образом их нелинейным затуханием, к изучению которого мы и перейдем.

Заметим прежде всего, что в полностью равновесной плазме спектр ленгмюровских волн является нераспадным, т. е. соотношение (10.1.3.4) не может быть выполнено. Поэтому  $S\{I_l\} = = 0$ , так что затухание ленгмюровских волн в результате нелинейных эффектов полностью сводится (в квадратичном приближении по  $I_l(k)$ , которым мы ограничиваемся) к нелинейному затуханию

Ландау. (Спектр ленгмюровских волн становится распадным в сильно неизотермической плазме; возникающая в ней распадная неустойчивость ленгмюровской волны рассматривалась в п. 10.2.2.)

Для определения декремента нелинейного затухания ленгмюровских волн будем исходить из общей формулы (10.1.3.2). Чтобы определить входящие сюда функции  $U$  и  $v$  (см. (10.1.2.5)), учтем, что при суммировании по сортам частиц в соотношениях (10.1.1.12) достаточно ограничиться электронными слагаемыми. Далее, главный вклад в интегралы в правых частях (10.1.1.12) вносит область скоростей  $v \sim v_e$ , и поэтому разложению подынтегральных выражений в ряд по степеням  $k v / \omega_l(\mathbf{k})$  соответствует разложение функций  $U$  и  $v$  в ряд по степеням малого параметра  $a_e k$ .

В первом приближении по этому параметру получим

$$\left. \begin{aligned} v(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) &= \\ &= -\frac{e k \mathbf{k}_1 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}{m_e k^2 \omega_l^2(\mathbf{k})} \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1)), \\ U(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) &= \\ &= \frac{e k \mathbf{k}_1 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2}{m_e k^2 \omega_l^2(\mathbf{k})} v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1); \mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k})). \end{aligned} \right\} (10.2.3.1)$$

Подстановка найденных выражений в (10.1.3.2) дает  $\gamma_{II}(\mathbf{k}) = 0$ . Поэтому необходим учет следующего приближения.

В следующем приближении по параметру  $a_e k$  имеем

$$\begin{aligned} & \text{Im} \left\{ U(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) + \right. \\ & \left. + \frac{v(\mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}); \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}_1)) v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1); \mathbf{k}, \omega_l(\mathbf{k}))}{\varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1))} \right\} = \\ & = \frac{8\pi^2 e^4 (\mathbf{k} \mathbf{k}_1)^2}{m_e^3 \omega_{pe}^6 k^2} \int (\mathbf{k} \mathbf{v})^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) d^3 v. \end{aligned} \quad (10.2.3.2)$$

Замечая, что  $|\omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1)| \sim \omega_{pe} (a_e k)^2$ , можно представить входящий в это выражение интеграл в симметричном (по отношению к векторам  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ ) виде

$$\begin{aligned} & \int (\mathbf{k} \mathbf{v})^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}} \delta(\omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1) - (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \mathbf{v}) d^3 v = \\ & = -\frac{T_e \{ \mathbf{k} \mathbf{k}_1 \}^2}{4\pi^2 e^2} \text{Im} \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1)). \end{aligned} \quad (10.2.3.3)$$

Подставляя последние два соотношения в (10.1.3.2), получим окончательное выражение для декремента нелинейного затухания ленгмюровских волн (см. [7])

$$\gamma_{I1}(\mathbf{k}) = e^2 T_e m_e^{-3} \omega_{pe}^{-5} k^{-2} \int (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2 [\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2 \times \\ \times \operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1)) I_l(\mathbf{k}_1) d^3 k_1. \quad (10.2.3.4)$$

Мы видим, что

$$\gamma_{I1}(\mathbf{k}) \sim \omega_{pe} (a_e k)^3 W_l / n_0 T_e, \quad (10.2.3.5)$$

где  $n_0$  — равновесная плотность электронов и  $W_l$  — плотность энергии волн,

$$W_l = \frac{1}{4\pi} \int \frac{k^2}{1 + 3/2 (a_e k)^2} I_l(\mathbf{k}) d^3 k. \quad (10.2.3.6)$$

Учитывая, что декремент линейного затухания для ленгмюровских волн равен

$$\gamma_{I0} = \sqrt{\frac{\pi}{8}} \frac{\omega_{pe}}{(a_e k)^3} \exp\left\{-3/2 - \frac{1}{2(a_e k)^2}\right\},$$

мы видим, что нелинейное затухание начинает играть определяющую роль, если амплитуда волны не слишком мала, а именно, если  $E > E_{\min}$ , где

$$E_{\min}^2 \sim \frac{n_0 T_e}{(a_e k)^6} \exp\left\{-\frac{1}{2(a_e k)^2}\right\}. \quad (10.2.3.7)$$

Подставляя (10.2.3.4) в (10.1.3.1), учитывая (10.1.2.11) и пренебрегая линейным затуханием волн, имеем

$$\partial I_l(\mathbf{k}) / \partial t = -2e^2 T_e m_e^{-3} \omega_{pe}^{-5} k^{-2} I_l(\mathbf{k}) \times \\ \times \int (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2 [\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2 \operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1)) I_l(\mathbf{k}_1) d^3 k_1. \quad (10.2.3.8)$$

(Мы ограничиваемся случаем пространственно однородных распределений и предполагаем, что температура электронов не слишком отличается от температуры ионов, так что трехволновые процессы с участием ленгмюровских волн невозможны.)

Вводя согласно (10.2.1.11), функцию распределения ленгмюровских волн  $N_l(\mathbf{k})$ , перепишем кинетическое уравнение (10.2.3.8) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_l(\mathbf{k})}{\partial t} &= \left(\frac{\partial N_l(\mathbf{k})}{\partial t}\right)_c, \\ \left(\frac{\partial N_l(\mathbf{k})}{\partial t}\right)_c &= -\frac{e^2 \hbar \omega_{pe}^2 a_e^6}{\pi^2 T_e^2} N_l(\mathbf{k}) \int \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{k^2 k_1^2} [\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2 \times \\ &\times \operatorname{Im} \varepsilon(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega_l(\mathbf{k}) - \omega_l(\mathbf{k}_1)) N_l(\mathbf{k}_1) d^3 k_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.2.3.9)$$

Интегрируя уравнение (10.2.3.9) по  $\mathbf{k}$  и учитывая, что  $\text{Im}\varepsilon(\mathbf{k}, \omega) = -\text{Im}\varepsilon(-\mathbf{k}, -\omega)$ , легко убедиться, что при нелинейном затухании число ленгмюровских волн (в единице объема)  $N_l = \int N_l(\mathbf{k}) d^3k$  сохраняется, т. е.

$$\frac{\partial N_l}{\partial t} = 0. \quad (10.2.3.10)$$

Далее из уравнения (10.2.3.9) следует, что сохраняется полная плотность энергии ленгмюровских волн [15], связанная в рассматриваемом приближении с числом волн соотношением  $W = \hbar \omega_p N_l$ . Что же касается импульса волн

$$\mathbf{P}_l = \int \hbar \mathbf{k} N_l(\mathbf{k}) d^3k,$$

то эта величина благодаря нелинейному затуханию убывает.

Таким образом, декремент  $\gamma_{li}(\mathbf{k})$  определяет фактически обратное время затухания импульса волн, но не их энергии.

Чтобы определить скорость изменения энергии ленгмюровских волн, мы должны учесть при вычислении декремента  $\gamma_{li}(\mathbf{k})$  члены еще более высокого порядка по параметру  $a_0 k$ . При этом характерное время изменения энергии волн  $\tau$  оказывается значительно больше величины  $\gamma_{li}^{-1}$ , а именно

$$\tau \sim (a_0 k)^{-2} \gamma_{li}^{-1}. \quad (10.2.3.11)$$

Что же касается соотношения (10.2.3.10), выражающего сохранение полного числа волн, то оно оказывается справедливым не только в первом исчезающем приближении по параметру  $a_0 k$ , но и с точностью до экспоненциально малых членов вида  $\exp\{-(a_0 k)^{-2}\}$  [16]. В самом деле, выполняя в первом из выражений (10.1.1.12) интегрирование по частям и используя (10.1.2.5), имеем

$$v(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) = k^{-2} (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^2 v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1; \mathbf{k}, \omega).$$

Далее легко убедиться, что если пренебречь экспоненциально малыми вычетами в точках  $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ ,  $\omega_1 = \mathbf{k}_1\mathbf{v}$ , то

$$v(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1, \omega - \omega_1; \mathbf{k}, \omega) = v^*(-\mathbf{k} + \mathbf{k}_1, -\omega + \omega_1; -\mathbf{k}, -\omega).$$

Наконец, для функции  $U$  нетрудно доказать соотношение

$$\text{Im} U(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) = -(k_1/k)^2 \text{Im} U(\mathbf{k}_1, \omega_1; \mathbf{k}, \omega).$$

Поэтому, если записать кинетическое уравнение для волн в виде

$$\partial N_l(\mathbf{k})/\partial t + \int K(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) N_l(\mathbf{k}) N_l(\mathbf{k}_1) d^3k_1 = 0, \quad (10.2.3.12)$$

то ядро интегрального уравнения  $K(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1)$  окажется антисимметричным по отношению к замене  $\mathbf{k}$  на  $\mathbf{k}_1$ , т. е.  $K(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1) = -K(\mathbf{k}_1, \mathbf{k})$ .

Интегрируя уравнение (10.2.3.12) по  $\mathbf{k}$ , получим соотношение (10.2.3.10).

Учитывая сохранение числа ленгмюровских волн, легко понять, почему характерное время уменьшения их энергии значительно превосходит время затухания их импульса. В самом деле, нелинейное затухание волн обусловлено поглощением частицей одной волны с одновременным испусканием другой волны (два других процесса с участием двух волн, приводящие к изменению полного числа волн, — одновременное поглощение или излучение двух волн частицей — вносят в величину  $\gamma_{il}$  экспоненциально малый вклад). При этом выполняется закон сохранения энергии

$$\Delta \mathcal{E} = \Delta \mathbf{p} \cdot \mathbf{v},$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость частицы,  $\Delta \mathcal{E} = \hbar |\omega_i(\mathbf{k})| - \hbar |\omega_i(\mathbf{k}_1)|$  и  $\Delta \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} - \hbar \mathbf{k}_1$  — изменения энергии и импульса волны. Замечая, что энергия ленгмюровской волны слабо зависит от ее импульса, мы видим, что в каждом акте рассеяния относительное изменение энергии волны много меньше относительного изменения ее импульса

$$\frac{\Delta \mathcal{E}}{\hbar \omega} \sim (a_0 k)^2 \frac{|\Delta \mathbf{p}|}{\hbar k}.$$

Умножая это соотношение на число актов рассеяния в единицу времени, получим соотношение (10.2.3.11).

Таким образом, с квантовомеханической точки зрения нелинейное затухание волн представляет собой (в отличие от линейного затухания) не поглощение квантов колебаний (плазмонов) частицами плазмы, а диффузию этих квантов в импульсном пространстве в результате их столкновений с частицами, причем наибольшей скоростью характеризуется «размешивание» плазмонов по направлениям их импульсов; характерное время этого процесса равно  $\gamma_{il}^{-1}$ . Значительно медленнее, за время порядка  $\tau \sim (a_0 k)^{-2} \gamma_{il}^{-1}$ , происходит диффузия плазмонов в пространстве волновых чисел из области больших в область меньших значений  $k$ , приводящая к медленному уменьшению суммарной энергии плазмонов.

Обратим внимание на существенное различие между плазменной турбулентностью и обычной гидродинамической турбулентностью. В турбулентной жидкости, как известно, энергия передается от крупных вихрей к мелким, так что поток энергии в импульсном пространстве направлен в сторону больших  $k$ , причем в этой области начинает играть важную роль линейное затухание колебаний, обусловленное вязкостью и теплопроводностью жидкости. В турбулентной плазме поток энергии направлен в про-

твояположную сторону — от бoльших к меньшим значениям  $k$ , т. е. в область, в которой линейное бесстолкновительное затухание экспоненциально мало.

Легко видеть, что один лишь процесс нелинейного затухания не может привести к полной диссипации энергии ленгмюровских волн. В самом деле, если в начальный момент времени в плазме было возбуждено  $N_1$  волн, то их энергия не может в результате нелинейного затухания стать меньше величины  $\hbar\omega_{pe}N_1$ .

Заметим в заключение, что нелинейное взаимодействие волн с частицами приводит к затуханию волн в том случае, если равновесная функция распределения электронов убывает с ростом их энергии. Если же в области скоростей  $v_0 a_0 k$  число электронов возрастает с увеличением энергии ( $\partial f_{e0}/\partial v > 0$ ), то число актов рассеяния, в которых  $\Delta\mathcal{E} < 0$ , превосходит число актов рассеяния с  $\Delta\mathcal{E} > 0$ , так что нелинейное взаимодействие волн с частицами приводит не к уменьшению, а к увеличению энергии волн [17].

## § 10.3. Ионно-звуковая турбулентность

**10.3.1. Нелинейное затухание ионного звука.** В двухтемпературной плазме с горячими электронами и холодными ионами ( $T_e \gg T_i$ ), наряду с высокочастотными ленгмюровскими волнами, могут, как известно, распространяться еще и низкочастотные продольные колебания — ионный звук. Обычное (линейное) затухание Ландау для ионно-звуковых волн обусловлено главным образом их поглощением электронами и характеризуется декрементом

$$\gamma_s^0(\mathbf{k}) = \omega_s(\mathbf{k}) \sqrt{\pi m_e / 8 m_i}; \quad (10.3.1.1)$$

вклад ионов в декремент затухания экспоненциально мал,

$$\gamma_s^i(\mathbf{k}) \sim \omega_s(\mathbf{k}) \exp\{-1/2 T_e/T_i\}.$$

Такая малая величина ионного затухания связана с тем, что число резонансных ионов (т. е. ионов, скорость которых близка к фазовой скорости ионно-звуковой волны и которые поэтому интенсивно взаимодействуют с последней) экспоненциально мало, тогда как число резонансных электронов только линейно по малому параметру  $\sqrt{m_e/m_i}$ .

Сравнительно большая величина декремента линейного затухания ионно-звуковых колебаний, обусловленного их взаимодействием с электронами, приводит к тому, что в случае плазмы с изотропным распределением электронов по скоростям не возникает необходимости учитывать, наряду с линейным затуханием, еще и нелинейное затухание этих колебаний. (Напомним, что

в случае ленгмюровских волн ситуация оказывается совершенно иной — учет нелинейного затухания становится необходимым даже при сравнительно малой амплитуде волны.)

Иначе обстоит дело в плазме с направленным движением электронов. Декремент затухания ионного звука в такой плазме, как показано в гл. 6, равен

$$\gamma_s^*(\mathbf{k})(1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/kv_s) \equiv \gamma_{s0}(\mathbf{k}), \quad (10.3.1.2)$$

где  $\mathbf{u}$  — средняя направленная скорость электронов (скорость электронного потока) и  $v_s$  — скорость ионного звука. Мы видим, что при скоростях электронного потока, больших скорости звука, взаимодействие ионно-звуковых волн с электронами приводит не к затуханию, а к нарастанию амплитуд волн, и в этих условиях становится необходимым учет нелинейного затухания ионного звука.

Переходя к определению функции  $\gamma_{s1}(\mathbf{k})$ , характеризующей нелинейное взаимодействие ионно-звуковых волн с частицами плазмы, заметим прежде всего, что вклад в эту функцию вносят три различных элементарных процесса: рассеяние ионно-звуковой волны ионом, поглощение (или испускание) двух волн электроном и рассеяние ионно-звуковой волны электроном (вклад четвертого возможного процесса — одновременного поглощения или испускания двух волн ионом — пропорционален числу ионов со скоростями  $v_s$  и потому экспоненциально мал).

Вклад в величину  $\gamma_{s1}(\mathbf{k})$  первого из указанных процессов определяется, очевидно, ионными слагаемыми в выражениях (10.1.1.12) и пропорционален, как будет показано ниже, малому параметру  $T_i/T_e$ . Что же касается двух других процессов, то вклад их, как легко убедиться, пропорционален числу резонансных электронов и, следовательно, пропорционален малому параметру  $\sqrt{m_e/m_i}$ . Считая, что выполнено неравенство  $1 \gg T_i/T_e \gg \sqrt{m_e/m_i}$ , мы можем ограничиться учетом взаимодействия ионно-звуковых волн с ионами и не интересоваться вкладом электронов в функцию  $\gamma_{s1}(\mathbf{k})$ .

По своей физической природе нелинейное затухание ионно-звуковых волн, обусловленное их взаимодействием с ионами, аналогично рассмотренному выше нелинейному затуханию ленгмюровских волн, вызванному рассеянием последних электронами. А именно, при нелинейном взаимодействии двух ионно-звуковых колебаний с волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$  возникают биения с фазовой скоростью

$$v_{ph} = \frac{v_s}{\sqrt{1 + 4kk_1(k - k_1)^{-2} \sin^2 \frac{1}{2} \vartheta}},$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ . Если частоты взаимодействующих волн близки друг к другу, так что  $(k - k_1)/\sqrt{kk_1} \sim$

$\sim \sqrt{T_i/T_e} \sin 1/2 \vartheta$ , то скорость  $v_{ph}$  становится равной по порядку величины тепловой скорости ионов  $v_i$ . Такие биения интенсивно поглощаются ионами, приводя тем самым к затуханию исходных ионно-звуковых волн.

Чтобы определить функции  $U$  и  $v$ , входящие в выражение (10.1.3.2) для декремента нелинейного затухания волн, воспользуемся соотношениями (10.1.2.5), (10.1.1.12). Заметим, что при суммировании по сортам частиц можно ограничиться ионными слагаемыми. Учтем далее, что основной вклад в интегралы в правых частях соотношений (10.1.1.12) вносит область скоростей  $v \sim v_i$ , и поэтому, если разложить подынтегральные выражения по степеням  $\mathbf{k}\mathbf{v}/\omega$ , то мы получим функции  $U$  и  $v$  в виде рядов по степеням малого параметра  $kv_i/\omega_s(\mathbf{k}) \sim \sqrt{T_i/T_e}$ .

Возвращаясь к (10.1.3.2), вычислим прежде всего мнимую часть выражения в фигурных скобках. Учитывая, что в рассматриваемом случае ионно-звуковых колебаний  $\omega(\mathbf{k}) = \omega_s(\mathbf{k})$ ,  $\omega(\mathbf{k}_1) = \omega_s(\mathbf{k}_1)$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{Im} \left\{ U(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) + \frac{v(\mathbf{k}, \omega; \mathbf{k}_1, \omega_1) v(\mathbf{k}_2, \omega_2; \mathbf{k}, \omega)}{\varepsilon(\mathbf{k}_2, \omega_2)} \right\} = \\ = \frac{16\pi^2 e^4 (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2}{m_i^3 \omega^6 k^2} \int \left\{ (\mathbf{k}\mathbf{v})^2 \left( 1 - \frac{3\omega_2 \mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega k^2} \right) + \right. \\ \left. + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{v})^3}{\omega} \left( 3 - \frac{4\omega_2 \mathbf{k}\mathbf{k}_2}{\omega k^2} \right) - \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_2 \omega_2)^2}{k^2} \right\} k_2 \frac{\partial f_{i0}(v)}{\partial v} \delta(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}) d^3 v, \end{aligned} \quad (10.3.1.3)$$

где  $\omega = \omega_s(\mathbf{k})$ ,  $\omega_1 = \omega_s(\mathbf{k}_1)$ ,  $\omega_2 = \omega_s(\mathbf{k}) - \omega_s(\mathbf{k}_1)$ ,  $\mathbf{k}_2 = \mathbf{k} - \mathbf{k}_1$ . (Заметим, что при выводе этой формулы слагаемые, не содержащие малого параметра  $kv_i/\omega_s(\mathbf{k}) \sim \sqrt{T_i/T_e}$ , взаимно скомпенсировались, и поэтому при разложении подынтегральных выражений в (10.1.1.12) по степеням  $\mathbf{k}\mathbf{v}/\omega$ ,  $\mathbf{k}_1 \mathbf{v}/\omega_1$  оказался необходимым учет линейных и квадратичных членов.)

Подставляя это выражение в (10.1.3.2), получим после сложных преобразований

$$\begin{aligned} \gamma_{s1}(\mathbf{k}) = -8\pi^2 e^4 T_i a_e^2 m_i^{-4} \omega^{-5} \int (\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2 [\mathbf{k}\mathbf{k}_1]^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1)^{-2} (1 + 3[k - k_1]/k) \times \\ \times I_s(\mathbf{k}_1) (\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) \left( \frac{\partial f_{i0}(v)}{\partial v} \right) \delta(\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}) d^3 v d^3 k_1. \end{aligned} \quad (10.3.1.4)$$

Последнее соотношение можно значительно упростить, если учесть, что основной вклад в интеграл по  $\mathbf{k}_1$  вносит область волновых чисел  $k_1$ , близких к  $k$  ( $|k_1 - k| \sim k \sqrt{T_i/T_e}$ ).

Разлагая функцию  $I_s(\mathbf{k}_1) \equiv I_s(k_1, \mathbf{n}_1)$  (где  $\mathbf{n}_1 = \mathbf{k}_1/k_1$ ) в ряд по степеням  $k_1 - k$ ,

$$I_s(k_1, \mathbf{n}_1) = I_s(k, \mathbf{n}_1) + (k_1 - k) \partial I_s(k, \mathbf{n}_1) / \partial k + \dots,$$

получим, выполнив в правой части соотношения (10.3.1.4) интегрирование по  $k_1$ , следующее выражение для декремента нелинейного затухания ионно-звуковых волн [3, 18]

$$\gamma_{s1}(\mathbf{k}) = -\omega_s(\mathbf{k}) T_i T_e^{-3} 2\pi e^2 k \frac{\partial}{\partial k} \int \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta k^3 I_s(\mathbf{k}_1) |_{k_1=k} d\omega_1, \quad (10.3.1.5)$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}_1$ ,  $d\omega_1$  — элемент телесного угла вектора  $\mathbf{k}_1$ .

Мы видим, что величина  $\gamma_{s1}(\mathbf{k})$  положительна, если функция  $k^3 I_s(\mathbf{k})$  убывает при увеличении  $k$ ; в этом случае нелинейное взаимодействие ионно-звуковых колебаний с ионами плазмы приводит к затуханию колебаний. Если же функция  $I_s(\mathbf{k})$  убывает при увеличении  $k$  медленнее, чем  $k^{-3}$ , то величина  $\gamma_{s1}(\mathbf{k})$  делается отрицательной, и нелинейное взаимодействие ионно-звуковых волн с ионами приводит к увеличению амплитуды волн.

Согласно (10.3.1.5) декремент нелинейного затухания (или инкремент нелинейного нарастания) ионно-звуковых волн равен по порядку величины

$$\gamma_{s1} \sim \omega \frac{T_i}{T_e} \frac{\omega \partial W_s / \partial \omega}{\nu_0 T_e}, \quad (10.3.1.6)$$

где  $\partial W_s / \partial \omega$  — спектральная плотность энергии волн (отнесенная к единице объема), т. е.

$$\frac{\partial W_s}{\partial \omega} = \frac{1}{8\pi v_s} \int \frac{\partial}{\partial \omega} [\varepsilon'(\mathbf{k}, \omega) \omega]_{\omega=\omega_s(\mathbf{k})} I_s(\mathbf{k}) k^4 d\omega = \frac{k^2}{4\pi v_s a_0^2} \int I_s(\mathbf{k}) d\omega$$

( $d\omega$  — элемент телесного угла вектора  $\mathbf{k}$ ).

Подставляя (10.3.1.5) в (10.1.3.1) и учитывая (10.1.2.11), получим в случае пространственно однородных распределений плазмонов

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_s(\mathbf{k})}{\partial t} &= 2 |\gamma_{s0}(\mathbf{k})| I_s(\mathbf{k}) + \omega_s(\mathbf{k}) I_s(\mathbf{k}) T_i T_e^{-3} 4\pi e^2 k \frac{\partial}{\partial k} \times \\ &\times \int \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta k^3 I_s(\mathbf{k}_1) |_{k_1=k} d\omega_1, \end{aligned} \quad (10.3.1.7)$$

где  $|\gamma_{s0}(\mathbf{k})|$  — инкремент нарастания колебаний, даваемый линейной теорией.

Вводя, согласно (10.2.1.11), функцию распределения ионно-звуковых волн  $N_s(\mathbf{k})$ , можно представить кинетическое уравнение (10.3.1.7) в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_s(\mathbf{k})}{\partial t} - \left( \frac{\partial N_s(\mathbf{k})}{\partial t} \right)_e &= 2 |\gamma_{s0}(\mathbf{k})| N_s(\mathbf{k}), \\ \frac{\partial N_s(\mathbf{k})}{\partial t} &= \frac{\hbar T_i k^2 N_s(\mathbf{k})}{8\pi^2 n_0 m_i T_e} \frac{\partial}{\partial k} \int \sin^2 2\vartheta k^4 N_s(\mathbf{k}_1) |_{k=k_1} d\omega_1. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.1.8)$$

Интегрируя это уравнение по  $\mathbf{k}$ , легко убедиться, что при нелинейном затухании сохраняется число ионно-звуковых колебаний

(в единице объема). Точнее говоря, если бы отсутствовал член  $2|\gamma_{s0}(\mathbf{k})|N_s(\mathbf{k})$ , описывающий нарастание амплитуд волн, определяемое линейной теорией, то получилось бы уравнение непрерывности в пространстве волновых чисел

$$\frac{\partial N_s(k)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial k} \mathcal{J}(k) = 0, \quad (10.3.1.9)$$

где  $N_s(k)$  — число ионно-звуковых колебаний с волновыми числами в интервале  $(k, k+dk)$ , т. е.

$$\left. \begin{aligned} N_s(k) &= \int k^2 N_s(\mathbf{k}) d\mathbf{o}, \\ \mathcal{J}(k) &= -\hbar T_1 k^8 (4\pi^2 n_0 m_1 T_e)^{-1} \left\{ \left( \int (\mathbf{k}/k) N_s(\mathbf{k}) d\mathbf{o} \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - \int ((\mathbf{k}\mathbf{k}_1)^2 / (k^2 k_1^2)) N_s(\mathbf{k}) N_s(\mathbf{k}_1) d\mathbf{o} d\mathbf{o}_1 \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (10.3.1.10)$$

Таким образом, с квантовомеханической точки зрения нелинейное затухание ионно-звуковых колебаний представляет собой (как и нелинейное затухание ленгмюровских волн) не поглощение квантов колебаний (плазмонов) частицами плазмы, а диффузию этих квантов в импульсном пространстве, обусловленную их столкновениями с частицами. В результате таких столкновений пакеты ионно-звуковых волн перемещаются в импульсном пространстве, причем энергия волн меняется пропорционально частоте.

Заметим, что если бы отсутствовало линейное взаимодействие ионного звука с частицами, то в результате нелинейного затухания энергия ионно-звуковых волн могла бы в принципе полностью перейти к ионам плазмы. Такая возможность связана с тем, что при  $k \rightarrow 0$  частота ионно-звуковой волны обращается в нуль; напомним, что в случае ленгмюровских волн, для которых  $\omega_l(0) = \omega_{pe}$ , энергия волн не может в результате нелинейного затухания стать меньше величины  $\hbar\omega_{pe}N_l$ , где  $N_l = \int N_l(\mathbf{k}) d^3k$ . Эта особенность нелинейного затухания ионного звука приводит к тому, что оно может полностью компенсировать увеличение энергии волн, обусловленное направленным движением электронов. При этом в плазме могут установиться стационарные распределения турбулентных ионно-звуковых колебаний, к изучению которых мы и перейдем.

**10.3.2. Стационарные распределения турбулентных волн.** Для определения стационарных распределений турбулентных ионно-звуковых волн в плазме с направленным движением электронов будем исходить из кинетического уравнения для волн (10.3.1.7). Полагая в этом уравнении  $\partial I_s / \partial t = 0$  и вводя обозначение  $\tilde{\gamma}(k, \Theta)$

для инкремента нарастания колебаний, даваемого линейной теорией (в случае произвольного распределения электронов по скоростям), получим

$$\tilde{\gamma}(k, \Theta) + (4\pi e)^2 v_s T_1 T_e^{-3} k^2 \frac{\partial}{\partial k} \int x(\Theta, \Theta_1) k^3 I_s(k, \Theta_1) d\cos \Theta_1 = 0, \quad (10.3.2.1)$$

где  $\Theta(\Theta_1)$  — угол между вектором  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}_1$ ) и направлением электронного потока,  $I_s(k, \Theta) \equiv I_s(k, \mathbf{n})$ ,

$$x(\Theta, \Theta_1) = \int \sin^2 \vartheta \cos^2 \vartheta d\varphi / 4\pi, \quad (10.3.2.2)$$

$\varphi$  — угол между плоскостями  $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$  и  $(\mathbf{k}_1, \mathbf{u})$ .

Если бы функция распределения электронов была максвелловской, то в уравнение (10.3.2.1) в качестве инкремента нарастания колебаний следовало бы подставить (10.3.1.2). На самом деле, функция распределения электронов при наличии в плазме очень интенсивных колебаний, как показано в гл. 9, не будет максвелловской — в распределении электронов возникнет плато, вследствие чего инкремент нарастания ионно-звуковых волн существенно уменьшится и будет иметь структуру

$$\tilde{\gamma}(k, \Theta) = -\xi(\Theta) \gamma_{s0}(\mathbf{k}), \quad (10.3.2.3)$$

где  $\xi(\Theta)$  — малый множитель.

Чтобы оценить по порядку величины функцию  $\xi(\Theta)$ , найдем функцию распределения электронов  $f_{e0}(\mathbf{v})$  с учетом обратного влияния волн на распределение электронов. Будем исходить из кинетического уравнения в квазилинейном приближении (10.1.2.12). Вводя в это уравнение релаксационный член  $(\partial f_{e0}/\partial t)_c$  (например, интеграл столкновений электронов с нейтральными частицами), имеем

$$\frac{\pi e^2}{m_e^2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \int \mathbf{k} I_s(\mathbf{k}) \delta(\omega_s(\mathbf{k}) - \mathbf{k}\mathbf{v}) (\mathbf{k} \partial f_{e0} / \partial \mathbf{v}) d^3k = (\partial f_{e0} / \partial t)_c. \quad (10.3.2.4)$$

Выбирая релаксационный член в простейшем виде  $(\partial f_{e0} / \partial t)_c \sim \sim \tau_e^{-1} f_{e0}$ , где  $\tau_e$  — время релаксации электронной компоненты плазмы, получим из (10.3.2.4)

$$\frac{\partial f_{e0}(\mathbf{v})}{\partial v_z} \sim \frac{m_e^2 v_s f_{e0}(\mathbf{v})}{e^2 \tau_e \int k I_s(\mathbf{k}) d^3k} \quad (v_s < v_z < u)$$

(ось  $z$  выбрана в направлении вектора  $\mathbf{u}$ ). Замечая, что в случае максвелловского распределения электронов по скоростям

$$\frac{\partial f_{e0}(\mathbf{v})}{\partial v_z} = \frac{m_e v_s}{T_e} f_{e0}(\mathbf{v}),$$

мы видим, что в результате обратного влияния волн на функцию распределения частиц производная  $\partial f_{e0}/\partial v_x$ , а следовательно, и инкремент нарастания  $\tilde{\gamma}(k, \Theta)$  уменьшились (по сравнению со случаем полностью равновесной плазмы) по порядку величины в  $\xi^{-1}$  раз, где

$$\xi \sim \frac{m_e T_e v_s}{e^2 \tau_e \int k I_s(\mathbf{k}) d^3 k}. \quad (10.3.2.5)$$

Подставляя теперь в уравнение (10.3.2.1) в качестве инкремента нарастания выражение (10.3.2.3), получим

$$I_s(\mathbf{k}) \sim \xi \sqrt{\frac{m_e}{m_i} \frac{T_e^3}{e^2 T_i k^3}} f(a_0 k),$$

где  $f(a_0 k)$  — функция, меняющаяся при изменении своего аргумента медленнее, чем степенная.

Используя это соотношение и (10.3.2.5), получим [3, 18]

$$\xi \sim \sqrt{\frac{T_i}{\omega_{pe} \tau_e T_e}} \quad (10.3.2.6)$$

и

$$I_s(\mathbf{k}) \sim \frac{T_e^2}{e^2 k^3} f(a_0 k) \sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i \omega_{pe} \tau_e}}. \quad (10.3.2.7)$$

Последнее соотношение определяет по порядку величины интенсивность турбулентных ионно-звуковых волн\*). Из него в частности следует, что коррелятор потенциала быстро возрастает при уменьшении волнового вектора и, значит, энергия турбулентных волн оказывается сосредоточенной главным образом в длинноволновой части спектра.

Для того чтобы определить по порядку величины энергию турбулентных волн, заметим, что уравнение (10.3.2.1) (так же, как и исходное кинетическое уравнение для волн (10.1.2.11)), не учитывает затухания волн в результате соударений между частицами. Качественно вклад соударений в инкремент нарастания волн можно учесть, если заменить формулу (10.3.2.3) соотношением

$$\tilde{\gamma}(k, \Theta) = -\xi(\Theta) \gamma_{s0}(\mathbf{k}) + \tau_i^{-1},$$

где  $\tau_i^{-1}$  — частота ионных соударений. Из последнего соотношения видно, что при очень малых частотах  $\omega \sim \omega_{\min}$ , где

$$\omega_{\min} \sim \frac{1}{\tau_i \xi} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}}, \quad (10.3.2.8)$$

\*) Изучению зависимости функции  $I_s(\mathbf{k})$  от углов, определяющих направление вектора  $\mathbf{k}$ , а также уточнению вида функции  $f(a_0 k)$  посвящены работы [19, 20].

инкремент нарастания колебаний становится отрицательным. Поэтому в области частот  $\omega_s(\mathbf{k}) \leq \omega_{\min}$  ионно-звуковые волны перестают быть турбулентными, так что функция  $I_s(\mathbf{k})$  в этой области частот мала. Учитывая последнее обстоятельство, получим для плотности энергии ионно-звуковых волн

$$W_s \sim n_0 T_e \sqrt{\frac{m_e T_e}{m_i T_i \omega_{pe} \tau_e}} \ln \left( \frac{a_e}{v_s \tau_i \xi} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \right). \quad (10.3.2.9)$$

Заметим, что в коротковолновой области уравнения (10.3.1.7), (10.3.2.1) справедливы вплоть до  $a_e k \sim 1$ . Оба эти уравнения нетрудно обобщить на случай еще более коротковолновых колебаний — вплоть до верхней границы области прозрачности  $k^{-1} \sim a_i$  ( $a_i = a_e \sqrt{T_i/T_e}$  — дебаевский ионный радиус). Для этого достаточно в соотношении (10.1.3.2), а также при определении инкремента нарастания  $\tilde{\gamma}(k, \Theta)$ , учесть дисперсию ионного звука. Мы не будем, однако, интересоваться функцией  $I_s(\mathbf{k})$  в области  $a_e k > 1$ , имея в виду, что энергия турбулентных волн сосредоточена главным образом в длинноволновой части спектра.

## § 10.4. Взаимодействие между магнитозвуковыми и альвеновскими волнами

### 10.4.1. Интеграл столкновений и H-теорема для газа плазмов.

Выше мы рассмотрели нелинейное взаимодействие волн и частиц в плазме в отсутствие внешних полей. Используемый метод построения кинетического уравнения для волн можно было бы в принципе обобщить на случай магнитоактивной плазмы. В этом случае следовало бы исходить не из уравнений (10.1.1.4), а из более общих кинетических уравнений, учитывающих наличие магнитного поля. Так как колебания плазмы в магнитном поле не являются чисто электростатическими, то вместо уравнения Пуассона нужно было бы пользоваться полной системой уравнений Максвелла. Ясно, что при этом турбулентные флуктуации нельзя было бы характеризовать только одной скалярной функцией  $I(\mathbf{k}, \omega)$ , а следовало бы ввести тензорную корреляционную функцию вида  $\langle E_i(\mathbf{k}, \omega) E_j^*(\mathbf{k}, \omega) \rangle$ .

Хотя все эти усложнения и не принципиальны, они тем не менее очень затрудняют вывод кинетического уравнения для волн в магнитоактивной плазме, которое учитывало бы как нелинейное взаимодействие между волнами, так и нелинейное взаимодействие волн с частицами. Мы не будем поэтому выводить здесь общее кинетическое уравнение для волн, обобщающее уравнения (10.1.2.9), (10.1.2.11) на случай магнитоактивной плазмы, и ограничимся изучением только одной группы нелинейных процессов — трехволновых процессов с участием низкочастотных волн [21, 22].

Для изучения этих процессов мы используем несколько иной метод, близкий к методу, применяемому при изучении взаимодействия между волнами в теории твердого тела.

Если интенсивность плазменных волн велика и процессы взаимодействия между волнами происходят с заметной вероятностью, то фазы волн являются, как правило, случайными функциями времени. Поэтому фазами можно не интересоваться и произвести по ним усреднение. В этих условиях колебательное состояние плазмы можно описывать в терминах чисел плазмонов, т. е. квазичастиц, сопоставляемых плазменным волнам.

Разумеется, понятие плазмона имеет смысл только в том случае, если частота плазмона  $\omega_\mu$  ( $\mu$  — сорт плазмона) значительно больше обратного времени его жизни  $\tau_\mu^{-1}$ . Это время определяется, вообще говоря, как процессами взаимодействия плазмонов друг с другом, так и процессами взаимодействия плазмонов с электронами и ионами плазмы.

Если условие  $\omega_\mu \tau_\mu \gg 1$  выполняется, то можно ввести числа плазмонов различных сортов  $N_\mu(\mathbf{k}, t)$  с определенными волновыми векторами  $\mathbf{k}$  и частотами  $\omega_\mu(\mathbf{k})$  и исследовать, как изменяются эти числа вследствие процессов взаимодействия плазмонов друг с другом и с частицами плазмы. При достаточно большой интенсивности плазменных волн первые процессы могут стать более вероятными, чем вторые. При этом условии, которое мы будем полагать выполненным, плазму можно считать состоящей из двух слабо взаимодействующих подсистем — подсистемы частиц и подсистемы волн, — которые медленно обмениваются между собой энергией. Иными словами, релаксация в плазме при этом имеет двухступенчатый характер — сперва будет устанавливаться статистическое равновесие в подсистеме плазмонов, которому будет соответствовать определенная температура, отличная, вообще говоря, от температур частиц, а затем будет происходить более медленный процесс выравнивания температур плазмонов и частиц.

При взаимодействии между плазмонами выполняются законы сохранения энергии и импульса. В частности, в процессах с участием только трех плазмонов, т. е. в процессах слияния двух плазмонов в один и расщепления одного плазмона на два ( $\mu_1 \rightleftharpoons \mu_2 + \mu_3$ ) выполняются законы сохранения

$$\omega_{\mu_1}(\mathbf{k}_1) = \omega_{\mu_2}(\mathbf{k}_2) + \omega_{\mu_3}(\mathbf{k}_3), \quad \mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3, \quad (10.4.1.1)$$

где индексы 1 и 2, 3 служат для обозначения плазмонов в начальном и конечном состояниях.

Легко написать общее выражение для изменения чисел плазмонов в каждом определенном процессе их взаимодействия. Для этого достаточно учесть, что интенсивность плазменных волн, пропорциональная числу плазмонов, может быть сколь угодно

велика, и поэтому плазмоны должны подчиняться статистике Бозе—Эйнштейна. Например, изменение числа плазмонов  $N_1 \equiv \equiv N_{\mu_1}(\mathbf{k}_1, t)$  в единицу времени, обусловленное трехплазмонными процессами  $1 \rightleftharpoons 2+3$ , можно записать в следующем общем виде:

$$(\dot{N}_1)_c = \sum_{2,3} \mathcal{L}_1\{N\},$$

$$\mathcal{L}_1\{N\} = (2\pi/\hbar) |V(1, 2, 3)|^2 \{ [(N_1 + 1) N_2 N_3 - N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1)] \delta^{(4)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) + 2 [(N_1 + 1) N_2 (N_3 + 1) - N_1 (N_2 + 1) N_3] \delta^{(4)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \}, \quad (10.4.1.2)$$

где  $V(1, 2, 3)$  — матричный элемент, соответствующий процессу распада (слияния) плазмонов  $1 \rightleftharpoons 2+3$  (здесь и далее цифры 1, 2, 3 обозначают сорт плазмона и его волновой вектор, например  $1 \equiv (\mu_1, \mathbf{k}_1)$ ; суммирование производится по сортам  $\mu_2, \mu_3$  и волновым векторам  $\mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$  плазмонов, участвующих в процессах  $1 \rightleftharpoons 2+3$ . Так как в этих процессах выполняются законы сохранения энергии и импульса (10.4.1.1), то в выражение (10.4.1.2) входят произведения  $\delta$ -функций

$$\delta^{(4)}(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \mp \mathbf{k}_3) = \delta(\hbar\omega_1 - \hbar\omega_2 \mp \hbar\omega_3) \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 \mp \mathbf{k}_3),$$

$$\Delta(\mathbf{k}) = \begin{cases} 1 & (\mathbf{k} = 0), \\ 0 & (\mathbf{k} \neq 0), \end{cases}$$

где  $\omega_1 \equiv \omega_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)$  (предполагается, что плазма находится в ящике конечного объема, благодаря чему величины волновых векторов принимают дискретные значения).

Выражение (10.4.1.2) естественно назвать *интегралом столкновений плазмонов*.

Легко убедиться, что интеграл столкновений  $(\dot{N}_1)_c$  обращается в нуль для планковской функции распределения

$$N_{\mu 0}(\mathbf{k}) = \left( \exp \left\{ \frac{\hbar\omega_{\mu}(\mathbf{k})}{T^*} \right\} - 1 \right)^{-1}, \quad (10.4.1.3)$$

где  $T^*$  — некая постоянная, которую можно интерпретировать как температуру газа плазмонов в состоянии статистического равновесия. В случае низкочастотных колебаний, для которых  $\hbar\omega_{\mu} \ll T^*$ , равновесное распределение плазмонов определяется формулой Рэля — Джинса

$$N_{\mu 0}(\mathbf{k}) = T^*/\hbar\omega_{\mu}(\mathbf{k}). \quad (10.4.1.4)$$

Покажем в заключение, что для интеграла столкновений плазмонов (10.4.1.2) справедлива H-теорема Больцмана. Воспользуемся для этого общим выражением для энтропии газа бозонов

$$S^* = \sum_1 \{ (N_1 + 1) \ln(N_1 + 1) - N_1 \ln N_1 \} \quad (10.4.1.5)$$

Дифференцируя это выражение по времени, получим

$$\dot{S}^* = \sum_1 (\dot{N}_1)_c \ln (N_1 + 1)/N_1. \quad (10.4.1.6)$$

Подставляя сюда вместо  $(\dot{N}_1)_c$  выражение (10.4.1.2), легко убедиться, что

$$\dot{S}^* = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{1,2,3} |V(1, 2, 3)|^2 \delta^{(4)}(k_1 - k_2 - k_3) \ln \frac{(N_1 + 1) N_2 N_3}{N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1)} \times \\ \times \{(N_1 + 1) N_2 N_3 - N_1 (N_2 + 1) (N_3 + 1)\}, \quad (10.4.1.7)$$

откуда немедленно следует Н-теорема:

$$\dot{S}^* \geq 0.$$

**10.4.2. Гамильтониан системы плазмонов.** Мы написали интеграл столкновений плазмонов, соответствующий процессам, в которых участвуют три плазмона. Аналогичным образом можно записать в общем виде интегралы столкновений, соответствующие процессам, в которых участвуют четыре или большее число плазмонов. В выражения для этих интегралов столкновений, помимо чисел плазмонов в различных состояниях и  $\delta$ -функций, выражающих сохранение энергии и импульса, будут входить еще матричные элементы различных процессов взаимодействия плазмонов, т. е. величины, аналогичные  $V(1, 2, 3)$ .

Матричные элементы определяются динамическими законами взаимодействия волн и их можно в принципе найти с помощью кинетических уравнений для частиц и уравнений Максвелла для полей. Мы ограничимся вычислением [23, 24] матричных элементов  $V(1, 2, 3)$ , соответствующих трехплазмонным процессам с участием низкочастотных волн (альвеновской и магнитозвуковых), способных, как известно, распространяться не только в хорошо проводящей жидкости, но и в бесстолкновительной плазме с горячими электронами и холодными ионами в области частот  $\omega \ll \omega_{Bi}$  ( $\omega_{Bi}$  — ионная циклотронная частота).

Для описания этих волн можно пользоваться (как в случае проводящей жидкости, так и в случае бесстолкновительной плазмы) гидродинамическими уравнениями

$$\left. \begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \mathbf{u} &= -v_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}} + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}], \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{u}) &= 0, \quad \text{rot } \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} [\mathbf{u} \mathbf{B}], \quad \text{div } \mathbf{B} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (10.4.2.1)$$

где  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  — плотность и гидродинамическая скорость ионов,  $\mathbf{j}$  — плотность тока и  $v_s$  — скорость звука, равная в случае неизотермической бесстолкновительной плазмы  $v_s = \sqrt{T_e/m_i}$  ( $T_e$  — температура электронов,  $m_i$  — масса иона).

Чтобы найти вероятности различных процессов взаимодействия магнитогидродинамических волн, удобно придать уравнениям движения (10.4.2.1) гамильтонову форму и выделить в явном виде гамильтониан свободных магнитогидродинамических волн и гамильтониан их взаимодействия. Перейдем с этой целью к лагранжевому описанию движения. Пусть  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{r}$  — координаты некоторого элемента плазмы в начальный момент, соответствующий состоянию равновесия, и в момент времени  $t$ . Вводя вектор смещения  $\xi = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ , который мы будем считать малым, и замечая, что

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_{0i}} - \frac{\partial \xi_j}{\partial x_{0i}} \frac{\partial}{\partial x_{0j}} + \dots,$$

приведем уравнения (10.4.2.1) с точностью до членов второго порядка по  $\xi$  к виду

$$\rho \frac{d^2 \xi}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (10.4.2.2)$$

где

$$\begin{aligned} F_i = & \frac{1}{4\pi} \left\{ (4\pi\rho v_s^2 + B^2) \frac{\partial}{\partial x_i} \operatorname{div} \xi - B_j B_l \frac{\partial^2 \xi_j}{\partial x_i \partial x_l} - B_j B_l \frac{\partial}{\partial x_j} \operatorname{div} \xi + \right. \\ & + B_j B_l \frac{\partial^2 \xi_l}{\partial x_j \partial x_l} + 2\pi\rho v_s^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{div} \xi)^2 - \left( 2\pi\rho v_s^2 + \frac{B^2}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right) - \\ & - (4\pi\rho v_s^2 + B^2) \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} \operatorname{div} \xi \right) + \frac{1}{2} B_i B_j \frac{\partial}{\partial x_j} (\operatorname{div} \xi)^2 + \\ & + B_j B_l \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \operatorname{div} \xi \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} \right) - \frac{1}{2} B_j B_l \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial \xi_m}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \right) - \\ & - B_j B_l \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \operatorname{div} \xi \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \right) + \frac{1}{2} B_i B_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial \xi_l}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \right) + \\ & \left. + B_j B_l \frac{\partial}{\partial x_m} \left( \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_l} \right) \right\} \quad (10.4.2.3) \end{aligned}$$

(индекс 0 у  $\mathbf{r}_0$  у всех равновесных величин мы здесь и в дальнейшем опускаем).

Умножая уравнение (10.4.2.2) на  $\dot{\xi}$  и интегрируя по пространству и времени, найдем гамильтониан, соответствующий гидродинамической системе уравнений:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_{\text{int}}, \\ \mathcal{H}_0 &= \frac{1}{2} \int \left\{ \rho (\dot{\xi})^2 + \left( \rho v_s^2 + \frac{B^2}{4\pi} \right) (\operatorname{div} \xi)^2 - \right. \\ & \quad \left. - \frac{B_i B_j}{2\pi} \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \operatorname{div} \xi + \frac{1}{4\pi} B_i B_j \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} \right\} d^3 r, \quad (10.4.2.4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{1}{2} \rho v_s^2 (\operatorname{div} \xi)^3 - \left( \rho v_s^2 + \frac{B^2}{4\pi} \right) \operatorname{div} \xi \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial x_i} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{4\pi} B_i B_j \operatorname{div} \xi \frac{\partial \xi_l}{\partial x_i} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_j} + \frac{1}{4\pi} B_i B_j \left[ \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} (\operatorname{div} \xi)^2 + \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \frac{\partial \xi_l}{\partial x_m} \frac{\partial \xi_m}{\partial x_l} \right] \right\} d^3 r. \quad (10.4.2.5) \end{aligned}$$

Переходя к компонентам Фурье вектора смещения

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\mathbf{k}} \xi_{\mathbf{k}} \exp \{i\mathbf{k}\mathbf{r}\}$$

( $V$  — объем плазмы), перепишем  $\mathcal{H}_0$  и  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_0 = & \frac{1}{8\pi} \sum_{\mathbf{k}} \{4\pi\rho_s^2 \xi_{\mathbf{k}} \xi_{-\mathbf{k}} + (4\pi\rho_s^2 + B^2) (\mathbf{k} \xi_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \xi_{-\mathbf{k}}) + \\ & + (\xi_{\mathbf{k}} \xi_{-\mathbf{k}}) (\mathbf{k}\mathbf{B})^2 - (\mathbf{k}\mathbf{B}) (\mathbf{B} \xi_{-\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \xi_{\mathbf{k}}) - (\mathbf{k}\mathbf{B}) (\mathbf{B} \xi_{\mathbf{k}}) (\mathbf{k} \xi_{-\mathbf{k}})\}, \end{aligned} \quad (10.4.2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} = & \frac{i}{24\pi\sqrt{V}} \sum_{1,2,3} \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) \{ (4\pi\rho_s^2 + B^2) [(\mathbf{k}_1 \xi_1) (\mathbf{k}_2 \xi_3) \times \\ & \times (\mathbf{k}_3 \xi_2) + (\mathbf{k}_2 \xi_2) (\mathbf{k}_1 \xi_3) (\mathbf{k}_3 \xi_1) + (\mathbf{k}_3 \xi_3) (\mathbf{k}_1 \xi_2) (\mathbf{k}_2 \xi_1)] - \\ & - 4\pi\rho_s^2 (\mathbf{k}_1 \xi_1) (\mathbf{k}_2 \xi_2) (\mathbf{k}_3 \xi_3) + [(\mathbf{k}_1 \xi_1) (\xi_2 \xi_3) (\mathbf{k}_2 \mathbf{B}) (\mathbf{k}_3 \mathbf{B}) + \\ & + (\mathbf{k}_2 \xi_2) (\xi_1 \xi_3) (\mathbf{k}_1 \mathbf{B}) (\mathbf{k}_3 \mathbf{B}) + (\mathbf{k}_3 \xi_3) (\xi_1 \xi_2) (\mathbf{k}_1 \mathbf{B}) (\mathbf{k}_2 \mathbf{B})] - \\ & - (\mathbf{k}_1 \mathbf{B}) (\xi_1 \mathbf{B}) [(\mathbf{k}_2 \xi_3) (\mathbf{k}_3 \xi_3) + (\mathbf{k}_2 \xi_3) (\mathbf{k}_3 \xi_2)] - \\ & - (\mathbf{k}_2 \mathbf{B}) (\xi_2 \mathbf{B}) [(\mathbf{k}_1 \xi_1) (\mathbf{k}_3 \xi_3) + (\mathbf{k}_1 \xi_3) (\mathbf{k}_3 \xi_1)] - \\ & - (\mathbf{k}_3 \mathbf{B}) (\xi_3 \mathbf{B}) [(\mathbf{k}_1 \xi_1) (\mathbf{k}_2 \xi_2) + (\mathbf{k}_1 \xi_2) (\mathbf{k}_2 \xi_1)], \end{aligned} \quad (10.4.2.7)$$

где индексы 1, 2, 3 у смещений  $\xi$  соответствуют волновым векторам  $\mathbf{k}_1$ ,  $\mathbf{k}_2$ ,  $\mathbf{k}_3$ .

Легко убедиться, что гамильтониан  $\mathcal{H}_0$  представляет собой гамильтониан свободных магнитогидродинамических волн — альвеновской и быстрой и медленной магнитозвуковых. В самом деле, диагонализуем квадратичную относительно переменных  $\xi$  форму (10.4.2.6). Представим для этого вектор  $\xi_{\mathbf{k}}$  в виде

$$\xi_{\mathbf{k}} = \xi_{\mathbf{k}}^{(a)} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)} + \xi_{\mathbf{k}}^{(f)} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(f)} + \xi_{\mathbf{k}}^{(s)} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(s)}, \quad (10.4.2.8)$$

где  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)}$ ,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(f)}$ ,  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(s)}$  — три взаимно перпендикулярных единичных вектора:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(a)} &= \frac{|\mathbf{k}\mathbf{B}|}{x_{\perp} k B}, \quad \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(f)} = \frac{\beta \mathbf{k}}{x_{\perp} k} + \left( \alpha - \beta \frac{x_{\parallel}}{x_{\perp}} \right) \frac{\mathbf{B}}{B}, \\ \mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(s)} &= \frac{\alpha}{x_{\perp}} \frac{\mathbf{k}}{k} - \left( \beta + \alpha \frac{x_{\parallel}}{x_{\perp}} \right) \frac{\mathbf{B}}{B}, \end{aligned} \right\} \quad (10.4.2.9)$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - Q}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + Q}, \quad x_{\parallel} = \frac{\mathbf{k}\mathbf{B}}{k B}, \quad x_{\perp} = \sqrt{1 - x_{\parallel}^2},$$

$$Q = [\rho_s^2 (x_{\perp}^2 - x_{\parallel}^2) + B^2/4\pi] \{ [\rho_s^2 (x_{\perp}^2 - x_{\parallel}^2) + B^2/4\pi]^2 + 4(\rho_s^2 x_{\parallel} x_{\perp})^2 \}^{-1/2}.$$

В переменных  $\xi_{\mathbf{k}}^{(\mu)}$  ( $\mu = a, f, s$ ) гамильтониан (10.4.2.6) принимает вид

$$\mathcal{H}_0 = 1/2\rho \sum_{\mathbf{k}, \mu} [\dot{\xi}_{\mathbf{k}}^{(\mu)} \dot{\xi}_{-\mathbf{k}}^{(\mu)} + \omega_{\mu}^2(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}^{(\mu)} \xi_{-\mathbf{k}}^{(\mu)}], \quad (10.4.2.10)$$

где  $\omega_a$  — частота альвеновской волны,

$$\omega_a(\mathbf{k}) = kv_a x_{\parallel}, \quad v_a = B/\sqrt{4\pi\rho} \quad (10.4.2.11)$$

и  $\omega_f, \omega_s$  — частоты быстрой и медленной магнитозвуковых волн,

$$\left. \begin{aligned} \omega_f &= kv_+, \quad \omega_s = kv_-, \\ v_{\pm} &= 1/2 \sqrt{v_a^2 + v_s^2 + 2v_a v_s x_{\parallel}} \pm 1/2 \sqrt{v_a^2 + v_s^2 - 2v_a v_s x_{\parallel}}. \end{aligned} \right\} \quad (10.4.2.12)$$

Таким образом, переменные  $\xi_{\mathbf{k}}^{(\mu)}$  представляют собой амплитуды альвеновской ( $\mu = a$ ), быстрой ( $\mu = f$ ) и медленной ( $\mu = s$ ) магнитозвуковых волн, а векторы  $\mathbf{e}_{\mathbf{k}}^{(\mu)}$  — векторы поляризации соответствующих волн.

Кубичную по амплитудам волн часть полного гамильтониана  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  следует, очевидно, рассматривать как гамильтониан взаимодействия между магнитогидродинамическими волнами. В нормальных координатах  $\xi_{\mathbf{k}}^{(\mu)}$  гамильтониан взаимодействия (10.4.2.7) принимает вид

$$\mathcal{H}_{\text{int}} = \frac{i}{8\pi\sqrt{V}} \sum_{1,2,3} \xi_1 \xi_2 \xi_3 F(1, 2, 3) B^2 k_1 k_2 k_3 \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3), \quad (10.4.2.13)$$

где

$$\begin{aligned} F(1, 2, 3) = & (1 + v_s^2/v_a^2) [(\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_1)(\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_2) + (\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2)(\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_3)(\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_1) + \\ & + (\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_2)(\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_1)] - (v_s^2/v_a^2) (\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_1)(\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2)(\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_3) + \\ & + [(\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_1)(\mathbf{x}_2 \mathbf{n})(\mathbf{x}_3 \mathbf{n})(\mathbf{e}_2 \mathbf{e}_3) + (\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2)(\mathbf{x}_1 \mathbf{n})(\mathbf{x}_3 \mathbf{n})(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) + \\ & + (\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_3)(\mathbf{x}_1 \mathbf{n})(\mathbf{x}_2 \mathbf{n})(\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2)] - (\mathbf{x}_1 \mathbf{n})(\mathbf{e}_1 \mathbf{n}) [(\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2)(\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_3) + \\ & + (\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_3)(\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_2)] - (\mathbf{x}_2 \mathbf{n})(\mathbf{e}_2 \mathbf{n}) [(\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_1)(\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_3) + (\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_3)(\mathbf{x}_3 \mathbf{e}_1)] - \\ & - (\mathbf{x}_3 \mathbf{n})(\mathbf{e}_3 \mathbf{n}) [(\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_1)(\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_2) + (\mathbf{x}_1 \mathbf{e}_2)(\mathbf{x}_2 \mathbf{e}_1)], \end{aligned} \quad (10.4.2.14)$$

$\mathbf{n} = \mathbf{B}/B$ ,  $\mathbf{x} = \mathbf{k}/k$  и индексы 1, 2, 3 служат для обозначения как волнового вектора, так и сорта плазмона (например,  $\mathbf{e}_1 \equiv \mathbf{e}_{\mathbf{k}_1}^{(p_1)}$ ,  $\xi_1 \equiv \xi_{\mathbf{k}_1}^{(p_1)}$ ). Заметим, что если все три участвующих в процессе волны являются альвеновскими, то, согласно (10.4.2.14),  $F(1, 2, 3) = 0$ . Это соответствует результатам работы [25] о нераспадности альвеновской волны.

**10.4.3. Вероятности трехплазменных процессов.** Гамильтониан взаимодействия  $\mathcal{H}_{\text{int}}$  можно трактовать как возмущение, вызывающее переходы в системе магнитогидродинамических волн. Чтобы найти вероятности этих переходов, проще всего воспользо-

ваться методом квантовой теории поля, перейдя от классического гамильтониана свободных волн (10.4.2.10) к соответствующему квантовому гамильтониану. Для этого следует ввести операторы рождения  $c_{\mathbf{k}}^{(\mu)+}$  и уничтожения  $c_{\mathbf{k}}^{(\mu)}$  плазмона сорта  $\mu$  ( $\mu = a, f, s$ ) с волновым вектором  $\mathbf{k}$ , вида

$$\left. \begin{aligned} c_{\mathbf{k}}^{(\mu)} &= (2\hbar\omega_{\mu}(\mathbf{k}))^{-1/2} \rho^{1/2} (\omega_{\mu}(\mathbf{k}) \xi_{\mathbf{k}}^{(\mu)} + i\dot{\xi}_{-\mathbf{k}}^{(\mu)}), \\ c_{\mathbf{k}}^{(\mu)+} &= (2\hbar\omega_{\mu}(\mathbf{k}))^{-1/2} \rho^{1/2} (\omega_{\mu}(\mathbf{k}) \xi_{-\mathbf{k}}^{(\mu)} - i\dot{\xi}_{\mathbf{k}}^{(\mu)}), \end{aligned} \right\} \quad (10.4.3.1)$$

удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям бозевских операторов.

Выразим операторы смещения  $\xi_{\mathbf{k}}^{(\mu)}$  через операторы рождения и уничтожения плазмонов:

$$\xi_{\mathbf{k}}^{(\mu)} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\rho\omega_{\mu}(\mathbf{k})}} (c_{\mathbf{k}}^{(\mu)} + c_{-\mathbf{k}}^{(\mu)+}). \quad (10.4.3.2)$$

Подставляя это выражение в (10.4.2.10), представим гамильтониан  $\mathcal{H}_0$  в виде суммы энергий независимых осцилляторов, соответствующих плазмонам различных сортов с различными значениями волнового вектора:

$$\mathcal{H}_0 = \sum_{\mathbf{k}, \mu} \hbar\omega_{\mu}(\mathbf{k}) (N_{\mu}(\mathbf{k}) + 1/2), \quad N_{\mu}(\mathbf{k}) \equiv c_{\mathbf{k}}^{(\mu)+} c_{\mathbf{k}}^{(\mu)}. \quad (10.4.3.3)$$

Гамильтониан взаимодействия плазмонов (10.4.2.13), выраженный через операторы рождения и уничтожения плазмонов, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\text{int}} &= i \sum_{1,2,3} V(1, 2, 3) \{ \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) c_1 c_2^+ c_3^+ + \\ &+ \Delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2 + \mathbf{k}_3) c_1^+ c_2 c_3^+ + \Delta(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) c_1^+ c_2^+ c_3 \} + \text{э. с.}, \end{aligned} \quad (10.4.3.4)$$

где

$$V(1, 2, 3) = \frac{v_2^2 \hbar^{3/2}}{4\sqrt{2}\rho V} \frac{k_1 k_2 k_3}{v_{\omega_1 \omega_2 \omega_3}} F(1, 2, 3), \quad (10.4.3.5)$$

$F(1, 2, 3)$  — функция, определяемая (10.4.2.14),  $c_1 \equiv c_{\mathbf{k}_1}^{(\mu_1)}$ ,  $\omega_1 \equiv \omega_{\mu_1}(\mathbf{k}_1)$  и э. с. означает эрмитово сопряженный оператор. Учитывая, что у операторов  $c_{\mathbf{k}}^{(\mu)}$ ,  $c_{\mathbf{k}}^{(\mu)+}$  отличны от нуля лишь матричные элементы, соответствующие изменению на единицу числа плазмонов

$$\begin{aligned} \langle N_{\mu}(\mathbf{k}) - 1 | c_{\mathbf{k}}^{(\mu)} | N_{\mu}(\mathbf{k}) \rangle &= \sqrt{N_{\mu}(\mathbf{k})} \exp\{-i\omega_{\mu}(\mathbf{k})t\}, \\ \langle N_{\mu}(\mathbf{k}) + 1 | c_{\mathbf{k}}^{(\mu)+} | N_{\mu}(\mathbf{k}) \rangle &= \sqrt{N_{\mu}(\mathbf{k}) + 1} \exp\{i\omega_{\mu}(\mathbf{k})t\}, \end{aligned}$$

мы видим, что функции  $V(1, 2, 3)$  как раз являются амплитудами трехплазменных процессов и, следовательно, совпадают с матричными элементами, входящими в выражение (10.4.1.2) для интеграла столкновений.

Мы выпишем сразу окончательные выражения для интегралов столкновений плазмонов, причем ограничимся случаем, когда газокINETическое давление плазмы  $p$  мало по сравнению с магнитным давлением, т. е.  $p \ll B^2/8\pi$  [23, 24]. В этом случае наиболее существенными оказываются следующие процессы взаимодействия плазмонов:

$$a \rightleftharpoons a + s, \quad a \rightleftharpoons f + s, \quad f \rightleftharpoons f + s, \quad f \rightleftharpoons a + s$$

и интегралы столкновений имеют вид

$$\begin{aligned} (\dot{N}_{a1})_c &= 4\pi \sum_{2,3} \{ w_{a \rightarrow a+s} (N_{a2} N_{s3} - N_{a1} N_{s3} - N_{a1} N_{a2}) + \\ &\quad + w_{a+s \rightarrow a} (N_{a1} N_{a2} + N_{a2} N_{s3} - N_{a1} N_{s3}) + \\ &\quad + w_{a \rightarrow f+s} (N_{f2} N_{s3} - N_{a1} N_{s3} - N_{a1} N_{f2}) + \\ &\quad + w_{a+s \rightarrow f} (N_{a1} N_{f2} + N_{f2} N_{s3} - N_{a1} N_{s3}) \}, \\ (\dot{N}_{f2})_c &= 4\pi \sum_{1,3} \{ w_{f \rightarrow a+s} (N_{a1} N_{s3} - N_{a1} N_{f2} - N_{f2} N_{s3}) + \\ &\quad + w_{s+f \rightarrow a} (N_{a1} N_{s3} + N_{a1} N_{f2} - N_{f2} N_{s3}) + \\ &\quad + w_{f \rightarrow s+f} (N_{f1} N_{s2} - N_{f2} N_{f1} - N_{f2} N_{s1}) + \\ &\quad + w_{f+s \rightarrow f} (N_{f1} N_{s3} + N_{f1} N_{f2} - N_{f2} N_{s3}) \}, \\ (\dot{N}_{s3})_c &= 4\pi \sum_{1,2} \{ 2w_{a+s \rightarrow a} (N_{a1} N_{a2} + N_{s3} N_{a2} - N_{a1} N_{s3}) + \\ &\quad + 2w_{f+s \rightarrow f} (N_{f1} N_{f2} + N_{s3} N_{f2} - N_{s3} N_{f1}) \}, \end{aligned} \quad (10.4.3.6)$$

где

$$\begin{aligned} w_{a \rightarrow a+s} &= M_1 \delta^{(4)}(k_1^a - k_2^a - k_3^s), \\ w_{a+s \rightarrow a} &= M_1 \delta^{(4)}(k_1^a - k_2^a + k_3^s), \\ w_{a \rightarrow f+s} &= M_2 \delta^{(4)}(k_1^a - k_2^f - k_3^s), \\ w_{a+s \rightarrow f} &= M_2 \delta^{(4)}(k_1^a - k_2^f + k_3^s), \\ w_{f \rightarrow f+s} &= M_3 \delta^{(4)}(k_1^f - k_2^f - k_3^s), \\ w_{f+s \rightarrow f} &= M_3 \delta^{(4)}(k_1^f - k_2^f + k_3^s), \end{aligned} \quad (10.4.3.7)$$

$N_{\mu 1} \equiv N_{\mu}(\mathbf{k}_1)$ , а  $k^{\mu}$  — волновой вектор и частота плазмона сорта  $\mu$ .

Здесь

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= A x_{1\perp}^2 x_{2\perp}^2 x_{3\perp}^2 (x_{1\perp} x_{2\perp})^{-2} (|\mathbf{x}_1 \mathbf{n}| |\mathbf{x}_2 \mathbf{n}|)^2, \\ M_2 &= A x_{1\perp}^2 x_{2\perp}^2 x_{1\perp}^{-2} ((\mathbf{x}_3 [\mathbf{x}_1 \mathbf{n}]) + x_{2\perp} x_{3\perp} x_{2\perp}^{-2} (\mathbf{x}_2 [\mathbf{x}_1 \mathbf{n}]))^2, \\ M_3 &= A x_{3\perp}^2 (x_{1\perp} x_{2\perp})^{-2} \{1 - x_{1\perp}^2 x_{2\perp} (\mathbf{x}_2 \mathbf{x}_3) - x_{2\perp}^2 x_{1\perp} (\mathbf{x}_1 \mathbf{x}_3) - \\ &\quad - x_{1\perp} x_{2\perp} x_{3\perp} [\mathbf{x}_1 \mathbf{n}] |\mathbf{x}_2 \mathbf{n}]\}^2, \\ A &= \frac{v_A^4 \hbar^2}{32 V \rho} \frac{k_1^2 k_2^2 k_3^2}{\omega_a(\mathbf{k}_1) \omega_f(\mathbf{k}_2) \omega_s(\mathbf{k}_3)}. \end{aligned} \right\} (10.4.3.8)$$

**10.4.4. Времена жизни плазмонов.** Определим теперь времена жизни плазмонов, обусловленные их взаимодействием друг с другом. Рассмотрим интеграл столкновений для плазмонов определенного сорта  $\mu$ , обладающих заданным волновым вектором  $\mathbf{k}$ , и будем считать, что все плазмоны других сортов, а также плазмоны рассматриваемого сорта с отличными от  $\mathbf{k}$  волновыми векторами находятся в состоянии статистического равновесия. Что же касается числа плазмонов  $N_\mu(\mathbf{k})$ , то мы предположим, что оно мало отличается от равновесного значения,  $N_\mu(\mathbf{k}) = N_{\mu 0}(\mathbf{k}) + \Delta N_\mu(\mathbf{k})$ , где  $\Delta N_\mu \ll N_{\mu 0}$ . Учитывая, что интеграл столкновений обращается в нуль при равновесном распределении плазмонов, мы видим, что в рассматриваемом случае он будет пропорционален  $\Delta N_\mu$ ,

$$(\dot{N}_\mu(\mathbf{k}))_0 = \left( \frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta N_\mu(\mathbf{k})} \right)_0 \Delta N_\mu(\mathbf{k}), \quad (10.4.4.1)$$

где  $(\delta \mathcal{L}_\mu / \delta N_\mu)_0$  — значение функциональной производной от  $\mathcal{L}_\mu$  по  $N_\mu$  при  $N_\mu = N_{\mu 0}$ .

Очевидно, что чем больше будет величина  $(-\delta \mathcal{L}_\mu / \delta N_\mu(\mathbf{k}))_0$ , тем быстрее распределение плазмонов сорта  $\mu$  будет приближаться к равновесному вследствие процессов взаимодействия плазмонов друг с другом. Поэтому естественно рассматривать величину

$$\tau_\mu(\mathbf{k}) = - \left( \frac{\delta \mathcal{L}_\mu}{\delta N_\mu(\mathbf{k})} \right)_0^{-1} \quad (10.4.4.2)$$

как время жизни плазмона сорта  $\mu$  с волновым вектором  $\mathbf{k}$  относительно трехплазмонных процессов.

Усреднив величину  $\tau_\mu^{-1}(\mathbf{k})$  по равновесному распределению плазмонов, получим среднее обратное время жизни плазмонов сорта  $\mu$  по отношению к их взаимодействию друг с другом

$$\frac{1}{\tau_\mu} = \frac{\int \tau_\mu^{-1}(\mathbf{k}) \hbar \omega N_{\mu 0}(\mathbf{k}) d^3 k}{\int \hbar \omega N_{\mu 0}(\mathbf{k}) d^3 k}. \quad (10.4.4.3)$$

Интегрирование здесь должно производиться по объемам в пространстве волновых векторов, в которых плазмоны могут существовать и взаимодействовать друг с другом. Объемы эти, определяемые условием малости затухания плазмонов, а также законами сохранения энергии и импульса при взаимодействии плазмонов, оказываются равными  $V_k \approx \omega_{Bi}^3 / 6\pi^2 v_a^3$ .

Можно показать, что средние значения обратных времен жизни магнитогидродинамических волн равны по порядку величины

$$1/\tau_a \sim 1/\tau_f \sim \omega_{Bi} W / n_i T_e, \quad 1/\tau_s \sim \omega_{Bi} (W / n_i T_e) (v_s / v_a)^2, \quad (10.4.4.4)$$

где  $W = T^* V_k$  — энергия волн и  $n_i$  — плотность ионов. Заметим, что

$$\tau_a \sim \tau_f \ll \tau_s;$$

поэтому плазмоны медленного звука приходят в состояние равновесия за более длительное время, чем альвеновские плазмоны и плазмоны быстрого звука.

Подчеркнем, что стационарное распределение плазмонов, устанавливающееся благодаря их взаимодействию друг с другом, является распределением Рэля—Джинса, тогда как стационарное распределение ионно-звуковых волн, исследованное в § 10.3, существенно отличается от рэлеевского. Это связано с совершенно различными характерами рассматриваемой системы (замкнутая система, представляющая собой газ взаимодействующих друг с другом плазмонов) и системы, исследованной в § 10.3 (незамкнутая система, состоящая из ионно-звуковых волн, взаимодействующих как с инжектируемым извне пучком электронов, так и с ионами плазмы).

Заметим в заключение, что времена  $\tau_p$  имеют реальный смысл времен жизни плазмонов только в том случае, если они значительно меньше времен жизни плазмонов, обусловленных их взаимодействием с частицами плазмы. С другой стороны, эти времена должны быть велики по сравнению с обратной частотой плазмонов.

Если исходить из линейной теории, в которой декремент затухания плазмонов, обусловленного взаимодействием с частицами плазмы, определяется формулой

$$\gamma_{p0} \sim \omega_{Bi} \frac{v_s}{v_a} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}}, \quad (10.4.4.5)$$

то мы получим следующее условие применимости подхода к магнитогидродинамическим волнам как газу взаимодействующих только друг с другом квазичастиц (плазмонов):

$$\sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{v_s}{v_a} \ll \frac{W}{n_i T_e} \ll 1. \quad (10.4.4.6)$$

Линейной теорией затухания волн можно пользоваться, однако, только при выполнении неравенства

$$\frac{W}{n_i T_e} \ll \frac{v_s \gamma_C}{v_a \omega_{Be}}, \quad (10.4.4.7)$$

где  $\omega_{Be}$  — электронная циклотронная частота и  $\gamma_C = \frac{2\pi e^4 n_e L}{m_e^2 v_e^3}$  — частота кулоновских столкновений ( $L$  — кулоновский логарифм).

Так как уровень энергии плазмонов, получаемый из (10.4.4.6), превосходит предел (10.4.4.7), то следует пользоваться нелинейной теорией затухания волн, в которой затухание меньше, чем в линейной теории, и декремент черенковского затухания определяется вместо (10.4.4.5) формулой [26]

$$\gamma_{\mu} \sim \gamma_{\mu 0} \frac{\gamma_C}{\omega_{Be}} \left( \frac{W}{n_i T_e} \right)^{-1} \quad (10.4.4.8)$$

Использование этой формулы приводит уже не к (10.4.4.6), а к следующим условиям применимости рассмотренного подхода:

$$1 \gg \left( \frac{W}{n_i T_e} \right)^2 \gg \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} \frac{\gamma_C}{\omega_{Be}}. \quad (10.4.4.9)$$

## § 11.1. Флуктуационно-диссипативное соотношение

**11.1.1. Пространственно-временные корреляционные функции.** Как известно, любая величина, характеризующая макроскопическую систему, может испытывать отклонения от своего среднего значения. Эти отклонения, называемые флуктуациями физической величины, определяются температурой и другими параметрами системы \*).

Для описания флуктуаций вводятся корреляционные функции, или корреляторы, определяемые как средние значения произведений флуктуаций одной или нескольких величин в различных точках пространства в различные моменты времени. При этом усреднение производится как по квантовомеханическому состоянию системы, так и по статистическому распределению ее различных квантовомеханических состояний. Если система пространственно однородна и исследуются ее стационарные состояния, то квадратичная пространственно-временная корреляционная функция будет зависеть только от абсолютного значения интервала времени и относительного расстояния между точками, в которых рассматриваются флуктуации. Если для определенности использовать векторную непрерывно распределенную в пространстве величину  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  (например, плотность тока в системе) и считать, что ее среднее значение равно нулю, то пространственно-временная корреляционная функция компонент  $j_i(\mathbf{r}, t)$  и  $j_j(\mathbf{r}, t)$  вектора  $\mathbf{j}$  определяется как

$$\langle j_i(\mathbf{r}_1, t_1) j_j(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle \equiv \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}t}, \quad (11.1.1.1)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $t = t_2 - t_1$  и угловые скобки обозначают усреднение в указанном выше смысле.

Введем *спектральное представление* корреляционной функции, т. е. пространственно-временную компоненту Фурье функции  $\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}t}$ :

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \int \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}t} \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d^3r dt. \quad (11.1.1.2)$$

\*) Общая теория флуктуаций изложена в [1-4].

Эту величину мы будем далее называть *спектральным распределением* или *спектральной плотностью флуктуаций* (ее называют также корреляционной функцией в пространстве  $(\mathbf{k}, \omega)$ ).

Определив преобразования Фурье с помощью соотношений

$$A(\mathbf{k}, \omega) = \int A(\mathbf{r}, t) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d^3r dt,$$

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int A(\mathbf{k}, \omega) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d^3k d\omega, \quad (11.1.1.3)$$

легко видеть, что среднее значение произведения компонент Фурье флуктуирующих величин связано со спектральным распределением флуктуаций соотношением

$$\langle j_i^\dagger(\mathbf{k}, \omega) j_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = (2\pi)^4 \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \quad (11.1.1.4)$$

где символ  $\dagger$  означает операцию эрмитова сопряжения.

Среднее значение произведения флуктуаций каких-либо величин в различных точках пространства в один и тот же момент времени называется *пространственной корреляционной функцией*

$$\langle j_i(\mathbf{r}_1, t) j_j(\mathbf{r}_2, t) \rangle \equiv \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{r}}. \quad (11.1.1.5)$$

Нетрудно проверить, что компонента Фурье от пространственной корреляционной функции представляет собой интеграл по всем частотам от спектрального распределения флуктуаций, т. е.

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} d\omega. \quad (11.1.1.6)$$

Среднее значение произведения флуктуаций каких-либо величин в одной и той же точке пространства в различные моменты времени называется *временной корреляционной функцией* или *автокорреляционной функцией*

$$\langle j_i(\mathbf{r}, t_1) j_j(\mathbf{r}, t_2) \rangle \equiv \langle j_i j_j \rangle_t. \quad (11.1.1.7)$$

Очевидно, справедливо равенство

$$\langle j_i j_j \rangle_{\omega} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} d^3k.$$

Аналогичным образом можно ввести корреляционные функции более высоких порядков, но мы ограничимся здесь рассмотрением только квадратичных корреляционных функций.

**11.1.2. Спектральное распределение флуктуаций и диссипация энергии.** Покажем теперь, что спектральное распределение флуктуаций определяется диссипативными свойствами среды.

Вычислим с этой целью среднее значение произведения  $j_i^\dagger(\mathbf{k}, \omega)$  и  $j_j(\mathbf{k}, \omega)$ .

Если система находится в определенном стационарном состоянии  $n$ , то квантовомеханическое среднее определяется как диагональный матричный элемент оператора  $j_i^\dagger(\mathbf{k}, \omega)j_j(\mathbf{k}', \omega')$ :

$$(j_i^\dagger(\mathbf{k}, \omega)j_j(\mathbf{k}', \omega'))_{nn} = \sum_m j_i^\dagger(\mathbf{k}, \omega)_{nm}j_j(\mathbf{k}', \omega')_{mn}, \quad (11.1.2.1)$$

где суммирование производится по всем состояниям системы. Входящие сюда матричные элементы оператора  $\mathbf{j}_{k\omega}$  между стационарными состояниями имеют следующую структуру:

$$(\mathbf{j}_{k\omega})_{nm} = 2\pi(\mathbf{j}_{k\omega})_{nm}\delta(\omega - \omega_{nm}), \quad (11.1.2.2)$$

где  $\omega_{nm} = \frac{1}{\hbar}(E_n - E_m)$  — частота перехода между состояниями с энергиями  $E_n$  и  $E_m$ ,  $(\mathbf{j}_{k\omega})_{nm}$  — величины, не содержащие  $\delta$ -функций. Подставляя это выражение, а также аналогичное выражение для  $(\mathbf{j}_{k\omega}^\dagger)_{nm}$  в (11.1.2.1) и производя статистическое усреднение, получим

$$\langle j_i^\dagger(\mathbf{k}, \omega)j_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = 2\pi \langle j_i^\dagger(\mathbf{k})j_j(\mathbf{k}') \rangle_\omega \delta(\omega - \omega'), \quad (11.1.2.3)$$

$$\langle j_i^\dagger(\mathbf{k})j_j(\mathbf{k}') \rangle_\omega = 2\pi \sum_{mn} f(E_n) j_i^\dagger(\mathbf{k})_{nm}j_j(\mathbf{k}')_{mn} \delta(\omega - \omega_{nm}), \quad (11.1.2.4)$$

где  $f(E_n)$  — функция статистического распределения различных квантовомеханических состояний системы, определяемая в случае равновесного их распределения формулой Гиббса

$$f(E_n) = \exp\left(\frac{\mathcal{F} - E_n}{T}\right), \quad (11.1.2.5)$$

где  $\mathcal{F}$  — свободная энергия,  $T$  — температура системы.

Свяжем теперь корреляционную функцию (11.1.2.4) с энергией, поглощаемой системой в результате диссипации.

Предположим, что на систему действует периодическое возмущение, энергия которого  $\mathcal{V}$  пропорциональна  $\mathbf{j}$ . Если считать для определенности, что  $\mathbf{j}$  — плотность электрического тока, то  $\mathcal{V}$  имеет вид

$$\mathcal{V} = - \int \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3r, \quad (11.1.2.6)$$

где  $\mathbf{A}$  — векторный потенциал возмущающего поля.

Переходя к пространственным компонентам Фурье  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{j}$ , представим энергию возмущения в виде

$$\mathcal{V} = -1/2 \operatorname{Re} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) \mathbf{j}_{\mathbf{k}}^\dagger(t), \quad (11.1.2.7)$$

где  $\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t)$  — по определению гармоническая функция времени,

$$\mathbf{A}_{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{A}_{\mathbf{k}\omega} \exp(-i\omega t). \quad (11.1.2.8)$$

Под влиянием возмущения, задаваемого (11.1.2.6), возможны переходы между различными состояниями системы. Используя (11.1.2.7), нетрудно вычислить матричный элемент энергии возмущения, соответствующий переходу  $n \rightarrow m$ :

$$\mathcal{V}_{nm} = -\pi \sum_{\mathbf{k}} \{A_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{j}_{\mathbf{k}}^{\dagger})_{nm} \delta(\omega - \omega_{nm}) + A_{\mathbf{k}\omega}^*(\mathbf{j}_{\mathbf{k}})_{nm} \delta(\omega + \omega_{nm})\}. \quad (11.1.2.9)$$

Отсюда следует, что вероятность этого перехода в единицу времени равна

$$w_{nm} = \frac{\pi}{2\hbar^2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} A_i(\mathbf{k}, \omega) A_j^*(\mathbf{k}', \omega) \{j_i^{\dagger}(\mathbf{k})_{nm} j_j(\mathbf{k}')_{mn} \delta(\omega - \omega_{nm}) + j_i^{\dagger}(\mathbf{k})_{mn} j_j(\mathbf{k}')_{nm} \delta(\omega + \omega_{nm})\}. \quad (11.1.2.10)$$

При каждом таком переходе система поглощает энергию  $\hbar\omega_{nm}$ , источником которой является внешнее возмущение. Поэтому энергия, поглощаемая системой в единицу времени, равна

$$Q_n = \sum_m w_{nm} \hbar\omega_{nm}. \quad (11.1.2.11)$$

Среднее значение поглощаемой энергии находим, усредняя последнее соотношение по всем стационарным состояниям  $n$ :

$$Q = \sum_{nn} f(E_n) w_{nm} \hbar\omega_{nm}. \quad (11.1.2.12)$$

Ограничиваясь в дальнейшем рассмотрении равновесных состояний, мы должны вместо  $f(E_n)$  воспользоваться распределением Гиббса (11.1.2.5). Подставляя формулу (11.1.2.10) в (11.1.2.12) и переставляя в одном из слагаемых индексы суммирования  $n$  и  $m$ , получим

$$Q = \frac{\pi\omega}{2\hbar} \left( \exp\left(\frac{\hbar\omega}{T}\right) - 1 \right) \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} A_i(\mathbf{k}, \omega) A_j^*(\mathbf{k}', \omega) \times \\ \times \sum_{mn} \exp\left(\frac{\mathcal{E} - E_n}{T}\right) j_i^{\dagger}(\mathbf{k})_{nm} j_j(\mathbf{k}')_{mn} \delta(\omega - \omega_{nm}). \quad (11.1.2.13)$$

Сравнивая это выражение с (11.1.2.4), находим следующее соотношение между средней энергией, поглощаемой системой в единицу времени, и корреляционной функцией флуктуирующих величин

$$Q = \frac{\omega}{4\hbar} (\exp(\hbar\omega/T) - 1) \sum_{\mathbf{k}\mathbf{k}'} A_i(\mathbf{k}, \omega) A_j(\mathbf{k}', \omega) \langle j_i^{\dagger}(\mathbf{k}) j_j(\mathbf{k}') \rangle_{\omega}. \quad (11.1.2.14)$$

Кроме того, поглощаемую энергию  $Q$  можно связать с макроскопическими параметрами, характеризующими диссипативные свойства системы.

В отсутствие внешнего возмущения среднее значение величины  $\mathbf{j}$  равно нулю ( $\langle \mathbf{j} \rangle = 0$ ). Под влиянием возмущения с энергией (11.1.2.6) возникает отличное от нуля среднее значение  $\mathbf{j}$ , пропорциональное величине возмущающего потенциала  $A$ :

$$\mathbf{j}_i = \hat{\alpha}_{i,j} A_j, \quad (11.1.2.15)$$

где  $\hat{\alpha}_{i,j}$  — некоторый линейный пространственно-временной интегральный оператор. Для компонент Фурье величин  $\mathbf{j}$  и  $A$ , эту связь можно представить в виде

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{i,j}(\mathbf{k}, \omega) A_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (11.1.2.16)$$

где  $\alpha_{i,j}(\mathbf{k}, \omega)$  — некоторый тензор, характеризующий диссипативные свойства системы. Мы будем называть его *тензором отклика*.

Процессы, для которых справедливо соотношение (11.1.2.15), обычно называют линейными диссипативными процессами. Поглощаемая энергия  $Q$  в случае линейного диссипативного процесса непосредственно выражается через коэффициенты  $\alpha_{i,j}$ . Действительно, изменение средней внутренней энергии системы равно среднему значению частной производной по времени от гамильтониана системы. Так как в гамильтониане явно зависит от времени только энергия возмущения  $\mathcal{U}$ , то для изменения средней внутренней энергии системы имеем

$$\frac{\partial U}{\partial t} = - \int A(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3r. \quad (11.1.2.17)$$

Переходя здесь к компонентам Фурье и используя (11.1.2.15), получим после усреднения по времени следующее выражение для средней энергии, поглощаемой в единицу времени:

$$Q = \frac{1}{4} i \omega \sum_{\mathbf{k}} (\alpha_{i,j}^* - \alpha_{j,i}) A_i(\mathbf{k}, \omega) A_j^*(\mathbf{k}, \omega). \quad (11.1.2.18)$$

Его сравнение с (11.1.2.14) дает

$$\langle j_i^\dagger(\mathbf{k}) j_j(\mathbf{k}') \rangle_\omega = \frac{8\pi^3 \hbar}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} i (\alpha_{i,j}^* - \alpha_{j,i}) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}'). \quad (11.1.2.19)$$

Найденное соотношение устанавливает связь между корреляционной функцией флуктуирующих величин и диссипативными свойствами системы, характеризуемыми коэффициентами  $\alpha_{i,j}$ .

