

Gian-Carlo Rota, *Editor*

Encyclopedia of Mathematics and its Applications

Volume 8

Section: Mathematics of Physics

Peter A. Carruthers, *Section Editor*

**Angular
Momentum
in Quantum
Physics**

**Theory
and Application**

L. C. Biedenharn

Physics Department

Duke University

Durham, North Carolina

J. D. Louck

Los Alamos National Laboratory

University of California

Los Alamos, New Mexico

Addison-Wesley

Publishing Company

Reading, Massachusetts

1981

Л. Биденхарн
Дж. Лаук

УГЛОВОЙ МОМЕНТ В КВАНТОВОЙ ФИЗИКЕ

Теория
и приложения

В 2-х томах

Том 1

Перевод с английского

д-ра физ.-мат. наук
А. У. Климыка,

канд. физ.-мат. наук
А. М. Гаврилика

Москва
«Мир»
1984

Оглавление

От переводчиков.....	5
От редактора энциклопедии.....	8
Предисловие редактора серии.....	9
Предисловие.....	11
ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ	13
Примечания	16
Литература.....	17
ГЛАВА 2. КИНЕМАТИКА ВРАЩЕНИЙ	19
1. Введение.....	19
2. Свойства вращений.....	19
3. Конструкция Дирака.....	22
4. Картаново определение спинора.....	26
5. Связь между вращениями в $SU(2)$ и $SO(3)$	28
6. Параметризация группы вращений.....	30
7. Примечания.....	35
Литература.....	37
ГЛАВА 3. ОБЫЧНАЯ ТРАКТОВКА УГЛОВОГО МОМЕНТА В КВАНТОВОЙ МЕХАНИКЕ	39
1. Обзор.. ..	39
2. Определение операторов углового момента.....	39
3. Мультиплеты углового момента.....	41
4. Матрицы углового момента.....	46
5. Матрицы вращений (общие свойства).....	48
6. Матрицы вращений (явный вид).....	53
7. Волновые функции систем угловых моментов.....	61
8. Дифференциальные уравнения для матриц вращений.....	63
9. Ортогональность матриц вращений.....	70
10. Сферические функции.....	72
11. Сложение угловых моментов.....	75
12. Коэффициенты Вигнера.....	79
13. Связь между матрицами вращений и коэффициентами Вигнера.....	86
14. Понятие тензорного оператора.....	89
15. Теорема Вигнера — Эккарта.....	95
16. Связывание тензорных операторов.....	98
17. Применения теоремы Вигнера — Эккарта.....	00

18.	Коэффициенты Рака.....	106
19.	$9j$ -коэффициенты.....	122
20.	Произведения, инвариантные относительно вращений.....	125
21.	Операторы, сопоставляемые с коэффициентами Вигнера и Рака и с $9j$ -коэффициентами.....	128
22.	Примечания.....	134
23.	Приложения.....	154
	Литература.....	166
ГЛАВА 4.	ТЕОРИЯ ПОВОРОТОВ ПО ГАМИЛЬТОНУ.....	172
1.	Другой подход к вращениям.....	172
2.	Свойства поворотов (геометрический подход).....	175
3.	Свойства поворотов (алгебраический подход).....	185
4.	Пространство поворотов как пространство, на котором реализуются трансляции.....	188
5.	Примечания.....	191
	Литература.....	193
ГЛАВА 5.	ПРИМЕНЕНИЕ БОЗОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ В ТЕОРИИ ПОВОРОТОВ.....	196
1.	Введение.....	196
2.	Экскурс в бозонное исчисление.....	196
3.	Отображение Жордана.....	202
4.	Применение отображения Жордана.....	204
5.	Обобщение отображения Жордана.....	205
6.	Применение обобщенного отображения Жордана.....	208
7.	Применение обобщенного отображения Жордана к определению коэффициентов Вигнера.....	211
8.	Коэффициенты Вигнера как «дискретизированные» матрицы вращений.....	214
9.	Приложения.....	218
	Литература.....	249
ГЛАВА 6.	ОРБИТАЛЬНЫЙ УГЛОВОЙ МОМЕНТ И УГЛОВЫЕ ФУНКЦИИ НА СФЕРЕ.....	254
1.	Вращательная симметрия простой физической системы.....	255
2.	Скалярное произведение векторов состояний.....	256
3.	Унитарность оператора орбитального вращения.....	256
4.	(Плотное) подпространство в $\mathcal{H}(S)$	257
5.	При квантовании пространственного (орбитального) углового момента могут возникать только целочисленные значения l	258
6.	Преобразования шаровых сферических функций при орбитальном вращении.....	259
7.	Элементы матрицы вращения $\mathcal{D}^l(R)$ являются однородными полиномами.....	260
8.	Уравнение на собственные значения энергии.....	26
9.	Тензорные сферические функции.....	26
10.	Спинорные сферические функции.....	26
11.	Векторные сферические функции.....	26
12.	Алгебраические аспекты векторных сферических функций.....	26

13.	Краткое описание векторных шаровых сферических функций.....	272
14.	Теорема разложения для векторных функций, определенных на сфере	278
15.	Сферические функции от двух векторов, инвариантные относительно вращений.....	281
16.	Применение отображения Картана к сферическим функциям.....	283
17.	Сферические функции от нескольких векторов, инвариантные относительно вращений.....	285
18.	Связь шаровых сферических функций с теорией потенциала.....	288
19.	Матрицы орбитальных вращений как формы.....	290
20.	Матрицы орбитальных вращений эквивалентны вещественным ортогональным матрицам.....	292
21.	«Двузначные представления» собственной ортогональной группы $SO(3)$	293
22.	Примечание.....	295
	Литература.....	298

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, изд-во «Мир».

ББК 22.314

Б 59

УДК 530.145/539.1

Биденхарн Л., Лаук Дж.

Б 59 Угловой момент в квантовой физике: Пер. с англ. — М.: Мир, 1984, — Т. 1 — 302с., илл.

В монографии известных американских физиков-теоретиков Л. Биденхарна и Дж. Лаука излагаются методы теории углового момента и их приложения к таким разделам современной физики, как теория атома и электронных оболочек, структура ядра, молекулярная спектроскопия. Книга представляет собой хорошее изложение квантовомеханического аппарата углового момента.

В русском переводе книга выходит в двух томах. В первом томе (гл. 1—6) дано описание аппарата углового момента (орбитального и спинового), сложения угловых моментов, их геометрического, алгебраического и теоретико-группового аспектов.

Рассчитана на научных работников, аспирантов и студентов старших курсов соответствующих специальностей.

Б $\frac{1704020000-045}{041(01)-84}$ 55 — 84, ч. 1

**ББК 22.314
530.1**

Редакция литературы по физике

© Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1981

© Перевод на русский язык, «Мир», 1984

От переводчиков

Квантовомеханическая теория углового момента заняла прочное место в математическом багаже современной квантовой физики. Чрезвычайно важна ее роль как при описании спектров (от молекулярных до адронных, по всей структурной иерархии), так и в теории рассеяния. Оказалось, что даже для такого раздела теории угловых моментов, как коэффициенты Клебша — Гордана (Вигнера) (для сложения двух угловых моментов), существует исключительное разнообразие обобщений и связей с различными разделами математики и современной физики.

В развитие теории углового момента большой вклад внесли советские ученые. Сюда прежде всего следует отнести Вильнюсскую научную школу во главе с А. П. Юцисом, результаты которой (в том числе и оригинальные графические методы для сложения угловых моментов) подытожены в хорошо известных книгах [1, 2]. Заметиный вклад в эту теорию внесли Я. А. Смородинский, Л. А. Шелепин и их ученики. В 1972 г. появился их интересный обзор по квантовому угловому моменту [3], который ценен тем, что он показывает разносторонние связи квантового углового момента с различными разделами физики и математики. В 1975 г. вышла хорошая книга Д. А. Варшаловича, А. Н. Москалева и В. К. Херсонского [4]. Эта книга фактически является справочником, содержащим большое количество таблиц и формул теории квантового углового момента.

Книга известных американских физиков-теоретиков Л. Биденхарна и Дж. Лаука (работающих в области физических аспектов и приложений теории представлений групп Ли) по теории углового момента носит, скорее, характер учебного пособия. Она написана с большим педагогическим мастерством, содержит много исторического и фактического материала. Ряд разделов книги впервые включен в монографическую литературу. Сюда прежде всего следует отнести четвертую и пятую главы, касающиеся теории поворотов и бозонного исчисления.

Важную роль в исследованиях в различных отраслях физики играет теория симметрий. Более того, с течением времени значение теории симметрий возрастает. Чтобы убедиться в этом, достаточно вспомнить в историческом аспекте роль симметрий в физике элементарных частиц. Книга Л. Биденхарна и Дж. Лаука написана так, что может служить хорошим введением в современную теорию симметрий, причем не только с математической, но и с физической точки зрения. Достоинство книги состоит также в описании многочисленных приложений теории углового момента в различных разделах физики: атомной спектро-

скопии, ядерной физике, теории реакций, физике электромагнитных процессов, теории молекул и т.д. Этот материал может служить хорошей основой для обучения эффективным применениям симметрий в современных задачах физики и квантовой химии.

Как известно, квантовая теория углового момента основывается на представлениях групп $SO(3)$ и $SU(2)$. Однако во многих местах книги (в особенности в приложениях) авторы не ограничиваются этими группами. В рассмотрение вводятся такие группы, как $U(2)$, $U(n)$, $SO(n)$, S_n . Этот материал и служит мостиком, переброшенным между самой простой симметрией (которую представляет собой теория углового момента) и более сложными симметриями.

В американском издании книга входит в состав «Энциклопедии математики и ее приложений»¹⁾ и составляет один из томов серии этой энциклопедии «Математика для физики». В переводе книга издается в двух томах, соответствующих двум частям однотомного американского издания. Первый том содержит математическую теорию квантового углового момента. Она включает все основные математические результаты, относящиеся к геометрическим и алгебраическим аспектам углового момента (матрицы углового момента, их сложение, теорема Вигнера — Эккарта, коэффициенты Рака, симметрии коэффициентов Вигнера и Рака, связывание тензорных операторов и т.д.). Каждая глава сопровождается приложениями и обширными примечаниями. В них излагается материал, дополняющий основное содержание книги. Особый интерес представляют приложения к гл. 5. Во-первых, материал этих приложений впервые опубликован в монографической литературе, во-вторых, он допускает широкие обобщения на случай произвольных унитарных групп. Второй том посвящен применениям теории углового момента в различных разделах физики. Эта часть отличается хорошим подбором физических задач, которые решаются с помощью развиваемого в первом томе математического аппарата. В конце второго тома имеется приложение, состоящее из 8 таблиц (содержащих коэффициенты Вигнера (Клебша — Гордана) и Рака, сферические функции, операторы Вигнера и Рака и тензорные операторы), а также список буквенных обозначений, который очень удобен при работе над книгой.

Следует отметить, что данная книга и вышеупомянутая книга Д. А. Варшавича и др. [4] органически дополняют одна другую. Поэтому можно рекомендовать параллельное использование этих книг. Хочется выразить уверенность, что перевод книги Л. Биденхарна и Дж. Лаука на русский язык окажет большую помощь советским физикам.

Мы хотели бы выразить свою искреннюю признательность проф. Л. Биденхарну и проф. Дж. Лауку за содействие при переводе книги.

А. У. Климук, А. М. Гаврилик

¹⁾ Encyclopedia of Mathematics and its Applications. / Editor Gian-Carlo Rota, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts.

Литература

1. Юцис А. П., Бандзайтис А. А. Теория момента количества движения в квантовой механике. — Вильнюс: Минтис, 1965.
2. Юцис А. П., Левинсон И. Б., Ванагас В. В. Математический аппарат теории момента количества движения. — Вильнюс: Минтис, 1960.
3. Смородинский Я. А., Шелепин Л. А. Коэффициенты Клебша — Гордаина с разных сторон. — УФН, 1972, т. 106, с.3.
4. Варшалович Д. А., Москалев А. Н., Херсонский В. К. Квантовая теория углового момента. — Л.:Наука, 1975.

От редактора энциклопедии

Математика состоит главным образом из фактов, которые можно представить и описать подобно любому явлению природы. Эти факты, иногда сформулированные явно в виде теорем, иногда употребляемые по ходу доказательств, составляют основную часть приложений математики и будут существовать всегда, несмотря на изменчивость направлений и интересов в данной науке.

Цель настоящей Энциклопедии — постараться осветить все области математики. От каждого автора требуется ясное и четкое изложение материала, доступное для понимания широкого круга читателей, а также подробная библиография. Тома Энциклопедии объединяются в серии, которые соответствуют различным областям современной математики; порядок выхода книг в отдельных сериях не устанавливается. Число томов и серий время от времени будет пересматриваться и корректироваться.

Мы надеемся, что наше смелое предприятие будет способствовать еще более широкому применению математики не только там, где без нее нельзя обойтись, но даже в тех областях, где ее следовало бы применять и где из-за недостатка информации это пока почти не делается.

Джан-Карло Рота

Предисловие к русскому изданию

Изучение симметрий физических систем остается одной из главных областей современной теоретической деятельности. Эти симметрии, которые в основном выражают геометрическую структуру рассматриваемой физической системы, должны быть хорошо проанализированы, для того чтобы понять динамическое поведение системы. Наиболее общей задачей является анализ симметрии относительно вращений и поведения физических величин при вращениях. В соответствии с этим каждый профессиональный физик должен достичь хороших рабочих знаний в «теории углового момента».

Кроме того, теория углового момента является прототипом непрерывных групп симметрий, многие из которых теперь полезны для классификации внутренних симметрий в физике элементарных частиц. Большая часть интуиции и математического аппарата, развитого в теории углового момента, с незначительными изменениями может быть перенесена на исследовательские задачи, представляющие интерес в настоящее время.

Если в арсенале физика и имеется существенная книга, то это хорошая книга по теории углового момента. Я натерпелся с несколькими более ранними работами по этому предмету и потратил много времени, проверяя знаки и коэффициенты Клебша — Гордана. Такие книги чаще всего берут на время и реже всего отдают. Я предвижу продолжительное использование настоящей прекрасной работы.

Хорошая книга по теории углового момента должна быть до конца надежной и должна излагать материал с такой глубиной и хорошим вкусом, чтобы выявить изящное строение предмета. Оригинальность не должна противопоставляться текущей практике, чтобы текст действительно был полезным.

Настоящая книга, написанная двумя хорошо известными специалистами в данной области, удовлетворяет всем этим критериям и даже более того. Тонкие детали и поучительные комментарии даются ясно и ненавязчиво. Кроме того, подстрочные примечания содержат исторический материал, с которым я прежде не был знаком. Две главы — по «теории поворотов» и «бозонному исчислению» — являются значительным новым добавлением к педагогической литературе по угловому моменту. Большая часть представленной здесь теории поворотов развита авторами. С помощью этого подхода очень хорошо разъясняется понятие «кудзосенной группы». Развитие бозонного исчисления существенным образом использует схемы Гельфанда в дополнение к более традиционным схемам Юнга. Этот раздел дает прекрасный прототип для анализа всех компактных групп.

Теория представлений развивается со всеми подробностями, необходимыми для физических приложений. Особенно полным является изложение матриц вращений, включая параметризацию углами Эйлера и другие параметризации, имеющие практическое значение.

Текст заканчивается большой главой, посвященной приложениям; она хорошо иллюстрирует силу общего метода исследования. Книгу завершает превосходное теоретико-групповое описание спектров сферических молекул. На мой взгляд, недавнее подтверждение этой теории в экспериментах по лазерной спектроскопии высокой разрешающей способности является одним из наиболее эффективных подтверждений квантовой теории.

Настоящая монография действительно является книгой для физиков. Тем не менее теория дает существенный материал, представляющий интерес и для математиков. Недавние исследования (например, по неабелевой теории калибровочных полей) привели к результатам, имеющим общий интерес как для математиков, так и для физиков.

Питер А. Каррузерс

Главный редактор серии «Математика для физики»

Предисловие

«Искусство математика — сказал Гильберт¹⁾ — состоит в нахождении того *частного* случая, который содержит все зародыши *общности*». С нашей точки зрения, теория углового момента играет роль такого «частного случая» по отношению к симметрии (одной из наиболее плодотворных тем современной математики и физики) как «общности». Мы лишь немного исправили бы фразу Гильберта, включив наравне с математикой и физику. В предисловии ко второму изданию своей известной книги «Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров» Вигнер²⁾ привел слова фон Лауе о том, как замечательно, что «почти все правила (атомной) спектроскопии следуют из симметрии задачи». Здесь симметрия является симметрией *относительно вращений*, и правила спектроскопии вытекают из *сохранения углового момента*. В этой монографии мы пытаемся детально остановиться на этих темах.

Тот факт, что данная монография является частью энциклопедии, налагает ответственность, к которой мы отнеслись очень серьезно. Эта ответственность до некоторой степени подобна ответственности библиотеки. Где-то было сказано, что библиотека должна удовлетворять двум условиям. Каждый должен найти в ней книгу, которую он ищет; но каждый должен также найти книги, о существовании которых не подозревал. Мы верим, что во многом это относится и к энциклопедии, и мы были бы разочарованы, если бы оказалось, что настоящая монография не удовлетворяет двум таким условиям. Чтобы выполнить эту задачу, мы сочли необходимым разбить нашу монографию на две книги: в одной дается «стандартная» трактовка теории углового момента и ее приложений, а в другой со всей глубиной рассматриваются фундаментальные понятия предмета и связи теории углового момента с другими областями математики³⁾.

Чтобы выполнить эту ответственную задачу, мы пытались удовлетворить как читателей, которые ищут очень детальных ответов на специальные вопросы (поэтому мы даем большой предметный указатель и много примечаний и прило-

¹⁾ Цитировано в статье М. Каца «Винер и интегрирование в функциональных пространствах», Bull. Amer. Math. Soc. 72, 65 (1966)

²⁾ Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. Пер. с англ. — М.: ИЛ, 1961.

³⁾ Настоящая книга «Угловой момент в квантовой физике» представляет собой перевод первой из этих книг. — Прим. перев.

жений), так и читателей, которым чужно общее описание предмета, в особенности описание его оригинальных и привлекательных аспектов. Это приводит к неровному уровню изложения, который изменяется от главы к главе или даже внутри одной главы, что совсем непохоже на изложение в учебнике с его равномерно возрастающим уровнем трудности. Изменения уровня изложения в особенности характерны для замечаний. Очень часто эти замечания содержат материал, который не был рассмотрен или объяснен ранее. Такой материал предназначен для подготовленного читателя, и он может быть опущен другими читателями. Мы рекомендуем читателю сначала бегло просмотреть книгу, а не начинать сразу систематическое ее изучение.

Эти рекомендации относятся также к приложениям. Некоторые приложения могут показаться слишком элементарными, тогда как другие находятся на уровне современных исследований. Область приложений так широка, что мы определенно оказались не в состоянии уделить достаточно внимания некоторым вопросам, но мы надеемся, что некоторые приложения изложены удачно.

При обсуждении отдельных вопросов мы даем больше деталей, чем обычно в математических книгах, где сжатость изложения рассматривается как кардинальное достоинство. Здесь мы следовали заповеди Литлвуда¹⁾: «две опущенные тривиальности могут привести к тупику».

Мы признаем одну идиосинкразию нашего изложения: мы не используем явно методы теории групп сами по себе, но следуем алгебраическому методу, и если теория групп вообще появляется, то она появляется естественно при развитии предмета. Несомненно, что этот метод изложения является реакцией на порицание (которое теперь постепенно исчезает), с которым многие физики встретили «групповую эпидемию» (Gruppenpest)²⁾. В любом случае мы думаем, что для некоторых читателей такое изложение делает материал более доступным.

Дадим краткие рекомендации для читателей книги «Угловой момент в квантовой физике». 1) Главы 2 и 3 и части гл. 6 составляют стандартное изложение теории углового момента, которого достаточно для многих читателей, желающих изучить механику предмета. Используемые методы элементарны, и все изложение основано на фундаментальных коммутационных соотношениях для углового момента. 2) Главы 4 и 5 рекомендуются читателю, которому нужен общий обзор предмета, включая методы, допускающие широкое обобщение. Парадоксально, что хотя эти две главы содержат много нового материала, этот материал принадлежит к самому началу развития предмета: умножение форм Клебша и Гордана и $\xi - \eta$ -исчисление Вейля — все это теперь объединяется под рубрикой «бозонное исчисление». Приложения, описываемые в гл. 7, полностью независимы друг от друга, и их можно понять, исходя из результатов гл. 3.

Л. Биденхарт
Дж. Лаук

¹⁾ Литлвуд Дж. Математическая смесь. — М.: Физматгиз, 1962 (курсив Литлвуда).

²⁾ Wybourne D. G., Int. J. Quant. Chem., Symposium No. 7, 35 (1973). Групповая эпидемия вчера, сегодня и завтра.

Введение

Квантовая теория углового момента, развитая главным образом Е. Вигнером и Д. Рака, стала совершенно необходимым предметом для работающего физика независимо от специализации — физика твердого тела, молекулярная физика, атомная физика, физика ядра или даже физика адронной структуры. Теория углового момента не менее ценна для специалистов по теоретической и математической физике и для математиков как один из первых примеров далеко идущей силы и великой красоты симметричного подхода, который лежит в основе теории углового момента и обобщает ее.

Понятие углового момента, первоначально определенного как момент импульса ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$), появилось в классической механике очень рано. (Второй закон Кеплера фактически в точности содержит это понятие.) Тем не менее для развития классической механики угловой момент был ничем по сравнению с той центральной ролью, которую это понятие играет в квантовой физике. Вигнер [1] заметил, например, что большинство книг по механике, написанных в начале столетия (и даже позднее), не упоминает общей теоремы сохранения углового момента. Хорошо известная «История физики» Кайори [2] (издание 1929 г.) фактически находится на половине пути к сохранению углового момента.

Почти очевидно, что понятие углового момента может иметь большее значение в квантовой механике. Квант действия Планка h имеет в точности размерность углового момента, и, более того, гипотеза квантования Бора ¹⁾ определила, что единица (орбитального) углового момента есть $\hbar = h/2\pi$. Ясно, что теория углового момента и квантовая физика тесно связаны друг с другом.

Можно различать две основные причины, лежащие в основе этого изменения важности углового момента в квантовой механике. Первая причина, которая применима в некоторой степени и к классической механике, состоит в постепенном изменении концептуальных рамок, что привело к замене законов движения Ньютона уравнениями Лагранжа (а позже уравнениями Гамильтона). Вторая причина относится к квантовой механике и касается квантового понятия состояния. Обсудим кратко эти две причины, хотя полностью удовлетворительная трактовка лежит вне рамок этой монографии.

Сдвиг концентрации внимания от законов движения Ньютона к лагранжевой формулировке был до некоторой степени прагматичным (он устранял голономные ограничения), но первоначально мотивировался концептуальным обобще-

¹⁾ Мы обсуждаем это более детально в примечании 3, гл. 7.

жений), так и читателей, которым нужно общее описание предмета, в особенности описание его оригинальных и привлекательных аспектов. Это приводит к неровному уровню изложения, который изменяется от главы к главе или даже внутри одной главы, что совсем непохоже на изложение в учебнике с его равномерно возрастающим уровнем трудности. Изменения уровня изложения в особенности характерны для замечаний. Очень часто эти замечания содержат материал, который не был рассмотрен или объяснен ранее. Такой материал предназначен для подготовленного читателя, и он может быть опущен другими читателями. Мы рекомендуем читателю сначала бегло просмотреть книгу, а не начинать сразу систематическое ее изучение.

Эти рекомендации относятся также к приложениям. Некоторые приложения могут показаться слишком элементарными, тогда как другие находятся на уровне современных исследований. Область приложений так широка, что мы определенно оказались не в состоянии уделить достаточно внимания некоторым вопросам, но мы надеемся, что некоторые приложения изложены удачно.

При обсуждении отдельных вопросов мы даем больше деталей, чем обычно в математических книгах, где сжатость изложения рассматривается как кардинальное достоинство. Здесь мы следовали заповеди Литлвуда¹⁾: «две опущенные тривиальности могут привести к тупику».

Мы признаем одну идиосинкразию нашего изложения: мы не используем явно методы теории групп сами по себе, но следуем алгебраическому методу, и если теория групп вообще появляется, то она появляется естественно при развитии предмета. Несомненно, что этот метод изложения является реакцией на порицание (которое теперь постепенно исчезает), с которым многие физики встретили «групповую эпидемию» (Gruppenpest)²⁾. В любом случае мы думаем, что для некоторых читателей такое изложение делает материал более доступным.

Дадим краткие рекомендации для читателей книги «Угловой момент в квантовой физике». 1) Главы 2 и 3 и части гл. 6 составляют стандартное изложение теории углового момента, которого достаточно для многих читателей, желающих изучить механику предмета. Используемые методы элементарны, и все изложение основано на фундаментальных коммутационных соотношениях для углового момента. 2) Главы 4 и 5 рекомендуются читателю, которому нужен общий обзор предмета, включая методы, допускающие широкое обобщение. Парадоксально, что хотя эти две главы содержат много нового материала, этот материал принадлежит к самому началу развития предмета: умножение форм Клебша и Гордана и ξ — η -числение Вейля — все это теперь объединяется под рубрикой «бозонное исчисление». Приложения, описываемые в гл. 7, полностью независимы друг от друга, и их можно понять, исходя из результатов гл. 3.

Л. Биденхарт
Дж. Лаук

¹⁾ Литлвуд Дж. Математическая смесь. — М.: Физматгиз, 1962 (курсив Литлвуда).

²⁾ Wybourne D. G., Int. J. Quant. Chem., Symposium No. 7, 35 (1973). Групповая эпидемия вчера, сегодня и завтра.

Введение

Квантовая теория углового момента, развитая главным образом Е. Вигнером и Д. Рака, стала совершенно необходимым предметом для работающего физика независимо от специализации — физика твердого тела, молекулярная физика, атомная физика, физика ядра или даже физика адронной структуры. Теория углового момента не менее ценна для специалистов по теоретической и математической физике и для математиков как один из первых примеров далеко идущей силы и великой красоты симметричного подхода, который лежит в основе теории углового момента и обобщает ее.

Понятие углового момента, первоначально определенного как момент импульса ($\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$), появилось в классической механике очень рано. (Второй закон Кеплера фактически в точности содержит это понятие.) Тем не менее для развития классической механики угловой момент был ничем по сравнению с той центральной ролью, которую это понятие играет в квантовой физике. Вигнер [1] заметил, например, что большинство книг по механике, написанных в начале столетия (и даже позднее), не упоминает общей теоремы сохранения углового момента. Хорошо известная «История физики» Кайори [2] (издание 1929 г.) фактически находится на половине пути к сохранению углового момента.

Почти очевидно, что понятие углового момента может иметь большее значение в квантовой механике. Квант действия Планка h имеет в точности размерность углового момента, и, более того, гипотеза квантования Бора ¹⁾ определила, что единица (орбитального) углового момента есть $\hbar = h/2\pi$. Ясно, что теория углового момента и квантовая физика тесно связаны друг с другом.

Можно различать две основные причины, лежащие в основе этого изменения важности углового момента в квантовой механике. Первая причина, которая применима в некоторой степени и к классической механике, состоит в постепенном изменении концептуальных рамок, что привело к замене законов движения Ньютона уравнениями Лагранжа (а позже уравнениями Гамильтона). Вторая причина относится к квантовой механике и касается квантового понятия состояния. Обсудим кратко эти две причины, хотя полностью удовлетворительная трактовка лежит вне рамок этой монографии.

Сдвиг концентрации внимания от законов движения Ньютона к лагранжевой формулировке был до некоторой степени прагматичным (он устранял голономные ограничения), но первоначально мотивировался концептуальным обобще-

¹⁾ Мы обсуждаем это более детально в примечании 3, гл. 7.

нием (например, он устранял особую роль декартовых координат). Эта тенденция продолжается даже сегодня, потому что, как указал Лихнерович [3], аналитическая механика Лагранжа, дав первые примеры естественных дифференцируемых многообразий произвольной размерности, начала развитие раздела, который теперь называется дифференциальной геометрией [4 — 6].

Чтобы оценить значение этого изменения точки зрения, напомним, что первоначально угловой момент рассматривался как важное понятие на том основании, что он является (для центральных сил) *сохраняющейся величиной*, точно так же как аналогичное сохранение линейного импульса дало смысл этому понятию. Но истинное значение и глубина концептуального изменения стали очевидными только тогда, когда Хамель [7] в 1904 г. установил, используя формулировку механики Лагранжа и Гамильтона, что *между законами сохранения линейного импульса и углового момента и фундаментальными симметриями пространства и времени существует связь* (см. примечание 1).

Для изолированной системы с необходимостью имеем симметрию, которая следует из однородности (инвариантности относительно пространственных трансляций) и изотропности (инвариантности относительно вращений) пространства; таким образом, лагранжиан инвариантен относительно трансляций и вращений, и, следовательно, мы получаем законы сохранения линейного импульса и углового момента.

Эта фундаментальная связь между принципами симметрии и законами сохранения достигла высшей точки в классической общей теореме Нётер [8] (см. примечание 1), связывающей общие свойства инвариантности лагранжиана как с сохраняющимися величинами, так и с соответствующими законами сохранения [9].

Такие результаты сильно увеличили концептуальное значение углового момента, и этот урок с тех пор был так хорошо усвоен, что «сохранение углового момента» и «инвариантность при вращениях» в настоящее время рассматриваются фактически как синонимы.

Важно заметить, однако, что такие крайние взгляды не вполне оправданны, потому что, как подчеркнул Вигнер [10], *инвариантность уравнений движения, например, относительно вращений не предполагает сохранения углового момента*. Существование лагранжиана (или соответственно гамильтониана) является фактически *существенным* в установлении связи между симметрией (инвариантностью) и законами сохранения. Обратно, мы видим отсюда значение концептуального отхода от механики Ньютона (например, уравнений движения Ньютона).

Замечания. а) Существует прекрасная иллюстрация мысли, высказанной в последнем абзаце. Рассмотрим движение частицы в вязкой среде. Энергия такой частицы не сохраняется, хотя уравнения движения в действительности инвариантны относительно временных перемещений. (Этот пример взят из работы [10]; пример для углового момента дан в работе [11].)

б) Когда рассматриваются законы сохранения импульса и углового момента для систем частиц, взаимодействующих посредством электромагнитного поля с зарядами и магнитами, то возникает много кажущихся парадоксов даже на классическом нерелятивистском уровне. Прекрасное обсуждение нескольких таких

псевдопарадоксов дано в обзоре Ферри [12], где, в частности, рассматриваются классический эксперимент Траутона — Нобла и более поздние примеры Шохла — Джеймса по «скрытому» моменту.

Вторая причина большого значения углового момента в квантовой физике, чем в классической физике, как упомянуто выше, состоит в изменении понятия состояния. В квантовой механике состояния системы являются векторами (точнее лучами) в сепарабельном гильбертовом пространстве; в соответствии с этим имеем (аксиоматически) возможность взятия линейной суперпозиции векторов состояний. Справедливость принципа суперпозиции является одной из характерных особенностей квантовой механики, и, как подчеркнул Дирак [13], эта суперпозиция качественно отлична от любого вида классической суперпозиции (которая может наблюдаться в классической линейной системе).

Чтобы оценить всю глубину различия, обусловленного суперпозицией квантовых состояний, рассмотрим, например, кеплерову орбиту электрона, движущегося вокруг протона в атоме водорода. В классической физике вращательная симметрия задачи (протон определяет центр вращения) означает просто, что повернутая орбита с произвольной ориентацией также дает разрешенное движение, имеющее ту же энергию. Эта «новая» информация довольно очевидна и не очень полезна ¹⁾.

В противоположность этому в квантовой физике тот факт, что повернутый вектор состояния также является разрешенным состоянием с той же энергией, теперь вытекает из принципа суперпозиции: первоначальное состояние может быть подвергнуто суперпозиции с множеством состояний, порожденных вращениями, чтобы дать в общем *новые* состояния, имеющие простые свойства относительно вращений (например, инварианты вращений). Именно эта возможность является фундаментально новой в квантовой механике.

Таким образом, то, что в квантовой физике состояния образуют линейное многообразие, является гипотезой, которая изменяет роль симметрии от интересного наблюдения, каким она была в классической физике, до важного конструктивного метода большой силы и гибкости. Таким же значимым для данной монографии является тот факт, что методы симметрии важны не только для векторов состояний квантовой физики, но также для квантовомеханических операторов. (Из наблюдений очевидно, что множество линейных преобразований векторного пространства само является векторным пространством.) Таким образом, операторы квантовой механики, которые с необходимостью являются линейными, что следует из сопоставления физических измерений с операторами, могут быть классифицированы по их симметрии. Эта концепция приводит к понятию тензорных операторов (рассматриваемых подробно в гл. 3 и последующих главах).

Тот факт, что в квантовой механике векторы состояний образуют линейное многообразие, приводит к замечательному усилению связи между законами со-

¹⁾ Тот факт, что с точки зрения классической физики орбита может иметь любую ориентацию, безусловно, содержит парадокс (для классического атома водорода), который решен только квантовой механикой ([14], с. 798). А именно: с этим бесконечным числом ориентаций, если они существуют, должна быть связана нулевая энтропия.

хранения и принципами инвариантности: законы сохранения теперь следуют из основных кинематических концепций ([1], стр. 20). Оказывается, что преобразования симметрий играют двойную роль в квантовой механике: генераторы инфинитезимальных преобразований симметрий не только порождают преобразования, но и сами являются сохраняемыми величинами. Именно в этом последнем аспекте симметрии в квантовой механике физики находят основу для алгебраических концепций (алгебра генераторов симметрии, например операторы углового момента L) в противоположность глобальной (групповой) концепции симметрии. Эта локальная, алгебраическая точка зрения является общей точкой зрения в данной монографии.

Теперь мы можем понять центральную роль, которую играет угловой момент в квантовой физике, как это следует из заглавия данной монографии, так как мы видим, что значение углового момента прямо базируется на кинематических концепциях, характеризующих саму квантовую физику. Таким образом, для нерелятивистской физики, основанной на кинематике относительности Ньютона, мы находим, что группой инвариантных преобразований является группа Галилея; для релятивистской физики мы имеем относительность Эйнштейна, где в роли группы инвариантных преобразований выступает группа Пуанкаре. Как рассмотрено выше, эти кинематические симметрии предполагают сохраняемые величины теории; в частности, в обеих относительностях сохраняемой величиной является угловой момент. (Читабельное и авторитетное изложение этой точки зрения дано в работе [15].)

Из этих результатов следует, что угловой момент играет фундаментальную роль в физике, роль, которая сохраняется при переходе от относительности Ньютона к относительности Эйнштейна. В обеих относительностях угловой момент является сохраняемой величиной, связанной с изотропией пространства-времени (см. примечания 2 и 3).

Примечания

1. Краткий обзор литературы, отражающий развитие связи между законами сохранения и инвариантностью лагранжиана от Якоби (1842 г.) до Бесселя и Хагена (1921 г.), дан в работе Хаутапеля и др. [11] (см. примечание 20 в этой работе). Полное обсуждение инвариантности и симметрии (ограниченное классической физикой) дано Карату и др. [16].

2. Поскольку мы сделали такой упор на значение принципа суперпозиции в теории симметрии, вызывает удивление и, вероятно, иронию тот факт, что угловой момент дает также пример противоположного результата: разбиение гильбертова пространства квантовых состояний на *некомбинирующиеся множества*. (Это составляет *правило суперотбора*.) Пример, вытекающий из теории углового момента, состоит в разбиении на состояния с полужелтыми угловыми моментами и состояния с целыми угловыми моментами. Это разбиение (теорема Паули — Людерса о спине и статистике) связано с разбиением на различные типы частиц, имеющих бозонные и фермионные свойства. (Это правило суперотбора обсуждается в работе [20], разд. 1 пп. 3.)

3. Внутренний угловой момент является классическим нерелятивистским понятием (это следует из *аддитивности* генераторов галилеевой симметрии). Существование дискретного внутреннего углового момента является стандартным результатом классической нерелятивистской теории поля, что ясно из существования скалярных волн (отсутствие внутреннего углового момента) и секторных волн с продольной и (или) поперечной поляризациями (единичный внутренний угловой момент).

Хепп и Йенсен [17] показали, что внутренний угловой момент $1/2$ также является классическим нерелятивистским теоретико-полевым понятием. Доказывая, что историческое развитие корпускулярной картины катодных лучей (электронов) было в большой степени результатом недостаточной чувствительности экспериментальных приборов, они построили на основании экспериментальных фактов логически допустимую классическую теоретико-полевою интерпретацию, которую затем проквантовали с помощью процедуры Жордана — Клейна — Вигнера (так называемое вторичное квантование). При этом Хепп и Йенсен выяснили несколько неправильных истолкований классической роли спинорных полей.

Систематическое использование подхода галилеевых симметрий (такого, который дан Леви-Леблондом [18]) является таким же справедливым путем для выяснения этих концепций. В обоих подходах показывается, например, что аппроксимированный g -фактор электрона ($g_S = 2$) никак не является (Пуанкаре) релятивистским результатом и может легко следовать из линейного ковариантного (относительно группы Галилея) волнового уравнения. (Как заметил Фейнман, $\vec{p}^2/2m$ (нерелятивистская кинетическая энергия) иначе может быть записана в спинорной форме $(\vec{\sigma} \cdot \vec{p})^2/2m$, где $\vec{\sigma}$ — спиновый вектор Паули. Тогда $\vec{p} \rightarrow \vec{p} - e\mathbf{A}/c$ приводит к $g_S = 2$.)

Неформальный обзор (Леви-Леблонда) показывает, что примерно в 40 из 46 просмотренных книг по физике ошибочно указывается, что спин $1/2$ и (или) $g_S = 2$ есть результат специальной теории относительности.

Подход галилеевых симметрий естественным образом приводит к уравнению Шредингера. Однако группа инвариантности самого уравнения Шредингера приводит к большей структуре симметрий (см. работы [19] и цитируемую там литературу).

Литература

1. Wigner E. P., Symmetries and Reflections, Indiana Univ. Press, Bloomington and London, 1967, p. 14.
Эта книга воспроизводит оригинальную работу «Симметрия и законы сохранения», Proc. Nat. Acad. Sci., USA, 51, 956 (1964).
2. Cajori F., History of Physics, Macmillan, New York, 1929.
3. Lichnerowicz A. — in: Perspectives in Geometry and Relativity, ed. Hoffmann B., Indiana Univ. Press, Bloomington, 1966, pp. 1 — 6.
Дифференциальная геометрия и физические теории.
4. Sternberg S., Celestial Mechanics, Benjamin, New York, 1969.
5. Abraham R., Foundations of Mechanics, Benjamin, New York, 1967.

6. MacLane S., Geometrical Mechanics, Parts I and II, Lectures in Dept. of Mathematics, University of Chicago, 1968.
7. Hamel G. P., Theoretische Mechanik, Teubner, Stuttgart, 1912.
8. Noether E., Göttinger Nachrichten, 1918, p. 235.
9. Roman P., Theory of Elementary Particles, North-Holland, Amsterdam, 1961, Chapter IV, Section 1a.
10. Wigner E. P., Progr. Theor. Phys., 11, 437 (1954).
Законы сохранения в классической и квантовой физике.
11. Houtappel R. M. F., van Dam H., Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., 37, 595 (1965).
Концептуальная основа и использование принципов геометрической инвариантности.
12. Furry W. H., Amer. J. Phys., 37, 621 (1969).
Примеры распределения импульсов в электромагнитном поле и в веществе.
13. Dirac P. A. M., Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press, London, 1930.
[Имеется перевод: Дирак П. А. Принципы квантовой механики. — М.: Физматгиз, 1960.]
14. Wigner E. P., Bull. Amer. Math. Soc., 74, 793 (1968).
Принципы симметрии в старой и новой физике.
15. Schwinger J., Particles, Sources, and Fields, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.
16. Caratu G. et al., Invariance and Symmetry in Classical Mechanics, Instituto di Fisica Teorica, Naples, Italy, 1977.
17. Hepp H., Jensen H., Sitzber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math. — Naturw. Kl. 4 Abh., 89 (1971).
Классическая теория поля поляризации катодного излучения и ее квантование.
18. Levy-Leblond J.-M. — in: Group Theory and Its Applications, ed. Loeb E. M., Vol. II, Academic Press, New York, 1971, p. 222.
Группа Галилея и галилеева инвариантность.
19. Niederer U., Helv. Phys. Acta, 45, 802 (1972); 47, 167 (1974).
Максимальная кинематическая группа инвариантности свободного уравнения Шредингера. Максимальная кинематическая группа инвариантности уравнений Шредингера с произвольными потенциалами.
20. Biedenharn L. C., Louck J. D., Racah — Wigner Algebra in Quantum Theory, Addison-Wesley Inc., Reading, Mass., 1981.

Кинематика вращений

1. Введение

Целью этой главы является обсуждение кинематики вращений; под этим выражением мы понимаем *описание физических объектов при вращении*. Несмотря на кажущуюся простоту предмета, оказывается, что кинематика вращений имеет некоторые тонкости (см. разд. 3 и 4).

Существенный элемент описания физических систем заключается в связи математической модели с лежащим в основе пространством [1]. Эту связь необходимо постулировать, и она в конечном счете является предположением о справедливости данной системы относительности. Начнем с пространственных концепций, постулированных в системе относительности Ньютона. Математическая модель, которая связывается с этой физикой, состоит в том, что физические (массивные) точки отождествляются с точками, принадлежащими трехмерному евклидову пространству E (3). Термин «трехмерность» означает, что точка является тройкой вещественных чисел: точка $\rightarrow x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, где $x_i \in \mathbb{R}$; термин «евклидово пространство» означает, что при пространственных симметриях, принадлежащих релятивистской группе, все расстояния между точками сохраняются (следовательно, сохраняются все длины и все углы).

Симметрии евклидова пространства могут быть составлены из двух частных симметрий: а) *трансляций*, которые перемещают все точки одинаково: $x \rightarrow x' = x + a$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, и б) *вращений и отражений*, которые оставляют фиксированной одну точку; вращения сохраняют ориентацию, тогда как отражения (Картан [2]) превращают ее в противоположную.

2. Свойства вращений

Хорошо известно, что *евклидова симметрия, оставляющая фиксированной одну точку, оставляет фиксированными все точки некоторой прямой, проходящей через эту точку*. В соответствии с этим *вращение* является евклидовой симметрией, характеризуемой *осью* (обозначаемой единичным вектором $\hat{n}$), *углом вращения* ϕ и *направлением* вращения вокруг оси (вращение всегда берется по правилу «правого винта»). Вращение мы обозначаем $\mathcal{R}(\phi, \hat{n})$ или $\mathcal{R}$, если его смысл ясен.

Из геометрических соображений можно всегда получить общий результат для преобразования заданного *вектора* r (определенного как направленный от-

6. *MacLane S.*, Geometrical Mechanics, Parts I and II, Lectures in Dept. of Mathematics, University of Chicago, 1968.
7. *Hamel G. P.*, Theoretische Mechanik, Teubner, Stuttgart, 1912.
8. *Noether E.*, Göttinger Nachrichten, 1918, p. 235.
9. *Roman P.*, Theory of Elementary Particles, North-Holland, Amsterdam, 1961, Chapter IV, Section 1a.
10. *Wigner E. P.*, Progr. Theor. Phys., 11, 437 (1954).
Законы сохранения в классической и квантовой физике.
11. *Houtappel R. M. F., van Dam H., Wigner E. P.*, Rev. Mod. Phys., 37, 595 (1965).
Концептуальная основа и использование принципов геометрической инвариантности.
12. *Furry W. H.*, Amer. J. Phys., 37, 621 (1969).
Примеры распределения импульсов в электромагнитном поле и в веществе.
13. *Dirac P. A. M.*, Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press, London, 1930.
[Имеется перевод: *Дирак П. А.* Принципы квантовой механики. — М.: Физматгиз, 1960.]
14. *Wigner E. P.*, Bull. Amer. Math. Soc., 74, 793 (1968).
Принципы симметрии в старой и новой физике.
15. *Schwinger J.*, Particles, Sources, and Fields, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1970.
16. *Carati G. et al.*, Invariance and Symmetry in Classical Mechanics, Istituto di Fisica Teorica, Naples, Italy, 1977.
17. *Hepp H., Jensen H.*, Sitzber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math. — Naturw. Kl. 4 Abh., 89 (1971).
Классическая теория поля поляризации катодного излучения и ее квантование.
18. *Levy-Leblond J.-M.* — in: Group Theory and Its Applications, ed. Loeb E. M., Vol. II, Academic Press, New York, 1971, p. 222.
Группа Галилея и галилеева инвариантность.
19. *Niederer U.*, Helv. Phys. Acta, 45, 802 (1972); 47, 167 (1974).
Максимальная кинематическая группа инвариантности свободного уравнения Шредингера. Максимальная кинематическая группа инвариантности уравнений Шредингера с произвольными потенциалами.
20. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, Racah — Wigner Algebra in Quantum Theory, Addison-Wesley Inc., Reading, Mass., 1981.

Кинематика вращений

1. Введение

Целью этой главы является обсуждение кинематики вращений; под этим выражением мы понимаем *описание физических объектов при вращении*. Несмотря на кажущуюся простоту предмета, оказывается, что кинематика вращений имеет некоторые тонкости (см. разд. 3 и 4).

Существенный элемент описания физических систем заключается в связи математической модели с лежащим в основе пространством [1]. Эту связь необходимо постулировать, и она в конечном счете является предположением о справедливости данной системы относительности. Начнем с пространственных концепций, постулированных в системе относительности Ньютона. Математическая модель, которая связывается с этой физикой, состоит в том, что физические (массивные) точки отождествляются с точками, принадлежащими трехмерному евклидову пространству E (3). Термин «трехмерность» означает, что точка является тройкой вещественных чисел: точка $\rightarrow x \equiv (x_1, x_2, x_3)$, где $x_i \in \mathbb{R}$; термин «евклидово пространство» означает, что при пространственных симметриях, принадлежащих релятивистской группе, все расстояния между точками сохраняются (следовательно, сохраняются все длины и все углы).

Симметрии евклидова пространства могут быть составлены из двух частных симметрий: а) *трансляций*, которые перемещают все точки одинаково: $x \rightarrow x' = x + a$, $a = (a_1, a_2, a_3)$, и б) *вращений и отражений*, которые оставляют фиксированной одну точку; вращения сохраняют ориентацию, тогда как отражения (Картан [2]) превращают ее в противоположную.

2. Свойства вращений

Хорошо известно, что *евклидова симметрия, оставляющая фиксированной одну точку, оставляет фиксированными все точки некоторой прямой, проходящей через эту точку*. В соответствии с этим *вращение* является евклидовой симметрией, характеризуемой *осью* (обозначаемой единичным вектором $\hat{n}$), *углом* вращения ϕ и *направлением* вращения вокруг оси (вращение всегда берется по правилу «правого винта»). Вращение мы обозначаем $\mathcal{R}(\phi, \hat{n})$ или $\mathcal{R}$, если его смысл ясен.

Из геометрических соображений можно всегда получить общий результат для преобразования заданного вектора r (определенного как направленный от-

резок с началом в точке $(0, 0, 0)$ и с концом в точке (x, y, z) при вращении¹⁾ (оставляющем фиксированным начало). Компонента вектора $\vec{r}$ вдоль $\hat{n}$ должна оставаться неизменной: $(\hat{n} \cdot \vec{r})\hat{n} \rightarrow (\hat{n} \cdot \vec{r})\hat{n}$. Перпендикулярная компонента $\vec{r} - (\hat{n} \cdot \vec{r})\hat{n}$ поворачивается на угол ϕ и подобно каждому вектору, перпендикулярному $\hat{n}$, может быть выражена (после вращения) как линейная комбинация $\vec{r} \times \hat{n}$ и $\vec{r} - (\hat{n} \cdot \vec{r})\hat{n}$. Находим

$$\vec{r} - (\hat{n} \cdot \vec{r})\hat{n} \rightarrow [\vec{r} - (\hat{n} \cdot \vec{r})\hat{n}] \cos \phi + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \phi,$$

поэтому

$$\mathcal{R}(\phi, \hat{n}): \vec{r} \rightarrow \vec{r}' = \mathcal{R}(\phi, \hat{n})\vec{r} = \vec{r} \cos \phi + \hat{n}(\hat{n} \cdot \vec{r})(1 - \cos \phi) + (\hat{n} \times \vec{r}) \sin \phi. \quad (2.1)$$

Это полезное соотношение для обсуждаемых вращений векторов.

Этот результат может быть использован для получения характеристических векторов вращения. Прямо проверяется, что

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\phi, \hat{n})(\hat{p} + i\hat{q}) &= e^{-i\phi}(\hat{p} + i\hat{q}), \\ \mathcal{R}(\phi, \hat{n})(\hat{p} - i\hat{q}) &= e^{i\phi}(\hat{p} - i\hat{q}), \\ \mathcal{R}(\phi, \hat{n})\hat{n} &= \hat{n}, \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $\hat{p}$ и $\hat{q}$ — любые единичные векторы, перпендикулярные $\hat{n}$, такие, что $(\hat{n}, \hat{p}, \hat{q})$ составляют правостороннюю тройку перпендикулярных единичных векторов. Таким образом, собственными значениями вращения $\mathcal{R}(\phi, \hat{n})$ являются 1, $e^{i\phi}$, $e^{-i\phi}$.

С геометрической точки зрения вращение $\mathcal{R}$ является линейным преобразованием векторов с двумя свойствами:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}: \vec{r} \cdot \vec{s} &\rightarrow \mathcal{R}\vec{r} \cdot \mathcal{R}\vec{s} = \vec{r} \cdot \vec{s}, \\ \mathcal{R}: \vec{r} \times \vec{s} &\rightarrow \mathcal{R}\vec{r} \times \mathcal{R}\vec{s} = \mathcal{R}(\vec{r} \times \vec{s}). \end{aligned} \quad (2.3)$$

И наоборот, любое линейное преобразование евклидова пространства с этими свойствами является вращением.

Вращения образуют группу. Мы ввели вращения как евклидовы симметрии. Чтобы заключить, что вращения образуют группу, необходимо только показать, что два вращения, имеющие общий центр, образуют комбинированное вращение (с тем же центром). «Произведение» двух вращений $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ (обозначаемое $\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2$) является преобразованием (симметрией), получаемым путем действия сначала $\mathcal{R}_2$, а потом $\mathcal{R}_1$. Это произведение (как прямо следует из геометрических рассуждений или из определения евклидовой группы) ассоциативно: $(\mathcal{R}_1\mathcal{R}_2)\mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_1(\mathcal{R}_2\mathcal{R}_3)$. Вращением, обратным к $\mathcal{R}(\phi, \hat{n})$, является $\mathcal{R}(-\phi, \hat{n})$; оно также обозначается $\mathcal{R}^{-1}(\phi, \hat{n})$. Тожественное вращение является вращением на угол $\phi = 0$ (т.е. вращение не производится).

¹⁾ Выражения «вращать» и «вращение» иногда используются в более широком смысле, чем здесь. Например, о юле говорят, что она может «вращаться внутри площадки» ([2a], стр. 9). Это не вращение в том смысле, в котором используем это понятие мы, так как ось не является постоянной в процессе движения. (В действительности юла может быть непрерывно переведена в любую точку площадки.)

Вращения, имеющие *общую ось*, образуют абелеву (коммутативную) подгруппу:

$$\mathcal{R}(\phi_1, \hat{n})\mathcal{R}(\phi_2, \hat{n}) = \mathcal{R}(\phi_2, \hat{n})\mathcal{R}(\phi_1, \hat{n}) = \mathcal{R}(\phi_1 + \phi_2, \hat{n}). \quad (2.4)$$

В общем вращения не коммутируют.

Вращения, имеющие *общий угол*, удовлетворяют соотношению для *класса углов* ([3], с. 150): $\mathcal{R}(\phi, A)\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{R}(\phi, \mathcal{S}\hat{n})$, где $\mathcal{S}$ — вращение, переводящее ось вращения A в новую ось вращения $A' = \mathcal{S}A$.

Полезным применением этого результата является доказательство следующего тождества для двух последовательностей вращений:

$$\mathcal{R}_n \cdots \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1 = \mathcal{R}'_1 \mathcal{R}'_2 \cdots \mathcal{R}'_n, \quad (2.5)$$

где $\mathcal{R}_k$ — вращение на угол ϕ_k вокруг $\hat{n}_k$, а $\mathcal{R}'_k$ — вращение на угол ϕ_k вокруг $\hat{n}'_k = (\mathcal{R}_{k-1} \cdots \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_1)^{-1} \hat{n}_k$ ($k = 2, \dots, n$) и $\hat{n}'_1 = \hat{n}_1$.

Описанная выше геометрическая точка зрения фокусирует внимание на точках, рассматриваемых как материально существующие, и на преобразованиях, которым они подвергаются. Менее интуитивным, но более сильным, является аналитический подход, который фокусирует внимание на трех числах, сопоставляемых с любой точкой. В этом подходе три числа являются связью между *двумя* структурами: *точкой*, определяемой тремя числами, и *системой отсчета*, по которой определяются числа. Система отсчета, обозначаемая $F = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, состоит из векторов $\hat{e}_i$ ($i = 1, 2, 3$), которые имеют общее начало, единичную длину ($\hat{e}_i \cdot \hat{e}_i = 1$), взаимно ортогональны ($\hat{e}_i \cdot \hat{e}_j = 0, i \neq j$) и ориентированы ($\hat{e}_1 = \hat{e}_2 \times \hat{e}_3$). Используя систему отсчета F , для тройки чисел $x = (x_1, x_2, x_3)$, ассоциированных с точкой x , имеем $x_i = \vec{x} \cdot \hat{e}_i$, где $\vec{x}$ обозначает вектор от начала до точки x .

В аналитическом подходе различают два разных смысла преобразования: *активный* и *пассивный*. Согласно активному смыслу, каждая точка преобразуется в новую точку. Физическое значение состоит в том, что физические массивные точки передвигаются в новые положения. Согласно пассивному смыслу, изменяется координатная система, поэтому (неизменные) точки получают новые координаты. Физическое значение состоит в *новом описании* без какого-нибудь физического изменения ¹⁾.

Вращения как матрицы. Вращение $\mathcal{R}$ имеет хорошо определенное действие на каждый из единичных векторов, определяющих систему отсчета. Таким образом, с вращением $\mathcal{R}$ можно ассоциировать 3×3 -матрицу R , считая, что число $R_{ij} = \hat{e}_i \cdot \mathcal{R} \hat{e}_j$ является элементом, лежащим на пересечении j -го столбца и i -й строки матрицы R . Каждому вращению $\mathcal{R}$ соответствует матрица R .

Действие вращения $\mathcal{R}$ на произвольный вектор $\vec{x} = \sum_i x_i \hat{e}_i$ теперь может быть записано так: $\mathcal{R}\vec{x} = \sum_i (\sum_j R_{ij} x_j) \hat{e}_i$. Записывая векторы $\vec{x}$ и $\mathcal{R}\vec{x} = \vec{x}'$ как

¹⁾ Естественно выражать это различие преобразований латинскими выражениями "alias" и "alibi". Чтобы согласовать их с предыдущими выражениями, заметим, что "alias" происходит от *alias dictus* (лат.), означающее «иначе называемый», так что "alias"-преобразование является пассивным. "Alibi" происходит от *ali-ubi* (лат.), означающего «где-нибудь» или «в другом месте»; ясно, что это согласуется с активным преобразованием.

матрицы с одним столбцом $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$, $\mathbf{x}' = \text{col}(x'_1, x'_2, x'_3)$, получаем матричное уравнение $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$. Таким образом, получаем соответствие $\mathcal{R} \rightarrow R$ между вращениями и матрицами, такое, что произведение $\mathcal{R}_1 \mathcal{R}_2$ двух вращений соответствует произведению $R_1 R_2$ матриц. Говорят, что соответствие $\mathcal{R} \rightarrow R$ является *представлением* группы вращений.

Переформулировка вращений в этих терминах приводит к следующему результату для матриц:

$$\mathcal{R}(\phi, \hat{n}) \rightarrow R(\phi, \hat{n}) = 1_3 + N \sin \phi + N^2(1 - \cos \phi). \quad (2.6)$$

Здесь 1_3 — единичная 3×3 -матрица, а N — антисимметричная матрица, определенная осью вращения $\hat{n}$: $N_{ij} = -e_{ijk} n_k$, где e_{ijk} равно $+1$ и -1 для четной и нечетной перестановок (i, j, k) чисел $(1, 2, 3)$ соответственно и 0 в других случаях.

Этот результат для матрицы $R(\phi, \hat{n})$ показывает, что 3×3 -матрицы, представляющие вращение, являются *вещественными ортогональными* ($R = R^{-1}$, где тильда обозначает матричную транспозицию) и *собственными* ($\det R = 1$). Обозначим эту группу матриц через $SO(3)$. (Тот факт, что каждая вещественная собственная ортогональная матрица имеет вид (2.6), доказывается в разд. 6.)

Подчеркнем, что представление вращения $\mathcal{R}$ вещественной собственной ортогональной 3×3 -матрицей определяется относительно фиксированной системы отсчета $F = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$. В следующем разделе мы рассмотрим более трудный вопрос, относящийся к обратному соответствию, а именно, определяет ли такая матрица единственное вращение.

3. Конструкция Дирака

В этом разделе мы хотим обсудить кажущийся простым вопрос из кинематики: является ли отображение вращений на собственные ортогональные матрицы $\mathcal{R} \rightarrow R$ взаимно однозначным или нет? Иначе этот вопрос формулируется так: является ли вращение на угол $\phi = 2\pi$ вокруг любой оси *физически эквивалентным* тождественному вращению?

Из (2.1) однозначно следует, что $\mathcal{R}(\phi + 2k\pi, \hat{n}) = \mathcal{R}(\phi, \hat{n})$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$); но напомним, что в действительности это тождество для вращений, действующих на векторы: $\mathcal{R}(\phi + 2k\pi, \hat{n})\vec{r} = \mathcal{R}(\phi, \hat{n})\vec{r}$, где $\vec{r}$ — произвольный вектор. Таким образом, вращение на 2π эквивалентно тождественному вращению для набора физических массивных частиц, свойства которых определяются соответствующим набором одновременных векторов положения. Мы всегда можем отобразить вращения таких массивных точек на собственные ортогональные матрицы, введя систему отсчета F . Но это оставляет открытым вопрос: является ли вращение на 2π эквивалентным тождественному вращению для всех мыслимых физических объектов, а следовательно, является ли группа вращений эквивалентной группе собственных ортогональных матриц?

Дирак дал очень изобретательную конструкцию ¹⁾, чтобы продемонстрировать, что для *твердых тел* вращение на 2π не эквивалентно тождественному

¹⁾ Эта конструкция является частью широко распространенного предания в физике, хотя Дирак никогда его не публиковал. (Ньюмен [4], как мы нашли, первым цитировал его.) Мы признательны проф. Мерибихеру, который сообщил нам об этой конструкции.

вращению, а что вращение на 4π эквивалентно тождественному вращению. Будет показано, что этот факт справедлив для *координатных систем*, так же как для твердых тел, причем посредством этого (как будет рассмотрено) определяется совсем неожиданный кинематический признак координатной системы — ее *версия* (version) [5].

Как мы покажем, понятие твердого тела (непроницаемой области пространства) в противоположность понятию *жесткого тела* (фиксированные расстояния между массивными точками), является существенным в этом построении.

Рассмотрим произвольное твердое тело в свободном пространстве; для простоты предположим, что это куб (с помеченными сторонами, чтобы он был асимметричен). При построении Дирака фиксируются точки на кубе путем прикрепления к каждой тонкой свободно растяжимой нити; другие концы нитей прикреплены к фиксированной системе отсчета. Для определенности используем расположение, показанное на рис. 2.1.

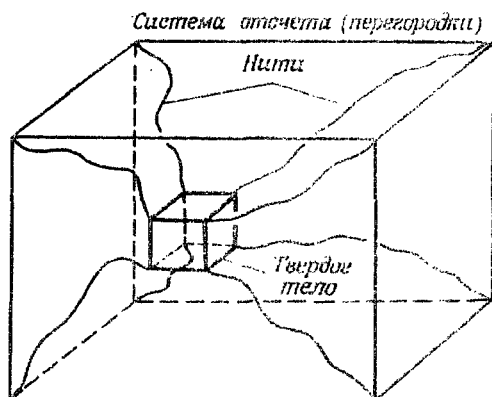


РИС. 2.1.

Выполним теперь вращение твердого тела на 2π вокруг *любой* оси. Нити становятся безнадежно запутанными, и никакие манипуляции не могут их распутать. (Тело и система отсчета должны оставаться неподвижными, а нити *не должны проходить через тело или ребра*.) Однако замечательно, что если мы повернем еще на 2π (т.е. начнем все сначала и сделаем поворот на 4π вокруг *любой* оси), то подходящая манипуляция нитей *приводит* к распутыванию, возвращая в точности к первоначальной конфигурации ¹⁾.

¹⁾ Предлагаем читателю выполнить этот эксперимент самостоятельно. В эквивалентном варианте этого построения используется связка нитей. Поверните связку на 4π вокруг оси, скажем вдоль длины связки, я, оставляя ориентации связки фиксированными, перенесите конец системы вокруг конца связки.

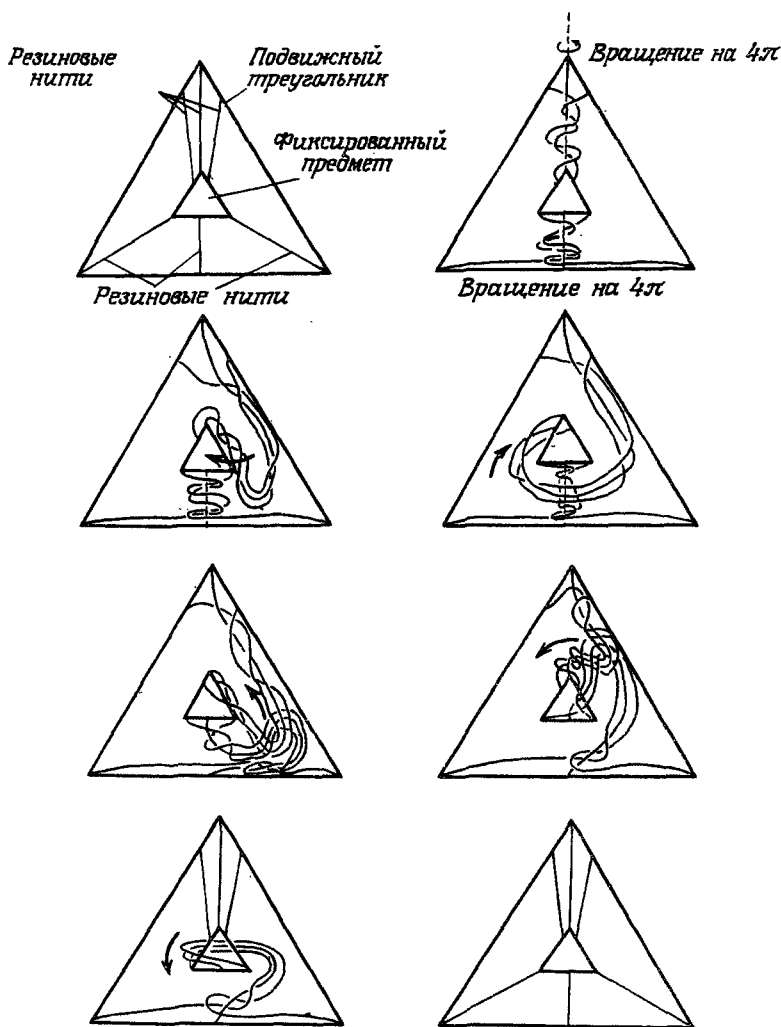


РИС. 2.2.

На рис. 2.2 операция распутывания шести нитей после вращения на 4π иллюстрируется последовательными диаграммами. Твердое тело здесь представлено фиксированным треугольником, а система отсчета — подвижным треугольником. Из этих диаграмм видно, что существенной операцией (как показано также в примечании на предыдущей странице) является операция переноса нитей *вокруг* твердого тела.

Сколько нитей нужно? В примечании мы дадим анализ этой конструкции, который приводит к следующему заключению: *минимальное число нитей для кон-*

струкции равно трем. Легко проверить, что для меньшего числа нитей запутывание путем вращения на 2π всегда может быть распутано (рис. 2.3).

На основе этого анализа мы можем теперь сделать заключение, которое мы получаем из построения Дирака. *Реальный мир имеет следующие кинематические свойства: а) координатная система при вращении на 2π вокруг любой оси в принципе отличима от повернутой системы координат и б) координатная система при вращении на 4π вокруг любой оси неотличима от повернутой системы.* Это свойство системы мы называем ее версией (version) (термин введен Мизнером и др. [5], с. 1148).



РИС. 2.3.

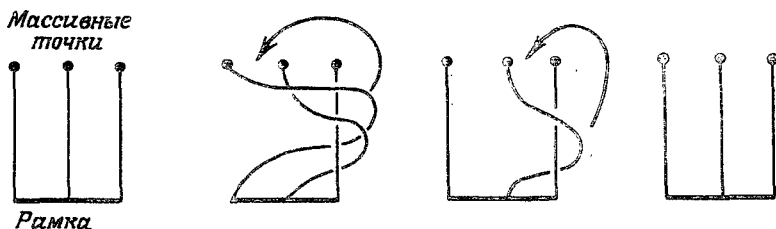


РИС. 2.4.

В приведенном обсуждении мы подчеркнули, что понятие твердого тела (в том смысле, в котором мы его используем) существенно для построения Дирака. В качестве иллюстрации этого на рис. 2.4 показано, как можно распутать нити после вращения на 2π , когда жесткое тело (фиксированы расстояния между массивными точками с *проницаемыми* областями между ними) содержит три массивные точки. Второе свойство также выявляется путем рассмотрения рис. 2.4: если массивные точки соединить непроницаемыми линиями, то распутать нити все же возможно, как показано на рис. 2.5. Таким образом, *твердое тело в конструкции Дирака является непроницаемой областью пространства, имеющей конечный размер* (3-симплекс) (см. также [6], с. 165).

Замечания. а) Результат Дирака нужно отличать от подобного поведения спиноров при вращении. Как мы увидим (в разд. 4), спиноры являются точечными объектами в противоположность объектам в конструкции Дирака, которые должны иметь *конечный размер*. б) Если мы теперь обратимся к нашему перво-

начальному вопросу, то увидим, что отображение: вращения $\{ \mathcal{R} \} \rightarrow 3 \times 3$ -матрицы $\{ R \}$ является отображением один в один, если мы рассматриваем вращения *точек*, и отображением два в один, если мы рассматриваем вращения *физического «твердого тела»* (если такое существует) или вращения *математической системы координат*. в) Отображение два в один вращений системы в 3×3 -матрицы в смысле понятий является тем же (как мы обсуждаем в разд. 6), что и гомоморфизм два в один группы $SU(2)$ (мультипликативной группы унитарных 2×2 -матриц) на группу $SO(3)$ (мультипликативную группу собственных ортогональных вещественных 3×3 -матриц). То, что $SU(2)$ является группой, которая имеет отношение к квантовой физике, является важным открытием Вейнера [3]; для конструкции Дирака важно, что $SU(2)$ в действительности топологически имеет отношение к классической физике.

„Вращается“
вокруг точки

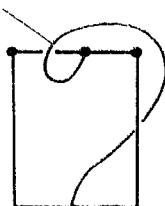


РИС. 2.5.

В примечании 2 мы обсуждаем некоторые из приложений этих результатов.

В последующем гермином «группа вращений» мы всегда будем обозначать группу, для которой $\mathcal{R}(4\pi, \hbar) = E =$ тождественное вращение, $\mathcal{R}(2\pi, \hbar) \neq E$, т.е. группу $SU(2)$.

4. Картаново определение спинора

Как следует из названия, спиноры были введены в квантовую механику для описания частиц, имеющих полуцелый внутренний угловой момент («спин») [7, 8]. Однако в математике спиноры были открыты раньше¹⁾; Картан [9] определил спиноры в наиболее общей форме еще в 1913 г.

Большое преимущество подхода Картана состоит в том, что он является чисто геометрическим, и из-за этого геометрического подхода хорошо известные из квантовой механики матрицы Паули появляются независимо от квантовомеханических рассуждений.

¹⁾ В действительности спиноры неявно подразумеваются в кватернионах Гамильтона [10 — 12] (см. также [13, 14]) и в гомографических преобразованиях Клейна [15, 16] и Кэли [17], однако не так просто сделать понятие явным. Определение спиноров из кватернионов эквивалентно определению волновой функции из матрицы плотности (см. разд. 7 гл. 7) или в алгебраической форме определению максимальных собственных идеалов алгебры (см. [35], гл. 2).

Ключевой элемент подхода Картана состоит в рассмотрении ¹⁾ *изотропного вектора* (вектора нулевой длины) в трехмерном (комплексном) евклидовом пространстве. Компоненты такого вектора удовлетворяют соотношению $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, и мы можем сопоставить с этим вектором два комплексных числа ξ_0, ξ_1 , определяемые формулами

$$x_1 = \xi_0^2 - \xi_1^2, \quad x_2 = i(\xi_0^2 + \xi_1^2), \quad x_3 = -2\xi_0\xi_1. \quad (2.7)$$

Иначе можно определить ξ_0 и ξ_1 через изотропный вектор x :

$$\xi_0 = \pm [\tfrac{1}{2}(x_1 - ix_2)]^{\frac{1}{2}}, \quad \xi_1 = \pm [-\tfrac{1}{2}(x_1 + ix_2)]^{\frac{1}{2}}. \quad (2.8)$$

Картан заметил, что в этих соотношениях невозможно предписать согласующиеся знаки, так как при вращении на 2π знак ξ_0, ξ_1 изменяется, но изотропный вектор возвращается в свое первоначальное положение. (Однако относительный знак ξ_0, ξ_1 может быть определен.) Такое поведение является определяющей характеристикой спинора (определенного как пара (ξ_0, ξ_1)): вращение на 4π , а не на 2π эквивалентно тождественному вращению. Спинор является евклидовым тензором ([2], с. 42).

Это простое изящное построение Картана указывает на два важных аспекта: а) на необходимость обобщения до комплексных чисел и б) на тот факт, что спинор (Картана) является *точечным спинором*, с необходимостью имеющим нулевую длину. Последняя особенность резко контрастирует со спинорным аспектом твердого тела, которое, как мы видели в предыдущем разделе, с необходимостью имеет конечный размер.

Теперь, используя известные трансформационные свойства векторов при вращении, определим, как спиноры преобразуются при вращении. Спинор (ξ_0, ξ_1) сопоставляется с изотропным вектором (x_1, x_2, x_3) ; при вращении R мы имеем $x \rightarrow x' = Rx$ и (так как длины сохраняются) изотропный вектор x' определяет преобразованный спинор (ξ'_0, ξ'_1) . Таким образом, из (2.7) для $(\xi'_0)^2$ находим

$$\begin{aligned} (\xi'_0)^2 &= \tfrac{1}{2}[(R_{11} - iR_{21})x_1 + (R_{12} - iR_{22})x_2 + (R_{13} - iR_{23})x_3] \\ &= \tfrac{1}{2}(R_{11} - iR_{21} + iR_{12} + R_{22})\xi_0^2 - (R_{13} - iR_{23})\xi_0\xi_1 \\ &\quad + \tfrac{1}{2}(-R_{11} + iR_{21} + iR_{12} + R_{22})\xi_1^2. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Замечательно, что правая часть этого выражения является точным квадратом (дискриминант обращается в нуль в силу ортогональности матрицы R). Выражение для $(\xi'_1)^2$ также является точным квадратом. Таким образом, как ξ'_0 , так и ξ'_1 линейно определены через ξ_0 и ξ_1 с точностью до знака. Относительный знак ξ'_0 и ξ'_1 не является неопределенным, а определяется (с помощью (2.7)) знаком x'_3 .

Явная форма линейного преобразования, индуцированного на спинорах вращением соответствующего вектора x , рассматривается в разд. 5. Там будет по-

¹⁾ Ради исторической точности заметим, что Клейн и Зоммерфельд ([18], разд. 3, стр. 23) рассмотрели определение спинора с помощью изотропного 3-вектора. Они рассматривают спиноры как точки, лежащие на минимом конусе второго порядка; конечно, они не используют язык спиноров или изотропных 3-векторов.

казано, что вращение изотропных векторов $x \rightarrow x' = Rx$ индуцирует вращение $\xi' = U\xi$ спиноров $\xi = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \xi_1 \end{pmatrix}$, где U — унимодулярная унитарная матрица, полученная из элементов R_{ij} матрицы R .

Замечание. Сопоставление изотропных векторов x со спинорами ξ , заданное формулами (2.7), мы будем называть *отображением Картана*. (Оно имеет несколько интересных приложений, которые обсуждаются в гл. 6, разд. 16.) Спинорная массивная точка описывается ее *вещественным вектором положения* $\bar{r}$ (в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3$) и *спинором* ξ (в двумерном комплексном пространстве $\mathbb{C}^2$), где спинорное пространство определяет с помощью отображения Картана пространство *изотропных векторов* $\{\bar{x}\}$. При вращении $\bar{r}$ и $\bar{x}$ преобразуются как *векторы*. Заметим, что спинорная массивная частица является классическим объектом и что она совершенно отлична от твердого тела в конструкции Дирака.

Продолжим теперь рассмотрение построения Картана. Формулы (2.7) для изотропного вектора x , сопоставляемого со спинором ξ , порождают отношение ξ_0/ξ_1 в виде $\xi_0/\xi_1 = -(x_1 - ix_2)/x_3 = x_3/(x_1 + ix_2)$. Связь, выраженная этим отношением, может быть записана в матричных обозначениях:

$$(x \cdot \sigma)\xi = 0, \quad (2.10)$$

где $x \cdot \sigma$ обозначает $x_1\sigma_1 + x_2\sigma_2 + x_3\sigma_3$, а σ_i ($i = 1, 2, 3$) обозначают матрицы Паули [8]:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Таким образом, $x \cdot \sigma$ является 2×2 -матрицей, заданной формулой

$$x \cdot \sigma = \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Матрица (2.12) (а следовательно, и матрица Паули) естественно возникает в отображении Картана, давая изотропный вектор x , сопоставляемый со спинором ξ .

Картан также заметил, что матрица (2.12) задает общий вид сопоставления комплексной 2×2 -матрицы с *произвольным* вектором и обратно:

$$x = (x_1, x_2, x_3) \leftrightarrow \begin{pmatrix} x_3 & x_1 - ix_2 \\ x_1 + ix_2 & -x_3 \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

С помощью этой связи теперь мы выведем связь между вращениями $[SU(2)]$ и собственными вещественными ортогональными матрицами.

5. Связь между вращениями в $SU(2)$ и $SO(3)$

Заметим теперь, что для вещественного x матрица $x \cdot \sigma$ эрмитова и бесследова и что эти свойства сохраняются при унитарном преобразовании подобия ($U^\dagger U = UU^\dagger = \sigma_0 =$ тождественная 2×2 -матрица, где $U^\dagger$ обозначает транспонированную ($\sim$) и комплексно сопряженную ($*$) матрицу):

$$\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma} = U(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^\dagger. \quad (2.14)$$

(Соответствующие уравнения $(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi = 0$ для изотропного вектора $\mathbf{x}'$, сопоставляемого со спинором $\xi' = U\xi$, принимают вид $(\mathbf{x}' \cdot \boldsymbol{\sigma})\xi' = 0$.) Таким образом, мы имеем *линейное* преобразование векторов $\mathbf{x}' = R\mathbf{x}$, соответствующее унитарному преобразованию спиноров $\xi' = U\xi$, которое определяется из (2.14):

$$x'_i = \frac{1}{2} \text{tr}[\sigma_i U(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma})U^\dagger] = \sum_j R_{ij}x_j, \quad (2.15)$$

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger), \quad (2.16)$$

где tr обозначает след матрицы.

Другое и полезное выражение для матрицы $R = (R_{ij})$ может быть получено путем записи преобразования (2.14) сначала как $\eta' = (U \otimes U')\eta$ (матричное прямое произведение), где $\eta = \text{col}(x_3, x_1 - ix_2, x_1 + ix_2, -x_3)$, а затем как связь между матрицами-столбцами $\text{col}(x'_1, x'_2, x'_3, \xi')$ и $\text{col}(x_1, x_2, x_3, \xi)$ (ξ — произвольная переменная). В результате имеем

$$\begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = S^\dagger (U \otimes U^*) S, \quad (2.17)$$

где $U \otimes U^*$ обозначает матричное прямое произведение U и U^* и S — унитарная унимодулярная матрица

$$S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -i \\ 1 & -i & 0 & 0 \\ 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -i \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Пусть $U(2)$ обозначает группу (матричное умножение) унитарных 2×2 -матриц:

$$U(2) = \{U: UU^\dagger = \sigma_0\}. \quad (2.19)$$

Теперь можно доказать, используя (2.16) или (2.17), что а) матрица R является *вещественной собственной и ортогональной* для каждого $U \in U(2)$, б) если U отображается в R соотношением (2.16), то $U'U \rightarrow R'R$, где $U \rightarrow R$ и $U' \rightarrow R'$, в) множество элементов из $U(2)$, которые отображаются в единицу группы $SO(3)$ (ядро отображения) соотношением (2.16), совпадает с $\{e^{i\phi}\sigma_0: 0 \leq \phi < 2\pi\}$ и г) для каждого $R \in SO(3)$ существует $U \in U(2)$, такое, что $U \rightarrow R$ (отображение является отображением *на*).

Для приложений полезно иметь явную формулу, определяющую множество решений $U \in U(2)$ соотношения (2.16), которые соответствуют фиксированному $R \in SO(3)$. Для этой цели заметим, что каждое $U \in U(2)$ может быть записано в виде $U = e^{i\phi}U_0$, $0 \leq \phi < 2\pi$, где U_0 принадлежит группе унитарных унимодулярных 2×2 -матриц:

$$SU(2) = \{U_0: U_0 U_0^\dagger = \sigma_0, \det U_0 = 1\}. \quad (2.20)$$

Далее мы используем тот факт, что каждое $U_0 \in SU(2)$ имеет вид

$$U_0 = U(\alpha_0, \alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_0 - i\alpha_3 & -i\alpha_1 - \alpha_2 \\ -i\alpha_1 + \alpha_2 & \alpha_0 + i\alpha_3 \end{pmatrix} = \alpha_0 \sigma_0 - i\alpha \cdot \sigma, \quad (2.21)$$

где $(\alpha_0, \alpha) = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ — (вещественные) параметры Эйлера — Родригеса, которые определяют поверхность единичной сферы S^3 в четырехмерном пространстве, т.е. $\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1$. Из (2.17) находится элемент $R = R(\alpha_0, \alpha) \in SO(3)$, соответствующий U_0 :

$$R = \begin{pmatrix} \alpha_0^2 + \alpha_1^2 - \alpha_2^2 - \alpha_3^2 & 2\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_0\alpha_3 & 2\alpha_1\alpha_3 + 2\alpha_0\alpha_2 \\ 2\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_0\alpha_3 & \alpha_0^2 + \alpha_2^2 - \alpha_3^2 - \alpha_1^2 & 2\alpha_2\alpha_3 - 2\alpha_0\alpha_1 \\ 2\alpha_1\alpha_3 - 2\alpha_0\alpha_2 & 2\alpha_2\alpha_3 + 2\alpha_0\alpha_1 & \alpha_0^2 + \alpha_3^2 - \alpha_1^2 - \alpha_2^2 \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Теперь легко найти решение соотношения (2.22) для (α_0, α) в терминах матричных элементов R_{ij} матрицы R :

$$\begin{aligned} \operatorname{tr} R \neq -1 \quad \alpha_0 &\equiv \frac{1}{2}(1 + \operatorname{tr} R)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha_i \equiv -(R_{jk} - R_{kj})/4\alpha_0, \quad i, j, k \text{ циклически,} \\ \operatorname{tr} R = -1 \quad \alpha_0 &= 0, \quad \alpha_i = (\operatorname{sign} \alpha_i)[(1 + R_{ii})/2]^{\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{sign} \alpha_1 = 1, \\ \operatorname{sign} \alpha_2 &= \operatorname{sign} R_{12}, \quad \operatorname{sign} \alpha_3 = \operatorname{sign} R_{13}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Таким образом, существует в точности две унитарные унимодулярные матрицы, которые решают соотношение (2.16) для каждого фиксированного R , а именно матрица U_0 , заданная соотношением (2.21) с параметрами (2.23), и отрицательная матрица $-U_0: \{U_0 - U_0\} \rightarrow R$. Таким образом, множество всех решений $U \in U(2)$ соотношения (2.16) имеет вид $\{e^{i\phi} U_0: 0 \leq \phi < 2\pi\}$.

Запись унитарных унимодулярных 2×2 -матриц в виде (2.21) ясно показывает, что элементы группы $SU(2)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством точек S^3 , которые определяют поверхность единичной сферы в четырехмерном пространстве. Когда (α_0, α) пробегает все точки единичной сферы S^3 , матрицы (2.21) и (2.22) пробегают соответственно все элементы (в точности один раз) группы $SU(2)$ и все элементы (в точности дважды) группы $SO(3)$, причем из (2.22) очевидно, что $(\alpha_0, \alpha) \in S^3$ и диаметрально противоположная точка $(-\alpha_0, -\alpha) \in S^3$ определяют одну и ту же собственную ортогональную матрицу R .

Замечание. Швингер [19], по-видимому, впервые опубликовал результат, обобщающий соотношение (2.16); соотношения (2.23) согласуются с его ответом. Однако Швингер не рассмотрел сингулярный случай $\operatorname{tr} R = -1$, появляющийся для исключительных ($R = \bar{R}$, $R \neq I$) собственных ортогональных матриц.

6. Параметризации группы вращений

Представление вращений вещественными собственными ортогональными 3×3 -матрицами и унитарными унимодулярными 2×2 -матрицами может быть выполнено с помощью различных параметризаций, важных для физических приложений. В дополнение к параметрам Эйлера — Родригеса (α_0, α) , вве-

денным в последнем разделе, существуют три общие параметризации ¹⁾ вращений: а) параметры $(\phi, \hat{n})$, которые Эйлер ввел для характеристики направления и угла поворота, б) параметры Кэли — Клейна и в) углы Эйлера. Теперь мы кратко рассмотрим каждую из этих параметризаций и укажем литературу для более полного ознакомления с топологическими свойствами соответствующих «групповых пространств».

Параметры $(\phi, \hat{n})$. Мы использовали эти параметры в нашем первоначальном обсуждении в разд. 2 при определении действия вращения на вектор. Соответствующая матрица $R(\phi, \hat{n})$ задается формулой (2.6). Заметив, что $N^3 = -N$ (см. соотношение (2.6)), можно также получить экспоненциальную форму для этой матрицы:

$$R(\phi, \hat{n}) = e^{\phi N}, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad \hat{n} \cdot \hat{n} = 1. \quad (2.24)$$

Область определения параметров $0 \leq \phi \leq \pi, \hat{n} \cdot \hat{n} = 1$ покрывает элементы группы $SO(3)$ в точности один раз, за исключением того, что для $\phi = \pi$ $\hat{n}$ и $-\hat{n}$ определяют одно и то же вращение. (Таким образом, элементы из $SO(3)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии [3, 22] с точками твердой сферы радиуса π , в которой диаметрально противоположные точки поверхности отождествляются.)

Обратная связь, выражающая ϕ и $\hat{n}$ через элементы R вещественной собственной ортогональной матрицы R , может быть прямо найдена путем решения соотношения (2.6) относительно ϕ и N . Результаты имеют вид

$$\cos \phi = (-1 + \text{tr } R)/2, \quad (2.25)$$

$$n_i \sin \phi = -(R_{jk} - R_{kj}), i, j, k \text{ циклически.} \quad (2.26)$$

Так как для каждой собственной ортогональной матрицы R $-1 \leq \text{tr } R \leq 1$, то соотношение (2.25) определяет единственный угол в интервале $0 \leq \phi \leq \pi$. Когда ϕ определено, из соотношения (2.26) находим n_i , если $\phi \neq \pi$. Для $\phi = \pi$ имеем два решения $\pm \hat{n}$ для направления, где $\hat{n} = \alpha$ получается из (2.23).

Множество унитарных унимодулярных матриц в параметризации $(\phi, \hat{n})$ получаем из (2.21), (2.23), (2.25) и (2.26):

$$U = U(\psi, \hat{n}) = \sigma_0 \cos(\psi/2) - i(\hat{n} \cdot \sigma) \sin(\psi/2) = e^{-i\psi(\hat{n} \cdot \sigma)/2}, \quad (2.27)$$

где последнее равенство доказываем прямым разложением, используя $(\hat{n} \cdot \sigma)^2 = \sigma_0$. Область определения параметров $(\psi, \hat{n})$ теперь равна

$$\hat{n} \cdot \hat{n} = 1, \quad 0 \leq \psi \leq 2\pi, \quad (2.28)$$

так что множество точек $\{(\alpha_0, \alpha) = (\cos \psi/2, \hat{n} \sin \psi/2)\}$ покрывает сферу S^3 в точности один раз.

¹⁾ Четвертая параметризация, так называемые рациональные параметры Кэли [20], имеет главным образом техническое значение ([21], стр. 56), и не находит значительного применения в практических приложениях углового момента. Мы упоминаем ее здесь ради полноты, но не используем в этой монографии.

Чтобы сделать связь $U(\phi, \hat{n})$ с $R(\phi, \hat{n})$ явной, разобьем точки на единичной сфере S^3 на две открытые полусферы:

$$\left\{ \left(\cos \frac{\phi}{2}, \hat{n} \sin \frac{\phi}{2} \right): 0 \leq \phi < \pi, \quad \hat{n} \cdot \hat{n} = 1 \right\},$$

$$\left\{ \left(\cos \frac{2\pi - \phi}{2}, \hat{n} \sin \frac{2\pi - \phi}{2} \right): 0 \leq \phi < \pi, \quad \hat{n} \cdot \hat{n} = 1 \right\}. \quad (2.29)$$

Множество точек $\{(0, \hat{n}); \hat{n} \cdot \hat{n} = 1\}$, соответствующих $\phi = \pi$ (единичная сфера S^2), составляет общую границу двух полусфер. Пара унитарных унимодулярных матриц $U(\phi, \hat{n})$ и $U(2\pi - \phi, -\hat{n}) = -U(\phi, \hat{n})$, соответствующих точке первой полусферы и диаметрально противоположной точке второй полусферы, отображаются с помощью (2.16) в $R(\phi, \hat{n})$.

Параметры Кэли — Клейна. Стереографическая проекция сферы S^2 (трехмерного пространства) в комплексную плоскость приводит к связи между вращениями и унитарными матрицами, которая эквивалентна той связи, которую мы уже получили, используя спиноры Картана. Вращение точек на сфере соответствует *дробно-линейным преобразованиям* плоскости (называемым также *гомографическими преобразованиями* или *билинейными преобразованиями*). Эта связь была открыта Клейном [15] и дальше развита Клейном [16] и Кэли [17].

Соответствие между точками (x_1, x_2, x_3) на сфере $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ и точками (ξ, η) экваториальной плоскости устанавливается *стереографической проекцией* из северного полюса N в $(0, 0, 1)$. Таким образом, прямая, проходящая через северный полюс N в любую точку (x_1, x_2, x_3) на сфере, за исключением полюса N , определяет точку (ξ, η) в экваториальной плоскости; обратно, прямая, проходящая через любую конечную точку (ξ, η) экваториальной плоскости и северный полюс, определяет точку (x_1, x_2, x_3) на сфере.

Геометрические рассуждения подобных треугольников приводят к соотношениям $\xi = x_1/(1 - x_3)$, $\eta = x_2/(1 - x_3)$, т.е.,

$$\zeta = \xi + i\eta = \frac{x_1 + ix_2}{1 - x_3} = \frac{1 + x_3}{x_1 - ix_2}. \quad (2.30)$$

Теперь мы формулируем основную теорему для дробно-линейного преобразования. (Доказательство см. в работах [6, 16, 23, 24].)

Пусть $x \rightarrow x' = Rx$ обозначает собственное ортогональное преобразование сферы. Тогда $\xi\eta$ -плоскость подвергается преобразованию, определенному дробно-линейным преобразованием точки $\zeta = \xi + i\eta$:

$$\zeta \rightarrow \zeta' = \frac{u_{11}^* \zeta + u_{12}^*}{u_{21}^* \zeta + u_{22}^*}, \quad (2.31)$$

где u_{ij} — элементы унитарной матрицы $U = (u_{ij})$, которая сопоставляется с $R = (R_{ij})$:

$$R_{ij} = \frac{1}{2} \text{tr}(\sigma_i U \sigma_j U^\dagger). \quad (2.32)$$

Замечания. а) Отметим, что унитарные матрицы U и λU ($|\lambda| = 1$) определяют одно и то же дробно-линейное преобразование плоскости. Следовательно, мы можем выбирать U унимодулярным; тогда две унимодулярные матрицы U и $-U$ определяют одно и то же преобразование. б) Собственные ортогональные преобразования сферы и преобразования $\xi\eta$ -плоскости находятся во взаимно-однозначном соответствии. Тогда отождествление унитарных унимодулярных 2×2 -матриц с дробно-линейными преобразованиями порождает связь два в один с этими преобразованиями, а следовательно, и с собственными ортогональными матрицами. в) Дробно-линейное преобразование (2.31) $\xi \rightarrow \xi'$ комплексной плоскости, соответствующее вращению $x \rightarrow x' = Rx$ сферы, было получено впервые Кэли [17] в виде (см. примечание 3)

$$\xi' = \frac{(\alpha_0 + i\alpha_3)\xi + (i\alpha_1 - \alpha_2)}{(i\alpha_1 + \alpha_2)\xi + (\alpha_0 - i\alpha_3)}, \quad (2.33)$$

где $\alpha_i \equiv n_i \sin(\psi/2)$, $\alpha_0 = \cos(\psi/2)$, $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$, $0 \leq \psi \leq 2\pi$. Четыре комплексных числа $(a, b, c, d) = (\alpha_0 + i\alpha_3, i\alpha_1 - \alpha_2, i\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_0 - i\alpha_3)$ называются *параметрами Кэли — Клейна*, тогда как четыре вещественные числа (α_0, α) , определенные точкой поверхности единичной сферы в четырехмерном пространстве S^3 , известны как *параметры Эйлера — Родригеса* (иначе три отношения α_i/α_0 образуют «однородные», или «симметрические», параметры Эйлера (см. [18], с. 60, и [25])).

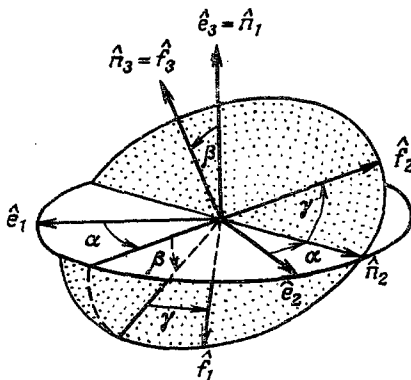


РИС. 2.6. Углы Эйлера. Три угла Эйлера $(\alpha\beta\gamma)$ определяются последовательностью трех вращений: на угол α вокруг $\hat{n}_1$, на угол β вокруг $\hat{n}_2$, на угол γ вокруг $\hat{n}_3$.

Углы Эйлера. Три угла, введенные Эйлером для характеристики вращений, вероятно, наиболее широко используются в физических приложениях. Это может объяснить существование в литературе нескольких вариантов их определения.

Геометрически углы Эйлера $(\alpha\beta\gamma)$ описываются последовательностью трех вращений векторов, которые мы теперь описываем в терминах фиксированной системы координат $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ (рис. 2.6):

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}_1: & \text{вращение на угол } \alpha \text{ вокруг } \hat{n}_1 = (0, 0, 1), \\
\mathcal{R}_2: & \text{вращение на угол } \beta \text{ вокруг } \hat{n}_2 = (-\sin \alpha, \cos \alpha, 0), \\
\mathcal{R}_3: & \text{вращение на угол } \gamma \text{ вокруг } \hat{n}_3 = (\cos \alpha \sin \beta, \sin \alpha \sin \beta, \cos \beta).
\end{aligned} \tag{2.34}$$

Иначе, используя тождество (2.5), углы Эйлера можно описать в терминах трех других вращений:

$$\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) = \mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}'_1\mathcal{R}'_2\mathcal{R}'_3, \tag{2.35}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}'_1: & \text{вращение на угол } \gamma \text{ вокруг } \hat{e}_3 = (0, 0, 1), \\
\mathcal{R}'_2: & \text{вращение на угол } \beta \text{ вокруг } \hat{e}_2 = (0, 1, 0), \\
\mathcal{R}'_3: & \text{вращение на угол } \alpha \text{ вокруг } \hat{e}_3 = (0, 0, 1).
\end{aligned} \tag{2.36}$$

Если мы рассматриваем эти вращения как активные (в противоположность пассивным) преобразования, то $\mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)$ отображает произвольный вектор $\bar{x}$ в новый вектор $\bar{x}' = \mathcal{R}(\alpha, \beta, \gamma)\bar{x}$. Компоненты вектора $\bar{x}'$ связаны с компонентами $\bar{x}$ (в фиксированной системе $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$) формулой

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}' &= R(\alpha\beta\gamma)\mathbf{x}, \\
R(\alpha\beta\gamma) &= \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \beta & 0 & \sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \beta & 0 & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \gamma & -\sin \gamma & 0 \\ \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\begin{array}{ccc|ccc} \cos \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma & \cos \alpha \sin \beta & & & \\ -\sin \alpha \sin \gamma & -\sin \alpha \cos \gamma & & & & \\ \hline \sin \alpha \cos \beta \cos \gamma & -\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma & \sin \alpha \sin \beta & & & \\ +\cos \alpha \sin \gamma & +\cos \alpha \cos \gamma & & & & \\ \hline -\sin \beta \cos \gamma & \sin \beta \sin \gamma & \cos \beta & & & \end{array} \right) \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Область определения углов Эйлера в (2.37)

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \tag{2.38}$$

Различные множества чисел $(\alpha\beta\gamma)$, лежащих в этих интервалах, соответствуют различным вращениям, за исключением случаев $\beta = 0$ или $\beta = \pi$. Если $\beta = 0$, то вращение осуществляется на угол $\alpha + \gamma$ вокруг $(0, 0, 1)$; если $\beta = \pi$, то вращение осуществляется на угол $\alpha - \gamma$ вокруг $(0, 0, 1)$. В этих случаях различные значения α и γ могут определять одно и то же вращение.

Вращение, обратное $R(\alpha\beta\gamma)$, есть

$$R^{-1}(\alpha\beta\gamma) = R(2\pi - \gamma, \pi - \beta, 2\pi - \alpha). \tag{2.39}$$

На рис. 2.6 показана система $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$, полученная из $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ применением последовательности вращений $\mathcal{R}(\alpha\beta\gamma) = \mathcal{R}_3\mathcal{R}_2\mathcal{R}_1$ из (2.34). В этой (пассивной) интерпретации вращений элементы матрицы $R(\alpha\beta\gamma)$ являются направляющими косинусами между осями: $R_{ij}(\alpha\beta\gamma) = \hat{e}_i \cdot \hat{f}_j$.

Параметризация углами Эйлера матрицы $U \in SU(2)$ задается формулой

$$U(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha\sigma_3/2} e^{-i\beta\sigma_2/2} e^{-i\gamma\sigma_3/2} = \begin{pmatrix} e^{-i\alpha/2} \cos(\beta/2) e^{-i\gamma/2} & -e^{-i\alpha/2} \sin(\beta/2) e^{i\gamma/2} \\ e^{i\alpha/2} \sin(\beta/2) e^{-i\gamma/2} & e^{i\alpha/2} \cos(\beta/2) e^{i\gamma/2} \end{pmatrix}, \quad (2.40)$$

где область определения углов $(\alpha\beta\gamma)$ теперь расширена до

$$0 \leq \alpha < 2\pi, \quad 0 \leq \beta \leq \pi \quad \text{или} \quad 2\pi \leq \beta \leq 3\pi, \quad 0 \leq \gamma < 2\pi. \quad (2.41)$$

Замечая, что $U(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma) = -U(\alpha\beta\gamma)$, видим, что $U(\alpha, \beta, \gamma)$ и $U(\alpha, \beta + 2\pi, \gamma)$, $0 \leq \beta \leq \pi$, отображаются в одно и то же $R(\alpha\beta\gamma)$.

В физической литературе очень часто можно найти неполное или даже неправильное использование углов Эйлера, когда обсуждаются полуцелые угловые моменты $[SU(2)]$, потому что используется неправильное покрытие единичной сферы четырехмерного пространства. (Эта проблема обсуждается в работе [26].)

7. Примечания

1. *Конструкция Дирака.* Имеется фундаментальная групповая структура, ассоциированная с такими системами нитей, открытая Артином [27 — 30] (при рассмотрении теории узлов) и названная *группой кос* (*Zöpfegruppe*). Группа кос порядка n рассматривает n нитей, прикрепленных, как показано (для $n = 5$) на рис. 2.7. Нити непрерывно спускаются вниз (т.е. они не могут возвращаться). Имеются две элементарные операции: а) σ_i : нить i пересекает *сверху* нить $i + 1$ (обозначенных слева направо, как они были перед операцией) и б) σ_i^{-1} : нить i пересекает *снизу* нить $i + 1$. Относительно этих операций система образует группу; ясно, что группа порождается $n - 1$ операциями $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-1}$. Система сильно упрощается, если учесть следующее:

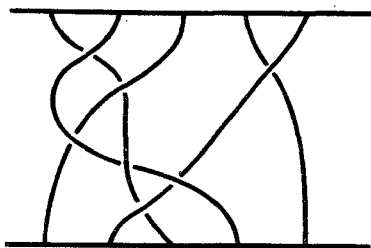


РИС. 2.7.

а) σ_1 и σ_0 порождают группу: $\sigma_0 = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1}$, $\sigma_i = (\sigma_0)^{i-1} \sigma_1 (\sigma_0)^{-i+1}$,

б) $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$, если j по крайней мере равно $i + 2$,

в) $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$.

Группа кос внутренне интересна с двух сторон: математически, потому что она более фундаментальна, чем группа перестановок; физически, потому что она является естественным инструментом для анализа многих физических задач, зависящих от пути. Важными примерами являются техника Фейнмана «суммирование по путям» и независимые от калибровки, но зависящие от пути волновые функции Мандельштама.

В случае конструкции Дирака имеется дополнительная разрешенная операция в группе кос — нити могут переноситься *вокруг рамки*. Это в точности та задача (конструкция Дирака), которая была алгебраически проанализирована Ньюменом [4] с использованием теории кос. Ньюмен доказал, что *минимальное число нитей*, таких, что вращение на 4π , а не на 2π эквивалентно тождественному вращению, равно *трем*.

2. *Спинор конечного размера*. Прочитируем следующий начальный абзац из введения к диссертации Казимира [31]:

Классическая механика знает два класса систем: «материальные точки» и «жесткие тела». При построении общей математической теории, применимой к любой системе, обычно отправляются от уравнений движения материальной точки. Однако с физической точки зрения понятие «жесткого тела» является таким же фундаментальным, как и понятие «материальной точки».

Мы интерпретируем использованное здесь Казимиром «жесткое тело» как *твердое тело* в смысле, введенном в разд. 3, для которого мы продемонстрировали, что вращение на 4π (а не на 2π) является тождественным вращением. Как мы показали в разд. 3, этот объект с необходимостью имеет конечный размер и сопоставляется с непроницаемой областью пространства. Мы предлагаем называть это фундаментальное понятие твердого тела *спинором конечного размера*. (Возможная связь этого объекта с адронами и кварками была исследована в работе [32].)