Учитывая (11.1.1.6) и (11.1.2.3), получим отсюда следующую формулу для спектрального распределения флуктуаций плотности тока:

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\hbar}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} i \{ \alpha_{i,j}^*(\mathbf{k}, \omega) - \alpha_{j,i}(\mathbf{k}, \omega) \}. \quad (11.1.2.20)$$

Это важное соотношение, носящее название *флуктуационно-диссипативного соотношения*, полностью определяет флуктуации в равновесных системах \*).

Для нахождения с помощью флуктуационно-диссипативного соотношения флуктуаций какой-либо величины  $\mathbf{j}$  нужно прежде всего, имея выражение для изменения энергии системы, определить в соответствии с (11.1.2.17) величину  $A$ , отвечающую значению  $\mathbf{j}$ , а затем найти, в соответствии с (11.1.2.15), коэффициенты  $\alpha_{ij}$ , непосредственно задающие спектральное распределение флуктуаций.

Частным случаем соотношения (11.1.2.20) является известная формула Найквиста [6]

$$\langle J^2 \rangle_{\omega} = \frac{\hbar \omega}{2\pi |Z|^2} R \operatorname{cth} \frac{\hbar \omega}{2T} \quad (11.1.2.21)$$

для флуктуаций силы тока  $J$  в системе с импедансом  $Z$  ( $R = \operatorname{Re} Z$ ).

Формулу (11.1.2.20) можно записать в другом виде, считая, что флуктуации величины  $\mathbf{j}$  вызваны воздействием на систему некоторого потенциала  $A$ . Замечая, что  $A_i = \alpha_{ij}^{-1} j_j$ , и используя (11.1.2.20), найдем спектральное распределение флуктуаций случайного потенциала

$$\langle A_i A_j \rangle_{k\omega} = \frac{\hbar}{\exp(\hbar\omega/T) - 1} i \{ \alpha_{ji}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) - \alpha_{ij}^{-1*}(\mathbf{k}, \omega) \}. \quad (11.1.2.22)$$

Приведем еще выражение для спектрального распределения симметризованной пространственно-временной корреляционной функции:

$$\langle \frac{1}{2} \{ j_i(\mathbf{r}_1, t_1) j_j(\mathbf{r}_2, t_2) + j_j(\mathbf{r}_2, t_2) j_i(\mathbf{r}_1, t_1) \} \rangle \equiv \langle j_i j_j \rangle_{rt}^s.$$

Легко видеть, что

$$\langle j_i j_j \rangle_{k\omega}^s = \frac{1}{2} \hbar i \{ \alpha_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega) - \alpha_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \} \operatorname{cth}(\hbar\omega/2T). \quad (11.1.2.23)$$

При достаточно высоких температурах, когда  $T \gg \hbar\omega$ , формула (11.1.2.20) принимает вид

$$\langle j_i j_j \rangle_{k\omega} = (T/\omega) i \{ \alpha_{ij}^*(\mathbf{k}, \omega) - \alpha_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \}, \quad (11.1.2.24)$$

т. е. спектральное распределение флуктуаций не зависит от квантовой постоянной. В дальнейшем мы ограничимся рассмотрением только этого случая.

**11.1.3. Симметрия тензора отклика.** Тензор  $\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , связывающий величины  $j_i(\mathbf{k}, \omega)$  и  $A_j(\mathbf{k}, \omega)$ , обладает рядом свойств симметрии. Прежде всего из условия вещественности величин  $\mathbf{j}$  и  $A$  непосредственно следует, что

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ij}^*(-\mathbf{k}, -\omega). \quad (11.1.3.1)$$

\*) Оно было получено Калленом и Велтоном [5].

Отсюда находим

$$\alpha'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \alpha'_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega), \quad \alpha''_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = -\alpha''_{ij}(-\mathbf{k}, -\omega). \quad (11.1.3.2)$$

Далее выполняются соотношения

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ji}(-\mathbf{k}, \omega). \quad (11.1.3.3)$$

Чтобы убедиться в их справедливости, следует воспользоваться инвариантностью симметризованной корреляционной функции относительно изменения знака времени. Поскольку такое изменение эквивалентно замене  $\omega$  на  $-\omega$  в компонентах Фурье, имеем

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}, \omega}^s = \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}, -\omega}^s.$$

Вместе с тем нетрудно показать, что

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}, -\omega}^s = \langle j_j j_i \rangle_{-\mathbf{k}, \omega}^s,$$

откуда и вытекает указанное свойство симметрии.

Если плазма находится во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}$ , то в (11.1.3.3) при замене  $\mathbf{k}$  на  $-\mathbf{k}$  следует одновременно изменить знак  $\mathbf{B}$ :

$$\alpha_{ij}(\mathbf{B}, \mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ji}(-\mathbf{B}, -\mathbf{k}, \omega). \quad (11.1.3.4)$$

Соотношения (11.1.3.1) и (11.1.3.3) существенно упрощаются, если среда изотропна и отсутствуют внешние поля. В этом случае в нашем распоряжении имеется только один вектор, с помощью которого можно построить тензор  $\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , а именно, волновой вектор. Поэтому тензор  $\alpha_{ij}$  должен иметь следующую структуру:

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{A}(k, \omega) \delta_{ij} + \mathcal{B}(k, \omega) k_i k_j, \quad (11.1.3.5)$$

где  $\mathcal{A}$  и  $\mathcal{B}$  — некоторые функции абсолютной величины волнового вектора. Отсюда сразу следует, что в изотропном случае тензор  $\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  симметричен относительно перестановки индексов  $i$  и  $j$ :

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ji}(\mathbf{k}, \omega) \quad (11.1.3.6)$$

и является четной функцией относительно  $\mathbf{k}$ :

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ij}(-\mathbf{k}, \omega). \quad (11.1.3.7)$$

Согласно (11.1.3.2) в этом случае вещественная часть тензора  $\alpha_{ij}$  представляет собой четную, а мнимая часть  $\alpha_{ij}$  — нечетную функцию частоты

$$\alpha'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \alpha'_{ij}(\mathbf{k}, -\omega), \quad \alpha''_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = -\alpha''_{ij}(\mathbf{k}, -\omega). \quad (11.1.3.8)$$

Тензор  $\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ , рассматриваемый как функция комплексного переменного  $\omega$ , является аналитической функцией в верхней полуплоскости  $\omega$ . Это связано с тем, что величина  $j$  в некото-

рый момент времени  $t$  может зависеть от значений внешнего воздействия  $A$  только в предшествующие моменты времени  $t'$  ( $t' \leq t$ ).

Из соотношения (11.1.2.18), связывающего мнимую часть  $\alpha_{ij}$  с диссипацией энергии, следует, что функции  $\alpha''_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  не имеют нулей при вещественных отличных от нуля значениях  $\omega$ .

Отсюда вытекают в свою очередь соотношения

$$\alpha'_{ij}(\mathbf{k}, \omega) - \alpha'_{ij}(\mathbf{k}, \infty) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha''_{ij}(\mathbf{k}, \omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (11.1.3.9)$$

$$\alpha''_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha'_{ij}(\mathbf{k}, \infty) - \alpha'_{ij}(\mathbf{k}, \omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \quad (11.1.3.10)$$

связывающие вещественную часть тензора  $\alpha_{ij}$  с мнимой. Используя эти соотношения (они называются *соотношениями Крамера—Кронига*), легко найти корреляционную функцию плотности тока в совпадающие моменты времени (предполагая, что  $T \gg \hbar\omega$ )

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}} = 1/2 T \{ \alpha''_{ij}(\mathbf{k}, 0) - \alpha'_{ij}(\mathbf{k}, \infty) + \alpha_{ji}(\mathbf{k}, 0) - \alpha_{ji}(\mathbf{k}, \infty) \}. \quad (11.1.3.11)$$

## § 11.2. Электромагнитные флуктуации в равновесной плазме

**11.2.1. Электромагнитные флуктуации в средах с пространственно-временной дисперсией.** Применим теперь общую теорию флуктуаций, изложенную в предыдущем параграфе, к исследованию электромагнитных флуктуаций в средах с пространственно-временной дисперсией, в частности в равновесной плазме \*).

Обозначим через  $E_i(\mathbf{k}, \omega)$  и  $j_i(\mathbf{k}, \omega)$  компоненты Фурье флуктуаций электрического поля и плотности тока. Эти величины связаны между собой уравнениями Максвелла для вакуума:

$$\Lambda_{ij}^{(0)} E_j(\mathbf{k}, \omega) = -\frac{4\pi i}{\omega} j_i(\mathbf{k}, \omega), \quad (11.2.1.1)$$

где

$$\Lambda_{ij}^{(0)} = \mathcal{N}^2 (k_i k_j / k^2) - \delta_{ij}, \quad \mathcal{N}^2 = k^2 c^2 / \omega^2. \quad (11.2.1.2)$$

Чтобы найти флуктуационные поля и плотности токов, следует ввести в материальные уравнения, связывающие плотность тока

\*) Теория электромагнитных флуктуаций была развита Леонтовичем и Рытовым [7]. Обобщение на случай сред с пространственной дисперсией дано Силиным [8]. Флуктуации в равновесной плазме исследованы в [9, 10]; далее мы следуем этим работам.

и поле, стороннее поле  $\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{k}, \omega)$

$$j_i = \frac{1}{4\pi} (\varepsilon_{ij} - \delta_{ij}) (\dot{E}_j + \dot{\tilde{E}}_j), \quad (11.2.1.3)$$

где  $\varepsilon_{ij} \equiv \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы, и определить изменение энергии среды, обусловленное действием стороннего тока и равное

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3r = - \int \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t) \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) d^3r, \quad (11.2.1.4)$$

где

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{r}, t).$$

Спектральное распределение флуктуаций плотности тока определяется, согласно (11.1.2.15), коэффициентами пропорциональности между  $j_i$  и  $A_j = -\frac{i}{\omega} \dot{E}_j$ . Чтобы найти их, следует исключить из (11.2.1.3) поле  $\mathbf{E}(\mathbf{k}, \omega)$ , используя (11.2.1.1); в результате получим

$$j_i(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) A_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (11.2.1.5)$$

где

$$\alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\omega^2}{4\pi} \{ \Lambda_{ij}^{(0)} - \Lambda_{ik}^{(0)} \Lambda_{kl}^{-1} \Lambda_{lj}^{(0)} \}, \quad (11.2.1.6)$$

и  $\Lambda_{ij}^{-1}$  — тензор, обратный тензору

$$\Lambda_{ij} = \mathcal{N}^2 (k_i k_j / k^2 - \delta_{ij}) + \varepsilon_{ij}. \quad (11.2.1.7)$$

Согласно флуктуационно-диссипативному соотношению (11.1.2.25) флуктуации тока в равновесной системе определяются антиэрмитовой частью тензора  $\alpha_{ij}$ , который, как мы видим, в свою очередь задается тензором диэлектрической проницаемости среды. Подставляя (11.2.1.6) в (11.1.2.24), получим следующее выражение для спектрального распределения флуктуаций плотности тока в равновесной системе:

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{i}{4\pi} \omega T \Lambda_{ik}^{(0)} \{ \Lambda_{kl}^{-1} - (\Lambda_{lk}^{-1})^* \} \Lambda_{lj}^{(0)}. \quad (11.2.1.8)$$

Эта формула определяет флуктуации плотности электрического тока в любой системе с пространственно-временной дисперсией, находящейся в состоянии статистического равновесия. В частности, спектральное распределение (11.2.1.8) справедливо как для свободной плазмы, так и для плазмы во внешнем магнитном поле; необходимо лишь, чтобы плазма находилась в равновесии.

Из вида тензора  $\alpha_{ij}$  легко заключить, что его особенности совпадают с нулями определителя, составленного из величин  $\Lambda_{ij}$  (тензор  $\Lambda_{ij}^{-1}$  обратно пропорционален  $\det(\Lambda_{ij}) \equiv \Lambda$ ). С другой стороны, уравнение  $\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = 0$  определяет, как мы видели в гл. 4, спектр собственных колебаний плазмы. Поэтому спектральные распределения флуктуаций поля и плотности тока в плазме имеют резкие максимумы при частотах, совпадающих с частотами ее собственных колебаний.

В области прозрачности ( $\text{Im } \Lambda \ll \text{Re } \Lambda$ ) можно пренебречь затуханием волн и спектральное распределение флуктуаций плотности тока примет вид

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 1/2 |\omega| T \Lambda_{ik}^{(0)} \lambda_{kl} \Lambda_{lj}^{(0)} \delta\{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)\}, \quad (11.2.1.9)$$

где  $\lambda_{kl}$  — алгебраическое дополнение  $\Lambda_{kl}$  в определителе  $\Lambda$  ( $\lambda_{ik} \Lambda_{kj} = \Lambda \delta_{ij}$ ).

Мы видим, что в области прозрачности это распределение имеет вблизи собственных частот дельтаобразные максимумы, т. е. частотный спектр флуктуаций содержит только собственные частоты колебаний в плазме.

Используя связь между плотностями заряда и тока

$$\omega \rho_{\mathbf{k}\omega} = \mathbf{k} \mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega}, \quad (11.2.1.10)$$

вытекающую из уравнения непрерывности, нетрудно найти с помощью (11.2.1.8) спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в плазме

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{2\pi} \frac{T}{\omega} \text{Im } k_i (\Lambda_{ij}^{-1})^* k_j. \quad (11.2.1.11)$$

Наконец, выражая поле  $E_i(\mathbf{k}, \omega)$  через  $j_i(\mathbf{k}, \omega)$  и используя (11.2.1.8), найдем спектральное распределение флуктуаций электрического поля в плазме

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi i \frac{T}{\omega} \{\Lambda_{ij}^{-1} - (\Lambda_{ji}^{-1})^*\}. \quad (11.2.1.12)$$

В области прозрачности ( $\text{Im } \Lambda \ll \text{Re } \Lambda$ )

$$\Lambda_{ij}^{-1} - (\Lambda_{ji}^{-1})^* \rightarrow \frac{\pi}{|\text{Im } \Lambda|} (\Lambda^* \lambda_{ij} - \Lambda \lambda_{ji}^*) \delta\{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)\},$$

т. е. спектральное распределение флуктуаций электрического поля, так же как и спектральное распределение флуктуаций плотности тока, имеет дельтаобразные максимумы при частотах собственных колебаний плазмы.

Заметим далее, что для  $\omega$  и  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению, справедливо соотношение

$$\lambda_{ij} = e_i e_j^* \text{Sp } \lambda, \quad (11.2.1.13)$$

где  $\mathbf{e}$  — векторы поляризации соответствующих колебаний; кроме того, учитывая, что  $(\text{Sp} \lambda / \omega) \text{Im} \Lambda > 0$ , спектральное распределение флуктуаций электрического поля можно представить в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi^2 e_i^* e_j T \frac{|\text{Sp} \lambda|}{|\omega|} \delta \{ \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \}. \quad (11.2.1.14)$$

Полученная формула справедлива не только для плазмы, но и для любой системы с пространственно-временной дисперсией.

**11.2.2. Электромагнитные флуктуации в изотропной плазме.** Для изотропной плазмы в отсутствие внешних полей формулы для спектральных распределений флуктуаций приобретают более простой вид, так как в этом случае тензор  $\alpha_{ij}$  имеет простую структуру: именно, его, так же как и тензор диэлектрической проницаемости  $\epsilon_{ij}$ , можно разбить на продольную и поперечную части:

$$\alpha_{ij} = \frac{k_i k_j}{k^2} \alpha_l + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \alpha_t, \quad (11.2.2.1)$$

где величины  $\alpha_l$  и  $\alpha_t$  — коэффициенты пропорциональности между продольными и поперечными составляющими плотности тока  $\mathbf{j}$  и потенциала  $\Lambda$  — зависят только от модуля волнового вектора  $\mathbf{k}$  и частоты  $\omega$  и связаны с продольной и поперечной составляющими диэлектрической проницаемости  $\epsilon_l$  и  $\epsilon_t$  соотношениями

$$\left. \begin{aligned} \alpha_l &= \frac{\omega^2}{4\pi} \frac{\epsilon_l - 1}{\epsilon_l}, \\ \alpha_t &= \frac{\omega^2}{4\pi} (1 - \mathcal{N}^2) \frac{\epsilon_t - 1}{\epsilon_t - \mathcal{N}^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.2.2)$$

Вещественные части  $\alpha'_l$  и  $\alpha'_t$  величин  $\alpha_l$  и  $\alpha_t$  являются четными, а мнимые части  $\alpha''_l$  и  $\alpha''_t$  — нечетными функциями частоты. Они связаны между собой соотношениями Крамерса—Кронига

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_l(k, \omega) - \alpha'_l(k, \infty) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha''_l(k, \omega')}{\omega' - \omega} d\omega', \\ \alpha'_t(k, \omega) - \alpha'_t(k, \infty) &= \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha''_t(k, \omega')}{\omega' - \omega} d\omega'. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.2.3)$$

Подстановка выражений (11.2.2.2) в (11.1.2.24) дает

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\omega}{2\pi} T \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\text{Im} \epsilon_l}{|\epsilon_l|^2} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) (1 - \mathcal{N}^2) \frac{\text{Im} \epsilon_t}{|\epsilon_t - \mathcal{N}^2|^2} \right\}. \quad (11.2.2.4)$$

Здесь первое слагаемое в фигурных скобках определяет флуктуации продольной составляющей плотности тока, а второе слагаемое — флуктуации поперечной ее составляющей.

Заметим, что флуктуации плотности заряда в силу уравнения непрерывности связаны с флуктуациями продольной составляющей плотности тока. Спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в изотропной плазме определяется формулой

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{k^2}{2\pi} \frac{T}{\omega} \frac{\text{Im } \varepsilon_l}{|\varepsilon_l|^2}. \quad (11.2.2.5)$$

Используя связь между напряженностью поля  $\mathbf{E}$  и плотностью тока  $\mathbf{j}$  и соотношение (11.2.2.4), нетрудно получить формулу для спектрального распределения флуктуаций напряженности электрического поля

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 8\pi \frac{T}{\omega} \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\text{Im } \varepsilon_l}{|\varepsilon_l|^2} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{\text{Im } \varepsilon_l}{|\varepsilon_l - \mathcal{N}^2|^2} \right\}. \quad (11.2.2.6)$$

Магнитное поле связано с электрическим полем формулой  $\mathbf{B} = \frac{c}{\omega} [\mathbf{kE}]$ ; поэтому для спектрального распределения флуктуаций магнитного поля имеем

$$\langle B_i B_j \rangle_{k\omega} = 8\pi \frac{T}{\omega} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \mathcal{N}^2 \frac{\text{Im } \varepsilon_l}{|\varepsilon_l - \mathcal{N}^2|^2}. \quad (11.2.2.7)$$

Используя соотношения Крамера—Кронига (11.2.2.3), можно в общем виде проинтегрировать спектральное распределение по частотам. Так, интегрируя (11.2.2.4), мы получим компоненты Фурье от пространственной корреляционной функции плотности тока в совпадающие моменты времени

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}} = T \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} [\alpha_l(k, 0) - \alpha_l(k, \infty)] + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) [\alpha_t(k, 0) - \alpha_t(k, \infty)] \right\}. \quad (11.2.2.8)$$

(При выводе этой формулы мы учли, что мнимые части  $\alpha_l$  и  $\alpha_t$  обращаются в нуль при  $\omega \rightarrow 0$  и  $\omega \rightarrow \infty$ .)

Аналогичным образом можно найти компоненту Фурье от пространственной функции плотности заряда в совпадающие моменты времени

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{k^2}{4\pi} T \left\{ 1 - \frac{1}{\varepsilon_l(k, 0)} \right\}. \quad (11.2.2.9)$$

С помощью интегральных соотношений (11.2.2.3) нетрудно также определить в общем виде величину

$$\langle \omega^2 \rangle \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} d\omega \left/ \int_{-\infty}^{\infty} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} d\omega, \right.$$

которую можно рассматривать как квадрат средней частоты флуктуаций плотности заряда. Используя (11.2.2.3), легко убедиться, что эта частота равна

$$\langle \omega^2 \rangle = \frac{\omega_{pe}^2}{1 - \varepsilon_l(k, 0)^{-1}}, \quad (11.2.2.10)$$

где  $\omega_{pe}^2 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \omega^2 \{1 - \varepsilon_l(k, \omega)\} = 4\pi n_0 e^2 / m_e$ .

Аналогичным образом можно найти среднюю квадратичную частоту поперечных флуктуаций.

Итак, в равновесной изотропной плазме флуктуации различных электромагнитных величин полностью определяются продольной и поперечной составляющими диэлектрической проницаемости плазмы.

**11.2.3. Флуктуации плотности заряда.** Используем теперь явные выражения для составляющих диэлектрической проницаемости равновесной изотропной плазмы

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_l(k, \omega) &= 1 + \frac{1}{a_0^2 k^2} \{2 - \varphi(z) - \varphi(\mu z) + \\ &\quad + i\sqrt{\pi} z (\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2))\}, \\ \varepsilon_t(k, \omega) &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \{\varphi(z) - i\sqrt{\pi} z \exp(-z^2)\}, \end{aligned} \right\} \quad (11.2.3.1)$$

где

$$z = \frac{\omega}{\sqrt{2} kv_e}, \quad \mu = \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \quad \text{и} \quad \varphi(z) = 2z \exp(-z^2) \int_0^z \exp(x^2) dx,$$

и исследуем более подробно характер спектральных распределений флуктуаций для различных величин.

Рассмотрим прежде всего флуктуации плотности заряда равновесной изотропной плазмы. Подставляя (11.2.3.1) в (11.2.2.9), получим следующую общую формулу для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда в плазме с учетом движения ионов

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \\ &= \sqrt{2\pi} e^2 n_0 \frac{a_0^2 k^3}{\omega_{pe}} \frac{\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2)}{[a_0^2 k^2 + 2 - \varphi(z) - \varphi(\mu z)]^2 + \pi z^2 (\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2))^2}. \end{aligned} \quad (11.2.3.2)$$

В области достаточно низких частот ( $z \ll \mu^{-1}$ ) находим

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{\bar{\omega}^2}{\bar{\omega}^2 + \omega^2} \langle \rho^2 \rangle_{k0},$$

где

$$\bar{\omega}^2 = \frac{2}{\pi} \frac{(2 + a_0^2 k^2)^2}{(1 + \mu)^2} a_0^2 l^2, \quad \langle \rho^2 \rangle_{k0} = \sqrt{2\pi} e^2 n_0 \frac{a_0^3 k^3}{\omega_{pe}} \frac{1 + \mu}{(2 + a_0^2 k^2)^2}.$$

В области высоких частот ( $z \gg \mu^{-1} \sqrt{\ln \mu}$ ) можно пренебречь движением ионов, и выражение для спектрального распределения флуктуаций значительно упрощается

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \sqrt{2\pi} e^2 n_0 \frac{a_0^3 k^3}{\omega_{pe}} \times \frac{\exp(-z^2)}{[a_0^2 k^2 + 1 - \varphi(z)]^2 + \pi z^2 \exp(-2z^2)} \quad (11.2.3.3)$$

В предельном случае  $z \gg 1$ , т. е.  $\omega \gg kv_0$ , получим отсюда

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = 2\pi e^2 n_0 \frac{k^2 v_0^2}{|\omega|} \times \delta(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - 3k^2 v_0^2). \quad (11.2.3.4)$$

Таким образом, в области высоких частот в спектре флуктуаций плотности заряда в плазме присутствует только плазменная частота.

На рис. 11.2.1 представлено спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в зависимости от безразмерной частоты  $z = \omega/\sqrt{2}kv_0$  при различных значениях параметра  $a_0^2 k^2$ .

При больших его значениях основную роль играют низкочастотные флуктуации. По мере уменьшения этого параметра эффективная частота флуктуаций растет. При  $a_0^2 k^2 \ll 1$  в спектре флуктуаций остаются только частоты, близкие к собственным частотам колебаний плотности плазмы.

Если  $a_0^2 k^2 \gg 1$ , то кулоновским взаимодействием можно пренебречь, и для спектрального распределения находим

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \sqrt{2\pi} \frac{e^2 n_0}{kv_0} \{ \exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2) \}. \quad (11.2.3.5)$$

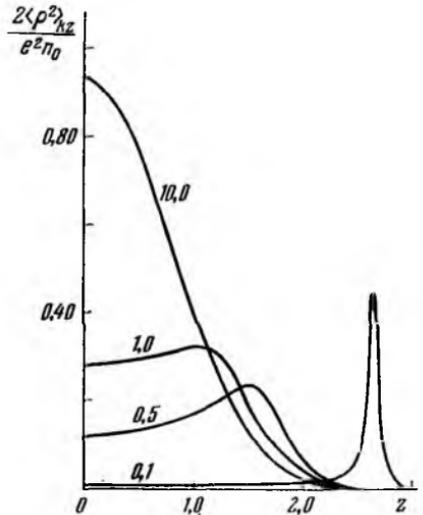


Рис. 11.2.1. Зависимость спектрального распределения флуктуаций плотности заряда в плазме  $2 \langle \rho^2 \rangle_{kz} / e^2 n_0$  от безразмерной частоты  $z = \omega/\sqrt{2}kv_0$  при различных значениях параметра  $a_0^2 k^2$ .

Числа у кривых указывают величины  $a_0^2 k^2$ .

Согласно (11.2.2.9) и (11.2.3.1) спектральное распределение флуктуаций плотности заряда, проинтегрированное по частотам, определяется выражением

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{2e^2 n_0 k^2}{k^2 + 2/a_e^2}. \quad (11.2.3.6)$$

Отсюда следует известный результат для газа невзаимодействующих частиц

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 2e^2 n_0, \quad a_e k \gg 1. \quad (11.2.3.7)$$

Интегральный вклад высокочастотных флуктуаций плотности заряда  $\langle \tilde{\rho}^2 \rangle_{\mathbf{k}}$  в полную интенсивность (см. (11.2.3.6)) найдем, проинтегрировав (11.2.3.4) по частотам; тогда имеем

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{e^2 n_0 k^2}{3k^2 + a_e^{-2}}.$$

Для отношения высокочастотной интенсивности к полной получим

$$\langle \tilde{\rho}^2 \rangle_{\mathbf{k}} / \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 1/2 \frac{2 + a_e^2 k^2}{1 + 3a_e^2 k^2}.$$

Это отношение равно  $1/6$  при  $a_e^2 k^2 \gg 1$  и  $1$  при  $a_e^2 k^2 \ll 1$ .

В выражении (11.2.3.6) учитывается как вклад электронов, так и вклад ионов, причем последний особенно существен при  $a_e k > 1$ . Если пренебречь движением ионов, то взамен (11.2.3.6) мы получим

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{e^2 n_0 k^2}{k^2 + a_e^{-2}}. \quad (11.2.3.8)$$

Мы видим, что при  $a_e^2 k^2 \gg 1$  и при учете ионов величина  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}}$  увеличивается в два раза. С уменьшением  $a_e k$  вклад, обусловленный ионами, становится меньше.

Используя (11.2.3.6), нетрудно найти пространственную корреляционную функцию для флуктуаций плотности заряда; имеем

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}} = 2e^2 n_0 \left\{ \delta(\mathbf{r}) - \frac{1}{8\pi \bar{a}^2} \frac{\exp(-r/\bar{a})}{r} \right\}, \quad (11.2.3.9)$$

где  $\bar{a} = a_e / \sqrt{2}$ . Мы видим, что корреляция между флуктуациями плотности заряда в плазме имеет место в основном на расстояниях порядка дебаевского радиуса.

Согласно (11.2.2.10) и (11.2.3.1) средняя квадратичная частота флуктуаций плотности заряда равна

$$\sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 v_e^2}. \quad (11.2.3.10)$$

Заметим, что эта величина меньше частоты собственных плазменных колебаний.

Приведем еще спектральное распределение флуктуаций плотности заряда для релятивистской электронной плазмы. Продольная составляющая тензора диэлектрической проницаемости плазмы при  $T \gg m_e c^2$  определяется формулой

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \frac{1}{a_e^2 k^2} \left\{ 1 + \frac{\omega}{2kc} \ln \frac{|\omega - kc|}{\omega + kc} + i \frac{\pi}{4} \frac{\omega}{kc} \left( 1 - \frac{\omega - kc}{|\omega - kc|} \right) \right\}, \quad (11.2.3.11)$$

подстановка которой в (11.2.2.5) дает [10]

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{\pi e^2 n_0}{\omega} \left\{ \frac{\omega}{kc} \frac{\theta(kc - \omega)}{\left[ 1 + \frac{1}{a_e^2 k^2} \left( 1 + \frac{\omega}{2kc} \ln \frac{|\omega - kc|}{\omega + kc} \right) \right]^2} + \frac{\pi}{4} \frac{\omega^2}{k^2 c^2} \frac{1}{a_e^4 k^4} + \frac{1}{2} a_e^2 k^2 \delta \left( 1 + \frac{1}{a_e^2 k^2} \left( 1 + \frac{\omega}{2kc} \ln \frac{|\omega - kc|}{\omega + kc} \right) \right) \right\}. \quad (11.2.3.12)$$

Отметим, что интегрирование этого соотношения по частотам, так же как и в нерелятивистском случае, приводит к формуле (11.2.3.8).

**11.2.4. Флуктуации плотности тока.** Рассмотрим теперь флуктуации плотности тока в равновесной изотропной плазме. Используя выражения (11.2.3.1), получим следующую формулу для спектрального распределения флуктуаций плотности тока:

$$\langle j_i j_j \rangle_{k\omega} = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} \frac{\omega^2}{kv_e} \times \\ \times T \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2)}{[a_e^2 k^2 + 2 - \varphi(z) - \varphi(\mu z)]^2 + \pi z^2 [\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2)]^2} + \right. \\ \left. + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) (1 - \mathcal{N}^2)^2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\exp(-z^2)}{\left[ \mathcal{N}^2 - 1 + \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \varphi(z) \right]^2 + \pi \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} z^2 \exp(-2z^2)} \right\}. \quad (11.2.4.1)$$

Здесь первое слагаемое в фигурных скобках определяет флуктуации продольной составляющей плотности тока, а второе слагаемое — флуктуации поперечной ее составляющей. Так как поправки к поперечной диэлектрической проницаемости, связанные с движением ионов, ничтожно малы, то на флуктуациях поперечной составляющей плотности тока в плазме движение ионов практически не сказывается. Однако движение ионов существенно сказывается на флуктуациях продольной составляющей плотности тока, так же как и на флуктуациях плотности заряда.

Приведем приближенные выражения для спектрального распределения флуктуаций поперечной составляющей плотности тока в области низких и высоких частот. Если  $\omega \ll kc$ , то

$$\langle j_{\perp}^2 \rangle_{k\omega} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\omega_{pe}^2}{kv_e} T \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{k^2 v_e^2}\right). \quad (11.2.4.2)$$

При  $\omega \gg kv_e$  ( $\omega \approx kc$ ) имеем

$$\langle j_{\perp}^2 \rangle_{k\omega} = \frac{\omega_{pe}^4}{|\omega|} T \delta(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2), \quad (11.2.4.3)$$

т. е. в высокочастотной области в спектре флуктуаций присутствует только собственная частота поперечных колебаний плазмы.

Интегрируя (11.2.4.1) по частотам, можно найти компоненту Фурье от пространственной корреляционной функции плотности тока в плазме  $\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}}$ . Замечая, что для равновесной плазмы  $\alpha_i(k, 0) = \alpha_i(k, \infty) = 0$  и  $\alpha_i(k, \infty) = \alpha_i(k, \infty) = -\omega_{pe}^2/4\pi$ , найдем, согласно (11.2.2.8),

$$\langle j^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 3e^2 n_0 T / m_e. \quad (11.2.4.4)$$

Средняя квадратичная частота флуктуаций поперечной составляющей плотности тока равна ленгмюровской частоте, т. е.

$$\sqrt{\langle \omega^2 \rangle} = \omega_{pe}. \quad (11.2.4.5)$$

С помощью (11.2.4.4) нетрудно убедиться, что

$$\langle j^2 \rangle_{\mathbf{r}} = \frac{3e^2 n_0 T}{m_e} \delta(\mathbf{r}), \quad (11.2.4.6)$$

т. е. пространственная корреляция между флуктуациями плотности тока в плазме отсутствует.

**11.2.5. Флуктуации электромагнитного поля.** Спектральные распределения флуктуаций электрического и магнитного полей в равновесной изотропной плазме определяются общими формулами (11.2.2.6) и (11.2.2.7). Используя выражения (11.2.3.1) для диэлектрических проницаемостей, можно записать спектральные распределения флуктуаций полей в виде

$$\begin{aligned} \langle E^2 \rangle_{k\omega} &= \\ &= 2(2\pi)^{3/2} \frac{\alpha_e k}{\omega_{pe}} T \left\{ \frac{\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2)}{[\alpha_e^2 k^2 + 2 - \varphi(z) - \varphi(\mu z)]^2 + \pi z^2 (\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2))^2} + \right. \\ &\quad \left. + 2 \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \frac{\exp(-z^2)}{[\mathcal{N}^2 - 1 + (\omega_{pe}^2/\omega^2) \varphi(z)]^2 + \pi (\omega_{pe}^4/\omega^4) z^2 \exp(-2z^2)} \right\}, \quad (11.2.5.1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle B^2 \rangle_{k\omega} &= \\ &= 4(2\pi)^{3/2} \frac{\alpha_e k}{\omega} \frac{\omega_{pe}}{\omega} \mathcal{N}^2 T \frac{\exp(-z^2)}{[\mathcal{N}^2 - 1 + (\omega_{pe}^2/\omega^2) \varphi(z)]^2 + \pi (\omega_{pe}^4/\omega^4) z^2 \exp(-2z^2)}. \quad (11.2.5.2) \end{aligned}$$

Движение ионов сказывается только на флуктуациях продольного электрического поля.

В области высоких частот  $\omega \gg kv_0$  ( $\omega \approx kc$ ) спектральные распределения флуктуаций поперечных составляющих электрического и магнитного полей имеют вид

$$\langle E_i^2 \rangle_{k\omega} = \langle B^2 \rangle_{k\omega} = 16\pi^2 |\omega| T \delta(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 c^2). \quad (11.2.5.3)$$

Интегрирование (11.2.5.1) и (11.2.5.2) по частотам дает

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 8\pi T \left\{ 1 + \frac{1}{2 + a_0^2 k^2} \right\}, \quad \langle B^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 8\pi T. \quad (11.2.5.4)$$

С помощью этих соотношений нетрудно найти пространственные корреляционные функции для электрического и магнитного полей в равновесной плазме

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{r}} = 8\pi T \left\{ \delta(\mathbf{r}) + \frac{1}{8\pi a^2} \frac{\exp(-r/\bar{a})}{r} \right\}, \quad \langle B^2 \rangle_{\mathbf{r}} = 8\pi T \delta(\mathbf{r}). \quad (11.2.5.5)$$

**11.2.6. Флуктуации плотностей электронов и ионов.** Перейдем теперь к определению флуктуаций плотностей электронов и ионов [10]. Для этого нужно ввести в материальные уравнения (11.2.1.3) случайные поля, действующие независимо на электроны и ионы, и, используя затем уравнения Максвелла и соотношения

$$\rho = -e(\delta n_e - \delta n_i), \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_e + \mathbf{j}_i \quad (11.2.6.1)$$

( $\delta n_e$  и  $\delta n_i$  — отклонения плотностей электронов и ионов от равновесных значений  $n_0$ ,  $\mathbf{j}_e$  и  $\mathbf{j}_i$  — электронная и ионная составляющие плотности тока), найти коэффициенты пропорциональности между плотностями токов электронов и ионов и соответствующими случайными потенциалами. Эти коэффициенты будут выражаться не только через диэлектрические проницаемости плазмы  $\epsilon_i$  и  $\epsilon_j$ , но и через электронные и ионные восприимчивости плазмы  $\chi_i^e$ ,  $\chi_i^i$  и  $\chi_j^i$ . На основе флуктуационно-диссипативного соотношения получим следующие формулы для спектральных распределений флуктуаций плотностей электронного и ионного токов:

$$\left. \begin{aligned} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{k\omega} &= 2T\omega \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \operatorname{Im} \frac{\chi_i^e (1 + 4\pi\kappa_i)}{\epsilon_i} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \operatorname{Im} \frac{\chi_i^e (1 + 4\pi\kappa_i^2 - \omega'^2)}{\epsilon_i - \omega'^2} \right\}, \\ \langle j_i^i j_j^i \rangle_{k\omega} &= 2T\omega \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \operatorname{Im} \frac{\chi_j^i (1 + 4\pi\kappa_j^i)}{\epsilon_j} + \right. \\ &\quad \left. + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \operatorname{Im} \frac{\chi_j^i (1 + 4\pi\kappa_j^i - \omega'^2)}{\epsilon_j - \omega'^2} \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11.2.6.2)$$

Воспользовавшись уравнением непрерывности для электронов и ионов, легко найти отсюда спектральные распределения флуктуаций плотностей электронов и ионов

$$\left. \begin{aligned} \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= 8\pi n_0 \frac{a_e^2 k^2}{\omega} \operatorname{Im} \frac{\chi_e^2 (1 + 4\pi\chi_e)}{\varepsilon_e} \\ \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= 8\pi n_0 \frac{a_e^2 k^2}{\omega} \operatorname{Im} \frac{\chi_i^2 (1 + 4\pi\chi_i)}{\varepsilon_i} \end{aligned} \right\} \quad (11.2.6.3)$$

Интегрируя эти выражения по частотам, с учетом соотношений (11.2.2.3) получим

$$\left. \begin{aligned} \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} &= n_0 \frac{1 + a_e^2 k^2 - \varphi(\mu z)}{2 + a_e^2 k^2 - \varphi(\mu z)} \Big|_{z \rightarrow 0} \\ \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}} &= n_0 \frac{(1 + a_e^2 k^2) [1 - \varphi(\mu z)]}{2 + a_e^2 k^2 - \varphi(\mu z)} \Big|_{z \rightarrow 0} \end{aligned} \right\} \quad (11.2.6.4)$$

Если считать ионы бесконечно тяжелыми ( $\mu \rightarrow \infty$ ,  $\varphi(\mu z) \rightarrow 1$ ), то

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} = n_0 \frac{a_e^2 k^2}{1 + a_e^2 k^2}, \quad \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 0. \quad (11.2.6.5)$$

В действительности ионы характеризуются конечной массой, поэтому  $\varphi(\mu z)|_{z \rightarrow 0} = 0$  и, следовательно,

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}} = n_0 \frac{1 + a_e^2 k^2}{2 + a_e^2 k^2}. \quad (11.2.6.6)$$

Если  $a_e^2 k^2 \gg 1$ , то кулоновским взаимодействием между частицами можно пренебречь, и формула (11.2.6.6) приведет к известному результату для среднего квадрата флуктуаций плотности нейтральных частиц

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}} = n_0. \quad (11.2.6.7)$$

В предельном случае  $a_e^2 k^2 \ll 1$  средние квадраты флуктуаций оказываются в два раза меньше

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 1/2 n_0. \quad (11.2.6.8)$$

**11.2.7. Флуктуации в плазме, находящейся в магнитном поле.** Перейдем к определению флуктуаций в равновесной плазме, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ . Тензор  $\Lambda_{ij}$  имеет в этом случае вид

$$\Lambda_{ij} = \begin{pmatrix} -\mathcal{N}^2 \cos^2 \theta + \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \mathcal{N}^2 \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{13} \\ -\varepsilon_{12} & -\mathcal{N}^2 + \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \mathcal{N}^2 \sin \theta \cos \theta + \varepsilon_{13} & -\varepsilon_{23} & -\mathcal{N}^2 \sin^2 \theta + \varepsilon_{33} \end{pmatrix} \quad (11.2.7.1)$$

(ось  $z$  направлена вдоль  $\mathbf{B}_0$ , ось  $x$  лежит в плоскости векторов  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ ,  $\theta$  — угол между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ ). Обратный тензор  $\Lambda^{-1}$  определя-

ется равенством  $\Lambda_{ij}^{-1} = \lambda_{ij}/\Lambda$ , где  $\lambda_{ij}$  — алгебраические дополнения и  $\Lambda$  — определитель матрицы (11.2.7.1), равный

$$\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = A\mathcal{N}^4 + B\mathcal{N}^2 + C; \quad (11.2.7.2)$$

здесь  $\mathcal{N} = kc/\omega$ , а коэффициенты  $A$ ,  $B$  и  $C$  выражаются через компоненты тензора  $\epsilon_{ij}$ .

Флуктуации плотности заряда в плазме, находящейся в магнитном поле, связаны с флуктуациями плотности тока (см. (11.2.1.8)) соотношением

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{1}{\omega^2} k_i k_j \langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}. \quad (11.2.7.3)$$

Отсюда находим

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k^2}{2\pi} \frac{T}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ 1 - \frac{\Delta(\mathbf{k}, \omega)}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)} \right\}, \quad (11.2.7.4)$$

где

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = \mathcal{N}^4 - (\epsilon_{11} \cos^2 \theta + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} \sin^2 \theta - 2\epsilon_{13} \sin \theta \cos \theta) \mathcal{N}^2 + (\epsilon_{11}\epsilon_{22} + \epsilon_{12}^2) \cos^2 \theta + (\epsilon_{22}\epsilon_{33} + \epsilon_{23}^2) \sin^2 \theta + 2(\epsilon_{12}\epsilon_{23} - \epsilon_{22}\epsilon_{13}) \sin \theta \cos \theta. \quad (11.2.7.5)$$

Проинтегрируем (11.2.7.4) по частотам, используя соотношения Крамерса—Кронига. Замечая, что  $\Lambda(\mathbf{k}, 0)/\Lambda(\mathbf{k}, 0) = 1 + 2/a_0^2 k^2$ , получим

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{2e^2 n_0 k^2}{k^2 + 2/a_0^2}. \quad (11.2.7.6)$$

Мы видим, таким образом, что магнитное поле не влияет на пространственную корреляционную функцию флуктуаций плотности плазмы.

Магнитное поле оказывает, однако, существенное влияние на спектральное распределение флуктуаций различных величин в плазме. В области прозрачности плазмы спектральное распределение флуктуаций плотности тока имеет вид

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 1/2 |\omega| T \Lambda_{jk}^{(0)} \lambda_{kl} \Lambda_{li}^{(0)} \delta(A\mathcal{N}^4 + B\mathcal{N}^2 + C). \quad (11.2.7.7)$$

Аргумент дельта-функции представляет собой левую часть дисперсионного уравнения плазмы в магнитном поле. Следовательно, в спектре флуктуаций в случае слабого затухания содержатся только частоты собственных колебаний плазмы в магнитном поле.

Спектральное распределение флуктуаций плотности, связанных с ленгмюровскими колебаниями, определяется формулой

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k^2}{4} T \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} \frac{(\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2}{\omega^4 \sin^2 \theta + (\omega^2 - \omega_{pe}^2)^2 \cos^2 \theta} \{ \delta(\omega - \omega_+) + \delta(\omega + \omega_+) + \delta(\omega - \omega_-) + \delta(\omega + \omega_-) \}, \quad (11.2.7.8)$$

где  $\omega_+$  и  $\omega_-$  — собственные частоты продольных колебаний плазмы в магнитном поле (см. (5.1.2.6)).

Спектральное распределение флуктуаций электрического поля в плазме в магнитном поле задается общим соотношением (11.2.1.14). Замечая, что

$$\delta \{ \Lambda(\mathbf{k}, \omega) \} = \frac{1}{|\text{Sp } \lambda|} \left\{ \frac{1}{|e|^2 - |k\mathbf{e}|^2/k^2} [\delta(\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}_+^2) + \delta(\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}_-^2)] + \delta(A) \right\},$$

в (11.2.1.14) можно выделить вклады, обусловленные отдельными собственными колебаниями в плазме. Так, для спектральных распределений флуктуаций поля, связанных с обыкновенными и необыкновенными волнами, справедливы формулы

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi^2 \frac{e_i^* e_j}{|e|^2 - |k\mathbf{e}|^2/k^2} \frac{T}{|\omega|} \delta(\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}_{\pm}^2), \quad (11.2.7.9)$$

где векторы поляризации определяются выражением (5.1.1.10). Спектральное распределение флуктуаций электрического поля вблизи ленгмюровских частот определяется выражением

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi^2 \frac{k_i k_j}{k^2} T \frac{|\omega^2 - \omega_{pe}^2|}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \{ \delta(\omega - \omega_+) + \delta(\omega + \omega_+) + \delta(\omega - \omega_-) + \delta(\omega + \omega_-) \} \quad (12.2.7.10)$$

или, если учитывать дисперсию ленгмюровских волн, соотношением

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi^2 \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{T}{|\omega|} \frac{\mathcal{N}}{A_0} \delta(\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}_{\pm}^2). \quad (11.2.7.11)$$

Формулы (11.2.7.9) — (11.2.7.11) описывают флуктуации в высокочастотной области спектра плазмы, где влияние ионов не существенно.

### § 11.3. Обращение флуктуационно-диссипативного соотношения

**11.3.1. Связь между диэлектрической проницаемостью плазмы и корреляционной функцией флуктуаций для системы невзаимодействующих частиц.** Выше было сформулировано флуктуационно-диссипативное соотношение, устанавливающее связь между

флуктуациями электромагнитных величин и тензором диэлектрической проницаемости среды. С помощью этого соотношения, зная выражение для тензора диэлектрической проницаемости плазмы, мы нашли спектральные распределения флуктуаций полей и плотностей заряда и тока в плазме. Но флуктуационно-диссипативное соотношение можно использовать и для другой цели. Именно, если сперва непосредственно определить с помощью микроскопической теории флуктуации плотностей заряда и тока, то, применяя флуктуационно-диссипативное соотношение, можно найти тензор диэлектрической проницаемости \*).

При использовании такого метода появляется возможность учесть тепловые эффекты, не прибегая к кинетическому уравнению.

Рассмотрим сперва изотропную среду и обратимся к формулам (11.2.2.4) и (11.2.2.5), связывающим спектральные распределения флуктуаций плотностей заряда и поперечной составляющей плотности тока с продольной и поперечной диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_t$ . Разложим эти распределения, а также компоненты диэлектрической проницаемости, являющиеся функциями заряда электрона  $e$ , в ряды по степеням  $e$  (точнее говоря,  $e^2$ ). Так как электрическая восприимчивость содержит в качестве множителя  $e^2$ , то, сохраняя по одному (первому) члену каждого разложения, мы получим

$$\text{Im } \varepsilon_l^{(2)} = \frac{2\pi}{k^2} \frac{\omega}{T} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}, \quad \text{Im } \varepsilon_t^{(2)} = \frac{\pi}{\omega T} \langle j_t^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}, \quad (11.3.1.1)$$

где  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  и  $\langle j_t^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  — спектральные распределения плотностей заряда и тока для газа не взаимодействующих заряженных частиц,  $\varepsilon_{l,t}^{(2)}$  — значения величин  $\varepsilon_{l,t}$  с точностью до членов порядка  $e^4$ .

С такой же точностью можно найти теперь величины  $\text{Re } \varepsilon_{l,t}$ . Для этого следует воспользоваться соотношениями Крамера—Кронига (11.2.2.3):

$$\left. \begin{aligned} \text{Re } \varepsilon_l &= 1 + \frac{2}{k^2 T} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega'}^{(0)}}{\omega' - \omega} \omega' d\omega', \\ \text{Re } \varepsilon_t &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2 T} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle j_t^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega'}^{(0)}}{\omega' - \omega} \omega' d\omega'. \end{aligned} \right\} \quad (11.3.1.2)$$

Здесь и в дальнейшем мы не выписываем у  $\varepsilon_{l,t}$  индекса (2). Приведенные выше формулы можно, очевидно, объединить с форму-

\*) Такой подход был предложен в работах Шафранова, Кубо и Накано [11—13]. Определение тензора диэлектрической проницаемости на основе обращения флуктуационно-диссипативного соотношения для неравновесной плазмы дано в [10, 14].

лами (11.3.1.1) и представить продольную и поперечную диэлектрические проницаемости в виде [10]

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_l(k, \omega) &= 1 + \frac{2}{k^2 T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle \rho^2 \rangle_{k\omega'}^{(0)}}{\omega' - \omega - i0} \omega' d\omega', \\ \varepsilon_t(k, \omega) &= 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} + \frac{1}{\omega^2 T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle j_i^2 \rangle_{k\omega'}^{(0)}}{\omega' - \omega - i0} \omega' d\omega', \end{aligned} \right\} (11.3.1.3)$$

где слагаемое  $-i0$  в знаменателе подынтегрального выражения означает, что интегрирование по  $\omega'$  производится по контуру, проходящему в плоскости комплексного переменного  $\omega'$  вдоль вещественной оси с обходом особой точки  $\omega' = \omega$  снизу.

Формулы (11.3.1.3) определяют величины  $\varepsilon_l(k, \omega)$  и  $\varepsilon_t(k, \omega)$  с точностью до членов порядка  $e^4$  по спектральным распределениям флуктуаций плотностей заряда и поперечной составляющей тока  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}$  и  $\langle j_i^2 \rangle_{k\omega}$  для газа не взаимодействующих заряженных частиц.

Аналогичным образом можно рассмотреть анизотропную среду, характеризуемую тензором диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{ij}$ . Обращаясь в этом случае к формуле (11.2.1.8) и замечая, что с точностью до членов порядка  $e^4$  справедливо разложение

$$\Lambda_{kl}^{-1} = (\Lambda_{kl}^{(0)})^{-1} - (\Lambda_{km}^{(0)})^{-1} (\varepsilon_{mn} - \delta_{mn}) (\Lambda_{nl}^{(0)})^{-1},$$

получим

$$\varepsilon_{ij}^{(2)} - \varepsilon_{ij}^{(2)*} = \frac{4\pi i}{\omega T} \langle j_i j_j \rangle_{k\omega}^{(0)}, \quad (11.3.1.4)$$

где  $\langle j_i j_j \rangle_{k\omega}^{(0)}$  — спектральное распределение флуктуаций тока в среде без учета электромагнитного взаимодействия между частицами. Отсюда, поступая так же, как и при выводе (11.3.1.3), можно найти  $\varepsilon_{ij}$  [10]; имеем

$$\varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \delta_{ij} + \frac{2}{\omega T} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle j_i j_j \rangle_{k\omega'}^{(0)}}{\omega' - \omega - i0} d\omega'. \quad (11.3.1.5)$$

При выводе этой формулы мы воспользовались соотношением

$$\int_{-\infty}^{\infty} \langle j_i j_j \rangle_{k\omega}^{(0)} d\omega = 1/2 T \omega_{pe}^2 \delta_{ij}.$$

**11.3.2. Диэлектрическая проницаемость изотропной плазмы.** Вычислим теперь величину  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^{(0)}$  в случае изотропной плазмы, причем для простоты не будем учитывать движение ионов.

Введем плотность электронов  $n(\mathbf{r}, t)$ , определив ее следующим образом:

$$n(\mathbf{r}, t) = \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_{\alpha}(t)), \quad (11.3.2.1)$$

где  $\mathbf{r}_{\alpha}(t)$  — радиус-вектор  $\alpha$ -го электрона в момент времени  $t$  и суммирование производится по всем электронам, находящимся в единице объема. Так как нас интересует спектральное распределение  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  в отсутствие взаимодействия между электронами, то мы можем считать, что  $\mathbf{r}_{\alpha}(t) = \mathbf{r}_{\alpha} + \mathbf{v}_{\alpha}t$ , где  $\mathbf{v}_{\alpha}$  — скорость  $\alpha$ -го электрона. Флуктуация плотности заряда в плазме связана с  $n(\mathbf{r}, t)$  соотношением

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e \{n(\mathbf{r}, t) - n_0\}, \quad (11.3.2.2)$$

где  $n_0 = \langle n(\mathbf{r}, t) \rangle$  — среднее значение плотности электронов. Подставляя это выражение в определение корреляционной функции для флуктуаций плотности заряда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}_1 t_1}^{(0)} \equiv \langle \rho(\mathbf{r}_1, t_1) \rho(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle$$

и используя (11.3.2.1) и (11.3.2.2), получим

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}_1 t_1}^{(0)} = e^2 \left\langle \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\alpha}t_1) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha} - \mathbf{v}_{\alpha}t_2) \right\rangle, \quad (11.3.2.3)$$

где угловые скобки служат для обозначения статистического усреднения.

Введем одночастичную функцию распределения электронов  $f_0(\mathbf{v})$ , нормированную согласно условию  $\int f_0(\mathbf{v}) d^3v = n_0$ . Тогда, очевидно,

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}_1 t_1}^{(0)} = e^2 \int f_0(\mathbf{v}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t) d^3v. \quad (11.3.2.4)$$

Чтобы найти спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в пренебрежении взаимодействием между заряженными частицами  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$ , нужно вычислить компоненту Фурье функции  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}_1 t_1}^{(0)}$ :

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = 2\pi e^2 \int f_0(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v. \quad (11.3.2.5)$$

Подставив, наконец, это выражение в первое из уравнений (11.3.1.3), найдем продольную диэлектрическую проницаемость плазмы

$$\varepsilon_l(k, \omega) = 1 + \frac{4\pi e^2}{Tk^2} \int \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}f_0(\mathbf{v})}{\mathbf{k}\mathbf{v} - \omega - i0} d^3v \quad (11.3.2.6)$$

Последнее соотношение совпадает с выражением (4.3.4.3) для  $\varepsilon_l(k, \omega)$ , полученным с помощью кинетического уравнения Власова. С другой стороны, как было показано выше, (11.3.2.6) справедливо с точностью до членов порядка  $e^4$ . Поэтому

можно утверждать, что и формула (4.3.4.3), основанная на кинетическом рассмотрении с самосогласованным полем справедлива с такой же точностью.

Поступая аналогичным путем можно получить формулу (4.3.4.3) для поперечной диэлектрической проницаемости изотропной плазмы.

**11.3.3. Тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле.** Найдем теперь таким же методом тензор диэлектрической проницаемости плазмы, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле. Пренебрегая взаимодействием друг с другом частиц плазмы можно считать, что они движутся по винтовым линиям

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{R}(t), \quad (11.3.3.1)$$

где  $\mathbf{R}(t)$  — вектор с компонентами  $\left(-\frac{v_{\perp}}{\omega_{Be}} \cos \omega_{Be} t, \frac{v_{\perp}}{\omega_{Be}} \sin \omega_{Be} t, v_{\parallel} t\right)$ ,  $v_{\parallel}$  и  $v_{\perp}$  — продольная и поперечная составляющие скорости электрона по отношению к магнитному полю  $\mathbf{B}_0$ , вдоль которого направлена ось  $z$ .

Корреляционная функция для флуктуаций плотности заряда определяется по-прежнему равенством

$$\langle \rho^2 \rangle_{rt}^{(0)} = e^2 \left\langle \sum_{\alpha} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{\alpha}(t_1)) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_{\alpha}(t_2)) \right\rangle, \quad (11.3.3.2)$$

где  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $t = t_2 - t_1$  и суммирование производится по всем электронам в единице объема. Вводя одночастичную функцию распределения  $f_0(\mathbf{v})$ , корреляционную функцию  $\langle \rho^2 \rangle_{rt}$  представим в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{rt}^{(0)} = e^2 \int f_0(\mathbf{v}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(0)) d^3v. \quad (11.3.3.3)$$

Спектральное распределение флуктуаций плотности заряда определяется выражением

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^{(0)} = e^2 \int f_0(\mathbf{v}) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ik \{ \mathbf{r}(t) - \mathbf{r}(0) \} + i\omega t) dt d^3v. \quad (11.3.3.4)$$

Используя соотношения

$$\begin{aligned} \exp(-ia \sin \psi) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(a) \exp(-in\psi), \\ \int_0^{2\pi} \exp(ia \sin \psi - in\psi) d\psi &= 2\pi J_n(a), \end{aligned}$$

где  $J_n(a)$  — функции Бесселя, получим для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда следующую формулу:

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}^{(0)} = 2\pi e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f_0(\mathbf{v}) J_n^2 \left( \frac{k_{\perp} v_{\perp}}{\omega_{Be}} \right) \delta(\omega - n\omega_{Be} - k_{\parallel} v_{\parallel}) d^3v. \quad (11.3.3.5)$$

Аналогичным образом можно найти в общем виде спектральное распределение флуктуаций плотности тока электронов при наличии внешнего магнитного поля

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = 2\pi e^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int f_0(\mathbf{v}) \Pi_{ji}^{(n)}(\mathbf{v}) \delta(\omega - n\omega_{Be} - k_{\parallel} v_{\parallel}) d^3v, \quad (11.3.3.6)$$

где тензор  $\Pi_{ji}^{(n)}$  определяется формулой (5.2.1.15).

Если функция распределения электронов является максвелловской, то в (11.3.3.3) можно выполнить интегрирование; тогда имеем

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{r}t}^{(0)} = e^2 n_0 \left( \frac{m_e}{2\pi T} \right)^{3/2} \frac{\omega_{Be}^2}{4t \sin^2(1/2\omega_{Be}t)} \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{m_e}{2T} \left[ \frac{\omega_{Be}^2}{4 \sin^2(1/2\omega_{Be}t)} (x^2 + y^2) + \frac{z^2}{t^2} \right] \right\}. \quad (11.3.3.7)$$

Отсюда с помощью преобразования Фурье находим спектральное распределение флуктуаций плотности зарядов

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = e^2 n_0 \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{T}{2m_e} \left[ 2 \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} (1 - \cos \omega_{Be}t) + k_{\parallel}^2 t^2 \right] + i\omega t \right\} dt. \quad (11.3.3.8)$$

Аналогичным образом можно найти спектральное распределение флуктуаций плотности тока в равновесной плазме во внешнем магнитном поле

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = \\ = e^2 n_0 \frac{T}{m_e} \int_{-\infty}^{\infty} \pi_{ji}(t) \exp \left\{ -\frac{T}{2m_e} \left[ 2 \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} (1 - \cos \omega_{Be}t) + k_{\parallel}^2 t^2 \right] + i\omega t \right\} dt, \quad (11.3.3.9)$$

где

$$\pi_{ij}(t) = \\ = \begin{pmatrix} \cos \omega_{Be}t - \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \sin^2 \omega_{Be}t & - \left[ 1 - \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \times \right. & \left. - \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp} k_{\parallel}}{\omega_{Be}} t \sin \omega_{Be}t \right] \sin \omega_{Be}t \\ \left[ 1 - \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \times \right. & \cos \omega_{Be}t + \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} \times & \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp} k_{\parallel}}{\omega_{Be}} t (1 - \cos \omega_{Be}t) \\ \left. \times (1 - \cos \omega_{Be}t) \right] \sin \omega_{Be}t & \times (1 - \cos \omega_{Be}t)^2 & \\ - \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp} k_{\parallel}}{\omega_{Be}} t \sin \omega_{Be}t & - \frac{T}{m_e} \frac{k_{\perp} k_{\parallel}}{\omega_{Be}} t (1 - \cos \omega_{Be}t) & 1 - \frac{T}{m_e} k_{\parallel}^2 t^2 \end{pmatrix}. \quad (11.3.3.10)$$

Отсюда, используя (11.3.1.5), получим следующую формулу для тензора диэлектрической проницаемости равновесной электронной плазмы в магнитном поле:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \\ = \delta_{ij} + i \frac{\omega_{pe}^2}{\omega} \int_0^{\infty} \pi_{ij}(t) \exp \left\{ -\frac{T}{2m_e} \left[ 2 \frac{k_{\perp}^2}{\omega_{Be}^2} (1 - \cos \omega_{Be} t) + k_{\parallel}^2 t^2 \right] + i\omega t \right\} dt. \end{aligned} \quad (11.3.3.11)$$

Воспользовавшись разложением

$$\exp(x \cos \omega_{Be} t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) \exp(in\omega_{Be} t),$$

где  $I_n(x)$  — модифицированные функции Бесселя, и замечая, что

$$\int_0^{\infty} \exp(-q^2 t^2 + iat) dt = \frac{i}{\alpha} \{ \varphi(z) - i\sqrt{\pi} z \exp(-z^2) \},$$

$$\varphi(z) = 2z \exp(-z^2) \int_0^z \exp(y^2) dy, \quad z = \alpha/2q,$$

можно представить  $\varepsilon_{ij}$  в виде (5.2.2.4).

## § 11.4. Электромагнитные флуктуации в неизотермической плазме

### 11.4.1. Флуктуации в изотропной неизотермической плазме.

В предыдущих параграфах мы определили флуктуации электромагнитных величин в равновесной плазме. Для нахождения этих флуктуаций было достаточно знания тензора диэлектрической проницаемости плазмы. В общем случае неравновесной плазмы задания тензора уже недостаточно для определения флуктуаций в плазме.

Переходя к изучению флуктуаций в неравновесной плазме, начнем с рассмотрения флуктуаций в неизотермической свободной плазме, электроны и ионы которой характеризуются максвелловскими распределениями с различными температурами  $T_e$  и  $T_i$  [9, 10, 15].

Вследствие большого различия между массами электронов и ионов обмен энергией между ними происходит значительно медленнее, чем между частицами одного сорта; поэтому неизотермическую плазму можно рассматривать как квазиравновесную систему и применить к исследованию флуктуаций в ней флуктуационно-диссипативное соотношение. Необходимо, однако, иметь в виду, что электроны и ионы в плазме связаны самосогласованным полем и, следовательно, флуктуации плотностей зарядов

и токов электронной и ионной компонент в плазме не независимы, и, в частности, определяются обеими температурами  $T_0$  и  $T_1$ .

Введем в материальные уравнения (11.2.1.3) сторонние случайные поля  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{E}_1$ , действующие независимо на электроны и ионы; тогда

$$j_i^\alpha = -i\omega\kappa_{ij}^\alpha (E_j + \tilde{E}_j^\alpha), \quad \alpha = e, i, \quad (11.4.1.1)$$

где  $\kappa_{ij}^\alpha$  — составляющая тензора диэлектрической восприимчивости плазмы и  $E$  — самосогласованное поле, определяемое уравнениями Максвелла

$$\Delta_j^{(0)} E_j = -\frac{4\pi i}{\omega} (j_i^e + j_i^i). \quad (11.4.1.2)$$

Исключая с помощью этих уравнений из (11.4.1.1) поле  $E$ , получим следующие соотношения между электронной и ионной плотностями токов  $j^\alpha$  и случайными потенциалами  $A^\alpha$  ( $\tilde{E}^\alpha = i\omega A^\alpha$ ):

$$\left. \begin{aligned} j_i^e &= \omega^2 \frac{\kappa_i^e}{\epsilon_i} \{ (1 + 4\pi\kappa_i^i) A_i^e - 4\pi\kappa_i^i A_i^i \}, \\ j_i^i &= \omega^2 \frac{\kappa_i^i}{\epsilon_i} \{ -4\pi\kappa_i^e A_i^e + (1 + 4\pi\kappa_i^e) A_i^i \}; \end{aligned} \right\} \quad (11.4.1.3)$$

$$\left. \begin{aligned} j_i^e &= \omega^2 \frac{\kappa_i^e}{\epsilon_i - \mathcal{N}^2} \{ (1 + 4\pi\kappa_i^i - \mathcal{N}^2) A_i^e - 4\pi\kappa_i^i A_i^i \}, \\ j_i^i &= \omega^2 \frac{\kappa_i^i}{\epsilon_i - \mathcal{N}^2} \{ -4\pi\kappa_i^e A_i^e + (1 + 4\pi\kappa_i^e - \mathcal{N}^2) A_i^i \}. \end{aligned} \right\} \quad (11.4.1.4)$$

Обратим внимание на то, что благодаря наличию самосогласованного поля плотность электронного тока оказывается зависящей от ионного стороннего потенциала, а плотность ионного тока — от электронного стороннего потенциала.

Так как между плотностями тока  $j^e$  и  $j^i$  имеется связь и система не находится в состоянии полного равновесия, то определить флуктуации непосредственно по формулам (11.1.2.15), зная коэффициенты пропорциональности между  $j^\alpha$  и  $A^\alpha$ , нельзя. Однако, используя соотношения (11.4.1.3) и (11.4.1.4), можно выразить корреляторы плотностей тока через корреляторы сторонних потенциалов  $A^\alpha$ . Сторонние же потенциалы независимы, и поэтому флуктуации каждого из них будут определяться только температурой соответствующей подсистемы (температурой электронов или ионов).

Разрешая систему (11.4.1.3) и (11.4.1.4) относительно потенциалов, найдем

$$\omega^2 A_i^\alpha = \frac{1}{\kappa_i^\alpha} j_i^\alpha + 4\pi j_i, \quad \omega^2 A_i^\alpha = \frac{1}{\kappa_i^\alpha} j_i^\alpha + \frac{4\pi}{1 - \mathcal{N}^2} j_i, \quad \alpha = e, i. \quad (11.4.1.5)$$

Используя затем флуктуационно-диссипативное соотношение в форме (11.1.2.23), получим следующие формулы для спектрального распределения флуктуаций сторонних потенциалов:

$$\langle A_i^\alpha A_j^\alpha \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 2 \frac{T_\alpha}{\omega^3} \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{\text{Im } x_i^\alpha}{|x_i^\alpha|^2} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{\text{Im } x_j^\alpha}{|x_j^\alpha|^2} \right\}, \quad \alpha = e, i. \quad (11.4.1.6)$$

$$\langle A_i^e A_j^i \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 0. \quad (11.4.1.7)$$

Как и следовало ожидать, флуктуации электронного потенциала выражаются только через электронную восприимчивость плазмы, а флуктуации ионного потенциала — через ионную восприимчивость плазмы.

С помощью соотношений (11.4.1.2) и (11.4.1.3) получим далее следующие общие формулы для спектральных распределений флуктуаций плотностей тока в неизотермической плазме [10]:

$$\begin{aligned} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{2\omega}{|\varepsilon_i|^2} \frac{k_i k_j}{k^2} \{ T_e |1 + 4\pi\kappa_i^e|^2 \text{Im } x_i^e + T_i 16\pi^2 |x_i^e|^2 \text{Im } x_i^e \} + \\ &+ \frac{2\omega}{|\varepsilon_i - \mathcal{N}^2|^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \{ T_e |1 + 4\pi\kappa_i^e - \mathcal{N}^2|^2 \text{Im } x_i^e + \\ &+ T_i 16\pi^2 |x_i^e|^2 \text{Im } x_i^e \}, \quad (11.4.1.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle j_i^i j_j^i \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{2\omega}{|\varepsilon_i|^2} \frac{k_i k_j}{k^2} \{ T_e 16\pi^2 |x_i^i|^2 \text{Im } x_i^i + T_i |1 + 4\pi\kappa_i^i|^2 \text{Im } x_i^i \} + \\ &+ \frac{2\omega}{|\varepsilon_i - \mathcal{N}^2|^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \{ T_e 16\pi^2 |x_i^i|^2 \text{Im } x_i^i + \\ &+ T_i |1 + 4\pi\kappa_i^i - \mathcal{N}^2|^2 \text{Im } x_i^i \}, \quad (11.4.1.9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle j_i^e j_j^i \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \langle j_i^i j_j^e \rangle_{\mathbf{k}\omega}^* = - \frac{2\omega}{|\varepsilon_i|^2} \frac{k_i k_j}{k^2} \{ T_e (1 + 4\pi\kappa_i^e) 4\pi\kappa_i^i \text{Im } x_i^e + \\ &+ T_i 4\pi\kappa_i^i (1 + 4\pi\kappa_i^e)^* \text{Im } x_i^i \} - \\ &- \frac{2\omega}{|\varepsilon_i - \mathcal{N}^2|^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \{ T_e (1 + 4\pi\kappa_i^e - \mathcal{N}^2) 4\pi\kappa_i^i \text{Im } x_i^e + \\ &+ T_i 4\pi\kappa_i^i (1 + 4\pi\kappa_i^e - \mathcal{N}^2)^* \text{Im } x_i^i \}. \quad (11.4.1.10) \end{aligned}$$

Эти формулы позволяют найти спектральные распределения флуктуаций любых величин в неизотермической плазме. Так, спектральные распределения флуктуаций плотностей электронов и ионов в двухтемпературной плазме имеют вид

$$\langle n_e^e \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{8\pi n_0 a_e^2 k^2}{\omega |\varepsilon_i|^2} \left\{ |1 + 4\pi\kappa_i^e|^2 \text{Im } x_i^e + 16\pi^2 \frac{T_i}{T_e} |x_i^e|^2 \text{Im } x_i^e \right\}, \quad (11.4.1.11)$$

$$\langle n_i^i \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{8\pi n_0 a_e^2 k^2}{\omega |\varepsilon_i|^2} \left\{ 16\pi^2 |x_i^i|^2 \text{Im } x_i^i + \frac{T_i}{T_e} |1 + 4\pi\kappa_i^e|^2 \text{Im } x_i^e \right\}, \quad (11.4.1.12)$$

$$\begin{aligned} \langle n_e n_i \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \langle n_i n_e \rangle_{\mathbf{k}\omega}^* = \\ &= \frac{32\pi^2 n_0 a_e^2 k^2}{\omega |\varepsilon_i|^2} \left\{ (1 + 4\pi\kappa_i^e) x_i^i \text{Im } x_i^e + \frac{T_i}{T_e} x_i^i (1 + 4\pi\kappa_i^e)^* \text{Im } x_i^i \right\}. \quad (11.4.1.13) \end{aligned}$$

Используя последние три соотношения, можно найти спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в двухтемпературной плазме; оно равно

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{8\pi e^2 n_0 a_0^2 k^2}{\omega |\varepsilon_l|^2} \operatorname{Im} \left( x_l^2 + \frac{T_i}{T_e} x_l \right). \quad (11.4.1.14)$$

Представим это распределение в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \sqrt{2\pi} e^2 n_0 \frac{a_0^2 k^3}{\omega_{pe}} \times \\ \times \frac{\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2)}{\{a_0^2 k^2 + 1 - \varphi(z) + p[1 - \varphi(\mu z)]\}^2 + \pi z^2 [\exp(-z^2) + p\mu \exp(-\mu^2 z^2)]^2}, \quad (11.4.1.15)$$

где  $z = \omega/\sqrt{2} kv_0$ ,  $\mu = \sqrt{m_i/m_e}$  и  $p = T_e/T_i$ .

Приведем, наконец, приближенные формулы для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда в различных предельных случаях при  $a_0^2 k^2 \ll 1$ . В области малых частот  $\omega \ll kv_i$  ( $z \ll \mu^{-1}$ ) имеем

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \sqrt{2\pi} e^2 n_0 \frac{a_0^2 k^3}{\omega_{pe}} \sqrt{\frac{m_i}{m_e}} \frac{T_i^2}{(T_e + T_i)^2}. \quad (11.4.1.16)$$

С увеличением частоты величина  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}$  убывает по экспоненциальному закону. Если  $z \ll \mu^{-1} \ll 1$ , то

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \sqrt{2\pi} e^2 n_0 \frac{a_0^2 k^3}{\omega_{pe}} \frac{\mu \exp(-\mu^2 z^2)}{\{1 + p[1 - \varphi(\mu z)]\}^2 + \pi \mu^2 z^2 \exp(-2\mu^2 z^2)}. \quad (11.4.1.17)$$

Ширина максимума в области малых частот по порядку величины равна  $z \sim \mu^{-1}$ . Высота максимума, согласно (11.4.1.16), сильно зависит от степени неизотермичности плазмы. В сильно неизотермической плазме ( $p \gg 1$ ) высота максимума (11.4.1.16) значительно ниже, чем в изотермической. Если  $\mu^{-1} \ll z \ll 1$ , то

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \sqrt{2\pi} e^2 n_0 \frac{a_0^2 k^3}{\omega_{pe}} \frac{1 + \mu \exp(-\mu^2 z^2)}{(a_0^2 k^2 + 1 - p/2\mu^2 z^2)^2 + \pi z^2 [1 + p\mu \exp(-\mu^2 z^2)]^2}. \quad (11.4.1.18)$$

В этой области частот спектральная плотность  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}$  для изотермической плазмы ( $p = 1$ ) очень мала — в  $\mu$  раз меньше ее значения в максимуме (см. (11.4.1.16)). В сильно неизотермической плазме ( $p \gg 1$ ) спектральная плотность флуктуаций имеет резкие максимумы при  $\omega = \pm \omega_s(k)$ , где  $\omega_s(k) = kv_s$  — частота неизотермических звуковых колебаний; в данном случае

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \pi e^2 n_0 a_0^4 k^4 \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}. \quad (11.4.1.19)$$

С увеличением частоты  $\omega \approx kv_0$  ( $z \approx 1$ ) спектральная плотность флуктуаций убывает по экспоненциальному закону, а именно пропорционально  $\exp(-z^2)$ . При больших частотах  $\omega \gg kv_0$

( $z \gg 1$ ) основную роль в флуктуациях плотности заряда играют электроны, и величина  $\langle \rho^2 \rangle_{\text{кв}}$  определяется формулой (11.2.3.3). В частности, она имеет максимумы при частотах, соответствующих плазменным колебаниям.

#### 11.4.2. Флуктуации в анизотропной неизотермической плазме.

Обобщим теперь полученные результаты на случай анизотропной неизотермической плазмы [10]. В частности такое обобщение пригодно для неизотермической плазмы, находящейся во внешнем постоянном и однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ .

Вводя сторонние поля в материальные уравнения (11.4.1.1) и используя уравнение Максвелла (11.4.1.2), представим самосогласованное электрическое поле в виде

$$E_j = -4\pi i \omega \Lambda_{j_i}^{-1} \{x_{ik}^\alpha A_k^\alpha + x_{ik}^\beta A_k^\beta\}. \quad (11.4.2.1)$$

Тензор диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon_{ij}$ , так же как восприимчивости  $x_{ij}^\alpha$  и  $x_{ij}^\beta$ , в анизотропном случае не сводится к продольной и поперечной составляющим. Подставляя (11.4.2.1) в (11.4.1.1), выразим плотности тока через сторонние потенциалы  $A^\alpha$ :

$$j_i^\alpha = \omega^2 \sum_{\beta} (\delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} - 4\pi x_{ik}^\alpha \Lambda_{kj}^{-1}) x_{jl}^\beta A_l^\beta, \quad (11.4.2.2)$$

откуда

$$\omega^2 A_i^\alpha = (x_{ij}^\alpha)^{-1} j_j^\alpha + 4\pi (\Lambda_{ij}^{(0)})^{-1} j_j. \quad (11.4.2.3)$$

Замечая, что  $\Lambda_{ij}^{(0)}$  — вещественный симметричный тензор, и используя флуктуационно-диссипативное соотношение (11.1.2.23), найдем

$$\langle A_i^\alpha A_j^\beta \rangle_{\text{кв}} = \frac{T_\alpha}{\omega} i \{ (x_{ji}^\alpha)^{-1} - [(x_{ij}^\alpha)^{-1}]^* \}. \quad (11.4.2.4)$$

Воспользовавшись затем (11.4.2.2), нетрудно получить общие формулы, определяющие спектральные распределения флуктуаций плотностей электронного и ионного токов в анизотропной неизотермической плазме

$$\langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\text{кв}} = i \omega \sum_{\gamma} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{im} - 4\pi x_{ik}^\alpha \Lambda_{km}^{-1})^* (\delta_{\beta\gamma} \delta_{jn} - 4\pi x_{jl}^\beta \Lambda_{ln}^{-1}) T_\gamma [(x_{mn}^\gamma)^* - x_{mn}^\gamma], \quad (11.4.2.5)$$

$\alpha, \beta, \gamma = e, i.$

Учитывая, что полная плотность тока  $\mathbf{j}$  равна сумме электронной и ионной плотностей  $\mathbf{j}_e$  и  $\mathbf{j}_i$ , получим следующие формулы для спектрального распределения флуктуаций плотности тока:

$$\langle j_i j_j \rangle_{\text{кв}} = i \omega (\delta_{im} - 4\pi x_{ik} \Lambda_{km}^{-1})^* (\delta_{jn} - 4\pi x_{jl} \Lambda_{ln}^{-1}) \sum_{\gamma} T_\gamma [(x_{mn}^\gamma)^* - x_{mn}^\gamma], \quad (11.4.2.6)$$

$$\langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\text{кв}} = i \omega \sum_{\gamma} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{im} - 4\pi x_{ik}^\alpha \Lambda_{km}^{-1})^* (\delta_{\beta\gamma} \delta_{jn} - 4\pi x_{jl}^\beta \Lambda_{ln}^{-1}) T_\gamma [(x_{mn}^\gamma)^* - x_{mn}^\gamma]. \quad (11.4.2.7)$$

Используя уравнения Максвелла, можно получить отсюда, учитывая (11.4.2.5) и последнее соотношение, спектральные распределения флуктуаций всех интересующих нас величин. В частности спектральные распределения флуктуаций плотности электронов, электрического и магнитного полей имеют следующий вид:

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k_i k_j}{e^2 \omega^2} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (11.4.2.8)$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2 i}{\omega^2} (\Lambda_{ik}^{-1})^* \Lambda_{ji}^{-1} \sum_{\gamma} T_{\gamma} [(x_{ki}^{\gamma})^* - x_{kj}^{\gamma}], \quad (11.4.2.9)$$

$$\langle B_i B_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} \frac{c^{\mathcal{N}^2}}{(c^{\mathcal{N}^2} - 1)^2} \epsilon_{ikl} \epsilon_{jmn} \frac{k_l k_m}{k^2} \langle j_l j_n \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (11.4.2.10)$$

где  $\epsilon_{ikl}$  — единичный полностью антисимметричный тензор. Как уже отмечалось, спектральные распределения флуктуаций имеют резкие максимумы вблизи значений  $\omega_r$  и  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющих дисперсионному уравнению  $\Lambda(\mathbf{k}, \omega_r(\mathbf{k})) = 0$  (индекс  $r$  нумерует собственные колебания). Нетрудно установить вид этих распределений вблизи таких максимумов. Например, для  $\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  имеем

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \sum_r B_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\omega - \omega_r(\mathbf{k})), \quad (11.4.2.11)$$

где

$$B_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = i\pi\omega \left( \frac{\partial \Lambda}{\partial \omega} \right)^{-1} \frac{16\pi^2 x_{ik} x_{jl}^* \lambda_{km} \lambda_{ln}^* \sum_{\gamma} T_{\gamma} [(x_{mn}^{\gamma})^* - x_{nm}^{\gamma}]}{\text{Im } \Lambda},$$

а  $\lambda_{ij}$  определяется соотношением  $\lambda_{ij} \Lambda_{jk} = \Lambda \delta_{ik}$ .

**11.4.3. Флуктуации в неизоотермической плазме, находящейся в магнитном поле.** В качестве примера приложения полученных общих формул рассмотрим флуктуации в неизоотермической двухтемпературной плазме, находящейся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$  [10]. Так как в области высоких частот основную роль в коллективных движениях плазмы играют электроны, то влиянием ионов в этой области можно пренебречь. Поэтому корреляционные функции для флуктуаций в высокочастотной области оказываются такими же, как и для равновесного случая с температурой, равной температуре электронов.

В низкочастотной области флуктуации в неизоотермической плазме существенно отличаются от флуктуаций в равновесной плазме.

Существование слабозатухающих синхротронногидродинамических колебаний в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, приводит к появлению в низкочастотной части спектра флуктуаций добавочных максимумов, связанных с этими колебаниями.

Флуктуации, связанные с альвеновскими и магнитозвуковыми колебаниями в магнитоактивной плазме, описываются общими формулами (11.4.2.9)—(11.4.2.11), в которых для диэлектрических проницаемостей следует воспользоваться выражениями (5.2.2.4). Сохраняя наивысшие степени большого параметра  $\omega_{Bi}/\omega$ , можно получить для корреляционных функций при  $\omega \ll \ll \omega_{Bi}$  простые формулы. Так, спектральное распределение флуктуаций электрического поля вблизи альвеновских частот можно представить в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 e_i^* e_j T_e \frac{v_A^2}{c^2} \{ \delta(\omega - kv_A \cos \theta) + \delta(\omega + kv_A \cos \theta) \}, \quad (11.4.3.1)$$

где векторы поляризации  $\mathbf{e}$  определяются следующим образом:

$$\mathbf{e} = \left\{ 1, -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \operatorname{ctg}^2 \theta, -\frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\omega^2}{\omega_{Bi}^2} (\sin \theta \cos \theta)^{-1} \right\}. \quad (11.4.3.2)$$

Магнитозвуковые флуктуации электрического поля характеризуются спектральными распределениями

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 e_i^* e_j T_e \frac{v_A^2}{c^2} \{ \delta(\omega - kv_A) + \delta(\omega + kv_A) \}, \quad (11.4.3.3)$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 4\pi^2 e_i^* e_j T_e a_e^2 k^2 \{ \delta(\omega - kv_s \cos \theta) + \delta(\omega + kv_s \cos \theta) \}, \quad (11.4.3.4)$$

где векторы поляризации для быстрой и медленной магнитозвуковых волн имеют компоненты, равные соответственно

$$\mathbf{e} = \left\{ -i \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \sin^{-2} \theta, \quad 1, \quad -i \frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\omega}{\omega_{Bi}} \sin \theta \cos \theta \right\}, \quad (11.4.3.5)$$

$$\mathbf{e} = \left\{ \sin \theta, \quad -i \frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\omega_{Bi}}{\omega} \sin \theta \cos \theta, \quad \cos \theta \right\}. \quad (11.4.3.6)$$

Отметим, что спектральные распределения для низкочастотных флуктуаций пропорциональны квадрату отношения фазовой скорости соответствующей волны к скорости света в вакууме.

## § 11.5. Электромагнитные флуктуации в неравновесной плазме

**11.5.1. Спектральные распределения флуктуаций в плазме с неравновесными, но устойчивыми функциями распределения.** В предыдущих параграфах мы определили флуктуации электромагнитных величин в равновесной и квазиравновесной (двухтемпературной) плазме — для этого было достаточно знания ее диэлектрической проницаемости. Теперь перейдем к исследованию

флуктуаций в неравновесной плазме, в которой распределения частиц существенно отличаются от максвелловского \*).

Такая ситуация может возникать в бесстолкновительной плазме, где вследствие редких столкновений между частицами требуется большое время для установления равновесного состояния. Поэтому речь будет теперь идти о временах, малых по сравнению с временами релаксации плазмы, т. е. о флуктуациях, относящихся к таким интервалам времени. Начнем с рассмотрения свободной плазмы с неравновесными, но устойчивыми функциями распределения частиц. В § 11.3 мы нашли для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда в плазме, пренебрегая взаимодействием между частицами, соотношение

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = 2\pi e^2 \int f_0(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v, \quad (11.5.1.1)$$

где  $f_0(\mathbf{v})$  — функция распределения электронов. При его выводе мы не требовали, чтобы плазма находилась в состоянии равновесия. Поэтому можно считать, что эта формула определяет спектральное распределение флуктуаций плотности заряда и в случае неравновесной плазмы, описываемой функциями распределения  $f_0(\mathbf{v})$ .

Аналогичная формула справедлива для спектральных распределений флуктуаций плотности электронного и ионного токов

$$\langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = 2\pi e^2 \delta_{\alpha\beta} \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) v_i v_j \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v, \quad (11.5.1.2)$$

где  $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$  — функция распределения электронов или ионов ( $\alpha = e, i$ ) в неравновесной плазме.

Если плазма находится во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ , то для спектральных распределений флуктуаций плотности токов получим

$$\langle j_i^\alpha j_j^\beta \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = 2\pi e^2 \delta_{\alpha\beta} \sum_n \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v}) \delta(\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}) d^3v, \quad (11.5.1.3)$$

$$\alpha, \beta = e, i,$$

где тензор  $\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})$  определяется выражением (5.2.1.15).

Учтем теперь взаимодействие между частицами посредством самосогласованного поля. Обратимся для этого к материальным уравнениям (11.4.1.1) и введем в них плотности случайных сторонних токов  $\mathbf{j}_0^\alpha$

$$\mathbf{j}^\alpha = -i\omega \hat{\chi}^\alpha \mathbf{E} + \mathbf{j}_0^\alpha, \quad (11.5.1.4)$$

\*) Флуктуации в неравновесной плазме исследованы в работах [10, 16, 17]. В дальнейшем мы следуем работе [10].

где тензор  $x^\alpha$  строится с помощью неравновесных функций распределения  $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$  согласно формуле

$$x_{ij}^\alpha(\mathbf{k}, \omega) = \frac{e^2}{m_\alpha \omega^2} \left\{ \sum_n \int \left( \frac{\omega - k_{\parallel} v_{\parallel}}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} + k_{\parallel} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\parallel}} \right) \frac{\Pi_{ij}^{(n)}(\mathbf{v})}{\omega - n\omega_{B\alpha} - k_{\parallel} v_{\parallel}} d^3v - \right. \\ \left. - \left( n_0 + \int \frac{v_{\parallel}^2}{v_{\perp}} \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial v_{\perp}} d^3v \right) b_i b_j \right\}. \quad (11.5.1.5)$$

Так как плотности случайных сторонних токов не должны зависеть от самосогласованного взаимодействия, то спектральные распределения флуктуаций для них будут такими же, как и в случае невзаимодействующих частиц, т. е. будут определяться формулами (11.5.1.3). Исключив из (11.5.1.4) самосогласованное поле  $E$  с помощью уравнений Максвелла, найдем

$$\langle j_i^{\alpha} j_j^{\beta} \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \sum_{\gamma} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{im} - 4\pi x_{ik}^{\alpha} \Lambda_{km}^{-1}) (\delta_{\beta\gamma} \delta_{jn} - 4\pi x_{jl}^{\beta} \Lambda_{ln}^{-1}) \langle j_m^{\gamma} j_n^{\gamma} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}. \quad (11.5.1.6)$$

Эта формула устанавливает общую связь между спектральным распределением флуктуаций плотности тока с учетом самосогласованного взаимодействия между заряженными частицами в плазме и спектральным распределением флуктуаций плотности тока невзаимодействующих частиц.