Даже если мы сопоставляем с этим объектом как минимум три различные точки, вследствие непроницаемости «пространства» между этими точками этот объект концептуально отличается от жесткого тела, составленного из трех массивных точек, разделенных обычным евклидовым пространством. Аргумент Боппа и Хаага [33] (см. также разд. 10, гл. 7) убедительно показывает, что в последнем случае могут появиться только целочисленные угловые моменты (и следовательно, вращение на 2π является тождественным вращением). Этот результат Боппа и Хаага не противоречит понятию спинора конечного размера, поскольку, как мы показали, непроницаемость пространства между тремя или большим числом различных точек, составляющих спинор конечного размера, является существенным для его спинорного характера.

3. *Преобразования спинорной плоскости*. Клейн [16] отметил тот любопытный факт, что дробно-линейное преобразование (2.33) разбивается при подстановке $\xi = \xi_1/\xi_2$ на две отдельные операции:

$$\xi_1 \rightarrow \xi'_1 = (\alpha_0 + i\alpha_3)\xi_1 + (i\alpha_1 + \alpha_2)\xi_2,$$

$$\xi_2 \rightarrow \xi'_2 = (i\alpha_1 - \alpha_2)\xi_1 + (\alpha_0 - i\alpha_3)\xi_2,$$

но, так же как и Кэли [17], он не заметил, что *кватернионное правило транспозиции* (см. разд. 3, гл. 4)

$$\begin{aligned}\alpha_0'' &= \alpha_0' \alpha_0 - \alpha' \cdot \alpha, \\ \alpha'' &= \alpha_0 \alpha' + \alpha_0' \alpha + \alpha' \times \alpha,\end{aligned}\quad (2.42)$$

полученное им из композиции двух дробно-линейных преобразований $\xi \rightarrow \xi'$ и $\xi' \rightarrow \xi''$, фактически является правилом *матричного умножения* [34], примененного к унитарным матрицам, записанным в виде (2.21):

$$U^*(\alpha_0'', \alpha'') = U^*(\alpha_0', \alpha') U^*(\alpha_0, \alpha).$$

Хотя обычно кватернионы связывают с именем Гамильтона [11], но Клейн [16] приписывает открытие правила композиции (2.42) Родригесу.

Литература

1. Mackey G. W., Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968.
2. Cartan E., The Theory of Spinors, MIT Press, Cambridge, Mass., 1966.
Имеется перевод первого французского издания 1937 года: Картан Э., Теория спиноров. — М.: ИЛ, 1947.
- 2a. Santalo L. A., Integral Geometry and Geometric Probability, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1976.
3. Wigner E. P., Gruppentheorie und ihre Anwendung auf die Quantenmechanik der Atom-spektren, Vieweg, Braunschweig, 1931.
[Имеется перевод: Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.]
4. Newman M. H. A., J. London Math. Soc., 17, 173 (1942).
О проблеме нитей Дирака.
5. Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A., Gravitation, Freeman, San Francisco, 1973.
6. Weyl H., Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel, Leipzig, 1928.
7. Heisenberg W., Jordan P., Z. Physik, 37, 263 (1926).
Применение квантовой механики к задаче аномального эффекта Зеемана.
8. Pauli W., Z. Physik, 37, 601 (1927).
Квантовая механика магнитного электрона.
9. Cartan E., Bull. Soc. Math. France, 41, 53 (1913).
Проективные группы, которые не сохраняют никакую мультипликативную плоскость.
10. Hamilton W. R., Mathematical Papers III, Cambridge Univ. Press, London, 1967.
11. Hamilton W. R., Phil. Mag., 25, 489 (1844).
Письмо Гравз о кватернионах или новая система мнимых чисел в алгебре.
12. Hamilton W. R., Proc. Roy. Irish Acad., II, 424 (1844).
О новых пространствах мнимых величин, связанных с теорией кватернионов.
13. Cayley A., Phil. Mag., 26, 141 (1845).
О некоторых результатах, связанных с кватернионами.
14. Cayley A., Phil. Mag., 3, 196 (1848).
О приложении кватернионов к теории вращений.
15. Klein F., Math. Ann., 9, 183 (1875).
О бинарных формах от линейных преобразований самих в себя.
16. Klein F., The Icosahedron, Dover, New York, 1956.
17. Cayley A., Math. Ann., 15, 238 (1879).
О соответствии гомографий и вращений.

18. *Klein F., Sommerfeld A.*, Über die Theorie des Kreisels, Vol.1, Teubner, Leipzig, 1897.
19. *Schwinger J.*, Proc. Nath. Acad. Sci. USA, **46**, 570 (1960).
Базисы унитарных операторов.
20. *Cayley A.*, J. reine Angew. Math. **32**, 119 (1846).
О некоторых свойствах левых детерминантов.
21. *Weyl H.*, The Classical Groups, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946. [Имеется перевод: Вейль Г. Классические группы. — М.: ИЛ, 1947.].
22. *Speiser D.* — in: Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, ed. Gürsey F., Gordon and Breach, New York, 1962.
Теория компактных групп Ли и некоторые ее приложения к физике элементарных частиц.
23. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро Э. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
24. *Du Val P.*, Homographies, Quaternions, and Rotations, Oxford Univ. Press, London, 1964.
25. *Cayley A.*, Cambridge Math. J., **3**, 224 (1843).
О движении вращения твердого тела.
26. *De Vries E., Jonker J. E.*, Nucl. Phys, **A105**, 621 (1967).
Замечание об ортогональности и полинте матриц вращений.
27. *Artin E.*, Hamburg Univ. Math. Sem., Abh. **4**, 47 (1926).
Теория кос.
28. *Artin E.*, Ann. Math., **48**, 101 (1947).
Теория кос.
29. *Artin E.*, Ann. Math., **48**, 643 (1947).
Косы и перестановки.
30. *Artin E.*, Amer. Scientist, **38**, 112 (1950).
Теория кос.
31. *Casimir H. B. G.*, Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap, Proc., **34**, 844 (1931).
Вращение жесткого тела в квантовой механике.
32. *Biedenharn L. C. et al.*, Found. of Phys., **2**, 149 (1972).
Кинематическая модель для кварков и адронов.
33. *Bopp F., Haag R.*, Z. Naturforsch., **5a**, 644 (1950).
О существовании спиновой модели.
34. *Hawkins T.*, Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974, p. 561.
Теория матриц в девятнадцатом столетии.
35. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, The Racah — Wigner Algebra in Quantum Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

Обычная трактовка углового момента в квантовой механике

1. Обзор

Замечательно, что в самых первых работах, устанавливавших матричную форму квантовой механики ¹⁾ [1 — 4], были введены операторы углового момента и получены основные следствия квантованного углового момента. Техника, развитая в этой трактовке, удивительно близка и полностью независима от техники, развитой Картаном [6] в его определяющей трактовке (полупростых) групп Ли, прототипом которых является угловой момент ($SU(2)$).

Этот материал стал обычным во всех книгах по квантовой механике. Мы обсудим его конспективно в данной главе. Нашей целью является установление общей основы, базирующейся на том пути, на котором учатся понимать угловой момент. Мы увидим, что обычная трактовка является по существу совершенно строгой и устанавливает фундаментальные результаты, допускающие далеко идущие обобщения (на которые мы укажем в подходящих местах).

2. Определение операторов углового момента

В классической механике угловой момент $\vec{L}$ (точечной) частицы определяется как момент импульса

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (3.1)$$

где $\vec{r}$ определяет положение частицы (относительно фиксированного начала), а $\vec{p}$ — (линейный) импульс частицы. Подобно импульсу, угловой момент является *аддитивной величиной*, и полный угловой момент определяется как сумма

$$\vec{L}_{\text{полн}} \equiv \sum_{\alpha=1}^n \vec{L}_{\alpha} \text{ угловых моментов составляющих.}$$

Естественно распространить это определение на квантовую механику, интерпретируя символы как операторы, т.е. мы переопределяем угловой момент частицы как *оператор* $\vec{L} \rightarrow \vec{L}^{\text{оп}} \equiv \vec{r}^{\text{оп}} \times \vec{p}^{\text{оп}}$, где компоненты оператора положения $\vec{r}^{\text{оп}}$ и оператора импульса $\vec{p}^{\text{оп}}$ подчиняются (гейзенберговым) коммутационным правилам $[p_i^{\text{оп}}, x_j^{\text{оп}}] = -i\hbar\delta_{ij}$.

¹⁾ Работы [1 — 3] в английском переводе приведены в книге ван дер Вардена [5].

18. Klein F., Sommerfeld A., Über die Theorie des Kreisels, Vol.1, Teubner, Leipzig, 1897.
19. Schwinger J., Proc. Nath. Acad. Sci. USA, **46**, 570 (1960).
Базисы унитарных операторов.
20. Cayley A., J. reine Angew. Math. **32**, 119 (1846).
О некоторых свойствах левых детерминантов.
21. Weyl H., The Classical Groups, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946. [Имеется перевод: Вейль Г. Классические группы. — М.: ИЛ, 1947.].
22. Speiser D. — in: Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics, ed. Gürsey F., Gordon and Breach, New York, 1962.
Теория компактных групп Ли и некоторые ее приложения к физике элементарных частиц.
23. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
24. Du Val P., Homographies, Quaternions, and Rotations, Oxford Univ. Press, London, 1964.
25. Cayley A., Cambridge Math. J., **3**, 224 (1843).
О движении вращения твердого тела.
26. De Vries E., Jonker J. E., Nucl. Phys, **A105**, 621 (1967).
Замечание об ортогональности и полноте матриц вращений.
27. Artin E., Hamburg Univ. Math. Sem., Abh. **4**, 47 (1926).
Теория кос.
28. Artin E., Ann. Math., **48**, 101 (1947).
Теория кос.
29. Artin E., Ann. Math., **48**, 643 (1947).
Косы и перестановки.
30. Artin E., Amer. Scientist, **38**, 112 (1950).
Теория кос.
31. Casimir H. B. G., Koninkl. Ned. Akad. Wetenschap, Proc., **34**, 844 (1931).
Вращение жесткого тела в квантовой механике.
32. Biedenharn L. C. et al., Found. of Phys., **2**, 149 (1972).
Кинематическая модель для кварков и адронов.
33. Bopp F., Haag R., Z. Naturforsch., **5a**, 644 (1950).
О существовании спиновой модели.
34. Hawkins T., Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974, p. 561.
Теория матриц в девятнадцатом столетии.
35. Biedenharn L. C., Louck J. D., The Racah — Wigner Algebra in Quantum Theory, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

Обычная трактовка углового момента в квантовой механике

1. Обзор

Замечательно, что в самых первых работах, устанавливавших матричную форму квантовой механики ¹⁾ [1 — 4], были введены операторы углового момента и получены основные следствия квантованного углового момента. Техника, развитая в этой трактовке, удивительно близка и полностью независима от техники, развитой Картаном [6] в его определяющей трактовке (полупростых) групп Ли, прототипом которых является угловой момент ($SU(2)$).

Этот материал стал обычным во всех книгах по квантовой механике. Мы обсудим его конспективно в данной главе. Нашей целью является установление общей основы, базирующейся на том пути, на котором учатся понимать угловой момент. Мы увидим, что обычная трактовка является по существу совершенно строгой и устанавливает фундаментальные результаты, допускающие далеко идущие обобщения (на которые мы укажем в подходящих местах).

2. Определение операторов углового момента

В классической механике угловой момент $\vec{L}$ (точечной) частицы определяется как момент импульса

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}, \quad (3.1)$$

где $\vec{r}$ определяет положение частицы (относительно фиксированного начала), а $\vec{p}$ — (линейный) импульс частицы. Подобно импульсу, угловой момент является *аддитивной величиной*, и полный угловой момент определяется как сумма

$$\vec{L}_{\text{полн}} \equiv \sum_{\alpha=1}^n \vec{L}_{\alpha} \text{ угловых моментов составляющих.}$$

Естественно распространить это определение на квантовую механику, интерпретируя символы как операторы, т.е. мы переопределяем угловой момент частицы как *оператор* $\vec{L} \rightarrow \mathbf{L}^{\text{оп}} \equiv \mathbf{r}^{\text{оп}} \times \mathbf{p}^{\text{оп}}$, где компоненты оператора положения $\mathbf{r}^{\text{оп}}$ и оператора импульса $\mathbf{p}^{\text{оп}}$ подчиняются (гейзенберговым) коммутационным правилам $[p_i^{\text{оп}}, x_j^{\text{оп}}] = -i\hbar\delta_{ij}$.

¹⁾ Работы [1 — 3] в английском переводе приведены в книге ван дер Вардена [5].

Отсюда следует, что операторы углового момента подчиняются фундаментальному коммутационному правилу

$$[L_i, L_j] = i\hbar e_{ijk} L_k, \quad (3.2)$$

где

$$e_{ijk} = \begin{cases} +1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — четная перестановка чисел } (1, 2, 3), \\ -1, & \text{если } (i, j, k) \text{ — нечетная перестановка чисел } (1, 2, 3), \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.3)$$

В векторной форме этот результат выражается так:

$$\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\hbar \mathbf{L}. \quad (3.4)$$

Замечание. Если определим антиэрмитовы операторы $\mathcal{S}_i = -iL_i/\hbar$, то коммутационные соотношения (3.2) принимают вид $[\mathcal{S}_i, \mathcal{S}_j] = e_{ijk} \mathcal{S}_k$. Это отождествляет алгебру, порожденную операторами $\{\mathcal{S}_i\}$ над $\mathbb{R}$, с алгеброй Ли $A_1 = su(2)$ простой группы Ли $SU(2)$.

Обратимся теперь к кинематике (независимость описания движения каждой частицы), чтобы вывести, что операторы для различных частиц α и β коммутируют (опускаем верхний индекс «оп»):

$$[x_i^\alpha, x_j^\beta] = [x_i^\alpha, p_j^\beta] = [p_i^\alpha, p_j^\beta] = 0, \quad \alpha \neq \beta. \quad (3.5)$$

Оператор полного углового момента $\mathbf{L}$, определенный как

$$\mathbf{L} = \sum_{\alpha} \mathbf{L}^{\alpha}, \quad (3.6)$$

так же как угловой момент $\mathbf{L}^{\alpha}$ каждой частицы, удовлетворяет тому же коммутационному правилу (3.4).

Замечания. а) Поразительная особенность коммутационного правила (3.4) состоит в том, что в отличие от классических скобок Пуассона оно *не инвариантно* относительно скалярных изменений ($\mathbf{L} \rightarrow \lambda \mathbf{L}$), и, следовательно, *имеется абсолютный масштаб для угловых моментов*. Обычно за единицу углового момента выбирают $\hbar$ и заменяют $\mathbf{L}$ на $\mathbf{L}/\hbar$. *Ниже все угловые моменты приведены к такому масштабу.*

б) Так как компоненты углового момента не коммутируют, мы должны соответственно иметь (из (3.2)) принцип неопределенности:

$$(\Delta L_i)^2 (\Delta L_j)^2 \geq \frac{1}{4} \langle L_k \rangle^2, \quad i \neq j \neq k. \quad (3.7)$$

Состояния, для которых любая компонента углового момента является «точной» (т.е. в точности известно, что $(\Delta L_i)^2 = 0$), с необходимостью имеют остальные две компоненты «неточными» (случайно распределенными), конечно, за исключением того тривиального случая, когда все компоненты превращаются в нуль. Это ставит интересную концептуальную проблему, так как угловой момент, рассматриваемый как вектор, может никогда «не иметь» точного направления. Такое поведение заметно отличается от поведения импульса и вектора положения, каждый из которых может определять точное направление. (Мы обсудим это ниже в данном разделе в связи с «векторной моделью»; развитие этого предмета см. в работе [102].)

в) Обычно в физике пренебрегают выводом коммутационных правил и просто постулируют, что оператор углового момента $\mathbf{J}$ является наблюдаемой (т.е. эрмитовым оператором), удовлетворяющей правилу

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}. \quad (3.8)$$

Целью этого шага является учет «спинового» углового момента (см. ниже) хотя бы эвристически. Более удовлетворительная процедура [7] состоит в том, чтобы критически исследовать понятие частицы и посредством этого получить теоретико-групповое определение в терминах непримитивности и соответствующей группы движений (группы Пуанкаре или Галилея; см. примечание 3 гл. 1).

3. Мультиплеты углового момента

Предположим теперь, что мы имеем дело с обычной формулировкой квантовой механики, т.е. с гильбертовым пространством над полем комплексных чисел с наблюдаемыми, представленными эрмитовыми линейными операторами. Обозначим векторы гильбертова пространства кет-векторами $|\phi\rangle$, а векторы дуального пространства бра-векторами $\langle\psi|$. Внутреннее произведение обозначается скобками бра-кет $\langle\psi|\phi\rangle \in \mathbb{C}$. Выведем следствия из коммутационных соотношений для $\mathbf{J}$.

Путь, выбранный Картаном [6] и Борном и др. [3], состоит в преобразовании этой задачи в задачу на собственные значения для конечномерной матрицы. Чтобы сделать это, заметим сначала, что оператор

$$\mathbf{J}^2 \equiv J_1^2 + J_2^2 + J_3^2, \quad (3.9)$$

коммутирует с $\mathbf{J}$:

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = 0.$$

Задача на собственные значения состоит в нахождении множества собственных кет-векторов ¹⁾, таких, что $\mathbf{J}^2$ и J_3 диагональны на них:

$$\begin{aligned} \mathbf{J}^2 |J^2', J_3'\rangle &= J^{2'} |J^2', J_3'\rangle, \\ J_3 |J^2', J_3'\rangle &= J_3' |J^2', J_3'\rangle. \end{aligned} \quad (3.10)$$

¹⁾ Обозначение $|J^2', J_3'\rangle$ для собственных кет-векторов не учитывает множество квантовых чисел $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots)$, которые описывают собственные состояния множества A наблюдаемых, которые вместе с $\mathbf{J}^2$ и J_3 составляют полный набор коммутирующих наблюдаемых для физической системы. (Штрих обозначает «собственное значение», т.е. $J^2 - J^{2'} \in \mathbb{R}$.)

Для определения последнего понятия, процитируем Дирака [8]: «Определяем полный набор коммутирующих наблюдаемых как множество наблюдаемых, которые все коммутируют друг с другом и для которых существует только одно одновременное собственное состояние, принадлежащее к любому множеству собственных значений».

В обсуждении абстрактного углового момента мы отбрасываем индексы (α) , так как они ничего не добавляют к нашему пониманию углового момента. Следует также иметь в виду, что в любой физической задаче обозначение $\{|jm\rangle\}$ (см. (3.16)) должно предполагать эти дополнительные квантовые числа (α) .

Здесь J^2 — вещественное неотрицательное число, а J'_3 — вещественное число, что следует из предположения эрмитовости операторов J_i .

Следующий шаг не такой прямой. Определяем *неэрмитовы* операторы (комплексное расширение алгебры Ли)

$$J_{\pm} \equiv J_1 \pm iJ_2, \quad J_+^{\dagger} = J_-, \quad (3.11)$$

где символ $\dagger$ обозначает эрмитово сопряжение. Эти новые операторы удовлетворяют правилам

$$[J^2, J_{\pm}] = 0, \quad [J_3, J_{\pm}] = \pm J_{\pm}, \quad [J_+, J_-] = 2J_3, \quad (3.12)$$

что является прямым следствием соотношения $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}$.

Предположим, что существует собственный кет-вектор, который удовлетворяет соотношениям (3.10), и образуем новые кет-векторы $J_{\pm} |J^2, J'_3\rangle \equiv |\pm\rangle$. Используя коммутационные соотношения (3.12), находим, что кет-вектор $|+\rangle$, если он не равен нулю, имеет собственные значения

$$\begin{aligned} J^2 |+\rangle &= J^2 |+\rangle, \\ J_3 |+\rangle &= (J'_3 + 1) |+\rangle. \end{aligned}$$

Аналогично вектор $|-\rangle$, если он не равен нулю, имеет собственные значения J^2 и $J'_3 - 1$. (Это свойство объясняет названия «*подымающий*» (или «*повышающий*») оператор для J_+ и «*опускающий*» («*понижающий*») оператор для J_- .)

Процесс может быть повторен. При этом порождаются собственные кет-векторы, все принадлежащие собственным значениям J^2 , но принадлежащие собственным значениям J_3 , равным $J'_3 + k$, где k — целое число (положительное, равное нулю или отрицательное).

Процесс повышения должен кончаться. Доказательство. Норма вектора $|+\rangle$ равна

$$\begin{aligned} \langle + | + \rangle &= \langle J^2, J'_3 | J_- J_+ | J^2, J'_3 \rangle \\ &= [J^2 - J'_3(J'_3 + 1)] \langle J^2, J'_3 | J^2, J'_3 \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Ясно, что если J'_3 может повышаться бесконечно, то мы приходим к противоречию с фактом, что норма вектора в гильбертовом пространстве неотрицательна. Следовательно, для некоторого $J'_{3, \text{макс}}$ мы должны иметь $J_+ |J^2, J'_{3, \text{макс}}\rangle = 0$, $|J^2, J'_{3, \text{макс}}\rangle \neq 0$, и, следовательно, $J^2 = J'_{3, \text{макс}}(J'_{3, \text{макс}} + 1)$. ■

Процесс понижения должен кончаться. Доказательство. Норма вектора $|-\rangle$ равна

$$\begin{aligned} \langle - | - \rangle &= \langle J^2, J'_3 | J_+ J_- | J^2, J'_3 \rangle \\ &= [J^2 - J'_3(J'_3 - 1)] \langle J^2, J'_3 | J^2, J'_3 \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Из таких же рассуждений, которые использовались для процесса повышения, следует, что существует $J'_{3, \text{мин}}$, такое, что $J_- |J^2, J'_{3, \text{мин}}\rangle = 0$, $|J^2, J'_{3, \text{мин}}\rangle \neq 0$, и, следовательно, $J^2 = J'_{3, \text{мин}}(J'_{3, \text{мин}} - 1)$. ■

Тот факт, что процесс должен кончаться *сверху* и *снизу*, квантует собственные значения оператора J^2 и оператора J_3 . Чтобы понять это, вспомним, что,

согласно нашему предположению, существует один собственный кет-вектор $|J^{2'}, J'_3\rangle$ с собственными значениями $J^{2'}$ и J'_3 . Пусть повышение кончается через k шагов, а понижение через l шагов, т.е. k — наименьшее неотрицательное целое число, такое, что

$$J_+^k |J^{2'}, J'_3\rangle \neq 0, \quad J_+^{k+1} |J^{2'}, J'_3\rangle = 0,$$

а l — наименьшее неотрицательное целое число, такое, что

$$J_-^l |J^{2'}, J'_3\rangle \neq 0, \quad J_-^{l+1} |J^{2'}, J'_3\rangle = 0.$$

Тогда $J'_{3, \max} = J'_3 + k$, $J'_{3, \min} = J'_3 - l$ и $J^{2'} = (J'_3 + k)(J'_3 + k + 1) = (J'_3 - l)(J'_3 - l - 1)$, откуда следует, что $(k + l + 1)(2J'_3) = (k + l + 1)(l - k)$, т.е.

$$\begin{aligned} J'_3 &= \frac{l - k}{2}, & J^{2'} &= \left(\frac{k + l}{2}\right)\left(\frac{k + l}{2} + 1\right), \\ J'_{3, \max} &= \left(\frac{k + l}{2}\right), & J'_{3, \min} &= -\left(\frac{k + l}{2}\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Таким образом, существование единого ненулевого одновременного собственного кет-вектора $|J^{2'}, J'_3\rangle$ операторов J^2 и J_3 предполагает существование множества ненулевых одновременных собственных кет-векторов:

$$\begin{aligned} J_+^k |J^{2'}, J'_3\rangle, \dots, J_+^l |J^{2'}, J'_3\rangle, |J^{2'}, J'_3\rangle, \\ J_-^l |J^{2'}, J'_3\rangle, \dots, J_-^k |J^{2'}, J'_3\rangle. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Каждый собственный кет-вектор в этом множестве имеет одно и то же собственное значение оператора J^2 :

$$J^{2'} = \left(\frac{k + l}{2}\right)\left(\frac{k + l}{2} + 1\right),$$

тогда как собственными значениями оператора J_3 являются

$$\begin{aligned} J'_{3, \max} &= \frac{k + l}{2}, \dots, \frac{l - k}{2} + 1, \\ \frac{l - k}{2} &= J'_3, \frac{l - k}{2} - 1, \dots, -\frac{k + l}{2} = J'_{3, \min}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Обычный метод перечисления этих значений состоит в том, что вводится $j = (k + l)/2$ и число m , обозначающее любое значение в множестве $\{j, j - 1, \dots, -j\}$. Вводится также обозначение $|jm\rangle$ для одновременных нормированных собственных кет-векторов операторов J^2 и J_3 . Теперь результаты, перечисленные в (3.13) — (3.15), могут быть резюмированы соотношениями

$$\begin{aligned} J^2 |jm\rangle &= j(j + 1) |jm\rangle, \\ J_3 |jm\rangle &= m |jm\rangle, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где j принадлежит ¹⁾ множеству $\{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}$ и для заданного j значения m изменяются от j до $-j$ с шагом, равным 1.

Заметим, что единственный собственный кет-вектор $|J^2, J_3\rangle$, из которого было порождено множество собственных кет-векторов $|jm\rangle$, $m = j, j-1, \dots, -j$, в новом обозначении имеет вид $|j, j-k\rangle$. Однако, доказав существование всего множества $|jm\rangle$, $m = j, j-1, \dots, -j$ (для $|j, j-k\rangle \neq 0$), мы можем теперь породить это множество собственным кет-вектором $|jj\rangle$. Определяющие свойства вектора $|jj\rangle \neq 0$ следующие:

$$\begin{aligned} J^2|jj\rangle &= j(j+1)|jj\rangle, & J_3|jj\rangle &= j|jj\rangle, \\ J_+|jj\rangle &= 0, & J_-^{j+1}|jj\rangle &= 0, \\ J_-^m|jj\rangle &\neq 0, & m &= j, j-1, \dots, -j. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Нормированные собственные кет-векторы $|jm\rangle$ (для нормированных $|jj\rangle$) теперь задаются формулой

$$|jm\rangle = \left[\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} J_-^{j-m}|jj\rangle, \quad (3.18)$$

где нормировочный множитель легко получается из тождества

$$J_+^k J_-^k = \prod_{s=1}^k [J^2 - (J_3 - s)(J_3 - s + 1)]. \quad (3.19)$$

Произвольный фазовый множитель в нормировочном множителе в физической литературе принято выбирать равным +1. (Дальнейшее обсуждение фазы см. в примечании 1.)

Действие операторов J_+ и J_- на общий собственный кет-вектор (3.18) теперь вычисляется легко:

$$\begin{aligned} J_+|jm\rangle &= [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}}|jm+1\rangle, \\ J_-|jm\rangle &= [(j+m)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}}|jm-1\rangle. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Наконец, заметим, что собственные кет-векторы, соответствующие различным значениям j и различным значениям m , в силу свойства эрмитовости операторов J_i ортогональны:

$$\langle j'm'|jm\rangle = \delta_{j'j}\delta_{m'm}. \quad (3.21)$$

Резюме. В гильбертовом пространстве, в котором J_i — эрмитовы операторы, собственные значения оператора J^2 могут иметь только вид $j(j+1)$, где j принадлежит множеству $\{0, 1/2, 1, 3/2, 2, \dots\}$; для каждого j существует $2j+1$ ортонормированных собственных кет-векторов оператора J_3 , имеющих собственные значения $m = j, j-1, \dots, -j$.

¹⁾ Браунштейн [8а] дал необычный вывод собственных значений оператора J^2 , в котором J_3 не играет никакой роли; однако этот вывод требует введения понятия сложения угловых моментов (см. разд. 11).

Важно заметить, что когда имеется конкретное гильбертово пространство, на котором определено множество трех эрмитовых операторов $\{J_i\}$, удовлетворяющих соотношениям $[J_i, J_j] = ie_{ijk}J_k$, рассмотренным выше, то развитая выше теория не предсказывает ни самих значений $j \in \{0, 1/2, 1, 3/2, \dots\}$, ни их кратностей (повторений).

Вопреки простоте вывода этих результатов они имеют фундаментальное значение, и все дальнейшие рассмотрения являются их следствиями.

Замечания. а) Собственное значение j называется **угловым моментом**; собственное значение m называется **z -компонентой углового момента** или иногда **кватовым числом проекции**. В математическом использовании собственное значение m называется **весом**.

На практике j определяют как **максимальное** собственное значение оператора J_z и (или) **минимальное** значение с противоположным знаком.

б) Определение j из квадратичного уравнения $J^2 = j(j+1)$ приводит к второму решению $-j-1$. Этот «отрицательный угловой момент» определяет важную симметрию (отражение) коэффициентов связывания теории углового момента (коэффициенты Вигнера и Рака; см. разд. 12 и 18), детально рассмотренную в работе [102].

в) Собственные значения $\{(j, m)\}$ разделяются на два множества: целые значения и полуцелые значения. *Орбитальный угловой момент* относится к пространственному движению частиц и имеет вид (3.1); орбитальный угловой момент всегда целочисленный (см. разд. 5 гл. 6). *Спиновый угловой момент* относится к внутренним свойствам частицы и может быть как целым, так и полуцелым (половина нечетного числа).

г) Тот факт, что величина $[j(j+1)]^{1/2}$ для вектора углового момента $\mathbf{J}$ не равна значению его максимальной компоненты j , является следствием принципа неопределенности, который запрещает ориентацию $\mathbf{J}$ вдоль заданного направления.

Можно получить более точное соотношение неопределенности в виде

$$(\Delta J_1)^2 + (\Delta J_2)^2 = j(j+1) - m^2, \quad (3.22)$$

которое показывает, что минимальные флуктуации (перпендикулярные оси z) имеют место для $m = \pm j$.

Эти результаты приводят к понятию «пространственного квантования», которое графически представляется «векторной моделью» углового момента [9]. В этой модели угловой момент имеет длину $[j(j+1)]^{1/2}$, и предполагается, что он имеет *дискретные* ориентации $\cos \theta = m/[j(j+1)]^{1/2}$, как показано на рис. 3.1.

Чтобы учесть неопределенность в направлении, вектор рассматривается случайно распределенным в конусе, полученном вращением вокруг оси z .

Хотя векторная модель по необходимости не точна, она дает качественно правильную картину квантованного вектора, которая становится точной в (классическом) пределе $j \gg 1$.

д) Буква m первоначально была выбрана для **магнитного** квантового числа на основе эффекта Зеемана (разд. 3 гл. 7), использовавшегося для истолкования спектров.

е) Фейнман [10] дал изящный путь «объяснения» значения $J^2 = j(j+1)$. Предположим, мы знаем, что собственное значение m оператора J_z лежит меж-

ду $m = j$ и $m = -j$, как в векторной модели. Среднее по всем значениям m эквивалентно среднему по всем пространственным направлениям; следовательно, средние $\langle J_1^2 \rangle$, $\langle J_2^2 \rangle$, $\langle J_3^2 \rangle$ равны между собой.

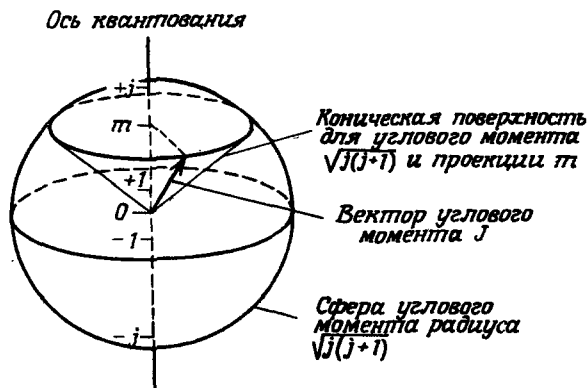


РИС. 3.1.

Отсюда следует, что

$$\langle J^2 \rangle = 3\langle J_3^2 \rangle / (2j + 1) = 3 \sum_{m=-j}^j m^2 / (2j + 1).$$

Используя соотношение $\sum m^2 = j(j+1)(2j+1)/3$, находим $\langle J^2 \rangle = j(j+1)$. Так как J^2 — скаляр (инвариант относительно вращений), то отсюда следует, что $J^2 = j(j+1)$.

Этот метод мультиплетного усреднения может быть использован в более общих задачах; он часто использовался в спектроскопии до того, как был развит более формальный аппарат углового момента [11, 12].

4. Матрицы углового момента

В предыдущем разделе мы нашли, что угловой момент $\mathbf{J}$ квантуется и что величина $\langle J^2 \rangle^{1/2} = \langle jm | J^2 | jm \rangle^{1/2} = [j(j+1)]^{1/2}$ имеет собственные значения $j = 0, 1/2, 1, \dots$; для каждого значения j имеется $2j+1$ ориентаций оператора орбитального углового момента $\mathbf{J}$, определяемых собственными значениями $m = j, j-1, \dots, -j+1, -j$ оператора J_3 .

В соответствии с этим для каждого j имеется $2j+1$ собственных кет-векторов, обозначаемых через $|jm\rangle$, $m = j, \dots, -j$.

Общий матричный элемент оператора углового момента $\mathbf{J}$ задается соотношениями (3.16) и (3.20):

$$\begin{aligned}\langle j'm'|J_{\pm}|jm\rangle &= [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{\frac{1}{2}}\delta_{j'j}\delta_{m',m\pm 1}, \\ \langle j'm'|J_3|jm\rangle &= m\delta_{j'j}\delta_{m'm}.\end{aligned}\quad (3.23)$$

Используя эти матричные элементы, можно выписать соответствующие матрицы $J_i^{(j)}$ (представляющие J_j). Для первых нескольких случаев обозначения строк и столбцов следующие: столбцы обозначают числами $m = j, j-1, \dots, -j$, читаемыми слева направо, а строки — числами $m = j, j-1, \dots, -j$, читаемыми сверху вниз; имеем

$$\begin{aligned}j=0: \quad J^{(0)} &= 0; \\ j=\frac{1}{2}: \quad J_1^{(\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{(\frac{1}{2})} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \\ J_3^{(\frac{1}{2})} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \\ j=1: \quad J_1^{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_2^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, \\ J_3^{(1)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}\quad (3.24)$$

(Матрицы размерности 2×2 представляют собой матрицы Паули σ , т.е. $J^{1/2} = \sigma/2$.)

Матрицы углового момента (3.24) удовлетворяют характеристическим уравнениям $(J_i^{1/2})^2 = \mathbb{1}^{1/2}/4$, $(J_i^{(1)})^3 = J_i^{(1)}$, и в общем случае

$$\prod_{m=-j}^j (J_i^{(j)} - m\mathbb{1}^{(j)}) = 0, \quad (3.25)$$

где $\mathbb{1}^{(j)}$ обозначает единичную матрицу размерности $2j+1$.

Замечание. Отметим, что конечномерное векторное пространство (размерности $2j+1$) всех комплексных матриц-столбцов z длины $2j+1$, снабженных скалярным произведением $z^\dagger z$, является гильбертовым пространством, на котором операторы J_i : $z \rightarrow J_i^{(j)}z$ эрмитовы и удовлетворяют соотношениям $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$. В этом, скорее, тривиальном смысле всегда существуют гильбертовы пространства и эрмитовы операторы J_i , которые реализуют каждое значение $0, 1/2, 1, \dots$ для j , задаваемое абстрактной теорией углового момента, развитой выше.

Из этих примеров ясно, что (абстрактный эрмитов) оператор углового момента $\mathbf{J}$, удовлетворяющий (определяющему) соотношению $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}$, может

быть представлен его действием на собственные кет-векторы любой физической системы в блочном виде:

$$J = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{|c|c|} \hline J^{(0)} & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \\ \hline \begin{array}{|c|c|} \hline & J^{(0)} \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline J^{(\frac{1}{2})} & \\ \hline \end{array} & \\ \hline \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline & J^{(\frac{1}{2})} \\ \hline \end{array} & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline J^{(1)} & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|} \hline \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{|c|c|} \hline & J^{(1)} \\ \hline \end{array} \quad \dots \quad (3.26)$$

В общем блочная матрица $J^{(j)}$ повторяется с кратностью n_{2j+1} , своей для каждого углового момента j . (Мы произвольно упорядочили блоки относительно размера.)

В литературе не всегда ясно различие между оператором J и его реализацией одним или большим числом блоков. Оператор орбитального углового момента $\hbar \mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ ограничен блоками, имеющими целочисленные j , т.е. $n_2 = n_4 = \dots = 0$. Спинный угловой момент может иметь блоки с любым j — целым или полуцелым.

5. Матрицы вращений (общие свойства)

В гл. 2 мы нашли два унитарных матричных представления группы вращений $[SU(2)]$, а именно множеством 2×2 -матриц:

$$\{e^{-i\psi(\hat{n} \cdot \sigma)/2}; \hat{n} \cdot \hat{n} = 1, 0 \leq \psi < 2\pi\} \quad (3.27)$$

и множеством 3×3 -матриц:

$$\{e^{i\psi N}; 0 \leq \psi < 2\pi\}, \quad (3.28)$$

где N — антисимметричная 3×3 -матрица, определенная в (2.6).

Матрица N унитарно эквивалентна

$$-i\hat{n} \cdot \mathbf{J}^{(1)} \equiv -i(n_1 J_1^{(1)} + n_2 J_2^{(2)} + n_3 J_3^{(3)}),$$

и явное преобразование эквивалентности дается формулой

$$A^\dagger N A = -i\hat{n} \cdot \mathbf{J}^{(1)}, \quad (3.29)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 0 & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

В этом результате A — матрица, преобразующая (x_1, x_2, x_3) в сферический базис

$$\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + ix_2), x_3, \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - ix_2) \right].$$

Преобразуя $e^{\psi N}$ с помощью A , мы можем таким образом перевести (3.28) в форму, аналогичную (3.27):

$$\{e^{-i\psi\hat{n} \cdot \mathbf{J}^{(1)}}: \hat{n} \cdot \hat{n} = 1, 0 \leq \psi < 2\pi\}. \quad (3.31)$$

Унитарные 2×2 - и 3×3 -матрицы, заданные формулами (3.27) и (3.31), являются примерами унитарных $(2j+1) \times (2j+1)$ -матриц, определенных формулой

$$D^j(\psi, \hat{n}) \equiv e^{-i\psi\hat{n} \cdot \mathbf{J}^{(j)}}, \quad 0 \leq \psi < 2\pi. \quad (3.32)$$

В соответствии с этим мы приходим к изучению смысла этих матриц для общего $j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$. Отметим, что не существует проблемы относительно существования этих матриц (если использовать степенные ряды для экспонент), так как матрицы углового момента $J^{(j)}$ конечны.

В принципе матрицы $D^j(\psi, \hat{n})$ полностью определены формулой (3.32), если учесть наличие матриц углового момента; мы используем характеристическое уравнение для $\hat{n} \cdot \mathbf{J}^{(j)}$ (см. (3.25)), чтобы свести экспоненциальное разложение в конечную сумму. Это практично для $j = 1/2$ и 1 , но становится трудным для больших j (тем труднее, чем больше j). (Методы явного вычисления мы рассматриваем в разд. 6.)

Далее отметим, что унитарная матрица (3.32) является матричным представлением на пространстве $\mathcal{H}_j$ с базисом $\{|jm\rangle, m = j, j-1, \dots, -j\}$ унитарного оператора, определенного формулой

$$\mathcal{U}(\psi, \hat{n}) \equiv e^{-i\psi\hat{n} \cdot \mathbf{J}}, \quad \hat{n} \cdot \mathbf{J} \equiv n_1 J_1 + n_2 J_2 + n_3 J_3. \quad (3.33)$$

Нетрудно взять экспоненту от оператора углового момента $\mathbf{J}$, так как его действие всегда разбивается в прямую сумму действий на подпространствах типа $\mathcal{H}_j$.

Действие $\mathcal{U}(\psi, \hat{n})$ на заданный собственный кет-вектор $|jm\rangle$ задается формулой

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\psi, \hat{n}): |jm\rangle &\rightarrow |jm'\rangle \equiv \mathcal{U}(\psi, \hat{n})|jm\rangle \\ &= \sum_{m'} \langle jm' | \mathcal{U}(\psi, \hat{n}) | jm \rangle |jm'\rangle \\ &= \sum_{m'} D_{m'm}^j(\psi, \hat{n}) |jm'\rangle, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где теперь мы получаем элементы матрицы $D^j(\psi, \hat{n})$ в виде

$$D_{m'm}^j(\psi, \hat{n}) = \langle jm' | e^{-i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{J}} | jm \rangle. \quad (3.35)$$

Чтобы интерпретировать физический смысл унитарных операторов $\mathcal{U}(\psi, \hat{n})$, рассмотрим преобразование углового момента $\mathbf{J}$, соответствующее унитарному изменению базиса, заданному соотношением (3.34). При действии $\mathcal{U}(\psi, \hat{n})$ имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\psi, \hat{n}): J_i |jm\rangle &\rightarrow (J_i |jm\rangle)' = \mathcal{U}(\psi, \hat{n})(J_i |jm\rangle) \\ &= \mathcal{U}(\psi, \hat{n}) J_i \mathcal{U}^{-1}(\psi, \hat{n}) |jm\rangle'. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразование J_i имеет вид

$$\mathcal{U}(\psi, \hat{n}): J_i \rightarrow J_i' = \mathcal{U}(\psi, \hat{n}) J_i \mathcal{U}^{-1}(\psi, \hat{n}). \quad (3.36)$$

Для вычисления преобразования $\mathbf{J}$ снова используем разложение в ряд и переставляем слагаемые (что имеем право делать, так как ряд абсолютно сходится), чтобы получить формулу Бейкера — Кэмпбела — Хаусдорфа

$$\mathcal{U}(\psi, \hat{n}) \mathbf{J} \mathcal{U}^{-1}(\psi, \hat{n}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [-i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{J}, \mathbf{J}]_{(k)}, \quad (3.37)$$

где кратный коммутатор обозначен через

$$\begin{aligned} [A, B]_{(k)} &\equiv [A, [A, B]_{(k-1)}], \\ [A, B]_{(1)} &\equiv [A, B] = AB - BA, \\ [A, B]_{(0)} &\equiv B. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Заметим теперь важную техническую особенность: *Вычисление кратных коммутаторов зависит только от свойств коммутирования операторов J_i и не зависит от того, какое подпространство $\mathcal{H}_j$ было выбрано для вычисления действия каждого J_i в (3.37).*

Из коммутационных соотношений для $\mathbf{J}$ следует

$$[\mathbf{a} \cdot \mathbf{J}, \mathbf{J}] = -i\mathbf{a} \times \mathbf{J}, \quad (3.39)$$

где $\mathbf{a}$ — вектор, который коммутирует с J_i . Таким образом, для преобразования мы находим

$$\begin{aligned} \mathbf{J}' &= e^{-i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{J}} \mathbf{J} e^{i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{J}} \\ &= \mathbf{J} \cos \psi + \hat{n}(\hat{n} \cdot \mathbf{J})(1 - \cos \psi) - (\hat{n} \times \mathbf{J}) \sin \psi. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Этот результат дает явное вычисление преобразования (3.36).

Замечания. а) Если мы теперь сравним преобразование векторного оператора $\mathbf{J}$ в (3.40) с вращением вектора, заданным соотношением (2.1), то увидим, что два результата отличаются знаком при выражении с $\sin \psi$ (положим $\phi = \psi$ в (2.1)). Эта разница в знаке не является ошибкой, а является следствием важного различия в значении двух преобразований.

В (2.1) мы активно вращали вектор $\vec{x}$, т.е. мы фиксировали координатную систему, а двигали в новое положение вектор. Записывая вектор $\vec{x}$ с помощью координат (x_1, x_2, x_3) , мы имеем $\vec{x} = \sum x_i \hat{e}_i$, где $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ — единичные векторы фиксированной правосторонней координатной системы. Преобразование $\vec{x} \rightarrow \vec{x}'$

осуществляется по формуле

$$x_i \rightarrow \sum_j R_{ij}(\psi, \hat{n}) x_j \equiv x'_i, \quad (3.41)$$

так что вращением координаты (x_1, x_2, x_3) переводятся в (x'_1, x'_2, x'_3) .

В противоположность этому преобразование векторного оператора $\mathbf{J} = (J_1, J_2, J_3)$, заданное соотношением (3.40), имеет вид

$$J_i \rightarrow \sum_j R_{ji}(\psi, \hat{n}) J_j \equiv J'_i = \sum_j R_{ij}(\psi, -\hat{n}) J_j, \quad (3.42)$$

и это преобразование было индуцировано из преобразования кет-векторов $|jm\rangle \rightarrow |jm'\rangle$, заданного формулой (3.34). Последнее преобразование, которое берется стандартным во всей этой монографии (см. замечание «г» в конце разд. 14, где дано дальнейшее обсуждение), изменяет кет-векторы $\{|jm\rangle\}$ и является дуальным к преобразованию, изменяющему бра-векторы $\{\langle x_1, x_2, x_3|\}$, обозначенные координатами.

Таким образом, мы видим, что в (2.1) координаты $\{(x_1, x_2, x_3)\}$ изменяются при вращении, тогда как в (3.40) изменяются кет-векторы $\{|jm\rangle\}$. Эти две возможные интерпретации вращения являются дуальными друг к другу, и эта дуальность приводит к тому факту, что в (3.41) появляется $(\psi, \hat{n})$, а в (3.42) появляется $(\psi, -\hat{n})$.

б) Результат, заданный соотношением (3.40), имеет другой интересный аспект: это соотношение является прототипом общего определения тензорного оператора с помощью его трансформационных свойств. Этот аспект более полно развивается в разд. 14.

в) В силу интерпретации оператора $\mathcal{U}(\psi, \hat{n})$ как соответствующего вращению физической системы в физике его обычно называют *оператором вращения*. Матричное представление $D^j(\psi, \hat{n})$ соответственно называется *матрицей вращения*.

Групповые свойства матриц вращений. Мы уже заметили, что множества матриц вращений, соответствующих $j = 1/2$ и $j = 1$, являются унитарными матричными представлениями группы $SU(2)$.

Докажем это свойство для произвольных $j \in \{0, 1/2, 1, \dots\}$.

Мы должны показать, что унитарные $(2j+1) \times (2j+1)$ -матрицы (3.32) умножаются таким же образом, как и унитарные 2×2 -матрицы $U(\psi, \hat{n}) = \exp(-i\psi \hat{n} \times \sigma/2)$, т.е. что из

$$U(\psi', \hat{n}') U(\psi, \hat{n}) = U(\psi'', \hat{n}'') \quad (3.43)$$

следует

$$D^j(\psi', \hat{n}') D^j(\psi, \hat{n}) = D^j(\psi'', \hat{n}'') \quad (3.44)$$

для любого j .

Доказательство. Прямое доказательство этого результата, использующее определение (3.32), довольно громоздко и трудно. Проведем доказательство обходным путем, используя преобразование подобия (3.40).

Пусть $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ обозначает вектор, который коммутирует с $\mathbf{J}$. Тогда из (3.40) и (2.1) следует

$$\mathcal{U}(\psi, \hat{n})(\mathbf{a} \cdot \mathbf{J})\mathcal{U}^{-1}(\psi, \hat{n}) = \mathbf{b} \cdot \mathbf{J}, \quad (3.45)$$

где использовано матричное обозначение

$$\mathbf{b} = R(\psi, \hat{n})\mathbf{a}. \quad (3.46)$$

Отсюда сразу следует, что операторное тождество

$$\mathcal{U}(\psi, \hat{n})\mathcal{U}(\phi, \hat{a})\mathcal{U}^{-1}(\psi, \hat{n}) = \mathcal{U}(\psi, \hat{b}) \quad (3.47)$$

справедливо на каждом подпространстве $\mathcal{H}_j$. (Заметим, что этот результат обобщает соотношение для класса углов (гл. 2) для любого j .)

Преобразование этого результата с помощью $\mathcal{U}(\psi', \hat{n}')$ приводит к

$$\mathcal{U}(\psi', \hat{n}')\mathcal{U}(\psi, \hat{n})\mathcal{U}(\phi, \hat{a})[\mathcal{U}(\psi', \hat{n}')\mathcal{U}(\psi, \hat{n})]^{-1} = \mathcal{U}(\phi, \hat{c}), \quad (3.48)$$

где

$$\mathbf{c} = R(\psi', \hat{n}')\mathbf{b} = R(\psi', \hat{n}')R(\psi, \hat{n})\mathbf{a} = R(\psi'', \hat{n}'')\mathbf{a}, \quad (3.49)$$

причем последний шаг следует из того факта (доказанного в гл. 2), что ортогональные 3×3 -матрицы умножаются так же, как и соответствующие унитарные 2×2 -матрицы.

Наконец, преобразовываем соотношение (3.48) с помощью $\mathcal{U}^{-1}(\phi', \hat{n}'')$:

$$[\mathcal{U}^{-1}(\psi'', \hat{n}'')\mathcal{U}(\psi', \hat{n}')\mathcal{U}(\psi, \hat{n})]\mathcal{U}(\phi, \hat{a})[\mathcal{U}^{-1}(\psi'', \hat{n}'')\mathcal{U}(\psi', \hat{n}')\mathcal{U}(\psi, \hat{n})]^{-1} = \mathcal{U}(\phi, \hat{a}).$$

Таким образом, преобразование с помощью

$$\mathcal{U}^{-1}(\psi'', \hat{n}'')\mathcal{U}(\psi', \hat{n}')\mathcal{U}(\psi, \hat{n}) \quad (3.50)$$

оставляет произвольный унитарный оператор $\mathcal{U}(\phi, \hat{a})$ инвариантным. Так как операторы $\{J_i\}$ не оставляют векторы пространства $\mathcal{H}_j$ инвариантными, откуда следует, что оператор (3.50) кратен единичному оператору с некоторым множителем α . Так как детерминант матрицы $D^j(\psi, \hat{n})$ равен 1, откуда следует также, что $\alpha = 1$. Таким образом, мы доказали, что результат

$$\mathcal{U}(\psi', \hat{n}')\mathcal{U}(\psi, \hat{n}) = \mathcal{U}(\psi'', \hat{n}'') \quad (3.51)$$

следует из соответствующего соотношения (3.43) для унитарных 2×2 -матриц.

Свойство умножения (3.44) матриц $D^j(\psi, \hat{n})$ теперь следует из определения (3.35).

Предыдущий метод доказательства группового свойства может также быть применен к параметризации вращений углами Эйлера. Так как эта параметризация распространена в приложениях, то введем соответствующие обозначения.

Унитарный оператор вращения определяется формулой

$$\mathcal{U}(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_3}e^{-i\beta J_2}e^{-i\gamma J_3} \quad (3.52)$$

(область определения параметров задается формулой (2.41)), и соответствующие матрицы вращений задаются как

$$D^j(\alpha\beta\gamma) = e^{-i\alpha J_3^j}e^{-i\beta J_2^j}e^{-i\gamma J_3^j} \quad (3.53)$$

с матричными элементами

$$D^j_{m',m}(\alpha\beta\gamma) = \langle jm' | \mathcal{U}(\alpha\beta\gamma) | jm \rangle. \quad (3.54)$$

Доказательство того, что свойство умножения вращений (см. (2.40))

$$U(\alpha'\beta'\gamma')U(\alpha\beta\gamma) = U(\alpha''\beta''\gamma'') \quad (3.55)$$

предполагает общее свойство умножения для операторов

$$\mathcal{U}(\alpha' \beta' \gamma') \mathcal{U}(\alpha \beta \gamma) = \mathcal{U}(\alpha'' \beta'' \gamma'') \quad (3.56)$$

повторяет предыдущее доказательство, данное для параметризации $(\psi, \hat{n})$. Свойство умножения для матриц (3.53) теперь следует из (3.54):

$$D^j(\alpha' \beta' \gamma') D^j(\alpha \beta \gamma) = D^j(\alpha'' \beta'' \gamma''). \quad (3.57)$$

Существенный элемент в доказательстве законов умножения (3.44) и (3.57) для матриц состоит в демонстрации законов умножения (3.51) и (3.56) для операторов. Для параметров $(\psi, \hat{n})$ и $(\alpha \beta \gamma)$ мы можем доказать желаемые операторные соотношения, используя прямо свойства экспоненциальных операторов типа $\exp(-i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{J})$ и известное действие оператора J_i на пространство $\mathcal{H}_j$. Таким образом, результаты этого раздела независимы от конкретной реализации пространства $\mathcal{H}_j$.

В последующих разделах мы рассмотрим различные явные гильбертовы пространства $\mathcal{H}_j$, на которых реализуются стандартные действия операторов углового момента. В этих явных реализациях подтверждение того, что соответствие $U \rightarrow \mathcal{U}$ предполагает соотношение $\mathcal{U}' \mathcal{U} = \mathcal{U}''$ для $U' U = U''$, является элементарным результатом, следующим непосредственно из определения $\mathcal{U}$ как отображения на пространстве $\mathcal{H}_j$, причем эта проверка прямо не использует экспоненциальных операторов. Эти методы (см. разд. 4 гл. 5) не зависят от параметризации U и прямо порождают матрицы вращений, которые обозначаются через

$$D^j(U) \equiv D^j \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}, \quad (3.58)$$

где удобно ввести обозначение $f(U)$ для значений функции f , определенной на четырех элементах u_{ij} матрицы U .

Далее мы обращаемся к описанию явного вида матриц вращений с помощью более общих параметризаций вращений.

6. Матрицы вращений (явный вид)

Матрицы вращений в терминах углов Эйлера. Соотношение (3.53) (эквивалентное (3.54)) дает полное выражение для матриц вращений. Используя тот факт, что матрица $J_3^{(j)}$ диагональна, находим

$$D_{m'm}^j(\alpha \beta \gamma) = e^{-im'\alpha} d_{m'm}^j(\beta) e^{-im\gamma}, \quad (3.59)$$

где $d_{m'm}^j(\beta)$ определяется формулой

$$d_{m'm}^j(\beta) \equiv \langle jm' | e^{-i\beta J_2} | jm \rangle; \quad (3.60)$$

т.е.

$$d^j(\beta) = e^{-i\beta J_2^j}. \quad (3.61)$$

Используя характеристическое уравнение (3.25) и разложение экспоненты в ряд, прямо получаем $d^j(\beta)$ для $j = 1/2$ и 1 ¹⁾

$$d^{1/2}(\beta) = \begin{pmatrix} \cos \frac{\beta}{2} & -\sin \frac{\beta}{2} \\ \sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{pmatrix},$$

$$d^1(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1 + \cos \beta}{2} & \frac{-\sin \beta}{\sqrt{2}} & \frac{1 - \cos \beta}{2} \\ \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \cos \beta & \frac{-\sin \beta}{\sqrt{2}} \\ \frac{1 - \cos \beta}{2} & \frac{\sin \beta}{\sqrt{2}} & \frac{1 + \cos \beta}{2} \end{pmatrix} \quad (3.62)$$

Матрицы вращений для $j = 1/2$ и 1 являются конечно первоначальной унитарной 2×2 -матрицей $U(\alpha\beta\gamma)$ (формула (2.40)) и первоначальной ортогональной 3×3 -матрицей $R(\alpha\beta\gamma)$ (формула (2.37)) соответственно, причем последняя преобразована с помощью матрицы A из (3.30):

$$\begin{aligned} D^{1/2}(\alpha\beta\gamma) &= U(\alpha\beta\gamma), \\ D^1(\alpha\beta\gamma) &= A^\dagger R(\alpha\beta\gamma) A. \end{aligned} \quad (3.63)$$

Имеется несколько методов получения элементов $d_{m'm}^j(\beta)$ матрицы $d^j(\beta)$ для общего j . Используются, например, следующие методы: а) дифференциальные уравнения, б) вращение J_2 в J_3 , в) рекурсивные соотношения, г) характеристическое уравнение, использующее основные идемпотенты оператора $J_2^{(j)}$, и д) техника бозонных операторов.

Так как подход с помощью дифференциальных уравнений является наиболее общим, он развивается в некоторых деталях в разд. 8. Методы «б» и «в» рассматриваются ниже, а основы метода «г» даны в примечании 2.

Наиболее изящный метод использует технику бозонных операторов; эта техника имеет достаточно общий интерес, так что мы развиваем эту тему в деталях в гл. 5. Полезно воспользоваться здесь существенными результатами для $D^j(U)$ (с целью обсуждения структуры результатов) и отложить сам вывод до этой главы.

Пусть ζ обозначает параметризацию $U(\zeta)$ матрицы U . Тогда D -матрица в параметризации ζ имеет вид

$$D^j(\zeta) \equiv D^j(U(\zeta)). \quad (3.64)$$

¹⁾ Обозначение строк и столбцов следует стандартному соглашению, рассмотренному выше в (3.24).

Используя параметризацию углами Эйлера, заданную матрицей (2.40) для $U(\alpha\beta\gamma)$, получаем [13]

$$d_{m'm}^j(\beta) = [(j+m')!(j-m')!(j+m)!(j-m)!]^{\frac{1}{2}} \times \sum_s \frac{(-1)^{m'-m+s} \left(\cos \frac{\beta}{2}\right)^{2j+m-m'-2s} \left(\sin \frac{\beta}{2}\right)^{m'-m+2s}}{(j+m-s)!s!(m'-m+s)!(j-m'-s)!}, \quad (3.65)$$

где суммирование по s распространяется на все целочисленные значения, такие, что факториалы в знаменателе неотрицательны.

Соотношение (3.65) выражает $d_{m'm}^j(\beta)$ как полином от $\cos(\beta/2)$ и $\sin(\beta/2)$. Однако путем факторизации наивысших возможных (положительных) степеней $\cos(\beta/2)$ и $\sin(\beta/2)$ находим, что при суммировании в действительности остается полином от квадратов $\cos^2(\beta/2)$ и $\sin^2(\beta/2)$. Таким образом, выразив это явно в виде

$$\frac{1+x}{2} = \cos^2 \frac{\beta}{2}, \quad \frac{1-x}{2} = \sin^2 \frac{\beta}{2} \quad (3.66)$$

(что дает $x = \cos \beta$), получим соотношение (3.65) в виде полинома от x , умноженного на степени $\cos(\beta/2)$ и $\sin(\beta/2)$. Эти полиномы являются *полиномами Якоби*, к обсуждению которых мы переходим, уделяя особое внимание тонкостям, связанным с этим отождествлением.

Полиномы Якоби. Полиномы Якоби $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ являются полиномами степени n , определенными [14, 15] формулой

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = \sum_s \binom{n+\alpha}{s} \binom{n+\beta}{n-s} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^s, \quad (3.67)$$

где (α, β) — параметры в этом стандартном обозначении ¹⁾, n — неотрицательное целое число и $\binom{z}{a}$ определяется для произвольного комплексного z как

$$\binom{z}{a} = \begin{cases} \frac{z(z-1) \cdots (z-a+1)}{a!} & \text{для } a = 1, 2, \dots \\ 1 & \text{для } a = 0 \\ 0 & \text{для } a = -1, -2, \dots \end{cases} \quad (3.68)$$

В нашем использовании этих полиномов

$$n, n+\alpha, n+\beta, n+\alpha+\beta \quad (3.69)$$

всегда являются неотрицательными целыми числами, и мы можем переписать определение (3.67) в виде

¹⁾ Предостерегаем читателя от смешивания двух стандартных обозначений (α, β) — углов Эйлера в (2.40) и параметров в (3.67).

$$P_n^{(\alpha, \beta)}(x) = (n + \alpha)!(n + \beta)! \sum_s \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^{n-s} \left(\frac{x+1}{2}\right)^s}{s!(n + \alpha - s)!(\beta + s)!(n - s)!}, \quad (3.70)$$

где суммирование по s распространяется на все целочисленные значения, для которых аргументы в факториалах неотрицательны.

Если α или β — отрицательное целое число или оба они отрицательны, то оказывается, что полиномы (3.70), подчиненные ограничениям на параметры (3.69), просто связаны с полиномами Якоби, имеющими только неотрицательные параметры ¹⁾ (α' , β'). Мы отмечаем эти формулы явно, потому что *то же явление возникает в разложении коэффициента Вигнера (или коэффициента Рака) в аналогичные формы, содержащие множители с квадратным корнем и полином*. Эта точка зрения, касающаяся коэффициентов Вигнера и Рака, развивается в работе [102].

Следующие три формулы, связывающие полиномы Якоби, имеющие отрицательные параметры (α , β), с полиномами Якоби, имеющими положительные параметры, могут быть проверены непосредственно исходя из определения (3.70):

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(n + \alpha)!(n + \beta)!}{n!(n + \alpha + \beta)!} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\beta} P_{n+\beta}^{(\alpha, -\beta)}(x), \\ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \frac{(n + \alpha)!(n + \beta)!}{n!(n + \alpha + \beta)!} \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\alpha} P_{n+\alpha}^{(-\alpha, \beta)}(x), \\ P_n^{(\alpha, \beta)}(x) &= \left(\frac{x-1}{2}\right)^{-\alpha} \left(\frac{x+1}{2}\right)^{-\beta} P_{n+\alpha+\beta}^{(-\alpha, -\beta)}(x). \end{aligned} \quad (3.71)$$

Матрицы вращений и полиномы Якоби. Связь функций $d_{m'm}^j(\beta)$ с полиномами Якоби следует непосредственно из определения (3.70) после умножения на необходимые множители и сравнения с определением (3.65):

$$\begin{aligned} d_{m'm}^j(\beta) &= \left[\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j+m')!(j-m')!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^{m-m'} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{m'+m} \\ &\quad \times P_{j-m}^{(m-m', m+m')}(\cos \beta). \end{aligned} \quad (3.72)$$

¹⁾ В математических рассуждениях [15] свойств ортогональности полиномов Якоби предполагается, что $\alpha > -1$, $\beta > -1$, для того чтобы весовая функция $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ не имела отрицательных степеней и была интегрируемой. Такие ограничения не представляют прямого интереса для приложений группы вращений в физике по двум причинам: а) любые свойства ортогональности следуют из самих матриц вращений и б) более общие, отрицательные, индексы, которые допускаются формулой (3.69), естественно возникают в физических приложениях.

Этот результат справедлив для всей области изменения квантовых чисел проекции: $-j \leq m \leq j$, $-j \leq m' \leq j$. Отрицательные степени синуса и косинуса, умноженные на полином Якоби, всегда аннулируются множителями, появляющимися из полиномов вследствие свойства (3.71). Полезно сделать эти полиномиальные формы полностью явными, так как такая же проблема, как упомянуто выше, возникает в контексте коэффициентов Вигнера. Эти результаты даны ниже.

Пусть k — наименьшее из четырех (неотрицательных) целых чисел:

$$k \equiv \min(j + m, j - m, j + m', j - m'). \quad (3.73)$$

Определяем (неотрицательные) параметры μ , ν и λ в соответствии с четырьмя возможными случаями для k с помощью следующей таблицы:

k	μ	ν	λ
$j + m$	$m' - m$	$-m' - m$	$m' - m$
$j - m$	$m - m'$	$m' + m$	0
$j + m'$	$m - m'$	$-m' - m$	0
$j - m'$	$m' - m$	$m' + m$	$m' - m$

В терминах этих неотрицательных параметров следующее выражение для функции вращения всегда имеет полиномиальную форму:

$$d_{m'm}^j(\beta) = (-1)^\lambda \left[\frac{k!(2j-k)!}{(k+\mu)!(k+\nu)!} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right)^\mu \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^\nu P_k^{(\mu, \nu)}(\cos \beta). \quad (3.74)$$

Определение $d^j(\beta)$ посредством вращения J_3 в J_2 . Вращение собственных кет-векторов

$$|jm\rangle \rightarrow |jm\rangle' = \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2}, -\hat{e}_1\right)|jm\rangle \quad (3.75)$$

порождает вращение углового момента $\vec{J} = J_1\hat{e}_1 + J_2\hat{e}_2 + J_3\hat{e}_3$ на $\pi/2$ вокруг $\hat{e}_1$, т.е. $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{J}' = J_1\hat{e}_1 - J_3\hat{e}_2 + J_2\hat{e}_3$. В соответствии с этим преобразование компоненты J_3 углового момента задается (используя (3.36)) формулой

$$J_2 = \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2}, -\hat{e}_1\right) J_3 \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2}, \hat{e}_1\right). \quad (3.76)$$

Следовательно, мы также имеем

$$e^{-i\beta J_2} = \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2}, -\hat{e}_1\right) e^{-i\beta J_3} \mathcal{U}\left(\frac{\pi}{2}, \hat{e}_1\right). \quad (3.77)$$

Беря матричные элементы от этого результата, получаем выражение для элементов $d^j(\beta)$ в терминах экспонент:

$$d_{m'm}^j(\beta) = \sum_{\mu} D_{\mu m'}^{j*}\left(\frac{\pi}{2}, \hat{e}_1\right) D_{\mu m}^j\left(\frac{\pi}{2}, \hat{e}_1\right) e^{-i\mu\beta}, \quad (3.78)$$

где мы использовали свойство унитарности D -матриц. Числовой коэффициент $D_{m'm}^j(\pi/2, \hat{e}_1)$ дается формулой ¹⁾

$$D_{m'm}^j\left(\frac{\pi}{2}, \hat{e}_1\right) = \frac{(-i)^{m'-m}}{2^j} [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{\frac{1}{2}} \times \sum_s \frac{(-1)^s}{(j+m-s)!(j-m'-s)!(m'-m+s)!s!}. \quad (3.79)$$

Простые соотношения для $d_{m'm}^j(\beta)$. Множество полезных соотношений для матричных элементов $d^j(\beta)$ может быть доказано путем прямой проверки из определения (3.65) [16, 17]. Для полноты приводим несколько таких соотношений (исчерпывающее рассмотрение соотношений для элементов самой матрицы вращений дано в гл. 5, приложение В):

$$\begin{aligned} d_{m'm}^j(\beta) &= d_{mm'}^j(-\beta), \\ d_{m'm}^j(-\beta) &= (-1)^{m'-m} d_{mm'}^j(\beta), \\ d_{m'm}^j(\beta) &= d_{-m, -m'}^j(\beta). \end{aligned} \quad (3.80)$$

Комбинируя первое из этих соотношений с вторым, получаем

$$d_{m'm}^j(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{mm'}^j(\beta). \quad (3.81)$$

Комбинируя это соотношение с третьим соотношением в (3.80), имеем

$$d_{m'm}^j(\beta) = (-1)^{m'-m} d_{-m, -m'}^j(\beta). \quad (3.82)$$

Рекурсивные соотношения и их источник. Кроме группового правила умножения, рассмотренного в последнем разделе, матрицы вращений также удовлетворяют ряду правил (соотношений), называемых *правилами связывания*, которые следуют из изучения *прямого произведения* двух матриц вращений. Эти соотношения включают *коэффициенты Вигнера* группы вращений; они детально рассматриваются в разд. 13.

Не всегда понимают, что эти правила связывания являются источником большинства так называемых рекурсивных соотношений для $d_{m'm}^j(\beta)$. Как можно было бы ожидать, поскольку существует обширная математическая литература о свойствах полиномов Якоби, эти соотношения могут быть доказаны путем использования классических математических формул, без прямого обращения к группам и коэффициентам Вигнера.

Для того, чтобы мы могли завершить обсуждение свойств элементов $d_{m'm}^j(\beta)$ в этом разделе и в то же время проверить вышеприведенные утверждения, мы используем здесь общий результат (3.188). Нам необходимо использовать только простейший пример этого результата, а именно для $j_2 = 1/2$. Существует четыре соотношения, получаемые из (3.188) для $j_2 = 1/2$ с помощью использования явных коэффициентов и матричных элементов для $d^{1/2}(\beta)$ (экспо-

¹⁾ Этот результат получаем из (3.89).

ненциальные множители аннулируются). Эти четыре основных соотношения имеют вид

$$\begin{aligned}
 & (j - m + 1)^{\pm} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) d_{m' - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}}^{j \pm \frac{1}{2}}(\beta) + (j + m + 1)^{\pm} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right) d_{m' - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}}^{j \pm \frac{1}{2}}(\beta) \\
 & = (j - m' + 1)^{\pm} d_{m' m}^j(\beta), \\
 & - (j - m + 1)^{\pm} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right) d_{m' + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}}^{j \pm \frac{1}{2}}(\beta) + (j + m + 1)^{\pm} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) d_{m' + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}}^{j \pm \frac{1}{2}}(\beta) \\
 & = (j + m' + 1)^{\pm} d_{m' m}^j(\beta), \\
 & (j + m)^{\pm} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) d_{m' - \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}}^{j - \frac{1}{2}}(\beta) - (j - m)^{\pm} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right) d_{m' - \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}}^{j - \frac{1}{2}}(\beta) \\
 & = (j + m')^{\pm} d_{m' m}^j(\beta), \\
 & (j + m)^{\pm} \left(\sin \frac{\beta}{2} \right) d_{m' + \frac{1}{2}, m - \frac{1}{2}}^{j - \frac{1}{2}}(\beta) + (j - m)^{\pm} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right) d_{m' + \frac{1}{2}, m + \frac{1}{2}}^{j - \frac{1}{2}}(\beta) \\
 & = (j - m')^{\pm} d_{m' m}^j(\beta). \tag{3.83}
 \end{aligned}$$

Как отмечено выше, эти четыре соотношения являются явным выражением редукции прямого произведения $D^j \otimes D^{\frac{1}{2}}$ в $D^{j + \frac{1}{2}}$ и $D^{j - \frac{1}{2}}$.

Чтобы проиллюстрировать пользу соотношений (3.83), укажем, что вывод двух рекурсивных соотношений, как оказалось, является особенно полезным при вычислениях матричных элементов $d_{m' m}^j(\beta)$.

Умножая третье соотношение (3.83) на $(j + m')^{\frac{1}{2}}$ и используя второе соотношение (с $j \rightarrow j - \frac{1}{2}$ и $m' \rightarrow m' - \frac{1}{2}$), чтобы привести все угловые моменты к общему j , получаем соотношение [18, 19]

$$\begin{aligned}
 & [(j - m)(j + m + 1)]^{\pm} \sin \beta d_{m' m + 1}^j(\beta) \\
 & + [(j + m)(j - m + 1)]^{\pm} \sin \beta d_{m' m - 1}^j(\beta) = 2(m \cos \beta - m') d_{m' m}^j(\beta). \tag{3.84}
 \end{aligned}$$

Подобные операции могут быть использованы, чтобы получить соотношение [20]

$$\begin{aligned}
 & [(j + m)(j - m + 1)]^{\pm} d_{m' m - 1}^j(\beta) \\
 & + [(j + m')(j - m' + 1)]^{\pm} d_{m' - 1, m}^j(\beta) = (m - m') \cot \frac{\beta}{2} d_{m' m}^j(\beta). \tag{3.85}
 \end{aligned}$$

(Второй результат может быть также получен прямо из общего результата (3.188) при выборе $j_1 = j, j_2 = 1$.)

Общие матрицы вращений. В последующем мы выведем (соотношение (5.44) в гл. 5) матрицы вращений в виде, не зависящем от параметризаций. Мы представляем здесь этот вид не только для полноты, а потому что он обнаруживает (больше, чем любой другой вид) структурную простоту матриц вращений. Этот вид легко запоминается и понимается и с практической точки зрения может быть использован, чтобы получить матрицы вращений в любой параметризации. Это последнее свойство особенно полезно для приложений к физическим задачам, включающим нестандартные параметризации [21].

Сделаем предварительное замечание об обозначениях. Мы видели в связи с полиномами Якоби важность неотрицательных параметров (см. формулу (3.73) и данную там таблицу). В комбинаторике часто возникает задача подсчета числа прямоугольных решеток, которые могут быть построены при наложении условий: а) узлы решетки являются неотрицательными целыми числами и б) сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце определена (фиксирована). (Это обобщение магического квадрата.) Обозначения, основанные на таких соображениях, оказываются здесь очень полезными.

В терминах элементов u_{ij} унитарной унимодулярной 2×2 -матрицы U элементы матрицы вращений могут быть записаны в виде

$$D_{m'm}^j(U) = [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{\frac{1}{2}} \times \sum_{\boxed{\alpha}} \frac{(u_{11})^{\alpha_{11}}(u_{12})^{\alpha_{12}}(u_{21})^{\alpha_{21}}(u_{22})^{\alpha_{22}}}{\alpha_{11}!\alpha_{12}!\alpha_{21}!\alpha_{22}!}, \quad (3.86)$$

где обозначение $\boxed{\alpha}$ символизирует 2×2 -построение с неотрицательными целыми числами:

$$\begin{array}{cc|cc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & j+m' & \\ \hline \alpha_{21} & \alpha_{22} & j-m' & \\ \hline j+m & j-m & & \end{array} \quad (3.87)$$

Здесь α_{ij} — неотрицательные целые числа, суммы которых в строках и столбцах указаны (неотрицательными) целыми числами $j \pm m'$, $j \pm m$. (Явно $\alpha_{11} + \alpha_{12} = j + m'$, $\alpha_{21} + \alpha_{22} = j - m'$, $\alpha_{11} + \alpha_{21} = j + m$, $\alpha_{12} + \alpha_{22} = j - m$.) Суммирование в (3.86) ведется по всем таким построениям. (Заметим, что любое число α_{ij} может служить единственным индексом суммирования, если желают избежать избытка, присущего обозначению квадратным построением.)

Свойство группового умножения матриц вращений теперь выражается в виде

$$D^j(U)D^j(U') = D^j(UU'). \quad (3.88)$$

Матрицы вращений в терминах параметров Эйлера — Родригеса. Во многих физических задачах (в особенности в молекулярной физике, теории поля в кристалле и теории электронного парамагнитного резонанса) встречается задача разложения представления $D^j(U)$ группы вращений на неприводимые представления конечной подгруппы (точечной группы) группы вращений. Элементы вращений точечной группы часто наиболее просто описываются как вращения вокруг фиксированных осей. Поэтому полезно знать явно матрицы вращений, выраженные в терминах параметров Эйлера — Родригеса.

Желаемый вид матрицы вращения получается подстановкой матрицы U , заданной в (2.21), в общую форму (3.86) (мы выбираем $\alpha_{21} = s$ как единственный индекс суммирования):

$$D_{m'm}^j(\alpha_0, \alpha) = [(j+m')!(j-m')!(j+m)!(j-m)!]^{\frac{1}{2}} \times \sum_s (\alpha_0 - i\alpha_3)^{j+m-s} (-i\alpha_1 - \alpha_2)^{m'-m+s} (-i\alpha_1 + \alpha_2)^s (\alpha_0 + i\alpha_3)^{j-m'-s} \times (j+m-s)!(m'-m+s)!s!(j-m'-s)! \quad (3.89)$$

Дополнительная подстановка $\alpha_0 = \cos(\psi/2)$, $\alpha_i = n_i \sin(\psi/2)$ порождает также явный вид матричных элементов $D_{m'm}^j(\psi, \hat{n})$. (Во многих приложениях полезно иметь след матрицы $D(\psi, \hat{n})$. Эта формула рассматривается в примечании 3.)

Заметим, что свойство умножения матриц вращений (3.89) теперь задается формулой

$$D^j(\alpha'_0, \alpha') D^j(\alpha_0, \alpha) = D^j(\alpha''_0, \alpha''), \quad (3.90)$$

где параметры (α''_0, α'') получаются из (α'_0, α') и (α_0, α) с помощью правил умножения кватернионов (2.42). (В примечании 4 свойства функций $D_{m'm}^j$ рассмотрены прямо в терминах параметров (α_0, α) . Дальнейшее обсуждение свойств матриц вращений см. также в примечании 6.)

Замечание. Мы злоупотребили обозначением отображения функцией f (т.е. $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ или эквивалентно $f: x \rightarrow \alpha = f(x)$ для $\alpha \in \mathbb{C}$ и $x \in X$, где X — область определения функции f , а $\mathbb{C}$ — обозначает множество комплексных чисел), используя один и тот же символ $f = D_{m'm}^j$ для различных функций со значениями $D_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma)$, $D_{m'm}^j(\psi, \hat{n})$, $D_{m'm}^j(U)$, $D_{m'm}^j(\alpha_0, \alpha)$ и т.д. Этот дефект в обозначении особенно очевиден, если заметить, что $f = D_{m'm}^j$ в (3.86) является вещественным полиномом (коэффициенты из $\mathbb{R}$) от комплексных переменных $(u_{11}, u_{12}, u_{21}, u_{22})$, тогда как $f' = D_{m'm}^j$ в (3.89) является комплексным полиномом (коэффициенты из $\mathbb{C}$) от вещественных переменных (α_0, α) . При строгом использовании мы должны были бы ввести различные символы для функции в разных параметризациях матрицы U , например $\mathcal{D}_{m'm}^j(\alpha\beta\gamma) = D_{m'm}^j(U(\alpha\beta\gamma))$ и т.д. (или иначе использовать обычное обозначение для композиции двух функций). Следование этому последнему пути усложнило бы без необходимости обсуждение матриц вращений, так как использование одного и того же символа $D_{m'm}^j$ обычно не вызывает трудностей. Однако необходимо соблюдать осторожность при рассмотрении комплексного сопряжения функции и комплексного сопряжения множества значений функции. Если область определения X функции f является множеством вещественных переменных, то трудностей с обозначением не возникает, так как комплексное сопряжение функции f , обозначаемое f^* , определяется формулой $f^*(x) = [f(x)]^*$. В единственном другом случае, рассмотренном выше для D -функций, именно для обозначения $D_{m'm}^j(U)$, где $f = D_{m'm}^j$ — вещественный полином от элементов u_{ij} матрицы U , мы избежим всякой двойственности, используя соглашение, согласно которому символ $D_{m'm}^{j*}(U)$ всегда обозначает комплексно сопряженное множество значений $D_{m'm}^j(U)$, т.е. $D_{m'm}^{j*}(U) \equiv [D_{m'm}^j(U)]^* = D_{m'm}^j(U)^*$, причем последнее равенство следует из того факта, что $D_{m'm}^j$ в (3.86) является вещественным полиномом.

7. Волновые функции систем угловых моментов

В вышеприведенном обсуждении мы последовательно основывались на той точке зрения, что кет-векторы $\{|jm\rangle\}$ должны быть базисными векторами для элементарных («точных») систем угловых моментов. Обычно в физике используют альтернативную точку зрения, а именно точку зрения *волновых функций* (или *амплитуд вероятности*), согласованную с точкой зрения, принятой для уравнения Шредингера. При этом индексы состояния обозначают функции и аргумен-

ты функции обозначают индексы положения частицы (или набора частиц) в конфигурационном пространстве. Этот сдвиг точки зрения не тривиален и здесь будет рассмотрен в деталях.

Волновые функции для систем угловых моментов могут быть получены единым образом по следующему пути. Рассмотрим закон умножения для матриц вращений: $D^j(UU') = D^j(U)D^j(U')$, т.е.

$$D_{mm'}^j(UU') = \sum_{m''} D_{mm''}^j(U) D_{m''m'}^j(U'). \quad (3.91)$$

Мы хотим интерпретировать этот результат как преобразование, вызываемое вращением $\mathcal{U}$, действующим на «систему», описываемую волновой функцией $D_{m'm}^j(U')$.

Как прототип этой интерпретации рассмотрим то же действие $\mathcal{U}$ на кет-вектор $|jm\rangle$:

$$\mathcal{U}: |jm\rangle \rightarrow |jm\rangle' \equiv \sum_{m'} D_{m'm}^j(U) |jm'\rangle. \quad (3.92)$$

Размещение индексов (m' , m) в этом результате является решающим в интерпретации соотношения (3.91) как преобразования над волновой функцией.

Рассмотрим функцию $D_{mm'}^j(UU')$, появляющуюся в левой части соотношения (3.91), как «трансформированную систему», т.е.

$$[D_{mm'}^j(U')] \equiv D_{mm'}^j(UU'). \quad (3.93)$$

Находим, что из закона умножения (3.91) теперь следует

$$\mathcal{U}: D_{mm'}^j(U') \rightarrow [D_{mm'}^j(U')] \equiv \sum_{m''} D_{mm''}^j(U) D_{m''m'}^j(U'). \quad (3.94)$$

Индексы в этом соотношении не согласуются со стандартной формой (3.92) для преобразующихся кет-векторов. Чтобы избежать этого дефекта, мы должны сохранить закон умножения (так как он правильный), но как-то изменить его форму. Чтобы сделать это, мы используем тот факт, что матрица D^j унитарна, заменяем U на U^{-1} и берем комплексное сопряжение от соотношения. Тогда мы получаем соотношение, имеющее желаемую интерпретацию:

$$\mathcal{U}: D_{mm'}^{j*}(U') \rightarrow [D_{mm'}^{j*}(U')] \equiv \sum_{m''} D_{m''m}^j(U) D_{m''m'}^{j*}(U'). \quad (3.95)$$

Это соотношение показывает, что функции $D_{mm'}^{j*}(U')$ в противоположность функциям $D_{mm'}^j$ преобразуются как векторы состояний, несущие индексы углового момента (j , m), и этот результат справедлив для каждого $m' = j, j-1, \dots, -j$. Использование комплексно сопряженных матриц вращений является не излишеством, а необходимостью для достижения полного согласия.

Прежде чем продолжать, полезно выяснить дальнейшие обозначения. В вышеприведенной интерпретации углы, параметризующие U' , не играют никакой роли. Для согласования обозначений закон преобразования должен быть записан без U' в ясных кет-обозначениях. Таким образом, следует писать

$$\mathcal{U}: |m^j m'\rangle \rightarrow |m^j m'\rangle' \equiv \sum_{m''} D_{m''m}^j(U) |m''^j m'\rangle. \quad (3.96)$$

Здесь $|m^j m'\rangle$ явно обозначает кет-векторы (которые подразумеваются в (3.95)). Заметим, что индекс m' является пока свободным и ему еще не дана ин-

терпретация. Линейные комбинации по этому свободному индексу фактически оставляют неизменными обсужденные здесь результаты.

Выяснив положение с кет-векторами, мы можем теперь снова ввести без недоразумений вращение U' , которое появляется в (3.95). Обозначая U' через U , находим

$$\langle U | m' j m' \rangle = D_{mm'}^{j*}(U) = \langle jm' | U^{-1} | jm \rangle. \quad (3.97)$$

Прежде чем мы сможем обсудить значение этих результатов (в частности, как они порождают все сферические функции), мы должны сначала получить дифференциальные уравнения для матриц вращений, так как именно на них базируется обычная трактовка сферических функций.

8. Дифференциальные уравнения для матриц вращений

Поскольку мы решили сначала определить базисы для систем угловых моментов, а затем определить (унитарные) матрицы вращений путем взятия экспонент, ясно, что определенные таким образом функции будут обладать производными всех порядков; мы можем благополучно следовать элементарным путем без потери общности.

Рассмотрим матрицу вращений, используя параметризацию углами Эйлера:

$$D^j(\alpha\beta\gamma) \equiv e^{-i\alpha J_3^j} e^{-i\beta J_2^j} e^{-i\gamma J_3^j}. \quad (3.98)$$

Дифференцирование по α , β и γ приводит к следующим результатам:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \alpha} D^j(\alpha\beta\gamma) &= -i J_3^j D^j(\alpha\beta\gamma), \\ \frac{\partial}{\partial \beta} D^j(\alpha\beta\gamma) &= -i (e^{-i\alpha J_3^j} J_2^j e^{i\alpha J_3^j}) D^j(\alpha\beta\gamma) \\ &= -i (-J_1^j \sin \alpha + J_2^j \cos \alpha) D^j(\alpha\beta\gamma), \\ \frac{\partial}{\partial \gamma} D^j(\alpha\beta\gamma) &= -i [D^j(\alpha\beta\gamma) J_3^j (D^j(\alpha\beta\gamma))^{-1}] D^j(\alpha\beta\gamma) \\ &= -i (J_1^j \cos \alpha \sin \beta + J_2^j \sin \alpha \sin \beta + J_3^j \cos \beta) D^j(\alpha\beta\gamma), \end{aligned} \quad (3.99)$$

при получении этих результатов мы использовали преобразование углового момента (3.40).

Теперь можно обратить эти результаты, чтобы выразить действие матричных операторов $J_i^{(j)}$ на матрицы $D^j(\alpha\beta\gamma)$ как дифференциальные операторы на матричных функциях $D^j(\alpha\beta\gamma)$. Приходим к следующему результату:

$$J_i^{(j)} D^j(\alpha\beta\gamma) = -\mathcal{J}_i D^j(\alpha\beta\gamma), \quad (3.100)$$

где $\mathcal{J}_i$ — дифференциальные операторы, определенные формулами

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1 &= i \cos \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + i \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - i \frac{\cos \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \mathcal{J}_2 &= i \sin \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - i \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \beta} - i \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma}, \\ \mathcal{J}_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha}.\end{aligned}\quad (3.101)$$

Существует только один момент в этом выводе, который требует объяснения, а именно, почему поставлен знак «минус» в (3.100)? Необходимость этого знака можно увидеть двумя путями: а) знак существен для того, чтобы дифференциальные операторы $\mathcal{J}_i$ подчинялись коммутационному соотношению $\mathcal{J} \times \mathcal{J} = i\mathcal{J}$, б) знак обусловлен использованием D_{mm}^{j*} в качестве волновых функций, как рассмотрено в предыдущем разделе.

Мы должны быть также осторожными и помнить, что $J_{ij}^{(j)}$ в (3.100) являются конечными матрицами и что это соотношение строго справедливо лишь для каждого фиксированного j -базиса. Только когда полнота прямой суммы пространств $(\mathcal{H}_0 \oplus \mathcal{H}_{1/2} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \dots)$ доказана, мы можем заключить (что мы сделаем ниже), что дифференциальные операторы $\mathcal{J}_i$ являются справедливыми операторными реализациями множества операторов углового момента, удовлетворяющего соотношению $\mathcal{J} \times \mathcal{J} = i\mathcal{J}$.

Так как мы показали для каждого подпространства $j = 0, 1/2, 1, \dots$ углового момента, что дифференциальные операторы $\mathcal{J}_i$ могут быть представлены в подпространстве в терминах матриц $J_{ij}^{(j)}$ и вид этой реализации *не зависит* от j , то можем утверждать, что дифференциальные операторы фактически являются реализацией множества операторов углового момента в общем случае, а не только для базиса D^j (мы используем этот результат в данном разделе несколько раз).

Полезно записать соотношения (3.101) в виде

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_+ &= \mathcal{J}_1 + i\mathcal{J}_2 = e^{i\alpha} \left(i \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{i}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right), \\ \mathcal{J}_- &= \mathcal{J}_1 - i\mathcal{J}_2 = e^{-i\alpha} \left(i \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - \frac{\partial}{\partial \beta} - \frac{i}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \gamma} \right), \\ \mathcal{J}_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha}.\end{aligned}\quad (3.102)$$

Далее выполним комплексное сопряжение соотношения (3.100), учитывая соотношения

$$\mathcal{J}_i^* = -\mathcal{J}_i, \quad J_1^{(j)*} = J_1^{(j)}, \quad J_2^{(j)*} = -J_2^{(j)}, \quad J_3^{(j)*} = J_3^{(j)}, \quad (3.103)$$

и возьмем матричные элементы результирующего соотношения. В результате получим обычное действие дифференциальных операторов $\mathcal{J}_i$:

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_\pm D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= [(j \mp m')(j \pm m' + 1)]^\pm D_{m' \pm 1, m}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \\ \mathcal{J}_3 D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= m' D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma).\end{aligned}\quad (3.104)$$

Дифференциальные формулы для матриц вращений (3.104) являются почти (но не совсем) целью этого раздела. Недостающим элементом, к которому мы теперь переходим, является интерпретация индекса m .

Продолжим с физической точки зрения. Предположим, что мы имеем единственную массивную точку, движущуюся по орбите вокруг (фиксированного) начала. В этом случае $\vec{L} = (\vec{r} \times \vec{p})$ является угловым моментом, где компоненты вектора положения $\vec{r}$ частицы могут быть взяты в виде

$$\begin{aligned}x_1 &= r \cos \alpha \sin \beta, \\x_2 &= r \sin \alpha \sin \beta, \\x_3 &= r \cos \beta.\end{aligned}\tag{3.105}$$

Таким образом, углы (α, β) отождествляются с азимутальным и полярным углами вектора положения частицы. Теперь получаем дифференциальный оператор для углового момента (используя формулу $\vec{\mathcal{L}} = \hbar^{-1} \vec{r} \times \vec{p} = -i \vec{r} \times \nabla$):

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_1 &= i \cos \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} + i \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \beta}, \\ \mathcal{L}_2 &= i \sin \alpha \cot \beta \frac{\partial}{\partial \alpha} - i \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \beta}, \\ \mathcal{L}_3 &= -i \frac{\partial}{\partial \alpha}.\end{aligned}\tag{3.106}$$

Эти выражения в точности совпадают с выражениями для $\mathcal{J}_i$ (3.101), в которых удалены члены, содержащие производную $\partial/\partial \gamma$. Так как выбор $m = 0$ удаляет угол γ из матрицы вращения, мы видим, что в случае единственной частицы (3.101) дает физический угловой момент. Следовательно, $\mathcal{J}$ должно быть физическим угловым моментом в общем случае. (Мы снова увидим, что это отождествление правильно при более детальном обсуждении жесткого ротатора, приведенном в разд. 10 гл. 7.)

Отметим, что выбор $m = 0$ предполагает, что j является целочисленным, так что обобщение $\mathcal{J}$, представленное в (3.101), состоит в том, что разрешены *полуцелые* значения угловых моментов в противоположность $\mathcal{L}$, для которых разрешены только целые значения. (В действительности наш вывод показывает, что $m = 0$ достаточно для того, чтобы устранить γ из теории единственной частицы. Но необходимо ли это, т.е. возможно ли существование полуцелого орбитального углового момента? Ответ состоит в том, что полуцелые орбитальные угловые моменты не могут существовать; этот результат мы докажем в разд. 5 гл. 6.)

Из этих результатов можно сделать еще одно заключение. Тот факт, что $\partial/\partial \gamma$ можно устранить из $\mathcal{J}$ в (3.102), предполагает, что $\partial/\partial \gamma$ должно коммутировать с $\mathcal{J}$. Отсюда следует, что эрмитов оператор $i(\partial/\partial \gamma)$ является недостающим элементом, который дополняет множество дифференциальных уравнений,

определяющих функции вращений $D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$. В соответствии с этим мы добавляем к системе уравнений (3.102) уравнения¹⁾

$$\mathcal{P}_3 \equiv -i \frac{\partial}{\partial \gamma},$$

$$\mathcal{P}_3 D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = m D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma). \quad (3.107)$$

Чтобы интерпретировать эти результаты, заметим теперь, что мы можем решить соотношения (3.101) для оператора $\partial/\partial\gamma$ и, следовательно, для $\mathcal{P}_3$. В результате имеем

$$\mathcal{P}_3 = \sin \beta \cos \alpha \mathcal{J}_1 + \sin \beta \sin \alpha \mathcal{J}_2 + \cos \beta \mathcal{J}_3,$$

или эквивалентно

$$\mathcal{P}_3 = \sum_i R_{i3}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{J}_i, \quad (3.108)$$

где $R(\alpha\beta\gamma)$ — собственная ортогональная матрица, определенная формулой (2.37). Таким образом, мы пришли к введению трех операторов $\mathcal{P}_j$ ($j = 1, 2, 3$), определенных формулой

$$\mathcal{P}_j \equiv \sum_i R_{ij}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{J}_i; \quad (3.109)$$

выясним теперь их физический смысл²⁾

Физическая интерпретация операторов углового момента $\mathcal{P}_i$ и $\mathcal{J}_i$. Для получения физической интерпретации $\mathcal{P}_j$ проведем геометрическое рассмотрение. Пусть $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ обозначает инерциальную систему отсчета, и пусть $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$ обозначает (неинерциальную) систему, для которой мгновенная ориентация относительно инерциальной системы описывается углами Эйлера:

$$\hat{f}_j = \sum_i R_{ij}(\alpha\beta\gamma) \hat{e}_i. \quad (3.110)$$

1) Физическая интерпретация операторов $(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ состоит в том, что $\mathcal{P}_i$ есть компонента полного углового момента $\mathcal{J}$ жесткого или твердого тела, спроектированного на i -ю ось правосторонней системы координат, фиксированной в теле. В литературе не существует единства в обозначении этих компонент. Мы приняли обозначения, часто используемые в молекулярной спектроскопии [22].

2) Следует отвергнуть искушение интерпретировать соотношение (3.109) путем использования преобразования (3.40), которое в терминах углов Эйлера принимает вид

$$J'_j = \mathcal{U}(\alpha\beta\gamma) J_j \mathcal{U}^{-1}(\alpha\beta\gamma) = \sum_i R_{ij}(\alpha\beta\gamma) J_i.$$

Операторы (J'_1, J'_2, J'_3) и (J_1, J_2, J_3) , появляющиеся в этом результате, являются компонентами углового момента, отнесенного к осям двух различных систем отсчета $(\hat{e}_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$ и $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$, которые связаны соотношением $\hat{e}'_j = \sum_i R_{ij}(\alpha\beta\gamma) \hat{e}_i$; но сами операторы J_i не связаны с положением или движением системы $(\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$, т.е. они не зависят от углов Эйлера, тогда как операторы $\mathcal{J}_i$, определенные в (3.101) и появляющиеся в (3.109), зависят от этих углов и, следовательно, действуют на направляющие косинусы $R_{ij}(\alpha\beta\gamma)$. Операторы $\mathcal{P}_j$ не могут быть получены из операторов $\mathcal{J}_i$ унитарным преобразованием подобия.

Так как оператор $\hat{\mathcal{J}} = \hat{e}_1 \mathcal{J}_1 + \hat{e}_2 \mathcal{J}_2 + \hat{e}_3 \mathcal{J}_3$ ($\mathcal{J}_i$ определяется формулами (3.101)) раньше отождествлялся с полным угловым моментом физической системы, то очевидно, что $\mathcal{P}_j$, определенное формулой

$$\mathcal{P}_j = \hat{f}_j \cdot \hat{\mathcal{J}} = \sum_i R_{ij}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{J}_i, \quad (3.111)$$

является компонентой полного углового момента относительно движущейся оси $\hat{f}_j$.

Таким образом, физический смысл операторов $\mathcal{P}_j$ частично установлен; мы должны установить более точно смысл самого полного углового момента $\hat{\mathcal{J}}$.

Требуемое соотношение находим как коммутатор $\mathcal{J}_i$ с направляющими косинусами $R_{ji}(\alpha\beta\gamma)$, определенными системой отсчета $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$:

$$[\mathcal{J}_i, R_{ji}] = ie_{ijk} R_{kl}, \quad i, j, k \text{ циклически}, \quad (3.112)$$

для каждого $l = 1, 2, 3$. Используя этот результат и определение вращающейся системы отсчета (3.110), находим¹⁾

$$[\hat{n} \cdot \hat{\mathcal{J}}, \hat{f}_j] = -i(\hat{n} \times \hat{f}_j). \quad (3.113)$$

Теперь вносим в экспоненту этот последний результат, используя ту же процедуру, которая привела к соотношению (3.40), чтобы получить преобразование (см. формулу (2.1) и замечание «а» в разд. 5)

$$\hat{f}'_j \equiv e^{-i\psi \hat{n} \cdot \hat{\mathcal{J}}} \hat{f}_j e^{i\psi \hat{n} \cdot \hat{\mathcal{J}}} = \mathcal{R}(\psi, -\hat{n}) \hat{f}_j, \quad (3.114)$$

в котором $\hat{n} = n_1 \hat{e}_1 + n_2 \hat{e}_2 + n_3 \hat{e}_3$ — произвольное направление (определенное по отношению к инерциальной системе отсчета), а ψ — произвольный угол. Этот результат, т.е. преобразование (3.114), порождает интерпретацию $\hat{\mathcal{J}}$: угловой момент $\hat{\mathcal{J}}$ является генератором вращений самой системы отсчета, фиксированной в теле. Следовательно, $\hat{\mathcal{J}}$ должно отождествляться с полным угловым моментом твердого или жесткого тела, мгновенная ориентация которого определена системой отсчета $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$, которая фиксирована (никакого относительного движения) в теле.

Соотношения, которым удовлетворяют операторы углового момента твердого тела. Здесь мы кратко изложим некоторые из соотношений, которым удовлетворяют операторы углового момента $\{\mathcal{J}_i\}$ и $\{\mathcal{P}_i\}$.

а) Стандартное коммутирование для $\mathcal{J}_i$:

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{J}_j] = i\mathcal{J}_k, \quad i, j, k \text{ циклически}; \quad (3.115)$$

б) $\mathcal{J}_i$ может стоять в любой части:

$$\mathcal{P}_j = \sum_i R_{ij}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{J}_i = \sum_i \mathcal{J}_i R_{ij}(\alpha\beta\gamma); \quad (3.116)$$

в) важный множитель $-i$ в коммутаторах для $\mathcal{P}_i$:

$$[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = -i\mathcal{P}_k, \quad i, j, k \text{ циклически}; \quad (3.117)$$

¹⁾ Каждый из векторов $\hat{f}_i$, определяющих систему $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$, является векторным оператором по отношению к угловому моменту $\hat{\mathcal{J}}$; см. разд. 15.

г) взаимное коммутирование операторов $\{\mathcal{J}_i\}$ и $\{\mathcal{P}_i\}$:

$$[\mathcal{P}_i, \mathcal{J}_j] = 0, \quad i, j, k = 1, 2, 3; \quad (3.118)$$

д) один и тот же квадратичный инвариантный полный угловой момент:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1^2 + \mathcal{P}_2^2 + \mathcal{P}_3^2 &= \mathcal{J}_1^2 + \mathcal{J}_2^2 + \mathcal{J}_3^2 = \mathcal{J}^2. \\ &= -\csc^2 \beta \left(\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \gamma^2} - 2 \cos \beta \frac{\partial^2}{\partial \alpha \partial \gamma} \right) - \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} - \cot \beta \frac{\partial}{\partial \beta}. \end{aligned} \quad (3.119)$$

Рассмотрим снова удивительный результат для коммутационных соотношений $[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = -i\mathcal{P}_k$. Только операторы — $\mathcal{P}_i$ удовлетворяют коммутационным соотношениям для обычного углового момента. (Этот результат является прямым следствием того факта, что $\mathcal{J}_i$ не коммутируют с вращающимися осями $\hat{f}_i$, которые появляются в определении $\mathcal{P}_i = \hat{f}_i \cdot \mathcal{J}$.) Из $\mathcal{P}_i = \hat{f}_i \cdot \mathcal{J}$ видим также, что $\mathcal{P}_i$ являются инвариантами по отношению к вращениям, порожденным $\mathcal{J}$, этот результат следует геометрически из того факта, что вращения, порожденные $\mathcal{J}$, вращают одновременно $\mathcal{J}$ и $\hat{f}_i$, оставляя инвариантным скалярное произведение.

Изложим кратко полученные результаты. Матрицы вращений $D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$ являются одновременными собственными функциями трех взаимно коммутирующих операторов $\mathcal{J}^2, \mathcal{J}_3$ и $\mathcal{P}_3$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}^2 D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= j(j+1) D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \\ \mathcal{J}_3 D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= m D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \\ \mathcal{P}_3 D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= m D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma). \end{aligned} \quad (3.120)$$

Операторы $\mathcal{P}_i$ являются компонентами углового момента $\mathcal{J}$, отнесенного к вращающейся системе отсчета, т.е. $\mathcal{P}_i = \hat{f}_i \cdot \mathcal{J}$. Действие $\mathcal{J}_{\pm}$ на $D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$ является стандартным действием, заданным соотношением (3.104); мы должны еще определить действие операторов $\mathcal{P}_i$ ($i = 1, 2$) на $D_{m^*m}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$.