Спектральные распределения флуктуаций плотности полного тока и электрического поля в неравновесной плазме определяются формулами

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = (\delta_{im} - 4\pi x_{ik} \Lambda_{km}^{-1})^* (\delta_{jn} - 4\pi x_{jl} \Lambda_{ln}^{-1}) \langle j_m^{\alpha} j_n^{\alpha} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}, \quad (11.5.1.7)$$

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2}{\omega^2} (\Lambda_{ik}^{-1})^* \Lambda_{jl}^{-1} \langle j_k j_l \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}. \quad (11.5.1.8)$$

Аналогичным образом нетрудно найти спектральные распределения флуктуаций других величин в плазме.

Как мы видели в § 11.4, в случае равновесной или квазиравновесной двухтемпературной плазмы спектральные распределения флуктуаций плотностей электронного и ионного сторонних токов выражаются через восприимчивости плазмы  $x_{ij}^{\alpha}(\mathbf{k}, \omega)$  следующим образом:

$$\langle j_i^{\alpha} j_j^{\beta} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = iT_{\alpha} [(x_{ij}^{\alpha})^* - x_{ji}^{\alpha}] \delta_{\alpha\beta}. \quad (11.5.1.9)$$

Для неравновесной плазмы спектральные распределения флуктуаций токов выражаются через величины  $\langle j_i^{\alpha} j_j^{\beta} \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$ , которые, однако, нельзя представить при помощи электронной и ионной восприимчивостей плазмы; поэтому в неравновесной плазме знания величин  $x_{ij}^{\alpha}$  недостаточно для описания флуктуаций, в отличие от равновесной или квазиравновесной неизотермической плазмы.

Выражения для спектральных распределений флуктуаций в неравновесной плазме сильно упрощаются в частном случае изотропного распределения ее частиц. Действительно, вводя продольные и поперечные проницаемости и восприимчивости для неравновесной плазмы  $\epsilon_l$ ,  $\epsilon_j$ ,  $\chi_l^a$  и  $\chi_j^a$  и замечая, что в изотропном случае

$$\Lambda_{ij}^{-1} = \frac{k_i k_j}{k^2} \epsilon_i^{-1} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) (\epsilon_i - \mathcal{N}^2)^{-1}, \quad (11.5.1.10)$$

можно представить спектральное распределение флуктуаций плотности электронного тока в неравновесной плазме в виде

$$\begin{aligned} \langle j_i^e j_j^e \rangle_{\mathbf{k}\omega} = & \frac{2\pi e^2 \omega^2}{k^2} \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} [|1 + 4\pi\chi_l|]^2 A^e + 16\pi^2 |\chi_l^e|^2 A^i \right\} \frac{1}{|\epsilon_l|^2} + \\ & + 1/2 \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) [|1 + 4\pi\chi_l|]^2 B^e + 16\pi^2 |\chi_l^e|^2 B^i \left\{ \frac{1}{|\epsilon_l - \mathcal{N}^2|^2} \right\}, \end{aligned} \quad (11.5.1.11)$$

где

$$A^a = \int f_{a0}(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v, \quad B^a = \int (f_{a0})'(\mathbf{v}) \frac{[\mathbf{k}\mathbf{v}]^2}{\omega^2} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3v. \quad (11.5.1.12)$$

Спектральное распределение флуктуаций электронной плотности в изотропной неравновесной плазме определяется формулой

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{2\pi}{|\epsilon_l|^2} \{ |1 + 4\pi\chi_l|]^2 A^e + 16\pi^2 |\chi_l^e|^2 A^i \}. \quad (11.5.1.13)$$

Как мы видим, в неравновесной плазме спектральное распределение флуктуаций плотности электронов определяется, помимо электронной и ионной восприимчивостей плазмы, еще величинами  $A^a(\mathbf{k}, \omega) \equiv A^a$ , которые в свою очередь определяются функциями распределения частиц по составляющим скоростей вдоль волнового вектора  $\mathbf{k}$ .

Флуктуации плотности ионов и ионного тока в изотропной неравновесной плазме задаются формулами, аналогичными (11.5.1.11) и (11.5.1.13), где следует лишь поменять местами индексы  $e$  и  $i$ . Благодаря взаимодействию между электронами и ионами существует корреляция между флуктуациями их плотностей. Спектральное распределение их флуктуаций имеет вид

$$\begin{aligned} \langle n_e n_i \rangle_{\mathbf{k}\omega}^* &= \langle n_i n_e \rangle_{\mathbf{k}\omega}^* = \\ &= - \frac{8\pi^2}{|\epsilon_l|^2} \{ (|1 + 4\pi\chi_l|)(\chi_l)^* A^e + \chi_l^e (|1 + 4\pi\chi_l^e|)^* A^i \}. \end{aligned} \quad (11.5.1.14)$$

Используя выражение (11.5.1.13) для флуктуаций плотности электронов и аналогичное выражение для флуктуаций плотности

ионов, легко найти спектральное распределение флуктуаций плотности заряда:

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{2\pi e^2}{|\epsilon_l|^2} (A^e + A^i). \quad (11.5.1.15)$$

Спектральные распределения флуктуаций продольного электрического поля и плотности продольной составляющей тока выражаются через  $\langle \rho^2 \rangle_{k\omega}$  с помощью уравнения Пуассона и уравнения непрерывности. Заметим, что в случае двухтемпературной плазмы величины  $A^e$  и  $A^i$  непосредственно выражаются через мнимые части электронной и ионной восприимчивостей плазмы:

$$A^e = \frac{k^2}{\pi e^2 n_0 \omega} T_e \operatorname{Im} \chi_e^i, \quad A^i = \frac{k^2}{\pi e^2 n_0 \omega} T_i \operatorname{Im} \chi_i^j.$$

Используя эти соотношения, можно представить (11.5.1.15) в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{2k^2}{\omega |\epsilon_l|^2} \left\{ T_e \operatorname{Im} \chi_e^i + T_i \operatorname{Im} \chi_i^j \right\}, \quad (11.5.1.16)$$

что совпадает с (11.4.1.14).

**11.5.2. Коллективные флуктуации и эффективная температура.** Спектральные распределения флуктуаций в области прозрачности плазмы имеют резкие  $\delta$ -образные максимумы при частотах собственных колебаний плазмы, удовлетворяющих дисперсионному уравнению  $\Lambda(\mathbf{k}, \omega) = 0$ . Нетрудно установить вид спектральных распределений вблизи таких максимумов [18]. (Мы будем в этом случае говорить о резонансных или когерентных флуктуациях, в отличие от некогерентных флуктуаций, для которых  $\mathbf{k}$  и  $\omega$  не связаны определенным соотношением.)

Так как в области прозрачности плазмы  $\operatorname{Im} \Lambda \ll \operatorname{Re} \Lambda$ , то

$$(\Lambda_{ik}^{-1})^* \Lambda_{jl}^{-1} \rightarrow \pi \frac{\lambda_{ik}^* \lambda_{jl}}{|\operatorname{Im} \Lambda|} \delta(\Lambda). \quad (11.5.2.1)$$

Замечая далее, что для собственных колебаний справедливо соотношение  $\lambda_{ij} = e_i e_j^* \operatorname{Sp} \lambda$ , можно представить спектральное распределение флуктуаций электрического поля в виде

$$\langle E_i E_j \rangle_{k\omega} = 8\pi^2 e_i^* e_j \tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) \frac{|\operatorname{Sp} \lambda|}{|\omega|} \delta(\Lambda), \quad (11.5.2.2)$$

где

$$\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) = 2\pi \frac{\operatorname{Sp} \lambda}{\omega \operatorname{Im} \Lambda} \langle j_i j_j \rangle_{k\omega}^{(0)} e_i e_j^*. \quad (11.5.2.3)$$

Отметим, что  $\tilde{T}$  удовлетворяет соотношению  $\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) = \tilde{T}(-\mathbf{k}, -\omega)$ . Нетрудно убедиться, что в случае равновесной плазмы эта величина совпадает с температурой плазмы. Поэтому естественно назвать ее эффективной температурой, которая характеризует

среднее значение квадрата амплитуды флуктуационных колебаний электрического поля в плазме. В неравновесной плазме эффективная температура может принимать большие значения. Если состояние плазмы приближается к границе области ее кинетической устойчивости, то  $\text{Im } \Lambda \rightarrow 0$  и эффективная температура неограниченно возрастает. Замечая, что

$$\text{Im } \Lambda = 1/2 i \text{Sp } \lambda (\epsilon_{ij}^* - \epsilon_{ij}) e_i^* e_j, \quad (11.5.2.4)$$

можно представить эффективную температуру в виде

$$\bar{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{i\omega} \frac{\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} e_i e_j^*}{(\epsilon_{kl}^* - \epsilon_{lk}) e_k e_l^*}. \quad (11.5.2.5)$$

В частности, для неизотермической плазмы эффективная температура равна

$$\bar{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\sum_{\alpha} T_{\alpha} [(x_{ij}^{\alpha})^* - x_{ji}^{\alpha}] e_i e_j^*}{\sum_{\alpha} [(x_{kl}^{\alpha})^* - x_{lk}^{\alpha}] e_k e_l^*}. \quad (11.5.2.6)$$

Отсюда непосредственно видно, что в случае равновесной плазмы  $\bar{T} = T$ .

Спектральное распределение флуктуаций парциальных токов в области прозрачности плазмы выражается непосредственно через спектральное распределение флуктуаций электрического поля, а именно

$$\langle j_i^{\alpha} j_j^{\beta} \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \omega^2 x_{ik}^{\alpha} x_{jl}^{\beta} \langle E_k E_l \rangle_{\mathbf{k}\omega}. \quad (11.5.2.7)$$

Отметим, что такая же формула была бы справедлива, если бы мы в (11.5.1.4) опустили слагаемое  $j_0^{\alpha}$ . Это связано с тем, что в области прозрачности главный вклад в спектральные распределения вносят  $\delta$ -образные слагаемые.

Приведем в заключение формулы, связывающие флуктуации плотности заряда и плотности электронов с флуктуациями электрического поля:

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k^2}{16\pi^2} \langle E_i^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (11.5.2.8)$$

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k^2}{e^2} (x_i^e)^2 \langle E_i^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}. \quad (11.5.2.9)$$

**11.5.3. Критические флуктуации вблизи границы неустойчивости плазмы.** Соотношения (11.5.1.8) и (11.5.2.2) определяют флуктуации поля в плазме с произвольными неравновесными, но устойчивыми функциями распределения частиц. При этом средние направления скорости частиц не должны обязательно равняться нулю, так что указанные соотношения применимы и для исследования флуктуаций в плазме, через которую проходит пучок частиц, а также в плазме с электронами, движущимися

относительно ионов, если только скорость пучка (или скорость электронов) не превосходит критического значения, соответствующего возникновению неустойчивости.

Рассмотрим, например, флуктуации в плазме, состоящей из холодных ионов и горячих электронов, движущихся друг относительно друга [19 — 21]. Тогда спектральное распределение флуктуаций плотности зарядов можно определить, исходя из формулы (11.5.1.6), если заменить  $\omega$  на  $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}$ :

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{2k^2}{|\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)|^2} \left\{ \frac{T_e}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}} \operatorname{Im} \chi_l^i(k, \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) + \frac{T_i}{\omega} \operatorname{Im} \chi_l^i(k, \omega) \right\}, \quad (11.5.3.1)$$

где

$$\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = 1 + 4\pi\kappa_l^i(k, \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}) + 4\pi\kappa_l^i(k, \omega). \quad (11.5.3.2)$$

Мы видим, что при скоростях  $\mathbf{u}$ , для которых  $\mathbf{k}\mathbf{u}$  близко к  $\omega$ , т. е. при приближении к границе области устойчивости, флуктуации сильно возрастают, становясь на самой границе бесконечными (разумеется, если ограничиться линейной теорией). Это аналогично хорошо известному в статистической физике росту флуктуаций вблизи критической точки (точки фазового перехода, см., например, [1]).

Рассмотрим более подробно критические флуктуации в том случае, когда через плазму проходит скомпенсированный пучок заряженных частиц.

Согласно (11.5.1.8) спектральное распределение флуктуаций продольного поля определяется формулой

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{16\pi^2}{k^2 |\varepsilon_l|^2} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}, \quad (11.5.3.3)$$

где  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  — спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в отсутствие взаимодействия частиц.

Предполагая распределения частиц плазмы  $f_0$  и пучка  $f'_0$  максвелловскими, т. е. считая, что

$$f_0 = n_0 (m/2\pi T)^{3/2} \exp(-mv^2/2T),$$

$$f'_0 = n'_0 (m/2\pi T')^{3/2} \exp(-m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2/2T'),$$

где  $\mathbf{u}$  — скорость пучка, будем исходить из следующих выражений для  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}$  и  $\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)$ :

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = \sqrt{2\pi} e^2 \left\{ \sum_{\alpha} \frac{n_{\alpha 0}}{k v_{\alpha}} \exp(-z_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha} \frac{n'_{\alpha 0}}{k v'_{\alpha}} \exp(-y_{\alpha}^2) \right\}, \quad (11.5.3.4)$$

$$\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega) = 1 + \sum_{\alpha} \frac{1}{a_{\alpha}^2 k^2} \left\{ 1 - \varphi(z_{\alpha}) + i\sqrt{\pi} z_{\alpha} \exp(-z_{\alpha}^2) \right\} + \sum_{\alpha} \frac{1}{a'_{\alpha}{}^2 k^2} \left\{ 1 - \varphi(y_{\alpha}) + i\sqrt{\pi} y_{\alpha} \exp(-y_{\alpha}^2) \right\}, \quad (11.5.3.5)$$

где  $z_\alpha = \omega/\sqrt{2}kv_\alpha$  и  $y_\alpha = (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})/\sqrt{2}kv'_\alpha$ . Суммирование производится по различным сортам частиц плазмы и пучка. В области прозрачности плазмы  $\text{Im } \varepsilon_l \ll \text{Re } \varepsilon_l$ , и выражение (11.5.3.3) приобретает вид

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi^2 \frac{\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega)}{|\omega|} \delta\{\varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)\}, \quad (11.5.3.6)$$

где

$$\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{2\pi\omega \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)}}{k^2 \text{Im } \varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (11.5.3.6')$$

При приближении состояния системы к границе области кинетической устойчивости  $\text{Im } \varepsilon_l(\mathbf{k}, \omega)$  стремится к нулю и эффективная температура неограниченно возрастает.

Пренебрегая тепловым движением ионов и считая выполненным условие  $(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 \ll k^2 v_e'^2$ , представим эффективную температуру в виде

$$\tilde{T} = \frac{a(z)}{1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/k\bar{u}} T, \quad (11.5.3.7)$$

где

$$a(z) = \frac{1 + (n'_0/n_0) (T/T')^{1/2} \exp z^2}{1 + (n'_0/n_0) (T/T')^{3/2} \exp z^2}$$

и

$$\bar{u} = \frac{\omega}{k} \left\{ 1 + \frac{n_0}{n'_0} \left( \frac{T'}{T} \right)^{3/2} \exp(-z^2) \right\}. \quad (11.5.3.8)$$

Величина  $\bar{u}$  играет роль критической скорости пучка, при достижении которой состояние системы плазма — пучок становится неустойчивым.

Считая плотность пучка достаточно малой ( $n'_0 \ll n_0$ ), можно пренебречь его влиянием на дисперсию волн (влияние пучка на эффективную температуру остается существенным и при  $n'_0 \ll n_0$ ). В этом случае в высокочастотной области для ленгмюровских колебаний формула (11.5.3.6) приобретает вид

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi^2 \tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) \{ \delta(\omega - \omega_{pe}) + \delta(\omega + \omega_{pe}) \}, \quad (11.5.3.9)$$

где эффективная температура определяется (11.5.3.7) при  $z^2 = -1/2\alpha_e^2 k^2 + 3/2$ . Критическая скорость при этом оказывается порядка тепловой скорости электронов в покоящейся плазме

$$\bar{u} = \frac{\omega_{pe}}{k} \left\{ 1 + \frac{n_0}{n'_0} \left( \frac{T'}{T} \right)^{3/2} \exp(-1/2\alpha_e^2 k^2 - 3/2) \right\}. \quad (11.5.3.10)$$

Средняя энергия флуктуационных ленгмюровских колебаний равна

$$\frac{1}{8\pi} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 1/4 \{ \tilde{T}(\mathbf{k}, \omega_{pe}) + \tilde{T}(\mathbf{k}, -\omega_{pe}) \}. \quad (11.5.3.11)$$

При скоростях пучка, близких к  $\bar{u}$ , эта энергия может значительно превышать тепловую.

Используя (11.5.2.8), нетрудно найти спектральное распределение флуктуаций плотности заряда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 1/4 k^2 \bar{T}(\mathbf{k}, \omega) \{ \delta(\omega - \omega_{pe}) + \delta(\omega + \omega_{pe}) \}. \quad (11.5.3.12)$$

Аналогичным образом, используя (11.5.2.9), найдем спектральное распределение флуктуаций плотности электронов

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{k^2}{4e^2} \bar{T}(\mathbf{k}, \omega) \{ \delta(\omega - \omega_{pe}) + \delta(\omega + \omega_{pe}) \}. \quad (11.5.3.13)$$

Рассмотрим далее низкочастотные колебания в двухтемпературной плазме с горячими электронами и холодными ионами. В этой области при  $n'_0 \ll n_0$  формула (11.5.3.6) приобретает вид

$$\langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 4\pi^2 a_s^2 k^2 \bar{T}(\mathbf{k}, \omega) \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}, \quad (11.5.3.14)$$

где  $v_s$  — скорость неизотермического звука,

$$\bar{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{T}{1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/k\bar{u}}, \quad \bar{u} = \frac{n_0}{n'_0} \left( \frac{T'}{T} \right)^{3/2} v_s. \quad (11.5.3.15)$$

В отличие от высокочастотной области, в низкочастотной области величина  $\bar{u}$  может быть как больше, так и меньше тепловой скорости электронов. Средняя энергия флуктуационных звуковых колебаний равна

$$\frac{1}{8\pi} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{k}} = 1/4 a_s^2 k^2 \{ \bar{T}(\mathbf{k}, kv_s) + \bar{T}(\mathbf{k}, -kv_s) \}. \quad (11.5.3.16)$$

Используя (11.5.2.8), найдем для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 1/4 a_s^2 k^4 \bar{T}(\mathbf{k}, \omega) \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}. \quad (11.5.3.17)$$

Спектральное распределение флуктуаций плотности электронов определяется выражением

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \pi n_0 \frac{\bar{T}(\mathbf{k}, \omega)}{T} \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}. \quad (11.5.3.18)$$

Формулы (11.5.3.9)—(11.5.3.18) получены на основе линейной теории и применимы только к флуктуациям с волновыми векторами  $\mathbf{k}$ , удовлетворяющими условию  $u < \bar{u}(\mathbf{k})$ . Флуктуационные колебания, для которых  $u > \bar{u}(\mathbf{k})$ , приводят к неустойчивости плазмы.

Рассмотрим еще флуктуации в плазме из холодных ионов и горячих электронов, движущихся относительно ионов со скоростью  $\mathbf{u}$ . Тогда спектральные распределения флуктуаций будут описываться формулами, выведенными для системы плазма—пучок,

если в них положить плотность электронов плазмы равной нулю и считать плотность электронов в пучке равной плотности ионов. При этом  $a(z)$  будет стремиться к  $T_e/T$ , и эффективная температура будет равна

$$\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{T_e}{\kappa 1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/k\tilde{u}}, \quad \tilde{u} = \omega/k, \quad (11.5.3.19)$$

где  $T_e$  — температура электронов. В низкочастотной области спектральные распределения флуктуаций плотности заряда и плотности электронов определяются выражениями

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\pi e^2 n_0 a_0^4 k^4}{1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/k\tilde{u}} \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}, \quad (11.5.3.20)$$

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\pi n_0}{1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/k\tilde{u}} \{ \delta(\omega - kv_s) + \delta(\omega + kv_s) \}. \quad (11.5.3.21)$$

**11.5.4. Флуктуации в неравновесной плазме, находящейся в магнитном поле.** Рассмотрим еще флуктуации поля в неравновесной плазме, находящейся во внешнем магнитном поле  $\mathbf{B}_0$  [18]. Будем считать, что через плазму проходит со скоростью  $\mathbf{u}$  направленный вдоль магнитного поля  $\mathbf{B}_0$  скомпенсированный пучок заряженных частиц. Если распределения частиц в плазме и пучке являются максвелловскими с температурами  $T$  и  $T'$ , то компоненты тензора диэлектрической проницаемости системы плазма — пучок имеют вид

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = & \delta_{ij} - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^2}{\omega^2} \times \\ & \times \left\{ \exp(-x_{\alpha}) \sum_n \frac{z_n^{\alpha}}{z_n^{\alpha}} \pi_{ij}(z_n^{\alpha}) [\varphi(z_n^{\alpha}) - i\sqrt{\pi} z_n^{\alpha} \exp(-z_n^{\alpha 2})] - 2z_0^{\alpha 2} b_i b_j \right\} - \\ & - \sum_{\alpha} \frac{\omega_{p\alpha}^{\prime 2}}{\omega^2} \left\{ \exp(-x'_{\alpha}) \sum_n \frac{y_n^{\alpha}}{y_n^{\alpha}} \pi_{ij}(y_n^{\alpha}) [\varphi(y_n^{\alpha}) - \right. \\ & \left. - i\sqrt{\pi} y_n^{\alpha} \exp(-y_n^{\alpha 2})] - 2(z_0^{\alpha})^2 b_i b_j \right\}; \quad (11.5.4.1) \end{aligned}$$

штрихами отмечены величины, относящиеся к пучку,

$$y_n^{\alpha} = \frac{\omega - n\omega'_{p\alpha} - k_{\parallel} u}{\sqrt{2} |k_{\parallel} v'_{\alpha}|},$$

остальные обозначения такие же, как в п. 11.3.3.

Спектральное распределение флуктуаций плотности тока в случае свободных частиц определяется выражением

$$\langle j_i j_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}^{(0)} = \sqrt{2\pi} \frac{e^2}{|k_{\parallel}|} \left\{ \sum_{\alpha} n_{\alpha 0} v_{\alpha} \exp(-x_{\alpha}) \sum_n \pi_{j_i}(z_n^{\alpha}) \exp(-z_n^{\alpha 2}) + \right. \\ \left. + \sum_{\alpha} n'_{\alpha 0} v'_{\alpha} \exp(-x'_{\alpha}) \sum_n \pi_{j_i}(z_n^{\alpha'}) \exp(-y_n^{\alpha 2}) \right\}. \quad (11.5.4.2)$$

Используя эти формулы и учитывая (11.5.2.2), можно найти спектральное распределение флуктуаций поля в системе плазма — пучок.

Предполагая плотность частиц в пучке достаточно малой, получим для спектрального распределения флуктуаций поля в высокочастотной области следующую формулу:

$$\langle E_i E_j \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 8\pi^2 \frac{\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega)}{|\omega|} \left\{ \frac{e_i^* e_j}{|e|^2 - |\mathbf{k}e|^2/k^2} [\delta(\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}_+^2) + \right. \\ \left. + \delta(\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}_-^2)] + \frac{k_i k_j}{k^2} \delta(A) \right\}. \quad (11.5.4.3)$$

Так как затухание волн в холодной плазме отсутствует, то при вычислении эффективной температуры необходимо учитывать как тепловое движение электронов, так и наличие пучка. Тепловым движением ионов в плазме и в пучке можно пренебречь.

Учитывая (11.5.4.1) и (11.5.4.2), можно представить эффективную температуру, входящую в (11.5.4.3), в виде

$$\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{R(\mathbf{k}, \omega)}{1 - \mathbf{k}\mathbf{u}/k\bar{u}} T, \quad (11.5.4.4)$$

где

$$R(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1 + (n'_0/n_0)(T/T')^{1/2} K}{1 + (n'_0/n_0)(T/T')^{3/2} K}, \quad (11.5.4.5) \\ \bar{u} = \frac{\omega}{k} \left[ 1 + \frac{n_0}{n'_0} \left( \frac{T'}{T} \right)^{3/2} K^{-1} \right].$$

Величина  $K$  в случае флуктуационных ленгмюровских колебаний определяется формулой

$$K = \exp(x - x') \frac{\sum_n I_n(x') \exp(-y_n^2)}{\sum_n I_n(x) \exp(-z_n^2)}, \quad (11.5.4.6)$$

а для флуктуационных обыкновенных и необыкновенных электромагнитных волн — формулой

$$K = \exp(x - x') \times \frac{\sum_n \left\{ \left[ \rho'^2 + (n^2 + x'^2) \frac{\varepsilon_2^2}{(\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1)^2} \right] I_n(x') - 2x' \rho' \frac{\varepsilon_2}{\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1} I_n'(x') \right\} \exp(-y_n^2)}{\sum_n \left\{ \left[ \rho^2 + (n^2 + x^2) \frac{\varepsilon_2^2}{(\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1)^2} \right] I_n(x) - 2x \rho \frac{\varepsilon_2}{\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1} I_n'(x) \right\} \exp(-z_n^2)}, \quad (11.5.4.7)$$

где

$$\rho = n + x \frac{\varepsilon_2}{\mathcal{N}^2 - \varepsilon_1} + \sqrt{2x} \frac{k_1}{|k_1|} \frac{\mathcal{N}^2 \sin \theta \cos \theta}{\mathcal{N}^2 \sin^2 \theta - \varepsilon_3} z_n.$$

Величина  $\tilde{u}$  играет роль критической скорости, при достижении которой флуктуации в плазме неограниченно возрастают и плазма становится неустойчивой.

В предельном случае  $\mathcal{N}^2 \gg 1$  выражение (11.5.4.7) совпадает с (11.5.4.6). Заметим, что при  $\mathcal{N}^2 \gg 1$  спектральное распределение флуктуаций поля обыкновенных или необыкновенных волн совпадает с распределением флуктуаций поля ленгмюровских колебаний.

Эффективная температура, характеризующая низкочастотные флуктуации колебаний в магнитоактивной плазме, через которую проходит пучок заряженных частиц, определяется формулой

$$\tilde{T}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{T}{1 - (u/\tilde{u}) \cos \Theta}, \quad (11.5.4.8)$$

где  $\Theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{u}$ , а критические скорости для альвеновских, быстрых и медленных магнитозвуковых флуктуаций соответственно равны

$$\tilde{u} = \frac{\omega}{k} \left\{ 1 + \frac{n_0}{n'_0} \sqrt{\frac{T}{T'}} \frac{\sin^4 \Theta + \cos^4 \Theta}{\cos^4 \Theta + (\cos^2 \Theta - (T/T')^2) \exp(y_0^2)} \right\}, \quad (11.5.4.9)$$

$$\tilde{u} = \frac{\omega}{k} \left\{ 1 + \frac{n_0}{n'_0} \sqrt{\frac{T}{T'}} \frac{\exp(y_0^2)}{1 + (1 - T/T')^2} \right\}, \quad (11.5.4.10)$$

$$\tilde{u} = \frac{\omega}{k} \left\{ 1 + \frac{n_0}{n'_0} \left( \frac{T'}{T} \right)^{3/2} \exp(y_0^2) \right\}.$$

Спектральные распределения флуктуаций поля в области низких частот в неравновесной плазме определяются формулами (11.4.3.1), (11.4.3.3) и (11.4.3.4), в которых вместо  $T_e$  следует подставить эффективную температуру (11.5.4.8).

## § 11.6. Кинетическая теория флуктуаций

**11.6.1. Флуктуации функции распределения.** В предыдущих параграфах было показано, что флуктуации электромагнитных величин в равновесной плазме (как, впрочем, и в любой другой среде, находящейся в состоянии статистического равновесия) полностью определяются тензором ее диэлектрической проницаемости. Уравнения движения частиц плазмы, т. е. кинетические уравнения для электронов и ионов непосредственно не нужны для исследования флуктуаций — с помощью этих уравнений определяется только тензор диэлектрической проницаемости плазмы, но если он найден, далее действует флуктуационно-диссипативное соотношение, связывающее спектральное распределение флуктуаций с тензором диэлектрической проницаемости.

Ситуация существенно осложняется в случае неравновесной плазмы, для которой спектральные распределения флуктуаций плотности тока определяются, согласно (11.5.1.6), не только тензором диэлектрической проницаемости плазмы, но и непосредственно функциями распределения ее частиц.

В настоящем параграфе, исходя из кинетической теории флуктуаций, мы воспроизведем результаты, полученные в § 11.5, и найдем не только флуктуации макроскопических величин, но и флуктуации функций распределения частиц\*).

Начнем с рассмотрения флуктуаций равновесной плазмы.

Как известно, для нахождения флуктуаций различных физических величин, относящихся к какой-либо системе, необходимо в уравнения, описывающие рассматриваемую систему, ввести дополнительные сторонние величины — так называемые случайные силы. Интересуясь флуктуациями функций распределения частиц, следует ввести случайные силы в правые части кинетических уравнений, определяющих функции распределения частиц  $F_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  (индекс  $\alpha$  служит для обозначения сорта частиц):

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + e_\alpha \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right\} F_\alpha = \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right)_c + y^\alpha, \quad (11.6.1.1)$$

где  $(\partial F_\alpha / \partial t)_c$  — интеграл столкновений,  $y^\alpha \equiv y^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)$  — случайная сила,  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{B}$  — самосогласованные электрическое и магнитное поля\*\*).

Следуя общим правилам теории флуктуаций, выберем в качестве фигурирующих в этой теории обобщенных термодинамических скоростей величины

$$\dot{x}^\alpha = \left( \frac{\partial F_\alpha}{\partial t} \right)_c + y^\alpha. \quad (11.6.1.2)$$

\*) Кинетическая теория флуктуаций в плазме была развита в [9].

\*\*) Такой метод является обобщением метода, примененного в работе [22] для нахождения флуктуаций функции распределения в равновесной ферми-жидкости.

Считая для простоты, что интеграл столкновений имеет вид

$$\left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\right)_c = -\frac{1}{\tau_\alpha} f_\alpha, \quad (11.6.1.3)$$

где  $f_\alpha$  — отклонение функции распределения  $F_\alpha$  от максвелловского распределения  $f_{\alpha 0}$  ( $f_\alpha = F_\alpha - f_{\alpha 0}$ ), имеем

$$\dot{x}^\alpha = -\frac{1}{\tau_\alpha} f_\alpha + y^\alpha. \quad (11.6.1.4)$$

Введем далее обобщенную термодинамическую силу  $X^\alpha$ , определив ее как функциональную производную от  $\dot{S}$  по  $x^\alpha$ :

$$X^\alpha = -\frac{\delta \dot{S}}{\delta x^\alpha},$$

где  $\dot{S}$  — производная по времени от энтропии системы:

$$\dot{S} = -\sum_\alpha \int \left\{ \left(\frac{\partial F_\alpha}{\partial t}\right)_c + y^\alpha \right\} \ln F_\alpha d^3r d^3p. \quad (11.6.1.5)$$

Используя (11.6.1.3), представим  $\dot{S}$  в виде

$$\begin{aligned} \dot{S} = & \int \left\{ \frac{1}{\tau_0} f_0 \ln f_{e0} + \frac{1}{\tau_1} f_1 \ln f_{i0} \right\} d^3r d^3p + \\ & + \int \left\{ \left(\frac{1}{\tau_0} f_0 - y^0\right) \frac{f_0}{f_{e0}} + \left(\frac{1}{\tau_1} f_1 - y^1\right) \frac{f_1}{f_{i0}} \right\} d^3r d^3p. \end{aligned} \quad (11.6.1.6)$$

Так как энтропию следует определять при заданных значениях энергии и чисел частиц каждого сорта, то первое слагаемое здесь обращается в нуль и, следовательно,

$$\dot{S} = \int \left\{ \left(\frac{1}{\tau_0} f_0 - y^0\right) \frac{f_0}{f_{e0}} + \left(\frac{1}{\tau_1} f_1 - y^1\right) \frac{f_1}{f_{i0}} \right\} d^3r d^3p. \quad (11.6.1.7)$$

Поэтому термодинамическая сила имеет вид

$$X^\alpha = f_\alpha / f_{\alpha 0}. \quad (11.6.1.8)$$

Сравнение последнего соотношения с (11.6.1.4) показывает, что

$$\dot{x}^\alpha = -\gamma^\alpha X^\alpha + y^\alpha, \quad (11.6.1.9)$$

где

$$\gamma^\alpha = \frac{1}{\tau_\alpha} f_{\alpha 0}.$$

Эти величины носят название *кинетических коэффициентов*. Согласно общей теории флуктуаций они определяют корреляционные функции случайных сил:

$$\begin{aligned} \langle y^\alpha(\mathbf{r}, t) y^{\alpha'}(\mathbf{r}', t') \rangle = \\ = 2\delta_{\alpha\alpha'} \gamma^{\alpha\delta}(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (11.6.1.10)$$

Отсюда легко найти спектральное распределение флуктуаций случайных сил

$$\langle y^{\alpha} y^{\alpha'} \rangle_{k\omega} = 2\delta_{\alpha\alpha'} \gamma^{\alpha\delta} (\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (11.6.1.11)$$

Зная его, можно, используя кинетические уравнения и уравнения Максвелла, выразить функции распределения частиц через случайные силы и найти спектральное распределение флуктуаций функций распределения.

Приведем выражение для спектрального распределения флуктуаций функции распределения электронов в бесстолкновительной плазме [9]:

$$\begin{aligned} \langle f(\mathbf{p}) f(\mathbf{p}') \rangle_{k\omega} = & 2\pi \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) f_0(\mathbf{p}) + \\ & + \frac{8\pi^2 e^2}{k^2} f_0(\mathbf{p}) f_0(\mathbf{p}') \left\{ S_l(\mathbf{v}, \mathbf{v}') - \frac{k^2 \mathbf{v}\mathbf{v}' - (\mathbf{k}\mathbf{v})(\mathbf{k}\mathbf{v}')}{\omega^2} S_t(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \right\}, \end{aligned} \quad (11.6.1.12)$$

где

$$\begin{aligned} S_l(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = & \frac{1}{T} \left\{ \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i0} (\varepsilon_l^{-1})^* \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') + \right. \\ & \left. + \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}'}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i0} \varepsilon_l^{-1} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \frac{1}{\pi} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i0} \frac{\mathbf{k}\mathbf{v}'}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i0} \frac{\text{Im } \varepsilon_l}{\omega |\varepsilon_l|^2} \right\}, \end{aligned} \quad (11.6.1.13)$$

$$\begin{aligned} S_t(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = & \frac{1}{T} \left\{ \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i0} (\varepsilon_t^* - \mathcal{N}^2)^{-1} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}') + \right. \\ & \left. + \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i0} (\varepsilon_t - \mathcal{N}^2)^{-1} \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \right. \\ & \left. + \frac{1}{\pi} \frac{\omega}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} - i0} \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}' + i0} \frac{\text{Im } \varepsilon_t}{|\varepsilon_t - \mathcal{N}^2|^2} \right\}. \end{aligned} \quad (11.6.1.14)$$

Первое слагаемое в правой части выражения (11.6.1.12) совпадает с корреляционной функцией флуктуаций функции распределения в газе невзаимодействующих частиц [23], а второе и третье слагаемые учитывают взаимодействие между частицами, обусловленное самосогласованным полем. Второе слагаемое связано с продольной (электростатической) частью самосогласованного поля, а третье учитывает поперечную его часть. Заметим, что  $S_l$  имеет резкие максимумы при собственных частотах продольных колебаний плазмы, а  $S_t$  — при собственных частотах поперечных электромагнитных волн. В нерелятивистских условиях вкладом  $S_t$  можно пренебречь.

Зная спектральное распределение флуктуаций функции распределения частиц, легко определить спектральное распределение

флуктуаций различных макроскопических величин, например плотности электронов. Флуктуации плотности электронов связаны с  $f_0$  соотношением

$$\delta n_e = \int f_0 d^3 p. \quad (11.6.1.15)$$

Используя это соотношение, а также соотношение (11.6.1.12), нетрудно получить следующее выражение для спектрального распределения флуктуаций плотности электронов в бесстолкновительной плазме:

$$\langle n_e^2 \rangle_{k\omega} = \sqrt{2\pi} \frac{n_0}{\omega_{pe}} a_0^3 k^3 \frac{\exp(-z^2)}{[a_0^2 k^2 + 1 - \varphi(z)]^2 + \pi z^2 \exp(-2z^2)}. \quad (11.6.1.16)$$

Аналогичным образом можно исследовать флуктуации температуры электронов [25]. Эта величина связана с  $f_0$  соотношением

$$\delta T = \frac{m_e}{3n_0} \int v^2 f_0 d^3 p; \quad (11.6.1.17)$$

используя его, легко показать, что

$$\langle T^2 \rangle_{k\omega} = \frac{\sqrt{2\pi}}{9} \frac{T_0^2}{n_0 \omega_{pe}} \frac{1}{a_0 k} \frac{P(z) \exp(-z^2)}{[a_0^2 k^2 + 1 - \varphi(z)]^2 + \pi z^2 \exp(-2z^2)}, \quad (11.6.1.18)$$

где

$$P(z) = a_0^4 k^4 (4z^4 + 4z^2 + 5) - a_0^2 k^2 [8\varphi(z) + 4z^2 - 10] + 4\varphi(z)^2 - 8\varphi(z) + 5.$$

Приведем также спектральное распределение  $\langle n_e T \rangle_{k\omega}$ :

$$\langle n_e T \rangle_{k\omega} = \frac{\sqrt{2\pi}}{3} \frac{T_0}{\omega_{pe}} a_0 k \frac{[a_0^2 k^2 (2z^2 - 1) - 1] \exp(-z^2)}{[a_0^2 k^2 + 1 - \varphi(z)]^2 + \pi z^2 \exp(-2z^2)}. \quad (11.6.1.19)$$

Спектральные распределения (11.6.1.16), (11.6.1.18) и (11.6.1.19) в случае коротких волн ( $a_0^2 k^2 \gg 1$ ) характеризуются широкими максимумами при нулевой частоте флуктуаций. В длинноволновой области ( $a_0^2 k^2 \ll 1$ ) спектральные распределения характеризуются  $\delta$ -образными максимумами при частотах, отвечающих собственной частоте продольных плазменных колебаний. Спектральное распределение флуктуаций температуры имеет также максимум при нулевой частоте, связанный с энтропийными волнами в плазме. На рис. 11.6.1 представлены спектральные распределения флуктуаций плотности  $S(z)$  и температуры  $T(z)$  в бесстолкновительной плазме для случая  $a_0^2 k^2 = 5$ .

Проинтегрировав (11.6.1.16), (11.6.1.18) и (11.6.1.19) по частотам, найдем компоненты Фурье от пространственных

корреляционных функций одновременных флуктуаций плотности и температуры в плазме; имеем

$$\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{n_0 k^2}{k^2 + 4\pi e^2 n_0 / T_0}, \quad \langle T^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{2}{3} T_0^2 / n_0, \quad \langle n_e T \rangle_{\mathbf{k}} = 0. \quad (11.6.1.20)$$

Из последнего равенства (11.6.1.20) следует, что флуктуации плотности и температуры в плазме статистически независимы.

Подчеркнем в заключение, что наши результаты получены в предположении  $\tau \rightarrow \infty$ , т. е. относятся к бесстолкновительной плазме.

**11.6.2. Флуктуации функций распределения в неизотермической плазме.** Изложенный метод исследования флуктуаций нетрудно обобщить на случай неизотермической двухтемпературной плазмы [9]. Возможность такого обобщения связана с тем, что из-за большого различия в массах электронов и ионов обмен энергии между частицами одного сорта происходит значительно быстрее, чем между частицами разных сортов. Поэтому, если пренебречь обменом энергии между частицами разных сортов, то состоянию плазмы с различными температурами электронов и ионов будет соответствовать максимум энтропии (при заданных значениях

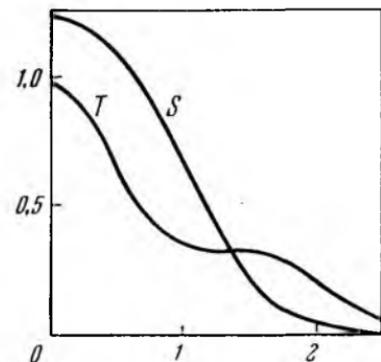


Рис. 11.6.1. Спектральные распределения флуктуаций плотности  $S(z) = \frac{\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}z}}{2n}$  и температуры

$T(z) = \frac{n_0 \langle T^2 \rangle_{\mathbf{k}z}}{2T_0^2}$  в бесстолкновительной плазме при  $a_0^2 k^2 = 5$  ( $z = \omega / \sqrt{2} kv_0$  — безразмерная частота).

чисел частиц и энергий электронов и ионов порознь). Это значит, что мы по-прежнему можем пользоваться выражением (11.6.1.6) для производной по времени от энтропии двухтемпературной плазмы

$$\dot{S} = \int \left( \frac{\dot{f}_e}{\tau_e} \ln f_{e0} + \frac{\dot{f}_i}{\tau_i} \ln f_{i0} \right) d^3 p d^3 r + \int \left\{ \left( \frac{\dot{f}_e}{\tau_e} - y^e \right) \frac{\dot{f}_e}{f_{e0}} + \left( \frac{\dot{f}_i}{\tau_i} - y^i \right) \frac{\dot{f}_i}{f_{i0}} \right\} d^3 p d^3 r,$$

где  $f_{e0}$  и  $f_{i0}$  — максвелловские распределения электронов и ионов с различными температурами,  $\dot{f}_e$  и  $\dot{f}_i$  — малые отклонения от этих распределений. Так как величину  $\dot{S}$  следует находить при заданных значениях энергий электронов и ионов, то первый член в выражении для  $\dot{S}$  обращается в нуль, так же как и в случае равновес-

ной плазмы. Иными словами, производная по времени от энтропии будет, как и в случае равновесной плазмы, билинейной относительно величин

$$\dot{x}^\alpha = -\frac{1}{\tau_\alpha} f_\alpha + y^\alpha, \quad (11.6.2.1)$$

характеризующих отклонение состояния системы от квазиравновесного с различными температурами электронов и ионов. Следуя далее тем же путем, что и в случае полностью равновесной плазмы, найдем величины

$$X^\alpha \equiv \frac{\delta S}{\delta x^\alpha} = \frac{f_\alpha}{f_{\alpha 0}} \quad (11.6.2.2)$$

и представим  $\dot{x}^\alpha$  в виде

$$\dot{x}^\alpha = -\gamma^\alpha X^\alpha + y^\alpha, \quad (11.6.2.3)$$

где

$$\gamma^\alpha(\mathbf{p}) = \frac{1}{\tau_\alpha} f_{\alpha 0}(\mathbf{p}). \quad (11.6.2.4)$$

Используя последнее соотношение, получим прежнее выражение для корреляционной функции случайных сил

$$\begin{aligned} \langle y^\alpha(\mathbf{p}, t) y^{\alpha'}(\mathbf{p}', t') \rangle = \\ = 2\delta_{\alpha\alpha'} \gamma^\alpha(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'). \end{aligned} \quad (11.6.2.5)$$

Остается прежним и выражение для спектрального распределения флуктуаций случайных сил

$$\langle y^\alpha(\mathbf{p}) y^{\alpha'}(\mathbf{p}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 2\delta_{\alpha\alpha'} \gamma^\alpha(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}'). \quad (11.6.2.6)$$

Учитывая это выражение, можно, как и в случае равновесной плазмы, находить корреляционные функции или спектральные распределения флуктуаций различных физических величин.

Приведем общее выражение для спектрального распределения флуктуаций функций распределения частиц в неизотермической двухтемпературной плазме:

$$\begin{aligned} \langle f_\alpha(\mathbf{p}) f_{\alpha'}(\mathbf{p}') \rangle_{\mathbf{k}\omega} = 2\pi\delta_{\alpha\alpha'} f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) + \\ + \frac{8\pi^2 Z_\alpha Z_{\alpha'} e^2}{k^2} f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) f_{\alpha' 0}(\mathbf{p}') \left\{ S_t^{\alpha\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') + \frac{k^2 \mathbf{v}\mathbf{v}' - (\mathbf{k}\mathbf{v})(\mathbf{k}\mathbf{v}')}{\omega^2} S_t^{\alpha\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') \right\}. \end{aligned} \quad (11.6.2.7)$$

Здесь

$$S_{\alpha'}^{\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = T_{\alpha'}^{-1} \frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv} - i0} (\varepsilon_l^{-1})^* \delta(\omega - \mathbf{kv}') + \\ + T_{\alpha'}^{-1} \frac{\mathbf{kv}'}{\omega - \mathbf{kv}' + i0} \varepsilon_l^{-1} \delta(\omega - \mathbf{kv}) + \\ + 4 T_{\alpha'}^{-1} T_{\alpha'}^{-1} \frac{\mathbf{kv}}{\omega - \mathbf{kv} - i0} \frac{\mathbf{kv}'}{\omega - \mathbf{kv}' + i0} \frac{\text{Im}(T_{\alpha'} \varepsilon_l^2 + T_l \varepsilon_{\alpha'}^2)}{\omega |\varepsilon_l|^2}, \quad (11.6.2.8)$$

$$S_{\alpha'}^{\alpha'}(\mathbf{v}, \mathbf{v}') = T_{\alpha'}^{-1} \frac{\omega}{\omega - \mathbf{kv} - i0} \frac{\delta(\omega - \mathbf{kv}')}{\varepsilon_l^2 - \mathcal{N}^2} + T_{\alpha'}^{-1} \frac{\omega}{\omega - \mathbf{kv}' + i0} \frac{\delta(\omega - \mathbf{kv})}{\varepsilon_l - \mathcal{N}^2} + \\ + 4 T_{\alpha'}^{-1} T_{\alpha'}^{-1} \frac{\omega}{\omega - \mathbf{kv} - i0} \frac{\omega}{\omega - \mathbf{kv}' + i0} \frac{\text{Im}(T_{\alpha'} \varepsilon_l^2 + T_l \varepsilon_{\alpha'}^2)}{\omega |\varepsilon_l - \mathcal{N}^2|^2}, \quad (11.6.2.9)$$

где  $T_{\alpha}$  — температура  $\alpha$ -компоненты плазмы.

Аналогичным образом можно исследовать флуктуации в двух-температурной плазме, находящейся в постоянном однородном магнитном поле  $\mathbf{B}_0$ . Для определения корреляционных функций в этом случае можно по-прежнему исходить из кинетических уравнений со случайными силами (11.6.1.1); необходимо только ввести в левые части этих уравнений слагаемые  $\frac{Z_{\alpha e}}{c} [\mathbf{vB}_0] \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{p}}$ , учитывающие действие магнитного поля. Благодаря этим дополнительным слагаемым изменится связь между усредненными произведениями различных физических величин и усредненными произведениями случайных сил; что же касается нормировки случайных сил, то она по-прежнему будет определяться выражением (11.6.2.6).

**11.6.3. Временное развитие флуктуаций.** Выше мы определили флуктуации функций распределения частиц в плазме и показали, как, зная эти флуктуации, находить флуктуации различных макроскопических величин (в том числе полей) в равновесной и в двух-температурной плазме. Теперь мы перейдем к нахождению флуктуаций в плазме с неравновесными, но устойчивыми функциями распределения, основываясь на кинетическом описании плазмы [24].

В случае плазмы с неравновесными функциями распределения частиц флуктуации не обязательно определяются усредненными характеристиками плазмы и могут зависеть от ее предыстории. Возможны, однако, случаи, когда процесс установления определенных распределений флуктуаций происходит значительно быстрее, чем процесс эволюции самой функции распределения. В таких случаях в плазме устанавливаются квазиравновесные распределения флуктуаций, при которых корреляционные функции полностью определяются усредненными характеристиками плазмы (а именно усредненными по флуктуациям неравновесными распределениями частиц) и не зависят от предыстории плазмы. Медленное изменение неравновесных функций распределения частиц сопровождается медленным изменением корреляционных функций

квазиравновесных флуктуаций, «подстраивающихся» к этим функциям распределения.

Для определения функций распределения  $F_\alpha$  частиц  $\alpha$ -го сорта воспользуемся кинетическим уравнением без интеграла столкновений с начальными условиями

$$F_\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}, t)|_{t=0} - f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) = g^\alpha(\mathbf{p}, \mathbf{r}), \quad (11.6.3.1)$$

где  $f_{\alpha 0}$  — усредненная по флуктуациям функция распределения и  $g^\alpha$  — флуктуация функции распределения в начальный момент времени.

Применяя к кинетическому уравнению и уравнению Пуассона преобразование Лапласа по времени, выразим функции распределения частиц и определяемые ими различные физические величины в момент времени  $t$  через начальные значения флуктуаций функции распределения  $g^\alpha$ . В частности, для пространственной компоненты Фурье плотности заряда получим

$$\rho_{\mathbf{k}}(t) = \frac{ie}{2\pi} \int_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\exp(-i\omega t)}{\varepsilon_t(\mathbf{k}, \omega)} \sum_{\alpha} Z_{\alpha} \int \frac{g^{\alpha}(\mathbf{p}, \mathbf{k})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} d^3p d\omega, \quad (11.6.3.2)$$

где интегрирование по  $\omega$  производится по прямой  $\text{Im } \omega = \sigma$ , проходящей выше всех полюсов функции  $\varepsilon_t^{-1}$ .

Построим теперь квадратичные комбинации различных физических величин (не обязательно относящихся к совпадающим моментам времени, т. е.  $t \neq t'$ ) и усредним эти комбинации по случайным величинам  $g^\alpha$ . Полученные таким образом выражения представляют собой корреляционные функции для рассматриваемой системы; знание их позволяет, в частности, определить квадраты амплитуд колебаний физических величин в момент времени  $t$  (для этого достаточно принять в корреляторах  $t' = t$ ).

Приведем в качестве примера выражение для коррелятора плотности заряда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}, t-t'} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty+i\sigma}^{\infty+i\sigma} \frac{\exp[-i(\omega t - \omega' t')]}{\varepsilon_t(\mathbf{k}, \omega) \varepsilon_{t'}(-\mathbf{k}, \omega')} B(\mathbf{k}, \omega, \omega') d\omega d\omega', \quad (11.6.3.3)$$

где

$$B(\mathbf{k}, \omega, \omega') = -e^2 \sum_{\alpha, \alpha'} Z_{\alpha} Z_{\alpha'} \iint \frac{\langle g^{\alpha}(\mathbf{p}) g^{\alpha'}(\mathbf{p}') \rangle_{\mathbf{k}}}{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})(\omega' + \mathbf{k}\mathbf{v}')} d^3p d^3p'. \quad (11.6.3.4)$$

Входящую в это выражение пространственную компоненту Фурье от усредненного произведения начальных значений флуктуаций функций распределения можно представить в следующем общем виде:

$$\langle g^{\alpha}(\mathbf{p}) g^{\alpha'}(\mathbf{p}') \rangle_{\mathbf{k}} = \delta_{\alpha\alpha'} f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') + \mathcal{J}'_{\alpha\alpha'}(\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (11.6.3.5)$$

где первое слагаемое в правой части соответствует идеальному газу, а второе обусловлено взаимодействием между частицами. Существование, что второе слагаемое является гладкой функцией скоростей, тогда как первое содержит  $\delta(\mathbf{p}-\mathbf{p}')$ .

Сравнивая (11.6.3.5) с формулами (11.6.1.12) и (11.6.1.13), нетрудно убедиться, что для равновесной плазмы

$$\mathcal{Y}_{\alpha\alpha'} = -\frac{4\pi e^2 Z_\alpha Z_{\alpha'}}{T(k^2 + \bar{a}^{-2})} f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) f_{\alpha' 0}(\mathbf{p}'), \quad (11.6.3.6)$$

где  $\bar{a}^{-1} = a_e^{-1} + a_i^{-1}$  — величина, обратная радиусу экранировки. Выражая при помощи кинетического уравнения и уравнения Пуассона флуктуации функции распределения в момент  $t$  через начальные флуктуации и производя усреднение по последним, мы вернемся к тем же соотношениям (11.6.3.5) и (11.6.3.6) для усредненных значений флуктуаций функции распределения. Можно сказать, что равновесные флуктуации «воспроизводят» сами себя. При этом соотношение (11.6.3.3) принимает вид

$$\langle \zeta^2 \rangle_{\mathbf{k}t} = \frac{k^2}{4\pi^2} T \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-i\omega t)}{\omega} \text{Im}(\epsilon_i^{-1}(\mathbf{k}, \omega))^* d\omega, \quad (11.6.3.7)$$

что находится в соответствии с (11.2.2.5).

Пусть усредненные функции распределения  $f_{\alpha 0}$  по-прежнему являются равновесными, но начальные возмущения  $g^x$  таковы, что функция  $\mathcal{Y}$  уже не определяется формулой (11.6.3.6). Подставим (11.6.3.5) в (11.6.3.3) и выполним интегрирование по  $\omega$  и  $\omega'$  при помощи теоремы Коши. Тогда, наряду со слагаемым (11.6.3.7), описывающим равновесные флуктуации, мы получим еще и другие слагаемые. Эти слагаемые, однако, экспоненциально убывают со временем с декрементом  $\text{Im} \omega_{\mathbf{k}}$ , где  $\omega_{\mathbf{k}}$  — корень уравнения  $\epsilon_i(\mathbf{k}, \omega) = 0$ . Поэтому, несмотря на неравновесный характер начальных флуктуаций, по прошествии времени  $t \sim (\text{Im} \omega_{\mathbf{k}})^{-1}$  в плазме установятся равновесные флуктуации плотности заряда и других макроскопических величин.

Для слабозатухающих собственных колебаний плазмы величина  $\text{Im} \omega_{\mathbf{k}}$  мала, и поэтому состояния плазмы, для которых амплитуды собственных колебаний сильно отличаются от равновесных, могут существовать очень долго и считаться квазиравновесными.

Рассмотрим более общий случай плазмы с неравновесными, но устойчивыми функциями распределения частиц. Подставляя (11.6.3.5) в (11.6.3.4), получим

$$B(\mathbf{k}, \omega, \omega') = -\sum_{\alpha} \frac{e^2 Z_{\alpha}^2}{\omega + \omega'} \int f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) \left( \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} + \frac{1}{\omega' + \mathbf{k}\mathbf{v} + i0} \right) d^3p + \delta B(\mathbf{k}, \omega, \omega'). \quad (11.6.3.8)$$

Здесь первый член обусловлен  $\delta$ -образным слагаемым в уравнении (11.6.3.5), а  $\delta B$  обозначает вклад величины  $\mathcal{V}$  в функцию  $B$ . Сушественно, что первое слагаемое в уравнении (11.6.3.8) имеет полюс при  $\omega + \omega' = 0$ , тогда как величина  $\delta B$ , так же как и  $\varepsilon_l^{-1}$ , не имеет полюсов ни в верхних полуплоскостях переменных  $\omega$  и  $\omega'$ , ни при вещественных значениях этих переменных. Благодаря последнему обстоятельству неубывающий вклад в  $\langle \rho^2 \rangle$ , определяемый формулой (11.6.3.3), дает только полюс функции  $B$  при  $\omega + \omega' = 0$ ; остальные же слагаемые в выражении для  $\langle \rho^2 \rangle$  будут убывать со временем.

Таким образом, по прошествии времени  $t \sim (\text{Im } \omega_k)^{-1}$  в неравновесной, но устойчивой плазме установятся не зависящие от начальных возмущений флуктуации плотности заряда, определяемые соотношениями

$$\begin{aligned} \langle \rho^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\omega t) \langle \rho^2 \rangle_{k\omega} d\omega, \\ \langle \rho^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{2\pi}{|\varepsilon_l|^2} (A^e + A^i), \end{aligned} \quad (11.6.3.9)$$

где

$$A^\alpha = \int f_{\alpha 0}(\mathbf{p}) \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d^3p. \quad (11.6.3.10)$$

Отметим, что второе из соотношений (11.6.3.9) формально совпадает с соотношением (11.4.1.14) для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда в квазиравновесной плазме (хотя при произвольных функциях распределения  $f_{\alpha 0}(\mathbf{p})$  величины  $A^\alpha$  уже не выражаются, разумеется, через мнимые части электрических восприимчивостей).

Как и в случае равновесных функций распределения, дольше всего продолжают зависеть от начальных возмущений флуктуации с частотами собственных колебаний плазмы, и поэтому состояния плазмы, характеризующиеся отличными от определяемых формулой (11.6.3.9) амплитудами собственных колебаний, могут существовать очень длительное время.

Подчеркнем характерные особенности флуктуаций в плазме с немаксвелловскими функциями распределения частиц. Во-первых, не зависящие от начальных возмущений распределения устанавливаются лишь для флуктуаций макроскопических величин; корреляторы флуктуаций функций распределения частиц содержат пропорциональные  $\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$  слагаемые, которые определяются начальным распределением флуктуаций. Во-вторых, не зависящие от начальных возмущений амплитуды случайных волн не устанавливаются, если фазовая скорость последних больше скоростей всех частиц плазмы (в частности, не устанавливаются

поперечные электромагнитные волны, фазовые скорости которых, как известно, больше скорости света). В самом деле, для таких волн время установления равновесных распределений амплитуд в отсутствие столкновений  $t \sim (\text{Im } \omega_k)^{-1} \rightarrow \infty$ .

**11.6.4. Флуктуации в системе плазма — пучок.** Если функции распределения частиц плазмы являются не только неравновесными, но и неустойчивыми, то ситуация значительно усложняется [24]. Функция  $\epsilon_i^{-1}$  в этом случае имеет полюсы в верхней полуплоскости  $\omega$ , и поэтому вклад величин  $\mathcal{U}$  (определяемых предысторией системы и в общем случае неизвестных) в корреляционные функции со временем не убывает, а растет. Тем не менее в случае системы, состоящей из плазмы и пучка малой плотности ( $n'_0 \ll n_0$ ,  $n'_0$  — плотность частиц в пучке), главные члены в корреляторе не зависят от случайных начальных возмущений. При этом предполагается, что за время введения пучка возмущения не слишком возросли, и, следовательно начальные флуктуации, хотя и отличаются от равновесных, но имеют тот же порядок величины.

В самом деле, учитывая (11.6.3.5) и (11.6.3.8) и выполняя интегрирование в (11.6.3.3) с помощью теоремы Коши, легко показать, что в корреляторе  $\langle \rho^2 \rangle$  наибольшее значение имеют члены, определяемые первым слагаемым в (11.6.3.5) и, следовательно, первым слагаемым в (11.6.3.8), содержащим  $\omega + \omega'$  в знаменателе. Эти члены пропорциональны  $n'_0$  в степени, меньшей первой, тогда как остальные члены содержат  $n'_0$  в степени не ниже первой.

В общем случае корреляционные функции и квадраты амплитуд колебаний в системе плазма—пучок содержат слагаемые, экспоненциально нарастающие со временем с инкрементом, пропорциональным  $\sqrt{n'_0}$ , причем предэкспоненциальный множитель также пропорционален  $\sqrt{n'_0}$ . Если скорость пучка велика по сравнению со средней тепловой скоростью электронов плазмы, то, как мы видели в § 11.5, возникает резонанс между колебаниями пучка и ленгмюровскими колебаниями плазмы. При этом корреляционные функции нарастают с инкрементом, пропорциональным  $n'_0{}^{1/3}$ , причем предэкспоненциальный множитель не зависит от плотности пучка.

Не останавливаясь на общих выражениях для корреляционных функций, приведем формулу для пространственной компоненты Фурье коррелятора плотности заряда с резонансным значением волнового вектора, определяемым соотношением  $|\mathbf{k}u| \approx \omega_{pe}$  для  $t$  и  $t'$ , значительно больших  $(n_0/n'_0)^{1/3} \omega_{pe}^{-1}$ :

$$\begin{aligned} \langle \rho(t) \rho(t') \rangle_{\mathbf{k}} = & \frac{k^2}{72\pi} T \exp \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{n'_0}{2n_0} \right)^{1/3} \omega_{pe} (t + t') - \right. \\ & \left. - t \operatorname{sgn} \mathbf{k}u \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{n'_0}{2n_0} \right)^{1/3} \right] \omega_{pe} (t - t') \right\}, \quad (11.6.4.1) \end{aligned}$$

где  $T$  — температура плазмы (предполагается, что пучок холодный),  $u$  — скорость пучка.

Полагая в этом выражении  $t' = t$  и используя уравнение Пуассона, найдем среднюю квадратичную амплитуду резонансных колебаний электрического поля в системе плазма—пучок

$$\sqrt{\langle E^2(t) \rangle_k} = 1/3 \sqrt{2\pi T} \exp \left[ \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{n'_0}{2n_0} \right)^{1/3} \omega_{p0} t \right]. \quad (11.6.4.2)$$

**11.6.5. Влияние столкновений между частицами на флуктуации в плазме.** До сих пор мы рассматривали флуктуации в бесстолкновительной плазме. Теперь мы остановимся на вопросе о влиянии парных столкновений между частицами на флуктуации в плазме [25]. Основная трудность здесь связана со сложным характером точного интеграла столкновений. Поэтому для получения качественной картины воспользуемся следующим модельным интегралом столкновений [26]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F}{\partial t} \right)_c &= \nu \frac{n}{n_0} \{f_0 - F\}, \\ f_0 &= \frac{n}{(2\pi m T)^{3/2}} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{v} - \mathbf{u})^2}{2T} \right]. \end{aligned} \quad (11.6.5.1)$$

Здесь  $n(\mathbf{r}, t)$ ,  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и  $T(\mathbf{r}, t)$  — плотность, макроскопическая скорость и температура электронов плазмы, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} n &= \int F d^3p, \quad \mathbf{u} = \frac{1}{n} \int \mathbf{v} F d^3p, \\ T &= \frac{m}{3n} \int (\mathbf{v} - \mathbf{u})^2 F d^3p; \end{aligned} \quad (11.6.5.2)$$

$\nu = \nu(T_0, n_0)$  — эффективная частота парных столкновений, которая считается не зависящей от скорости относительного движения сталкивающихся частиц,  $n_0$  и  $T_0$  — равновесные значения плотности и температуры электронов.

Легко проверить, что при таком интеграле столкновений сохраняется число частиц, энергия и импульс и обеспечивается выполнение H-теоремы.

Вводя в кинетическое уравнение случайные силы и считая отклонение  $f$  функции распределения от равновесного ее значения  $f_0$  малым, нетрудно получить следующее выражение для спектрального распределения флуктуаций случайных сил:

$$\langle y(\mathbf{p}) y(\mathbf{p}') \rangle_{k\omega} = 2\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}'), \quad (11.6.5.3)$$

где

$$\gamma(\mathbf{p}, \mathbf{p}') = \nu \left\{ f_0'(\mathbf{p}) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}') - \frac{1}{n_0} \left[ 1 + \frac{m}{T_0} \mathbf{v} \mathbf{v}' + \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{m\nu^2}{3T_0} \right) \left( 1 - \frac{m\nu'^2}{3T_0} \right) \right] f_0(\mathbf{p}) f_0(\mathbf{p}') \right\}. \quad (11.6.5.4)$$

Используя кинетическое уравнение, можно выразить флуктуации функции распределения и определяемые ими флуктуации плотности и температуры через случайные силы, а затем с помощью соотношения (11.6.5.3) определить корреляционные функции соответствующих величин.

Так, для компонент Фурье флуктуаций плотности  $\delta n_{\mathbf{k}\omega}$  и температуры  $\delta T_{\mathbf{k}\omega}$  получим соотношения

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} \frac{\delta n_{\mathbf{k}\omega}}{n_0} + \alpha_{12} \frac{\delta T_{\mathbf{k}\omega}}{T_0} &= Y_{\mathbf{k}\omega}, \\ \alpha_{21} \frac{\delta n_{\mathbf{k}\omega}}{n_0} + \alpha_{22} \frac{\delta T_{\mathbf{k}\omega}}{T_0} &= \tilde{Y}_{\mathbf{k}\omega}, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.5.5)$$

где правые части равенств определяются случайными силами

$$\left. \begin{aligned} Y_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{i}{n_0} \int \frac{y_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} d^3p, \\ \tilde{Y}_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{im}{n_0 T_0} \int \frac{v^2 y_{\mathbf{k}\omega}(\mathbf{p})}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v} + i\nu} d^3p, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.5.6)$$

а коэффициенты  $\alpha_{ij}$  равны

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= 1 - i \frac{y}{z} I - (p + 2ixy)(I - 1), \\ \alpha_{12} &= \frac{i}{2} \frac{y}{z} [1 + (1 - 2z^2)(I - 1)], \\ \alpha_{21} &= 3 - 2i \frac{y}{z} [1 + (z^2 + 1)(I - 1)] + \\ &\quad + (p + 2ixy)[1 - 2(z^2 + 1)(I - 1)], \\ \alpha_{22} &= 3 + i \frac{y}{z} [z^2 - 1 - (2z^4 + z^2 + 1)(I - 1)], \end{aligned} \right\} \quad (11.6.5.7)$$

$$z = x + iy = \frac{\omega + i\nu}{\sqrt{2} kv_0}, \quad I \equiv I(z) = \frac{z}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-\zeta^2)}{z - \zeta} d\zeta, \quad p = (a_0 k)^{-2}.$$

Разрешая систему (11.6.5.5) относительно  $\delta n_{\mathbf{k}\omega}$  и  $\delta T_{\mathbf{k}\omega}$  и используя (11.6.5.3) и (11.6.5.6), получим следующие общие формулы для спектральных распределений флуктуаций плотности и флуктуаций температуры в плазме с учетом парных столкновений между частицами:

$$\left. \begin{aligned} \langle n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{|\alpha_{11}|^2 \langle Y^* Y \rangle_{\mathbf{k}\omega} - 2 \operatorname{Re} \alpha_{12} \alpha_{22}^* \langle Y^* \tilde{Y} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + |\alpha_{12}|^2 \langle \tilde{Y}^* \tilde{Y} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{|\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}|^2}, \\ \langle T^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{T_0^2}{n_0^2} \frac{|\alpha_{21}|^2 \langle Y^* Y \rangle_{\mathbf{k}\omega} - 2 \operatorname{Re} \alpha_{11} \alpha_{21}^* \langle Y^* \tilde{Y} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + |\alpha_{11}|^2 \langle \tilde{Y}^* \tilde{Y} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{|\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}|^2}, \\ \langle n T \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= - \frac{T_0}{n_0} \frac{\alpha_{22} \alpha_{21}^* \langle Y^* Y \rangle_{\mathbf{k}\omega} - (\alpha_{22}^* \alpha_{11} + \alpha_{12} \alpha_{21}^*) \langle Y^* \tilde{Y} \rangle_{\mathbf{k}\omega} + \alpha_{12} \alpha_{11} \langle \tilde{Y}^* \tilde{Y} \rangle_{\mathbf{k}\omega}}{|\alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21}|^2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.6.5.8)$$

Входящие сюда функции типа  $\langle Y^*Y \rangle_{k\omega}$ , так же как и коэффициенты  $\alpha_{ij}$ , выражаются через  $I(z)$  следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \langle Y^*Y \rangle_{k\omega} &= \frac{\sqrt{2} n_0}{k v_0 |z|^2} \{ \operatorname{Re} iz^* I - y [2|z|^2 |I - 1|^2 + |I|^2 + \\ &+ 1/6 |1 + (2z^2 - 1)(I - 1)|^2], \\ \langle Y^*\tilde{Y} \rangle_{k\omega} &= \frac{\sqrt{2} n_0}{k v_0 |z|^2} \{ 2 \operatorname{Re} iz^* [1 + (z^2 + 1)(I - 1)] - \\ &- y [2[1 + (z^2 + 1)(I - 1)] I^* - \\ &- 2|z|^2 [1 - 2(z^2 + 1)(I - 1)](I - 1)^* + \\ &+ 1/3 [1 - (2z^2 - 1)(I - 1)]^* [z^2 - 1 - \\ &- (2z^2 + z^2 + 1)(I - 1)] \}, \\ \langle \tilde{Y}^*\tilde{Y} \rangle_{k\omega} &= \frac{\sqrt{2} n_0}{k v_0 |z|^2} \{ -2 \operatorname{Re} iz^* [2z^4 + z^2 - 4 - 2(z^4 + \\ &+ 2z^2 + 2)(I - 1)] - 2y [2|1 + (z^2 + \\ &+ 1)(I - 1)|^2 + |z|^2 |1 - 2(z^2 + 1)(I - 1)|^2 + \\ &+ 1/3 |z^2 - 1 - (2z^2 + z^2 + 1)(I - 1)|^2] \}. \end{aligned} \right\} \quad (11.6.5.9)$$

Приравнявая нулю выражение, стоящее в знаменателях (11.6.5.8) и учитывая (11.6.5.7), получим дисперсионное уравнение для продольных колебаний в плазме с учетом парных столкновений

$$(3z - 2iyI) [z - iyI - (p + 2ixy)z(I - 1)] - \\ - 1/2 i(p + 1 - 2x^2)y [1 - (2z^2 - 1)(I - 1)] = 0. \quad (11.6.5.10)$$

Формулы (11.6.5.8) позволяют исследовать влияние столкновений между частицами на характер флуктуаций в плазме во всем интервале значений эффективной частоты столкновений, начиная от бесстолкновительного случая и кончая гидродинамическим пределом. В пренебрежении столкновениями спектральные распределения флуктуаций плотности и температуры в плазме определяются выражениями (11.6.1.16), (11.6.1.18) и (11.6.1.19).

Считая эффективную частоту парных столкновений малой и разлагая (11.6.5.8) в ряд по степеням  $\nu$ , можно найти поправки к распределениям (11.6.1.16), (11.6.1.18) и (11.6.1.19), обусловленные парными столкновениями. В гидродинамическом пределе при больших значениях эффективной частоты парных столкновений выражения (11.6.5.8) также существенно упрощаются. Разлагая (11.6.5.8) по обратным степеням  $\nu$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} \langle n^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{4n_0}{\nu \Delta(\mathbf{k}, \omega)} (6\omega^2 + 5k^2 v_0^2) k^4 v_0^4, \\ \langle T^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{4T_0^2}{\nu n_0 \Delta(\mathbf{k}, \omega)} [5(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 v_0^2)^2 + 8/3 \omega^2 k^2 v_0^2] k^2 v_0^2, \\ \langle nT \rangle_{k\omega} &= \frac{4T_0}{\nu \Delta(\mathbf{k}, \omega)} [5(\omega^2 - \omega_{pe}^2 - k^2 v_0^2) + 4\omega^2] k^4 v_0^4, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.5.11)$$

где

$$\Delta(\mathbf{k}, \omega) = 9\omega^2 (\omega^2 - \omega_{pe}^2 - 5/3 k^2 v_e^2)^2 + \frac{k^4 v_e^4}{v^2} (9\omega^2 - 5\omega_{pe}^2 - 5k^2 v_e^2).$$

Устремляя в (11.6.5.11) эффективную частоту столкновений  $\nu$  к бесконечности ( $\nu \rightarrow \infty$ ), получим следующие формулы для спектральных распределений флуктуаций в идеальной гидродинамике:

$$\left. \begin{aligned} \langle n^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \pi n_0 \frac{k^2 v_e^2}{\omega_s^2} \left\{ \delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s) + 4/3 \frac{k^2 v_e^2}{\omega_{pe}^2 + k^2 v_e^2} \delta(\omega) \right\}, \\ \langle T^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{4\pi}{15} \frac{T_0^2}{n_0} \frac{k^2 v_s^2}{\omega_s^2} \left\{ \delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s) + 5 \frac{\omega_{pe}^2 + k^2 v_e^2}{k^2 v_s^2} \delta(\omega) \right\}, \\ \langle nT \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= \frac{2\pi}{3} T_0 \frac{k^2 v_e^2}{\omega_s^2} \left\{ \delta(\omega - \omega_s) + \delta(\omega + \omega_s) - 2\delta(\omega) \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.5.12)$$

где

$$\omega_s^2 = \omega_{pe}^2 + k^2 v_s^2, \quad v_s^2 = 5/3 T_0/m.$$

Согласно (11.6.5.12) спектральные распределения флуктуаций характеризуются максимумами при частотах, отвечающих звуковым колебаниям, а также при нулевой частоте, связанной с энтропийными волнами в плазме.

Интересно отметить, что спектральные распределения одновременных флуктуаций плотности и температуры в плазме в случае больших частот столкновений и в бесстолкновительном случае совпадают.

На рис. 11.6.2 представлены спектральные распределения флуктуаций плотности и температуры в плазме для промежуточных значений эффективной частоты парных столкновений при значениях параметра  $p=0; 1; 4; 10$ . Согласно приведенным графикам учет столкновений в коротковолновой области приводит к появлению в спектре флуктуаций плотности части звукового максимума, величина которого растет с увеличением частоты столкновений. Ширина его определяется коэффициентами вязкости и теплопроводности плазмы. В случае больших длин волн учет столкновений приводит к смещению ленгмюровского максимума в спектре флуктуаций плотности в сторону меньших частот. Это смещение связано с изменением характера дисперсии высокочастотных колебаний в плазме вследствие столкновения между частицами.

**11.6.6. Переход к гидродинамической теории флуктуаций.** Формулы (11.6.5.12) можно получить и иным путем, а именно, исходя из гидродинамической теории флуктуаций [27, 28].

Для построения гидродинамической теории флуктуаций следует воспользоваться уравнениями гидродинамики и ввести в них сторонние силы. Найдя далее изменение энергии гидродинамической среды, вызываемой сторонними силами, можно найти тензор отклика, определяющий, согласно (11.1.2.24), спектральные распределения флуктуаций гидродинамических величин.

В случае магнитной гидродинамики следует ввести стороннюю силу  $\mathbf{f}$  в уравнение Навье—Стокса, сторонний тепловой поток  $\mathbf{g}$  в уравнение переноса тепла и, наконец, сторонний ток  $\mathbf{y}$  в закон Ома. Ограничиваясь рассмотрением малых флуктуаций, можно линеаризовать уравнения магнитной гидродинамики и, таким образом, исходить из следующей системы уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} &= -\nabla p + \frac{1}{c} [\mathbf{j} \mathbf{B}_0] + \eta \Delta \mathbf{u} + (\zeta + \frac{1}{3} \eta) \text{grad div } \mathbf{u} + \mathbf{f}, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \text{div } \mathbf{u} &= 0, \\ p &= v_s^2 (\rho + \rho_0 \alpha T), \\ \rho_0 c_V \frac{\partial T}{\partial t} - \alpha T_0 v_s^2 \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \kappa \Delta T - \text{div } \mathbf{g}, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} &= \sigma \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \mathbf{B}_0] \right) + \mathbf{y}, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.6.1)$$

где  $\eta$  и  $\zeta$  — коэффициенты вязкости,  $\kappa$  — коэффициент теплопроводности,  $\sigma$  — проводимость,  $v_s^2 = (\partial p / \partial \rho)_T$  — квадрат скорости звука,  $\alpha = -(1/\rho_0) (\partial \rho / \partial T)_p$  — коэффициент объемного расширения и  $c_V$  — теплоемкость ( $\rho$  — отклонение плотности от равновесного значения  $\rho_0$ ,  $T$  — отклонение температуры от равновесного значения  $T_0$ ). Изменение энергии магнитогидродинамической среды определяется выражением

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \int \left\{ \mathbf{u} \mathbf{f} + \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{u} \mathbf{B}_0] \right) \mathbf{y} - \frac{T}{T_0} \text{div } \mathbf{g} \right\} d^3 r. \quad (11.6.6.2)$$

Считая сторонние силы изменяющимися со временем по закону  $\exp(-i\omega t)$  и переходя к пространственным компонентам Фурье, можно представить изменение энергии системы под действием сторонних сил в виде

$$\frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{1}{2} \text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \dot{\mathbf{P}}_{\mathbf{k}}^*, \quad (11.6.6.3)$$

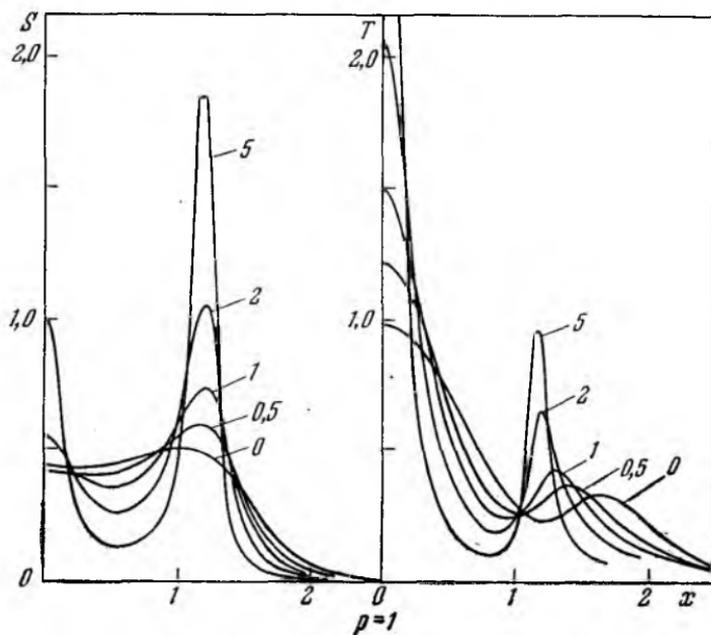
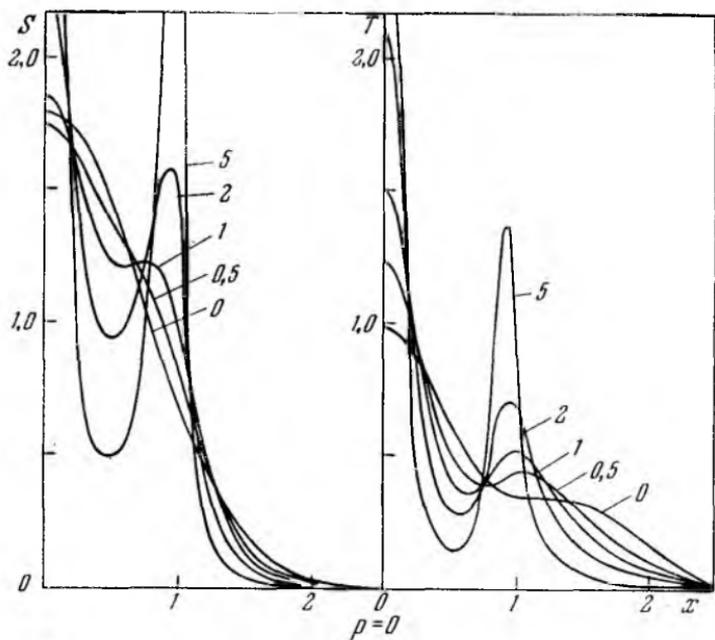
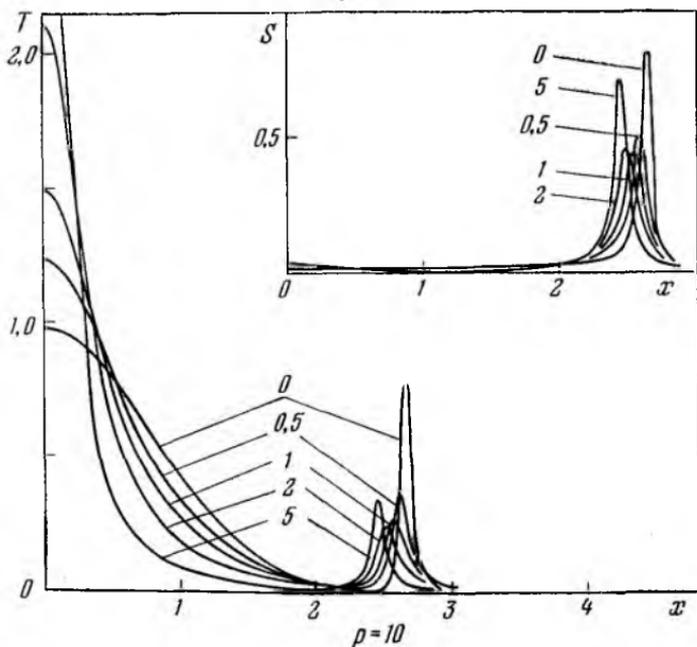
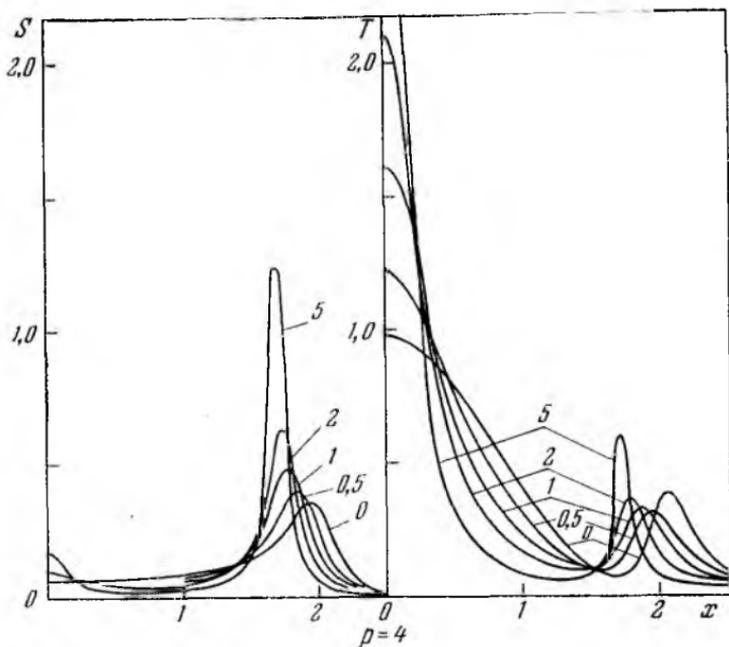


Рис. 11.6.2. Спектральные распределения флуктуаций плотности от безразмерной частоты  $x = \omega/\sqrt{2}kv_0$  при разных Числа у кривых указы-



$S(x, y) = \frac{\langle n^2 \rangle_{k, x+iy}}{2n_0}$  и температуры  $T(x, y) = \frac{n_0 \langle T^2 \rangle_{k, x+iy}}{2T_0^2}$  в зависи-  
 значениях частоты столкновений  $\nu$  и параметра  $\rho$ .  
 вают значения  $\nu = \nu \sqrt{2} kv_0$ .

где

$$\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega} = \frac{i}{\omega} \mathbf{f}_{\mathbf{k}\omega} - \frac{av_s^2}{c_V} \frac{\mathbf{k} (\mathbf{k} \mathbf{g}_{\mathbf{k}\omega})}{\omega (\omega + i\gamma k^2)} + i \frac{c (k^2 [\mathbf{B}_0 \mathbf{y}_{\mathbf{k}\omega}] - [\mathbf{B}_0 \mathbf{k}] (\mathbf{k} \mathbf{y}_{\mathbf{k}\omega}))}{\omega (k^2 c^2 - 4\pi i \sigma \omega)}. \quad (11.6.6.4)$$

Далее следует выразить с помощью уравнений движения компоненты Фурье скорости  $u_{\mathbf{k}\omega}$  через  $\mathbf{P}_{\mathbf{k}\omega}$ :

$$u_i(\mathbf{k}, \omega) = \alpha_{ij}(\mathbf{k}, \omega) P_j(\mathbf{k}, \omega), \quad (11.6.6.5)$$

где величины  $\alpha_{ij}$  и образуют тензор отклика. Выбирая систему координат с ортами

$$\mathbf{e}_1 = \frac{|\mathbf{kB}_0|}{|[\mathbf{kB}_0]|}, \quad \mathbf{e}_2 = \frac{|\mathbf{B}_0[\mathbf{kB}_0]|}{|[\mathbf{B}_0[\mathbf{kB}_0]|]}, \quad \mathbf{e}_3 = \frac{\mathbf{B}_0}{B_0},$$

можно получить следующие выражения для компонент тензора  $\alpha_{ij}$ :

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{11} &= D_1^{-1}, \\ \alpha_{22} &= \left[ 1 + i\eta \frac{k^2}{\omega \rho_0} + (\gamma - i\mu\omega) \cos^2 \theta \right] D_2^{-1}, \\ \alpha_{33} &= \left[ 1 + i\eta \frac{k^2}{\omega \rho_0} - (\gamma - i\mu\omega) \sin^2 \theta + \frac{4\pi i \sigma k^2 v_A^2}{\omega (k^2 c^2 - 4\pi i \sigma \omega)} \right] D_2^{-1}, \\ \alpha_{23} &= (\gamma - i\mu\omega) \sin \theta \cos \theta D_2^{-1}, \\ \alpha_{32}(\mathbf{B}_0) &= -\alpha_{23}(-\mathbf{B}_0), \\ \alpha_{12} &= \alpha_{21} = \alpha_{13} = \alpha_{31} = 0, \\ \gamma &= \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} \left[ 1 + \frac{\alpha^2 v_s^2 T_0}{c_V} \left( 1 + \frac{\chi^2 k^4}{\omega^2 \rho_0^2 c_V^2} \right)^{-1} \right], \\ \mu &= (\zeta + 1/3 \eta) \frac{k^2}{\omega^2 \rho_0} + \frac{\alpha^2 \chi T_0 k^4 v_s^4}{\omega^4 \rho_0 c_V^2} \left( 1 + \frac{\chi^2 k^4}{\omega^2 \rho_0^2 c_V^2} \right)^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (11.6.6.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} D_1 &= -\rho_0 \left( 1 + i\eta \frac{k^2}{\omega \rho_0} + i \frac{4\pi \sigma k^2 v_A^2 \cos^2 \theta}{\omega (k^2 c^2 - 4\pi i \sigma \omega)} \right), \\ D_2 &= -\rho_0 \left\{ \left( 1 + i\eta \frac{k^2}{\omega \rho_0} \right) \left[ 1 - \gamma + i\omega \left( \eta \frac{k^2}{\omega^2 \rho_0} + \mu \right) + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + i \frac{4\pi \sigma k^2 v_A^2}{\omega (k^2 c^2 - 4\pi i \sigma \omega)} \right] \left[ 1 - \gamma \cos^2 \theta + i\omega \left( \eta \frac{k^2}{\omega^2 \rho_0} + \mu \cos^2 \theta \right) \right] \right\}. \end{aligned} \right\} \quad (11.6.6.7)$$

Зная величины  $\alpha_{ij}$ , можно, учитывая соотношение (11.1.2.25), найти спектральное распределение флуктуаций скорости:

$$\langle u_i u_j \rangle_{k\omega} = \frac{T_0}{\omega} i (\alpha_{j*}^* - \alpha_{ij}) = 2 \frac{T_0}{\omega} \text{Im } \alpha_{ij}, \quad (11.6.6.8)$$

а также других величин. В частности, спектральное распределение флуктуаций плотности определяется формулой

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = 2 \frac{T_0 \rho_0^2 k^2}{\omega^3} (\sin^2 \theta \text{Im } \alpha_{22} + \cos^2 \theta \text{Im } \alpha_{33} + \\ + 2 \sin \theta \cos \theta \text{Im } \alpha_{23}). \quad (11.6.6.9)$$

Спектральное распределение флуктуаций температуры имеет вид

$$\langle T^2 \rangle_{k\omega} = \frac{2T_0^2}{\omega^2 c_0^2 c_V^2 + \chi^2 k^4} \left\{ \chi k^2 + \right. \\ \left. + \alpha^2 v_s^4 \rho_0^2 T^2 k_i k_j \left( \frac{\text{Im } \alpha_{ij}}{\omega} - \frac{2\rho_0 c_V \chi k^2 \text{Re } \alpha_{ij}}{\omega^2 \rho_0^2 c_V^2 + \chi^2 k^4} \right) \right\}. \quad (11.6.6.10)$$

Спектральное распределение флуктуаций магнитного поля определяется выражением

$$\langle B_i B_j \rangle_{k\omega} = \frac{32\pi^2 \sigma c^2 T_0}{k^4 c^4 + 16\pi^2 \sigma^2 \omega^2} \left\{ k^2 \delta_{ij} - k_i k_j - \right. \\ \left. - B_0^2 \frac{\sigma}{c} (k_3 \delta_{ik} - \delta_{i3} k_k) (k_3 \delta_{jl} - \delta_{j3} k_l) \left( \frac{\text{Im } \alpha_{kl}}{\omega} + \frac{8\pi \sigma k^2 c^2 \text{Re } \alpha_{kl}}{k^4 c^4 + 16\pi^2 \sigma^2 \omega^2} \right) \right\}. \quad (11.6.6.11)$$

Устремляя в формуле (11.6.6.8) коэффициенты теплопроводности и вязкости к нулю, а затем коэффициент электропроводности к бесконечности, получим спектральные распределения флуктуаций скорости в идеальной магнитогидродинамической среде

$$\left. \begin{aligned} \langle u_1^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{2\pi T_0}{\rho_0 |\omega|} \delta(\Delta_1), \quad \Delta_1 = 1 - \frac{k^2 v_A^2}{\omega^2} \cos^2 \theta, \\ \langle u_2^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{2\pi T_0}{\rho_0 |\omega|} \left\{ 1 - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2 v_s^2 T_0}{c_V} \right) \cos^2 \theta \right\} \delta(\Delta_2), \\ \langle u_3^2 \rangle_{k\omega} &= \frac{2\pi T_0}{\rho_0 |\omega|} \frac{k^4 v_s^4 (1 + \alpha^2 v_s^2 T_0 / c_V)^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{1 - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2 v_s^2 T_0}{c_V} \right) \cos^2 \theta} \delta(\Delta_2), \\ \langle u_2 u_3 \rangle_{k\omega} &= \frac{2\pi T_0}{\rho_0 |\omega|} \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2 v_s^2 T_0}{c_V} \right) \sin \theta \cos^2 \theta \delta(\Delta_2), \\ \Delta_2 &= 1 - \frac{k^2 v_A^2}{\omega^2} \cos^2 \theta - \frac{k^2 v_s^2}{\omega^2} \left( 1 + \frac{\alpha^2 v_s^2 T_0}{c_V} \right) \end{aligned} \right\} \quad (11.6.6.12)$$

Приравнивая нулю аргументы  $\delta$ -функций, входящих в эти формулы, получим дисперсионные уравнения для альвеновских и магнитозвуковых волн. Поэтому спектральные распределения флуктуаций скорости имеют резкие максимумы, соответствующие распространению слабозатухающих магнитогидродинамических волн. Аналогичные максимумы возникают в спектральных распределениях флуктуаций магнитного поля.