Действие операторов углового момента, отнесенного к телу, на матрицы вращений. Действие операторов $\mathcal{P}_i$ на матрицы вращений $D^j(\alpha\beta\gamma)$ может быть получено транспонированием матрицы вращений (3.100), используя свойства $J_1^{(j)} = J_1^{(j)}$, $J_2^{(j)} = -J_2^{(j)}$, $J_3^{(j)} = J_3^{(j)}$ и $\bar{D}^j(\gamma, -\beta, \alpha) = D^j(\alpha\beta\gamma)$. (То, что матрицы $J_1^{(j)}$ и $J_3^{(j)}$ симметричны, тогда как $J_2^{(j)}$ антисимметрична, прямо следует из (3.20); свойство $\bar{D}^j(\gamma, -\beta, \alpha) = D^j(\alpha\beta\gamma)$ следует из (3.53).) Результат этого вычисления имеет вид

$$D^j(\alpha\beta\gamma) J_i^{(j)} = -\mathcal{P}_i D^j(\alpha\beta\gamma), \quad (3.121)$$

где $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_3$ получены из $\mathcal{J}_1, -\mathcal{J}_2$ и $\mathcal{J}_3$ соответственно перестановкой α и γ и заменой β на $-\beta$. Эти замечания показывают, что операторы $\mathcal{P}_i$ принимают такой явный вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2 &= e^{-i\gamma} \left(-i \cot \beta \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{i}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \\ \mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2 &= e^{i\gamma} \left(-i \cot \beta \frac{\partial}{\partial \gamma} - \frac{\partial}{\partial \beta} + \frac{i}{\sin \beta} \frac{\partial}{\partial \alpha} \right), \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}_3 = -i \frac{\partial}{\partial \gamma}. \quad (3.122)$$

(Эти результаты согласуются с результатами, полученными более прямым, но и более трудным способом из (3.109).)

Чтобы получить действие операторов $\mathcal{P}_i$ на матрицу вращения $D^{j*}(\alpha\beta\gamma)$, найдем комплексное сопряжение соотношения (3.121) и возьмем матричные элементы; получим следующие результаты:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2)D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}} D_{m',m+1}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \\ (\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= [(j+m)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}} D_{m',m-1}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \\ \mathcal{P}_3 D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= m D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma). \end{aligned} \quad (3.123)$$

Видим, что из-за знака «минус» в коммутационных соотношениях (3.117) $\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2$ и $\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2$ действуют теперь как повышающий и понижающий операторы («лестничные» операторы) соответственно.

Физическая интерпретация этих результатов состоит в том, что волновые функции $D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$ являются волновыми функциями вращающегося симметричного волчка (твердое тело с фиксированным в пространстве центром масс) и J_3 является z -компонентой углового момента, отнесенного к фиксированным в пространстве осям, тогда как $\mathcal{P}_3$ является угловым моментом, отнесенным к фиксированной в теле z -оси (оси симметрии) [13, 23].

Эта физическая интерпретация обсуждается в деталях в разделе 10 гл. 7.

Замечание. Это рассмотрение операторов $\mathcal{P}_i$, определенных соотношением (3.111), было ограничено *собственными* ортогональными преобразованиями $R(\alpha\beta\gamma)$ (правосторонние системы отсчета $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ и $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$). Мы можем распространить рассуждения на *несобственные* ортогональные преобразования, заметив, что при пространственной инверсии единичные векторы $\hat{f}_i$ обращаются ($\hat{f}_i \rightarrow -\hat{f}_i$, $i = 1, 2, 3$), причем это свойство является следствием определения фиксированной в теле системы отсчета (см. разд. 10 гл. 7). (Здесь мы не обращаем инерциальную систему отсчета $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.) Определяя $R_{ij} = \hat{e}_i \cdot \hat{f}_j$, находим, что коммутационные соотношения (3.117) теперь изменяются и принимают вид $[\mathcal{P}_i, \mathcal{P}_j] = -ie_{ijk}(\det R)\mathcal{P}_k$; эквивалентно имеем $[(\det R)\mathcal{P}_i, (\det R)\mathcal{P}_j] = -ie_{ijk}(\det R)\mathcal{P}_k$. Таким образом, если мы сделаем обобщение, чтобы включить системы отсчета $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ и $(\hat{f}_1, \hat{f}_2, \hat{f}_3)$, отнесенные к собственным и несобственным вращениям, то имеем, что операторы $(\det R)\mathcal{P}_i$ ($i = 1, 2, 3$) подчиняются коммутационным соотношениям (3.117). (Этот результат важен для молекулярной спектроскопии; см. разд. 10 гл. 7)

Порождение матриц вращений дифференциальными операторами. Так как каждый оператор в множестве $\{\mathcal{J}_i\}$ коммутирует с каждым оператором в множестве $\{\mathcal{P}_i\}$, то мы можем породить функции $D_{m'm}^{j*}$ путем двойного применения техники понижающих операторов (3.18). Отсюда следует

$$\begin{aligned} D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= \left[\frac{(j+m')!(j+m)!}{(2j)!(j-m')!(2j)!(j-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times (\mathcal{J}_-)^{j-m'} (\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2)^{j-m} D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma). \end{aligned} \quad (3.124)$$

В этом результате D_{jj}^{j*} однозначно определена дифференциальными уравнениями первого порядка

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_3 D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= j D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \\ \mathcal{J}_+ D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= 0, \\ \mathcal{P}_3 D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= j D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma), \\ (\mathcal{P}_1 - i\mathcal{P}_2) D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma) &= 0. \end{aligned} \quad (3.125)$$

Используя явный вид (3.102) и (3.122) для дифференциальных операторов, находим, что соотношение (3.125) требует, чтобы

$$D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = N_j e^{ij\alpha} d_{jj}^j(\beta) d^{ij\gamma},$$

где $d_{jj}^{j*}(\beta)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial}{\partial \beta} + j \tan \frac{\beta}{2} \right) d_{jj}^j(\beta) = 0,$$

приводя к соотношению

$$d_{jj}^j(\beta) = \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j}.$$

Произвольную константу N_j вычисляют, используя соотношение $D^j(0, 0, 0) =$ = единичная матрица, что дает $N_j = 1$. Таким образом,

$$D_{jj}^{j*}(\alpha\beta\gamma) = e^{ij\alpha} \left(\cos \frac{\beta}{2} \right)^{2j} e^{ij\gamma}. \quad (3.126)$$

Этот результат следует подставить в (3.124), чтобы получить полностью определенный вид волновых функций $D_{m^* m}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$. Выполнение деталей повторного применения дифференциальных операторов $\mathcal{J}_-$ и $\mathcal{P}_1 + i\mathcal{P}_2$, чтобы получить ответ в форме, включающей полиномы Якоби, как рассматривалось в разд. 6, слишком утомительно. Эти детали можно найти в литературе [24].

9. Ортогональность матриц вращений

Ортогональность матриц вращений следует из того факта, что операторы углового момента $\{\mathcal{J}_i\}$ и $\{\mathcal{P}_i\}$ эрмитовы по отношению к скалярному произведению

$$(\Psi, \Phi) \equiv \int d\Omega \Psi^*(\mathbf{x}) \Phi(\mathbf{x}), \quad (3.127)$$

где интегрирование ведется по всем точкам $\{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)\}$ единичной сферы в четырехмерном пространстве:

$$\int d\Omega = 2\pi^2. \quad (3.128)$$

Укажем кратко явный вид элемента поверхности (инвариантную меру) $d\Omega$ и соотношения ортогональности возьмем в различных параметризациях.

а. *Сферические полярные координаты.* Мы можем выразить параметры Эйлера — Родригеса (α_0, α) точки на единичной сфере в четырехмерном пространстве с помощью обычных сферических полярных координат:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \sin \theta \cos \phi \sin \chi, & 0 \leq \phi < 2\pi, \\ \alpha_2 &= \sin \theta \sin \phi \sin \chi, & 0 \leq \theta \leq \pi, \\ \alpha_3 &= \cos \theta \sin \chi, & 0 \leq \chi \leq \pi, \\ \alpha_0 &= \cos \chi.\end{aligned}\quad (3.129)$$

Тогда $d\Omega$ задается формулой

$$d\Omega = d\omega \sin^2 \chi d\chi, \quad (3.130)$$

где $d\omega$ — дифференциал площади поверхности единичной сферы в трехмерном пространстве:

$$d\omega = d\phi \sin \theta d\theta. \quad (3.131)$$

б. *Параметры $(\psi, \hat{n})$.* В этом случае точка (α_0, α) параметризуется так:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \cos \frac{\psi}{2}, & 0 \leq \psi \leq 2\pi, \\ \alpha &= \hat{n} \sin \frac{\psi}{2}, & \hat{n} \cdot \hat{n} = 1, \\ d\Omega &= dS(\hat{n}) \sin^2 \frac{\psi}{2} \frac{d\psi}{2},\end{aligned}\quad (3.132)$$

где $dS(\hat{n})$ обозначает дифференциал площади поверхности в точке $(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1)$ единичной сферы (так как $\hat{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$, то имеем $dS(\hat{n}) = d\omega$).

в. *Углы Эйлера.* В этом случае точка (α_0, α) параметризуется так:

$$\begin{aligned}\alpha_0 &= \cos \frac{\beta}{2} \cos \frac{1}{2} (\gamma + \alpha), \\ \alpha_1 &= \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{1}{2} (\gamma - \alpha), \\ \alpha_2 &= \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{1}{2} (\gamma - \alpha), \\ \alpha_3 &= \cos \frac{\beta}{2} \sin \frac{1}{2} (\gamma + \alpha),\end{aligned}\quad (3.133)$$

Отметим, что верхняя полусфера ($\alpha_0 \geq 0$) покрывается при $0 \leq \alpha < 2\pi$, $0 \leq \beta \leq \pi$, $0 \leq \gamma < 2\pi$, а нижняя сфера ($\alpha_0 \leq 0$) при $0 \leq \alpha < 2\pi$, $2\pi \leq \beta \leq 3\pi$, $0 \leq \gamma < 2\pi$:

$$d\Omega = \frac{1}{8} d\alpha d\gamma \sin \beta d\beta. \quad (3.134)$$

Две наиболее часто используемые формы соотношений ортогональности матриц вращений могут теперь быть записаны в виде

$$\int dS(\hat{n}) \int_0^{2\pi} \frac{d\psi}{2} \left(\sin \frac{\psi}{2} \right)^2 D_{m'm}^{j*}(\psi, \hat{n}) D_{\mu'\mu}^{j'}(\psi, \hat{n}) = \frac{2\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{m'\mu} \delta_{m\mu}, \quad (3.135)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\pi} d\beta \sin \beta D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) D_{\mu'\mu}^{j'}(\alpha\beta\gamma) \\ + \frac{1}{8} \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \int_{2\pi}^{3\pi} d\beta \sin \beta D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) D_{\mu'\mu}^{j'}(\alpha\beta\gamma) = \frac{2\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{m'\mu} \delta_{m\mu}. \end{aligned} \quad (3.136)$$

Для целых j и j' интегрирование по нижней полусфере такое же, как интегрирование по верхней полусфере; в частности, соотношение ортогональности (3.136) сводится к соотношению

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\pi} d\beta \sin \beta D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma) D_{\mu'\mu}^{j'}(\alpha\beta\gamma) = \frac{8\pi^2}{2j+1} \delta_{jj'} \delta_{m'\mu} \delta_{m\mu}. \quad (3.137)$$

10. Сферические функции

Выше (при обсуждении формул (3.106)) мы показали, что достаточно положить $m = 0$ в $D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$, чтобы удалить γ из этих функций, и что в этом случае мы получаем теорию орбитального углового момента одной частицы. Для полноты кратко изложим результаты, полученные путем ограничения функций $D_{m'm}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$ до $D_{m0}^{j*}(\alpha\beta\gamma)$, где теперь мы обозначаем j через l , чтобы указать ограничение j целочисленными значениями.

а. Связь сферических функций с матрицами вращений:

$$Y_{lm}(\beta\alpha) = \left(\frac{2l+1}{4\pi} \right)^{\frac{1}{2}} D_{m0}^{l*}(\alpha\beta\gamma). \quad (3.138)$$

б. Ортогональность сферических функций:

$$\int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^{\pi} d\beta \sin \beta Y_{l'm}^*(\beta\alpha) Y_{lm}(\beta\alpha) = \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \quad (3.139)$$

в. Действие операторов орбитального углового момента на сферические функции:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\pm} Y_{lm}(\beta\alpha) &= [(l \mp m)(l \pm m + 1)]^{\frac{1}{2}} Y_{l, m \pm 1}(\beta\alpha), \\ \mathcal{L}_3 Y_{lm}(\beta\alpha) &= m Y_{lm}(\beta\alpha), \\ \mathcal{L}^2 Y_{lm}(\beta\alpha) &= l(l + 1) Y_{lm}(\beta\alpha).\end{aligned}\quad (3.140)$$

Явный вид сферических функций. Используя формулу (3.138) для сферических функций, имеем

$$Y_{lm}(\beta\alpha) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} e^{im\alpha} d_{m0}^l(\beta). \quad (3.141)$$

Используя формулу Вигнера (3.65), формулу (3.72), содержащую полиномы Якоби, или экспоненциальную формулу (3.78), можем выразить соотношение (3.141) в различных формах.

Общей практикой является выражение сферических функций в терминах *присоединенных функций Лежандра*. Эти функции могут быть определены с помощью полиномов Якоби:

$$P_l^m(\cos \beta) \equiv \frac{(l+m)!}{l!} \left(\frac{\sin \beta}{2}\right)^m P_{l-m}^{(m,m)}(\cos \beta). \quad (3.142)$$

Используя этот результат и соотношения (3.71) и (3.72), имеем

$$d_{m0}^l(\beta) = (-1)^m \left[\frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \beta), \quad (3.143)$$

$$Y_{lm}(\beta\alpha) = (-1)^m \left[\frac{(2l+1)(l-m)!}{4\pi(l+m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_l^m(\cos \beta) e^{im\alpha} \quad (3.144)$$

Заметим, что соотношение (3.143) справедливо для положительных и отрицательных значений m ; соотношение

$$P_l^{-m}(\cos \beta) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(\cos \beta) \quad (3.145)$$

следует из (3.71). Следовательно, мы также получаем

$$Y_{lm}^*(\beta\alpha) = (-1)^m Y_{l, -m}(\beta\alpha). \quad (3.146)$$

Заметим также, что если положить в $Y_{lm}(\beta\alpha)$ $m = 0$, то мы устраним α из этих функций:

$$Y_{l0}(\beta\alpha) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} d_{00}^l(\beta) = \left(\frac{2l+1}{4\pi}\right)^{\frac{1}{2}} P_l(\cos \beta), \quad (3.147)$$

где

$$P_l(\cos \beta) \equiv P_l^0(\cos \beta) \quad (3.148)$$

определяет *полиномы Лежандра* (от $\cos \beta$).

Существует еще один распространенный метод получения сферических функций, не требующий обращения к матрицам вращений или прямой ссылки на функции классической математики. Этот метод использует общую формулу (3.18), к которой мы теперь обращаемся.

Порождение сферических функций понижением собственного состояния наивысшего веса. Собственное состояние наивысшего веса ($m = l$) получается решением дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_+ Y_{ll}(\beta\alpha) &= 0, \\ \mathcal{L}_3 Y_{ll}(\beta\alpha) &= l Y_{ll}(\beta\alpha),\end{aligned}\quad (3.149)$$

где $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_3$ определяются формулами (3.106).

Нормированное (в смысле формулы (3.139)) решение этих уравнений имеет вид

$$Y_{ll}(\beta\alpha) = \frac{(-1)^l}{2^l l!} \left[\frac{(2l+1)!}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} (e^{i\alpha} \sin \beta)^l, \quad (3.150)$$

где произвольная фаза (так называемое соглашение Кондона и Шортли) выбрана так, чтобы получить согласие с нашими предыдущими результатами.

Теперь общая сферическая функция получается из обычной формулы понижения (3.18):

$$Y_{lm}(\beta\alpha) = \left[\frac{(l+m)!}{(2l)!(l-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{L}_-^{l-m} Y_{ll}(\beta\alpha). \quad (3.151)$$

Повторное применение понижающего оператора $\mathcal{L}_-$ к $Y_{ll}(\beta\alpha)$ в этом результате приводит к следующей форме сферических функций:

$$\begin{aligned}Y_{lm}(\beta\alpha) &= (-1)^m \left[\frac{2l+1}{4\pi} (l+m)!(l-m)! \right]^{\frac{1}{2}} e^{ima} \\ &\times \sum_k \frac{(-1)^k (\sin \beta)^{2k+m} (\cos \beta)^{l-2k-m}}{2^{2k+m} (k+m)! k! (l-m-2k)!}.\end{aligned}\quad (3.152)$$

Эта формула интересна, потому что она обнаруживает (наиболее очевидно) связь сферических функций с *шаровыми сферическими функциями* (однородными полиномами степени l от x_1, x_2, x_3 , которые являются решениями уравнения Лапласа). Учитывая, что

$$\begin{aligned}e^{ima} (\sin \beta)^{2k+m} &= (e^{i\alpha} \sin \beta)^{k+m} (e^{-i\alpha} \sin \beta)^k \\ &= (x_1 + ix_2)^{k+m} (x_1 - ix_2)^k,\end{aligned}$$

из (3.152) видим, что шаровые сферические функции $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x})$ даются формулой

$$\begin{aligned}\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}) &= \left[\frac{2l+1}{4\pi} (l+m)!(l-m)! \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_k \frac{(-x_1 - ix_2)^{k+m} (x_1 - ix_2)^k x_3^{l-2k-m}}{2^{2k+m} (k+m)! k! (l-m-2k)!},\end{aligned}\quad (3.153)$$

в которой уже не требуется, чтобы точка $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ лежала на единичной сфере.

Шаровые сферические функции удовлетворяют обычным соотношениям (3.140), где операторы углового момента теперь должны быть в первоначальной декартовой форме, т.е.

$$\mathcal{L}_i = -i \left(x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_j} \right), \quad i, j, k \text{ цикличны.} \quad (3.154)$$

(Шаровые сферические функции до степени четыре и соответствующие сферические функции приведены в табл. 4 приложения. Свойства сферических функций и соответствующих функций, заданных на сфере, рассматриваются в гл. 6.)

11. Сложение угловых моментов

В разд. 3 мы определили все возможные собственные подпространства $\mathcal{H}_j$ (стандартный базис из кет-векторов $|jm\rangle$), соответствующие максимальным (коммутирующим) наблюдаемым углового момента ($J^2 - j(j+1)$, $J_z - m$). Как отмечено в начале, мы можем рассматривать эти состояния как описание *полного* углового момента сложной системы или, что равнозначно, как состояния для описания углового момента отдельной частицы. (Эта свобода интерпретации существует потому, что а) кинематическая независимость предполагает, что

$$\mathbf{J} = \sum_{i=1}^n \mathbf{J}(i) \text{ подчиняется тем же коммутационным соотношениям, что и от-}$$

дельные $\mathbf{J}(i)$, и б) концептуально полный угловой момент системы существует из-за инвариантности описания сложной системы относительно вращений.)

Теперь естественно проверить эти две интерпретации одновременно и рассмотреть задачу сложения угловых моментов двух (независимых) частиц (или систем). Лежащая в основе физика определяет необходимые предположения, которые состоят в следующем.

а. Угловые моменты двух частиц должны быть одновременно наблюдаемы; следовательно, мы имеем коммутационное соотношение

$$[J_i(1), J_k(2)] = 0, \quad i, k = 1, 2, 3. \quad (3.155)$$

Соответственно кет-векторы сложной системы являются произведениями кет-векторов отдельных частиц.

б. Две частицы принадлежат к точным собственным подпространствам $\mathcal{H}_{j_i}(i)$ ($i = 1, 2$) углового момента с базисом

$$\{|j_i m_i\rangle : j_i \text{ фиксировано, } j_i \geq m_i \geq -j_i\}. \quad (3.156)$$

в. Полный угловой момент является суммой $\mathbf{J} = \mathbf{J}(1) + \mathbf{J}(2)$. Так как $\mathbf{J}(k) \times \mathbf{J}(k) = i\mathbf{J}(k)$ и компоненты углового момента $\mathbf{J}(1)$ коммутируют с компонентами углового момента $\mathbf{J}(2)$, то мы видим, что

$$\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}. \quad (3.157)$$

Эти предположения приводят к тому, что кет-векторы, на которые действуют операторы углового момента J , составляют *тензорное произведение пространств* $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \mathcal{H}_{j_2}(2)$, натянутое на множество ортонормированных векторов¹⁾:

$$\{|j_1 m_1\rangle | j_2 m_2\rangle\} \equiv \{|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle : j_1 \geq m_1 \geq -j_1, j_2 \geq m_2 \geq -j_2\}. \quad (3.158)$$

(Тензорные произведения пространств рассматриваются в примечании 5.)

Действие оператора полного углового момента $J_i = J_i(1) + J_i(2)$ на пространство $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \mathcal{H}_{j_2}(2)$ определяется формулой

$$J_i |j_1 m_1\rangle | j_2 m_2\rangle = (J_i(1) |j_1 m_1\rangle) |j_2 m_2\rangle + |j_1 m_1\rangle (J_i(2) |j_2 m_2\rangle). \quad (3.159)$$

Точнее, это действие приводит к $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ -мерной матрице M_i полного углового момента J_i , заданной формулой

$$J_i \rightarrow M_i = J_i^{(j_1)} \otimes \mathbb{1}^{(j_2)} + \mathbb{1}^{(j_1)} \otimes J_i^{(j_2)}, \quad (3.160)$$

где $\mathbb{1}^{(j)}$ обозначает единичную матрицу размерности $2j + 1$ и $\otimes$ обозначает (для матриц) прямое произведение матриц.

Видим, что при выборе базиса (3.158) собственные значения оператора J_3 равны $m = m_1 + m_2$. Возможные значения m для $j_1 \geq m_1 \geq -j_1$ и $j_2 \geq m_2 \geq -j_2$ определяются решеткой точек, показанной на рис. 3.2: (m_1, m_2) , $m = m_1 + m_2$.

Задача состоит в том, чтобы определить мультиплеты углового момента J , которые появляются в пространстве $\mathcal{H}_{j_1}(1) \times \mathcal{H}_{j_2}(2)$.

Метод решения давно известен в спектроскопии и базируется на спектре значений m (неявно содержащемся на рис. 3.2). Общие свойства мультиплетов даны в разд. 3. Основное свойство, следующее из теории мультиплетов, состоит в том, что если существует *частное* собственное значение оператора J_3 , скажем m_0 , то должны существовать *все* члены мультиплета $j_0, j_0 - 1, \dots, m_0, \dots, -j_0$ для некоторого $j_0 \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}$. (В этом сущность техники повышающих и понижающих операторов, описанной в разд. 3; этот процесс детализирует построение полного j_0 -мультиплета.)

Изучая рис. 3.2, видим, что наибольшее значение m равно $j_1 + j_2$, причем это значение встречается *в точности один раз*. Так как больших значений m не существует, то значение $m = j_1 + j_2$ должно быть членом мультиплета $j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, -(j_1 + j_2)$. Ясно, что кет-вектор, имеющий это максимальное собственное значение оператора J_3 , совпадает с $|j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$, и члены $(j_1 + j_2)$ -мультиплета явно порождаются последовательным применением понижающего оператора J_- (формула (3.18)).

Изучая рис. 3.2 дальше, видим, что $m = j_1 + j_2 - 1$ встречается в точности два раза. Одно из этих значений m содержится в $(j_1 + j_2)$ -мультиплете, построение которого описано в предыдущем абзаце. Другое значение $m = j_1 + j_2 - 1$

¹⁾ Это обозначение устраняет дополнительные индексы (α_1) и (α_2) , требуемые для полного определения базисов $\{|(\alpha_1)j_1 m_1\rangle\}$ и $\{|(\alpha_2)j_2 m_2\rangle\}$ (см. сноску на стр. 41).

должно, следовательно, принадлежать мультиплету $j_1 + j_2 - 1$, $j_1 + j_2 - 2, \dots, -(j_1 + j_2 - 1)$. Первый член ($j = m = j_1 + j_2 - 1$) этого мультиплета определяется (однозначно с точностью до нормировки) как линейная комбинация двух кет-векторов $|j_1 j_1 - 1\rangle |j_2 j_2\rangle$ и $|j_1 j_1\rangle |j_2 j_2 - 1\rangle$ с собственными значениями $m = j_1 + j_2 - 1$, которая аннигилируется оператором J_+ (это линейная комбинация перпендикулярная $J_- |j_1 j_1\rangle |j_2 j_2\rangle$). Остальные члены $(j_1 + j_2 - 1)$ -мультиплета теперь порождаются понижающим оператором J_- путем последовательного его применения (формула (3.18)).

		m_1					
		j_1	$j_1 - 1$	$j_1 - 2$		$-(j_1 - 1)$	$-j_1$
m_2	j_2	•	•	•	...	•	•
	$j_2 - 1$	•	•	•	...	•	•
	$j_2 - 2$	•	•	•	...	•	•
	$\vdots$	$\vdots$					$\vdots$
	$-(j_2 - 1)$	•	•	•	...	•	•
	$-j_2$	•	•	•	...	•	•

РИС. 3.2.

Процесс повторяется, так как из рис. 3.2 видно, что существует k кет-векторов с $m = j_1 + j_2 - k + 1$ ($k \leq 1 + 2\min(j_1, j_2)$); линейные комбинации $k - 1$ этих векторов взаимно ортогональны, и фактически существует $m = j_1 + j_2 - k + 1$ членов j -мультиплетов, соответствующих $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, j_1 + j_2 - k + 2$. Таким образом, существует в точности еще одна линейная комбинация $m = j_1 + j_2 - k + 1$ векторов, ортогональная предыдущим комбинациям, которая однозначно определяется требованием аннигиляции оператором J_+ . Этот кет-вектор является членом $(j_1 + j_2 - k + 1)$ -мультиплета с $j = m = j_1 + j_2 - k + 1$, причем остальные члены этого мультиплета порождаются последовательным применением понижающего оператора J_- (формула (3.18)).

Этот процесс должен прерваться¹⁾ при значениях $k = k_0 \geq 0$, таком, что чис-

¹⁾ Из геометрии видно, что отыскание и устранение одного мультиплета производится рассеиванием рис. 3.2 с помощью гномонов $\lceil$, которые устраняют последовательно наивысшую строку и наиболее правый столбец точек. Использование гномонов хорошо известно в доказательствах соотношений с конечным перечислением в классической греческой математике («геометрические числа», например, соотношение (3.161)).

ло независимых состояний в различных мультиплетах равно размерности $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ пространства $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \mathcal{H}_{j_2}(2)$. Это условие имеет вид

$$\sum_{j=k_0}^{j_1+j_2} (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1). \quad (3.161)$$

Таким образом, мы должны иметь $(j_1 + j_2 + 1)^2 - k_0^2 = (2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$, т.е. $k_0^2 = (j_1 - j_2)^2$ и, следовательно, $k_0 = |j_1 - j_2|$.

Эта процедура демонстрирует частный случай хорошо известного результата Клебша и Гордана: сложение двух (независимых) угловых моментов, имеющих значения j_1 и j_2 , приводит к значениям полного углового момента $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$, причем каждое значение встречается в точности один раз.

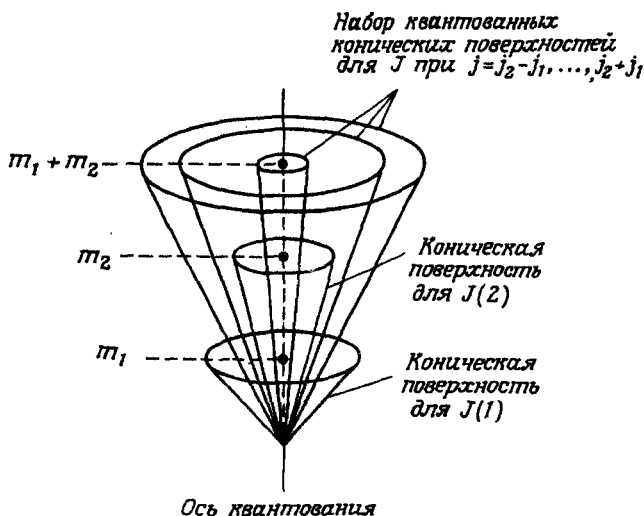


РИС. 3.3.

Этот результат имеет фундаментальное значение в физике и был получен в самом начале развития квантовой механики Борном и др. [3]. Содержание было воплощено в «векторной модели», которая схематически изображала сложение как квантованное (рис. 3.3; другой аспект векторной модели был упомянут в связи с рис. 3.1).

12. Коэффициенты Вигнера¹⁾

Выше мы видели, как сложение двух угловых моментов определяет сложное пространство, которое может быть однозначно разложено в собственные подпространства полного углового момента. Вклад Вигнера [13, 25, 26] в эту проблему состоял в определении явных коэффициентов для множества собственных векторов, принадлежащих этому разложению. (Вероятно, наиболее важный вклад состоял в демонстрации Вигнером [13] и Эккартом [27] важности этого результата для физических приложений (см. разд. 15).)

В первоначальном выводе этих коэффициентов Вигнер использовал их связь с матрицами вращений; эта связь обсуждается в разд. 13. Такой метод рассматривается как более теоретико-групповой, чем некоторые последующие методы, которые базируются на использовании алгебраических свойств самих операторов углового момента.

Напомним некоторые методы, которые могут быть использованы для вычисления этих коэффициентов (впоследствии названных *коэффициентами Вигнера*, а также известных как *коэффициенты Клебша — Гордана* и *коэффициенты векторного сложения*): а) выполнение построения предыдущего раздела; б) повторение рекурсивных соотношений, которым удовлетворяют коэффициенты Вигнера [16, 17, 28 — 30]; в) использование свойств частных реализаций операторов углового момента и произведения пространств [31 — 36] (см. также разд. 8 гл. 5); г) расширение метода «в», чтобы получить порождающие функции [37 — 40]; использование техники проективных операторов [41]; д) использование связи коэффициентов Вигнера с гипергеометрическими функциями [42]; е) факторизация групповых элементов [43].

Эти многие подходы к вычислению коэффициентов Вигнера указывают на широкий круг интерпретаций и точек зрения, которые могут быть приписаны математическому аппарату теории углового момента.

¹⁾ Это название не стандартно в физической литературе, и такие выражения как «коэффициенты векторного сложения», «коэффициенты векторного связывания» и «коэффициенты Клебша — Гордана» также часто используются как синонимы. Работа Клебша ([24а], разд. 8) и Гордана ([24б], разд. 2) по инвариантной теории алгебраических форм может рассматриваться в ретроспективе как эквивалентная формулировка задачи связывания угловых моментов. В частности, редукция Клебшом и Горданом произведений бинарных форм является в точности $\xi - \eta$ -исчислением, использованным Вейлем [24в], чтобы развить ряды Клебша — Гордана. (Следует заметить, что Вейль не упоминает в своей книге коэффициентов Клебша — Гордана.)

Мы выбрали название «коэффициенты Вигнера», так как значение этих коэффициентов для квантовой теории углового момента и матриц вращений впервые было отмечено Вигнером [25, 26].

Мы хотели бы поблагодарить проф. Верма за его замечания о работе Клебша и Гордана и проф. Бруссара за то, что он обратил наше внимание на его историческую статью [24г].

В этом разделе мы выполним построение, данное в разд. 11, главным образом потому, что оно чисто алгебраическое, элементарно и не требует дальнейшего развития понятий¹⁾.

Форма выражений для коэффициентов Вигнера зависит от метода вывода. (Мы обсудим это дальше в примечании 6.) Все такие формы эквивалентны и (для всех известных в настоящее время выражений) могут быть преобразованы одна в другую преобразованиями симметрии (или) методом преобразования, введенным Рака [29] и рассматриваемым в приложении А.

Мы дадим явно три формы выражений для коэффициентов Вигнера — выражение Вигнера [13], выражение ван дер Вардена [31] и выражение Рака [29].

Метод старших весов для определения коэффициентов Вигнера. Этот метод описан в разд. 11, но теперь мы приведем все детали.

Кет-вектор в мультиплете $|(\alpha)jm\rangle$, $m = j, j-1, \dots, -j$, для которого вес m максимален (т.е. $J_+|(\alpha)jm\rangle = 0$ для $m = j$), называется вектором *старшего веса*. Если вектор старшего веса определен, то полный мультиплет порождается последовательным применением понижающего оператора J_- .

Обозначим кет-векторы одного из j -мультиплетов, рассмотренных в последнем разделе, через $|(j_1 j_2)jm\rangle$ (см. примечание на стр. 41). Вектор старшего веса тогда обозначается через $|(j_1 j_2)jj\rangle$ и j -мультиплет дается формулой

$$|(j_1 j_2)jm\rangle = \left[\frac{(j+m)!}{(2j)!(j-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} J_-^{j-m} |(j_1 j_2)jj\rangle. \quad (3.162)$$

Из обсуждения в разд. 11 ясно, что вектор старшего веса $|(j_1 j_2)jj\rangle$, для которого $j = j_1 + j_2$, $j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$, однозначно определен (с точностью до нормировки) а) принадлежностью собственному значению j оператора J_3 и б) аннигиляцией повышающим оператором J_+ :

$$|(j_1 j_2)jj\rangle = \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = j}} A_{m_1 m_2} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle, \\ J_+ |(j_1 j_2)jj\rangle = 0.$$

Используя соотношение $J_+ = J_+(1) + J_+(2)$ и обычное действие оператора $J_+(i)$ на кет-вектор $|j_i m_i\rangle$, выведем рекурсивное соотношение для коэффициентов $\{A_{m_1 m_2}\}$, решение которого находим путем итераций:

$$A_{m_1 m_2} = \delta(m_1 + m_2, j) (-1)^{j_1 - m_1} \left[\frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} A,$$

где A — константа, не зависящая от m_1 и m_2 .

¹⁾ Интересная символическая вариация этого метода дана Гельфандом и др. [44]; см. также [45].

Условие нормировки

$$\sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = j}} |A_{m_1 m_2}|^2 = 1$$

и формула суммирования

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{m_1, m_2 \\ m_1 + m_2 = j}} \frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!} \\ = \frac{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j + j_1 - j_2)!(j + j_2 - j_1)!}{(2j + 1)!(j_1 + j_2 - j)!} \end{aligned} \quad (3.163)$$

теперь дают нам желаемый результат для старшего веса j :

$$|(j_1 j_2)jj\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 j}^{j_1 j_2 j} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle, \quad (3.164)$$

где коэффициент определяется формулой

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 j}^{j_1 j_2 j} \equiv \delta(m_1 + m_2, j) \left[\frac{(2j + 1)!(j_1 + j_2 - j)!}{(j + j_1 + j_2 + 1)!(j + j_1 - j_2)!(j + j_2 - j_1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times (-1)^{j_1 - m_1} \left[\frac{(j_1 + m_1)!(j_2 + m_2)!}{(j_1 - m_1)!(j_2 - m_2)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.165)$$

(Произвольный фазовый множитель был выбран равным единице, чтобы получить согласие с обычной формулой Вигнера для этих коэффициентов. Существует очень много различных обозначений для коэффициентов Вигнера. Мы обсудим их в примечании 7.)

j -Мультиплет (3.162) теперь может быть записан в виде

$$|(j_1 j_2)jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle, \quad (3.166)$$

где

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} \equiv \left[\frac{(j + m)!}{(2j)!(j - m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | J_-^m | (j_1 j_2)jj \rangle \\ = \left[\frac{(j + m)!}{(2j)!(j - m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \langle (j_1 j_2)jj | J_+^m | j_1 m_1; j_2 m_2 \rangle, \end{aligned} \quad (3.167)$$

и

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle \equiv |j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle. \quad (3.168)$$

Дальше разлагаем $J_+^m = [J_+(1) + J_+(2)]^m$, используя биномиальную теорему, и вычисляем действие $[J_+(i)]^s$ на $|j_i m_i\rangle$, используя (3.20). Эти шаги яв-

ляются прямыми, и (3.168) приводит к следующему выражению для коэффициентов Вигнера («первая формула Рака»):

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = \delta(m_1 + m_2, m) \times \left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j_1-m_1)!(j_2-m_2)!(j-m)!(j+m)!}{(j_1+j_2+j+1)!(j+j_1-j_2)!(j+j_2-j_1)!(j_1+m_1)!(j_2+m_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \sum_t (-1)^{j_1-m_1+t} \left[\frac{(j_1+m_1+t)!(j+j_2-m_1-t)!}{t!(j-m-t)!(j_1-m_1-t)!(j_2-j+m_1+t)!} \right]. \quad (3.169)$$

Используя преобразование, описанное в приложении А, Рака привел правую сторону соотношения (3.169) к симметричному виду [31]:

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = \delta(m_1 + m_2, m) \left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j+j_1-j_2)!(j+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \sum_z \frac{(-1)^z [(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)!]^{\frac{1}{2}}}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!(j-j_2+m_1+z)!(j-j_1-m_2+z)!}. \quad (3.170)$$

Метод вычисления Вигнера (описанный ниже) дал коэффициенты в виде

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = \delta(m_1 + m_2, m) \times \left[\frac{(2j+1)(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!(j_1+j_2-j)!}{(j+j_1+j_2+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \left[\frac{(j+m)!(j-m)!}{(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \sum_s \frac{(-1)^{j_2+m_2+s} (j_2+j+m_1-s)!(j_1-m_1+s)!}{s!(j-j_1+j_2-s)!(j+m-s)!(j_1-j_2-m+s)!}. \quad (3.171)$$

Замечание. Любопытно, что в литературе никогда не было указано, что первая формула Рака (3.169) может быть получена из формулы Вигнера (3.171) следующими двумя преобразованиями:

$$\begin{aligned} \text{а)} \quad & m_1 \rightarrow -m_1, \quad m_2 \rightarrow -m_2, \quad m \rightarrow -m; \\ \text{б)} \quad & j_1 + m_1 \rightarrow j_1 + m_1, \quad j_2 + m_2 \rightarrow j_2 + m_2, \quad j - m \rightarrow j - m \\ & j_1 - m_1 \leftrightarrow j + j_2 - j_1, \quad j_2 - m_2 \leftrightarrow j + j_1 - j_2, \quad j + m \leftrightarrow j_1 + j_2 - j. \end{aligned} \quad (3.172)$$

Другими словами, тот факт, что коэффициенты Вигнера могут быть записаны двумя формулами (3.169) и (3.171), *доказывает*, что преобразование «б» является преобразованием симметрии коэффициентов Вигнера (поскольку «а» является такой симметрией). Преобразование симметрии «б» не замечали до 1958 г., ког-

да его нашел Редже [38] (совершенно другим методом), хотя прямое сравнение формулы Вигнера с первой формулой Рака могло бы обнаружить его намного раньше.

Систематическое обсуждение симметрий коэффициентов Вигнера откладывается до гл. 5; краткое изложение дано ниже.

Ортогональность коэффициентов Вигнера. Так как кет-векторы множества

$$\{|(j_1 j_2) jm\rangle : j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|; m = j, j - 1, \dots, -j\} \quad (3.173)$$

ортогональны, коэффициенты Вигнера (их принято считать вещественными числами¹⁾) являются элементами вещественной ортогональной матрицы C размерности $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$, выражающей изменение базиса тензорного произведения пространств $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \mathcal{H}_{j_2}(2)$. Это изменение базиса разбивает матрицы углового момента M_j , заданные соотношением (3.160), на базисные матрицы углового момента $J^{(j)}$:

$$C(J_i^{(j_1)} \otimes \mathbb{1}^{(j_2)} + \mathbb{1}^{(j_1)} \otimes J_i^{(j_2)})\tilde{C} = \sum_j \oplus J_i^{(j)} \\ = \begin{pmatrix} J_i^{(j_1+j_2)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_i^{(j_1+j_2-1)} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_i^{(|j_1-j_2|)} \end{pmatrix}. \quad (3.174)$$

Элементы матрицы C явно записываются в виде

$$(C)_{jm_1 m_2} = C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$$

где пары индексов (jm) и $(m_1 m_2)$ нумеруют строки и столбцы соответственно. Таким образом, $(2j_1 + 1)(2j_2 + 1)$ строк и столбцов перенумерованы (в порядке, подходящем для правой части соотношения (3.174)) с помощью

$$(jm): \quad j = j_1 + j_2, \dots, |j_1 - j_2|; m = j, \dots, -j,$$

$$(m_1 m_2): \quad m_1 = j_1, \dots, -j_1; m_2 = j_2, \dots, -j_2.$$

¹⁾ Здесь важно сделать уточнение. Коэффициенты Вигнера могут быть взяты без потери общности унитарными. Свобода в выборе фазы у векторов состояний в квантовой механике (см. примечание 5 и разд. 1 гл. 5 работы [102]) позволяет выбрать фазу произвольно в каждом (j, m) -подпространстве: (Коэффициенты Вигнера остаются унитарными при этом изменении.) Обычный выбор фазы ([13] стр. 188) состоит в том, чтобы сделать $C_{j_1 j_2 j}^{j_1 j_2 j}$ вещественным и положительным. Так как фазы мультиплетов угловых моментов определяются таким образом, чтобы сделать матричные элементы повышающего и понижающего операторов $J_{\pm}$ вещественными (и положительными), приведенные выше явные вычисления показывают, что все коэффициенты Вигнера при этом являются вещественными, как и утверждалось.

Полные утверждения о соотношениях ортогональности для матрицы C записываются следующим образом:

а) Ортогональность строк

$$\sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m'}^{j_1 j_2 j'} = \delta_{jj'} \delta_{mm'}. \quad (3.175)$$

б) Ортогональность столбцов

$$\sum_{jm} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2' m}^{j_1 j_2 j'} = \delta_{m_1 m_1'} \delta_{m_2 m_2'}. \quad (3.176)$$

Замечание. Следует заметить, что эти соотношения ортогональности относятся к набору элементов очень частной матрицы C . Ниже окажется полезным расширить понятие коэффициента Вигнера до значений квантовых чисел $(j_1 m_1; j_2 m_2; jm)$, лежащих вне чисел, определяющих ортогональную матрицу C . При интерпретации соотношений ортогональности для таких расширенных коэффициентов следует соблюдать осторожность. Например, коэффициент Вигнера часто определяется как нуль, если не удовлетворяется «условие треугольника» (см. формулу (3.191)). В этом случае соотношения (3.175) и (3.176) будут справедливы для расширенных коэффициентов, если мы модифицируем соотношение (3.175), вставив множитель $\varepsilon_{j_1 j_2 j}$ в правую часть. Здесь $\varepsilon_{j_1 j_2 j}$ определяется как единица, когда удовлетворено условие треугольника; в противном случае он равен нулю (см. (3.272)).

Поскольку многие элементы матрицы C являются нулями, соотношение ортогональности может быть существенно упрощено путем удаления тривиальных соотношений $0 = 0$. Все такие соотношения следуют из того, что

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = 0 \quad \text{для } m_1 + m_2 \neq m, \quad (3.177)$$

что является следствием того факта, что $J_3 = J_3(1) + J_3(2)$ при действии на $|j_1 m_1\rangle |j_2 m_2\rangle$ имеет собственное значение m .

С учетом этих нулей в матрице C соотношения ортогональности для строк приводятся к виду

$$\sum_{\substack{m_1 m_2 \\ m_1 + m_2 = m}} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j'} = \delta_{jj'}, \quad (3.178)$$

в то время как соотношения ортогональности для столбцов лучше всего записать в двух формах:

$$\begin{aligned} \sum_j C_{m_1, m - m_1, m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1', m - m_1', m}^{j_1 j_2 j'} &= \delta_{m_1 m_1'}, \\ \sum_j C_{m - m_2, m_2, m}^{j_1 j_2 j} C_{m - m_2', m_2', m}^{j_1 j_2 j'} &= \delta_{m_2 m_2'}. \end{aligned} \quad (3.179)$$

При подготовке таблиц коэффициентов Вигнера обычно принимают, что $j_1 \geq j_2$ и располагают коэффициенты в виде строк и столбцов, пронумерованных числами j и m_2 соответственно. Соотношения (3.178) и (3.179) тогда выражают ортогональность строк и столбцов этой матрицы размерности $2j_2 + 1$.

(Табл. 1 в приложении (т. 2) дает коэффициенты Вигнера для $j_2 = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3$.)

Свойства симметрии коэффициентов Вигнера. Явное знание свойств симметрии коэффициентов Вигнера важно не только для понимания структурных связей, но и для практических приложений, в которых преобразования симметрии коэффициентов Вигнера, как оказывается, содержатся среди наиболее часто используемых свойств. Поэтому мы кратко изложим здесь эти очень полезные результаты.

В приложении В гл. 5 мы выводим эти симметрии без использования явных формул для коэффициентов. Однако все эти симметрии могут быть прямо проверены, исходя из формулы ван дер Вардена (3.170)^{1,2}.

Обсуждения свойств симметрий коэффициентов Вигнера были даны в первоначальных работах Вигнера [13] и Рака [29], а также в диссертации Эйзенбуда [46]. В результате была найдена группа симметрий из двенадцати элементов (описанная ниже). С удивлением узнали из работы Редже [38], что группа симметрий фактически является намного большей; она содержит 72 элемента. (Прекрасное изложение результата Редже дано Баргманом [39].)

Все соотношения симметрии порождаются первыми четырьмя из следующих шести соотношений (последние два соотношения включены для удобства ссылок):

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} C_{-m_1, -m_2, -m}^{j_1 j_2 j}, \\ C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} C_{m_2 m_1 m}^{j_2 j_1 j}, \\ C_{m_1, m_2, m_1 + m_2}^{j_1 j_2 j} &= C_{\frac{1}{2}(j_1 - j_2 + m_1 + m_2), \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - m_1 - m_2), j_1 - j_2}^{\frac{1}{2}(j_1 + j_2 + m_1 + m_2), \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - m_1 - m_2), j}, \\ C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_2 + m_2} [(2j + 1)/(2j_1 + 1)]^{\frac{1}{2}} C_{-m, m_2, -m_1}^{j j_2 j_1}, \\ C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_1 - m_1} [(2j + 1)/(2j_2 + 1)]^{\frac{1}{2}} C_{m_1, -m, -m_2}^{j_1 j j_2}, \\ C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_2 + m_2} [(2j + 1)/(2j_1 + 1)]^{\frac{1}{2}} C_{-m_2, m, m_1}^{j_2 j j_1}. \end{aligned} \quad (3.180)$$

Временно игнорируя фазовые изменения и размерностные множители, видим, что четыре основные симметрии (первые четыре соотношения) порождают группу порядка 72. Простейший путь увидеть это состоит в расположении шести индексов коэффициента Вигнера в *таблицу Редже*:

$$\begin{bmatrix} j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j - m \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j + m \\ j - j_1 + j_2 & j + j_1 - j_2 & -j + j_1 + j_2 \end{bmatrix}. \quad (3.181)$$

Девять элементов этой таблицы являются избыточными, так как элементы в каждой строке и в каждом столбце в сумме дают фиксированное число $j_1 + j_2 + j$. (Таким образом, таблица является «магическим квадратом».)

¹) Этот метод, конечно, не обнаруживает источника этих симметрий, который обсуждается в приложении В гл. 5.

²) В самом деле, Клейма и ван Вагенинген [45a] нашли симметрии Редже прямо из формулы ван дер Вардена (независимо, но через несколько лет после статьи Редже).

Преобразования квантовых чисел $(j_1, m_1, j_2, m_2, j, m)$, вытекающие из первых четырех соотношений (3.180), соответствуют следующим операциям над таблицей Редже: а) перестановка строк 1 и 2, б) перестановка столбцов 1 и 2, в) транспонизация и г) перестановка столбцов 1 и 3. Эти четыре операции порождают все шесть перестановок столбцов таблицы и все шесть перестановок строк, которые вместе с транспозицией дают 72 соотношения для коэффициентов Вигнера.

Чтобы учесть фазовые изменения и размерностные множители, определим теперь новый символ, который как можно ближе соответствует симметриям таблицы Редже. Это $3j$ -символ, введенный Вигнером [47] и определяемый следующим образом:

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & -m \end{pmatrix} \equiv (-1)^{j_1 - j_2 + m} (2j + 1)^{-\frac{1}{2}} C_{m_1, m_2, m}^{j_1, j_2, j} \\ \equiv R \begin{bmatrix} j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j - m \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j + m \\ j - j_1 + j_2 & j + j_1 - j_2 & -j + j_1 + j_2 \end{bmatrix}. \quad (3.182)$$

Второе равенство в (3.182) определяет обозначение Редже для $3j$ -символа с помощью таблицы Редже.

Теперь свойства симметрии изящно выражены с помощью симметрий детерминанта таблицы Редже. Таким образом, символ Редже инвариантен при всех четных перестановках его строк и столбцов и при транспозиции таблицы. Он умножается на $(-1)^{j_1 + j_2 + j}$ при нечетных перестановках его строк и столбцов.

Ясно, что $3j$ -символ оптимизирует свойства симметрии, присущие коэффициентам Вигнера. Однако действительное начало этих символов можно найти в работе Вигнера по построению инвариантов относительно вращений (рассматриваемых в разд. 20).

Наиболее часто используются двенадцать «классических» симметрий $3j$ -символов: а) четные перестановки столбцов, оставляющие коэффициент инвариантным, б) нечетные перестановки столбцов, умножающие коэффициент на $(-1)^{j_1 + j_2 + j}$, и в) обращение знака всех квантовых чисел проектирования, умножающие коэффициент на $(-1)^{j_1 + j_2 + j}$.

13. Связь между матрицами вращений и коэффициентами Вигнера

Мы подчеркивали, что при вращении физической системы оператор полного углового момента порождает преобразования квантовых состояний системы. (С пассивной точки зрения вращается система отсчета; с активной точки зрения все составляющие системы, рассматриваемой как сложный объект, вращаются одновременно. В примечании 8 приведен случай, когда «часть» физической системы может вращаться независимо.) Таким образом, при вращении $\mathcal{Q}(\psi, \hat{n})$ собственный кет-вектор $|j_1, j_2, j, m\rangle$ подвергается преобразованию

$$\begin{aligned}\mathcal{U}: |(j_1 j_2) jm\rangle &\rightarrow |(j_1 j_2) jm\rangle' \equiv \mathcal{U} |(j_1 j_2) jm\rangle \\ &= e^{-i\psi\hat{n}\cdot\mathbf{J}} |(j_1 j_2) jm\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^j(\psi, \hat{n}) |(j_1 j_2) jm'\rangle.\end{aligned}\quad (3.183)$$

С другой стороны, так как мы можем записать $\mathcal{U}$ в виде

$$\mathcal{U} = e^{-i\psi\hat{n}\cdot\mathbf{J}} = e^{-i\psi\hat{n}\cdot\mathbf{J}(1)} \otimes e^{-i\psi\hat{n}\cdot\mathbf{J}(2)},$$

то кет-вектор $|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle$ подвергается преобразованию

$$\begin{aligned}\mathcal{U}: |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle &\rightarrow (|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle)' \\ &\equiv (e^{-i\psi\hat{n}\cdot\mathbf{J}(1)} |j_1 m_1\rangle) \otimes (e^{-i\psi\hat{n}\cdot\mathbf{J}(2)} |j_2 m_2\rangle) \\ &= \sum_{m_1' m_2'} [D^{j_1}(\psi, \hat{n}) \otimes D^{j_2}(\psi, \hat{n})]_{m_1' m_2'; m_1 m_2} |j_1 m_1'\rangle \otimes |j_2 m_2'\rangle,\end{aligned}\quad (3.184)$$

где

$$[D^{j_1}(\psi, \hat{n}) \otimes D^{j_2}(\psi, \hat{n})]_{m_1' m_2'; m_1 m_2}$$

обозначает элемент прямого произведения матриц

$$D^{j_1}(\psi, \hat{n}) \otimes D^{j_2}(\psi, \hat{n}).$$

Используя связь между двумя базисами $\{|(j_1 j_2) jm\rangle\}$ и $\{|j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle\}$ пространства $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \mathcal{H}_{j_2}(2)$

$$|(j_1 j_2) jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle, \quad (3.185)$$

из (3.183) и (3.184) теперь выводим основной результат:

$$\begin{aligned}C[D^{j_1}(U) \otimes D^{j_2}(U)]\tilde{C} &= \sum_j \oplus D^j(U) \\ &\equiv \begin{pmatrix} D^{j_1+j_2}(U) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & D^{j_1+j_2-1}(U) & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & D^{|j_1-j_2|}(U) \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.186)$$

в котором мы заменили вращение, параметризованное с помощью $(\psi, \hat{n})$, на произвольную унитарную унимодулярную матрицу U . (Соотношение (3.186) не зависит от параметризации. Заметим, что взятие экспоненты от (3.174) как раз дает (3.186).)

В терминах матричных элементов соотношение (3.186) принимает вид

$$\sum_{m_1' m_2'} C_{m_1' m_2' m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} D_{m_1' m_1}^{j_1}(U) D_{m_2' m_2}^{j_2}(U) = \delta_{j' j} D_{m' m}^j(U). \quad (3.187)$$

Соотношение (3.186) (или (3.187)) выражает тот факт, что коэффициенты Вигнера являются элементами вещественной ортогональной матрицы, которая разбивает прямое произведение $D^{j_1}(U) \otimes D^{j_2}(U)$, представляющее вращение U , на базисные матрицы вращений $D^j(U)$, $j = j_1 + j_2, \dots, |j_1 - j_2|$.

Используя свойства ортогональности коэффициентов Вигнера, соотношение (3.187) можно записать в нескольких других полезных формах:

$$\sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} D_{m_1' m_1}^{j_1}(U) D_{m_2' m_2}^{j_2}(U) = C_{m_1' m_2' m}^{j_1 j_2 j} D_{m_1' + m_2' m}^j(U), \quad (3.188)$$

$$D_{m_1' m_1}^{j_1}(U) D_{m_2' m_2}^{j_2}(U) = \sum_j C_{m_1' m_2' m_1 + m_2}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m_1 + m_2}^{j_1 j_2 j} D_{m_1' + m_2' m_1 + m_2}^j(U). \quad (3.189)$$

Замечание. Вигнер [25] вычислял коэффициенты $C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$ на основе свойства произведения (3.189). (В статье [25] выражение $j = j_1$ было случайно опущено. Исправляя это упущение, Вигнер [26] дал явные коэффициенты для $j_2 = 1$; насколько мы знаем, это были первые коэффициенты этого рода, появившиеся в печати.) Обычное фазовое соглашение было фиксировано в общем выводе Вигнера [13], что привело на основе интегрального свойства, выражаемого формулой (3.190), к соотношению (3.171).

Интегралы от трех матриц вращения. Соотношения ортогональности, данные в разд. 9, вместе со свойством умножения (3.189) теперь могут быть использованы для вывода соотношения

$$\int d\Omega D_{m' m}^{j*}(U) D_{m_1' m_1}^{j_1}(U) D_{m_2' m_2}^{j_2}(U) = \frac{2\pi^2}{2j+1} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}, \quad (3.190)$$

в котором угловые моменты j_1, j_2, j могут принимать значения $0, \frac{1}{2}, 1, \dots$, и теперь мы расширяем область определения коэффициента Вигнера, определяя, что

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = 0, \quad (3.191)$$

если j не принадлежит множеству $\{j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|\}$. Эти условия известны как *условия треугольника на $(j_1 j_2 j)$* . Этот результат (соотношение (3.190)) справедлив для произвольной параметризации матриц $U \in SU(2)$, покрывающей в точности один раз единичную сферу в четырехмерном пространстве. (В приложении к гл. 5 мы укажем более детально, как соотношение (3.190) может быть использовано для вычисления коэффициентов Вигнера.)

Соотношение (3.190) может быть приведено к более частным формам за счет выбора параметризации и за счет выбора квантовых чисел проектирования, давая ряд полезных результатов. Наиболее известные из этих соотношений получаются использованием параметризации углами Эйлера, к которой мы теперь переходим.

При использовании формулы (3.138), связывающей матрицы вращений и сферические функции, получаем интеграл Гаунта [48] от трех сферических функций

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\alpha \int_0^\pi \sin \beta d\beta Y_{lm}^*(\beta\alpha) Y_{l_1 m_1}(\beta\alpha) Y_{l_2 m_2}(\beta\alpha) \\ &= \left[\frac{(2l_1 + 1)(2l_2 + 1)}{4\pi(2l + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} C_{000}^{l_1 l_2 l} C_{m_1 m_2 m}^{l_1 l_2 l} \end{aligned} \quad (3.192)$$

Взяв более частную форму этого соотношения, используя формулу (3.147) и выполняя интегрирование по α , находим интеграл от трех функций Лежандра:

$$\int_0^\pi \sin \beta d\beta P_l(\cos \beta) P_{l_1}(\cos \beta) P_{l_2}(\cos \beta) = \frac{2}{2l+1} (C_{000}^{l_1 l_2 l})^2. \quad (3.193)$$

Частный коэффициент Вигнера $C_{000}^{l_1 l_2 l}$, появляющийся в этом результате, может быть выражен одним слагаемым (без суммирования). (В общем случае коэффициент Вигнера невозможно свести к одному слагаемому, за исключением *граничных* или *экстремальных* случаев, когда одно из квантовых чисел проектирования равно максимальному или минимальному значению.) Рака [29] смог выполнить суммирование для частного случая $m_1 = m_2 = m = 0$:

$$C_{000}^{l_1 l_2 l} = \left[\frac{(2l+1)(l_1+l_2-l)!(l_1-l_2+l)!(-l_1+l_2+l)!}{(l_1+l_2+l+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{(-1)^{L-l} L!}{(L-l_1)!(L-l_2)!(L-l)!}, \quad (3.194)$$

где

$$L \equiv (l_1 + l_2 + l)/2 \quad \text{для } l_1 + l_2 + l \text{ четных.}$$

Следствием первого соотношения симметрии (формула (3.180)) является соотношение

$$C_{000}^{l_1 l_2 l} = 0 \quad \text{для } l_1 + l_2 + l \text{ нечетных.} \quad (3.195)$$

Имеется физическая интерпретация этого результата, выраженного соотношением (3.195). К вращениям присоединяют *операцию отражения* $\mathcal{J}$ (инверсия относительно начала координат), и группа превращается в группу вращений и отражений. При операции отражения $\mathcal{J}$: $\mathbf{x} \rightarrow -\mathbf{x}$ шаровые сферические функции (формула (3.153)), а следовательно, и сферические функции (формула (3.152)) умножаются на $(-1)^l$. Отсюда следует, что при операции отражения подынтегральное выражение в (3.192) подвергается изменению фазы $(-1)^{l_1+l_2+l}$; так как интеграл инвариантен, то заключаем, что $l_1 + l_2 + l$ должно быть четным, если мы хотим, чтобы интеграл не превращался в 0. Согласно этому, соотношение (3.195) выражает *сохранение четности*.

14. Понятие тензорного оператора

Обзор. Понятие углового момента и связанное с ним понятие симметрии относительно вращений привело нас с точки зрения физики к изучению характеристических состояний $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$ и их трансформационных свойств. Следующим шагом является проверка действия физически важных операторов на эти характе-

ристические состояния, т.е. мы должны характеризовать матричные элементы $M.Э. = \langle \text{конечное состояние} | \text{оператор} | \text{начальное состояние} \rangle \in \mathbb{C}$,

которые определяют (наблюдаемые) *вероятности переходов* $|M.Э.|^2$ для переходов из одного характеристического состояния в другое, вызванных оператором (возмущением). Таким образом, внимание в физике переносится с самих состояний $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$ на преобразования, действующие на эти состояния. Мы приходим к необходимости структуры, отвечающей за физическое развитие теории углового момента, результаты которой выходят за рамки математической литературы. С нашей точки зрения, эти физически ориентированные понятия могут (и должны) иметь математическое значение. Мы покажем в этой главе, что это развитие концентрируется на двух структурах: зависящих от базиса *операторах Вигнера* и независимых от базиса (инвариантных) *операторах Рака*.

Определение тензорного оператора. Рассмотрим физическую систему, имеющую симметрию относительно вращений и, следовательно, характеризующуюся состояниями точного углового момента $|(\alpha)jm\rangle$. Так как может существовать (а обычно и существует) дополнительная структура, кроме переменных углового момента, то мы используем индексирующее множество (α) , обозначающее множество квантовых индексов. (Эти индексы с необходимостью соответствуют операторам, которые коммутируют с угловыми моментами; см. примечание на стр. 41).

Рассмотрим теперь произвольный оператор $\mathcal{O}$, который действует на систему. Мы можем описать действие оператора в деталях множеством матричных элементов

$$\{ \langle (\alpha')j'm' | \mathcal{O} | (\alpha)jm \rangle \}. \quad (3.196)$$

Так как эти матричные элементы являются *амплитудами вероятностей* и так как физические вероятности должны с необходимостью быть инвариантными относительно выбора координатной системы, то мы должны иметь

$$|\langle (\alpha')j'm' | \mathcal{O} | (\alpha)jm \rangle|^2 = \text{инвариант относительно вращений системы координат.} \quad (3.197)$$

Следствия наложения этого условия содержатся в фундаментальной теореме теории симметрий [13, 49]:

Инвариантность физической вероятности (3.197) при симметрии предполагает что-либо а) амплитуда вероятности (3.196) инвариантна, либо б) амплитуда вероятности преобразуется при симметрии в комплексно сопряженную величину.

Как показал Вигнер, последний случай соответствует обращению времени, и результат для симметрии относительно вращений состоит в том, что мы имеем *инвариантность самой амплитуды вероятности* (доказательство теоремы Вигнера дано в [102]):

$$\langle (\alpha')j'm' | \mathcal{O} | (\alpha)jm \rangle = \text{инвариант относительно вращений системы координат.} \quad (3.198)$$

Так как это соотношение справедливо для всех кет-векторов $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$ и для всех бра-векторов $\{ \langle (\alpha)jm| \}$ (векторов дуального гильбертова пространства),

то мы заключаем:

$$\langle \Psi | \mathcal{O} | \Phi \rangle = \text{инвариант относительно вращений системы координат.} \quad (3.199)$$

где $|\Phi\rangle$ и $\langle \Psi|$ обозначают произвольные векторы гильбертова пространства и пространства, дуального к нему, соответственно.

Действие оператора вращательной симметрии $\mathcal{U} = \exp(-i\psi/\hbar \cdot \mathbf{J})$ на кет-вектор $|\Phi\rangle$ является унитарным преобразованием

$$|\Phi\rangle \rightarrow |\Phi'\rangle \equiv \mathcal{U}|\Phi\rangle \quad (3.200)$$

с соответствующим преобразованием бра-вектора $\langle \Psi|$

$$\langle \Psi| \rightarrow \langle \Psi'| \equiv \langle \Psi| \mathcal{U}^{-1} \quad (3.201)$$

Явное утверждение инвариантности (3.199) теперь принимает вид

$$\langle \Psi' | \mathcal{O} | \Phi' \rangle = \langle \Psi' | \mathcal{O}' | \Phi' \rangle, \quad (3.202)$$

где $\mathcal{O}'$ обозначает оператор $\mathcal{O}$, отнесенный к повернутой системе отсчета. Таким образом,

$$\langle \Psi' | \mathcal{O} | \Phi' \rangle = \langle \Psi' | \mathcal{U}^{-1} \mathcal{O}' \mathcal{U} | \Phi' \rangle \quad (3.203)$$

для произвольных кет-векторов $|\Phi\rangle$ и произвольных бра-векторов $\langle \Psi|$. Мы заключаем, что $\mathcal{O} = \mathcal{U}^{-1} \mathcal{O}' \mathcal{U}$ или эквивалентно

$$\mathcal{O}' = \mathcal{U} \mathcal{O} \mathcal{U}^{-1}. \quad (3.204)$$

При инфинитезимальных преобразованиях $\mathcal{U} = \exp(-i\delta\omega \cdot \mathbf{J})$, где $\omega = \psi/\hbar$, можем записать

$$\mathcal{O}' = \mathcal{O} - i\delta\omega \cdot [\mathbf{J}, \mathcal{O}]$$

и

$$\delta\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}' - \mathcal{O} = -i\delta\omega \cdot [\mathbf{J}, \mathcal{O}]. \quad (3.205)$$

Появление коммутатора общего оператора $\mathcal{O}$ с угловым моментом $\mathbf{J}$ мотивирует определение *неприводимого тензорного оператора* ранга J ($J = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$). Неприводимый тензорный оператор ранга J (обозначаемый через T_M^J) определяется как *множество линейных операторов* $\{T_M^J; M = J, J-1, \dots, -J\}$, где каждый оператор является отображением гильбертова пространства кет-векторов в себя; коммутаторное действие углового момента $\mathbf{J}$ на множество этих операторов состоит в отображении этого множества в себя согласно следующим (определяющим) правилам:

$$\begin{aligned} [J_+, T_M^J] &= [(J-M)(J+M+1)]^{\frac{1}{2}} T_{M+1}^J, \\ [J_-, T_M^J] &= [(J+M)(J-M+1)]^{\frac{1}{2}} T_{M-1}^J, \\ [J_3, T_M^J] &= M T_M^J. \end{aligned} \quad (3.206)$$

Сами линейные операторы T_M^J часто называют тензорными операторами, но более корректно называть их *компонентами* тензорного оператора T^J .

Условия, выраженные коммутационными соотношениями (3.206), состоят в том, что компоненты неприводимого тензорного оператора T_M^J преобразуются

при коммутационном действии компонент J_i углового момента $\mathbf{J}$ так, как будто они обладают точным угловым моментом J, M :

$$\begin{aligned}\sum_i [J_i, [J_i, T_M^J]] &= J(J+1)T_M^J, \\ [J_3, T_M^J] &= MT_M^J.\end{aligned}\quad (3.207)$$

Второй полезный результат, который следует из определяющих соотношений (3.206), показывает, как можно породить все компоненты $(T_J^J, \dots, T_{-J}^J)$ тензорного оператора ранга J наивысшей компонентой T_J^J , многократно коммутируя ее с понижающим оператором J_- :

$$T_M^J = \left[\frac{(J+M)!}{(2J)!(J-M)!} \right]^{\frac{1}{2}} [J_-, T_J^J]_{(J-M)}. \quad (3.208)$$

Часто удобно записывать определяющие соотношения (3.206) в иной форме, в которой коэффициенты тензора $C_{M,m,M+m}^{JJJ}$ введены явно (см. табл. 1 в приложении (т. 2)). Вводятся так называемые сферические компоненты углового момента J :

$$\begin{aligned}J_{+1} &\equiv -(J_1 + iJ_2)/\sqrt{2}, \\ J_0 &\equiv J_3, \\ J_{-1} &\equiv (J_1 - iJ_2)/\sqrt{2},\end{aligned}\quad (3.209)$$

и получаем единое выражение¹⁾ для соотношений (3.206)

$$[J_m, T_M^J] = [J(J+1)]^{\frac{1}{2}} C_{M,m,M+m}^{JJJ} T_{M+m}^J. \quad (3.210)$$

Определение тензорного оператора было построено так, что мы можем найти эффект конечных преобразований над T_M^J путем многократного коммутирования (см. формулу (3.37)):

$$\mathcal{U}(\omega) T_M^J \mathcal{U}^{-1}(\omega) = \sum_{n=0}^J [-i\omega \cdot \mathbf{J}, T_M^J]_{(n)} / n!. \quad (3.211)$$

Чтобы вычислить кратный коммутатор, заметим, что свойство тензорного оператора может быть записано в виде

$$[J_i, T_M^J] = \sum_{M'} \langle JM' | J_i | JM \rangle T_{M'}^J. \quad (3.212)$$

Этот результат предполагает, что кратный коммутатор становится матричным произведением:

$$[-i\omega \cdot \mathbf{J}, T_M^J]_{(n)} = \sum_{M'} \langle JM' | (-i\omega \cdot \mathbf{J})^n | JM \rangle T_{M'}^J. \quad (3.213)$$

Соотношение (3.213) показывает, что мы можем просуммировать кратный коммутатор и найти

¹⁾ Следует тщательно соблюдать фазовые соглашения (3.209). См. приложение Г.

$$\begin{aligned}\mathcal{U}(\omega)T_M^J\mathcal{U}^{-1}(\omega) &= \sum_{M'} \langle JM'|e^{-i\omega \cdot J}|JM\rangle T_{M'}^J \\ &= \sum_{M'} D_{M'M}^J(\omega)T_{M'}^J.\end{aligned}\quad (3.214)$$

Отсюда следует, что компоненты тензорного оператора ранга J преобразуются при действии подобия оператором $\mathcal{U}$ точно так же, как преобразуется кет-вектор при обычном действии оператора $\mathcal{U}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{U}: |(\alpha)JM\rangle &\rightarrow |(\alpha)JM'\rangle' \equiv \mathcal{U}|(\alpha)JM\rangle \\ &= \sum_{M'} D_{M'M}^J(U)|(\alpha)JM'\rangle,\end{aligned}\quad (3.215)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{U}: T_M^J &\rightarrow (T_M^J)' = \mathcal{U}T_M^J\mathcal{U}^{-1} \\ &= \sum_{M'} D_{M'M}^J(U)T_{M'}^J.\end{aligned}\quad (3.216)$$

Замечания. а) Неприводимые тензорные операторы аналогичны базисным кет-векторам в мультиплете $\{|(\alpha)jm\rangle; m = j, \dots, -j\}$, и, подобно этим мультиплетам, *физические тензорные операторы* обычно имеют индексы, которые определяют физические свойства оператора.

б) Базисные кет-векторы $\{|(\alpha)jm\rangle; m = j, \dots, -j\}$ сами могут рассматриваться как операторы, действующие на гильбертовом пространстве состояний физической системы. Сформулируем эту концепцию на языке волновых функций и дифференциальных операторов, так как обычно в таком виде она возникает в физических задачах. Пусть $\Phi_{(\alpha)jm}$ обозначает волновую функцию с точным угловым моментом, а Φ и Ψ обозначают произвольные функции в гильбертовом пространстве. Тогда если операторы углового момента $\mathcal{J}_i$ обладают *свойством производной*

$$\mathcal{J}_i(\Phi\Psi) = (\mathcal{J}_i\Phi)\Psi + \Phi(\mathcal{J}_i\Psi), \quad (3.217)$$

то мы можем записать

$$[\mathcal{J}_i, \Phi_{(\alpha)jm}]\Psi = (\mathcal{J}_i\Phi_{(\alpha)jm})\Psi,$$

т.е.

$$[\mathcal{J}_i, \Phi_{(\alpha)jm}] = (\mathcal{J}_i\Phi_{(\alpha)jm}) \quad (3.218)$$

является справедливым операторным тождеством. Следовательно, соотношения (3.206) имеют место для волновых функций, имеющих точный угловой момент. Необходимость свойства производной для интерпретации волновых функций как тензорных операторов часто не учитывалась в литературе [50].

в) Определение тензорного оператора (3.206) может показаться слишком ограничительным. По-видимому, более общее определение тензорного оператора T состоит в том, что его компоненты $(T_1, T_2, \dots, T_n)$ должны быть линейными операторами, которые преобразуются линейно сами в себя при коммутационном действии операторов углового момента J_i :

$$[J_i, T_\lambda] = \sum_{\mu=1}^n a_{\mu\lambda}^{(i)} T_\mu. \quad (3.219)$$

В примечании 9 мы обсуждаем условия, при которых возможно, беря линейные комбинации от T_λ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$), разбить T на подмножества операторов

$$\{T_M^J: M = J, \dots, -J\}, \quad J = J_1, J_2, \dots, \quad (3.220)$$

которые удовлетворяют правилам (3.206). (Термин *неприводимый* означает¹⁾, что дальнейшее разбиение невозможно для операторов, удовлетворяющих условиям (3.206).)

Множества операторов, удовлетворяющих определяющим соотношениям (3.206), часто встречаются в физических задачах, что делает изучение неприводимых тензорных операторов задачей фундаментальной важности в теории углового момента. Примеры тензорных операторов даны в примечании 10.

г) Выше (замечание «а», стр. 50) мы отметили, что активное преобразование вектора (заданное формулами (2.1) и (3.41)) и обычное преобразование векторного оператора (заданное формулами (3.40) и (3.42)) различаются заменой R на R^{-1} . Повторяем, что это различие не является ошибкой, а (в конечном анализе) есть результат соглашений, принятых при определении тензорного оператора. Настоящее замечание имеет целью выяснить эту ситуацию.

Для того чтобы было яснее, сравним общее преобразование (3.216) тензорного оператора и преобразования (3.41) и (3.42), записывая последние в терминах сферических компонент с помощью соотношения $D^1(U) = A^\dagger R A$ (см. формулы (3.28) — (3.32) и (3.209)). В результате имеем

$$x_\mu \rightarrow x'_\mu \equiv \sum_\nu D_{\mu\nu}^{1*}(U) x_\nu, \quad (3.41')$$

$$J_\mu \rightarrow J'_\mu \equiv \sum_\nu D_{\mu\nu}^1(U) J_\nu. \quad (3.42')$$

Таким образом, видим из (3.42'), что оператор углового момента преобразуется согласно определению (3.216) неприводимого тензорного оператора ранга $J = 1$, тогда как (активное) преобразование (3.41') вектора $x \in \mathbb{R}^3$ обратно к преобразованию (3.42'), так как $[D^1(U)]^{-1} = [D^1(U)]^+$.

Заметим далее, что понятие тензорного оператора включает два различных пространства, на которых осуществляются преобразования. Первым является

¹⁾ Имеется другое определение неприводимости тензорных операторов, справедливое как для тензорных операторов, преобразующихся по представлению группы $SO(3)$, так и для тензорных операторов, преобразующихся по представлению произвольной компактной (и даже полупростой некомпактной) группы Ли. Согласно этому определению, тензорный оператор T неприводим, если множество всех операторов J_i и T_M^J (см. формулу (3.206)) неприводимо. Существуют разные определения неприводимости множества операторов.

В соответствии с этим получаем различные определения неприводимости тензорных операторов. Необходимые и достаточные условия неприводимости тензорного оператора T (когда под неприводимостью понимается отсутствие отличных от скаляров ограниченных операторов, перестановочных со всеми операторами J_i и T_M^J) даны в разд. 10 работы [103]. Там же введено понятие эквивалентности двух тензорных операторов и выведены необходимые и достаточные условия эквивалентности. — *Прим. перев.*

гильбертово пространство, на котором действует преобразование $|\Psi\rangle \rightarrow \mathcal{U}|\Psi\rangle$; вторым является пространство, снабженное индексами $\{(J, M)\}$, которые обозначают операторы. Понятие тензорного оператора связывает эти два пространства требованием, чтобы индуцированное преобразование $T_M^J \rightarrow \mathcal{U} T_M^J \mathcal{U}^{-1}$ являлось таким же, как и индексированное преобразование

$$|JM\rangle \rightarrow \sum_{M'} D_{M'M}^J(U) |JM'\rangle.$$

Сущность понятия тензорного оператора состоит в том, что оно связывает различные преобразования в разделенных пространствах. Мишель ([50a], стр. 48) в своем определяющем обсуждении, имея дело с этой связью, (провокационно) заявляет, что «тензорные операторы на $\mathcal{H}$ не являются операторами на $\mathcal{H}$ ».)

Важно заметить, что существует *свободный выбор* в такой ассоциации двух преобразований: вместо обычного соглашения (согласно которому тензорные операторы преобразуются как кет-векторы) можно было с таким же успехом выбрать бра-векторные преобразования. Это был бы неверный и весьма неестественный выбор, который на практике привел бы к большому беспорядку из-за двусмысленности в обозначении матричного элемента $\langle \Psi | \mathcal{O} | \Phi \rangle$ для неэрмитовых операторов: действует ли оператор $\mathcal{O}$ налево или направо?

Мы заключаем, что дуальность между соотношениями (3.41') и (3.42') является *соглашением*, которое базируется на различных значениях, ассоциированных с вектором и векторным оператором.

15. Теорема Вигнера — Экарта

Общее понятие *векторного оператора* (определенного его коммутационными соотношениями с полным угловым моментом) было введено в физику Гюттингером и Паули [51] (см. также [52, 53]) с целью вывода из новой квантовой механики (матричной механики) относительных интенсивностей компонент модели Зеемана, возникающих в сложных спектрах (формулы интенсивности Хёбла — Кронига). (Полное описание векторных операторов дано в книгах Вигнера [13], Кондона и Шортли [28] и Борна и Жордана [53].)

По определению декартовы компоненты V_j ($j = 1, 2, 3$) векторного оператора $\mathbf{V}$ подчиняются тем же коммутационным соотношениям с компонентами J_i ($i = 1, 2, 3$) углового момента $\mathbf{J}$, что и сами операторы J_i , т.е.

$$[J_i, V_j] = i\epsilon_{ijk} V_k, \quad (3.221)$$

что предполагает¹⁾,

$$\mathbf{J} \times \mathbf{V} + \mathbf{V} \times \mathbf{J} = 2i\mathbf{V}. \quad (3.222)$$

¹⁾ Из соотношения (3.221) следует (3.222); интересно, что обратное неверно.

Чтобы показать, что (3.221) определяет неприводимый тензорный оператор ранга 1, запишем коммутационные соотношения (3.221) в терминах J_+ , J_- и J_3 и получим

$$\begin{aligned}[J_{\pm}, V_{\mu}] &= [(1 \mp \mu)(2 \pm \mu)]^{\frac{1}{2}} V_{\mu \pm 1}, \\ [J_3, V_{\mu}] &= \mu V_{\mu},\end{aligned}\quad (3.223)$$

где

$$\begin{aligned}V_{+1} &= -(V_1 + iV_2)/\sqrt{2}, \\ V_0 &= V_3, \\ V_{-1} &= (V_1 - iV_2)/\sqrt{2}.\end{aligned}\quad (3.224)$$

Так как результат (3.223) согласуется с определением (3.206), заключаем, что V — неприводимый тензор ранга 1. Операторы V_{μ} ($\mu = +1, 0, -1$) называются *сферическими компонентами* векторного оператора V (см. приложение Г).

Замечание. Кроме самого J мы уже встречали несколько примеров векторных операторов: а) каждый из базисных векторов f_1, f_2, f_3 (см. (3.113)), определяющих ориентацию твердого тела, является векторным оператором по отношению к полному угловому моменту J , б) каждый из угловых моментов $J(1)$ и $J(2)$ двух кинематически независимых систем является векторным оператором по отношению к полному угловому моменту $J = J(1) + J(2)$ и в) вектор положения r и линейный импульс p являются векторными операторами по отношению к орбитальному угловому моменту $L = r \times p$ одной частицы.

Используя только алгебраические следствия определяющих соотношений (3.223), в самых первых обсуждениях задачи [28, 51, 53] были получены явные результаты для ненулевых матричных элементов $\langle (\alpha') j' m' | V_{\mu} | (\alpha) j m \rangle$. Мы не даем этот вывод здесь, так как эти ранние результаты для векторных операторов указали путь к получению общего результата для неприводимого тензорного оператора произвольного ранга [13, 27] и к более простому выводу вида ненулевых матричных элементов.

Эккарт [27] и Вигнер [13] увидели, что результаты, полученные для векторного оператора, были частным случаем общего результата для неприводимых тензорных операторов.

Замечание. Вклад Эккарта¹⁾ состоит в том, что он заметил, что форма результата для связывания двух угловых моментов

$$|j_1 j_2\rangle j m | \alpha_1 j_1 m_1; \alpha_2 j_2 m_2 \rangle \propto C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j},$$

где

$$| \alpha_1 j_1 m_1; \alpha_2 j_2 m_2 \rangle \equiv | (\alpha_1) j_1 m_1 \rangle | (\alpha_2) j_2 m_2 \rangle,$$

в сущности остается правильной, когда собственные кет-векторы $| (\alpha) j m \rangle$ заменены операторами $T_{(\alpha) j m}$, имеющими те же трансформационные свойства при вращениях, что и сами собственные кет-векторы.

¹⁾ Эккарт рассмотрел лишь случай векторных операторов, но общий результат ясно предполагался.

Вигнер [13] дал явное определение (3.216) неприводимого тензорного оператора и затем определил ненулевые матричные элементы с помощью процесса, к которому мы теперь переходим.

Теорема Вигнера — Экарта. Каждый матричный элемент неприводимого тензорного оператора в базисе углового момента является произведением двух множителей: множителя, зависящего только от углового момента («коэффициент Вигнера»), и множителя, не зависящего от квантовых чисел проекции («редуцированный матричный элемент»).

Доказательство. Рассмотрим амплитуду вероятности $\langle (\alpha')j'm' | T_M^J | (\alpha)jm \rangle$. При преобразовании $\mathcal{Q}$ имеем $|(\alpha)jm\rangle \rightarrow \mathcal{Q}|(\alpha)jm\rangle$, $\langle (\alpha')j'm' | \rightarrow \langle (\alpha')j'm' | \mathcal{Q}^{-1}$ и $T_M^J \rightarrow \mathcal{Q}T_M^J\mathcal{Q}^{-1}$. Так как амплитуда вероятности инвариантна относительно преобразований, то имеем

$$\langle (\alpha')j'm' | T_M^J | (\alpha)jm \rangle = \sum_{\mu'M'\mu} D_{\mu'm'}^{j'*}(U) D_{\mu m}^j(U) D_{M'M}^J(U) \langle (\alpha')j'\mu' | T_M^J | (\alpha)j\mu \rangle. \quad (3.225)$$

Так как этот результат справедлив для произвольных вращений, то можем проинтегрировать по всем вращениям, используя интеграл по матрицам вращений, заданный в (3.190). Таким образом, получаем

$$\langle (\alpha')j'm' | T_M^J | (\alpha)jm \rangle = \langle (\alpha')j' || T^J || (\alpha)j \rangle C_{mMm'}^{JJJ}, \quad (3.226)$$

где редуцированный матричный элемент определен следующим образом:

$$\langle (\alpha')j' || T^J || (\alpha)j \rangle \equiv (2j' + 1)^{-1} \sum_{\alpha'M'\mu} C_{\mu M\mu'}^{JJJ} \langle (\alpha')j'\mu' | T_M^J | (\alpha)j\mu \rangle. \quad (3.227)$$

Альтернативная форма редуцированного матричного элемента дается формулой

$$\langle (\alpha')j' || T^J || (\alpha)j \rangle = \sum_{\mu M'} C_{\mu M'}^{JJj'} \langle (\alpha')j'\mu' | T_M^J | (\alpha)j\mu \rangle. \quad (3.227')$$

Этот результат прямо следует из (3.226) и ортогональности коэффициентов Вигнера (суммирование по μ и M' порождает коэффициент, не зависящий от μ'). (Заметим, что в эти результаты входит расширенное определение коэффициентов Вигнера.) Заметим также, что

$$\sum_{\mu M'} C_{\mu M'}^{JJj''} \langle (\alpha')j'\mu' | T_M^J | (\alpha)j\mu \rangle = 0, \quad j'' \neq j', \quad (3.228)$$

Этот результат следует из прямой подстановки (3.226) во второе тождество в (3.227'). ■

Обозначение

$$\langle (\alpha')j' || T^J || (\alpha)j \rangle \quad (3.229)$$

введено Кондоном и Шортли для редуцированного матричного элемента, и, как показывает определение, эта величина не зависит от квантовых чисел проекции и поэтому является инвариантом относительно вращений.

Замечания. а) Наиболее поразительной особенностью теоремы Вигнера — Экарта является явное отделение общих (теоретико-групповых) аспектов оператора от его особенностей (редуцированные матричные элементы),

которые связаны с соответствующим физическим измерением. Обычно это выражают, говоря, что «геометрические аспекты» отделены от «физики задачи». Однако, как бы это ни выражали, именно такое отделение приводит к широкой применимости структуры полного углового момента в физических задачах.

б) Оправдание необычного обозначения $\langle (\alpha')j' \| \mathbf{T}^J \| (\alpha)j \rangle$ (формула (3.229)) для редуцированного матричного элемента, согласно которому появляются $\langle (\alpha')j' \|$ и $\| (\alpha)j \rangle$ как «редуцированные бра- и кет-векторы», было дано Кондоном и Шортли. Они заметили, что эта схема обозначений позволяет трактовать редуцированные матричные элементы как элементы матрицы (таким образом оправдывая также выражение «редуцированный матричный элемент»), когда переходят от одного полного множества базисных состояний $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$ к другому $\{ |(\beta)jm\rangle \}$. Таким образом, при изменении базиса, заданном формулой

$$|(\beta)jm\rangle = \sum_{(\alpha)} \langle (\alpha)j | (\beta)j \rangle |(\alpha)jm\rangle, \quad (3.230)$$

получаем редуцированные матричные элементы в новом базисе:

$$\langle (\beta')j' \| \mathbf{T}^J \| (\beta)j \rangle = \sum_{(\alpha')(\alpha)} \langle (\beta')j' | (\alpha')j' \rangle \langle (\alpha')j' \| \mathbf{T}^J \| (\alpha)j \rangle \langle (\alpha)j | (\beta)j \rangle.$$

(Коэффициент преобразования $\langle (\alpha)j | (\beta)j \rangle$ не зависит от m , так как действие оператора углового момента $\mathbf{J}$ на оба множества базисных векторов одинаково.)

16. Связывание тензорных операторов

Существует второй аспект коэффициентов Вигнера, который так же важен, как и свойство, выраженное теоремой Вигнера — Экарта. Это аспект связывания: коэффициенты Вигнера $\{ C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} \}$ осуществляют связывание в пространстве тензорных операторов. Рассмотрим два оператора $\mathbf{S}^{k_1}$ и $\mathbf{T}^{k_2}$, каждый из которых является неприводимым тензорным оператором по отношению к полному угловому моменту $\mathbf{J}$ физической системы, имеющей базисные кет-векторы $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$. Таким образом, по определению каждое из множеств операторов $\{ S_{\mu_1}^{k_1} \}$ и $\{ T_{\mu_2}^{k_2} \}$ подчиняется коммутационным соотношениям (3.206) с компонентами углового момента $\mathbf{J}$. Иначе говоря, при вращении, порожденном угловым моментом $\mathbf{J}$, каждое из этих множеств операторов подвергается унитарному преобразованию, заданному соотношениями (3.216).

Введем теперь символ

$$[\mathbf{S}^{k_1} \times \mathbf{T}^{k_2}]^k \quad (3.231)$$

который обозначает операторы с компонентами

$$[\mathbf{S}^{k_1} \times \mathbf{T}^{k_2}]_{\mu}^k, \quad \mu = k, k-1, \dots, -k, \quad (3.232)$$

которые определяются связыванием компонент операторов $\mathbf{S}^{k_1}$ и $\mathbf{T}^{k_2}$:

$$[\mathbf{S}^{k_1} \times \mathbf{T}^{k_2}]_{\mu}^k \equiv \sum_{\mu_1 \mu_2} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} S_{\mu_1}^{k_1} T_{\mu_2}^{k_2}. \quad (3.233)$$

Мы должны доказать, что этот оператор $[S^{k_1} \times T^{k_2}]^k$ в самом деле является неприводимым тензором, имеющим по отношению к угловому моменту свойства, определенные индексом k , т.е. имеет ранг k .

Доказательство. По предположению действие оператора вращения $\mathcal{U}$ на компоненты тензорных операторов S^{k_1} и T^{k_2} имеет вид

$$\mathcal{U}: \mathcal{U} S_{\mu_1}^{k_1} \mathcal{U}^{-1} = \sum_{\mu_1'} D_{\mu_1' \mu_1}^{k_1}(U) S_{\mu_1'}^{k_1},$$

$$\mathcal{U} T_{\mu_2}^{k_2} \mathcal{U}^{-1} = \sum_{\mu_2'} D_{\mu_2' \mu_2}^{k_2}(U) T_{\mu_2'}^{k_2}.$$

Поэтому действие $\mathcal{U}$ на произведение $S_{\mu_1}^{k_1}$ и $T_{\mu_2}^{k_2}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{U}: \mathcal{U} S_{\mu_1}^{k_1} T_{\mu_2}^{k_2} \mathcal{U}^{-1} &= (\mathcal{U} S_{\mu_1}^{k_1} \mathcal{U}^{-1})(\mathcal{U} T_{\mu_2}^{k_2} \mathcal{U}^{-1}) \\ &= \sum_{\mu_1' \mu_2'} D_{\mu_1' \mu_1}^{k_1}(U) D_{\mu_2' \mu_2}^{k_2}(U) S_{\mu_1'}^{k_1} T_{\mu_2'}^{k_2}. \end{aligned}$$

Используя этот результат и соотношение (3.188), имеем

$$\mathcal{U} [S^{k_1} \times T^{k_2}]_{\mu}^k \mathcal{U}^{-1} = \sum_{\mu'} D_{\mu' \mu}^k(U) [S^{k_1} \times T^{k_2}]_{\mu'}^k.$$

Этот результат показывает, что $[S^{k_1} \times T^{k_2}]^k$ является также неприводимым тензором ранга k по отношению к угловому моменту J . ■

Замечания. а) Заметим, что связывание по своим свойствам является чисто кинематическим эффектом, т.е. пространство, на котором действуют операторные компоненты, не связано прямо со связыванием; свойства коммутирования тензорных операторов $S_{\mu_1}^{k_1}$ и $T_{\mu_2}^{k_2}$ друг с другом не воздействуют на связывание, и порядок, в котором операторные компоненты действуют, сохраняется при связывании.

б) Возможность комбинирования тензорных операторов с образованием новых тензорных операторов является далеко идущим концептуальным расширением, которое показывает, что лежащая в основе структура обобщает кольцевую структуру, которая хорошо известна в алгебре. (Обобщение состоит в том, что определены многие различные произведения; см. замечание «в».) Как линейные операторы, тензорные операторы могут складываться, а также умножаться на числовые константы и инвариантные операторы; результирующая структура подчиняется необходимым дистрибутивным законам (см. [102]).

в) Используя связывающую структуру, можно выполнять несколько типов умножения тензорных операторов: скалярное произведение, объединяющее два тензорных оператора в инвариант относительно вращений, выполняется с помощью коэффициентов Вигнера

$$C_{m_0}^{j k_0} = \delta_{jk} \delta_{m, -m} \frac{(-1)^{j-m}}{\sqrt{2j+1}}. \quad (3.234)$$

(Как показано в разд. 20, это скалярное связывание имеет все свойства метрики.) Связывание в вектор осуществляется с помощью коэффициентов Вигнера $C_{m, \mu, m+\mu}^{j k_1}$. Ясно, что могут быть осуществлены дальнейшие тензорные связывания высшего ранга.

г) Основное свойство, унаследованное от структуры гильбертова пространства, состоит в том, что операция тензорного связывания ассоциативна. Это свойство является фундаментальным. Из него следует важное тождество Б — Э (см. разд. 18), которое доказывается в [102].

17. Применения теоремы Вигнера — Экарта

Общий закон связывания для редуцированных матричных элементов. Применим теорему Вигнера — Экарта к связыванию тензорному оператору $[S^{k_1} \times T^{k_2}]^k$:

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha') j' m' | [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k | (\alpha) j m \rangle \\ &= \langle (\alpha') j' | [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k | (\alpha) j \rangle C_{m \mu m'}^{j k j'}, \end{aligned} \quad (3.235)$$

где редуцированные матричные элементы определяются из (3.227) и (3.233)¹⁾:

$$\begin{aligned} & \delta_{j' j''} \langle (\alpha') j' | [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k | (\alpha) j \rangle \\ &= \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu m} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} C_{m \mu m'}^{j k j''} \langle (\alpha') j' m' | S_{\mu_1}^{k_1} T_{\mu_2}^{k_2} | (\alpha) j m \rangle, \end{aligned} \quad (3.236)$$

где $m' (-j' \leq m' \leq j')$ произвольно.

Правая часть соотношения (3.236) может быть еще упрощена, так как S^{k_1} и T^{k_2} — неприводимые тензорные операторы по отношению к J . Поэтому применима теорема Вигнера — Экарта, что приводит к следующему результату:

$$\langle (\alpha') j' m' | S_{\mu_1}^{k_1} | (\alpha) j m \rangle = \langle (\alpha') j' | S^{k_1} | (\alpha) j \rangle C_{m \mu_1 m'}^{j k_1 j'}, \quad (3.237)$$

$$\langle (\alpha') j' m' | T_{\mu_2}^{k_2} | (\alpha) j m \rangle = \langle (\alpha') j' | T^{k_2} | (\alpha) j \rangle C_{m \mu_2 m'}^{j k_2 j'}. \quad (3.238)$$

Вводя промежуточные состояния $|(\alpha'') j'' m''\rangle$ в разложение матричного элемента

$$\langle (\alpha') j' m' | S_{\mu_1}^{k_1} T_{\mu_2}^{k_2} | (\alpha) j m \rangle,$$

и используя (3.237) и (3.238), приводим редуцированный матричный элемент (3.236) к виду

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha') j' | [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k | (\alpha) j \rangle \\ &= (-1)^{k_1 + k_2 - k} \sum_{(\alpha'') j''} [(2j'' + 1)(2k + 1)]^{\frac{1}{2}} W(j' k_1 j k_2; j'' k) \\ & \times \langle (\alpha') j' | S^{k_1} | (\alpha'') j'' \rangle \langle (\alpha'') j'' | T^{k_2} | (\alpha) j \rangle, \end{aligned} \quad (3.239)$$

¹⁾ Редуцированный матричный элемент получается при $j'' = j'$ в (3.236). Однако, для того чтобы показать правильно связывание в нуль самих коэффициентов Вигнера (см. (3.240)), полезно вводить в этот результат дельта-символ Кронекера из (3.228).

где коэффициенты $W(j' k_1 j k_2; j'' k)$ определяются суммой по четырем коэффициентам Вигнера:

$$(-1)^{k_1+k_2-k} \delta_{j j''} [(2j''+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}} W(j' k_1 j k_2; j'' k) \\ \equiv \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu m m'} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} C_{m \mu m'}^{j k j''} C_{m' \mu_1 m}^{j' k_1 j'} C_{m \mu_2 m'}^{j k_2 j''} \quad (3.240)$$

(m' может быть выбрано произвольно ($-j \leq m' \leq j$) в этом результате.)

Коэффициенты $W(j' k_1 j k_2; j'' k)$ были введены в теорию углового момента Рака [29], и они известны как *коэффициенты Рака*. Подобные коэффициенты, называемые *6j-коэффициентами Вигнера*, были также введены Вигнером [47]. Соотношение между *6j-коэффициентами Вигнера* (обозначаемыми фигурными скобками) и *коэффициентами Рака* имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} j' & k_1 & j'' \\ k_2 & j & k \end{matrix} \right\} = (-1)^{j'+k_1+j+k_2} W(j' k_1 j k_2; j'' k). \quad (3.241)$$

Соотношение (3.239) выражает общий закон связывания для редуцированных матричных элементов. Его форма должна быть сравнима с законом связывания (3.233) для самих тензорных операторов. В последнем законе используются коэффициенты Вигнера для связывания двух тензорных операторов, чтобы образовать третий; в законе связывания для редуцированных матричных элементов роль коэффициентов связи играют коэффициенты Рака.

Замечания. а) То, что сами коэффициенты Рака, а не коэффициенты Вигнера, могут рассматриваться как основные в теории углового момента, не очевидно из их определения (3.240) с помощью коэффициентов Вигнера. (Эта точка зрения будет разъяснена в разд. 18; детальное развитие дано в книге [102].) Тот факт, что коэффициенты Рака существуют «как независимые объекты», приводит к тому, что закон связывания (3.239) для редуцированных матричных элементов возводится до основной теоремы теории углового момента. Частные следствия соотношения (3.239), которые рассматриваются в остальной части этого раздела, являются основными инструментами в спектроскопии.

б) Исторически Рака [29, II] ввел коэффициенты $[(2j''+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}} \times W(j' k_1 j k_2; j'' k)$ через соотношение (3.240) для выражения редуцированных матричных элементов инвариантного взаимодействия в базисе связанного углового момента (формула (3.260)). Впоследствии он [29, III] заметил, что эти коэффициенты являются также коэффициентами преобразования между различными схемами связи для сложения трех угловых моментов; этот вопрос дальше развивается в работе [54]). (Этот важный предмет в деталях рассматривается в работе [102].)

в) Вигнер [47] пришел к определению *6j-символов* (эквивалентных выражению (3.240)), рассматривая следствия ассоциативного закона умножения трех матриц представления (формула (3.189)). Он показал, как *6j-символы* связаны с групповыми интегралами (см. примечание 11), тем самым давая другой метод «освобождения определения коэффициента Рака от определения коэффициента Вигнера».

г) Основное свойство, унаследованное от структуры гильбертова пространства, состоит в том, что операция тензорного связывания ассоциативна. Это свойство является фундаментальным. Из него следует важное тождество Б — Э (см. разд. 18), которое доказывается в [102].

17. Применения теоремы Вигнера — Экарта

Общий закон связывания для редуцированных и атричных элементов. Применим теорему Вигнера — Экарта к связыванию тензорному оператору $[S^{k_1} \times T^{k_2}]^k$:

$$\begin{aligned} \langle (\alpha') j' m' | [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k | (\alpha) j m \rangle \\ = \langle (\alpha') j' || [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k || (\alpha) j \rangle C_{m \mu m'}^{j k j'}, \end{aligned} \quad (3.235)$$

где редуцированные матричные элементы определяются из (3.227) и (3.233)¹⁾:

$$\begin{aligned} \delta_{j' j} \dots \langle (\alpha') j' || [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k || (\alpha) j \rangle \\ = \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu m} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} C_{m \mu m'}^{j k j'} \langle (\alpha') j' m' | S_{\mu_1}^{k_1} T_{\mu_2}^{k_2} | (\alpha) j m \rangle, \end{aligned} \quad (3.236)$$

где $m' (-j' \leq m' \leq j')$ произвольно.

Правая часть соотношения (3.236) может быть еще упрощена, так как S^{k_1} и T^{k_2} — неприводимые тензорные операторы по отношению к J . Поэтому применима теорема Вигнера — Экарта, что приводит к следующему результату:

$$\langle (\alpha') j' m' | S_{\mu_1}^{k_1} | (\alpha) j m \rangle = \langle (\alpha') j' || S^{k_1} || (\alpha) j \rangle C_{m \mu_1 m'}^{j k_1 j'}, \quad (3.237)$$

$$\langle (\alpha') j' m' | T_{\mu_2}^{k_2} | (\alpha) j m \rangle = \langle (\alpha') j' || T^{k_2} || (\alpha) j \rangle C_{m \mu_2 m'}^{j k_2 j'}. \quad (3.238)$$

Вводя промежуточные состояния $|(\alpha'') j'' m''\rangle$ в разложение матричного элемента

$$\langle (\alpha') j' m' | S_{\mu_1}^{k_1} T_{\mu_2}^{k_2} | (\alpha) j m \rangle,$$

и используя (3.237) и (3.238), приводим редуцированный матричный элемент (3.236) к виду

$$\begin{aligned} \langle (\alpha') j' || [S^{k_1} \times T^{k_2}]^k || (\alpha) j \rangle \\ = (-1)^{k_1 + k_2 - k} \sum_{(\alpha'') j''} [(2j'' + 1)(2k + 1)]^{\frac{1}{2}} W(j' k_1 j k_2; j'' k) \\ \times \langle (\alpha') j' || S^{k_1} || (\alpha'') j'' \rangle \langle (\alpha'') j'' || T^{k_2} || (\alpha) j \rangle, \end{aligned} \quad (3.239)$$

¹⁾ Редуцированный матричный элемент получается при $j'' = j'$ в (3.236). Однако, для того чтобы показать правильно связывание в нуль самих коэффициентов Вигнера (см. (3.240)), полезно вводить в этот результат дельта-символ Кронекера из (3.228).