Проинтегрировав (11.6.6.12), (11.6.6.11) и (11.6.6.10) по частотам, найдем компоненты Фурье для пространственных корреляционных функций флуктуации скорости, магнитного поля и температуры:

$$\langle u_i u_j \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{T_0}{\rho_0} \delta_{ij}; \quad (11.6.6.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \langle B_1^2 \rangle_{\mathbf{k}} &= 4\pi T_0, \\ \langle B_2^2 \rangle_{\mathbf{k}} &= 4\pi T_0 \cos^2 \theta, \\ \langle B_3^2 \rangle_{\mathbf{k}} &= 4\pi T_0 \sin^2 \theta, \\ \langle B_2 B_3 \rangle_{\mathbf{k}} &= -4\pi T_0 \sin \theta \cos \theta; \end{aligned} \right\} \quad (11.6.6.14)$$

$$\langle T^2 \rangle_{\mathbf{k}} = T_0^2 / \rho_0 c_V. \quad (11.6.6.15)$$

Здесь всюду  $\theta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{B}_0$ .

## § 11.7. Флуктуации в частично ионизованной плазме, находящейся во внешнем электрическом поле

### 11.7.1. Флуктуации в отсутствие внешнего магнитного поля.

Перейдем теперь к изучению флуктуаций в частично ионизованной плазме, находящейся в постоянном и однородном электрическом поле [29, 30].

Как показано в гл. 7, в результате соударений между заряженными и нейтральными частицами в такой плазме устанавливается стационарное распределение частиц по скоростям, характеризующееся очень высокой средней энергией хаотического движения (эффективной температурой) электронов и сравнительно небольшой средней скоростью их направленного движения.

Разумеется, плазма, находящаяся во внешнем электрическом поле, является существенно неравновесной системой, и поэтому общие методы теории флуктуаций к ней непосредственно неприменимы. Тем не менее при исследовании высокочастотных флуктуаций, для которых  $\omega \gg \nu_{e,i}$  ( $\omega$  — частота флуктуации и  $\nu_{e,i}$  — эффективная частота соударений) можно, очевидно, пользоваться общими формулами § 11.5, описывающими флуктуации в бесстолкновительной плазме. Получающиеся при этом выражения для корреляционных функций будут, разумеется, зависеть от вида

интеграла столкновений, поскольку от него зависит стационарная функция распределения электронов  $f_{e0}$ .

Таким образом, для коррелятора высокочастотных флуктуаций плотности заряда в отсутствие внешнего магнитного поля мы можем исходить из формул (11.5.1.12), (11.5.1.15), в которые в качестве равновесной функции распределения электронов подставлена функция  $f_{e0} = F_0 + F_1 v/v$  (см. (7.1.2.4)), а в качестве равновесной функции распределения ионов — максвелловская функция распределения для температуры  $T_i$ .

Приравнивая нулю знаменатель получающегося выражения для корреляционной функции и полагая  $T_i/m_i \ll \omega^2/k^2 \ll T_e/m_e$ , получим частоту и декремент затухания ионно-звуковых колебаний (7.2.1.7), (7.2.1.10). Учтя, что декремент затухания ионного звука мал ( $\gamma \ll \omega$ ), выражение (11.5.1.15) легко привести к виду

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{\sqrt{Z} a_e^2 k^5 v_e T_e}{2^{3/4} \sqrt{3} (1 + a_e^2 k^2)^2 (\Psi - \cos \chi)} \delta \left( \omega^2 - \frac{k^2 v_s^2}{1 + a_e^2 k^2} \right). \quad (11.7.1.1)$$

Спектральные распределения флуктуаций плотности заряда электронов и плотности заряда ионов определяются с учетом (7.2.1.11) и (11.5.1.14) следующим образом:

$$\begin{aligned} e^2 \langle n_e^2 \rangle_{k\omega} &= (Ze)^2 (1 + a_e^2 k^2)^{-2} \langle n_i^2 \rangle_{k\omega} = -Ze^2 (1 + a_e^2 k^2)^{-1} \langle n_e n_i \rangle_{k\omega} = \\ &= \frac{\sqrt{Z} a_e^{-2} k v_e T_e}{2^{3/4} \sqrt{3} (\Psi - \cos \chi)} \delta \left( \omega^2 - \frac{k^2 v_s^2}{1 + a_e^2 k^2} \right). \end{aligned} \quad (11.7.1.2)$$

Посмотрим теперь, как зависит характер ионно-звуковых флуктуаций от напряженности внешнего электрического поля  $E_0$ .

При не очень сильных полях, когда  $\Psi \gg 1$ , распределения флуктуаций плотности заряда и плотностей электронов и ионов почти изотропны. По мере увеличения поля  $E_0$  распределение флуктуаций становится все более анизотропным: чем меньше угол  $\chi$  между направлением распространения флуктуации и направлением внешнего электрического поля, тем сильнее флуктуации.

Если  $E_0 \rightarrow E_c$ , где  $E_c$  — критическое значение электрического поля, определяемое формулой (7.2.1.12), то уровень флуктуации резко возрастает; выражения (11.7.1.1) и (11.7.1.2) в случае длинных волн ( $a_e k \ll 1$ ) обращаются при  $\chi = 0$  в бесконечность.

Резкое возрастание уровня флуктуаций при приближении электрического поля к его критическому значению связано с тем, что при  $E_0 = E_c$  возникает неустойчивость плазмы, обусловленная нарастанием ионно-звуковых колебаний. Такое возрастание уровня флуктуаций аналогично возрастанию критических флуктуаций в бесстолкновительной плазме, рассмотренному в п. 11.5.3.

Заметим, что если  $Zm_0/m_1 > 3\pi 2^{-3/2}$ , то, как отмечалось в п. 7.2.1, ни при каких значениях внешнего электрического поля ионно-звуковые колебания не становятся нарастающими. В этом случае корреляционные функции остаются конечными при всех значениях  $E_0$  и критические флуктуации не возникают.

Подчеркнем, что все приведенные здесь и ниже выражения для корреляционных функций получены в рамках линейной теории флуктуаций и поэтому применимы к случаю затухающих колебаний. Если колебания плазмы нарастают, то при определении корреляционных функций становится необходимым учет нелинейных эффектов, ограничивающих рост флуктуаций.

Приведем в заключение выражение для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда при  $\omega^2 \gg k^2 T_e/m_0$ . Используя (11.5.1.15), имеем

$$\langle \rho^2 \rangle_{k\omega} = \frac{k^2}{4|\omega|} \left\{ T_L(k, \cos \chi) \delta \left( 1 - \frac{\omega_L(k)}{\omega} \right) + T_L(k, -\cos \chi) \delta \left( 1 + \frac{\omega_L(-k)}{\omega} \right) \right\}, \quad (11.7.1.3)$$

где  $\omega_L$  — частота ленгмюровской волны, определяемая формулой (7.1.3.3), и  $T_L$  — некая функция от волнового вектора  $k$ , которую можно назвать эффективной температурой ленгмюровских волн.

Явный вид функции  $T_L$  существенно зависит от вида невозмущенной функции распределения электронной компоненты плазмы в области больших скоростей  $v \gg \sqrt{T_e/m_0}$ . Если функция распределения в этой области определяется (7.1.2.4), то [31]

$$T_L(k, \cos \chi) = \alpha_L T_e (a_e k)^2; \quad \alpha_L = \frac{\Gamma(1/4)}{2\Gamma(3/4)} \approx 1,5 \quad (11.7.1.4)$$

(для определенности предполагается, что  $(a_e k)^2 \gg \sqrt{m_0/m_1}$ ).

Мы видим, что в данном случае эффективная температура ленгмюровских колебаний значительно меньше средней энергии электронов,  $T_L \sim (a_e k)^2 T_e$  (в отличие от случая максвелловского распределения электронов по скоростям, когда, согласно (11.2.3.4),  $T_L = T_e$ ).

**11.7.2. Критические флуктуации в электрическом и магнитном полях.** Рассмотрим теперь высокочастотные флуктуации в частично ионизованной плазме, находящейся как во внешнем электрическом поле, так и в постоянном и однородном магнитном поле [30, 32]. Спектральное распределение флуктуаций плотности заряда определяется при этом по-прежнему формулой (11.2.2.5), в которую в качестве диэлектрической проницаемости плазмы следует подставить выражение (7.2.2.1).

В случае не очень сильного магнитного поля, когда существенно замагничена только электронная компонента плазмы

( $\omega_{Bi} \ll \omega \ll \omega_{Be}$ , где  $\omega_{Be} = |e_a| B_0 / m_e c$  — гирочастота для частиц сорта  $a$ ), функция (11.5.1.15) имеет полюсы, соответствующие распространению в плазме ионно-звуковых колебаний с частотой

$$\omega_s(\mathbf{k}) = kv_s / \sqrt{1 + a_s^2 k^2}$$

и декрементом затухания, определяемым формулой (7.2.2.6). Учитывая, что этот декремент мал по сравнению с частотой, можно представить соотношение (11.5.1.15) в звуковой области ( $T_i / m_i \ll \ll \omega^2 / k^2 \ll T_e / m_e$ ) в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\sqrt{Z} a_e^2 k^5 v_s T_e}{2^{3/4} \sqrt{3} (1 + a_e^2 k^2)^2 \mu^\pm (\Psi^\pm - \cos \chi)} \delta(\omega^2 - \omega_s^2(\mathbf{k})), \quad (11.7.2.1)$$

где  $\chi$  — угол между направлением распространения волны, т. е. вектором  $\mathbf{k}$  и  $\text{sgn } \omega$ , и средней направленной скоростью электронов  $\mathbf{u}_0$ , а величины  $\Psi^\pm$  и  $\mu^\pm$  определяются формулами (7.2.2.7); верхний знак относится к случаю  $\chi < 1/2\pi$ , нижний — к случаю  $\chi > 1/2\pi$ , и предполагается, что  $\chi$  не слишком близок к  $1/2\pi$  ( $\cos \chi \gg \max\{\sqrt{Z m_e / m_i}; v_0 / \omega\}$ ).

Спектральные распределения флуктуаций плотностей электронов и ионов вблизи ионно-звуковой частоты имеют вид

$$\begin{aligned} e^2 \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= (Ze)^2 (1 + a_e^2 k^2)^{-2} \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = -Ze^2 (1 + a_e^2 k^2)^{-1} \langle n_e n_i \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \\ &= \frac{\sqrt{Z} a_e^{-2} k v_s T_e}{2^{3/4} \sqrt{3} \mu^\pm (\Psi^\pm - \cos \chi)} \delta\left(\omega^2 - \frac{k^2 v_s^2}{1 + a_e^2 k^2}\right). \end{aligned} \quad (11.7.2.2)$$

Остановимся теперь на случае очень сильного магнитного поля ( $\omega \ll \omega_{Bi}$ ), когда существенно замагничена не только электронная, но и ионная компонента плазмы. Функция (11.7.2.1) имеет в этом случае полюсы, соответствующие распространению в плазме магнитозвуковых колебаний с частотой

$$\omega = \frac{kv_s}{1 + a_e^2 k^2} |\cos \chi|$$

и декрементом затухания  $\gamma$ , определяемым формулой (7.2.2.9). Учитывая, что  $\gamma \ll \omega$ , можно представить выражение (11.5.1.15) в звуковой области в случае сильной замагниченности ионов в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \frac{\sqrt{Z} a_e^2 k^5 v_s T_e |\cos \chi|}{2^{3/4} \sqrt{3} (1 + a_e^2 k^2)^2 (\xi - \text{sgn } \cos \chi)} \delta\left(\omega^2 - \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \chi}{1 + a_e^2 k^2}\right), \quad (11.7.2.3)$$

где  $\xi$  определяется формулой (7.2.2.10).

Спектральные распределения флуктуаций плотностей электронов и ионов в этой области частот определяются формулами

$$\begin{aligned} \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} &= Z^2 (1 + a_e^2 k^2)^{-2} \langle n_i^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = -Z (1 + a_e^2 k^2)^{-1} \langle n_e n_i \rangle_{\mathbf{k}\omega} = \\ &= \frac{\sqrt{Z} a_e^{-2} k v_s T_e}{2^{3/4} \sqrt{3} e^2 |\cos^3 \chi| (\xi - \text{sgn } \cos \chi)} \delta\left(\omega^2 - \frac{k^2 v_s^2 \cos^2 \chi}{1 + a_e^2 k^2}\right). \end{aligned} \quad (11.7.2.4)$$

Подчеркнем, что исходное выражение (11.5.1.15) справедливо в высокочастотной области  $\omega \gg \nu_\alpha$ . Поэтому формулы (11.7.2.3) и (11.7.2.4) применимы при углах  $\chi$ , не слишком близких к  $1/2\pi$ , т. е. при  $|1/2\pi - \chi| \gg \sqrt{1 + a_0^2 k^2} \nu_\alpha / k v_s$ .

Проследим теперь за тем, как меняется характер флуктуаций в зависимости от величины внешних полей  $E_0$  и  $B_0$ .

При не очень сильном внешнем электрическом поле пространственная компонента Фурье корреляционной функции плотности заряда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{1}{2\pi} \int \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} d\omega$$

является почти изотропной. При не очень сильном внешнем магнитном поле ( $\omega_{B1} \ll k v_s (1 + a_0^2 k^2)^{-1/2} \ll \omega_{Bc}$ ) по мере увеличения внешнего электрического поля распределение флуктуаций становится все более анизотропным: чем меньше угол  $\chi$  между направлением распространения флуктуации и направленной скоростью электронов, тем большей интенсивностью характеризуются флуктуации.

Если  $E_0 \rightarrow E'_c$ , где  $E'_c$  — критическое значение электрического поля, определяющееся формулой (7.2.2.8), то уровень флуктуаций резко возрастает; выражения (11.7.2.1), (11.7.2.2) в случае длинных волн ( $a_0 k \ll 1$ ) обращаются при  $\chi=0$  в бесконечность.

При очень сильном магнитном поле ( $\omega_{B1} \gg \omega_s(\mathbf{k})$ ) функция  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}}$  имеет, согласно (11.7.2.3), вид

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}} = \frac{a_0^2 k^4 T_0}{2^{3/4} \sqrt{3} (1 + a_0^2 k^2)^{3/2}} \frac{\xi}{\xi^2 - 1}, \quad (11.7.2.5)$$

где  $\xi$  по-прежнему определяется формулой (7.2.2.10). В этом случае по мере увеличения электрического поля эта функция возрастает, оставаясь изотропной. Если электрическое поле  $E_0$  приближается к критическому значению  $E'_c$ , то выражение (11.7.2.5) при  $a_0 k \ll 1$  обращается в бесконечность сразу для всех направлений (а не только для  $\chi=0$ , как при слабой замагниченности ионов).

Как и в рассмотренном выше случае плазмы в отсутствие внешнего магнитного поля, резкое возрастание уровня флуктуаций при приближении электрического поля к его критическому значению связано с тем, что при  $E_0 = E'_c$  возникает неустойчивость плазмы, обусловленная нарастанием магнитозвуковых (или ионно-звуковых) колебаний. Разумеется, если  $Zm_0/m_1 > 3\pi^2 \approx 3,3$ , то магнитозвуковые (или ионно-звуковые) колебания не становятся нарастающими ни при каких значениях внешнего электрического поля, и критические флуктуации не возникают.

### § 12.1. Рассеяние электромагнитных волн в свободной плазме

**12.1.1. Ток рассеяния.** При нахождении спектров собственных колебаний плазмы мы исходили из линейаризованных кинетических уравнений и пренебрегали нелинейными членами  $\frac{e}{m}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}])\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}$ . Полученное в результате такого пренебрежения уравнение для электрического поля  $\mathbf{E}$  имеет вид

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \frac{\hat{\epsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (12.1.1.1)$$

где  $\hat{\epsilon}$  — оператор диэлектрической проницаемости плазмы; это уравнение линейно, и поэтому удовлетворяет принципу суперпозиции и соответствует возможности независимого распространения в плазме различных колебаний.

В действительности, однако, различные колебания распространяются в плазме не независимо друг от друга, а взаимодействуют между собой. Их взаимодействие учтено в исходных кинетических уравнениях и описывается нелинейными членами  $\frac{e}{m}(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{B}])\frac{\partial F}{\partial \mathbf{v}}$ , отброшенными при выводе уравнения (12.1.1.1).

Взаимодействие между колебаниями приводит к различным процессам рассеяния и трансформации волн в плазме\*). Рассмотрим, например, распространение поперечной электромагнитной волны в плазме. Благодаря ее взаимодействию с флуктуационными колебаниями плазмы происходит рассеяние волны, которое может сопровождаться изменением частоты. Интенсивность рассеянных волн определяется как интенсивностью падающей волны, так и уровнем флуктуаций плазмы.

Так как спектр флуктуаций обладает резкими максимумами при частотах собственных колебаний плазмы, то в спектре рассеянных волн также будут резкие максимумы при частотах,

\*) Явления комбинационного рассеяния и трансформации волн в плазме были предсказаны в [1].

отличающихся от частоты падающей волны на частоты собственных колебаний плазмы (или на кратные им частоты).

Взаимодействие распространяющихся в плазме волн с флуктуационными колебаниями может приводить также к трансформации волн, например, к преобразованию поперечной волны в продольную и продольной в поперечную. Вероятности этих процессов, так же как и процессов рассеяния, определяются уровнем флуктуаций в плазме.

Изучив флуктуации, мы перейдем теперь к исследованию процессов рассеяния и трансформации волн в плазме, которую будем считать сперва свободной \*).

Заметим предварительно, что нелинейное взаимодействие между различными колебаниями плазмы является малым. Благодаря этому можно приближенно выделить поле падающей волны, которое, по определению, удовлетворяет уравнению (12.1.1.1). Будем считать поле падающей волны заданным и обозначим его через  $E^0(\mathbf{r}, t)$ .

Вследствие взаимодействия поля падающей волны с флуктуационным полем возникают рассеянные волны; поэтому суммарное электрическое поле в плазме при распространении волны можно представить в виде

$$E(\mathbf{r}, t) = E^0(\mathbf{r}, t) + \delta E(\mathbf{r}, t) + E'(\mathbf{r}, t), \quad (12.1.1.2)$$

где  $\delta E$  — флуктуационное поле и  $E'$  — поле рассеянной волны. Так как взаимодействие между волнами мало, то поле  $E'$  можно считать билинейным относительно полей падающей волны и флуктуационного поля, т. е.  $E' \sim E^0 \delta E$ .

Наша задача заключается в определении поля рассеянной волны  $E'$ . Оно удовлетворяет, очевидно, уравнению Максвелла

$$\text{rot rot } E' + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial j'}{\partial t}, \quad (12.1.1.3)$$

где  $j'$  — плотность тока, создающего поле  $E'$ . Чтобы найти его, напомним, что ток в плазме связан с функцией распределения соотношением

$$j = \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int v f_{\alpha} d^3v, \quad (12.1.1.4)$$

где  $f_{\alpha}$  — отклонение функции распределения  $F_{\alpha}$  от исходной функции распределения  $f_{\alpha 0}$ . Поэтому нужно выяснить вид функции распределения при распространении в плазме падающей волны. Ясно, что функцию  $f_{\alpha}$  можно представить в виде

$$f_{\alpha} = f_{\alpha}^0 + \delta f_{\alpha} + f'_{\alpha}, \quad (12.1.1.5)$$

\*) Теория рассеяния электромагнитных волн в плазме развита в [2--4]; далее мы следуем работе [2].

где  $f_\alpha^0$  — отклонение функции распределения, связанное с падающей волной,  $\delta f_\alpha$  — флуктуация функций распределения и  $f'_\alpha$  — отклонение функции распределения, связанное с рассеянной волной. Флуктуация функции распределения определяется уравнением типа (11.6.1.1), а функции  $f_\alpha^0$  и  $f'_\alpha$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial f_\alpha^0}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^0] \right) \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (12.1.1.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f'_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial f'_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}'] \right) \frac{\partial f'_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^0] \right) \frac{\partial f'_\alpha}{\partial \mathbf{v}} + \\ + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \delta \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}] \right) \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \end{aligned} \quad (12.1.1.7)$$

где  $\mathbf{B}^0$  и  $\mathbf{B}'$  — магнитные поля падающей и рассеянной волн и  $\delta \mathbf{B}$  — флуктуационное магнитное поле.

Предположим, что падающая волна является плоской монохроматической волной вида

$$\mathbf{E}^c(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)].$$

Тогда решение уравнения (12.1.1.6) имеет вид

$$(f_\alpha^0)_{\mathbf{k}\omega} = -i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^0] \right) \frac{1}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}} \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial \mathbf{v}} \quad (12.1.1.8)$$

(здесь множитель  $\exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$  опущен). Плотность тока, связанного с этой частью функции распределения, равна

$$\mathbf{j}_{\mathbf{k}\omega} = -i\omega \frac{\varepsilon_l(k, \omega) - 1}{4\pi} \mathbf{E}^0. \quad (12.1.1.9)$$

Переходя в уравнении (12.1.1.7) к компонентам Фурье, получим

$$\begin{aligned} (f'_\alpha)_{\mathbf{k}'\omega'} = -i \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \frac{1}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}} \left\{ \left( \mathbf{E}'_{\mathbf{k}'\omega'} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}'_{\mathbf{k}'\omega'}] \right) \frac{\partial f_\alpha^0}{\partial \mathbf{v}} + \right. \\ \left. + \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^0] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\delta f_\alpha)_{\mathbf{q}\Delta\omega} + \left( \delta \mathbf{E}_{\mathbf{q}\Delta\omega} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}_{\mathbf{q}\Delta\omega}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f_\alpha^0)_{\mathbf{k}\omega} \right\}, \end{aligned} \quad (12.1.10)$$

где  $\omega'$  и  $\mathbf{k}'$  — частота и волновой вектор рассеянной волны,  $\Delta\omega = \omega' - \omega$ ,  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ .

Найдем теперь плотность тока  $\mathbf{j}'_{\mathbf{k}'\omega'}$ , связанного с функцией  $f'_\alpha$ :

$$\mathbf{j}'_{\mathbf{k}'\omega'} = -i\omega' \frac{\varepsilon_l(k', \omega') - 1}{4\pi} \mathbf{E}'_{\mathbf{k}'\omega'} + \mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'}, \quad (12.1.1.11)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'} = -i \sum_\alpha \frac{e_\alpha^2}{m_\alpha} \int \frac{\mathbf{v}}{\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v}} \left\{ \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^0] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (\delta f_\alpha)_{\mathbf{q}\Delta\omega} + \right. \\ \left. + \left( \delta \mathbf{E}_{\mathbf{q}\Delta\omega} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \delta \mathbf{B}_{\mathbf{q}\Delta\omega}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} (f_\alpha^0)_{\mathbf{k}\omega} \right\} d^3v. \end{aligned} \quad (12.1.1.12)$$

Подставляя выражение (12.1.1.11) для плотности тока  $\mathbf{j}'$  в уравнение (12.1.1.3) для поля рассеянной волны, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}' + \frac{\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}. \quad (12.1.1.13)$$

Мы видим, что величину  $\mathbf{J}$  можно рассматривать как плотность тока, вызывающего рассеянные волны. Плотность этого тока, который мы будем называть *током рассеяния*, пропорциональна полю падающей волны и величинам, характеризующим флуктуации в плазме.

Уравнение (12.1.1.13) описывает все процессы рассеяния и трансформации волн в свободной плазме. В дальнейшем мы будем рассматривать рассеяние (и трансформацию) только высокочастотных (поперечных электромагнитных и продольных ленгмюровских) волн. Эти процессы обуславливаются в основном электронной компонентой плазмы. Поэтому под  $\mathbf{J}$  в (12.1.1.13) следует понимать только плотность электронного тока.

Так как фазовые скорости рассматриваемых волн значительно больше тепловой скорости электронов, то при вычислении интеграла, входящего в выражение для плотности тока  $\mathbf{J}$  (см. (12.1.1.12)), можно воспользоваться разложениями

$$(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})^{-1} = \omega^{-1}(1 + \mathbf{k}\mathbf{v}/\omega + \dots), \quad (\omega' - \mathbf{k}'\mathbf{v})^{-1} = \omega'(1 + \mathbf{k}'\mathbf{v}/\omega' + \dots).$$

В результате мы получим следующее выражение для компоненты Фурье  $\mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'} = & -i \frac{e}{n_0 \omega'} \left\{ \left[ -e \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e + \frac{1}{\omega'} (\mathbf{k}' \delta \mathbf{j}_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e) - \frac{1}{\omega} (\mathbf{k} \delta \mathbf{j}_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e) \right] \mathbf{E}^0 + \right. \\ & + \frac{\mathbf{k}}{\omega} (\mathbf{E}^0 \delta \mathbf{j}_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e) + \frac{1}{\omega'} (\mathbf{k}' \mathbf{E}^0) \delta \mathbf{j}_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e + \frac{i}{4\pi} \frac{\omega_0^2}{\omega \omega'} (\mathbf{k}' \delta \mathbf{E}_{\mathbf{q}\Delta\omega}) \mathbf{E}^0 + \frac{\omega'}{\Delta\omega} (\mathbf{E}^0 \delta \mathbf{E}_{\mathbf{q}\Delta\omega}) \mathbf{q} + \\ & \left. + \left[ (\mathbf{k}' \mathbf{E}^0) - \frac{\omega'}{\Delta\omega} (\mathbf{q} \mathbf{E}^0) + \frac{\omega'}{\omega} (\mathbf{k} \mathbf{E}^0) \right] \delta \mathbf{E}_{\mathbf{q}\Delta\omega} \right\}, \quad (12.1.1.14) \end{aligned}$$

где  $\delta n^e$  и  $\delta \mathbf{j}^e$  — флуктуации плотности электронов и плотности электронного тока:

$$\delta n^e = \int \delta f_e d^3v, \quad \delta \mathbf{j}^e = -e \int \mathbf{v} \delta f_e d^3v.$$

Заметим, что флуктуационное поле  $\delta \mathbf{E}$ , входящее в выражение (12.1.1.14), определяется флуктуациями как электронного, так и ионного токов.

Пренебрегая малыми релятивистскими поправками, можно выразить флуктуации плотности тока  $\delta \mathbf{j}^e$  и поля  $\delta \mathbf{E}$  через флуктуации плотностей электронов и ионов  $\delta n^e$  и  $\delta n^i$ :

$$\delta \mathbf{j}_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e = \frac{\Delta\omega}{q^2} \mathbf{q} \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e, \quad \delta \mathbf{E}_{\mathbf{q}\Delta\omega} = i \frac{4\pi e}{q^2} \mathbf{q} (\delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^e - \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^i). \quad (12.1.1.15)$$

Подставляя эти соотношения в (12.1.1.14), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega} = & i \frac{e^2}{m_e \omega} \left\{ \left[ \mathbf{E}^0 + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{\mathbf{k}'}{q^2} (\mathbf{qE}^0) + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{\mathbf{q}}{q^2} (\mathbf{kE}^0) \right] \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^0 - \right. \\ & \left. - \frac{\Delta\omega^2}{q^2 \omega'^2} \left[ (\mathbf{k}'\mathbf{q}) \mathbf{E}^0 + (\mathbf{k}'\mathbf{E}^0)\mathbf{q} + \frac{\omega'}{\omega} (\mathbf{kE}^0)\mathbf{q} \right] \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^0 + \right. \\ & \left. + \frac{\omega_{pe}^2}{q^2 \omega'^2} \left[ (\mathbf{k}'\mathbf{q}) \mathbf{E}^0 + (\mathbf{k}'\mathbf{E}^0)\mathbf{q} + \frac{\omega'}{\omega} (\mathbf{kE}^0)\mathbf{q} \right] (\delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^0 - \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^i) \right\}. \quad (12.1.1.16) \end{aligned}$$

Покажем, что в этом выражении можно не учитывать двух последних слагаемых. Напомним, что продольные флуктуации в плазме происходят в основном с ленгмюровской частотой  $\Delta\omega \approx \approx \omega_{pe}$  и с частотами, значительно меньшими  $\omega_{pe}$ .

Рассмотрим прежде всего флуктуации с частотами  $\Delta\omega \ll \omega_{pe}$ . Для них

$$\langle (\delta n^0 - \delta n^i)^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} \approx a_e^4 q^4 \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega}.$$

Поэтому при  $\Delta\omega \ll \omega_{pe}$  отношение третьего слагаемого в (12.1.1.16) к первому составляет по порядку величины  $k^2 v_0^2 / \omega^2$ , т. е. значительно меньше единицы (предполагается, что  $\omega/k \gg v_0$ ). Вторым слагаемым в (12.1.1.16) при  $\Delta\omega \ll \omega_{pe}$  можно также пренебречь, так как оно содержит  $\Delta\omega^2 / \omega'^2$  ( $\omega' > \omega_{pe}$ ).

Предположим теперь, что флуктуационное колебание является ленгмюровским, т. е.  $\Delta\omega \approx \omega_{pe}$ . В этом случае  $\delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^i \ll \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^0$  и второе слагаемое в (12.1.1.16) сокращается с третьим.

Итак, можно пользоваться следующим выражением для компоненты Фурье плотности тока рассеяния:

$$\mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega} = i \frac{e^2}{m_e \omega} \left\{ \mathbf{E}^0 + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{\mathbf{k}'}{q^2} (\mathbf{qE}^0) + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{\mathbf{q}}{q^2} (\mathbf{kE}^0) \right\} \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}^0. \quad (12.1.1.17)$$

Подчеркнем, что последнее выражение справедливо, если фазовые скорости падающей и рассеянных волн значительно больше тепловой скорости электронов.

Покажем теперь, что при этом предположении можно получить выражение (12.1.1.17), исходя из простой гидродинамической картины, если ввести гидродинамическую скорость электронов  $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$  и их плотность  $n(\mathbf{r}, t)$ . Эти величины, с которыми плотность электронного тока связана соотношением

$$\mathbf{j} = -en\mathbf{u}, \quad (12.1.1.18)$$

удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u} = -\frac{e}{m_e} \left( \mathbf{E} + \frac{1}{c} [\mathbf{uB}] \right), \quad \frac{\partial n}{\partial t} + \text{div } n\mathbf{u} = 0. \quad (12.1.1.19)$$

Если в плазме распространяется волна  $\mathbf{E}^0$ , то плотность и гидродинамическую скорость электронов можно представить в виде

$$n = n_0 + n^0 + \delta n + n', \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}^0 + \delta \mathbf{u} + \mathbf{u}', \quad (12.1.1.20)$$

где  $n_0$  — равновесная плотность,  $n^0$  — изменение плотности и  $\mathbf{u}^0$  — скорость электронов, обусловленные полем падающей волны;  $n'$  и  $\mathbf{u}'$  — аналогичные величины, связанные с рассеянной волной  $\mathbf{E}'$ ;  $\delta n$  и  $\delta \mathbf{u}$  — флуктуации плотности и гидродинамической скорости.

Величины  $n^0$  и  $\mathbf{u}^0$  удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial \mathbf{u}^0}{\partial t} = -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}^0, \quad \frac{\partial n^0}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{u}^0 = 0, \quad (12.1.1.21)$$

а величины  $n'$  и  $\mathbf{u}'$  — уравнениям

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}'}{\partial t} &= -\frac{e}{m_e} \mathbf{E}' - \frac{e}{m_e c} [\delta \mathbf{u} \mathbf{B}^0] - (\mathbf{u}^0 \nabla) \delta \mathbf{u} - (\delta \mathbf{u} \nabla) \mathbf{u}^0, \\ \frac{\partial n'}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \mathbf{u}' + n^0 \operatorname{div} \delta \mathbf{u} + \delta n \operatorname{div} \mathbf{u}^0 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12.1.1.22)$$

Полагая здесь  $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t) = E^0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$  и  $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = E' \exp[i(\mathbf{k}'\mathbf{r} - \omega' t)]$ , найдем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}^0 &= -i \frac{e}{m_e \omega} \mathbf{E}^0, \quad n^0 = -i \frac{en_0}{m_e \omega^2} \mathbf{k} \mathbf{E}^0, \\ \mathbf{u}' &= -i \frac{e}{m_e \omega'} \left( \mathbf{E}' + \frac{1}{c} [\delta \mathbf{u}_{\mathbf{q}\Delta\omega} \mathbf{B}^0] \right) + \frac{1}{\omega'} \{ (\mathbf{q} \mathbf{u}^0) \delta \mathbf{u}_{\mathbf{q}\Delta\omega} + (\mathbf{k} \delta \mathbf{u}_{\mathbf{q}\Delta\omega}) \mathbf{u}^0 \}, \end{aligned} \right\} \quad (12.1.1.23)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ ,  $\Delta\omega = \omega' - \omega$  и  $\delta \mathbf{u}_{\mathbf{q}\Delta\omega}$  — компонента Фурье флуктуации скорости электронов. Флуктуации скорости связаны с флуктуациями плотности электронов соотношением непрерывности

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} + n_0 \operatorname{div} \delta \mathbf{u} = 0. \quad (12.1.1.24)$$

Для продольных флуктуаций, которые только и существенны, имеем

$$\delta \mathbf{u}_{\mathbf{q}\Delta\omega} = \frac{\Delta\omega}{n_0 q^2} \mathbf{q} \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}.$$

Подставляя это выражение в последнее соотношение (12.1.1.23), получим

$$\mathbf{u}' = -i \frac{e}{m_e \omega'} \left\{ \mathbf{E}' + \frac{\Delta\omega \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}}{n_0 \omega q^2} (\mathbf{q} [\mathbf{k} \mathbf{E}^0] + \mathbf{q} (\mathbf{q} \mathbf{E}^0) + \mathbf{E}^0 (\mathbf{k} \mathbf{q})) \right\}. \quad (12.1.1.25)$$

Определим теперь плотность тока, связанного с рассеянной волной

$$\mathbf{j}' = -e (n_0 \mathbf{u}' + n^0 \delta \mathbf{u} + \mathbf{u}^0 \delta n). \quad (12.1.1.26)$$

Если бы не было флуктуаций, то плотность тока  $\mathbf{j}'$  имела бы вид

$$\mathbf{j}'|_{\delta n=0} = -en_0 \mathbf{u}'|_{\delta n=0} = i \frac{e^2 n_0}{m_e \omega'} \mathbf{E}'.$$

Вычитая это выражение из (12.1.1.26), найдем плотность тока рассеяния

$$\mathbf{J} = \mathbf{j}' - \mathbf{j}'|_{\delta n=0}. \quad (12.1.1.27)$$

Используя (12.1.1.25), получим отсюда компоненту Фурье тока рассеяния  $\mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'}$ :

$$\mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'} = i \frac{e^2}{m_e \omega} \left\{ \mathbf{E}^0 + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{\mathbf{k}'}{q^2} (\mathbf{q}\mathbf{E}^0) + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{\mathbf{q}}{q^2} (\mathbf{k}\mathbf{E}^0) \right\} \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}. \quad (12.1.1.28)$$

Последнее выражение совпадает с выражением (12.1.1.17), которое было получено в рамках кинетического рассмотрения.

**12.1.2. Сечение рассеяния.** Если известно выражение для плотности тока рассеяния, то можно, согласно (12.1.1.13), найти поле рассеянных волн. Ясно, что независимо от поляризации падающей волны ток рассеяния будет содержать как поперечную, так и продольную части. Поэтому поле рассеянных волн также будет содержать поперечную и продольную составляющие. Выделив их, мы сможем исследовать рассеяние поперечных волн (т. е. переход поперечных волн в поперечные же волны), трансформацию поперечных волн в продольные волны, рассеяние продольных волн и трансформацию продольных волн в поперечные волны.

Рассмотрим прежде всего рассеяние поперечных волн в плазме ( $\mathbf{k}\mathbf{E}^0=0$  и  $\mathbf{k}'\mathbf{E}'=0$ ). Взяв поперечную часть плотности тока  $\mathbf{J}$ , найдем компоненту Фурье поля рассеянной поперечной волны

$$\mathbf{E}'_{\perp\mathbf{k}'\omega'} = - \frac{4\pi e^2 \omega'}{m_e c^2 \omega} \left( k'^2 - \frac{\omega'^2}{c^2} \varepsilon(\omega') \right)^{-1} \mathbf{E}'_{\perp} \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}, \quad (12.1.2.1)$$

где  $\mathbf{E}'_{\perp}$  — составляющая  $\mathbf{E}^0$ , перпендикулярная к вектору  $\mathbf{k}'$ , и  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ .

Среднее приращение энергии поля рассеянных волн в единицу времени определяется, очевидно, формулой

$$\mathcal{J} = -1/2 \operatorname{Re} \int \langle \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) \rangle d^3r. \quad (12.1.2.2)$$

Подставляя сюда выражения (12.1.2.1) и (12.1.1.17) для  $\mathbf{E}'$  и  $\mathbf{J}$ , найдем среднее приращение энергии поля рассеянных поперечных волн

$$\mathcal{J} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{e^4}{m_e^2 c^2 \omega^2} \operatorname{Im} \int \frac{\omega' E_{\perp}^{\prime 0 2} \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega}}{k'^2 - (\omega'^2/c^2) \varepsilon(\omega')} d^3k' d\omega', \quad (12.1.2.3)$$

где  $V$  — объем плазмы.

Очевидно, вклад в интеграл, определяющий  $\mathcal{J}$ , вносят только полюсы подынтегрального выражения. Выполнив интегрирование

по модулю вектора  $\mathbf{k}'$ , найдем интенсивность рассеянных волн с частотами в интервале  $d\omega'$  и в элементе телесного угла  $d\omega'$

$$d\mathcal{J} = \frac{Vc}{16\pi^2} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\varepsilon(\omega')} E_{\perp}^{02} \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} d\omega' d\omega', \quad (12.1.2.4)$$

где частота  $\omega'$  и величина волнового вектора  $k'$  рассеянной волны связаны соотношением  $k'^2 = \frac{\omega'^2}{c^2} \varepsilon(\omega')$ .

Если падающая волна не поляризована, то последнее выражение следует усреднить по различным ориентациям вектора  $\mathbf{E}^0$ . Тогда среднее значение квадрата напряженности поля  $E_{\perp}^{02}$  равно

$$\overline{E_{\perp}^{02}} = 1/2 (1 + \cos^2 \vartheta) E^{02}, \quad (12.1.2.5)$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{k}$  (угол рассеяния).

Разделив интенсивность рассеянных волн  $d\mathcal{J}$  на плотность потока энергии падающей волны, равную

$$S_0 = (c/8\pi) \sqrt{\varepsilon(\omega)} E^{02}$$

и величину рассеивающего объема  $V$ , получим дифференциальное сечение рассеяния, или коэффициент рассеяния,

$$d\Sigma = d\mathcal{J} / VS_0. \quad (12.1.2.6)$$

Для неполяризованной волны дифференциальное сечение рассеяния электромагнитных волн, отнесенное к элементу телесного угла  $d\omega'$  и интервалу частот  $d\omega'$ , имеет вид [2]

$$d\Sigma = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} V \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} (1 + \cos^2 \vartheta) \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} d\omega' d\omega'. \quad (12.1.2.7)$$

Эта формула справедлива для произвольного изменения частоты; предполагается лишь, что частоты  $\omega$  и  $\omega'$  превосходят  $\omega_{pe}$ . Если  $\Delta\omega \ll \omega$ , то множитель  $(\omega'^2/\omega^2) \sqrt{\varepsilon(\omega')/\varepsilon(\omega)}$  обращается в единицу и формула (12.1.2.7) переходит в известную формулу, определяющую сечение рассеяния на флуктуациях плотности с малым изменением частоты.

Заметим, что хотя при выводе формулы (12.1.2.7) мы учитывали рассеяние электромагнитных волн только на флуктуациях плотности электронов, сечение рассеяния  $d\Sigma$  оказалось зависящим и от движения ионов. Это связано с тем, что спектральное распределение флуктуаций плотности электронов  $\langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega}$  благодаря самосогласованному взаимодействию между электронами и ионами существенным образом зависит и от движения ионов плазмы.

Итак, спектральное распределение рассеянных волн определяется спектральным распределением флуктуаций плотности электронов.

В изотермической плазме спектр рассеянного излучения содержит доплеровски уширенную основную линию  $\Delta\omega \leqq qv_i$  и резкие максимумы при  $\Delta\omega = \pm \omega_{pe}$  (предполагается, что  $a_e q \ll 1$ ). Поэтому в наиболее интересном случае больших частот  $\omega \gg \omega_{pe}$  множитель  $(\omega'^2/\omega^2) \sqrt{\varepsilon(\omega')/\varepsilon(\omega)}$  можно считать равным единице. Тогда сечение рассеяния можно проинтегрировать по частотам, используя соотношение (11.2.2.3). В результате мы получим следующее выражение для сечения рассеяния поперечных волн в изотермической плазме, отнесенное к элементу телесного угла:

$$d\Sigma = 1/2 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{1 + a_e^2 q^2}{2 + a_e^2 q^2} (1 + \cos^2 \vartheta) d\vartheta', \quad (12.1.2.8)$$

где  $a_e^2 = T/4\pi n_0 e^2$ ,  $q = 2(\omega/c) \sin^{1/2} \vartheta$ ,  $\vartheta$  — угол рассеяния. Интегрируя последнее соотношение по углам, найдем полное сечение рассеяния

$$\Sigma = n_0 \sigma_0 \left\{ 1 - \frac{3}{4a_e^2 k^2} + \frac{3 \ln(1 + 2a_e^2 k^2)}{8a_e^2 k^2} + \frac{3}{4\sqrt{2}} \frac{1 - a_e^2 k^2}{a_e^3 k^3} \operatorname{arctg}(\sqrt{2} a_e k) \right\}, \quad (12.1.2.9)$$

где  $\sigma_0 = (8\pi/3) (e^2/m_e c^2)^2$  — томсоновское сечение рассеяния электромагнитных волн свободным электроном.

В предельных случаях малых и больших длин волн сечения рассеяния определяются формулами

$$\Sigma = n_0 \sigma_0, \quad a_e k \gg 1; \quad \Sigma = 1/2 n_0 \sigma_0, \quad a_e k \ll 1. \quad (12.1.2.10)$$

### 12.1.3. Спектральное распределение рассеянного излучения.

Рассмотрим более подробно спектральное распределение рассеянного излучения в свободной плазме\*). В случае малых длин волн, когда  $a_e q \gg 1$ , спектральное распределение флуктуаций плотности  $\langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega}$  имеет вид гауссовской функции от частоты  $\Delta\omega$ , и поэтому спектральное распределение рассеянных волн также носит гауссовский характер

$$d\Sigma = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e}{q^2 T_e} \right)^{1/2} (1 + \cos^2 \vartheta) \exp \left[ -\frac{m_e \Delta\omega^2}{2q^2 T_e} \right] d\omega' d\vartheta'. \quad (12.1.3.1)$$

Эта формула справедлива, если  $\Delta\omega \neq \omega_{pi}$ .

Мы видим, что доплеровское уширение линии определяется тепловой скоростью электронов. Полное сечение рассеяния (12.1.2.10) равно сумме сечений рассеяния на отдельных электронах. Кулоновское взаимодействие между электронами и ионами несущественно, и рассеяние носит некогерентный характер.

\*) Спектральное распределение рассеянного излучения в равновесной плазме исследовалось в работах [2, 3], в двухтемпературной плазме — в работе [2].

В случае больших длин волн, когда  $a_0 k \ll 1$ , проявляются коллективные свойства плазмы. Этот случай реализуется, в частности, в экспериментах по рассеянию радиоволн на флуктуациях плотности в верхних слоях ионосферы ( $k^{-1} \sim 10$  см,  $a_0 \sim 1$  см).

Приведем выражения для спектрального распределения рассеянного излучения в различных интервалах частот, предполагая, что  $a_0 k \ll 1$ .

Если изменение частоты при рассеянии мало  $\Delta\omega \ll qv_i$ , где  $v_i$  — тепловая скорость ионов, то дифференциальное сечение рассеяния определяется формулой

$$d\Sigma = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\sqrt{m_e T_0^{3/2}} + \sqrt{m_i T_1^{3/2}}}{q (T_0 + T_1)^2} (1 + \cos^2 \vartheta) d\omega' d\omega', \quad (12.1.3.2)$$

где  $T_0$  и  $T_1$  — температуры электронов и ионов. В случае сильно неизотермической плазмы сечение рассеяния с малым изменением частоты в  $1/4 \sqrt{m_i/m_e}$  раз меньше соответствующего сечения для изотермической плазмы с температурой  $T_0$ .

Если  $\Delta\omega \ll qv_i$ , то в изотермической плазме для дифференциального сечения рассеяния имеем

$$d\Sigma = \frac{1}{\sqrt{8\pi}} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{1}{qv_i} \frac{\exp(-z^2)}{[2 - \varphi(z)]^2 + \pi z^2 \exp(-2z^2)} (1 + \cos^2 \vartheta) d\omega' d\omega', \quad (12.1.3.3)$$

где  $z = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\omega}{qv_i}$  и  $\varphi(z) = 2z \exp(-z^2) \int_0^z \exp x^2 dx$ . Дифференциальное

сечение рассеяния, определяемое (12.1.3.3), резко уменьшается при  $\Delta\omega \sim qv_i$ ; поэтому величина  $\Delta\omega \sim qv_i$  характеризует ширину спектрального распределения рассеянного излучения в изотермической плазме. Отметим, что эта величина определяется тепловой скоростью ионов, несмотря на то, что рассеяние происходит на электронах.

Если  $qv_i \ll \Delta\omega \ll qv_e$ , то сечение рассеяния для изотермической плазмы очень мало. Для сильно неизотермической плазмы сечение рассеяния имеет резкие максимумы, если смещение частоты  $\Delta\omega$  совпадает с частотой низкочастотного колебания плазмы с волновым вектором  $\mathbf{q}$ .

В частности, если  $a_0 q \ll 1$ , то максимумы появляются при  $\Delta\omega = \pm qv_s$ , где  $v_s$  — скорость неизотермического звука. Дифференциальное сечение рассеяния вблизи максимумов имеет вид

$$d\Sigma = 1/4 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \{ \delta(\Delta\omega - qv_s) + \delta(\Delta\omega + qv_s) \} d\omega' d\omega'. \quad (12.1.3.4)$$

Интегрируя последнее выражение по углам и частотам, найдем полное сечение рассеяния в неизотермической плазме

$$\Sigma \approx n_0 \sigma_0. \quad (12.1.3.5)$$

Эта формула справедлива, если  $(T_e/T_i)^3 \gg m_i/m_e$  и  $a_e k \ll 1$ . Отметим, что полное сечение в два раза больше сечения рассеяния в изотермической плазме (оно определяется формулой (12.1.2.10)).

В случае больших изменений частоты ( $\Delta \omega \gg qv_e$ ) сечение рассеяния имеет резкие максимумы при  $\Delta \omega \approx \pm \omega_{pe}$ , связанные с рассеянием электромагнитных волн на продольных электронных колебаниях. При произвольном соотношении между температурами электронов и ионов дифференциальное сечение рассеяния в указанной области изменения частот определяется формулой

$$d\Sigma = 1/4 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} a_e^2 q^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \{ \delta(\Delta\omega - \omega_{pe}) + \delta(\Delta\omega + \omega_{pe}) \} d\omega' d\vartheta. \quad (12.1.3.6)$$

Полное сечение рассеяния электромагнитных волн на ленгмюровских колебаниях при  $\omega \gg \omega_{pe}$  имеет вид

$$\Sigma = 2a_e^2 k^2 n_0 \sigma_0, \quad a_e k \ll 1. \quad (12.1.3.7)$$

Мы видим, что коллективные явления в плазме проявляются в рассеянии особенно сильно, если  $a_e k \ll 1$ . При этом спектры рассеянных электромагнитных волн существенно различаются для изотермической и неизотермической плазмы.

В изотермической плазме в спектре рассеянного излучения имеется центральный максимум, обусловленный некогерентным рассеянием на флуктуациях плотности электронов, с шириной, определяемой скоростями ионов, и боковые сателлиты, обусловленные рассеянием на электронных колебаниях. Относительный вес сателлитов (по отношению к главному максимуму) составляет примерно  $2a_e^2 k^2$ .

В сильно неизотермической плазме центральный максимум отсутствует. Имеется два максимума, симметрично расположенных относительно  $\Delta\omega = 0$  и обусловленных рассеянием на звуковых колебаниях, и боковые сателлиты, связанные с рассеянием на ленгмюровских колебаниях. Относительный вес этих сателлитов по отношению к звуковым максимумам составляет около  $2a_e^2 k^2$ .

**12.1.4. Критическая опалесценция.** Рассмотрим теперь рассеяние электромагнитных волн в плазме, частицы которой обладают направленными скоростями (например, электроны движутся относительно ионов или через плазму проходит пучок заряженных частиц).

Остановимся прежде всего на случае, когда направленная скорость электронов (или пучка) меньше той критической скорости, за которой начинается неустойчивость. При этом коэффициент рассеяния определяется общей формулой (12.1.2.7), в которую в качестве спектрального распределения флуктуаций плотности электронов следует подставить выражение (11.5.3.13) или (11.5.3.18).

Как было показано в § 11.5, с приближением направленной скорости к ее критическому значению, определяющему границу области устойчивости, спектральное распределение флуктуаций плотности электронов плазмы неограниченно возрастает. Согласно (12.1.2.7), при этом возрастает и коэффициент рассеяния света.

В частности, если электроны двухтемпературной плазмы движутся относительно ионов со скоростью, приближающейся к скорости неизотермического звука  $v_s$ , то с учетом (11.5.3.18) коэффициент рассеяния света на звуковых колебаниях имеет вид

$$d\Sigma = \frac{1}{2}n_0 \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{q^2 v_s^2}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} (1 + \cos^2 \vartheta) \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_s^2) d\omega' d\omega'. \quad (12.1.4.1)$$

Если  $|\mathbf{q}\mathbf{u}| \rightarrow qv_s$ , то коэффициент при  $\delta$ -функции стремится к бесконечности.

Проинтегрировав уравнение (12.1.4.1) по  $\omega'$ , найдем сечение рассеяния света на звуковых колебаниях в элемент телесного угла

$$d\Sigma = \frac{1}{2}n_0 \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \left( 1 - \frac{u^2 (\cos \Theta' - \cos \Theta)^2}{4v_s^2 \sin^2 \frac{1}{2}\vartheta} \right)^{-1} d\omega', \quad (12.1.4.2)$$

где  $\Theta$  и  $\Theta'$  — углы между  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{u}$  (для определенности мы считаем, что  $\Theta < \frac{1}{2}\pi$ ).

Легко видеть, что при  $u \geq v_s$  существуют такие направления вектора  $\mathbf{k}'$ , для которых  $d\Sigma/d\omega'$  аномально велико. Если  $|1 - v_s/u| \ll 1$ , то для этого необходимо, чтобы векторы  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{u}$  лежали почти в одной плоскости и выполнялось условие  $\Theta + \Theta' \approx \pi$ . Тогда  $d\Sigma/d\omega' \rightarrow \infty$ , когда угол  $\varphi$  между плоскостями  $(\mathbf{k}', \mathbf{u})$  и  $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$  стремится к  $\pm \varphi_0$ , где

$$\varphi_0^2 = \text{ctg}^2 \Theta \{ 4(u^2/v_s^2 - 1) - (\pi - \Theta - \Theta')^2 \} \quad (12.1.4.3)$$

при углах  $\Theta$  и  $\Theta'$ , не близких к  $\frac{1}{2}\pi$ , и

$$\varphi_0^2 = 4(u^2/v_s^2 - 1)(\Theta - \Theta')^2 \quad (12.1.4.4)$$

при  $\Theta$  и  $\Theta'$ , близких к  $\frac{1}{2}\pi$ .

Аномальное возрастание коэффициента рассеяния вблизи границы неустойчивости плазмы связано с существованием критических флуктуаций и может быть названо *критической опалесценцией* по аналогии с известным явлением критической опалесценции в конденсированных телах вблизи точки фазового перехода \*).

## § 12.2. Трансформация поперечных и продольных волн в плазме

**12.2.1. Трансформация поперечной волны в продольную.** Перейдем к рассмотрению трансформации поперечной волны в продольную. Выделяя в (12.1.1.13) продольную часть плотности тока  $\mathbf{J}$ , найдем компоненту Фурье продольной составляющей электрического поля рассеянной волны

$$\mathbf{E}'_{k'\omega'} = \frac{4\pi e^2}{m_e \omega'} \frac{\mathbf{k}' \cdot (\mathbf{k}' \mathbf{E}^0)}{k'^2 \varepsilon_l(k', \omega')} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{k'^2}{q^2} \right) \delta n_{\mathbf{q}\Delta\omega}, \quad (12.2.1.1)$$

где  $\varepsilon_l$  — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы, определяемая формулой (4.3.4.3). Подставляя выражение для поля  $\mathbf{E}'$  в формулу (12.1.2.2) и используя выражение (12.1.1.17) для компоненты Фурье плотности тока  $\mathbf{J}$ , найдем интенсивность возбужденных продольных волн

$$\mathcal{J} = \frac{V}{(2\pi)^3} \frac{e^4}{m_e^2 \omega^2} \text{Im} \int \frac{(\mathbf{k}' \mathbf{E}^0)^2}{\omega' k'^2 \varepsilon_l^*(k', \omega')} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{k'^2}{q^2} \right) \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} d\omega' d^3k'. \quad (12.2.1.2)$$

Вклад в это выражение вносят только те частоты, для которых знаменатель подынтегрального выражения обращается в нуль, т. е.  $\varepsilon_l(k', \omega') = 0$ . Отсюда следует, что в результате поглощения поперечной электромагнитной волны возбуждаются собственные колебания.

Используя (12.2.1.2) и предполагая, что падающая волна не поляризована, найдем коэффициент трансформации электромагнитных поперечных волн в продольные плазменные волны [8], определяемый как

$$\begin{aligned} d\Sigma &\equiv \frac{d\mathcal{J}}{VS_0} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e c^2}{3T} \right)^{3/2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{k'^2}{q^2} \right)^2 \sin^2 \vartheta \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} d\omega' d\omega'. \end{aligned} \quad (12.2.1.3)$$

Подчеркнем, что эта формула применима только в области частот  $\omega' \approx \omega_{pe}$ , при которых затухание плазменных волн мало.

\*) Явление критической опалесценции в плазме на границе области устойчивости предсказано в [5, 7].

Отношение коэффициента трансформации (12.2.1.3) к коэффициенту рассеяния (12.1.2.7) равно

$$\frac{d\Sigma_{l \rightarrow l}}{d\Sigma_{l \rightarrow l'}} = \left(\frac{m_e c^2}{3T}\right)^{3/2} \frac{\sin^2 \vartheta}{1 + \cos^2 \vartheta} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{k'^2}{q^2}\right)^2. \quad (12.2.1.4)$$

В области частот  $\omega' \approx \omega_{pe}$  эта величина может быть значительно больше единицы.

Рассмотрим теперь трансформацию поперечной волны в продольную в двухтемпературной плазме, состоящей из холодных ионов и горячих электронов, движущихся со скоростью  $u$  относительно ионов [9]. Подставляя выражение (11.5.3.21) для спектрального распределения флуктуаций плотности электронов в формулу (12.2.1.3), получим

$$d\Sigma = 1/2 n_0 \left(\frac{e^2}{m_e^2 c^2}\right)^2 \left(\frac{m_e c^2}{3T}\right)^{3/2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} \frac{\Delta\omega^2}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \times \\ \times \sin^2 \vartheta \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_s^2) d\omega' d\omega'. \quad (12.2.1.5)$$

Учитывая, что частота ленгмюровских колебаний в плазме с направленным движением электронов определяется соотношением  $\omega' = \omega_{pe} + \mathbf{k}'\mathbf{u}$ , имеем при  $k' \gg k$

$$\frac{\Delta\omega^2}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_s^2) = \frac{k' v_s}{|\mathbf{k}\mathbf{u} - k^2 c^2 / 2\omega_{pe}|} \left\{ \delta(\mathbf{k}'\mathbf{u} - k'v_s - \right. \\ \left. - \frac{k^2 c^2}{2\omega_{pe}} + kv_s \cos \vartheta) + \delta(\mathbf{k}'\mathbf{u} + k'v_s - \frac{k^2 c^2}{2\omega_{pe}} - kv_s \cos \vartheta) \right\}. \quad (12.2.1.6)$$

Интегрируя (12.2.1.5) с учетом (12.2.1.6) по модулю вектора  $\mathbf{k}'$ , получим коэффициент трансформации поперечной волны в продольную, отнесенный к единичному телесному углу:

$$\frac{d\Sigma}{d\omega'} = 1/2 n_0 \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \frac{\varepsilon(\omega)}{\varepsilon(\omega')} \frac{\omega}{|\mathbf{k}\mathbf{u} - k^2 c^2 / 2\omega_{pe}|} \sin^2 \vartheta \{y(\Theta, \Theta', \varphi) + \\ + y(\Theta, \pi - \Theta', \varphi)\}, \quad (12.2.1.7)$$

где  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$  и  $(\mathbf{k}', \mathbf{u})$  и

$$y(\Theta, \Theta', \varphi) = \left(\frac{1}{kv_s} |\mathbf{k}\mathbf{u} - k^2 c^2 / 2\omega_{pe}| + \sin \Theta \cos \varphi \Theta'\right)^3 \times \\ \times (1 - u/v_s + 1/2 \Theta'^2)^{-4}. \quad (12.2.1.8)$$

(Предполагается, что  $\sin^2 \Theta' \ll 1$ , так как только при этом величина  $d\Sigma/d\omega'$  может быть аномально большой). Мы видим, что при  $\cos \Theta \rightarrow kc^2/2u\omega_{pe}$  коэффициенты в выражениях (12.2.1.5) и (12.2.1.7) неограниченно возрастают.

**12.2.2. Трансформация и рассеяние продольных волн.** Рассмотрим теперь трансформацию и рассеяние продольных волн на флуктуациях плотности в плазме. Поле рассеянных волн опреде-

ляется по-прежнему уравнением (12.1.1.13) с учетом (12.1.1.17), причем поле  $E^0$  следует считать параллельным  $k$ .

Выделив поперечную (по отношению к  $k'$ ) часть плотности тока  $J$ , можно, согласно (12.1.2.2), найти интенсивность возбуждаемых поперечных волн. Разделив ее на объем и на плотность потока энергии в падающей волне

$$S_0 = \frac{v_g}{16\pi} \frac{d}{d\omega} (\omega \varepsilon(\omega)) E^{02},$$

где  $v_g = d\omega/dk$  — групповая скорость продольных волн, найдем коэффициент трансформации продольной волны в поперечную [8]:

$$d\Sigma_{l \rightarrow t} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e c^2}{3T} \right)^{1/2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} \left( 1 - \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{k^2}{q^2} \right)^2 \times \\ \times \sin^2 \vartheta \langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega' d\omega'. \quad (12.2.2.1)$$

Так как спектральное распределение флуктуаций плотности характеризуется максимумами при  $\Delta\omega = 0$  и  $\Delta\omega = \pm\omega_{pe}$ , то поперечные электромагнитные волны будут излучаться в основном с частотами, близкими к  $\omega_{pe}$  и  $2\omega_{pe}$ .

Выделяя в (12.1.1.17) продольную (по отношению к  $k'$ ) часть плотности тока, можно определить коэффициент рассеяния продольных волн на флуктуациях плотности [8]; он равен

$$d\Sigma_{l \rightarrow l} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e c^2}{3T} \right)^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} \left( \cos \vartheta + \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{k'^2 \cos \vartheta - kk'}{q^2} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{kk' - k^2 \cos \vartheta}{q^2} \right)^2 \langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega' d\omega', \quad (12.2.2.2)$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $k$  и  $k'$ .

Отношение коэффициента рассеяния ленгмюровских волн к коэффициенту их трансформации в поперечные равно по порядку величины  $(m_e c^2/T)^{3/2} \text{ctg}^2 \vartheta$ .

Рассмотрим подробнее трансформацию и рассеяние ленгмюровских волн в двухтемпературной плазме, состоящей из холодных ионов и горячих электронов, движущихся относительно ионов [10], причем будем интересоваться случаем критических флуктуаций, когда направленная скорость электронов  $u$  близка к скорости звука  $v_s$ .

Подставляя выражение (11.5.3.21) в формулу (12.2.2.1), получим для коэффициента трансформации ленгмюровской волны в поперечную электромагнитную волну выражение

$$d\Sigma_{l \rightarrow t} = n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e c^2}{3T} \right)^{1/2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} \frac{\Delta\omega^2}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \times \\ \times \sin^2 \vartheta \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_s^2) d\omega' d\omega', \quad (12.2.2.3)$$

где

$$\Delta\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2} - \omega_{pe} - \mathbf{k}\mathbf{u}$$

— изменение частоты. Легко видеть, что при  $|\mathbf{q}\mathbf{u}| \rightarrow qv_s$  коэффициент при  $\delta$ -функции в выражении для  $d\Sigma_{l \rightarrow l}$  аномально велик.

Интегрируя (12.2.2.3) по модулю вектора  $\mathbf{k}'$ , найдем интенсивность излученных поперечных волн в единичном телесном угле. Если  $u \approx v_s$  и  $\sin \Theta \ll 1$ , то

$$\frac{d\Sigma_{l \rightarrow l}}{d\omega'} = n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{m_e c^2}{3T} \frac{f(\Theta, \Theta')}{\varepsilon(\omega')}, \quad (12.2.2.4)$$

где

$$f(\Theta, \Theta') = \frac{\sin^2 \Theta'}{|\cos \Theta'|} \left\{ \left( \sqrt{1 + 2 \frac{kc^2}{\omega_{pe} v_s \cos^2 \Theta'} \left( 1 + \frac{u}{v_s} \cos \Theta \right)} - 1 \right)^{-1} + \right. \\ \left. + \left( 1 - \sqrt{1 - 2 \frac{kc^2}{\omega_{pe} v_s \cos^2 \Theta'} \left( 1 - \frac{u}{v_s} \cos \Theta \right)} \right)^{-1} \Theta(\cos \Theta') \right\}. \quad (12.2.2.5)$$

Здесь и далее  $\Theta$  и  $\Theta'$  — углы, образуемые векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  с направлением  $\mathbf{u}$ ,  $\Theta(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Легко видеть, что величина  $d\Sigma_{l \rightarrow l}/d\omega'$  аномально велика при выполнении условий

$$1 \pm \frac{u}{v_s} \cos \Theta \ll \frac{\omega_{pe} v_s}{kc^2} \cos^2 \Theta'.$$

Заметим, что эти условия накладывают очень жесткие ограничения на угол  $\Theta$  и величину  $u/v_s$ .

Коэффициент рассеяния ленгмюровских волн на аномальных звуковых флуктуациях, согласно (11.5.3.1) и (12.2.2.2), равен

$$d\Sigma_{l \rightarrow l} = n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e c^2}{3T} \right)^2 \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} \frac{\Delta\omega^2}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \times \\ \times \cos^2 \Theta \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_s^2) d\omega' d\omega, \quad (12.2.2.6)$$

где изменение частоты равно  $\Delta\omega = \mathbf{q}\mathbf{u} - \frac{1}{2}(k'^2 - k^2)v_s^2/\omega_{pe}$ . Интегрируя это соотношение по модулю вектора  $\mathbf{k}'$ , можно определить угловое распределение рассеянных ленгмюровских волн. Наибольший интерес представляет рассеяние под углами  $\Theta' \approx \pi - \Theta$  и  $\varphi \ll 1$  ( $\varphi$  — угол между плоскостями  $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$  и  $(\mathbf{k}', \mathbf{u})$ ), когда особенно проявляются эффекты, связанные с дрейфом электронов. В этом

случае при  $u \approx v_s$  имеем

$$\frac{d\Sigma_{l \rightarrow l}}{d\omega'} = 4n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e c^2}{3T} \right)^{3/2} \frac{c}{v_s} \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega)}}{\varepsilon(\omega')} \frac{\cos^2 2\theta}{|f_1 f_2 \cos \theta|}, \quad (12.2.2.7)$$

где

$$\left. \begin{aligned} f_1(\theta, \theta', \varphi) &= 1 - \frac{u}{v_s} \left( 1 - \frac{1}{2}(\pi - \theta - \theta') \operatorname{tg} \theta - \frac{1}{8}\varphi^2 \operatorname{tg}^2 \theta \right), \\ f_2(\theta, \theta', \varphi) &= 1 - \frac{u}{v_s} \left( 1 - \frac{1}{8}\varphi^2 \operatorname{tg}^2 \theta \right) \end{aligned} \right\} \quad (12.2.2.8)$$

(предполагается, что  $\theta \neq \frac{1}{2}\pi$ ).

Наряду с особенностью при  $f_2 \rightarrow 0$ , обусловленной критическими флуктуациями, выражение (12.2.2.7) обращается в бесконечность еще и при  $f_1 \rightarrow 0$ , что связано с пренебрежением затуханием звуковых колебаний. Чтобы учесть затухание, следует заменить  $\delta$ -функцию в (12.2.2.6) выражением

$$\frac{\gamma}{2\pi q v_s} \{ [(\Delta\omega - qv_s)^2 + \gamma^2]^{-1} + [(\Delta\omega + qv_s)^2 + \gamma^2]^{-1} \}, \quad (12.2.2.9)$$

где  $\gamma$  — декремент затухания колебаний, равный

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8} \frac{m_e}{m_i}} |\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|.$$

В результате такой замены получим следующее выражение для коэффициента рассеяния, справедливое при  $f_1 \rightarrow 0$ :

$$\frac{d\Sigma_{l \rightarrow l}}{d\omega'} = 4n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{m_e c^2}{3T} \right)^{3/2} \frac{c}{v_s} \frac{\sqrt{\varepsilon(\omega')}}{\varepsilon(\omega)} \frac{\cos^2 2\theta}{(1/8\pi m_e/m_i)^{1/4} |f_2|^{1/2} \sin \theta}. \quad (12.2.2.10)$$

Мы видим, что коэффициент рассеяния пропорционален большой величине  $(m_i/m_e)^{1/4}$ , а также содержит множитель  $|f_2|^{-1/2}$ . Таким образом, вблизи углов, для которых выполняется условие  $f_1=0$ , величина  $d\Sigma_{l \rightarrow l}/d\omega'$  стремится к бесконечности при  $f_2 \rightarrow 0$  значительно быстрее, чем при  $f_1 \neq 0$ .

Рассмотрим, наконец, трансформацию ленгмюровской волны в поперечную в плазме, через которую проходит пучок. При этом особенно интересен случай, когда скорость пучка близка к критической скорости, за которой начинается неустойчивость ленгмюровских колебаний с волновым вектором, равным изменению волнового вектора при рассеянии. Используя (11.5.3.13) и (12.2.2.1), нетрудно получить следующее выражение для коэффициента

трансформации ленгмюровской волны в поперечную

$$d\Sigma_{l \rightarrow t} = \frac{n_0}{4} \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \left( \frac{m_0 c^2}{3T} \right)^{1/2} \frac{\omega'^2}{\omega^2} \sqrt{\frac{\varepsilon(\omega')}{\varepsilon(\omega)}} \frac{A \sin^2 \vartheta}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \delta(\Delta\omega^2 - \Omega_q^2) d\omega' d\omega', \quad (12.2.2.11)$$

$$A = \frac{1}{64} (3 - k^2/q^2)^2 a_0^2 q^2 (\omega_{pe}^2 + k^2 c^2) \varepsilon(\omega'),$$

$$\Omega_q^2 = \omega_{pe}^2 \left( 1 - 3a_0^2 q^2 - \frac{n_0'}{n_0} \frac{\omega_{pe}^2}{q^2 v_0'^2} \right),$$

где  $\Delta\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2} - \omega_{pe}^2 - 3/2 k^2 v_0^2$ . При  $|\mathbf{q}\mathbf{u}| \rightarrow \Omega_q$  коэффициент при  $\delta$ -функции в этом выражении неограниченно возрастает.

При определении коэффициентов трансформации и рассеяния волн  $d\Sigma/d\omega'$  мы считали плазму однородной и учитывали только взаимодействие волн с флуктуациями. В случае неоднородной плазмы следует учесть еще один возможный тип трансформации и рассеяния волн — трансформацию и рассеяние на статических неоднородностях. Чтобы показать, каков характерный порядок величины коэффициентов трансформации такого типа, приведем выражение для коэффициента трансформации ленгмюровских волн в поперечные на статических пространственных неоднородностях (см. [9]):

$$\frac{d\Sigma_{l \rightarrow t}}{d\omega'} \approx k \frac{T_e}{m_0 c^2} \frac{\omega}{\nu} \left( 3/2 \frac{c \text{ grad } \varepsilon}{\omega} \right)^{1/2},$$

где  $\nu$  — частота соударений. Если сравнить это выражение с (12.2.2.1), то можно убедиться, что для многих реальных плазм (например, для солнечной короны) вклад коэффициента трансформации на неоднородностях в интегральный коэффициент трансформации мал. Этот вклад мал также в случаях турбулентной плазмы или плазмы, находящейся в состоянии, близком к неустойчивому, так как в подобных случаях очень интенсивно происходит трансформация на турбулентных или на критических флуктуациях.

Заметим, что трансформация на статических неоднородностях вообще не сказывается на дифференциальных коэффициентах  $d\Sigma/d\omega' d\omega'$  (при  $\omega' \neq \omega$ ), так как при взаимодействии падающей волны со статическими неоднородностями ее частота не меняется.

Возможны также случаи, когда трансформация на статических неоднородностях происходит значительно интенсивнее, чем на тепловых флуктуациях. Такая ситуация возникает, в частности, при так называемой стопроцентной трансформации [11]. В качестве примера стопроцентной трансформации укажем на трансформацию необыкновенной волны, падающей снаружи на слой неоднородной плазмы, помещенной в неоднородное магнитное поле, если  $\text{grad } B^2 > m_0 c^2 \text{ grad } n$  ( $n$  — плотность плазмы).

В дальнейшем мы не будем учитывать эффектов, связанных с взаимодействием волн со статическими неоднородностями.

**12.2.3. Спонтанное свечение неравновесной плазмы.** В заключение рассмотрим своеобразное явление, возникающее в неравновесной плазме, — спонтанное свечение, связанное с превращением двух флуктуационных продольных волн в поперечную волну [12]. В случае равновесия все излучение плазмы сводится к релеевскому, так как дополнительный эффект, обусловленный взаимодействием между волнами, согласно принципу детального равновесия, обращается в нуль. Интенсивность такого спонтанного свечения оказывается аномально большой, если состояние плазмы близко к неустойчивому.

Определим амплитуду вторичной волны, образующейся в результате взаимодействия двух волн, распространяющихся в плазме. Будем исходить из полной системы уравнений, описывающих плазму: кинетических уравнений для частиц каждого сорта и уравнений Максвелла. Считая амплитуды взаимодействующих волн малыми и разлагая функции распределения частиц и электрическое и магнитное поля в ряд по этим амплитудам, получим для членов  $n$ -го порядка ( $n=1, 2, \dots$ )

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}\right) F_{\alpha}^{(n)} + \frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \left(\mathbf{E}^{(n)} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^{(n)}]\right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_{\alpha}^{(n)} = \\ = -\frac{e_{\alpha}}{m_{\alpha}} \sum_{n'=1}^{n-1} \left(\mathbf{E}^{(n')} + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \mathbf{B}^{(n')}] \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_{\alpha}^{(n-n')}, \end{aligned} \quad (12.2.3.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}^{(n)} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}^{(n)}}{\partial t}, \quad \text{rot } \mathbf{B}^{(n)} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}^{(n)}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \sum_{\alpha} e_{\alpha} \int \mathbf{v} F_{\alpha}^{(n)} d^3v. \quad (12.2.3.2)$$

Нелинейный эффект взаимодействия между волнами описывается, очевидно, слагаемыми в правых частях кинетических уравнений (12.2.3.1).

Решая последние уравнения и ограничиваясь случаем, когда обе первичные волны являются продольными, получим для поля вторичной волны

$$\begin{aligned} E_i^{(2)}(\mathbf{k}', \omega') = i\Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}', \omega') \int C_j(\omega, \mathbf{k}; \omega' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{k}) \varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) \times \\ \times \varphi^{(1)}(\mathbf{k}' - \mathbf{k}, \omega' - \omega) d^3k d\omega, \end{aligned} \quad (12.2.3.3)$$

где  $\varphi^{(1)}(\mathbf{k}, \omega) = i(\mathbf{k}/k^2) \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{k}, \omega)$  — потенциал поля первичной волны,

$$\Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{k_i k_j}{k^2} \varepsilon_i^{-1}(k, \omega) + \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}\right) \left(\frac{k^2 c^2}{\omega^2} - \varepsilon_t(k, \omega)\right)^{-1},$$

$$\begin{aligned} C_i(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) = \\ = \sum_{\alpha} \frac{4\pi e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}^2 (\omega_1 + \omega_2)} \int \frac{v_i}{\omega_1 + \omega_2 - (\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) \mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right) \frac{1}{\omega_2 - \mathbf{k}_2 \mathbf{v}} \left(\mathbf{k}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}}\right) F_{\alpha}^{(0)} d^3v. \end{aligned} \quad (12.2.3.4)$$

Интенсивность свечения, испускаемого в результате образования при взаимодействии двух продольных волн поперечной волны, будем характеризовать изменением энергии вторичной волны в единицу времени  $\mathcal{J}$ :

$$\mathcal{J} = \frac{V}{(2\pi)^3} \int Q(\mathbf{k}') d^3k' \quad (12.2.3.5)$$

( $V$  — объем системы). Если обе сталкивающиеся волны являются флуктуационными, то, согласно (12.2.3.3) и (12.2.3.4),

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{k}') = & \\ = & \frac{1}{(4\pi)^5} \frac{\omega'^2}{k'^2} \int [k' C(\omega, \mathbf{k}; \omega' - \omega, \mathbf{k}' - \mathbf{k})]^2 \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}' - \mathbf{k}, \omega' - \omega} d^3k d\omega, \end{aligned} \quad (12.2.3.6)$$

где  $\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  — спектральное распределение флуктуаций потенциала. При выводе этой формулы мы учли, что в пренебрежении высшими корреляциями четверную корреляционную функцию можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle \varphi_{\mathbf{k}_1\omega_1} \varphi_{\mathbf{k}_2\omega_2} \varphi_{\mathbf{k}_3\omega_3} \varphi_{\mathbf{k}_4\omega_4} \rangle = & \\ = & (2\pi)^8 \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}_1\omega_1} \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{k}_2\omega_2} \{ \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_4) \delta(\omega_1 - \omega_3) \delta(\omega_2 - \omega_4) + \\ & + \delta(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_4) \delta(\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_3) \delta(\omega_1 - \omega_4) \delta(\omega_2 - \omega_3) \}. \end{aligned} \quad (12.2.3.7)$$

Рассмотрим двухтемпературную плазму, в которой электроны движутся относительно ионов, и определим для нее энергию поперечных волн, возникающих в результате рассеяния флуктуационных ленгмюровских колебаний на низкочастотных звуковых флуктуациях плазмы. Заметим, что если одна из сталкивающихся волн является ленгмюровской ( $\omega_1 \approx \omega_{pe}$ ), а вторая — низкочастотной ( $\omega_2 \ll \omega_{pe}$ ), то входящая в соотношение (12.2.3.6) функция  $C$  принимает простой вид

$$C(\omega_1, \mathbf{k}_1; \omega_2, \mathbf{k}_2) \approx \frac{e}{T_e} \mathbf{k}_1. \quad (12.2.3.8)$$

Учитывая, что слагаемое в выражении для спектрального распределения флуктуаций потенциала, описывающее ленгмюровские колебания, имеет вид

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} = 8\pi^2 T_e \frac{\omega_{pe}}{q^2} \delta(\bar{\omega}^2 - \omega_{pe}^2 - 3q^2 v_s^2) \quad (12.2.3.9)$$

( $\bar{\omega} = \omega - \mathbf{q}\mathbf{u}$  — частота в системе отсчета, в которой электроны покоятся), и используя формулы (11.5.3.17), (12.2.3.6) и (12.2.3.8), получим

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{k}') = & \frac{1}{8\pi} \frac{e^2}{m_e} T_e \omega_{pe} \int \frac{[\mathbf{k}\mathbf{k}']^2}{k^2 k'^2} \frac{q^2 v_s^2}{|\Delta\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \delta(\Delta\omega^2 - q^2 v_s^2) \times \\ & \times \delta\{(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u})^2 - \omega_{pe}^2\} d^3k d\omega, \end{aligned} \quad (12.2.3.10)$$

где  $\Delta\omega = \sqrt{\omega_{pe}^2 + k^2 c^2} - \omega$  и  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$ . Легко видеть, что функция  $Q(\mathbf{k}')$  стремится к бесконечности при  $u \rightarrow v_s$ , если  $\cos \Theta' \rightarrow k^2 c^2 / 2\omega_{pe} u$ . Коэффициент при резонансном знаменателе  $(k'^2 c^2 / 2\omega_{pe} - \mathbf{k}'\mathbf{u})^{-1}$  можно оценить, интегрируя (12.2.3.10) по  $k$  до  $k \sim a_1^{-1}$ , где  $a_1$  — величина порядка нескольких дебаевских радиусов;

$$Q(\mathbf{k}') \approx \frac{e^2 T_e}{m_e a_1^3} \frac{\sin^2 \Theta'}{k'^2 c^2 / 2\omega_{pe} - \mathbf{k}'\mathbf{u}}. \quad (12.2.3.11)$$

Заметим, что, согласно формулам (12.2.3.10) и (12.2.3.11), излучение плазмы, обусловленное трансформацией флуктуационной ленгмюровской волны в поперечную волну, аномально велико только в длинноволновой области, где  $k' \sim \omega_{pe} u / c^2$ .

## § 12.3. Некогерентное отражение электромагнитных волн от плазмы

### 12.3.1. Коэффициент отражения.

Электромагнитная волна, падая на ограниченную плазму, претерпевает наряду с обычным отражением, описываемым формулами Френеля, также и некогерентное отражение, при котором частота отраженной волны не равна частоте падающей и угол отражения не равен углу падения [13]. Некогерентное отражение обусловлено взаимодействием электромагнитной волны с флуктуациями в плазме и используется для экспериментального определения спектрального распределения флуктуаций и нахождения по этому распределению различных параметров плазмы.

Для исследования отражения электромагнитных волн от плазмы (будем считать, что она заполняет полупространство  $z > 0$ ) нужно найти электрическое поле  $E$ , удовлетворяющее уравнениям Максвелла со следующими граничными условиями: при  $z = -\infty$  поле  $E$  должно представлять собой суперпозицию падающей плоской волны  $E_0 \exp [i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$  ( $k_z > 0$ ) и отраженных волн; при  $z = +\infty$  поле должно обращаться в нуль.

Нормальные к границе компоненты волновых векторов падающей и отраженной волн  $k_z, k'_z$  будем считать удовлетворяющими неравенствам  $a_0 k_z, a_0 k'_z \ll 1$ , где  $a_0$  — электронный дебаевский радиус. При этом можно не учитывать структуры граничного слоя толщиной порядка  $a_0$  и рассматривать границу как плоскость разрыва, на которой выполняются обычные граничные условия макроскопической электродинамики, т. е. непрерывны величины  $E_t, \text{rot } E$  и  $\partial E_z / \partial t + 4\pi j_z$  ( $E_t$  — параллельная границе составляющая вектора  $E$ ).

Если фазовые скорости падающей и отраженной волн велики по сравнению с тепловыми скоростями частиц плазмы, то для плотности тока можно воспользоваться выражением  $\mathbf{j} = -en\mathbf{u}$ , где

$n$  — плотность электронов и  $u$  — их гидродинамическая скорость, связанная с полями  $E$  и  $B$  уравнением

$$\left(\frac{d}{dt} + \frac{1}{\tau}\right)u = -\frac{e}{m_0}\left(E + \frac{1}{c}[uB]\right) \quad (12.3.1.1)$$

( $\tau$  — среднее время между столкновениями, которое везде, где возможно, мы будем устремлять к бесконечности). Полагая  $n = n_0 + \delta n$ , где  $n_0$  — среднее значение и  $\delta n$  — флуктуация плотности, будем искать поле  $E$ , определяемое уравнениями Максвелла и уравнением (12.3.1.1), в виде ряда по степеням флуктуации плотности электронов  $E = E^0 + E' + \dots$

Определив поле  $E$  при  $z < 0$ , можно найти нормальную к границе компоненту вектора Пойнтинга и, усреднив ее по флуктуациям плотности электронов в плазме, определить таким образом отраженный поток энергии. Разделив усредненный по флуктуациям поток энергии  $dS$  отраженных волн, волновые векторы которых лежат между  $k'$  и  $k' + dk'$ , на падающий поток энергии  $S_0$ , получим *дифференциальный коэффициент отражения*  $dR$ :

$$dR = dS/S_0. \quad (12.3.1.2)$$

Если бы в плазме отсутствовали флуктуации, то поле  $E'$  равнялось бы нулю и происходило бы только обычное отражение электромагнитных волн от поверхности, при котором  $k'$  однозначно связано с  $k$  соотношениями  $k'_x = k_x$ ,  $k'_z = -k_z$ . Поэтому  $dR$  должно содержать слагаемое, пропорциональное  $\delta(k'_x - k_x)\delta(k'_z - k_z)$ . Проинтегрировав это слагаемое по  $k'$ , получим обычный коэффициент отражения  $R_0$ , определяемый формулами Френеля. В частности, для неполяризованного падающего излучения  $R_0$  имеет вид

$$R_0 = \left| \frac{k_x - g}{k_x + g} \right|^2 + \left| \frac{\varepsilon k_x - g}{\varepsilon k_x + g} \right|^2, \quad (12.3.1.3)$$

где  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость плазмы  $\varepsilon = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2} \left(1 - \frac{i}{\omega\tau}\right)$ ,

$g = \sqrt{\varepsilon k^2 - k_z^2}$  и  $\text{Im } g > 0$ .

Благодаря флуктуациям в плазме  $E' \neq 0$  и  $dR$ , помимо  $\delta$ -образного слагаемого, соответствующего обычному отражению излучения от поверхности, содержит добавочное слагаемое, которое, как можно показать, в случае неполяризованного падающего излучения имеет следующий вид:

$$dR = \frac{l}{4\pi c} \left(\frac{e^2}{m_0 \omega}\right)^2 G(\Theta, \Theta', \varphi) \phi(\Delta k, \Delta \omega; l) d^3 k'. \quad (12.3.1.4)$$

Здесь  $\phi$  — преобразование Фурье—Лапласа корреляционной функции плотности электронов плазмы

$$\phi(\Delta\mathbf{k}, \Delta\omega; l) =$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^{\infty} dZ \exp(-Z/l) \int d\mathbf{r}_1 \int_{-2Z}^{2Z} dz \int dt \exp[-i(\Delta\mathbf{k}\mathbf{r} - \Delta\omega t)] \times \\ \times \langle n(\mathbf{r}_1, t_1) n(\mathbf{r}_2, t_2) \rangle, \quad (12.3.1.5)$$

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ,  $Z = 1/2(z_1 + z_2)$ ,  $\mathbf{k}'$  и  $\omega'$  — волновой вектор и частота отраженной волны,

$$\Delta\mathbf{k}_{\perp} = \mathbf{k}'_{\perp} - \mathbf{k}_{\perp}, \quad \Delta k_z = -\text{Re}(g + g'),$$

$$\Delta\omega = \omega' - \omega, \quad l^{-1} = 2 \text{Im}(g + g'),$$

$g' = \sqrt{k'^2 \varepsilon(\omega') - k_{\perp}'^2}$  и угловые скобки обозначают усреднение по флуктуациям.