где коэффициенты $W(j' k_1 j k_2; j'' k)$ определяются суммой по четырем коэффициентам Вигнера:

$$(-1)^{k_1+k_2-k} \delta_{j'' j} \dots [(2j''+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}} W(j' k_1 j k_2; j'' k) \\ \equiv \sum_{\mu_1 \mu_2 \mu m m'} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} C_{m \mu m'}^{j k j''} C_{m' \mu' m}^{j' k_1 j'} C_{m \mu_2 m'}^{j k_2 j''} \quad (3.240)$$

(m' может быть выбрано произвольно ($-j \leq m' \leq j$) в этом результате.)

Коэффициенты $W(j' k_1 j k_2; j'' k)$ были введены в теорию углового момента Рака [29], и они известны как *коэффициенты Рака*. Подобные коэффициенты, называемые *6j-коэффициентами Вигнера*, были также введены Вигнером [47]. Соотношение между *6j-коэффициентами Вигнера* (обозначаемыми фигурными скобками) и коэффициентами Рака имеет вид

$$\left\{ \begin{matrix} j' & k_1 & j'' \\ k_2 & j & k \end{matrix} \right\} = (-1)^{j'+k_1+j+k} W(j' k_1 j k_2; j'' k). \quad (3.241)$$

Соотношение (3.239) выражает общий закон связывания для редуцированных матричных элементов. Его форма должна быть сравнима с законом связывания (3.233) для самих тензорных операторов. В последнем законе используются коэффициенты Вигнера для связывания двух тензорных операторов, чтобы образовать третий; в законе связывания для редуцированных матричных элементов роль коэффициентов связи играют коэффициенты Рака.

Замечания. а) То, что сами коэффициенты Рака, а не коэффициенты Вигнера, могут рассматриваться как основные в теории углового момента, не очевидно из их определения (3.240) с помощью коэффициентов Вигнера. (Эта точка зрения будет разъяснена в разд. 18; детальное развитие дано в книге [102].) Тот факт, что коэффициенты Рака существуют «как независимые объекты», приводит к тому, что закон связывания (3.239) для редуцированных матричных элементов возводится до основной теоремы теории углового момента. Частные следствия соотношения (3.239), которые рассматриваются в остальной части этого раздела, являются основными инструментами в спектроскопии.

б) Исторически Рака [29, II] ввел коэффициенты $[(2j''+1)(2k+1)]^{\frac{1}{2}} \times W(j' k_1 j k_2; j'' k)$ через соотношение (3.240) для выражения редуцированных матричных элементов инвариантного взаимодействия в базисе связанного углового момента (формула (3.260)). Впоследствии он [29, III] заметил, что эти коэффициенты являются также коэффициентами преобразования между различными схемами связи для сложения трех угловых моментов; этот вопрос дальше развивается в работе [54]). (Этот важный предмет в деталях рассматривается в работе [102].)

в) Вигнер [47] пришел к определению *6j-символов* (эквивалентных выражению (3.240)), рассматривая следствия ассоциативного закона умножения трех матриц представления (формула (3.189)). Он показал, как *6j-символы* связаны с групповыми интегралами (см. примечание 11), тем самым давая другой метод «освобождения определения коэффициента Рака от определения коэффициента Вигнера».

Теорема Вигнера — Экарта, закон связывания (3.233) для тензорных операторов и закон связывания (3.239) для редуцированных матричных элементов представляют три основные свойства тензорных операторов (и находят много приложений в физических задачах). Поэтому изучение и интерпретация этих результатов становится важной задачей. В следующем разд. 18 мы кратко изложим наиболее полезные свойства коэффициентов Рака. Более глубокая и трудная задача интерпретирования этих трех основных свойств тензорных операторов решается в книге [102].

Подчеркнем снова общность закона связывания (3.239). Это наиболее общая форма связывания редуцированных матричных элементов двух тензорных операторов по отношению к угловому моменту $\mathbf{J}$, имеющему собственные кет-векторы $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$.

Частные случаи соотношения (3.239) достаточно важны. Поэтому мы сведем общий закон связывания (3.239) к полезному частному случаю.

Законы связывания для редуцированных матричных элементов тензорных операторов, действующих в кинематически независимых пространствах. Частный случай закона связывания (3.239) получается путем выбора тензорных операторов в виде тензорного произведения

$$\begin{aligned} S_{\mu_1}^{k_1} &= T_{\mu_1}^{k_1}(1) \otimes \mathbb{1}(2), \\ T_{\mu_2}^{k_2} &= \mathbb{1}(1) \otimes T_{\mu_2}^{k_2}(2) \end{aligned} \quad (3.242)$$

где $\mathbb{1}(i)$ обозначает единичный оператор, $T^{k_i}(i = 1, 2)$ — неприводимый тензорный оператор по отношению к угловому моменту $\mathbf{J}(i)$ части i физической системы, составленной из двух частей ($i = 1, 2$) и, таким образом, имеющей полный угловой момент $\mathbf{J} = \mathbf{J}(1) + \mathbf{J}(2)$.

Можно проверить, что S^{k_1} и T^{k_2} — тензорные операторы по отношению к $\mathbf{J}$.

Собственные кет-вектор $|(\alpha)jm\rangle$, появляющиеся в теореме Вигнера — Экарта (3.235), становятся собственными кет-векторами связанного углового момента:

$$\begin{aligned} |(\alpha)jm\rangle &= |(\alpha_1\alpha_2j_1j_2)jm\rangle \\ &\equiv \sum_{m_1m_2} C_{m_1m_2m}^{j_1j_2j} |(\alpha_1)j_1m_1\rangle \otimes |(\alpha_2)j_2m_2\rangle, \end{aligned} \quad (3.243)$$

где

$$(\alpha) = (\alpha_1\alpha_2j_1j_2). \quad (3.244)$$

Теперь наша задача состоит в том, чтобы выразить редуцированные матричные элементы

$$\langle (\alpha')j'm' | T^{k_1}(1) \otimes \mathbb{1}(2) | (\alpha)j_1j_2j \rangle,$$

появляющиеся в (3.239), через редуцированные матричные элементы

$$\langle (\alpha')j'_1m'_1 | T^{k_1}(1) | (\alpha_1)j_1m_1 \rangle,$$

возникающие в теореме Вигнера — Экарта, примененной к тензорному оператору $T^{k_1}(1)$ (по отношению к $\mathbf{J}(1)$):

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha'_1) j'_1 m'_1 | T_{\mu_1}^{k_1}(1) | (\alpha_1) j_1 m_1 \rangle \\ & = \langle (\alpha'_1) j'_1 | T_{\mu_1}^{k_1}(1) | (\alpha_1) j_1 \rangle C_{m_1 \mu_1 m_1'}^{j_1 k_1 j'_1} \end{aligned} \quad (3.245)$$

(Мы должны также решить подобную задачу для $\mathbb{1}(1) \otimes T^{k_2}(2)$.)

Мы утверждаем (и ниже докажем), что

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j' | T^{k_1}(1) \otimes \mathbb{1}(2) | (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j \rangle \\ & = (-1)^{j_1 + k_1 + j_2 + j} [(2j'_1 + 1)(2j + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j' & j_2 & j'_1 \\ j_1 & k_1 & j \end{Bmatrix} \\ & \quad \times \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{j_1 j_2} \langle (\alpha'_1) j'_1 | T^{k_1}(1) | (\alpha_1) j_1 \rangle; \\ & \langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j' | \mathbb{1}(1) \otimes T^{k_2}(2) | (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j \rangle \\ & = (-1)^{j' + k_2 + j_1 + j_2} [(2j'_2 + 1)(2j + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j' & j_1 & j'_2 \\ j_2 & k_2 & j \end{Bmatrix} \\ & \quad \times \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{j_1 j_2} \langle (\alpha'_2) j'_2 | T^{k_2}(2) | (\alpha_2) j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.246)$$

Доказательство. Рассмотрим доказательство первого соотношения. Содержащийся здесь редуцированный матричный элемент получается из (3.227'):

$$\begin{aligned} & \langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j' | T^{k_1}(1) \otimes \mathbb{1}(2) | (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j \rangle \\ & = \sum_{m \mu_1} C_{m \mu_1 m'}^{j k_1 j'} \langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j' m' | T_{\mu_1}^{k_1}(1) \otimes \mathbb{1}(2) | (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j m \rangle \\ & = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{j_1 j_2} \sum_{m_1 m_2 m \mu_1} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m \mu_1 m'}^{j k_1 j'} C_{m' - m_2, m_2, m'}^{j_1 j_2 j'} \\ & \quad \times \langle (\alpha'_1) j'_1 m'_1 | T_{\mu_1}^{k_1}(1) | (\alpha_1) j_1 m_1 \rangle \\ & = \delta_{\alpha_1 \alpha_2} \delta_{j_1 j_2} \sum_{m_1 m_2 m \mu_1} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m \mu_1 m'}^{j k_1 j'} C_{m' - m_2, m_2, m'}^{j_1 j_2 j'} C_{m_1 \mu_1 m_1'}^{j_1 k_1 j'_1} \\ & \quad \times \langle (\alpha'_1) j'_1 | T^{k_1}(1) | (\alpha_1) j_1 \rangle. \end{aligned} \quad (3.247)$$

При получении этого результата мы использовали связанные собственные кет-векторы (3.243) и матричные элементы из (3.245). Используя второе соотношение симметрии из (3.180) и суммируя коэффициенты Вигнера в (3.247), из (3.240) находим

$$(-1)^{j_1 - j_1' + j - j'} [(2j'_1 + 1)(2j + 1)]^{\frac{1}{2}} W(j'_1 j_2 k_1 j_1 j'_1 j).$$

Выражая коэффициент Рака в терминах 6j-коэффициентов (формула (3.241)), получаем желаемый результат. Подобные рассуждения устанавливают второе из соотношений (3.246). ■

Следующее общее соотношение получается подстановкой редуцированных матричных элементов, заданных соотношениями (3.246), в общую формулу (3.239). Записывая конечный результат через 6j-коэффициенты, получаем закон связывания для редуцированных матричных элементов тензорных операторов, действующих на независимые пространства:

$$\langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j' \| [\mathbf{T}^{k_1}(1) \times \mathbf{T}^{k_2}(2)]^k \| (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j \rangle$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{bmatrix} \langle (\alpha'_1) j'_1 \| \mathbf{T}^{k_1}(1) \| (\alpha_1) j_1 \rangle \langle (\alpha'_2) j'_2 \| \mathbf{T}^{k_2}(2) \| (\alpha_2) j_2 \rangle, \quad (3.248)$$

где

$$[\mathbf{T}^{k_1}(1) \times \mathbf{T}^{k_2}(2)]_\mu^k \equiv \sum_{\mu_1 \mu_2} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} T_{\mu_1}^{k_1}(1) \otimes T_{\mu_2}^{k_2}(2), \quad (3.249)$$

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{bmatrix} \equiv [(2j'_1 + 1)(2j'_2 + 1)(2j + 1)(2k + 1)]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{Bmatrix}, \quad (3.250)$$

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{Bmatrix} \equiv (-1)^{j_1 + j_2 + j + k_1 + k_2 + k + j'_1 + j'_2 + j'} \sum_{j''} (-1)^{2j''} (2j'' + 1) \times$$

$$\times \begin{Bmatrix} j' & k_1 & j'' \\ k_2 & j & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j' & j'_2 & j'_1 \\ j_1 & k_1 & j'' \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j'' & j_1 & j'_2 \\ j_2 & k_2 & j \end{Bmatrix}. \quad (3.251)$$

Соотношение (3.251) определяет 9j-коэффициенты Вигнера, свойства которых кратко изложены в разд. 19. Отметим здесь связь 9j-коэффициентов с самими коэффициентами Вигнера, так как этот результат также выводится прямо из соотношений (3.235), (3.249) и определения связанных состояний и связанных тензоров:

$$\sum_{m'_1 m'_2 m_1 m_2 \mu_1 \mu_2} C_{m'_1 m'_2 m}^{j'_1 j'_2 j'} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} C_{m_1 \mu_1 m_1}^{j_1 k_1 j'_1} C_{m_2 \mu_2 m_2}^{j_2 k_2 j'_2}$$

$$= \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & k \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{bmatrix} C_{m \mu m}^{j k j'}. \quad (3.252)$$

Закон связывания (3.248) в литературе часто выводится независимо от закона связывания (3.239). Данный здесь вывод подчеркивает большую общность последнего закона связывания.

Замечание. Редуцированные матричные элементы, заданные в (3.246), получаются из результата (3.248) путем выбора $\Gamma_{\mu_2}^{k_2}(2) = T_0^0(2) = \mathbb{1}(2)$ и $T_{\mu_1}^{k_1}(1) = T_0^0(1) = \mathbb{1}(1)$.

В дополнение к соотношениям (3.246) существует другой частный случай соотношения (3.248), который мы приведем явно, — случай $k = 0$. Это связывание двух тензорных операторов в инвариант относительно вращений. Этот инвариант записывается в виде

$$[\mathbf{S}^{k_1} \times \mathbf{T}^{k_2}]_0^0 = \delta_{k_1 k_2} [\mathbf{S}^{k_1} \times \mathbf{T}^{k_2}]_0^0, \quad (3.253)$$

откуда, используя изменение обозначения и частный коэффициент Вигнера (3.234), находим

$$[S^k \times T^k]_0^0 = \sum_{\mu} \frac{(-1)^{k-\mu}}{(2k+1)^{\frac{1}{2}}} S_{\mu}^k T_{-\mu}^k. \quad (3.254)$$

В случае, представленном соотношениями (3.242), эти результаты представляются в виде

$$\begin{aligned} [T^k(1) \times T^k(2)]_0^0 &= \sum_{\mu} \frac{(-1)^{k-\mu}}{(2k+1)^{\frac{1}{2}}} T_{\mu}^k(1) \otimes T_{-\mu}^k(2) \\ &= \sum_{\mu} \frac{(-1)^{k-\mu}}{(2k+1)^{\frac{1}{2}}} T_{\mu}^k(1) T_{-\mu}^k(2). \end{aligned} \quad (3.255)$$

Используя в (3.235) инвариантное связывание, получаем

$$\langle (\alpha') j' m' | [S^k \times T^k]_0^0 | (\alpha) j m \rangle = \delta_{j'j} \delta_{m'm} \langle (\alpha') j | [S^k \times T^k]_0^0 | (\alpha) j \rangle, \quad (3.256)$$

где

$$\begin{aligned} \langle (\alpha') j | [S^k \times T^k]_0^0 | (\alpha) j \rangle &= \sum_{(\alpha'') j''} (-1)^{k+j''-j} \left[\frac{(2j''+1)}{(2k+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \varepsilon_{kj j''} \langle (\alpha') j | S^k | (\alpha'') j'' \rangle \langle (\alpha'') j'' | T^k | (\alpha) j \rangle. \end{aligned} \quad (3.257)$$

(При получении соотношения (3.257) мы использовали следующий частный коэффициент Рака:

$$\begin{aligned} W(j' k_1 j k_2; j'' 0) &= (-1)^{j'+k_1+j+k_2} \begin{Bmatrix} j' & k_1 & j'' \\ k_2 & j & 0 \end{Bmatrix} \\ &= \delta_{j'j} \delta_{k_1 k_2} \varepsilon_{k_1 j j''} \frac{(-1)^{k_1+j-j''}}{[(2k_1+1)(2j+1)]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (3.258)$$

Сам этот результат получается прямо из определения (3.240) с помощью коэффициента (3.234) и соотношений симметрии и ортогональности для коэффициентов Вигнера.)

Дальнейшее применение (3.257) к тензорным операторам вида, заданного соотношениями (3.242), приводит к результату

$$\begin{aligned} \langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j' m' | [T^k(1) \times T^k(2)]_0^0 | (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j m \rangle \\ = \delta_{j'j} \delta_{m'm} \langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j | [T^k(1) \times T^k(2)]_0^0 | (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j \rangle, \end{aligned} \quad (3.259)$$

где редуцированная матрица получается из (3.248):

$$\begin{aligned} \langle (\alpha'_1 \alpha'_2 j'_1 j'_2) j | [T^k(1) \times T^k(2)]_0^0 | (\alpha_1 \alpha_2 j_1 j_2) j \rangle \\ = (-1)^{j'_1+k+j_1+j} \left[\frac{(2j'_1+1)(2j'_2+1)}{2k+1} \right]^{\frac{1}{2}} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j \\ j'_2 & j'_1 & k \end{Bmatrix} \\ \times \langle (\alpha'_1) j'_1 | T^k(1) | (\alpha_1) j_1 \rangle \langle (\alpha'_2) j'_2 | T^k(2) | (\alpha_2) j_2 \rangle. \end{aligned} \quad (3.260)$$

Для того чтобы представить этот результат в окончательной форме, мы использовали связь между $9j$ -коэффициентами и $6j$ -коэффициентами, которая доказана в разд. 19 (формула (3.325)):

$$\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ k_1 & k_2 & 0 \\ j'_1 & j'_2 & j' \end{matrix} \right\} = \delta_{k_1 k_2} \delta_{jj'} \frac{(-1)^{j_1 + j'_2 + j + k_1}}{[(2j+1)(2k_1+1)]^{\frac{1}{2}}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ j'_2 & j'_1 & k_1 \end{matrix} \right\}. \quad (3.261)$$

Резюме. Мы получили в этом разделе два основных закона связывания (3.239) и (3.248) для редуцированных матричных элементов тензорных операторов (см. [55], где даны дальнейшие построения этого типа; о приложении этих законов связывания к сферическим функциям см. примечание 10; сводку результатов см. в табл. 8 приложения (т. 2)).

18. Коэффициенты Рака

Мы ввели коэффициенты Рака, показав их роль в теории тензорных операторов. Эти коэффициенты появились в трех взаимосвязанных контекстах: а) как множители в матричных элементах тензорного произведения операторов

$$[S^{k_1} \times T^{k_2}]^k \quad (3.262)$$

взятых в пространстве $\mathcal{H}_j$, б) как коэффициенты связывания в пространстве редуцированных матричных элементов и в) как матричные элементы инвариантного оператора

$$[T^k(1) \times T^k(2)]^0 \quad (3.263)$$

взятого в тензорном произведении пространств $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \mathcal{H}_{j_2}(2)$.

С точки зрения физики коэффициенты Рака входят еще одним способом, который имеет большое значение. Они являются коэффициентами пересвязывания для сложения трех угловых моментов [54] и, что более важно, они составляют «базис» для всех коэффициентов связывания при сложении произвольного числа угловых моментов (эта точка зрения развивается в книге [102]).

С точки зрения математики изучение коэффициентов Рака интересно по нескольким причинам: а) они являются объектами, независимыми от базиса (независимыми от квантовых чисел проекции), б) сами коэффициенты Вигнера могут быть получены как предел коэффициентов Рака (этот результат доказан ниже, см. формулу (3.300)), в) они могут быть представлены как обобщенные гипергеометрические ряды, г) они связаны с проективной геометрией и д) они определяют алгебру. Последние три пункта рассматриваются в книге [102].)

Таким образом, очевидно, что коэффициенты Рака заслуживают изучения, независимо от их определения с помощью коэффициентов Вигнера, данного соотношением (3.240). В самом деле, можно принять точку зрения, что коэффициенты Рака являются основными объектами, которые должны изучаться в теории углового момента, так как из них могут быть получены все другие величины теории углового момента.

Для поддержки этой точки зрения важно представить свойства коэффициентов Рака в форме, которая «освобождает» их от определения с помощью коэффициентов Вигнера. Мы начинаем выполнение этой программы в данном разделе. Но чтобы сделать механизм использования коэффициентов Рака доступным большему числу читателей, мы сформулируем многие их свойства, не всегда давая доказательства (эти доказательства приведены в книге [102]).

Обозначение и область определения. Коэффициент Рака¹⁾ $W(abcd; ef)$ определяется для всех значений a, b, c, d, e, f , принадлежащих множеству $\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots\}$. Однако вследствие соотношения (3.240), выражающего коэффициенты Рака через коэффициенты Вигнера, и вследствие расширенного определения (3.191) последних, мы имеем

$$W(abcd; ef) = 0, \quad (3.264)$$

если тройки неотрицательных целых и полуцелых чисел (abe) , (cde) , (acf) , (bdf) не удовлетворяют условиям треугольника. (Заметим, что вопреки явной асимметрии в условиях треугольника для (abc) , заданных формулой

$$c \in \{a + b, a + b - 1, \dots, |a - b|\}, \quad (3.265)$$

эти условия фактически являются симметричными по a, b, c в том смысле, что если условия (3.265) имеют место, то условия треугольника также справедливы для всех перестановок чисел a, b, c .)

Связь между коэффициентами Рака и коэффициентами Вигнера. Различные другие формы определяющего соотношения (3.240) полезны как для определения алгебраических форм коэффициентов Рака, так и для приложений. Мы даем ниже четыре основных соотношения (которые алгебраически интерпретируются в книге [102]), причем после первого записано определяющее соотношение в виде, который согласуется с выражением Рака (такое переопределение использует соотношение симметрии $W(abcd; ef) = W(cdab; ef)$, которое легко доказывается прямо из (3.240), если это последнее соотношение просуммировать по γ):

$$\delta_{ce} [(2e + 1)(2f + 1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd; ef) = \sum_{\beta \delta} C_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf} C_{\gamma - \delta, \delta, \gamma}^{edc} C_{\gamma - \beta - \delta, \beta, \gamma - \delta}^{abe} C_{\gamma - \beta - \delta, \beta + \delta, \gamma}^{afc} \quad (3.266)$$

$$= \sum_{\beta \delta} C_{\beta \delta \gamma}^{bdf} C_{\alpha + \beta, \delta, \alpha + \gamma}^{edc} C_{\alpha, \beta, \alpha + \beta}^{abe} C_{\alpha, \gamma, \alpha + \gamma}^{afc} = [(2e + 1)(2f + 1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd; ef) C_{\alpha, \gamma, \alpha + \gamma}^{afc} \quad (3.267)$$

$$\sum [(2e + 1)(2f + 1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd; ef) \times C_{\beta \delta \gamma}^{bdf} C_{\alpha + \beta, \delta, \alpha + \gamma}^{edc} C_{\alpha, \beta, \alpha + \beta}^{abe} = \delta_{f\gamma} C_{\alpha, \gamma, \alpha + \gamma}^{afc} \quad (3.268)$$

$$\sum_f [(2e + 1)(2f + 1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd; ef) C_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf} C_{\alpha, \beta + \delta, \alpha + \beta + \delta}^{afc} = C_{\alpha + \beta, \delta, \alpha + \beta + \delta}^{edc} C_{\alpha, \beta, \alpha + \beta}^{abe} \quad (3.269)$$

¹⁾ Мы следуем обозначениям Рака [29], вводя латинские буквы $a, b, c, \dots$ для обозначения угловых моментов и греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ для обозначения их проекций.

$$\begin{aligned} \sum_e [(2e+1)(2f+1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd;ef) C_{\alpha+\beta, \delta, \alpha+\beta+\delta}^{edc} C_{\alpha, \beta, \alpha+\beta}^{abe} \\ = C_{\beta, \delta, \beta+\delta}^{bdf} C_{\alpha, \beta+\delta, \alpha+\beta+\delta}^{afc} \end{aligned} \quad (3.270)$$

(Отметим, что, как замечено выше в соотношении (3.240), индекс γ в (3.266) может быть выбран произвольно ($-c \leq \gamma \leq c$).)

Дадим набросок доказательства этих результатов. Чтобы получить (3.267), заменяем γ на $\gamma + \alpha$ в определяющем соотношении (3.266), умножаем на $C_{\alpha, \gamma, \alpha+\gamma}^{afc'}$, суммируем по c' и используем соотношение ортогональности (3.179). В результате имеем (3.267).

Равенство (3.267) теперь становится ключевым для доказательства соотношения ортогональности для коэффициентов Рака

$$\sum_f (2e+1)(2f+1) W(abcd;ef) W(abcd;e'f) = \delta_{ee'} \varepsilon_{abe} \varepsilon_{cde}, \quad (3.271)$$

где¹⁾

$$\varepsilon_{abc} = \begin{cases} 1 & \text{для троек чисел } a, b, c \in \{0, \frac{1}{2}, \dots\}, \text{ которые удов-} \\ & \text{летворяют условию треугольника,} \\ 0 & \text{в других случаях.} \end{cases} \quad (3.272)$$

Чтобы получить это важное соотношение ортогональности, мы сначала заменяем γ на $\gamma - \alpha$ в (3.267) и записываем соответствующее равенство с заменой e на e' . Затем эти два соотношения перемножаем и суммируем по α , а затем по f , используя соотношение ортогональности для коэффициентов Вигнера. Результатом этих операций является соотношение (3.271).

Используя соотношение симметрии

$$W(abcd;ef) = W(acbd;fe).$$

можно переписать соотношение ортогональности (3.271) в виде

$$\sum_e (2e+1)(2f+1) W(abcd;ef) W(abcd;ef'') = \delta_{ff'} \varepsilon_{acf} \varepsilon_{bdf} \quad (3.273)$$

Само соотношение симметрии является следствием определения (3.266) и симметрии коэффициентов Вигнера (формула (3.180)). (Систематическое обсуждение симметрий коэффициентов Рака дано ниже.)

Соотношения ортогональности (3.271) и (3.273) коэффициентов Рака вместе с соотношениями симметрии для коэффициентов Вигнера (3.175) и (3.176) могут теперь быть использованы для доказательства остальных равенств (3.268) — (3.270).

Существует еще три основных соотношения, которым удовлетворяют коэффициенты Рака и которые не включают в себя коэффициенты Вигнера. Эти соотношения будут приведены ниже вместе с кратким описанием их значения.

¹⁾ Введение этого символа в правую часть соотношения (3.271) необходимо, так как благодаря ему получаем $0 = 0$, когда левая часть превращается в нуль (см. формулу (3.264)).

Правило сумм Рака. Рака [29] дал следующую связь между коэффициентами $W(abcd; ef)$:

$$\sum_f (-1)^{b+d-f} (2f+1) W(abcd; ef) W(adcb; gf) = (-1)^{e+g-a-c} W(bacd; eg). \quad (3.274)$$

В первоначальном выводе этого результата Рака использовал а) определение W -коэффициента в терминах коэффициентов Вигнера, б) соотношение симметрии $C_{\alpha\beta\gamma}^{abc} = (-1)^{a+b-c} C_{\beta\alpha\gamma}^{bac}$ коэффициентов Вигнера и в) соотношения ортогональности для коэффициентов Вигнера.

Правило сумм Рака¹⁾ выражает фундаментальное свойство диаграммы отображений, связанных с преобразованиями между множествами базисных векторов, которые встречаются при связывании трех угловых моментов, а именно свойство коммутативности этой диаграммы. Этот отчасти технический результат детально доказывается в разд. 12 гл. 5 книги [102].

Тождество Биденхарна — Эллиотта ($B - E$). Используя теорию пересвязывания для четырех угловых моментов, Биденхарн [56] и Эллиотт [57] вывели следующее тождество между коэффициентами Рака:

$$\begin{aligned} & W(a'ab'b; c'e) W(d'ed'd; b'c) \\ &= \sum_f (2f+1) W(abcd; ef) W(c'bd'd; b'f) W(a'ad'f; c'e). \end{aligned} \quad (3.275)$$

В книге [102] дано два вывода этого результата: в одном используется теория пересвязывания, а другой показывает, что *этот результат является следствием ассоциативного закона умножения для единичных тензорных операторов*. (Этот последний результат показывает, что тождество $B - E$ имеет для «алгебры тензорных операторов» такое значение, какое тождество Якоби имеет для структурных констант алгебры Ли.)

Мы уделим большое внимание интерпретации соотношения (3.275). Оно является *ключевым соотношением, необходимым для того, чтобы поднять изучение коэффициентов Рака до положения, независимого от понятия коэффициента Вигнера*.

Правило сумм треугольника. Для каждой тройки чисел (abc) , подчиняющейся условиям треугольника, определяем *коэффициент треугольника*:

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.276)$$

Коэффициенты треугольника и коэффициенты Рака удовлетворяют следующему соотношению:

$$[\Delta(acf)\Delta(bdf)]^{-1} = (2f+1) \sum_e [\Delta(abe)\Delta(cde)]^{-1} W(abcd; ef). \quad (3.277)$$

¹⁾ Роуз и Янг [55a] интерпретировали правило сумм Рака как уравнение на собственные значения и нашли интересное приложение этой интерпретации к соотношению Померанчука для асимптотических сечений.

Этот результат [58] является следствием ассоциативного закона умножения симплектонных полиномов [102].

Альтернативное обозначение для коэффициентов Рака. Мы вводим здесь альтернативное обозначение для коэффициентов Рака¹⁾. (Наша цель введения здесь этого (не общепринятого) обозначения состоит в том, чтобы читатель, который не будет обращаться к книге [102], смог ознакомиться с близкой связью, которая существует между коэффициентами Рака и Вигнера.) Для всех целых и полуцелых троек неотрицательных чисел (abc) , которые удовлетворяют условиям треугольника $|a - b| \leq c \leq a + b$, и для всех $\rho = a, a - 1, \dots, -a$; $\sigma = b, b - 1, \dots, -b$; $\tau = c, c - 1, \dots, -c$ вводим символ $W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j)$, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$. Он определяется так:

$$a) W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j) = 0, \text{ если } \rho + \sigma \neq \tau;$$

$$б) W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j) = 0,$$

если не каждая из троек чисел $(j - \tau, a, j - \sigma)$, $(j - \sigma, b, j)$, $(j - \tau, c, j)$ состоит из неотрицательных целых и полуцелых чисел, удовлетворяющих условиям треугольника;

$$в) W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j) \equiv [(2c + 1)(2j - 2\sigma + 1)]^{\frac{1}{2}} W(j - \tau, a; j, b; j - \sigma, c), \quad (3.278)$$

в других случаях. Так как мы также имеем соотношение

$$[(2e + 1)(2f + 1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd; ef) = W_{e-\tau, a, c-e, c-a}^{bdf}(c), \quad (3.279)$$

где $b \geq |e - a|$, $d \geq |c - e|$ и $f \geq |c - a|$, то каждый коэффициент Рака можно представить в новом обозначении.

Ниже мы покажем (формула (3.300)), что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j) = C_{\rho\sigma\tau}^{abc}. \quad (3.280)$$

Именно это соотношение является наиболее убедительной причиной нашего выбора обозначения.

В этом обозначении соотношения ортогональности для коэффициентов Рака принимают вид, очень похожий на соотношения ортогональности для коэффициентов Вигнера:

$$\sum_{\rho\sigma} W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j) W_{\rho\sigma\tau}^{abd}(j) = \delta_{ca} \delta_{j-\tau, j, c},$$

$$\sum_c W_{\rho, \tau-\rho, \tau}^{abc}(j) W_{\rho', \tau-\rho', \tau}(j) = \delta_{\rho\rho'} \delta_{j-\tau, a, j-\tau+\rho} \delta_{j, b, j-\tau+\rho}. \quad (3.281)$$

(В этих соотношениях видно, что тройки чисел (abc) и (abd) удовлетворяют условиям треугольника.)

Явные алгебраические выражения. Вычислить явные выражения для коэффициентов Рака очень трудно. Рака [29] получил общее выражение, положив $m' = j'$ в (3.240) и сведя серией «трюков» результирующее кратное суммирование к сумме по одному индексу. Швингер [37] (а также Баргман [39], используя те

¹⁾ Это обозначение естественно возникает в алгебраической теории операторов Вигнера [102].

же идеи) получил общее выражение, используя порождающую функцию (см. приложение Г гл. 5). Биденхарн [56] дал рекурсивные формулы для порождения путем применения итераций коэффициентов Рака. Методы Рака и Швингера дают одно и то же выражение, но общее повторение рекурсивных соотношений приводит к отличному (и менее симметричному) общему выражению. Таким образом, в настоящее время мы не можем дать простого изящного вывода (в противоположность случаю коэффициентов Вигнера) выражения Рака для этих коэффициентов в рамках изложенных до сих пор концепций.

После того как мы подчеркнули общее значение коэффициентов Рака для теории углового момента, теперь для наших целей существенно дать вывод выражения Рака. Мы будем следовать первоначальному выводу Рака, но отложим детали до приложения А. Сформулируем здесь результат этого вывода, после того как отметим некоторые частные случаи, которые выводятся легче.

С точностью до фазы результат

$$W(abc0;ef) = \frac{\delta_{bf}\delta_{ce}\varepsilon_{abe}}{[(2e+1)(2f+1)]^{\frac{1}{2}}}, \quad (3.282)$$

определяется условиями треугольника (3.264) и соотношениями ортогональности (3.271). Фаза фиксируется следующим соглашением:

$$W_{\rho 0 \rho}^{a 0 a}(j) = \varepsilon_{j-\rho, a, j}, \quad (3.283)$$

которое эквивалентно фазовому соглашению, использованному для коэффициентов Вигнера.

Дальнейшие значения коэффициентов Рака для частных аргументов могут быть получены различными путями. Например, чтобы вычислить так называемые «растянутые» коэффициенты¹⁾, мы можем сначала выбрать $\gamma = f$ и $a = c - f$ в (3.267) и получить

$$\begin{aligned} & [(2e+1)(2f+1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd;ef) C_{c-f, f, c}^{a f c} \\ &= \sum_{\delta} C_{f-\delta, \delta, f}^{b d f} C_{c-\delta, \delta, c}^{e d c} C_{c-f, f-\delta, c-\delta}^{a b e} \end{aligned} \quad (3.284)$$

Если мы теперь положим $f = b + d$, то суммирование по δ сводится к одному слагаемому $\delta = d$. Таким образом,

$$\begin{aligned} & [(2e+1)(2b+2d+1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd;e, b+d) C_{c-b-d, b+d, c}^{a b+d c} \\ &= C_{b, d, b+d}^{b d b+d} C_{c-d, d, c}^{e d c} C_{c-b-d, b, c-d}^{a b e} \end{aligned} \quad (3.285)$$

Используя частный коэффициент Вигнера

$$\begin{aligned} C_{\gamma-b, b, \gamma}^{a b c} &= (-1)^{a+b-c} \sqrt{(abc)[(2c+1)(2b)!]^{\frac{1}{2}}} \\ &\times \left[\frac{(a+b-\gamma)!(c+\gamma)!}{(a-b+\gamma)!(c-\gamma)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.286)$$

¹⁾ Термин «растянутый» означает, что один из четырех треугольников для угловых моментов вырождается в линию (см. рис. 3.4); эта ситуация также выражается термином «граничный» коэффициент Рака, который происходит от положения коэффициента в таблице (см. табл. 2 в приложении (г. 2)).

где

$$v(abc) = [(a - b + c)! / (a + b + c + 1)!(a + b - c)!(-a + b + c)!]^{\frac{1}{2}}, \quad (3.287)$$

получаем

$$W(abcd; e, b + d) = \left[\frac{(2b)!(2d)!}{(2b + 2d + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \frac{v(abe)v(edc)}{v(a, b + d, c)}. \quad (3.288)$$

Возвратимся теперь к вычислению общего коэффициента. Мы следуем процедуре Рака и положим в (3.266) $\gamma = c$. Удобно ввести коэффициент треугольника $\Delta(abc)$, определенный соотношением (3.276), заметив, что

$$C_{c-\beta, \beta, c}^{abc} = (-1)^{a-c+\beta} \frac{\Delta(abc)}{(a - b + c)!(-a + b + c)!} \times \left[\frac{(2c + 1)!(a + c - \beta)!(b + \beta)!}{(a - c + \beta)!(b - \beta)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.289)$$

Используя дальше общее выражение (3.170) для коэффициента Вигнера, получаем следующее выражение для коэффициента Рака:

$$W(abcd; ef) = \Delta(bdf)\Delta(edc)\Delta(abe)\Delta(afc)w(abcd; ef), \quad (3.290)$$

где $w(abcd; ef)$ определяется формулой

$$w(abcd; ef) = \frac{(2c + 1)!}{(a - f + c)!(-a + f + c)!(e - d + c)!(-e + d + c)!} \times \sum_{\beta \delta r s} \frac{(-1)^{a-e+\beta+r+s}(a + c - \beta - \delta)!(f + \beta + \delta)!(e + c - \delta)!(d + \delta)!}{(e - b + c - \beta - \delta + r)!(a - c + \beta + \delta - r)!(d + \delta - s)!(f - b - \delta + s)!} \times \left[\frac{(b - \beta)!}{(a + b - e - r)!(e - a - \beta + r)!s!(b - \beta - s)!} \right] \times \left[\frac{(b + \beta)!}{(b + \beta - r)!r!(f - d + \beta + s)!(b + d - f - s)!} \right]. \quad (3.291)$$

Рака свел это выражение с четырьмя индексами суммирования к выражению, включающему один индекс суммирования, получив таким образом выражение, которое в сущности ничем не сложнее коэффициента Вигнера. Процедура Рака дана в приложении А, где доказывается следующий результат:

$$W(abcd; ef) = \Delta(abe)\Delta(cde)\Delta(acf)\Delta(bdf) \times \sum_z \frac{(-1)^{a+b+c+d+z}(z + 1)!}{(z - a - b - e)!(z - c - d - e)!(z - a - c - f)!(z - b - d - f)!} \times \frac{1}{(a + b + c + d - z)!(a + d + e + f - z)!(b + c + e + f - z)!}. \quad (3.292)$$

Фундаментальные коэффициенты Рака. Четыре коэффициента Рака $W_{\rho, \pm \frac{1}{2}, \rho \pm \frac{1}{2}}^{a, \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}}(j)$ со спином $\frac{1}{2}$ называются *фундаментальными коэффициентами*.

Мы даем значения этих коэффициентов в обозначении $W_{\text{дог}}^{abc}(j)$ для сравнения с фундаментальными коэффициентами Вигнера (со спином $\frac{1}{2}$):

$$\begin{aligned} W_{\rho, \frac{1}{2}, \rho + \frac{1}{2}}^{a, \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}}(j) &= \left[\frac{(a + \rho + 1)(2j + a - \rho + 1)}{(2a + 1)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ W_{\rho, -\frac{1}{2}, \rho - \frac{1}{2}}^{a, \frac{1}{2}, a + \frac{1}{2}}(j) &= \left[\frac{(a - \rho + 1)(2j - a - \rho + 1)}{(2a + 1)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ W_{\rho, \frac{1}{2}, \rho + \frac{1}{2}}^{a, \frac{1}{2}, a - \frac{1}{2}}(j) &= - \left[\frac{(a - \rho)(2j - a - \rho)}{(2a + 1)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}, \\ W_{\rho, -\frac{1}{2}, \rho - \frac{1}{2}}^{a, \frac{1}{2}, a - \frac{1}{2}}(j) &= \left[\frac{(a + \rho)(2j + a - \rho + 2)}{(2a + 1)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.293)$$

Интересное и важное свойство (3.280) (которое, как мы покажем ниже, является общим) здесь показано на фундаментальных коэффициентах Рака, которые в пределе больших j становятся коэффициентами Вигнера:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} W_{\rho, \sigma, \rho + \sigma}^{a, \frac{1}{2}, a + \tau}(j) = C_{\rho, \sigma, \rho + \sigma}^{a, \frac{1}{2}, a + \tau} \quad (3.294)$$

для $\sigma, \tau = -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}$.

Структурные следствия тождества Б — Э. Из всех соотношений между коэффициентами, возникающих в теории углового момента, тождество Б — Э является одним из наиболее фундаментальных. Эта точка зрения базируется на замечательном структурном результате, который будет продемонстрирован в этом разделе. *Тождество Б — Э (3.275) вместе со свойствами ортогональности (3.271) и (3.273) и фундаментальными коэффициентами Рака со спином $\frac{1}{2}$ составляют полную структуру теории углового момента¹⁾.*

Чтобы доказать это утверждение, перепишем тождество Б — Э (3.275) в нескольких других полезных формах.

Умножая соотношение (3.275) на $(2e + 1)W(abcd; eg)$, суммируя по e и используя соотношение ортогональности (3.273), получаем

$$\begin{aligned} &W(c'bd'd; b'g)W(a'ad'g; c'c) \\ &= \sum_e (2e + 1)W(abcd; eg)W(a'ab'b; c'e)W(a'ed'd; b'c). \end{aligned} \quad (3.295)$$

В этом результате мы заменим b' на e' , умножим его на $(2e' + 1)(2f + 1)W(c'bd'd; e'f)$, просуммируем по e' и используем соотношение ортогональности (3.273). В результате получим

$$\begin{aligned} \delta_{fg}W(a'ad'f; c'c) &= \sum_{e'e} (2f + 1)(2e' + 1)(2e + 1)W(abcd; eg) \\ &\times W(c'bd'd; e'f)W(a'ae'b; c'e)W(a'ed'd; e'c). \end{aligned} \quad (3.296)$$

¹⁾ Этот результат впервые рассмотрел Рака (частное сообщение).

С целью доказательства ниже предельного соотношения (3.280), полезно показать этот результат в обозначении $W_{\rho\sigma}^{abc}(j)$. Положим $a' = j - \lambda - \rho$, $c' = j - \lambda$, $d' = j$ и $e' = j - \lambda + \sigma$, чтобы получить

$$\begin{aligned} \delta_{fg} W_{\rho, \lambda, \rho + \lambda}^{afc}(j) &= \sum_{\sigma e} [(2e + 1)(2g + 1)]^{\frac{1}{2}} W(abcd; eg) W_{\sigma, \lambda - \sigma, \lambda}^{bdf}(j) W_{\rho + \sigma, \lambda - \sigma, \rho + \lambda}^{edc}(j) \\ &\times W_{\rho, \sigma, \rho + \sigma}^{abe}(j - \lambda + \sigma), \end{aligned} \quad (3.297)$$

где мы оставили коэффициент, который не зависит от j в обычной формуле Рака (ср. с (3.268)).

Рассмотрим теперь этот результат для частных значений индексов, а именно для $g = f$, $d = \frac{1}{2}$, $b = f - \frac{1}{2}$. Используя в этом результате явный вид фундаментальных коэффициентов Рака, приходим к следующему рекурсивному соотношению с пятью слагаемыми (мы переименовали некоторые из индексов):

$$\begin{aligned} W_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf}(j) &= \left[\frac{(b + d - f)(b + f - d + 1)(d - \delta)(2j - d - \delta + 1)(f + \beta + \delta + 1)(2j + f - \beta - \delta + 2)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2j + 1)(2f + 2)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times W_{\beta, \delta + \frac{1}{2}, \beta + \delta + \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}}(j + \frac{1}{2}) \\ &- \left[\frac{(b + d - f)(b + f - d + 1)(d + \delta)(2j + d - \delta + 1)(f - \beta - \delta + 1)(2j - f - \beta - \delta)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2j + 1)(2f + 2)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times W_{\beta, \delta - \frac{1}{2}, \beta + \delta - \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}}(j - \frac{1}{2}) \\ &+ \left[\frac{(d + f - b)(b + d + f + 1)(d + \delta)(2j + d - \delta + 1)(f + \beta + \delta)(2j + f - \beta - \delta + 1)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2j + 1)(2f)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times W_{\beta, \delta - \frac{1}{2}, \beta + \delta - \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}}(j - \frac{1}{2}) + \\ &+ \left[\frac{(d + f - b)(b + d + f + 1)(d - \delta)(2j - d - \delta + 1)(f - \beta - \delta)(2j - f - \beta - \delta + 1)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2j + 1)(2f)(2j + 1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times W_{\beta, \delta + \frac{1}{2}, \beta + \delta + \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}}(j + \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (3.298)$$

В обычном обозначении Рака это рекурсивное соотношение принимает вид $(2c + 1)(2d)(2f + 1)W(abcd; ef)$

$$\begin{aligned} &= [(b + d - f)(b + f - d + 1)(d + e - c)(c + e - d + 1) \\ &\times (c + f - a + 1)(a + c + f + 2)]^{\frac{1}{2}} W(a, b, c + \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}; e, f + \frac{1}{2}) \\ &- [(b + d - f)(b + f - d + 1)(c + d - e)(c + d + e + 1) \\ &\times (a + c - f)(a + f - c + 1)]^{\frac{1}{2}} W(a, b, c - \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}; e, f + \frac{1}{2}) \\ &+ [(d + f - b)(b + d + f + 1)(c + d - e)(c + d + e + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times (c + f - a)(a + c + f + 1)]^{\frac{1}{2}} W(a, b, c - \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}; e, f - \frac{1}{2}) \\ & + [(d + f - b)(b + d + f + 1)(d + e - c)(c + e - d + 1) \\ & \times (a + f - c)(a + c - f + 1)]^{\frac{1}{2}} W(a, b, c + \frac{1}{2}, d - \frac{1}{2}; e, f - \frac{1}{2}). \end{aligned} \quad (3.299)$$

Рекурсивное соотношение (3.298) с пятью коэффициентами Рака справедливо для всех разрешенных аргументов коэффициентов Рака. Более того, отправляясь от начального значения $d = 1$ и коэффициентов (3.293) со спином $\frac{1}{2}$, оно рекурсивно порождает все коэффициенты Рака. Этот результат демонстрирует, что все коэффициенты Рака вполне определяются фундаментальными коэффициентами со спином $\frac{1}{2}$ и соотношением Б — Э (и соотношениями ортогональности, которые были использованы, чтобы преобразовать (3.275) в (3.297)).

Соотношение (3.298) может быть использовано также, чтобы доказать общую справедливость соотношения

$$\lim_{j \rightarrow \infty} W_{\rho \sigma \tau}^{abc}(j) = C_{\rho \sigma \tau}^{abc}. \quad (3.300)$$

Доказательство дается в два шага. Сначала выводим из (3.298), что коэффициенты

$$\bar{C}_{\rho \sigma \tau}^{abc} \equiv \lim_{j \rightarrow \infty} W_{\rho \sigma \tau}^{abc}(j) \quad (3.301)$$

удовлетворяет рекурсивному соотношению

$$\begin{aligned} \bar{C}_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf} &= \left[\frac{(b + d - f)(b + f - d + 1)(d - \delta)(f + \beta + \delta + 1)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2f + 2)} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{C}_{\beta, \delta + \frac{1}{2}, \beta + \delta + \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}} \\ &- \left[\frac{(b + d - f)(b + f - d + 1)(d + \delta)(f - \beta - \delta + 1)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2f + 2)} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{C}_{\beta, \delta - \frac{1}{2}, \beta + \delta - \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}} \\ &+ \left[\frac{(d + f - b)(b + d + f + 1)(d + \delta)(f + \beta + \delta)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2f)} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{C}_{\beta, \delta - \frac{1}{2}, \beta + \delta - \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}} \\ &+ \left[\frac{(d + f - b)(b + d + f + 1)(d - \delta)(f - \beta - \delta)}{(2d)(2f + 1)(2d)(2f)} \right]^{\frac{1}{2}} \bar{C}_{\beta, \delta + \frac{1}{2}, \beta + \delta + \frac{1}{2}}^{bd - \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.302)$$

С другой стороны, если в (3.268) выберем $d = \frac{1}{2}$, $b = f - \frac{1}{2}$ и подставим в коэффициенты Рака и Вигнера со спином $\frac{1}{2}$, то получим точно (после переименования индексов) рекурсивное соотношение (3.302), которому удовлетворяет $\bar{C}_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf}$.

Так как (отправляясь от $d = 1$) рекурсивное соотношение (3.302) удовлетворяется всеми коэффициентами $\bar{C}_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf}$, полученными из фундаментальных коэффициентов, и так как

$$\bar{C}_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{b \frac{1}{2}f} = C_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{b \frac{1}{2}f},$$

то находим

$$\bar{C}_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf} = C_{\beta, \delta, \beta + \delta}^{bdf} \quad (3.303)$$

в общем случае, что доказывает соотношение (3.300).

Теперь мы можем утверждать, что все коэффициенты Вигнера могут быть получены как асимптотический предел коэффициентов Рака.

Таким образом, мы показали, что тождество Б — Э, свойства ортогональности коэффициентов Рака и коэффициенты Рака со спином $\frac{1}{2}$ определяют все коэффициенты Рака и все коэффициенты Вигнера. Так как коэффициенты Вигнера также дают угловой момент J как частный случай (путем конкретизации матричных элементов), а следовательно, также коммутационные соотношения $J \times J = iJ$, мы видим, что отсюда следует групповая структура. Более того, как показано в разд. 8 гл. 5, существует асимптотический предел коэффициентов Рака, который порождает матрицы вращений, или, иначе, матрицы вращений могут быть получены из представления коэффициентов Вигнера как дискретизированных матриц вращений (формула (5.89)). Именно в этом смысле мы заключаем, что полная структура теории углового момента $[SU(2)]$ определяется так, как сформулировано на стр. 113.

Приведенный метод нахождения пределов можно использовать, чтобы сделать дальнейший шаг. В (3.302) можем положить $b = j$, $d = J$, $f = j + \Delta$, $\beta = j - \alpha$, $\delta = M$ и взять предел при $j \rightarrow \infty$, чтобы получить

$$\begin{aligned} & 2J \lim_{j \rightarrow \infty} C_{j-\alpha, M, j-\alpha+M}^{jJj+\Delta} \\ &= [(J-\Delta)(J-M)]^{\frac{1}{2}} \lim_{j \rightarrow \infty} C_{j-\alpha, M+\frac{1}{2}, j-\alpha+M+\frac{1}{2}}^{jJ-\frac{1}{2}j+\Delta+\frac{1}{2}} \\ &+ [(J+\Delta)(J+M)]^{\frac{1}{2}} \lim_{j \rightarrow \infty} C_{j-\alpha, M-\frac{1}{2}, j-\alpha+M-\frac{1}{2}}^{jJ-\frac{1}{2}j+\Delta-\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (3.304)$$

Так как

$$\lim_{j \rightarrow \infty} C_{j-\alpha, M, j-\alpha+M}^{j\frac{1}{2}j+\Delta} = \delta_{\Delta M},$$

путем индукции по J в (3.304) получаем

$$\lim_{j \rightarrow \infty} C_{j-\alpha, M, j-\alpha+M}^{jJj+\Delta} = \delta_{\Delta M}. \quad (3.305)$$

В книге [102] (формулы (4.98) и (3.32)) приведены коэффициенты Рака и Вигнера в виде, который явно показывает предельные свойства (3.280) и (3.305).

Множество других рекурсивных соотношений может быть найдено, отправляясь от той или иной формы тождества Б — Э. Типичное соотношение с тремя слагаемыми может быть получено выбором в (3.275) $a' = j - \rho - \sigma - \frac{1}{2}$, $b' = j - \frac{1}{2}$, $c' = j - \sigma - \frac{1}{2}$, $d' = j$, $d = \frac{1}{2}$, $c = e + \frac{1}{2}$. Использование значений фундаментальных коэффициентов Рака в результирующем соотношении приводит к следующему соотношению:

$$\begin{aligned} & W_{\rho, \sigma+\frac{1}{2}, \rho+\sigma+\frac{1}{2}}^{a, b+\frac{1}{2}, c+\frac{1}{2}}(j) \\ &= (2b+1) \left[\frac{(2c+2)(c+\rho+\sigma+1)(2j+c-\rho-\sigma+1)}{(2c+1)(h+\sigma+1)(h+c-a+1)(a+b+c+2)(2j+h-\sigma+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times W_{\rho, \sigma, \rho+\sigma}^{abc}(j-\frac{1}{2}) \\ &- \left[\frac{(h-\sigma)(a+b-c)(a+c-b+1)(j-h-\sigma)}{(h+\sigma+1)(a+b-c+1)(a+b+c+2)(2j+h-\sigma+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\times W_{\rho, \sigma + \frac{1}{2}, \rho + \sigma + \frac{1}{2}}^{a, b - \frac{1}{2}, c + \frac{1}{2}}(j). \quad (3.306)$$

Это рекурсивное соотношение недействительно при $\sigma = -b - 1$ или $c = a - b - 1$ (или если выполняются оба этих равенства). Однако легко получить выражения для $W_{\rho, -b, \rho - b}^{abc}(j)$ и $W_{\rho, \sigma, \rho + \sigma}^{aba-b}(j)$, так что соотношение (3.306) для этих частных случаев может быть использовано для порождения коэффициентов Рака. Эти особенности типичны для рекурсивных соотношений с тремя слагаемыми. (Предел $j \rightarrow \infty$ также дает правильное соотношение для коэффициентов Вигнера.)

Можно подумать, что соотношение (3.299) или (3.306) дает полезный и простой метод вывода выражения Рака (3.292). Это не так. Некритическая итерация (в которой не уделяется внимание алгебраическим сокращениям) любого из этих соотношений дает отличную (и несимметрическую) форму коэффициентов. При критической итерации находим, что должны быть выполнены значительные алгебраические операции, чтобы привести результат к формуле Рака. Что это так, можно проверить следующим образом. Процесс итерации индуктивен, и посредством него мы получаем ответ, применяя итерацию достаточное число раз — столько, сколько требуется, чтобы угадать общий ответ; затем ответ подтверждается строго (индуктивно) путем доказательства того, что он *удовлетворяет* рекурсивному соотношению (и начальным данным). Крайне трудно показать прямо, что $W(abcd; ef)$, заданное формулой (3.292), удовлетворяет любому из соотношений (3.299) и (3.306). Это означает, что этот ответ не является «естественным» решением, возникающим из итераций.

Эти рекурсивные соотношения (и другие) полезны для общих доказательств, для вычисления первых нескольких коэффициентов и для получения числовых значений. Они не дают простого вывода результата Рака. Тем не менее тождество Б — Э *в принципе* дает метод получения всех коэффициентов Рака (а следовательно, всех коэффициентов Вигнера) из фундаментальных коэффициентов, приведенных выше.

В приложении Б показано, как сами фундаментальные коэффициенты Рака определяются а) соглашением о знаке, б) соотношениями ортогональности и в) соотношением симметрии.

Замечание. Используя свойство предела (3.300) в соотношении между коэффициентами Рака (после записи некоторых или всех коэффициентов с помощью обозначения $W_{rot}^{abc}(j)$), можно воспроизвести различные соотношения между коэффициентами Рака и коэффициентами Вигнера. Например, соотношения ортогональности для коэффициентов Рака переходят в соотношения ортогональности для коэффициентов Вигнера; соотношение (3.297) переходит в соотношение (3.268) и т.д. На этом пути можно получить результаты для коэффициентов Вигнера как предельный случай соотношений для коэффициентов Рака.

Симметрии. Коэффициенты Рака обладают большой группой (144 элемента) симметрий, физический источник которых неясен.

Легчайший путь получения симметрий коэффициентов Рака состоит в прямой проверке явной формулы. Это одна из причин, почему требовался вывод выражения для коэффициентов Рака в форме, заданной формулой (3.292). (Эквивалентную форму этого результата, полученную Лерер-Иламед, см. в работе [77] (стр. 140); чтобы исправить типографскую ошибку, следует заменить $2q_i$ на

q_i .) Другой путь вывода симметрий, который использует порождающую функцию (см. приложение Г гл. 5), был предложен Швингером [37] и Баргманом [39]. Оба пути оставляют источник симметрий неясным.

Некоторые симметрии выражения (3.292) являются более очевидными, чем другие. Мы начинаем с поиска симметрий при перестановках шести индексов $abcdef$. Более того, мы ограничиваем наше внимание теми перестановками, которые оставляют каждое выражение с z в сумме инвариантным. Выражение

$$(k - e - f - z)!(k - b - c - z)!(k - a - d - z)!, \quad (3.307)$$

где $k = a + b + c + d + e + f$,

является наиболее ограничительным (симметрия этого множителя является симметрией других множителей), и мы рассматриваем его прежде всего. Выражение (3.307) инвариантно при $3! = 6$ перестановках трех пар

$$(ad), (bc), (ef) \quad (3.308)$$

а также при перестановке двух индексов в заданной паре. Таким образом, существует $6 \times 2 \times 2 \times 2 = 48$ перестановок индексов $abcdef$, которые оставляют выражение (3.307) инвариантным. Однако видим, что перестановка индексов в одной паре (или во всех трех парах), например

$$\{(ad), (bc), (ef)\} \rightarrow \{(da), (bc), (ef)\},$$

не оставляет инвариантными множители треугольника в (3.292). Таким образом, группа перестановок, которая оставляет коэффициент Рака (3.292) инвариантным почленно, может содержать не более чем 24 элемента, соответствующих перестановкам трех пар (ad) , (bc) , (ef) между собой и перестановкам порядка индексов двух из этих трех пар. Докажем теперь, что все 24 перестановки являются симметриями коэффициента Рака.

Рассмотрим два перестановочных оператора (циклические обозначения)

$$P = (ac)(bd), \quad Q = (afde)(bc). \quad (3.309)$$

Действия этих перестановочных операторов на пары (3.308) задаются формулами

$$\begin{aligned} P: \{(ad), (bc), (ef)\} &\rightarrow \{(cb), (da), (ef)\}, \\ Q: \{(ad), (bc), (ef)\} &\rightarrow \{(fe), (cb), (ad)\}. \end{aligned} \quad (3.310)$$

Так как $\Delta(rst)$ инвариантно при шести перестановках аргументов, теперь легко проверить, что P и Q переставляют четыре множителя:

$$\frac{\Delta(rst)}{(z - r - s - t)!}, \quad (rst) = (abe), (cde), (acf), (bdf)$$

между собой (т.е. оставляют произведение инвариантным). Таким образом, группа перестановок, порожденная операторами P и Q , оставляет коэффициент Рака инвариантным, за исключением, возможно, изменения фазы.

Прямым умножением проверяем, что

$$P^2 = Q^4 = (PQ)^3 = 1. \quad (3.311)$$

Этот результат однозначно отождествляет P и Q с генераторами группы, которая изоморфна симметрической группе S_4 .

В книге [102] доказывается, что $6j$ - и $9j$ -символы (в действительности все $3nj$ -символы) сопоставляются с плоскостными кубическими графами (см. [55]). В частности, плоскостной кубический граф, соответствующий $6j$ -символу, может также быть представлен правильным тетраэдром. Группа T_d вращений-инверсий, которая переводит правильный тетраэдр в себя, дает геометрическую реализацию группы S_4 симметрий коэффициентов Рака.

То, что тетраэдр является естественным геометрическим объектом для описания симметрий коэффициентов Рака, также подсказывается четырьмя треугольниками тетраэдра и четырьмя множествами условий треугольника на коэффициенты Рака:

$$(abe), (cde), (acf), (bdf).$$

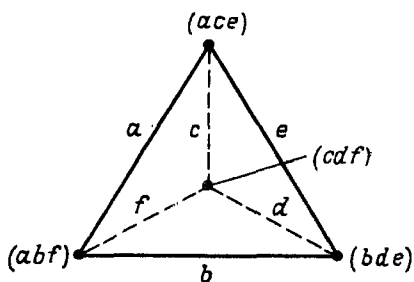


РИС. 3.4.

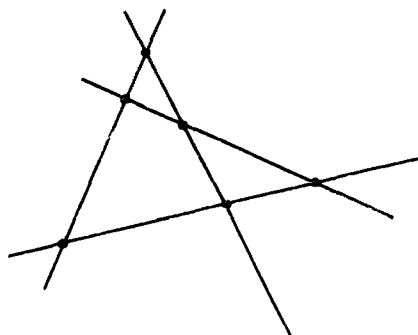


РИС. 3.5.

Итак, обозначаем ребра одной из граней (рис. 3.4) буквами abe , а затем обозначаем ребра остальных трех граней тройками (cde) , (acf) и (bdf) , так чтобы одни и те же буквы приписывались общим ребрам. Тогда видно, что пары

$$(ad), (bc), (ef)$$

обозначают три набора противоположных (и перпендикулярных) ребер.

Группа из 24 операций вращений и инверсий, которые отображают тетраэдр на себя, как теперь может быть показано, приводит к перестановкам индексов $abcdef$, которые оставляют коэффициенты Рака инвариантными (за исключением фазы). Иначе можем получить ту же группу перестановок путем обозначения каждой из четырех вершин тетраэдра тройкой индексов, обозначающих ребра, исходящие из вершины тетраэдра (рис. 3.4). Затем мы делаем все возможные 24 распределения четырех символов (abf) , (cdf) , (ace) , (bde) между четырьмя вершинами, обозначая каждое ребро буквой, общей для двух символов на его концах. Эти операции снова приводят к перестановкам символов $abcdef$, соответствующим симметриям коэффициентов Рака.

Полный четырехугольник дает другой метод¹⁾ (замеченный Фано и Рака [59]) описания этих перестановочных симметрий. Полный четырехугольник является

¹⁾ Третья реализация обсуждается в книге [102], разд. 9 гл. 5.

плоской фигурой, получаемой из тетраэдра путем отображения «грань» → «линия» и «ребро» → «точка». Таким образом, полный четырехугольник имеет четыре линии, каждая из которых пересекает три другие (без общей точки пересечения), как показано на рис. 3.5. Перестановочные симметрии коэффициентов Рака получаются из полного четырехугольника путем всех возможных распределений индексов $abcdef$ между шестью точками, таких, что три буквы каждой из троек (abe) , (cde) , (acf) и (bdf) лежат на одной прямой.

Два предыдущих метода (тетраэдр ↔ полный четырехугольник) представляют собой интересные геометрические методы реализации перестановочных симметрий коэффициентов Рака. Однако самый быстрый путь записать эти симметрии базируется на обозначении $6j$ -символа, которое использует три пары (3.308) (см. [47, 60]), соответствующие противоположным ребрам тетраэдра. Таким образом, мы отождествляем верхнюю строку $6j$ -символа с треугольником тетраэдра, скажем с (abe) , а вертикальные столбцы с парами букв, обозначающих противоположные ребра:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}.$$

Для того чтобы иметь коэффициенты, которые являются истинно инвариантными при перестановках тетраэдра, определение $6j$ -символа устраняет фазовый множитель из коэффициента Рака (3.292):

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} \equiv (-1)^{a+b+c+d} W(abcd; ef). \quad (3.312)$$

Перестановочные симметрии теперь выражаются очень просто. $6j$ -символ инвариантен при всех перестановках его столбцов и при замене любой пары элементов в верхней строке на соответствующую пару в нижней строке.

Перестановочные симметрии этих коэффициентов были замечены еще Рака [29]. После того как Редже открыл дополнительные симметрии коэффициентов Вигнера, он также проверил симметрии коэффициентов Рака и нашел их дальнейшие симметрии.

Новые симметрии, открытые Редже [61], все еще являются симметриями отдельных слагаемых в формуле (3.292), но они включают теперь *линейные преобразования* над $abcdef$, которые определяют новые треугольники. Доказательство этих симметрий проводится прямой проверкой. Если снова рассмотреть соотношение (3.292), мы увидим, что его отдельные слагаемые инвариантны (игнорируя фазу) при любом преобразовании, которое одновременно а) преобразует $\Delta(abe)\Delta(cde)\Delta(acf)\Delta(bdf)$ в себя, б) переставляет суммы $a + b + e$, $c + d + e$, $a + c + f$, $b + d + f$, в) переставляет суммы $a + d$, $b + c$, $e + f$. Теперь непосредственно проверяем равенство следующих $6j$ -символов, приводящих в общем к 144 соотношениям симметрии:

$$\begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & \frac{b+c+e-f}{2} & \frac{b+e+f-c}{2} \\ d & \frac{b+c+f-e}{2} & \frac{c+e+f-b}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \left\{ \begin{array}{cc} \frac{a+d+e-f}{2} & b \frac{a+e+f-d}{2} \\ \frac{a+d+f-e}{2} & c \frac{d+e+f-a}{2} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{cc} \frac{a+b+d-c}{2} & \frac{a+b+c-d}{2} \\ \frac{a+c+d-b}{2} & \frac{b+c+d-a}{2} \end{array} \begin{array}{c} e \\ f \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{a+b+d-c}{2} & \frac{b+c+e-f}{2} & \frac{a+e+f-d}{2} \\ \frac{a+c+d-b}{2} & \frac{b+c+f-e}{2} & \frac{d+e+f-a}{2} \end{array} \right\} \\
&= \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{a+d+e-f}{2} & \frac{a+b+c-d}{2} & \frac{b+e+f-c}{2} \\ \frac{a+d+f-e}{2} & \frac{b+c+d-a}{2} & \frac{c+e+f-b}{2} \end{array} \right\}. \quad (3.313)
\end{aligned}$$

Баргман [39] дает $6j$ -символ в форме 4×3 -таблицы (см. также [62]), которую мы расположим следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a & b & e \\ d & c & f \end{array} \right\} = \left[\begin{array}{ccc} d+f-b & c+f-a & c+d-e \\ a+f-c & b+f-d & a+b-e \\ d+e-c & b+e-a & b+d-f \\ a+e-b & c+e-d & a+c-f \end{array} \right]. \quad (3.314)$$

Причиной того, что мы записываем таблицу Баргмана в такой форме, является то, что при отождествлении $a = j - \gamma$, $b = b$, $c = j$, $d = d$, $e = j - \beta$, $f = f$, $\gamma = \alpha + \beta$ первые три строки представляют собой перераспределение элементов таблицы Редже (3.182) с $(j_1, m_1) = (b, \alpha)$, $(j_2, m_2) = (d, \beta)$ и $(j, m) = (f, \gamma)$, так что

$$\begin{aligned}
W_{\alpha\beta\gamma}^{bdf}(j) &= (-1)^{b+d+2j-\gamma} [(2j-2\beta+1)(2f+1)]^{\frac{1}{2}} \\
&\times \left[\begin{array}{ccc} d+f-b & f+\gamma & d+\beta \\ f-\gamma & b+f-d & b-\alpha \\ d-\beta & b+\alpha & b+d-f \\ 2j-b-\beta-\gamma & 2j-d-\beta & 2j-f-\gamma \end{array} \right]. \quad (3.315)
\end{aligned}$$

Это полезный результат для обсуждения связи между симметриями коэффициентов Рака и коэффициентов Вигнера (см. приложение В).

В обсуждении Баргманом симметрий коэффициентов Рака (основанном на известном результате Редже и на порождающей функции Швингера), естественно выявляется, что 144 симметрии коэффициентов Рака соответствуют преобразованиям над $abcdef$, вызванным операциями над строками и столбцами таблицы (3.314).

24 перестановки¹⁾ строк таблицы (3.314) вызывают преобразования над $abcdef$, которые соответствуют 24 перестановкам четырех символов

$$(a + b + e, c + d + e, a + c + f, b + d + f)$$

и которые оставляют инвариантным каждый из трех символов

$$(a + d, b + c, e + f)$$

Подобным образом шесть перестановок столбцов таблицы (3.314) вызывают преобразования над $abcdef$, которые соответствуют шести перестановкам трех символов

$$(a + d, b + c, e + f)$$

и которые оставляют инвариантным каждый из четырех символов

$$(a + b + e, c + d + e, a + c + f, b + d + f)$$

Таким образом, иной путь описания группы инвариантности $6j$ -символа может быть таким. Это группа преобразований над $abcdef$, вызванных группой перестановок вида

$$\begin{aligned} (a + b + e, c + d + e, a + c + f, b + d + f) \\ \rightarrow (a' + b' + e', c' + d' + e', a' + c' + f', b' + d' + f'), \\ (a + d, b + c, e + f) \rightarrow (a' + d', b' + c', e' + f'), \end{aligned}$$

где символы справа являются перегруппировками символов слева. Видим, что эта группа является прямым произведением групп $S_4 \times S_3$.

Интересный вопрос, касающийся симметрий коэффициентов Рака и Вигнера, поставлен существованием предельного соотношения (3.280). Которая из симметрий коэффициентов Рака в этом пределе остается и становится симметрией коэффициентов Вигнера? Ответ на этот вопрос дается в приложении В.

19. $9j$ -коэффициенты

Так как $9j$ -коэффициенты в частных случаях сводятся к $6j$ -коэффициентам (см. формулу (3.325)), то может показаться что $9j$ -коэффициенты являются даже более «основными», чем $6j$ -коэффициенты. Однако фундаментальная теорема теории пересвязывания утверждает, что каждый коэффициент пересвязывания ($3nj$ -коэффициент, $n = 3, 4, \dots$) выражается как сумма произведений коэффициентов Рака ($6j$ -коэффициентов). Этот результат доказан в книге [102]. Именно это свойство делает коэффициент Рака фундаментальным объектом теории инвариантов относительно вращений (а следовательно, теории пересвязывания).

Здесь мы кратко излагаем некоторые из свойств $9j$ -символов; доказательства и дополнительные соотношения имеются в литературе [16, 55, 63 — 67, 102].

¹⁾ Следует заметить, что 24 перестановки тетраэдра не соответствуют 24 перестановкам в таблице.

Выражение в терминах 3j- и 6j-символов. Выражение, связывающее 9j-символы с коэффициентами Вигнера, дается формулами (3.250) и (3.252). Мы делаем в этом результате отождествление $(j_{11}, j_{21}, j_{31}) = (k_1, k_2, k)$, $(j_{12}, j_{22}, j_{32}) = (j_1, j_2, j)$ и $(j_{13}, j_{23}, j_{33}) = (j'_1, j'_2, j')$, выражаем коэффициенты Вигнера в терминах 3j-символов (формула (3.182)) и, наконец, используем симметрии 3j-символов, получая таким образом следующее соотношение (в котором $\phi \equiv \sum_{kl} j_{kl}$):

$$\begin{aligned}
 & (-1)^\phi \begin{Bmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{Bmatrix} \begin{pmatrix} j_{31} & j_{32} & j_{33} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{\text{все } (m_{11})(m_{21})} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ m_{11} & m_{21} & m_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_{13} & j_{23} & j_{33} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.316}$$

Используя симметрии 3j-символов, теперь можно доказать соотношение симметрии (полная группа симметрий обсуждается ниже)

$$\begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{Bmatrix} = (-1)^\phi \begin{Bmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ j_{13} & j_{23} & j_{33} \end{Bmatrix}. \tag{3.317}$$

Используя это соотношение симметрии и ортогональность 3j-коэффициентов Вигнера в формуле (3.316), получаем следующую симметричную форму для 9j-коэффициентов:

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{Bmatrix} \\
 &= \sum_{\text{все } m_{ij}} \begin{pmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ m_{11} & m_{12} & m_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{31} & j_{32} & j_{33} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix} \\
 & \times \begin{pmatrix} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ m_{11} & m_{21} & m_{31} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ m_{12} & m_{22} & m_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_{13} & j_{23} & j_{33} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.318}$$

С другой стороны, соотношение (3.251) выражает 9j-символы прямо в терминах 6j-символов. Используя симметрии 6j-символов и соотношение (3.317), можно выразить этот результат в такой симметричной форме:

$$\begin{aligned}
 & \begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{Bmatrix} \\
 &= \sum_k (-1)^{2k} (2k+1) \begin{Bmatrix} j_{11} & j_{21} & j_{31} \\ j_{32} & j_{33} & k \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ j_{21} & k & j_{23} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} j_{13} & j_{23} & j_{33} \\ k & j_{11} & j_{12} \end{Bmatrix}.
 \end{aligned} \tag{3.319}$$

Это соотношение показывает (это показывает и формула (3.316)), что $9j$ -коэффициент равен нулю, если условия треугольника не выполняются для величин в каждой строке и каждом столбце символа.

Соотношения ортогональности. Ортогональность $6j$ -коэффициентов выражается формулой

$$\sum_f (2e+1)(2f+1) \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & e' \\ d & c & f' \end{Bmatrix} = \delta_{ee'} \varepsilon_{abe} \varepsilon_{dce}. \quad (3.320)$$

Этот результат прямо следует из соотношения ортогональности (3.271) для коэффициентов Рака и определения (3.312) $6j$ -символа. Соотношение ортогональности для $9j$ -коэффициента прямо следует из соотношения (3.319), симметрий $6j$ -символа и соотношения ортогональности (3.320):

$$\sum_{hi} (2c+1)(2f+1)(2h+1)(2i+1) \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a & b & c' \\ d & e & f' \\ h & i & j \end{Bmatrix} = \delta_{cc'} \delta_{ff'}. \quad (3.321)$$

Заметим, что этот результат должен применяться только к тройкам (abc) , (def) , (cfj) , (abc') , (def') и $(c'f'j)$, которые удовлетворяют условиям треугольника, так как мы не включили множителей $\varepsilon_{abc'}$, ..., необходимых для того, чтобы соотношение (3.321) было справедливым для более общего случая.

Симметрии $9j$ -символов. Существует 62 известных соотношения симметрии $9j$ -символов. Каждая из этих симметрий является симметрией выражения (3.318) для каждого слагаемого и является следствием симметрий $3j$ -символов. Легко проверить, что $9j$ -символ

$$\begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} \end{Bmatrix}$$

инвариантен при четной перестановке его строк, четной перестановке его столбцов и при замене строк на столбцы (матричная транспозиция). При нечетных перестановках его строк и столбцов он умножается на множитель

$$(-1)^{\sum m/4} \quad (3.322)$$

Частные значения $9j$ -символов. Соотношение (3.319) особенно полезно для вычисления определенных $9j$ -символов. Если, например, мы имеем $j_{33} = 0$, то

$$\begin{Bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} \\ j_{31} & j_{32} & 0 \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{j_{12}+j_{13}+j_{21}+j_{23}} \delta_{j_{13}/2, j_{31}/2} \delta_{j_{31}/2, j_{23}} \begin{Bmatrix} j_{12} & j_{22} & j_{32} \\ j_{21} & j_{11} & j_{23} \end{Bmatrix}}{[(2j_{31}+1)(2j_{13}+1)]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.323)$$

так как

$$\begin{Bmatrix} a & b & 0 \\ d & c' & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & f & c \\ d & 0 & b \end{Bmatrix} = \frac{(-1)^{a+c+f} \delta_{ab} \delta_{cd}}{[(2a+1)(2c+1)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (3.324)$$

Теперь можно использовать соотношения симметрии, чтобы переставить нуль в (3.323) на любое желаемое место в 3×3 -таблице, порождая следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} a & b & e \\ c & d & e \\ f & f & 0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 & e & e \\ f & d & b \\ f & c & a \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e & 0 & e \\ c & f & a \\ d & f & b \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} f & f & 0 \\ d & c & e \\ b & a & e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f & b & d \\ 0 & e & e \\ f & a & c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a & f & c \\ e & 0 & e \\ b & f & d \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} b & a & e \\ f & f & 0 \\ d & c & e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} e & d & c \\ e & b & a \\ 0 & f & f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} c & e & d \\ a & e & b \\ f & 0 & f \end{Bmatrix} \\
 &= \frac{(-1)^{b+c+e+f}}{[(2e+1)(2f+1)]^{\frac{1}{2}}} \begin{Bmatrix} a & b & e \\ d & c & f \end{Bmatrix}. \quad (3.325)
 \end{aligned}$$

Мы заключаем это введение в теорию $9j$ -символа, приводя его алгебраическое выражение в простейшей известной форме [67a]:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ h & i & j \end{Bmatrix} &= (-1)^{c+f-j} \frac{(dah)(bei)(jhi)}{(def)(bac)(jcf)} \\
 &\times \sum_{xyz} \frac{(-1)^{x+y+z}}{x!y!z!} \times \frac{(2f-x)!(2a-z)!}{(2i+1+y)!(a+d+h+1-z)!} \\
 &\times \frac{(d+e-f+x)!(c+j-f+x)!}{(e+f-d-x)!(c+f-j-x)!} \times \frac{(e+i-b+y)!(h+i-j+y)!}{(b+e-i-y)!(h+j-i-y)!} \\
 &\times \frac{(b+c-a+z)!}{(a+d-h-z)!(a+c-b-z)!(a+d+h+1-z)!} \\
 &\times \frac{(a+d+j-i-y-z)!}{(d+i-b-f+x+y)!(b+f-a-j+x+z)!}, \quad (3.326)
 \end{aligned}$$

где

$$(a \ b \ c) \equiv \left[\frac{(a-b+c)!(a+b-c)!(a+b+c+1)!}{(b+c-a)!} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Многочисленные частные случаи $9j$ -коэффициентов можно найти в книге [67b].

20. Произведения, инвариантные относительно вращений

Физические приложения теории углового момента часто включают построение инвариантов относительно вращений из двух или большего числа тензорных операторов. Общая процедура для этого построения базируется на понятии со-

пряженного неприводимого тензорного оператора и свойства унитарности матриц вращений.

Связывание $[S^{k_1} \times S^{k_2}]^k$ тензорных операторов уже привело нас к построению инварианта относительно вращений:

$$[S^J \times T^J]_0^0 = \sum_M \frac{(-1)^{J-M}}{(2J+1)^{\frac{1}{2}}} S_M^J T_{-M}^J. \quad (3.327)$$

Существенным структурным элементом в этом построении является свойство преобразования при вращении множества операторов $\{\bar{T}_M^J; M = J, \dots, -J\}$, где

$$\bar{T}_M^J \equiv (-1)^{J-M} T_{-M}^J. \quad (3.328)$$

Находим, что эти операторы линейно преобразуются между собой с коэффициентами, которые являются элементами комплексно сопряженной матрицы вращения:

$$\mathcal{U}: \bar{T}_M^J \rightarrow \mathcal{U} \bar{T}_M^J \mathcal{U}^{-1} = \sum_{M'} D_{M'M}^{J*}(U) \bar{T}_{M'}^J. \quad (3.329)$$

Эквивалентное определение может быть дано путем определения коммутаторного действия оператора полного углового момента:

$$\begin{aligned} [J_+, \bar{T}_M^J] &= -[(J+M)(J-M+1)]^{\frac{1}{2}} \bar{T}_{M-1}^J, \\ [J_-, \bar{T}_M^J] &= -[(J-M)(J+M+1)]^{\frac{1}{2}} \bar{T}_{M+1}^J, \\ [J_3, \bar{T}_M^J] &= -M \bar{T}_M^J. \end{aligned} \quad (3.330)$$

Доказательство. Доказательство соотношения (3.329) прямо следует из свойства матрицы вращения

$$D_{-M', -M}^J(U) = (-1)^{M'-M} D_{M'M}^{J*}(U), \quad (3.331)$$

которое доказывается в приложении В гл. 5. ■

Свойство преобразования (3.329) операторов (3.328) является общим, т.е. любое множество операторов $\{\bar{T}_M^J\}$, обладающее этим свойством преобразования, может быть использовано, чтобы определить инвариант относительно вращений. Мы называем такое множество операторов *сопряженным неприводимым тензорным оператором*.

Таким образом, мы пришли к следующему результату: пусть S^J и $\bar{T}^J$ обозначают тензорный и сопряженный тензорный операторы соответственно. Тогда величина

$$\sum_M S_M^J \bar{T}_M^J \quad (3.332)$$

является инвариантом относительно вращений (так же как $\sum_M \bar{S}_M^J T_M^J$).

Доказательство этого результата может быть дано путем использования преобразований (3.216) и (3.329), чтобы показать, что $\mathcal{U}$ коммутирует с формой (3.332). Иначе, коммутационные соотношения (3.206) и (3.330) могут быть прямо использованы, чтобы показать, что полный угловой момент J коммутирует с формой (3.332).

Приведем примеры сопряженных неприводимых тензорных операторов: а) комплексное сопряжение $\Phi_{(\alpha)JM}^*$ волновой функции точного углового момента

(см., однако, обсуждение на стр. 93), б) эрмитово сопряжение неприводимого тензорного оператора, т.е. оператор $T^{J\dagger}$, определенный формулой

$$\langle(\alpha)jm|T_M^{J\dagger}(\alpha')j'm'\rangle = \langle(\alpha')j'm'|T_M^J(\alpha)jm\rangle^*, \quad (3.333)$$

и в) оператор T^J , определенный формулой (3.328) и умноженный на произвольный множитель, который не зависит от M . Например, в литературе часто используется

$$(\bar{T}_M^J)' \equiv (-1)^{J+M} T_{-M}^J \quad (3.334)$$

Связывание трех тензорных операторов (или волновых функций, или их комбинации) в инвариант относительно вращений часто встречается в приложениях теории углового момента и в действительности может рассматриваться как основная структура для определения коэффициентов Вигнера [31, 37, 38, 68]. Это связывание задается формулой

$$\begin{aligned} [[A^a \times B^b]^c \times C^c]_0^0 &= \sum_{\gamma} [A^a \times B^b]_{\gamma}^c \bar{C}_{\gamma}^c \\ &= \sum_{\alpha\beta\gamma} \frac{(-1)^{c-\gamma}}{\sqrt{2c+1}} C_{\alpha\beta\gamma}^{abc} A_{\alpha}^a B_{\beta}^b C_{-\gamma}^c \\ &= (-1)^{a-b+c} \sum_{\alpha\beta\gamma} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} A_{\alpha}^a B_{\beta}^b C_{\gamma}^c, \end{aligned} \quad (3.335)$$

так как

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \frac{(-1)^{a-b-\gamma}}{\sqrt{2c+1}} C_{\alpha,\beta,-\gamma}^{abc}.$$

Из (3.335) видим, что $3j$ -коэффициенты естественно возникают в осуществлении связывания трех тензорных операторов в инвариант. Инвариантное выражение

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} A_{\alpha}^a B_{\beta}^b C_{\gamma}^c \quad (3.336)$$

имеет множество применений для интерпретации тензорных операторов и для интерпретации волновых функций.

Как замечено выше, если определено эрмитово сопряжение к C^c , то также справедливо, что форма

$$\sum_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\alpha\gamma}^{bac} A_{\alpha}^a B_{\beta}^b C_{\gamma}^c \quad (3.337)$$

является инвариантом относительно вращений, и в общем случае два инварианта (3.336) и (3.337) не совпадают.

Интерпретация коэффициентов Вигнера $C_{\alpha\beta 0}^{ab0}$ для скалярного связывания с помощью метрики сопоставляется с операцией сопряжения, определенной формулой (3.328). Эти коэффициенты могут рассматриваться как осуществление преобразования от множества компонент $\{A_{\alpha}^a\}$ неприводимого тензорного оператора к сопряженному множеству $\{A_{\alpha}^a\}$:

$$A_{\alpha}^a \rightarrow \bar{A}_{\alpha}^a \equiv \sum_{\alpha'\gamma} C_{\alpha\alpha'\gamma}^{aa'0} A_{\alpha'}^{a'} = \frac{(-1)^{a-\alpha}}{\sqrt{2a+1}} A_{-\alpha}^a. \quad (3.338)$$

Именно этот результат и свойство

$$\sum_{\alpha} A_{\alpha}^a \bar{A}_{\alpha}^a = \text{инвариант относительно вращений} \quad (3.339)$$

допускают интерпретацию с помощью метрики для коэффициентов Вигнера скалярного связывания ([13] стр. 292).

21. Операторы, сопоставляемые с коэффициентами Вигнера и Рака и с $9j$ -коэффициентами

В этом разделе мы определяем операторы, сопоставляемые с коэффициентами Вигнера и Рака и с $9j$ -коэффициентами. Все определенные здесь операторы являются ограниченными линейными операторами, действующими в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Мы предполагаем, что $\mathcal{H}$ полностью разбито на неприводимые по отношению к угловому моменту J подпространства и, более того, что каждое такое подпространство $\mathcal{H}_j$ ($j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$) встречается в точности один раз и натягивается на множество ортонормированных базисных векторов $\{|jm\rangle, m = j, j-1, \dots, -j\}$, на которых J имеет стандартное действие, заданное формулами (3.16) и (3.20)¹⁾. Примеры таких пространств даны в книге [102], где приведенные здесь алгебраические связи развиваются в деталях в трех главах. Так как эти результаты не входят в обычную учебную литературу, то полезно кратко изложить некоторые из основных определений и алгебраических соотношений, для того чтобы эти понятия были доступны для использования в приложениях в гл. 7.

Ниже определены четыре типа операторов: *операторы Вигнера*, (называемые также единичными тензорными операторами), *инварианты Рака*, *операторы Рака* и *$9j$ -инварианты*. Операторы Вигнера и инварианты Рака определяются путем их действия на базис углового момента пространства $\mathcal{H}$. Операторы Рака и $9j$ -инварианты определяются путем их действия на базис связанных угловых моментов тензорного произведения $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Мы даем ряд свойств операторов Вигнера, так как эти операторы наиболее часто используются в приложениях. Мы даем лишь некоторые свойства операторов Рака. Но заметим, что эти операторы обладают свойствами, аналогичными свойствам операторов Вигнера (см. [102]). Инварианты Рака и $9j$ -инварианты естественно возникают в правилах связывания для операторов Вигнера и Рака.

ОПЕРАТОРЫ ВИГНЕРА

Обозначение (схемы Гельфанда; см. приложение А гл. 5):

$$\left\langle \begin{array}{ccc} J + \Delta & & \\ 2J & & 0 \\ & J + M & \end{array} \right\rangle, \quad \begin{array}{l} M, \Delta = J, J-1, \dots, -J \\ 2J = 0, 1, 2, \dots \end{array} \quad (3.340)$$

¹⁾ В примечании 12 мы обсуждаем, как такие абстрактные пространства используются в приложениях.

Определение (действие сдвига):

$$\left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle |jm\rangle = C_{m, M, m+M}^{J, J+\Delta, J} |j + \Delta, m + M\rangle$$

$$\text{для всех } j = 0, \frac{1}{2}, \dots; m = j, j - 1, \dots, -j. \quad (3.341)$$

Сопряжение:

$$\left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle^\dagger |jm\rangle = C_{m-M, M, m}^{j-\Delta, J, j} |j - \Delta, m - M\rangle. \quad (3.342)$$

Ортогональность

$$\begin{aligned} \sum_M \left\langle \begin{matrix} J + \Delta' \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle^\dagger |jm\rangle &= \delta_{\Delta' \Delta} \delta_{j-\Delta, J} |jm\rangle, \\ \sum_{\Delta} \left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M' \end{matrix} \right\rangle^\dagger \left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle |jm\rangle &= \delta_{M' M} |jm\rangle, \\ \sum_m \langle jm| \left\langle \begin{matrix} J' + \Delta' \\ 2J' \\ J' + M' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle^\dagger |jm\rangle &= \frac{2j+1}{2J+1} \delta_{J' J} \delta_{M' M} \delta_{\Delta' \Delta}. \end{aligned} \quad (3.343)$$

Свойство тензорного оператора (см. формулу (3.216)):

$$\mathcal{U} \left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle \mathcal{U}^{-1} = \sum_{M'} D_{M' M}^J(U) \left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle. \quad (3.344)$$

Основное свойство (теорема Вигнера — Экарта):

$$T_M^J |jm\rangle = \left(\sum_{\Delta} \langle j + \Delta | T^J | j \rangle \left\langle \begin{matrix} J + \Delta \\ 2J \\ J + M \end{matrix} \right\rangle \right) |jm\rangle. \quad (3.345)$$

Характеристическое нулевое пространство. Характеристическое нулевое пространство¹⁾ оператора Вигнера, определенного формулой (3.341), является множеством неприводимых подпространств $\mathcal{H}_i \subset \mathcal{H}$

$$\{\mathcal{H}_j; 2j = 0, 1, \dots, J - \Delta - 1\}. \quad (3.346)$$

¹⁾ Различие между нулевым пространством (или ядром) и характеристическим нулевым пространством состоит в том, что последнее пространство состоит из целых пространств неприводимых представлений, а не из отдельных векторов. Это понятие и его использование в структуре операторов Вигнера и операторов Рака в деталях рассматривается в книге [102], гл. 3 и 4.

Закон связывания:

$$\sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \begin{pmatrix} b+\sigma \\ 2b & 0 \\ b+\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\rho \\ 2a & 0 \\ a+\alpha \end{pmatrix} = W_{\rho,\sigma,\rho+\sigma}^{abc} \begin{pmatrix} c+\rho+\sigma \\ 2c & 0 \\ c+\gamma \end{pmatrix}. \quad (3.347)$$

В этом результате $W_{\rho\sigma\tau}^{abc}$ является инвариантным оператором (коммутирует с $\mathbf{J}$) и называется *инвариантом Рака*; так как он имеет на общем состоянии $|jm\rangle$ собственные значения, совпадающие с коэффициентом Рака:

$$W_{\rho\sigma\tau}^{abc} |jm\rangle = W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j) |jm\rangle. \quad (3.348)$$

В обозначениях Кондона и Шортли для редуцированных матричных элементов (см. стр. 98) имеем

$$W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j+\Delta) = \langle j+\Delta, m+M | W_{\rho\sigma\tau}^{abc} | j+\Delta, m+M \rangle = \langle j+\Delta | W_{\rho\sigma\tau}^{abc} | j \rangle. \quad (3.349)$$

Отметим, что именно этот последний коэффициент со сдвинутым индексом $j+\Delta$ появляется в (3.347), когда берем матричный элемент $\langle j+\Delta, m+M | \dots | jm \rangle$.

Закон произведения:

$$\begin{pmatrix} b+\sigma \\ 2b & 0 \\ b+\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\rho \\ 2a & 0 \\ a+\alpha \end{pmatrix} = \sum_c W_{\rho,\sigma,\rho+\sigma}^{abc} C_{\alpha,\beta,\alpha+\beta}^{abc} \begin{pmatrix} c+\rho+\sigma \\ 2c & 0 \\ c+\alpha+\beta \end{pmatrix}. \quad (3.350)$$

Инвариант Рака:

$$\delta_{\tau\tau} W_{\rho\sigma\tau}^{abc} = \sum_{\alpha\beta\gamma} C_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \begin{pmatrix} b+\sigma \\ 2b & 0 \\ b+\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+\rho \\ 2a & 0 \\ a+\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c+\tau \\ 2c & 0 \\ c+\gamma \end{pmatrix}^{\dagger}. \quad (3.351)$$

Эти инварианты Рака удовлетворяют соотношениям ортогональности, которые соответствуют соотношению (3.281) для коэффициентов Рака.

Беря матричные элементы приведенных операторных соотношений по отношению к базисным состояниям нашего основного гильбертова пространства $\mathcal{H}$, получаем алгебраические соотношения между коэффициентами Вигнера и Рака, которые уже рассмотрены в разд. 12 и 18, например соотношения ортогональности (3.178) и (3.179) и множество соотношений (3.266) — (3.270). Эти соотношения справедливы без ссылки на лежащую в основе физику. В самом деле, сущность теоремы Вигнера — Экарта заключается в факторизации физического тензорного оператора на две части: часть, «содержащую» физику и сопоставляемую с оператором (редуцированными матричными элементами), который обычно *неограничен*, и часть (оператор Вигнера), которая включает симметрию вращений и которая *ограничена*. Именно свойства этих ограниченных операторов составляют *алгебру Рака — Вигнера*, приведенную в общих чертах выше (и развитую в деталях в книге [102]).

Тождество Б — Э (3.275) является следствием ассоциативного закона для произведения трех операторов Вигнера и может быть доказано путем использования закона произведения (3.350) (это доказательство см. в книге [102]). Существование тождества Б — Э является существенным результатом, который позволяет определить еще одну алгебру ограниченных операторов теории углового момента. Относящееся сюда гильбертово пространство является тензорным произведением $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$. Мы предполагаем, что это пространство полностью разбито на неприводимые подпространства по отношению к полному угловому моменту $\mathbf{J} = \mathbf{J}(1) + \mathbf{J}(2)$ и, более того, что каждое такое подпространство натягивается на множество ортонормированных базисных векторов $\{|(j_1 j_2)jm\rangle; m = j, \dots, -j\}$, где

$$|(j_1 j_2)jm\rangle = \sum_{m_1 m_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} |j_1 m_1\rangle \otimes |j_2 m_2\rangle. \quad (3.352)$$

ОПЕРАТОРЫ РАКА

Обозначение:

$$\left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a & 0 \\ a + \sigma \end{matrix} \right\}, \quad \begin{matrix} \rho, \sigma = a, a-1, \dots, -a \\ 2a = 0, 1, 2, \dots \end{matrix}. \quad (3.353)$$

Определение:

$$\left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a & 0 \\ a + \sigma \end{matrix} \right\} = (-1)^{a+\sigma} \sum_{\alpha} \left\langle \begin{matrix} a + \rho \\ 2a & 0 \\ a + \alpha \end{matrix} \right\rangle \otimes \left\langle \begin{matrix} a - \sigma \\ 2a & 0 \\ a + \alpha \end{matrix} \right\rangle^{\dagger}. \quad (3.354)$$

Иное определение:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a & 0 \\ a + \sigma \end{matrix} \right\} |(j_1 j_2)jm\rangle &= [(2j_1 + 2\rho + 1)(2j_2 + 1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\times W(j, j_1, j_2 + \sigma, a; j_2, j_1 + \rho) \\ &\times |(j_1 + \rho, j_2 + \sigma)jm\rangle. \end{aligned} \quad (3.355)$$

Сопряжение:

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a & 0 \\ a + \sigma \end{matrix} \right\}^{\dagger} |(j_1 j_2)jm\rangle &= [(2j_1 + 1)(2j_2 - 2\sigma + 1)]^{\frac{1}{2}} \\ &\times W(j, j_1 - \rho, j_2, a; j_2 - \sigma, j_1) \\ &\times |(j_1 - \rho, j_2 - \sigma)jm\rangle. \end{aligned} \quad (3.356)$$

Ортогональность:

$$\sum_{\sigma} \left\{ \begin{matrix} a + \rho' \\ 2a & 0 \\ a + \sigma \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a & 0 \\ a + \sigma \end{matrix} \right\}^{\dagger} |(j_1 j_2)jm\rangle = \delta_{\rho' \rho} \delta_{j_1 - \rho, a, j_1} |(j_1 j_2)jm\rangle,$$

$$\sum_{\rho} \left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a \\ a + \sigma' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a \\ a + \sigma \end{matrix} \right\}^{\dagger} |(j_1 j_2) jm\rangle = \delta_{\sigma', \sigma} \varepsilon_{j_2 + \sigma, a, j_2} |(j_1 j_2) jm\rangle,$$

$$\sum_{j = |j_1 - j_2|}^{j_1 + j_2} \langle (j_1 j_2) jm | (2j + 1) \left\{ \begin{matrix} a' + \rho' \\ 2a' \\ a' + \sigma' \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a \\ a + \sigma \end{matrix} \right\}^{\dagger} |(j_1 j_2) jm\rangle$$

$$= [(2j_1 + 1)(2j_2 - 2\sigma + 1)/(2a + 1)] \delta_{a', a} \delta_{\rho', \rho} \delta_{\sigma', \sigma} \varepsilon_{j_1 - \rho, j_1, a} \varepsilon_{j_2 - \sigma, j_2, a}. \quad (3.357)$$

Закон умножения:

$$\left\{ \begin{matrix} b + \sigma \\ 2b \\ b + \beta \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a \\ a + \alpha \end{matrix} \right\} = \sum_c \bar{\mathbf{W}}_{\rho, \sigma, \rho + \sigma}^{abc} \mathbf{W}_{\alpha, \beta, \alpha + \beta}^{abc} \left\{ \begin{matrix} c + \rho + \sigma \\ 2c \\ c + \alpha + \beta \end{matrix} \right\}. \quad (3.358)$$

В этом результате $\bar{\mathbf{W}}_{\rho\sigma\tau}^{abc}$ и $\mathbf{W}_{\alpha\beta\gamma}^{abc}$ обозначают инварианты Рака по отношению к угловым моментам $\mathbf{J}(1)$ и $\mathbf{J}(2)$ соответственно, так что

$$\bar{\mathbf{W}}_{\rho\sigma\tau}^{abc} |(j_1 j_2) jm\rangle = W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j_1) |(j_1 j_2) jm\rangle,$$

$$\mathbf{W}_{\alpha\beta\gamma}^{abc} |(j_1 j_2) jm\rangle = W_{\alpha\beta\gamma}^{abc}(j_2) |(j_1 j_2) jm\rangle.$$

При вычислении действия операторного соотношения (3.358) на базисный вектор $|(j_1 j_2) jm\rangle$ эти два инварианта Рака должны вычисляться на сдвинутых индексах $j_1 + \rho + \sigma$ и $j_2 + \alpha + \beta$ соответственно.

Закон произведения (3.358) является операторной версией тождества Б — Э, причем последнее было переоткрыто из соотношения (3.358) путем взятия матричных элементов $\langle j_1 + \rho + \sigma, j_2 + \alpha + \beta | jm \rangle \dots | j_1 j_2 | jm \rangle$. Таким образом, тождество Б — Э лежит в основе существования алгебры операторов Рака (названной в [102] W -алгеброй).

Выше мы дали два эквивалентных определения оператора Рака: первое в терминах операторов Вигнера, а второе в терминах коэффициентов Рака. Последнее определение «освобождает» определение оператора Рака от определения оператора Вигнера в смысле, рассмотренном в разд. 18.

9j-ИНВАРИАНТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Определение оператора Рака, данное в (3.354), является частным случаем общего оператора, определенного связыванием:

$$T_{\rho\sigma, \alpha\beta}^{abc} \equiv \sum_{\alpha\beta} C_{\alpha\beta\gamma}^{abc} \left\langle \begin{matrix} a + \rho \\ 2a \\ a + \alpha \end{matrix} \right\rangle \otimes \left\langle \begin{matrix} b + \sigma \\ 2b \\ a + \beta \end{matrix} \right\rangle. \quad (3.359)$$

Таким образом, находим

$$\left\{ \begin{matrix} a + \rho \\ 2a \\ a + \sigma \end{matrix} \right\} |(j_1 j_2) jm\rangle = \left[\frac{(2a + 1)(2j_2 + 1)}{(2j_2 + 2\sigma + 1)} \right]^2 T_{\rho\sigma 0}^{aa0} |(j_1 j_2) jm\rangle. \quad (3.360)$$

Оператор $T_{\rho\sigma\gamma}^{abc}$ является тензорным оператором типа T_{γ}^c по отношению к полному угловому моменту J . Поэтому он имеет разложение в терминах операторов Вигнера по отношению к J (основное свойство):

$$\left\langle \begin{array}{cc} c + \tau & \\ 2c & 0 \\ c + \gamma & \end{array} \right\rangle.$$

Эти операторы действуют на связанный базис по формуле

$$\left\langle \begin{array}{cc} c + \tau & \\ 2c & 0 \\ c + \gamma & \end{array} \right\rangle |(j_1 j_2) j m\rangle = C_{m, \gamma, m+\gamma}^{j c j+\tau} |(j_1 j_2) j + \tau, m + \gamma\rangle. \quad (3.361)$$

Таким образом, имеем соотношение

$$T_{\rho\sigma\gamma}^{abc} = \sum_{\tau} \left[\begin{array}{c} abc \\ \rho\sigma\tau \end{array} \right] \left\langle \begin{array}{cc} c + \tau & \\ 2c & 0 \\ c + \gamma & \end{array} \right\rangle, \quad (3.362)$$

где

$$\left[\begin{array}{c} abc \\ \rho\sigma\tau \end{array} \right] \quad (3.363)$$

является инвариантным оператором по отношению к J . Используя обозначение Кондона и Шортли для редуцированных матричных элементов оператора (3.363), находим

$$\begin{aligned} & \langle (j_1 + \rho, j_2 + \sigma) j + \tau | \left[\begin{array}{c} abc \\ \rho\sigma\tau \end{array} \right] | (j_1 j_2) j \rangle \\ &= [(2j + 1)(2c + 1)(2j_1 + 2\rho + 1)(2j_2 + 2\sigma + 1)]^{\frac{1}{2}} \\ & \times \left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j \\ a & b & c \\ j_1 + \rho & j_2 + \sigma & j + \tau \end{array} \right\}. \end{aligned} \quad (3.364)$$

Оператор $\left[\begin{array}{c} abc \\ \rho\sigma\tau \end{array} \right]$ называется $9j$ -инвариантным оператором, так как его матричные элементы являются (с точностью до множителей) $9j$ -коэффициентами.