Функция  $G$ , зависящая от углов падения и отражения  $\Theta$  и  $\Theta'$  и от угла  $\varphi$  между векторами  $\mathbf{k}_{\perp}$  и  $\mathbf{k}'_{\perp}$ , имеет вид

$$G(\Theta, \Theta', \varphi) = |b_1|^2 \frac{\cos^2 \Theta'}{\cos \Theta} \left\{ |\bar{c}_1|^2 \cos^2 \Theta \cos^2 \varphi + |\bar{c}_2|^2 \sin^2 \varphi + \right. \\ \left. + \left| \frac{\bar{c}_3}{\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \Theta'}} \right|^2 \sin^2 \Theta \sin^2 \Theta' - \text{Re} \frac{\bar{c}_1^* \bar{c}_3}{\sqrt{\varepsilon' - \sin^2 \Theta'}} \sin 2\Theta \sin \Theta' \cos \varphi \right\} + \\ + \frac{|b_2|^2}{\cos \Theta} \{ |c_1|^2 \cos^2 \Theta \sin^2 \varphi + |c_2|^2 \cos^2 \varphi \}, \quad (12.3.1.6)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon' &= \varepsilon(\omega'); & b_1 &= \frac{2g'}{g' - \varepsilon' k'_z}, & b_2 &= \frac{2|k'_z|}{g' - k'_z}; \\ c_1 &= \frac{2g}{g + \varepsilon k_z}, & c_2 &= \frac{2k_z}{g + k_z}, & c_3 &= \frac{2k_z}{g + \varepsilon k_z}; \\ \bar{c}_{1,2} &= \left( 1 + 2 \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{k_{\perp}'^2}{\Delta k^2} \right) c_{1,2}, & \bar{c}_3 &= \left( 1 + 2 \frac{\Delta\omega}{\omega'} \frac{g'^2}{\Delta k^2} \right) c_3. \end{aligned} \right\} \quad (12.3.1.7)$$

### 12.3.2. Спектральное распределение отраженного излучения.

Дифференциальный коэффициент отражения определяется корреляционной функцией плотности электронов плазмы, которая должна находиться с учетом границы. Однако в интересующем нас случае  $a_{\varepsilon} k_z, a_{\varepsilon} k'_z \ll 1$ , когда существенны длинноволновые флуктуации, влиянием границы можно пренебречь и воспользоваться выражением (11.2.6.3) для спектрального распределения

флуктуаций плотности электронов в неограниченной плазме. Тогда входящая в (12.3.1.4) функция  $\phi$  принимает вид

$$\phi(\Delta \mathbf{k}, \Delta \omega; l) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\langle n_s^2 \rangle_{\mathbf{q} \Delta \omega}}{1 + 4(q_z - \Delta k_z)^2 l^2} dq_z, \quad (12.3.2.1)$$

где  $\mathbf{q} = \Delta \mathbf{k}$ .

Если  $l^{-1} \ll \Delta k_z$ , то коэффициент отражения определяется формулой

$$dR = \frac{1}{4\pi} \left( \frac{e^2}{m_s \omega} \right)^2 \frac{l}{c} G(\Theta, \Theta', \varphi) \langle n_s^2 \rangle_{\mathbf{q} \Delta \omega} d^3 k'. \quad (12.3.2.2)$$

В этом случае спектр отраженного излучения (подобно спектру рассеянного излучения, см. § 12.1) содержит доплеровски уширенную основную линию и резкие максимумы при  $\Delta \omega = \pm \omega_{pe}$ . В случае сильно неизотермической плазмы в спектре отраженного излучения появляются добавочные резкие максимумы, связанные с существованием в плазме неизотермического звука.

Если условие  $l^{-1} \ll \Delta k_z$  не выполняется, то дифференциальный коэффициент отражения является гладкой функцией  $\Delta \omega$ .

Заметим, что для справедливости формулы (12.3.2.2) и, следовательно, для наличия резких максимумов в спектральном распределении отраженного излучения вовсе нет необходимости, чтобы падающая на плазму волна слабо затухала на длине волны. В частности, если на плазму падает нормально волна с частотой  $\omega = \omega_{pe} - \xi$  ( $\xi \ll \omega_{pe}$ ), затухающая с декрементом  $\text{Im } g = \sqrt{2} \omega_{pe} \xi / c$ , то для отраженной нормально волны коэффициент отражения неизотермической плазмы имеет резкие максимумы при  $\Delta \omega = \pm qv_s$ , вблизи которых

$$dR = \frac{e^2}{32\pi m_s \sqrt{2} \omega_{pe} \xi} G(\Theta, \Theta', \varphi) \{ \delta(\Delta \omega - qv_s) + \delta(\Delta \omega + qv_s) \} d^3 k' \quad (12.3.2.3)$$

( $v_s$  — скорость неизотермического звука).

Если выполняются условия  $\cos^2 \Theta \gg |1 - \varepsilon|$ ,  $\cos^2 \Theta' \gg |1 - \varepsilon'|$ ,  $|\Delta \omega| \ll \omega$ , то

$$G(\Theta, \Theta', \varphi) \approx \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{\cos \Theta}, \quad (12.3.2.4)$$

где  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ , и коэффициент отражения лишь нормировочным множителем отличается от коэффициента рассеяния в неограниченной плазме (при рассеянии на углы, большие  $1/2\pi$ ); в самом деле,

$$dR = \frac{l}{\cos \Theta} d\Sigma. \quad (12.3.2.5)$$

Если хотя бы одно из указанных условий не выполняется, то коэффициент отражения, согласно (12.3.1.4), (12.3.1.6), существенно отличается от коэффициента рассеяния. Различие этих величин обусловлено следующими двумя обстоятельствами.

Во-первых, проникая в плазму поперечная волна при рассеянии на флуктуациях возбуждает наряду с поперечными еще и продольные волны. На границе продольные волны трансформируются в поперечные, внося существенный вклад в коэффициент отражения при  $\Delta\omega \approx \omega$ .

Во-вторых, падающая волна, проникая в плазму, и рассеянная волна, выходя из плазмы, испытывает преломление, учет которого необходим, если  $\cos^2\theta \leq |1-\epsilon|$  или  $\cos^2\theta' \leq |1-\epsilon'|$ , т. е. если  $a_0^2 k^2 \cos^2\theta \leq v_0^2/c^2$  или  $a_0'^2 k'^2 \cos^2\theta' \leq v_0'^2/c^2$  ( $v_0$  — тепловая скорость электронов плазмы). При частотах  $\omega \leq \omega_{pe}$  эти условия выполняются для всех углов падения и отражения, поэтому в данной области частот коэффициент отражения существенно зависит от углов  $\theta$  и  $\theta'$  (а не только от угла  $\theta$  между волновыми векторами падающей и отраженной волн). В частности, при нормальном падении ( $\theta=0$ ) и при нормальном отражении ( $\theta'=0$ ) получим

$$\left. \begin{aligned} dR &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^2}{m_0 \omega} \right)^2 \frac{l}{c} |1 + \sqrt{\epsilon^-}|^{-2} (|b_1 \tilde{c}_1/c_1|^2 \cos^2\theta' + |b_2|^2) \langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d^3k', & (\theta=0); \\ dR &= \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^2}{m_0 \omega} \right)^2 \frac{l}{c} |1 + \sqrt{\epsilon^-}|^{-2} \frac{|c_1|^2 \cos^2\theta + |c_2|^2}{\cos\theta} \langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d^3k', & (\theta'=0). \end{aligned} \right\} \quad (12.3.2.6)$$

В случае скользящего падения или отражения волн учет границы необходим при любых частотах. В частности, если  $\omega, \omega' \gg \omega_{pe}$ ,  $\theta = 1/2\pi - \omega_{pe}/\omega$  и  $1/2\pi - \theta' \gg \omega_{pe}/\omega$ , то

$$dR = \frac{1}{\pi} \left( \frac{e^2}{m_0 \omega} \right)^2 \frac{l}{c} \frac{1 + \cos^2\theta}{\cos\theta} \langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d^3k'. \quad (12.3.2.7)$$

В этом случае коэффициент отражения в четыре раза больше, чем коэффициент  $dR$ , вычисленный по формуле (12.3.2.5), не учитывающей границы плазмы.

Соотношения (12.3.2.5) — (12.3.2.7) определяют усредненные по поляризациям коэффициенты отражения в случае неполяризованного падающего излучения. Не останавливаясь подробно на поляризационных эффектах при отражении излучения от границы плазмы, укажем только на возникающее при этом явление полной поляризации: отраженная под определенным углом волна поляризована в плоскости, перпендикулярной к плоскости отражения. В частности, если плоскость отражения совпадает с плоскостью падения ( $\varphi=0$ ), то угол отражения, при котором

достигается полная поляризация отраженной волны, определяется соотношением

$$\Theta' = \psi(\Theta), \quad \sin^2 \psi = \varepsilon' - \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \sin^2 \Theta \quad (12.3.2.8)$$

(предполагается, что  $\Delta \omega \ll \omega$ ).

Если падающая волна поляризована в плоскости падения, то полностью поляризована волна, отраженная под углом  $\Theta' = \psi(\Theta, \varphi)$ , где

$$\sin^2 \psi = \varepsilon' \frac{\varepsilon - \sin^2 \Theta}{\sin^2 \Theta \operatorname{tg}^2 \varphi + \varepsilon}. \quad (12.3.2.9)$$

## § 12.4. Рассеяние и трансформация волн в плазме, находящейся в магнитном поле

**12.4.1. Поле рассеянных волн. Сечения рассеяния и трансформации.** Рассмотрим теперь влияние внешнего магнитного поля на рассеяние волн в плазме [2, 12—17]. В гл. 5 было показано, что магнитное поле приводит к расщеплению частоты плазменных колебаний и к появлению новых типов собственных колебаний в области низких частот (альвеновские и магнитозвуковые волны). Поэтому в рассеянном излучении в плазме при наличии магнитного поля возникают добавочные максимумы, связанные с рассеянием на альвеновских и магнитозвуковых колебаниях. Взаимодействие распространяющихся в плазме волн с флуктуационными колебаниями может приводить также к взаимному превращению (трансформации) волн. Интенсивности комбинационного рассеяния и трансформации волн определяются величиной флуктуаций. В неравновесных условиях эти интенсивности могут аномально возрастать, если плазма находится вблизи области кинетической неустойчивости.

Для описания процессов рассеяния и трансформации волн в плазме, находящейся в магнитном поле, будем по-прежнему исходить из кинетических уравнений (12.1.1.7) и уравнений Максвелла с током (12.1.1.4) (под  $\mathbf{B}$  будем понимать суммарное магнитное поле в плазме, включающее внешнее постоянное поле  $\mathbf{B}_0$ ).

Поле падающей волны описывается уравнением

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0, \quad (12.4.1.1)$$

где  $\hat{\varepsilon}$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы в магнитном поле. Учитывая нелинейные члены в кинетическом уравнении (12.1.1.7), для поля рассеянных волн получим уравнение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E}' + \frac{\hat{\varepsilon}}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}'}{\partial t^2} = - \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}, \quad (12.4.1.2)$$

где  $\mathbf{J}$  — плотность тока, обусловленного полем падающей волны и флуктуациями в плазме. Если падающая волна является плоской монохроматической волной вида  $\mathbf{E}^0(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^0 \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)]$ , то компоненты Фурье плотности тока  $\mathbf{J}$  равны

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'} = & - \sum_{\alpha} \frac{e_{\alpha}^2}{m_{\alpha}\omega_{B\alpha}} \int \left\{ \left[ \left( \mathbf{E}^0 + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\mathbf{B}^0] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}(\mathbf{q}, \Delta\omega)}{\partial \mathbf{v}} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \left( \delta \mathbf{E}_{\mathbf{q}\Delta\omega} + \frac{1}{c} [\mathbf{v}\delta \mathbf{B}_{\mathbf{q}\Delta\omega}] \right) \frac{\partial f_{\alpha 0}}{\partial \mathbf{v}} \right] \exp \left[ - \frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_0^{\varphi} (\mathbf{k}'\mathbf{v} - \omega') d\varphi \right] \times \right. \\ & \left. \times \int_0^{\varphi} \mathbf{v} \exp \left[ \frac{i}{\omega_{B\alpha}} \int_0^{\varphi} (\mathbf{k}'\mathbf{v} - \omega') d\varphi \right] d\varphi \right\} d^3v, \quad (12.4.1.3) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}, \quad \Delta\omega = \omega' - \omega.$$

Учитывая большое различие масс электронов и ионов, в последнем соотношении можно ограничиться учетом только электронной составляющей.

Уравнение (12.4.1.2) описывает все процессы рассеяния и трансформации волн в магнитоактивной плазме.

Определим среднее приращение энергии поля рассеянных волн за единицу времени  $\mathcal{J}$ . Для этого заметим, что полная энергия, передаваемая плазме током с плотностью  $\mathbf{J}$ , равна

$$P = -1/2 \operatorname{Re} \int \mathbf{J}^*(\mathbf{r}, t) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) d^3r dt = -1/2 \operatorname{Re} \int \mathbf{J}_{\mathbf{k}\omega}^* \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \frac{d^3k d\omega}{(2\pi)^4}. \quad (12.4.1.4)$$

Согласно (12.4.1.2) напряженность электрического поля рассеянных волн связана с возбуждающим током соотношением

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} = - \frac{4\pi i}{\omega} \frac{\lambda \mathbf{J}_{\mathbf{k}\omega}}{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)}, \quad (12.4.1.5)$$

где  $\lambda_{ij} \Lambda_{jk} = \Lambda \delta_{ik}$ ,  $\Lambda \equiv \det(\Lambda_{ij})$ . Напомним, что

$$\lambda_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = e_i e_j^* \operatorname{Sp} \lambda(\mathbf{k}, \omega), \quad (12.4.1.6)$$

где  $\mathbf{e}$  — вектор поляризации колебания с волновым вектором  $\mathbf{k}$  и частотой  $\omega$ .

Подставим (12.4.1.5) в (12.4.1.4) и произведем статистическое усреднение. Замечая, что

$$\langle J_i^*(\mathbf{k}, \omega) J_j(\mathbf{k}, \omega) \rangle = TV \langle J_i J_j \rangle_{\mathbf{k}\omega}, \quad (12.4.1.7)$$

где  $V$  — объем плазмы и  $T$  — время взаимодействия, можно представить среднюю интенсивность излучения в виде

$$\mathcal{J} \equiv \frac{\langle P \rangle}{T} = \frac{V}{8\pi^2} \int \langle |\mathbf{eJ}^*|^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} \frac{|\text{Sp } \lambda|}{|\omega|} \delta\{\Lambda(\mathbf{k}, \omega)\} d^3k d\omega. \quad (12.4.1.8)$$

Разделив интенсивность излучения  $\mathcal{J}$  на плотность потока энергии в направлении распространения падающей волны  $S_0$  и величину рассеивающего объема  $V$ , найдем коэффициент рассеяния или трансформации волн:

$$\Sigma = \mathcal{J}/VS_0. \quad (12.4.1.9)$$

Заметим, что величину  $\Sigma$  можно определить иначе, понимая под  $S_0$  в (12.4.1.9) полный поток энергии. Результаты при этом будут отличаться только нормировкой.

Если в результате процесса рассеяния или трансформации образуются высокочастотные волны, то интенсивность излученных волн равна

$$\mathcal{J} = \frac{V}{8\pi^2} \int \frac{1}{|\omega'|} \langle |\mathbf{eJ}^*|^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} \left\{ \frac{1}{|\mathbf{e}|^2 - |\mathbf{k}'\mathbf{e}|^2/k'^2} [\delta(\omega/\omega' - \omega'^2) + \delta(\omega/\omega' - \omega'^2)] + \delta(A) \right\} d^3k' d\omega', \quad (12.4.1.10)$$

где  $A = k'_i \varepsilon_{ij} k'_j / k'^2$ . Первое слагаемое в фигурных скобках определяет приращение энергии высокочастотных электромагнитных волн в плазме, второе — приращение энергии рассеянных ленгмюровских волн. Из законов сохранения энергии и импульса

$$\omega' = \omega + \Delta\omega, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q} \quad (12.4.1.11)$$

следует, что высокочастотные волны могут возбуждаться при падении как высокочастотных, так и низкочастотных волн. В первом случае флуктуации могут быть и низкочастотными, и высокочастотными. Если же падающая волна низкочастотная, то она может трансформироваться в высокочастотную волну только при взаимодействии с высокочастотными флуктуациями.

В случае высокочастотных волн фазовые скорости значительно больше тепловой скорости электронов плазмы, и поэтому выражение для компоненты Фурье  $\mathbf{J}_{\mathbf{k}'\omega'}$  можно упростить, разложив подынтегральное выражение в (12.4.1.3) по степеням  $\mathbf{k}'\mathbf{v}/\omega'$ :

$$J_i(\mathbf{k}', \omega') = i\omega' x'_{ij} \left\{ \delta_{jk} \frac{\delta n_e(\mathbf{q}, \Delta\omega)}{n_0} + \frac{1}{\omega} \left[ k_j \delta_{ki} - \delta_{jk} k_i - 4\pi \frac{\omega^2}{\omega_{pe}^2} (x_{jk} k'_i + \delta_{ji} k'_m x_{mk}) \right] \delta u_i(\mathbf{q}, \Delta\omega) - \frac{i}{en_0} \left[ k_i x_{ik} \delta E_j(\mathbf{q}, \Delta\omega) + \frac{\omega}{c} \varepsilon_{jlm} x_{ik} \delta B_m(\mathbf{q}, \Delta\omega) \right] \right\} E_k^0, \quad (12.4.1.12)$$

где  $\delta n_e$  и  $\delta u_i$  — флуктуации плотности и макроскопической

скорости электронов,  $\delta E$  и  $\delta B$  — флуктуации электрического и магнитного полей в плазме. Такое же выражение непосредственно следует и из гидродинамического рассмотрения.

С помощью (12.4.1.12) можно исследовать следующие процессы рассеяния и трансформации высокочастотных волн в магнитоактивной плазме: рассеяние электромагнитных (обыкновенных и необыкновенных) волн, трансформацию электромагнитных волн в ленгмюровские, трансформацию ленгмюровских волн в электромагнитные волны [16]. Кроме того, используя (12.4.1.12) можно исследовать трансформацию низкочастотных волн в высокочастотные [16].

**12.4.2. Рассеяние и трансформация электромагнитных волн на некогерентных флуктуациях.** Рассеяние электромагнитных волн с малым изменением частоты ( $\Delta \omega \ll \omega$ ) в плазме, находящейся во внешнем магнитном поле, так же как и в свободной плазме, происходит в основном на флуктуациях плотности электронов. Пренебрегая рассеянием, обусловленным флуктуациями скорости электронов, а также флуктуациями полей, можно записать дифференциальное сечение рассеяния в виде [2, 13]

$$d\Sigma_{t \rightarrow t'} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^2 \omega'^2}{\omega_{pe}^4} \mathfrak{N} \langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega' d\omega', \quad (12.4.2.1)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{N} &= \mathcal{N}^{1/3} |e^{i*} (\hat{\epsilon} - 1) e|^2 / \mathcal{N} (|e|^2 - |ke|^2/k^2) (e^{i*} \hat{\epsilon}' e'), \\ e &= \left( 1, i \frac{\epsilon_2}{\mathcal{N}^2 - \epsilon_1}, \frac{\mathcal{N}^2 \sin \theta \cos \theta}{\mathcal{N}^2 \sin^2 \theta - \epsilon_3} \right), \\ e' &= \left( \cos \varphi - i \frac{\epsilon'_2 \sin \varphi}{\mathcal{N}'^2 - \epsilon'_1}, \sin \varphi + i \frac{\epsilon'_2 \cos \varphi}{\mathcal{N}'^2 - \epsilon'_1}, \frac{\mathcal{N}'^2 \sin \theta' \cos \theta'}{\mathcal{N}'^2 \sin^2 \theta' - \epsilon'_3} \right); \end{aligned} \right\} \quad (12.4.2.2)$$

$e$  и  $e'$  — векторы поляризации падающей и рассеянной волн. Множитель  $\mathfrak{N}$  зависит от направлений распространения падающей и рассеянной волн по отношению к магнитному полю (углы  $\theta$  и  $\theta'$ ), а также от разности  $\varphi$  азимутальных углов волновых векторов  $k$  и  $k'$ .

При  $B_0 = 0$  формула (12.4.2.1) переходит в соответствующее выражение для дифференциального сечения рассеяния в изотропной плазме. Действительно, при  $B_0 = 0$  имеем

$$\epsilon_{ik} - \delta_{ik} = -\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \delta_{ik}, \quad ke = k'e' = 0, \quad \mathcal{N} = \sqrt{\epsilon(\omega)}.$$

Поэтому, если  $B_0 = 0$ , то  $\mathfrak{N} = \frac{\omega_{pe}^4}{\omega^4} e_{\perp}^2$  ( $e_{\perp}$  — перпендикулярная к  $k'$  составляющая вектора поляризации  $e$ ) и выражение (12.4.2.1) после усреднения по различным ориентациям вектора  $e$  переходит в формулу (12.1.2.7).

Спектральное распределение флуктуаций плотности электронов в общем случае неизотермической магнитоактивной плазмы определяется выражением

$$e^2 \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} = \frac{2}{\Delta\omega} \operatorname{Im} \{ T_e (q_m - 4\pi q_i x_{ik}^e \Lambda_{km}^{-1})^* (q_n - 4\pi q_j x_{jl}^e \Lambda_{ln}^{-1}) (x_{mn}^e)^* + \\ + 16\pi^2 T_i (q_i x_{ik}^e \Lambda_{km}^{-1})^* (q_j x_{jl}^e \Lambda_{ln}^{-1}) (x_{mn}^i)^* \}. \quad (12.4.2.3)$$

Если  $\Delta\omega^2 \ll q^2 c^2$ , то последнее соотношение существенно упрощается и принимает такой же вид, как и для свободной плазмы:

$$e^2 \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} = \frac{2q^2}{\Delta\omega |\varepsilon|^2} \{ T_e |1 + 4\pi\kappa^i|^2 \operatorname{Im} x^e + 16\pi^2 T_i |x^e|^2 \operatorname{Im} x^i \}, \quad (12.4.4.2)$$

где под  $x$  и  $\varepsilon$  следует понимать продольные составляющие соответствующих тензоров.

Если изменение волнового вектора при рассеянии  $\mathbf{q}$  параллельно  $\mathbf{V}_0$ , то спектр рассеянного излучения имеет такие же характерные частоты, как и в случае изотропной плазмы. Интенсивность рассеянного излучения существенно зависит от величины магнитного поля. Если направление  $\mathbf{q}$  не совпадает с направлением  $\mathbf{V}_0$ , то магнитное поле влияет и на спектр рассеянного излучения.

В случае изотермической плазмы спектр рассеянного излучения при углах между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{V}_0$ , отличных от  $1/2 \pi$ , характеризуется резким максимумом при  $\Delta\omega=0$ , так же как и в отсутствие магнитного поля. Этот максимум обусловлен взаимодействием электромагнитной волны с некогерентными флуктуациями плотности электронов в плазме. (Взаимодействием падающей волны с флуктуациями скорости электронов, электрического и магнитного полей при малых смещениях частоты можно пренебречь.) Хотя рассеяние возникает на флуктуациях плотности электронов, доплеровское уширение основного максимума определяется тепловой скоростью ионов, так как между электронами и ионами происходит взаимодействие, обусловленное самосогласованным полем.

При  $T_e = T_i$  и  $\omega \gg \omega_{\pm}$  ( $\omega_{\pm}$  — частоты ленгмюровских колебаний плазмы в магнитном поле) можно найти интегральный коэффициент рассеяния электромагнитных волн в плазме, воспользовавшись дисперсионным соотношением (11.2.2.3):

$$d\Sigma = 1/2 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^{\pm}}{\omega_{pe}^4} \mathfrak{N}_{\omega'=\omega} \frac{1 + a_e^2 q^2}{2 + a_e^2 q^2} d\omega'. \quad (12.4.2.5)$$

При  $a_e^2 q^2 \gg 1$  эта формула может рассматриваться как обобщение известной формулы Релея на случай магнитоактивной среды.

В неизотермической плазме максимум в спектре рассеянного излучения, обусловленный взаимодействием с некогерентными

флуктуациями, существенно понижается. В сильно неизотермической плазме ( $T_e \gg T_i$ ) высота максимума в  $\sqrt{m_i/m_e}$  раз меньше, чем в изотермической.

Вследствие взаимодействия электромагнитных волн с флуктуациями плотности электронов возможна также трансформация этих волн в ленгмюровские. Согласно (12.4.1.10) дифференциальное сечение трансформации обыкновенной или необыкновенной волны в ленгмюровскую при  $\Delta\omega \ll \omega$  равно

$$d\Sigma_{i \rightarrow l} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^2 \omega'^2}{\omega_{pe}^4} \frac{\mathcal{N}'_i{}^3 |\mathbf{k}'(\hat{\mathbf{e}} - 1)\mathbf{e}|^2}{\mathcal{N}_l \left( |\mathbf{e}|^2 - \frac{|\mathbf{k}\mathbf{e}|^2}{k^2} \right) (\mathbf{k}'\hat{\mathbf{e}}'\mathbf{k}')} \langle n_e^2 \rangle_{q\Delta\omega} d\omega' d\omega', \quad (12.4.2.6)$$

где  $\mathcal{N}_l$  — показатель преломления ленгмюровской волны.

Так же, как и при рассеянии, в случае трансформации электромагнитных волн с малым изменением частоты главную роль играет взаимодействие с некогерентными флуктуациями. При  $\mathbf{V}_0 \rightarrow 0$  формула (12.4.2.6) переходит в (12.2.1.3).

Отношение коэффициента трансформации (12.4.2.6) к коэффициенту рассеяния (12.4.2.1) по порядку величины равно  $c^3/v_e^3$ . Поэтому в области частот  $\omega$ , близких к  $\omega_+(\theta)$  и  $\omega_-(\theta)$ , поглощение, связанное с трансформацией электромагнитных волн в ленгмюровские, более существенно, чем рассеяние электромагнитных волн.

Отметим, что (12.4.2.6) непосредственно можно получить из формулы (12.4.2.1), если в (12.4.2.2) под рассеянной волной понимать ленгмюровскую ( $\mathcal{N}' = \mathcal{N}'_l$ ) и считать, что  $\mathbf{e}' = \mathbf{k}'/k'$ .

**12.4.3. Рассеяние и трансформация электромагнитных волн на резонансных флуктуациях.** Кроме основного максимума, при  $\Delta\omega = 0$  в спектре рассеянного излучения имеются также максимумы, связанные с рассеянием и трансформацией электромагнитных волн на резонансных (когерентных) флуктуациях в плазме.

Плотность тока рассеяния (12.4.1.12) в случае резонансных флуктуаций можно выразить, используя (11.5.2.8), только через флуктуации электрического поля. При этом спектральное распределение флуктуаций плотности тока, входящее в общую формулу для интенсивности излучаемых волн (12.4.1.10), имеет вид

$$\langle |\mathbf{e}\mathbf{J}^*|^2 \rangle_{\mathbf{k}'\omega'} = \frac{\omega'^2 \Delta\omega^2}{e^2 n_e^3 c^2} |\mathcal{D}|^2 \langle \mathbf{E}^2 \rangle_{q\Delta\omega} |\mathbf{E}^0|^2, \quad (12.4.3.1)$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & e_i^* x_{ij} \left\{ \mathcal{N} e_j \tilde{\kappa}_k \tilde{\kappa}_{ki} \tilde{e}_l + \mathcal{N} (\kappa_j e_k - e_j \kappa_k) \tilde{\kappa}_{ki} \tilde{e}_l + \right. \\ & + \frac{\omega}{\Delta\omega} [\mathcal{N} \tilde{e}_j \kappa_k x_{ki} e_l + \mathcal{N} (\tilde{\kappa}_j \tilde{e}_k - \tilde{e}_j \tilde{\kappa}_k) x_{ki} e_l] - \\ & \left. - 4\pi \mathcal{N}' \frac{\omega\omega'}{\omega_{pe}^2} [x_{jk} e_k \kappa'_i \tilde{\kappa}_{im} \tilde{e}_m + \tilde{\kappa}_{jk} \tilde{e}_k \kappa'_i x_{im} e_m] \right\}. \quad (12.4.3.2) \end{aligned}$$

$\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{k}$  и  $\mathcal{N}$  — вектор поляризации, единичный вектор в направлении распространения и показатель преломления падающей волны,  $\tilde{\mathbf{e}}$ ,  $\tilde{\mathbf{k}}$ ,  $\tilde{\mathcal{N}}$  и  $\mathbf{e}'$ ,  $\mathbf{k}'$ ,  $\mathcal{N}'$  — соответствующие величины для флуктуационной и рассеянной волн. Напомним, что частоты и волновые векторы для падающей, рассеянной и флуктуационной волн связаны между собой соотношениями

$$\omega' = \omega + \Delta\omega, \quad \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{q}, \quad (12.4.3.3)$$

выражающими законы сохранения энергии и импульса. Зная спектральные распределения резонансных флуктуаций плотности тока в плазме и учитывая свойства падающей и возбуждаемых волн, нетрудно выделить в (12.4.3.1) слагаемые, ответственные за переходы определенного типа.

Рассмотрим прежде всего рассеяние и трансформацию электромагнитных волн на высокочастотных ленгмюровских флуктуациях. Будем считать, что показатель преломления флуктуационных ленгмюровских колебаний  $\tilde{\mathcal{N}} \gg 1$ , тогда как показатель преломления падающей  $\mathcal{N}$  и рассеянной  $\mathcal{N}'$  волн порядка единицы. Из законов сохранения (12.4.3.3) следует, что  $\omega' \approx \omega \gg \Delta\omega$ . Легко убедиться, что основную роль играет взаимодействие падающей волны с флуктуациями плотности электронов (первое слагаемое в (12.4.3.2)). Поэтому сечение рассеяния электромагнитных волн будет определяться формулой (12.4.2.1). Спектральное распределение (12.4.2.4) в случае  $a_0^2 q^2 \ll 1$  обладает  $\delta$ -образными максимумами при частотах  $\omega_+(\tilde{\theta})$  и  $\omega_-(\tilde{\theta})$ , где  $\tilde{\theta}$  — угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{V}_0$ , связанный с углами  $\theta$ ,  $\theta'$  и  $\varphi$  соотношением

$$\tan^2 \tilde{\theta} = \frac{k^2 \sin^2 \theta + k'^2 \sin^2 \theta' + 2kk' \sin \theta \sin \theta' \cos \varphi}{(k \cos \theta - k' \cos \theta')^2}. \quad (12.4.3.4)$$

Дифференциальное сечение рассеяния электромагнитных волн при смещениях частот  $\Delta\omega$ , близких к частотам ленгмюровских колебаний  $\omega_{\pm}(\tilde{\theta})$ , имеет вид

$$\begin{aligned} d\Sigma_{i \rightarrow l} = & 1/2 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^2 \omega'^2}{\omega_{pe}^4} a_0^2 q^2 \frac{|\Delta\omega^2 - \omega_{Be}^2|}{\omega_{\pm}^2 - \omega_{\pm}^2} \times \\ & \times \{ \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_-) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_-) \} d\omega' d\omega' \end{aligned} \quad (12.4.3.5)$$

(индекс  $l$  обозначает ленгмюровские флуктуации).

Дифференциальное сечение трансформации электромагнитных волн на ленгмюровских флуктуациях в ленгмюровские волны равно

$$\begin{aligned} d\Sigma_{i \rightarrow l} = & 1/2 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^2 \omega'^2}{\omega_{pe}^4} a_0^2 q^2 \frac{\mathcal{N}'^3 |\mathbf{k}' \hat{Q}' \mathbf{e}|^2}{\mathcal{N} (|\mathbf{e}|^2 - |\mathbf{k}\mathbf{e}|^2/k^2) (\mathbf{k}' \hat{\mathbf{e}}' \mathbf{k}')^2} \times \\ & \times \frac{|\Delta\omega^2 - \omega_{Be}^2|}{\omega_{\pm}^2 - \omega_{\pm}^2} \{ \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_+) + \\ & + \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_-) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_-) \} d\omega' d\omega', \end{aligned} \quad (12.4.3.6)$$

где

$$Q'_{ij} = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) \left\{ \delta_{kj} + \frac{\omega \Delta \omega}{\omega_{pe}^2} [(\varepsilon_{kj} - \delta_{kj}) \kappa_l (\varepsilon_{lm} - \delta_{lm}) \kappa_m + (\varepsilon_{kl} - \delta_{kl}) \kappa_l \kappa'_m (\varepsilon_{mj} - \delta_{mj})] \right\}. \quad (12.4.3.7)$$

В случае неравновесной плазмы (например, плазмы, через которую проходит пучок заряженных частиц) в сечениях (12.4.3.5) и (12.4.3.6) необходимо учесть добавочный множитель  $R (1 - (u/\bar{u}) \cos \bar{\theta})^{-1}$ , обусловленный заменой температуры  $T$  эффективной температурой  $\bar{T}$  (11.5.4.4).

В равновесной плазме относительный вклад комбинационного рассеяния на ленгмюровских флуктуациях (12.4.3.5) в интегральное сечение рассеяния (12.4.2.5) составляет величину порядка  $a_0^2 q^2$ . В неравновесных условиях сечение комбинационного рассеяния электромагнитных волн, так же как и сечение трансформации электромагнитных волн в ленгмюровские, может аномально возрасти, если только плазма находится вблизи порога кинетической неустойчивости.

В магнитоактивной плазме комбинационное рассеяние электромагнитных волн возможно также на низкочастотных магнитозвуковых и альвеновских флуктуациях [16]. Используя общее выражение для интенсивности (12.4.1.10) и формулы для спектральных распределений низкочастотных флуктуаций (11.4.3.1), (11.4.3.3) и (11.4.3.4), нетрудно исследовать различные конкретные случаи рассеяния и трансформации.

В неизотермической плазме наиболее существенными оказываются процессы рассеяния и трансформации электромагнитных волн на медленных магнитозвуковых флуктуациях. В этом случае в (12.4.1.12) главную роль играют флуктуации плотности электронов. Сечения рассеяния и трансформации электромагнитных волн на медленных магнитозвуковых флуктуациях определяются выражением

$$d\Sigma_{l+\bar{s} \rightarrow l, l} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_{pe}^4} \frac{\mathcal{N}'^3 |e'^* (\bar{\varepsilon}' - 1) e|^2}{\mathcal{N}' (|e|^2 - \frac{|ke|^2}{k^2}) (e'^* \bar{\varepsilon}' e')} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - qv_s \cos \bar{\theta}) + \delta(\Delta\omega + qv_s \cos \bar{\theta}) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.3.8)$$

где под  $\mathcal{N}'$  и  $e$  следует понимать показатель преломления и вектор поляризации соответственно обыкновенной и необыкновенной или ленгмюровской волн; индекс  $\bar{s}$  служит для обозначения медленных магнитозвуковых флуктуаций. (Дифференциальное сечение рассеяния (12.4.3.8) отличается от соответствующего сечения в изотропной плазме (12.1.3.4) законом дисперсии флуктуационных колебаний.)

Отношение проинтегрированного по частотам сечения рассеяния электромагнитных волн на медленных магнитозвуковых флуктуациях в сильно неизотермической плазме к интегральному сечению (12.4.2.5) рассеяния электромагнитных волн на некогерентных флуктуациях в изотермической плазме равно по порядку величины единице. Поэтому в сильно неизотермической плазме основная линия в спектре рассеянного излучения расщепляется на две, связанные с рассеянием на медленных магнитозвуковых флуктуациях.

В случае рассеяния и трансформации электромагнитных волн на быстрых магнитозвуковых флуктуациях, кроме флуктуаций плотности электронов, необходимо учитывать флуктуации магнитного поля. Соответствующие сечения рассеяния и трансформации электромагнитных волн равны

$$d\Sigma_{t+\bar{f} \rightarrow t, l} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_{pe}^4} \frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\mathcal{N}'^3 |e^{*'} \hat{Q}' e|^2}{\mathcal{N}' \left( |e|^2 - \frac{|\mathbf{k}e|^2}{k^2} \right) (e^{*'} \hat{\varepsilon}' e')} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - qv_A) + \delta(\Delta\omega + qv_A) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.3.9)$$

где

$$Q'_{ij} = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) \left\{ -i \sin \bar{\theta} \delta_{kj} + \frac{\omega \omega_{Be}}{\omega_{pe}^2} (\kappa_k \bar{e}_l - \kappa_l \bar{e}_k) (\varepsilon_{lj} - \delta_{lj}) \right\} \quad (12.4.3.10)$$

(индекс  $\bar{f}$  служит для обозначения быстрых магнитозвуковых флуктуаций).

Отношение сечения рассеяния (12.4.3.9), проинтегрированного по частотам, к сечению (12.4.2.5) по порядку величины равно  $v_s^2/v_A^2$ .

В случае рассеяния и трансформации электромагнитных волн на альвеновских флуктуациях главную роль играют флуктуации магнитного поля, так как альвеновские колебания не сопровождаются изменением плотности. Сечения рассеяния и трансформации электромагнитных волн на альвеновских флуктуациях равны

$$d\Sigma_{t+\bar{a} \rightarrow t, l} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^6}{\omega_{pe}^6} \frac{v_s^2}{c^2 \cos^2 \bar{\theta}} \frac{\mathcal{N}'^3 |e^{*'} \hat{Q}' a_e|^2}{\mathcal{N}' \left( |e|^2 - \frac{|\mathbf{k}e|^2}{k^2} \right) (e^{*'} \hat{\varepsilon}' e')} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - qv_A \cos \bar{\theta}) + \delta(\Delta\omega + qv_A \cos \bar{\theta}) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.3.11)$$

где

$$Q^a_{ij} = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) (\kappa_k \bar{e}_l - \kappa_l \bar{e}_k) (\varepsilon_{lj} - \delta_{lj}) \quad (12.4.3.12)$$

(индекс  $\bar{a}$  служит для обозначения альвеновских флуктуаций). Формула (12.4.3.11) справедлива как для изотермической, так и для неизотермической плазмы.

Отношение сечения рассеяния электромагнитных волн на альвеновских флуктуациях, проинтегрированного по частотам, к сечению (12.4.2.5) составляет величину порядка  $v_0^2/c^2$ .

Сечения рассеяния и трансформации электромагнитных волн на низкочастотных флуктуациях, так же как и в случае ленгмюровских флуктуаций, могут сильно возрастать в неравновесной плазме, если последняя находится вблизи области кинетической неустойчивости.

**12.4.4. Рассеяние и трансформация ленгмюровских волн.** Общие формулы (12.4.1.10) и (12.4.1.12) позволяют также исследовать рассеяние ленгмюровских волн и их трансформацию в высокочастотные электромагнитные волны [16]. Выбирая в качестве падающей волны ленгмюровскую волну и используя для плотности падающего потока энергии выражение

$$S_0 = \frac{c}{8\pi} \mathcal{N}^2 \xi |E^0|^2, \quad (12.4.4.1)$$

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \omega^2 \frac{dA_0}{d\omega^2} \left| \frac{\mathcal{N}^2}{\mathcal{N}^2} \frac{d(\omega \mathcal{N}^2)}{d\omega} \right|, \\ A_0 &= \left| 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2} \sin^2 \theta - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \cos^2 \theta \right|, \\ \mathcal{N}^2 &= A_0 / \psi, \\ \psi &= \frac{v_0^2}{c^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2} \left\{ \frac{3\omega^4}{(\omega^2 - \omega_{Be}^2)(\omega^2 - 4\omega_{Be}^2)} \sin^4 \theta + \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 \frac{6\omega^4 - 3\omega^2 \omega_{Be}^2 + \omega_{Be}^4}{(\omega^2 - \omega_{Be}^2)^3} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \cos^4 \theta \right\}, \end{aligned} \right\} (12.4.4.1')$$

с помощью (12.4.1.10) нетрудно найти конкретные выражения для сечений различных процессов рассеяния и трансформации.

В случае рассеяния и трансформации ленгмюровских волн на некогерентных флуктуациях в изотермической плазме, так же как и при рассеянии высокочастотных электромагнитных волн, главную роль играет взаимодействие падающей волны с флуктуациями плотности электронов. Сечения рассеяния и трансформации ленгмюровских волн на некогерентных флуктуациях равны

$$d\Sigma_{i \rightarrow l, i} = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_{pe}^4} \frac{\mathcal{N}'^3 |e^{*k} (\hat{\xi} - 1) \kappa|^2}{\mathcal{N}^2 \xi (e^{*k} \hat{\xi} e^k)} \langle n_e^2 \rangle_{q \Delta \omega} d\omega' d\omega', \quad (12.4.4.2)$$

где  $\mathcal{N}$  в случае рассеяния определяется выражением (12.4.4.1'), в случае трансформации  $e$  задается выражением (12.4.2.2). При  $V_0 = 0$  формула (12.4.4.2) переходит в формулу (12.2.2.2).<sup>1</sup>

Спектральное распределение некогерентных флуктуаций характеризуется резким максимумом в области малых смещений частоты, ширина которого определяется тепловой скоростью

ионов. Формула (12.4.4.2) применима только в области некогерентного максимума. Отношение коэффициента трансформации ленгмюровской волны в высокочастотную электромагнитную волну к коэффициенту рассеяния ленгмюровских волн при малом изменении частоты равно  $v_0^3/c^3$ .

Рассеяние и трансформацию ленгмюровских волн на резонансных флуктуациях нетрудно исследовать с помощью соотношений (12.4.1.10) и (12.4.3.1).

При рассеянии и трансформации ленгмюровских волн на низкочастотных флуктуационных колебаниях существенными оказываются только флуктуации плотности электронов и магнитного поля. Сечения для различных типов рассеяния и трансформации ленгмюровских волн аналогичны соответствующим сечениям для рассеяния и трансформации электромагнитных волн.

Приведем окончательные выражения для сечений различных типов рассеяния и трансформации ленгмюровских волн.

Сечения рассеяния и трансформации ленгмюровских волн на медленных и быстрых магнитозвуковых и на альвовенских флуктуациях в сильно неизотермической плазме равны соответственно

$$d\Sigma_{l+\bar{s} \rightarrow l, t} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_{pe}^4} \frac{\mathcal{N}'^3 |\mathbf{e}'^* (\hat{\mathbf{e}}' - 1) \mathbf{k}|^2}{\mathcal{N}' \xi (\mathbf{e}'^* \hat{\mathbf{e}}' \mathbf{e}')} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - qv_s \cos \bar{\theta}) + \delta(\Delta\omega + qv_s \cos \bar{\theta}) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.4.3)$$

$$d\Sigma_{l+\bar{j} \rightarrow l, t} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{\omega_{pe}^4} \frac{v_s^2}{v_A^2} \frac{\mathcal{N}'^3 |\mathbf{e}'^* \hat{Q}' \mathbf{k}|^2}{\mathcal{N}' \xi (\mathbf{e}'^* \hat{\mathbf{e}}' \mathbf{e}')} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - qv_A) + \delta(\Delta\omega + qv_A) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.4.4)$$

$$d\Sigma_{l+\bar{a} \rightarrow l, t} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega^6}{\omega_{pe}^6} \frac{v_0^2}{c^2 \cos^2 \theta} \frac{\mathcal{N}'^3 |\mathbf{e}'^* \hat{Q}' \mathbf{k}|^2}{\mathcal{N}' \xi (\mathbf{e}'^* \hat{\mathbf{e}}' \mathbf{e}')} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - qv_A \cos \bar{\theta}) + \delta(\Delta\omega + qv_A \cos \bar{\theta}) \} d\omega' d\omega'. \quad (12.4.4.5)$$

Величины  $Q^f$  и  $Q^a$  определяются такими же выражениями, как и в случае рассеяния электромагнитных волн. Отметим, что отношение сечения трансформации ленгмюровской волны к сечению рассеяния для всех типов низкочастотных флуктуаций по порядку величины равно  $v_0^2/c^2$ .

В случае взаимодействия ленгмюровской волны с высокочастотными флуктуациями существенным оказывается учет флуктуаций плотности электронов и электрического поля. Падающая ленгмюровская волна может взаимодействовать как с ленгмюровскими флуктуациями, так и с высокочастотными электромагнитными флуктуациями.

Рассеяние ленгмюровских волн на ленгмюровских флуктуациях невозможно в силу законов сохранения (12.4.1.11). Трансформация ленгмюровской волны на ленгмюровских флуктуациях в вы-

сокочастотную обыкновенную или необыкновенную электромагнитную волну определяется сечением

$$d\Sigma_{l+\bar{l} \rightarrow l} = 1/2 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega'^4}{\omega_{pe}^4} a_e^2 Q^2 \frac{\mathcal{N}'^3 |e'^* \hat{Q}'_{l\bar{k}}|^2}{\mathcal{N}' \xi (\mathbf{e}'^* \hat{\mathbf{e}}' \mathbf{e}')} \frac{|\Delta\omega^2 - \omega_{B0}^2|}{\omega_{\pm}^2 - \omega_{\mp}^2} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_-) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_-) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.4.6)$$

$$Q'_{ij} = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) (\delta_{kj} + \tilde{\kappa}_k \kappa_j).$$

Это сечение в  $c/v_e$  раз больше сечения (12.4.2.5). Частоты образующихся в результате такого процесса волн будут близки к сумме модифицированных ленгмюровских частот  $\omega_{\pm}(\theta) \pm \omega_{\pm}(\bar{\theta})$ .

Сечения рассеяния и трансформации ленгмюровских волн на электромагнитных флуктуациях равны

$$d\Sigma_{l+\bar{l} \rightarrow l, i} = 1/2 n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \frac{\omega'^4}{\omega_{pe}^4} a_e^2 k^2 \frac{\mathcal{N}'^3 |e'^* \hat{Q}'_{l\bar{e}}|^2}{\mathcal{N}' \xi (|\bar{\mathbf{e}}|^2 - |\tilde{\mathbf{e}}|^2) (\mathbf{e}'^* \hat{\mathbf{e}}' \mathbf{e}')} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - qc/\mathcal{N}') + \delta(\Delta\omega + qc/\mathcal{N}') \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.4.7)$$

где в случае рассеяния

$$Q'_{ij} = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) \left\{ \tilde{\delta}_{kj} + \frac{\omega \Delta\omega}{\omega_{pe}^2} [(\varepsilon_{kl} - \delta_{kl}) \kappa_l \kappa'_m (\tilde{\varepsilon}_{mj} - \delta_{mj}) + \right. \\ \left. + (\tilde{\varepsilon}_{kj} - \delta_{kj}) \kappa_l (\varepsilon_{lm} - \delta_{lm}) \kappa_m] \right\},$$

а в случае трансформации

$$Q'_{ij} = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) \left\{ \tilde{\delta}_{kj} - \frac{\Delta\omega}{\omega} \frac{\mathcal{N}'}{\mathcal{N}''} (\tilde{\varepsilon}_{lj} - \delta_{lj}) \tilde{\kappa}_l \kappa_k \right\}$$

(индекс  $\bar{l}$  служит для обозначения электромагнитных флуктуаций).

Сечения рассеяния и трансформации ленгмюровских волн в неравновесной плазме характеризуются такими же аномалиями в области критических флуктуаций, как и соответствующие сечения для электромагнитных волн.

**12.4.5. Трансформация низкочастотных волн на ленгмюровских флуктуациях.** В заключение остановимся еще на обусловленной ленгмюровскими флуктуациями трансформации в магнитоактивной плазме низкочастотных волн в высокочастотные [16].

В случае падающей низкочастотной волны в выражении для плотности тока (12.4.1.12) наиболее существенны слагаемые, связанные с магнитным полем и плотностью электронов в падающей волне. Используя формулу (12.4.1.10) для интенсивности излучения высокочастотных волн и разделив ее на плотность потока энергии, связанного с падающей низкочастотной волной, нетрудно найти явные выражения для сечений различных процессов трансформации волн.

Сечения трансформации медленной и быстрой магнитозвуковых волн, а также альвеновской волны на ленгмюровских флуктуациях с возбуждением обыкновенной, необыкновенной или ленгмюровской волн равны соответственно

$$d\Sigma_{s+l \rightarrow t, l} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{\omega'^4}{\omega_{pe}^4} \frac{c \omega'^3 |e^{i*} (\hat{\epsilon}' - 1) \hat{\kappa}|^2}{v_s |\cos \theta| (e^{i*} \hat{\epsilon}' e^i)} \frac{|\Delta\omega^2 - \omega_{Be}^2|}{\tilde{\omega}_+^2 - \tilde{\omega}_-^2} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_-) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_-) \} d\omega' d\omega'; \quad (12.4.5.1)$$

$$d\Sigma_{f+l \rightarrow t, l} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{\omega \omega'^4}{\omega_{Be} \omega_{pe}^4} \frac{v_e^2}{c v_A} \frac{c \omega'^3 |e^{i*} \hat{R}^l e|^2}{(e^{i*} \hat{\epsilon}' e^i)} \frac{|\Delta\omega^2 - \omega_{Be}^2|}{\tilde{\omega}_+^2 - \tilde{\omega}_-^2} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_-) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_-) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.5.2)$$

$$P_{ij}^l = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) \left\{ \tilde{\kappa}_k \kappa_i \chi_{ij}^l + \frac{\Delta\omega}{\omega} (\kappa_k \delta_{lj} - \kappa_l \delta_{kj}) (\tilde{\varepsilon}_{im} - \delta_{im}) \tilde{\kappa}_m \right\};$$

$$d\Sigma_{a+l \rightarrow t, l} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \frac{\omega'^4 \Delta\omega^2}{\omega_{pe}^6} \frac{v_e^2}{c v_A} \frac{c \omega'^3 |e^{i*} \hat{R}^l e|^2}{|\cos \theta|^3 (e^{i*} \hat{\epsilon}' e^i)} \frac{|\Delta\omega^2 - \omega_{Be}^2|}{\omega_+^2 - \omega_-^2} \times \\ \times \{ \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_+) + \delta(\Delta\omega - \tilde{\omega}_-) + \delta(\Delta\omega + \tilde{\omega}_-) \} d\omega' d\omega', \quad (12.4.5.3)$$

$$R_{ij}^l = (\varepsilon'_{ik} - \delta_{ik}) (\kappa_k \delta_{lj} - \kappa_l \delta_{kj}) (\tilde{\varepsilon}_{im} - \delta_{im}) \tilde{\kappa}_m.$$

Отметим, что из указанных процессов наибольшее сечение имеет трансформация медленной магнитозвуковой волны в ленгмюровскую. Отношение сечения этого процесса, проинтегрированного по частотам, к (12.4.2.5) по порядку величины равно  $c^4/v_e^4$ .

## § 12.5. Рассеяние и трансформация волн в частично ионизованной плазме, находящейся во внешнем электрическом поле

### 12.5.1. Рассеяние поперечных волн в отсутствие внешнего магнитного поля.

Перейдем теперь к исследованию процессов рассеяния и трансформации волн в частично ионизованной плазме, находящейся во внешнем постоянном и однородном электрическом поле.

Рассмотрим прежде всего комбинационное рассеяние электромагнитных волн на ионно-звуковых колебаниях в частично ионизованной плазме, находящейся во внешнем электрическом поле [18].

Подставляя выражение (11.7.2.4) в общую формулу для дифференциального сечения рассеяния электромагнитных волн (12.1.2.7) и ограничиваясь случаем длинноволнового падающего излучения ( $a_0 k \ll 1$ ), получим

$$d\Sigma = 4\pi^2 \left( \frac{e^2}{m_0 c^2} \right)^2 \sqrt{Z} n_0 (1 + \cos^2 \vartheta) \times \\ \times \left\{ \frac{\delta(\Delta\omega - 2v_s k \sin 1/2 \vartheta)}{\Psi - \cos \chi} + \frac{\delta(\Delta\omega + 2v_s k \sin 1/2 \vartheta)}{\Psi + \cos \chi} \right\} d\omega' d\omega', \quad (12.5.1.1)$$

где

$$\zeta = \Gamma(1/4) \{32\pi^2 \nu^{1/4} \nu^{1/2} \Gamma(3/4)\}^{-1} \approx 1,4 \cdot 10^{-2}, \quad (12.5.1.1')$$

$\chi$  — угол между вектором  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  и внешним электрическим полем,

$$\cos \chi = \frac{\cos \Theta - \cos \Theta'}{2 \sin 1/2 \vartheta}, \quad (12.5.1.2)$$

$\Psi$  — величина, определяемая формулой (7.2.1.11),  $\vartheta$  — угол рассеяния (угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ ) и  $\Theta$  и  $\Theta'$  — углы между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{E}_0$ . (Обратим внимание на то, что здесь угол  $\chi$  определяется как угол между направлением электронного потока и волновым вектором флуктуации, в отличие от гл. 7 и § 11.7, где под  $\chi$  понимался угол между направлением электронного потока и групповой скоростью волны. При  $\Delta \omega > 0$  новое определение совпадает со старым; при  $\Delta \omega < 0$  величины  $\cos \chi$  при новом и при старом определении угла  $\chi$  отличаются знаком.)

Мы видим, что в спектре рассеянного излучения возникают две узкие линии — ионно-звуковые сателлиты с частотами  $\omega' = \omega - 2k\nu_s \sin 1/2 \vartheta$  (стоксовский сателлит) и  $\omega' = \omega + 2k\nu_s \sin 1/2 \vartheta$  (антискотковский сателлит).

Интегрируя соотношение (12.5.1.1) по частоте  $\omega'$ , найдем интенсивность рассеяния в единичный телесный угол

$$\frac{d\Sigma}{d\sigma'} = 4\pi^2 \left(\frac{e^2}{m_e c^2}\right)^2 \sqrt{Z} n_0 (1 + \cos^2 \vartheta) \left\{ f\left(\chi, \frac{E_0}{E_c}\right) + f_+\left(\chi, \frac{E_0}{E_c}\right) \right\}, \quad (12.5.1.3)$$

где  $f$  и  $f_+$  — функции, характеризующие интенсивность стоксовского и антискотковского сателлитов

$$f\left(\chi, \frac{E_0}{E_c}\right) = f_+\left(\pi - \chi, \frac{E_0}{E_c}\right) = \{\Psi - \cos \chi\}^{-1}, \quad (12.5.1.4)$$

$E_c$  — критическое значение электрического поля, определяемое формулой (7.2.1.12). Зависимость функции  $f$  от угла  $\chi$  при различных значениях внешнего электрического поля представлена на рис. 12.5.1; зависимость  $f$  от  $E_0$  при  $\chi=0$  — на рис. 12.5.2.

Мы видим, что угловое распределение рассеянного излучения существенно зависит от величины внешнего электрического поля. При  $E_0 \ll E_c$  это распределение почти изотропно (если отвлечься от множителя  $1 + \cos^2 \vartheta$ ). При увеличении  $E_0$  резко возрастает интенсивность волн, рассеянных под углами  $\Theta'_\pm$ , определяемыми следующим образом:

$$\cos \Theta'_\pm = \cos \Theta \pm 2 \sin 1/2 \vartheta. \quad (12.5.1.5)$$

Если  $E_0 \rightarrow E_c$ , то сечение рассеяния, отнесенное к единичному телесному углу, обращается (в рамках линейной теории) при  $\Theta' = \Theta'_\pm$  в бесконечность.

Полное сечение рассеяния электромагнитных волн на ионно-звуковых колебаниях медленно увеличивается с ростом внешнего электрического поля и стремится к бесконечности (логарифмически) при  $E_0 \rightarrow E_c$ .

Резкое возрастание интенсивности рассеяния электромагнитных волн при  $E_0 \rightarrow E_c$  связано с наступающей при  $E_0 \geq E_c$  неустойчивостью ионного звука. По своей природе это явление

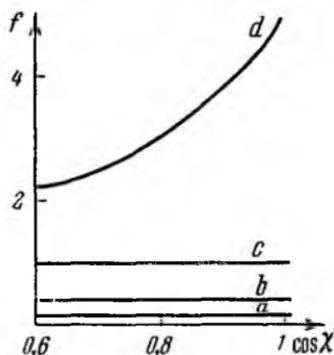


Рис. 12.5.1. Угловое распределение рассеянного излучения. По вертикальной оси отложена функция  $f(\chi, E_0/E_c)$ , характеризующая интенсивность стоксовского спутника, по горизонтальной оси  $\cos \chi = (\cos \Theta - \cos \Theta')(2 \sin \delta/2)^{-1}$ .

Кривые  $a, b, c, d$  относятся к случаям  $E_0/E_c = 0,5; 0,7; 0,8; 0,9$ .

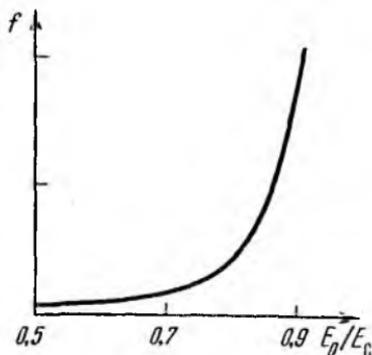


Рис. 12.5.2. Зависимость интенсивности рассеянного излучения от величины внешнего электрического поля.

По вертикальной оси отложена функция  $f(\chi, E_0/E_c)$  при  $\chi = 0; m_0 = m_1 = 10^4 m_e, z = 1$ .

аналогично рассмотренному в п. 12.1.4 явлению критической опалесценции в бестолкновительной плазме, находящейся на границе области устойчивости.

Подчеркнем, что все полученные здесь и далее выражения для сечений рассеяния и трансформации электромагнитных волн справедливы в области устойчивости, когда  $E_0 < E_c$ . Если колебания плазмы нарастают, то становится необходимым учет нелинейных эффектов, накладывающих ограничение на рост флуктуаций и, следовательно, на рост сечений рассеяния и трансформации волн.

**12.5.2. Рассеяние поперечных волн при наличии внешнего магнитного поля.** Рассмотрим теперь комбинационное рассеяние электромагнитных волн в частично ионизованной плазме, находящейся во внешних электрическом и магнитном полях [19, 20].

Предполагая, что изменение частоты при рассеянии  $\Delta \omega$  мало по сравнению с частотой  $\omega$ , получим, согласно общей формуле

(12.4.2.1), следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния электромагнитных волн на флуктуациях плотности электронов:

$$d\Sigma = \frac{1}{2\pi} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \left( \frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^4 \mathfrak{N}_{\lambda\lambda'} \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} d\omega' d\omega', \quad (12.5.2.1)$$

где величина  $\mathfrak{N}_{\lambda\lambda'}$ , зависящая от волновых векторов и поляризаций падающей и рассеянной волн, определяется формулой (12.4.2.2); мы опускаем здесь индекс  $t \rightarrow t$  у величины  $d\Sigma$  и выписываем в явном виде поляризационный индекс  $\lambda$  у величины  $\mathfrak{N}_{\lambda\lambda'}$  ( $\lambda = -$  соответствует медленной,  $\lambda' = +$  быстрой электромагнитной волне).

Мы видим, что при наличии внешнего магнитного поля в плазме возможны в принципе четыре типа процессов рассеяния электромагнитных волн (в зависимости от поляризаций падающей и рассеянной волн); а именно  $t_+ \rightarrow t_+$ ,  $t_- \rightarrow t_-$ ,  $t_+ \rightarrow t_-$ ,  $t_- \rightarrow t_+$ .

В случае произвольного соотношения между частотами  $\omega$ ,  $\omega_{Be}$ ,  $\omega_{pe}$  такие процессы с участием ионно-звуковых или магнитозвуковых флуктуаций могут оказаться запрещенными, так как частота звуковой или низкочастотной волны с волновым вектором  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  может оказаться малой по сравнению с величиной  $\Delta\omega = \omega - \omega'$ .

Мы ограничимся для определенности рассмотрением случая высокочастотного падающего излучения  $\omega \gg \omega_{pe}$ ,  $\omega_{Be}$ ; при этом оказываются возможными все четыре процесса  $t \rightarrow t$ .

Заметим, что из вида величин  $\mathfrak{N}_{\lambda\lambda'}$  следует, что в случае произвольных углов рассеяния  $\vartheta$  дифференциальные сечения для всех четырех процессов  $t \rightarrow t$  одинаковы по порядку величины; в случае же малых углов рассеяния ( $\vartheta \ll 1$ ) сечения процессов  $t_+ \rightarrow t_-$  и  $t_- \rightarrow t_+$  малы (пропорциональны  $\vartheta^4$ ).

В случае не очень сильного магнитного поля, когда замагниченной является только электронная компонента плазмы ( $\omega_{B1} \ll \ll kv_s \ll \omega_{Be}$ ), спектральное распределение флуктуаций плотности электронов в звуковой области ( $T_i/m_i \ll (\Delta\omega/k)^2 \ll T_e/m_e$ ) определяется выражением (11.7.2.2). Подставляя последнее в соотношение (12.5.2.1), получим следующее выражение для дифференциального сечения рассеяния электромагнитных волн на ионно-звуковых колебаниях в случае длинноволнового падающего излучения:

$$d\Sigma = 8\pi^2 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 \sqrt{Z} n_0 \left( \frac{\omega}{\omega_{pe}} \right)^4 \mathfrak{N}_{\lambda\lambda'} \left\{ \frac{\delta(\Delta\omega - 2v_s k \sin 1/2\vartheta)}{\mu^\mp (\Psi^\mp - \cos \chi)} + \frac{\delta(\Delta\omega + 2v_s k \sin 1/2\vartheta)}{\mu^\mp (\Psi^\mp + \cos \chi)} \right\} d\omega' d\omega', \quad (12.5.2.2)$$

где  $\chi$  — угол между векторами  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$  и  $\mathbf{B}_0$ , связанный с углом рассеяния  $\vartheta$  и углами  $\theta$ ,  $\theta'$  между векторами  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{k}'$  и направлением

внешнего магнитного поля соотношением, аналогичным (12.5.1.2); величины  $\Psi$ ,  $\mu$  определяются формулами (7.2.2.7) (верхний и нижний знаки относятся соответственно к случаям  $\chi < 1/2\pi$  и  $\chi > 1/2\pi$ ).

Мы видим, что в спектре рассеянного излучения возникают два ионно-звуковых сателлита с частотами  $\omega' = \omega \pm 2v_s k \sin 1/2\vartheta$ .

Интегрируя выражение (12.5.2.2) по частотам, найдем коэффициент рассеяния, отнесенный к единичному телесному углу

$$\frac{d\Sigma}{d\omega'} = 16\pi\zeta \left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2 \sqrt{Z} n_0 \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}}\right)^4 \mathfrak{R}_{\lambda\lambda'} \{[\mu^\pm (\Psi^\pm - \cos \chi)]^{-1} + [\mu^\mp (\Psi^\mp + \cos \chi)]^{-1}\}. \quad (12.5.2.3)$$

В случае очень сильного магнитного поля, когда существенно замагниченной является не только электронная, но и ионная компонента плазмы ( $kv_s \ll \omega_{Bi}$ ), получим после подстановки в соотношение (12.5.2.1) выражения (11.7.2.4) для спектрального распределения флуктуаций плотности электронов

$$d\Sigma = 8\pi\zeta \left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2 \sqrt{Z} n_0 \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}}\right)^4 \mathfrak{R}_{\lambda\lambda'} \cos^{-1} \chi \{(\xi - \operatorname{sgn} \cos \chi)^{-1} \times \\ \times \delta(\Delta\omega - v_s k [\cos \theta - \cos \theta']) + (\xi + \operatorname{sgn} \cos \chi)^{-1} \delta(\Delta\omega + v_s k [\cos \theta - \cos \theta'])\} d\omega' d\omega', \quad (12.5.2.4)$$

где величина  $\xi$  определяется формулой (7.2.2.10). В этом случае в спектре рассеянного излучения возникают два магнитозвуковых сателлита с частотами  $\omega' = \omega \pm v_s k (\cos \theta - \cos \theta')$ .

Интегрируя выражение (12.5.2.4) по частотам, найдем коэффициент рассеяния, отнесенный к единичному телесному углу

$$\frac{d\Sigma}{d\omega'} = 16\pi\zeta \left(\frac{e^2}{m_0 c^2}\right)^2 \sqrt{Z} n_0 \left(\frac{\omega}{\omega_{pe}}\right)^4 \mathfrak{R}_{\lambda\lambda'} \cos^{-1} \chi \frac{\xi}{\xi^2 - 1}. \quad (12.5.2.5)$$

Заметим, что формулы (12.5.2.4), (12.5.2.5) (как и соотношение (11.7.2.4) для корреляционной функции флуктуаций плотности электронов) справедливы, если угол  $\chi$  не слишком близок к  $1/2\pi$ .

Проследим за тем, как меняются интенсивность и угловое распределение рассеянного излучения в зависимости от внешних полей  $E_0$  и  $B_0$ . При не очень больших их значениях ( $E_0 \ll E_c$ ,  $\omega_{Bi} \ll kv_s$ ) распределение рассеянного излучения близко к изотропному (если отвлечься от зависящего от поляризаций фактора  $\mathfrak{R}_{\lambda\lambda'}$ ).

В случае не очень сильного магнитного поля ( $\omega_{Bi} \ll kv_s$ ) при увеличении электрического поля распределение рассеянного излучения становится все более анизотропным, причем наибольшей интенсивностью характеризуются волны, рассеянные под углами  $\Theta'_\pm$ , определяемыми формулой (12.5.1.5).

Если  $E_0 \rightarrow E'_c$ , где  $E'_c$  — критическое значение электрического поля, определяемое (7.2.2.8), то сечение рассеяния, отнесенное

к единичному телесному углу, обращается (в рамках линейной теории) при  $\Theta' = \Theta'_\pm$  в бесконечность. Полное сечение рассеяния электромагнитных волн на ионно-звуковых колебаниях увеличивается с ростом  $E_0$  и стремится к бесконечности (логарифмически) при  $E_0 \rightarrow E'_c$ .

В случае очень сильного магнитного поля ( $\omega_{BI} \gg kv_s$ ) распределение рассеянного излучения резко анизотропно при всех значениях внешнего электрического поля: величина  $d\Sigma/d\Theta'$  в этом случае, согласно (12.5.2.5), пропорциональна  $\cos^{-4} \chi$ . При увеличении  $E_0$  сечение рассеяния возрастает, обращаясь при  $E_0 \rightarrow E'_c$  в бесконечность одновременно для всех направлений распространения рассеянных волн.

Резкое возрастание коэффициента рассеяния электромагнитных волн при  $E_0 \rightarrow E'_c$  (явление критической опалесценции) связано с наступающей при  $E_0 \geq E'_c$  неустойчивостью магнито-звуковых (или ионно-звуковых) колебаний.

Обратим внимание на существенное различие характера критической опалесценции в случаях сильной и слабой замагниченности ионов. Во втором случае критическая опалесценция должна возникать только при рассеянии волн под углами  $\Theta' = \Theta'_+$ , тогда как в первом она должна наблюдаться при рассеянии волн под всеми углами  $\Theta'$ . Поэтому полное сечение рассеяния электромагнитных волн при  $E_0$ , близком к  $E'_c$ , в случае сильной замагниченности ионов будет значительно больше, чем при слабой их замагниченности. В самом деле, интегрируя выражения (12.5.2.3), (12.5.2.5) по  $d\Theta'$ , легко убедиться, что при сильной замагниченности ионов интегральное сечение рассеяния при  $E_0 \rightarrow E'_c$  пропорционально величине  $(E'_c - E_0)^{-1}$ , а при слабой их замагниченности — величине  $\ln(1 - E_0/E'_c)$ .

**12.5.3. Критическая опалесценция при рассеянии и трансформации продольных волн.** Наряду с рассмотренным выше процессом комбинационного рассеяния электромагнитных волн в плазме могут происходить еще и другие процессы рассеяния и трансформации электромагнитных колебаний при их взаимодействии со звуковыми флуктуациями.

В отсутствие внешнего магнитного поля возможны три таких процесса: рассеяние высокочастотных продольных волн ( $l \rightarrow l$ ), превращение поперечных волн в продольные ( $t \rightarrow l$ ) и обратный процесс превращения продольных волн в поперечные ( $l \rightarrow t$ ).

К изучению этих процессов мы сейчас и перейдем [19].

Интенсивность трансформации (рассеяния) будем, как и в предыдущих параграфах, характеризовать коэффициентом трансформации (рассеяния)

$$d\Sigma_{\lambda \rightarrow \nu} = \frac{d\mathcal{J}}{V S_0}, \quad (12.5.3.1)$$

где  $d\mathcal{J}$  — среднее приращение энергии трансформированной (рассеянной) волны за единицу времени и  $S_0$  — плотность потока энергии падающей волны (индекс  $\lambda$  характеризует тип колебания: для ленгмюровской волны  $\lambda=l$ , для поперечной волны  $\lambda=t$ ;  $V$  — объем системы). Входящая в это выражение величина  $S_0$  имеет, как известно, вид

$$S_0 = \frac{v_g}{16\pi} \frac{d(\omega \epsilon(\omega))}{d\omega} |E^0|^2,$$

где  $v_g$  — групповая скорость падающей волны; для ленгмюровской волны  $v_g = 3\omega_{pe} a_e^2 \mathbf{k}$ , а для поперечной электромагнитной волны  $v_g = c^2 \mathbf{k} / \omega$ .

Коэффициенты трансформации и рассеяния высокочастотных волн легко выразить через спектральное распределение флуктуаций плотности электронов. Используя выражения (12.2.1.3), (12.2.2.1), (12.2.2.2), получим

$$d\Sigma_{t \rightarrow l} = \frac{\omega_{pe}^3}{c^2 k n_0^2} \sin^2 \vartheta \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} \frac{d^3 k'}{(4\pi)^3}, \quad (12.5.3.2)$$

$$d\Sigma_{l \rightarrow t} = \frac{2\omega_{pe}}{3a_e^2 k n_0^2} \sin^2 \vartheta \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} \frac{d^3 k'}{(4\pi)^3}, \quad (12.5.3.3)$$

$$d\Sigma_{l \rightarrow l} = \frac{2\omega_{pe}}{3a_e^2 k n_0^2} \cos^2 \vartheta \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\Delta\omega} \frac{d^3 k'}{(4\pi)^3}, \quad (12.5.3.4)$$

где  $\mathbf{q} = \mathbf{k} - \mathbf{k}'$ ,  $\Delta\omega = \omega - \omega'$ ;  $\mathbf{k}$ ,  $\omega$  и  $\mathbf{k}'$ ,  $\omega'$  — волновые векторы и частоты падающей и трансформированной (рассеянной) волн и  $\vartheta$  — угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ .

Рассмотрим сначала трансформацию поперечной волны в продольную ( $t \rightarrow l$ ) на ионно-звуковых флуктуациях. Подставляя в соотношение (12.5.3.2) выражение (11.7.2.4) для спектрального распределения флуктуаций плотности электронов и полагая  $a_e k \ll 1$ , получим

$$d\Sigma_{t \rightarrow l} = \zeta \frac{e^2 a_e^2 \omega_{pe}}{c^2 k} \sqrt{Z} \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{\delta(\Delta\omega - v_s q)}{\Psi - \cos \chi} + \frac{\delta(\Delta\omega + v_s q)}{\Psi + \cos \chi} \right\} d^3 k', \quad (12.5.3.5)$$

где  $\chi$  — угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{E}_0$  и величина  $\zeta$  определяется формулой (12.5.1.1')

Напомним, что, как было показано в гл. 7, в плазме, находящейся во внешнем электрическом поле, возможны ленгмюровские колебания с частотой  $\omega_l(\mathbf{k})$ , определяемой (7.1.3.3), и колебания с частотой  $-\omega_l(-\mathbf{k})$ . Соответственно возможны два типа процессов  $t \rightarrow l$ : процесс  $t \rightarrow l_1$ , при котором трансформированная волна имеет частоту  $\omega_l(\mathbf{k}')$ , и процесс  $t \rightarrow l_2$ , при котором трансформированная волна имеет частоту  $-\omega_l(-\mathbf{k}')$ .

Для коэффициента трансформации  $t \rightarrow l_1$ , согласно (12.5.3.5), имеем

$$d\Sigma_{t \rightarrow l_1} = \frac{Ze^2}{16\pi m_0 c^2} \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} \frac{\omega_{pe}^2 k'}{c^2 k^3 \alpha} \sin^2 \vartheta \left\{ \frac{\delta(k' - k'_1)}{\Psi + \cos \Theta'} + \frac{\delta(k' - k'_2)}{\Psi - \cos \Theta'} \right\} d^3 k', \quad (12.5.3.6)$$

где  $\Theta'$  — угол между векторами  $k'$  и  $E_0$ ,  $m_0$  — масса нейтральной частицы,

$$k'_{1,2} = \frac{c^2 k^2 \alpha}{2\omega_{pe} v_s (\cos \Theta' \pm \alpha)}, \quad \alpha \equiv \frac{v_s}{u} = \sqrt{\frac{3\Gamma(3/4) m_0 Z}{\pi \Gamma(1/4) m_1}} \approx 0,7 \sqrt{Z m_0 / m_1} \quad (12.5.3.7)$$

(мы учли, что при трансформации поперечной волны в продольную  $k' \gg k$ ).

Согласно этим формулам, если  $\alpha > 1$ , то в спектре трансформированных волн возникает одно колебание с волновым числом  $k'_1$ ; если же  $\alpha < 1$ , то появляется еще и второе колебание с волновым числом  $k'_2$ . При этом распределение трансформированного излучения характеризуется сильной анизотропией. Если  $E_0 \rightarrow E_c$ , то при  $\alpha > 1$  интенсивность колебаний с волновым числом  $k'_1$ , для которых  $\Theta' = \pi$  (а при  $\alpha < 1$  — интенсивность колебаний с волновым числом  $k'_2$ , для которых  $\Theta' = 0$ ) обращается (в рамках линейной теории) в бесконечность. Такое резкое возрастание коэффициента трансформации (явление критической опалесценции при трансформации волн) связано с существованием критических флуктуаций, возникающих в плазме вблизи границы области устойчивости.

Интегрируя соотношение (12.5.3.6) по  $k'$ , найдем коэффициент трансформации  $t \rightarrow l_1$ , отнесенный к единичному телесному углу. Полагая для определенности  $\alpha > 1$ , получим

$$\frac{d\Sigma_{t \rightarrow l_1}}{d\Omega'} = \frac{Ze^2}{16\pi m_0 c^4} \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} \frac{\omega_{pe}^2 \sin^2 \vartheta k_1^3}{\alpha k^3 (\Psi + \cos \Theta')}. \quad (12.5.3.8)$$

Интегрируя (12.5.3.6) по  $d^3 k'$ , можно определить интегральный коэффициент трансформации  $\Sigma_{t \rightarrow l_1}$ , характеризующий полную интенсивность трансформированных волн. Для плазмы, находящейся вблизи границы области устойчивости ( $E_c - E_0 \ll E_c$ ), получим

$$\Sigma_{t \rightarrow l_1} = \frac{Ze^2 k_0'^3 \omega_{pe}^2}{8m_e c^4 k^3 \alpha} \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} \sin^2 \Theta \ln(\Psi - 1), \quad (12.5.3.9)$$

где  $k_0' = c^2 k^2 \alpha (2\omega_{pe} v_s)^{-1} |1 - \alpha|^{-1}$  и  $\Theta$  — угол между векторами  $k$  и  $E_0$ .

Аналогичным образом можно рассмотреть второй возможный процесс трансформации поперечных волн в продольные — про-

цесс  $t \rightarrow l_2$ . Легко убедиться, что все описывающие его соотношения получаются из соответствующих формул (12.5.3.6) — (12.5.3.9) путем замены  $E_0$  на  $-E_0$  и, следовательно,  $\Theta$  на  $\pi - \Theta$ ,  $\Theta'$  на  $\pi - \Theta'$  и  $\chi$  на  $\pi - \chi$ ; поэтому мы не приводим здесь эти соотношения.

Остановимся теперь на трансформации продольных волн в поперечные. Учитывая, что при этом  $k' \ll k$ , и используя (12.5.3.3), получим для коэффициента трансформации  $l_1 \rightarrow t$  выражение

$$d\Sigma_{l_1 \rightarrow t} = \frac{Ze^2 \sin^2 \vartheta}{48\pi a m_e c^2 a_0^2 k k'} \sqrt{\frac{m_0}{m_i}} \left\{ \frac{\delta(k' - k'_3)}{\Psi - \cos \Theta} + \frac{\delta(k' - k'_4)}{\Psi + \cos \Theta} \right\} d^3 k', \quad (12.5.3.10)$$

где  $\Theta$  — по-прежнему угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}_0$ ,

$$k'_{3,4} = c^{-1} \sqrt{2k\omega_{pe} (\cos \Theta \mp \alpha)}. \quad (12.5.3.11)$$

Приведем выражения для коэффициента трансформации  $l_1 \rightarrow t$ , отнесенного к единичному телесному углу, и для интегрального коэффициента трансформации

$$\frac{d\Sigma_{l_1 \rightarrow t}}{d\Omega'} = \frac{Ze^2 \sin^2 \Theta'}{48\pi a m_e c^2 a_0^2 k} \sqrt{\frac{m_0}{m_i}} \left\{ \frac{k'_3}{\Psi - \cos \Theta} + \frac{k'_4}{\Psi + \cos \Theta} \right\}, \quad (12.5.3.12)$$

$$\Sigma_{l_1 \rightarrow t} = \frac{Ze^2}{18\pi a m_e c^2 a_0^2 k} \sqrt{\frac{m_0}{m_i}} \left\{ \frac{k'_3}{\Psi - \cos \Theta} + \frac{k'_4}{\Psi + \cos \Theta} \right\}, \quad (12.5.3.13)$$

где  $\Theta'$  — угол между векторами  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{u}$  (если  $k'_{3,4} < 0$ , то соответствующее слагаемое в этих соотношениях следует опустить).

Мы видим, что при  $E_0 \rightarrow E_c$  коэффициенты трансформации  $l_1 \rightarrow t$  обращаются (в рамках линейной теории) в бесконечность для волн с  $\Theta = 0$  (если  $\alpha < 1$ ) или для волн с  $\Theta = \pi$  (если  $\alpha > 1$ ), причем в обоих случаях  $k' = k'_0 \equiv c^{-1} \sqrt{2k\omega_{pe} |1 - \alpha|}$ .

Не приводя выражений для коэффициентов трансформации  $l_2 \rightarrow t$ , заметим, что они получаются из соответствующих коэффициентов трансформации  $l_1 \rightarrow t$  с помощью замены  $\Theta$  на  $\pi - \Theta$ ,  $\Theta'$  на  $\pi - \Theta'$  и  $\chi$  на  $\pi - \chi$ .

Перейдем к изучению рассеяния продольных волн.

Подставляя в выражение (11.7.1.2) в соотношение (12.5.3.4) и выполняя интегрирование по модулю вектора  $\mathbf{k}'$ , получим

$$\frac{d\Sigma_{l_1 \rightarrow l_1}}{d\Omega'} = \frac{d\Sigma_{l_2 \rightarrow l_2}}{d\Omega'} = \frac{Ze^2 \alpha \cos^2 \vartheta}{72\pi m_i v_s^2 a_0^2} \sqrt{\frac{2m_i}{m_0}} \frac{\Psi}{\Psi^2 - \cos^2 \chi}, \quad (12.5.3.14)$$

где  $\chi$  — угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{E}_0$  (мы ограничиваемся случаем не слишком длинных волн,  $1 \gg a_0 k \gg \sqrt{m_e/m_i}$ ). Что касается процессов  $l_1 \rightleftharpoons l_2$ , то с участием ионно-звуковых флуктуаций они невозможны.

Мы видим, что угловое распределение рассеянных ленгмювских волн существенно зависит от величины внешнего элек-

трического поля. При  $E_0 \ll E_c$  оно почти изотропно (если отвлечься от множителя  $\cos^2 \vartheta$ ). При увеличении  $E_0$  резко возрастает интенсивность волн, рассеянных под углами  $\Theta'_\pm$ , определяемыми формулой (12.5.1.5). Если  $E_0 \rightarrow E_c$ , то сечение рассеяния, отнесенное к единичному телесному углу, обращается (в рамках линейной теории) при  $\Theta' = \Theta'_\pm$  в бесконечность. Таким образом, явление критической опалесценции может возникать и при рассеянии продольных волн.

Полное сечение рассеяния продольных волн на ионно-звуковых колебаниях медленно увеличивается с ростом внешнего электрического поля и стремится к бесконечности (логарифмической) при  $E_0 \rightarrow E_c$ .

Мы рассмотрели трансформацию и рассеяние сторонних ленгмюровских волн, т. е. ленгмюровских волн, возбужденных внешним источником. Разумеется, и в отсутствие внешних источников в плазме всегда имеются ленгмюровские волны, амплитуды которых определяются уровнем плазменных флуктуаций (флуктуационные ленгмюровские волны). Существование флуктуационных ленгмюровских волн приводит к своеобразному явлению спонтанного свечения неравновесной плазмы, обусловленного трансформацией этих волн в поперечные электромагнитные волны на ионно-звуковых флуктуациях. К изучению этого явления мы сейчас перейдем.

Увеличение в единицу времени энергии  $d\mathcal{J}$  поперечных волн с волновыми векторами в интервале  $(\mathbf{k}', \mathbf{k}' + d\mathbf{k}')$  связано с коэффициентом трансформации  $d \Sigma_{l \rightarrow t}$  очевидным соотношением

$$d\mathcal{J} = Q(\mathbf{k}') \frac{V d^3k'}{(2\pi)^3}, \quad Q(\mathbf{k}') = \int \left( \frac{d\Sigma_{l \rightarrow t}}{d^3k'} \right) S_{\mathbf{k}\omega} \frac{d^3k d\omega}{2\pi}, \quad (12.5.3.15)$$

где

$$S_{\mathbf{k}\omega} = \frac{v_g}{16\pi} \frac{\partial}{\partial \omega} (\varepsilon(\omega)) \langle \mathbf{E}^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$$

— плотность потока энергии флуктуационных ленгмюровских волн,  $v_g = 3\omega_{pe} a_0^2 k$  — групповая скорость ленгмюровских волн,

$$\langle \mathbf{E}^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} = (4\pi)^2 k^{-2} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$$

и  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  — спектральное распределение флуктуаций плотности заряда, связанных с ленгмюровскими колебаниями.

Замечая, что для процесса  $l \rightarrow t$  выполняется неравенство  $k' \ll k$  и интегрируя (12.5.3.15) по частоте  $\omega$ , получим

$$Q(\mathbf{k}') = 16\zeta \frac{Ze^2 \omega_{pe}}{m_e c^2 k'^2} \sqrt{\frac{m_0}{m_1}} \int k \sin^2 \vartheta \left\{ T_L(k, \cos \Theta) \left[ \frac{\partial(k - k_1)}{\Psi - \cos \Theta} + \frac{\partial(k - k_2)}{\Psi + \cos \Theta} \right] + T_L(k, -\cos \Theta) \left[ \frac{\partial(k - \bar{k}_1)}{\Psi + \cos \Theta} + \frac{\partial(k - \bar{k}_2)}{\Psi - \cos \Theta} \right] \right\} d^3k, \quad (12.5.3.16)$$

где  $T_L$  — эффективная температура ленгмюровских волн,

$$k_{1,2} = \frac{c^2 k'^2}{2\omega_{pe} u (\cos \Theta \mp \alpha)},$$

величины  $\bar{k}_{1,2}$  получаются из величин  $k_{1,2}$  с помощью замены  $\Theta$  на  $\pi - \Theta$  ( $\Theta$  — по-прежнему угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{E}_0$ ) и  $\zeta$  определяется формулой (12.5.1.1').

При  $|E_c - E_0| \ll E_c$  выражение (12.5.3.16) принимает вид

$$Q(\mathbf{k}') = 32\pi\zeta \frac{Ze^2\omega_{pe}k_0^3}{m_e c^2 k'^3} \sqrt{\frac{m_0}{m_i}} T_L(k, 1) \sin^2 \Theta' \ln(\Psi - 1), \quad (12.5.3.17)$$

где  $\Theta'$  — угол между  $\mathbf{k}'$  и  $\mathbf{E}_0$  и  $k_0 = c^2 k'^2 (2\omega_{pe} u)^{-1} |1 - \alpha|^{-1}$ . Мы видим, что при  $E_0 \rightarrow E_c$  интенсивность спонтанного свечения резко возрастает, обращаясь (в рамках линейной теории) в бесконечность.

Аналогичным образом можно рассмотреть процессы трансформации волн и рассеяния продольных волн в частично ионизованной плазме, находящейся не только во внешнем электрическом поле, но и во внешнем магнитном поле [20]. Не приводя соответствующих выражений, заметим, что в этом случае появляется критическая опалесценция — коэффициенты рассеяния и трансформации резко возрастают при приближении внешнего электрического поля к его критическому значению  $E'_c$ . Существенно, что в очень сильном магнитном поле ( $qv_s \ll \omega_{Bi}$ ) критическая опалесценция проявляется значительно интенсивнее, чем в слабом поле. А именно, если  $E_0 \rightarrow E'_c$ , то полные сечения процессов  $l \rightarrow l$  и  $t \rightarrow l$  обращаются в бесконечность по закону  $(E'_c - E_0)^{-1}$  (а не по закону  $\ln |1 - E_0/E'_c|$ , как в отсутствие магнитного поля или в слабом поле); сечение же процесса  $l \rightarrow t$  обращается в бесконечность при всех значениях  $\Theta < 1/2\pi$  (для  $\alpha < 1$ ) или  $\Theta > 1/2\pi$  (для  $\alpha > 1$ ), а не только при  $\Theta = \pi$  или  $\Theta = 0$ , как в отсутствие магнитного поля или в случае слабого поля ( $\Theta$  — по-прежнему угол между средней направленной скоростью электронов  $\mathbf{u}$  и волновым вектором падающей волны).

## § 12.6. Рассеяние и трансформация волн в турбулентной плазме

### 12.6.1. Трансформация продольных волн в поперечные.

Интенсивность процессов рассеяния и трансформации электромагнитных волн в плазме определяется, как мы видели, уровнем флуктуаций в ней. Поэтому в турбулентной плазме, в которой энергия случайных волн значительно превосходит тепловой уровень, интенсивность рассеянного (или трансформированного) излучения должна оказаться значительно выше, чем в случае спокойной плазмы.

Детальные черты взаимодействия волн с плазмой, в частности спектральное и угловое распределение рассеянного (или трансформированного) излучения, определяются характером спектрального и углового распределения флуктуаций в плазме. Это может в принципе позволить восстановить спектр турбулентности по известным сечениям трансформации и рассеяния волн в турбулентной плазме.

Переходя к изучению процессов рассеяния и трансформации электромагнитных волн в турбулентной плазме, рассмотрим прежде всего трансформацию ленгмюровской волны в поперечную в результате взаимодействия с турбулентными звуковыми волнами.

Подставим для этого в (12.5.3) выражение для спектрального распределения флуктуаций плотности электронов на ионно-звуковой волне

$$\langle n_e^2 \rangle_{\omega_0} = n_0^2 e^2 T_e^{-2} (2\pi)^4 \{ I_s(\mathbf{q}) \delta(\omega - v_s q) + I_s(-\mathbf{q}) \delta(\omega + v_s q) \}, \quad (12.6.1.1)$$

где  $I_s(\mathbf{q})$  — введенная в гл. 10 функция, характеризующая распределение ионно-звуковых флуктуаций электрического потенциала. В результате получим

$$d\Sigma_{l \rightarrow t} = \frac{\pi e^2 \omega_{pe}}{6a_e^2 k T_e^2} \sin^2 \vartheta \left\{ I_s(-\mathbf{k}) \delta\left(\frac{c^2 k'^2}{2\omega_{pe}} - \frac{3}{2}\omega_{pe} a_e^2 k^2 - \mathbf{k}\mathbf{u} - kv_s\right) + \right. \\ \left. + I_s(\mathbf{k}) \delta\left(\frac{c^2 k'^2}{2\omega_{pe}} - \frac{3}{2}\omega_{pe} a_e^2 k^2 - \mathbf{k}\mathbf{u} + kv_s\right) \right\} d^3 k'; \quad (12.6.1.2)$$

при выводе этой формулы предполагалось для определенности, что волновой вектор ленгмюровской волны не слишком мал ( $a_e^2 k^2 \gg T_e^2 (m_e m_1 c^4)^{-1}$ ).

В случае плазмы с направленным движением электронов функция  $I_s(\mathbf{q})$  существенно зависит от угла  $\chi$  между волновым вектором  $\mathbf{q}$  и скоростью электронного потока  $u$ .

В области устойчивости ( $\cos \chi < v_s/u$ ) эта функция определяется формулой линейной теории флуктуаций, которую легко получить из соотношений (11.5.3.14), (11.5.3.15); она имеет вид

$$I_s(\mathbf{q}) = \frac{a_e^2 T_e}{(2\pi)^2} (1 - u \cos \chi / v_s)^{-1}. \quad (12.6.1.3)$$

Вблизи границы области устойчивости, когда  $\cos \chi \rightarrow v_s/u$ , величина  $I_s(\mathbf{q})$  резко возрастает.

Наибольший интерес представляет трансформация ленгмюровских волн, для которых угол  $\Theta$  между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{u}$  удовлетворяют условию

$$\cos^2 \Theta \geq (v_s/u)^2. \quad (12.6.1.4)$$

Это неравенство представляет собой условие турбулентности участвующей в трансформации звуковой волны (т. е. условие неустойчивости волны в рамках линейной теории).

Согласно формуле (12.6.1.2), возникающие в результате трансформации поперечные волны имеют волновые числа  $k'_+$  или  $k'_-$ , определяемые формулами

$$k'_\pm = 3k^2 \frac{T_e}{m_e c^2} \left\{ 1 + \frac{2}{3} \sqrt{\frac{m_e}{m_i}} (a_0 k)^{-1} \left( \pm 1 - \frac{u}{v_s} \cos \Theta \right) \right\}. \quad (12.6.1.5)$$

Интегрируя выражение (12.6.1.2) по  $k'$ , получим для интегрального коэффициента трансформации выражение

$$\Sigma_{l \rightarrow t} = \left( \frac{2\pi}{3} \right)^2 \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{a_0^2 k T_e^2 c^2} \{ k'_+ I_s(-\mathbf{k}) + k'_- I_s(\mathbf{k}) \}. \quad (12.6.1.6)$$

Коэффициент трансформации, отнесенный к единичному телесному углу, связан с функцией  $\Sigma_{l \rightarrow t}$  соотношением

$$\frac{d\Sigma_{l \rightarrow t}}{d\sigma'} = \frac{3}{8\pi} \Sigma_{l \rightarrow t} \sin^2 \vartheta. \quad (12.6.1.7)$$

Проследим, как меняется коэффициент трансформации при изменении угла  $\Theta$  между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{u}$ . Если условие (12.6.1.4) не выполняется, то, подставляя выражение (12.6.1.3) в формулу (12.6.1.6), получим

$$\Sigma_{l \rightarrow t} = \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{9k T_e c^2} \left\{ \frac{k'_+}{1 + u \cos \Theta / v_s} + \frac{k'_-}{1 - u \cos \Theta / v_s} \right\}. \quad (12.6.1.8)$$

(Если  $a_0 k < (2m_e/3m_i)^{1/2} (1 - u \cos \Theta / v_s)$ , то  $k'_- < 0$  и второе слагаемое в выражении (12.6.1.8) следует опускать.)

При приближении вектора  $\mathbf{k}$  к поверхности критического конуса, определяемой уравнением (12.6.1.4), величина  $\Sigma_{l \rightarrow t}$  резко возрастает.

Если вектор  $\mathbf{k}$  лежит внутри этого конуса, то соотношение (12.6.1.6) принимает вид

$$\Sigma_{l \rightarrow t}(\mathbf{k}) = \left( \frac{2\pi}{3} \right)^2 \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{a_0^2 k T_e^2 c^2} k'_\pm I_s(\mp \mathbf{k}), \quad (12.6.1.9)$$

где верхний (нижний) знак соответствует случаю  $\cos \Theta < 0$  ( $\cos \Theta > 0$ ).

При выводе последней формулы мы пренебрегли вкладом нетурбулентных звуковых волн. Разумеется, если  $a_0 k < (2m_e/3m_i)^{1/2} (-1 + |u| \cos \Theta / v_s)$ , то  $k'_+ < 0$ , и поэтому выражение (12.6.1.9) при  $\cos \Theta < 0$  обращается в нуль; в этом случае функция  $\Sigma_{l \rightarrow t}$  определяется вторым слагаемым в (12.6.1.8) и имеет тот же порядок величины, что и в нетурбулентной области.

Мы видим, что величина  $\Sigma_{l \rightarrow t}$  как функция  $k$  (если отвлечься от множителя  $k_{\pm}'$ ) пропорциональна  $I_s(\mp k)$ ; поэтому измерение этой величины позволило бы непосредственно восстановить спектр турбулентности.

Особенно удобным для восстановления спектра турбулентности является исследование распределения поперечного излучения, возникающего при трансформации не слишком длинноволновых ленгмюровских колебаний ( $a_e^2 k^2 \gg (m_e/m_i)(1-v_s/u)^2$ ). Тогда функция  $I_s(k)$  характеризуется той же угловой зависимостью, что и функция  $\Sigma_{l \rightarrow t}(k)$ , и отличается от последней лишь множителем, пропорциональным длине волны:

$$I_s(k) = \left(\frac{3}{2\pi}\right)^2 \frac{a_e^2 T_e^2 c^2}{e^2 \omega_{pe}^3} \sqrt{\frac{m_e c^2}{3T_e}} \Sigma_{l \rightarrow t}(\mp k), \quad (12.6.1.10)$$

где верхний (нижний) знак соответствует случаю  $\cos \Theta < 0$  ( $\cos \Theta > 0$ ).

Рассмотрим несколько подробнее трансформацию продольных волн в поперечные, когда основным механизмом, приводящим к установлению стационарной ионно-звуковой турбулентности, является нелинейное затухание ионного звука [22]. В этом случае функция  $I_s(k)$  определяется формулами, приведенными в § 10.3.

Чтобы оценить по порядку величины коэффициент трансформации ленгмюровской волны в поперечную при взаимодействии с турбулентными ионно-звуковыми волнами, подставим в соотношение (12.6.1.6) выражение (10.3.2.7); получим

$$\Sigma_{l \rightarrow t} \sim \frac{\omega_{pe}^2 k_{\pm}'}{c^2 a_e^2 k^4} \left(\frac{m_e T_e}{m_i T_i \omega_{pe} \tau_e}\right)^{1/2} f(a_e k), \quad (12.6.1.11)$$

где  $f(a_e k)$  — функция, меняющаяся при изменении  $k$  медленнее, чем степенная функция.

Мы видим, что если волновой вектор падающей продольной волны лежит внутри критического конуса (12.6.1.4), то мощность поперечного излучения значительно превосходит аналогичную величину для случая нетурбулентной плазмы; их отношение по порядку величины равно

$$\mathcal{R} = \frac{T_e}{e^2 a_e^2 k^3} \left(\frac{m_e T_e}{m_i T_i \omega_{pe} \tau_e}\right)^{1/2}. \quad (12.6.1.12)$$

Коэффициент трансформации возрастает с уменьшением волнового вектора падающей волны как  $k_{\pm}/k^3$ .

Трансформация продольных волн в поперечные представляет интерес еще и как один из возможных механизмов утечки энергии из плазмы. В самом деле, в плазме всегда присутствуют случайные ленгмюровские волны, амплитуда которых определяется температурой электронов. Взаимодействуя с турбулентными

звуковыми волнами, случайные ленгмюровские волны могут трансформироваться в поперечные, которые затем покидают плазму. Интенсивность такого спонтанного свечения легко определить, если подставить (12.6.1.2) в (12.5.3.15) и выполнить интегрирование,

полагая, что  $\int \langle \mathbf{E}^2 \rangle_{k\omega} d\omega \sim T_e$ . В результате получим

$$\mathcal{J} \sim V a_e^{-3} \omega_{pe} T_e \left( \frac{T_e}{m_e c^2} \right)^{1/2} \left( \frac{m_e T_e}{m_1 T_1 \omega_{pe} \tau_e} \right)^{1/2}. \quad (12.6.1.13)$$

Эта величина превосходит мощность, уносимую поперечными волнами в отсутствие турбулентности, в  $\mathfrak{R}_0$  раз, где

$$\mathfrak{R}_0 = \frac{T_e a_e}{e^2} \left( \frac{m_e T_e}{m_1 T_1 \omega_{pe} \tau_e} \right)^{1/2}. \quad (12.6.1.14)$$

**12.6.2. Рассеяние электромагнитных волн на турбулентных ионно-звуковых колебаниях.** Рассмотрим теперь рассеяние поперечных электромагнитных волн на турбулентных ионно-звуковых колебаниях.

Коэффициент рассеяния  $d\Sigma$ , представляющий собой отношение интенсивности рассеянной волны к плотности потока энергии падающей волны, выражается через спектральное распределение флуктуаций плотности электронов с помощью общего соотношения (12.1.2.7). В звуковой области (средние частоты и большие длины волн,  $qv_i \ll \omega \ll qv_e$ ,  $a_e q \ll 1$ ) это спектральное распределение связано с функцией  $I_s(\mathbf{q})$  соотношением (12.6.1.1). Подставляя его в формулу (12.1.2.7) и учитывая, что относительное изменение частоты при рассеянии мало ( $\Delta\omega \ll \omega$ ), получим

$$d\Sigma = \pi^2 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 n_0 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{a_e^2 T_e} \{ I_s(\mathbf{q}) \delta(\Delta\omega - 2v_s k \sin \frac{1}{2} \vartheta) + \\ + I_s(-\mathbf{q}) \delta(\Delta\omega + 2v_s k \sin \frac{1}{2} \vartheta) \} d\omega' d\omega', \quad (12.6.2.1)$$

где  $n_0$  — невозмущенная плотность электронов,  $\vartheta$  — угол рассеяния (угол между векторами  $\mathbf{k}$  и  $\mathbf{k}'$ ),  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  и  $\Delta\omega = \omega' - \omega$ . Длина вектора  $\mathbf{q}$  и угол  $\chi$  между этим вектором и направленной скоростью электронов  $\mathbf{u}$  определяются выражениями

$$q = 2k \sin \frac{1}{2} \vartheta, \quad \cos \chi = \frac{\cos \Theta' - \cos \Theta}{2 \sin \frac{1}{2} \vartheta}, \quad (12.6.2.2)$$

где  $\Theta$  ( $\Theta'$ ) — угол между векторами  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}'$ ) и  $\mathbf{u}$ .

Величина  $d\Sigma$  по-разному зависит от волновых векторов падающей и рассеянной волн и имеет совершенно различный порядок величины при выполнении или невыполнении неравенства  $|\mathbf{ku} - \mathbf{k}'\mathbf{u}| \geq |\mathbf{k} - \mathbf{k}'| v_s$ , представляющего собой условие турбулентности звуковой волны, участвующей в рассеянии (т. е. условие неустойчивости этой волны в линейной теории). Вводя

угол  $\varphi$  между плоскостями  $(\mathbf{k}, \mathbf{u})$  и  $(\mathbf{k}', \mathbf{u})$ , удобно переписать это неравенство в виде

$$4 \sin^2 \frac{1}{2} \varphi \leq (\sin \Theta \sin \Theta')^{-1} \{ (u^2/v_s^2 - 1) (\cos \Theta - \cos \Theta')^2 - (\sin \Theta - \sin \Theta')^2 \}. \quad (12.6.2.3)$$

Интегрируя выражение (12.6.2.1) по  $\omega'$ , получим коэффициент рассеяния, отнесенный к единичному телесному углу,

$$\frac{d\Sigma}{do'} = \pi^2 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 n_0 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{a_s^2 T_e} \{ I_s(\mathbf{q}) + I_s(-\mathbf{q}) \}. \quad (12.6.2.4)$$

Проследим, как меняется величина  $d\Sigma/do'$  в зависимости от направления вектора  $\mathbf{k}'$ . При достаточно больших углах  $\varphi$ , когда условие (12.6.2.3) не выполняется, подставляя в соотношение (12.6.2.4) выражение (12.6.1.3), получим известную из линейной теории формулу для коэффициента рассеяния (ср. (12.1.4.2))

$$\frac{d\Sigma}{do'} = \frac{1}{2} n_0 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \left\{ 1 - \frac{u^2 (\cos \Theta - \cos \Theta')^2}{(2v_s \sin \frac{1}{2} \vartheta)^2} \right\}^{-1}. \quad (12.6.2.5)$$

При приближении вектора  $\mathbf{k}'$  к поверхности критического конуса, определяемой уравнением (12.6.2.3), величина  $d\Sigma/do'$  резко возрастает.

Если вектор  $\mathbf{k}'$  лежит внутри критического конуса (12.6.2.3), то соотношение (12.6.2.4) принимает вид

$$\frac{d\Sigma}{do'} = \pi^2 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 n_0 \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{a_s^2 T_e} I(\pm \mathbf{q}), \quad (12.6.2.6)$$

где верхний (нижний) знак соответствует случаю  $\Theta' < \Theta$  ( $\Theta' > \Theta$ ) и величины  $q$ ,  $\chi$  определяются формулами (12.6.2.2).

Соотношения (12.6.2.3), (12.6.2.6) значительно упрощаются в случае турбулентной плазмы с малой надкритичностью, т. е. при выполнении условия  $1 - v_s/u \ll 1$ . Для интенсивного взаимодействия в такой плазме электромагнитной волны с турбулентными флуктуациями необходимо, чтобы угол  $\varphi$  был мал, а угол  $\Theta'$  близок к  $\pi - \Theta$ . Условие (12.6.2.3) принимает в этом случае вид

$$(\Theta + \Theta' - \pi)^2 + \varphi^2 \operatorname{tg}^2 \Theta \leq 8(1 - v_s/u), \quad (12.6.2.7)$$

и отнесенный к единичному телесному углу коэффициент рассеяния определяется формулой (12.6.2.6), в которой следует произвести подстановки

$$\begin{aligned} \cos^2 \vartheta &= \cos^2 2\Theta, \quad q = 2k |\cos \Theta|, \\ \cos \chi &= -\operatorname{sgn} \cos \Theta \{ 1 - \frac{1}{8} [(\Theta + \Theta' - \pi)^2 + \varphi^2 \operatorname{tg}^2 \Theta] \}. \end{aligned} \quad (12.6.2.8)$$

Соотношения (12.6.2.2), (12.6.2.6) позволяют в принципе найти функцию  $I_s(\mathbf{q})$ , если известна функция  $d\Sigma/do'$ , характеризую-

шая распределение рассеянного излучения. В частности, при  $\varphi=0$  и  $\Theta > \Theta'$  имеем

$$I_s(\mathbf{q}) = \frac{a^2 T_e}{\pi^2 n_0} \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^{-2} \frac{d\Sigma/d\omega'}{1 + \cos^2(\Theta - \Theta')}, \quad (12.6.2.9)$$

где вместо  $k$ ,  $\Theta'$  следует подставить функции  $k(\mathbf{q})$ ,  $\Theta'(\mathbf{q})$ , определяемые из соотношений

$$\sin^{1/2}(\Theta + \Theta') = \cos \chi, \quad \sin^{1/2}|\Theta - \Theta'| = q/2k.$$

Таким образом, зависимость величины  $d\Sigma/d\omega'$  от частоты (при фиксированном  $\Theta$ ) непосредственно определяет зависимость  $I_s(\mathbf{q})$  от  $q$ ; угловая зависимость функции  $I_s(\mathbf{q})$  легко восстанавливается по угловой зависимости функции  $d\Sigma/d\omega'$ .

Заметим, что изменение частоты при рассеянии однозначно определяется частотой падающей волны и углом рассеяния, а именно

$$|\Delta\omega| = 2\omega \sin^{1/2} \vartheta_k (v_s/c).$$

Поэтому, если измерена величина  $\Delta\omega$ , то легко рассчитать скорость ионного звука и, следовательно, температуру электронов.

Остановимся несколько подробнее на рассеянии поперечных электромагнитных волн в том случае, когда основным механизмом, приводящим к установлению стационарной ионно-звуковой турбулентности, является нелинейное затухание ионного звука [22].

Чтобы оценить по порядку величины сечение рассеяния электромагнитных волн на турбулентных ионно-звуковых колебаниях, подставим в соотношение (12.6.2.6) выражение (10.3.2.7); получим

$$\frac{d\Sigma}{d\omega'} = n_0^2 \left( \frac{e^2}{m_e c^2} \right)^2 k^{-3} f(a_e k) \left( \frac{m_e T_e}{m_i T_i \omega_{pe}^2 \tau_e} \right)^{1/2}. \quad (12.6.2.10)$$

Согласно этой формуле, если волновой вектор рассеянной волны  $\mathbf{k}'$  лежит внутри критического конуса (12.6.2.3), то сечение рассеяния превосходит аналогичную величину для случая нетурбулентной плазмы по порядку величины в  $\mathfrak{R}$  раз, где  $\mathfrak{R}$  определяется формулой (12.6.1.12).

Сравнивая соотношения (12.6.2.5) и (12.6.2.10), мы видим, что поток энергии, связанный с рассеянными волнами, почти полностью сосредоточен внутри критического конуса.

Согласно выражению (12.6.2.10), если вектор  $\mathbf{k}'$  лежит внутри критического конуса, то величина  $d\Sigma/d\omega'$  пропорциональна  $\omega^{-3}$  ( $\omega$  — частота падающей волны); поэтому интегральное сечение рассеяния электромагнитных волн в турбулентной плазме также пропорционально  $\omega^{-3}$ .

Заметим, что в отсутствие турбулентности (а также в турбулентной плазме, если вектор  $\mathbf{k}'$  лежит вне критического конуса)

сечение рассеяния поперечных волн на ионно-звуковых колебаниях не зависит от частоты падающей волны.

**12.6.3. Рассеяние электромагнитных волн на турбулентных высокочастотных колебаниях.** Рассмотрим теперь рассеяние поперечных электромагнитных волн на турбулентных ленгмюровских колебаниях.

Интенсивность турбулентных ленгмюровских колебаний будем, как и в гл. 10, характеризовать функцией  $I_l(\mathbf{q})$ , связанной со спектральным распределением флуктуаций электростатического потенциала соотношением

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} = (2\pi)^4 \{ I_l(\mathbf{q}) \delta(\omega - \omega_L(\mathbf{q})) + I_l(-\mathbf{q}) \delta(\omega + \omega_L(\mathbf{q})) \}, \quad (12.6.3.1)$$

где  $\omega_L(\mathbf{q})$  — частота ленгмюровской волны.

Сечение рассеяния электромагнитных волн на турбулентных ленгмюровских колебаниях легко получить, используя общее выражение (12.1.2.7) и замечая, что спектральные распределения флуктуаций плотности электронов в высокочастотной области и флуктуаций потенциала связаны соотношением

$$e^2 \langle n_e^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} = (4\pi)^{-2} q^4 \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}.$$

Если турбулентность в плазме вызвана электронным потоком, то турбулентными будут ленгмюровские волны, для которых  $\cos \chi > 0$  ( $\chi$  — угол между вектором  $\mathbf{q}$  и направлением электронного потока). Учитывая это, получим для отнесенного к единичному телесному углу сечения рассеяния электромагнитных волн на турбулентных ленгмюровских колебаниях выражение

$$\frac{d\Sigma}{d\sigma'} = \frac{4\pi e^2 k^4}{(m_e c^2)^2} (1 + \cos^2 \vartheta) \sin^4 \frac{1}{2} \vartheta I_l(\pm \mathbf{q}), \quad (12.6.3.2)$$

где верхний (нижний) знак относится к случаю  $\Theta > \Theta'$  ( $\Theta < \Theta'$ );  $\Theta$  ( $\Theta'$ ) — по-прежнему угол между вектором  $\mathbf{k}$  ( $\mathbf{k}'$ ) и направлением электронного потока (мы полагаем для определенности, что  $\omega \gg \omega_{pe}$ ).

Последняя формула вместе с соотношениями (12.6.2.2) для величин  $q$ ,  $\chi$  позволяет в принципе найти функцию  $I_l(\mathbf{q})$ , если известна функция  $d\Sigma/d\sigma'$ , характеризующая распределение рассеянного излучения.

Остановимся еще на специфическом характере рассеяния света на нарастающих флуктуациях в плазме, через которую проходит пучок заряженных частиц со скоростью, превосходящей критическую [23].

Как отмечалось в п. 11.6.4, в корреляционные функции для такой системы времена  $t$ ,  $t'$  входят не только в комбинации  $t - t' \equiv \Delta t$ , но и порознь; при этом корреляторы содержат слагаемые, нарастающие как с увеличением  $\bar{t} = \frac{1}{2}(t + t')$ , так и с увеличением  $|\Delta t|$ . Существенно, что корреляторы быстро осциллируют при

изменении  $\Delta t$  (с частотой порядка  $qu$ ;  $q$  — волновой вектор флуктуации,  $u$  — скорость пучка), а при увеличении  $|\Delta t|$  и  $\bar{t}$  нарастают медленно (с инкрементом  $\gamma \sim \omega_{pe} (n'/n_0)^{1/2}$  в нерезонансном случае и  $\gamma \sim \omega_{pe} (n'/n_0)^{1/3}$  в резонансном случае;  $n'$  — плотность пучка). Поэтому, если каждая из частот  $\omega$ ,  $\omega'$ ,  $\Delta\omega$  велика по сравнению с инкрементом  $\gamma$ , то для сечения рассеяния можно пользоваться по-прежнему формулой (12.1.2.7), пренебрегая неосцилляционной зависимостью коррелятора от  $\Delta t$  (т. е. полагая  $\gamma\Delta t \rightarrow 0$ ) и считая компоненту Фурье коррелятора по переменной  $\Delta t$  медленно меняющейся функцией  $\bar{t}$ .

Таким образом, мы приходим к выводу, что при рассеянии электромагнитных волн в системе плазма — пучок спектр рассеянного излучения содержит, наряду с доплеровски уширенной основной линией и ленгмюровскими сателлитами, еще дополнительную линию, связанную с возможностью распространения в такой плазме колебаний с частотой, близкой к  $qu$ . Эта линия имеет наибольшую интенсивность, если  $|qu| \approx \omega_{pe}$ , и тогда она накладывается на ленгмюровскую линию.

В отличие от рассеяния света в свободной плазме, рассеяние света в системе плазма — пучок носит резко анизотропный характер. Рассеяние будет происходить особенно интенсивно при направлениях вектора  $k'$ , удовлетворяющих условию  $k'u = ku \pm \omega_{pe}$ . Вводя угол  $\Theta$  ( $\Theta'$ ) между векторами  $k$  ( $k'$ ) и  $u$  и полагая для определенности, что  $\omega \gg \omega_{pe}$ , это условие можно представить в виде

$$\cos \Theta' = \cos \Theta \pm c\omega_{pe}/u\omega. \quad (12.6.3.3)$$

Если оно выполнено, то дифференциальное сечение рассеяния имеет вид

$$d\Sigma = \{1 + h(\bar{t})\} d\Sigma^0, \quad (12.6.3.4)$$

где  $d\Sigma^0$  — сечение рассеяния электромагнитных волн на ленгмюровских колебаниях в свободной плазме, определяемое формулой (12.1.3.6), и

$$h(\bar{t}) = 1/9 \{2 \operatorname{ch}(2\gamma\bar{t}) + 4 \operatorname{ch}(\gamma\bar{t}) + 3\}, \quad \gamma = 1/2 \sqrt{3} \omega_{pe} (n'/2n_0)^{1/2}. \quad (12.6.3.5)$$

Слагаемое  $h(\bar{t}) d\Sigma^0$  связано с рассеянием на колебаниях системы плазма — пучок, отсутствующих в случае свободной плазмы. Если  $\bar{t}=0$ , то  $h=1$ ; с течением времени величина  $h(\bar{t})$  увеличивается.

Увеличение сечения рассеяния происходит до тех пор, пока нарастающие флуктуации в плазме не достигнут насыщения, определяемого нелинейными эффектами.

## § 12.7. Эхо в плазме

**12.7.1. Незатухающие колебания функции распределения и эффекты эха в плазме.** В предыдущих параграфах мы изучили различные процессы рассеяния и трансформации волн в плазме, обусловленные нелинейным взаимодействием волн. Теперь мы рассмотрим еще один эффект, обусловленный нелинейным взаимодействием волн, — так называемое *плазменное эхо*.

Напомним предварительно, что в плазме, даже в отсутствие столкновений, колебания макроскопических величин экспоненциально затухают со временем, и вместе с тем отклонения функций распределения от равновесных значений могут испытывать незатухающие колебания. Существование таких незатухающих колебаний функций распределения обусловлено тем, что под действием одного только самосогласованного поля без парных столкновений в системе не может установиться равновесие, поскольку самосогласованное поле не изменяет энтропию системы. Наличие незатухающих колебаний функций распределения и приводит к возможности возникновения в плазме эховых эффектов [24, 25].

Механизм возникновения эха в плазме качественно легко объяснить. Для простоты вначале ограничимся рассмотрением одномерного случая. Пусть в момент времени  $t=0$  в плазме возбуждаются колебания электрического поля вида  $\exp(ik_1x)$ . Эти колебания будут экспоненциально затухать со временем (затухание Ландау), но они приведут к возникновению незатухающих колебаний функции распределения электронов плазмы вида

$$f_1^{(1)} \sim f_1(v) \exp[it(k_1x - k_1vt)]. \quad (12.7.1.1)$$

По прошествии достаточно большого промежутка времени колебания функции распределения уже не будут сопровождаться колебаниями макроскопических величин, так как интегрирование отклонения функции распределения по скоростям (12.7.1.1) от равновесного в силу быстрогопеременного характера множителя  $\exp(-ik_1vt)$  даст нуль. Поэтому по прошествии времени  $t$ , значительно большего, чем  $\gamma^{-1}$  ( $\gamma$  — коэффициент затухания Ландау соответствующего колебания), в плазме практически исчезнет электрическое поле, обусловленное начальным возмущением, хотя «память» о нем сохранится в виде незатухающих колебаний функции распределения.

Если теперь в момент времени  $\tau$  ( $\tau \gg \gamma^{-1}$ ) в плазме вторично возбудить колебания электрического поля вида  $\exp(ik_2x)$ , то они приведут к возникновению незатухающих колебаний функции распределения вида

$$f_2^{(1)} \sim f_2(v) \exp\{t[k_2x - k_2v(t - \tau)]\}. \quad (12.7.1.2)$$

Если пренебречь нелинейными эффектами, то эти колебания должны были бы существовать независимо от возбужденных ранее колебаний (12.7.1.1), и при  $t - \tau \gg \gamma^{-1}$  их макроскопические проявления отсутствовали бы. Однако учет нелинейного взаимодействия волн приводит к возникновению эховых эффектов. Действительно, вследствие нелинейности кинетического уравнения вторичное возмущение приведет не только к возникновению колебаний функций распределения (12.7.1.2), но и к появлению колебаний этой функции на комбинационных частотах

$$f^{(2)} \sim f_1(v) f_2(v) \exp [i(k_1 + k_2)x - i(k_1 + k_2)v\tau + ik_2v\tau]. \quad (12.7.1.3)$$

Если  $k_1 < 0$ ,  $|k_1| < k_2$  и  $t = \frac{k_2}{k_2 - |k_1|} \tau$ , то экспонента в последнем соотношении не будет зависеть от  $v$ , и интеграл по скоростям от (12.7.1.3) будет отличным от нуля. Это означает, что в момент времени  $t = \frac{k_2}{k_2 - |k_1|} \tau$  в плазме вновь возникнут макроскопические колебания — колебания электрического поля. Эти колебания и представляют собой эхо.

Для проявления эховых колебаний необходимо, очевидно, чтобы промежуток времени  $t - \tau$  был значительно больше обратного затухания Ландау  $\gamma^{-1}$ , т. е. чтобы

$$\frac{k_2}{k_2 - |k_1|} \tau - \tau \gg \gamma^{-1}. \quad (12.7.1.4)$$

Это условие выполняется, если величина  $\frac{|k_1|}{k_2 - |k_1|}$  порядка единицы.

Мы видим, что плазменное эхо представляет собой существенно нелинейный эффект. Рассмотренный пример соответствовал учету нелинейностей второго порядка. В принципе, однако, в плазме возможны эховые эффекты и более высоких порядков.

Помимо временных, возможны также пространственные эховые эффекты. Если колебания электрического поля заданной частоты  $\omega$  непрерывно возбуждаются в определенном месте в плазме, а в другом месте на расстоянии  $l$  от исходного ( $l \gg \gg v_{ph}/\gamma$ ,  $v_{ph}$  — фазовая скорость рассматриваемых колебаний) возбуждаются колебания с другой частотой  $\omega_2$  ( $\omega_2 > \omega_1$ ), то на расстоянии  $\frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} l$  от первого источника возникнут эховые колебания с частотой  $\omega_2 - \omega_1$ . Возможны также пространственные эховые эффекты и более высоких порядков: именно, на расстоянии

$$l_{pq} = \frac{p\omega_2}{\omega_{pq}} l \quad (12.7.1.5)$$

от первого источника возникнут эховые колебания с комбинационной частотой

$$\omega_{pq} = p\omega_2 - q\omega_1 > 0, \quad (12.7.1.6)$$

где  $p$  и  $q$  — некоторые целые числа.

**12.7.2. Эховые колебания продольного поля.** Перейдем теперь к количественному рассмотрению временных эховых эффектов в плазме [25, 26]. Ограничиваясь рассмотрением только продольных колебаний, будем исходить из нелинейных кинетических уравнений для электронной и ионной функций распределения и уравнения для самосогласованного электрического поля

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{r}} + \frac{e_\alpha}{m_\alpha} \mathbf{E} \frac{\partial F_\alpha}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (12.7.2.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \left\{ \sum_\alpha e_\alpha \int F_\alpha d^3v + \rho^0 \right\}, \quad \alpha = e, i,$$

где  $\rho^0$  — заданная плотность внешних зарядов. Невозмущенное состояние плазмы будем считать однородным и равновесным.

Выберем плотность внешних зарядов  $\rho^0$  в виде

$$\rho^0(\mathbf{r}, t) = \rho_1 \exp(i\mathbf{k}_1 \mathbf{r}) \delta(\omega_0 t) + \rho_2 \exp(i\mathbf{k}_2 \mathbf{r}) \delta[\omega_0(t - \tau)], \quad (12.7.2.2)$$

т. е. будем считать, что внешние возмущения подаются в плазму в моменты времени  $t=0$  и  $t=\tau$  ( $\tau \gg \gamma^{-1}$ ) и что пространственная зависимость возмущений задана в виде плоских волн ( $\omega_0$  — произвольная величина, имеющая размерность частоты).

Применяя к системе (12.7.2.1) преобразование Фурье по координатам и преобразование Лапласа по времени, получим

$$\left. \begin{aligned} (p + ikv) F_{\mathbf{k}p} + \frac{e}{m} \int \frac{dp'}{2\pi i} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} E_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', p-p'} \frac{\partial F_{\mathbf{k}'p'}}{\partial v} = 0, \\ ikE_{\mathbf{k}p} = 4\pi \left\{ \sum e \int F_{\mathbf{k}p} d^3v + \rho_{\mathbf{k}p}^0 \right\}, \end{aligned} \right\} \quad (12.7.2.3)$$

где

$$\rho_{\mathbf{k}p}^0 = \frac{(2\pi)^3}{\omega_0} \{ \rho_1 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1) + \rho_2 \exp(-p\tau) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_2) \}. \quad (12.7.2.4)$$

Считая внешнее возмущение малым, будем решать систему (12.7.2.3) методом последовательных приближений, т. е. будем искать функцию распределения  $F$  и поле  $\mathbf{E}$  в виде

$$\begin{aligned} F &= f_0 + f^{(1)} + f^{(2)} + \dots, \\ \mathbf{E} &= \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} + \dots, \end{aligned}$$

где  $f_0$  — невозмущенная функция, в качестве которой выберем максвелловское распределение, а  $f^{(1)}$  и  $f^{(2)}$  (соответственно  $\mathbf{E}^{(1)}$  и  $\mathbf{E}^{(2)}$ ) — поправки, линейная и квадратичная по внешнему возмущению см. (12.7.2.4).

В линейном приближении находим

$$\mathbf{E}_{\mathbf{k}p}^{(1)} = -4\pi i \frac{k p \mathbf{k}_p}{k^2 \varepsilon(k, ip)}, \quad f_{\mathbf{k}p}^{(1)} = -\frac{e}{m} \mathbf{E}_{\mathbf{k}p}^{(1)} \frac{\partial f_0}{p + ikv}, \quad (12.7.2.5)$$

где  $\varepsilon(k, ip)$  — продольная диэлектрическая проницаемость плазмы. Используя обратное преобразование Лапласа, нетрудно найти временную асимптотику функций (12.7.2.5). Под действием возмущения вида (12.7.2.2) в плазме возникают затухающие колебания электрического поля  $\mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(1)}(t)$  с частотами, равными собственным частотам колебаний плазмы; кроме того, появляются колебания функции распределения  $f_{\mathbf{k}}^{(1)}(t)$  с частотой  $\omega = kv$ .

Учитывая в кинетических уравнениях нелинейные по внешнему возмущению слагаемые, найдем амплитуду поля во втором приближении

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}p}^{(2)} = & -\frac{(4\pi)^2 e^2 \mathbf{k}}{m^2 k^2 \varepsilon(k, ip)} \int d^3v \int_{-i\infty+\sigma'}^{i\infty+\sigma'} \frac{dp'}{2\pi i} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3} \times \\ & \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', p-p'} \rho_{\mathbf{k}'p'} \mathbf{k}' \frac{\partial f_0}{\partial v}}{k'^2 (\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 (p + ikv)^2 (p' + ik'v) \varepsilon(k', ip') \varepsilon(|\mathbf{k} - \mathbf{k}'|, i(p - p'))} \end{aligned} \quad (12.7.2.6)$$

(для простоты мы здесь и далее считаем плазму однокомпонентной). Так как плазменное эхо обуславливается интерференцией между первым и вторым возмущениями, то в произведении компонент плотности внешних зарядов следует сохранить только перекрестные члены, т. е.

$$\begin{aligned} \rho_{\mathbf{k}-\mathbf{k}', p-p'} \rho_{\mathbf{k}'p'} \rightarrow & \frac{(2\pi)^6}{\omega_0^2} \rho_1 \rho_2 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \{ \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_2) \exp(-p'\tau) + \\ & + \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}_1) \exp[-(p - p')\tau] \}. \end{aligned} \quad (12.7.2.7)$$

Согласно последнему выражению волновой вектор квадратичного сигнала определяется суммой волновых векторов последовательных возмущений

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (12.7.2.8)$$

Осуществляя обратное преобразование Лапласа, найдем с помощью (12.7.2.6) и (12.7.2.7)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\mathbf{k}}^{(2)}(t) = & -\frac{8(2\pi)^6 e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k^2 k_1^2 k_2^2} \mathbf{k} \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2) \int d^3v \int_{-i\infty+\sigma}^{i\infty+\sigma} \frac{dp}{2\pi i} \frac{\exp(pt)}{(p + ikv)^2 \varepsilon(k, ip)} \times \\ & \times \int_{-i\infty+\sigma'}^{i\infty+\sigma'} \frac{dp'}{2\pi i} \left\{ \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_1) \mathbf{k}_2 \frac{\partial f_0}{\partial v} \exp(-p'\tau)}{(p' + ik_2v) \varepsilon(k_1, i(p - p')) \varepsilon(k_2, ip')} + \right. \\ & \left. + \frac{(\mathbf{k}\mathbf{k}_2) \mathbf{k}_1 \frac{\partial f_0}{\partial v} \exp[-(p - p')\tau]}{(p' + ik_1v) \varepsilon(k_1, ip') \varepsilon(k_2, i(p - p'))} \right\}, \end{aligned} \quad (12.7.2.9)$$

где  $\sigma > \sigma' > 0$ .

Здесь интегрирование по  $p'$  и  $p$  можно выполнить с помощью теоремы Коши, замыкая контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, выбираемой справа или слева от прямой  $\text{Re } p' = \sigma'$  или  $\text{Re } p = \sigma$  в зависимости от знака множителя при  $p'$  или  $p$  в экспоненте. В интеграле по  $p'$  от первого слагаемого в фигурных скобках (12.7.2.9) полуокружность следует выбрать справа от прямой  $\text{Re } p' = \sigma'$ , и тогда интеграл обращается в нуль. В интеграле по  $p'$  от второго слагаемого полуокружность следует выбрать слева от линии  $\text{Re } p' = \sigma'$ . При этом, если величина  $\tau$  и промежуток времени между возникновением эха и вторым возмущением велики по сравнению с величиной  $\gamma^{-1}$ , то в интеграле по  $p'$  следует учесть вклад только от полюса в точке  $p' = -ik_1 v$ . (Вкладами от полюсов в точках, где диэлектрическая проницаемость обращается в нуль, можно пренебречь в силу условий  $\gamma\tau \gg 1$ .) Выполняя аналогичным образом интегрирование по  $p$  и учитывая только вклад от полюса второго порядка в точке  $p = -ikv$ , найдем

$$\begin{aligned} E_k^{(2)}(t) &= -\frac{8(2\pi)^6 e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k_1^2 k_2^2 k^2} (k_2 k) k \delta(k - k_1 - k_2) \times \\ &\times \int \frac{k_1 \frac{\partial f_0}{\partial v} \exp(-ik_1 v \tau)}{\varepsilon(k_1, k_1 v)} \frac{d}{dp} \left( \frac{\exp[p(t - \tau)]}{\varepsilon(k, ip) \varepsilon(k_2, ip - k_1 v)} \right)_{p=-ikv} d^3v \approx \\ &\approx -\frac{8(2\pi)^6 e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k_1^2 k_2^2 k^2} (k_2 k) k (t - \tau) \delta(k - k_1 - k_2) \times \\ &\times \int \frac{k_1 \frac{\partial f_0}{\partial v} \exp[-i(kvt - k_2 v \tau)]}{\varepsilon(k_1, k_1 v) \varepsilon(k_2, k_2 v) \varepsilon(k, kv)} d^3v. \quad (12.7.2.10) \end{aligned}$$

Экспоненциальный множитель под знаком интеграла в этом выражении можно записать в виде  $\exp[-ikv(t - \tau')]$ , где

$$\tau' = (k_2 v / kv) \tau. \quad (12.7.2.11)$$

В момент времени  $t = \tau'$  этот множитель обращается в единицу, и поле  $E^{(2)}(k, t)$  принимает максимальное значение. Если же  $t$  отличается от  $\tau'$ , то вследствие быстрых осцилляций экспоненциального множителя при интегрировании по скоростям выражение для поля  $E^{(2)}$  обращается в нуль.

Векторы  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k$  связаны соотношением (12.7.2.8). Очевидно, для возникновения эха необходимо, чтобы выполнялось неравенство  $\tau' > \tau$ . Поэтому, если волновой вектор  $k_2$  параллелен вектору  $k_1$ , то, согласно (12.7.2.11),  $\tau' < \tau$  и эхо невозможно. Непосредственный расчет показывает, что эхо может появиться только тогда, когда вектор  $k_2$  направлен противоположно вектору  $k_1$  и когда  $k_2$  по абсолютной величине больше  $k_1$  (в этом случае  $\tau' > \tau$ ). Нетрудно показать, что при наличии эха угол

между векторами  $\mathbf{k}_1$  и  $\mathbf{k}_2$  может отличаться от  $\pi$  только на малую величину порядка  $\sqrt{\omega_{pe}/\tau} (1/kv_e)$ .

**12.7.3. Эхо при антипараллельной ориентации волновых векторов возмущений.** Будем считать, что вектор  $\mathbf{k}_2$  антипараллелен вектору  $\mathbf{k}_1$  и  $k_2 > k_1$ . В этом случае  $k = k_2 - k_1$  и

$$\tau' = \frac{k_2}{k_2 - k_1} \tau. \quad (12.7.3.1)$$

Для упрощения выкладок будем считать, что  $k_1 = 1/2 k_2$  и  $k = k_1$ . Выполняя в (12.7.2.10) интегрирование по составляющим скорости, перпендикулярным вектору  $\mathbf{k}$ , найдем поле  $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ :

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{4(2\pi)^3 e^3 \rho_1 \rho_2}{m^2 \omega_0^2 k^3} (t - \tau) \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v} \exp[-ikv(t - \tau')]}{\varepsilon(k_1, -k_1v) \varepsilon(k_2, k_2v) \varepsilon(k, kv)} d^3v, \\ \mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2. \quad (12.7.3.2)$$

Множители  $\varepsilon^{-1}(k_1, -k_1v)$ ,  $\varepsilon^{-1}(k_2, k_2v)$  и  $\varepsilon^{-1}(k, kv)$  в выражении (12.7.3.2) имеют простой физический смысл. Они описывают влияние диэлектрических свойств плазмы на внешнее возмущение и эховое поле. Если  $a_0 k \ll 1$ , то множитель  $\varepsilon^{-1}(k, kv)$  имеет резкий максимум при скоростях  $v$ , близких к фазовой скорости соответствующих волн в плазме.

Оставшееся интегрирование по составляющей скорости вдоль  $\mathbf{k}$  в (12.7.3.2) можно выполнить, перейдя в комплексную плоскость  $v$  и замкнув контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной либо в верхней, либо в нижней полуплоскости.

Если  $t < \tau'$ , то, замыкая контур интегрирования полуокружностью бесконечно большого радиуса, расположенной в верхней полуплоскости (вклад интеграла по такой полуплоскости равен нулю), находим, что вклад дает единственный полюс (находящийся внутри контура), соответствующий условию  $\varepsilon(k_1, -k_1v) = 0$ :

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{64\pi^3 e^3 \rho_1 \rho_2 \mathbf{k}}{m^2 \omega_0^2 k_1 k_2 k} (t - \tau) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \times \\ \times \sum \frac{\frac{\partial f_0}{\partial v} \Big|_{v=\pm\omega_{pe}/k_1} \exp[(\pm i\omega_{pe} - \gamma_1)(\tau' - t)k/k_1]}{\frac{\partial}{\partial v} \varepsilon(k_1, -k_1v) \Big|_{v=\pm\omega_{pe}/k_1} \varepsilon(k_2, (\pm\omega_{pe} - i\gamma_1)k_2/k_1) \varepsilon(k, (\pm\omega_{pe} - i\gamma_1)k/k_1)} \quad (12.7.3.3)$$

Если  $t > \tau'$ , то контур интегрирования следует дополнить полуокружностью, лежащей в нижней полуплоскости  $v$ . Тогда

вклад дают полюсы, отвечающие условиям  $\varepsilon(k_2, k_2\nu) = 0$  и  $\varepsilon(k, k\nu) = 0$ , и мы находим

$$E^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{64\pi^3 e^3 \rho_1 \rho_2 \mathbf{k}}{m^2 \omega_0^3 k_1 k_2 k} (t - \tau) \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \times$$

$$\times \left\{ \sum_{\varepsilon(k_1, (\mp\omega_{pe} - i\gamma_2) k_1/k_2)} \frac{\left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\pm\omega_{pe}/k_2} \exp[(\pm i\omega_{pe} - \gamma_2)(t - \tau') k/k_2]}{\varepsilon(k_2, k_2\nu) \left. \frac{\partial}{\partial v} \varepsilon(k, (\pm\omega_{pe} - i\gamma_2) k/k_2) \right|_{v=\pm\omega_{pe}/k_2}} + \right.$$

$$\left. + \sum_{\varepsilon(k_1, (\mp\omega_{pe} - i\gamma) k_1/k)} \frac{\left. \frac{\partial f_0}{\partial v} \right|_{v=\pm\omega_{pe}/k} \exp[(\pm i\omega_{pe} - \gamma)(t - \tau')]}{\varepsilon(k_2, (\pm\omega_{pe} - i\gamma) k_2/k) \left. \frac{\partial}{\partial v} \varepsilon(k, k\nu) \right|_{v=\pm\omega_{pe}/k}} \right\}. \quad (12.7.3.4)$$

Следует отметить несимметричный характер эхового сигнала во времени. Нарастание эховых колебаний определяется экспонентой  $\exp[-\gamma_1(\tau' - t)]$ , тогда как затухание определяется слагаемыми с экспонентами  $\exp[-\gamma_2(t - \tau')]$  и  $\exp[-\gamma(t - \tau')]$ , где  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  и  $\gamma$  — коэффициенты затухания Ландау для волны с волновыми векторами  $k_1$ ,  $k_2$  и  $k$ .

Определим форму эхового сигнала в случае, когда все три колебания соответствуют ленгмюровским частотам и  $a_0 k \ll 1$ . Так как  $\gamma \sim \exp(-1/2 a_0^2 k^2)$  и  $k_2 = 2k$ , то  $\gamma_2 \gg \gamma$ . Поэтому вкладом первого слагаемого в (12.7.3.4) можно пренебречь. Используя далее выражение (4.3.4.3) для  $\varepsilon = \varepsilon_l(k, \omega)$ , можно получить следующее выражение для амплитуды эховых колебаний:

$$E^{(2)}(\mathbf{r}, t) = -i \frac{32\pi^2 e \omega_{pe}}{m \omega_0^3 k^2} \tau \rho_1 \rho_2 \mathbf{k} \sin \varphi \exp[i\mathbf{k}\mathbf{r} - \gamma |t - \tau'|] \times$$

$$\times \cos[\omega_{pe}(t - \tau') + \varphi], \quad (12.7.3.5)$$

где фаза  $\varphi$  определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{2k}{k - k_1} \frac{\gamma}{\omega_{pe}}.$$

Аналогичным образом нетрудно найти форму эхового сигнала в неизотермической плазме в случае звуковых колебаний,

$$E^{(2)}(\mathbf{r}, t) = i 8\pi^2 \frac{\omega_{pe}^2 \rho_1 \rho_2 \tau a_0^6 k^6}{m \omega_0^3 \gamma_s} \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r} - \gamma_s |t - \tau'|) \cos[k\nu_s(t - \tau')], \quad (12.7.3.6)$$

где  $\gamma_s$  — декремент затухания звуковых колебаний. Заметим, что в этом случае форма сигнала симметрична во времени.

Приведем в заключение выражения для амплитуд эховых колебаний, когда в результате наложения ленгмюровских колебаний образуются эховые звуковые колебания:

$$E^{(2)}(\mathbf{r}, t) = -i \frac{32\pi^2 e \omega_{pe} \tau \rho_1 \rho_2}{3m\omega_p^2 k^2} \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \times$$

$$\times \begin{cases} \sin \varphi \exp[\gamma_1(t - \tau')] \cos[\omega_{pe}(t - \tau') + \varphi], & t < \tau'; \\ -\left\{ \frac{2}{3} \frac{\gamma_2}{\omega_{pe}} \exp[-\gamma_2(t - \tau')k/k_2] \cos[\omega_{pe}(t - \tau')k/k_2] + \right. & (12.7.3.7) \\ \left. + \frac{3}{4} \frac{k^2 v_s^2}{\gamma_s \omega_{pe}} a_0^4 k^4 \exp[-\gamma_2(t - \tau')] \cos[kv_s(t - \tau')] \right\}, & t > \tau'; \end{cases}$$

а также когда в результате наложения звуковых колебаний на ленгмюровские образуются эховые ленгмюровские колебания:

$$E^{(2)}(\mathbf{r}, t) = -i \frac{32\pi^2 e \omega_{pe} \tau \rho_1 \rho_2}{3m\omega_p^2 k^2} \mathbf{k} \exp(i\mathbf{k}\mathbf{r}) \times$$

$$\times \begin{cases} -\frac{3}{4} \frac{k^2 v_s^2}{\gamma_s \omega_{pe}} a_0^4 k^4 \exp[\gamma_s(t - \tau')] \cos[kv_s(t - \tau')], & t < \tau'; \\ \sin \varphi \exp[-\gamma(t - \tau')] \cos[\omega_{pe}(t - \tau') + \varphi], & t > \tau'. \end{cases} \quad (12.7.3.8)$$

Эховые колебания последних двух типов несимметричны во времени.

Отметим, что учет парных столкновений приводит к затуханию колебаний функции распределения, а поэтому и к ослаблению эффекта эха в плазме.

## § 13.1. Прохождение заряженных частиц через свободную плазму

**13.1.1. Поле заряда в плазме.** Мы уже говорили, что поле пробной заряженной частицы, внесенной в плазму, экранируется благодаря эффекту поляризации (см. § 1.1). Если эта частица движется, то кроме экранировки ее поля возникает еще один эффект — торможение частицы, обусловленное возбуждением движущейся частицей волн в плазме \*).

Перейдем теперь к рассмотрению этих эффектов. Определим прежде всего поле, создаваемое заряженной частицей, движущейся в плазме. Для этого следует воспользоваться системой уравнений Максвелла (1.2.2.5) и учесть добавочные плотность заряда  $\rho_0$  и плотность тока  $\mathbf{j}_0$ , связанные с движущейся частицей. Предполагая скорость частицы  $v$  достаточно большой (она должна быть значительно больше тепловых скоростей частиц плазмы), можно представить  $\rho_0$  и  $\mathbf{j}_0$  в виде

$$\rho_0 = Ze\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad \mathbf{j}_0 = Zev\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t), \quad (13.1.1.1)$$

где  $Ze$  — заряд частицы.

Разлагая выражения для полей и плотности тока в интегралы Фурье и исключая из уравнений магнитное поле, получим следующее уравнение для напряженности электрического поля:

$$\left\{ \mathcal{M}^2 \left( \frac{k_i k_j}{k^2} - \delta_{ij} \right) + \epsilon_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \right\} E_j(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{i\omega} j_{0i}(\mathbf{k}, \omega), \quad (13.1.1.2)$$

где  $\mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega)$  — компонента Фурье плотности тока, связанного с движущимся зарядом,

$$\mathbf{j}_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^3} Zev\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (13.1.1.3)$$

В случае изотропной плазмы с тензором диэлектрической проницаемости, определяемым (4.3.4.2), решение уравнения

\*) Общая теория прохождения заряженных частиц через вещество развита в работах Бора [1], Ферми [2], Гамма и Франка [3]. Исследованию потерь энергии частицы, движущейся через свободную плазму, посвящены работы [4–10].

(13.1.1.2) имеет вид

$$E_i(\mathbf{k}, \omega) = \frac{4\pi}{i\omega} \left\{ \frac{k_i k_j}{k^2} \frac{1}{\varepsilon_l(k, \omega)} + \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \frac{1}{\varepsilon_l(k, \omega) - \omega^2/c^2} \right\} j_{0j}(\mathbf{k}, \omega). \quad (13.1.1.4)$$

Используя обратное преобразование Фурье, получим отсюда следующее выражение для электрического поля точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью в плазме:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{Ze}{2\pi^2 i} \int \left\{ \frac{\mathbf{k}}{k^2 \varepsilon_l(k, \omega)} + \frac{\mathbf{v} - \mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{v})/k^2}{\omega [\varepsilon_l(k, \omega) - k^2 c^2/\omega^2]} \right\} \exp[t(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)] d^3k, \\ \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}. \quad (13.1.1.5)$$

Здесь первое слагаемое описывает потенциальную (продольную) часть поля движущегося заряда, а второе слагаемое соответствует вихревой (поперечной) части поля.

Если частица покоится ( $\mathbf{v}=0$ ), то вихревая часть в (13.1.1.5) отсутствует, и поле является полностью потенциальным. Вводя скалярный потенциал поля

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi,$$

найдем, согласно (13.1.1.5),

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{2\pi^2} \int \frac{\exp(i\mathbf{k}\mathbf{r})}{k^2 \varepsilon_l(k, 0)} d^3k. \quad (13.1.1.6)$$

Подставляя сюда статическое значение продольной компоненты диэлектрической проницаемости плазмы

$$\varepsilon_l(k, 0) = 1 + 1/a_0^2 k^2$$

и выполняя интегрирование, получим окончательно следующее выражение для потенциала поля покоящегося заряда в плазме

$$\varphi(\mathbf{r}) = \frac{Ze}{r} \exp(-r/a_0) \quad (13.1.1.7)$$

(заряд предполагается находящимся в начале системы координат). Эта формула соответствует полученной нами ранее (см. (1.1.1.3)).

**13.1.2. Поляризационные потери энергии при движении заряженной частицы в плазме.** Заряженная частица при прохождении через плазму теряет вследствие взаимодействия с окружающими частицами часть своей энергии \*). Потери энергии частицы

\*) Мы следуем ниже работе [5].

можно, очевидно, рассматривать как работу силы торможения, действующей на частицу со стороны электромагнитного поля, которое создается самой частицей. Изменение энергии частицы за единицу времени равно

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = Zev\mathbf{E}|_{r=vt}, \quad (13.1.2.1)$$

где  $\mathbf{E}$  — поле, создаваемое частицей в месте ее нахождения.

Если частица движется с большой скоростью, то потери ее энергии будут небольшими и скорость частицы будет практически оставаться постоянной. В этих условиях поле  $\mathbf{E}$  определяется формулой (13.1.1.5) и выражение для  $d\mathcal{E}/dt$  приобретает вид

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2e^2}{2\pi^2i} \int \left\{ \frac{\omega}{k^2\varepsilon_l(k, \omega)} + \frac{v^2 - \omega^2/k^2}{\omega[\varepsilon_l(k, \omega) - k^2c^2/\omega^2]} \right\} d^3k, \quad \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}. \quad (13.1.2.2)$$

Интегрирование по  $k$  здесь следует производить до некоторого максимального значения  $k_0$ , при котором еще справедливо используемое нами макроскопическое рассмотрение взаимодействия частицы с плазмой.

Учитывая, что вещественные части  $\varepsilon_l$  и  $\varepsilon_t$  являются четными функциями частоты, а мнимые — нечетными функциями, формулу (13.1.2.2) можно переписать в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2e^2}{2\pi^2} \operatorname{Im} \int \left\{ \frac{\omega}{k^2\varepsilon_l(k, \omega)} + \frac{v^2 - \omega^2/k^2}{\omega[\varepsilon_l(k, \omega) - k^2c^2/\omega^2]} \right\} d^3k, \quad \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}. \quad (13.1.2.3)$$

Первое слагаемое в фигурных скобках учитывает взаимодействие частицы с продольным полем и определяет поляризационные потери энергии частицы, а второе слагаемое — взаимодействие частицы с поперечным полем и в общем случае соответствует потерям энергии, связанным с излучением поперечных волн (черенковское излучение). Так как для изотропной плазмы фазовые скорости поперечных волн больше скорости света, то условие черенковского излучения не выполняется, и второе слагаемое в (13.1.2.3) в этом случае обращается в нуль.

Отметим, что как поляризационные потери энергии (если пренебрегать отдачей частицы), так и потери, связанные с черенковским излучением, не зависят от массы движущейся частицы. В частности, эти потери будут отличны от нуля и для частицы с бесконечно большой массой.

Вычислим поляризационные потери энергии заряженной частицы при ее движении через свободную равновесную плазму.

Замечая, что  $d^3k = 2\pi k_\perp dk_\perp \frac{d\omega}{v}$ , где  $k_\perp$  — компонента  $\mathbf{k}$ , перпенди-

кулярная скорости  $v$ , перепишем выражение для поляризационных потерь в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2 e^2}{\pi v} \operatorname{Im} \int_0^{k_0} dk_{\perp} k_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega}{k_{\perp}^2 + \omega^2/v^2 + (1/a_0^2)[1 - \varphi(z) + i\sqrt{\pi}z \exp(-z^2)]^*}, \quad (13.1.2.4)$$

где  $\varphi(z) = 2z \exp(-z^2) \int_0^z \exp(x^2) dx$ .

Выражение (13.1.2.4) расходится при  $k_0 \rightarrow \infty$ . Это связано с тем, что, описывая плазму макроскопическими диэлектрическими проницаемостями, мы учитываем фактически только дальнейшее взаимодействие и не принимаем во внимание близких столкновений частицы с электронами плазмы. Такие столкновения можно не учитывать, если параметр столкновения, или, как его называют, прицельное расстояние,  $b$  значительно больше  $v/\omega_{pe}$ ; если же  $b < v/\omega_{pe}$ , то главную роль играют столкновения заряженной частицы с отдельными электронами плазмы, и макроскопическое описание взаимодействия частицы с плазмой теряет смысл. Малым  $b$  соответствуют большие  $k_{\perp}$ , и поэтому интегрирование по  $k_{\perp}$  в (13.1.2.4) следует производить, как уже указывалось выше, до некоторого максимального значения  $k_0$ .

Если скорость частицы  $v$  значительно больше средней тепловой скорости электронов плазмы  $v_0$ , то в выражение (13.1.2.4) существенный вклад вносят значения с  $z \gg 1$ . Используя асимптотическое выражение для функции  $\varphi(z)$  при  $z \gg 1$ , представим потери энергии, обусловленные далекими столкновениями, в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{\pi v} \operatorname{Im} \int_0^{k_0} dk_{\perp} k_{\perp} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \frac{\omega}{(k_{\perp}^2 + \omega^2/v^2)(\omega^2 - \omega_{pe}^2 + 2i\gamma\omega)}, \quad (13.1.2.5)$$

где  $\gamma$  — декремент затухания плазменных волн (см. (4.2.2.7)).

Интеграл по  $\omega$  вдоль вещественной оси равен вычету относительно единственного полюса  $\omega = ik_{\perp}v$ , лежащего в верхней полуплоскости; поэтому

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \int_0^{k_0} dk_{\perp} \frac{k_{\perp}}{k_{\perp}^2 + \omega_{pe}^2/v^2}.$$

Предполагая, что  $k_0 v \gg \omega_{pe}$ , находим окончательно следующее выражение для потерь энергии, обусловленных далекими столкновениями:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{4\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v} \ln \frac{k_0 v}{\omega_{pe}}. \quad (13.1.2.6)$$

Для получения полных потерь энергии частицы к этому выражению должны быть добавлены потери энергии частицы при близких столкновениях. Последние следует описывать, вообще говоря, квантовомеханически, и только при очень малой длине де-бройлевской волны частицы возможно классическое описание. Более точно, для этого необходимо, чтобы длина этой волны

$$\lambda = \frac{\hbar}{[mm_0/(m + m_0)]v}$$

( $m$  — масса частицы,  $m_0$  — масса электрона) была значительно меньше эффективного прицельного расстояния  $b$  между пролетающей частицей и частицами плазмы (электронами). Величина  $b$  в классической механике определяется следующим образом:

$$b \sim \frac{Ze^2}{[mm_0/(m + m_0)]v^2}$$

Поэтому критерий применимости классического рассмотрения  $\lambda \ll b$  можно записать в виде

$$v \ll Ze^2/\hbar. \quad (13.1.2.7)$$

Кроме того, мы предполагаем, что скорость пролетающей частицы велика по сравнению со средней тепловой скоростью частиц плазмы ( $v \gg v_0$ ).

Если  $v > Ze^2/\hbar$ , то необходимо квантовомеханическое рассмотрение близких столкновений, к которому мы вернемся позже, а пока займемся случаем, когда выполняется условие (13.1.2.7), т. е. применимо классическое рассмотрение.

Прежде всего свяжем верхний предел  $k_0$  в интеграле, определяющем потери энергии частицы при далеких столкновениях, с соответствующим значением  $b_0$  параметра столкновений. С этой целью определим потери энергии при далеких столкновениях как поток энергии электромагнитного поля, проходящий через цилиндрическую поверхность радиуса  $b_0$ , окружающую траекторию заряда:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{c}{4\pi} \int [EB] ds,$$

где  $ds$  — элемент площади этой цилиндрической поверхности. Учитывая аксиальную симметрию поля, можно переписать это выражение в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{1}{2} b_0 c \int_{-\infty}^{\infty} E_r B dz \quad (13.1.2.8)$$

(частица движется вдоль оси  $z$ ). При  $v \gg v_0$  пространственная дисперсия незначительна. В этом случае черенковское излучение отсутствует, и поэтому потери энергии, определяемые (13.1.2.8),

связаны только с продольной частью электрического поля. Используя (13.1.1.5), можно представить продольную составляющую электрического поля и магнитное поле в виде

$$\left. \begin{aligned} E_s^i &= -\frac{iZe}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\varepsilon(\omega)} K_0\left(\frac{|\omega|}{v} b\right) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega, \\ B &= \frac{Ze}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} k K_1(kb) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega, \\ k &= \frac{|\omega|}{c} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2} \varepsilon(\omega)}. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.2.9)$$

Подставляя эти выражения в (13.1.2.7) и замечая, что в пределе пространственной дисперсией  $\varepsilon(\omega) = 1 - \omega_{pe}^2/\omega^2$ , найдем в результате интегрирования

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^3 b_0}{v \xi} K_0(\omega_{pe} b_0/v) K_1(\omega_{pe} b_0/v). \quad (13.1.2.10)$$

Считая, что  $\omega_{pe} b_0/v \ll 1$  и используя асимптотические выражения для функций Макдональда при малых значениях аргумента  $K_0(x) \approx \ln 2/\gamma x$ ,  $K_1(x) \approx 1/x$ , где  $\gamma$  — константа Эйлера ( $\gamma \approx 1,78$ ), получим

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{4\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v} \ln \frac{2}{\gamma} \frac{v}{\omega_{pe} b_0}. \quad (13.1.2.11)$$

Сравнивая это выражение с (13.1.2.6), мы видим, что

$$k_0 = \frac{2}{\gamma} \frac{1}{b_0} \approx \frac{1,123}{b_0}. \quad (13.1.2.12)$$

Определим теперь потери энергии частицы, обусловленные близкими столкновениями, в классическом случае, т. е. при выполнении условия (13.1.2.7). Если  $n_0$  — плотность электронов плазмы и  $b$  — параметр столкновения, то среднее число столкновений за время  $dt$ , для которых величина  $b$  заключена между  $b$  и  $b+db$ , равно  $2\pi n_0 v b db dt$ . Энергия, теряемая частицей при столкновении с электроном плазмы, равна

$$\Delta\delta = -\frac{2Z^2 e^4}{m_e v^2} \frac{1}{b^2 + \xi^2}, \quad \xi = \frac{Ze^2(m + m_e)}{m m_e v^2}, \quad (13.1.2.13)$$

где  $Ze$  — заряд и  $m$  — масса частицы. Умножая это выражение на  $2\pi n_0 v b db dt$ , найдем потери энергии, обусловленные близкими столкновениями частицы с электронами плазмы,

$$\frac{d\delta}{dt} = -\frac{4\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v} \int_0^{b_0} db \frac{b}{b^2 + \xi^2}, \quad (13.1.2.14)$$

где интегрирование по  $b$  производится от нуля до некоторого значения  $b_0$ , при котором электроны плазмы можно еще считать свободными. Предполагая, что  $b_0 \gg \xi$ , получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{4\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v} \ln \frac{mm_e v^2 b_0}{Ze^2(m+m_e)}. \quad (13.1.2.15)$$

Складывая выражения (13.1.2.11) и (13.1.2.15), найдем суммарные потери энергии движущейся частицы в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{4\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v} \ln \frac{2}{\gamma} \frac{mm_e v^3}{Ze^2(m+m_e)\omega_{pe}}. \quad (13.1.2.16)$$

Эта формула справедлива в классическом случае, т. е. при выполнении неравенства  $v \ll Ze^2/\hbar$ ; кроме того, скорость частицы должна быть значительно больше тепловой скорости электронов плазмы ( $v \gg v_e$ ).

В квантовом случае, когда  $v \geq Ze^2/\hbar$ , верхний предел  $k_0$  в выражении (13.1.2.6) следует связать с максимальной передачей импульса движущейся частицей электрону среды. При достаточно больших передачах электроны можно считать свободными; тогда максимальная передача импульса, согласно (13.1.2.13), равна

$$\hbar k_0 = \frac{2Ze^2}{b_0 v}. \quad (13.1.2.17)$$

Подставляя получаемое отсюда значение  $k_0 = 2Ze^2/\hbar b_0 v$  в выражение (13.1.2.6) и складывая последнее с (13.1.2.15), найдем суммарные потери энергии частицы в квантовом случае ( $v \geq Ze^2/\hbar$ )

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{4\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v} \ln \frac{2mm_e v^2}{(m+m_e)\hbar\omega_{pe}}. \quad (13.1.2.18)$$

Заметим, что это соотношение можно получить непосредственно из общей формулы (13.1.2.3), если воспользоваться квантовомеханическим выражением для диэлектрической проницаемости плазмы  $\epsilon$ , и учесть отдачу частицы.

Формулы (13.1.2.16) и (13.1.2.18) определяют полные потери энергии заряженной частицы только в том случае, если масса ее значительно превосходит массу электрона. При движении легкой частицы (электрона) через плазму существенную роль играет взаимодействие частицы с флуктуационным полем в плазме, которое мы не учитывали при выводе (13.1.2.16) и (13.1.2.18).

**13.1.3. Изменение энергии движущегося заряда, обусловленное флуктуациями поля в плазме.** При выводе формул (13.1.2.16) и (13.1.2.18) мы пренебрегали изменением скорости частицы и не учитывали флуктуаций поля. Теперь мы перейдем к учету этих эффектов, причем начнем с рассмотрения классического случая  $v \ll Ze^2/\hbar$  [11–13].

Будем исходить из следующего выражения для среднего изменения энергии движущейся частицы в единицу времени:

$$\frac{d\epsilon}{dt} = Ze \langle \mathbf{v}(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) \rangle,$$

где  $\mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t)$  — электрическое поле в месте нахождения частицы ( $\mathbf{r}(t)$  — радиус-вектор, определяющий положение частицы в момент времени  $t$ ),  $\mathbf{v}(t)$  — скорость частицы, а угловые скобки обозначают операцию статистического усреднения.

В классическом случае, когда можно пользоваться понятием траектории, уравнение движения частицы имеет вид

$$\dot{\mathbf{v}}(t) = \frac{Ze}{m} \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t), \quad (13.1.3.2)$$

формальное интегрирование которого дает

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(t) &= \mathbf{v}_0 + \frac{Ze}{m} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}(t'), t'), \\ \mathbf{r}(t) &= \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0) + \frac{Ze}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \mathbf{E}(\mathbf{r}(t''), t''), \end{aligned} \right\} \quad (13.1.3.3)$$

где  $\mathbf{r}_0$  и  $\mathbf{v}_0$  — радиус-вектор и скорость частицы в начальный момент времени  $t_0$ .

Выберем отрезок времени  $\Delta t$ , достаточно большой по сравнению с периодом случайных флуктуаций электрического поля в плазме, но малый по сравнению с интервалом времени, в течение которого движение частицы существенным образом изменится. Так как в течение этого промежутка времени траектория частицы мало отличается от прямой, то скорость частицы и действующее на частицу поле в момент времени  $t = t_0 + \Delta t$  приближенно можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}(t) &\approx \mathbf{v}_0 + \frac{Ze}{m} \int_{t_0}^t dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}_0(t'), t'), \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}(t), t) &\approx \mathbf{E}(\mathbf{r}_0(t), t) + \\ &+ \frac{Ze}{m} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' E_j(\mathbf{r}_0(t''), t'') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \mathbf{E}(\mathbf{r}_0(t), t), \end{aligned} \right\} \quad (13.1.3.4)$$

где  $\mathbf{r}_0(t)$  — радиус-вектор частицы при ее равномерном и прямолинейном движении

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0). \quad (13.1.3.5)$$

Подставляя оба выражения в (13.1.3.1), получим следующее выражение для среднего изменения энергии движущейся частицы за единицу времени с точностью до членов, квадратичных по  $e$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & Ze \langle \mathbf{v}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0(t), t) \rangle + \\ & + \frac{Z^2 e^2}{m} \left\langle \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' E_j(\mathbf{r}_0(t''), t'') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} \mathbf{v}_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}_0(t), t) \right\rangle + \\ & + \frac{Z^2 e^2}{m} \left\langle \int_{t_0}^t dt' E(\mathbf{r}_0(t'), t') E(\mathbf{r}_0(t), t) \right\rangle. \end{aligned} \quad (13.1.3.6)$$

Очевидно, что среднее значение флуктуационной части поля равно нулю, и поэтому величина  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  совпадает с напряженностью поля, создаваемого самой частицей в плазме. Таким образом, первое слагаемое в выражении (13.1.3.6) представляет собой поляризационные потери энергии движущейся частицы, которые мы нашли выше (они определяются формулой (13.1.2.3)). Отметим, что первое слагаемое в (13.1.3.6), так же как второе и третье, пропорционально квадрату заряда движущейся частицы, поскольку среднее значение поля пропорционально  $Ze$ .

Второе и третье слагаемые в (13.1.3.6) определяют изменение энергии движущейся частицы, связанное с флуктуациями электрического поля в плазме и с изменением скорости частицы под действием этого поля.

Рассмотрим сперва второе слагаемое, которое определяет динамическое трение частицы, обусловленное наличием пространственно-временных корреляций между флуктуациями электрического поля в плазме. Наличие таких корреляций приводит к дополнительным потерям (помимо поляризационных потерь) энергии движущейся частицы.

Изменяя во втором слагаемом (13.1.3.6) порядок интегрирования по  $dt'$  и  $dt''$ , выполняя интегрирование по  $dt'$  и вводя новую переменную  $\xi = t - t''$ , получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \Big|_{II} = \frac{Z^2 e^2}{m} \int_0^{\Delta t} d\xi \xi \left\langle E_j(\mathbf{r}_0(t - \xi), t - \xi) \frac{\partial}{\partial x_{0j}} v_{0i} E_i(\mathbf{r}_0(t), t) \right\rangle. \quad (13.1.3.7)$$

Так как корреляционные функции для флуктуаций поля экспоненциально малы при больших  $\Delta t$ , то верхний предел в этом интеграле можно считать равным бесконечности ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ). Представляя компоненты поля  $E_i(\mathbf{r}, t)$  в виде пространственно-временных интегралов Фурье, получим следующее выражение для

потерь энергии направленного движения частицы:

$$\left. \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right|_{II} = \frac{Z^2 e^2}{16\pi^3 m} \int \omega \frac{\partial}{\partial \omega} \langle E_l^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} d^3 k, \quad \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_0, \quad (13.1.3.8)$$

где  $E_l$  — продольная составляющая электрического поля в плазме.

Третье слагаемое в (13.1.3.6) определяет среднее изменение энергии частицы, связанное с корреляциями между флуктуационным изменением скорости самой частицы и флуктуационным электрическим полем в плазме. Наличие таких корреляций приводит в среднем к увеличению энергии движущейся частицы. Переходя к компонентам Фурье, нетрудно показать, что

$$\left. \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right|_{III} = \frac{Z^2 e^2}{16\pi^3 m} \int \langle E_l^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega} d^3 k, \quad \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_0. \quad (13.1.3.9)$$

Складывая выражения (13.1.3.8) и (13.1.3.9), получим изменение энергии движущейся частицы, связанное с флуктуациями поля и учитывающее эффект отдачи [11]:

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_f = \frac{Z^2 e^2}{16\pi^3 m} \int \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \langle E_l^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}) d^3 k, \quad \omega = \mathbf{k}\mathbf{v}_0. \quad (13.1.3.10)$$

Для получения полных потерь энергии частицы к последнему соотношению нужно добавить выражение (13.1.2.3) для поляризационных потерь.

В случае изотропной плазмы спектральное распределение флуктуаций продольной составляющей поля  $\langle E_l^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  зависит только от абсолютного значения волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Выполняя в (13.1.3.10) интегрирование по углам, можно привести формулу для флуктуационных потерь энергии к виду

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_f = \frac{Z^2 e^2}{4\pi^2 m v_0^3} \int_0^{k_0 v_0} \omega^2 \langle E_l^2 \rangle_{\omega/v_0, \omega} d\omega, \quad (13.1.3.11)$$

где  $k_0$  — максимальное значение волнового вектора, определяющее область применимости макроскопического рассмотрения.

Так как спектральное распределение флуктуаций поля  $\langle E_l^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}$  положительно, то, согласно (13.1.3.11), и флуктуационное изменение энергии частицы, движущейся в изотропной плазме, положительно, т. е. энергия частицы в этом случае возрастает. При движении заряженной частицы в анизотропной плазме, т. е. в плазме, находящейся в магнитном поле, или в плазме, через которую проходит пучок заряженных частиц, взаимодействие частицы с флуктуационным полем может приводить к уменьшению энергии частицы.

В отличие от поляризационных потерь энергии, которые не зависят от массы движущейся частицы, флуктуационное изменение энергии обратно пропорционально массе движущейся частицы. Поэтому при движении тяжелой частицы, масса которой значительно больше массы электрона, флуктуационные эффекты не существенны. В случае же движения легкой частицы (электрона) флуктуационное изменение энергии может быть того же порядка, что и поляризационные потери.

Вычислим в заключение поляризационные потери и флуктуационное изменение энергии движущейся частицы  $d\mathcal{E}/dt$  в случае равновесной плазмы. Используя формулы (11.2.2.6) и (4.3.4.3) для спектрального распределения флуктуаций поля и для продольной диэлектрической проницаемости и выполняя в (13.1.3.9) и (13.1.3.10) интегрирование по модулю волнового вектора  $k$  от нуля до некоторого максимального значения  $k_0$  (при котором еще справедливо макроскопическое рассмотрение), получим следующие общие формулы:

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p = -\frac{16\sqrt{\pi}n_0Z^2e^4}{m_e v_0} \int_0^{\zeta} dz z^2 \exp(-z^2) L(z, a_e k), \quad (13.1.3.12)$$

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_f = \frac{8\sqrt{\pi}n_0Z^2e^4}{m v_0} \zeta \exp(-\zeta^2) L(\zeta, a_e k_0),$$

где  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{v_e}$  и

$$L(z, a_e k_0) = \ln a_e k_0 - \frac{1}{4} \ln \{ [1 - \varphi(z)]^2 + \pi z^2 \exp(-2z^2) \} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{[1 - \varphi(z)] \exp(z^2)}{z} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 - \varphi(z)}{\sqrt{\pi} z} \exp(z^2) \right\}. \quad (13.1.3.13)$$

(В качестве  $k_0$  можно взять величину, обратную минимальному параметру далеких столкновений,  $k_0 \approx \frac{m m_e v_0^2}{Z e^2 (m + m_e)}$ ).

При достаточно высокой температуре и малой плотности электронов  $a_e k \gg 1$ . Ограничиваясь в (13.1.3.12) учетом первых основных членов ( $\sim \ln a_e k_0$ ), найдем

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p &= -\frac{2\sqrt{2}\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v_e} \frac{\phi(\zeta) - \zeta \phi'(\zeta)}{\zeta} \ln a_e k_0, \\ \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_f &= \frac{4\sqrt{2}\pi n_0 Z^2 e^4}{m v_e} \exp(-\zeta^2) \ln a_e k_0, \quad \zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v_0}{v_e}, \end{aligned} \right\} \quad (13.1.3.14)$$

где  $\phi(\zeta)$  — функция ошибок

$$\phi(\zeta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\zeta} dz \exp(-z^2).$$

Мы видим, что в равновесной плазме отношение  $\frac{(d\mathcal{E}/dt)_f}{(d\mathcal{E}/dt)_p}$  составляет по порядку величины  $m_e/m$ .

В предельных случаях малых и больших скоростей частицы справедливы приближенные выражения

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p &\approx -\frac{4\sqrt{2\pi}n_0Z^2e^4}{3m_e v_e} \frac{v_0^2}{v_e^2} \ln a_e k_0, & v_0 \ll v_e, \\ \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p &\approx -\frac{4\pi n_0 Z^2 e^4}{m_e v_0} \ln a_e k_0, & v_0 \gg v_e. \end{aligned} \right\} \quad (13.1.3.15)$$

На рис. 13.1.1. представлены поляризационные потери, флуктуационное увеличение энергии и полное изменение энергии электрона в единицу времени в зависимости от его скорости.

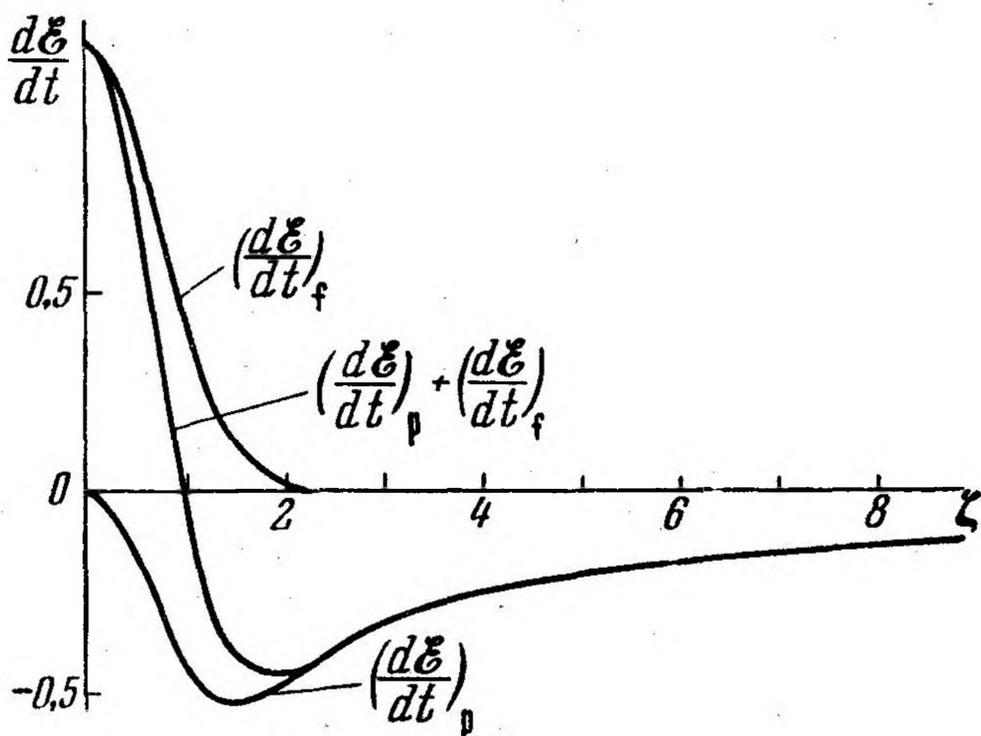


Рис. 13.1.1. Поляризационные потери энергии  $(d\mathcal{E}/dt)_p$ , флуктуационное увеличение энергии  $(d\mathcal{E}/dt)_f$  и полное изменение энергии электрона  $(d\mathcal{E}/dt)$  (в единицах  $(4\pi n_0 Z^2 e^4 / m_e \sqrt{2} v_e) \ln a_e k$ ) в зависимости от  $\zeta = (1/\sqrt{2}) v_0 / v_e$ .

Как мы видим, в случае движения частицы в равновесной плазме со скоростью, значительно превосходящей среднюю тепловую скорость электронов ( $v_0 \gg v_e$ ), влиянием флуктуационного поля можно пренебречь. При этом полное изменение энергии частицы сводится к поляризационным потерям энергии направленного движения. Если же скорость движения заряженной частицы сравнима с тепловой скоростью электронов, то роль флуктуационного взаимодействия становится значительной.

В частности, если скорость частицы меньше тепловой скорости электронов плазмы, то за счет флуктуационного взаимодействия энергия движущейся частицы в плазме возрастает.

Отметим, что формулы (13.1.3.14) являются хорошим приближением, если под знаком логарифма стоит большая величина  $a_e k_0$ . Это условие выполняется, если энергия взаимодействия частиц в плазме мала по сравнению с их кинетической энергией.

**13.1.4. Вероятность рассеяния и потери энергии частицы.** Выше мы определили потери энергии частицы, движущейся в плазме, предполагая выполненным условие классичности  $v \ll Ze^2/\hbar$ . Теперь исследуем вопрос о прохождении частицы через

плазму, не делая этого предположения. Определим вероятность рассеяния рассматриваемой частицы, обусловленного взаимодействием частицы с электрическим полем в плазме.

Будем считать частицу нерелятивистской. Тогда энергия ее взаимодействия с полем в плазме имеет вид

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}, t) = Ze\varphi(\mathbf{r}, t),$$

где  $\varphi(\mathbf{r}, t)$  — скалярный потенциал электрического поля в плазме, а вероятность перехода частицы из состояния с импульсом  $\mathbf{p}$  в состояние с импульсом  $\mathbf{p}'$  определяется известной квантовомеханической формулой

$$dW_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int \mathcal{V}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}(t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_{\mathbf{p}'} - \mathcal{E}_{\mathbf{p}})t\right] dt \right|^2 \frac{V d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.1.4.1)$$

где  $\mathcal{E}_{\mathbf{p}} = p^2/2m$  — энергия частицы с импульсом  $\mathbf{p}$ ,  $\mathcal{V}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}(t)$  — матричный элемент энергии взаимодействия

$$\mathcal{V}_{\mathbf{p}'\mathbf{p}}(t) = Ze \int \varphi(\mathbf{r}, t) \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')\mathbf{r}\right] \frac{d^3 r}{V}, \quad (13.1.4.2)$$

$V$  — нормировочный объем. Поскольку потенциал  $\varphi$  испытывает флуктуации, это выражение следует усреднить по флуктуациям. Обозначая усредненную вероятность через  $\langle dW_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} \rangle$ , имеем

$$\begin{aligned} \langle dW_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} \rangle &= \frac{Z^2 e^2}{\hbar^2} \int \int \langle \varphi(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}', t') \rangle \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p} - \mathbf{p}')(\mathbf{r}' - \mathbf{r})\right] \times \\ &\times \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\mathcal{E}_{\mathbf{p}'} - \mathcal{E}_{\mathbf{p}})(t' - t)\right] d^3 r dt d^3 r' dt' \frac{d^3 p'}{V (2\pi\hbar)^3}. \end{aligned} \quad (13.1.4.3)$$

После усреднения произведение потенциалов будет зависеть только от разностей координат и разностей моментов времени. Поэтому, переходя от  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{r}'$ ,  $t$  и  $t'$  к новым переменным интегрирования  $\mathbf{r}' - \mathbf{r}$ ,  $\frac{1}{2}(\mathbf{r}' + \mathbf{r})$ ,  $t' - t$  и  $\frac{1}{2}(t' + t)$ , мы получим для  $\langle dW_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} \rangle$  величину, пропорциональную объему  $V$  и времени наблюдения  $\frac{1}{2}(t' + t)$ . Таким образом, можно говорить об усредненной вероятности рассеяния, отнесенной к единице времени

$$dw_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} = \frac{Z^2 e^2}{\hbar^2} \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.1.4.4)$$

где  $\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}$  — спектральное распределение флуктуаций потенциала электрического поля,  $\mathbf{q} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p})/\hbar$  и  $\omega = (\mathcal{E}_{\mathbf{p}'} - \mathcal{E}_{\mathbf{p}})/\hbar$ . Флуктуации потенциала можно выразить через флуктуации плотности заряда

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} = \left(\frac{4\pi}{q^2}\right)^2 \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}; \quad (13.1.4.5)$$

поэтому

$$dw_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} = \left(\frac{4\pi Ze}{\hbar q^2}\right)^2 \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (13.1.4.6)$$

энергии флуктуационных плазменных колебаний с волновым вектором  $\mathbf{q}$  равна

$$\frac{1}{4\pi} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{T}(\mathbf{q}, \omega) \{ \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{q})) + \delta(\omega + \omega_l(\mathbf{q})) \} d\omega. \quad (13.1.4.15)$$

Но ту же плотность энергии при  $\hbar \rightarrow 0$  можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \langle E^2 \rangle_{\mathbf{q}} &= \int_0^{\infty} \hbar\omega N_{\omega} \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{q})) d\omega \approx \\ &\approx \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \hbar\omega N_{\omega} \{ \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{q})) + \delta(\omega + \omega_l(\mathbf{q})) \} d\omega, \end{aligned} \quad (13.1.4.16)$$

откуда, учитывая (13.1.4.13), и следует соотношение (13.1.4.14). Подставляя (13.1.4.10) в (13.1.4.6) и используя соотношение (11.2.2.5), найдем вероятность рассеяния частицы, проходящей через равновесную плазму, в квазиклассическом случае

$$dw_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} = \frac{8\pi Z^2 e^2}{\hbar q^2} N_{\omega} \frac{\text{Im} \epsilon_l(q, \omega)}{|\epsilon_l(q, \omega)|^2} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.1.4.17)$$

где  $\epsilon_l(q, \omega)$  — продольная компонента диэлектрической проницаемости плазмы, определяемая формулой (4.3.4.3).