Замечание. Введенное выше обозначение для операторов Вигнера и Рака базируется на понятии схем Гельфанда. Это обозначение естественно для базисных векторов и тензорных операторов для группы $U(2)$ (а также для $SU(2)$) и имеет непосредственное обобщение на $U(n)$ (см. приложение А гл. 5). Оператор Вигнера для группы $U(2)$, например, обозначается так:

$$\left\langle \begin{array}{cc} \Gamma_{11} & \\ M_{12} & M_{22} \\ & M_{11} \end{array} \right\rangle, \quad (3.365)$$

где величины в этой схеме могут быть любыми целыми числами (отрицательными, нулем или положительными), которые удовлетворяют условиям

$$M_{12} \geq M_{11} \geq M_{22}; M_{12} \geq \Gamma_{11} \geq M_{22}. \quad (3.366)$$

Когда оператор Вигнера для группы $U(2)$ ограничен в действии на базисные вектора $|jm\rangle$ для группы $SU(2)$, то он дает тот же результат, что и оператор Вигнера для группы $SU(2)$:

$$\left\langle \begin{matrix} & \Gamma_{11} & \\ M_{12} & & M_{22} \\ & M_{11} & \end{matrix} \right\rangle \sim \left\langle \begin{matrix} & J + \Delta & \\ 2J & & 0 \\ & J + M & \end{matrix} \right\rangle, \quad (3.367)$$

где

$$\begin{aligned} J &= (M_{12} - M_{22})/2, \\ M &= M_{11} - (M_{12} + M_{22})/2, \\ \Delta &= \Gamma_{11} - (M_{12} + M_{22})/2. \end{aligned} \quad (3.368)$$

Иногда удобно использовать общее $U(2)$ -обозначение даже при обсуждениях операторов Вигнера для группы $SU(2)$. Соотношения (3.367) и (3.368) тогда дают правило для отображения оператора Вигнера для группы $U(2)$ на его эквивалентную версию для группы $SU(2)$.

Правило, аналогичное соотношениям (3.367) и (3.368), также имеет место для операторов Рака.

Таблицы 5 — 7 в приложении (т. 2) дают дальнейшие свойства некоторых частных операторов Вигнера и Рака соответственно.

22. Примечания

1. *Фазы матриц углового момента.* Состояние физической системы в квантовой механике определяется только с точностью до фазы (состояние — это луч в гильбертовом пространстве). Отсюда следует, что фазовое преобразование «стандартного» состояния $|jm\rangle$ углового момента не может изменять физических предсказаний теории углового момента:

$$|jm\rangle \rightarrow |jm\rangle' \equiv e^{i\alpha(j,m)} |jm\rangle, \quad (3.369)$$

где вещественные числа

$$\alpha(j, j), \alpha(j, j-1), \dots, \alpha(j, -j) \quad (3.370)$$

могут выбираться произвольно.

Действие этого преобразования на «стандартные» соотношения (3.16) и (3.20) должно оставлять неизменными уравнения на собственные значения, но модифицировать соотношения (3.20):

$$\begin{aligned} J_+ |jm\rangle' &= e^{i\delta(j,m)} [(j-m)(j+m+1)]^{\frac{1}{2}} |jm+1\rangle', \\ J_- |jm\rangle' &= e^{-i\delta(j,m-1)} [(j+m)(j-m+1)]^{\frac{1}{2}} |jm-1\rangle', \end{aligned} \quad (3.371)$$

где

$$\begin{aligned} \delta(j, j) &\equiv \alpha(j, j), \\ \delta(j, m) &\equiv \alpha(j, m) - \alpha(j, m+1), \\ m &= j-1, \dots, -j. \end{aligned} \quad (3.372)$$

Обратно, вещественные числа

$$\delta(j, j), \delta(j, j-1), \dots, \delta(j, -j) \quad (3.373)$$

могут выбираться произвольно в (3.371), и эти соотношения могут быть приведены к стандартному виду, путем определения векторов состояний $|jm\rangle$ соотношением (3.369), где

$$\alpha(j, m) \equiv \sum_{u=m}^j \delta(j, \dot{u}). \quad (3.374)$$

Соотношения (3.371) дают наиболее общий вид матриц углового момента, в которых множители (3.370) полностью произвольны, но, как мы показали, эти соотношения всегда могут быть приведены к стандартному виду.

Необычный выбор фаз появляется у Шиффа [69] в теории орбитального углового момента, что обусловлено способом получения сферических функций. Он использует Y_{lm} из разд. 10 как стандартные, и выбор фаз Шиффа в (3.369) соответствует значениям

$$\delta(l, l) = l\pi, \quad \delta(l, m) = -\pi \quad (m = 0, 1, \dots, l-1), \quad \delta(l, m) = 0 \quad (m < 0), \quad (3.375)$$

приводя к тому, что

$$\alpha(l, m) = m\pi \quad (m \geq 0), \quad \alpha(l, m) = 0 \quad (m < 0), \quad (3.376)$$

$$Y_{lm}^{\text{Шифф}} = \begin{cases} (-1)^m Y_{lm}, & m \geq 0 \\ Y_{lm}, & m < 0. \end{cases} \quad (3.377)$$

2. Метод основных идемпотентов и проективных операторов. Покажем сначала, как метод основных идемпотентов может быть использован для определения матриц $d^j(\beta)$. Эрмитовы матрицы [70], определенные формулами

$$E_m^{(j)} \equiv \prod_{\substack{\mu=-j \\ \mu \neq m}}^j \frac{J_2^{(j)} - \mu \mathbb{1}^{(j)}}{m - \mu}, \quad m = j, j-1, \dots, -j, \quad (3.378)$$

называются *основными идемпотентами* матрицы $J_2^{(j)}$. Они обладают свойствами умножения

$$E_m^{(j)} E_m^{(j)} = \delta_{m,m} E_m^{(j)}; \quad (3.379)$$

дают разложение единичной матрицы $\mathbb{1}^{(j)}$ размерности $2j+1$:

$$\mathbb{1}^{(j)} = \sum_m E_m^{(j)}; \quad (3.380)$$

и само $J_2^{(j)}$ может быть записано в виде (иное выражение характеристического уравнения)

$$J_2^{(j)} = \sum_m m E_m^{(j)}. \quad (3.381)$$

Этот результат и свойство умножения (3.379) теперь могут быть использованы, чтобы доказать соотношение

$$F(J_2^{(j)}) = \sum_m F(m) E_m^{(j)} \quad (3.382)$$

где F — хорошо определенная функция одной переменной, скажем ζ .

В частности, для $F(\zeta) = e^{-i\beta\zeta}$ получаем

$$e^{-i\beta J_z^{(j)}} = \sum_{\mu} e^{-i\mu\beta} E_{\mu}^{(j)}, \quad (3.383)$$

Это соотношение выражается $d^j(\beta)$ как полином степени $2j$ от матрицы $J_z^{(j)}$.

Таким образом, мы получаем

$$d_{m'm}^j(\beta) = \sum_{\mu} (E_{\mu}^{(j)})_{m'm} e^{-i\mu\beta}. \quad (3.384)$$

Сравнение этого результата с (3.78) показывает, что матричный элемент, лежащий на пересечении m' -й строки и m -го столбца матрицы $E_{\mu}^{(j)}$, определенной формулой (3.378), равен

$$(E_{\mu}^{(j)})_{m'm} = D_{\mu m'}^{j*} \left(\frac{\pi}{2}, \hat{e}_1 \right) D_{\mu m}^j \left(\frac{\pi}{2}, \hat{e}_1 \right).$$

Метод основных идемпотентов тесно связан с методом *проективных операторов*, используемым Лёвдином [41] и Калаисом [71] (см. также ([72], стр. 89), ([73], стр. 108) и [73а]). Приведенный выше подход был рассмотрен более детально Халлом [74].

Метод проективных операторов, использующий матрицы вращений, также используется в совершенно другой форме, чтобы построить волновые функции точного углового момента [74а]. Этот метод использует оператор P_{mk}^j , определенный формулой

$$P_{mk}^j \equiv \frac{2j+1}{8\pi^2} \int d\Omega D_{mk}^{j*}(\alpha\beta\gamma) \mathcal{U}(\alpha\beta\gamma),$$

где $\mathcal{U}(\alpha\beta\gamma)$ — оператор вращения, задаваемый формулой (3.52). Однако эти операторы удовлетворяют правилам для проективных операторов (каждый оператор является идемпотентом и различные операторы порождают перпендикулярные проекторы) *только в случае* $m = k$. Пренебрежение этим ограничением приводило к многочисленным ошибкам в литературе; они обсуждены Ламме и Бёкером [74б] (см. также [74в]). Бор и Моттельсон ([74г], стр. 90 — 91), например, неправильно используют D -матрицы, чтобы спроектировать состояния с точными значениями (J, M, K) из внутренних волновых функций.

3. *След матрицы вращения.* Пусть $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ обозначает конечную подгруппу (порядка n) группы $SU(2)$ (или $SO(3)$), и пусть элемент g_i — вращение на угол ψ_i вокруг направления $\hat{n}_i$. Тогда соответствие $g_i \rightarrow D^j(\psi_i, \hat{n}_i)$ является представлением подгруппы G унитарными матрицами размерности $2j+1$, т.е. $g_i, g_k = g_l$ предполагает соответствующее свойство умножения для матриц: $D^j(\psi_i, \hat{n}_i) D^j(\psi_k, \hat{n}_k) = D^j(\psi_l, \hat{n}_l)$. Это представление (в общем случае) приводимо.

В теории конечных групп находим общие формулы, определяющие, какие неприводимые представления группы и с какой кратностью входят в общее приводимое представление. Эти формулы требуют знания следа (характера) приводимого представления, который в нашем случае равен $\text{tr } D^j(\psi_j, \hat{n}_j)$. Мы даем здесь доказательство общего результата

$$\text{tr } D^j(\psi, \hat{n}) = \frac{\sin(j + \frac{1}{2})\psi}{\sin(\psi/2)}. \quad (3.385)$$

Доказательство дается, исходя из того факта (см. (3.45)), что эрмитова матрица $\hat{A} \cdot \mathbf{J}^{(j)}$ унитарно эквивалентна (эквивалентность осуществляется преобразованием подобия) матрице $J_3^{(j)}$; поэтому $D^j(\psi, \hat{A})$ унитарно эквивалентна $e^{-i\psi J_3^{(j)}}$. Так как след матрицы инвариантен при унитарных преобразованиях подобия, то получаем

$$\text{tr } D^j(\psi, \hat{A}) = \sum_{m=-j}^j e^{-im\psi},$$

что с помощью обычных тригонометрических формул сводится к (3.385).

4. Матрицы вращений являются сферическими функциями в четырехмерном пространстве. Казимир [23] указал, что матрицы вращений являются решениями уравнения Лапласа в четырехмерном пространстве (сферическими функциями). Этот результат не удивителен, если учесть тот факт, что параметры Эйлера — Родригеса определяют точку на единичной сфере в четырехмерном пространстве.

Наблюдение Казимира становится особенно очевидным, если рассматривать с точки зрения правила умножения (2.42) для кватернионов, описанного в примечании 3 гл. 2.

Появление векторного произведения в правиле умножения для кватернионов вместе с определением (3.1) орбитального углового момента предполагает, что мы рассматриваем умножение «кватерниона положения» $(x_0, \mathbf{x})$ на отрицательную сопряженную величину «кватерниона импульса» $(-p_0, \mathbf{p})$. Это умножение дает результат

$$(x_0, \mathbf{x})(-p_0, \mathbf{p}) = (2i\mathcal{J}_0, 2\mathcal{J}), \quad (3.386)$$

где $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}$ определяются формулами

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 &\equiv \frac{i}{2} (x_0 p_0 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{p}), \\ \mathcal{J} &\equiv \frac{1}{2} [\mathbf{x} \times \mathbf{p} - (x p_0 - x_0 \mathbf{p})]. \end{aligned} \quad (3.387)$$

(В (3.386) включены множители $2i$ и 2 , для того чтобы удобно фиксировать определенные свойства $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}$, например коммутационное соотношение (3.391) для $\mathcal{J}$ и соотношение (3.397) на собственные значения для $\mathcal{J}_0$.)

Подобное умножение отрицательной величины сопряженного кватерниона положения на кватернион импульса дает результат

$$(-x_0, \mathbf{x})(p_0, \mathbf{p}) = (2i\mathcal{J}_0, 2\mathcal{K}), \quad (3.388)$$

где $\mathcal{K}$ определяется формулой

$$\mathcal{K} \equiv \frac{1}{2} [\mathbf{x} \times \mathbf{p} + (x p_0 - x_0 \mathbf{p})]. \quad (3.389)$$

Затем мы отождествляем кватернион импульса $(p_0, \mathbf{p})$ с операторами

$$p_0 = -i \frac{\hat{c}}{\partial x_0}, \quad \mathbf{p} = -i \nabla, \quad (3.390)$$

и выводим путем прямого вычисления следующие свойства $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$:

а) обычные для углового момента коммутационные соотношения

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \times \mathcal{J} &= i\mathcal{J}, \\ \mathcal{K} \times \mathcal{K} &= i\mathcal{K}; \end{aligned} \quad (3.391)$$

б) коммутативность $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$

$$[\mathcal{J}_i, \mathcal{K}_j] = 0, \quad i, j = 1, 2, 3; \quad (3.392)$$

в) общий инвариант

$$\mathcal{J}^2 = \mathcal{J} \cdot \mathcal{J} = \mathcal{K} \cdot \mathcal{K} = -\frac{1}{4}R_4^2 \nabla_4^2 + \mathcal{J}_0^2 + \mathcal{J}_0, \quad (3.393)$$

где $R_4^2 = x_0^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ и ∇_4^2 — лапласиан в четырехмерном пространстве:

$$\nabla_4^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_0^2} + \nabla^2; \quad (3.394)$$

г) $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$ связаны соотношением

$$-\mathcal{K}_j = \sum_i R_{ij} \mathcal{J}_i = \sum_i \mathcal{J}_i R_{ij}, \quad (3.395)$$

где R_{ij} — элемент вещественной собственной ортогональной матрицы $R = (R_{ij})$, которая определена для каждого кватерниона $(x_0, \mathbf{x}) \neq (0, 0, 0, 0)$ формулой

$$R_{ij} \equiv [(x_0^2 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x})\delta_{ij} - 2e_{ijk}x_0x_k + 2x_ix_j]/(x_0^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}). \quad (3.396)$$

Это отображение всех точек четырехмерного пространства (за исключением начала) в группу собственных ортогональных матриц; для $x_0^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$ это как раз параметризация Эйлера — Родригеса (2.22).

Рассмотрим теперь функции, определенные из $D_{m'm}^{j*}(\alpha_0, \alpha)$ (см. формулу (3.89)) отождествлением $x_0 = \alpha_0$, $\mathbf{x} = \alpha$ и расширением области определения до всех точек $(x_0, \mathbf{x})$ четырехмерного пространства. Тогда $D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x})$ являются *однородными гармоническими полиномами степени $2j$* , т.е.

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0 D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) &= j D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}), \\ \nabla_4^2 D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) &= 0. \end{aligned} \quad (3.397)$$

Более того, действие $\mathcal{J}$ и $\mathcal{P} \equiv -\mathcal{K}$ на $D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x})$ в точности является действием, полученным из соотношений (3.104) и (3.123) заменой углов Эйлера $(\alpha\beta\gamma)$ на $(x_0, \mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{\pm} D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) &= [(j \mp m')(j \pm m' + 1)]^{\frac{1}{2}} D_{m' \pm 1, m}^{j*}(x_0, \mathbf{x}), \\ \mathcal{J}_3 D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) &= m' D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}); \\ (-\mathcal{K}_1 \pm i\mathcal{K}_2) D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) &= [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{\frac{1}{2}} D_{m, m \pm 1}^{j*}(x_0, \mathbf{x}), \\ -\mathcal{K}_3 D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) &= m D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}); \\ \mathcal{J}^2 D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) &= j(j+1) D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (3.398)$$

Дадим набросок доказательства этих результатов (3.397) — (3.398). Функцию $D_{jj}^{j*}(x_0, \mathbf{x})$, соответствующую старшему весу, находим из требования, что она должна быть *гармоническим полиномом степени $2j$* , который аннигилируется операторами $\mathcal{J}_+ \equiv -\mathcal{K}_1 + i\mathcal{K}_2$, и имеет j собственным значением операторов $\mathcal{J}_3$ и $-\mathcal{K}_3$. Решение находится однозначно:

$$D_{jj}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) = (x_0 + ix_3)^{2j}, \quad (3.399)$$

где $D_{jj}^{j*}(1, 0, 0, 0) = 1$ определяет, что константа при $(x_0 + ix_3)^{2j}$ равна единице. Общая функция теперь порождается понижающей процедурой:

$$D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x}) = \left[\frac{(j+m')!(j+m)!}{(2j)!(j-m')!(2j)!(j-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times (\mathcal{J}_-)^{j-m'} (-\mathcal{K}_1 - i\mathcal{K}_2)^{j-m} (x_0 + ix_3)^{2j}. \quad (3.400)$$

После выполнения понижающей процедуры этот результат дает комплексное сопряжение выражения (3.89), в котором α_0 заменено на x_0 , а α на γ .

Гармоническое свойство (3.397) следует из того факта, что лапласиан ∇_4^2 коммутирует с $\mathcal{J}$ и $\mathcal{K}$; следовательно, при действии на $D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x})$, как определено соотношением (3.400), ∇_4^2 может быть перенесено через понижающие операторы, так что, действуя на старший вес, ∇_4^2 дает нуль. Иначе, тот же результат следует из (3.393) и уравнений на собственные значения для $\mathcal{J}_0$ и $\mathcal{J}^2$.

Приведенная здесь структура, таким образом, обобщает теорию твердого тела до произвольных кватернионных переменных $(x_0, \mathbf{x})$.

Можно вернуть обратно теорию твердого тела в любую параметризацию просто путем преобразования операторов $\mathcal{J}$, $\mathcal{K}$, $\mathcal{J}_0$, ∇_4^2 и функций $D_{m'm}^{j*}(x_0, \mathbf{x})$ от $(x_0, \mathbf{x})$ к желаемым параметрам (например, преобразование (3.133) результатов этого примечания воспроизводит соотношения разд. 8).

5. Произведение пространств кинематически независимых систем является тензорным произведением пространств. Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ обозначают векторные пространства (над некоторым полем; мы всегда считаем, что этим полем является $\mathbb{C}$) с базисами $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ и $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_m$ соответственно. Предположим, что нам дано отображение f , которое приписывает каждой паре векторов (ϕ, ψ) , $\phi \in \mathcal{H}$, $\psi \in \mathcal{K}$, вектор, обозначаемый $\phi \otimes \psi$, который принадлежит третьему векторному пространству $\mathcal{L}$:

$$f: (\phi, \psi) \rightarrow \phi \otimes \psi \in \mathcal{L}. \quad (3.401)$$

Предположим далее, что отображение f имеет следующие свойства: а) оно линейно по ϕ и ψ в отдельности (билинейно), т.е.

$$(\phi + \phi') \otimes \psi = \phi \otimes \psi + \phi' \otimes \psi,$$

$$\phi \otimes (\psi + \psi') = \phi \otimes \psi + \phi \otimes \psi',$$

$$(\alpha\phi) \otimes \psi = \phi \otimes (\alpha\psi) = \alpha(\phi \otimes \psi); \quad (3.402)$$

и б) оно отображает множество nm пар (ϕ_i, ψ_j) ($i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$) в множество

$$\phi_i \otimes \psi_j \quad (i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m) \quad (3.403)$$

линейно независимых векторов (векторов из $\mathcal{L}$).

Векторное пространство (подпространство в $\mathcal{L}$, которое может совпадать с $\mathcal{L}$), полученное путем образования всех линейных комбинаций

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_{ij} \phi_i \otimes \psi_j, \quad (3.404)$$

обозначается через $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ и называется тензорным произведением пространств $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$.

Из билинейных свойств (3.402) видим

$$\phi \otimes \psi = \sum_{ij} a_i b_j \phi_i \otimes \psi_j \quad (3.405)$$

для $\phi = \sum_i a_i \phi_i$ и $\psi = \sum_j b_j \psi_j$. Таким образом, векторное пространство

$\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ содержит векторы, которые не имеют формы $\phi \otimes \psi$, т.е. векторы, не являющиеся отображениями (с помощью f) какой-то пары (ϕ, ψ) . Интерпретацию этого результата в терминах «чистых» и «смешанных» состояний в квантовой механике см. в [24в] (стр. 92).

В аналогичном построении тензорного произведения пространств сначала отображаем пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ на векторные пространства $\mathbb{C}^{(n)}$ и $\mathbb{C}^{(m)}$ матриц-столбцов, составленных из компонент $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ векторов

$$\phi = \sum_i a_i \phi_i \text{ и } \psi = \sum_j b_j \psi_j \text{ относительно базисов соответствующих про-}$$

странств. Таким образом, положив $\mathbf{a} = \text{col}(a_1, a_2, \dots, a_n)$ и $\mathbf{b} = \text{col}(b_1, b_2, \dots, b_m)$ ¹⁾, вектор $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$ определяем как вектор из $\mathbb{C}^{(nm)}$, имеющий $a_i b_j$ своей $[(i-1)n + j]$ -й компонентой, $i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m$.

Используя это определение вектора $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$, можем теперь проверить билинейные свойства (3.402). Более того, если $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \dots, \mathbf{f}_m$ — базисы в $\mathbb{C}^{(n)}$ и $\mathbb{C}^{(m)}$ соответственно, то $\{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{f}_j, i = 1, 2, \dots, n; j = 1, 2, \dots, m\}$ — базис в $\mathbb{C}^{(nm)}$. Таким образом, $\mathbb{C}^{(n)} \otimes \mathbb{C}^{(m)} = \mathbb{C}^{(nm)}$.

Пусть S и T обозначают операторы, определенные на пространствах $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ соответственно:

$$\begin{aligned} S: \phi &\rightarrow S\phi, & \phi &\in \mathcal{H}, \\ T: \psi &\rightarrow T\psi, & \psi &\in \mathcal{K}. \end{aligned} \quad (3.406)$$

Через $S \otimes T$ обозначим оператор, определенный на $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ как отображение

$$S \otimes T: \phi \otimes \psi \rightarrow S\phi \otimes T\psi, \quad \phi \in \mathcal{H}, \psi \in \mathcal{K}. \quad (3.407)$$

В физической литературе, когда не может возникнуть недоразумений, тензорное произведение $\phi \otimes \psi$ обычно обозначают путем соединения $\phi\psi$, а $S\phi \otimes T\psi$ обозначают через

$$(ST)\phi\psi \equiv (S\phi)(T\psi). \quad (3.408)$$

Наконец, заметим, что если $\mathcal{H}$ и $\mathcal{K}$ наделены скалярными произведениями $(\cdot, \cdot)_1$ и $(\cdot, \cdot)_2$ соответственно, то можем также определить скалярное произведение на $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$.

Для каждой пары элементов

$$\chi = \sum_{ij} a_{ij} \phi_i \otimes \psi_j, \quad \chi' = \sum_{ij} a'_{ij} \phi_i \otimes \psi_j.$$

на $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ скалярное произведение определяется формулой

$$(\chi, \chi') \equiv \sum_{i,j,i',j'} a_{ij}^* a'_{i'j'} (\phi_i, \phi_{i'})_1 (\psi_j, \psi_{j'})_2.$$

¹⁾ Обозначение «col» происходит от английского слова «column» (столбец). — Прим. перев.

6. Многообразие форм матриц вращений и коэффициентов Вигнера.

► **Матрицы вращений.** Не существует стандартного определения (или обозначения) для элементов матрицы вращений (см. разд. 5 и 6). Неразумно приводить множество определений этих функций, которые можно найти в литературе. Однако полезно привести некоторые из причин такого разнообразия определений. Они включают: 1) различные определения углов Эйлера (здесь часто можно найти, что второе вращение в описании (2.36) заменяется на вращение β вокруг оси $\hat{e}_1 = (1, 0, 0)$, а другие два вращения остаются теми же; обозначая соответствующие углы Эйлера через $(\alpha' \beta' \gamma')$, находим, что $\alpha' = \alpha + (\pi/2)$, $\beta' = \beta$, $\gamma' = \gamma$); 2) различные определения унитарного оператора вращения (действующего в гильбертовом пространстве), который соответствует вращению в $\mathbb{R}^3$ (эта связь определяется лишь с точностью до унитарной эквивалентности); 3) различные определения гомоморфизма группы унитарных преобразований $SU(2)$ на группу собственных ортогональных преобразований $SO(3)$; 4) различные определения оператора вращения (действующего в гильбертовом пространстве), который соответствует $SU(2)$ -вращениям в $\mathbb{C}^2$ и $SO(3)$ -вращениям в $\mathbb{R}^3$.

Напомним соглашения, используемые в этой монографии. Для данного обсуждения удобно использовать параметризацию $(\psi, \hat{n})$:

$$U(\psi, \hat{n}) \rightarrow R(\psi, \hat{n}) \rightarrow \mathcal{U}(\psi, \hat{n}) \equiv e^{-i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{J}},$$

$$\mathcal{U}(\psi, \hat{n}) |jm\rangle = \sum_{m'} D_{m'm}^j(\psi, \hat{n}) |jm'\rangle.$$

Здесь $U(\psi, \hat{n}) \in SU(2)$ и $R(\psi, \hat{n}) \in SO(3)$ связаны гомоморфизмом (2.16), который также может быть выражен как $e^{-i\psi \hat{n} \cdot \sigma/2} \rightarrow e^{i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{M}}$, где $\mathbf{M} \equiv A \mathbf{J}^{(1)} A^\dagger$ (см. (3.30)). Иначе, $U(\psi, \hat{n})$ и $R(\psi, \hat{n})$ даются явно формулами (2.27) и (2.6). Более того, угловой момент $\mathbf{J}$ имеет обычное действие (см. формулы (3.16) и (3.20)) на базис $\{|jm\rangle\}$, и элементы $D_{m'm}^j(\psi, \hat{n})$ матрицы вращения задаются явно формулой (3.89). В этой монографии все частные реализации унитарного оператора $\mathcal{U}(\psi, \hat{n})$ и гильбертова пространства $\mathcal{H}$ (натянутого на базисные вектора $\{|jm\rangle\}$) выбираются в согласии с вышеприведенным соглашением.

Для сравнения с другими соглашениями полезно дать явную реализацию оператора $\mathcal{U}(\phi, \hat{n})$ ($0 \leq \phi \leq \pi$; $\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$) дифференциальным оператором и его действие на подходящий класс функций, определенных на $\mathbb{R}^3$:

$$e^{-i\phi \hat{n} \cdot \mathbf{L}} F(\mathbf{x}) = F(R^{-1}(\phi, \hat{n})\mathbf{x}), \quad (*)$$

где $\mathbf{L}$ обозначает дифференциальный оператор $\mathbf{L} = -i\mathbf{x} \times \nabla$, а точка $\mathbf{x}' \equiv R^{-1}(\phi, \hat{n})\mathbf{x}$ имеет компоненты $x_i = \sum_j R_{ji}(\phi, \hat{n})x_j$. Шаровые сферические функции $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x})$ являются базисными функциями, которые подвергаются обычному преобразованию:

$$e^{-i\phi \hat{n} \cdot \mathbf{L}} \mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}) = \sum_{m'} D_{m'm}^l(\phi, \hat{n}) \mathcal{Y}_{lm'}(\mathbf{x}).$$

Полезно заметить, что соотношение $(*)$ является математическим тождеством (для соответственно определенного класса дифференцируемых функций), которое выражает действие дифференциального оператора на функцию, определенную на $\mathbb{R}^3$ в терминах той же функции, вычисленной в новой точке в $\mathbb{R}^3$.

Свойство (*) является для вращений аналогом разложения в ряд Тейлора для смещений:

$$e^{-ia \cdot p/\hbar} F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

где $p/\hbar = -i\nabla$, а $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ — числовой вектор.

В физической литературе много неправильных версий соотношения (*). Например, в [16] находим соотношение (комбинируем соотношения (4.1.2) и (4.1.8) и полагаем $L_y = L_2, L_z = L_3$)

$$e^{i\alpha L_1} e^{i\beta L_2} e^{i\gamma L_3} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}'). \quad (**)$$

Здесь (следуя [16]) $\mathbf{x}$ и $\mathbf{x}'$ — координаты той же точки P , отнесенной к системам отсчета F и F' , которые связаны углами Эйлера $(\alpha\beta\gamma)$. В соответствии с этим эти координаты связаны формулой $\mathbf{x}' = R^{-1}(\alpha\beta\gamma)\mathbf{x}$ (обозначение с помощью вектора-столбца; здесь $R(\alpha\beta\gamma)$ задается формулой (2.37)). Как мы покажем, это неправильный результат для $\mathbf{x}'$ в (**).

Правильный результат для $\mathbf{x}'$ в (**) получается путем трех применений соотношения (*), что приводит к связи $\mathbf{x}' = S^{-1}(\alpha\beta\gamma)\mathbf{x}$, где

$$\begin{aligned} S(\alpha\beta\gamma) &\equiv R(\alpha, -\hat{e}_3)R(\beta, -\hat{e}_2)R(\gamma, -\hat{e}_3) = [R(\gamma, \hat{e}_3)R(\beta, \hat{e}_2)R(\alpha, \hat{e}_3)]^{-1} \\ &= R^{-1}(\gamma\beta\alpha) = T R(\alpha\beta\gamma) T, \end{aligned}$$

Здесь T — диагональная матрица с элементами $T_{11} = 1, T_{22} = T_{33} = -1$. Таким образом, унитарный оператор $D(\alpha\beta\gamma) = e^{i\alpha L_1} e^{i\beta L_2} e^{i\gamma L_3}$ выполняет на функциях, определенных на $\mathbb{R}^3$, несколько необычное преобразование координат, включающее числовое преобразование подобия (так как $T^{-1} = T$) зависящей от углов Эйлера матрицы $R(\alpha\beta\gamma)$ матрицей T .

Мы можем использовать гомоморфизм (2.16) между группами $U(2)$ и $SO(3)$, чтобы получить $\sigma_1 \rightarrow T$ и $\sigma_1 U(\alpha\beta\gamma) \sigma_1 \rightarrow T R(\alpha\beta\gamma) T$ (см. формулу (2.40)). Из этого результата находим, что матрица представления $\mathcal{D}^j(\alpha\beta\gamma)$, использованная в [16] (которая определена соотношением (4.1.10) в [16] для матричного элемента, а не неправильным соотношением, рассмотренным выше), унитарно эквивалентна матрице представления $D^j(\alpha\beta\gamma)$, используемой в этой монографии. В явном виде находим

$$\mathcal{D}^{(j)}(\alpha\beta\gamma) = D^j(\sigma_1) D^j(\alpha\beta\gamma) D^j(\sigma_1),$$

где матрица представления $D^j(\sigma_1)$ дается формулой (3.86) как матрица с элементами $D^j_{m'm}(\sigma_1) = \delta_{m', -m}$. (Мы здесь использовали тот факт, что функции (3.86) являются также функциями представлений для группы $U(2)$ (см. приложение гл. 5); это деталь, которую можно было бы избежать внимательным использованием матрицы $\sigma_1 \in SU(2)$ и обратной к ней матрицы $(i\sigma_1)^{-1} = -i\sigma_1$ в гомоморфизме (2.16).)

Используя данные в этом примечании соотношения и методы, можно обычно определить явное соотношение эквивалентности между (должным образом определенными) матрицами вращений, используемыми различными авторами.

► *Коэффициенты Вигнера.* Форма ван дер Вардена коэффициентов Вигнера (3.170) имеет важное значение, потому что она дает *почтенные* соотношения симметрии, рассмотренные в разд. 12. (Наш вывод этой симметричной формы

дан в разд. 8 гл. 5.) Любое выражение для коэффициентов Вигнера, которое не имеет этой почленной симметрии, будет преобразовано в новую форму путем применения одной или нескольких из 72 симметрий. Таким образом, при поверхностном рассмотрении кажется, что существует много «различных» выражений для этих коэффициентов. Как видно из литературы, полученное частное выражение зависит от метода вывода. Это подробно обсуждается Смородиным и Шелепиным [75], а также Барутом и Вильсоном [75a].

7. *Обозначения для коэффициентов Вигнера и связанных с ними коэффициентов.* В литературе введено много обозначений для коэффициентов Вигнера и связанных с ними коэффициентов. Мы перечисляем здесь наиболее обычные обозначения вместе с авторами, которые использовали эти символы.

КОЭФФИЦИЕНТЫ ВИГНЕРА

$S_{jm_1 m_2}^{(j_1 j_2)}$	Вигнер [13]
$(j_1 j_2 m_1 m_2 j_1 j_2 jm)$	Кондон и Шортли [28] Рака [29] Биденхарн и др. [54] Биденхарн [56] Арима и др. [64] Эдмондс [16] Юцис и др. [55]
$(j_1 m_1 j_2 m_2 jm)$	Хамермеш [35]
$(jm m_1 m_2)$	Фано и Рака [59]
$(j_1 j_2 jm j_1 m_1, j_2 m_2)$	
$\langle j_1 m_1, j_2 m_2 (j_1 j_2) jm \rangle$	Фано [76]
$(j_1 m_1 j_2 m_2 j_1 j_2 jm)$	де-Шалит и Талми [77]
$(j_1 j_2 m_1 m_2 jm)$	Хейне [78] и Джад [79] Давыдов [80] Шелепин [62] Бринк и Сачлер [81]
$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 jm \rangle$	Бор и Моттельсон [82]
$\langle j_1 m_1 j_2 m_2 jm \rangle$	Мерцбахер [83] Мессиа [84] Хагедорн [45] Абрагам и Блини [85]
$\langle j_1 j_2 m_1 m_2 j_1 j_2 jm \rangle$	Бете и Джекив [73]
$C(j_1 m_1, j_2 m_2, jm)$	Блатт и Вайскопф [86]
$C_{j_1 j_2}(jm; m_1 m_2)$	Ян [87]
$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{jm}$	Алдер [88]

$$C(j_1 j_2 j; m_1 m_2 m)$$

$$C_{m_1 m_2}^j$$

$$c_{jm}^{j_1 j_2}(m_1, m_2)$$

$$A_{mm_1 m_2}^{j_1 j_2}$$

$$A_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$$

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}$$

$$B_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{im}$$

$$X(j, m, j_1, j_2, m_1)$$

Роуз [17]

ван дер Варден [31]
Ландау и Лифшиц [89]

Фок [90]

Эккарт [27]

Тинкхам [91]

Биденхарн [92]

Ломонт [93]

Редмоид [94]

Гельфанд и др. [44]

Бойс и Сани [95]

3j-СИМВОЛЫ ВИГНЕРА

$$\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

$$(-1)^{j_2+j_3-j_1} V(j_1 j_2 j_3; m_1 m_2 m_3)$$

$$(-1)^{j_1-j_2+j_3} S_{j_1 m_1; j_2 m_2; j_3 m_3}$$

$$X(j_1 j_2 j_3; m_1 m_2 m_3)$$

$$\begin{bmatrix} j_2 + j_3 - j_1 & j_3 + j_1 - j_2 & j_1 + j_2 - j_3 \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 \\ j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 \end{bmatrix}$$

$$(-1)^{j_1+j_2+j_3} \bar{V} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}$$

Вигнер [47]

Рака [29]

Ландау и Лифшиц [89]

Швингер [37]

Редже [38]

Фано и Рака [59]

6j-СИМВОЛЫ ВИГНЕРА

$$\begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{Bmatrix}$$

$$(-1)^{j_1+j_2+l_1+l_2} W(j_1 j_2 l_2 l_1; j_3 l_3)$$

$$(-1)^{j_1+j_2+l_1+l_2} [(2j_3+1)(2l_3+1)]^{\pm} \times U(j_1 j_2 l_2 l_1; j_3 l_3)$$

$$[(2j_3+1)(2l_3+1)]^{\pm} U \begin{pmatrix} j_1 j_2 l_1 l_2 \\ j_3 l_3 \end{pmatrix}$$

Вигнер [47]

Рака [29]

Ян [87]

Бойс и Сани [95]

$$(-1)^{l_1+l_2+l_3} \begin{bmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_2 & l_1 & l_3 \end{bmatrix}$$

Банерьи и Сага [96]

$$\bar{W} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$$

Фано и Рака [59]

$$\left\| \begin{array}{cccc} j_1 & j_1 & l_1 & l_1 \\ j_2 & l_2 & l_2 & j_1 \\ j_3 & l_3 & j_3 & l_3 \end{array} \right\|$$

Шелепин [62]

9j-СИМВОЛЫ ВИГНЕРА

$$\left\{ \begin{array}{ccc} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{array} \right\}$$

Вигнер [47]

$$X \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$$

Фано [76]

Фано и Рака [59]

$$(-1)^{j_1+k_1-j_3-l_3} S(j_1 j_2 k_1 k_2; j_3 k_3 l_1 l_2; l_3)$$

Швингер [37]

$$[(2j_3+1)(2k_3+1)(2l_1+1)(2l_2+1)]^{\frac{1}{2}} \times \chi(j_1 j_2 k_1 k_2; j_3 k_3; l_1 l_2; l_3)$$

Ян и Хоуп [63]

$$[(2j_3+1)(2l_3+1)(2l_1+1)(2l_2+1)]^{\frac{1}{2}}$$

Кеннеди и Клиф [97]

$$\times A \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$$

$$U \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{pmatrix}$$

Арима и др. [64]

8. *Вращения кинематически независимых систем.* Свойства комплексных сложных физических систем часто могут быть аппроксимированы (используя теорию возмущений) свойствами ряда более простых систем, которые рассматриваются как слабо взаимодействующие. Каждая из более простых систем затем может быть повернута (активная точка зрения) независимо от других без существенного изменения свойств целой системы. (С пассивной точки зрения вращения независимые инерциальные системы отсчета, одна для каждой системы.) Следовательно, полезно рассматривать набор n физических систем, каждая из которых может вращаться без влияния на другие системы.

Пусть квантовые собственные кет-векторы точного углового момента для системы a ($a = 1, 2, \dots, n$) обозначаются через

$$|(\alpha_a)j_a m_a\rangle. \quad (3.409)$$

При вращении этой физической системы эти собственные кет-вектора подвергаются преобразованию

$$\mathcal{U}_a: |(\alpha_a)j_a m_a\rangle \rightarrow \mathcal{U}_a |(\alpha_a)j_a m_a\rangle = \sum_{m'_a} D_{m'_a m_a}^{j_a}(U_a) |(\alpha_a)j_a m'_a\rangle, \quad (3.410)$$

где для вращения на угол ψ_a вокруг направления $\hat{n}_a$ имеем

$$\mathcal{U}_a = \exp -i[\psi_a \hat{n}_a \cdot \mathbf{J}(a)], \quad (3.411)$$

Здесь $\mathbf{J}(a)$ — генератор вращений системы a .

Пространство векторов состояний для сложной системы (в теории возмущений) является тензорным произведением пространств, имеющим базис

$$|(\alpha_1)j_1 m_1\rangle \otimes |(\alpha_2)j_2 m_2\rangle \otimes \cdots \otimes |(\alpha_n)j_n m_n\rangle. \quad (3.412)$$

Оператор (см. примечание 5), обозначаемый через

$$\mathcal{U}_1 \otimes \mathcal{U}_2 \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_n \quad (3.413)$$

действует на базисный кет-вектор (3.412) согласно правилу

$$\begin{aligned} & (\mathcal{U}_1 \otimes \cdots \otimes \mathcal{U}_n) |(\alpha_1)j_1 m_1\rangle \otimes \cdots \otimes |(\alpha_n)j_n m_n\rangle \\ &= (\mathcal{U}_1 |(\alpha_1)j_1 m_1\rangle) \otimes \cdots \otimes (\mathcal{U}_n |(\alpha_n)j_n m_n\rangle) \\ &= \sum_{m'_1 \cdots m'_n} [D^{j_1}(U_1) \otimes \cdots \otimes D^{j_n}(U_n)]_{m'_1 \cdots m'_n; m_1 \cdots m_n} \\ & \quad \times |(\alpha_1)j_1 m'_1\rangle \otimes \cdots \otimes |(\alpha_n)j_n m'_n\rangle, \end{aligned} \quad (3.414)$$

где

$$[D^{j_1}(U_1) \otimes \cdots \otimes D^{j_n}(U_n)]_{m'_1 \cdots m'_n; m_1 \cdots m_n} \equiv D^{j_1}_{m'_1 m_1}(U_1) \cdots D^{j_n}_{m'_n m_n}(U_n) \quad (3.415)$$

обозначает элемент строки $(m'_1 \dots m'_n)$ и столбца $(m_1 \dots m_n)$ матрицы, являющейся прямым произведением

$$D^{j_1}(U_1) \otimes \cdots \otimes D^{j_n}(U_n). \quad (3.416)$$

(Результат, заданный формулой (3.414), прямо получается из свойства (расширенного до n множителей) тензорного произведения пространств, выраженного формулой (3.405).)

На языке теории групп говорят, что $\prod_{a=1}^n (2j_a + 1)$ -мерное пространство,

являющееся тензорным произведением $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_n}(n)$, с базисом

$$|(\alpha_1)j_1 m_1\rangle \otimes \cdots \otimes |(\alpha_n)j_n m_n\rangle, \quad m_a = j_a, \dots, -j_a, \quad a = 1, \dots, n \quad (3.417)$$

является пространством матричного представления прямого произведения групп, обозначаемого через

$$SU(2) \times \cdots \times SU(2). \quad (3.418)$$

Элементы этой группы являются (упорядоченными) наборами из n элементов:

$$(U_1, \dots, U_n), \quad U_a \in SU(2), \quad (3.419)$$

где правило умножения для этих наборов задается как

$$(U'_1, \dots, U'_n)(U_1, \dots, U_n) = (U'_1 U_1, \dots, U'_n U_n). \quad (3.420)$$

Пространство $\mathcal{H}_{j_1}(1) \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_{j_n}(n)$ является носителем матричного представления $D^{j_1}(1) \otimes \dots \otimes D^{j_n}(U_n)$ группы $SU(2) \times \dots \times SU(2)$.

Вращения сложной системы как целого означает, что мы выбираем все вращения U_a одними и теми же: $U_1 = U_2 = \dots = U_n = U$. В этом случае групповые элементы $(U, \dots, U)$ группы $SU(2) \times \dots \times SU(2)$ образуют подгруппу (так называемую *диагональную подгруппу*), которая абстрактно является той же, что и $SU(2)$ (т.е. *изоморфной* ей).

Таким образом, действие вращения на сложную физическую систему, каждая часть которой имеет независимую вращательную симметрию, преобразует базисные состояния, заданные формулой (3.417), между собой с коэффициентами, которые являются элементами *приводимой матрицы вращения*:

$$D^{j_1}(U) \otimes \dots \otimes D^{j_n}(U). \quad (3.421)$$

С точки зрения теории групп построение состояний точного поляго углового момента (j, m) для сложных систем, в которых индивидуальные угловые моменты $j_1, \dots, j_n$ частей сохраняются, описывается как задача разложения представления (3.421) вращения U на (неприводимые) представления $D^j(U)$, $j = 0, 1/2, \dots$.

Наше обсуждение здесь имеет целью показать, как две структуры — независимые вращения частей физической системы и вращения сложной системы как целого — относятся к категории с общей структурой.

9. *Мультиплеты неприводимых тензорных операторов.* Мы предполагаем, что нам дано множество линейно независимых (на $\mathbb{C}$) линейных операторов $T_1, T_2, \dots, T_n$, таких, что для каждого T_i определено действие на базисные собственные кет-векторы $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$ углового момента физической системы. Далее мы предполагаем следующее.

а) При коммутаторном действии операторов углового момента J_i операторы T_λ ($\lambda = 1, \dots, n$) преобразуются линейно (с коэффициентами из $\mathbb{C}$) между собой, т.е.

$$[J_i, T_\lambda] = \sum_{\mu} a_{\mu\lambda}^{(i)} T_\mu. \quad (3.422)$$

б) Для каждой пары операторов $S \equiv \sum_{\lambda} s_{\lambda} T_{\lambda}$ и $T \equiv \sum_{\lambda} t_{\lambda} T_{\lambda}$ ($s_{\lambda}, t_{\lambda} \in \mathbb{C}$)

определено *скалярное произведение, инвариантное относительно вращений* (обозначим его через (S, T)) и такое, что

$$([J_i, S], T) = (S, [J_i, T]). \quad (3.423)$$

Мы хотим теперь классифицировать операторы $T_1, T_2, \dots, T_n$ по отношению к их свойствам преобразования при вращениях. Стратегия состоит в том, чтобы выразить эту задачу с помощью задачи о мультиплетных углового момента, уже решенной в разд. 3. Свойства, выраженные формулой (3.207), дают ключ к этой переформулировке.

Вводим *коммутиационные операторы* C_i ($i = 1, 2, 3$), определенные формулой¹⁾

$$C_i T \equiv [J_i, T]. \quad (3.424)$$

¹⁾ Операторы C_i в математической литературе обозначают через ad_i .

Эти операторы имеют следующие свойства:

а) линейности

$$C_i(\alpha S + \beta T) = \alpha(C_i S) + \beta(C_i T). \quad (3.425)$$

б) производных

$$C_i(ST) = (C_i S)T + S(C_i T). \quad (3.426)$$

Определяем также произведение $C_i C_j$:

$$(C_i C_j)T \equiv C_i(C_j T) = [J_i, [J_j, T]]. \quad (3.427)$$

Используя это определение и тождество Якоби для коммутаторов, находим

$$[C_i, C_j] = ie_{ijk} C_k. \quad (3.428)$$

Из этого результата теперь видим, что операторы C_i ($i = 1, 2, 3$), когда они действуют на множество операторов

$$\left\{ \sum_{\lambda} a_{\lambda} T_{\lambda} \right\}. \quad (3.429)$$

имеют действие операторов углового момента. Более того, соотношение (3.423) выражает свойство

$$(C_i S, T) = (S, C_i T); \quad (3.430)$$

т.е. C_i — эрмитовы операторы на n -мерном пространстве со скалярным произведением, имеющем «векторы» $S, T, \dots$ и скалярное произведение (S, T) .

Таким образом, все предположения, использованные при построении базисных мультиплетов углового момента в разд. 3, как видим, удовлетворяются операторами C_i . Детали этого построения теперь могут быть применены, чтобы разбить пространство, натянутое на линейные комбинации $\left\{ \sum_{\lambda} a_{\lambda} T_{\lambda} \right\}$, на мультиплеты неприводимых тензорных операторов:

$$T_M^J = \sum_{\lambda} A_{M\lambda}^J T_{\lambda}, \quad M = J, \dots, -J$$

и

$$J \in \{0, \frac{1}{2}, 1, \dots\}. \quad (3.431)$$

(Эти мультиплеты при действии операторов C_i , конечно, подчиняются всем обычным соотношениям теории углового момента.)

Мы заключаем это примечание одним дальнейшим наблюдением. Оператор Ω , определенный формулой

$$\Omega T \equiv [J^2, T] \quad (3.432)$$

коммутирует с операторами C_i :

$$[\Omega, C_i] = 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (3.433)$$

Оператор Ω эрмитов. Таким образом, Ω, C^2 и C_3 могут быть одновременно диагонализированы на пространстве, натянутом на линейные комбинации $\left\{ \sum_{\lambda} a_{\lambda} T_{\lambda} \right\}$.

10. *Примеры тензорных операторов.* Мы отмечаем здесь свойства некоторых типов неприводимых тензорных операторов, которые часто встречаются в приложениях.

а) Шаровые сферические функции как тензорные операторы. Операторы орбитального углового момента $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ обладают свойством производной; следовательно, шаровые сферические функции

$$\{\mathcal{Y}_{k\mu}(\mathbf{x}): \mu = k, \dots, -k\} \quad (3.434)$$

являются компонентами тензорного оператора $\mathcal{Y}_k$ (по отношению к $\vec{r}$).

Так как собственные кет-векторы углового момента L сами являются шаровыми сферическими функциями

$$\{\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}): m = l, \dots, -l\}, \quad (3.435)$$

то применение теоремы Вигнера — Экарта приводит к результату

$$\mathcal{Y}_{k\mu}(\mathbf{x})\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}) = \sum_{l'} \langle l' || \mathcal{Y}_k || l \rangle C_{m,\mu,m+\mu}^{lkl'} \mathcal{Y}_{l',m+\mu}(\mathbf{x}), \quad (3.436)$$

где

$$\langle l' || \mathcal{Y}_k || l \rangle \equiv r^{l'+k-l} \left[\frac{(2l+1)(2k+1)}{4\pi(2l'+1)} \right]^{\frac{1}{2}} C_{000}^{lkl'}. \quad (3.437)$$

Это выражение для редуцированного матричного элемента получаем из однородности шаровых сферических функций и интеграла Гаунта (3.192). (Выражения типа (3.436) для функций Бесселя можно вывести, используя свойства группы Евклида в двумерном пространстве; это обсуждается в примечании 13.)

В форме и обозначении, выраженных формулой (3.436), тензорные операторы $\mathcal{Y}_{k\mu}(\mathbf{x})$ считают операторами, действующими на собственные кет-векторы $|lm\rangle$ орбитального углового момента. Таким образом, с этой точки зрения имеем

$$\mathcal{Y}_{k\mu}|lm\rangle = \sum_{l'} \langle l' || \mathcal{Y}_k || l \rangle C_{m,\mu,m+\mu}^{lkl'} |l', m+\mu\rangle. \quad (3.438)$$

Другая интерпретация формулы (3.436) может быть дана в терминах тензорного произведения:

$$[\mathcal{Y}_{k_1}(\mathbf{x}) \times \mathcal{Y}_{k_2}(\mathbf{x})]_{k\mu} \equiv \sum_{\mu_1 \mu_2} C_{\mu_1 \mu_2 \mu}^{k_1 k_2 k} \mathcal{Y}_{k_1 \mu_1}(\mathbf{x}) \mathcal{Y}_{k_2 \mu_2}(\mathbf{x}), \quad (3.439)$$

так что результат, заданный формулой (3.436), имеем вид

$$[\mathcal{Y}_{k_1}(\mathbf{x}) \times \mathcal{Y}_{k_2}(\mathbf{x})]_{k\mu} = \langle k || \mathcal{Y}_{k_1} || k_1 \rangle \langle k_2 || \mathcal{Y}_{k_2} || k_2 \rangle \mathcal{Y}_{k\mu}(\mathbf{x}). \quad (3.440)$$

Другими словами, *связанное тензорное произведение двух шаровых сферических функций* (одного и того же аргумента) *с точностью до инвариантного множителя снова является шаровой сферической функцией.*

Упрощение, даваемое формулой (3.440) для шаровых сферических функций одного и того же аргумента (действующих в одном и том же пространстве $\{|\alpha\rangle lm\rangle\}$ собственных кет-векторов углового момента L), не реализуется для тензорного произведения $[\mathcal{Y}_{k_1}(\mathbf{x}^1) \times \mathcal{Y}_{k_2}(\mathbf{x}^2)]_{k\mu}$ шаровых сферических функций $\mathcal{Y}_{k_1 \mu_1}(\mathbf{x}^1)$ и $\mathcal{Y}_{k_2 \mu_2}(\mathbf{x}^2)$, действующих в *различных* пространствах $\{|\alpha_1\rangle l_1 m_1\rangle\}$ и $\{|\alpha_2\rangle l_2 m_2\rangle\}$. В этом случае следует обращаться к общему результату, заданному формулой (3.249).

б) Неприводимые тензоры, полученные как формы на компонентах углового момента. Мы видели в разд. 15, что оператор углового момента J сам является тензорным оператором ранга 1. Этот результат может быть обобщен.

Используя обозначения примечания 9, имеем

$$C_+ J_+^k = 0; \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (3.441)$$

Рассмотрим операторы $\mathcal{T}_\mu^k$, определенные формулой

$$\mathcal{T}_\mu^k \equiv a_k \left[\frac{(k + \mu)!}{(2k)!(k - \mu)!} \right]^{\frac{1}{2}} C_-^{k-\mu} J_+^k \quad (3.442)$$

для $\mu = k, k - 1, \dots, -k$, где a_k — произвольная константа (независимая от μ). Прямым применением коммутационных свойств операторов C_+ , C_- и C_3 находим, что $\mathcal{T}_\mu^k$ ($\mu = k, \dots, -k$) подчиняются определяющим соотношениям (3.206) тензора ранга k .

Выполняя повторное коммутирование с J_- , указанное в (3.442), получаем *полиномиальную форму* (с вещественными коэффициентами) от J_+ , J_- и J_3 . Эти полиномы для $k = 1, 2, 3, 4$ даны в табл. 5 приложения (т. 2).

Теорема Вигнера — Экарта, примененная к тензорному оператору $\mathcal{T}^k$, дает

$$\langle (\alpha') j' m' | \mathcal{T}_\mu^k | (\alpha) j m \rangle = \delta_{(\alpha')(\alpha)} \delta_{j'j} \langle j | \mathcal{T}^k | j \rangle C_{m\mu m'}^{jkj}, \quad (3.443)$$

где редуцированный матричный элемент задается формулой

$$\langle j | \mathcal{T}^k | j \rangle = a_k (-1)^k \left[\frac{(2j + k + 1)! k! k!}{(2j + 1)(2j - k)!(2k)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (3.444)$$

Этот результат может быть получен путем вычисления матричных элементов оператора J_+^k для $m = j - k$, $\mu = k$ и $m' = j$ и использования формулы

$$C_{-k+j, k, j}^{jkj} = (-1)^k \left[\frac{(2j + 1)!(2k)!}{(2j + k + 1)!k!} \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Тензорные операторы $\mathcal{V}_k$ и $\mathcal{T}^k$, рассмотренные выше, являются примерами более общего тензорного оператора $\mathcal{V}^k$ компоненты которого $\mathcal{V}_\mu^k$ являются полиномиальными формами, определенными на компонентах произвольного векторного оператора V :

$$\mathcal{V}_\mu^k \equiv \left[\frac{(k + \mu)!}{(2k)!(k - \mu)!} \right]^{\frac{1}{2}} C_-^{k-\mu} V_+^k. \quad (3.445)$$

в) Другие построения. Можем применить конструкцию (3.445) к тензорным операторам произвольного ранга. Например, тензорный оператор спина 1/2 по определению является парой операторов u и v , которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} C_+ u &= 0, & C_- u &= v, & C_3 u &= u/2, \\ C_+ v &= u, & C_- v &= 0, & C_3 v &= -v/2. \end{aligned} \quad (3.446)$$

Используя метод, изложенный выше, теперь можем проверить, что оператор, определенный формулой

$$S_\mu^k \equiv \left[\frac{(k + \mu)!}{(2k)!(k - \mu)!} \right]^{\frac{1}{2}} C_-^{k-\mu} u^k \quad (3.447)$$

является μ -й компонентой тензорного оператора S^k ранга $k/2$ ($k = 1, 2, \dots$).

Ясно, что S_μ^k — полиномиальная форма от компонент u и v (которые могут не коммутировать).

11. *Выражения для $6j$ -символа в терминах групповых интегралов.* Инвариант Рака W_{rot}^{abc} коммутирует с полным угловым моментом J и поэтому является инвариантом относительно унитарных преобразований пространства $\mathcal{H}$ (см. разд. 21), порожденных угловым моментом J . Так как индекс j углового момента также сохраняется при таких преобразованиях, то коэффициенты Рака $W_{rot}^{abc}(j)$ являются инвариантами. Эквивалентным образом, $6j$ -символы являются инвариантами. Следовательно, разумно ожидать, что существует соотношение между $6j$ -символами и групповыми интегралами от характеров, так как такие интегралы также инвариантны. Ключевым результатом для установления таких соотношений является формула (3.190). Однако заметим, что треугольник индексов угловых моментов $(j_1 j_2 j)$ встречается дважды в (3.190). Необходимо будет рассмотреть произведения $6j$ -символов, которые содержат четное число тождественных треугольников. Вигнер [47] дал четыре такие соотношения между $6j$ -коэффициентами и групповыми интегралами от характеров (примечание 3). Шарп [98] дал детальные доказательства каждого из этих соотношений вместе с геометрической интерпретацией в терминах путей в групповом пространстве. Шарп также рассмотрел свободу фазы, остающейся в $6j$ -символах, когда они рассматриваются, как определено в (3.448) — (3.451). Мы приводим результаты Вигнера, доказывая только первое соотношение ($V = 2\pi^2$):

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ d & c & f \end{matrix} \right\}^2 = V^{-3} \int d\Omega_U d\Omega_V d\Omega_W \chi^a(U) \chi^b(V) \chi^e(W) \chi^d(VW^{-1}) \times \chi^c(WU^{-1}) \chi^f(UV^{-1}), \quad (3.448)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ a & b & f \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2f}}{V^2} \int d\Omega_U d\Omega_V \chi^a(UV) \chi^b(U^{-1}V) \chi^e(V) \chi^f(U), \quad (3.449)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ c & b & f \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & b & d \\ c & b & e \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & b & f \\ c & b & d \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2a}}{V^4} \int d\Omega_U d\Omega_V d\Omega_W d\Omega_X \chi^f(U) \chi^e(V) \chi^d(W) \times \chi^a(XU) \chi^b(XWVU) \chi^c(UXW), \quad (3.450)$$

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ d & c & f \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} a & c & f \\ a & b & e \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & b & f \\ a & b & e \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} d & c & e \\ a & b & e \end{matrix} \right\} = \frac{(-1)^{2d}}{V^5} \int d\Omega_U d\Omega_V d\Omega_W d\Omega_X d\Omega_Y \chi^d(U) \chi^c(V) \chi^f(W) \times \chi^a(X) \chi^a(Y^{-1}WV) \chi^b(X^{-1}YUW) \chi^e(YXVU). \quad (3.451)$$

Доказательство соотношения (3.448). Мы исходим прямо из определения (3.266) коэффициентов Рака, прежде всего суммируя этот результат по γ . Возводя результирующее соотношение в квадрат и отождествляя различные произведения коэффициентов Вигнера с интегралом (3.190), получаем

$$\begin{aligned}
W^2(abcd;ef) &= V^{-4} \sum \int d\Omega_U D_{\rho^* \rho}^f(U) D_{\beta^* \beta}^b(U) D_{\delta^* \delta}^d(U) \\
&\times \left(\int d\Omega_V D_{\gamma^* \gamma}^c(V) D_{\epsilon^* \epsilon}^e(V) D_{\delta^* \delta}^d(V) \right)^* \\
&\times \left(\int d\Omega_W D_{\epsilon^* \epsilon}^e(W) D_{\alpha^* \alpha}^a(W) D_{\beta^* \beta}^b(W) \right)^* \\
&\times \int d\Omega_X D_{\gamma^* \gamma}^c(X) D_{\alpha^* \alpha}^a(X) D_{\rho^* \rho}^f(X) \\
&= V^{-4} \int d\Omega_U d\Omega_V d\Omega_W d\Omega_X \\
&\times \chi^a(W^{-1}X) \chi^d(V^{-1}U) \chi^e(V^{-1}W) \\
&\times \chi^f(U^{-1}X) \chi^c(X^{-1}V) \chi^b(W^{-1}U), \quad (3.452)
\end{aligned}$$

где суммирование ведется по всем нижним индексам. При получении правой части соотношения (3.452) мы повторно использовали соотношение

$$\sum_{m'm} D_{m'm}^{j*}(U_1) D_{m'm}^j(U_2) = \chi^j(U_1^{-1}U_2) \quad (3.451)$$

Теперь примем в (3.452) $U_1 = W^{-1}X$, $U_2 = W^{-1}U$ и $U_3 = V^{-1}W$ и используем инвариантность интеграла относительно трансляций; получим

$$\begin{aligned}
W^2(abcd;ef) &= V^{-4} \int d\Omega_{U_1} d\Omega_{U_2} d\Omega_{U_3} d\Omega_X \\
&\times \chi^a(U_1) \chi^b(U_2) \chi^e(U_3) \\
&\times \chi^d(U_3 U_2) \chi^c(U_1^{-1} U_3^{-1}) \chi^f(U_2^{-1} U_1). \quad (3.454)
\end{aligned}$$

Полагая $U = U_1^{-1}$, $V = U_2^{-1}$, $W = U_3$, используя свойство $\chi^j(U) = \chi^j(U^{-1})$ характеров и интегрируя по $d\Omega_X$, получаем желаемый результат (3.448).

12. *Разложение физических тензорных операторов по операторам Вигнера.* Преобразования, выполняемые в пространствах углового момента (пространства точных j и m) физическими операторами взаимодействия, часто могут быть выражены кратко в терминах операторов Вигнера (или операторов Рака). (Приложения этой концепции см. в разд. 5, 7, 9, 10 гл. 7.) Для последующих ссылок полезно здесь обсудить лежащие в основе операторные соотношения.

Предположим, что нам задан оператор T с действием, заданным на пространстве физических состояний, которое натягивается на базис $\{ |(\alpha)jm\rangle \}$ углового момента J . Часто T можно представить в виде разложения в терминах множества (физических) неприводимых тензорных операторов (по отношению к J), скажем $\{ T_{\mu}^k; k = 0, 1/2, 1, \dots, \mu = k, k-1, \dots, -k \}$. Следовательно, пусть имеет место разложение вида

$$T = \sum_{k\mu} t_{\mu}^k T_{\mu}^k, \quad t_{\mu}^k \in \mathbb{C}. \quad (3.455)$$

Тогда оператор T имеет матричные элементы

$$\langle (\alpha') j' m' | T | (\alpha) j m \rangle = \sum_{k\mu} t_{\mu}^k \langle (\alpha') j' || T^k || (\alpha) j \rangle C_{m\mu m'}^{jkj'}. \quad (3.456)$$

Во многих физических приложениях (например, в теории возмущений) интересуются лишь множеством матричных элементов оператора T , которые связывают подпространства отдельных угловых моментов, скажем $(2j' + 1)$ -мерное пространство $\mathcal{H}_{j'}(\alpha')$, натянутое на векторы $\{ |(\alpha') j' m'\rangle; m' = j', \dots, -j' \}$, и $(2j + 1)$ -мерное пространство $\mathcal{H}_j(\alpha)$, натянутое на векторы $\{ |(\alpha) j m\rangle; m = j, \dots, -j \}$. Используя матричные элементы оператора T , можно сопоставлять с T отображение $T(\alpha', \alpha): \mathcal{H}_{j'}(\alpha') \rightarrow \mathcal{H}_j(\alpha)$, определенное формулой

$$T(\alpha', \alpha) |(\alpha) j m\rangle \equiv \sum_{j' m'} \langle (\alpha') j' m' | T | (\alpha) j m \rangle |(\alpha') j' m'\rangle. \quad (3.457)$$

Используя явные матричные элементы (3.456) и определение (3.341) оператора Вигнера, можно записать (3.457) в виде

$$T(\alpha', \alpha) = \sum_{k\mu\Delta} \mathbb{T}_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha) \left\langle \begin{matrix} k + \Delta \\ 2k \\ k + \mu \end{matrix} \right\rangle. \quad (3.458)$$

С помощью соотношения $\mathbb{T}_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha)$ является инвариантным оператором, который вместе с оператором Вигнера осуществляет преобразование

$$\begin{aligned} & \mathbb{T}_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha) \left\langle \begin{matrix} k + \Delta \\ 2k \\ k + \mu \end{matrix} \right\rangle |(\alpha) j m\rangle \\ &= t_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha, j + \Delta) C_{m\mu m + \mu}^{jkj + \Delta} |(\alpha') j + \Delta, m + \mu\rangle, \end{aligned} \quad (3.459)$$

где $t_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha, j + \Delta)$ — числовой коэффициент, определенный формулой

$$t_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha, j + \Delta) = t_{\mu}^k \langle (\alpha') j + \Delta || T^k || (\alpha) j \rangle. \quad (3.460)$$

Коэффициенты $t_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha, j + \Delta)$ также могут быть выражены в терминах $T(\alpha', \alpha)$ путем использования ортогональности операторов Вигнера при взятии (части) следа (см. формулу (3.343)). Таким образом, определяя

$$\text{tr} \mathcal{O} = \sum_m \langle (\alpha) j m | \mathcal{O} | (\alpha) j m \rangle \quad (3.461)$$

для произвольного оператора $\mathcal{O}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, где $\mathcal{H} = \sum_{(\alpha)j} \otimes \mathcal{H}_j(\alpha)$, находим

$$\text{tr} \left(\left\langle \begin{matrix} k' + \Delta' \\ 2k' \\ k' + \mu' \end{matrix} \right\rangle \left\langle \begin{matrix} k + \Delta \\ 2k \\ k + \mu \end{matrix} \right\rangle^{\dagger} \right) = \delta_{k'k} \delta_{\mu'\mu} \delta_{\Delta'\Delta} \frac{2j + 1}{2k + 1}. \quad (3.462)$$

Используя этот результат в (3.458), получаем

$$t_{\mu}^{k,\Delta}(\alpha', \alpha, j) = \frac{2k + 1}{2j + 1} \text{tr} \left(T(\alpha', \alpha) \left\langle \begin{matrix} k + \Delta \\ 2k \\ k + \mu \end{matrix} \right\rangle^{\dagger} \right). \quad (3.463)$$

Именно формула (3.458) (которая выражает операторное отображение (3.457) в операторах Вигнера) и формула (3.463) для коэффициентов разложения находят многочисленные приложения в физических задачах. (Подобные соотношения имеют место для операторов Рака.)

13. *Формула Шарпа для интеграла от функций Бесселя.* Рассматривая неприводимые унитарные представления и $3j$ -коэффициенты расширенной группы Евклида $E'(2)$ (просто приводимой группы, полученной путем присоединения к группе Евклида $E(2)$ отражения относительно оси x), Шарп ([98], стр. 305), вывел изящную формулу для интеграла от произведения трех функций Бесселя:

$$\int_0^{\infty} J_{k_1}(p_1 r) J_{k_2}(p_2 r) J_{k_3}(p_3 r) r dr = \frac{\cos(k_1 \tau_1 - k_2 \tau_2)}{2\pi \Delta(p_1 p_2 p_3)}.$$

Символы в этом выражении имеют следующие определения: k_i обозначают произвольные целые числа, которые в сумме дают нуль, т.е. $k_1 + k_2 + k_3 = 0$; p_i обозначают длины сторон треугольника, который мы обозначаем через $(p_1 p_2 p_3)$; τ_i обозначают внешние углы треугольника $(p_1 p_2 p_3)$, т.е. $\tau_i = \pi - \theta_i$, где θ_i ($0 \leq \theta_i \leq \pi$, $i = 1, 2, 3$) обозначает внутренний угол, противоположный стороне p_i ; $\Delta(p_1 p_2 p_3)$ обозначает площадь треугольника $(p_1 p_2 p_3)$, и по определению она бесконечна (так что правая сторона этого соотношения равна нулю), если длины p_i не образуют треугольника.

Формула Шарпа интересна здесь, потому что это аналог (для функций Бесселя) формулы Гаунта (3.192) для интеграла от произведения трех сферических функций в терминах $3j$ -коэффициентов группы вращений. Более того, эта формула указывает на соотношения, которые могут быть получены для специальных функций путем рассмотрения алгебры Рака — Вигнера просто приводимых групп (см. [47, 99]), прототипом которых является группа вращений (см. также [100, 101]).

23. Приложения

А. АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ФОРМА КОЭФФИЦИЕНТОВ РАКА

Мы воспроизводим в этом приложении метод Рака [29] сведения суммы по четырём индексам, появляющейся в определении $w(abcd; ef)$, данном в формуле (3.291), до суммы по одному индексу. Собственный вывод Рака является слишком сжатым, и, давая больше деталей, мы надеемся сделать доказательство более доступным.

Прежде всего мы приводим соотношение (3.291) к виду, данному Рака. Чтобы выполнить это, мы вводим новые индексы суммирования α, γ, t и u , где $\alpha = c - \delta - \beta, \gamma = c - \delta, t = e - b + c - \beta - \delta + r$ и $u = d + \delta - s$. Замечая, что r является целочисленным в (3.291), а следовательно, $(-1)^{a-e+\beta+r+s} = (-1)^{a-e+\beta-r+s} = (-1)^{a-b+c+d}(-1)^{t+u}$, мы получаем

$$w(abcd;ef) = \frac{(-1)^{a-b+c+d}(2c+1)!}{(a-f+c)!(-a+f+c)!(e-d+c)!(-e+d+c)!} \times \sum_{tu} \frac{(-1)^{t+u} w_{tu}(abcd;ef)}{t!(a+e-b-t)!u!(d+f-b-u)!}, \quad (\text{A-1})$$

где

$$w_{tu}(abcd;ef) = \sum_{\alpha\gamma} (a+\alpha)!(c+f-\alpha)!(e+\gamma)!(c+d-\gamma)! \times \\ \times \left[\frac{(b+\alpha-\gamma)!}{(a+\alpha-t)!(b-a-\gamma+t)!(c+d-\gamma-u)!(b-c-d+\alpha+u)!} \right] \\ \times \left[\frac{(b+\gamma-\alpha)!}{(e+\gamma-t)!(b-e-\alpha+t)!(c+f-\alpha-u)!(b-c-f+\gamma+u)!} \right]. \quad (\text{A-2})$$

Рака упростил формулу (A-1) путем малоправдоподобного шага замены двойной суммы в определяющем соотношении для w_{tu} на четверную сумму; т.е. он доказал, что для $0 \leq t \leq a+e-b$, $0 \leq u \leq d+f-b$ можем записать

$$w_{tu}(abcd;ef)/t!(a+e-b-t)!u!(d+f-b-u)! = \sum_{vw} \frac{(a+c+f+1)!(e+d+c+1)!(v-w)!(e+d+c-v)!}{w!(a+f-d-e+w)![(e+d+c+1-w)!]^2(b-c-e-f+u+v-w)!(b-a+e+t-v)!} \\ \times \left[\sum_r \frac{(b-a-e+u+v-w)!}{r!(a+e-b-t-r)!(u-r)!(b-a-e+v-w+r)!} \right] \\ \times \left[\sum_s \frac{(b+c+e+t-f-v)!}{s!(d+f-b-u-s)!(t-s)!(b+c+e-f-v+s)!} \right]. \quad (\text{A-3})$$

Доказательство тождественности (A-2) и (A-3) совсем простое (после того, как соотношения записаны) и требует только использования правила сумм для биномиальных коэффициентов

$$\binom{x+y}{k} = \sum_{m+n=k} \binom{x}{m} \binom{y}{n}, \quad (\text{A-4})$$

где x и y — переменные, k — неотрицательное целое число и суммирование ведется по всем неотрицательным целочисленным парам (m, n) , которые в сумме дают k . Доказательство будет дано путем приведения каждого из соотношений (A-2) и (A-3) к общей форме

$$w_{tu}(abcd;ef) = \sum_{vw} \frac{(a+c+f+1)!(e+d+c+1)!(v-w)!(e+d+c-v)!}{w!(a+f-d-e+w)![(e+d+c+1-w)!]^2(b-c-e-f+u+v-w)!(b-a+e+t-v)!} \\ \times \left[\frac{(u+v-t-w)!(e+d+c+t-u-v)!}{(v-t-w)!(e+d+c-u-v)!} \right]. \quad (\text{A-5})$$

Рассмотрим сначала соотношение (А-3). Суммирование по r и суммирование по s в (А-3) выполняется путем использования правила сумм (А-4) для биномиальных коэффициентов (для суммирования по r делаем отождествления $k = u$, $m = r$, $n = u - r$, $x = a + e - b - t$, $y = b - a - e + u + v - w$; для суммирования по s делаем отождествления $k = t$, $m = s$, $n = t - s$, $x = d + f - b - u$, $y = b + c + e + t - f - v$). Таким образом, в результате имеем, что соотношения (А-3) и (А-5) эквивалентны.

Далее мы покажем эквивалентность соотношений (А-2) и (А-5). Прежде всего используется правило сумм для биномиальных коэффициентов, чтобы заменить каждое из двух выражений в квадратных скобках в (А-2) на следующие суммы:

$$\sum_v [1/(v-e-\gamma)!(c+d+e-u-v)!(b-a+e+t-v)!(a-c-d-e+\alpha-t+u+v)!],$$

$$\sum_w [1/(v-t-w)!(c+f-\alpha-u-v+t+w)!(e+\gamma-v+w)!(b-c-e-f+u+v-w)!].$$

(Чтобы получить первое выражение, выбираем $m = v - e - \gamma$, $n = c + d + e - u - v$, $k = c + d - \gamma - u$, $x = b - a - \gamma + t$, $y = a + \alpha - t$; чтобы получить второе выражение, выбираем $m = c + f - \alpha - u - v + t + w$, $n = v - t - w$, $k = c + f - \alpha - u$, $x = b - e - \alpha + t$, $y = e + \gamma - t$.) Когда эти замены сделаны, (А-2) принимает вид

$$w_{iu}(abcd; ef) = \sum_{vw} [1/(c+d+e-u-v)!(b-a+e+t-v)!(v-t-w)!(b-c-e-f+u+v-w)!]$$

$$\times \sum_{\alpha} \frac{(a+\alpha)!(c+f-\alpha)!}{(a-c-d-e+\alpha-t+u+v)!(c+f-\alpha-u-v+t+w)!}$$

$$\times \sum_{\gamma} \frac{(e+\gamma)!(c+d-\gamma)!}{(e+\gamma-v+w)!(v-e-\gamma)!}.$$

Суммирование по α и γ теперь могут быть выполнены путем применения правила сумм для биномиальных коэффициентов, взятого для $x = -\xi$ и $y = -\eta$:

$$\binom{\xi + \eta + k - 1}{k} = \sum_{m+n=k} \binom{\xi + m - 1}{m} \binom{\eta + n - 1}{n}. \quad (\text{А-6})$$

(Мы выбираем $m = a - c - d - e + \alpha - t + u + v$, $n = c + f - \alpha - u - v + t + w$, $k = a + f - d - e + w$, $\xi = c + d + e + t - u - v + 1$, $\eta = u + v - t - w + 1$, чтобы провести суммирование по α , и $m = e + \gamma - v + w$, $n = v - e - \gamma$, $k = w$, $\xi = v - w + 1$, $\eta = c + d + e - v + 1$, чтобы провести суммирование по γ .) Таким образом, (А-2) эквивалентно (А-5).

Следующий шаг состоит в подстановке выражения (А-3) с четырехкратной суммой в (А-1), вследствие чего получаем выражение для $w(abcd; ef)$, включающее шесть сумм. Замечательно, что теперь можно провести суммирование по пяти внутренним индексам (используя лишь правило сумм для биномиальных коэффициентов), оставляя в конечном результате одну сумму. Порядок, в котором выполняются суммирования, следующий: сумма по t , по u , по v , по w (положим теперь $r + s = z$ и исключим s) и сумма по r . Явные суммирования приводят к таким результатам.

1) Сумма по t :

$$\begin{aligned} & \sum_t \frac{(-1)^t(b+c+e-f-v+t)!}{(t-s)!(b-a+e+t-v)!(a+e-b-t-r)!} = \\ & = \frac{(-1)^{a+e-b-r}(b+c+e-f-v+s)!(a+c-f)!}{(a+e-b-s-r)!(2e-v-r)!(b+c-e-f+s+r)!}. \end{aligned}$$

2) Сумма по u :

$$\begin{aligned} & \sum_u \frac{(-1)^u(b-a-e+u+v-w)!}{(u-r)!(b-c-e-f+u+v-w)!(d+f-b-u-s)!} = \\ & = \frac{(-1)^{f+d-b-s}(b-a-e+v-w+r)!(c+f-a)!}{(f+d-b-r-s)!(d-c-e+v-w-s)!(b+c-a-d+r+s)!}. \end{aligned}$$

При проведении этих двух суммирований используют следующий вариант правила сумм для биномиальных коэффициентов:

$$(-1)^k \binom{y-s-y+k-1}{k} = \sum_{m+n=k} (-1)^m \binom{\xi+m-1}{m} \binom{y}{n}.$$

3) Сумма по v :

$$\begin{aligned} & \sum_v \frac{(v-w)!(e+d+c-v)!}{(d-c-e+v-w-s)!(2e-v-r)!} = \\ & = \frac{(c+d+e+1-w)!(c+e-d+s)!(c+d-e+r)!}{(d+e-c-w-r-s)!(2c+r+s+1)!}, \end{aligned}$$

4) Сумма по w :

$$\begin{aligned} & \sum_w \frac{1}{w!(a+f-d-e+w)!(e+d+c+1-w)!(d+e-c-w-r-s)!} = \\ & = \frac{(a+d+e+f+1-r-s)!}{(e+d-c-r-s)!(a+f+c+1)!(e+d+c+1)!(a+f-c-r-s)!}, \end{aligned}$$

5) Сумма по r :

$$\sum_r \frac{(c+d-e+r)!(c+e-d+z-r)!}{r!(z-r)!} = \frac{(2c+z+1)!(c+d-e)!(c+e-d)!}{z!(2c+1)!}$$

В результате выполнения этих пяти операций приходим к формуле

$$\begin{aligned} w(abcd;ef) &= (-1)^{b+c-e-f} \\ & \times \sum_z \frac{(-1)^z(a+d+e+f+1-z)!}{z!(a+f-c-z)!(a+e-b-z)!(d+e-c-z)!(d+f-b-z)!} \\ & \times \frac{1}{(b+c-a-d+z)!(b+c-e-f+z)!}. \end{aligned} \quad (\text{A-7})$$

Наконец, заменяем индекс суммирования z на $z' = a + d + e + f - z$ (а затем переименовываем z' в z), чтобы получить следующее стандартное выражение для коэффициентов Рака:

$$W(abcd;ef) = \Delta(abe)\Delta(cde)\Delta(acf)\Delta(bdf) \times \sum_z \frac{(-1)^{a+b+c+d+z}(z+1)!}{(z-a-b-e)!(z-c-d-e)!(z-a-c-f)!(z-b-d-f)!} \times \frac{1}{(a+b+c+d-z)!(a+d+e+f-z)!(b+c+e+f-z)!}, \quad (\text{A-8})$$

где для удобства мы повторяем определение коэффициента треугольника:

$$\Delta(abc) = \left[\frac{(a+b-c)!(a-b+c)!(-a+b+c)!}{(a+b+c+1)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{A-9})$$

Б. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАКА

Мы продемонстрировали в разд. 18, что коэффициенты Рака однозначно определяются условиями ортогональности, соотношением Б — Э и четырьмя фундаментальными коэффициентами со спином $1/2$. Следовательно, интересно привести предположения, которые позволяют вычислить прямо и однозначно фундаментальные коэффициенты. Мы утверждаем, что *фундаментальные коэффициенты Рака однозначно определяются следующими условиями*:

а) Соглашение о знаке

$$\text{sign } W_{\rho\sigma\tau}^{a\frac{1}{2}c}(j) = \text{sign}(c - a - \sigma), \quad (\text{Б-1})$$

где по определению $\text{sign } 0 \equiv +$.

б) Соотношения ортогональности, примененные к фундаментальным коэффициентам.

в) Соотношение симметрии

$$W_{\rho\sigma\tau}^{a\frac{1}{2}c}(j) = (-1)^{a-c+\sigma} \left[\frac{(2c+1)(2j-2\sigma+1)}{(2a+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} W_{\tau,-\sigma,\rho}^{c\frac{1}{2}a}(j-\sigma), \quad (\text{Б-2})$$

которое в обычном обозначении Рака имеет вид

$$W(afe_{\frac{1}{2}};cb) = (-1)^{b+c-e-f} W(abc_{\frac{1}{2}};ef). \quad (\text{Б-3})$$

Доказательство. Вводим более краткие обозначения:

$$\begin{aligned} A_{\tau}^a(j) &= W_{\tau,\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}}^{a\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}}(j) \geq 0, \\ B_{\tau}^a(j) &= W_{\tau+1,-\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}}^{a\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}}(j) \geq 0, \\ C_{\tau}^a(j) &= W_{\tau,\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}}^{a\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}}(j) \leq 0, \\ D_{\tau}^a(j) &= W_{\tau+1,-\frac{1}{2},\tau+\frac{1}{2}}^{a\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}}(j) \geq 0, \end{aligned}$$

где значения следуют из соглашения о знаке «а».

Тогда соотношения ортогональности требуют, чтобы каждая из 2×2 -матриц

$$\begin{pmatrix} A_{\tau}^a(j) & B_{\tau}^a(j) \\ C_{\tau}^a(j) & D_{\tau}^a(j) \end{pmatrix}, \quad \tau = a - 1, \dots, -a, \quad (\text{Б-4})$$

была ортогональна. (При $\tau = a$ из соотношений ортогональности и соглашений о знаке следует $A_a^a(j) = \varepsilon_{j-a-\frac{1}{2}, j, a+\frac{1}{2}}$, причем остальные три коэффициента равны нулю, так как нарушаются условия треугольника; при $\tau = -a - 1$ из соотношений ортогональности и соглашения о знаке следует $B_{-a-1}^a(j) = 1$ (для всех j), причем остальные три коэффициента равны нулю, так как нарушаются условия треугольника.) Отсюда следует, что каждая из матриц (Б-4) должна иметь вид

$$\begin{pmatrix} A_{\tau}^a(j) & B_{\tau}^a(j) \\ -B_{\tau}^a(j) & A_{\tau}^a(j) \end{pmatrix}, \quad \tau = a - 1, \dots, -a. \quad (\text{Б-5})$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} D_{\tau}^a(j) &= A_{\tau}^a(j), \\ C_{\tau}^a(j) &= -B_{\tau}^a(j) \end{aligned} \quad (\text{Б-6})$$

для каждого $\tau = a - 1, \dots, -a$. Соотношение (Б-2) превращает соотношения (Б-6) в рекурсивные соотношения. Таким образом, условия «в» дают

$$\begin{aligned} D_{\tau}^a(j) &= \left[\frac{(2a)(2j+2)}{(2a+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} A_{\tau+\frac{1}{2}}^{a-\frac{1}{2}}(j+\frac{1}{2}), \\ C_{\tau}^a(j) &= - \left[\frac{(2a)(2j)}{(2a+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} B_{\tau-\frac{1}{2}}^{a-\frac{1}{2}}(j-\frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (\text{Б-7})$$

так что требуемые рекурсивные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} A_{\tau}^a(j) &= \left[\frac{(2a)(2j+2)}{(2a+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} A_{\tau+\frac{1}{2}}^{a-\frac{1}{2}}(j+\frac{1}{2}), \\ B_{\tau}^a(j) &= \left[\frac{(2a)(2j)}{(2a+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} B_{\tau-\frac{1}{2}}^{a-\frac{1}{2}}(j-\frac{1}{2}), \end{aligned} \quad (\text{Б-8})$$

где в каждом из этих рекурсивных соотношений $\tau = a - 1, \dots, -a$ и $A_a^{a(j)} = \varepsilon_{j-a-\frac{1}{2}, j, a+\frac{1}{2}}$, $B_{-a-1}^a(j) = 1$. Итерируя первое из соотношений (Б-8) (по a) столько раз, какова разность $a - \tau$, получаем

$$A_{\tau}^a(j) = \left[\frac{(a+\tau+1)(2j+a-\tau+1)}{(2a+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Б-9})$$

для всех $j \geq \tau + 1/2$ и $A_{\tau}^a(j) = 0$ в остальных случаях. Подобная итерация второго из соотношений (Б-8) дает

$$B_{\tau}^a(j) = \left[\frac{(a-\tau)(2j-a-\tau)}{(2a+1)(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Б-10})$$

для всех $j \geq \tau + 1/2$ и $B_{\tau}^a(j) = 0$ в остальных случаях. Формулы (Б-9) и (Б-10) дают единственное множество фундаментальных коэффициентов Рака, определенных перечисленными выше тремя условиями.

В. СВЯЗЬ МЕЖДУ СИММЕТРИЯМИ КОЭФФИЦИЕНТОВ РАКА И ВИГНЕРА

Мы видели, что коэффициент Вигнера может быть получен как предел коэффициента Рака, т.е.

$$C_{\alpha\beta\gamma}^{bdf} = \lim_{j \rightarrow \infty} W_{\alpha\beta\gamma}^{bdf}(j). \quad (\text{B-1})$$

В силу этого соотношения можно поставить вопрос: «Какие симметрии коэффициентов Рака остаются справедливыми в этом пределе и становятся симметриями коэффициентов Вигнера?». Ответ получается из определения тех перестановок *строк и столбцов* таблицы (3.315), которые приводят к преобразованию над $(b, \alpha, d, \beta, f, \gamma)$, которое также порождается операциями над *строками, столбцами и транспозицией* таблицы Редже:

$$\begin{pmatrix} b + \alpha & d + \beta & f - \gamma \\ b - \alpha & d - \beta & f + \gamma \\ d + f - b & b + f - d & b + d - f \end{pmatrix}. \quad (\text{B-2})$$

Например, перестановка столбцов 1 и 2, а затем перестановка строк 1 и 2 в таблице (B-2) приводит к тому же преобразованию $(b \rightarrow d, d \rightarrow b, f \rightarrow f, \alpha \rightarrow -\beta, \beta \rightarrow -\alpha, \gamma \rightarrow -\gamma)$, что и перестановка столбцов 1 и 2, а затем перестановка строк 1 и 2 в таблице (3.315). В самом деле, мы видим, что любая перестановка столбцов таблицы (3.315), а затем такая же перестановка строк разрешена и соответствует тем симметриям коэффициента $C_{\alpha\beta\gamma}^{bdf}$ (с подходящими фазой и размерностным множителем), которые имеют следующие перенумерации символов $(b, \alpha), (d, \beta)$ и (f, γ) :

$$\begin{array}{ccc} (b, \alpha) & (d, \beta) & (f, \gamma) \\ (d, \beta) & (f, -\gamma) & (b, -\alpha) \\ (f, -\gamma) & (b, \alpha) & (d, -\beta) \\ (d, -\beta) & (b, -\alpha) & (f, -\gamma) \\ (b, -\alpha) & (f, \gamma) & (d, \beta) \\ (f, \gamma) & (d, -\beta) & (b, \alpha) \end{array} \quad (\text{B-3})$$

Перестановка строк 1 и 2 в таблице (3.315) приводит к тому же преобразованию, что и транспозиция таблицы (B-2). Таким образом, должно быть включено преобразование из $(b, \alpha), (d, \beta), (f, \gamma)$ в

$$\left(\frac{b + d + \gamma}{2}, \frac{b - d + \alpha - \beta}{2} \right), \left(\frac{b + d - \gamma}{2}, \frac{b - d - \alpha + \beta}{2} \right), (f, b - d) \quad (\text{B-4})$$

Комбинация этого преобразования с преобразованиями (B-3) теперь приводит к 12 общим преобразованиям над $(b, \alpha, d, \beta, f, \gamma)$, порождаемым перестановками строк и перестановками столбцов таблицы (3.315) и перестановками строк, перестановками столбцов и транспозицией таблицы (B-2). Других общих преобразований существовать не может. Это доказывается следующим образом. Преобразования над девятью элементами первых трех строк таблицы (3.315), порождаемые перестановками строк и перестановками столбцов, представляет собой подгруппу G_1 порядка 36 симметрической группы S_9 . Подобным образом преоб-

разования тех же девяти элементов, порождаемые перестановками строк, перестановками столбцов и транспозиций таблицы (В-2), представляют собой подгруппу G_2 порядка 72 группы S_9 . Более того, $G_1 \cap G_2$ является подгруппой в G_1 и в G_2 , и мы уже показали, что $G_1 \cap G_2$ содержит подгруппу из 12 элементов. Следовательно, $G_1 \cap G_2$ содержит $12n$ элементов, где n — некоторое положительное число, и $12n$ является делителем чисел 36 и 72. Таким образом, $n = 1$ или $n = 3$. Если $n = 3$, то каждый элемент из G_1 принадлежит $G_1 \cap G_2$, что несправедливо, так как индивидуальные перестановки строк и столбцов таблицы (3.315) не приводят к преобразованиям девяти элементов, соответствующих любому элементу подгруппы G_2 . Таким образом, $n = 1$.

При взятии предела (В-1) мы теряем все 144 симметрии коэффициентов Рака, кроме 12 симметрий, причем эти 12 симметрий остаются симметриями коэффициентов Вигнера. Остальные 60 симметрий коэффициентов Вигнера возникают независимо от симметрий коэффициентов Рака. Интересное заключение состоит в следующем. Мы не можем вывести симметрий коэффициентов Вигнера из симметрий коэффициентов Рака и предельного соотношения (В-1) (если не проводить явного исследования коэффициентов Вигнера).

Г. СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКИХ БАЗИСНЫХ ВЕКТОРОВ

Обычно понимают, что оператор углового момента $\bar{J}$ обозначает величину

$$\bar{J} = J_1 \hat{e}_1 + J_2 \hat{e}_2 + J_3 \hat{e}_3, \quad (\Gamma-1)$$

где J_i — операторы, удовлетворяющие обычным коммутационным соотношениям $[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k$ и $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ — (вещественные) единичные векторы, составляющие правостороннюю триаду (коммутирующую с угловым моментом):

$$\begin{aligned} \hat{e}_i \cdot \hat{e}_j &= \delta_{ij}, \\ \hat{e}_i \times \hat{e}_j &= i\epsilon_{ijk}\hat{e}_k. \end{aligned} \quad (\Gamma-2)$$

Если мы определяем комплексные векторы

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{+1} &\equiv -(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)/\sqrt{2}, \\ \hat{\xi}_0 &\equiv \hat{e}_3, \\ \hat{\xi}_{-1} &\equiv (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)/\sqrt{2}, \end{aligned} \quad (\Gamma-3)$$

то (Г-1) может быть также записано в виде

$$\bar{J} = J_{+1}\hat{\xi}_{+1}^* + J_0\hat{\xi}_0^* + J_{-1}\hat{\xi}_{-1}^*. \quad (\Gamma-4)$$

В этом результате J_μ ($\mu = +1, 0, -1$) являются операторами

$$J_{+1} \equiv -\frac{1}{\sqrt{2}} J_+, \quad J_0 \equiv J_3, \quad J_{-1} \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} J_-, \quad (\Gamma-5)$$

где $J_\pm \equiv J_1 \pm iJ_2$. (Это двусмысленное обозначение, к сожалению, является общепринятым.)

Комплексные векторы, определенные формулами (Г-3), называются *сферическими базисными векторами*, а операторы J_μ ($\mu = +1, 0, -1$) называются

сферическими компонентами оператора J . Эта терминология и выбор знаков в определениях (Г-3) и (Г-4) следует из выражений для сферических (шаровых сферических) функций степени 1 (см. табл. 4 в приложении (т. 2)).

Поучительно напомнить здесь свойства преобразования предыдущих величин. Стандартное преобразование базисных кет-векторов, используемое во всей этой монографии (см. замечания на стр. 50 и 94), задается формулами

$$\mathcal{U}: |(\alpha)j\mu\rangle \rightarrow |(\alpha)j\mu\rangle' = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^j(U) |(\alpha)j\nu\rangle, \quad (\text{Г-6})$$

и это преобразование базисных состояний приводит к преобразованию сферических компонент углового момента:

$$\mathcal{U}: J_{\mu} \rightarrow J'_{\mu} = \mathcal{U} J_{\mu} \mathcal{U}^{-1} = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^1(U) J_{\nu}, \quad (\text{Г-7})$$

Последний результат эквивалентен следующему:

$$\mathcal{U}: J_j \rightarrow J'_j = \mathcal{U} J_j \mathcal{U}^{-1} = \sum_i R_{ij} J_i, \quad (\text{Г-8})$$

где U и R связаны соотношением (2.16). В соответствии с этим преобразованием компонент J_i векторного оператора $J = (J_1, J_2, J_3)$ мы имеем преобразование базисных векторов: $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \rightarrow (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3)$, $(\xi_{+1}, \xi_0, \xi_{-1}) \rightarrow (\xi'_{+1}, \xi'_0, \xi'_{-1})$, как определено из $\bar{J} = \sum_i J_i \hat{e}_i = \sum_i J'_i \hat{e}'_i = \sum_{\mu} J_{\mu} \xi_{\mu}^* = \sum_{\mu} J'_{\mu} \xi_{\mu}'^*$:

$$\begin{aligned} \hat{e}_j &\rightarrow \hat{e}'_j = \sum_i R_{ij} \hat{e}_i, \\ \xi_{\mu} &\rightarrow \xi'_{\mu} = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^1(U) \xi_{\nu}, \\ \xi_{\mu}^* &\rightarrow \xi_{\mu}'^* = \sum_{\nu} D_{\nu\mu}^{1*}(U) \xi_{\nu}'^*. \end{aligned} \quad (\text{Г-9})$$

Далее замечаем, что комплексные векторы (Г-3) удовлетворяют соотношениям ортогональности (эрмитово скалярное произведение)

$$\xi_{\mu}^* \cdot \xi_{\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad (\text{Г-10})$$

и, следовательно, сферическая компонента J_{μ} оператора $\bar{J}$ имеет вид

$$J_{\mu} = \bar{J} \cdot \xi_{\mu}. \quad (\text{Г-11})$$

Отсюда следует, что комплексные векторы ξ_{μ}^* ($\mu = +1, 0, -1$) являются базисом комплексного трехмерного пространства (базисом являются также векторы ξ_{μ}).

Вторая характеристическая особенность множества сферических векторов (Г-3) выражается скалярными произведениями

$$\xi_{+1}^* \cdot \xi_{+1} = \xi_{-1}^* \cdot \xi_{-1} = 0, \quad \xi_0^* \cdot \xi_0 = 1. \quad (\text{Г-12})$$

Таким образом, двое из векторов *изотропны*, тогда как *третий* не изотропен.

Свойства, отмеченные в (Г-10) и (Г-12), предлагают общее определение сферического базиса: *три вектора, обозначенные через η_{+1} , η_0 , η_{-1} , называются сферическим базисом тогда и только тогда, когда они подчиняются правилам*

$$\hat{\eta}_{\mu}^* \cdot \hat{\eta}_{\nu} = \delta_{\mu\nu}, \quad \mu, \nu = +1, 0, -1,$$

$$\hat{\eta}_{+1} \cdot \hat{\eta}_{+1} = \hat{\eta}_{-1} \cdot \hat{\eta}_{-1} = 0, \\ \hat{\eta}_0 = \alpha_0 \hat{n}, \quad |\alpha_0| = 1, \quad \hat{n} \cdot \hat{n} = 1. \quad (\Gamma-13)$$

Свойство ортогональности, выраженное первым из трех соотношений, позволяет выразить любой (вещественный или комплексный) вектор A в виде

$$\vec{A} = A_{+1} \hat{\eta}_{+1}^* + A_0 \hat{\eta}_0^* + A_{-1} \hat{\eta}_{-1}^*, \quad (\Gamma-14)$$

$$\text{где} \quad A_\mu = \vec{A} \cdot \hat{\eta}_\mu. \quad (\Gamma-15)$$

Основной результат, который теперь может быть доказан, состоит в следующем: *каждый сферический базис имеет вид*

$$\hat{\eta}_\mu = \alpha_\mu (\mathcal{R} \hat{\zeta}_\mu), \quad \mu = +1, 0, -1, \quad (\Gamma-16)$$

где α_μ — комплексное число с единичным модулем $|\alpha_\mu| = 1$, а $\mathcal{R}$ — вращение базиса $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$.

Доказательство. Доказательство этого результата может быть дано путем использования трех определяющих свойств: а) $\hat{\eta}_{+1}$ и $\hat{\eta}_{-1}$ перпендикулярны вещественному единичному вектору $\hat{n}$; б) $\hat{\eta}_{+1}$ и $\hat{\eta}_{-1}$ — изотропные векторы и в) $\hat{\eta}_{+1}$ и $\hat{\eta}_{-1}$ перпендикулярны, т.е. $\hat{\eta}_{+1}^* \cdot \hat{\eta}_{-1} = 0$. Эти свойства предполагают, что $\hat{\eta}_{+1}$ и $\hat{\eta}_{-1}$ имеют вид

$$\hat{\eta}_{+1} = -\frac{\alpha_{+1}}{\sqrt{2}} (\hat{p} + i\hat{q}), \\ \hat{\eta}_{-1} = \frac{\alpha_{-1}}{\sqrt{2}} (\hat{p} - i\hat{q}), \quad (\Gamma-17)$$

где $(\hat{p}, \hat{q}, \hat{n})$ составляют правостороннюю триаду (вещественных) перпендикулярных единичных векторов (декартов базис). Следовательно, существует вращение $\mathcal{R}$ базисных векторов, такое, что $\hat{p} = \mathcal{R} \hat{e}_1$, $\hat{q} = \mathcal{R} \hat{e}_2$, $\hat{n} = \mathcal{R} \hat{e}_3$, что доказывает $(\Gamma-16)$. ■

Говоря несколько иначе, можем утверждать, что результат, который мы вывели выше, состоит в том, что каждый сферический базис является вращением частного сферического базиса

$$\hat{\zeta}_{+1} \equiv -\frac{\alpha_{+1}}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 + i\hat{e}_2), \\ \hat{\zeta}_0 \equiv \alpha_0 \hat{e}_3, \\ \hat{\zeta}_{-1} \equiv \frac{\alpha_{-1}}{\sqrt{2}} (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2) \quad (\Gamma-18)$$

взятого для некоторого набора комплексных чисел α_μ с единичным модулем. Так как $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ пробегает все правосторонние декартовы базисы, а $(\alpha_{+1}, \alpha_0, \alpha_{-1})$ — все комплексные числа с единичным модулем, то векторы $(\hat{\zeta}_{-1}, \hat{\zeta}_0, \hat{\zeta}_{+1})$ перечисляют все множества сферических базисов.

В литературе не существует договоренности относительно выбора множителей α_μ в определяющем стандартном базисе, хотя $\hat{\zeta}_{+1}$, $\hat{\zeta}_0$, $\hat{\zeta}_{-1}$ — распространенный выбор. Однако Данош [65] предложил выбор сферических базисных векторов, который предлагает различные выгоды для записи

векторных соотношений, выраженных в терминах скалярных и векторных произведений, через обычные соотношения связывания.

Идея проста. Так же как мы используем векторное произведение векторов декартова базиса ($\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$), чтобы устанавливать различие между правосторонней и левосторонней системами координат, мы используем свойства произведений $\hat{\zeta}_\mu \cdot \hat{\zeta}_\nu$ векторов сферического базиса для того, чтобы дальше разбивать множество всех сферических базисов.

Прямым вычислением получаем

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_0 \times \hat{\zeta}_\mu &= i\alpha_0 \mu \hat{\zeta}_\mu, & \mu &= +1; 0, -1 \\ \hat{\zeta}_{+1} \times \hat{\zeta}_{-1} &= i\alpha_{+1}\alpha_{-1}\alpha_0^* \hat{\zeta}_0.\end{aligned}\quad (\Gamma-19)$$

Используя коэффициенты Вигнера $C_{\mu\nu\lambda}^{111}$, этот результат можно выразить как одно соотношение:

$$\hat{\zeta}_\mu \times \hat{\zeta}_\nu = i\sqrt{2}\alpha_\mu\alpha_\nu\alpha_{\mu+\nu}^* C_{\mu,\nu,\mu+\nu}^{111} \hat{\zeta}_{\mu+\nu}. \quad (\Gamma-20)$$

Скалярное произведение имеет подобный вид:

$$\hat{\zeta}_\mu \cdot \hat{\zeta}_\nu = -\sqrt{3}\alpha_\mu\alpha_\nu C_{\mu\nu 0}^{110} = \alpha_\mu\alpha_{-\mu}(-1)^\mu \delta_{\mu,-\nu}. \quad (\Gamma-21)$$

Данош предложил определять стандартный базис $\hat{\eta}_{+1}, \hat{\eta}_0, \hat{\eta}_{-1}$ требованием, чтобы знаки перед коэффициентами Вигнера в (Г-20) и (Г-21) были вещественными и положительными:

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_\mu \times \hat{\eta}_\nu &= \sqrt{2}C_{\mu,\nu,\mu+\nu}^{111} \hat{\eta}_{\mu+\nu}, \\ \hat{\eta}_\mu \cdot \hat{\eta}_\nu &= \sqrt{3}C_{\mu\nu 0}^{110}.\end{aligned}\quad (\Gamma-22)$$

Это приводит к тому, что $\alpha_0 = -i$ и $\alpha_{-1} = -\alpha_{+1}^*$. Таким образом, общий вид этого сферического базиса такой:

$$\begin{aligned}\hat{\eta}_{+1} &= -\frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2), \\ \hat{\eta}_0 &= -i\hat{e}_3, \\ \hat{\eta}_{-1} &= \frac{\alpha^*}{\sqrt{2}}(\hat{e}_1 - i\hat{e}_2),\end{aligned}\quad (\Gamma-23)$$

Он все еще содержит произвольный множитель с единичным модулем (Данош выбрал $\alpha = -i$, но мы видим, что этот выбор произволен). (Если мы упорядочиваем векторы сферического базиса и векторы декартового базиса следующим образом: $\hat{\eta}_{+1}, \hat{\eta}_0, \hat{\eta}_{-1}$ и $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ соответственно, то детерминант преобразования (Г-18) равен $-i\alpha_{+1}\alpha_0\alpha_{-1}$, что предполагает значение $+1$ для (Г-23).)