Для вероятности рассеяния быстрой частицы ( $v \gg v_0$ ;  $v$  — скорость частицы,  $v_0$  — средняя тепловая скорость электронов плазмы), при котором изменение ее энергии мало по сравнению с самой энергией, получим отсюда

$$dw_{\mathbf{p} \rightarrow \mathbf{p}'} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^2}{\hbar q^2} \{ |\omega| (N_{|\omega|} + 1) \delta(\omega + \omega_l(\mathbf{q})) + \omega N_{\omega} \delta(\omega - \omega_l(\mathbf{q})) \} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.1.4.18)$$

где

$$\omega_l(\mathbf{q}) = \sqrt{\omega_{pe}^2 + 3q^2 v_e^2}.$$

Мы видим, что, как и указывалось выше, рассеяние быстрой частицы с малым относительным изменением энергии происходит главным образом с излучением и поглощением частицей продольных электронных колебаний (первое слагаемое в (13.1.4.18) соответствует излучению, второе — поглощению колебаний).

Выражение (13.1.4.18) получено в предположении, что плазма находится в состоянии термодинамического равновесия. Однако им можно пользоваться в квазиклассическом случае и для плазмы с неравновесным распределением плазменных волн, если заменить планковскую функцию  $\bar{N}_{|\omega|}$  на неравновесную функцию распределения плазменных волн  $N_{\omega}$ .

Аналогично можно найти вероятность рассеяния частицы на низкочастотных колебаниях в двухтемпературной плазме; она равна

$$dw_{p \rightarrow p'} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^2 a_0^2}{\hbar(1 + a_0^2 q^2)} \{ |\omega| (N_{|\omega|} + 1) \delta(\omega + \omega_s(\mathbf{q})) + \omega N_\omega \delta(\omega - \omega_s(\mathbf{q})) \} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.1.4.19)$$

где  $\omega_s(\mathbf{q}) = \frac{qv_s}{\sqrt{1 + a_0^2 q^2}}$ ,  $v_s$  — скорость неизотермического звука и  $N_\omega$  — функция распределения низкочастотных колебаний.

Формула (13.1.4.12) справедлива, как уже говорилось, в квазиклассическом случае, когда переданные энергия и импульс малы ( $\hbar|\omega| \ll |\mathcal{E}_{p'} - \mathcal{E}_p|$ ,  $\hbar q \ll |p' - p|$ ). Для больших передач импульса (порядка импульса частицы плазмы) она несправедлива. Но в этом случае можно сразу же написать простое выражение для  $\langle \rho^2 \rangle_{q\omega}$  исходя из того, что при  $\hbar q \sim m_e v_e$  ( $v_e$  — тепловая скорость электронов плазмы) эффекты, связанные с действием самосогласованного поля, не должны играть роли. Отсюда следует, что при  $\hbar q \sim m_e v_e$  мы вправе воспользоваться выражением (11.3.2.5) для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда и учесть в нем только эффект отдачи, т. е. заменить входящую в это выражение  $\delta$ -функцию  $\delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v})$  на функцию  $\delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \hbar q^2/2m)$ :

$$\langle \rho^2 \rangle_{q\omega} = 2\pi e^2 \int f_0(\mathbf{v}) \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \hbar q^2/2m) d^3 v. \quad (13.1.4.20)$$

Возвратимся теперь снова к общей формуле для потерь энергии (13.1.4.7). Если скорость пролетающей частицы значительно больше средней тепловой скорости электронов плазмы, то главный вклад в выражение для потерь энергии вносят две области изменения переданного импульса  $\hbar q$ : область  $\hbar q \sim m_e v_e$  (большие переданные импульсы, т. е. близкие столкновения) и область  $q \ll a_0^{-1}$ , где  $a_0$  — дебаевский радиус экранировки (малые переданные импульсы, т. е. далекие столкновения). Для вычисления потерь энергии в этих областях выберем некоторое значение  $q_0$ , удовлетворяющее условию  $a_0^{-1} > q_0 > m_e v_e / \hbar$ , и при  $q < q_0$  воспользуемся для  $\langle \rho^2 \rangle_{q\omega}$  квазиклассическим выражением (13.1.4.12), а при  $q > q_0$  — выражением (13.1.4.20), относящимся к идеальному газу невзаимодействующих частиц плазмы. Промежуточная область  $q \sim q_0$  не вносит существенного вклада в выражение для потерь энергии, и поэтому

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} \approx \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{q < q_0} + \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{q > q_0}. \quad (13.1.4.21)$$

Второе слагаемое находится сразу:

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{q > q_0} = - \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \ln \frac{2m m_e}{\hbar q_0 (m + m_e)}, \quad (13.1.4.22)$$

и мы перейдем к вычислению  $(d\mathcal{E}/dt)_{q < q_0}$ .

Таким образом, вероятность рассеяния частицы, пролетающей через плазму, полностью определяется спектральным распределением флуктуаций поля (или плотности заряда) в плазме, точнее говоря, значением спектральной плотности при  $\mathbf{q} = (\mathbf{p}' - \mathbf{p})/\hbar$  и  $\omega = (\mathcal{E}_{p'} - \mathcal{E}_p)/\hbar$ .

Умножив вероятность рассеяния на  $\hbar\omega$  и проинтегрировав по  $d^3p'$ , получим изменение энергии пролетающей частицы в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{2Ze^2}{\pi\hbar^4} \int \frac{\omega}{q^4} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} d^3p'. \quad (13.1.4.7)$$

Эта общая формула определяет потери энергии частицы, обусловленные как поляризацией плазмы, так и флуктуациями поля в ней. Она в равной мере относится как к плазме, так и к любой среде. При ее выводе мы предполагали только, что взаимодействие между пролетающей частицей и плазмой является слабым и пользовались поэтому первым приближением теории возмущений.

Для конкретного вычисления  $d\mathcal{E}/dt$  согласно этой формуле нужно знать спектральное распределение  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}$ . Оно имеет, вообще говоря, различный вид в квантовой и классической областях. Нас в дальнейшем будет интересовать только классическая область, т. е. классический предел формулы (13.1.4.7). Чтобы найти его, обратимся к формуле (11.1.2.20), определяющей спектральное распределение флуктуаций плотности тока для равновесных систем, в которой еще не сделан предельный переход  $\hbar \rightarrow 0$ . Эта формула содержит в качестве множителя величину

$$\bar{N}_{|\omega|} = \begin{cases} \bar{N}_{|\omega|}, & \omega > 0, \\ -(\bar{N}_{|\omega|} + 1), & \omega < 0, \end{cases}$$

где  $\bar{N}_{|\omega|}$  — планковская функция распределения

$$\bar{N}_{|\omega|} = \frac{1}{\exp(\hbar|\omega|/T) - 1}, \quad (13.1.4.8)$$

$T$  — температура среды. Наличие такого множителя имеет простой, но глубокий физический смысл. Именно, как мы видели в § 11.2, спектральные распределения флуктуаций поля и других величин имеют резкие максимумы (в области прозрачности —  $\delta$ -образные) при  $\omega = \pm\omega_r(\mathbf{q})$ , где  $\omega_r(\mathbf{q})$  — частота  $r$ -го собственного колебания с волновым вектором  $\mathbf{q}$ . Учитывая, что  $\hbar\omega = \mathcal{E}_{p'} - \mathcal{E}_p$  и  $\hbar\mathbf{q} = \mathbf{p}' - \mathbf{p}$ , можно сказать, что частица, проходящая через плазму, испускает и поглощает плазмоны, т. е. квазичастицы с энергией  $\hbar\omega_r(\mathbf{q})$  и импульсом  $\hbar\mathbf{q}$ , причем вероятность испускания пропорциональна  $\bar{N}_{\omega_r(\mathbf{q})} + 1$ , а вероятность поглощения пропорциональна  $\bar{N}_{\omega_r(\mathbf{q})}$ , где  $\bar{N}_{\omega_r(\mathbf{q})}$  — среднее число плазмонов с частотой  $\omega_r(\mathbf{q})$  при темпера-

туре  $T$ . Тот факт, что вероятность испускания пропорциональна  $\bar{N}_{|\omega|} + 1$ , а вероятность поглощения пропорциональна  $\bar{N}_{|\omega|}$ , связан с характером статистики плазмонов, которые, так же как и фотоны, являются бозонами и подчиняются статистике Бозе—Эйнштейна.

Так как

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \hbar \omega \bar{N}_{\omega} = T, \quad (13.1.4.9)$$

то в классические формулы для спектральных распределений флуктуаций в § 11.2 вместо величины  $\hbar \omega \bar{N}_{\omega}$  входит температура  $T$ ; но из предыдущего ясно, что с помощью классических формул для спектральных распределений флуктуаций можно непосредственно найти эти распределения в квазиклассическом случае, когда

$$\hbar \omega_r(\mathbf{q}) \ll |\mathcal{E}_{p'} - \mathcal{E}_p|, \quad \hbar q \ll |\mathbf{p}' - \mathbf{p}|;$$

для этого следует в классических формулах сделать замену  $T$  на  $\hbar \omega \bar{N}_{\omega}$ , т. е.

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} = \frac{\hbar \omega \bar{N}_{\omega}}{T} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c, \quad (13.1.4.10)$$

где  $\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c$  — спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в классическом случае, удовлетворяющее условию

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c = \langle \rho^2 \rangle_{-\mathbf{q}, -\omega}^c. \quad (13.1.4.11)$$

В области прозрачности, т. е. при  $\omega \approx \omega_l(\mathbf{q})$ , где  $\omega_l(\mathbf{q})$  — частота слабозатухающего собственного колебания с волновым вектором  $\mathbf{q}$ , плазмоны могут не находиться в тепловом равновесии с частицами плазмы. Поэтому распределение плазмонов по частотам может отличаться от планковского распределения и описываться некоторой, вообще говоря, произвольной функцией  $N_{\omega_l(\mathbf{q})}$ . В этом случае вместо (13.1.4.10) выполняется соотношение

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} = \frac{\hbar \omega N_{\omega_l(\mathbf{q})}}{T^*(\mathbf{q}, \omega)} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c, \quad (13.1.4.12)$$

где  $T^*$  — некоторая функция  $\mathbf{q}$  и  $\omega$  (зависящая, вообще говоря, также от  $\hbar$ ), удовлетворяющая условию

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\hbar \omega N_{\omega_l(\mathbf{q})}}{T^*(\mathbf{q}, \omega)} = 1. \quad (13.1.4.13)$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} T^*(\mathbf{q}, \omega) = \tilde{T}(\mathbf{q}, \omega), \quad (13.1.4.14)$$

где  $\tilde{T}$  — эффективная температура плазмонов, определяемая формулой (11.5.3.6'). Действительно, согласно (11.5.3.9), плотность

Подставляя (13.1.4.12) в (13.1.4.7) и замечая, что

$$\delta\left(\omega - \frac{\varepsilon_{p'} - \varepsilon_p}{\hbar}\right) d\omega \rightarrow 1,$$

представим  $(d\mathcal{E}/dt)_{q < q_0}$  в виде

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{q < q_0} = \frac{2Z^2e^2}{\pi} \iint \frac{\omega^2 N_\omega}{q^4 T^*(\mathbf{q}, \omega)} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c \delta\left(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \frac{\hbar q^2}{2m}\right) d\omega d^3q, \quad (13.1.4.23)$$

или, учитывая (13.1.4.11) и соотношение  $T^*(-\mathbf{q}, -\omega) = T^*(\mathbf{q}, \omega)$ , в виде

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{q < q_0} = \frac{Z^2e^2}{\pi} \iint \frac{\omega^2}{q^4 T^*(\mathbf{q}, \omega)} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c \left\{ N_\omega \delta\left(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \frac{\hbar q^2}{2m}\right) + \right. \\ \left. + N_{-\omega} \delta\left(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} + \frac{\hbar q^2}{2m}\right) \right\} d\omega d^3q. \quad (13.1.4.24) \end{aligned}$$

Нас интересует классический предел этой формулы ( $\hbar \rightarrow 0$ ). Для нахождения его разложим  $\delta$ -функцию в ряд по степеням  $\hbar$ ,

$$\delta\left(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \frac{\hbar q^2}{2m}\right) \rightarrow \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}) - \frac{\hbar q^2}{2m} \delta'(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}),$$

и запишем  $\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{q < q_0}$  в виде суммы

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{q < q_0} = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p + \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_f, \quad (13.1.4.25)$$

где

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p &= \frac{Z^2e^2}{\pi} \iint \frac{\omega^2}{q^4 T^*(\mathbf{q}, \omega)} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c (N_\omega + N_{-\omega}) \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}) d\omega d^3q, \\ \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_f &= -\frac{Z^2e^2}{\pi} \frac{\hbar}{m} \iint \frac{\omega^2 N_\omega}{q^2 T^*(\mathbf{q}, \omega)} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c \delta'(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}) d\omega d^3q. \end{aligned}$$

Замечая, что  $N_\omega + N_{-\omega} = 1$  и  $\omega N_\omega \xrightarrow{\hbar \rightarrow 0} T^*(\mathbf{q}, \omega)/\hbar$ , получим для  $(d\mathcal{E}/dt)_p$  и  $(d\mathcal{E}/dt)_f$  выражения

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p = -\frac{Z^2e^2}{\pi} \int \frac{(\mathbf{q}\mathbf{v})^2}{q^4 \tilde{T}(\mathbf{q}, \mathbf{q}\mathbf{v})} \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}, \mathbf{q}\mathbf{v}}^c d^3q, \quad (13.1.4.26)$$

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_f = \frac{Z^2e^2}{\pi m} \int \frac{1}{q^2} \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c) d^3q, \quad \omega = \mathbf{q}\mathbf{v}, \quad (13.1.4.27)$$

не содержащие  $\hbar$ . (Последующие члены разложения  $\delta$ -функции по степеням  $\hbar$  приводили бы в  $(d\mathcal{E}/dt)_{q < q_0}$  к слагаемым, исчезающим при  $\hbar \rightarrow 0$ .)

Покажем, что величина  $(d\mathcal{E}/dt)_p$  представляет собой потери энергии частицы, обусловленные поляризацией среды (в  $(d\mathcal{E}/dt)_p$  входят также потери энергии и на черенковское излучение), а величина  $(d\mathcal{E}/dt)_f$  — изменение энергии частицы, обусловленное взаимодействием с флуктуациями поля.

Чтобы убедиться в справедливости первого утверждения, предположим, что плазма находится в состоянии теплового равновесия; тогда

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^e = \frac{q^2}{2\pi} \frac{T}{\omega} \operatorname{Im} \left\{ -\frac{1}{\varepsilon_l(q, \omega)} \right\}, \quad (13.1.4.28)$$

и формула (13.1.4.26) приобретает вид

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_p = \frac{Z^2 e^2}{2\pi^2} \operatorname{Im} \int \frac{\mathbf{q}\mathbf{v}}{q^2 \varepsilon_l(q, \mathbf{q}\mathbf{v})} d^3q, \quad (13.1.4.29)$$

тождественный соотношению (13.1.2.3).

Очевидно, та же формула будет справедлива и для неравновесной плазмы, если не учитывать флуктуаций плотности заряда ионов (в этом случае остается справедливой формула (13.1.4.28), в ней нужно лишь заменить  $T$  на  $\tilde{T}$ ).

Заметим, что поляризационные потери энергии на возбуждение плазменных волн не зависят от числа плазмонов  $N_\omega$ . Это связано с тем, что потери энергии определяются спонтанным излучением частиц волн, тогда как вклады в потери энергии вынужденного излучения и поглощения (пропорциональные числу волн  $N_\omega$ ) взаимно компенсируются.

Чтобы убедиться в справедливости второго утверждения, воспользуемся соотношением

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^e = \frac{q^2}{16\pi^2} \langle E_l^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega},$$

подстановка которого в (13.1.4.27) дает

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_f = \frac{Z^2 e^2}{16\pi^3 m} \int \frac{\partial}{\partial \omega} (\omega \langle E_l^2 \rangle_{\mathbf{k}\omega}) d^3q, \quad \omega = \mathbf{q}\mathbf{v}, \quad (13.1.4.30)$$

что тождественно (13.1.3.10).

Если не учитывать флуктуаций плотности заряда ионов, то

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_f = \frac{Z^2 e^2}{2\pi m} \int \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\omega}{|\omega|} \tilde{T}(\mathbf{q}, \omega) \delta(\varepsilon_l(q, \omega)) \right\} d^3q, \quad \omega = \mathbf{q}\mathbf{v}. \quad (13.1.4.31)$$

Сравнение этой формулы с (13.1.4.29) показывает, что

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_f \left| \left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_p \right. \sim \frac{m_e}{m} \frac{\tilde{T}}{T}, \quad (13.1.4.32)$$

т. е. флуктуационные потери существенны только в случае горячих плазмонов, когда  $\tilde{T} \gg T$ .

Используя формулу (13.1.4.29) и полагая  $\epsilon_l = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ , легко найти поляризационные потери энергии при  $q < q_0$ :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{q < q_0} = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \ln \frac{q_0 v}{\omega_{pe}}. \quad (13.1.4.33)$$

Складывая последнее выражение с (13.1.4.22), получим полные поляризационные потери энергии частицы в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \ln \frac{2m m_e v^2}{(m + m_e) \hbar \omega_{pe}}. \quad (13.1.4.34)$$

Эта известная уже нам формула имеет структуру общей боровской формулы для поляризационных потерь. Обратим внимание на то, что в нее не входит параметр  $q_0$ . Его отсутствие связано с тем, что, как уже указывалось, переданные импульсы порядка  $\hbar q_0$  не вносят существенного вклада в потери энергии.

Мы видим, что поляризационные потери энергии быстрой частицы существенно зависят от плотности плазмы и не зависят от ее температуры. Поэтому формулой (13.1.4.34) можно пользоваться независимо от вида функции распределения частиц в плазме, если их средняя скорость значительно меньше скорости пролетающей частицы. Полные потери энергии не зависят также от чисел плазменных волн  $N_\omega$ , если средняя энергия плазменной волны  $\tilde{T}$  не слишком велика ( $\tilde{T} \ll (m/m_e) T$ ).

Если пролетающей частицей является электрон, то при учете близких столкновений следует принять во внимание тождественность его с электронами плазмы, что приведет к появлению дополнительного множителя  $e/\sqrt{8}$  ( $e$  — основание натуральных логарифмов) в аргументе логарифма в формуле (13.1.4.34). Таким образом, поляризационные потери энергии быстрого электрона, проходящего через плазму, определяются формулой

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ \ln \frac{m_e v^2}{\sqrt{8} \hbar \omega_{pe}} + 1 \right\}. \quad (13.1.4.35)$$

Как уже отмечалось, выражение (13.1.4.4) для вероятности рассеяния справедливо в первом борновском приближении, которым, как известно, можно пользоваться в случае быстрой частицы ( $e^2/\hbar v \gg 1$ ) при всех  $q$ , а в случае медленной частицы — только при малых передачах импульса. Поэтому формула (13.1.4.33) для потерь энергии при близких столкновениях справедлива, только если  $e^2/\hbar v \ll 1$ .

Заметим, что формула (13.1.4.34) (которую мы получили в пренебрежении членами порядка  $v^2/c^2$ ) определяет по порядку величины потери энергии также и в релятивистской области  $v \sim c$ . Учет релятивистских эффектов приводит лишь к изменению выражения под знаком логарифма, не меняя предлогарифмического множителя  $Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 / v$ .

## § 13.2. Коэффициенты динамического трения и диффузии в плазме

**13.2.1. Уравнение Фоккера—Планка для пробных частиц.** В предыдущем параграфе мы рассматривали постороннюю по отношению к плазме заряженную частицу (будем называть ее пробной частицей), движущуюся в плазме, и определили потери ее энергии. Эти потери, обусловленные взаимодействием пробной частицы с электрическим полем в плазме (частица считалась нерелятивистской), можно интерпретировать, как уже указывалось в § 13.1, как работу сил трения, возникающих при движении частицы в плазме. Действительно, запишем приближенное уравнение движения пробной частицы (см. (13.1.3.2)):

$$\dot{v}_i(t) = \frac{Ze}{m} E_i(\mathbf{r}_0(t), t) + \frac{Z^2 e^2}{m^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' E_j(\mathbf{r}_0(t''), t'') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} E_i(\mathbf{r}_0(t), t), \quad (13.2.1.1)$$

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0),$$

где  $t$  лежит в интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  и  $\Delta t$  — промежуток времени, большой по сравнению с периодом флуктуаций поля в плазме и малый по сравнению с характерным временем существенного изменения скорости пробной частицы, и определим силу трения  $D_i$ , отнесенную к единице массы частицы

$$D_i = \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t}, \quad (13.2.1.2)$$

где  $\Delta v_i$  — изменение  $i$ -й компоненты скорости пробной частицы за время  $\Delta t$ , а угловые скобки, как обычно, обозначают усреднение по флуктуациям. Используя (13.2.1.1), получим в случае изотропной плазмы [11]

$$D_i = \frac{v_i}{v} D, \quad D = -\frac{1}{mv} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (13.2.1.3)$$

где  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  — потери энергии направленного движения пробной частицы:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2 e^2}{2\pi^2} \text{Im} \int \frac{\omega}{k^2 \epsilon_l(k, \omega)} d^3k + \frac{Z^2 e^2}{16\pi^3 m} \int \omega \frac{d}{d\omega} \langle E_l^2 \rangle_{k\omega} d^3k, \quad \omega = kv. \quad (13.2.1.4)$$

Величину  $D$ , характеризующую среднее изменение абсолютного значения скорости пробной частицы в единицу времени, можно назвать *коэффициентом динамического трения*.

Первое слагаемое в формуле для  $d\mathcal{E}/dt$  определяет динамическое трение пробной частицы, обусловленное ее взаимодействием с электрическим полем, возникающим в плазме при движении

Используя формулу (13.1.4.29) и полагая  $\epsilon_l = 1 - \omega_{pe}^2 / \omega^2$ , легко найти поляризационные потери энергии при  $q < q_0$ :

$$\left(\frac{d\varepsilon}{dt}\right)_{q < q_0} = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \ln \frac{q_0 v}{\omega_{pe}}. \quad (13.1.4.33)$$

Складывая последнее выражение с (13.1.4.22), получим полные поляризационные потери энергии частицы в единицу времени

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \ln \frac{2 m m_e v^2}{(m + m_e) \hbar \omega_{pe}}. \quad (13.1.4.34)$$

Эта известная уже нам формула имеет структуру общей боровской формулы для поляризационных потерь. Обратим внимание на то, что в нее не входит параметр  $q_0$ . Его отсутствие связано с тем, что, как уже указывалось, переданные импульсы порядка  $\hbar q_0$  не вносят существенного вклада в потери энергии.

Мы видим, что поляризационные потери энергии быстрой частицы существенно зависят от плотности плазмы и не зависят от ее температуры. Поэтому формулой (13.1.4.34) можно пользоваться независимо от вида функции распределения частиц в плазме, если их средняя скорость значительно меньше скорости пролетающей частицы. Полные потери энергии не зависят также от чисел плазменных волн  $N_\omega$ , если средняя энергия плазменной волны  $\tilde{T}$  не слишком велика ( $\tilde{T} \ll (m/m_e) T$ ).

Если пролетающей частицей является электрон, то при учете близких столкновений следует принять во внимание тождественность его с электронами плазмы, что приведет к появлению дополнительного множителя  $e/\sqrt{8}$  ( $e$  — основание натуральных логарифмов) в аргументе логарифма в формуле (13.1.4.34). Таким образом, поляризационные потери энергии быстрого электрона, проходящего через плазму, определяются формулой

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ \ln \frac{m_e v^2}{\sqrt{8} \hbar \omega_{pe}} + 1 \right\}. \quad (13.1.4.35)$$

Как уже отмечалось, выражение (13.1.4.4) для вероятности рассеяния справедливо в первом борновском приближении, которым, как известно, можно пользоваться в случае быстрой частицы ( $e^2/\hbar v \gg 1$ ) при всех  $q$ , а в случае медленной частицы — только при малых передачах импульса. Поэтому формула (13.1.4.33) для потерь энергии при близких столкновениях справедлива, только если  $e^2/\hbar v \ll 1$ .

Заметим, что формула (13.1.4.34) (которую мы получили в пренебрежении членами порядка  $v^2/c^2$ ) определяет по порядку величины потери энергии также и в релятивистской области  $v \sim c$ . Учет релятивистских эффектов приводит лишь к изменению выражения под знаком логарифма, не меняя предлогарифмического множителя  $Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 / v$ .

## § 13.2. Коэффициенты динамического трения и диффузии в плазме

**13.2.1. Уравнение Фоккера—Планка для пробных частиц.** В предыдущем параграфе мы рассматривали постороннюю по отношению к плазме заряженную частицу (будем называть ее пробной частицей), движущуюся в плазме, и определили потери ее энергии. Эти потери, обусловленные взаимодействием пробной частицы с электрическим полем в плазме (частица считалась нерелятивистской), можно интерпретировать, как уже указывалось в § 13.1, как работу сил трения, возникающих при движении частицы в плазме. Действительно, запишем приближенное уравнение движения пробной частицы (см. (13.1.3.2)):

$$\dot{v}_i(t) = \frac{Ze}{m} E_i(\mathbf{r}_0(t), t) + \frac{Z^2 e^2}{m^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' E_j(\mathbf{r}_0(t''), t'') \frac{\partial}{\partial x_{0j}} E_i(\mathbf{r}_0(t), t), \quad (13.2.1.1)$$

$$\mathbf{r}_0(t) = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}(t - t_0),$$

где  $t$  лежит в интервале  $(t_0, t_0 + \Delta t)$  и  $\Delta t$  — промежуток времени, большой по сравнению с периодом флуктуаций поля в плазме и малый по сравнению с характерным временем существенного изменения скорости пробной частицы, и определим силу трения  $D_i$ , отнесенную к единице массы частицы

$$D_i = \frac{\langle \Delta v_i \rangle}{\Delta t}, \quad (13.2.1.2)$$

где  $\Delta v_i$  — изменение  $i$ -й компоненты скорости пробной частицы за время  $\Delta t$ , а угловые скобки, как обычно, обозначают усреднение по флуктуациям. Используя (13.2.1.1), получим в случае изотропной плазмы [11]

$$D_i = \frac{v_i}{v} D, \quad D = -\frac{1}{mv} \frac{d\mathcal{E}}{dt}, \quad (13.2.1.3)$$

где  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$  — потери энергии направленного движения пробной частицы:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2 e^2}{2\pi^2} \text{Im} \int \frac{\omega}{k^2 \epsilon_l(k, \omega)} d^3k + \frac{Z^2 e^2}{16\pi^3 m} \int \omega \frac{d}{d\omega} \langle E_l^2 \rangle_{k\omega} d^3k, \quad \omega = kv. \quad (13.2.1.4)$$

Величину  $D$ , характеризующую среднее изменение абсолютного значения скорости пробной частицы в единицу времени, можно назвать *коэффициентом динамического трения*.

Первое слагаемое в формуле для  $d\mathcal{E}/dt$  определяет динамическое трение пробной частицы, обусловленное ее взаимодействием с электрическим полем, возникающим в плазме при движении

трической проницаемости и спектрального распределения флуктуаций поля выражения (4.3.4.3) и (11.2.2.6), получим в результате интегрирования (13.2.1.3)

$$D \equiv D_p + D_f = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_0^2} \left(1 + \frac{m_e}{m}\right) \int_0^{\zeta} z^2 \exp(-z^2) L(z, a_e k_0) dz, \quad (13.2.2.1)$$

где  $\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{v}{v_0}$  и функция  $L(z, a_e k_0)$  определяется выражением (13.1.3.13).

Коэффициенту поляризационного трения  $D_p$  отвечает единица в скобке (13.2.2.1), а коэффициенту флуктуационного трения  $D_f$  — слагаемое  $m_e/m$ . Для тяжелой пробной частицы ( $m \gg m_e$ ) поляризационное трение  $D_p$  значительно больше флуктуационного трения  $D_f$ . Если в качестве пробной частицы взять электрон, то  $D_p = D_f$ .

В наиболее интересном случае высоких температур и малой плотности электронов ( $a_e k_0 \gg 1$ ) можно ограничиться в (13.1.3.13) учетом только основного члена и считать, что  $L(z, a_e k_0) \approx \ln a_e k_0$ . В результате мы получим из (13.2.2.1) известную формулу Чандрасекара

$$D = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_0^2} \left(1 + \frac{m_e}{m}\right) G(\zeta) \ln a_e k_0, \quad (13.2.2.2)$$

где функция  $G(\zeta)$  выражается через функцию ошибок  $\phi(\zeta)$ :

$$G(\zeta) = \frac{\phi(\zeta) - \zeta \phi'(\zeta)}{2\zeta^2}. \quad (13.2.2.3)$$

В предельных случаях малых и больших скоростей движущейся частицы имеем

$$\left. \begin{aligned} D &= -\frac{2}{3\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_0^2} \left(1 + \frac{m_e}{m}\right) \zeta \ln a_e k_0, & \zeta \ll 1, \\ D &= -\frac{1}{2} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_0^2} \left(1 + \frac{m_e}{m}\right) \frac{1}{\zeta^2} \ln a_e k_0, & \zeta \gg 1. \end{aligned} \right\} \quad (13.2.2.4)$$

Для медленных частиц в плазме динамическое трение возрастает линейно с увеличением скорости частицы, тогда как для быстрых частиц оно уменьшается обратно пропорционально квадрату скорости.

Максимум силы динамического трения определяется из условия

$$\frac{d^2}{d\zeta^2} \left( \frac{\phi(\zeta)}{\zeta} \right) = 0, \quad (13.2.2.5)$$

откуда  $\zeta \approx 0,97$ . Таким образом, трение будет наибольшим, когда скорость движущейся частицы в плазме почти совпадает

(с точностью до  $2^{-1/2}$ ) со средней тепловой скоростью электронов плазмы.

Аналогичным образом можно найти продольный и поперечный коэффициенты диффузии; имеем

$$\left. \begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} \zeta^{-2} \int_0^{\zeta} z^2 \exp(-z^2) L(z, a_e k_0) dz, \\ D_{\perp} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} \zeta^{-2} \int_0^{\zeta} (\zeta^2 - z^2) \exp(-z^2) L(z, a_e k_0) dz. \end{aligned} \right\} (13.2.2.6)$$

Сравнение этих формул с (13.2.2.1) показывает, что коэффициенты диффузии  $D_{\parallel}$  и  $D_{\perp}$  содержат в знаменателе лишний множитель  $m$  по сравнению с коэффициентом динамического трения  $D$ . Поэтому для тяжелых пробных частиц ( $m \gg m_e$ ) замедление, обусловленное динамическим трением, значительно существеннее, чем дисперсия скорости, связанная с диффузией.

Удерживая в (13.2.2.6) основные члены, получим формулы Чандрасекара

$$\left. \begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{2Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} G(\zeta) \ln a_e k_0, \\ D_{\perp} &= \frac{2Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} [\phi(\zeta) - G(\zeta)] \ln a_e k_0. \end{aligned} \right\} (13.2.2.7)$$

Если скорость движущейся частицы мала ( $v \ll v_e$ ), то различие между параллельным и перпендикулярным смещениями (по отношению к направлению движения) исчезает и

$$D_{\perp} = 2D_{\parallel}, \quad \zeta \ll 1. \quad (13.2.2.8)$$

В случае больших скоростей частицы ( $v \gg v_e$ ) получается соотношение

$$D_{\perp} = 2\zeta^2 D_{\parallel}, \quad \zeta \gg 1. \quad (13.2.2.9)$$

Таким образом, если скорость пробных частиц больше средней тепловой скорости электронов плазмы, то диффузия в пространстве скоростей будет в основном поперечной, т. е. перпендикулярной к первоначальной скорости частицы.

**13.2.3. Коэффициенты трения и диффузии в двухтемпературной плазме.** Общие формулы, полученные в п. 13.2.1, позволяют также исследовать трение и диффузию в неравновесной плазме, если известно спектральное распределение флуктуаций поля. В частности, при помощи формул (13.2.1.3) и (13.2.1.9) можно найти коэффициенты динамического трения и диффузии в двухтемпературной электронно-ионной плазме [11].

Диэлектрическая проницаемость и спектральное распределение флуктуаций плотности заряда, связанных с флуктуациями продольного электрического поля, для двухтемпературной плазмы определяются выражениями (4.3.4.3) и (11.4.1.14). Используя (12.2.1.3), получим следующие формулы для коэффициентов динамического трения в двухтемпературной плазме  $D_p$  и  $D_f$ :

$$\left. \begin{aligned} D_p &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_e^2} \zeta^{-2} \times \\ &\times \int_0^\zeta z^2 [\exp(-z^2) + p \mu \exp(-\mu^2 z^2)] L(z, p, \mu, a_e k_0) dz, \\ D_f &= -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_e^2} \frac{m_e}{m} \zeta^{-2} \times \\ &\times \int_0^\zeta z^2 [\exp(-z^2) + \mu^3 \exp(-\mu^2 z^2)] L(z, p, \mu, a_e k_0) dz, \end{aligned} \right\} (13.2.3.1)$$

где  $p = T_e/T_i$ ,  $\mu = \sqrt{m/m_e}$  и

$$\begin{aligned} L(z, p, \mu, a_e k_0) &= \ln a_e k_0 - 1/4 \ln \{ [1 - \varphi(z) + p(1 - \varphi(\mu z))]^2 + \\ &+ \pi z^2 [\exp(-z^2) + p \mu \exp(-\mu^2 z^2)]^2 \} - \\ &- \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1 - \varphi(z) + p(1 - \varphi(\mu z))}{z [\exp(-z^2) + p \mu \exp(-\mu^2 z^2)]} \left\{ \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{1 - \varphi(z) + p(1 - \varphi(\mu z))}{\sqrt{\pi} z [\exp(-z^2) + p \mu \exp(-\mu^2 z^2)]} \right\}. \end{aligned} \quad (13.2.3.2)$$

Ограничиваясь учетом основных членов при  $a_e k_0 \gg 1$ , получим для коэффициентов динамического трения приближенные формулы

$$\left. \begin{aligned} D_p &= -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_e^2} \{ G(\zeta) + p G(\mu \zeta) \} \ln a_e k_0, \\ D_f &= -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{m v_e^2} \frac{m_e}{m} \{ G(\zeta) + \mu^2 G(\mu \zeta) \} \ln a_e k_0. \end{aligned} \right\} (13.2.3.3)$$

Учет движения ионов в плазме приводит к существенному увеличению роли флуктуационного трения. Так, если пробной частицей является электрон, то флуктуационное трение может быть значительно больше поляризационного трения.

Отметим, что при малых скоростях пробных частиц как поляризационное, так и флуктуационное трение в основном определяются взаимодействием частицы с ионами плазмы.

Аналогичным образом нетрудно найти коэффициенты диффузии  $D_{\parallel}$  и  $D_{\perp}$  для двухтемпературной плазмы:

$$\left. \begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} \zeta^{-2} \times \\ &\times \int_0^{\zeta} z^2 [\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2)] L(z, p, \mu, a_e k_0) dz, \\ D_{\perp} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} \zeta^{-2} \times \\ &\times \int_0^{\zeta} (\zeta^2 - z^2) [\exp(-z^2) + \mu \exp(-\mu^2 z^2)] L(z, p, \mu, a_e k_0) dz. \end{aligned} \right\} (13.2.3.4)$$

В предельном случае  $a_e k_0 \gg 1$  имеем

$$\left. \begin{aligned} D_{\parallel} &= \frac{2Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} [G(\zeta) + G(\mu\zeta)] \ln a_e k_0, \\ D_{\perp} &= \frac{2Z^2 e^2 \omega_{pe}^2 m_e}{m^2 v} [\phi(\zeta) - G(\zeta) + \phi(\mu\zeta) - G(\mu\zeta)] \ln a_e k_0. \end{aligned} \right\} (13.2.3.5)$$

Из последних соотношений следует, что поперечная диффузия существенным образом зависит от движения ионов. При  $v \gg v_e$  поперечная диффузия обусловлена примерно в равной степени взаимодействием пробной частицы как с электронами, так и с ионами плазмы. При  $v_e \gg v \gg v_i$  поперечная диффузия определяется главным образом взаимодействием с ионами.

С помощью найденных выражений для коэффициентов трения и диффузии можно оценить время выравнивания  $\tau$  электронной и ионной температур  $T_e$  и  $T_i$ , определяемое соотношением

$$\frac{dT_e}{dt} = -\frac{T_e - T_i}{\tau}. \quad (13.2.3.6)$$

Обратимся с этой целью к формуле для изменения энергии пробной частицы в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{1}{2} m (2vD + D_{\parallel} + D_{\perp}). \quad (13.2.3.7)$$

Если пробной частицей является электрон, то

$$\frac{d\mathcal{E}_e}{dt} = \frac{e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ -\phi(\zeta) + 2\zeta \phi'(\zeta) - \frac{p}{\mu^2} \phi(\mu\zeta) + \left(1 + \frac{p}{\mu^2}\right) \mu\zeta \phi'(\mu\zeta) \right\}. \quad (13.2.3.8)$$

Здесь первое и второе слагаемые определяют изменение энергии электрона, вызванное взаимодействием с остальными элек-

тронами плазмы, а третье и четвертое — изменение энергии, обусловленное взаимодействием с ионами плазмы.

Предположим теперь, что пробные частицы характеризуются максвелловским распределением с температурой  $T_e$ . Усреднив тогда выражение (13.2.3.8) по максвелловскому распределению, мы получим, очевидно, изменение электронной температуры со временем

$$\left\langle \frac{d\epsilon_e}{dt} \right\rangle = 3/2 \frac{dT_e}{dt}. \quad (13.2.3.9)$$

Нетрудно проверить, что сумма первых слагаемых в (13.2.3.8) после усреднения обращается в нуль, так как электроны плазмы находятся в состоянии теплового равновесия. Среднее же изменение энергии, обусловленное взаимодействием электрона с ионами, равно

$$\left\langle \frac{d\epsilon_e}{dt} \right\rangle = - \frac{4\sqrt{2}\pi n_0 e^4}{m_e m_i} \frac{T_e - T_i}{(T_e/m_e + T_i/m_i)^{3/2}} \ln a_e k_0. \quad (13.2.3.10)$$

Используя (13.2.3.6) и (13.2.3.9), получим в результате известное уже нам выражение для времени релаксации неизотермической плазмы

$$\tau = \frac{3}{8\sqrt{2}\pi} \frac{m_e m_i}{n_0 e^4 \ln a_e k_0} \left( \frac{T_e}{m_e} + \frac{T_i}{m_i} \right)^{3/2}. \quad (13.2.3.11)$$

### § 13.3. Прохождение заряженных частиц через равновесную плазму в магнитном поле

**13.3.1. Вероятность рассеяния в магнитоактивной плазме.** Перейдем теперь к рассмотрению взаимодействия заряженной пробной частицы с плазмой в присутствии постоянного и однородного магнитного поля [9, 15—19]. Магнитное поле приводит, во-первых, к усложнению характера движения пролетающей частицы и, во-вторых, изменяет спектральное распределение флуктуаций в плазме.

Если направление движения частицы до рассеяния и после него близко к направлению магнитного поля, то последнее не сказывается на движении частицы. Для этого должны выполняться условия

$$q_{\perp} v \sin \alpha \ll \omega_{Bz}, \quad \hbar q_{\perp}^2 / m \ll \omega_{Bz},$$

где  $\hbar q_{\perp}$  — перпендикулярная к направлению магнитного поля  $B_0$  составляющая переданного импульса,  $\omega_{Bz} = ZeB_0/mc$  и  $\alpha$  — угол между направлением движения частицы и направлением магнитного поля.

Влиянием магнитного поля на движение пролетающей частицы можно пренебречь и в том случае, когда закручивание частицы

на характерном пути мало. Для этого должно выполняться одно из условий

$$q_{\perp} v \sin \alpha \gg \omega_{Bz}, \quad \hbar q_{\perp}^2 / m \gg \omega_{Bz}.$$

Рассмотрим прежде всего рассеяние частицы в этих случаях. Вероятность рассеяния частицы определяется общей формулой (13.1.4.6), в которой под  $\langle \rho^2 \rangle_{q\omega}$  следует понимать спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в плазме, находящейся в магнитном поле.

Функция  $\langle \rho^2 \rangle_{q\omega}$ , как было показано в § 11.2, имеет резкие максимумы при частотах собственных колебаний плазмы; соответствующие слагаемые в выражении для  $d\omega$  можно интерпретировать как вероятности рассеяния частицы с возбуждением (или поглощением) колебаний различного типа. В частности, вероятность рассеяния в единицу времени частицы с возбуждением или поглощением продольных электронных колебаний имеет вид

$$d\nu_{p \rightarrow p'} = \frac{4\pi^2 Z^2 e^2}{\hbar q^2} \frac{(\omega^2 - \omega_{Be}^2)^2}{\omega^4 \sin^2 \theta + (\omega^2 - \omega_{Be}^2)^2 \cos^2 \theta} \{ |\omega| (N_{|\omega|} + 1) [\delta(\omega + \omega_+) + \delta(\omega + \omega_-)] + \omega N_{\omega} [\delta(\omega - \omega_+) + \delta(\omega - \omega_-)] \} \frac{d^3 p'}{(2\pi\hbar)^3}, \quad (13.3.1.1)$$

где  $\theta$  — угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{B}_0$ , а частоты  $\omega_{\pm}$  определяются соотношениями (5.1.2.6); в них вместо  $\omega_{\pm}$  приняты обозначения  $\omega_{\pm}^{(1)}(\theta)$  и  $\omega_{\pm}^{(2)}(\theta)$ .

**13.3.2. Поляризационные потери энергии частицы, обусловленные взаимодействием с продольным полем.** Умножая (13.3.1.1) на  $\hbar\omega$  и интегрируя по  $\mathbf{q}$ , найдем энергию, переданную частицей плазменным колебаниям с волновыми векторами, меньшими некоторого значения  $q_0$  [17]:

$$\left( \frac{d\mathcal{E}}{dt} \right)_{q < q_0} = - \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ \ln \frac{q_0 v}{\omega_{pe}} - f \left( \alpha, \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}} \right) \right\}, \quad (13.3.2.1)$$

где

$$f(\alpha, u) = \frac{1}{2\pi u^2} \left\{ \int_0^{\alpha_1} \ln z g(z) dz - \int_{\alpha_2}^{\alpha_3} \ln z g(z) dz \right\} - \ln u, \quad (13.3.2.2)$$

$$g(z) = z(1-z) \{ z(z-z_1)(z-z_2)(z_3-z) \}^{-1/2},$$

$$z_{1,2} = 1/2(1+u^2) \mp 1/2 \sqrt{(1+u^2)^2 - 4u^2 \sin^2 \alpha},$$

$$z_3 = 1+u^2.$$

Найдем полные поляризационные потери энергии быстрой частицы, движущейся в плазме в присутствии магнитного поля. При учете близких столкновений (большие переданные импульсы)

можно пренебречь отличием движения частицы от прямолинейного и воспользоваться для потерь энергии в единицу времени формулой (13.1.4.22). |

Если угол  $\alpha$  между скоростью частицы и магнитным полем удовлетворяет одному из неравенств

$$\sin \alpha \gg \frac{\omega_{Be}}{\max\{\omega_{pe}, \omega_{Be}\}}, \quad \sin \alpha \ll \frac{\omega_{Be}}{\max\{\omega_{pe}, \omega_{Be}\}}, \quad (13.3.2.3)$$

то закручиванием частицы можно пренебречь также и при учете далеких столкновений. При этом (как и в отсутствие магнитного поля) рассеяние быстрой частицы происходит главным образом за счет испускания и поглощения плазменных волн, так что для определения потерь энергии можно воспользоваться формулой (13.3.2.1).

Складывая вклады от близких и далеких столкновений, получим окончательно следующие выражения для поляризационных потерь энергии быстрой частицы:

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p &= -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ \ln \frac{2mm_c v^2}{(m+m_e)\hbar\omega_{pe}} - f\left(\alpha, \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}\right) \right\}, \quad \frac{e^2}{\hbar v} \ll 1, \\ \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p &= -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ \ln \frac{2}{\gamma} \frac{mm_c v^3}{(m+m_e)Z e^2 \omega_{pe}} - f\left(\alpha, \frac{\omega_{pe}}{\omega_{Be}}\right) \right\}, \\ &\quad \frac{e^2}{\hbar v} \gg 1, \end{aligned} \right\} \quad (13.3.2.4)$$

где функция  $f(\alpha, u)$  определяется формулой (13.3.2.2),  $\gamma$  — константа Эйлера.

Первые слагаемые в этих выражениях представляют собой полные потери энергии быстрой частицы в свободной плазме (ср. (13.1.2.16), (13.1.2.18)), а вторые описывают влияние магнитного поля; они зависят от направления движения частицы по отношению к направлению магнитного поля и обращаются в нуль при  $\omega_{Be} = 0$ .

Мы видим, что полные поляризационные потери энергии быстрой частицы в присутствии магнитного поля пропорциональны плотности плазмы и сравнительно слабо (логарифмически) зависят от величины магнитного поля. Как и в случае свободной плазмы, потери не зависят от температуры (если флуктуации в плазме не слишком отличаются от равновесных).

В случае сильного магнитного поля ( $\omega_{Be} \gg \omega_{pe}$ ) выражения (13.3.2.4) значительно упрощаются: входящая в них функция  $f(\alpha, u)$  имеет при этом вид

$$f(\alpha, u) = \frac{1}{4} \sin^2 \alpha \left[ 1 + \ln \left( \frac{1}{4} u \sin^2 \alpha \right) \right] - \ln u \quad (13.3.2.5)$$

(угол  $\alpha$  предполагается не равным 0 или  $\pi$ ).

Как уже указывалось, выражения (13.3.2.4) справедливы, если угол  $\alpha$  удовлетворяет одному из условий (13.3.2.3). Это требование выполняется, в частности, для частицы любой массы, движущейся вдоль магнитного поля. При этом из (13.3.2.4) следует, что

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \ln \frac{2mm_e v^2}{(m+m_e)\hbar\sqrt{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2}} \quad (13.3.2.6)$$

(мы считаем для определенности, что  $e^2/\hbar v \gg 1$ ).

В случае тяжелой частицы формулами (13.3.2.4) можно пользоваться практически при любых углах  $\alpha$ . В частности, если такая частица движется перпендикулярно к направлению поля, то выражение для потерь энергии имеет вид (предполагается, что  $e^2/\hbar v \ll 1$ )

$$\left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p = -\frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ \ln \frac{4mv^2}{\hbar\sqrt{2\omega_{pe}\omega_{Be}}} - 1/4 \right\}. \quad (13.3.2.7)$$

Формулы (13.3.2.4)–(13.3.2.7) определяют потери энергии нерелятивистской частицы. Если через плазму движется релятивистская частица, то ее потери энергии по-прежнему будут пропорциональны  $Z^2 e^2 \omega_{pe}^2/v$  и сравнительно слабо зависят от магнитного поля.

Приведем выражения для величины

$$F(\omega_{Be}, \beta) = \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_p - \left(\frac{d\mathcal{E}}{dt}\right)_{p, \mathbf{v}=0}, \quad (13.3.2.8)$$

характеризующей влияние магнитного поля на потери энергии частицы.

Если выполняется условие  $\omega_{Be}^2/\omega_{pe}^2 \leq 4\beta^2/(1-\beta^2)$ , где  $\beta = v/c$ , то

$$F(\omega_{Be}, \beta) = \frac{Z^2 e^2 \omega_{Be}^2}{4v} (1-\beta^2)(2-\beta^2). \quad (13.3.2.9)$$

Если  $4\beta^2/(1-\beta^2) \leq \omega_{Be}^2/\omega_{pe}^2 \leq 4\beta^2/(1-\beta^2)^2$ , то

$$F(\omega_{Be}, \beta) = \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ 1/2 \ln \frac{1+x}{1-x} + 1/4 (1-\beta^2)(2-\beta^2) \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2} - \frac{1-\beta^2}{4\beta^2} \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2} x \right\}, \quad (13.3.2.10)$$

$$\text{где } x = \left( 1 - \frac{4\beta^2}{1-\beta^2} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega_{Be}^2} \right)^{1/2}.$$

Наконец, если  $\omega_{Be}^2/\omega_{pe}^2 \geq 4\beta^2/(1-\beta^2)^2$ , то

$$F(\omega_{Be}, \beta) = \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{v} \left\{ 1/2 \ln \frac{(1+x)(1+\beta^2-y)}{(1-x)(1+\beta^2+y)} + \frac{(1-\beta^2)}{4\beta^2} \frac{\omega_{Be}^2}{\omega_{pe}^2} [\beta^2(2-\beta^2) - x + (1-\beta^2)y] \right\}, \quad (13.3.2.11)$$

где

$$y = ((1 - \beta^2)^2 - 4\beta^2\omega_{pe}^2/\omega_{Be}^2)^{1/2}.$$

Полагая, что в соотношении (13.3.2.11)  $\beta \ll 1$  и используя (13.1.2.18), можно получить выражение (13.3.2.6) для потерь энергии нерелятивистской частицы, движущейся вдоль магнитного поля.

**13.3.3. Учет закручивания.** Остановимся еще кратко на случае, когда неравенства (13.3.2.3) не выполняются и необходимо учитывать усложнение движения пролетающей частицы, вызываемое магнитным полем [17, 19]. Как известно, движение частицы в магнитном поле определяется проекцией ее импульса на направление поля  $p_z$ , квантовым числом  $\nu$ , характеризующим движение в плоскости, перпендикулярной  $\mathbf{B}_0$ , и координатой центра ларморовской окружности. Энергия частицы в магнитном поле имеет вид  $\mathcal{E}_{\nu p_z} = (\nu + 1/2)\hbar\omega_{Bz} + p_z^2/2m$ .

Так же, как и в отсутствие поля, вероятность рассеяния частицы можно связать со спектральным распределением флуктуаций плотности заряда. Мы не будем излагать здесь вывод, а приведем только выражение для отнесенной к единице времени вероятности перехода частицы из состояния с квантовыми числами  $\nu, p_z$  в состояние с квантовыми числами  $\nu', p_z'$  (усредненной по начальным и просуммированной по конечным значениям координаты центра ларморовской окружности частицы):

$$dw_{\nu, p_z \rightarrow \nu', p_z'} = w_{\nu, p_z \rightarrow \nu', p_z'} \frac{dp_z'}{2\pi\hbar},$$

$$w_{\nu, p_z \rightarrow \nu', p_z'} = \frac{Z^2 e^2}{\hbar^2} \int \Lambda_{\nu\nu'} \left( \frac{\hbar q_{\perp}^2}{2m\omega_{Bz}} \right) \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} \frac{d^2 q_{\perp}}{(2\pi)^2}, \quad (13.3.3.1)$$

где  $\hbar\omega$  и  $\hbar q_z$  — изменения энергии и продольной компоненты импульса частицы  $\hbar\omega = \hbar(\nu' - \nu)\omega_{Bz} + (p_z'^2 - p_z^2)/2m$ ,  $\hbar q_z = p_z' - p_z$ ,

$\Lambda_{\nu\nu'}(a) = \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{ax}) L_{\nu}(x) L_{\nu'}(x) e^{-x} dx$  ( $L_{\nu}(x)$  — полином Лагерра  $J_0(x)$  — функция Бесселя).

Умножая (13.3.3.1) на  $\hbar\omega$ , суммируя по  $\nu'$  и интегрируя по  $p_z'$ , найдем полные потери энергии частицы в единицу времени

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2 e^2}{8\pi^3 \hbar} \sum_{\nu'} \int \omega \Lambda_{\nu\nu'} \left( \frac{\hbar q_{\perp}^2}{2m\omega_{Bz}} \right) \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} \delta \left[ \omega - (\nu' - \nu)\omega_{Bz} - \frac{p_z'^2 - p_z^2}{2m\hbar} \right] d\omega d^3 q. \quad (13.3.3.2)$$

Эта формула полностью учитывает все квантовые эффекты, если в качестве  $\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}$  использовать квантовомеханическое вы-

ражение для спектрального распределения флуктуаций потенциала. Мы, однако, ограничимся здесь рассмотрением только классического случая.

Используя (11.1.2.20), нетрудно показать, что с точностью до членов, линейных по  $\hbar$ , справедливо соотношение

$$\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega} = \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c + \frac{4\pi\hbar}{\varepsilon_{ij}(\mathbf{q}, \omega) q_i q_j}. \quad (13.3.3.3)$$

Учитывая эффект отдачи, как и в п. 13.1.4. и разлагая  $\Lambda_{\nu\nu}$  и  $\delta$ -функцию в ряды по степеням  $\hbar$ , получим, используя свойство симметрии классической функции  $\langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}, -\omega}^c = \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}, \omega}^c$ , следующую формулу для изменения энергии заряженной частицы, движущейся вдоль магнитного поля [19]:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & \frac{Z^2 e^2}{2\pi^2} \operatorname{Im} \int \frac{\omega}{\varepsilon_{ij}(\mathbf{q}, \omega) q_i q_j} \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}) d\omega d^3q - \\ & - \frac{Z^2 e^2}{16\pi^3 m} \int \omega \langle \varphi^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^c \left\{ \frac{q_1^2}{2\omega_{Bz}} [\delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} + \omega_{Bz}) - \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \omega_{Bz}) + \right. \\ & \left. + q_x^2 \delta'(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v}) \right\} d\omega d^3q, \quad (13.3.3.4) \end{aligned}$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость частицы и  $\varepsilon_{ij}(\mathbf{q}, \omega)$  — тензор диэлектрической проницаемости плазмы.

Первое слагаемое в формуле (13.3.3.4) определяет поляризационные потери энергии заряженной частицы, движущейся в магнитоактивной плазме, а второе — изменение энергии, связанное с флуктуациями продольного электрического поля в плазме. Эта формула справедлива для равновесной плазмы, а также для неравновесной плазмы, если не учитывать движения ионов.

**13.3.4. Черенковское излучение заряда, движущегося в плазме в магнитном поле.** В заключение параграфа рассмотрим вопрос о черенковском излучении при движении заряженной частицы в магнитоактивной плазме [20—22]\*). Как уже отмечалось в § 13.1, в отсутствие магнитного поля фазовые скорости поперечных волн в плазме больше скорости света; поэтому черенковское излучение в свободной плазме невозможно. При наличии внешнего магнитного поля в определенной области частот показатель преломления плазмы больше единицы, т. е. фазовые скорости соответствующих волн меньше скорости света, и поэтому при движении заряженной частицы становится возможным излучение электромагнитных волн (черенковское излучение).

Рассмотрим подробнее черенковское излучение в этом случае [21]. Будем считать, что скорость частицы значительно больше

\*) Вопрос о потерях энергии заряженной частицы в анизотропной среде исследован в [23].

тепловой скорости электронов плазмы. Тогда можно пренебречь тепловым движением электронов и рассматривать плазму как оптически активную анизотропную среду, характеризующуюся тензором диэлектрической проницаемости

$$\epsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \epsilon_1 & -i\epsilon_2 & 0 \\ i\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{pmatrix}, \quad (13.3.4.1)$$

где

$$\epsilon_1 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{pe}^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\omega_{Be}}{\omega} \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2 - \omega_{pe}^2}, \quad \epsilon_3 = 1 - \frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}, \quad (13.3.4.2)$$

$\omega_{pe} = eB_0/m_e c$ ,  $\mathbf{B}_0$  — внешнее поле, ось  $z$  выбрана вдоль поля.

Компонента Фурье напряженности поля, создаваемого движущимся зарядом, определяется следующим выражением:

$$E_i(\mathbf{k}, \omega) = -i \frac{Ze}{2\pi^2\omega} \Lambda_{ij}^{-1} v_j \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}). \quad (13.3.4.3)$$

Для вычисления потерь энергии движущегося заряда воспользуемся известным уже нам соотношением

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = ZevE|_{\mathbf{r}=\mathbf{v}t}, \quad (13.3.4.4)$$

где значение поля берется в точке нахождения заряда. Используя выражение (13.3.4.3) для поля, получим следующую формулу для потерь энергии частицы в единицу времени, обусловленных далекими столкновениями:

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -i \frac{Z^2 e^2}{2\pi^2} \iint_{k < k_0} \frac{1}{\omega} \Lambda_{ij}^{-1}(\mathbf{k}, \omega) v_i v_j \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}) d\omega d^3k. \quad (13.3.4.5)$$

Интегрирование по  $k$  следует производить здесь до некоторого максимального значения  $k_0$ , равного по порядку величины  $b_0^{-1}$ , где  $b_0$  — минимальное значение параметра столкновений.

Воспользуемся теперь явным видом тензора  $\Lambda_{ij}$  (см. (11.2.7.1)) и определениями (5.1.1.9) показателей преломления для обыкновенных и необыкновенных волн. Тогда при движении частицы вдоль магнитного поля мы получим следующую формулу для  $\frac{d\mathcal{E}}{dt}$ :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}}{dt} = & -i \frac{Z^2 e^2 v^2}{2\pi^2 c^3} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\mathcal{N}_0} d\mathcal{N} \int_0^{\mathcal{N}_0} d\mathcal{N}' \mathcal{N}'^2 \times \\ & \times \frac{\mathcal{N}^4 \cos^2 \theta - \mathcal{N}'^2 \epsilon_1 (1 + \cos^2 \theta) + \epsilon_1^2 - \epsilon_2^2}{(\epsilon_1 \sin^2 \theta + \epsilon_3 \cos^2 \theta) (\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}'^2(\theta)) (\mathcal{N}^2 - \mathcal{N}^{\prime 2}(\theta))} \omega \delta(\mathcal{N}' \beta \cos \theta - 1), \end{aligned} \quad (13.3.4.6)$$

где вместо  $k$  введена новая переменная интегрирования  $\mathcal{N} = kc/\omega$ . Интегрирование по углам можно выполнить сразу благодаря наличию  $\delta$ -функции: при интегрировании по  $\mathcal{N}'$  следует ограни-

читься областью от  $\beta^{-1}$  до  $\mathcal{N}_0 = k_0 c / \omega$ . В результате интегрирования найдем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{Z^2 e^2}{\pi v} \operatorname{Re} i \int_0^{\infty} \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_+^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2)} \ln \frac{(\mathcal{N}_0^2 - \mathcal{N}_+^2) \beta^2}{1 - \mathcal{N}_+^2 \beta^2} \omega d\omega -$$

$$-\frac{Z^2 e^2}{\pi v} \operatorname{Re} i \int_0^{\infty} \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_-^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2)} \ln \frac{(\mathcal{N}_0^2 - \mathcal{N}_-^2) \beta^2}{1 - \mathcal{N}_-^2 \beta^2} \omega d\omega, \quad (13.3.4.7)$$

где

$$\mathcal{N}_{\pm}^2 = \{(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_1 \varepsilon_3) \beta^2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \pm [(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 \beta^4 -$$

$$- 2\varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \beta^2 + 2\varepsilon_3 (2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \beta^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2]^{1/2}\} / 2\varepsilon_1 \beta^2 \quad (13.3.4.8)$$

— значения показателей преломления в направлениях максимумов излучения, определяемых равенствами

$$\cos^2 \theta_{\pm} = 1 / \beta^2 \mathcal{N}_{\pm}^2(\theta_{\pm}).$$

Очевидно, вклад в выражение (13.3.4.7) будут вносить области частот, где аргументы логарифмов принимают отрицательные значения и, кроме того, области, в которых подынтегральные выражения имеют полюсы, так как только в этих случаях  $d\mathcal{E}/dt$  будет отлично от нуля. Таким образом, имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2 e^2}{v} \int \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_+^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2)} \omega d\omega +$$

$$+ \frac{Z^2 e^2}{v} \int \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_-^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2)} \omega d\omega -$$

$$- \frac{Z^2 e^2}{v} \sum_r \frac{\omega_r}{\left| \frac{d\varepsilon_1}{d\omega} \right|_r} \ln \left[ 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \left| \frac{k_0^2 v^2}{\omega_r^2} \right| \right], \quad (13.3.4.9)$$

где в первых двух слагаемых интегрирование производится по областям частот, определяемым соответственно неравенствами

$$\mathcal{N}_0^2 > \mathcal{N}_+^2 > \beta^{-2}, \quad \mathcal{N}_0^2 > \mathcal{N}_-^2 > \beta^{-2}, \quad (13.3.4.10)$$

а в третьем слагаемом суммирование производится по тем частотам  $\omega_r$ , при которых  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  одновременно обращаются в нуль. Подставляя  $\mathcal{N}_+^2$  и  $\mathcal{N}_-^2$  в явном виде, окончательно получим [21]

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{Z^2 e^2}{2v} \int \left( \beta^2 - \frac{1}{\varepsilon_1} \right) \{ 1 \pm [\varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3) \beta^4 -$$

$$- (2\varepsilon_1^2 - 2\varepsilon_1 \varepsilon_3 + \varepsilon_2^2) \beta^2 + \varepsilon_1 - \varepsilon_3] (1 - \varepsilon_1 \beta^2)^{-1} [(\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 - \varepsilon_1 \varepsilon_3)^2 \beta^4 -$$

$$- 2\varepsilon_1 (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) \beta^2 + 2\varepsilon_3 (2\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2) \beta^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2]^{-1/2} \} \omega d\omega -$$

$$- \frac{Z^2 e^2}{2v} \sum_r \frac{\omega_r}{\left| \frac{d\varepsilon_1}{d\omega} \right|_r} \ln \left[ 1 + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_3} \left| \frac{k_0^2 v^2}{\omega_r^2} \right| \right], \quad (13.3.4.11)$$

где область интегрирования определяется неравенствами (13.3.4.10).

Первое слагаемое здесь представляет собой потери энергии частицы на черенковское излучение, а второе — собственно поляризаационные потери.

Чтобы убедиться в этом, выясним характер потерь энергии, для чего вычислим поток энергии через цилиндрическую поверхность, окружающую траекторию заряда. Сначала определим поле, возникающее в оптически активной анизотропной среде при движении точечного заряда. Используя обратные преобразования Фурье, получим с помощью (13.3.4.3) и соотношений

$$\int_0^{2\pi} \exp(i\alpha r \cos \theta) d\theta = 2\pi J_0(\alpha r),$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\alpha J_0(\alpha r)}{\alpha^2 + k^2} d\alpha = K_0(kr), \quad \text{Re } k > 0,$$

следующие выражения для составляющих напряженности электрического поля в цилиндрической системе координат:

$$E_z(\mathbf{r}, t) =$$

$$= -i \frac{Ze}{\pi v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega}{\varepsilon_1} \left\{ \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_+^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2} K_0(k_+ r) + \right. \\ \left. + \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_-^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2} K_0(k_- r) \right\} \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega,$$

$$E_r(\mathbf{r}, t) = \frac{Ze}{\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_1} \left\{ \frac{\mathcal{N}_+^2 - \varepsilon_1}{\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2} k_+ K_1(k_+ r) + \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{N}_-^2 - \varepsilon_1}{\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2} k_- K_1(k_- r) \right\} \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega, \quad (13.3.4.12)$$

$$E_\varphi(\mathbf{r}, t) = i \frac{Ze}{\pi v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1(\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2)} (k_+ K_1(k_+ r) - \\ - k_- K_1(k_- r)) \exp\left[i\omega\left(\frac{z}{v} - t\right)\right] d\omega,$$

где

$$k_{\pm}^2 = (\omega^2/v^2)(1 - \beta^2 \mathcal{N}_{\pm}^2),$$

а  $\mathcal{N}_{\pm}^2$  определяются выражениями (13.3.4.8).

Аналогичным образом, для напряженности магнитного поля получим

$$\begin{aligned}
 B_z(\mathbf{r}, t) &= -\frac{Ze}{\pi^2 v^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \left\{ \frac{1 - \beta^2 \mathcal{N}_+^2}{\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2} K_0(k_+ r) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1 - \beta^2 \mathcal{N}_-^2}{\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2} K_0(k_- r) \right\} \exp[i\omega(z/v - t)] \omega d\omega, \\
 B_r(\mathbf{r}, t) &= -i \frac{Ze}{\pi^2 v} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2)} \{k_+ K_1(k_+ r) - \\
 &\quad - k_- K_1(k_- r)\} \exp[i\omega(z/v - t)] d\omega, \\
 B_\varphi(\mathbf{r}, t) &= \frac{Ze}{\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\varepsilon_1} \left\{ \frac{\varepsilon_1 \mathcal{N}_+^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2} \{k_+ K_1(k_+ r) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\varepsilon_1 \mathcal{N}_-^2 - \varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}{\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2} k_- K_1(k_- r) \right\} \exp[i\omega(z/v - t)] d\omega.
 \end{aligned} \tag{13.3.4.13}$$

Оптическая активность плазмы приводит к возникновению составляющей напряженности электрического поля  $E_\varphi$  и составляющих напряженности магнитного поля  $B_z$  и  $B_r$ , которые отсутствуют при движении заряда в неактивной среде.

Используя теорему Пойнтинга, определим теперь количество энергии, излучаемое зарядом на единице его пути

$$\frac{d\delta}{dz} = \frac{c}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (E_z B_\varphi - E_\varphi B_z) 2\pi r dt. \tag{13.3.4.14}$$

Подставляя сюда (13.3.4.12) и (13.3.4.13), после несложных преобразований получим

$$\begin{aligned}
 \frac{d\delta}{dt} &= -\frac{Z^2 e^2}{\pi v} 2r \operatorname{Re} t \int_0^\infty \left\{ \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_+^2 - \varepsilon_1) - \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2)} K_0(k_+ r) k_+^* K_1(k_+^* r) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2)(\mathcal{N}_-^2 - \varepsilon_1) - \varepsilon_2^2 \varepsilon_3^2}{\varepsilon_2 (\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2)} K_0(k_- r) k_-^* K_1(k_-^* r) \right\} \omega d\omega.
 \end{aligned} \tag{13.3.4.15}$$

Если  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  не имеют общих нулей, то вклад в полученное выражение вносят только частоты, при которых  $k_+$  или  $k_-$  мнимы. Замечая, что при мнимом  $k$  справедливо соотношение

$$k^* K_1(k^* r) K_0(kr) - k K_1(kr) K_0(k^* r) = 1/2 t\pi,$$

получим для потерь на черенковское излучение выражение

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{Z^2 e^2}{v} \int_{\beta^2 \mathcal{N}_+^2 > 1} \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2) (\mathcal{N}_+^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_+^2 - \mathcal{N}_-^2)} \omega d\omega + \\ + \frac{Z^2 e^2}{v} \int_{\beta^2 \mathcal{N}_-^2 > 1} \frac{(1 - \varepsilon_1 \beta^2) (\mathcal{N}_-^2 - \varepsilon_1) - \beta^2 \varepsilon_2^2}{\varepsilon_1 (\mathcal{N}_-^2 - \mathcal{N}_+^2)} \omega d\omega, \quad (13.3.4.16)$$

совпадающее с суммой первых двух слагаемых в (13.3.4.9).

Заметим, что второе слагаемое в (13.3.4.16) логарифмически расходится. Это связано с тем, что при нахождении полей  $E_x(\mathbf{r}, t)$  и  $E_\varphi(\mathbf{r}, t)$  мы интегрировали по  $k$  от 0 до  $\infty$ , тогда как при  $k \rightarrow \infty$  макроскопическая электродинамика неприменима. Очевидно, в (13.3.4.16) следует ограничиться областью частот  $\beta^2 \mathcal{N}_0^2 > \beta^2 \mathcal{N}_\pm^2 > 1$ .

Как известно, полные поляризационные потери (с учетом близких столкновений) в изотропной среде не зависят от параметра  $k_0^2 \sim b_0^{-1}$ . Этот параметр, входящий под знаком логарифма в формулу для потерь на близких столкновениях, а также для поляризационных потерь, соответствующих далеким столкновениям и учитывающих взаимодействие движущегося заряда с продольным полем, в окончательном выражении для суммарных потерь сокращается. В анизотропной среде потери на близкие столкновения определяются такой же формулой, как и в изотропной среде и в нее тоже входит под знаком логарифма параметр  $k_0$ . Но, кроме того, он входит еще (также под знаком логарифма) в выражение для потерь на излучение необыкновенных волн (которые при  $\mathcal{N}^2 \rightarrow \infty$  являются продольными). При этом полные потери с учетом близких столкновений в анизотропной среде, так же как и в изотропной, не зависят от параметра  $k_0$ .

Используя (13.3.4.2), можно представить выражение для потерь энергии заряженной частицы, соответствующих далеким столкновениям, в виде [9]

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{Z^2 e^2}{2v} \int \left| \frac{(1 - \beta^2) (\omega^2 - \omega_{Be}^2) + \beta^2 \omega_{pe}^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2 - \omega^2} \times \right. \\ \left. \times \left\{ 1 \mp \frac{\eta \omega_{Be} [(1 - \beta^2)^2 (\omega^2 - \omega_{Be}^2) + \beta^2 (3 - \beta^2) \omega_{pe}^2]}{[(1 - \beta^2) (\omega^2 - \omega_{Be}^2) + \beta^2 \omega_{pe}^2] [(1 - \beta^2)^2 \omega_{pe}^2 + 4\beta^2 (\omega^2 - \omega_{pe}^2)]^{1/2}} \right\} \right| \omega d\omega, \quad (13.3.4.17)$$

где  $\eta = \frac{\omega^2 - \omega_{Be}^2}{\omega^2 - \omega_{Be}^2}$  и  $\beta = v/c$ ; интегрирование производится по областям частот, для которых выполняются неравенства

$$k_0^2 \omega^2 / \omega^2 \geq \mathcal{N}_\pm^2 \beta^2 \geq 1. \quad (13.3.4.18)$$

Мы видим, что при наличии внешнего магнитного поля потери энергии вследствие далеким столкновений связаны с черенковским излучением.

Интегрирование по частотам в (13.3.4.17) удается выполнить только в некоторых предельных случаях. Так, при движении частицы с нерелятивистской скоростью имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{2\nu} \ln \frac{k_0^2 \nu^2}{\omega_{pe}^2 + \omega_{Be}^2}, \quad \beta \ll 1, \quad \beta \ll \omega_{pe}/\omega_{Be}. \quad (13.3.4.19)$$

Если  $(1 - \beta^2) \gg \omega_{pe}/\omega_{Be}$  (сильное магнитное поле), то

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{2\nu} \left\{ \ln \frac{k_0^2 \nu^2}{(1 - \beta^2) \omega_{Be}^2} - \beta^2 \right\}. \quad (13.3.4.20)$$

Наконец, в предельном ультрарелятивистском случае имеем

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = - \frac{Z^2 e^2 \omega_{pe}^2}{2\nu} \ln \frac{k_0^2 \nu^2}{\omega_{pe}^2}, \quad 1 - \beta^2 \ll 1, \quad 1 - \beta^2 \ll \omega_{pe}/\omega_{Be}. \quad (13.3.4.21)$$

## § 13.4. Взаимодействие заряженных частиц с неравновесной плазмой

**13.4.1. Рассеяние заряженных частиц на критических флуктуациях.** В предыдущих параграфах мы рассматривали главным образом взаимодействие пробной частицы с равновесной плазмой. Теперь мы перейдем к исследованию взаимодействия заряженных частиц с неравновесной плазмой и покажем, что если последняя находится в состоянии, близком к неустойчивому, то потери энергии частиц на возбуждение коллективных колебаний могут быть аномально велики.

Рассмотрим вначале плазму, состоящую из холодных ионов и горячих электронов, движущихся относительно ионов. В такой плазме пролетающая пробная частица может интенсивно взаимодействовать со звуковыми колебаниями.

Подставляя в (13.1.4.6) выражение (11.5.3.20) для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда, связанных со звуковыми колебаниями, найдем отнесенное к одному электрону плазмы сечение рассеяния частицы с возбуждением и поглощением неизотермического звука:

$$d\sigma \equiv \frac{d\Sigma}{n_0} = \left( \frac{2\pi e Z T_e}{\omega_{pe}} \right)^2 \frac{v_s \sqrt{(\Delta p)^2 + p^2 \vartheta^2}}{\hbar m_e \nu |v \Delta p - (\mathbf{p} - \mathbf{p}') \mathbf{u}|} \left\{ \delta(v \Delta p - v_s \sqrt{(\Delta p)^2 + p^2 \vartheta^2}) + \delta(v \Delta p + v_s \sqrt{(\Delta p)^2 + p^2 \vartheta^2}) \right\} \frac{d^3 p'}{n_0 (2\pi \hbar)^3}, \quad (13.4.1.1)$$

где  $\mathbf{u}$  — направленная скорость электронов плазмы,  $\Delta p = p' - p$ ,  $v = p/m$  и  $\vartheta$  — угол рассеяния (угол между векторами  $\mathbf{p}$  и  $\mathbf{p}'$ ). Это соотношение справедливо, если угол рассеяния и переданная энергия достаточно малы ( $pa_0 \vartheta \ll \hbar$ ,  $\Delta pa_0 \ll \hbar$ ); в таких условиях возбуждаются слабозатухающие звуковые колебания.

Интегрируя (13.4.1.1) по модулю вектора  $\mathbf{p}'$ , получим сечение рассеяния частицы, отнесенное к единичному телесному углу,

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \left( \frac{2Ze^2T_e m a_e}{\hbar^2 v_s \omega_{pe} m_e} \right)^2 \frac{(\Theta' - \Theta)^2 + \varphi^2 \sin^2 \Theta}{(\Theta' - \Theta)^2 (1 - u^2 \sin^2 \Theta / v_s^2) + \varphi^2 \sin^2 \Theta}, \quad (13.4.1.2)$$

где  $\Theta, \Theta'$  — углы, образуемые векторами  $\mathbf{p}, \mathbf{p}'$  с направлением  $\mathbf{u}$ ,  $\varphi$  — угол между плоскостями  $(\mathbf{p}, \mathbf{u})$  и  $(\mathbf{p}', \mathbf{u})$ , причем  $\Theta' \approx \Theta$  и  $\varphi \ll 1$  (мы считаем для определенности  $v \gg v_s$ ). Легко видеть, что если  $u/v_s \approx 1$  и частица движется почти перпендикулярно к направлению  $\mathbf{u}$ , то величина  $d\sigma/d\sigma'$  может быть аномально велика.

Отметим, что  $d\sigma/d\sigma'$  обращается в бесконечность только в линейной теории, в рамках которой определено спектральное распределение флуктуаций плотности заряда. На самом же деле, нелинейные эффекты должны приводить к насыщению критических флуктуаций, в результате чего сечение рассеяния должно оставаться конечным. Аналогично нелинейные эффекты накладывают ограничения на аномальный рост интенсивности черенковского излучения и потерь энергии частицы. Здесь мы ограничимся линейной теорией; нелинейная (по энергии плазменных колебаний) задача о взаимодействии пробной частицы с турбулентной плазмой будет рассмотрена ниже.

Используя соотношения (11.5.3.20) и (13.1.4.6), можно определить энергию, теряемую частицей в единицу времени на возбуждение звуковых колебаний, волновой вектор которых лежит в интервале  $(\mathbf{q}, \mathbf{q} + d\mathbf{q})$ :

$$d\mathcal{F}_{\mathbf{q}}^s = \left( \frac{eZT_e}{\omega_{pe}} \right)^2 \frac{(qv_s)^2}{m_e} \left\{ \frac{\delta(\mathbf{q}\mathbf{v} + qv_s + \hbar q^2/2m)}{qv_s + \mathbf{q}\mathbf{u}} - \frac{\delta(\mathbf{q}\mathbf{v} - qv_s + \hbar q^2/2m)}{qv_s - \mathbf{q}\mathbf{u}} \right\} \frac{d^3q}{2\pi\hbar}. \quad (13.4.1.3)$$

Первое слагаемое здесь описывает вынужденное излучение, второе — поглощение колебаний частицей (интересуясь состояниями плазмы, близкими к неустойчивому, когда число звуковых плазмонов в ней очень велико, мы можем пренебречь спонтанным излучением).

Интегрируя (13.4.1.3) по угловым переменным, можно найти интенсивность  $d\mathcal{F}_{\omega}^s$  черенковского излучения в заданном интервале частот  $(\omega, \omega + d\omega)$ . В простейшем случае, когда  $\mathbf{v} \parallel \mathbf{u}$ , получим

$$d\mathcal{F}_{\omega}^s = \left( \frac{eZT_e \omega}{\omega_{pe} v_s^2} \right)^2 \frac{\omega u}{m_e m (v - u)^2} d\omega. \quad (13.4.1.4)$$

Эта формула справедлива, если  $u < v_s$  (при этом звуковые колебания еще устойчивы, так что для спектрального распределения флуктуаций плотности заряда можно пользоваться соотно-

пением (11.5.3.20); кроме того, при выводе ее для определенности полагалось, что  $v - v_s \geq \hbar (ma_s)^{-1}$ .

Интегрируя выражение (13.4.1.4) по частотам, определим полные потери энергии частицы на возбуждение звуковых колебаний

$$\mathcal{P}^s = \left( \frac{eZT_e}{2\omega_{pe}a_1^2} \right)^2 \frac{u}{m_e m (v - u)^2}, \quad (13.4.1.5)$$

где  $a_1$  — величина порядка нескольких дебаевских радиусов. Если скорость пробной частицы  $v$ , скорость звука  $v_s$  и направленная скорость электронов  $u$  близки друг к другу, то величина  $\mathcal{P}^s$  очень велика и может превосходить потери энергии частицы, обусловленные парными соударениями.

В общем случае, когда угол  $\Theta_0$  между направлением движения частицы и направлением  $u$  отличен от нуля, аномально большая интенсивность черенковского излучения звуковых колебаний имеет место, если  $v \cos \Theta_0 \approx u \approx v_s$ . При этом

$$d\mathcal{P}_\omega^s = \left( \frac{eZT_e\omega}{\omega_{pe}v_s^2} \right)^2 \frac{\omega v_s}{m_e m (v \cos \Theta_0 - u)^2} d\omega. \quad (13.4.1.6)$$

Для полных потерь энергии частицы на возбуждение звуковых колебаний получим отсюда

$$\mathcal{P}^s = \left( \frac{eZT_e}{2\omega_{pe}a_1^2} \right)^2 \frac{v_s}{m_e m (v \cos \Theta_0 - u)^2}. \quad (13.4.1.7)$$

Если  $(v \cos \Theta_0 - u)^2 < (1/4 m_e \omega v / m) (a_s/a_1)^2$ , то  $\mathcal{P}^s > \mathcal{P}_0$ , где  $\mathcal{P}_0 = (eZ\omega_{pe})^2 v^{-1}$  — величина порядка потерь энергии частицы в результате парных соударений (без учета кулоновского логарифма).

Приведем еще выражение для углового распределения черенковского излучения пробной частицей звуковых колебаний в плазме с направленным движением электронов:

$$\frac{d\mathcal{P}^s}{d\omega'} = \frac{\omega_{pe}T_e}{6\pi} \left( \frac{a_e}{a_1} \right)^3 \frac{e^2 Z^2 v_s}{\hbar v_e v} \left\{ \frac{\delta(\cos \chi + v_s/v)}{1 + u \cos \Theta/v_s} - \frac{\delta(\cos \chi - v_s/v)}{1 - u \cos \Theta/v_s} \right\}, \quad (13.4.1.8)$$

где  $d\omega'$  — элемент телесного угла, в котором лежит вектор  $\mathbf{q}$ ,  $\Theta$  — угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{u}$  и  $\chi$  — угол между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v}$ . Последней формулой можно пользоваться, когда  $|\cos \Theta| < v_s/u$ , так как при этом рассматриваемые звуковые колебания не нарастают. Легко видеть, что при  $|\cos \Theta| \rightarrow v_s/u$  коэффициент при одной из  $\delta$ -функций в выражении (13.4.1.8) неограниченно возрастает.

Остановимся теперь на вопросе о рассеянии заряженных частиц в плазме, через которую проходит скомпенсированный пучок заряженных частиц. Будем считать, что скорость пучка  $u$  значительно больше тепловой скорости электронов плазмы,

(13.4.2.7) в формулу (13.4.2.5). Выполняя интегрирование по частотам, меньшим некоторой максимальной частоты  $v_s/a_1$ , где  $a_1$  — величина порядка нескольких дебаевских радиусов, получим

$$\mathcal{F}^s = \frac{e^2 Z^2 \omega_p^2 m_e}{v_s m} \alpha g(\mathbf{v}), \quad (13.4.2.22)$$

где  $\alpha = 1/4 a_0^4 a_1^{-4}$  и

$$g(\mathbf{v}) = v_s^{-2} (\mathbf{u}\mathbf{v} - u^2) \{ (\mathbf{u}\mathbf{v}/v_s^2 - 1)^2 - (u^2/v_s^2 - 1)(v^2/v_s^2 - 1) \}^{-3/2}. \quad (13.4.2.23)$$

Отметим, что (13.4.2.22) учитывает вынужденное излучение и поглощение частицей звуковых колебаний и не учитывает других процессов, приводящих к изменению энергии частицы (близких соударений, спонтанного излучения звуковых колебаний, излучения и поглощения других типов колебаний плазмы). Поэтому выражение (13.4.2.22) определяет полные потери энергии частицы лишь при углах  $\Theta$ , достаточно близких к  $\Theta_{\pm}$ , когда относительный вклад других процессов в изменение ее энергии мал.

Если  $\Theta < \Theta_+$  и  $u > v$ , то изменение энергии частицы в единицу времени, вообще говоря, меньше, чем при  $\Theta_+ < \Theta < \Theta_-$ . В этом случае, чтобы установить зависимость величины  $\mathcal{F}^s$  от  $\mathbf{v}$ , необходимо детально знать поведение функции  $T_s(q, \mathbf{q}\mathbf{u})$  при  $\mathbf{q}\mathbf{u} > qv_s$ .

Мы видим, что изменение энергии частицы особенно велико, когда угол  $\Theta$  между направлениями  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  близок к одному из критических углов  $\Theta_{\pm}$ . Согласно формуле (13.4.2.18), полученной без учета дисперсии звука, величина  $\mathcal{F}^s$  при этом пропорциональна  $\zeta^{-3/2}$ . Используя (13.4.2.11), можно показать, что этой формулой следует пользоваться при  $A_3/A_1 \gg r$ , где

$$\left. \begin{aligned} A_3 &= a_0 \int (a_0 q)^2 (\lambda \zeta)^{-1} dq, \\ r &= |v - u| (uv \cos \Theta_{\pm})^{-1/2} (v^2/v_s^2 - 1)^{-1/4}, \end{aligned} \right\} \quad (13.4.2.24)$$

и мы вправе пренебречь влиянием дисперсии звука на величины критических углов. При  $A_3/A_1 \ll r$  выражение (13.4.2.18) для функции  $\mathcal{F}^s$  должно быть заменено следующим выражением:

$$\mathcal{F}^s = \pm \frac{e^2 Z^2 \omega_p^2 m_e}{|\mathbf{v} - \mathbf{u}| m} \left( \frac{u^2 - v_s^2}{v^2 - v_s^2} \right)^{1/2} A_3, \quad (13.4.2.25)$$

где верхний (нижний) знак соответствует случаю  $\Theta \rightarrow \Theta_+$  ( $\Theta \rightarrow \Theta_-$ ).

Если  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{u}$ , то наличие дисперсии звука не накладывает ограничения на рост величины  $\mathcal{F}^s$  вблизи  $\Theta_+$ . В этом случае для

потерь энергии следует пользоваться формулой (13.4.2.20) независимо от соотношения между  $A_1$  и  $A_3$ .

Рассмотрим теперь вопрос об изменении импульса заряженной частицы, обусловленном испусканием и поглощением звуковых волн. Используя формулы (13.1.4.6) и (13.4.2.1), можно определить импульс, передаваемый частицей в единицу времени звуковым колебаниям с волновыми векторами, лежащими в интервале  $(\mathbf{q}, \mathbf{q} + d\mathbf{q})$ :

$$dQ_{\mathbf{q}}^s = -\frac{e^2 Z^2 a_0^2 q}{2\pi\hbar} \{ T_s(\mathbf{q}, \mathbf{qu}) \delta(\mathbf{qv} - qv_s + \hbar q^2/2m) + T_s(\mathbf{q}, -\mathbf{qu}) \delta(\mathbf{qv} + qv_s + \hbar q^2/2m) \} d^3q.$$

Интегрируя  $dQ_{\mathbf{q}}^s$  по  $\mathbf{q}$ , получим

$$Q^s = \frac{e^2 Z^2 a_0^2 uv_s}{\pi m v^2} \int \{ iD(q) + i_u d_u(q) + i_v d_v(q) \} q^4 d\mathbf{q}, \quad (13.4.2.26)$$

где

$$\left. \begin{aligned} i &= (uv \sin \Theta)^{-2} \{ u(v^2 - uv) + v(u^2 - uv) \}, \\ i_u &= (uv \sin \Theta)^{-2} \{ uv^2 - v(uv) \}, \\ i_v &= (uv \sin \Theta)^{-2} \{ vu^2 - u(uv) \}; \end{aligned} \right\} \quad (13.4.2.27)$$

функция  $D(q)$  определяется формулой (13.4.2.5) и

$$\left. \begin{aligned} d_u(q) &= (qv_s)^{-1} \int_0^\pi \{ \cos \Theta - \sin \Theta \cos \varphi (v^2/v_s^2 - 1)^{-1/2} \} \times \\ &\quad \times \{ T_s + (\eta - qv_s) \partial T_s / \partial \eta \}_{\eta=\eta_s} d\varphi, \\ d_v(q) &= v (qv_s u)^{-1} \int_0^\pi T_s(q, \eta_s) d\varphi \end{aligned} \right\} \quad (13.4.2.28)$$

(величина  $\eta_s$  связана с переменной интегрирования  $\varphi$  соотношением (13.4.2.6)).