Преимущество использования сферического базиса вида (Г-23) состоит в том, что для

$$\begin{aligned}\vec{A} &= \sum_\mu A_\mu^1 \hat{\eta}_\mu^*, \\ \vec{B} &= \sum_\mu B_\mu^1 \hat{\eta}_\mu^*,\end{aligned}\quad (\Gamma-24)$$

имеем

$$\begin{aligned}\vec{A} \cdot \vec{B} &= \sqrt{3}[\mathbf{A}^1 \times \mathbf{B}^1]^0, \\ \vec{A} \times \vec{B} &= \sqrt{2}[\mathbf{A}^1 \times \mathbf{B}^1]^1,\end{aligned}\quad (\Gamma-25)$$

где символы справа относятся к связыванию тензорных операторов, рассмотренному в разд. 16.

Векторы сферического базиса появляются также и в другой роли — как собственные векторы вращения (см. (2.2)). Чтобы понять этот результат с другой точки зрения, мы интерпретируем образование векторного произведения векторов как операторное действие на вектора.

Каждому вектору $\vec{A}$ (вещественному или комплексному) можно сопоставить оператор $\Gamma_{\vec{A}} \equiv \vec{A} \times$, который определяется путем задания его действия на произвольный вектор $\vec{B}$ (вещественный или комплексный):

$$\Gamma_{\vec{A}} \vec{B} \equiv \vec{A} \times \vec{B}. \quad (\Gamma-26)$$

Произведение двух таких операторов $\Gamma_{\vec{A}} \Gamma_{\vec{B}}$ определяется так: $(\Gamma_{\vec{A}} \Gamma_{\vec{B}}) \vec{C} = \Gamma_{\vec{A}}(\Gamma_{\vec{B}} \vec{C})$. Определяем также действие оператора $\Gamma_{\vec{A}}$ на комплексное число a :

$$\Gamma_{\vec{A}} a \equiv 0. \quad (\Gamma-27)$$

Множество операторов $\{\Gamma_{\vec{A}}\}$ обладает рядом полезных свойств, которые могут быть доказаны исходя из определения (Г-26) и из хорошо известных свойств векторного произведения:

$$\begin{aligned}\text{а)} \quad & \Gamma_{\vec{A}}(b\vec{B} + c\vec{C}) = b(\Gamma_{\vec{A}}\vec{B}) + c(\Gamma_{\vec{A}}\vec{C}), \\ \text{б)} \quad & \Gamma_{a\vec{A} + b\vec{B}} = a\Gamma_{\vec{A}} + b\Gamma_{\vec{B}}, \\ \text{в)} \quad & \Gamma_{\vec{A}}(\vec{B} \cdot \vec{C}) = 0 = (\Gamma_{\vec{A}}\vec{B}) \cdot \vec{C} + \vec{B} \cdot (\Gamma_{\vec{A}}\vec{C}), \\ \text{г)} \quad & \Gamma_{\vec{A}}(\vec{B} \times \vec{C}) = (\Gamma_{\vec{A}}\vec{B}) \times \vec{C} + \vec{B} \times (\Gamma_{\vec{A}}\vec{C}),\end{aligned}\quad (\Gamma-28)$$

где a, b, c и $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ — произвольные комплексные числа и векторы соответственно.

То, что существует связь между операторами $\{\Gamma_{\vec{A}}\}$ и вращениями, становится очевидным, когда мы определяем свойства конкретных операторов, определенных для $k = 1, 2, 3$ как $\Gamma_k \equiv i\vec{e} \times$:

$$\begin{aligned}\Gamma_i \hat{e}_j &= ie_{ijk} \hat{e}_k, \\ [\Gamma_i, \Gamma_j] &= ie_{ijk} \Gamma_k,\end{aligned}\quad (\Gamma-29)$$

Заметим, что $\Gamma^2 \equiv \Gamma_1^2 + \Gamma_2^2 + \Gamma_3^2 = 2$. Эти результаты выражают тот факт, что $\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ являются реализацией операторов углового момента, имеющей $j = 1$.

Второй полезный результат следует прямо из свойств вращений, заданных соотношением (2.3):

$$\mathcal{R} \Gamma_{\vec{A}} \mathcal{R}^{-1} = \Gamma_{\vec{\Phi} \vec{A}}. \quad (\Gamma-30)$$

Это соотношение выражает тот факт, что при действии подобия с помощью вращения множество операторов $\{\Gamma_{\vec{A}}\}$ преобразуется в себя (свойство тензорных операторов).

Как можно было предвидеть из того факта, что $\Gamma_i (i = 1, 2, 3)$ являются операторами углового момента с $j = 1$, множества сферического базиса возникают тогда, когда мы рассматриваем задачу на собственные значения для $\Gamma_{i\hat{n}}$, где $\hat{n}$ — произвольный единичный (вещественный) вектор ($\hat{n} \cdot \hat{n} = 1$). Простой вывод показывает, что $\Gamma_{i\hat{n}}(\Gamma_{i\hat{n}} + 1)(\Gamma_{i\hat{n}} - 1) = 0$, демонстрируя, что собственные значения оператора $\Gamma_{i\hat{n}}$ равны $+1, 0, -1$. Более того, мы видим, что по отношению к эрмитову скалярному произведению, определенному формулой

$$(\vec{A}, \vec{B}) \equiv \vec{A}^* \cdot \vec{B}, \quad (\Gamma-31)$$

оператор $\Gamma_{i\hat{n}}$ эрмитов. Отсюда следует, что собственные векторы $\hat{u}_{+1}, \hat{u}_0, \hat{u}_{-1}$ оператора $\Gamma_{i\hat{n}}$ перпендикулярны и нормируемы. Наконец, можно использовать свойство производной (см. (Г-28)), чтобы доказать, что $\hat{u}_{+1}$ и $\hat{u}_{-1}$ изотропны. Таким образом, собственные векторы оператора $\Gamma_{i\hat{n}}$ определяют множество сферического базиса:

$$\Gamma_{i\hat{n}} \hat{u}_v = v \hat{u}_v, \quad v = +1, 0, -1. \quad (\Gamma-32)$$

Как будет признано, вышеизложенная теория как раз является подробным изложением абстрактной теории углового момента для случая $j = 1$, когда в качестве оси z выбрано направление $\hat{n}$ и произвольные фазовые множители в (Г-18) являются следствием общей свободы, которую мы имеем в этой задаче (см. обсуждения в примечании 1). Более того, оператор вращения на угол ϕ вокруг направления $\hat{n}$ теперь принимает очень простой вид:

$$\mathcal{R}(\phi, \hat{n}) = e^{-i\phi \hat{n} \cdot \Gamma} = e^{-i\phi I_{\hat{n}}}, \quad (\Gamma-33)$$

так как

$$i\Gamma_{\hat{n}} = \Gamma_{i\hat{n}} = i(n_1\Gamma_1 + n_2\Gamma_2 + n_3\Gamma_3) = i\hat{n} \cdot \Gamma.$$

Замечание. Приведенное изложение, рассматривающее свойства оператора $\Gamma_{\vec{A}}$, является физической версией (для $SU(2)$) общего оператора $\text{ad} A$ из математической трактовки алгебр Ли (векторное произведение заменяется на операцию взятия квадратной скобки для пар элементов абстрактной алгебры Ли). В точности так, как $\Gamma_{\vec{A}}$ может использоваться для рассмотрения свойств представления с $j = 1$ (3×3 -матрицы) алгебры Ли группы вращения, оператор $\text{ad} A$ используется для рассмотрения свойств присоединенного представления алгебры Ли.

Литература

1. Heisenberg W., Z. Physik, **33**, 879 (1925).
О квантово-теоретической интерпретации кинематических и механических соотношений.
2. Born M., Jordan P., Z. Physik, **34**, 858 (1925).
О квантовой механике.
3. Born M., Heisenberg W., Jordan P., Z. Physik, **35**, 557 (1926).
О квантовой механике, II.
4. Dirac P. A. N., Proc. Roy. Soc., **A109**, 642 (1925).
Фундаментальные уравнения квантовой механики.
5. Van der Waerden B. L., Sources of Quantum Mechanics, North-Holland, Amsterdam, 1967.

6. *Cartan E.*, Sur des Groupes Finis and Continus, Thesis, Paris, Nony, 1894. [Oeuvres Complete, Part I, Gauthier-Villars, Paris, 1952, p. 137.]
О структуре конечных и непрерывных групп.
7. *Mackey G. W.*, The Mathematical Foundation of Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1963.
8. *Dirac P. A. M.*, The Principles of Quantum Mechanics, Oxford Univ. Press, London, 1930. [Имеется перевод: Дирак П. А. Принципы квантовой механики. — М.: Физматгиз, 1960.]
- 8а. *Brownstein K. R.*, Amer. J. Phys., **47**, 809 (1979).
Собственные значения оператора J^2 .
9. *Sommerfeld A.*, Ann. Physik, **51**, 1, 125 (1916).
О квантовой теории спектральных линий.
10. *Feynman R. P.*, Feynman Lectures on Physics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1963.
11. *Brait G.*, *Wills L. A.*, Phys. Rev., **44**, 470 (1933).
Сверхтонкая структура в промежуточном связывании.
12. *Slater J. C.*, Phys. Rev., **34**, 1293 (1929).
Теория комплексных спектров.
13. *Wigner E. P.*, Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press, New York, 1959. [Имеется перевод: Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.]
14. *Szego G.*, Orthogonal Polynomials, Edwards, Ann Arbor, 1948. [Имеется перевод: Сеге Г. Ортогональные многочлены. — М.: Физматгиз, 1962.]
15. *Erdelyi A. et al*, Higher Transcendental Functions, Vol. I, McGraw-Hill, New York, 1953. [Имеется перевод: Эрдели А. и др. Высшие трансцендентные функции. — М.: Наука, 1965.]
16. *Edmonds A. R.*, Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1957.
17. *Rose M. E.*, Elementary Theory of Angular Momentum, Wiley, New York, 1957.
18. *Гельфанд И. М.*, *Шаниро З. Я.*, Представления группы вращений трехмерного пространства и их применения. — УМН, 1952, т. 7, с. 3.
19. *Fox K.*, *Ozler I.*, J. Chem. Phys., **52**, 5044 (1970).
Построение тетраэдральных сферических функций.
20. *Altmann S. L.*, *Bradley C. J.*, Phil. Trans. Roy. Soc., **A255**, 193 (1962).
Замечание о вычислении матричных элементов группы вращений.
21. *Gilmore R.*, Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications, Wiley, New York, 1974.
22. *Nielson H. H.*, Rev. Mod. Phys., **13**, 90 (1951).
Энергия вибрации и вращения молекул.
23. *Casimir H. B. G.*, Rotation of a Rigid Body in Quantum Mechanics. Thesis, University of Leyden, Wolters, Groningen, 1931. [Koninkl. Ned. Wetenschap, Proc., **34**, 844 (1931).]
Вращение жесткого тела в квантовой механике.
24. *Shaffer W. H.*, J. Mol. Spectrosc., **1**, 69 (1957).
Операционный вывод волновых функций для симметричного жесткого ротатора.
- 24а. *Clebsch A.*, Theorie der binaren algebraischen Formen, Teubner, Leipzig, 1872.
- 24б. *Gordan P.*, Über das Formensystem binärer Formen, Teubner, Leipzig, 1875.
- 24в. *Weyl H.*, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel, Leipzig, 1928.
- 24г. *Brussaard P. J.*, Ned. T. Natuurk., **33**, 202 (1967).
Коэффициенты Вигнера и Клебша — Гордана.
25. *Wigner E. P.*, Z. Physik, **43**, 624 (1927).
Некоторые следствия теории Шредингера для структуры термов.
26. *Wigner E. P.*, Z. Physik, **45**, 601 (1927).
Исправление к работе: Некоторые следствия для структуры термов.

27. *Eckart C.*, *Rev. Mod. Phys.*, **2**, 305 (1930).
Применение теории групп к квантовой механике одноатомных систем.
28. *Condon E. U., Shortley G. H.*, *The Theory of Atomic Spectra*, Cambridge Univ. Press, London, 1935. [Имеется перевод: Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров. — М.: ИЛ, 1949.]
29. *Racah G.*, *Phys. Rev.*, **62**, 438 (1942); **63**, 367 (1943).
Теория комплексных спектров.
30. *Louck J. D.*, *Phys. Rev.*, **110**, 815 (1958).
Новое рекурсивное соотношение для коэффициентов Клебша — Гордана.
31. *Van der Wuerden B. L.*, *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik*. Springer, Berlin, 1932. [Имеется перевод: ван дер Варден. Метод теории групп в квантовой механике. — Харьков, ДНБТУ, 1938.]
32. *Kramers H. A.*, *Proc. Amst. Acad.*, **33**, 953 (1930); **34**, 965 (1931).
О выводе квантовомеханических формул интенсивностей. Разбиение на мультиплеты при двоячной связи векторов.
33. *Brinkman H. C.*, *Dissertation*, Utrecht, Groningen, 1932; *Z. Physik*, **79**, 753 (1932).
О квантовомеханическом мультипольном излучении. Разбиение на мультиплеты спектров атомов с двумя световыми электронами.
34. *Brinkman H. C.*, *Applications of Spinor Invariants in Atomic Physics*, North-Holland, Amsterdam, 1956.
35. *Hamermesh M.*, *Group Theory and Its Applications to Physical Problems*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1962. [Имеется перевод: Хамермеш М. Теория групп и ее применение к физическим проблемам. — М.: Мир, 1966.]
36. *Nachamkin J.*, *J. Math. Phys.*, **16**, 2391 (1975).
Прямое использование алгебры схем Юнга для получения коэффициентов Клебша — Гордана группы $SU(2)$.
37. *Schwinger J.*, in: *Quantum Theory of Angular Momentum* (eds. Biedenharn L. C., van Dam H.), Academic Press, New York, 1965, p. 229.
Об угловом моменте.
38. *Regge T.*, *Nuovo Cimento* [10], **10**, 544 (1958).
Свойства симметрий коэффициентов Клебша — Гордана.
39. *Bargmann V.*, *Rev. Mod. Phys.*, **34**, 829 (1962).
О представлениях группы вращений.
40. *Bincer A.*, *J. Math. Phys.*, **11**, 1835 (1970).
Интерпретация симметрии коэффициентов Клебша — Гордана, открытой Редже.
41. *Lowdin P.-O.*, *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 328 (1960).
Теоремы разложения для общей волновой функции и расширенные схемы Хартри — Фока.
42. *Majumdar S. D.*, *Prog. Theoret. Phys.*, **20**, 798 (1958).
Коэффициенты Клебша — Гордана.
43. *Гельфанд И. М., Граев М. И.* Конечномерные неприводимые представления унитарной и полной линейной групп и связанные с ними специальные функции. — *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1965, т. 29, с. 1329.
44. *Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я.* Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
45. *Hagedorn R.*, *Selected Topics on Scattering Theory: Part IV. Angular Momentum*. Lectures given at the Max-Planck-Institut für Physik, Munich, 1963.
- 45a. *Kleima D., van Wageningen R.*, *Nucl. Phys.*, **73**, 625 (1965).
О симметриях Редже 3 j-символа.
46. *Eisenbud L.*, Ph. D. thesis, Princeton University, 1948.
47. *Wigner E. P.*, in: *Quantum Theory of Angular Momentum* (eds. Biedenharn L. C., van Dam H.), Academic Press, New York, 1965, p. 87.

О матрицах, которые разлагают кронекеровские произведения представлений просто приводимых групп.

48. *Gaunt J. A.*, Trans. Roy. Soc., **A228**, 151 (1929).
Триплеты гелия.
49. *Wigner E. P.*, Gottinger Nachrichten, Math.-Phys., 546 (1932).
Об операции обращения времени в квантовой механике.
50. *Aebersold D.*, *Biedenharn L. C.*, Phys. Rev., **A15**, 441 (1977).
Предостережение о применении техники симметрий к кулоновской задаче.
- 50a. *Michel L.* — in: Lecture Notes in Physics: Group Representations in Mathematics and Physics, Battelle Recontres, 1969 (ed. Bargmann V.), Springer, Berlin, 1970, p. 36.
Применение теории групп к квантовой физике: алгебраические аспекты.
51. *Guttinger P.*, *Pauli W.*, Z. Physik, **67**, 754 (1931).
О сверхтонкой структуре Li^+ .
52. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc., **A111**, 281 (1926).
Устранение вершин в квантовой механике.
53. *Born M.*, *Jordan P.*, Elementare Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1930.
54. *Biedenharn L. C.*, *Blatt J. M.*, *Rose M. E.*, Rev. Mod. Phys., **24**, 249 (1952).
Некоторые свойства коэффициентов Рака и связанных с ними коэффициентов.
55. *Юцис А. П.*, *Левинсон И. Б.*, *Ванагас В. В.* Математический аппарат теории момента количества движения. — Вильнюс: Минтис, 1960.
- 55a. *Rose M. E.*, *Yang C. N.*, J. Math. Phys., **3**, 106 (1962).
Собственные значения и собственные вектора симметричной матрицы из 6 j -символов.
56. *Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., **31**, 287 (1953).
Тождество, которому удовлетворяют коэффициенты Рака.
57. *Elliott J. P.*, Proc. Roy. Soc., **A218**, 345 (1953).
Теоретическое изучение ядерной структуры, V. Матричные элементы нецентральных сил с применением к 2р-оболочке.
58. *Biedenharn L. C.*, *Louck J. D.*, Ann. Phys., **63**, 459 (1971).
Внутренне самосопряженная бозонная структура: симплектоны.
59. *Fano U.*, *Racah G.*, Irreducible Tensorial Sets, Academic Press, New York, 1959.
60. *Erdelyi A.*, Math. Rev., **14**, 642 (1957).
Реферат ссылки [56].
61. *Regge T.*, Nuovo Cimento [10], **11**, 116 (1959).
Свойства симметрий коэффициентов Рака.
62. *Шеленин Л. А.* Исчисление коэффициентов Клебша — Гордана и его физические приложения. — Труды Физ. ин-та АН СССР, 1973, т. 70, с. 3.
63. *Jahn H. A.*, *Hope J.*, Phys. Rev., **93**, 318 (1954).
Свойства симметрии 9j-символа Вигнера.
64. *Arima A.*, *Horie H.*, *Tanabe Y.*, Prog. Theoret. Phys., **11**, 143 (1954).
Обобщенный коэффициент Рака и его применение.
65. *Danos M.*, Ann. Phys. **63**, 319 (1971).
Полностью согласованные фазовые соглашения в квантовой теории углового момента.
66. *Wu A. C. T.*, J. Math. Phys., **13**, 84 (1972).
Структура 9j-коэффициентов Вигнера в подходе Баргмана.
67. *El Baz E. A.*, *Castel B.*, Graphical Methods of Spin Algebras in Atomic, Nuclear, and Particle Physics, Dekker, New York, 1972.
- 67a. *Юцис А. П.*, *Бандзайтис А. А.* Теория момента количества движения в квантовой механике. — Вильнюс: Минтис, 1965.
- 67b. *Варишлович Д. А.*, *Москалев А. Н.*, *Херсонский В. К.* Квантовая теория углового момента. — Ленинград: Наука, 1975.

68. *Kramers H. A.*, Quantum Mechanics, North-Holland, Amsterdam, 1957.
69. *Schiff L.*, Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1949.
70. *Perlis S.*, Theory of Matrices, Addison-Wesley, Cambridge, Mass., 1952.
71. *Calais J.-L.*, Technical Note 25 [AF-61(514)-1200], 1959.
Вывод коэффициентов Клебша — Гордана посредством операторов проектирования.
72. *Slater J. C.*, Quantum Theory of Atomic Spectrum, Benjamin, New York, 1968.
73. *Bethe H. A.*, *Jackiw R. W.*, Intermediate Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968.
- 73a. *Lehrer-Ilamed Y.*, Proc. Camb. Phil. Soc., **60**, 61 (1964).
О прямых вычислениях представлений трехмерной группы вращений.
74. *Hull P. G.*, Some Properties of Angular Momentum Eigenfunctions, Thesis, Auburn University, Auburn, Ala., 1962.
- 74a. *Peierls R. E.*, *Yoccoz J.*, Proc. Phys. Soc., **A70**, 381 (1957).
Коллективная модель движения ядра.
- 74b. *Lamte M. A.*, *Boeker E.*, Nucl. Phys., **A111**, 492 (1968).
Точная и приближенная проекция углового момента для легких ядер.
- 74в. *Sorensen R. A.*, Nucl. Phys., **A281**, 475 (1977).
Задачи проектирования в ядерной физике.
- 74г. *Bohr A.*, *Mottelson B. R.*, Nuclear Structure. Vol. II: Nuclear Deformations, Benjamin, New York, 1975. [Имеется перевод: *Бор О.*, *Моттelson Б.* Структура атомного ядра. т. II. — М.: Мир, 1971.]
75. *Сморodinский Я. А.*, *Шелепин Л. А.* Коэффициенты Клебша — Гордана с разных сторон. — УФН, 1972, т. 106, с. 3.
- 75a. *Barut A. O.*, *Wilson R.*, J. Math. Phys., **17**, 900 (1976).
Некоторые новые тождества для коэффициентов Клебша — Гордана и функций представлений групп $SO(2, 1)$ и $SO(4)$.
76. *Fano U.*, U. S. National Bureau of Standards Report 1214, 1951.
Техника статистических матриц и их применение к направленным корреляциям излучений.
77. *De-Shalit A.*, *Talmi I.*, Nuclear Shell Theory, Academic Press, 1963.
78. *Heine V.*, Group Theory and Quantum Mechanics, An Introduction to Its Present Usage, Pergamon, New York, 1960.
79. *Judd R.*, Operator Techniques in Atomic Spectroscopy, McGraw-Hill, New York, 1963.
80. *Давыдов А. С.*, Квантовая механика. — М.: Наука, 1963.
81. *Brink D. M.*, *Satchler G. R.*, Angular Momentum, Oxford Univ. Press, London, 1962.
82. *Bohr A.*, *Mottelson B. R.*, Nuclear Structure. Vol. I: Single-Particle Motion, Benjamin, New York, 1969. [Имеется перевод: *Бор О.*, *Моттelson Б.* Структура атомного ядра, т. I. — М.: Мир, 1971.]
83. *Merzbacher E.*, Quantum Mechanics, Wiley, New York, 1961.
84. *Messiah A.*, Quantum Mechanics. Vol. II, North-Holland, Amsterdam, 1965. [Имеется перевод: *Мессиа А.* Квантовая механика. — М.: Наука, 1979.]
85. *Abragan A.*, *Bleaney B.*, Electron Paramagnetic Resonance of Transition Ions, Clarendon, Oxford, 1970.
86. *Blatt J. M.*, *Weisskopf V. F.*, Theoretical Nuclear Physics, Wiley, New York, 1952.
87. *Jahn H. A.*, Proc. Roy. Soc., **A205**, 192 (1951).
Теоретическое изучение ядерной структуры, II. Ядерные конфигурации d^2 , d^3 и d^4 . Геналогические коэффициенты и матричные элементы центральной силы.
88. *Alder K.*, Helv. Phys. Acta, **25**, 235 (1952).
Лекция по теории направленной корреляции.
89. *Ландау Л. Д.*, *Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. Нерелятивистская теория. — М.: Физматгиз, 1963.

90. Фок В. А. — ЖЭТФ, 1940, т. 10, с. 383.
91. *Tinkham M.*, Group Theory and Quantum Physics, McGraw-Hill, New York, 1964.
92. *Biedenharn L. C.*, Tables of Racah Coefficients, Oak Ridge National Laboratory Report ORNL-1098, 1952.
Таблицы коэффициентов Рака.
93. *Lomont J. S.*, Applications of Finite Groups, Academic Press, New York, 1959.
94. *Redmond P. J.*, Proc. Roy. Soc., **A222**, 84 (1954).
Явная формула для вычисления генеалогических коэффициентов.
95. *Boys S. F., Sahni R. S.*, Phil. Trans. Roy. Soc., **A246**, 463 (1954).
Электронные волновые функции, XII. Вычисление общих коэффициентов векторной связи автоматическими компьютерами.
96. *Banerjee M. K., Saha A. K.*, Proc. Roy. Soc., **A224**, 473 (1954).
Форм-факторы β -распада.
97. *Kennedy J. M., Cliff M. J.*, Report AECL-224, Atomic Energy of Canada, Chalk River, Ontario, 1955.
Коэффициенты преобразования между LS- и jj-связываниями.
98. *Sharp W. T.*, Thesis, Princeton University, 1960, Report AECL-1098, Atomic Energy of Canada, Chalk River, Ontario, 1960.
Алгебра Рака и контракция групп.
99. *Wigner E. P.*, Application of Group Theory to the Special Functions of Mathematical Physics. Lecture Notes, Princeton University, Princeton, N. J., 1955.
100. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
101. *Talman J. D.*, Special Functions: A Group Theoretical Approach, Benjamin, New York, 1968.
102. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, The Wigner — Racah Algebra in Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.
- 103*. *Климук А. У.* Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп. — Киев: Наукова думка, 1979.

Теория поворотов по Гамильтону

1. Другой подход к вращениям

В предыдущих главах мы рассмотрели общепринятую точку зрения на квантовую теорию углового момента. Данная глава посвящена описанию новой точки зрения на предмет, берущей начало с необычного взгляда на вращения, который исходит первоначально от Гамильтона [1], а также частично от Клейна и Зоммерфельда [2] и от Вигнера [3] (см. примечание 1). Такое необычное рассмотрение приводит к возникновению понятия нового геометрического объекта — *поворота*¹⁾. — который в квантовом варианте (гл. 5) будет реализован при помощи элементарной операторной структуры. При рассмотрении этой альтернативной точки зрения нас интересуют прежде всего мотивировка и предлагаемые понятия. В соответствии с этим изложение вначале будет носить интуитивный характер.

Понятие элементарной (точечной) частицы в физике (как это рассматривается в гл. 1), если обратиться к его первоосновам, становится синонимичным фундаментальным симметриям, которые, как предполагается, характеризуют физическое пространство. Как мы видели, из предполагаемых однородности и изотропности пространства индуцируются симметрии пространственных смещений (трансляций) и вращений; т.е. предполагается, что пространство является евклидовым и трехмерным, обладающим группой изометрии $E(3)$, состоящей из вращений и трансляций.

Трансляции охарактеризовать совсем нетрудно, поскольку трехмерные трансляции с необходимостью [4] образуют абелеву (коммутативную) группу. В физике генератор трансляции есть не что иное, как (эрмитов) оператор импульса p , а соответствующий оператор, генерирующий конечные смещения, реализуется в виде $U(a) = \exp(-ia \cdot p/\hbar)$. Этот оператор смещает систему на (числовой) вектор a .

¹⁾ Авторы используют английское слово «turn» — поворот. Определение этого понятия дано ниже. Из определения ясно, что как в английском так и русском тексте более правильным было бы обозначать это понятие словами «направленная дуга». Однако такое словосочетание неудобно в употреблении. Мы предостерегаем читателя от смешивания понятия «поворот» в том смысле, в котором оно используется в этой книге, с понятием «вращение». Понятие «поворот» вводится авторами с целью дать другое возможное описание вращения. — *Прим. перев.*

(Для того чтобы проверить это утверждение, положим, что оператор $U(\mathbf{a})$ действует на функцию $f(\mathbf{x})$). Находим

$$(U(\mathbf{a})f)(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (-i\mathbf{a} \cdot \mathbf{p}/\hbar)^n f(\mathbf{x}), \quad (4.1)$$

где $(\mathbf{p}f)(\mathbf{x}) = -i\hbar \nabla f(\mathbf{x})$. Этот последний шаг использует шредингерову реализацию правила коммутации Гейзенберга $[p_i, x_j] = -i\hbar \delta_{ij}$. Поэтому действие оператора $U(\mathbf{a})$ на функции $f(\mathbf{x})$, если исходить из разложения Тейлора, принимает вид смещения

$$(U(\mathbf{a})f)(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} - \mathbf{a}), \quad (4.2)$$

как и утверждалось. Точнее, мы интерпретируем (4.2) следующим образом: под действием оператора смещения $U(\mathbf{a})$ функция f переходит в новую функцию $U(\mathbf{a})f$, а точка $\mathbf{x}$ переходит в смещенную точку $\mathbf{x} - \mathbf{a}$, такую, что новая функция, вычисленная в старой точке, совпадает со старой функцией, вычисленной в смещенной точке).

Это хоть и элементарно, но очень важно. Причина того, что все это работает так гладко, состоит в следующем:

а) *Технически*. Имеем единственность (унитарного) оператора смещения $U(\mathbf{a})$ в соответствии с содержанием теоремы Стоуна — фон Неймана [5 — 7].

б) *Концептуально*. Прimitивное понятие трансляции было до конца понято на основе производного понятия «вектора», определенного как упорядоченная пара точек в $E(3)$ (начальная точка — «хвост вектора», конечная точка — «голова вектора»). Тот факт, что одна и та же трансляция определяется смещением любой точки, выражает эквивалентность всех векторов смещения относительно параллельного переноса.

Теперь находим, что композиция двух смещений является сложением векторов с использованием произвола параллельного переноса, чтобы выполнить соединение двух векторов: голова (первого) к хвосту (второго). Коммутативность трансляций в векторной форме реализуется как закон параллелограмма.

Все это отлично известно для *трансляций*. Но когда мы переходим к *вращениям*, становится ясно, что нам недостает простой модели, способной сделать вращательную структуру интуитивно очевидной.

Чтобы найти подходящую модель, начнем с вопроса: существует ли геометрический путь реализации как трансляций, так и вращений единым образом? Действительно, такой путь существует. *И трансляции, и вращения могут быть получены при помощи последовательных отражений относительно двух плоскостей* (см. примечание 2). Рассмотрим это наблюдение.

Если две плоскости тождественны, то мы получаем тождественное преобразование. Если две плоскости *различны и параллельны*, мы имеем трансляцию. Рассмотрим рис. 4.1. Геометрически видно, что генерируемая таким способом трансляция смещает все точки на *удвоенное* расстояние между плоскостями в направлении, перпендикулярном плоскостям, *от* плоскости 1 *до* плоскости 2. Мы можем описать трансляцию посредством двух плоскостей отражения и вектора $\vec{a}/2$ (половины фактического смещения) и проверить, что это описание обладает всеми желаемыми свойствами трансляции (включая независимость трансляции от параллельного перемещения плоскостей и вектора $\vec{a}/2$). Таким образом,

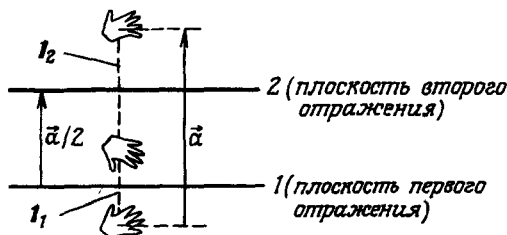


РИС. 4.1. Трансляция $\vec{a}$ порождается двумя последовательными отражениями 1_1 и 1_2 относительно двух параллельных плоскостей, разделенных расстоянием $a/2$.

трансляция — это операция, состоящая из двух последовательных отражений относительно двух параллельных плоскостей.

Если две плоскости *различны*, но не параллельны, то два отражения генерируют вращение. Рассмотрим рис. 4.2. Геометрически видно, что вращение $\mathcal{R}(\phi, \hat{n}) = 1_2 1_1$ имеет а) ось $\hat{n}$, определяемую пересечением двух плоскостей, б) угол

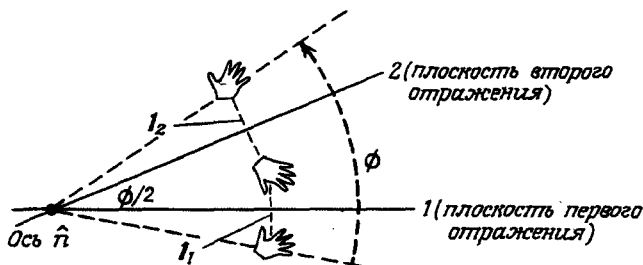


РИС. 4.2. Вращение на угол ϕ вокруг $\hat{n}$ порождается двумя последовательными отражениями 1_1 и 1_2 относительно двух пересекающихся плоскостей с двугранным углом $\phi/2$.

вращения ϕ , равный удвоенному двугранному углу между двумя плоскостями, и в) направление вращения, определяемое последовательностью отражений: сначала относительно плоскости 1, затем относительно плоскости 2. Таким образом, вращение — это операция, состоящая из двух последовательных отражений относительно двух пересекающихся плоскостей.

Важность такого единого описания трансляций и вращений состоит в том, что оно выявляет аналогию между $a/2$ (половинным вектором смещения) и $\phi/2$ (половинной направленной дугой вращения). Для трансляций использование $a/2$ вместо a ничего не изменяет, но для вращений (см. замечание «з» на стр. 184) использование половинных углов оказывается чрезвычайно важным.

Сосредоточим внимание на тех вращениях, которые оставляют выбранную точку (центр) фиксированной. Пары плоскостей, с помощью которых мы описываем вращения, должны тогда проходить через этот центр. Чтобы описать вращение $\mathcal{R}(\phi, \hat{n})$, используем пару плоскостей, пересечением которых является ось $\hat{n}$, а также двугранный угол $\phi/2$, определяемый плоскостями (с $\phi/2 \leq \pi$), с на-

правлением вращения, выбранным от плоскости 1 к плоскости 2 (или, что эквивалентно, с ориентацией $\hat{n}$ по правилу правой руки) (рис. 4.3).

Имеем теперь нашу модель: простейшим объектом для описания вращений является поворот¹⁾ — половина направленной дуги вращения, параметризованной как упорядоченная пара точек на поверхности единичной сферы и определенной с точностью до переноса по большой окружности. Порядок задается

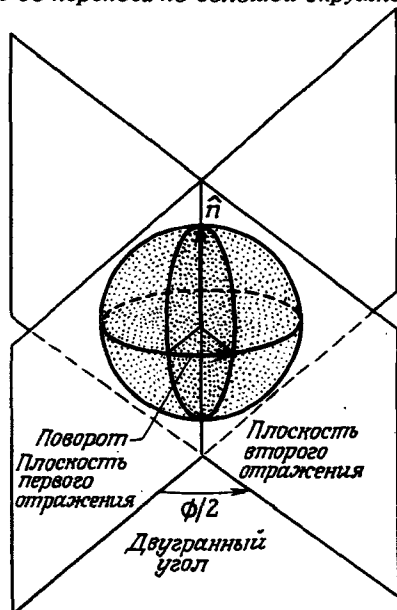


РИС. 4.3. Поворот — это упорядоченная пара точек, показанная здесь геометрически как направленная дуга большой окружности. Каждый поворот определяет вращение, задаваемое двумя пересекающимися плоскостями.

путем обозначения одной точки как «хвост поворота», а другой — как «голова поворота». Вращение генерируется отражением сначала относительно плоскости, перпендикулярной хвосту поворота, а затем относительно плоскости, перпендикулярной голове поворота. Это генерирует вращение вокруг оси $\hat{n}$ (пересечение плоскостей) на угол ϕ , в два раза больший, чем длина дуги поворота, причем направление вращения задается направлением поворота (эквивалентно правилу правой руки).

2. Свойства поворотов (геометрический подход)

В соответствии с нашей целью развития интуитивного понимания примем теперь точку зрения, согласно которой понятие поворота (для вращений) является подходящим аналогом понятия вектора (для трансляций), и воспользуемся этим

¹⁾ Название поворот заимствовано у Клейна и Зоммерфельда [2], использовавших связанное с ним (но не тождественное ему) немецкое слово Wendestreckung.

понятием для вывода свойств вращений. Геометрия поворотов непосредственно приведет нас к сущности вращений.

Интуитивно представляется полезным понимать поворот как направленную дугу большой окружности, соединяющую две точки, с началом дуги в хвосте поворота и концом в голове поворота, однако более точное определение (как упорядоченная пара точек) имеет технические преимущества¹⁾. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим точки, лежащие на поверхности нашей сферы единичного радиуса (рис. 4.3). Любые две несовпадающие точки Q и P , которые недиаметрально противоположны, определяют единственную большую окружность, содержащую эти две точки. Упорядоченная пара (QP) определяет единственный поворот, тогда как существуют *две* направленные дуги, соединяющие Q и P в направлении от Q к P . Следовательно, определение при помощи упорядоченных пар является технически более точным.

Мы попытаемся абстрагировать геометрические правила для поворотов, исходя из аналогии между поворотами и векторами в плоскости. Следуя этому пути, замечаем, что с целью установить правило сложения векторов необходимо прежде всего определить класс эквивалентности векторов (параллельный перенос), так чтобы любые два вектора можно было поместить в положение голова к хвосту, которое требуется для сложения. Что представляет собой соотношение эквивалентности для поворотов? Для ответа на этот вопрос обратимся к связи между нашей моделью и вращениями. Любые два поворота одинаковой длины и направления на одной и той же большой окружности приводят к одному и тому же вращению. Следовательно, абстрагируем результат: *два поворота эквивалентны, если они могут быть совмещены путем перемещения любого из них вдоль большой окружности, которая его содержит*. Выражение «определенный с точностью до переноса по большой окружности» включается в определение поворота для уточнения именно этого соотношения эквивалентности.

Рассмотрим теперь любые две различные диаметрально противоположные точки Q и P . Тот геометрический факт, что содержащая эти две точки большая окружность не единственна, показывает, что фактически можно совместить поворот (QP) с любой парой диаметрально противоположных точек, используя перенос по большой окружности. Следовательно, мы заключаем, что *все повороты, определяемые любой парой диаметрально противоположных точек, эквивалентны*. Обозначим этот класс эквивалентности через T_+ . Это означает, что сложение с T_+ коммутирует со всеми поворотами (поскольку мы можем выбирать T_+ лежащим на той же большой окружности, что и заданный поворот, а сложение поворотов на одной и той же большой окружности коммутативно). Это свойство оправдывает название скалярный поворот для T_+ .

Дадим теперь закон сложения и обсудим его свойства.

а) *Сумма двух поворотов* геометрически определяется по аналогии с суммой двух векторов. Пусть T_1 и T_2 обозначают два поворота. Сумма поворотов T_1 и

¹⁾ Мы признательны проф. Бакри (Марсельский университет, Франция) и проф. Бацлавски (Хаверфордский университет, Пенсильвания, США) за указание на эти преимущества (частные сообщения).

T_2 (сначала T_2 , а затем T_1) обозначается $T_1 + T_2$ и определяется по следующему правилу. Выбираем *любую* из *двух* точек, в которых пересекаются большая окружность поворота T_1 и большая окружность поворота T_2 . Помещаем голову поворота T_2 и хвост поворота T_1 в эту точку пересечения (используя соотношение эквивалентности для сдвига каждого поворота вдоль его большой окружности). *Поворот, идущий из хвоста поворота T_2 , до головы поворота T_1 , определяется как $T_1 + T_2$.* (Выбор противоположной точки пересечения дает ту же сумму.)

б) *Сложение поворотов некоммукативно:* $T_1 + T_2 \neq T_2 + T_1$ в общем случае. Этот основной результат можно продемонстрировать геометрически, как показано на рис. 4.4. Заметим, что длины дуг двух сумм одинаковы, но их большие окружности, вообще говоря различаются.

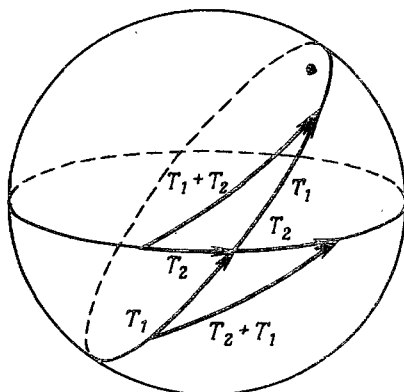


РИС. 4.4. Сложение поворотов некоммукативно.

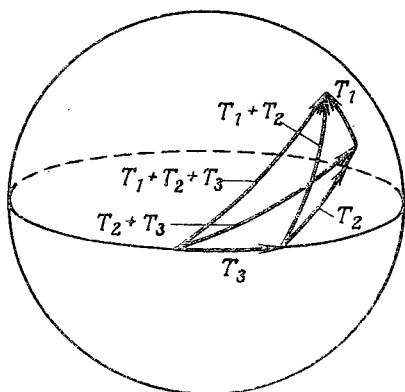


РИС. 4.5. Сложение поворотов ассоциативно.

в) *Сложение поворотов является ассоциативной операцией.* Чтобы проверить это геометрически, рассмотрим сложение трех поворотов, прибавляя сначала T_3 к T_2 , а затем T_1 к сумме $T_{23} = T_2 + T_3$. Закон сложения требует, чтобы три поворота были расположены по правилу голова к хвосту, как показано на рис. 4.5. Это геометрическое упорядочение непосредственно показывает, что результат T_{sum} не зависит от группировки слагаемых:

$$T_{\text{sum}} = T_1 + T_{23} = T_{12} + T_3 = T_1 + T_2 + T_3;$$

т.е. результирующее расположение (хвост и голова, определяющие T_{sum}) совершенно не зависит от выбора пути (выбора группировки слагаемых). (Алгебраическая проверка ассоциативного закона дана в следующем разделе.)

г) Из геометрических соображений ясно также, что *тождественная операция для поворотов совпадает с поворотом нулевой длины T_0 .* (Заметим, что из определения поворота следует эквивалентность поворотов $T_{2k\pi}$, $k = 0, 1, \dots$, повороту T_0 .)

д) Используя закон сложения, видим, что *обратным* к заданному повороту T является поворот $-T$, имеющий те же большую окружность и длину, но проти-

воположное направление. Это ясно из определения поворота как упорядоченной пары.

Эти геометрические результаты устанавливают тот (неудивительный) факт, что повороты образуют группу относительно сложения. Назовем эту группу *группой поворотов Гамильтона* или просто группой поворотов; эта группа, как будет показано, изоморфна квантовой группе вращений $SU(2)$. Заметим, что классы эквивалентности поворотов являются (в общем случае) трехпараметрическими объектами.

В группе поворотов существуют две инволюции. Первая является операцией, определяющей обратный поворот $T \rightarrow -T$. Вторая инволюция определяется путем использования T_π :

$$T \rightarrow T^c \equiv T + T_\pi = T_\pi + T.$$

Ясно, что $(T^c)^c = T$. Рис. 4.6 геометрически иллюстрирует эти две инволюции.

Мы увидели, что любой паре различных, не диаметрально противоположных точек сопоставляется единственный класс эквивалентности поворотов, длина l которых лежит в интервале $0 < l < \pi$. Каждому такому классу эквивалентности сопоставляются направление $\hat{n}$ (ось большой окружности, проходящей через определяющие поворот точки) и направление вращения. Особые (скалярные)

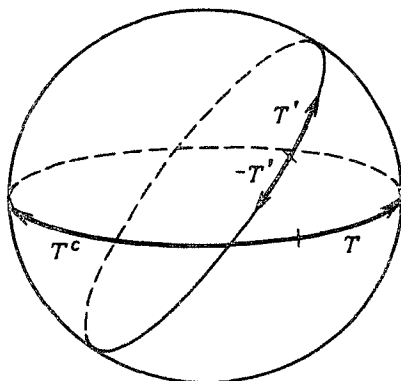


РИС. 4.6. Две операции инволюции $T \rightarrow T^c$ и $T' \rightarrow -T'$.

повороты T_0 и T_π сопоставляются парам тождественных точек или диаметрально противоположных точек соответственно. Им соответствуют классы эквивалентности поворотов длины 0 и длины π соответственно, но не соответствует никакое направление $\hat{n}$ или направление вращения. Это исчерпывает множество (классов эквивалентности) поворотов, принадлежащих группе поворотов Гамильтона.

Особая роль поворотов длины $\pi/2$. Повороты длины $\pi/2$ представляют особый интерес. Обозначим общий поворот длины $\pi/2$ через E . Совокупность поворотов длины $\pi/2$ является подмножеством группы поворотов, которое характеризуется свойством $E^c = -E$, или, что эквивалентно, свойством $E + E = T_\pi$.

Произвольный поворот всегда может быть разложен (неоднозначно) в сумму двух поворотов длины $\pi/2$; т.е. для каждого T существуют повороты E и E' длины $\pi/2$, такие, что

$$T = E' + E. \quad (4.3)$$

Доказательство. Пусть $\hat{n}$ обозначает нормаль к большой окружности поворота T , а P — точку пересечения нормали $\hat{n}$ с единичной сферой. Тогда можно выбрать E как поворот, идущий от хвоста поворота T к точке P , а E' тогда является поворотом, идущим от P до головы поворота T . ■

Повороты длины $\pi/2$ обладают вторым важным свойством. Пусть $\hat{e}$ обозначает единичный вектор, перпендикулярный (правило правой руки) большой окружности поворота E , и пусть $\hat{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный большой окружности произвольного ненулевого поворота T . Тогда из геометрических соображений находим¹⁾

$$\hat{e} \cdot \hat{n} = \cos \|T - E\| / \sin \|T\|, \quad (4.4)$$

где $\|T\|$ обозначает длину l поворота T .

Рассмотрим теперь три поворота (E_1, E_2, E_3) , каждый длины $\pi/2$, которые удовлетворяют условию

$$E_3 + E_2 + E_1 = T_0. \quad (4.5)$$

Такой набор из трех поворотов задается сферическим треугольником, покрывающим октант единичной сферы. (Эквивалентно эти три поворота определяют систему координат — упорядоченную тройку ортогональных единичных векторов, как рассматривается в разд. 2 гл. 2. Это обсуждается дальше в примечании «в».)

На основе определяющего соотношения (4.5) и того факта, что E_i имеют длину $\pi/2$, отсюда следует, что четверка поворотов $\{T_0, E_1, E_2, E_3\}$ и их сопряжения $\{T_0^c, E_1^c = -E_1\}$ образуют конечную группу (из восьми элементов) относительно сложения поворотов. Эта группа является не чем иным, как кватернионной группой Гамильтона.

Чтобы сделать этот результат очевидным, удобно сначала заменить аддитивное обозначение для поворотов на мультипликативное обозначение (записывая их рядом), а затем обозначить повороты, принадлежащие кватернионной группе, более подходящими символами:

$$\begin{array}{ll} T_0 \rightarrow 1, & T_\pi \rightarrow -1, \\ E_1 \rightarrow i, & E_1^c \rightarrow i^{-1}, \\ E_2 \rightarrow j, & E_2^c \rightarrow j^{-1}, \\ E_3 \rightarrow k, & E_3^c \rightarrow k^{-1}. \end{array} \quad (4.6)$$

¹⁾ Мы благодарим проф. Бруссара (Лаборатория физики Университета в Утрехте, Нидерланды), который указал на ошибку в нашем первоначальном рассмотрении.

В этом новом обозначении находим

$$\begin{aligned} \text{а) } i^2 = j^2 = k^2 &= -1, \\ \text{б) } ij &= -ji = k, \\ jk &= -kj = i, \\ ki &= -ik = j. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Соотношение «а» выполняется в силу того, что повороты E_i имеют длину $\pi/2$, а соотношения «б» следуют из (4.5).

Это хорошо известные тождества, которым удовлетворяет кватернионная группа. Как заметил Коксетер [8], наименее избыточным определением является $i^2 = j^2 = (ij)^2$.

Тот факт, что мы пришли (используя наш альтернативный подход к вращениям) непосредственно к реализации кватернионной группы, неудивителен ввиду существующей абстрактно тесной связи между этими двумя групповыми структурами. Следует, однако, подчеркнуть, что мы достигли на основе понятия поворота геометрической реализации квантовой группы вращений, а это означает, что геометрическая реализация была достигнута не только для кватернионной группы, но также для всех единичных кватернионов. Другими словами, используя подходящий примитивный объект — поворот, мы получили надлежащую физическую картину для вращений. Эта картина теперь включает геометрическую реализацию для всех конечных подгрупп квантовой группы вращений, среди которых кватернионная группа является частным случаем. Отметим, что повороты дают таким образом физическую реализацию также и двойственных групп (как подчеркнули Хартер и дос Сантос [9]). Более того, физическая картина, описываемая при помощи поворотов, является аналогом физической картины, описываемой с помощью векторов для группы трансляций.

Замечания. а) Скалярный поворот T_π (называемый скалярным, поскольку он коммутирует со всеми остальными поворотами) играет особую роль в группе поворотов. Если вспомнить, как были введены повороты (они связывали вращения с произведением двух отражений), то становится ясным, что поворот T_π требует двух отражений относительно *одной и той же плоскости*. Эта операция должна по определению быть тождественным преобразованием. *Геометрия поворотов, которая отличает T_π от тождественного поворота T_0 , отлична от геометрии модели, из которой мы исходили!* Эта счастливая случайность не так уж необычна в физике. Фейнман [10] подчеркивал, что именно по этой причине так важно развивать все возможные взгляды на предмет, поскольку в процессе обобщения, или абстрагирования, одной модели может быть отдано предпочтение перед другой.

б) Если наложить требование, чтобы T_π и T_0 были отождествлены, то получаемая в итоге структура есть все еще группа, а именно собственная ортогональная группа $SO(3)$, которая является фактор-группой квантовой группы вращений $SU(2)$, т.е. $SU(2)/Z_2 \cong SO(3)$. Повороты T_0 и T_π коммутируют со всеми поворотами и порождают пвухэлементную нормальную подгруппу Z_2 .

Это отождествление T_π и T_0 сводит групповое пространство группы поворотов $SU(2)$ к групповому пространству группы $SO(3)$. (Это рассмотрено в гл. 2.)

в) Представляет интерес выписать явно (гомоморфное) отображение группы поворотов $SU(2)$ на группу собственных ортогональных 3×3 -матриц $SO(3)$, отмеченное в замечании «б». Введем правую систему координат $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$ путем ассоциирования с каждым поворотом длины $\pi/2$ в тройке (E_1, E_2, E_3) , $E_3 + E_2 + E_1 = T_0$ его нормального вектора $\hat{e}_j$. (В результате имеем взаимно-однозначное отображение между множеством всех правых систем координат $\{(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)\}$ и множеством троек поворотов длины $\pi/2$ $\{(E_1, E_2, E_3): E_3 + E_2 + E_1 = T_0\}$).

Рассмотрим повороты E'_j , определенные согласно

$$E'_j = -T + E_j + T, \quad j = 1, 2, 3, \quad (4.8)$$

где T — заданный поворот. Нормали $\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3$ к большим окружностям поворотов E'_1, E'_2, E'_3 соответственно определяются соотношением $\hat{e}' = \mathcal{R} \hat{e}_j$, где $\mathcal{R}$ — ассоциированное с поворотом T вращение. Используя E'_j вместо T и E_j вместо E в равенстве (4.4), получаем

$$R_{ij} = \hat{e}_i \cdot (\mathcal{R} \hat{e}_j) = \cos \|-T + E_j + T - E_i\|. \quad (4.9)$$

Равенство (4.9) есть желаемое отображение группы поворотов на множество собственных ортогональных 3×3 -матриц, $I \rightarrow R \equiv (R_{ij})$. Заметим, что соотношение (4.9) дает тот же результат, если I заменить на I^c , так что отображение есть «два в один», причем как I , так и I^c отображаются в одну и ту же ортогональную матрицу.

Равенство (4.9) представляет собой интересную с геометрической точки зрения формулу. Оно означает, что *элементы любой собственной ортогональной матрицы могут быть получены как косинусы определенного набора длин дуг на единичной сфере*.

г) Вернемся снова к нитевой конструкции Дирака, которая рассмотрена в разд. 3 гл. 2, используя теперь понятие поворота. Для твердого тела с одной закрепленной точкой состояние системы определяется заданием ориентации, связанной с телом системы отсчета $\{\hat{b}_i\}$ относительно системы отсчета $\{\hat{e}_i\}$, фиксированной в пространстве; при этом обе системы имеют одно и то же начало координат (фиксированная точка в твердом теле). (Выражение «состояние системы» следует понимать кинематически и в смысле классических физических понятий (а не квантовых).)

Воспользовавшись содержанием замечания «в», находим из равенства (4.9), что связь между двумя системами имеет вид

$$\hat{b}_j = \sum_{i=1}^3 B_{ij} \hat{e}_i, \quad j = 1, 2, 3,$$

где

$$B_{ij} = \cos \|-B + E_j + B - E_i\|.$$

В этом выражении для $\{B_{ij}\}$ — матричных элементов ортогональной матрицы — мы обозначили через $\{E_i\}$ любую тройку поворотов длины $\pi/2$, которые удовлетворяют условию $E_3 + E_2 + E_1 = T_0$. Поворот B следует ассоциировать с состоянием твердого тела.

С целью интерпретации этих результатов положим $\mathbf{B}$ равным нулевому повороту $\mathbf{T}_0$. Тогда $B_{ij} = \delta_{ij}$, так что две системы $\{\hat{e}_i\}$ и $\{\hat{b}_i\}$ совпадают.

Заметим, однако, что поворот $\mathbf{B}$ фиксируется неоднозначно, поскольку отображение $\mathbf{B} \rightarrow \mathbf{B} + \mathbf{T}_\pi$ оставляет каждый B_{ij} неизменным. Ясно, что B_{ij} определяют в точности два поворота; $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B} + \mathbf{T}_\pi \equiv \mathbf{B}^c$. Таким образом, ассоциирования

состояние системы $\leftrightarrow$ система отсчета $\{\hat{b}_i\}$, связанная с системой $\{\hat{e}_i\} \leftrightarrow$
 $\rightarrow$ повороты $(\mathbf{B}, \mathbf{B}^c)$

являются по своей сути неоднозначными даже для совпадающих систем отсчета. Иначе говоря, версия системы отсчета внутренне неопределенна.

Эта ситуация в точности аналогична известной ситуации в квантовой механике, в которой выясняется, что фаза волновой функции является неопределенной; для случая твердого тела (двузначная) версия играет роль фазы ($U(1)$ или группа окружности).

Теперь мы можем понять значение нитевой конструкции Дирака. Работаящая всецело в рамках классических физических структур, нитевая конструкция Дирака показывает, что, хотя версия любой системы отсчета является неопределенной, *относительная версия между системой отсчета и этой же системой отсчета после вращения в действительности хороши определена*. Другими словами, поворот $\mathbf{B}$, который следует ассоциировать с состоянием твердого тела, является неопределенным (посредством $\mathbf{T}_\pi$), но в результате вращения посредством $\mathbf{R}$ поворот $\mathbf{B}$ становится равным $\mathbf{R} + \mathbf{B}$, а это сложение хорошо определено (однозначно относительно $\mathbf{T}_\pi$, поскольку система отличима от той же самой системы, повернутой на 2π ; см. примечание 3).

Заметим, что для квантовомеханического аналога тот факт, что хорошо определены разности фаз для волновых функций, но не фаза сама по себе, является исходной точкой для описания взаимодействий, основанного на калибровочной симметрии [10a, 10b].

С концептуальной точки зрения весьма интересно, что описание состояния твердого тела при помощи поворота $\mathbf{B}$ столь «квантовомеханично» по духу; при этом «измерение» состоит в определении матричных элементов B_{ij} . Эти рассуждения достаточно ясно показывают различие между спинором конечных размеров (для которого «измерение» дает три угла общей ортогональной 3×3 -матрицы) и точечным спинором (для которого измерение дает только два угла; см. разд. 7 гл. 7). Несмотря на этот квантовомеханический дух, наши рассуждения относительно твердого тела были классическими, поскольку правильное квантовое рассмотрение должно принимать во внимание принцип неопределенности (см. [32]). Заметим, что в пределе больших (массивных, нерелятивистских) ротаторов эти классические понятия могут в принципе стать правомерными.

д) Понятие поворота позволяет дать геометрическую реализацию отдельных элементов квантовой группы вращений. Хотя эта реализация имеет первостепенное значение при рассмотрении характеристических функций этого пространства (матриц вращений), можно, однако, привести эту реализацию в соответствие с различными подпространствами (пространствами смежных классов).

Пространство смежных классов G/K (где G — группа поворотов и K — группа $SU(1)$ ¹⁾, порождаемая генератором J_3 ; см. гл. 3) может быть описано как пространство поворотов, в котором все (нескалярные) повороты, имеющие одну и ту же большую окружность, отождествляются. Таким образом, элементы в пространстве смежных классов $SU(2)/SU(1)$ находятся во взаимно-однозначном соответствии с множеством всех единичных векторов (нормальных векторов к большой окружности), которое в свою очередь определяет поверхность единичной сферы S^2 . Подходящими сферическими функциями являются сферические гармоники Y_{lm} . (Тот факт, что l целое, вытекает из отождествления $T \sim T^c$.)

Пространство двойных смежных классов $(K \setminus G/K)$ есть подпространство пространства G/K , в котором точки, имеющие одинаковый полярный угол, но различные азимуты, отождествляются. Подходящими сферическими функциями являются функции Лежандра P_l , как рассмотрено в разд. 11 гл. 3. (Превосходное изложение пространств упомянутых здесь смежных классов приведено в работе [11].)

е) Понятие поворота наиболее полезно для интуитивного понимания вращений. Проиллюстрируем это, рассмотрев известное утверждение: «инфинитезимальные вращения коммутируют». Это утверждение стало настолько привычным, что, вероятно, уже не кажется озадачивающим (если когда-либо казалось), но в связи с этим имеется скрытая проблема: почему инфинитезимальные величины должны отличаться качественно от конечных величин в таком основополагающем структурном отношении?

Повороты вполне ясно показывают происхождение этого качественного изменения. Для поворотов существует внутренне присущий масштаб, устанавливаемый (единичным) радиусом сферы. Сложение инфинитезимальных поворотов означает, что мы рассматриваем в итоге очень большую сферу, или, что эквивалентно, касательную плоскость к единичной сфере. В этом пределе инфинитезимальные повороты соответствуют истинным векторам в касательном пространстве, и коммутативность очевидна.

Существование внутренне присущего масштаба проявляется также в коммутационных соотношениях для углового момента, которые не инвариантны по отношению к изменениям масштаба.

Если рассмотреть инфинитезимальный поворот и (воспользовавшись способом выражения Клейна — Зоммерфельда) образовать «дифференциальное частное» при помощи деления на инфинитезимальный промежуток времени dt , то получим угловую скорость ω . Эта величина является соответственно истинным вектором, как следует из соответствующей векторной природы инфинитезимальных поворотов. Неудивительно, однако, что эта скорость не является точным дифференциалом (одно из характерных свойств вращательного движения в трех измерениях), поскольку, интуитивно выражаясь, использование инфините-

¹⁾ Вместо символа $SU(1)$ (который употреблен в оригинале) здесь было бы точнее употребить $U(1)$, поскольку именно группу $U(1)$ порождает генератор J_3 , а унитарность, которую обозначает в символе $SU(1)$ буква S , для унитарных матриц 1×1 сводит фактически рассматриваемую группу к одному лишь тождественному элементу. — Прим. перев.

зимальных поворотов (касательного пространства) повлекло за собой потерю информации.

ж) Повороты обладают еще одним преимуществом. Мы можем рассматривать группу трансляций (в касательной плоскости) как *предельную структуру* для группы вращений (определяемую поворотами на сфере «большого радиуса»). Это дает интуитивное понимание так называемого *контракционного предела* [12 — 15], который связывает компактную квантовую группу вращений $SU(2)$ с некомпактной евклидовой группой $E(2)$. На языке собственных функций это является глубинной причиной асимптотической связи, существующей между сферическими гармониками и функциями Бесселя [16 — 18].

з) Наше рассмотрение геометрии поворотов будет неполным, если не упомянуть основную геометрическую теорему, которую использовал Гамильтон в своем исследовании [1] кватернионов (см. также работу Клейна и Зоммерфельда [2]). Эта теорема, определяющая (в итоге) произведение двух заданных вращений. Теорема эта утверждает следующее. Пусть P , Q и R — (двугранные) углы в вершинах сферического треугольника PQR (в заданном позитивном смысле). Тогда произведение вращений на углы $2P$, $2Q$, $2R$ вокруг радиальных осей $\hat{P}$, $\hat{Q}$, $\hat{R}$ является тождественным.

Не составляет труда доказать эту теорему; достаточно выразить заданные вращения как произведения отражений (попарно) в плоскостях, образующих стороны сферического треугольника RP , PQ ; PQ , QR ; QR , RP . Результирующее произведение тождественно. (Эта теорема и данное выше доказательство представлены в работе Коксетера ([8], стр. 53, 54).)

Значение этой теоремы заключается в том, что она делает очевидной ту фундаментальную роль, которую играют *половинные углы* в кинематике вращений.

Но в приведенных выше замечаниях «а» и «г» мы видели, что доказательства этого типа могут быть ошибочными при «вращениях на 2π ». Мы убедимся, что здесь именно этот случай. *Результирующее произведение является не тождественным, а скалярным поворотом T_π .*

Этот факт можно проверить, переложив теорему непосредственно на язык поворотов. Более изящный путь сводится к признанию, что удачно выбранный специальный случай может решить вопрос. Возьмем предельный случай инфинитезимального сферического треугольника. Тогда все вращения производятся вокруг одной оси, и сумма углов вращения, очевидно, равна 2π . Отсюда следует наше утверждение (т.е. теорема действительно приводит к T_π , а не к тождественному T_0).

Существенно, что это тонкое различие (понятие версии системы отсчета или твердого тела) не было осознано до появления понятия спинора, и в цитированных в этом замечании работах им пренебрегалось. Отметим, что использование сферического треугольника, стороны которого интерпретируются как *повороты* (в противоположность интерпретации в приведенной выше теореме), помогает избежать коварной ошибки изменения «версии». (Мизнер и др. [19] дают на стр. 1139 стандартную интерпретацию теоремы и вводят версию на стр. 1148 как понятие «отношение ориентация—запутывание»; см. разд. 3 гл. 2 данной книги.)

3. Свойства поворотов (алгебраический подход)

В предыдущем обсуждении мы изложили теорию поворотов геометрически, с тем чтобы воспользоваться аналогией между векторами (для трансляций) и поворотами (для вращений). Теперь мы отойдем от чисто геометрической точки зрения; наша цель — найти алгебраическое описание.

Выше мы отмечали, что заданный поворот определяется посредством упорядоченной пары точек (голова и хвост поворота) на единичной сфере. Чтобы дать алгебраическое описание поворота, заменим две точки на единичные векторы $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$, соединяющие центр единичной сферы с концами поворота. Два таких единичных вектора определяют скаляр $s \equiv \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta} = \cos \|T\|$ и вектор $v = \hat{\alpha} \times \hat{\beta} = \hat{n} \sin \|T\|$, где $\hat{n}$ — единичный вектор вдоль оси вращения, ассоциированного с поворотом T . Направление поворота предполагается согласно правилу правой руки для векторного произведения

Мы будем называть эти две величины s и v параметрами поворота T и записывать

$$T = T(s, v), \quad (4.10)$$

где $s = \cos \|T\|$ — скалярный параметр, $v = \hat{n} \sin \|T\|$ — векторный параметр (нетрудно видеть, что эквивалентные повороты имеют одинаковые параметры s и v).

Параметры поворота с необходимостью удовлетворяют соотношению

$$s^2 + v \cdot v = 1. \quad (4.11)$$

Это соотношение может быть интерпретировано как отождествляющее (s, v) с точкой на поверхности единичной сферы S^3 в евклидовом 4-пространстве. Поскольку мы полагаем, что длина поворота $\|T\|$ принимает любое значение в интервале $0 \leq \|T\| \leq \pi$, а $\hat{n}$ есть любое направление в трехмерном пространстве, то параметры, ассоциированные с множеством поворотов, пробегает все точки сферы S^3 , и обратно. Делаем заключение: *множеству поворотов может быть взаимно-однозначно сопоставлено множество точек сферы S^3 .*

Таким образом, каждый поворот имеет алгебраическое представление

$$T = T(s, v) \rightarrow (s, v_1, v_2, v_3), \quad (4.12)$$

где (s, v_1, v_2, v_3) — любая точка на S^3 . Геометрический поворот, соответствующий точке на S^3 , получается, если определить длину $\|T\|$ ($0 \leq \|T\| \leq \pi$) поворота из соотношения $\cos \|T\| = s$, а вектор $\hat{n}$ — из соотношения $(n_1, n_2, n_3) \sin \|T\| = (v_1, v_2, v_3)$. Тожественный поворот имеет алгебраическое представление

$$T_0 = T(1, 0) \rightarrow (1, 0, 0, 0), \quad (4.13)$$

а поворот T_π — алгебраическое представление

$$T = T(-1, 0) \rightarrow (-1, 0, 0, 0). \quad (4.14)$$

Алгебраическим представлением обратного поворота является

$$-T = T(s, -v). \quad (4.15)$$

тогда как для сопряженного поворота имеем

$$T_c = T(-s, -v). \quad (4.16)$$

Немаловажно отметить (это следует из равенств (4.15) и (4.16)), что $T(-s, -v) \neq -T(s, v)$. Следовательно, параметры поворота не подчиняются правилам для векторов из четырехмерного пространства. Повороты фактически не являются векторами в 4-пространстве. Эта трудность только кажущаяся и является следствием использования символа «+» для обозначения закона композиции при отображении множества упорядоченных пар поворотов на множество самих поворотов. *Сложение поворотов* (с единицей $T(1, 0)$) необходимо отличать от совершенно другой операции *сложения векторов* (с единицей $(0, 0, 0, 0)$).

Вопрос теперь в том, чтобы вывести, используя только геометрическое правило сложения поворотов, комбинационный закон для параметров поворота. Рассмотрим сложение двух поворотов $T' + T$. Пусть $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ и $\hat{\gamma}$ обозначают соответственно единичные векторы, соединяющие центр единичной сферы с хвостом поворота T , головой поворота T (хвостом T') и головой T' . Геометрических рассуждений достаточно, чтобы показать, что

$$\hat{\beta} = s\hat{\alpha} + v \times \hat{\alpha}, \quad (4.17)$$

$$\hat{\gamma} = s'\hat{\beta} + v' \times \hat{\beta}, \quad (4.18)$$

где $T = T(s, v)$, $T' = T(s', v')$, $s = \hat{\alpha} \cdot \hat{\beta}$, $v = \hat{\alpha} \times \hat{\beta}$, $s' = \hat{\beta} \cdot \hat{\gamma}$ и $v' = \hat{\beta} \times \hat{\gamma}$. Подставляя $\hat{\beta}$ в равенство (4.18) и используя правило тройного векторного произведения

$$v' \times (v \times \hat{\alpha}) = (v' \times v) \times \hat{\alpha} - (v \cdot v')\hat{\alpha},$$

получаем

$$\hat{\gamma} = s''\hat{\alpha} + v'' \times \hat{\alpha}, \quad (4.19)$$

где

$$s'' = ss' - v \cdot v'. \quad (4.20)$$

$$v'' = sv' + s'v + v' \times v. \quad (4.21)$$

Замечая что $\hat{\alpha} \cdot v'' = 0$, получаем из (4.19) соотношения

$$s'' = \hat{\alpha} \cdot \hat{\gamma}, \quad v'' = \hat{\alpha} \times \hat{\gamma}, \quad (4.22)$$

которые показывают, что (s'', v'') есть параметры составного поворота:

$$T(s'', v'') = T(s', v') + T(s, v). \quad (4.23)$$

Отсюда заключаем: в соответствии с геометрическим правилом сложения поворотов

$$T'' = T' + T, \quad (4.24)$$

имеем комбинационный закон для параметров

$$T(ss' - v \cdot v', sv' + s'v + v' \times v) = T(s', v') + T(s, v) \quad (4.25)$$

Этот комбинационный закон (4.25), как нетрудно видеть, идентичен закону произведения кватернионов. Если записать кватернион q с компонентами (s, v) в виде

$$q = sl + v_1i + v_2j + v_3k, \quad (4.26)$$

и аналогично для кватерниона q' с компонентами $(s', \mathbf{v}')$, то получим, что произведение кватернионов $q'q$ имеет (если воспользоваться законами кватернионного умножения, заданными в (4.7)) в точности компоненты, выписанные в соотношении (4.25). Таким образом, соответствия $q \rightarrow T(s, \mathbf{v})$ и $q' \rightarrow T(s', \mathbf{v}')$ влекут за собой $q'q \rightarrow T(s', \mathbf{v}') + T(s, \mathbf{v})$.

Сопряжение (инволюция) для поворотов, определяемое как $\mathbf{T} \rightarrow -\mathbf{T}$, или, что эквивалентно, $T(s, \mathbf{v}) \rightarrow T(s, -\mathbf{v})$, позволяет определить для кватернионов сопряженный кватернион

$$q \rightarrow \bar{q} = s1 - v_1i - v_2j - v_3k, \quad (4.27)$$

и, следовательно, норму для кватерниона

$$N(q) \equiv q\bar{q} = s^2 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0. \quad (4.28)$$

Теперь мы можем видеть, что понятие поворота есть не более и не менее чем геометрическая реализация умножения кватернионов с единичной нормой (унимодулярных). Унимодулярность вытекает из соотношения (4.11). *Группа поворотов* (квантовая группа вращений $SU(2)$) является геометрической реализацией мультипликативной группы унимодулярных кватернионов.

Замечания. а) Достижение Гамильтона выходило далеко за рамки осознания структурных свойств вращений как реализованных посредством унимодулярных кватернионов. Он осознал, что кватернионы образуют алгебру с делением с замечательным композиционным свойством для нормы $N(q)N(q') = N(qq')$, а впоследствии посвятил много усилий развитию общего кватернионного исчисления. Этот аспект его работы в противоположность вращательным аспектам кватернионов не получил широкого распространения в физической литературе. Соответственно мы не будем далее здесь обсуждать кватернионы (как таковые, в отрыве от поворотов) и отсылаем читателя, интересующегося этими чисто кватернионными аспектами, к физически ориентированному изящному обзору Элерса и др. [20].

б) В физике стало привычным использовать матрицы Паули вместо кватернионных единиц. Для базисных единиц имеется соответствие

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow \sigma_0, \\ i &\rightarrow -\sqrt{-1}\sigma_1, \\ j &\rightarrow -\sqrt{-1}\sigma_2, \\ k &\rightarrow -\sqrt{-1}\sigma_3, \end{aligned}$$

где σ_i — определенные ранее 2×2 -матрицы (равенства (3.24)). Это соответствие вводится не просто для удобства обозначений, и необходимо пояснить, в чем проявляется разница.

Прежде всего отметим, что две структуры весьма различны. Кватернионные единицы $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ образуют восьмизначную группу кватернионов, которая имеет единственное точное неприводимое представление матричной размерности два. Напротив, группа Паули имеет 16 элементов и два неэквивалентных (сопряженных) неприводимых представления размерности два. Две группы совершенно различны.

Имеются две причины, по которым физики предпочитают пользоваться матрицами Паули, а не кватернионами. Первая причина чисто техническая. Генераторы инфинитезимальных преобразований (сдвигов, вращений) имеют непосредственный физический смысл как наблюдаемые и, следовательно, эрмитовы операторы. Но если инфинитезимальные преобразования проинтегрированы до конечных преобразований, получающееся преобразование должно быть унитарным, чтобы сохранялась вероятность. Физики согласовывают эти два требования путем явного присоединения мнимой единицы $\sqrt{-1}$ (как в матрицах Паули), тогда как математики, исходя из необходимости отличать вещественное поле от комплексного поля, избегают явной мнимой единицы, выбирая генераторы антиэрмитовыми.

Вторую причину, почему физики пользуются матрицами Паули, а не кватернионными единицами, можно понять также из квантовомеханических соображений. Квантовая механика использует кет-векторы $\{|\psi\rangle\}$ (векторы гильбертова пространства) и бра-векторы $\{\langle\chi|\}$ (векторы дуального гильбертова пространства) и приписывает внутреннему произведению $\langle\chi|\psi\rangle$ смысл амплитуды вероятности. С алгебраической точки зрения пространство кет-векторов является левым идеалом, а чистое состояние ассоциируется с примитивным идемпотентом ($\rho_\psi^2 = \rho_\psi$, $\text{tr } \rho_\psi = 1$).

Если мы применим эти алгебраические понятия к кватернионам, то увидим, что для квантовомеханических приложений необходимо присоединить мнимую единицу $\sqrt{-1}$ в точности так же, как в группе Паули.

Таким образом, например, чистое состояние ассоциируется с идемпотентом $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, который задается алгебраическим элементом $\frac{1}{2}(1 + \sigma_3)$. Ассоциируемые с чистыми состояниями, эти идемпотенты (называемые в квантовой механике матрицами плотности ρ) имеют общий вид

$$\rho = \frac{1}{2}(1 + \sigma \cdot \hat{P}),$$

где $\hat{P}$ — единичный трехкомпонентный вектор.

Матрицы плотности систематически рассматриваются в разд. 7 гл. 7. Здесь же нашей целью было пояснение лежащих в основе алгебраических причин того, что в квантовой механике естественно возникают матрицы Паули (а не кватернионные единицы).

4. Пространство поворотов как пространство, на котором реализуются трансляции

Обозначим отдельный поворот (элемент квантовой группы вращений $SU(2)$) через τ . Существует предложенный Кэли стандартный метод, с помощью которого для заданной группы можно получить реализацию этой группы при помощи преобразований. Эта реализация с каждым элементом группы g ассоциирует преобразование, индуцированное на множестве всех элементов группы $\{\tau\}$ посредством *левой трансляции*:

$$g: \tau \rightarrow \tau' \equiv L_g(\tau) = g + \tau. \quad (4.29)$$

Ясно, что существует и другая стандартная реализация посредством *правой трансляции*:

$$g: \tau \rightarrow \tau' \equiv R_g(\tau) = \tau + g^{-1} = \tau + (-g). \quad (4.30)$$

Из исходных групповых законов для поворотов находят правила композиции для левой и правой трансляций группы поворотов:

$$L_g(L_g(\tau)) = L_{g'+g}(\tau), \quad (4.31)$$

где операции производятся в таком порядке: *сначала* преобразование посредством g , а *затем* — посредством g' . Подобным образом имеем

$$R_{g'}(R_g(\tau)) = R_{g'+g}(\tau). \quad (4.32)$$

(Заметим, что желание получить одинаковую формальную структуру в равенствах (4.31) и (4.32) объясняет использование g^{-1} в соотношении (4.30).)

Мы можем, таким образом, выразить реализацию посредством левой и правой трансляций в виде отображения

$$\tau \rightarrow L_\tau \quad \text{или} \quad \tau \rightarrow R_\tau \quad (4.33)$$

так что групповой закон сохраняется:

$$\tau + \tau' \rightarrow L_{\tau+\tau'} \quad \text{или} \quad \tau + \tau' \rightarrow R_{\tau+\tau'}. \quad (4.34)$$

В силу этого последнего свойства отображение удовлетворяет определению представления.

В качестве существенного момента необходимо здесь отметить, что вследствие ассоциативности в комбинировании поворотов *левая и правая трансляции коммутируют*:

$$R_g L_{g'} = L_{g'} R_g: \tau \rightarrow \tau' = g' + \tau + g^{-1} \quad (4.35)$$

Поскольку левые трансляции сами по себе определяют представление группы поворотов $SU(2)$ и то же самое имеет место для взятых в отдельности правых трансляций, мы заключаем, что *пространство поворотов, взятое в качестве пространства, на котором реализуются трансляции, реализует представление прямого произведения групп $SU(2) \times SU(2)$* .

Этот результат становится более понятным, если воспользоваться отображением группы поворотов на группу унитарных кватернионов или эквивалентно на группу унитарных унимодулярных 2×2 -матриц. Более конкретно, это отображение имеет вид (см. равенства (4.25) и (4.26))

$$T(x_0, \mathbf{x}) \rightarrow q(x_0, \mathbf{x}) \rightarrow U(x_0, \mathbf{x}), \quad (4.36)$$

где

$$q(x_0, \mathbf{x}) = x_0 1 + x_1 i + x_2 j + x_3 k, \quad (4.37)$$

$$U(x_0, \mathbf{x}) = x_0 \sigma_0 - i(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (4.38)$$

а $(x_0, \mathbf{x})$ обозначает произвольную точку трехмерной сферы S^3 . Используя теперь те же обозначения $g, g', \tau, \tau', \dots$ для соответствующих поворотов, кватернионов и матриц (заданных при помощи отображения (4.36)), мы получаем преобразования кватернионов или матриц, соответствующие преобразованиям поворотов (соотношения (4.29) — (4.35)) просто путем замены аддитивных обозначений на мультипликативные. В частности, преобразование поворотов (4.35) переходит в

$$R_g L_{g'}: \tau \rightarrow \tau' = g' \tau g^{-1} \quad (4.39)$$

где g, g', τ, τ' обозначают либо унитарные кватернионы, либо соответствующие унитарные матрицы.

Реализация преобразований L_g и R_g как дифференциальных операторов, действующих на множестве дифференцируемых функций $\{f\}$ от $(x_0, \mathbf{x})$, квадратично интегрируемых по сфере S^3 , была уже получена в примечании 4 гл. 3 в несколько ином виде. Реализации преобразований L_g и R_g в этом пространстве функций даются соответственно при помощи унитарных операторов $\mathcal{L}_g$ и $\mathcal{R}_g$, определяемых соотношениями

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_g f)(\tau) &= f(L_{g^{-1}}(\tau)), \\ (\mathcal{R}_g f)(\tau) &= f(R_{g^{-1}}(\tau)), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где $\tau = \tau(x_0, \mathbf{x})$ и $f(\tau) = f(x_0, \mathbf{x})$.

Дифференциальные операторы, порождающие эти преобразования, могут быть найдены путем рассмотрения инфинитезимальных левой и правой трансляций. Так, инфинитезимальная левая трансляция элемента τ посредством $g = (1, \varepsilon \hat{n}/2)$ дает

$$L_{(1, -\varepsilon \hat{n}/2)}(\tau) = \tau + \delta\tau,$$

где параметрами для $\delta\tau$ являются $\varepsilon(\hat{n} \cdot \mathbf{x}, -\hat{n}x_0 - \hat{n} \times \mathbf{x})/2$. Соответствующее инфинитезимальное преобразование в пространстве функций в результате имеет вид

$$(\mathcal{L}_g f)(\tau) = (1 - i\varepsilon \hat{n} \cdot \mathcal{J} + \dots)f(\tau),$$

где $\mathcal{J}$ — дифференциальный оператор

$$\mathcal{J} = -\frac{i}{2} \left[\mathbf{x} \times \nabla - \left(\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \nabla \right) \right]. \quad (4.41)$$

Аналогично инфинитезимальная правая трансляция приводит к соотношению

$$(\mathcal{R}_g f)(\tau) = (1 - i\varepsilon \hat{n} \cdot \mathcal{K} + \dots)f(\tau),$$

где $\mathcal{K}$ — дифференциальный оператор

$$\mathcal{K} = -\frac{i}{2} \left[\mathbf{x} \times \nabla + \left(\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x_0} - x_0 \nabla \right) \right]. \quad (4.42)$$

Эти результаты в точности совпадают с полученными в гл. 3 для матриц вращения (рассматриваемых как волновые функции) и, следовательно, для квантовой механики симметричного волчка. Другими словами, мы показали, что трансляции, реализованные на пространстве поворотов, являются фундаментальным представлением квантовой теории симметричного волчка. Поворот является примитивным элементом в этой реализации.

Мы не будем здесь выводить дальнейшие следствия этих результатов, предпочитая вместо этого ввести в следующей главе новую технику — отображение Жордана, которая будучи объединена с поворотами, приведет нас к изящному способу построения как теории представлений, так и коэффициентов Вигнера.

5. Примечания

1. Как мы убедились, использование поворотов является наиболее интуитивным и доступным подходом к вращениям и к реализации теории углового момента при помощи матриц 2×2 или, что эквивалентно, к получению гамильтонова подхода к вращениям через кватернионы. (Обсуждение полезности этого понятия см. в работе [9].) Это является причиной того, почему в данной главе избрана такая точка зрения, но следует признать, что сам Гамильтон никогда явно не вводил понятие поворота, не располагая (насколько нам известно) существенной идеей связывания поворота непосредственно с вращением при помощи двух отражений. Здесь мы пытаемся найти место этих идей в приемлемой исторической перспективе (без какой-либо претензии на окончательное решение вопроса).

Гамильтонов путь введения кватернионов, обстоятельно изложенный в его «Лекциях по кватернионам» [1], является удивительно околным (и был так воспринят его современниками¹⁾). Гамильтон определял кватернионы как «частные векторов» (векторов в трехмерном пространстве, см. [1], стр. 107). Мы покажем, что *это определение фактически вполне эквивалентно определению поворота*. Наши аргументы сводятся к распространению некоторых результатов Клейна и Зоммерфельда.

Прежде всего напомним, что произвольный три-вектор можно рассматривать как кватернион, имеющий нулевую скалярную часть; кватернион v , соответствующий вектору $\mathbf{V} = (v_1, v_2, v_3)$, может быть записан в виде

$$\mathbf{V} \rightarrow v = v_1 i + v_2 j + v_3 k.$$

Известен фундаментальный результат²⁾, что вращение от вектора $\mathbf{V}$ к вектору $\mathbf{V}' = (v'_1, v'_2, v'_3) \rightarrow v' = v'_1 i + v'_2 j + v'_3 k$ задается кватернионным умножением

$$\mathbf{V}' \rightarrow v' = q v q^{-1}, \quad (4.43)$$

где для

$$q = \left(\cos \frac{\phi}{2} \right) 1 + \left(\sin \frac{\phi}{2} \right) (n_1 i + n_2 j + n_3 k),$$

вектор $\mathbf{V}'$ выражается через $\mathbf{V}$ в виде $\mathbf{V}' = R(\phi, \hat{n})\mathbf{V}$ (обозначение матрица-столбец, см. (2.6)).

Рассмотрим теперь частный случай соотношения (4.43) для $\hat{n} \cdot \mathbf{V} = 0$. Отсюда следует, что $v q^{-1} = q v$, так что соотношение (4.43) может быть переписано как $v' = q^2 v$, т.е. $v'/v = q^2$.

Это соотношение имеет несколько следствий.

¹⁾ Обсуждение у Клейна и Зоммерфельда ([2] § 7) является замечательно ясным и информативным. Основы идей Гамильтона обсуждались также Мак-Даффи [21].

²⁾ Этот результат был получен независимо Гамильтоном [22, 23] и Кэли [24]. См. примечания на стр. 361 работы [22] и на стр. 391 работы [23], в которых Гамильтон признает независимое открытие Кэли (и предшествующую публикацию) и отмечает, что он продемонстрировал свою формулу Грэйвсу в начале 1844 г. В своих Избранных трудах (т. 1, стр. 586) Кэли замечает, что открытие Гамильтона предваряет несколькими месяцами дату его (Кэли) работы.

а) Поскольку q^2 само является кватернионом, мы видим, что гамильтоново определение кватерниона как «отношения двух векторов» является вполне значимым и общим. (В нашем рассмотрении требовалось, чтобы q^2 было унимодулярным, но если позволить векторам V и V' иметь различные длины, условие унимодулярности может быть опущено.)

б) Имеет смысл взять квадратный корень из этого соотношения и решить его относительно унимодулярного кватерниона q :

$$q = (v'/v)^{\frac{1}{2}},$$

где положительный знак выбран при помощи отождествления $q = 1$ с нулевым вращением. *Квадратный корень вводит имеющий особую важность половинный угол $\phi/2$.*

Мы показали таким образом, что понятие поворота T длины $\phi/2$ с осью $\hat{n}$ согласуется во всех деталях с определением Гамильтона унимодулярного кватерниона q , ассоциированного с тем же вращением.

Чего недоставало в подходе Гамильтона, так это непосредственного ассоциирования поворота (например, q выше) с самим вращением. Использование основного соотношения (4.43) в действительности недостаточно, поскольку это соотношение определяет точное представление группы $SO(3)$, а не группы поворотов $SU(2)$. Именно непосредственное ассоциирование поворота с вращением, индуцируемое посредством двух отражений, дает желаемую группу $SU(2)$. Этот результат (принадлежащий, насколько нам известно, Клейну и Зоммерфельду [2], стр. 938), был впервые сформулирован Шенфлисом [25] в 1910 г. (Он был независимо использован Вигнером в его знаменитой работе [3] по группе Пуанкаре.)

Мы пустились в этот исторический экскурс в гораздо большей степени, чем обычно, так как эти основные идеи стали частью физического фольклора, и наблюдается изобилие неточностей. Впервые мы узнали об использовании двух отражений для генерирования вращений от проф. Велтона, который приписывал идею (не претендуя на точность) Гамильтону.

Использование поворотов развивалось интуитивно и приписывалось (ошибочно) одним из нас [26] Гамильтону; данная заметка является попыткой внести исправление. Мы хотим выразить признательность д-ру Р. Хартунгу¹⁾ за переписку, касающуюся происхождения поворотов. (Предварительный вариант данной главы был изложен в лекциях [27], прочитанных в Кентерберийском университете в 1974 г.)

2. Использование отражений как основного элемента в развитии геометрии было хорошо известно в математической литературе (см., например, [28]).

3. Проблема «вращений на 2π » обсуждалась в математической литературе с несколько отличной точки зрения.

Сначала рассматривается групповое пространство для $SO(3)$. Оно является сплошной сферой радиуса π в трехмерном пространстве. Общее вращение описывается при помощи направления $\hat{n}$, а угол вращения θ есть радиальное расстояние.

¹⁾ Хартунг [26а] рассмотрел значение вращений на 2π (и поворотов) для принципа Паули и геометрии.

яние ($0 \leq \theta \leq \pi$). Для $SO(3)$ вращение на 2π объявляется единицей, так что диаметрально противоположные точки на поверхности сферы отождествляются.

После этого рассматриваются замкнутые пути в групповом пространстве, начинающиеся и заканчивающиеся в единице (гомотопии). Все такие пути непрерывно деформируемы в один из двух различных типов: а) путь, эквивалентный нулевому вращению (единице), или б) путь, эквивалентный вращению на 2π [29].

Что это означает для физической реализации вращений? Понятие гомотопии означает физически, что данный физический объект рассматривается в трехмерном пространстве и производится любая замкнутая непрерывная последовательность вращений (т.е. движений, оставляющих фиксированной одну точку объекта и приводящих снова к начальному состоянию). Результат на основе данного выше гомотопического рассмотрения таков, что любое такое движение деформируемо в одно из двух движений: а) отсутствие вращения вообще или б) вращение на 2π . Это последнее объявляется, согласно группе $SO(3)$, эквивалентным по его действию на физический объект единице! Физически отсюда мы узнали очень мало, так как все зависит от не имеющего ответа вопроса — изменяется или нет физический объект при вращении на 2π ? (Вейль ([30], стр. 184) выражается неясно как раз по этому пункту.)

Большое преимущество конструкции Дирака (гл. 2) и поворотов (эта глава) в том, что они показывают физически, что вращения на 2π не эквивалентны единице для системы отсчета. Таким образом, второй тип гомотопного пути в действительности не возвращает физический объект в его начальное состояние.

Мы посвятили много места этому рассмотрению, поскольку вопрос этот является источником многих недоразумений в физической литературе. Кроме того, из предыдущего обсуждения видно, что физическая и математическая точки зрения имеют мало общего.

Рассмотрение этой проблемы в физике затрудняется из-за того факта, что спинорная волновая функция при вращении на 2π подвергается только изменению знака. Но изменение фазы волновой функции не приводит к каким-либо физическим следствиям (более полно это обсуждается в работе [32]). Имея это в виду, Бакри [31] сформулировал два физических правила для разъяснения физической проблемы вращений на 2π : 1) Состояние *изолированной* системы невозможно отличить от состояния, полученного в результате вращении на $2n\pi$ ($n = 0, 1, \dots$), независимо от того, какая система — классическая или квантовая. 2) Если система не изолирована, то можно определить самое большее, четно или нечетно число вращений на 2π . Заметим, что выполнение первого правила требует выполнения правила суперотбора Вигнера (см. [32]).

Литература

1. Hamilton W. R., Lectures on Quaternions, Dublin, 1853.
2. Klein F., Sommerfeld A., Über die Theorie des Kreisels, Vol. I, Teubner, Leipzig, 1897.
3. Wigner E. P., Ann. of Math., 40, 149 (1939).
Об унитарных представлениях неоднородной группы Лоренца.
4. Artin E., Geometric Algebra, Interscience, New York, 1964.
5. Stone M. H., Proc. Natl. Acad. Sci. U. S., 15, 198, 423 (1929).

Линейные преобразования в гильбертовом пространстве: I. Геометрические аспекты. II. Аналитические аспекты.

5. *von Neumann J.*, *Math. Ann.*, **104**, 49, 576 (1930).
Общая теория эрмитовых значений эрмитовых функциональных операторов. Об алгебре функциональных операций и теории нормальных операторов.
7. *Jauch J. P.*, *Foundations of Quantum Mechanics*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968.
8. *Tomonga H. C. ed.*, *Regular Polynomials*, Methuen, London, 1948.
9. *Harter W. G., dos Santos J.*, *Ann. N. Y. Phys.*, **46**, 251 (1978).
Теория двойных групп на полушарии и двухуровневая система. I. Вращение и состояния полученных спиноз.
10. *Reynolds*, *The Character of Physical Law*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1965.
- 10a. *Dirac P. A. M.*, *Proc. Roy. Soc. A*, **30**, 50 (1931).
Квантовые сингулярности в электромагнитном поле.
- 10b. *Boya L. J., Carinena J. F., Mateos J.*, *Fortschr. Physik*, **26**, 175 (1978).
Гомотопии и солитоны.
11. *Durr H., McKeen H. P.*, *Fourier Series and Integrals*, Academic Press, New York, 1972.
12. *Infeld E., Wigner E. P.*, *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S.*, **39**, 510 (1953).
О контракции групп и их представлениях.
13. *Infeld E.*, in: *Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics* (ed. Gursey F.), Gordon and Breach, New York, 1964, p. 391.
Контракция групп Ли и их представлениях.
14. *Segal I. E.*, *Duke Math. J.*, **18**, 221 (1951).
Класс операторных алгебр, которые определяются группами.
15. *Saletan E. J.*, *J. Math. Phys.*, **2**, 1 (1961).
Контракция групп Ли.
16. *Sharp W. T.*, Report AECL-1098, Atomic Energy of Canada, Chalk River, Ontario, 1960.
Алгебра Пака и контракция групп.
17. *Wigner E. P.*, *Application of Group Theory to the Special Functions of Mathematical Physics*. Lecture notes, Princeton University, Princeton, 1955.
18. *Taiman J. D.*, *Special Functions: A Group Theoretic Approach*, Benjamin, New York, 1968.
19. *Misner C. W., Thorne K. S., Wheeler J. A.*, *Gravitation*, Freeman, San Francisco, 1973.
20. *Ehlers J., Rinaker W., Robinson I.* in: *Perspectives in Geometry and Relativity* (ed. Hoffmann B.), Indiana Univ. Press, Bloomington, Ind., 1966, p. 134.
Кватернионы, векторы и группа Лоренца.
21. *MacDuffee C. C.*, *Scripta Math.*, **10**, 25 (1944).
Допл алгебры Гамильтону.
22. *Hamilton W. R.*, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **III**, 1 (1847).
О кватернионах или новой системе мнимых чисел в алгебре; с некоторыми применениями.
23. *Hamilton W. R.*, *Proc. Roy. Irish Acad.*, **IV**, 38 (1850).
О кватернионах и вращениях твердого тела.
24. *Cayley A.*, *Phil. Mag.*, **1**, 196 (1846).
О приложениях кватернионов к теории вращений.
25. *Schoenflies*, *Verh. der Circos Mathematico di Palermo*, **29** (1910).
26. *Biedenharn L. C.*, in: *Adv. Quantum Theory of Angular Momentum*, Academic Press, New York, 1961.
- 26a. *Barling E. M.*, *Can. J. Phys.*, **57**, 100 (1979).
Принцип Паули и квантовая геометрия.
27. *Biedenharn L. C.*, in: *Adv. Lectures*, Canterbury University, Christchurch, N. Z., 1978, ch. 1.

28. *Bachmann E.*, Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff, Springer, Berlin, 1959.
29. *Wigner E. P.*, Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press, New York, 1959. [Имеется перевод: Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.].
30. *Weyl H.*, Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel. Leipzig, 1928.
31. *Bacry H.*, La Recherche, **83**, 1010 (1977).
Вращение фермионов.
32. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, The Racah — Wigner Algebra in Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.

Применение бозонного исчисления к теории поворотов

1. Введение

Как было показано в предыдущей главе, пространство поворотов является пространством определяющего (фундаментального) представления группы $SU(2) * SU(2)$, т.е. группы симметрического волчка¹⁾. В настоящей главе мы покажем, как полная теория представлений этой структуры может быть получена из отображения (обобщенного отображения Жордана), которое отображает общий поворот в оператор (матричный бозонный оператор), действующий в гильбертовом пространстве. Посредством этого построения мы получим объединенное изложение состояний углового момента, матриц вращений, а также коэффициентов Вигнера. Интересный аспект этого метода состоит в том, что он автоматически приводит к трактовке коэффициентов Вигнера в виде дискретизированной матрицы вращения (разд. 8 ниже), из которой в свою очередь следует связь между коэффициентами Вигнера и полиномами Якоби ([1], дополнение III).

Ключевая идея этого объединенного изложения — отображение Жордана поворота в матричный бозон — имеет более широкую область применения, чем сделанное здесь приложение. Чтобы рассмотреть эту структуру в более общей форме, мы сначала разовьем достаточно подробно технику *бозонного исчисления*. Надеемся, что это отступление не слишком сильно нарушит последовательность изложения.

2. Экскурс в бозонное исчисление

Гармонический осциллятор. Бозонное исчисление берет свое начало в трактовке основной физической задачи — квантовой механики линейного гармонического осциллятора. Так как в квантовой физике (свободное) поле, например электромагнитное поле, может рассматриваться как набор бесконечного числа гармонических осцилляторов, эта элементарная задача имеет большие применимость и значение, чем может показаться сначала.

¹⁾ Звездочка * обозначает, что эта группа является подгруппой прямого произведения групп, причем подгруппа определяется дополнительным соотношением $\mathcal{J}^2 = \mathcal{K}^2$; см. примечание 4 гл. 3.

Гамильтониан для такого осциллятора в одномерном случае задается в виде

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{2} q^2, \quad (5.1)$$

где q — перемещение осциллятора (частицы) от некоторого фиксированного начала, m — масса частицы, а ω — (классическая) круговая частота осцилляций.

Квантование определяется тем, что мы заменяем p и q самосопряженными операторами¹⁾, действующими в гильбертовом пространстве, которые удовлетворяют (на плотной области) коммутационным соотношениям Гейзенберга

$$[q, p] = i\hbar 1. \quad (5.2)$$

Таким образом, гамильтониан становится самосопряженным оператором, который может быть признан положительно определенным на всех векторах $|\psi\rangle$ своей области определения:

$$\langle \psi | H \psi \rangle = \frac{1}{2m} \langle p \psi | p \psi \rangle + \frac{m\omega^2}{2} \langle q \psi | q \psi \rangle > 0. \quad (5.3)$$

(Оператор H строго положителен, так как равенство $\langle \psi | H \psi \rangle = 0$ предполагало бы, что $p|\psi\rangle = q|\psi\rangle = 0$, а это противоречит соотношению Гейзенберга.)

Теперь вводим *бозонные операторы*, определенные следующим образом:

$$\text{«оператор рождения»} \equiv a = (m\omega/2\hbar)^{\frac{1}{2}} q - i(2\hbar m\omega)^{-\frac{1}{2}} p, \quad (5.4)$$

$$\text{«оператор уничтожения»} \equiv \bar{a} = (m\omega/2\hbar)^{\frac{1}{2}} q + i(2\hbar m\omega)^{-\frac{1}{2}} p. \quad (5.5)$$

(Отметим, что $\bar{a}$ сопряжен с a .) В силу определения бозонные операторы подчиняются коммутационным соотношениям

$$[\bar{a}, a] = 1. \quad (5.6)$$

Гамильтониан H , записанный в терминах бозонных операторов, принимает вид

$$H = \frac{\hbar\omega}{2} (a\bar{a} + \bar{a}a) = \hbar\omega(a\bar{a} + \frac{1}{2}). \quad (5.7)$$

Пусть $|\psi_0\rangle$ — нормированный вектор, удовлетворяющий соотношению

$$\bar{a}|\psi_0\rangle = 0. \quad (5.8)$$

Если использовать реализацию Шредингера операторов p и q , согласно которой $p = -i\hbar(d/dq)$, то соотношение (5.8) становится линейным дифференциальным уравнением, решение которого имеет вид

$$\langle x | \psi_0 \rangle \equiv \psi_0(x) = \pi^{-\frac{1}{4}} \exp(-x^2/2), \quad (5.9)$$

где x обозначает безразмерную координату:

$$x \equiv (m\omega/\hbar)^{\frac{1}{2}} q.$$

¹⁾ Различие между эрмитовыми (или симметрическими) и самосопряженными операторами важно в тех случаях, когда может возникнуть проблема области определения.

Условие нормировки на $|\psi_0\rangle$ получаем из скалярного произведения

$$\langle\phi|\psi\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \phi^*(x)\psi(x) dx.$$

$$\langle\psi_0|\psi_0\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi_0(x)|^2 dx = 1, \quad (5.10)$$

что отождествляет наше гильбертово пространство с $L^2(-\infty, \infty)$.

Таким образом, гамильтониан H , действуя на вектор $|\psi_0\rangle$, имеет собственное значение $\hbar\omega/2$. Обычно эту энергию вычитают («нулевая точка», или минимальная энергия) и определяют новый безразмерный оператор N (оператор «числа частиц»):

$$(\hbar\omega)^{-1}H - \frac{1}{2} \equiv N = a\bar{a}. \quad (5.11)$$

Полное множество нормированных собственных векторов $\{|\psi_n\rangle\}$ может быть построено из $|\psi_0\rangle$, используя определение

$$|\psi_n\rangle = (n!)^{-\frac{1}{2}}(a)^n|\psi_0\rangle. \quad (5.12)$$

Легко видеть, что эти векторы являются нормированными собственными векторами оператора числа частиц N , принадлежащими собственному значению n :

$$N|\psi_n\rangle = n|\psi_n\rangle. \quad (5.13)$$

Названия «оператор рождения» для a и «оператор уничтожения» для $\bar{a}$ следуют из интерпретации соотношения (5.12). Оператор a повышает собственное значение n на одну единицу («порождает квант возбуждения $\hbar\omega$ »), соответственно $\bar{a}$, действуя на $|\psi_n\rangle$, понижает собственное значение n на одну единицу («уничтожает один квант»).

Анализ оператора N и соответственно гамильтониана H приводит к следующему важному результату. *Оператор числа частиц N имеет спектр, совпадающий с неотрицательными целыми числами Z^+ ; каждое собственное значение невырождено, и собственные векторы $|\psi_n\rangle$ образуют полный ортонормированный базис для $\mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ — (сепарабельное) гильбертово пространство $L^2(-\infty, \infty)$ на вещественной прямой.*

*Гильбертово пространство аналитических функций*¹⁾. Имеется другой путь изложения квантовой механики гармонического осциллятора, который подчеркивает классические аспекты квантовой структуры. Он состоит в построении (которое исходит от Шредингера [10]) волновых функций, минимизирующих соотношение неопределенностей Гейзенберга $\Delta r \Delta q \geq \hbar/2$. Существование таких «когерентных» состояний, или состояний¹ «минимальной неопределенности» (которые в действительности достигают наинизшего значения $\hbar/2$), является

¹⁾ Важные статьи, вводящие и развивающие эту тему, принадлежат Дираку [2], Бергману [3], Баргману [4], Сигалу [5], Клаудеру [6], Клаудеру и Судершану [7], а также Мукуиде и Судершану [7a]. Обобщение см. в работе Гроссмана [76]. Имеется также обзорная статья Вольфа [7b]. Приложения к теории углового момента даны Швингером [8] и Баргманом [9].

особенностью гармонического осциллятора. (Эта особенность является темой в работе [68] в связи с соотношениями неопределенностей для спинового момента.)

Другой путь рассмотрения состояний минимальной неопределенности состоит в рассмотрении этих состояний как собственных значений оператора уничтожения $\bar{a}$. Этот подход очень скоро приводит нас к когерентным состояниям.

Сначала отметим, что основное состояние ψ_0 само является собственным состоянием оператора уничтожения (см. (5.6)) и принадлежит нулевому собственному значению. Как следует из (5.8), средние значения операторов импульса и координаты для этого состояния ($\langle \psi_0 | p | \psi_0 \rangle \equiv p_{cp}$ и $\langle \psi_0 | q | \psi_0 \rangle \equiv q_{cp}$) также равны нулю. Распределение импульса $\Delta p \equiv [\langle \psi_0 | p^2 | \psi_0 \rangle - p_{cp}^2]^{1/2} \psi_0$ и распределение координаты $\Delta q \equiv [\langle \psi_0 | q^2 | \psi_0 \rangle - q_{cp}^2]^{1/2}$ так легко вычислить, равны

$$\Delta p = (\hbar m \omega / 2)^{1/2}, \quad \Delta q = (\hbar / 2 m \omega)^{1/2} \quad (5.14)$$

так что $\Delta p \Delta q = \hbar/2$; следовательно, основное состояние ψ_0 в самом деле является состоянием минимальной неопределенности. (Числовые множители можно проверить, заметив, что эти значения приводят к энергии $\hbar\omega/2$, что и требуется для основного состояния.)

Чтобы получить все другие состояния минимальной неопределенности, мы просто смещаем основное состояние, используя единичный оператор смещения:

$$\mathcal{U}(\xi, \eta) = \exp\{-i[(2/m\hbar\omega)^{1/2} p\xi + (2m\hbar\omega)^{1/2} q\eta]\}, \quad (5.15)$$

где ξ и η — безразмерные вещественные числа. Из оператора порождается Вейкера — Кемпбела — Хаусдорфа

$$e^A B e^{-A} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} [A, B]_{(k)} / k!$$

где

$$[A, B]_{(0)} \equiv B, \quad [A, B]_{(1)} \equiv [A, B], \quad [A, B]_{(2)} \equiv [A, [A, B]] \equiv [A, [B, A]],$$

находим

$$\mathcal{U}(\xi, \eta) \bar{a} \mathcal{U}^{-1}(\xi, \eta) = \bar{a} - (\xi + i\eta) \quad (5.16)$$

Это оправдывает название оператора смещения, так как $\mathcal{U}(\xi, \eta)$ сдвигает оператор $\bar{a}$ на комплексное число $\xi = \xi + i\eta$. В то же время и обратный оператор сдвига $\mathcal{U}(\xi)$ имеет вид

$$\mathcal{U}(\xi) = \exp(\xi \bar{a} - \xi^* \bar{a}^\dagger) \quad (5.17)$$

Требуемое множество состояний минимальной неопределенности, как теперь видно, совпадает с множеством $\{\mathcal{U}(\xi)\psi_0\}$. Эти состояния нормированы (согласно построению) и образуют набор единичных векторов. Поэтому для каждого комплексного числа ξ . Обозначим эти векторы так:

$$|\xi\rangle \equiv \mathcal{U}(\xi)\psi_0. \quad (5.17)$$

Определяющей характеристикой (которая приводит к тому, что подпадает под определение

$$\bar{a}|\xi\rangle = \xi|\xi\rangle \quad (5.18)$$

Словами это можно выразить так: оператор $\bar{a}$ действует на единичные векторы $\{|\hat{e}_\zeta\rangle\}$ как оператор умножения: $\bar{a} \rightarrow \zeta$.

Однако этот набор единичных векторов¹⁾ $\{|\hat{e}_\zeta\rangle\}$ не ортонормирован. Находим, что скалярное произведение равно

$$\langle \hat{e}_\alpha | \hat{e}_\beta \rangle = \langle \psi_0 | \mathcal{U}^{-1}(\alpha) \mathcal{U}(\beta) | \psi_0 \rangle = \exp(-\tfrac{1}{2}|\alpha|^2 - \tfrac{1}{2}|\beta|^2 + \alpha^* \beta), \quad (5.19)$$

что порождает величину

$$|\langle \hat{e}_\alpha | \hat{e}_\beta \rangle| = \exp(-\tfrac{1}{2}|\alpha - \beta|^2). \quad (5.20)$$

Это выражение ясно показывает, что никакая пара этих единичных векторов не является ортогональной. В физической литературе [6] эта ситуация описывается как «переполненный набор состояний».

Из коммутационного соотношения $[\bar{a}, a] = -1$ следует, что в соответствии с реализацией $\bar{a} \rightarrow \zeta$ на $\{|\hat{e}_\zeta\rangle\}$, нужно добиваться выполнения действия оператором a как дифференциальным оператором: $-a \rightarrow d/d\zeta$. Для достижения этого необходимо заменить нормированные векторы $|\hat{e}_\zeta\rangle$ на ненормированные векторы $|e_\zeta\rangle \equiv e^{|\zeta|^2/2} |\hat{e}_\zeta\rangle$. Наиболее целесообразная процедура состоит в выражении этих векторов в терминах базиса $|\psi_n\rangle = (n!)^{-1/2} a^n |\psi_0\rangle$. Используя $\mathcal{U}(\zeta) = \exp(\zeta a - \zeta^* \bar{a})$ и свойство (5.8), находим

$$|e_\zeta\rangle = \sum_{k=0}^{\infty} (k!)^{-1} \zeta^k |\psi_k\rangle = e^{\zeta a} |\psi_0\rangle. \quad (5.21)$$

В этой форме легко обосновать действие $\bar{a} \rightarrow \zeta$, $-a \rightarrow d/d\zeta$ на множестве $\{|e_\zeta\rangle\}$. (Отметим, между прочим, что любой собственный вектор для a является с необходимостью нулевым вектором.)

Множество $\{|e_\zeta\rangle\}$ называется (в математической литературе [4]) *набором основных векторов*. В терминах этих векторов мы можем теперь получить новое гильбертово пространство $\mathcal{F}$, изоморфное гильбертову пространству $\mathcal{H}$ состояний гармонического осциллятора.

Для каждого кет-вектора $|f\rangle$ в пространстве $\mathcal{H}$ определяем функцию f комплексного переменного ζ :

$$f(\zeta) = \langle f | e_\zeta \rangle, \quad (5.22)$$

где скалярное произведение справа берется в $\mathcal{H}$. Используя выражение (5.21) для $|e_\zeta\rangle$, находим

$$f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_k}{(k!)^{\frac{1}{2}}} \zeta^k, \quad (5.23)$$

где $A_k \equiv \langle f | \psi_k \rangle$. Таким образом, f — целая аналитическая функция комплексного переменного ζ . Обратно, так как каждая целая аналитическая функция f может быть разложена в виде (5.23), мы можем определить кет-вектор $|f\rangle \in \mathcal{H}$ формулой $|f\rangle = \sum_k A_k^* |\psi_k\rangle$, и этот кет-вектор соответствует f . Эти результа-

¹⁾ Под единичными векторами здесь понимаются векторы единичной длины. — Прим. перев.

ты показывают, что существует взаимно-однозначное соответствие между множеством целых аналитических функций комплексного переменного ζ и множеством векторов гильбертова пространства $\mathcal{H}$.

Частные примеры соответствия векторов из $\mathcal{H}$ и целых аналитических функций даются формулам¹⁾

$$\begin{aligned} |\psi_k\rangle &\rightarrow u_k, & k &= 0, 1, 2, \dots, \\ u_k(\zeta) &= \langle \psi_k | e_\zeta \rangle = \zeta^k / (k!)^{\frac{1}{2}}; \\ |e_\alpha\rangle &\rightarrow e_\alpha, & \alpha &\in \mathbb{C}, \\ e_\alpha(\zeta) &= \langle e_\alpha | e_\zeta \rangle = e^{\alpha^* \zeta}. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}$ теперь определяется как пространство целых аналитических функций со скалярным произведением двух функций $f, g \in \mathcal{F}$:

$$(f, g) = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta e^{-|\xi|^2} f^*(\xi) g(\xi). \quad (5.25)$$

По определению $f \in \mathcal{F}$ тогда и только тогда, когда f имеет конечную норму: $(f, f)^{\frac{1}{2}} < \infty$.

Используя скалярное произведение (5.25), находим, что $(u_k, u_{k'}) = \delta_{kk'}$, и из этого результата следует, что $(f, g) = \langle f | g \rangle^*$. Таким образом, гильбертовы пространства $\mathcal{H}$ и $\mathcal{F}$ изоморфны¹⁾.

Замечания. Пространство $\mathcal{F}$ имеет некоторые замечательные свойства, которые делают его особенно удобным для приложений в математической физике. Отметим здесь следующие свойства:

а) Каждый элемент из $\mathcal{F}$ соответствует в точности одной функции. (Это резко отличается от общей ситуации в пространстве L^2 , где элементом пространства является класс эквивалентных функций, отличающихся самое большее на множествах меры нуль. Аналитические функции, отличающиеся на множествах меры нуль, являются идентичными.)

б) Последовательность функций f_n , сильно сходящаяся к f , предполагает поточечную сходимость: $f_n(z) \rightarrow f(z)$. (Это другой аспект сильной корреляции между локальными и глобальными свойствами, характеризующими аналитические функции.)

в) Аналогом дельта-функции Дирака $\delta(q - q')$ для пространства $\mathcal{F}$ является воспроизводящееся ядро $\mathcal{K}(\omega, \zeta)$, определенное формулой

$$f(\omega) = \frac{1}{\pi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\xi d\eta e^{-|\xi|^2} \mathcal{K}(\omega, \xi) f(\xi),$$

¹⁾ Наиболее эффективный путь вычисления скалярного произведения состоит не в интегрировании, а в дифференцировании. Для $|\psi\rangle = \psi(a)|\psi_0\rangle$, $\psi(a) = \sum_k \alpha_k a^k$ и $\psi^*(a) = \sum_k \alpha_k^* a^k$ находим, используя коммутационное соотношение $[\bar{a}, a] = 1$ и $\bar{a}|\psi_0\rangle = 0$, что $\langle f | g \rangle = [f^*(\partial/\partial a)g(a)]_{a=0}$.

где $\mathcal{K}(\omega, \zeta) = (e_\omega, e_\zeta) = e^{\omega\zeta^*}$. Хотя ядро $\mathcal{K}$ ведет себя как и дельта-функция Дирака (так как ядро имеет свойство самовоспроизведения), но при этом оно не имеет каких-либо сингулярностей.

г) Наиболее замечательное из всех свойств пространства $\mathcal{F}$ касается легкости, с которой могут быть строго определены операторы и их области определения. В частности, *каждый линейный оператор в $\mathcal{F}$, имеющий $\{e_\alpha\}$ в качестве области определения, является интегральным оператором.*

Значение этого замечательного результата для математической физики состоит в том, что он дает ключевой пример, для которого использование обозначения бра-кет Дирака является *строго справедливым*. В остроумном обозначении Дирака *кет-вектор* $|\alpha\rangle$ является элементом гильбертова пространства, *бра-вектор*, записанный как $\langle\beta|$, является элементом дуального гильбертова пространства, а спаривание $\{\langle\beta|, |\alpha\rangle\} \rightarrow \mathbb{C}$ обозначается $\langle\beta|\alpha\rangle$ и дает скалярное произведение. До сих пор все это по существу стандартно, но Дирак идет дальше и определяет единичный оператор как $\sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$ и, более того, общий оператор как линейную комбинацию операторов ранга один, т.е.

$$\text{оператор} \equiv X = \sum_{\alpha, \beta} X_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\beta|. \quad (5.26)$$

Это эквивалентно определению общего оператора как матрицы. Замечательно, что для пространства $\mathcal{F}$ эти результаты являются полностью справедливыми [11].

д) Заметим, что, так же как для произведения гильбертовых пространств n гармонических осцилляторов, мы можем определить гильбертово пространство $\mathcal{F}_n$ как прямое произведение

$$\mathcal{F}_n \equiv \mathcal{F} \otimes \cdots \otimes \mathcal{F}, \quad \text{множителей, } n < \infty.$$

е) Значение гильбертовых пространств $\mathcal{H}_n$ и $\mathcal{F}_n$ для настоящей книги состоит в том, что некоторые свойства этих пространств, в частности свойство, рассмотренное в замечании «г», позволяют полностью обосновать наши формальные операции в технике бозонных операторов. Мы не приводим этого обоснования но сама возможность такого обоснования существенна с точки зрения доверия к нашим результатам.

3. Отображение Жордана

Происхождение отображения Жордана. Физические явления в релятивистской области энергий характеризуются рождением и уничтожением частиц; соответствующим обобщением квантовой механики, включающим симметрию Пуанкаре (относительность Эйнштейна), является *квантовая теория поля*, с необходимостью включающая бесконечное число частиц. Жордан [12] показал (в 1935 г.), что основная техника квантования поля может быть алгебраически охарактеризована очень просто с помощью так называемого *отображения*

Жордана¹⁾. Это отображение из одночастичной реализации кинематической группы симметрий [13] в полевые операторы бозонного или фермионного типа. Мы используем отображение Жордана для бозонных операторов, чтобы дать теорию поворотов, как чрезвычайно полезный вычислительный инструмент в теории углового момента.

Результат Жордана может быть выражен следующим образом. Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_n$, соответствующее n кинематически независимым бозонам, и пусть X обозначает $n \times n$ -матрицу.

Отображение $\mathcal{L}$ $n \times n$ -матриц в бозонные операторы, действующие в $\mathcal{H}_n$, заданное формулой

$$\mathcal{L}: X = (X_{ij}) \rightarrow \sum_{i,j=1}^n X_{ij} a_i \bar{a}_j \equiv \mathcal{L}_X,$$

или формулой

$$\mathcal{L}: X \rightarrow \mathcal{L}_X, \quad (5.27)$$

сохраняет операцию коммутирования матриц.

Доказательство. Доказательство прямо следует из бозонных коммутационных соотношений: $[\bar{a}_i, a_j] = \delta_{ij}$, $[\bar{a}_i, \bar{a}_j] = [a_i, a_j] = 0$. Через a обозначим вектор-столбец $\text{col}(a_1, \dots, a_n)$, через $\bar{a}$ — вектор-столбец $\text{col}(\bar{a}_1, \dots, \bar{a}_n)$ из сопряженных операторов и через $\bar{a}$ — вектор-строку $(a_1, \dots, a_n)$. Тогда для любых двух $n \times n$ -матриц X, Y имеем

$$\mathcal{L}: X \rightarrow \bar{a} X \bar{a} = \mathcal{L}_X, \quad Y \rightarrow \bar{a} Y \bar{a} = \mathcal{L}_Y.$$

Таким образом, для коммутатора $[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$ находим

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = [\bar{a} X \bar{a}, \bar{a} Y \bar{a}] = \bar{a} [X, Y] \bar{a} = \mathcal{L}_{[X, Y]}.$$

Таким образом, отображение Жордана имеет свойство

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X, Y]}, \quad (5.28)$$

и, более того, оно линейно над $\mathbb{C}$:

$$\lambda \mathcal{L}_X + \mu \mathcal{L}_Y = \mathcal{L}_{\lambda X + \mu Y}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{C}. \quad (5.29)$$

Единичная матрица в кольце $n \times n$ -матриц имеет отображение

$$1 \rightarrow \mathcal{L}_1 = \bar{a} \bar{a} = \sum_{i=1}^n a_i \bar{a}_i; \quad (5.30)$$

ясно, что оператор $\mathcal{L}_1$ коммутирует со всеми $\{\mathcal{L}_X\}$. Мы будем называть оператор $\mathcal{L}_1$ оператором Эйлера (и обозначать его $\mathcal{E}$), так как он диагонален на подпространстве однородных полиномов из $\mathcal{H}_n$.

¹⁾ Это отображение было использовано Швингером [8] в его знаменитом докладе (1952 г.) «Об угловом моменте». В соответствии с этим оно часто называется «отображением Жордана — Швингера». Интересно отметить, что (в 1944 г.) Дирак [12a] использовал бозонное построение, которое он назвал «expansors», чтобы дать унитарные представления группы Лоренца.

4. Применение отображения Жордана

Чтобы оценить значение отображения Жордана для углового момента, теперь мы продемонстрируем легкость, с которой могут быть получены многие результаты гл. 3. В гл. 3 мы использовали алгебраическую технику Ли, примененную к общим операторам углового момента J . Чтобы применить отображение Жордана, рассмотрим простейшую точную реализацию, а следовательно, используем реализацию, заданную с помощью поворотов $T(\cos(\psi/2), \hbar \sin(\psi/2))$ из гл. 4. Мы берем ψ бесконечно малым; в соответствии с этим (как следует из (4.38)) рассматриваем матрицы Паули $J \rightarrow \sigma/2$.

Рассмотрим гильбертово пространство $\mathcal{H}_2$ для двух бозонов и отображение Жордана

$$\mathcal{L}: \frac{1}{2}\sigma_i \rightarrow J_i \equiv \mathcal{L}_{\frac{1}{2}\sigma_i} = \frac{1}{2}(\tilde{a}\sigma_i\tilde{a}). \quad (5.31)$$

Отображение Жордана гарантирует нам, что бозонные операторы¹⁾ J_i удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k. \quad (5.32)$$

Пусть $\mathcal{H}^{(2j)}$ обозначает линейное пространство векторов состояний вида $P(a_1, a_2)|0\rangle$, где $P(a_1, a_2)$ — однородный полином от (a_1, a_2) степени $2j$ (целое число), а $|0\rangle$ обозначает кет-вектор, такой, что $a_1|0\rangle = a_2|0\rangle = 0$. Пространство $\mathcal{H}^{(2j)}$ инвариантно относительно действия бозонных операторов J_i , так что собственные векторы для углового момента могут быть записаны в виде

$$|jm\rangle = P_{jm}(a_1, a_2)|0\rangle, \\ P_{jm}(a_1, a_2) = \frac{a_1^{j+m}a_2^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.33)$$

Это множество базисных векторов для $\mathcal{H}^{(2j)}$ нумеруется с помощью $m = j, j-1, \dots, -j$; таким образом, пространство $\mathcal{H}^{(2j)}$ имеет размерность $2j+1$.

Операторы $J_{\pm} \equiv J_1 \pm iJ_2$, J_3 имеют (как следует из (5.31)) такую явную бозонную операторную реализацию:

$$J_+ = a_1\tilde{a}_2, \quad J_- = a_2\tilde{a}_1, \\ J_3 = \frac{1}{2}(a_1\tilde{a}_1 - a_2\tilde{a}_2). \quad (5.34)$$

Действие этих операторов на базис $\{|jm\rangle\}$, как легко проверить, является стандартным действием:

$$J_{\pm}|jm\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{\frac{1}{2}}|j, m \pm 1\rangle, \\ J_3|jm\rangle = m|jm\rangle. \quad (5.35)$$

¹⁾ Для простоты обозначений мы используем для бозонного оператора тот же символ J_i , который мы использовали выше для обозначения общего оператора углового момента. Эти термины логически различны, и мы надеемся, что никаких недоразумений не возникнет.

Оператор Эйлера $\mathcal{E} = \sum_i a_i \bar{a}_i = \bar{a}a$ также диагонален на $\mathcal{H}^{(2j)}$:

$$\mathcal{E}|jm\rangle = 2j|jm\rangle. \quad (5.36)$$

Этот результат показывает, что с помощью отображения Жордана множество *всех* собственных подпространств для углового момента (каждое в точно-сти 1 раз) получается наиболее экономно.

Замечание. Проверка соотношений (5.35) и (5.36) использует свойства $\bar{a}_1|0\rangle = \bar{a}_2|0\rangle = 0$, которые предполагают, что $J_+|0\rangle = J_-|0\rangle = J_3|0\rangle = 0$, а также $\mathcal{E}|0\rangle = 0$. Если $\mathcal{O}$ — любой полином от a_i и a_p , такой, что $\mathcal{O}|0\rangle = 0$, то действие $\mathcal{O}$ на состояние $|jm\rangle = P_{jm}(a_1, a_2)|0\rangle$ задается формулой $\mathcal{O}|jm\rangle = [\mathcal{O}, P_{jm}(a_1, a_2)]|0\rangle$. Базисные коммутаторы $[a_p, a_j] = [a_j, a_j] = 0$ и $[a_p, a_j] = \delta_{ij}$ позволяют заменить коммутатор $[\mathcal{O}, P_{jm}(a_1, a_2)]$ другим полиномом, действующим на $|0\rangle$.

Конечные преобразования пространства $\mathcal{H}^{(2j)}$ (а следовательно, и пространства $\mathcal{H}_2$), порожденные J , получаются путем взятия экспоненты от отображения Жордана — $i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2$. Заданному повороту $T(\cos(\psi/2), \hat{n} \sin(\psi/2))$ соответствует унитарная унимодулярная 2×2 -матрица $U(\psi, \hat{n}) = \exp(-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2)$, которая через отображение Жордана — $i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2$ сама соответствует унитарному бозонному оператору:

$$\begin{aligned} T(\cos \tfrac{1}{2}\psi, \hat{n} \sin \tfrac{1}{2}\psi) &\rightarrow \exp(-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2) \rightarrow \exp(\mathcal{L}_{-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2}) \\ &= \exp(-i\psi\hat{n} \cdot \mathcal{L}_{\sigma/2}) = \exp(-i\psi\hat{n} \cdot J). \end{aligned} \quad (5.37)$$

Взятие матричных элементов в $\mathcal{H}^{(2j)}$ приводит к

$$\langle jm'|\exp(-i\psi\hat{n} \cdot \mathcal{L}_{\sigma/2})|jm\rangle = D_{m'm}^j(\psi, \hat{n}). \quad (5.38)$$

Закключаем, что *взятие экспоненты от отображения Жордана* ($-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2$) *порождает каждое неприводимое представление группы поворотов*:

$$T(\cos \tfrac{1}{2}\psi, \hat{n} \sin \tfrac{1}{2}\psi) \rightarrow D^j(\psi, \hat{n}), \quad j = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \dots \quad (5.39)$$

Замечание. Можно также рассматривать отображение Жордана матрицы $U = U(\psi, \hat{n})$: $U \rightarrow \mathcal{L}_U = \sum_{i,j} u_{ij} \bar{a}_i a_j$. Заметим, однако, что

$$\mathcal{L}_{\exp(-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2)} \neq \exp(\mathcal{L}_{-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2}).$$

Мы видим, что $\mathcal{L}_U$ имеет смысл элемента алгебры Ли с базисом $J_+, J_-, J_3, \mathcal{E}$, а не конечного преобразования, порожденного J .

Основной результат (5.38) позволяет дать другой вывод матриц вращений, который избегает прямого вычисления экспонент, как требовалось в нашем первоначальном определении (3.35). Таким образом, для $U = \exp(-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2)$ по определению матриц вращений имеем

$$\mathcal{T}_U|jm\rangle \equiv \sum_{m'} D_{m'm}^j(U) P_{jm'}(a_1, a_2)|0\rangle, \quad (5.40)$$

где

$$\mathcal{T}_U \equiv \exp(\mathcal{L}_{-i\psi\hat{n} \cdot \sigma/2}). \quad (5.41)$$

С другой стороны, учитывая (5.33) и $\mathcal{T}_U|0\rangle = |0\rangle$, можем записать

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_U|jm\rangle &= (\mathcal{T}_U P_{jm}(a_1, a_2) \mathcal{T}_{U^{-1}}) \mathcal{T}_U|0\rangle \\ &= P_{jm}(a'_1, a'_2)|0\rangle,\end{aligned}\quad (5.42)$$

где $a'_i = \mathcal{T}_U a_i \mathcal{T}_{U^{-1}}$. Это дает¹⁾

$$\begin{aligned}a'_2 &\equiv u_{11}a_1 + u_{21}a_2, \\ a'_2 &\equiv u_{12}a_1 + u_{22}a_2,\end{aligned}\quad (5.43)$$

где $U = (u_{ij})$. Подставим теперь эти преобразованные бозоны в одночлены, заданные формулой (5.33), и разложим по первоначальному одночленному базису:

$$\begin{aligned}& \frac{(u_{11}a_1 + u_{21}a_2)^{j+m}(u_{12}a_1 + u_{22}a_2)^{j-m}}{[(j+m)!(j-m)!]^{\frac{1}{2}}} |0\rangle \\ &= [(j+m)!(j-m)!]^{\frac{1}{2}} \sum_{st} \frac{(u_{11})^{j+m-s}(u_{21})^s(u_{12})^{j-m-t}(u_{22})^t}{(j+m-s)!s!(j-m-t)!t!} \cdot a_1^{2j-s-t} a_2^{s+t} |0\rangle \\ &= \sum_{m'} D_{m'm}^j(U) P_{jm}(a_1, a_2) |0\rangle,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}D_{m'm}^j(U) &= [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_s \frac{(u_{11})^{j+m-s}(u_{21})^s(u_{12})^{m'-m+s}(u_{22})^{j-m'-s}}{(j+m-s)!s!(m'-m+s)!(j-m'-s)!}.\end{aligned}\quad (5.44)$$

Замечание. Этот вывод матриц вращений (функций представлений) показывает, что мы могли бы рассматривать произвольное линейное преобразование $a_1 \rightarrow z_{11}a_1 + z_{21}a_2$, $a_2 \rightarrow z_{12}a_1 + z_{22}a_2$, $z_{ij} \in \mathbb{C}$, бозонов, таким образом получая функции $D_{m'm}^j(Z)$, в которых унитарные элементы u_{ij} заменены на произвольные комплексные числа z_{ij} . Существенное свойство этих функций, которое следует из вывода, состоит в том, что матрицы $D^j(Z)$ обладают *мультипликативным свойством* $D^j(Z)D^j(Z') = D^j(ZZ')$ для произвольных комплексных матриц Z и Z' (или для любой матрицы Z от неизвестных, которые коммутируют).

5. Обобщение отображения Жордана

К необходимости обобщения отображения Жордана можно прийти двумя совсем различными путями. С точки зрения поворотов можно видеть, что отображение Жордана реализует только представления углового момента $[SU(2)]$, но

¹⁾ Тот факт, что произвольное унитарное преобразование n бозонов $a_1, \dots, a_n$, заданное формулой $U: a_i \rightarrow a'_i = \sum_j u_{ji} a_j$, сохраняет базисные коммутационные соотношения

между бозонами, является общим результатом. Этот результат может быть прямо использован для доказательства того, что $\mathcal{T}_U$ — унитарный оператор.

не полной структуры, реализованной поворотами (группы симметрического волчка $SU(2) * SU(2)$). С другой стороны, можно заметить, что отображение Жордана как характеристизация процесса квантования поля было введено, чтобы трактовать только две симметрические структуры: полностью симметричную (бозоны) или полностью антисимметричную (фермионы). Чтобы охватить более общие структуры, включающие смешанную симметрию (общие схемы Юнга; см. приложение А), полезно обобщить отображение Жордана от n бозонов до n^2 бозонов, или, что эквивалентно, до $n \times n$ -матричного бозона A .

Пусть A обозначает $n \times n$ -матрицу, элементы которой $(A_{ij}) = a_i^j$ являются бозонными операторами, удовлетворяющими коммутационным соотношениям

$$\begin{aligned} [\bar{a}_i^j, a_{i'}^{j'}] &= \delta_{ii'} \delta^{jj'}, \\ [\bar{a}_i^j, \bar{a}_{i'}^{j'}] &= [a_i^j, a_{i'}^{j'}] = 0. \end{aligned} \quad (5.45)$$

Через $\bar{A}$ обозначим $n \times n$ -матрицу, элементы которой являются сопряженными бозонными операторами $(\bar{A})_{ij} = \bar{a}_i^j$.

Пусть X обозначает произвольную $n \times n$ -матрицу с числовыми элементами $(X_{ij}) = x_{ij}$. Тогда отображение $n \times n$ -матриц $\{X\}$ в линейные операторы $\mathcal{L}_X$, заданное формулой

$$X \rightarrow \mathcal{L}_X = \text{trace}(\bar{A} X \bar{A}) = \sum_{i,j=1}^n x_{ij} \sum_{\alpha=1}^n a_i^\alpha \bar{a}_j^\alpha \quad (5.46)$$

сохраняет операцию коммутирования $n \times n$ -матриц $\{X\}$.

Доказательство. Как и раньше, доказательство следует из того, что n^2 операторов E_{ij} , определенных формулой

$$E_{ij} = \sum_{\alpha=1}^n a_i^\alpha \bar{a}_j^\alpha, \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (5.47)$$

удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и n^2 бозонных операторов $a_i, \bar{a}_j$, т.е.

$$[E_{ij}, E_{kl}] = \delta_{jk} E_{il} - \delta_{il} E_{kj}. \quad (5.48)$$

Обобщенное отображение Жордана допускает второе отображение: отображение $n \times n$ -матриц $\{Y\}$ в линейные операторы $\mathcal{R}_Y$, заданное формулой

$$Y \rightarrow \mathcal{R}_Y = \text{trace}(\bar{Y} \bar{A} \bar{A}) = \sum_{\alpha, \beta=1}^n y_{\alpha\beta} \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \bar{a}_i^\beta \quad (5.49)$$

сохраняет операцию коммутирования матриц $\{Y\}$.

Доказательство. Доказательство этого результата сразу следует из того, что n^2 операторов $E^{\alpha\beta}$, определенных формулой

$$E^{\alpha\beta} = \sum_{i=1}^n a_i^\alpha \bar{a}_i^\beta, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n \quad (5.50)$$

удовлетворяют коммутационным соотношениям того же типа, что и для E_{ij} , которые появляются при отображении $\mathcal{L}_X$:

$$[E^{\alpha\beta}, E^{\gamma\delta}] = \delta^{\beta\gamma} E^{\alpha\delta} - \delta^{\alpha\delta} E^{\gamma\beta}. \quad (5.51)$$

Важное свойство этих двух отображений состоит в следующем: для каждой (числовой) $n \times n$ -матрицы X и каждой (числовой матрицы) Y все операторы $\mathcal{L}_X$ коммутируют со всеми операторами $\mathcal{R}_Y$:

$$[\mathcal{L}_X, \mathcal{R}_Y] = 0, \quad (5.52)$$

Этот результат наиболее быстро можно получить, доказав, что каждый из n^2 операторов E_{ij} коммутирует с каждым из n^2 операторов $E^{\alpha\beta}$.

Обобщенное отображение Жордана и соответствующие операторные структуры являются естественной отправной точкой для построения и изучения множества унитарных групп $\{U(n)\}$ (см. [14] и цитируемую там литературу).

Вероятно, полезно заметить, что $m \times n$ -матричный бозон ($m \neq n$) приводит к коммутирующим отображениям $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$, если определенным образом конкретизировать результаты, полученные выше для случая $n \times n$.

6. Применение обобщенного отображения Жордана

Прежде чем рассмотреть применения, укажем мотивировку и общий геометрический смысл, лежащий в основе обобщенного отображения Жордана. Для отображения Жордана, примененного в разд. 4, мы рассматривали геометрический объект — поворот, который отображался в оператор, реализующий структуру представления группы $SU(2)$ на паре бозонов (a_1, a_2). Если мы хотим обобщить эти понятия, то естественно попытаться отобразить повороты (в их более общей роли как пространства представления) в матричный бозон A , на котором обобщенное операторное отображение Жордана должно реализовать структуру представлений большей группы $[SU(2) * SU(2)]$. Однако повороты представляют собой трехмерные объекты (унимодулярные кватернионы), и естественно отображение в матричный бозон (четыре бозона) показывает, что нужно рассматривать общий кватернион. Геометрически это расширяет группу поворотов, включая кроме вращений также мультипликативную группу масштабных преобразований (заменяя радиус единичной сферы на модуль кватерниона). Соответствующая геометрическая точка зрения отождествляет общий кватернион с *Wendestreckung* (Клейн — Зоммерфельд), т.е. с поворотом вместе с растяжением. С точки зрения бозонного исчисления это обобщение проявляется как включение нового объекта: пары (независимых) двухкомпонентных бозонов, связанных (антисимметрично) в нулевой угловой момент: $a_{12}^{12} \equiv a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2 = \det A$. Эти спаренные бозоны a_{12}^{12} являются пространством, в котором действуют масштабные преобразования.

Согласно этому, первый шаг состоит в отображении общего кватерниона q в матричный бозон:

$$q \rightarrow A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix}, \quad (5.53)$$

при этом норма кватерниона отображается в

$$N(q) \equiv q\bar{q} \rightarrow \det A = a_{12}^{12}. \quad (5.54)$$

Следующий шаг состоит в представлении группы левых и правых трансляций, действующих на кватернионах (а следовательно, на поворотах) как на пространстве, в котором происходит действие:

$$\begin{aligned} L_u: q \rightarrow uq &= L_u(q), \\ R_v: q \rightarrow q\tilde{v} &= R_v(q), \end{aligned} \quad (5.55)$$

где u и v — кватернионы. Для $v = (v_0, v_1, v_2, v_3)$ кватернион $\tilde{v}$ определяется как $\tilde{v} = (v_0, v_1, -v_2, -v_3)$. Тогда находим $u\tilde{v} = \tilde{v}u$, так что $R_u(R_v(q)) = R_{uv}(q)$, что и требуется для умножения правых трансляций¹⁾.

Рассмотрим теперь соответствующую структуру для матричного бозона A . Матричный бозон A должен рассматриваться как пространство, на котором происходит действие (по аналогии с q в (5.55)), тогда как аналог кватерниона u (соответственно v), порождающего левую (соответственно правую) трансляцию, является не матричным бозоном, а унитарной 2×2 -матрицей. Отсюда следует, что желаемое действие на матричный бозон A задается формулами

$$\begin{aligned} L_U: A \rightarrow UA &= L_U(A), \\ R_V: A \rightarrow A\tilde{V} &= R_V(A), \end{aligned} \quad (5.56)$$

где U и V — унитарные матрицы.

Пусть $P(A)$ обозначает полином от четырех бозонов (a_i^j) из A , и пусть $|0\rangle$ обозначает кет-вектор (в $\mathcal{H}_4 = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_1$), определенный формулой $\bar{a}_i^j|0\rangle = 0$. (Кет-вектор $|0\rangle$ является «вакуумным» вектором, имеющим нулевой квант; см. разд. 2.)

Теперь мы можем сформулировать важный результат. Пусть унитарные матрицы U и V записаны в форме $U = e^{-iX}$ и $V = e^{-iY}$ соответственно, где X и Y — эрмитовы матрицы. Тогда экспоненты отображений Жордана $\mathcal{S}_U = \exp(-i\mathcal{L}_X)$ и $\mathcal{T}_V = \exp(-i\mathcal{R}_Y)$ выполняют левую и правую трансляции соответственно, когда бозонные операторы действуют на $P(A)|0\rangle$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_U P(A)|0\rangle &= P(L_U(A))|0\rangle = P(\tilde{U}A)|0\rangle, \\ \mathcal{T}_V P(A)|0\rangle &= P(R_V(A))|0\rangle = P(A\tilde{V})|0\rangle, \\ \mathcal{S}_U \mathcal{T}_V P(A)|0\rangle &= \mathcal{T}_V \mathcal{S}_U P(A)|0\rangle = P(\tilde{U}A\tilde{V})|0\rangle, \end{aligned} \quad (5.57)$$

для всех $U, V \in U(2)$.

Доказательство. Мы имеем $\mathcal{S}_U P(A)|0\rangle = (\mathcal{S}_U P(A) \mathcal{S}_{U^{-1}})|0\rangle = P(\mathcal{S}_U A \mathcal{S}_{U^{-1}})|0\rangle$; так как $\mathcal{S}_U|0\rangle = |0\rangle$. Прямое применение формулы Бейкера — Хаусдорфа — Кемпбела дает $\exp(-i\mathcal{L}_X)A \exp(i\mathcal{L}_X) = \tilde{U}A$. Подобные рассуждения устанавливают сформулированный результат для правых трансляций. ■

¹⁾ Удобно использовать $\tilde{v}$ вместо v^{-1} в определении правых трансляций, так как для матричного бозона это приводит к симметричной связи между генераторами левых и правых трансляций (см. (5.58) и (5.59)), в результате чего одно множество генераторов получается из другого перестановкой верхних и нижних индексов в обозначении для элементов матричного бозона.

Выбирая $X = \frac{1}{2}(\text{tr} X)\sigma_0 + \frac{1}{2}\psi(\hat{n} \cdot \sigma)$ (а также выбирая подобным образом Y), получаем два множества коммутирующих операторов углового момента и оператор числа частиц.

Генераторы J унимодулярных левых трансляций ($\sigma_{\pm} \equiv \sigma_1 \pm i\sigma_2$):

$$\begin{aligned} J_+ &= \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{A}\sigma_+\bar{A}) = E_{12} = \sum_k a_1^k \bar{a}_2^k, \\ J_- &= \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{A}\sigma_-\bar{A}) = E_{21} = \sum_k a_2^k \bar{a}_1^k, \\ J_3 &= \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{A}\sigma_3\bar{A}) = \frac{1}{2}(E_{11} - E_{22}) = \frac{1}{2}\sum_k (a_1^k \bar{a}_1^k - a_2^k \bar{a}_2^k). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Генераторы K унимодулярных правых трансляций:

$$\begin{aligned} K_+ &= \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{\sigma}_+\tilde{A}A) = E^{12} = \sum_k a_k^1 \bar{a}_k^2, \\ K_- &= \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{\sigma}_-\tilde{A}A) = E^{21} = \sum_k a_k^2 \bar{a}_k^1, \\ K_3 &= \frac{1}{2}\text{tr}(\tilde{\sigma}_3\tilde{A}A) = \frac{1}{2}(E^{11} - E^{22}) = \frac{1}{2}\sum_k (a_k^1 \bar{a}_k^1 - a_k^2 \bar{a}_k^2). \end{aligned} \quad (5.59)$$

Генератор фазовых трансляций:

$$\mathcal{E} = \text{tr}(\tilde{A}\bar{A}) = \sum_k E^{kk} = \sum_{ij} a_i^j \bar{a}_i^j, \quad (5.60)$$

который может рассматриваться как оператор, соответствующий полному числу квантов.

Эта реализация операторов J и K имеет важное свойство, которое состоит в том, что два инвариантных оператора $J \cdot J$ и $K \cdot K$ тождественно равны: $J \cdot J = K \cdot K$.

Эти результаты показывают, что обобщенное преобразование Жордана поворотов или унимодулярных кватернионов реализует группу $SU(2) * SU(2)$ симметричного волчка, а не общее прямое произведение групп $SU(2) \times SU(2)$.

Наиболее быстрый путь изучения характеристических векторов для этой операторной реализации состоит в признании того, что эти векторы являются элементами матриц вращений D^j , введенных в разд. 4. Напомним, что определение $D^j(U)$ имеет смысл для любых четырех неизвестных, расположенных в форме

$$2 \times 2\text{-матрицы: } Z = \begin{pmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{pmatrix}. \text{ Более того, свойство представления} \quad (5.61)$$

$$D^j(Z_1)D^j(Z_2) = D^j(Z_1 Z_2)$$

справедливо также для этих неизвестных. Если матрица Z берется числовой, унитарной и унимодулярной, то D^j имеют обычную интерпретацию как неприводимые представления группы $SU(2)$. (Если отбросить ограничение унимодулярности, то можно получить неприводимые представления группы вещественных кватернионов, рассматриваемой относительно умножения.) В более общем случае, используя соответствие $Z \rightarrow (\det Z)^k D^j(Z)$, имеем свойство представления:

$$Z_1 Z_2 \rightarrow (\det Z_1)^k D^j(Z_1) (\det Z_2)^k D^j(Z_2) = (\det Z_1 Z_2)^k D^j(Z_1 Z_2). \quad (5.62)$$

Заменяя неизвестные Z матричным бозоном A , получаем (для неотрицательного целого числа k) бозонные полиномы $(\det A)^k D_{m'm}^j(A)$, которые являются однородными полиномами от бозонных операторов (a_i^j) степени $2(j+k)$.

Таким образом, требуемые характеристические векторы для группы, порожденной операторами $(J, K, \mathcal{E})$, задаются собственными кет-векторами

$$|k, j; m, m'\rangle \equiv [(k-j)!(k+j+1)/(2j+1)]^{-1/2} (\det A)^{k-j} D_{m'm}^j(A) |0\rangle, \quad (5.63)$$

а вычисление нормировочного множителя дано в приложении А.

Выпишем в явном виде действие генераторов (заданных отображением Жордана (5.58) — (5.60)), действующих на этот кет-базис (5.63):

$$J_{\pm} |k, j; m, m'\rangle = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} |k, j; m \pm 1, m'\rangle, \\ J_3 |k, j; m, m'\rangle = m |k, j; m, m'\rangle; \quad (5.64)$$

$$K_{\pm} |k, j; m, m'\rangle = [(j \mp m')(j \pm m' + 1)]^{1/2} |k, j; m, m' \pm 1\rangle, \\ K_3 |k, j; m, m'\rangle = m' |k, j; m, m'\rangle; \quad (5.65)$$

$$\mathcal{E} |k, j; m, m'\rangle = 2k |k, j; m, m'\rangle; \quad (5.66)$$

Здесь $k = 0, 1/2, \dots$; $j = 0, 1/2, \dots, k$, и $m, m' = j, j-1, \dots, -j$.

7. Применение обобщенного отображения Жордана к определению коэффициентов Вигнера

Существует другой путь рассмотрения пространства однородных полиномов от матричного бозона A . Вместо рассмотрения двух пар бозонов, образующих единственный объект (матричный бозон A), можно рассматривать каждую бозонную пару как отдельный объект, с которым сопоставляется (коммутирующее) отображение Жордана. Первая реализация соответствует «связанным бозонным парам», а вторая — «несвязанным бозонным парам»; связь между двумя реализациями, как мы увидим, позволяет изящным образом определить коэффициенты Вигнера.

Обозначим две пары бозонов индексом $i = 1, 2$, т.е. $a^1 = (a_1^1, a_2^1)$ для $i = 1$ и $a^2 = (a_1^2, a_2^2)$ для $i = 2$. Отображение Жордана (разд. 3), примененное к каждой паре, приводит к генераторам углового момента:

$$J_+(i) = \tilde{a}^i \sigma_+ \tilde{a}^i / 2 = a_1^i \tilde{a}_2^i, \\ J_-(i) = \tilde{a}^i \sigma_- \tilde{a}^i / 2 = a_2^i \tilde{a}_1^i, \\ J_3(i) = \tilde{a}^i \sigma_3 \tilde{a}^i / 2 = (a_1^i \tilde{a}_1^i - a_2^i \tilde{a}_2^i) / 2 \quad (5.67)$$

для $i = 1, 2$. Ясно, что два множества операторов

$$\{J_+(1), J_3(1), J_-(1)\} \quad (5.68)$$

и

$$\{J_+(2), J_3(2), J_-(2)\} \quad (5.69)$$

взаимно коммутируют:

$$[J(1), J(2)] = 0, \quad (5.70)$$

и определяют различные квадратичные инварианты $J^2(1)$ и $J^2(2)$, т.е.

$$J^2(1) \neq J^2(2). \quad (5.71)$$

Собственные значения этих квадратичных инвариантов задаются соответствием $J^2(i) \rightarrow j_i(j_i + 1)$, где $2j_i$ — собственное значение оператора Эйлера (отображение Жордана каждого единичного оператора): $\mathcal{E}(i) \rightarrow 2j_i$ причем $2j_i$ равно числу квантов для i -й бозонной пары. Остальные собственные значения, обозначающие этот (несвязанный) базис, $J_3(i) \rightarrow m_i$, где m_i — «магнитное» квантовое число.

В этих обозначениях базисные векторы для этой альтернативной реализации являются одночленами:

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = P_{j_1 m_1}(\mathbf{a}^1) P_{j_2 m_2}(\mathbf{a}^2) |0\rangle, \quad (5.72)$$

где

$$P_{j, m}(\mathbf{a}^i) = \frac{(a_1^i)^{j+m} (a_2^i)^{j-m}}{[(j_i + m_i)!(j_i - m_i)!]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.73)$$

Через $\mathcal{H}^{(j_1, j_2)}$ обозначим пространство, натянутое на эти $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ базисные векторы, перечисляемые с помощью m_1 и m_2 , когда они пробегают свои значения $m_1 = j_1, j_1 - 1, \dots, -j_1$ и $m_2 = j_2, j_2 - 1, \dots, -j_2$. Генераторы (5.68) и (5.69) имеют стандартное действие на эти векторы.

Рассмотрим теперь, что означают эти результаты. Мы нашли две различные реализации: бозонными полиномами $(\det A)^k - j D^j(A)$ из разд. 6 и бозонными полиномами, принадлежащими пространству $\mathcal{H}^{(j_1, j_2)}$, каждый из которых является однородным полиномом над одними и теми же четырьмя бозонными операторами и имеет четыре независимых индекса. Следовательно, эти два множества должны быть связаны.

Чтобы определить эту связь, заметим сначала, что оператор J (над полиномами от матричного бозона (A)) является суммой двух угловых моментов $J(i)$:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(1) + \mathbf{J}(2). \quad (5.74)$$

(Эта связь является причиной того, что реализацию с помощью матричных бозонов называют связанным базисом.) Соотношение (5.74) предполагает, что связаны собственные значения m :

$$m = m_1 + m_2. \quad (5.75)$$

Затем заметим, что оператор «числа квантов» $\mathcal{E}$ (формула (5.60)) является подобным образом суммой операторов «чисел квантов» $\mathcal{E}(i)$:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(1) + \mathcal{E}(2). \quad (5.76)$$

Отсюда следует, что мы имеем соотношение для собственных значений

$$k = j_1 + j_2. \quad (5.77)$$

Иначе говоря, этот результат можно рассматривать как утверждение, что мы рассматриваем однородные бозонные полиномы одной и той же степени в обеих реализациях.

Наконец, заметим, что оператор K_3 (формула (5.65)) для полиномов от матричного бозона A является *разностью* двух операторов $\mathcal{E}(i)$, так что мы имеем

$$K_3 = \frac{1}{2}[\mathcal{E}(1) - \mathcal{E}(2)], \quad (5.78)$$

и соответствующее соотношение для собственных значений

$$m' = j_1 - j_2. \quad (5.79)$$

Подведем итог. Мы нашли (см. ((5.72)) ортонормированное множество $(2j_1 + 1) \times (2j_2 + 1)$ базисных векторов $\{|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle\}$ для пространства $\mathcal{H}^{(U_1, j_2)}$. Мы также нашли вторую реализацию (5.63) для того же пространства, используя ортонормированное множество базисных векторов

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \left[\frac{2j+1}{(j_1+j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} (\det A)^{j_1+j_2-j} D_{m, j_1-j_2}^j(A) |0\rangle. \quad (5.80)$$

Последний базис нумеруется (для фиксированных j_1 и j_2) с помощью j и m с их областями значений $j = j_1 + j_2, j_1 + j_2 - 1, \dots, |j_1 - j_2|$ и $m = j, j-1, \dots, -j$.

Так как число ортонормированных векторов в обоих множествах одно и то же (так как $\sum_j (2j+1) = (2j_1+1)(2j_2+1)$), заключаем, что оба множества

являются базисами одного и того же пространства $\mathcal{H}^{(U_1, j_2)}$. В соответствии с этим существует унитарное преобразование, связывающее эти два множества базисных векторов. Фактически это преобразование является вещественным и ортогональным (так как вещественны скалярные произведения векторов из двух базисных множеств).

Мы можем заключить, что *коэффициенты преобразования между базисами являются не чем иным, как коэффициентами Вигнера*. Последнее следует из того, что, согласно (5.74), это преобразование осуществляет связывание угловых моментов $J = J(1) + J(2)$, а действие всех угловых моментов имеет стандартный вид.

Следовательно, мы показали, что преобразование между базисами

$$|j_1 j_2; jm\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} |j_1 m_1; j_2 m_2\rangle, \quad (5.81)$$

даст определение коэффициентов Вигнера, а именно

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= \langle j_1 m_1; j_2 m_2 | j_1 j_2; jm \rangle \\ &= \left[\frac{(2j+1)}{(j_1+j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \langle 0 | P_{j_1 m_1}(\bar{a}^1) P_{j_2 m_2}(\bar{a}^2) (\det A)^{j_1+j_2-j} D_{m, j_1-j_2}^j(A) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (5.82)$$

Бозонный полином $D^j(A)$ явно определяется соотношениями (5.44) и (5.53), а бозонные полиномы $P_{j, m_i}(\bar{a}^i)$ — соотношением (5.73).

Таким образом, определение коэффициентов Вигнера с помощью бозонных операторов и отображения Жордана является главным результатом, который мы хотим установить в этой главе. (Явное вычисление выражения (5.82) дано ниже.) Геометрическая концепция вращений как поворотов, введенных с помощью бозонного исчисления, привела нас прямо к существенному построению в квантовой теории углового момента. На основе этого результата, по-видимому, можно заявить, что метод бозонных операторов позволяет единообразно и изящно представить элементы этой теории.

Связь между бозонными полиномами, матрицами вращений и коэффициентами Вигнера развивается дальше в приложениях Б и В. В приложении Б мы получаем закон умножения для бозонных полиномов и доказываем лемму о факторизации, которая имеет большое практическое применение. Свойства симметрий этих структур рассматриваются в приложении В; в частности, мы получаем единым образом все 72 симметрии коэффициента Вигнера.

8. Коэффициенты Вигнера как «дискретизированные» матрицы вращений

В предыдущем разделе мы получили выражение для коэффициента Вигнера как матричный элемент между бозонными полиномиальными базисами. Целью настоящего раздела является определение явной алгебраической формы коэффициентов (5.87).

Затем мы интерпретируем наши результаты новым образом как теневой оператор [15 — 17], выполняющий преобразование между полиномами Якоби и коэффициентами Вигнера. Выражаясь более ясно (на языке физики), коэффициенты Вигнера являются дискретизированной формой матриц вращений.

Явная алгебраическая форма коэффициентов Вигнера. В разд. 7 мы получили результат для коэффициентов Вигнера, который эквивалентным образом может быть записан так:

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = \left[\frac{(2j+1)}{(j_1 + j_2 - j)!(j_1 + j_2 + j + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \langle 0 | (\bar{a}_1^{\dagger})^{j_1} (\bar{a}_2^{\dagger})^{j_2} D_{m, j_1 - j_2}^j(\bar{A}) | j_1 m_1; j_2 m_2 \rangle, \quad (5.83)$$

где кет-вектор справа имеет вид

$$|j_1 m_1; j_2 m_2\rangle = \frac{(a_1^{\dagger})^{j_1 + m_1} (a_2^{\dagger})^{j_1 - m_1} (a_1^{\dagger})^{j_2 + m_2} (a_2^{\dagger})^{j_2 - m_2}}{[(j_1 + m_1)!(j_1 - m_1)!(j_2 + m_2)!(j_2 - m_2)!]} |0\rangle, \quad (5.84)$$

а $D^j(\bar{A})$ обозначает матрицы вращений (полиномы) от (сопряженной) матрицы бозонов $\bar{A}$.

В этом месте полезно ввести более симметричную «комбинаторную» форму для матриц вращений, заменив форму, выведенную ранее в (5.44). Вводим 2×2 -расположение, обозначаемое через α , неотрицательных целых чисел $\{\alpha_i^j\}$, таких, что суммы в строках и столбцах имеют значения, указанные ниже:

$$\begin{array}{cc|c} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & j+m' \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & j-m' \\ \hline j+m & j-m & \end{array}$$

В этих обозначениях (5.44) принимает вид

$$D_{m'm}^j(A) = [(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!]^{\frac{1}{2}} \times \sum_{\mathbb{Q}} \frac{(a_1^1)^{x_1^1} (a_2^1)^{x_2^1} (a_1^2)^{x_1^2} (a_2^2)^{x_2^2}}{\alpha_1^1! \alpha_2^1! \alpha_1^2! \alpha_2^2!} \quad (5.85)$$

Суммирование в (5.85) выполняется по всем расположениям, удовлетворяющим указанным ограничениям. Заметим, что в это соотношение мы ввели матричный бозон $A = (a_i^j)$.

Возвратимся к вычислению матричного элемента в (5.83). Сначала ограничим (5.85) значениями $m' = m$ и $m = j_1 - j_2$ и введем сопряженный матричный бозон. Используя внутреннее произведение бозонного исчисления, получаем конечный ряд для коэффициента Вигнера, который имеет вид

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= \delta_{(m_1+m_2, m)} (-1)^{j_1-m_1} \left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!}{(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times [(j+m)!(j-m)!(j+j_1-j_2)!(j-j_1+j_2)!]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{\mathbb{Q}} \frac{\left[\frac{(j_1+m_1)!}{(j_1+m_1-\alpha_1^1)!} \right]^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_1^1)!} \times \frac{(-1)^{x_1^1} \left[\frac{(j_1-m_1)!}{(j_1-m_1-\alpha_2^1)!} \right]^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_2^1)!} \\ &\times \frac{\left[\frac{(j_2+m_2)!}{(j_2+m_2-\alpha_1^2)!} \right]^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_1^2)!} \times \frac{\left[\frac{(j_2-m_2)!}{(j_2-m_2-\alpha_2^2)!} \right]^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_2^2)!} \quad (5.86) \end{aligned}$$

Выраженный соотношением (5.86) результат может быть приведен к форме ван дер Вардена, если учесть все условия на α_i^j ; находим

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= \delta_{(m_1+m_2, m)} \left[\frac{(2j+1)(j_1+j_2-j)!(j+j_1-j_2)!(j+j_2-j_1)!}{(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_z (-1)^z \frac{[(j_1+m_1)!(j_1-m_1)!(j_2+m_2)!(j_2-m_2)!(j+m)!(j-m)]^{\frac{1}{2}}}{z!(j_1+j_2-j-z)!(j_1-m_1-z)!(j_2+m_2-z)!(j-j_2+m_1+z)!(j-j_1-m_2+z)!} \quad (5.87) \end{aligned}$$

Как обсуждалось в разд. 12 гл. 3, имеется много эквивалентных форм этого результата. В работе [68] дана связь между коэффициентами Вигнера и обобщенными гипергеометрическими рядами.

Интерпретация в терминах теневого исчисления. Обратимся теперь к задаче интерпретации этого вычисления коэффициента Вигнера. Если мы возвратимся назад к нашей первоначальной форме коэффициента Вигнера (5.83), то увидим, что сущность нашего вычисления (5.86) состоит в замене каждого выра-

жения $(\bar{a})^{\alpha}$ из бозонных операторов в полиноме $D^j(\bar{A})$ на число, которое равно внутреннему произведению для этого выражения.

Другими словами, вычисление является ничем иным, как линейным функционалом, который отображает одночлены базиса в (вещественные) числа. Это в точности та основа, на которой Рота [16, 17] разработал теневое исчисление, и наше рассмотрение отождествляет концептуально коэффициент Вигнера с теневым оператором, действующим на матрицы вращений.

Теневое исчисление, или исчисление Блиссара, является той техникой (в ее простейшей форме), посредством которой элемент последовательности чисел $\{a_n\}$ интерпретируется как символическая степень: $a_n \leftrightarrow a^n$. В интерпретации Роты теневого обозначения определяется линейный функционал на пространстве полиномов, такой, что $a_n = L(x^n)$. Это в точности та интерпретация, которая в нашем случае дает коэффициенты Вигнера.

Символические, или обобщенные, степени, которые нам нужны, имеют вид

$$(\pm \sqrt{k})^s \rightarrow (\pm 1)^s \left[\frac{k!}{(k-s)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (5.88)$$

Используя эти символические степени, чтобы выразить элементы матрицы вращения, можем выразить наш результат (5.86) в форме

$$C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = \delta_{(m_1 + m_2, m)} (-1)^{j_1 - m_1} \left[\frac{(2j+1)(j_1 + j_2 - j)!}{(j_1 + j_2 + j + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times D_{m, j_1 - j_2}^j \left(\begin{array}{cc} \sqrt{j_1 + m_1} & \sqrt{j_2 + m_2} \\ -\sqrt{j_1 - m_1} & \sqrt{j_2 - m_2} \end{array} \right) \quad \text{символические степени} \quad (5.89)$$

Это обозначение имеет то достоинство, что оно подчеркивает связь коэффициента Вигнера с дискретизированной матрицей вращения.

На эту связь впервые было указано в работе [1] (см. дополнение III в [1], которое взято из статьи Гельфанда и Цетлина¹⁾), где коэффициенты Вигнера интерпретированы в терминах функций Якоби, используя обобщенные степени. Они просто постулировали подходящий закон для обобщенных степеней, используя известные ряды для двух функций. Вышеприведенные результаты показывают, что начало этого правила находится в отображении Жордана для матричных бозонов A , скомбинированном с тем фундаментальным фактом, что бозонные операторы снабжены своей собственной структурой внутреннего произведения.

Результат, выраженный в (5.89), также является источником хорошо известной асимптотической связи между коэффициентами Вигнера и функциями представлений. Таким образом, используя соотношения симметрии (3.180), можем записать (5.89) в виде

$$C_{m, \mu, m+\mu}^{jkj+A} = (-1)^{j-m} \left[\frac{(2j+2A+1)!}{(2k+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} C_{m+\mu, -m, \mu}^{j+A, jk}$$

¹⁾ Результат Гельфанда и Цетлина обсуждался Виленкиным [17a] и интерпретирован в терминах интегрального преобразования Смородинским [17б].

$$\begin{aligned}
&= (-1)^{\Delta-\mu} \left[\frac{(2j+2\Delta+1)(2j+\Delta-k)!}{(2j+\Delta+k+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\times D_{\mu\Delta}^k \left(\begin{array}{cc} \sqrt{j+m+\Delta+\mu} & \sqrt{j-m} \\ -\sqrt{j-m+\Delta-\mu} & \sqrt{j+m} \end{array} \right) \quad \text{символические степени}
\end{aligned} \quad (5.90)$$

Теперь в этом результате мы берем для k фиксированное числовое значение. Пусть Δ и μ обозначают любые допустимые значения из области $k, k-1, \dots, -k$. Для достаточно большого j квадратный корень в (5.90) может быть аппроксимирован величиной $1/(2j)^k$. Этот множитель в свою очередь может быть скомбинирован с символическими степенями, появляющимися в разложении символической D -функции, таким образом, что для достаточно большого j символические степени заменяются на обычные степени:

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{j+m}{2j}}, \quad \sin \frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{j-m}{2j}}. \quad (5.91)$$

Выполнение этих деталей приводит к асимптотическому соотношению

$$C_{m,\mu,m+\mu}^{jkj+\Delta} \sim (-1)^{\Delta-\mu} D_{\mu\Delta}^k \left(\begin{array}{cc} \cos \frac{\beta}{2} & \sin \frac{\beta}{2} \\ -\sin \frac{\beta}{2} & \cos \frac{\beta}{2} \end{array} \right) = d_{\mu\Delta}^k(\beta), \quad (5.92)$$

где для большого j мы можем также записать

$$\cos \beta = m/\sqrt{j(j+1)} \sim m/j. \quad (5.93)$$

В частности, имеем

$$C_{m0m}^{jkj} \sim P_k(\cos \beta). \quad (5.94)$$

Коэффициенты Рака имеют подобное асимптотическое выражение. Этот результат следует прямо из формулы (3.280) гл. 3:

$$W_{\rho\sigma\tau}^{abc}(j) \sim C_{\rho\sigma\tau}^{abc} \quad (5.95)$$

для большого j . Таким образом, используя асимптотическое соотношение (5.92), находим

$$W_{m,\mu,m+\mu}^{jkj+\Delta}(J) \sim d_{\mu\Delta}^k(\beta) \quad (5.96)$$

для больших j и J . В согласованных обозначениях этот результат принимает вид

$$[(2J-2\mu+1)(2j+2\Delta+1)]^{\frac{1}{2}} W(J-m-\mu, j, J, k; J-\mu, j+\Delta) \sim d_{\mu\Delta}^k(\beta), \quad (5.97)$$

где β определяется формулой (5.93). В частности, положив $\Delta = \mu = 0$ и заменив m на $-m$, имеем

$$(-1)^k [(2j+1)(2J+1)]^{\frac{1}{2}} W(j, k, J+m, J; jJ) \sim P_k(\cos \beta). \quad (5.98)$$

Угол β , появившийся в асимптотическом выражении (5.98), может быть оценен более точно, чем в (5.93), путем *определения* $\cos\beta$ как результата, полученного из (5.98) для $k = 1$:

$$\cos\beta = \frac{(J+m)(J+m+1) - j(j+1) - J(J+1)}{2[j(j+1)J(J+1)]^{\frac{1}{2}}}. \quad (5.93')$$

Беря асимптотические пределы, сначала $J \rightarrow \infty$, а затем $j \rightarrow \infty$, получаем результат (5.93), что показывает правильность этой формулы (порядок пределов определяется последовательностью $W \rightarrow C \rightarrow D$, как в нашем выводе).

9. Приложения

А. СХЕМЫ ГЕЛЬФАНДА, ЮНГА, ВЕЙЛЯ И ОБОБЩЕНИЯ НА БОЗОННЫЕ ПОЛИНОМЫ

Введение другого обозначения для квантовой теории углового момента является излишним для самой теории, но новое обозначение сильно упрощает задачу понимания связи теории с симметричной группой и обобщения до унитарной группы $U(n)$. Сущность этого обозначения состоит в признании того, что бозонное исчисление имеет дело с целыми числами (фактически с множествами целых чисел), и мы можем использовать геометрические построения, чтобы перевести структуру на язык этих построений из целых чисел.

Фактически ситуация очень похожа на ту, которая возникает для случая симметричной группы, где введение схем Юнга определяет неприводимое представление, а *стандартные диаграммы Юнга* (схемы Юнга, в которые вписаны целые числа от 1 до n всеми возможными путями, удовлетворяющими условиям, описанным ниже) определяют векторы состояний пространства неприводимого представления.

Хотя развитие деталей теории представлений симметричной группы S_n и унитарной группы $U(n)$ выходит за рамки настоящей книги, полезно изложить кратко те аспекты этой теории, которые связаны с угловым моментом. В этом приложении мы представляем соответствующую терминологию и результаты теории углового момента, указывающие на обобщения.

*Схемы Вейля*¹⁾. Первым требуемым понятием являются *схемы Юнга*. Схема Юнга $Y_{[\lambda]}$ формы $[\lambda] = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$, где λ_i — неотрицательные целые числа, удовлетворяющие условию $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, представляет собой диаграмму, состоящую из λ_1 квадратов в строке 1, λ_2 квадратов в строке 2, ..., λ_n квадратов в строке n , расположенных так:

¹⁾ Юнг [18] интересовался теорией инвариантов, использующей симметричные группы; он рассматривал схемы с n квадратами, заполненными целыми числами от 1 до n . Насколько мы знаем, Вейль [19] первый использовал схемы Юнга, заполненные повторяющимися целыми числами. Поэтому мы ссылаемся на последние как на *таблицы* (или *схемы*) *Вейля*, оставляя термин *диаграммы Юнга* для более ограниченных случаев.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & \dots & & & \\ \hline & & & \dots & & & \\ \hline \vdots & & & & & & \\ \hline & & & \dots & & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{l} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array} \quad (A-1)$$

Схемы (или таблицы) Вейля являются схемами Юнга, в которых квадраты «заполнены» целыми числами, выбранными из $1, 2, \dots, n$. Схема Вейля является *стандартной*, если последовательность чисел в каждой строке схемы $Y_{[\lambda]}$ не уменьшается при чтении слева направо, а последовательность чисел в каждом столбце *строго увеличивается* при чтении сверху вниз. *Вес*, или *содержание* (W), таблицы Вейля $Y_{[\lambda]}$ определяется как вектор-строка $(W) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, где w_k равно числу повторений целого числа k в схеме. Если $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = N$, то также $w_1 + w_2 + \dots + w_n = N$. Мы будем называть $[\lambda]$ *разбиением* числа N на n частей, или просто *разбиением*, если N не определено. Мы также считаем нули в определении частей разбиения. Например, разбиения числа 4 на 3 части имеют вид $[4 \ 0 \ 0]$, $[3 \ 1 \ 0]$, $[2 \ 2 \ 0]$ и $[2 \ 1 \ 1]$. Когда число частей определено, нули часто опускают (записывая в рассмотренном примере $[4]$, $[3 \ 1]$, и $[2 \ 2]$).

Пример. Стандартные схемы Вейля, соответствующие схеме Юнга $\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}$, имеют вид

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 1 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline 2 & 3 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \\ \\ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} & \end{array} \quad (A-2)$$

Схемы Гельфанда. Изящное геометрическое обозначение, учитывающее ограничения, наложенные на числа в схеме Юнга, дается *схемами Гельфанда*, которые мы теперь определим.

Схемой Гельфанда¹⁾ является треугольное расположение n строк целых чисел, причем имеется одно число в первой строке снизу, два числа во второй строке, ... и n чисел в n -й строке. Числа в каждой строке $1, 2, \dots, n-1$ располагаются так, чтобы они находились между числами в верхней строке, как показано ниже:

¹⁾ Эти схемы впервые были введены Гельфандом и Цетлиным [20], чтобы перечислять базисные векторы пространства неприводимого представления полной линейной группы (см. также дополнение I в работе [1]).

$$\begin{pmatrix} [m] \\ (m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{1n} & m_{2n} & \cdots & m_{nn} \\ & m_{13} & m_{23} & m_{33} \\ & & m_{12} & m_{22} \\ & & & m_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{A-3})$$

Целые числа m_{ij} , $i \leq j = 1, 2, \dots, n$, в этом расположении должны удовлетворять следующим правилам¹⁾:

$$\text{а) } m_{1n} \geq m_{2n} \geq \cdots \geq m_{nn}. \quad (\text{A-4})$$

б) Для каждого выбранного разбиения $[m_{1n}, \dots, m_{nn}]$ числа оставшихся строк $j = n-1, n-2, \dots, 1$ могут быть любыми целыми числами, удовлетворяющими «условиям промежуточности»¹⁾:

$$m_{1j+1} \geq m_{1j} \geq m_{2j+1} \geq m_{2j} \geq m_{3j+1} \geq m_{3j} \geq \cdots \geq m_{i-1j} \geq m_{jj} \geq m_{j+1j+1}. \quad (\text{A-5})$$

Например, для $n = 3$ и $[m_{13} m_{23} m_{33}] = [2 \ 1 \ 0]$ существует восемь схем Гельфанда, которые показаны ниже:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A-6})$$

Соответствие между схемами Гельфанда и Вейля. Существует взаимно-однозначное соответствие между множеством схем Гельфанда (m) , имеющих n -ю строку $[m_{1n} m_{2n} \dots m_{nn}]$ ($m_{nn} \geq 0$), и множеством стандартных схем Вейля этой формы.

Соответствие между схемами Гельфанда и стандартными схемами Вейля описывается следующим образом. Форма схемы имеет вид $[m_{1n} m_{2n} \dots m_{nn}]$, а строки схемы заполняются в соответствии со следующим правилом (читаем вдоль диагоналей схемы Гельфанда):

¹⁾ Число m_{in} может быть положительным, нулем или отрицательным, удовлетворяющим неравенствам (A-4). Неравенства (A-5) являются выражением закона сужения Вейля ([21], стр. 391) для полной линейной группы.

$$\begin{array}{llll}
\text{Строка 1: } m_{11}, & m_{12} - m_{11}, & m_{13} - m_{12}, \dots, & m_{1n} - m_{1n-1}, \\
\text{Строка 2:} & m_{22}, & m_{23} - m_{22}, \dots, & m_{2n} - m_{2n-1}, \\
\vdots & & & \\
\text{Строка } j: & m_{jj} & m_{jj+1} - m_{jj}, \dots, & m_{jn} - m_{jn-1}, \\
\vdots & & & \\
\text{Строка } n: & & & m_{nn}.
\end{array} \quad (\text{A-7})$$

Используя правило (A-7), видим, что множество схем Гельфанда (A-6) отображается в множество схем Вейля (A-2). Обратно, из каждой стандартной схемы Вейля (A-2) строим очевидным образом схему Гельфанда из множества (A-6).

Вес, или содержание, схемы Гельфанда (m) определяется как вектор-столбец $(W) = (w_1, w_2, \dots, w_n)$, где w_j определяется как сумма чисел в строке j схемы (m) минус сумма чисел в строке $j-1$ ($w_1 \equiv m_{11}$):

$$w_j = \sum_{i=1}^j m_{ij} - \sum_{i=1}^{j-1} m_{ij-1}. \quad (\text{A-8})$$

Ясно, что это определение веса совпадает с определением, данным выше для стандартных схем Вейля.

Ограничение в стандартной схеме Вейля, состоящее в том, что каждая строка (столбец) должна содержать множество неубывающих (строго увеличивающихся) неотрицательных целых чисел, реализуется в схеме Гельфанда «геометрическим» правилом, состоящим в том, что целые числа (m_{ij}) удовлетворяют условиям промежуточности.

Пространства представлений симметричной группы. Важные относящиеся к схемам результаты для симметричной группы S_n состоят в следующем: а) множество неприводимых представлений группы S_n находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством разбиений $\{[\lambda]\}$ числа n на n частей; б) множество базисных векторов пространства неприводимого представления $[\lambda]$ группы S_n находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством стандартных схем Юнга формы $[\lambda]$, имеющих вес $(W) = (1, 1, \dots, 1)$ (число базисных векторов или число стандартных схем равно размерности представления). Конечно, этот результат может быть выражен с помощью схем Гельфанда. Например, неприводимые представления группы S_3 нумеруются разбиениями числа 3 на 3 части $[3 \ 0 \ 0]$, $[2 \ 1 \ 0]$ и $[1 \ 1 \ 1]$. Стандартные схемы Юнга веса $(1, 1, 1)$ такой формы соответственно имеют вид

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}; \quad \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 2 & 1 \\ \hline \end{array}; \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline \end{array}. \quad (\text{A-9})$$

Таким образом, неприводимые представления $[3 \ 0 \ 0]$, $[2 \ 1 \ 0]$ и $[1 \ 1 \ 1]$ имеют размерности 1, 2 и 1 соответственно. Эти же результаты перечисляются схемами Гельфанда

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \\ 1 & & \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \\ 1 & & \end{pmatrix}. \quad (\text{A-10})$$

Стандартные схемы Юнга для S_n часто также изображаются другой индексирующей схемой — символом Яманучи [22]

$$(Y) = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n). \quad (A-11)$$

Здесь Y_{n-j+1} — положительное целое число, равное строке, в которой j появляется в заданной стандартной таблице Юнга формы $[\lambda]$ и веса $(1, 1, \dots, 1)$; Y_{n-j+1} также является положением (если считать слева), в котором оказывается 1 в множестве разностей

$$m_{1j} - m_{1j-1}, m_{2j} - m_{2j-1}, \dots, m_{j-1j} - m_{j-1j-1}, m_{jj} \quad (A-12)$$

образованных из чисел схемы Гельфанда, соответствующей $[m_{1n} \dots m_{nn}] = [\lambda_1 \dots \lambda_n]$ и имеющей вес $(1, 1, \dots, 1)$. Например, символы Яманучи для схем Юнга (A-9) и схем Гельфанда (A-10) соответственно имеют вид

$$(1, 1, 1); (2, 1, 1), (1, 2, 1), (3, 2, 1). \quad (A-13)$$

Символы Яманучи фактически являются *решеточными перестановками*. Решеточная перестановка n символов, которые включают символ a , повторенный α раз, символ b , повторенный β раз, ..., символ z , повторенный ζ раз, с $\alpha + \beta + \dots + \zeta = n$, определяется как любая последовательность (расположенная, скажем, вдоль строки страницы) этих n символов (a , повторенных α раз, b , повторенных β раз, ...), такая, что первые p символов в последовательности содержат (считая слева) количество символов a не меньше, чем b , символов b не меньше, чем c , ..., символов y не меньше, чем z , и это свойство должно иметь место для каждого $p = 1, 2, \dots, n$. Решеточную перестановку, удовлетворяющую этому условию, называют перестановкой типа

$$a^{\alpha} b^{\beta} \dots z^{\zeta}. \quad (A-14)$$

Символы Яманучи множества стандартных схем Юнга формы $[\lambda]$ являются решеточными перестановками типа

$$n^{j_n} \dots 2^{j_2} 1^{j_1}. \quad (A-15)$$

Пространства представлений группы вращений. Важные результаты, относящиеся к схемам для группы вращений $[SU(2)]$, состоят в следующем: а) множество неприводимых представлений группы вращений находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством разбиений $[2j \ 0]$, $j = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$; б) множество базисных векторов пространства неприводимого представления $[2j \ 0]$ находится во взаимно-однозначном соответствии с множеством схем Гельфанда, имеющих разбиение $[2j \ 0]$:

$$\begin{pmatrix} 2j & 0 \\ j+m & \end{pmatrix}, \quad m = -j, -j+1, \dots, j \quad (A-16)$$

(Отметим, что правило промежуточности естественным образом воплощает тот факт, что квантовое число m пробегает значения $m = -j, \dots, j$.)

Схема Вейля, соответствующая схеме Гельфанда (A-16), является однострочной схемой:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & \dots & 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ \hline \longleftarrow j+m \longrightarrow & & & & \longleftarrow j-m \longrightarrow & & & \\ \hline \end{array} \quad (A-17)$$

Сразу видим, что бозонно-операторная форма собственного кет-вектора (5.33) является прямым описанием этой схемы, если заменить 1 на a_1 , 2 на a_2 и провести нормировку.

Для этих бозонных состояний нормировочный множитель находится легко; но обобщение на группу $U(n)$ является более интересным и представляет одну из многих функций над схемами унитарной симметрии. Это обсуждается ниже, используя понятие «запутывания» бозонов.

Рассмотрим теперь стандартную схему Вейля из двух строк, соответствующую схеме Гельфанда

$$\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix}, \quad (\text{A-18})$$

где $m_{12} \geq m_{11} \geq m_{22}$:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline \overleftarrow{m_{22}} & \overrightarrow{m_{11} - m_{22}} & \overleftarrow{m_{12} - m_{11}} & & & & & & & & & \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hline 2 & 2 & \cdots & 2 & & & & & & & & \\ \hline \end{array}. \quad (\text{A-19})$$

Отображение схем Вейля в бозоны задается формулами

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 1 \end{pmatrix} \rightarrow a_1^1,$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} \rightarrow a_2^1,$$

$$\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \det \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 \\ a_2^1 & a_2^2 \end{pmatrix} \equiv a_{12}^{12}. \quad (\text{A-20})$$

Схема Вейля $\begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline \end{array}$ соответствует антисимметризованным бозонам, построенным из двух независимых бозонов a_i^1 и a_i^2 ($i = 1, 2$).

Используя соответствие (A-20), получаем следующий бозонный вектор состояния, соответствующий схеме Гельфанда (A-18) и схеме Вейля (A-19):

$$\left| \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} \right\rangle = M^{-\frac{1}{2}} (a_{12}^{12})^{m_{22}} (a_1^1)^{m_{11} - m_{22}} (a_2^1)^{m_{12} - m_{11}} |0\rangle, \quad (\text{A-21})$$

где нормировочный множитель задается формулой

$$M = \frac{(m_{12} + 1)!(m_{11} - m_{22})!(m_{12} - m_{11})!(m_{22})!}{(m_{12} - m_{22} + 1)!}. \quad (\text{A-22})$$

Индексы углового момента для состояний (A-21) следующие:

$$j = \frac{m_{12} - m_{22}}{2},$$

$$m = m_{11} - \frac{m_{12} + m_{22}}{2}. \quad (\text{A-23})$$

$2m_{22}$ антисимметричных (спаренных) бозонов являются инертными, если рассматривать угловой момент; т.е. a_{12}^{12} инвариантен при унитарных унимоду-

лярных преобразованиях вида (5.43). Применение этих результатов к группе $U(2)$ дано в приложении Д.

Нормировочный множитель M , заданный формулой (А-22), обнаруживает очень интересную структуру («запутывание»). Для ее обсуждения требуется понятие «крючок» Накаямы [23] и понятие «длина крючка» [23а, 24].

Эти понятия определяются следующим образом: а) (i, j) -крючок схемы Юнга $Y_{[\lambda]}$ состоит из квадрата в строке i ($i = 1, 2, \dots, n$) и столбце j ($j = 1, 2, \dots, \lambda_i$ для фиксированного i) вместе с $\lambda_i - j$ квадратами справа (называемыми *плечом* крючка) и $\lambda'_j - i$ квадратами¹⁾ снизу (называемыми *ногой* крючка); б) длиной h_{ij} (i, j) -крючка является число квадратов в крючке, т.е.

$$h_{ij} = (\lambda_i - j) + (\lambda'_j - i) + 1 \quad (\text{А-24})$$

Пример.

Схема Юнга:  (А-25)

крючки		длины крючков
$(1, 1)$		$h_{11} = 5$
$(1, 2)$		$h_{12} = 4$
$(1, 3)$		$h_{13} = 2$
$(1, 4)$		$h_{14} = 1$
$(2, 1)$		$h_{21} = 2$
$(2, 2)$		$h_{22} = 1$

(А-26)

Крючковый граф для $Y_{[\lambda]}$ получается путем записи длины h_{ij} крючка в (i, j) -квадраты.

Пример. Крючковый граф для $Y_{[42]}$ имеет вид

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 2 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array} \quad (\text{А-27})$$

Произведение всех h_{ij} , появляющихся в крючковом графе для $Y_{[\lambda]}$, обозначается через $H^{[\lambda]}$.

Фундаментальные формулы, включающие длины крючков, следующие [24]:

$$\dim[\lambda] = n! / H^{[\lambda]} \quad \text{для } S_n, \quad (\text{А-28})$$

где $\dim[\lambda]$ обозначает размерность неприводимого представления $[\lambda]$ группы S_n , и

$$\text{Dim}[\lambda] = \prod_{i,j} (n + j - i) / H^{[\lambda]} \quad \text{для } U(n), \quad (\text{А-29})$$

где $\text{Dim}[\lambda]$ обозначает размерность неприводимого представления $[\lambda]$ группы $U(n)$, и произведение берется по всем квадратам схемы Юнга.

¹⁾ $Y_{[\lambda']}$ обозначает схему Юнга, сопряженную к $Y_{[\lambda]}$; она получается из $Y_{[\lambda]}$ перестановкой строк и столбцов.

Понятие запутывания крючка схемы Юнга зависит от стандартной схемы Вейля, приписанной схеме Юнга. Определение дается следующим образом [25]: (ij) -крючок *запутан* в схеме Вейля, если его плечо содержит по крайней мере одно целое число, общее с целыми числами в (i, j) -квадрате и ноге.

Пример. $(1, 1)$ -, $(1, 2)$ - и $(2, 1)$ -крючки, показанные в (А-26), запутаны в схеме Вейля

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 2 & 2 & & \\ \hline \end{array} \quad (A-30)$$

Запутанный крючковый граф схемы Вейля получается путем записи длины h_{ij} каждого запутанного крючка в (i, j) -квадрат и 1 в каждый из остальных квадратов.

Пример. Запутанный крючковый граф схемы Вейля (А-30) есть

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 5 & 4 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 1 & & \\ \hline \end{array} \quad (A-31)$$

Результат для нормировочного множителя M (формула (А-22)) теперь может быть сформулирован так: *нормировочный множитель M является произведением чисел в запутанном крючковом графе схемы Вейля (А-19).*

Двойные диаграммы и матрицы вращений. Более тщательное изучение (см. (А-20)) базисных векторов (А-21) обнаруживает, что схема Вейля (А-19) была использована для того, чтобы приписать *нижние индексы* бозонам. Фактически видим, что приписывание верхних индексов берет начало в схеме Вейля

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \overleftarrow{m_{22}} & \overleftarrow{m_{12} - m_{22}} & & \\ \hline 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \hline 2 & 2 & \cdots & 2 \\ \hline \end{array} \quad (A-32)$$

соответствующей максимальной схеме Гельфанда (т.е. при выборе максимального m_{11})

$$\begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{12} & m_{11} \end{pmatrix}. \quad (A-33)$$

Более подробное обозначение для вектора состояния (А-21) использует *двойную схему Вейля* или *двойную схему Гельфанда*:

$$\left| \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \hline 2 & \cdots & 2 & \\ \hline \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & \cdots & 1 & 2 \\ \hline 2 & \cdots & 2 & \\ \hline \end{array} \right) \right\rangle = \left| \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{12} & m_{11} \end{pmatrix} \right\rangle \equiv M^{-1} (a_1^{\dagger 2})^{m_{22}} (a_1^{\dagger})^{m_{11} - m_{22}} (a_2^{\dagger})^{m_{12} - m_{11}} |0\rangle, \quad (A-34)$$

где а) схемы Юнга имеют *одну и ту же форму*; б) по соглашению вторая схема Гельфанда (А-33) перевернута над первой схемой (А-18), для того чтобы описать явно индексы $[m_{12} m_{22}]$, задающие общую форму схемы Юнга; в) отображение из

двойной схемы Вейля в бозоны получается путем спаривания столбцов, которые находятся в *одинаковых положениях* в двух схемах Вейля:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \rightarrow a_{12}^{12} \quad (\text{A-35})$$

$$\{ \begin{bmatrix} i \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} j \\ \end{bmatrix} \} \rightarrow a_i^j, \quad i, j = 1, 2. \quad (\text{A-36})$$

В схемах в (A-34) пара столбцов

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$$

встречается m_{22} раз, пара столбцов $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix} \}$ — $m_{11} - m_{22}$ раз и пара столбцов $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ \end{bmatrix} \}$ — $m_{12} - m_{11}$ раз.

Значение переписывания формулы (A-21) в виде (A-34) состоит в том, что теперь последний результат обобщается: *схема Вейля во втором положении* (т.е. верхняя схема Гельфанда) *может быть взята как любая стандартная схема, соответствующая форме $[m_{12}m_{22}]$* . Отображения (A-35) и (A-36) теперь приписывают определенный вектор состояния (или бозонный полином) каждой паре стандартных схем Вейля одной и той же формы.

В обозначениях с помощью схем Гельфанда полиномы, которые соответствуют двойным схемам Вейля и определяются по правилам (A-35) и (A-36), следующие:

$$P \begin{pmatrix} m'_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} (A) \equiv (a_{12}^{12})^{m_{22}} (a_1^1)^{m'_{11} - m_{22}} (a_2^1)^{m'_{11} - m_{11}} (a_2^2)^{m_{12} - m'_{11}}, \quad (\text{A-37})$$

если $m'_{11} \geq m_{11}$, и

$$P \begin{pmatrix} m'_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} (A) \equiv (a_{12}^{12})^{m_{22}} (a_1^1)^{m_{11} - m_{22}} (a_1^2)^{m_{11} - m'_{11}} (a_2^2)^{m_{12} - m_{11}}, \quad (\text{A-38})$$

если $m'_{11} < m_{11}$.

Вес (или содержание) (W, W') полинома (A-37) или (A-38), соответствующего двойной стандартной схеме, определяется формулой

$$\begin{aligned} (W, W') &= (w_1, w_2, w'_1, w'_2) \\ &= (m_{11}, m_{12} + m_{22} - m_{11}, m'_{11}, m_{12} + m_{22} - m'_{11}). \end{aligned} \quad (\text{A-39})$$

(Здесь $w_i(w'_i)$ — число повторений i в левой (правой) схеме Вейля двойной стандартной схемы; $w_i(w'_i)$ также является числом нижних (верхних) индексов i в полиномах (A-37) и (A-38).)

Важны следующие свойства полиномов, соответствующих двойным стандартным схемам:

а) Множество полиномов веса (W, W') является (линейно независимым) базисом векторного пространства, натянутого на все одночлены от бозонов $\{a_i^j\}$, которые содержат w_i нижних индексов i и w'_j верхних индексов j .

б) Множество полиномов, соответствующих всем разбиениям $[m]$ неотрицательного целого числа N , является базисом векторного пространства однородных полиномов степени N от бозонов $\{a_i\}$.

в) Матрица $P^{[m]}(A)$, имеющая в строке $m_{11}(m_{11} = m_{12}, \dots, m_{22})$ и в столбце $m'_{11}(m'_{11} = m_{12}, \dots, m_{22})$ элемент, заданный бозонными полиномами (А-37) и (А-38), является неприводимым представлением унитарной группы $U(2)$, где матрица A заменяется на унитарную матрицу $U \in U(2)$. (Представление в общем случае не унитарно.)

Бозонные полиномы, появляющиеся в базисных векторах (5.80), являются ортонормированной версией полиномов, соответствующих двойным стандартным схемам. Для общих двойных схем Гельфанда эти бозонные полиномы определяются выражением

$$B \begin{pmatrix} m'_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} (A) \equiv (a_{12}^{12})^{m_{22}} D_{mm'}^j(A), \quad (\text{А-40})$$

где

$$j = (m_{12} - m_{22})/2, \quad m = m_{11} - (m_{12} + m_{22})/2,$$

$$m' = m'_{11} - (m_{12} + m_{22})/2. \quad (\text{А-41})$$

Соответствующие ортонормированные базисные векторы имеют вид

$$\left| \begin{pmatrix} \mu_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} \right\rangle \equiv \left[\frac{(m_{12} + 1)!(m_{22})!}{(m_{12} - m_{22} + 1)!} \right]^{-\frac{1}{2}} B \begin{pmatrix} \mu_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} (A) |0\rangle, \quad (\text{А-42})$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \mu'_{11} & \\ m'_{12} & m'_{22} \\ & m'_{11} \end{pmatrix} \right| \begin{pmatrix} \mu_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} \right\rangle = \delta_{\mu'_{11}\mu_{11}} \prod_{i,j} \delta_{m'_{ij}m_{ij}}. \quad (\text{А-43})$$

Для $\mu_{11} = m_{12}$ (или для $m_{11} = m_{12}$) полиномы (А-40) (с точностью до числового множителя) совпадают с полиномами ((А-37) и (А-38)), прямо полученными из двойных стандартных схем Вейля. Однако общий полином (А-40) не получается прямо из соответствующей двойной схемы, а порождается из $\mu_{11} = m_{12}$ -полинома путем применения (кратного коммутирования) понижающего оператора E^{21} (см. (5.59)), гарантируя ортонормированность соответствующих базисных векторов (А-42):

$$\begin{aligned} B \begin{pmatrix} \mu_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} (A) &= \left[\frac{(\mu_{11} - m_{22})!}{(m_{12} - m_{22})!(m_{12} - \mu_{11})!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[E^{21}, B \begin{pmatrix} m_{12} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} (A) \right]_{(m_{12} - \mu_{11})} \\ &= \left[\frac{(\mu_{11} - m_{22})!}{(m_{12} - m_{22})!(m_{12} - \mu_{11})!} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\frac{(m_{11} - m_{22})!}{(m_{12} - m_{22})!(m_{12} - m_{11})!} \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

$$\times \left[E^{21}, \left[E_{21}, B \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{12} & m_{12} \end{pmatrix} (A) \right] \right]_{(m_{12}-m_{11})}^{(m_{12}-\mu_{11})} \quad (\text{A-44})$$

где

$$B \begin{pmatrix} m_{12} & m_{22} \\ m_{12} & m_{12} \end{pmatrix} (A) = (a_{12}^{12})^{m_{22}} (a_1^1)^{m_{12}-m_{22}}, \quad (\text{A-45})$$

а квадратные скобки обозначают кратные коммутаторы.

Вышеприведенные свойства «а» — «в» (после формулы (A-39)) применимы также к ортонормированным бозонным полиномам

$$B \begin{pmatrix} \mu_{11} & m_{22} \\ m_{12} & m_{11} \end{pmatrix} (A),$$

за исключением того, что теперь в свойстве «в» мы получаем унитарные неприводимые представления группы $U(2)$ (см. приложение Д).

Свойства бозонных полиномов (A-40) рассматриваются подробнее в приложениях Б — Д. (Подробные соотношения для полиномов, соответствующих двойным стандартным схемам, отсутствуют в литературе.)

Обобщения. Рассмотрим двойную стандартную схему (или таблицу) Вейля формы $[m] = [\lambda] = [\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_n]$:

$$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline i_{11} & i_{12} & \dots & i_{1\lambda_1} \\ \hline i_{21} & i_{22} & \dots & i_{2\lambda_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline i_{n1} & i_{n2} & \dots & i_{n\lambda_n} \\ \hline \end{array} \right) \left(\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline j_{11} & j_{12} & \dots & j_{1\lambda_1} \\ \hline j_{21} & j_{22} & \dots & j_{2\lambda_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline j_{n1} & j_{n2} & \dots & j_{n\lambda_n} \\ \hline \end{array} \right) \quad (\text{A-46})$$

Двойная стандартная схема Вейля формы $[m]$ находится во взаимно-однозначном соответствии с двойной схемой Гельфанда

$$\begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix}, \quad (\text{A-47})$$

где левая схема Вейля в (A-46) строится из схемы Гельфанда

$$\begin{pmatrix} [m] \\ (m) \end{pmatrix} \quad (\text{A-48})$$

согласно правилу (A-7) и правая схема Вейля в (A-46) подобным образом строится из схемы Гельфанда

$$\begin{pmatrix} [m] \\ (m') \end{pmatrix}. \quad (\text{A-49})$$

С каждой парой столбцов в соответствующих положениях из левой и правой схем двойной стандартной схемы Вейля (A-46) мы сопоставляем детерминантный бозон по правилу

$$\left\{ \begin{array}{c} i_{1k} \\ i_{2k} \\ \vdots \\ i_{\lambda_k k} \end{array} \right\}, \left\{ \begin{array}{c} j_{1k} \\ j_{2k} \\ \vdots \\ j_{\lambda_k k} \end{array} \right\} \rightarrow a_{i_{1k} \dots i_{\lambda_k k}}^{j_{1k} \dots j_{\lambda_k k}}, \quad (\text{A-50})$$

где

$$a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} \equiv \det \begin{pmatrix} a_{i_1}^{j_1} & \dots & a_{i_1}^{j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k}^{j_1} & \dots & a_{i_k}^{j_k} \end{pmatrix} \quad (\text{A-51})$$

Далее мы определяем бозонный полином, соответствующий двойной стандартной схеме Вейля (или, что эквивалентно, соответствующий двойной схеме Гельфанда), образуя произведение детерминантных бозоивов (A-50) для всех столбцов $1, 2, \dots, \lambda_1$ схемы. Используя для обозначения полиномов двойные схемы Гельфанда, имеем

$$P \begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix} (A) \equiv \prod_{k=1}^{\lambda_1} a_{i_{1k} \dots i_{\lambda_k k}}^{j_{1k} \dots j_{\lambda_k k}}. \quad (\text{A-52})$$

Выделим два отдельных случая соотношения (A-52):

$$P \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix} (A) = \prod_{k=1}^n (a_{12\dots k}^{12\dots k})^{m_{kn} - m_{k+1n}}, \quad (\text{A-53})$$

$$P \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\text{semi-max}) \end{pmatrix} (A) = \prod_{k=1}^{n-1} (a_{12\dots k}^{12\dots k})^{m_{kn-1} - m_{k+1n}} \times \prod_{k=1}^n (a_{12\dots k-1n}^{12\dots k-1k})^{m_{kn} - m_{kn-1}}, \quad (\text{A-54})$$

где $m_{ij} = 0$ для $i > j$, $a_{12\dots k-1n}^{12\dots k-1k} \equiv a_n^k$ для $k = 1$. Здесь введены специальные обозначения схем:

$$\begin{pmatrix} [m] \\ (\max) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m_{1n} & m_{2n} & \dots & m_{n-1n} & m_{nn} \\ & \ddots & & & m_{n-1n} \\ & & \ddots & & \\ & & & m_{1n} & m_{2n} \end{pmatrix}, \quad (\text{A-55})$$

$$\begin{pmatrix} [m] \\ (\text{semi-max}) \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} m_{1n} & m_{1n} & \dots & m_{n-1n} & m_{nn} \\ & m_{1n-1} & m_{2n-1} & \dots & m_{n-1n-1} \\ & & & & (\max) \end{pmatrix}. \quad (\text{A-56})$$

Вес, или содержание (W, W') , двойной стандартной схемы (A-46) (и двойной схемы Гельфанда (A-47)) определяется как

$$(W, W') = (w_1, \dots, w_n, w'_1, \dots, w'_n), \quad (\text{A-57})$$

где (W) и (W') — веса левой и правой стандартных схем (верхней и нижней схем Гельфанда) соответственно; w_i и w'_i также равны числу индексов i среди всех нижних и верхних индексов бозонного полинома (A-52) соответственно. (Мы также говорим, что полином (A-52) имеет вес (W, W') .)

Отмеченные выше (стр. 226) важные свойства «а» и «б» обобщаются на полиномы

$$P \begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix} (A),$$

соответствующие двойным стандартным схемам Вейля. Свойство «в» также обобщается на полную унитарную группу¹⁾, но теперь строки и столбцы матрицы $P^{[m]}(A)$ нумеруются схемами Гельфанда $((m), (m'))$ для группы $U(n-1)$.

Большое внимание в физической литературе уделялось изучению набора унитарных групп $U(n)$, используя $n \times n$ -бозон, рассмотренный в разд. 5. Главный упор делался на построение ортонормированных базисных векторов, обозначаемых на языке двойных схем Гельфанда через

$$\left| \begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix} \right\rangle \equiv [\mathcal{M}([m])]^{-\frac{1}{2}} B \begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix} (A) |0\rangle, \quad (\text{A-58})$$

где

$$\mathcal{M}([m]) = \prod_{i=1}^n p_{in}! / \prod_{i < j} (p_{in} - p_{jn}), \quad (\text{A-59})$$

и

$$p_{in} \equiv m_{in} + n - i. \quad (\text{A-60})$$

Символ $\mathcal{M}([m])$ обозначает произведение чисел в запутанном крючковом графе максимальной схемы Юнга, соответствующей максимальной схеме Гельфанда (A-55). Символ $\mathcal{M}([m])$ также называется мерой схемы Юнга формы $[m]$.

Базисные векторы (A-58) однозначно характеризуются (с точностью до фазы) как нормированные одновременные собственные векторы множества (независимых) взаимно коммутирующих эрмитовых операторов

$$\mathcal{L}_k^{(\lambda)} \equiv \sum_{i_1 i_2 \dots i_k}^{\lambda} E_{i_1 i_2} E_{i_2 i_3} \dots E_{i_k i_1}, \quad (\text{A-61})$$

$$\mathcal{U}_k^{(\lambda)} \equiv \sum_{j_1 j_2 \dots j_k}^{\lambda} E^{j_1 j_2} E^{j_2 j_3} \dots E^{j_k j_1}, \quad (\text{A-62})$$

где $\lambda = 1, 2, \dots, n$ и для каждого λ k пробегает значения $1, 2, \dots, \lambda$. Так как можно показать, что

$$\mathcal{U}_k^{(n)} \equiv \mathcal{L}_k^{(n)}, \quad k = 1, 2, \dots, n, \quad (\text{A-63})$$

то существует n^2 различных операторов, определенных формулами (A-61) и (A-62), и собственные значения одновременных собственных векторов определяют n^2 чисел, возникающих в двойной схеме Гельфанда (A-47).

Бозонные полиномы

$$B \begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix} (A) \quad (\text{A-64})$$

появляющиеся в (A-58), и полиномы, соответствующие двойным схемам:

$$P \begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix} (A)$$

¹⁾ В действительности результат справедлив для полной линейной группы.

заданной формулой (A-52), являются базисом одного и того же векторного пространства. Однако только для схем

$$\begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\text{semi-max}) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} (\text{semi-max}) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix} \quad (\text{A-65})$$

полиномы согласуются (с точностью до нормировочного множителя). В частности, заметим, что

$$B \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix} (A) = P \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix} (A), \quad (\text{A-66})$$

$$B \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\text{semi-max}) \end{pmatrix} (A) = \left[\frac{M}{H^{[m]}} \right]^{-\frac{1}{2}} P \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\text{semi-max}) \end{pmatrix} (A). \quad (\text{A-67})$$

Важное свойство [14] бозонных полиномов состоит в следующем: при отображении $A \rightarrow U \in U(n)$ полиномы

$$B \begin{pmatrix} (m') \\ [m] \\ (m) \end{pmatrix} (U) \quad (\text{A-68})$$

являются элементами унитарного матричного неприводимого представления $D^{[m]}(U)$ группы $U(n)$.

Имеется обширная литература, развивающая различные свойства самих бозонных полиномов (A-64), их связь с коэффициентами Вигнера группы $U(n)$ и с векторами состояния точного углового момента n -частичных систем, и мы отсылаем читателя к этой литературе, где имеются все детали (см. замечания в конце этого приложения).

Мы заключаем это приложение обсуждением бозонной интерпретации классического математического результата — *тождества Капелли* ([26], стр. 41) — и применения этого результата к определению множителя меры (A-59). С небольшой модификацией результата, приведенного Вейлем [26], тождество Капелли может быть записано в виде

$$\det \begin{pmatrix} E^{11} + n - 1 & E^{12} & \dots & E^{1n} \\ E^{21} & E^{22} + n - 2 & \dots & E^{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E^{n1} & E^{n2} & \dots & E^{nn} \end{pmatrix} = a_{12\dots n}^{12\dots n} \bar{a}_{12\dots n}^{12\dots n}, \quad (\text{A-69})$$

где множители в свернутом детерминанте упорядочены так, что любой множитель из столбца i детерминанта лежит слева от любого множителя из столбца j при $i < j$. Например, для $n = 2$ имеем

$$\det \begin{pmatrix} E^{11} + 1 & E^{12} \\ E^{21} & E^{22} \end{pmatrix} = (E^{11} + 1)E^{22} - E^{21}E^{12} = a_{12}^{12} \bar{a}_{12}^{12}. \quad (\text{A-70})$$

Величины E^{ij} определены формулой (5.50).