Для выяснения характера функции  $D$ , как было показано выше, достаточно знать поведение функции  $T_s(q, \mathbf{qu})$  вблизи  $\mathbf{qu} \approx qv_s$ ; для вычисления же величин  $d_u$  и  $d_v$  необходимо знать также явный вид функции  $T_s$  при  $\mathbf{qu} \neq qv_s$ . Несложно, однако, убедиться, что если  $|\Theta - \Theta_\pm| \ll \sin \Theta_\pm$ , где критические углы  $\Theta_\pm$  определяются соотношением (13.4.2.12), то  $|i_u d_u| \ll |iD|$ ,  $|i_v d_v| \ll |iD|$ . Учитывая формулу (13.4.2.4), мы можем, таким образом, связать изменение импульса частицы  $Q^s$  при  $\Theta \approx \Theta_\pm$  с изменением ее энергии  $\mathcal{E}^s$ :

$$Q^s = i \mathcal{E}^s. \quad (13.4.2.29)$$

а температура пучка  $T'$  не слишком мала, так что декремент затухания ленгмюровских колебаний плазмы определяется в основном их взаимодействием с электронами пучка. В этих условиях спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в высокочастотной области ( $\omega \gg qv_e$ ) имеет вид

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^l = 1/2 \frac{T' q^2 \omega_{pe}^2}{|\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \delta(\omega^2 - \omega_{pe}^2). \quad (13.4.1.9)$$

Как известно, наличие горячего пучка всегда приводит к нарастанию коротковолновых ленгмюровских колебаний, для которых  $|\mathbf{q}\mathbf{u}| > \omega_{pe}$ . Не учитывая нелинейных эффектов взаимодействия между флуктуациями, мы можем пользоваться последним соотношением в области волновых векторов, для которых колебания плазмы еще не нарастают.

Подставляя выражение (13.4.1.9) в (13.1.4.6), найдем отношение к одному электрону плазмы дифференциальное сечение рассеяния быстрой частицы ( $v \gg v_e$ ) с возбуждением и поглощением ленгмюровских колебаний

$$d\sigma = \frac{(eZ)^2 T' \omega_{pe}}{2\pi \hbar v n_0 [(\Delta p)^2 + p^2 \vartheta^2]} \left\{ \frac{\delta(v\Delta p - \hbar\omega_{pe})}{\hbar\omega_{pe} - (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{u}} + \frac{\delta(v\Delta p + \hbar\omega_{pe})}{\hbar\omega_{pe} + (\mathbf{p}' - \mathbf{p})\mathbf{u}} \right\} d^3 p'. \quad (13.4.1.10)$$

Эта формула справедлива при тех же ограничениях на  $\Delta p$  и  $\vartheta$ , что и формула (13.4.1.1).

Интегрируя последнее соотношение по модулю вектора  $\mathbf{p}'$ , получим сечение рассеяния частицы, отнесенное к единичному телесному углу

$$\frac{d\sigma}{d\sigma'} = \left( \frac{eZ}{\hbar v \vartheta} \right)^2 \frac{T'}{2\pi n_0} \left\{ |1 - u \cos \Theta'/v - pu (\cos \Theta' - \cos \Theta)/\hbar\omega_{pe}|^{-1} + |1 - u \cos \Theta'/v + pu (\cos \Theta' - \cos \Theta)/\hbar\omega_{pe}|^{-1} \right\} \quad (13.4.1.11)$$

(мы считаем для определенности, что  $\vartheta \gg \hbar\omega_{pe}/pv$ ). Легко видеть, что при некотором значении  $\Theta'$ , близком к  $\Theta$ , выражение для  $d\sigma/d\sigma'$  становится аномально большим.

Используя соотношения (13.1.4.6) и (13.4.1.9), можно определить энергию  $d\mathcal{E}_{\mathbf{q}}^l$ , теряемую пробной частицей в единицу времени на возбуждение ленгмюровских колебаний, волновой вектор которых лежит в интервале  $(\mathbf{q}, \mathbf{q} + d\mathbf{q})$ :

$$d_{\mathcal{E}}^l_{\mathbf{q}} = \frac{e^2 Z^2 \omega_{pe}^2 T'}{2\pi \hbar q^2} \left\{ \frac{\delta(\mathbf{q}\mathbf{v} + \omega_{pe} + \hbar q^2/2m)}{\omega_{pe} + \mathbf{q}\mathbf{u}} - \frac{\delta(\mathbf{q}\mathbf{v} - \omega_{pe} + \hbar q^2/2m)}{\omega_{pe} - \mathbf{q}\mathbf{u}} \right\} d^3 q. \quad (13.4.1.12)$$

Эта формула правильно учитывает взаимодействие частицы с ненарастающими колебаниями, т. е. с колебаниями, волновые векторы которых удовлетворяют неравенству  $|\mathbf{q}\mathbf{u}| < \omega_{pe}$ .

Интегрируя (13.4.1.12) по угловым переменным, найдем интенсивность  $d\mathcal{P}_q^I$  черенковского излучения ленгмюровских колебаний в заданном интервале волновых чисел  $(q, q+dq)$ . В простейшем случае, когда  $\mathbf{v}\parallel\mathbf{u}$ , имеем

$$d\mathcal{P}_q^I = \frac{e^2 Z^2 T' q u}{m(v-u)^2} dq \quad (13.4.1.13)$$

(при выводе этой формулы для определенности предполагалось, что  $v-u \geq \hbar u (m\omega_{pe} a_0^2)^{-1}$ ).

Наконец, интегрируя выражения (13.4.1.13) по  $q$ , найдем полные потери энергии частицы на возбуждение ленгмюровских колебаний

$$\mathcal{P}^I = \frac{e^2 Z^2 T' u}{2a_1^2 m (v-u)^2}. \quad (13.4.1.14)$$

Если скорость частицы  $\mathbf{v}$  и скорость пучка  $\mathbf{u}$  близки друг к другу, то величина  $\mathcal{P}^I$  будет очень велика и может превосходить как потери энергии, обусловленные парными соударениями, так и потери энергии на возбуждение ленгмюровских колебаний в отсутствие пучка. Для этого должно выполняться условие

$$(v-u)^2 < (a_0 u / 2a_1)^2 m_e T' / m T_e.$$

Если угол между  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  отличен от нуля, то в изменение энергии частицы, наряду с устойчивыми колебаниями, вносят вклад и турбулентные ленгмюровские колебания (т. е. колебания, которые в рамках линейной теории неустойчивы).

Приведем еще выражение для углового распределения излученных частицей ленгмюровских волн

$$\frac{d\mathcal{P}^I}{d\Omega'} = \frac{e^2 Z^2 \omega_{pe} T'}{2\pi\hbar (u \cos\Theta - v \cos\chi)}, \quad (13.4.1.15)$$

где  $\Theta$  — угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{u}$ , и  $\chi$  — угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{v}$ . Этой формулой можно пользоваться, если  $v \cos^2\chi > u \cos\Theta \cos\chi$ , так как при этом рассматриваемые ленгмюровские колебания не нарастают. Легко видеть, что при  $|\cos\chi - u \cos\Theta/v| \ll 1$  величина  $d\mathcal{P}^I/d\Omega'$  аномально велика.

Остановимся в заключение на взаимодействии пробной частицы с коротковолновыми колебаниями двухтемпературной плазмы. При  $a_0^{-1} \ll q \ll a_1^{-1}$  ( $a_1 = a_0 \sqrt{T_i/T_e}$  — ионный дебаевский радиус) спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в области средних частот имеет вид

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^I = 1/2 \frac{T_e q^2 \omega_{pi}^2}{|\omega - \mathbf{q}\mathbf{u}|} \delta(\omega^2 - \omega_{pi}^2), \quad (13.4.1.16)$$

где  $\omega_{pi}$  — ионная плазменная частота. Подставляя это выражение в (13.1.4.2), легко найти сечение рассеяния частицы и затем определить потери ее энергии на возбуждение ионных ленгмюровских колебаний. Все интересующие нас соотношения можно получить из формул (13.4.1.10)—(13.4.1.15) путем замены  $\omega_{pe}$  на  $\omega_{pi}$ ,  $a_e$  на  $a_i$ ,  $T'$  на  $T_e$ ; поэтому мы не будем приводить их здесь. Отметим лишь, что потери энергии особенно велики, если скорость частицы как по величине, так и по направлению близка к направленной скорости электронов. В этих условиях потери энергии частицы на возбуждение ионных ленгмюровских колебаний равны

$$\mathcal{F}^{pi} = \frac{e^2 Z^2 T_e^2 u}{2 a_i^2 m T_i (v - u)^2}, \quad (13.4.1.17)$$

где  $a_i$  — по-прежнему величина порядка нескольких электронных дебаевских радиусов.

**13.4.2. Взаимодействие заряженных частиц с турбулентной плазмой.** Перейдем теперь к исследованию взаимодействия пробных заряженных частиц с турбулентной плазмой. Мы определим изменения энергии и импульса частицы в единицу времени, обусловленные испусканием и поглощением турбулентных колебаний, и покажем, что свойства спектра турбулентности не влияют на характер зависимости указанных величин от направления и величины скорости частицы; уровнем турбулентных флуктуаций определяется главным образом образом общий коэффициент в выражениях для изменения энергии и импульса [26, 27].

Вероятность перехода частицы из состояния с импульсом  $\mathbf{p}$  в состояние с импульсом  $\mathbf{p}'$  связана со спектральным распределением флуктуаций плотности заряда общим соотношением (13.1.4.6). Если плазма состоит из холодных ионов и горячих электронов, движущихся относительно ионов, то в области длинных волн ( $a_e q \ll 1$ ) и средних частот ( $q v_i \ll \omega \ll q v_e$ ) спектральное распределение флуктуаций плотности заряда можно представить в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^s = 1/4 q^2 (a_e q)^2 \{ T_s(\mathbf{q}) \delta(\omega - q v_s) + T_s(-\mathbf{q}) \delta(\omega + q v_s) \}, \quad (13.4.2.1)$$

где  $T_s(\mathbf{q})$  — эффективная температура звуковых колебаний. Функция  $T_s(\mathbf{q})$ , характеризующая интенсивность и распределение случайных звуковых колебаний, связана с введенной в гл. 10 функцией  $I_s(\mathbf{q})$  очевидным соотношением

$$I_s(\mathbf{q}) = \frac{a_s^2}{(2\pi)^2} T_s(\mathbf{q}). \quad (13.4.2.2)$$

Учитывая, что эффективная температура колебаний зависит от двух скалярных величин, а именно, от  $q$  и  $\eta = \mathbf{q}\mathbf{u}$ , где  $\mathbf{u}$  —

направленная скорость электронов, мы будем обозначать эффективную температуру через  $T_s(q, \mathbf{qu})$ .

Используя формулы (13.4.2.1) и (13.4.2.2), можно определить энергию, теряемую частицей в единицу времени на возбуждение звуковых колебаний с волновыми векторами, лежащими в интервале  $(\mathbf{q}, \mathbf{q} + d\mathbf{q})$ :

$$d\mathcal{P}_{\mathbf{q}}^s = \frac{e^2 Z^2 a_0^2 q v_s}{2\pi\hbar} \{ T_s(q, \mathbf{qu}) \delta(\mathbf{qv} - qv_s + \hbar q^2/2m) - T_s(q, -\mathbf{qu}) \delta(\mathbf{qv} + qv_s + \hbar q^2/2m) \} d^3q, \quad (13.4.2.3)$$

где  $m$ ,  $v$ ,  $eZ$  — масса, скорость и заряд частицы. Первое слагаемое в этом выражении описывает поглощение, второе — вынужденное излучение колебаний частицей.

Интегрируя (13.4.2.3) по угловым переменным, найдем интенсивность черенковского излучения звуковых колебаний в единичном интервале частот

$$\frac{d\mathcal{P}_{\omega}^s}{d\omega} = \frac{e^2 Z^2 a_0^2 u q^4}{\pi m v^2} D(q), \quad (13.4.2.4)$$

где

$$D(q) = \int_0^{\pi} \{ \cos \Theta - \sin \Theta \cos \varphi (v^2/v_s^2 - 1)^{-1/2} \} \frac{\partial T_s(q, \eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=\eta_s} d\varphi, \quad (13.4.2.5)$$

$\Theta$  — угол между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  и величина  $\eta_s$  связана с переменной интегрирования  $\varphi$  соотношением

$$\eta_s = qu \{ v_s \cos \Theta / v + (1 - v_s^2/v^2)^{1/2} \sin \Theta \cos \varphi \}. \quad (13.4.2.6)$$

Мы видим, что потери энергии частицы определяются функцией  $\partial T_s(q, \eta)/\partial \eta$ ; поэтому для вычисления этих потерь необходимо знать характер зависимости эффективной температуры от величины  $\mathbf{qu}$ . При малых значениях  $\mathbf{qu}$ , когда колебания с волновым вектором  $\mathbf{q}$  затухают ( $\mathbf{qu} < qv_s$ ), эффективная температура определяется, согласно п. 11.5.3, формулой

$$T_s(q, \mathbf{qu}) = T_0 (1 - \mathbf{qu}/qv_s)^{-1}. \quad (13.4.2.7)$$

При  $\mathbf{qu} \rightarrow qv_s$  эффективная температура резко возрастает. При  $\mathbf{qu} > qv_s$  величина  $T_s(q, \mathbf{qu})$  является (при фиксированном  $q$ ), вообще говоря, плавной функцией  $\mathbf{qu}$ .

Из такого характера зависимости эффективной температуры колебаний от  $\mathbf{qu}$  следует, что производная  $\partial T/\partial \eta$  имеет резкий максимум при некотором значении  $\eta = \eta_0$ , близком к  $qv_s$ . Наличие такого максимума позволяет найти функцию  $D(q)$  без детального знания  $T_s$  при  $\mathbf{qu} > qv_s$ . В самом деле, разложим функцию  $(\partial T_s/\partial \eta)^{-1}$

в ряд по степеням  $\eta - \eta_0$ . Замечая, что при  $\eta = \eta_0$  функция  $(\partial T_s / \partial \eta)^{-1}$  имеет минимум, получим

$$\left( \frac{\partial T_s(q, \eta)}{\partial \eta} \right)^{-1} = \frac{qv_s}{T_e} \{ \zeta^2(q) + \lambda^2(q) (1 - \eta/\eta_0)^2 \}, \quad (13.4.2.8)$$

где

$$\zeta^2(q) = T_e (qv_s \partial T_s / \partial \eta)^{-1}, \quad \lambda^2(q) = \frac{T_e \eta_0^2}{2qv_s} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} (\partial T_s / \partial \eta)^{-1}.$$

Заметим, что функция  $\zeta^2(q)$  пропорциональна малому параметру — отношению величины  $T_e^2$  к функции  $T_s^2(q, \mathbf{qu})$  при  $\mathbf{qu} > qv_s$ ; функция же  $\lambda^2(q)$  равна по порядку величины единице.

Подставляя это разложение в (13.4.2.5) и учитывая, что  $\eta_0 \approx qv_s$ , легко заключить, что основной вклад в интеграл, определяющий функцию  $D(q)$ , вносят углы  $\varphi$ , близкие к  $\varphi_0 = \arccos \Phi$ , где

$$\Phi = (v/u - \cos \Theta) \sin^{-1} \Theta (v^2/v_s^2 - 1)^{-1/2} \quad (13.4.2.9)$$

(разумеется, если  $\varphi_0$  вещественно).

При  $\Phi < 1$  (и не слишком малых значениях  $\sin \varphi_0$ ) для величины  $D$  получим

$$D(q) = \frac{\pi T_e}{\lambda \zeta qu} (1 - v_s^2/v^2)^{-3/2} \frac{\cos \Theta - v_s^2/uv}{\sin \Theta \sin \varphi_0}. \quad (13.4.2.10)$$

Мы видим, что величина  $|D|$  пропорциональна большому параметру  $\zeta^{-1}$  и сильно возрастает при уменьшении  $\sin \varphi_0$ .

При очень малых значениях  $|\sin \varphi_0|$  (когда  $|\sin^2 \varphi_0| \ll \zeta(1 - v_s^2/v^2)^{-1/2}(v_s/u) \sin^{-1} \Theta$ ; при этом  $\cos^2 \varphi_0$  может быть как меньше, так и больше единицы), используя формулы (13.4.2.5) и (13.4.2.8), найдем

$$D(q) = \pm \frac{\pi T_e v^{3/2} (u^2 - v_s^2)^{1/2}}{2q (\lambda v_s \sin \Theta_{\pm})^{1/2} (\zeta u)^{3/2} (v^2 - v_s^2)^{3/4}}. \quad (13.4.2.11)$$

Знак плюс здесь соответствует случаю  $\Theta \approx \Theta_+$ , знак минус — случаю  $\Theta \approx \Theta_-$ , где  $\Theta_{\pm}$  — два значения угла  $\Theta$ , при которых  $\sin \varphi_0$  обращается в нуль; они определяются формулами

$$\cos \Theta_{\pm} = (uv)^{-1} \{ v_s^2 \pm (u^2 - v_s^2)^{1/2} (v^2 - v_s^2)^{1/2} \}. \quad (13.4.2.12)$$

Мы видим, что при очень малых значениях  $|\sin \varphi_0|$  величина  $D$  пропорциональна  $\zeta^{-3/2}$ .

Если  $v \rightarrow u$ , то  $\sin \Theta_{\pm} \rightarrow 0$ , и тогда соотношение (13.4.2.11) перестает быть справедливым. При  $\sin \Theta_{\pm} \ll \zeta v_s (v^2 - v_s^2)^{-1/2}$  вместо формулы (13.4.2.11) получим

$$D(q) = \frac{\pi T_e \cos \Theta}{\zeta^2 q v_s}. \quad (13.4.2.13)$$

В этом случае величина  $D$  особенно велика и пропорциональна  $\zeta^{-2}$ .

При выводе соотношений (13.4.2.10) и (13.4.2.11) предполагалось, что скорость частицы  $v$  не слишком близка к скорости звука  $v_s$ . Используя формулы (13.4.2.5) и (13.4.2.7), можно убедиться, что при  $1 - v_s^2/v^2 \ll (\zeta v_s)^2 u^{-2} \sin^{-1} \theta$  функция  $D$  определяется соотношением (13.4.2.13), если  $\cos \theta \approx v_s/u$ , и резко уменьшается при увеличении  $|\cos \theta - v_s/u|$ .

Случай, когда  $\Phi > 1$  (и разность  $\Phi - 1$  не слишком мала), соответствует такому значению скорости частицы, при котором последняя не может взаимодействовать с турбулентными звуковыми волнами. В этом случае при определении  $D(q)$  нельзя пользоваться разложением (13.4.2.8); несложно, однако, вычислить  $D(q)$  непосредственно, подставляя в формулу (13.4.2.5) выражение (13.4.2.7) для эффективной температуры; в результате получим

$$D(q) = \frac{\pi T_e v_s^2}{qu^3} (1 - v_s^2/v^2)^{-3/2} \frac{\cos \theta - v/u}{\sin^3 \theta (\Phi^2 - 1)^{3/2}}. \quad (13.4.2.14)$$

Величина  $D$  в этом случае не содержит большого параметра  $\zeta^{-1}$ ; тем не менее, если  $\Phi - 1 \ll 1$ , то она очень велика (хотя и значительно меньше, чем при  $\Phi \leq 1$ ). Это обусловлено интенсивным взаимодействием частицы со звуковыми волнами, для которых  $qv_s - qu \ll qv_s$  и, согласно формуле (13.4.2.7), велика эффективная температура.

Случай  $\Phi < -1$  соответствует такому движению частицы, при котором она эффективно взаимодействует с турбулентными звуковыми волнами с  $qu > qv_s$ . Как уже отмечалось, в области  $qu > qv_s$  величина  $\partial T_s / \partial \eta$  невелика; поэтому при  $\Phi < -1$  и функция  $D(q)$  невелика.

Заметим, что формулы (13.4.2.10)–(13.4.2.14) (а следовательно, и выражения для изменения энергии импульса частицы), остаются верными, даже если предположение о малости величины  $\partial T_s / \partial \eta$  в области  $\eta > \eta_0$  не выполняется. В самом деле, вклад величины  $\partial T_s / \partial \eta$  при  $\eta > \eta_0$  в выражение для  $D$  может лишь несколько изменить функцию  $D$  при  $\theta_+ < \theta < \theta_-$ , не меняя величины  $D$  при  $\theta \approx \theta_{\pm}$  и, следовательно, не меняя характера функции  $D$  при  $\theta_+ \leq \theta \leq \theta_-$ . В частности, функция  $D$ , положительная при  $\theta = \theta_+$  и отрицательная при  $\theta = \theta_-$ , должна обращаться в нуль при некотором значении угла  $\theta = \theta_0$ , где  $\theta_+ < \theta_0 < \theta_-$  (при этом  $\theta_0$  может несколько отличаться от  $\arccos(v_s^2/uv)$ ).

Функция  $D$  определяет, согласно соотношению (13.4.2.4), спектральное распределение энергии, излучаемой частицей. Подставляя в него  $D$  и выполняя интегрирование по частотам, получим выражение для изменения энергии частицы (в единицу времени)  $\mathcal{P}^s$ , обусловленного ее взаимодействием со звуковыми волнами.

Если угол  $\theta$  между направлениями  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  лежит в интервале  $\theta_+ < \theta < \theta_-$ , где «критические» углы  $\theta_{\pm}$  определяются формулой (13.4.2.12), то выражение для  $\mathcal{F}^s$  имеет следующую структуру:

$$\mathcal{F}^s = \frac{e^2 Z^2 \omega_p^2 m_e}{v_s m} A f(\mathbf{v}), \quad (13.4.2.15)$$

где  $A$  — большая величина, пропорциональная отношению эффективной температуры турбулентных звуковых волн к температуре электронов плазмы и равная

$$A = a_0 \int (a_0 q)^3 (\lambda \zeta)^{-1} dq, \quad (13.4.2.16)$$

а функция  $f(\mathbf{v})$  имеет вид

$$f(\mathbf{v}) = \frac{uv - v_s^2}{v^2 - v_s^2} \left\{ \left( \frac{u^2}{v_s^2} - 1 \right) \left( \frac{v^2}{v_s^2} - 1 \right) - \left( \frac{uv}{v_s^2} - 1 \right)^2 \right\}^{-1/2}. \quad (13.4.2.17)$$

Формулы (13.4.2.15)–(13.4.2.17) определяют в явном виде зависимость изменения энергии частицы, возбуждающей турбулентные звуковые колебания в плазме, от величины и направления скорости частицы.

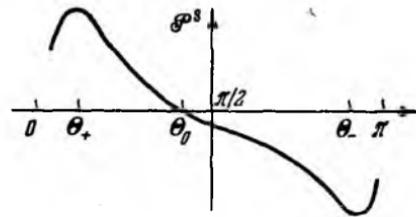


Рис. 13.4.1. Схематическая зависимость потерь энергии частицы  $\mathcal{F}^s$  от угла  $\theta$  между скоростью частицы и направлением электронного потока.

Зависимость потерь энергии частицы и направлением электронного потока показана схематически на рис. 13.4.1.

При углах  $\theta$ , очень близких к  $\theta_{\pm}$ , формула (13.4.2.15) перестает быть справедливой. В этом случае, а именно, при

$$|\theta - \theta_{\pm}| \ll \zeta (1 - v_s^2/v^2)^{1/2} v_s/u$$

( $\zeta$  — величина порядка отношения температуры электронов к эффективной температуре волн в области турбулентности), используя (13.4.2.4) и (13.4.2.11), получим

$$\mathcal{F}^s = \frac{e^2 Z^2 \omega_p^2 m_e}{v_s m} A_1 f_{\pm}, \quad (13.4.2.18)$$

где  $A_1$  — большая величина, пропорциональная  $\zeta^{-3/2}$ ,

$$A_1 = 1/2 a_0 \int (a_0 q)^3 \zeta^{-3/2} \lambda^{-1/2} dq,$$

Легко видеть, что при  $\theta_+ < \theta < \theta_0$ , где  $\cos \theta_0 = v_s^2/uv$ , частица теряет энергию; при  $\theta_0 < \theta < \theta_-$  взаимодействие со звуковыми колебаниями приводит к увеличению энергии частицы. При  $\theta = \theta_0$  изменение энергии частицы обращается в нуль. При  $\theta \rightarrow \theta_{\pm}$  величина  $|\mathcal{F}^s|$  резко возрастает. Зависимость от угла между ее скоростью и направлением электронного потока показана схематически на рис. 13.4.1.

Зависимость от угла между ее скоростью и направлением электронного потока показана схематически на рис. 13.4.1.

$$f_{\pm} = \pm v_s^{3/2} (u^2 - v_s^2)^{1/2} (vu \sin \Theta_{\pm})^{-1/2} (v^2 - v_s^2)^{-3/4} \quad (13.4.2.19)$$

(знаки  $\pm$  соответствуют случаям  $\Theta \approx \Theta_{\pm}$ ).

Мы видим, что при  $\Theta \approx \Theta_{\pm}$  изменение энергии частицы в единицу времени особенно велико.

При очень малых значениях  $\Theta_{\pm}$  (что соответствует  $u \approx v$ ) соотношение (13.4.2.18) перестает быть справедливым. При  $\Theta_{\pm} \ll \zeta v_s (v^2 - v_s^2)^{-1/2}$  вместо формулы (13.4.2.18) имеем

$$\mathcal{F}^{ss} = \frac{e^2 Z^2 \omega_p^2 m_e}{vt} A_2; \quad A_2 = a_e \int (a_e q)^3 \zeta^{-2} dq. \quad (13.4.2.20)$$

Подчеркнем, что очень большое (пропорциональное  $\zeta^{-1}$ ,  $\zeta^{-3/2}$  или  $\zeta^{-2}$ ) изменение энергии частицы в единицу времени происходит при углах  $\Theta$  между направлениями  $v$  и  $u$ , лежащих в интервале  $\Theta_{+} \leq \Theta \leq \Theta_{-}$ . Для того чтобы такой интервал углов существовал, необходимо выполнение неравенств  $v > v_s$  и  $u > v_s$ . Первое из них представляет собой условие эффективного взаимодействия частицы со звуковыми колебаниями (черенковское условие), а второе обеспечивает существование турбулентных звуковых колебаний.

При  $u \rightarrow v_s$  имеем  $\Theta_{+} \rightarrow \Theta_{-} \rightarrow \arccos(v_s/v)$ . Выражения (13.4.2.15) и (13.4.2.18) для функции  $\mathcal{F}^{ss}$  при  $vu = v_s^2$  и  $u = v_s$  обращаются в нуль; в этом случае потери энергии пропорциональны  $\zeta^{-1}$  в степени, меньшей, чем первая. В самом деле, подставляя выражение (13.4.2.8) в (13.4.2.5) и используя (13.4.2.4), получим

$$\mathcal{F}^{ss} = \frac{e^2 Z^2 \omega_p^2 m_e}{v_s m} A_0 (v^2/v_s^2 - 1)^{-3/2}, \quad (13.4.2.21)$$

где

$$A_0 = 1/2 a_e \int (a_e q)^3 \zeta^{-1/2} \lambda^{-3/2} dq.$$

При выводе соотношений (13.4.2.15)–(13.4.2.21) предполагалось, что скорость частицы  $v$  не слишком близка к скорости звука  $v_s$ ; можно показать, что эти соотношения справедливы при  $(1 - v_s^2/v^2) \gg \zeta^n$ , где  $n$  — некоторое число (в общем случае, описываемом формулой (13.4.2.15),  $n=1$ ; в случае  $\Theta \approx \Theta_{\pm}$  имеем  $n=2/3$ ).

Если  $(1 - v_s^2/v^2) \ll \zeta^n$ , то потери энергии частицы при  $\Theta = \arccos(v_s/u)$  определяются формулой (13.4.2.20) и пропорциональны  $\zeta^{-2}$ ; при других углах величина  $\mathcal{F}^{ss}$  не содержит большого параметра  $\zeta^{-1}$ .

Если  $\Theta > \Theta_{-}$ , а также если  $\Theta < \Theta_{+}$  и  $u < v$ , то изменение энергии частицы можно определить, подставляя выражение

Это соотношение вместе с формулами (13.4.2.15)—(13.4.2.25) для величины  $\mathcal{J}^{ps}$  позволяет определить зависимость  $Q^s$  от величины и направления скорости частицы  $\mathbf{v}$ .

Согласно формуле (13.4.2.29) быстрее всего меняется проекция импульса частицы на направление  $\mathbf{i}$ :

$$Q^s \frac{\mathbf{i}}{|\mathbf{i}|} = \frac{|\mathbf{u} - \mathbf{v}|}{uv \sin \Theta} \mathcal{J}^{ps};$$

проекция же импульса частицы на направление  $\mathbf{v} - \mathbf{u}$  не меняется ( $Q^s(\mathbf{v} - \mathbf{u}) = 0$ ).

Заметим, что при исследовании взаимодействия частицы с неравновесной плазмой ситуация с  $|\Theta - \Theta_{\pm}| \ll \sin \Theta_{\pm}$  (к которой относится формула (13.4.2.29)) представляет наибольший интерес, так как в этом случае изменение импульса частицы (как и ее энергии) в единицу времени особенно велико.

Приведем еще выражение для  $Q^s$  в том случае, когда скорость частицы близка к скорости потока как по величине, так и по направлению, т. е.

$$|\mathbf{u} - \mathbf{v}| v_s u^{-2} < \Theta \ll \zeta (v^2/v_s^2 - 1)^{-1/2}.$$

Тогда  $Q^s = v^{-2} v e^{\mathcal{J}^{ps}}$ , где величина  $\mathcal{J}^{ps}$  определяется (13.4.2.20). В этом случае изменение импульса частицы в единицу времени пропорционально  $\zeta^{-2}$  и поэтому особенно велико.

**13.4.3. Взаимодействие заряженных частиц с турбулентной плазмой в магнитном поле.** Рассмотрим теперь взаимодействие пробных заряженных частиц с турбулентной плазмой, находящейся в постоянном и однородном магнитном поле. Плазму будем считать состоящей из покоящихся холодных ионов и горячих электронов, движущихся вдоль магнитного поля со скоростью, превосходящей критическую скорость, за которой начинается неустойчивость колебаний плазмы. Мы исследуем зависимость изменения энергии частицы в единицу времени от величины и направления ее скорости и покажем, что, как и в отсутствие магнитного поля, на характер этой зависимости не оказывают существенного влияния особенности спектра турбулентности [28].

Ограничиваясь случаем, когда закручивание траектории пробной частицы на характерном пути мало (см. п. 13.3.1), будем исходить из общей формулы (13.1.4.6) для вероятности рассеяния, в которой под  $\langle \rho^2 \rangle_{q\omega}$  будем понимать спектральное распределение флуктуаций плотности заряда в турбулентной плазме, находящейся в магнитном поле. Умножая (13.1.4.6) на  $\hbar \omega$  и интегрируя по  $\mathbf{p}'$ , получим выражение для потерь энергии  $\mathcal{J}^{ps}$  в единицу времени пробной частицей:

$$\mathcal{J}^{ps} = - \frac{e^2 Z^2}{\hbar} \int \left( \frac{4\pi}{q^2} \right)^2 \omega \langle \rho^2 \rangle_{q\omega} \delta(\omega - \mathbf{q}\mathbf{v} - \hbar q^2/2m) \frac{d\omega d^3q}{(2\pi)^3}. \quad (13.4.3.1)$$

Рассмотрим сперва случай не очень сильных магнитных полей ( $v_A \ll c$ , где  $v_A = B_0(4\pi n_0 m_i)^{-1}$  — альвеновская скорость). Если плазма состоит из покоящихся холодных ионов и горячих электронов, движущихся вдоль магнитного поля со скоростью  $u$ , то спектральное распределение флуктуаций плотности заряда, связанных с ионно-звуковыми волнами, определяется той же формулой (13.4.2.1), что и в отсутствие магнитного поля. В этом случае от магнитного поля зависит только эффективная температура волн  $T_s(\mathbf{q})$ ; аргументы же  $\delta$ -функций на зависят от магнитного поля. Поэтому при  $v_A \ll c$  зависимость изменения энергии частицы от величины и направления ее скорости имеет тот же характер, что и в отсутствие магнитного поля, а именно:

1) Существуют критические углы  $\Theta_{\pm}$  между векторами  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{u}$  такие, что при  $\Theta \approx \Theta_{\pm}$  изменение энергии частицы  $\mathcal{E}^{ps}$  особенно велико. Углы  $\Theta_{\pm}$  определяются формулой (13.4.2.12), а величина  $\mathcal{E}^{ps}$  при  $\Theta \approx \Theta_{\pm}$  — формулой (13.4.2.18).

2) Формула (13.4.2.18) может служить интерполяционной формулой в области углов  $\Theta_+ < \Theta < \Theta_-$  (если эффективная температура волн  $T_s(\mathbf{q})$  мало меняется при изменении угла между векторами  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{u}$ , то эта формула является не интерполяционной, а точной). При  $\Theta < \Theta_0$ , где  $\Theta_0$  — некоторый критический угол ( $\Theta_0 \sim \arccos(v_s^2/uv)$ ), энергия частицы уменьшается; при  $\Theta > \Theta_0$  ее энергия возрастает.

3) Потери энергии частицы особенно велики, если  $v \approx u$ , а также если  $v \approx v_s$  и  $uv \approx v_s^2$ . В обоих случаях величина  $\mathcal{E}^{ps}$  пропорциональна квадрату эффективной температуры турбулентных звуковых волн  $T_s^2$  и определяется формулой (13.4.2.20).

4) Если  $\Theta > \Theta_-$ , а также если  $\Theta < \Theta_+$  и  $\cos \Theta < v/u$ , то выражение для потерь энергии не содержит большого параметра  $T_s$ . При  $|\Theta - \Theta_{\pm}| \ll 1$ , тем не менее, величина  $\mathcal{E}^{ps}$  пропорциональна  $|\Theta - \Theta_{\pm}|^{-3/2}$  и, следовательно, велика.

5) Если  $u \rightarrow v_s$ , то, согласно (13.4.2.12),  $\Theta_{\pm} \rightarrow \Theta_0 \equiv \arccos(v_s/v)$ . При  $\Theta \approx \Theta_0$  потери энергии пробной частицы пропорциональны  $T_s^{1/2}$  и определяются формулой (13.4.2.21).

Рассмотрим теперь случай очень сильного магнитного поля ( $v_A \gg c$ ). Тогда спектральное распределение флуктуаций плотности заряда имеет в звуковой области резкие максимумы, соответствующие возможности распространения медленных магнитозвуковых волн, и может быть представлено в виде

$$\langle \rho^2 \rangle_{\mathbf{q}\omega}^s = 1/4 q^2 (\alpha_e q)^2 \{ T_s(q, \mathbf{q}\mathbf{u}) \delta(\omega - qv_s |\cos \chi|) + T_s(q, -\mathbf{q}\mathbf{u}) \delta(\omega + qv_s |\cos \chi|) \}, \quad (13.4.3.2)$$

где  $\chi$  — угол между  $\mathbf{q}$  и  $\mathbf{B}_0$ . Существенно, что если  $u > v_s$ , то все волны, распространяющиеся в ту же сторону, что и поток электронов, являются турбулентными и потому характеризуются

очень высокой эффективной температурой  $T_s(q, \mathbf{qu})$  (если  $u < v_s$ , то все магнитозвуковые волны устойчивы).

Подставляя (13.4.3.2) в (13.4.3.1), получим

$$\mathcal{F}^{s3} = -\frac{e^2 Z^2 a_0^2 v_s^2}{\pi m v^2} \int q^3 dq \int_0^\pi d\varphi |v_s/v - \cos \Theta| \{ (v_s/v - \cos \Theta)^2 + \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi \}^{-1} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \frac{y T_s(q, \mathbf{qu})}{v_s/v - \cos \Theta + y (1 - y^2)^{-1/2} \sin \Theta \cos \varphi} \right\}_{y=y_0}, \quad (13.4.3.3)$$

где  $y = \mathbf{qu}/qu$  и

$$y_0 = \sin \Theta | \cos \varphi | \{ (v_s/v - \cos \Theta)^2 + \sin^2 \Theta \cos^2 \varphi \}^{-1/2}.$$

Если эффективная температура  $T_s(q, \mathbf{qu})$  в области турбулентности (т. е. при  $\cos \chi > 0$ ) слабо зависит от угла  $\chi$ , то выражение (13.4.3.3) можно привести к виду

$$\mathcal{F}^{s3} = \frac{e^2 Z^2 v_s^2}{a_0^2 m} \bar{T}_s(\Theta) (v^2 - 2v v_s \cos \Theta + v_s^2)^{-1/2} (v \cos \Theta - v_s), \quad (13.4.3.4)$$

где  $\bar{T}_s(\Theta)$  — некоторая положительная функция угла  $\Theta$ , пропорциональная эффективной температуре магнитозвуковых волн  $T_s(q, \mathbf{qu})$ .

Согласно этой формуле частица, движущаяся под углом  $\Theta$  к направлению электронного потока, меньшим, чем  $\Theta_0 = \arccos(v_s/v)$ , теряет энергию; если  $\Theta > \Theta_0$ , то энергия частицы увеличивается.

Заметим, что выражение (13.4.3.4) обращается в бесконечность, если одновременно  $v \rightarrow v_s$  и  $\Theta \rightarrow 0$ . В этом случае, чтобы определить величину  $\mathcal{F}^{s3}$ , следует учесть дисперсию звука. В результате получим

$$\mathcal{F}^{s3} = \frac{e^2 Z^2 a_1^2}{a_0^4 m v_s} \bar{T}_s(0), \quad (13.4.3.5)$$

где  $a_1$  — величина порядка нескольких электронных дебаевских радиусов.

## К главе 1

1. Н. Н. Боголюбов, Проблемы динамической теории в статистической физике, Гостехиздат, 1946.
2. А. А. Власов, ЖЭТФ 8, 291 (1938).
3. R. L. Seliger, G. V. Whitnam, Proc. Roy. Soc. A305, 1 (1968).
4. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 7, 203 (1937).
5. В. П. Силин, Дополнение к книге: Р. Балеску, Статистическая механика заряженных частиц, «Мир», 1967, стр. 473—508.
6. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, 1960.
7. В. Е. Голант, ЖТФ 33, 1 (1963).
8. W. M. MacDonald, M. N. Rosenbluth, W. Chuck, Phys. Rev. 107, 350 (1957).
9. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Г. Барьяхтар, С. В. Пелетминский, ЖЭТФ 42, 552 (1962).
10. S. Lundquist, Ark. f. Fys. 5, 297 (1952).
11. Х. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.
12. Р. В. Половин, И. А. Ахиезер, Укр. физ. ж. 4, 677 (1959).
13. С. Чепмен, Т. Каулинг, Математическая теория неоднородных газов, ИЛ, 1960.
14. К. Хуанг, Статистическая механика, «Мир», 1966.
15. С. И. Брагинский, в сб.: «Вопросы теории плазмы», Атомиздат, 1963, вып. 1, стр. 183.
16. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
17. Ю. А. Кирий, В. П. Силин, ЖТФ 39, 773 (1969).
18. M. Vogt, H. S. Green, Proc. Roy. Soc. A188, 10 (1947).
19. J. G. Kirkwood, J. Chem. Phys. 14, 180 (1946).
20. J. Yvon, La theorie statistique des fluides, Hermann et Co, Paris, 1935.
21. T. O'Neil, N. Rostoker, Phys. Fluids 8, 1109 (1965).
22. Ю. Л. Климонтович, Статистическая теория неравновесных процессов в плазме, Изд. МГУ, 1964.

## К главе 2

1. I. O. Vohachevsky, Phys. Fluids 5, 1456 (1962).
2. N. Herlofson, Nature 165, 1020 (1950).
3. A. Jeffrey, T. Taniuti, Non-linear wave propagation with application to physics and magnetohydrodynamics, Acad. Press, 1964.
4. Х. Альфвен, Космическая электродинамика, ИЛ, 1952.
5. W. R. Sears, Rev. Mod. Phys. 32, 701 (1960).
6. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
7. Y. M. Lunn, Phys. Fluids 5, 626 (1962).
8. С. И. Сыроватский, УФН 62, 247 (1957).

9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Электродинамика сплошных сред*, Гостехиздат, 1957.
10. Е. П. Сиротина, С. И. Сыроватский, *ЖЭТФ* 39, 746 (1960).
11. S. Lundquist, *Phys. Rev.* 76, 1805 (1949).
12. А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, *ЖЭТФ* 35, 116 (1958).
13. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, *ЖТФ* 29, 801 (1959).
14. M. J. Lighthill, *Phil. Trans. Roy. Soc.* A252, 397 (1960).
15. Р. В. Половин, *Дифф. уравн.* 1, 499 (1965).
16. P. Lax, *Comm. Pure Appl. Math.* 10, 537 (1957).
17. Б. Л. Рождественский, *УМН* 15, № 6, 59 (1960).
18. И. М. Яворская, *ДАН СССР* 114, 988 (1957); в сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», изд. АН Лат. ССР, Рига, 1959, стр. 175—185.
19. А. Г. Куликовский, *ДАН СССР* 114, 984 (1957); 120, 984 (1958).
20. Л. И. Коробейников, *ДАН СССР* 121, 613 (1958).
21. В. П. Коробейников, Е. В. Рязанов, *ДАН СССР*, 124, 51 (1959); *ПММ* 24, 111 (1960).
22. Н. Н. Кочина, *ДАН СССР* 126, 528 (1959).
23. Е. В. Рязанов, *ДАН СССР* 126, 1224 (1959); *ПММ*, 23, 187 (1959).
24. Д. В. Шарикадзе, *ПММ* 23, 953 (1959).
25. О. А. Березин, *ДАН СССР* 133, 296 (1960).
26. Б. Н. Козлов, *Атомная энергия* 8, 135 (1960).
27. В. П. Коробейников, *ПМТФ* № 2, 47 (1960).
28. А. Б. Северный, *Астрон. ж.* 38, 402 (1961).
29. И. П. Малышев, *Изв. АН СССР, ОТН, Механика, машиностроение* № 3, 182 (1961).
30. C. Greifinger, J. D. Cole, *Phys. Fluids* 4, 527 (1961).
31. Н. Н. Яненко, *ДАН СССР* 109, 44 (1956).
32. Л. В. Комаровский, *ДАН СССР* 135, 33 (1960).
33. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, *ЖТФ* 29, 933 (1959).
34. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, 1953.
35. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, *ЖЭТФ* 35, 509 (1958).
36. А. Г. Куликовский, *ДАН СССР* 121, № 6, 987 (1958).
37. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, *Укр. физ. ж.* 3, 567 (1958).
38. J. Vazag, *Astrophys. J.* 128, 686 (1958).
39. С. А. Каплан, К. П. Станюкович, *ДАН СССР* 95, 769 (1954).
40. S. Segre, *Nuovo Cimento* 9, 1054 (1958).
41. T. Taniuti, *Prog. Theor. Phys.* 19, 69 (1958).
42. Р. З. Сагдеев, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 1, изд. АН СССР, 1958, стр. 384—390.
43. Р. З. Сагдеев, в сб.: «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», изд. АН Лат. ССР, 1959, стр. 63—65.
44. И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, Н. Л. Цинцадзе, *ЖЭТФ* 37, 756 (1959).
45. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *Ядерный синтез* 1, 82 (1961).
46. S. Lundquist, *Ark. f. Fys.* 5, 297 (1952).
47. D. Montgomery, *Phys. Rev. Lett.* 2, 36 (1959).
48. А. Н. Тауб, *Phys. Rev.* 74, 328 (1948).
49. Р. В. Половин, *ЖЭТФ* 39, 463 (1960).
50. Г. С. Голицын, *ЖЭТФ* 35, 776 (1958).
51. Н. В. Салтанов, В. С. Ткалич, *Изв. АН СССР, ОТН, Механика, машиностроение* № 6, 26 (1961).
52. C. Greifinger, *Phys. Fluid* 3, 662 (1960).
53. M. Mitchner, *Phys. Fluids* 2, 62 (1959).

54. H. Grad, Rev. Mod. Phys. 32, 830 (1960).
55. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемого термоядерного синтеза», изд. АН УССР, Киев, 1961, стр. 79—81.
56. В. В. Баранов, Изв. АН СССР, МЖГ, № 2, 6 (1970).

## К главе 3

1. F. Hoffmann, E. Teller, Phys. Rev. 80, 692 (1950).
2. Л. И. Седов, Механика сплошных сред, изд. МГУ, 1967, ч. II.
3. О. А. Олейник, УМН 12, № 3, 3 (1957).
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
5. С. А. Каплан, К. П. Станюкович, ДАН СССР 95, 769 (1954).
6. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, Гостехиздат, 1951.
7. Р. В. Половин, К. П. Черкасова, УФН 88, 593 (1966).
8. С. И. Сыроватский, ЖЭТФ 24, 622 (1953).
9. С. И. Сыроватский, УФН 62, 247 (1957).
10. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
11. С. В. Иорданский, ДАН СССР 121, 610 (1958).
12. Р. В. Половин, Г. Я. Любарский, ЖЭТФ 35, 510 (1958).
13. Р. В. Половин, Г. Я. Любарский, Укр. физ. ж. 3, 571 (1958).
14. W. V. Ericson, J. Vazeg, Phys. Fluids 3, 631 (1960).
15. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Теория поля, «Наука», 1967.
16. И. М. Халатников, ЖЭТФ 32, 1102 (1957).
17. V. Zumino, Phys. Rev. 108, 1116 (1957).
18. E. G. Haggis, Phys. Rev. 108, 1357 (1957).
19. И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, ЖЭТФ 36, 1845 (1959).
20. К. П. Станюкович, ДАН СССР 103, 73 (1955).
21. К. П. Станюкович, Изв. АН СССР, сер. физ. 19, 639 (1955).
22. К. П. Станюкович, ЖЭТФ 35, 520 (1958).
23. И. М. Халатников, ЖЭТФ 27, 529 (1954).
24. Р. В. Половин, ЖЭТФ 36, 956 (1959).
25. W. I. Israel, Proc. Roy. Soc. A259, 129 (1960).
26. C. S. Gardner, M. D. Kruskal, Phys. Fluids 7, 700 (1964).
27. M. Lessen, N. Deshpande, J. Plasma Phys. 1, 463 (1967).
28. Р. Курант, К. Фридрихс, Сверхзвуковые течения и ударные волны, ИЛ, 1950.
29. И. М. Гельфанд, УМН 14, № 2, 87 (1959).
30. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 35, 731 (1958).
31. P. Lax, Comm. Pure Appl. Math. 10, 537 (1957).
32. К. И. Бабенко, И. М. Гельфанд, Научн. докл. Высш. школы, физ. матем. науки, № 1, 12 (1958).
33. Р. В. Половин, УФН 72, 33 (1960).
34. С. И. Сыроватский, ЖЭТФ 35, 1466 (1958).
35. Э. Андерсон, Ударные волны в магнитной гидродинамике, Атомиздат, 1968.
36. М. Н. Коган, Изв. АН СССР, ОТН, Механика, машиностроение, № 3, 143 (1960).
37. Р. В. Половин, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 3, изд. АН УССР, 1963, стр. 169—179.
38. J. A. Shercliff, J. Fluid Mech. 9, 481 (1960).
39. В. М. Конторович, ЖЭТФ 35, 1216 (1958).
40. T. Taniuti, Progr. Theor. Phys. 28, 756 (1962).

41. A. Jeffrey, T. Taniuti, Non-linear wave propagation with applications to physics and magnetohydrodynamics, Acad. Press, 1964.
42. G. B. Whitham, Comm. Pure Appl. Math. 12, 113 (1959).
43. L. Todd, J. Fluid Mech. 18, 321 (1964).
44. L. Todd, J. Fluid Mech. 21, 193 (1965).
45. C. K. Chu, R. T. Taussig, Phys. Fluids 10, 249 (1967).
46. К. П. Черкасова, ПМТФ, № 6, 169 (1961).
47. К. А. Лурье, ЖТФ 33, 886 (1963).
48. К. Фридрихс, в сб. переводов «Математика» 1, № 2, 79 (1957).
49. Р. В. Половин, Дифф. уравн. 1, № 4, 499 (1965).
50. Е. П. Сиротина, С. И. Сыроватский, ЖЭТФ 39, № 3, 746 (1960).
51. Р. В. Дойч, ПМТФ № 1, 38 (1963).
52. P. N. Hu, Phys. Fluids 9, № 1, 89 (1966).
53. W. Marshall, Proc. Roy. Soc. A233, 367 (1955).
54. H. K. Sen, Phys. Rev. 102, 5 (1956).
55. Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений, «Наука», 1966.
56. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, Магнитная гидродинамика, Физматгиз, 1962.
57. Я. Б. Зельдович, ЖЭТФ 32, 1126 (1957).
58. В. Д. Шаfranов, ЖЭТФ 32, 1453 (1957).
59. I. M. Cohen, J. H. Clarke, Phys. Fluids 8, 1278 (1965).
60. P. Germain, Rev. Mod. Phys. 32, 951 (1960).
61. А. Г. Куликовский, Г. А. Любимов, ПММ 25, 125 (1961).
62. Г. Я. Любарский, УМН 17, № 1, 183 (1962).
63. P. L. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, Phys. Rev. 94, 511 (1954).
64. Г. Я. Любарский, ПММ 26, 511 (1962).
65. Г. Я. Любарский, ЖЭТФ 40, 1050 (1961).
66. Р. Г. Баранцев, ЖЭТФ 42, 889 (1962).
67. H. M. Mott-Smith, Phys. Rev. 82, 885 (1951).
68. D. A. Tidman, Phys. Rev. 111, 1439 (1958).
69. O. W. Greenberg, H. K. Sen, Y. M. Treve, Phys. Fluids 3, 379 (1960).
70. G. G. Comisar, Phys. Fluids 5, 1590 (1962).
71. M. Krook, Ann. of Phys. 6, 188 (1959).
72. C. Muckenfuss, Phys. Fluids 3, 320 (1960).
73. W. A. Gustafson, Phys. Fluids 3, 732 (1960).
74. Р. З. Сагдеев, ЖТФ 31, 1185 (1961).
75. N. H. Kemp, P. Germain, H. Grad, Rev. Mod. Phys. 32, 958 (1960).
76. L. Sarason, J. Math. Phys. 6, 1508 (1965).
77. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 36, 1272 (1959).
78. Р. В. Половин, В. П. Демущкий, Укр. физ. ж. 5, 3 (1960).
79. L. Todd, J. Fluid Mech. 24, 597 (1966).
80. C. K. Chu, Proc. Symp. Appl. Math. 18, 1 (1967).
81. D. L. Turcotte, C. K. Chu, ZAMP 17, 528 (1966).
82. C. E. Rosenkilde, Astrophys. J. 141, 1105 (1965).
83. H. Alfvén, Phys. Rev. 75, 1732 (1949).
84. G. K. Batchelor, Proc. Roy. Soc. A201, 405 (1950).
85. V. C. A. Ferraro, Proc. Roy. Soc. A233, 310 (1956).
86. А. Р. Канторович, Г. Е. Петчек, в сб. «Магнитная гидродинамика», Атомиздат, 1958, стр. 11—24.
87. L. Woltjer, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 45, 769 (1969).
88. H. Kautzleben, Betrachtungen zur hydromagnetischen Theorie des Plasmas, Akad. Verlag, Berlin, 1958.

89. В. Л. Гинзбург, УФН 51, 343 (1954).
90. R. Lüst, Z. Naturforsch. 10a, 125 (1955).
91. Ф. А. Баум, С. А. Каплан, К. П. Станюкович, Введение в космическую газодинамику, «Наука», 1968.
92. J. Vazet, W. B. Ericson, Astrophys. J. 129, 758 (1959).
93. С. А. Каплан, Межзвездная газодинамика, Физматгиз, 1958.
94. С. И. Сыроватский, Труды ФИАН СССР, 8, 13 (1956).
95. К. П. Черкасова, Изв. АН СССР, сер. Механика, № 5, 146 (1965).
96. Р. В. Половин, ЖЭТФ 39, 1005 (1960).
97. И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, ЖЭТФ 38, 529 (1960).
98. Р. В. Половин, ЖЭТФ 38, 1544 (1960).
99. J. Vazet, Astrophys. J. 128, 686 (1958).
100. А. А. Бармин, В. В. Гогосов, ДАН СССР 134, 1041 (1960).
101. В. В. Гогосов, ДАН СССР 135, 30 (1960).
102. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ДАН СССР 128, 684 (1959).
103. Б. Л. Рождественский, УМН 15, № 6, 59 (1960).
104. В. В. Гогосов, ДАН СССР 141, 55 (1961).
105. В. В. Гогосов, ПММ 25, 456 (1961).
106. С. Е. Гребенщиков, М. Д. Райзер, А. А. Рухадзе, А. Г. Франк, ЖТФ 31, 529 (1961).
107. Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 35, 1291 (1958).
108. В. В. Гогосов, ПММ 26, № 1, 88 (1962).
109. В. В. Гогосов, ДАН СССР 142, 292 (1962).
110. В. В. Гогосов, ПММ 25, 108 (1961).
111. Р. В. Половин, К. П. Черкасова, ЖЭТФ 41, 263 (1961).

#### К главе 4

1. I. Langmuir, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 14, 627 (1926).
2. J. W. Rayleigh, Phil. Mag. 2, 117 (1906).
3. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, ДАН СССР 80, 193 (1951).
4. Р. В. Половин, ЖЭТФ 31, 354 (1956).
5. L. Tonks, I. Langmuir, Phys. Rev. 33, 195, 990 (1929).
6. А. А. Власов, ЖЭТФ 8, 291 (1938).
7. Л. Д. Ландау, ЖЭТФ 16, 574, 1946.
8. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, в сб. «Высокочастотные свойства плазмы», изд. АН УССР, 1965, стр. 133.
9. В. Н. Фадеева, Н. М. Терентьев, Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, Гостехиздат, 1954.
10. D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev. 75, 1851, 1864 (1949).
11. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ 27, 19 (1954).
12. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 22, 303 (1952).
13. G. Router, E. H. Sondheimer, Proc. Roy. Soc. A195, 336 (1948).
14. В. П. Силин, Диссертация, ФИАН СССР, 1952; Труды ФИАН, 6, 200 (1955).
15. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ 21, 1262, 1951.
16. А. А. Веденев, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН 73, 701, 1961.
17. T. O'Neil, Phys. Fluids 8, 2255 (1965).

#### К главе 5

1. E. V. Appleton, M. A. Barnett, Electrician 94, 398 (1925).
2. H. W. Nichols, J. C. Schelling, Nature 115, 334 (1925).
3. H. W. Nichols, J. C. Schelling, Bell. Syst. Techn. J. 4, 215 (1925).

4. H. Lassen, *Elektr. Nachr. Techn.* 4, 324 (1927).
5. E. V. Appleton, *URSI Proc., Washington Assambly*, 1927.
6. E. Aström, *Nature* 165, 1019 (1950).
7. E. Aström, *Ark. f. Fys.* 2, 442 (1951).
8. А. И. Ахизер, Л. Е. Паргаманик, *Ученые записки ХГУ* 2, 75 (1948).
9. К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* 35, 1158 (1958).
10. K. Köpfer, *Z. Naturforsch.* 12a, 815 (1957).
11. В. Д. Шафранов, *Вопросы теории плазмы*, вып. 3, Атомиздат, 1963, стр. 3.
12. H. G. Booker, *Proc. Roy. Soc. A*150, 267 (1935).
13. В. Д. Шафранов, *Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций*, т. 4, изд. АН СССР, 1958, стр. 426.
14. T. Stix, *Phys. Rev.* 106, 1146 (1957).
15. В. М. Галицкий, А. Б. Мигдал, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 1, изд. АН СССР, 1958, стр. 161.
16. Б. Н. Гершман, *ЖЭТФ* 24, 659 (1953).
17. М. Е. Герценштейн, *ЖЭТФ* 27, 180 (1954).
18. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* 31, 642 (1956).
19. К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* 34, 1292 (1958).
20. Б. А. Трубиных, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 3, изд. АН СССР, 1958, стр. 104.
21. В. Д. Шафранов, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, изд. АН СССР, 1958, стр. 416.
22. Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов, *ЖЭТФ* 39, 181 (1960).
23. К. Н. Степанов, А. Б. Киценко, *ЖТФ* 31, 167 (1961).
24. Г. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, ч. I, ИЛ, 1949.
25. Г. В. Гордеев, *ЖЭТФ* 23, 660 (1952).
26. Б. Н. Гершман, в сб. «Памяти А. А. Андропова», изд. АН СССР, 1955, стр. 599.
27. Л. Э. Паргаманик, *Диссертация*, ХГУ, 1948.
28. В. И. Пахомов, В. Ф. Алексин, К. Н. Степанов, *ЖТФ* 31, 1170 (1961).
29. К. Н. Степанов, *Препринт ФТИ АН УССР*, 1959; в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 1, изд. АН УССР, Киев, 1962, стр. 45.
30. Б. Н. Гершман, *ЖЭТФ* 38, 912 (1960).
31. В. П. Силин, *Диссертация*, ФИАН СССР, 1952; *Труды ФИАН им. П. Н. Лебедева* 6, 200 (1955).
32. К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* 35, 283 (1958).
33. К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* 38, 256 (1960).
34. К. Н. Степанов, *Изв. вузов, Радиофизика* 6, 403 (1963).
35. В. Д. Шафранов, *ЖЭТФ* 34, 1475 (1958).
36. Б. Н. Гершман, *Изв. вузов, Радиофизика* 1, № 5—6, 49 (1958).
37. К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* 34, 1292 (1958).
38. С. И. Брагинский, А. П. Казанцев, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 3, изд. АН СССР, 1958, стр. 24.
39. Б. Н. Гершман, *Изв. вузов, Радиофизика* 1, № 4, 3 (1958).
40. Б. Н. Гершман, *ЖЭТФ* 24, 453 (1953).
41. В. Д. Шафранов, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, изд. АН СССР, 1958, стр. 426.
42. Р. З. Сагдеев, В. Д. Шафранов, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, изд. АН СССР, 1958, стр. 430.
43. T. H. Stix, *Phys. Fluid* 1, 308 (1958).

44. P. H. Doyle, J. Neufeld, Phys. Fluids 2, 39 (1958).
45. К. Н. Степанов, ЖЭТФ 35, 1155 (1958).
46. В. И. Пахомов, в сб. «Высокочастотные свойства плазмы», «Наукова думка», Киев, 1965, стр. 189.
47. М. С. Ковнер, Изв. вузов, Радиофизика 4, 765 (1961).
48. М. С. Ковнер, Изв. вузов, Радиофизика 4, 1035 (1961).
49. К. Н. Степанов, Укр. физ. ж. 4, 678 (1959).
50. А. Н. Кондратенко, К. Н. Степанов, Укр. физ. ж. 13, 1515 (1968).
51. А. Б. Михайловский, Ядерный синтез 5, 122 (1965).
52. А. Б. Михайловский, ЖТФ 37, 1365 (1967).
53. M. N. Rosenbluth, W. E. Drummond, Phys. Fluid 5, 1507 (1962).
54. Д. Г. Ломинадзе, К. Н. Степанов, ЖТФ 34, 1823 (1964).
55. Д. Г. Ломинадзе, К. Н. Степанов, Ядерный синтез 4, 28 (1964).
56. А. Б. Михайловский, Э. А. Пашицкий, ДАН СССР 161, 81 (1965).
57. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ 40, 1404 (1961).
58. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, Ядерный синтез 4, 272 (1964).
59. J. E. Drummond, Phys. Rev. 110, 293 (1958).
60. К. Н. Степанов, Препринт ФТИ АН УССР, 1959; в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 1, изд. АН УССР, Киев, 1962, стр. 52.
61. Р. Р. Рамазашвили, А. А. Рухадзе, ЖТФ 32, 644 (1962).
62. E. P. Gross, Phys. Rev. 82, 232 (1951).
63. I. Vernstein, Phys. Rev. 109, 10 (1958).
64. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, ЖЭТФ 41, 1527 (1961).
65. В. П. Силин, ЖЭТФ 35, 1243 (1958).
66. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, В. И. Пистуневич, Ядерный синтез 3, 30 (1963).

## К главе 6

1. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ДАН СССР 69, 555 (1949).
2. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, ЖЭТФ 21, 1262 (1951).
3. А. И. Ахиезер, Я. Б. Файнберг, УФН 44, 321 (1951).
4. D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev. 75, 1851 (1949).
5. D. Bohm, E. Gross, Phys. Rev. 75, 1864 (1949).
6. J. E. Pierce, Proc. IRE 35, 111 (1947).
7. J. E. Pierce, J. Appl. Phys. 19, 231 (1948).
8. J. E. Pierce, J. Appl. Phys. 20, 1060 (1949).
9. A. V. Haeff, Phys. Rev. 74, 1532 (1948).
10. A. V. Haeff, Proc. IRE 7, 4 (1949).
11. В. П. Силин, А. А. Рухадзе, Электромагнитные свойства плазмы и плазмopodobных сред, Атомиздат, 1961.
12. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ 27, 24 (1954).
13. Б. Б. Кадомцев в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, изд. АН СССР, 1958, стр. 364.
14. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, УФН 73, 701 (1961).
15. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, ЖТФ 32, 703 (1962).
16. Г. И. Будкер, Атомная энергия 1, № 5, 9 (1956).
17. O. Buneman, Phys. Rev. Lett. 1, 104 (1958).

18. O. Vuneman, Phys. Rev. 115, 503 (1959).
19. Л. М. Коврижных, А. А. Рухадзе, ЖЭТФ 38, 850 (1960).
20. Е. Е. Ловецкий, А. А. Рухадзе, Труды ФИАН 32, 206 (1966).
21. Г. В. Гордеев, ЖЭТФ 27, 19 (1954).
22. В. D. Fried, Phys. Fluids 2, 337 (1959).
23. S. Neufeld, P. H. Doyle, Phys. Rev. 121, 654 (1961).
24. В. Г. Маханьков, А. А. Рухадзе, Ядерный синтез 2, 177 (1962).
25. E. S. Weibel, Phys. Rev. Lett. 2, 83 (1959).
26. А. Е. Стефанович, ЖТФ 32, 638 (1962).
27. В. Г. Маханьков, В. И. Шевченко, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 4, изд. «Наукова думка», Киев, 1965, стр. 190.
28. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, ЖТФ 31, 167 (1961).
29. К. Н. Степанов, Диссертация, ХГУ, 1958.
30. В. О. Раппопорт, Изв. вузов, Радиофизика 3, 737 (1960).
31. М. С. Ковнер, Изв. вузов, Радиофизика 3, 631 (1960).
32. М. С. Ковнер, Изв. вузов, Радиофизика 3, 746 (1960).
33. В. Л. Гинзбург, УФН 69, 537 (1959).
34. В. В. Железняков, Изв. вузов, Радиофизика 2, 14 (1959).
35. Д. Г. Ломинадзе, К. Н. Степанов, ЖТФ 33, 1311 (1963).
36. К. Н. Степанов, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 2, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 164.
37. O. Vuneman, J. Nucl. Energy Pt. C 4, 111 (1962).
38. W. E. Drummond, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 15, 1507 (1962).
39. Д. Г. Ломинадзе, К. Н. Степанов, ЖТФ 34, 1823 (1964).
40. А. Б. Михайловский, Э. А. Пашицкий, ДАН СССР 161, 81 (1965).
41. Р. З. Сагдеев, ЖТФ 31, 1955 (1961).
42. В. И. Курилко, В. И. Мирошниченко, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 3, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 161.
43. М. В. Бабыкин, Е. К. Завойский, Л. И. Рудаков, В. А. Скорюпин, Nucl. Fusion 1962, Suppl. Pt 3, 1073 (1962).
44. Е. К. Завойский, Атомная энергия 14, 57 (1963).
45. М. В. Бабыкин и др., ЖЭТФ 46, 511 (1964).
46. К. Н. Степанов, ЖТФ 34, 2146 (1964).
47. В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, Ядерный синтез, 7, 131 (1967).
48. М. С. Ковнер, Изв. вузов, Радиофизика 4, 444 (1961).
49. М. С. Ковнер, Изв. вузов, Радиофизика 4, 765 (1961).
50. М. С. Ковнер, Изв. вузов, Радиофизика 4, 1035 (1961).
51. В. Б. Красовицкий, К. Н. Степанов, Изв. вузов, Радиофизика 6, 1036 (1963).
52. K. G. Malmfors, Ark. f. Fys. 1, 569 (1950).
53. H. Sen, Phys. Rev. 88, 816 (1952).
54. А. В. Гапонов, ЖЭТФ 39, 326 (1960).
55. В. В. Железняков, Изв. вузов, Радиофизика 3, 57 (1960).
56. В. В. Железняков, Изв. вузов, Радиофизика 3, 180 (1960).
57. В. В. Железняков, Изв. вузов, Радиофизика 4, 618 (1961).
58. В. В. Железняков, Изв. вузов, Радиофизика 4, 849 (1961).
59. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, Укр. физ. журн. 6, 297 (1961); в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 2, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 144.
60. В. И. Шевченко, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 2, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 156.

61. В. И. Петелин, Изв. вузов, Радиофизика 4, 455 (1961).
62. А. Б. Киценко, К. Н. Степанов, ЖТФ 31, 176 (1961).
63. E. G. Haggis, J. Nucl. Energy, Pt. C, 2, 138 (1962).
64. В. И. Пистунович, Атомная энергия 14, 72 (1963).
65. В. Б. Красовицкий, К. Н. Степанов, ЖТФ 34, 1013 (1964).
66. А. В. Тимофеев, В. И. Пистунович, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 5, Атомиздат, М., 1967, стр. 351.
67. S. A. Bludman, K. Watson, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 3, 741, 747 (1960).
68. А. А. Рухадзе, ЖТФ 32, 488 (1962).
69. А. Б. Киценко, Б. А. Гапонцев, в сб. «Взаимодействие пучков заряженных частиц с плазмой», изд. «Наукова думка», Киев, 1965, стр. 131.
70. К. Е. Zayed, A. V. Kitsenko, Plasma Phys. 10, 147 (1968).
71. H. Wright, C. L. Wiginton, J. Neufeld, Phys. Fluids 7, 1375 (1965).
72. В. Г. Маханьков, ЖТФ 34, 673 (1964).
73. В. А. Фок, Теория пространства, времени и тяготения, Физматгиз, 1961.
74. М. Е. Герценштейн, ЖЭТФ 23, 669 (1952).
75. O. Renfroe, Phys. Fluids 3, 258 (1960).
76. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, ЖЭТФ 40, 963 (1961).
77. P. D. Noerdlinger, Phys. Rev. 118, 879 (1960).
78. L. R. Walker, J. Appl. Phys. 25, 131 (1955).
79. P. L. Auer, Phys. Rev. Lett. 1, 411 (1958).
80. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, Труды физ. отд. физ.-мат. факультета ХГУ 6, 13 (1955).
81. F. Verz, Proc. Phys. Soc. B69, 939 (1956).
82. H. E. Singhaus, Phys. Fluids 7, 1534 (1964).
83. А. А. Власов, Уч. записки МГУ 75, 2 (1945).
84. M. A. Lampert, J. Appl. Phys. 27, 5 (1956).
85. E. A. Jackson, Phys. Fluids 3, 786 (1960).
86. Я. Б. Файнберг, Атомная энергия 11, 313 (1961).
87. В. С. Имшенник, А. И. Морозов, ЖТФ 31, 640 (1961).
88. Ф. Г. Бакшт, ЖТФ 33, 1173 (1963).
89. Р. В. Половин, Укр. физ. ж. 8, 709, 1283 (1963).
90. W. E. Nexsen, W. F. Cummins, F. H. Coengsen, A. E. Sherman, Phys. Rev. 119, 1457 (1960).
91. P. J. Kellogg, H. Liemohn, Phys. Fluids 3, 40 (1960).
92. A. Simon, в сб. «Plasma Physics» Intern. Atomic Energy Agency, Vienna, 1965, p. 163.
93. Р. В. Половин, ЖТФ 34, № 2, 259 (1964).
94. E. G. Harris, Phys. Rev. Lett. 2, 34 (1959).
95. P. Burt, E. G. Harris, Phys. Fluids 4, 1412 (1961).
96. Y. Ozawa, I. Kaij, M. Kito, J. Nucl. Energy Pt. C, 4, 271 (1962).
97. J. E. McCune, Phys. Rev. Lett. 15, 393 (1965).
98. R. N. Sudan, Phys. Fluids 6, 57 (1963).
99. А. И. Ахизер, Г. Я. Любарский, Р. В. Половин, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 3, изд. АН УССР, Киев, 1963, стр. 151.
100. R. Q. Twiss, Proc. Phys. Soc. B64, 654 (1951).
101. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1954, стр. 141.
102. Е. Титчмарш, Введение в теорию интегралов Фурье, Гостехиздат, 1948, стр. 19.

103. Я. Б. Файнберг, В. И. Курилко, В. Д. Шапиро, ЖТФ 31, 633 (1961).
104. R. J. Briggs, Electron-stream interaction with plasmas, Massachusetts Inst. Technol. Press, Cambridge, 1964.
105. R. Q. Twiss, Phys. Rev. 84, 448 (1951).
106. P. A. Sturrock, Phys. Rev. 112, 1488 (1959).
107. Р. В. Половин, ЖТФ 31, 1220 (1961).
108. Р. В. Половин, ЖТФ 33, 255 (1963).
109. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, Р. В. Половин, А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Коллективные колебания в плазме, Атомиздат, 1964.
110. P. Rolland, Phys. Rev. 140, № 3B, 776 (1965).
111. А. Г. Куликовский, ПММ 30, 148 (1966).
112. P. A. Sturrock, Phys. Rev. 117, № 6, 1426 (1960).
113. А. В. Тимофеев, ЖЭТФ 39, 397 (1960).
114. Ю. Н. Днестровский, Д. П. Костомаров, В. И. Пистуневич, Ядерный синтез 3, 30 (1963).
115. Ю. Н. Днестровский, Ядерный синтез 3, 259 (1963).
116. А. Б. Михайловский, Ядерный синтез 5, 122 (1965).
117. R. F. Post, M. N. Rosenbluth, Phys. Fluids 8, 547 (1965); 9, 730 (1966).

#### К главе 7

1. Б. И. Давыдов, ЖЭТФ 6, 463 (1936); 7, 1069 (1937).
2. M. J. Druvesteun, Physica 10, 61 (1930); 14, 1003 (1934).
3. А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ 35, 116 (1958).
4. В. В. Ангелейко, А. Б. Киденко, Укр. физ. ж. 10, 16 (1965).
5. В. В. Ангелейко, И. А. Ахиезер, ЖЭТФ 53, 689 (1967).
6. И. А. Ахиезер, В. В. Ангелейко, ЖЭТФ 55, 2291 (1968).
7. И. А. Ахиезер, В. В. Ангелейко, Укр. физ. ж. 13, 2026 (1968).
8. А. В. Недоспасов, УФН 94, 439 (1968).
9. Л. Пекарек, УФН 94, 463 (1968).
10. J. R. Roth, Phys. Fluids 10, 2712 (1967).
11. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, Физматгиз, М., 1959.
12. J. R. Roth, Phys. Fluids 12, 260 (1969).
13. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, Физматгиз, 1962.

#### К главе 8

1. А. И. Ахиезер, Г. Я. Любарский, ДАН СССР 80, 193 (1951).
2. Р. В. Половин, ЖЭТФ 31, 354 (1956).
3. А. А. Веденов, ЖЭТФ 33, 1509 (1957).
4. К. Н. Степанов, ЖТФ 33, 246 (1963).
5. D. Bohm, E. P. Gross, Phys. Rev. 75, 1851 (1949).
6. В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 4, изд. «Наукова думка», 1965, стр. 93.
7. Н. С. Репалов, Н. А. Хижняк, в сб. «Высокочастотные свойства плазмы», вып. 3, изд. «Наукова думка», 1968, стр. 90.
8. N. Wilhelmsson, Phys. Fluids 4, 335 (1961).
9. S. Amer, J. Electr. Contr. 5, 105 (1958).
10. H. Derfler, J. Electr. Contr. 11, 189 (1961).
11. P. A. Sturrock, Proc. Roy. Soc. A242, 277 (1957).

12. S. F. Smerd, *Nature* **175**, 297 (1955).
13. А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, *ЖЭТФ* **30**, № 5, 915 (1956).
14. А. И. Ахиезер, Р. В. Половин, *ДАН СССР* **102**, 919 (1955).
15. G. Francis, *Ionization phenomena in gases*, Butterworths Sci. Publ., 1960.
16. H. S. C. Wang, *Phys. Fluids* **6**, 1115 (1963).
17. A. Cavaliere, *Nuovo Cimento* **23**, 440 (1962).
18. H. S. C. Wang, M. S. Lojko, *Phys. Fluids* **6**, 1458 (1963).
19. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *Ядерный синтез* **1**, 82 (1961).
20. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, *Механика сплошных сред*, Гостехиздат, М., 1953.
21. С. С. Моисеев, Р. З. Сагдеев, *Plasma Phys, J. Nucl. Energy, Pt. C* **5**, 43 (1963).
22. Р. З. Сагдеев, Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, Атомиздат, 1964, стр. 20.
23. А. В. Гуревич, Л. В. Парийская, Л. П. Питаевский, *ЖЭТФ* **49**, 647 (1965).
24. D. J. Kortweg, G. de Vries, *Phil. Mag.* **39**, 422 (1895).
25. K. Zabusky, M. Kruskal, *Phys. Rev. Lett.* **15**, 240 (1965).
26. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, *ЖЭТФ* **51**, 1557 (1966).
27. И. А. Ахиезер, *ЖЭТФ* **47**, 952 (1964).
28. И. А. Ахиезер, А. Е. Боровик, *ЖЭТФ* **51**, 1227 (1966).
29. T. Taniuti, N. Yajima, A. Outi, *J. Phys. Soc. Japan* **21**, 757 (1966).
30. И. А. Ахиезер, А. Е. Боровик, *Укр. физ. ж.* **13**, 11 (1968).
31. J. Adlam, J. Allen, *Phil. Mag.* **3**, 448 (1958).
32. Р. З. Сагдеев, в сб. «Физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций», т. 4, изд. АН СССР, 1958.
33. S. Gardner, а. о. Paper № 374, Geneva Conference, 1958.
34. L. Davies, R. Lüst, A. Schlüter, *Z. Naturforsch.* **13a**, 916 (1958).
35. R. Z. Sagdeev, *Proc. of Symposium on Electromagnetic and Fluid Dynamics of Gaseous Plasma*, Acad. Press. 1961, p. 443.
36. В. И. Карпман, *ЖТФ* **33**, 959 (1963).
37. А. П. Казанцев, *ЖЭТФ* **44**, 1283 (1963).
38. Ю. А. Березин, В. И. Карпман, *ЖЭТФ* **46**, 1880 (1964).

#### К главе 9

1. Ю. А. Романов, Г. Ф. Филиппов, *ЖЭТФ* **40**, 123 (1961).
2. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *УФН* **73**, 701 (1961).
3. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *Ядерный синтез* **1**, 82 (1961).
4. А. А. Веденов, Е. П. Велихов, Р. З. Сагдеев, *Ядерный синтез*, Дополнение, ч. 2, 465 (1962).
5. W. E. Drummond, D. Pines, *Nuclear Fusion Suppl. Pt. 3*, 1049 (1962).
6. В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* **49**, 1197 (1965).
7. Дж. Роуландс, В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, *ЖЭТФ* **50**, 994 (1966).
8. А. А. Веденов, *Атомная энергия* **13**, 5 (1962)

9. А. А. Веденов, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, Атомиздат, 1963, стр. 203.
10. В. Л. Якименко, ЖЭТФ 44, 1534 (1963).
11. А. А. Андронов, В. Ю. Трахтенгерц, ЖЭТФ 45, 1009 (1963).
12. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ 42, 1515 (1962).
13. В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, Укр. физ. ж. 12, 535 (1967); 13, 876 (1968).
14. Б. Б. Кадомцев, О. П. Погуце, ЖЭТФ 53, 2025 (1967).
15. В. Д. Шапиро, В. И. Шевченко, ЖЭТФ 54, 1187 (1968).
16. В. А. Трубников, в сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 1, Атомиздат, 1963, стр. 98.
17. I. Bernstein, F. Engelman, Phys. Fluids 9, 937 (1966).

#### К главе 10

1. M. Rosenbluth, а. о., Труды III Международной конференции по физике плазмы и управляемому термоядерному синтезу, 1968, Доклад CN 24/E14.
2. Г. М. Заславский, Статистическая необратимость в нелинейных системах, «Наука», 1970.
3. Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили, ЖЭТФ 43, 2234 (1962).
4. А. А. Галеев, В. И. Карпман, ЖЭТФ 44, 592 (1963).
5. В. И. Карпман, ДАН СССР 152, 587 (1963).
6. В. П. Силин, ПМТФ № 1, 32 (1964).
7. Б. Б. Кадомцев, Турбулентность плазмы; в сб. «Вопросы теории плазмы», под ред. М. А. Леонтовича, вып. 4, Атомиздат, 1964, стр. 188.
8. А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев, Ядерный синтез 5, 20 (1965).
9. В. Н. Цытович, Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1967.
10. Р. Пайерлс, Квантовая теория твердых тел, ИЛ, 1956.
11. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ 32, 1291 (1962).
12. К. С. Карплюк, В. Н. Ораевский, В. П. Павленко Укр. физ. ж. 13, 1114 (1968).
13. А. С. Бакай, ЖЭТФ 59, 116 (1970).
14. А. С. Бакай, Ядерный синтез 10, 53 (1970).
15. W. Drummond, D. Pines, Nucl. Fusion Suppl. 3, 1049 (1962).
16. Л. М. Альтшуль, В. И. Карпман, ЖЭТФ 47, 1553 (1964).
17. В. П. Силин, ЖЭТФ 45, 816 (1963).
18. В. И. Петвиашвили, ДАН СССР 153, 1295 (1963).
19. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ 47, 2269 (1964).
20. I. A. Akhiezer, Phys. Letts 12, 201 (1964).
21. В. Н. Ораевский, Р. З. Сагдеев, ЖТФ 32, 1291 (1962).
22. А. А. Галеев, В. Н. Ораевский, ДАН СССР 147, 71 (1962).
23. А. И. Ахиезер, В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, Ядерный синтез 11, 403 (1971).
24. В. Ф. Алексин, В. Д. Ходусов, Укр. физ. ж. 15, 1021 (1970).
25. В. Н. Ораевский, Ядерный синтез 4, 293 (1963).
26. Дж. Роулэндс, В. Л. Сизоненко, К. Н. Степанов, ЖЭТФ 50, 994 (1966).

## К главе 11

1. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Статистическая физика, «Наука», 1964.
2. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.
3. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, изд. АН СССР, 1953.
4. М. Л. Левин, С. М. Рытов, Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике, «Наука», 1967.
5. H. V. Callen, T. A. Welton, Phys. Rev. 83, 34 (1951).
6. H. Nyquist, Phys. Rev. 32, 110 (1928).
7. М. А. Леонтович, С. М. Рытов, ЖЭТФ 23, 246 (1952).
8. В. П. Силин, Радиофизика 2, 198 (1959).
9. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ 41, 644 (1961).
10. A. G. Sitenko, Electromagnetic Fluctuations in Plasma, Acad. Press, 1967.
11. В. Д. Шафранов, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемых термоядерных реакций» т. 4, изд. АН СССР, 1958, стр. 416.
12. R. Kubo, J. Phys. Soc. Japan 12, 570 (1957).
13. H. Nakano, Progr. Theor. Phys. 15, 77 (1954); 17, 145 (1957).
14. А. Г. Ситенко, Укр. физ. ж. 11, 1161 (1966).
15. E. E. Salpeter, Phys. Rev. 120, 1528 (1960); 122, 1663 (1961).
16. W. Thompson, J. Hubbard, Rev. Mod. Phys. 32, 714 (1960).
17. N. Rostoker, Nucl. Fusion 1, 101 (1961).
18. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, УФН 89, 227 (1966).
19. S. Ichimaru, D. Pines, N. Rostoker, Phys. Rev. Lett. 8, 231 (1962).
20. S. Ichimaru, Ann. Phys. 20, 78 (1962).
21. Л. С. Богданкевич, А. А. Рухадзе, В. П. Силин, Радиофизика 5, 1093 (1962).
22. А. А. Абрикосов, И. М. Халатников, ЖЭТФ 34, 198 (1958).
23. Б. Б. Кадомцев, ЖЭТФ 32, 943 (1957).
24. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ 42, 584 (1962).
25. А. Г. Ситенко, А. А. Гурин, ЖЭТФ 49, 1591 (1965).
26. P. F. Bhatnagar, E. P. Gross, M. Krook, Phys. Rev. 94, 511 (1954).
27. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, ЖЭТФ 32, 618 (1957).
28. Ю. А. Кирочкин, Радиофизика 5, 1104 (1962).
29. В. В. Ангелейко, И. А. Ахиезер, ЖЭТФ 53, 689 (1967).
30. И. А. Ахиезер, В. В. Ангелейко, Укр. физ. ж. 13, 2026 (1968).
31. В. В. Ангелейко, Укр. физ. ж. 13, 177 (1968).
32. И. А. Ахиезер, В. В. Ангелейко, ЖЭТФ 55, 2291 (1968).

## К главе 12

1. А. И. Ахиезер, И. Г. Прохода, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ 33, 750 (1957).
2. А. И. Ахиезер, И. А. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ 41, 644 (1961).
3. J. P. Dougherty, D. T. Farley, Proc. Roy. Soc. A259, 79 (1960).
4. E. E. Salpeter, J. Geophys. Res. 65, 1851 (1960); 66, 982 (1960).

5. S. Ichimaru, D. Pines, N. Rostoker, Phys. Rev. Lett. 8, 231 (1962).
6. M. Rosenbluth, N. Rostoker, Phys. Fluids 5, 776 (1962).
7. S. Ichimaru, Ann. Phys. 20, 78 (1962).
8. А. Г. Ситенко, Электромагнитные флуктуации в плазме, изд. ХГУ, 1965.
9. В. В. Железняков, Радиоизлучение Солнца и планет, «Наука», 1964.
10. И. А. Ахиезер, Ю. Л. Болотин, Ядерный синтез 3, 271 (1963).
11. С. С. Моисеев, Труды VII Международной конференции по явлениям в ионизованных газах, 1965, Белград, 1967, стр. 645.
12. И. А. Ахиезер, И. А. Даниелия, Н. Л. Цинцадзе, ЖЭТФ 46, 300, 1964.
13. И. А. Ахиезер, ЖТФ 33, 935 (1963).
14. D. Fargely, J. Dougherty, D. Barrow, Proc. Roy. Soc. A263, 238 (1961).
15. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, Изв. вузов, Радиофизика 6, 469 (1963).
16. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, УФН 89, 227 (1966).
17. А. Г. Ситенко, Ю. А. Кирочкин, ЖТФ 33, 1354 (1963).
18. В. В. Ангелейко, И. А. Ахиезер, ЖЭТФ 53, 689 (1967).
19. И. А. Ахиезер, В. В. Ангелейко, ЖЭТФ 55, 2291 (1968).
20. В. В. Ангелейко, И. А. Ахиезер, Укр. физ. ж. 13, 2036 (1968).
21. В. В. Ангелейко, Укр. физ. ж. 13, 177 (1968).
22. И. А. Ахиезер, ЖЭТФ 47, 1159 (1965).
23. И. А. Ахиезер, в сб. «Физика плазмы и проблемы управляемого термоядерного синтеза», вып. 2, изд. АН УССР, 1963, стр. 28.
24. R. W. Gould, T. M. O'Neil, J. H. Malmberg, Phys. Rev. Lett. 19, 2191 (1967).
25. T. M. O'Neil, R. W. Gould, Phys. Fluids 11, 134 (1968).
26. А. Г. Ситенко, Нгуен Ван Чонг, В. Н. Павленко, ЖЭТФ 58, 1377 (1970); Nuclear Fusion 10, 259 (1970).

### К главе 13

1. Н. Бор, Прохождение атомных частиц через вещество, ИЛ, 1950.
2. E. Fermi, Phys. Rev. 57, 485 (1940).
3. И. Е. Тамм, И. М. Франк, ДАН СССР 14, 107, 1937.
4. А. А. Власов, Теория многих частиц, Гостехиздат, 1950.
5. А. И. Ахиезер, А. Г. Ситенко, ЖЭТФ 23, 161 (1952).
6. D. Pines, D. Bohm, Phys. Rev. 82, 625 (1951); 85, 338 (1952).
7. J. Lindhard, Det. Kong. Danske Vid. Selskab. Dan. Mat. Fys. Medd. 28, 8 (1954).
8. J. Neufeld, H. Ritchie, Phys. Rev. 98, 1632 (1955).
9. А. Г. Ситенко, К. Н. Степанов, Труды физ.-мат. фак. ХГУ 7, 5 (1958).
10. А. И. Ларкин, ЖЭТФ 37, 264 (1959).
11. А. Г. Ситенко, Цзянь Ю-тай, ЖТФ 32, 1324 (1962).
12. А. Г. Ситенко, в сб. «Труды межвузовской научной конференции по новой технике», 1964, стр. 66.
13. G. Kalman, A. Ron, Ann. Phys. 16, 118 (1961).
14. В. Н. Цытович, ЖЭТФ 42, 809 (1962), 44, 946 (1963); ДАН СССР 142, 319 (1962).
15. A. I. Akhiezer, Nuovo Cimento, Suppl., 3, 591 (1956).

16. А. И. А х и е з е р, Я. Б. Ф а й н б е р г, в сб. «Теория и расчет линейных ускорителей», Госатомиздат, 1962, стр. 320.
17. И. А. А х и е з е р, ЖЭТФ 40, 954 (1961).
18. А. Б. К и ц е н к о, ДАН СССР 145, 305 (1962).
19. А. Г. С и т е н к о, В. Н. Р а д з и е в с к и й, ЖТФ 35, 1165 (1965).
20. А. Г. С и т е н к о, М. И. К а г а н о в, ДАН СССР 100, 681 (1955).
21. А. Г. С и т е н к о, А. А. К о л о м е н с к и й, ЖЭТФ 30, 511 (1956).
22. А. А. К о л о м е н с к и й, ДАН СССР 106, 982 (1956).
23. В. Л. Г и н з б у р г, ЖЭТФ 10, 601 (1940).
24. И. А. А х и е з е р, Ю. Л. Б о л о т и н, Ядерный синтез 3, 271 (1963).
25. И. А. А х и е з е р, Ю. Л. Б о л о т и н, ЖЭТФ 46, 1331 (1964).
26. И. А. А х и е з е р, ЖЭТФ 47, 667 (1964).
27. I. A. A k h i e z e r, Phys. Lett. 12, 201 (1964).
28. И. А. А х и е з е р, Укр. физ. ж. 10, 581 (1965).