Заметив, что

$$F^{ij} \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle = 0, \quad i < j, \quad (\text{A-71})$$

и используя тождество Капелли, находим следующий результат:

$$a_{12\dots n}^{12\dots n} \bar{a}_{12\dots n}^{12\dots n} \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle = \prod_{i=1}^n p_{in} \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (\text{A-72})$$

Замечая, что двойной максимальный весовой вектор для неприводимого представления $[m_{1n} \dots m_{kn} 0 \dots 0]$ группы $U(n)$ совпадает с двойным максимальным весовым вектором для неприводимого представления $[m_{1n} \dots m_{kn}]$ группы $U(k)$, т.е.

$$\left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} \dots m_{kn} 0 \dots 0] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle \equiv \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} \dots m_{kn}] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle,$$

видим, что тождество Капелли (A-69), примененное к $n = k$, также дает

$$\begin{aligned} & a_{12\dots k}^{12\dots k} \bar{a}_{12\dots k}^{12\dots k} \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} \dots m_{kn} 0 \dots 0] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \prod_{i=1}^k (p_{in} + k - n) \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} \dots m_{kn} 0 \dots 0] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Из этого результата следует (так как векторы нормированы)

$$\begin{aligned} & a_{12\dots k}^{12\dots k} \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} \dots m_{kn} 0 \dots 0] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left[\prod_{i=1}^k (p_{in} + k - n + 1) \right]^{\frac{1}{2}} \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} + 1 \dots m_{kn} + 1 0 \dots 0] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle. \end{aligned}$$

Повторяя этот результат λ раз, а затем положив $m_{kn} = 0$, после этого положив $\lambda = m_{kn}$ и заменяя m_{in} на $m_{in} - m_{kn}$ ($i = 1, 2, \dots, k$), находим

$$\begin{aligned} & \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} \dots m_{kn} 0 \dots 0] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= \left[\prod_{i=1}^k \frac{(p_{in} - p_{kn})!}{(p_{in} + k - n)!} \right]^{\frac{1}{2}} (a_{12\dots k}^{12\dots k})^{m_{kn}} \left| \begin{pmatrix} (\max) \\ [m_{1n} - m_{kn} \dots m_{k-1n} - m_{kn} 0 \dots 0] \\ (\max) \end{pmatrix} \right\rangle \quad (\text{A-73}) \end{aligned}$$

Используя этот результат повторно для $k = n$, а затем для $k = n - 1, \dots, k = 1$, и делая соответствующий сдвиг в индексах, получаем множитель меры, заданный формулой (А-59).

Замечания. а) Понятие стандартной диаграммы (схемы) было введено Юнгом [18] в его работе по теории инвариантов. б) Вейль [19] ввел (единичные) стандартные диаграммы (схемы) с повторяющимися целыми числами в своей работе по представлениям классических групп (поэтому полиномы (А-52), соответствующие правой диаграмме (схеме), которая максимальна в (А-46), часто называют *базисными векторами Вейля*). в) Единичные схемы Гельфанда были введены Гельфандом и Цетлиным [20], чтобы определить (абстрактные) ортонормированные базисные векторы в гильбертовом пространстве, на котором задано неприводимое унитарное представление группы $U(n)$. г) Отображение схем Гельфанда в стандартные схемы Юнга было дано Бейрдом и Биденхарном [27]. д) Броди и др. [28], а также Лаук [29] впервые отметили роль базисных векторов (А-58), заданных двойными схемами Гельфанда, на которые натягивается пространство однородных полиномов степеней N , когда $[m]$ пробегает все разбиения числа N (эти работы могут рассматриваться как естественное развитие более ранних работ Мошинского и его сотрудников [30-33] и Бейрда и Биденхарна [27]). Биденхарн и др. [34] дали абстрактное доказательство того, что ортонормированные базисные векторы, заданные схемами Гельфанда, обладают свойствами, описанными выше. е) Полиномы (А-52), соответствующие двойным стандартным схемам (в которых бозоны a_i^j заменены на трансцендентные $\langle x_i | u_j \rangle$, сопряженные к произвольному полю), были введены Дубиле и др. [35]; см. также [35а]. В этих статьях рассматриваются многие приложения этих форм к задачам математики. Дополнительные статьи, связанные с бозонным исчислением и развитием их свойств, включают [36-52а].

Б. УМНОЖЕНИЕ БОЗОННЫХ ПОЛИНОМОВ И ЛЕММА ФАКТОРИЗАЦИИ

Бозонные полиномы, появившиеся в (5.80) и определенные формулой

$$B \begin{pmatrix} k + m' & k - j \\ k + j & k - j \\ k + m \end{pmatrix} (A) \equiv (\det A)^{k-j} D_{mm}^j(A) \quad (\text{Б-1})$$

интересны по нескольким причинам

а) Множество полиномов, соответствующих $2k$ (неотрицательное целое число), $2j = 0, 1, \dots, 2k$ и $m, m' = j, j - 1, \dots, -j$, составляет базис пространства однородных полиномов степени $2k$ от a_i^j . Размерность этого пространства равна

$$\sum_j (2j + 1)^2 = \binom{2k + 3}{3}.$$

б) Полиномы этого множества удовлетворяют закону умножения, который легко выводится из соответствующего закона умножения (3.189) для D -функций (матриц вращений). Используя этот результат, мы можем обобщить формулу (3.190) для коэффициентов Вигнера так, чтобы можно было расширить ее до полной унитарной группы $U(n)$. Мы увидим, что этот результат является анало-

гом (в бозонном исчислении) интегрирования по групповому пространству произведения трех D -функций (формула (3.190)).

в) Бозонные полиномы являются ортогональной версией функций двойных таблиц (схем), введенных Дубиле и др. [35] (для случая схем Юнга, имеющих две строки), и мы видим, что общее исследование мультипликативных свойств функций двойных таблиц приводит к изучению коэффициентов Вигнера.

г) Свойства симметрии коэффициентов Вигнера могут быть систематически выведены из этих результатов.

Начнем с того, что приведем соотношение

$$\delta_{j'j} \varepsilon_{j_1 j_2 j} (\det A)^{j_1 + j_2 - j} D_{m'm}^j(A) = \sum_{\substack{m'_1 m'_2 \\ m_1 m_2}} C_{m'_1 m'_2 m'}^{j_1 j_2 j'} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} D_{m'_1 m_1}^{j_1}(A) D_{m'_2 m_2}^{j_2}(A), \quad (\text{Б-2})$$

которое сразу следует из соответствующего соотношения (3.187) для D -функций и того факта, что полиномы

$$(\det A)^{j_1 + j_2 - j} D_{m'm}^j(A) \quad (\text{Б-3})$$

являются базисом для однородных полиномов от a_i^2 степени $2(j_1 + j_2)$. Умножая (Б-2) на $(\det A)^{k_1 - j_1} (\det A)^{k_2 - j_2}$, получаем следующее общее соотношение между бозонными полиномами (Б-1):

$$\begin{aligned} & \delta_{j'j} \varepsilon_{j_1 j_2 j} B \left(\begin{matrix} k_1 + k_2 + m' & k_1 + k_2 - j \\ k_1 + k_2 + j & k_1 + k_2 + m \end{matrix} \right) (A) \cdot \\ &= \sum_{\substack{m'_1 m'_2 \\ m_1 m_2}} C_{m'_1 m'_2 m'}^{j_1 j_2 j'} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} B \left(\begin{matrix} k_2 + m'_2 & k_2 - j_2 \\ k_2 + j_2 & k_2 + m_2 \end{matrix} \right) (A) \\ & \times B \left(\begin{matrix} k_1 + m'_1 & k_1 - j_1 \\ k_1 + j_1 & k_1 + m_1 \end{matrix} \right) (A). \end{aligned} \quad (\text{Б-4})$$

Обратив это соотношение, используя ортогональность коэффициентов Вигнера, приходим к закону произведения для бозонных полиномов

$$\begin{aligned} & B \left(\begin{matrix} k_2 + m'_2 & k_2 - j_2 \\ k_2 + j_2 & k_2 + m_2 \end{matrix} \right) (A) \times B \left(\begin{matrix} k_1 + m'_1 & k_1 - j_1 \\ k_1 + j_1 & k_1 + m_1 \end{matrix} \right) (A) \\ &= \sum_j C_{m'_1 m'_2 m'_1' + m_2}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m_1 + m_2}^{j_1 j_2 j} \\ & \times \tilde{B} \left(\begin{matrix} k_1 + k_2 + m'_1 + m'_2 & k_1 + k_2 - j \\ k_1 + k_2 + j & k_1 + k_2 + m_1 + m_2 \end{matrix} \right) (A). \end{aligned} \quad (\text{Б-5})$$

Теперь интерпретируем этот результат в терминах нормированных бозонных векторов состояний:

$$\left| \begin{matrix} k + m' & k - j \\ k + j & k + m \end{matrix} \right\rangle$$

$$= \left[\frac{(2j+1)}{(k-j)!(k+j+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} B \begin{pmatrix} k+m' & k-j \\ k+j & k+m \end{pmatrix} (A) |0\rangle. \quad (\text{Б-6})$$

Применяя соотношение (Б-5) к вакуумному кет-вектору $|0\rangle$ и используя бозонные векторы состояний, получаем ненулевые матричные элементы бозонных полиномов между произвольными векторами состояний:

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{array}{cc} k_1+k_2+m' & k_1+k_2-j \\ k_1+k_2+j & k_1+k_2-j \end{array} \middle| B \begin{pmatrix} k_2+m'_2 & k_2-j_2 \\ k_2+j_2 & k_2+m_2 \end{pmatrix} (A) \middle| \begin{array}{cc} k_1+m'_1 & k_1-j_1 \\ k_1+j_1 & k_1-m_1 \end{array} \right\rangle \\ &= \left[\frac{(k_1+k_2-j)!(k_1+k_2+j+1)!(2j_1+1)}{(k_1-j_1)!(k_1+j_1+1)!(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} C_{m'_1 m'_2 m'}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}. \quad (\text{Б-7}) \end{aligned}$$

Соотношение (Б-7) обобщает нашу первоначальную формулу для коэффициентов Вигнера (5.82). Чтобы показать это, заметим сначала, что из (5.73), (5.85) и (Б-1) следует

$$B \begin{pmatrix} 2j_1 & 2j_1 & 0 \\ 2j_1 & j_1+m_1 & 0 \end{pmatrix} (A) = [(2j_1)!]^{\frac{1}{2}} P_{j_1 m_1}(a^1), \quad (\text{Б-8})$$

$$B \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2j_2 & j_2+m_2 & 0 \end{pmatrix} (A) = [(2j_2)!]^{\frac{1}{2}} P_{j_2 m_2}(a^2). \quad (\text{Б-9})$$

Таким образом, учитывая нормировочный множитель (5.82), можем записать

$$\begin{aligned} & \left\langle \begin{array}{cc} 2j_1 & 0 \\ j_1+j_2+j & j_1+j_2-j \end{array} \middle| B \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2j_2 & j_2+m_2 \end{pmatrix} (A) \middle| \begin{array}{cc} 2j_1 & 0 \\ j_1+j_2+m & j_1+m_1 \end{array} \right\rangle \\ &= [(2j_2)!]^{\frac{1}{2}} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}. \quad (\text{Б-10}) \end{aligned}$$

Левая часть этого выражения является частным случаем соотношения (Б-7), полученным выбором $k_1 = j_1$, $k_2 = j_2$, $m'_1 = j_1$, $m'_2 = -j_2$ и $m' = j_1 - j_2$. Правая часть (Б-7) теперь сводится к

$$\left[\frac{(j_1+j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!}{(2j_1)!(2j+1)} \right]^{\frac{1}{2}} C_{j_1, -j_2, j_1-j_2}^{j_1 j_2 j} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j},$$

что должно равняться правой части (Б-10). Таким образом, мы не только получили (Б-10) как частный случай общего результата (Б-7), но также получили без прямого вычисления частный коэффициент Вигнера

$$C_{j_1, -j_2, j_1-j_2}^{j_1 j_2 j} = \left[\frac{(2j+1)(2j_1)!(2j_2)!}{(j_1+j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Б-11})$$

Результат, выраженный соотношением (Б-7), мы называем *леммой факторизации для бозонов*.

Замечания. а) Расширение соотношений (Б-7) и (Б-10) до общей унитарной группы $SU(n)$ было основным инструментом для определения коэффициентов Вигнера группы $SU(n)$ ¹⁾ [14, 27, 28, 30 — 34, 40, 41, 46, 49, 51, 53 — 58].

б) Результаты, выраженные формулами (Б-8) и (Б-9), могут быть также получены путем проектирования бозонных переменных с $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ и $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, т.е. $Ae_1 = (a^1 0)$ и $Ae_2 = (0 a^2)$:

$$B \begin{pmatrix} k+m' & & \\ k+j & & k-j \\ & k+m & \end{pmatrix} (Ae_1) = \delta_{kj} \delta_{jm'} B \begin{pmatrix} 2j & & \\ & j+m & 0 \end{pmatrix} (A),$$

$$B \begin{pmatrix} k+m' & & \\ k+j & & k-j \\ & k+m & \end{pmatrix} (Ae_2) = \delta_{kj} \delta_{j,-m'} B \begin{pmatrix} & 0 & \\ 2j & & 0 \\ & j+m & \end{pmatrix} (A).$$

В. КОНЕЧНАЯ ГРУППА СИММЕТРИЙ БОЗОННЫХ ПОЛИНОМОВ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ВИГНЕРА

В этом приложении мы получим конечную группу преобразований бозонных полиномов, а следовательно, матриц вращений, и используем эти симметрии для вывода близких к ним симметрий коэффициентов Вигнера.

Конечная группа преобразований матриц вращений и бозонных полиномов. Чтобы рассмотреть эти свойства симметрии в наибольшей общности (независимо от параметризаций), мы вводим 2×2 -матрицу Z :

$$Z = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \quad (\text{В-1})$$

Символ $F(Z) \equiv F(a, b, c, d)$ обозначает произвольный полином (с коэффициентами из $\mathbb{C}$), определенный для неизвестных a, b, c, d .

Рассмотрим теперь новые полиномы $\mathcal{R}F$, $\mathcal{C}F$ и $\mathcal{T}F$, определенные следующим образом:

перестановка строк $(\mathcal{R}F) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix},$

¹⁾ Другое определение двойных схем Гельфанда дано Климьком [69] (см. также [70], гл. 9). Они не связаны с бозонным исчислением. Более того, они обобщаются на двойные схемы произвольной компактной группы Ли. В работах [69, 70] показано, как эти двойные схемы связаны с коэффициентами Вигнера компактных групп. Они приводят к рекуррентным соотношениям для коэффициентов Вигнера, связывающим коэффициенты с различными результирующими представлениями. Дальнейшее развитие этого подхода к группам $SU(n)$, $SO(n)$ и $Sp(n)$ дано в работе [71]. Мы считаем, что подход к коэффициентам Вигнера компактных групп с помощью двойных схем, введенных в работах [69, 70], является более плодотворным (он основывается на достижениях теории представлений полупростых некомпактных групп Ли). Но он требует дальнейшего развития. — *Прим. перев.*

$$\begin{aligned}
 \text{перестановка столбцов} \quad (\mathcal{C}F) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}, \\
 \text{транспозиция} \quad (\mathcal{T}F) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= F \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.
 \end{aligned} \tag{B-2}$$

Следует очень осторожно обращаться с законом произведений для этих операций; например

$$(\mathcal{C}\mathcal{T}F) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\mathcal{T}F) \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}.$$

Операторы $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{T}$ порождают группу порядка 8 с элементами

$$\mathcal{H} = \{1, \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{T}, \mathcal{R}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{R}, \mathcal{T}\mathcal{R} = \mathcal{C}\mathcal{T}, \mathcal{T}\mathcal{C} = \mathcal{R}\mathcal{T}, \mathcal{R}\mathcal{C}\mathcal{T}\}, \tag{B-3}$$

где следует отметить, что

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}^2 = \mathcal{C}^2 = \mathcal{T}^2 &= 1, \\
 \mathcal{T}\mathcal{R}\mathcal{C} = \mathcal{T}\mathcal{C}\mathcal{R} = \mathcal{R}\mathcal{C}\mathcal{T} &= \mathcal{C}\mathcal{R}\mathcal{T}, \\
 \mathcal{R}\mathcal{T}\mathcal{C} = \mathcal{C}\mathcal{T}\mathcal{R} &= \mathcal{T}.
 \end{aligned} \tag{B-4}$$

[Ясно, что эта группа изоморфна подгруппе симметричной группы S_4 ; изоморфизм реализуется следующим образом:

$$\mathcal{R} \rightarrow (13)(24), \mathcal{C} \rightarrow (12)(34), \mathcal{T} \rightarrow (1)(4)(23).]$$

Действие вышеприведенных операторов на матрицы вращений прямо следует из определения (5.85) и имеет вид¹⁾

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R}D_{mm'}^j &= D_{-mm'}^j, \\
 \mathcal{C}D_{mm'}^j &= D_{m, -m'}^j, \\
 \mathcal{T}D_{mm'}^j &= D_{m'm}^j.
 \end{aligned} \tag{B-5}$$

При действии на матрицы вращений группа операторов $\mathcal{H}$ индуцирует 8 преобразований над квантовыми индексами (m, m') , соответствующих любому числу изменений знака и транспозиции.

Существует еще одна операция — комплексное сопряжение, которая важна при изучении матриц вращений. Если U — унитарная унимодулярная матрица, то она имеет форму

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ -b^* & a^* \end{pmatrix}, \quad |a|^2 + |b|^2 = 1. \tag{B-6}$$

В этом случае

$$U^* = \begin{pmatrix} a^* & b^* \\ -b & a \end{pmatrix}. \tag{B-7}$$

¹⁾ Симметрии матриц вращений (B-5) и (B-9) в этой форме впервые были даны в работе [59].

Этот результат вынуждает нас ввести операцию $\mathcal{K}$, называемую сопряжением, которая определяется соотношением

$$(\mathcal{K}F) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \equiv F \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}. \quad (\text{B-8})$$

Прибавляя $\mathcal{K}$ к генераторам $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{T}$, получаем группу $\{\mathcal{H}, \mathcal{H}\mathcal{H}, \mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{R}, \mathcal{H}\mathcal{H}\mathcal{R}\mathcal{H}\}$, содержащую 32 элемента [59].

Действие $\mathcal{K}$ на $D_{mm'}^j$ прямо определяется из (5.85):

$$\mathcal{K} D_{mm'}^j = (-1)^{m-m'} D_{-m, -m'}^j. \quad (\text{B-9})$$

Заметим, что этот результат справедлив для произвольных аргументов (a, b, c, d) , когда используется общее определение (B-8) в форме (5.85). Если, кроме того, (a, b, c, d) являются элементами унитарной матрицы U , то имеем

$$[D_{mm'}^j(U)]^* = D_{mm'}^j(U^*) = (-1)^{m-m'} D_{-m, -m'}^j(U). \quad (\text{B-10})$$

Учитывая свойства преобразований детерминанта, который появляется в определении (B-1), получаем следующие преобразования бозонных полиномов:

$$\begin{aligned} (\mathcal{R}B) \begin{pmatrix} k+m' & \\ k+j & k-j \end{pmatrix} &= (-1)^{k-j} B \begin{pmatrix} k-m' & \\ k+j & k-j \end{pmatrix}, \\ (\mathcal{C}B) \begin{pmatrix} k+m' & \\ k+j & k-j \end{pmatrix} &= (-1)^{k-j} B \begin{pmatrix} k+m' & \\ k+j & k-j \end{pmatrix}, \\ (\mathcal{T}B) \begin{pmatrix} k+m' & \\ k+j & k-j \end{pmatrix} &= B \begin{pmatrix} k+m & \\ k+j & k-j \end{pmatrix}, \\ (\mathcal{K}B) \begin{pmatrix} k+m' & \\ k+j & k-j \end{pmatrix} &= (-1)^{m-m'} B \begin{pmatrix} k-m' & \\ k+j & k-j \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B-11})$$

Конечная группа симметрий коэффициентов Вигнера. Обсуждение свойств симметрии коэффициентов Вигнера дано в первоначальных работах Вигнера [60] и Рака [61], и результатом является группа симметрий из 12 элементов.

Было несколько удивительно узнать из работы Редже [62], что фактически группа симметрий является намного большей — она содержит 72 элемента. Прекрасное изложение результата Редже дано Баргманом [9]. (Мы рассматриваем метод Редже в приложении Г.)

Здесь мы представим несколько отличный подход к симметриям Редже, показывающий, что их начало фактически лежит в основных симметриях $\mathcal{R}$, $\mathcal{T}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{K}$ матриц вращений, рассмотренных выше

Удобно ввести обозначение

$$(F, F') \equiv \langle 0 | F^*(\bar{A}) F'(A) | 0 \rangle \quad (\text{B-12})$$

для скалярного произведения¹⁾ двух полиномов от бозонов a_i^j (с коэффициентами из $\mathbb{C}$). Отсюда следует²⁾

$$(\mathcal{G}F, \mathcal{G}F') = (F, F') \quad (\text{B-13})$$

для $\mathcal{G} = \mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{T}$ или $\mathcal{X}$, т.е. операторы $\mathcal{R}, \mathcal{C}, \mathcal{T}$ и $\mathcal{X}$ являются унитарными операторами по отношению к бозонному скалярному произведению (B-12)).

Рассмотрим теперь коэффициенты Вигнера, заданные бозонным скалярным произведением (см. (5.83) и приложение Б):

$$\begin{aligned} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= \langle j_1 j_2; jm | j_1 m_1; j_2 m_2 \rangle \\ &= \left[\frac{2j+1}{(j_1+j_2-j)!(j_1+j_2+j+1)!(2j_1)!(2j_2)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \langle 0 | (\det \bar{A})^{j_1+j_2-j} D_{m, j_1-j_2}^j (\bar{A}) D_{m_2, -j_2}^{j_2} (A) D_{m_1, j_1}^{j_1} (A) | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

Свойства преобразований различных множителей в скалярном произведении перечисляются ниже (по рассматриваемым ниже причинам мы здесь не включаем оператор $\mathcal{X}$):

$$\begin{aligned} \mathcal{R} D_{m, j_1-j_2}^j &= D_{-m, j_1-j_2}^j \\ \mathcal{R} (D_{m_2, -j_2}^{j_2} D_{m_1, j_1}^{j_1}) &= D_{-m_2, -j_2}^{j_2} D_{-m_1, j_1}^{j_1}; \end{aligned} \quad (\text{B-15})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{C} D_{m, j_1-j_2}^j &= D_{m, j_2-j_1}^j \\ \mathcal{C} (D_{m_2, -j_2}^{j_2} D_{m_1, j_1}^{j_1}) &= D_{m_1, -j_1}^{j_1} D_{m_2, j_2}^{j_2}; \end{aligned} \quad (\text{B-16})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{T} D_{m, j_1-j_2}^j &= D_{j_1-j_2, m}^j \\ \mathcal{T} (D_{m_2, -j_2}^{j_2} D_{m_1, j_1}^{j_1}) &= D_{-j_2, m_2}^{j_2} D_{j_1, m_1}^{j_1} \\ &= D_{\frac{1}{2}(j_1+j_2-m_1-m_2), -j_2}^{\frac{1}{2}(j_1+j_2-m_1-m_2)} D_{\frac{1}{2}(j_1-j_2+m_1-m_2), j_1}^{\frac{1}{2}(j_1-j_2+m_1-m_2)}. \end{aligned} \quad (\text{B-17})$$

(Последнее соотношение следует прямо из определения $\mathcal{T}$ и вида частных D -функций, которые возникают в произведении.)

Используя свойство унитарности операторов $\mathcal{R}, \mathcal{C}$ и $\mathcal{T}$, вышеприведенные соотношения и тот факт, что $\mathcal{R}$ и $\mathcal{C}$ изменяют знак детерминанта $ad - bc$, в то время как $\mathcal{T}$ оставляет этот детерминант инвариантным, мы сразу получаем

¹⁾ Если F является полиномом $F(A) = \sum_{(\alpha)} c(\alpha) \prod_{ij} (a_i^j)^{\alpha_i^j}$, то $F^*(\bar{A}) = \sum_{(\alpha)} c^*(\alpha) \prod_{ij} (\bar{a}_i^j)^{\alpha_i^j}$.

Однако заметим, что бозонные полиномы являются вещественными, т.е. $c^*(\alpha) = c(\alpha)$.

²⁾ Это свойство унитарности является следствием того факта, что транспонированные бозоны b_i^j и их сопряжения удовлетворяют тем же коммутационным соотношениям, что и a_i^j . Например, перестановка строк в бозонной матрице A определяет новые бозоны $b_1^1 = a_2^1, b_2^1 = a_1^1, b_1^2 = a_2^2, b_2^2 = a_1^2$, удовлетворяющие $[\bar{b}_p^j, b_k^i] = \delta_{ik}^j \delta_{jk}$.

первые три соотношения симметрии из приведенных ниже (чтобы иметь полный список генераторов симметрий в одном месте, мы включаем сюда и впоследствии доказываем свойство симметрии, сопоставляемое с оператором $\mathcal{H}$):

$$\begin{aligned}\mathcal{R}: C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} C_{-m_1, -m_2, -m}^{j_1 j_2 j}, \\ \mathcal{C}: C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_1 + j_2 - j} C_{m_2 m_1 m}^{j_2 j_1 j}, \\ \mathcal{F}: C_{m_1 m_2 m_1 + m_2}^{j_1 j_2 j} &= C_{\frac{1}{2}(j_1 + j_2 + m_1 + m_2), \frac{1}{2}(j_1 + j_2 - m_1 - m_2), j}^{\frac{1}{2}(j_1 - j_2 + m_1 - m_2), \frac{1}{2}(j_1 - j_2 - m_1 + m_2), j_1 - j_2}, \\ \mathcal{H}: C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} &= (-1)^{j_2 + m_2} [(2j + 1)/(2j_1 + 1)]^{\frac{1}{2}} C_{-m_1 m_2, -m_1}^{j_2 j_1 j}. \quad (\text{B-18})\end{aligned}$$

Унитарные операторы $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, стоящие слева, индуцируют симметрии коэффициентов Вигнера справа. Группа $\mathcal{H}$ симметрий индуцирует 8 соответствующих симметрий коэффициентов Вигнера (учитывая тождественность).

Более замечательный факт состоит в том, что эти 8 симметрий коэффициентов Вигнера являются в точности симметриями дискретизированных функций $D_{m_j j_1 - j_2}^j$ (см. (5.89)) при действии преобразований из $\mathcal{H}$, т.е. эти симметрии D -функций распространяются в точности на дискретизированные D -функции.

Рассмотрим теперь оператор сопряжения $\mathcal{K}$. Мы уже видели, что $\mathcal{K}$ унитарен по отношению к бозонному скалярному произведению. Если использовать свойство (B-9) в бозонном скалярном произведении, то получим такой результат:

$$C_{-m_2, -m_1, -m}^{j_2 j_1 j} = C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j}, \quad (\text{B-19})$$

который фактически является комбинацией первых двух симметрий из (B-18). Операция $\mathcal{K}$ не приводит к независимому соотношению между коэффициентами Вигнера, когда она применяется к бозонному скалярному произведению.

Однако существует новая симметрия коэффициентов Вигнера, соответствующая операции сопряжения $\mathcal{K}$, но она не реализуется в бозонных полиномиальных структурах, где свойство комплексного сопряжения, аналогичное (B-10), не определено, т.е. $[D_{m' m}^j(A)]^*$ не определено для бозонов.

Чтобы использовать свойство (B-10), применим скалярное произведение в терминах интегрирования по единичной сфере в четырехмерном пространстве (см. разд. 9 гл. 3):

$$(f, g) = \int d\Omega [f(U)]^* g(U), \quad (\text{B-20})$$

где $U = U(\psi, \mathbf{n})$ (см. (2.27) и (2.28)) и интегрирование ведется по всем точкам единичной сферы S^3 .

(По отношению к этому скалярному произведению оператор комплексного сопряжения, определенный как $\mathcal{K}f = f^*$, антиунитарен: $(\mathcal{K}f, \mathcal{K}g) = (f, g)^*$. Оператор $\mathcal{T}$ унитарен по отношению к скалярному произведению (B-20), но $(\mathcal{R}f, \mathcal{R}g)$ и $(\mathcal{C}f, \mathcal{C}g)$ не определены, так как $(\mathcal{R}f)(U) = f(U')$ и $(\mathcal{C}f)(U) = f(U'')$, где для каждого $U \in SU(2)$ имеем $\det U' = \det U'' = -1$, так что $U', U'' \in U(2)$. Единый вывод симметрий (B-18) может быть дан путем взятия матрицы Z из (B-1), принадлежащей группе $U(2)$, и использования скалярного произведения, определенного формулой (B-24). В этом случае операторы $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$, $\mathcal{F}$, $\mathcal{H}$ составляют группу, в которой $\mathcal{R}$, $\mathcal{C}$ и $\mathcal{T}$ унитарны, а $\mathcal{K}$ антиунитарен ([68], разд. 8 гл. 1,

где дается обсуждение теории копредставлений групп, содержащих как унитарные, так и антиунитарные операторы).

В обозначениях (В-20) интеграл от трех матриц вращений (3.190) выражается в виде

$$\frac{2\pi^2}{2j+1} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1' m_2' m'}^{j_1 j_2 j} = (D_{mm'}^j, D_{m_1 m_1'}^{j_1}, D_{m_2 m_2'}^{j_2}). \quad (\text{В-21})$$

Используя свойство комплексного сопряжения (В-10), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{j+m+j+m'}}{2j+1} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{m_1' m_2' m'}^{j_1 j_2 j} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int d\Omega D_{-m, -m'}^j(U) D_{m_2 m_2'}^{j_2}(U) D_{m_1 m_1'}^{j_1}(U). \end{aligned} \quad (\text{В-22})$$

Так как существует $3! = 6$ расположений множителей в интеграле, то видим, что существует соответственно шесть тождеств, связывающих произведение коэффициентов Вигнера слева. В этих шести соотношениях m_1', m_2', m' можем выбрать так, чтобы получить простые коэффициенты. На этом пути можно получить шесть соотношений между коэффициентами Вигнера, соответствующих шести расположениям

$$\begin{pmatrix} j_1 \\ m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_2 \\ m_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j \\ m \end{pmatrix}$$

с подходящими изменениями знака в квантовых числах проектирования. Из этих шести соотношений только одно является новым в том смысле, что из него можно породить остальные, а также первые три соотношения (В-18). В качестве нового соотношения можно выбрать то, которое переставляет j и j_1 , или то, которое переставляет j и j_2 .

Таким образом, например, мы получаем

$$\begin{aligned} & \frac{(-1)^{j_1 - m_1 - j_2 - m_2}}{2j+1} C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} C_{j_1, -j_2, j_1 - j_2}^{j_1 j_2 j} \\ &= \frac{(-1)^{j_1 - m_1}}{2j_1 + 1} C_{-m, m_2, -m_1}^{j j_2 j_1} C_{j_2 - j_1, -j_2, -j_1}^{j j_2 j_1}. \end{aligned}$$

Мы используем явный вид коэффициентов Вигнера, чтобы показать, что

$$C_{j_2 - j_1, -j_2, -j_1}^{j j_2 j} = \left[\frac{2j_1 + 1}{2j + 1} \right]^{\frac{1}{2}} C_{j_1, -j_2, j_1 - j_2}^{j_1 j_2 j},$$

получая, таким образом, соотношение

$$\mathcal{K} : C_{m_1 m_2 m}^{j_1 j_2 j} = (-1)^{j_2 + m_2} \left[\frac{2j + 1}{2j_1 + 1} \right]^{\frac{1}{2}} C_{-m, m_2, -m_1}^{j j_2 j_1}. \quad (\text{В-23})$$

где стоящее слева $\mathcal{K}$ показывает, что эта симметрия имеет свое начало в свойствах комплексного сопряжения D -функций.

Если не учитывать изменения фаз и размерностные множители, четыре симметрии (В-18) порождают группу порядка 72, как рассматривалось в разд. 12 гл. 3.

Замечание. Мы использовали бозонное скалярное произведение при выводе первых трех соотношений симметрий в (В-18) и интегрирование по единичной сфере S^3 при выводе последнего соотношения. Это недостаточное единообразие вывода может быть устранено путем использования скалярного произведения, подходящего для функций $\{f\}$, определенных на элементах унитарной группы $U(2)$ (устранено условие унимодулярности):

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} d\chi \int d\Omega [f(U)]^* g(U). \quad (\text{В-24})$$

(Представления группы $U(2)$ обсуждаются в приложении Д.)

Обобщение интеграла от трех матриц вращений (3.190) дается формулой

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\chi \int d\Omega \left[D \begin{pmatrix} \mu'_{11} & & \\ m'_{12} & m'_{22} & \\ & m'_{11} & \end{pmatrix} (U) \right]^* \\ & \quad \times D \begin{pmatrix} \mu'_{11} & & \\ m'_{12} & m'_{22} & \\ & m'_{11} & \end{pmatrix} (U) D \begin{pmatrix} \mu_{11} & & \\ m_{12} & m_{22} & \\ & m_{11} & \end{pmatrix} (U) \\ & = \frac{4\pi^3}{2^{j''} + 1} C_{mm'm''}^{jj'j''} C_{\mu\mu'\mu''}^{jj'j''}, \end{aligned} \quad (\text{В-25})$$

где

$$\begin{aligned} j &= (m_{12} - m_{22})/2, \\ m &= m_{11} - (m_{12} + m_{22})/2, \\ \mu &= \mu_{11} - (m_{12} + m_{22})/2, \end{aligned}$$

с соответствующими определениями для (j', m', μ') и (j'', m'', μ'') .

Г. ПОРОЖДАЮЩИЕ ФУНКЦИИ ДЛЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ ВИГНЕРА И РАКА

Порождающая функция для коэффициентов Вигнера. Вывод порождающих функций для коэффициентов Вигнера базируется на построении инвариантов (этот метод интенсивно использовался ван дер Варденом [63], Крамерсом [64] и Бринкманом [65]). Ключевой формулой является формула (3.335) из гл. 3.

Здесь мы применяем это инвариантное построение к бозонным полиномам (см. (5.53))

$$P_{jimi}(\mathbf{a}^i), \quad i = 1, 2, 3, \quad (\text{Г-1})$$

где

$$\mathbf{a}^i = (a_1^i, a_2^i). \quad (\text{Г-2})$$

Отметим, что при действии $\mathcal{T}_U$ (см. (5.42)) бозонные полиномы являются тензорным оператором:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_U: P_{jimi}(\mathbf{a}^i) &\rightarrow \mathcal{T}_U P_{jimi}(\mathbf{a}^i) \mathcal{T}_U^{-1} \\ &= \sum_{m_i} D_{m_i m_i}^{j_i}(U) P_{jimi'}(\mathbf{a}^i). \end{aligned} \quad (\text{Г-3})$$

Таким образом, применимо построение (3.335).

Вращательный инвариант

$$\sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} P_{j_1 m_1}(\mathbf{a}^1) P_{j_2 m_2}(\mathbf{a}^2) P_{j_3 m_3}(\mathbf{a}^3) \quad (\Gamma-4)$$

может быть просуммирован до *одночленного вида*, который определяется на трех вращательных инвариантах

$$a_{12}^{12}, a_{12}^{31}, a_{12}^{23}, \quad (\Gamma-5)$$

где

$$a_{12}^{ij} \equiv \det \begin{pmatrix} a_1^i & a_1^j \\ a_2^i & a_2^j \end{pmatrix}. \quad (\Gamma-6)$$

Чтобы доказать этот результат, мы используем следующее:

а) Теорему Вейля ([26], стр. 45), которая утверждает, что каждый полиномиальный инвариант вида (Г-4) является *полиномиальной формой* от трех инвариантов, данных в (Г-5).

б) Свойства однородности формы (Г-4); она однородна степени $2j$ по (a_1^i, a_2^i) , и общая степень ее $2(j_1 + j_2 + j_3)$.

Этих двух свойств достаточно, чтобы показать, что полином (Г-4) может также быть записан в виде

$$\# (a_{12}^{12})^{j_1 + j_2 - j_3} (a_{12}^{31})^{j_3 + j_1 - j_2} (a_{12}^{23})^{j_2 + j_3 - j_1}, \quad (\Gamma-7)$$

где $\#$ обозначает константу.

Константа $\#$, появляющаяся в (Г-7), может быть вычислена, если в (Г-4) положить $a_2^1 = a_1^2 = 0$; тогда (Г-4) сведется к одночленному выражению, соответствующему $m_1 = j_1$, $m_2 = -j_2$, $m_3 = -j_1 + j_2$. Используя частный $3j$ -коэффициент для этих квантовых чисел m (см. (Б-11)), приходим к результату для $\#$.

Таким образом, мы получаем

$$\begin{aligned} & \sum_{m_1, m_2, m_3} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} P_{j_1 m_1}(\mathbf{a}^1) P_{j_2 m_2}(\mathbf{a}^2) P_{j_3 m_3}(\mathbf{a}^3) \\ &= [(j_1 + j_2 + j_3 + 1)!]^{-\frac{1}{2}} \frac{(a_{12}^{12})^{j_1 + j_2 - j_3} (a_{12}^{31})^{j_3 + j_1 - j_2} (a_{12}^{23})^{j_2 + j_3 - j_1}}{[(j_1 + j_2 - j_3)!(j_3 + j_1 - j_2)!(j_2 + j_3 - j_1)!]^{\frac{1}{2}}}. \end{aligned} \quad (\Gamma-8)$$

Редже [62] заметил, что (Г-8) можно умножить на

$$\Phi_{j_1 j_2 j_3}(\mathbf{a}_3) \equiv \frac{(a_3^3)^{j_1 + j_2 - j_3} (a_3^2)^{j_3 + j_1 - j_2} (a_3^1)^{j_2 + j_3 - j_1}}{[(j_1 + j_2 - j_3)!(j_3 + j_1 - j_2)!(j_2 + j_3 - j_1)!]^{\frac{1}{2}}}, \quad (\Gamma-9)$$

просуммировать по всем $(j) = (j_1, j_2, j_3)$, таким, что сумма

$$j_1 + j_2 + j_3 = J \quad (\Gamma-10)$$

остается фиксированной (при неотрицательном полном значении J), и таким образом получить $[(J + 1)!]^{-\frac{1}{2}} (\det A)^J / J!$ из правой части (Г-8). (При получении этого результата используется трехчленное разложение.) Здесь A обозначает 3×3 -матричный бозон:

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \end{pmatrix}. \quad (\Gamma-11)$$

Полученный выше результат может быть записан более кратко:

$$\frac{(\det A)^J}{J!} = [(J+1)!]^{\frac{1}{2}} \sum_{\boxed{\alpha}} R[\boxed{\alpha}] \prod_{ij=1}^3 \frac{(a_i^j)^{\alpha_i^j}}{[(\alpha_i^j)!]^{\frac{1}{2}}}, \quad (\Gamma-12)$$

где введено комбинаторное 3×3 -расположение (см. (5.85)), обозначенное через $\boxed{\alpha}$, неотрицательных целых чисел $\{\alpha_i^j\}$. В этом расположении суммы по строкам и по столбцам¹⁾ равны J :

$$\begin{array}{ccc|c} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 & J \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 & J \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 & J \\ \hline J & J & J & \end{array} \quad (\Gamma-13)$$

Суммирование в (Г-12) должно вестись по всем расположениям, удовлетворяющим этим ограничениям. Для коэффициента в разложении (Г-12) мы также использовали обозначение $R[\boxed{\alpha}]$. В обозначениях (j_p, m_i) имеем

$$R \begin{array}{ccc|c} j_1 + m_1 & j_2 + m_2 & j_3 + m_3 & \\ j_1 - m_1 & j_2 - m_2 & j_3 - m_3 & \\ j_2 + j_3 - j_1 & j_3 + j_1 - j_2 & j_1 + j_2 - j_3 & \end{array} = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}. \quad (\Gamma-14)$$

Соотношение (Г-12) (результат Редже) делает очевидными детерминантные симметрии: операции перестановки строк, столбцов и транспонирования на матричном бозоне A очевидным образом переносятся с помощью симметрии вида

$$\prod_{ij} (a_i^j)^{\alpha_i^j} / [(\alpha_i^j)!]^{\frac{1}{2}} \text{ на сами коэффициенты } R[\boxed{\alpha}].$$

Швингер [8] также нашел результат²⁾ (Г-12), но в экспоненциальной форме, полученной путем умножения (Г-12) на λ^J и суммирования по всем $J = 0, 1, \dots$:

$$e^{\lambda \det A} = \sum_J [(J+1)!]^{\frac{1}{2}} \lambda^J \sum_{\boxed{\alpha}} R[\boxed{\alpha}] \prod_{ij} \frac{(a_i^j)^{\alpha_i^j}}{[(\alpha_i^j)!]^{\frac{1}{2}}}. \quad (\Gamma-15)$$

Экспоненциальная функция $e^{\lambda \det A}$ называется *порождающей функцией* для $3j$ -коэффициентов.

Порождающая функция для коэффициентов Рака. Порождающая функция для множества коэффициентов Рака была дана Швингером [8]. Мы выводим соотношение Швингера путем обращения прямо к явной форме (3.292) для коэффициентов Рака. Для этой цели удобно переписать (3.292), введя (обратимое) пре-

¹⁾ Форма (Г-12) является частным случаем более общего результата, аналогичного (5.85), задающего неприводимые представления унитарной группы $U(3)$ [14, 48, 51].

²⁾ Однако Швингер не указал, что все 72 симметрии $3j$ -коэффициентов следуют из (Г-15).

образование от параметров a, b, c, d, e, f и индекса суммирования z к неотрицательным целочисленным параметрам $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= z - a - b - e, \\ \alpha_2 &= z - c - d - e, \\ \alpha_3 &= z - a - c - f, \\ \alpha_4 &= z - b - d - f, \\ \beta_1 &= a + d + e + f - z, \\ \beta_2 &= b + c + e + f - z, \\ \beta_3 &= a + b + c + d - z.\end{aligned}\quad (\Gamma-16)$$

Эти соотношения предполагают равенство двух 4×3 -матриц:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 & \alpha_1 + \beta_2 & \alpha_1 + \beta_3 \\ \alpha_2 + \beta_1 & \alpha_2 + \beta_2 & \alpha_2 + \beta_3 \\ \alpha_3 + \beta_1 & \alpha_3 + \beta_2 & \alpha_3 + \beta_3 \\ \alpha_4 + \beta_1 & \alpha_4 + \beta_2 & \alpha_4 + \beta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d + f - b & c + f - a & c + d - e \\ a + f - c & b + f - d & a + b - e \\ d + e - c & b + e - a & b + d - f \\ a + e - b & c + e - d & a + c - f \end{pmatrix} \equiv K. \quad (\Gamma-17)$$

В терминах параметров $(\alpha) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $(\beta) = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ $6j$ -коэффициент (см. (3.292)) выражается в виде

$$\left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ d & c & f \end{matrix} \right\} = \left[\frac{\prod_{ij} k_{ij}!}{\prod_i (k_i + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_{\substack{(\alpha)(\beta) \\ \alpha_i + \beta_j = k_{ij}}} \frac{(-1)^{\sum \alpha_i + \sum \beta_j} (\sum \alpha_i + \sum \beta_j + 1)!}{\prod_{ij} \alpha_i! \beta_j!}, \quad (\Gamma-18)$$

где

а) $\prod_{ij}$ обозначает $\prod_{i=1}^4 \prod_{j=1}^3$;

б) $\sum \alpha_i + \sum \beta_j$ обозначает $\sum_{i=1}^4 \alpha_i + \sum_{j=1}^3 \beta_j$;

в) суммирование ведется по всем неотрицательным значениям параметров α_i и β_j , таким, что $\alpha_i + \beta_j = k_{ij}$, где $K = (k_{ij})$ — матрица в правой части (Г-17);

г) k_i дается соотношением $k_i = (\sum \alpha_i + \sum \beta_j) - \alpha_i$; заметим, что каждое k_i зависит только от элементов из K и фактически $k_1 = a + b + e$, $k_2 = c + d + e$, $k_3 = a + c + f$, $k_4 = b + d + f$.

Далее рассмотрим 4×3 -матричный бозон

$$A \equiv \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & a_1^3 \\ a_2^1 & a_2^2 & a_2^3 \\ a_3^1 & a_3^2 & a_3^3 \\ a_4^1 & a_4^2 & a_4^3 \end{pmatrix} \quad (\Gamma-19)$$

Через R_i и C_j обозначим произведение элементов, стоящих в строке i и столбце j матрицы A , соответственно:

$$\begin{aligned}R_i &= a_i^1 a_i^2 a_i^3, & i &= 1, 2, 3, 4; \\ C_j &= a_1^j a_2^j a_3^j a_4^j, & j &= 1, 2, 3.\end{aligned} \quad (\Gamma-20)$$

Затем определяем форму $S(A)$:

$$S(A) \equiv R_1 + R_2 + R_3 + R_4 + C_1 + C_2 + C_3. \quad (\Gamma-21)$$

Рассмотрим теперь разложение $[1 + S(A)]^{-2}$. Сначала разложим в виде

$$[1 + S(A)]^{-2} = \sum_{N=0}^{\infty} (-1)^N (N+1) [S(A)]^N. \quad (\Gamma-22)$$

Многочленное разложение $[S(A)]^N$ дает

$$\frac{[S(A)]^N}{N!} = \sum_{\substack{(x)(\beta) \\ \sum x_i + \sum \beta_j = N}} \prod_{ij} \frac{R_i^2 S_j^{\beta_j}}{\alpha_i! \beta_j!} = \sum_{\substack{(x)(\beta) \\ \sum x_i + \sum \beta_j = N}} \prod_{ij} \frac{(a_i^j)^{x_i + \beta_j}}{\alpha_i! \beta_j!}. \quad (\Gamma-23)$$

Используя результат из (Г-22), получаем

$$[1 + S(A)]^{-2} = \sum_{(x)(\beta)} (-1)^{\sum x_i + \sum \beta_j} (\sum \alpha_i + \sum \beta_j + 1)! \prod_{ij} \frac{(a_i^j)^{x_i + \beta_j}}{\alpha_i! \beta_j!}, \quad (\Gamma-24)$$

где α_i и β_j независимо пробегает значения от 0 до ∞ .

Суммирование запишем в виде

$$\sum_{(x)(\beta)} = \sum_{(abcdef)} \sum_{\substack{(x)(\beta) \\ x_i + \beta_j = k_{ij}}}, \quad (\Gamma-25)$$

где $\sum_{(abcdef)}$ обозначает суммирование по всем квантовым числам a, b, c, d, e, f

угловых моментов, удовлетворяющим условиям треугольника из определения коэффициентов Рака (см. формулу (3.264)). Используя суммирование (Г-25) и явный вид (Г-18) $6j$ -коэффициента, находим, что (Г-24) принимает вид

$$[1 + S(A)]^{-2} = \sum_{(abcdef)} \left(\prod_i (k_i + 1)! \right)^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} a & b & e \\ d & c & f \end{matrix} \right\} \prod_{ij} \frac{(a_i^j)^{k_{ij}}}{(k_{ij}!)^{\frac{1}{2}}}, \quad (\Gamma-26)$$

где можем считать, что в силу определения (3.264) $abcdef$ независимо пробегает значения от 0 до ∞ .

Так как функция $S(A)$ инвариантна относительно перестановок строк и столбцов 4×3 -матричного бозона A и каждая такая перестановка в $\prod_{ij} (a_i^j)^{k_{ij}}$ пе-

реходит в соответствующую перестановку строк и столбцов 4×3 -матрицы K , то из порождающей функции (Г-26) сразу следует, что $6j$ -коэффициенты обладают симметриями, которые индуцируются на $(abcdef)$ перестановками строк и столбцов в K .

Замечания. а) Швингер [8] вывел порождающую функцию (Г-26) без использования $6j$ -коэффициентов в явном виде (см. также [9]). Затем эта формула была использована для вывода $6j$ -коэффициентов в симметричной форме Рака (Г-18). б) Использование бозонов в вышеприведенном выводе является чисто формальным, и мы могли бы использовать комплексные числа (z_i^j) . в) Джованини и Смит [66] рассмотрели определенные алгебраические структуры, связанные с магическими квадратами, представляющими $3j$ - и $6j$ -коэффициенты. Это обсуждается в разд. 8 гл. 5 книги [68].

Д. ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ГРУППЫ $U(2)$

Группа $U(2)$ представляет собой множество всех унитарных 2×2 -матриц, в котором групповым умножением является матричное умножение. Неприводимые представления группы $U(2)$ получаются прямым путем из бозонных полиномов, если сделать некоторые наблюдения.

Произвольная унитарная матрица $U \in U(2)$ может быть *однозначно* записана в виде¹⁾

$$U = e^{(i\chi/2)} U_0, \quad 0 \leq \chi < 2\pi, \quad (\text{Д-1})$$

где $U_0 \in SU(2)$. Таким образом, χ является единственным углом на единичной окружности, таким, что

$$e^{i\chi} = \det U. \quad (\text{Д-2})$$

Далее рассмотрим бозонные полиномы, заданные формулой (Б-1), и положим в них $A = U$:

$$D \begin{pmatrix} \mu_{11} & \\ m_{12} & m_{22} \\ & m_{11} \end{pmatrix} (U) \equiv (\det U)^{m_{22}} D_{m_{11} - \frac{1}{2}(m_{12} + m_{22}), \mu_{11} - \frac{1}{2}(m_{12} + m_{22})}^{\frac{1}{2}(m_{12} - m_{22})} (U), \quad (\text{Д-3})$$

Здесь мы ввели обозначение Гельфанда (приложение А). Пусть $D^{[m]}(U)$, $[m] = [m_{12} m_{22}]$ обозначает унитарную матрицу, которая имеет функцию (Д-3) в строке²⁾ m_{11} и столбце μ_{11} . Тогда

$$U \rightarrow D^{[m]}(U) \quad (\text{Д-4})$$

является представлением группы $U(2)$ унитарными матрицами размерности $m_{12} - m_{22} + 1$, причем этот результат является следствием свойства умножения (5.61) для бозонных полиномов.

Для того чтобы представления были однозначными функциями элементов u_{ij} матриц U , мы требуем, чтобы m_{12} и m_{22} были целыми числами (положительными, нулем или отрицательными), удовлетворяющими условию $m_{12} \geq m_{22}$.

Элементы матрицы (Д-4) являются однородными функциями степени $m_{12} + m_{22}$ от переменных u_{ij} ; если $m_{22} \geq 0$, то они являются *однородными полиномами*; если $m_{22} < 0$, то они являются отношениями однородных полиномов степени $m_{12} - m_{22}$ к $(\det U)^{-m_{22}}$. Что в (Д-4) должны рассматриваться отрицательные целые числа m_{22} , уже указывается тем фактом, что соответствие $U \rightarrow U^*$ для каждой матрицы $U \in U(2)$ само является представлением группы $U(2)$. Однако заметим, что

$$U^* = (\det U)^{-1} \begin{pmatrix} u_{22} & -u_{21} \\ -u_{12} & u_{11} \end{pmatrix}. \quad (\text{Д-5})$$

¹⁾ Если U_0 параметризуется в терминах ψ и $\hat{n}$ (см. формулу (2.27)), то мы можем записать $U = U(\chi, \psi, \hat{n}) = \exp(i\chi/2) U_0(\psi, \hat{n})$. Тогда соотношение $U(2\pi + \chi, 2\pi - \psi, -\hat{n}) = U(\chi, \psi, \hat{n})$ показывает, что когда χ может пробегать все значения $0 \leq \chi < 4\pi$, то множество унитарных матриц покрывается дважды: 1 раз при $0 \leq \chi < 2\pi$ и 1 раз при $2\pi \leq \chi < 4\pi$. Следовательно, мы ограничиваем χ интервалом $0 \leq \chi < 2\pi$, заметив, однако, что периодом для χ является 4π .

²⁾ Строки $1, 2, \dots, m_{12} - m_{22} + 1$ матрицы обозначаются через $m_{11} = m_{12}, m_{12} - 1, \dots, m_{22}$ соответственно. Такое же соглашение применяется для столбцов.

Таким образом, каждой упорядоченной паре целых чисел $[m_{12}m_{22}]$, таких, что $m_{12} \geq m_{22}$, соответствует унитарное неприводимое представление группы $U(2)$. (Тот факт, что представление является неприводимым, сразу следует из его неприводимости, когда U принадлежит $SU(2)$.)

Замечание. Мы получили этот результат из элементарного аргумента, но он следует также из более сложных рассуждений, отправная точка которых обычно алгебраична (с точки зрения алгебр Ли) и, следовательно, топологична. Алгебра Ли группы $U(2)$ допускает ряд связных групп, которые имеют эту алгебру Ли. Универсальной накрывающей группой для этой алгебры Ли является прямое произведение групп $G = R \times SU(2)$, где R — аддитивная группа вещественных чисел¹⁾. Элемент из G является упорядоченной парой (χ, U_0) , где $\chi \in R$ и $U_0 \in SU(2)$. Умножение элементов определяется так: $(\chi, U_0)(\chi', U'_0) = (\chi + \chi', U_0 U'_0)$. Отображение

$$(\chi, U_0) \rightarrow e^{i\chi/2} U_0 = U, \quad (D-6)$$

для каждого $\chi \in R$ и каждого $U_0 \in SU(2)$ является гомоморфизмом $R \times SU(2)$ на $U(2)$. Ядро гомоморфизма (элементы, которые отображаются в единичный элемент σ_0 из $U(2)$) определяется соотношением $e^{i\chi/2} U_0 = \sigma_0$. Так как U_0 унитарна и унимодулярна, то мы получаем, что $e^{i\chi} = 1$, т.е. $\chi = 2k\pi$ и $U_0 = (-1)^k \sigma_0$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Дискретная группа $Z \subset R \times SU(2)$, определенная формулой

$$Z = \{2k\pi, (-1)^k \sigma_0 : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\} \quad (D-7)$$

таким образом, является инвариантной подгруппой в $R \times SU(2)$, и факторгруппа $R \times SU(2)/Z$ изоморфна $U(2)$. Заметим, что Z изоморфна аддитивной группе целых чисел и порождается элементом $(2\pi, -\sigma_0)$. (Прекрасное рассмотрение этих вопросов см. в работе [67].)

Следующее заключение, которое должно быть сделано, состоит в том, что неэквивалентные унитарные неприводимые представления группы $R \times SU(2)$ задаются так: $(\chi, U_0) = e^{ir\chi/2} D^j(U_0)$, где r — произвольное вещественное число. В частности, генератор $(2\pi, -\sigma_0)$ группы Z представляется матрицей $e^{ir\pi} (-1)^{2j} \mathbb{1}^{(j)}$, где $\mathbb{1}^{(j)}$ — единичная матрица размерности $2j + 1$. Но так как при гомоморфизме $R \times SU(2) \rightarrow U(2)$ имеем $(2\pi, -\sigma_0) \rightarrow \sigma_0$ и σ_0 представляется матрицей $\mathbb{1}^{(j)}$, то мы имеем $(-1)^{2j+r} = 1$, т.е. $2j + r$ равно четному числу. Эти ограничения на j и r ($2j$ целое и $2j \geq 0$, r целое, $2j + r$ четное целое) удовлетворяются (однозначно) в терминах пары $[m_{12}m_{22}]$ упорядоченных целых чисел $m_{12} \geq m_{22}$ путем определения $2j = m_{12} - m_{22}$, $r = m_{12} + m_{22}$. Таким образом, неэквивалентными унитарными неприводимыми представлениями группы $U(2)$ являются

$$e^{i(m_{12} + m_{22})/2} D^{\frac{1}{2}(m_{12} - m_{22})}(U_0). \quad (D-8)$$

Выбирая $[m_{12}m_{22}] = [1, 0]$, получаем $e^{i\chi/2} U_0$, что совпадает с самой U . Используя свойство однородности $D^j(e^{i\chi/2} U_0) = e^{ij\chi/2} D^j(U_0)$, получаем наш результат (D-3).

¹⁾ В этом замечании мы следуем обозначениям Мишеля [67] и отходим от наших стандартных обозначений, где R обозначает вращение.

Таким образом, результаты общего анализа Мишеля согласуются с нашим элементарным аргументом, приводящим к (Д-3). Мы дали это несколько детальное обсуждение потому, что оно было на практике источником недоразумений.

Отметим следующие частные результаты:

$$D^{(10)}(U) = U. \quad (\text{Д-9})$$

$$D \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ & \mu & \end{pmatrix} (U^*) = (-1)^{\mu-\nu} D \begin{pmatrix} 0 & -\nu & \\ & -\mu & -1 \end{pmatrix} (U). \quad (\text{Д-10})$$

Второе соотношение является частным случаем общего соотношения

$$D \begin{pmatrix} \mu_{11} & & \\ m_{12} & m_{22} & \\ & m_{11} & \end{pmatrix} (U^*) = (-1)^{m_{11}-\mu_{11}} D \begin{pmatrix} -\mu_{11} & & \\ -m_{22} & & -m_{12} \\ & -m_{11} & \end{pmatrix} (U). \quad (\text{Д-11})$$

Если мы параметризуем U , записав

$$U = e^{ix/2} (x_0 \sigma_0 - i\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}), \quad (\text{Д-12})$$

где $(x_0, \mathbf{x})$ — точка на единичной сфере S^3 , то элементы матриц представлений будут удовлетворять следующим соотношениям ортогональности¹⁾:

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\chi \int d\Omega \left[D \begin{pmatrix} \mu'_{11} & & \\ m'_{12} & m'_{22} & \\ & m'_{11} & \end{pmatrix} (U) \right]^* D \begin{pmatrix} \mu_{11} & & \\ m_{12} & m_{22} & \\ & m_{11} & \end{pmatrix} (U) \\ & = \delta_{m_{11}m'_{11}} \delta_{m_{22}m'_{22}} \delta_{m_{12}m'_{12}} \delta_{\mu_{11}\mu'_{11}} \frac{4\pi^3}{m_{12} - m_{22} + 1}. \end{aligned} \quad (\text{Д-13})$$

Этот результат является следствием определения (Д-3) и соотношения ортогональности (3.315).

Наконец, заметим, что мы получили все конечномерные неэквивалентные неприводимые представления группы $U(2)$.

Литература

1. Гельфанд И. М., Минлос Р. А., Шапиро З. Я. Представления группы вращений и группы Лоренца. — М.: Физматгиз, 1958.
2. Dirac P. A. M., Ann. Inst. H. Poincaré, 11, 15 (1949).
Вторичное квантование.
3. Bergman S., The Kernel Function and Conformal Mapping. Mathematical Surveys No. 5, Amer. Math. Soc., New York, 1950.
4. Bargmann V., Commun. Pure Appl. Math., 14, 187 (1961).

О гильбертовом пространстве аналитических функций и соответствующем интегральном преобразовании.

¹⁾ В действительности, выполняя это интегрирование, находим форму $\int_0^{2\pi} d\chi \times$

$\times \exp[i(m_{12} + m_{22} - m'_{12} - m'_{22})\chi/2] \times [SU(2)\text{-часть}]$. С первого взгляда кажется, что интегрировать по χ нужно от 0 до 4π . Однако $SU(2)$ -интегрирование требуется, чтобы $m_{12} + m_{22} - m'_{12} - m'_{22}$ было четным целым числом.

5. *Segal I. E.*, Illinois J. Math., **6**, 500 (1962).
Математическая характеристика физического вакуума для линейного поля Бозе — Эйнштейна.
6. *Klauder J. R.*, Phys. Rev., **131**, 2766 (1963).
Когерентные и некогерентные состояния поля излучения.
7. *Klauder J. R., Sudarshan E.*, Fundamentals of Quantum Optics, Benjamin, New York, 1968.
- 7a. *Mukunda N., Sudarshan E. C. G.*, Pramana, **10**, 227 (1978).
Новый взгляд на теорему об оптической эквивалентности и новый тип представления для дискретного диагонального когерентного состояния.
76. *Grossman A.* in: Group Theoretical Methods in Physics: Proceedings of the Sixth International Colloquium (eds. Kramer P., Rieckers A.), Springer, Berlin, 1977, p. 162.
Геометрия вещественных и комплексных преобразований в квантовой механике.
- 7b. *Wolf K. B.* in: Group Theory And its Applications (ed. Loeb E. M.), vol. III, Academic Press, New York, 1975, p. 189.
Кольцо Гейзенберга — Вейля в квантовой механике.
8. *Schwinger J.* in: Quantum Theory of Angular Momentum (eds. Biedenharn L. C., van Dam H.), Academic Press, New York, 1965, p. 229.
Об угловом моменте.
9. *Bargmann V.*, Rev. Mod. Phys., **34**, 829 (1962).
О представлениях группы вращений.
10. *Schrodinger E.*, Naturwissenschaften, **14**, 664 (1926).
Непрерывный переход от микро- к макромеханике.
11. *Jauch J. M.* in: Aspects of Quantum Theory (eds. Salam A., Wigner E. P.), Cambridge Univ. Press, London, 1972, p. 137.
О бра- и кет-векторах. Комментарий о математическом формализме квантовой механики Дирака.
12. *Jordan P.*, Z. Physik, **94**, 531 (1935).
Взаимосвязь симметричных и линейных групп с задачей многих тел.
- 12a. *Dirac P. A. M.*, Proc. Roy. Soc. (London), **A183**, 284 (1945).
Унитарные представления группы Лоренца.
13. *Jost R.*, The General Theory of Quantized Fields, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1965.
14. *Louck J. D.*, Amer. J. Phys., **38**, 3 (1970).
Последний прогресс в теории тензорных операторов относительно унитарной группы.
15. *Rota G. C.*, Finite Operator Calculus, Academic Press, New York, 1975.
16. *Rota G.-C.*, Amer. Math. Monthly, **71**, 498 (1964).
Число разбиений множества.
17. *Rota G. C., Kahaner D., Odlyzko A.*, J. Math. Anal. Appl., **42**, 684 (1973).
Конечное операторное исчисление.
- 17a. *Виленкин Н. Я.* Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
176. *Сморodinский Я. А.* Коэффициенты Клебша — Гордана, d -функции для $SU(2)$ и их симметрия. — ЖЭТФ, 1978, т. 48, с. 403.
18. *Young A.*, PLMS (1), **1**, 33, 97 (1901); **11**, **34**, 361 (1902); PLMS (2), **III**, **28**, 255 (1928); **IV**, **31**, 253 (1930); **V**, **31**, 273 (1930); **VI**, **34**, 196 (1932); **VII**, **36**, 304 (1933); **VIII**, **37**, 441 (1934); **IX**, **54**, 218 (1952).
Количественный подстановочный анализ.
19. *Weyl H.*, The Structure and Representations of Continuous Groups. Lectures at the Institute of Advanced Study, Princeton, N. J., 1934—1935. с. 250.

20. Гельфанд И. М., Цетлин М. Л. Конечномерные представления группы унимодулярных матриц. — Докл. АН СССР, 1950, т. 71, с. 825.
21. Weyl H., Gruppentheorie und Quantenmechanik, Hirzel, Leipzig, 1928.
22. Yamanouchi T., Proc. Phys.-Math. Soc. Japan. 18, 623 (1936); 19, 436 (1937).
О вычислении энергетических уровней атома. IV. О вычислении унитарных неприводимых представлений симметрической группы.
23. Nakayama T., Jap. J. Math., 17, 89, 411 (1940).
О некоторых модулярных свойствах неприводимых представлений группы S_n .
- 23a. Frame J. S., Robinson G. de B., Thrall R. M., Can. J. Math., 6, 316 (1954).
Крючковые графы симметрической группы.
24. Robinson G. de B., Representation Theory of the Symplectic Group, Univ. of Toronto Press, Toronto, 1961.
25. Ciftan M., Biedenharn L. C., J. Math. Phys., 10, 221 (1969).
Комбинаторная структура векторов состояний для U_n . I. Крючковые схемы для максимального и полумаксимального состояний для U_n .
26. Weyl H., The Classical Groups. Their Invariants and Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946. (Имеется перевод: Вейль Г. Классические группы, их инварианты и представления. — М.: ИЛ. 1946.)
27. Baird G. E., Biedenharn L. C., J. Math. Phys., 4, 1449 (1963); 5, 1723 (1964); 5, 1730 (1965).
О представлениях полупростых групп Ли. Явная операция сопряжения для $SU(n)$. Каноническая классификация для тензорных операторов в SU_3 .
28. Brody T. A., Moshinsky M., Renner I., J. Math. Phys., 6, 1540 (1965).
Рекурсивные соотношения для коэффициентов Вигнера унитарной группы.
29. Louck J. D., J. Math. Phys., 6, 1786 (1965).
Групповая теория гармонического осциллятора в n -мерном пространстве.
30. Moshinsky M., Rev. Mod. Phys., 34, 813 (1962).
Коэффициенты Вигнера для группы SU_3 и некоторые приложения.
31. Moshinsky M., Nucl. Phys., 31, 384 (1962).
Гармонический осциллятор и теория супермультиплетов (I). Картина для одной частицы.
32. Moshinsky M., J. Math. Phys., 4, 1128 (1963).
Базисы для неприводимых представлений унитарных групп и некоторые приложения.
33. Nagel J. G., Moshinsky M., J. Math. Phys., 6, 682 (1965).
Операторы, которые повышают и понижают неприводимые векторные пространства $U_n - 1$, содержащиеся в неприводимом векторном пространстве группы U_n .
34. Biedenharn L. C., Giovannini A., Louck J. D., J. Math. Phys., 8, 691 (1967).
Каноническое определение операторов Вигнера для U_n .
35. Doubilet P., Rota G.-C., Stein J., Studies in Appl. Math., LIII, No. 3, 185 (1974).
Об основах комбинаторной теории: IX. Комбинаторные методы в теории инвариантов.
- 35a. Desarmenien J., Kung J. P. S., Rota G.-C., Advan. in Math., 27, 63 (1978).
Инвариантная теория, двойные схемы Юнга и комбинаторика.
36. Jauch J. M., Hill E. L., Phys. Rev., 57, 641 (1940).
О проблеме вырожденности в квантовой механике.
37. Baker G. A., Phys. Rev., 103, 1119 (1956).
Вырожденность n -мерного изотропного гармонического осциллятора.
38. Bargmann V., Moshinsky M., Nucl. Phys., 18, 697 (1960), 23, 177 (1961).
Групповая теория гармонического осциллятора. I. Коллективные моды. II. Интегралы движения для квадруполь-квадрупольного взаимодействия.

39. *Moshinsky M.*, J. Math. Phys., 7, 691 (1966).
Состояния Гельфанда и неприводимые представления симметрической группы.
40. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, Commun. Math. Phys., 8, 80 (1968).
Исчисление схем для тензорных операторов унитарной группы.
41. *Kramer P., Moshinsky M.* in: Group Theory and Its Applications (ed. Loeb E. M.), Vol. I, Academic Press, New York, 1968, p. 339.
Групповая теория гармонического осциллятора и структура ядра.
42. *Ciftan M.*, J. Math. Phys., 10, 1635 (1969).
О комбинаторной структуре векторов состояний для $U(n)$.
II. Обобщение гипергеометрической функции на состояния $U(n)$.
43. *Holman W. J.*, J. Math. Phys., 10, 1710 (1969).
Теория представлений групп $Sp(4)$ и $SO(5)$.
44. *Holman W. J.*, Nuovo Cimento, 66A, 619 (1970).
Тензорные операторы для Sp_4 и SO_5 .
45. *Bincer A. M.*, J. Math. Phys., 11, 1835 (1970).
Интерпретация симметрии коэффициентов Клебша — Гордана, открытой Редже.
46. *Louck J. D., Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., 11, 2368 (1970).
Канонический единичный сопряженный тензорный оператор для $U(n)$.
47. *Wu A. C. T.*, J. Math. Phys., 12, 437 (1971).
Структура комбинаторного обобщения гипергеометрических функций для состояний $SU(n)$.
48. *Holman W. J.*, Nuovo Cimento, 4A, 904 (1971).
Об общих бозонных состояниях для $U(n) * U(n)$ и $Sp_4 * Sp_4$.
49. *Holman W. J., Biedenharn L. C.* in: Group Theory and Its Applications (ed. Loeb E. M.), vol. II, Academic Press, New York, 1971, p. 1.
Представления и тензорные операторы унитарной группы $U(n)$.
50. *Seligman T. H.*, J. Math. Phys., 13, 876 (1972).
Базис Вейля для унитарной группы $U(k)$.
51. *Louck J. D., Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., 14, 1336 (1973).
Структура канонических тензорных операторов для унитарных групп. III. Дальнейшее развитие бозонных полиномов и их применения.
52. *Patterson C. W., Harter W. G.*, J. Math. Phys., 17, 1125, 1137 (1976).
Каноническая симметризация для унитарных базисов. I. Канонические базисы Вейля.
- 52a. *Fujiwara Y., Horiuchi H.*, Properties of double Gel'fand polynomials and their application to multiplicity-free problem, Memoirs of the Faculty of Science of Kyoto University (Japan), 1982.
53. *Louck J. D., Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., 12, 173 (1971).
Тождество, которому удовлетворяют коэффициенты Рака группы $U(n)$.
54. *Chacón E., Ciftan M., Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., 13, 577 (1972).
О вычислении свободных от кратностей коэффициентов Вигнера группы $U(n)$.
55. *Biedenharn L. C. et al.*, J. Math. Phys., 13, 1957 (1972).
О структуре канонических тензорных операторов для унитарной группы. I. Расширение правил схемного исчисления и каноническое разбиение для $U(3)$.
56. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, J. Math. Phys., 13, 1985 (1972).
О структуре канонических тензорных операторов для унитарных групп. II. Тензорные операторы для $U(3)$, характеризуемые максимальным нулевым пространством.
57. *Louck J. D., Lohe M. A., Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., 16, 2408 (1975).
Структура канонических функций Рака для $U(3)$ и проективные функции для $U(3):U(2)$.
58. *Lohe M. A., Biedenharn L. C., Louck J. D.*, J. Math. Phys., 18, 1883 (1977).
Структурные свойства самосопряженных тензорных операторов для $SU(3)$.

59. *Louck J. D., Galbraith H. W.*, Rev. Mod. Phys., **44**, 540 (1972).
Применение методов ортогональной и унитарной групп к задаче n тел.
60. *Wigner E. P.*, Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra. Academic Press, New York, 1959. [Имеется перевод: *Вигнер Е.* Теория групп и ее применение к квантовомеханическим атомным спектрам. — М.: ИЛ, 1961.]
61. *Racah G.*, Phys. Rev., **62**, 438 (1942).
Теория комплексных спектров. II.
62. *Regge T.*, Nuovo Cimento [10], **10**, 544 (1958).
Свойства симметрии коэффициентов Клебша — Гордана.
63. *Van der Waerden*, Die gruppentheoretische Methode in der Quantenmechanik, Springer, Berlin, 1932. [Имеется перевод: *ван дер Варден.* Метод теории групп в квантовой механике. — Харьков.: ГНТИУ, 1938.]
64. *Kramers H. A.*, Quantum Mechanics, North-Holland, Amsterdam, 1957.
65. *Brinkman H. C.*, Applications of Spinor Invariants in Atomic Physics, North-Holland, Amsterdam, 1956.
66. *Giovannini A., Smith D. A.*, in: Spectroscopic and Group Theoretic Methods in Physics (eds. Bloch et al), Wiley, New York, 1968, p. 89.
Об алгебраических структурах, сопоставляемых с $3j$ - и $6j$ -символами.
67. *Michel L.* in: Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics (ed. Gursey F.), Gordon and Breach, New York, 1962, p. 135.
Инвариантность в квантовой механике и расширение групп.
68. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, The Racah — Wigner Algebra in Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.
- 69* *Klimuk A. U.* in: Symmetries in Science (eds. Gruber B., Millman R. S.), Plenum Press, New York, 1980, p. 161.
Новый подход к матричным элементам и коэффициентам Клебша — Гордана для компактных и некомпактных групп.
- 70* *Климык А. У.* Матричные элементы и коэффициенты Клебша — Гордана представлений групп. — Киев.: Наукова думка, 1979.
- 71* *Klimuk A. U.*, J. of Phys., **A15**, 3009 (1982).
Инфинитезимальные операторы для представлений комплексных групп Ли и коэффициенты Клебша — Гордана для компактных групп.

Орбитальный угловой момент и угловые функции на сфере

Мы уже обсудили в разд. 2 гл. 3 физические начала квантовой теории орбитального углового момента. Если рассматривать исторически, то операторы квантового углового момента для одной частицы были получены из классического углового момента согласно принципу $\mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$, так что $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ становится дифференциальным оператором (в единицах $\hbar$) $\mathcal{L} = -i\mathbf{x} \times \nabla$. Эти операторы также могут быть получены путем использования отображения Картана (см. (5.27)) эрмитовых матриц H_i , определенных формулой $n_1 H_1 + n_2 H_2 + n_3 H_3 = iN$ (см. (2.6)):

$$\mathcal{L}_i = \tilde{\mathbf{x}} H_i (\partial/\partial \mathbf{x}), \quad (6.1)$$

где

$$\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, x_3), \quad \partial/\partial \mathbf{x} = \text{col}(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \partial/\partial x_3).$$

Связь между операторами орбитального углового момента и сферическими функциями рассмотрена в разд. 8 и 10 гл. 3 как пример общих методов теории углового момента (свойства матриц вращений, техника операторов повышения и понижения и т.д.). Мы дали в этом предыдущем обсуждении: а) явные выражения для сферических функций (формулы (3.141) — (3.148)); б) стандартное действие операторов (6.1) на сферические функции (формулы (3.140)); в) свойство ортогональности на единичной сфере S^2 (формула (3.139)); г) явную и общую форму шаровых сферических функций (формула (3.153)) и д) интеграл Гаунта от трех сферических функций (формула (3.192)).

Сама теория орбитального углового момента имеет важное значение в физических теориях (в отличие от общей теории углового момента), и мы развиваем различные аспекты этой теории в настоящей главе.

Замечание. Следует подчеркнуть, однако, что орбитальная вращательная симметрия $[SO(3)]$ всегда может быть отнесена к более общему понятию общей вращательной симметрии $[SU(2)]$. Это геометрическое выражение связи между ортогональными и унитарными матрицами, выраженной формулами (2.15) — (2.17): каждая унитарная 2×2 -матрица определяет собственное ортогональное преобразование точек евклидова трехмерного пространства. Этот результат становится особенно значимым для единой трактовки сложных систем (см. примечания 5 и 8 гл. 3), в которых кинематически независимые части могут отдельно иметь или орбитальную вращательную симметрию $[SO(3)]$, или общую вращательную симметрию $[SU(2)]$. Мы всегда можем считать, что группа инвариантности (невзаимодействующих) частей является прямым произведением $SU(2) \times SU(2) \times \dots$ с элементами $(U_1, U_2, \dots)$. Группа вращений всей слож-

ной системы тогда представляется как диагональная подгруппа этого прямого произведения, имеющая элементы $(U, U, \dots)$.

1. Вращательная симметрия простой физической системы

Рассмотрим квантовомеханическое описание одной из простейших физических систем: одной безструктурной нерелятивистской частицы с массой m , движущейся в трехмерном пространстве в силовом поле, создаваемом центрально-симметричным потенциалом. Гамильтониан этой частицы имеет вид

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{p}}{2m} + V(r), \quad (6.2)$$

где $\mathbf{p} = -i\nabla$ и $V(r)$ — потенциальная энергия, которая зависит от положения $\mathbf{x}$ частицы через $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$.

С точки зрения теории углового момента наиболее важное свойство оператора (6.2) выражается формулой

$$\mathcal{T}_R H \mathcal{T}_{R^{-1}} = H \quad (6.3)$$

справедливой для каждой собственной ортогональной матрицы R . Здесь $\mathcal{T}_R$ — оператор орбитального вращения T , который определяется действием на состояние $\Psi(\mathbf{x})$ физической системы, описываемой гамильтонианом (6.2)¹⁾:

$$\begin{aligned} (\mathcal{T}_R \Psi)(\mathbf{x}) &= e^{-i\phi \hat{L} \cdot \mathbf{x}} \Psi(\mathbf{x}) \\ &= \Psi(R^{-1} \mathbf{x}), \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $\mathbf{x}' = R^{-1} \mathbf{x}$ обозначает матрицу-столбец, полученную из $\mathbf{x} = \text{col}(x_1, x_2, x_3)$ путем матричного умножения на R^{-1} .

Важное значение свойства инвариантности (6.3) следует из свойств преобразования уравнения Шредингера для физической системы

$$(H\Psi)(\mathbf{x}, t) = i(\partial/\partial t)\Psi(\mathbf{x}, t), \quad (6.5)$$

$$[(\mathcal{T}_R H \mathcal{T}_{R^{-1}})(\mathcal{T}_R \Psi)](\mathbf{x}, t) = i(\partial/\partial t)(\mathcal{T}_R \Psi)(\mathbf{x}, t). \quad (6.6)$$

Так как $\mathcal{T}_R H \mathcal{T}_{R^{-1}} = H$, то (6.6) выражает важный результат. Если Ψ — возможное состояние физической системы, описываемой гамильтонианом H , то $\Psi' = \mathcal{T}_R \Psi$ также является таким состоянием.

Важный частный случай этого общего результата применим к собственным состояниям. Если Ψ_E — собственное состояние с энергией E относительно гамильтониана H (т.е. $H\Psi_E = E\Psi_E$), то $\Psi'_E = \mathcal{T}_R \Psi_E$ — также собственное состояние с энергией E .

Пространство $\mathcal{H}_E$, натянутое на собственные состояния с заданной энергией E относительно гамильтониана типа (6.2), инвариантно относительно действия группы операторов $\{\mathcal{T}_R; R \in SO(3)\}$. Следовательно, это пространство является пространством представления ортогональной группы $SO(3)$. Следовательно,

¹⁾ Мы требуем, чтобы множество $\{\Psi(\mathbf{x})\}$ функций состояний было аналитическим, так что повторное применение $\mathcal{L}$ к функции снова дает функцию этого множества, а также чтобы каждая функция в этом множестве равнялась ее ряду Тейлора, так что $\exp(-i\phi \hat{L} \cdot \mathbf{x}) \Psi(\mathbf{x})$ в действительности равно $\Psi(R^{-1} \mathbf{x})$.

пространство $\mathcal{H}_E$ должно разбиваться в прямую сумму пространств, на каждом из которых реализуется неприводимое представление группы $SO(3)$. Именно в определении этих подпространств появляется теория сферических функций в квантовой теории простых физических систем ¹⁾.

С точки зрения операторной алгебры свойство инвариантности (6.3) эквивалентно такому свойству коммутирования:

$$[\mathcal{L}_i, H(\mathbf{x}, \mathbf{p})] = 0; \quad (6.7)$$

при построении векторов состояний задача состоит в одновременной диагонализации взаимно коммутирующих (эрмитовых) операторов H , $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{L}_3$.

2. Скалярное произведение векторов состояний

Скалярное произведение двух векторов состояний для физической системы с гамильтонианом (6.2) (в обозначении с помощью дираковских векторов бра и кет) имеет вид

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle \equiv \int d\mathbf{x} \langle \mathbf{x} | \Psi \rangle^* \langle \mathbf{x} | \Psi' \rangle, \quad (6.8)$$

где интегрирование распространяется на все $\mathbb{R}^3$. Более того, так как потенциал центрально-симметричен, то значение $\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle$ каждого вектора состояния $|\Psi\rangle$ имеет вид

$$\langle \mathbf{x} | \Psi \rangle = f(r) \hat{\Phi}(\hat{x}), \quad (6.9)$$

где $r = \|\mathbf{x}\| \equiv (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ и $\hat{x}$ — единичный вектор $\hat{x} = \mathbf{x}/r$. Таким образом, скалярное произведение (6.8) факторизуется в произведение

$$\langle \Psi | \Psi' \rangle = (\Phi, \Phi') \int_0^\infty r^2 dr f^*(r) f'(r), \quad (6.10)$$

где

$$(\Phi, \Phi') \equiv \int dS_{\hat{x}} \Phi^*(\hat{x}) \Phi'(\hat{x}) \quad (6.11)$$

Здесь $dS_{\hat{x}}$ обозначает элемент поверхности на единичной сфере в точке $\hat{x}$, и интегрирование распространяется на единичную сферу.

Заметив, что (Φ, Φ') удовлетворяет всем свойствам, которые требуются от скалярного произведения, получаем, что множество непрерывных однозначных функций, которые являются квадратично-интегрируемыми на единичной сфере, составляет гильбертово пространство $\mathcal{H}(S)$ (S обозначает сферу).

3. Унитарность оператора орбитального вращения

В общей теории углового момента (гл. 3) предполагают (на физической основе), что оператор вращения $\exp(-i\psi \hat{n} \cdot \mathbf{J})$ унитарен, т.е. оператор общего углового момента эрмитов. В реализации этой теории с помощью орбитального углового

¹⁾ Таким образом, теория групп используется как инструмент для действительного построения векторов состояний в противоположность более общей роли (гл. 1) теории групп, используемой для определения формы законов природы [1].

момента этот результат можно продемонстрировать явно. Операторы $\mathcal{T}_R$, $R \in SO(3)$ унитарны на пространстве $\mathcal{H}(S)$:

$$(\mathcal{T}_R \Phi, \mathcal{T}_R \Phi') = (\Phi, \Phi') \quad (6.12)$$

для всех $\Phi, \Phi' \in \mathcal{H}(S)$.

Доказательство. Имеем

$$(\mathcal{T}_R \Phi, \mathcal{T}_R \Phi') = \int dS_{\hat{x}} \Phi^*(R^{-1} \hat{x}) \Phi'(R^{-1} \hat{x}) = \int dS_{R\hat{x}} \Phi^*(\hat{x}) \Phi'(\hat{x}) = (\Phi, \Phi'),$$

где $dS_{\hat{x}} = dS_{R\hat{x}}$, так как все точки на сфере эквивалентны относительно вращений. $\square$

Свойство эрмитовости операторов орбитального углового момента выражается формулой ¹⁾

$$(L_i \Phi, \Phi') = (\Phi, L_i \Phi'), \quad \Phi, \Phi' \in \mathcal{H}(S), \quad (6.13)$$

которая следует из свойства унитарности (6.12), если выбрать $R = R_i = R(\phi, \hat{e}_i)$, продифференцировать по ϕ , а потом положить $\phi = 0$. (Эта процедура требует дифференцирования под интегралом; поэтому важное значение имеют однозначность и непрерывность.)

4. (Плотное) подпространство в $\mathcal{H}(S)$

Ясно, что множество $\mathcal{H}_l$ полиномиальных функций $\{P_l\}$, которые однородны со степенью однородности l , т.е.

$$\mathcal{H}_l = \{P_l: P_l(\lambda \mathbf{x}) = \lambda^l P_l(\mathbf{x})\}, \quad (6.14)$$

является инвариантным подпространством в $\mathcal{H}(S)$ по отношению к группе орбитальных вращений (а следовательно, по отношению к каждому оператору L_i). Более того, если полиномы также являются решениями уравнения Лапласа $\nabla^2 P_l(\mathbf{x}) = 0$, то из

$$\mathcal{L}^2 = -r^2 \nabla^2 + (\mathbf{x} \cdot \nabla)^2 + \mathbf{x} \cdot \nabla \quad (6.15)$$

и из теоремы Эйлера об однородных функциях $(\mathbf{x} \cdot \nabla) P_l(\mathbf{x}) = l P_l(\mathbf{x})$ немедленно следует

$$\mathcal{L}^2 P_l(\mathbf{x}) = l(l+1) P_l(\mathbf{x}), \quad l = 0, 1, 2, \dots \quad (6.16)$$

В квантовой механике базис пространства $\mathcal{H}_l$ принято фиксировать (с точностью до общей фазы) стандартным действием операторов $\mathcal{L}_i$ (см. формулы (3.140) и (3.154)). Решение уравнений

$$\mathcal{L}_+ \mathcal{Y}_{ll}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathcal{L}_3 \mathcal{Y}_{ll}(\mathbf{x}) = l \mathcal{Y}_{ll}(\mathbf{x}) \quad (6.17)$$

¹⁾ Оператор L_i действует на функции, тогда как дифференциальный оператор $\mathcal{L}_i$ действует на значения функции. Таким образом, $(L_i f)(\mathbf{x}) = \mathcal{L}_i(f(\mathbf{x}))$, а также $L_i f = f'$ имеют смысл, а $\mathcal{L}_i f$ не имеет смысла. Игнорирование этого (кажущегося педантичным) различия может привести к ошибкам (пример, указывающий на необходимость осторожного обращения, дан Вигнером ([1a], стр. 106)). Стало общей практикой, к сожалению, не различать L_i и $\mathcal{L}_i$ в обозначении (как сделано здесь).

на пространстве $\mathcal{H}_l$ определяется однозначно, и оно имеет вид

$$\mathcal{Y}_{ll}(\mathbf{x}) = \frac{1}{2^l l!} \left[\frac{(2l+1)!}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} (-x_1 - ix_2)^l, \quad (6.18)$$

где $\mathcal{Y}_{ll}$ было нормировано на единичной сфере (и фаза выбрана так, чтобы удовлетворять условию Кондона и Шортли). Таким образом, пространство $\mathcal{H}_l$ содержит только вектор старшего веса. Отсюда следует, что ортонормированный базис в $\mathcal{H}_l$ получается стандартной процедурой понижения (см. формулу (3.151)), приводя таким образом к шаровым сферическим функциям, заданным явно формулой (3.153).

Прямая сумма

$$\sum_{l=0}^{\infty} \oplus \mathcal{H}_l \quad (6.19)$$

является плотным подпространством в $\mathcal{H}(S)$.

5. При квантовании пространственного (орбитального) углового момента могут возникать только целочисленные значения l

Часто предлагают, чтобы критерий однозначности волновых функций включался в теорию орбитального углового момента, для того чтобы избежать рассмотрения полуцелых значений j , которые разрешены в общей теории углового момента. Это требование не возникает в приведенном выше рассмотрении, так как мы с самого начала выбрали пространство $\mathcal{H}_l$ (всегда нечетной размерности $2l+1$) с целочисленными l . Однако общая теория углового момента предполагает (без какого-либо дополнительного предположения об однозначности), что гильбертово пространство $\mathcal{H}_j$ (четной размерности $2j+1$) функций $\{f(\mathbf{x})\}$, по отношению к которому операторы орбитального углового момента $\mathcal{L} = -i\mathbf{x} \times \nabla$ эрмитовы, не существует.

Доказательство проводится путем приведения к противоречию. Предположим, что существует гильбертово пространство $\mathcal{H}$ размерности $2n$ ($n = 1, 2, \dots$), такое, что гипотезы общей теории углового момента ¹⁾ справедливы для реализации с помощью орбитального углового момента, т.е. $\mathbf{J} = \mathcal{L} = -i\mathbf{x} \times \nabla$. Тогда должно быть справедливо построение мультиплетов углового момента, данное в разд. 3 гл. 3. В частности, должно быть возможно натянуть $\mathcal{H}$ на множество базисных векторов, порожденных повторным применением понижающего оператора $\mathcal{L}_-$ к множеству линейно независимых решений дифференциальных уравнений

$$\mathcal{L}_+ f_{jj}(\mathbf{x}) = 0, \quad \mathcal{L}_3 f_{jj}(\mathbf{x}) = j f_{jj}(\mathbf{x}). \quad (6.20)$$

¹⁾ Гипотезы общей теории состоят в следующем: а) существует гильбертово пространство $\mathcal{H}$, на котором угловой момент $\mathbf{J}$ представляется линейным эрмитовым оператором $\mathbf{J}: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, и б) $\mathbf{J}$ подчиняется коммутационному правилу $\mathbf{J} \times \mathbf{J} = i\mathbf{J}$ (см. разд. 3 гл. 3).

Эти уравнения обладают единственным решением

$$f_{jj}(\mathbf{x}) = c_j(-x_1 - ix_2)^j, \quad (6.21)$$

где $j = (2n - 1)/2$, а c_j — константа, определенная нормировкой $|f_{jj}(\mathbf{x})|^2$ на единичной сфере (заметим, что $f_{jj}(\mathbf{x})$ квадратично-интегрируема на единичной сфере). Далее рассмотрим результат повторного применения оператора $\mathcal{L}_-$ к $f_{jj}(\mathbf{x})$. Тогда по предположению $f_p(\mathbf{x}) \equiv \mathcal{L}_-^{p-1} f_{jj}(\mathbf{x}) \in \mathcal{H}$ для каждого $p = 1, 2, 3, \dots$ и, более того, $f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_{2n}(\mathbf{x}), f_{2n+1}(\mathbf{x}), \dots$ взаимно перпендикулярны (свойство эрмитовости операторов $\mathcal{L}_\pm$). Отсюда следует (из построения мультиплетта), что должно иметь место соотношение

$$\mathcal{L}_-^{2j+1} f_{jj}(\mathbf{x}) \equiv 0. \quad (6.22)$$

Но, как мы теперь покажем, это свойство не справедливо, если $2j + 1$ — четное число.

Положим $u = -x_1 - ix_2$, $z = x_3$, $v = x_1 - ix_2$. Теперь мы должны показать, что

$$f(u, v, z) \equiv \left(v \frac{\partial}{\partial z} + 2z \frac{\partial}{\partial u} \right)^{2n} u^{n-\frac{1}{2}} \neq 0$$

для $n = 1, 2, \dots$. Достаточно продемонстрировать, что $f(u, v, 0) \neq 0$. Но ясно, что

$$f(u, v, 0) = \frac{(2n)!}{n!} v^n \left(\frac{\partial}{\partial u} \right)^n u^{n-\frac{1}{2}}$$

не является тождественным нулем. ■

Мы должны заключить, что предполагаемое гильбертово пространство $\mathcal{H}$ не существует.

Существуют только целочисленные значения l орбитального углового момента; гильбертовы пространства $\mathcal{H}_l$ ($l = 0, 1, 2, \dots$) полиномов охватывают все возможные пространства неприводимых представлений группы $SO(3)$ вращений пространства $\mathbb{R}^3$.

(Предыдущий метод доказательства не обнаруживает, какие предположения общей теории углового момента нарушаются для полуцелых l . Более тщательная проверка этого вопроса показывает, что нарушается свойство эрмитовости операторов L_i . По этому вопросу существует обширная литература; она рассматривается в примечании в конце этой главы.)

6. Преобразования шаровых сферических функций при орбитальном вращении

Абстрактный результат (3.34) для шаровых сферических (или сферических) функций принимает явный вид

$$(\mathcal{T}_R \mathcal{Y}_{lm})(\mathbf{x}) = \mathcal{Y}_{lm}(R^{-1}\mathbf{x}) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^l(R) \mathcal{Y}_{lm'}(\mathbf{x}). \quad (6.23)$$

Таким образом, элементы матрицы вращения задаются формулой

$$\mathcal{D}_{m'm}^l(R) = (\mathcal{Y}_{lm'}, \mathcal{T}_R \mathcal{Y}_{lm}); \quad (6.24)$$

и соответствие

$$R \rightarrow \mathcal{D}^l(R) \quad (6.25)$$

является представлением группы $SO(3)$ унитарными матрицами. Свойство унитарности матрицы является следствием того, что оператор орбитального вращения $\mathcal{T}_R$ унитарен; свойство умножения

$$\mathcal{D}^l(R')\mathcal{D}^l(R) = \mathcal{D}^l(R'R) \quad (6.26)$$

подобным образом следует из $\mathcal{T}_{R'}\mathcal{T}_R = \mathcal{T}_{R'R}$.

Связь матриц вращений $\mathcal{D}^l(R)$ с $D^l(U)$, найденная выше (см. гл. 3), определяется сравнением формулы (6.4), определяющей $\mathcal{T}_R$, с абстрактным оператором вращения, определенным формулой (3.34). Видим, что на $\mathcal{H}_l$

$$\mathcal{T}_{R(\phi, \hat{n})} \equiv \mathcal{U}(\phi, \hat{n}) \quad (6.27)$$

Следовательно, из (3.34) и (6.23) следует

$$\mathcal{D}^l(R(\phi, \hat{n})) = D^l(\phi, \hat{n}). \quad (6.28)$$

В более общем виде находим

$$\mathcal{D}^l(R) = D^l(U)/(\det U)^l \quad (6.29)$$

для R и U , связанных формулой (2.16).

Замечания. а) Всюду в этой главе мы подчеркиваем свойства шаровых сферических функций в противоположность свойствам сферических функций. Связь между этими функциями дается соотношением $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}) = r^l Y_{lm}(\theta\phi)$ для $\mathbf{x} = (r \sin \theta \cos \phi, r \sin \theta \sin \phi, r \cos \theta)$, где $Y_{lm}(\theta\phi)$ — сферические функции. Существует ряд преимуществ в использовании шаровых сферических функций: 1) многие соотношения между шаровыми сферическими функциями легко понимаются как соотношения между полиномами (от трех переменных), см., например, формулы (6.23), (6.56) и разд. 15 — 19; 2) соотношения между сферическими функциями легко получаются из соотношений между шаровыми сферическими функциями путем параметризации точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ с помощью сферических координат и 3) соотношения между шаровыми сферическими функциями, включая соотношения с операциями градиента и ротора, легко задаются в любой параметризации (криволинейных координат) точек $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

б) Закон (6.26) представления группы включает как частные случаи свойство преобразования (6.23) для сферических функций, а также теорему сложения (6.137). Соотношение (6.23) получается из $\mathcal{D}_{0,m}^l(R'R) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m',m}^l(R) \mathcal{D}_{0,m'}^l(R')$ и (6.181), если положить $\eta = \mathbf{x} = \text{col}(R'_{31}, R'_{32}, R'_{33})$; дальнейшее ограничение этого результата к $m = 0$ порождает соотношение (6.137), если положить $\mathbf{y} = (R_{13}, R_{23}, R_{33})$ и использовать свойство (6.182). Эти результаты были обсуждены в контексте закона представлений группы $SU(2)$ в разд. 7 и 8 гл. 3. Связь между представлениями группы и специальными функциями была развита Вигнером [16] (см. также [1v — 1e]).

7. Элементы матрицы вращения $\mathcal{D}^l(R)$ являются однородными полиномами

Выше мы указали (формула (3.86)), что элементы матрицы $D^l(U)$ ($l = 0, 1/2, 1, \dots$) являются однородными полиномиальными формами степени $2l$ от элементов u_{ij} матрицы U . Подобный результат справедлив для $\mathcal{D}^l(R)$. Чтобы устано-

вить этот результат, используем свойство ортогональности $R^{-1} = \tilde{R}$, чтобы записать (6.23) в виде

$$\mathcal{Y}_{lm}(\tilde{R}\mathbf{x}) = \sum_{m'} \mathcal{D}_{m'm}^l(R) \mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}). \quad (6.30)$$

Как соотношение между полиномами (6.30) справедливо для а) произвольной тройки комплексных чисел $(x_1, x_2, x_3) = (z_1, z_2, z_3) = \mathbf{z}$ и б) произвольной *несингулярной комплексной матрицы* R , удовлетворяющей условию $\tilde{R}R = \alpha I$ ($\alpha \in \mathbb{C}$).

Доказательство. Функция $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{z})$ удовлетворяет комплексному уравнению Лапласа (заменяем $\partial/\partial x_i$ на $\partial/\partial z_i$), и общая справедливость соотношения (6.30) зависит только от того, удовлетворяет ли $\mathcal{Y}_{lm}(\tilde{R}\mathbf{z})$ комплексному уравнению Лапласа; это приводит к условию «б».

Как частный пример справедливости соотношения (6.30) при этой расширенной области определения мы можем заменить R на λR и использовать свойство однородности шаровых сферических функций

$$\mathcal{Y}_{lm}(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^l \mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}), \quad (6.31)$$

чтобы доказать, что

$$\mathcal{D}^l(\lambda R) = \lambda^l \mathcal{D}^l(R). \quad (6.32)$$

Так как из (6.24), (6.23) и (6.30) следует, что $\mathcal{D}_{m'm}^l(R)$ — полином от R_{ij} , то из (6.32) заключаем, что *элементы матрицы $\mathcal{D}^l(R)$ являются однородными полиномами степени l от элементов R_{ij} матрицы R .*

Замечания. а) Полученный выше результат, расширяющий область определения, для которой справедливо соотношение (6.30), показывает, что матрицы $\mathcal{D}^l(R)$ дают неприводимые представления группы несингулярных комплексных матриц, удовлетворяющих условию $\tilde{R}R = \alpha I$. В частности, они дают неприводимые представления группы вещественных ортогональных матриц. б) В разд. 19 и 20 мы рассматриваем $\mathcal{D}_{m'm}^l(R)$ как полиномиальные формы от $\{R_{ij}\}$ и отмечаем связь с неприводимыми представлениями группы $SU(2)$.

8. Уравнение на собственные значения энергии

Возвратимся теперь к рассмотрению приложений предыдущих результатов (для сферических функций) к решению задачи на собственные значения энергии: $H\Psi_E = E\Psi_E$. Так как (хорошо определенные) функции от $r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2}$ являются единственными инвариантами относительно вращений, которые могут быть образованы из координат (x_1, x_2, x_3) одной точки, то вышеприведенный анализ орбитального углового момента показывает, что каждое энергетическое собственное пространство (пространство, натянутое на линейно независимые решения уравнения $H\Psi_E = E\Psi_E$) должно разбиваться на мультиплеты орбитального углового момента

$$\{\Psi_{Elm}(\mathbf{x}) = F_{El}(r)\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}) : m = l, l-1, \dots, -l\}, \quad (6.33)$$

где $l \in \{0, 1, 2, \dots\}$ (инвариантные относительно вращений функции $F_{El}(r)$ не могут зависеть от m). Таким образом, общее решение задачи на одновременные собственные значения операторов $\mathcal{L}_3$, $\mathcal{L}^2$ и H есть

$$\mathcal{L}_3 \Psi_{Elm}(\mathbf{x}) = m \Psi_{Elm}(\mathbf{x}),$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2 \Psi_{Elm}(\mathbf{x}) &= l(l+1) \Psi_{Elm}(\mathbf{x}), \\ H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \Psi_{Elm}(\mathbf{x}) &= E \Psi_{Elm}(\mathbf{x}),\end{aligned}\quad (6.34)$$

где собственное значение энергии E не зависит от m .

Удобно использовать формулу (6.15) (которая выражает $\mathcal{L}^2$ в терминах инвариантов вращения $\mathbf{x} \cdot \nabla$, r^2 и $\nabla \cdot \nabla = \nabla^2$), чтобы вывести радиальное уравнение на собственные значения. (Это особенно просто в силу свойства производной

$$(\mathbf{x} \cdot \nabla)[f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})] = [(\mathbf{x} \cdot \nabla)f(\mathbf{x})]g(\mathbf{x}) + f(\mathbf{x})[(\mathbf{x} \cdot \nabla)g(\mathbf{x})]$$

и $(\mathbf{x} \cdot \nabla)F(r) = r(d/dr)F(r)$.) Таким образом, получаем

$$r^2 \nabla^2 [F(r) \mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x})] = \left[r \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} + 2l + 1 \right) F(r) \right] \mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}).$$

Использование этого результата в (6.34) порождает

$$\left[-\frac{1}{2mr^2} \left(r \frac{d}{dr} \right) \left(r \frac{d}{dr} + 2l + 1 \right) + V(r) \right] F_{El}(r) = E F_{El}(r). \quad (6.35)$$

Обычно в квантовой механике явно вводят сферические полярные координаты, определенные формулами

$$x_1 \pm ix_2 = r \sin \theta e^{\pm i\phi}, \quad x_3 = r \cos \theta \quad (6.36)$$

($0 \leq \phi < 2\pi$, $0 \leq \theta \leq \pi$), так что

$$\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x}) = r^l Y_{lm}(\theta, \phi). \quad (6.37)$$

Затем находят, что инвариантная относительно вращений функция

$$R_{El}(r) = r^l F_{El}(r) \quad (6.38)$$

удовлетворяет соотношению

$$\left[-\frac{1}{2m} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) + V(r) \right] R_{El}(r) = E R_{El}(r). \quad (6.39)$$

Основное следствие вращательной инвариантности физической системы, описываемой гамильтонианом вида (6.2), состоит в следующем. Волновые функции точного орбитального углового момента должны иметь форму произведения (6.33), где радиальные функции и собственные значения энергии удовлетворяют радиальному дифференциальному уравнению (6.35); см. также (6.39).

Сферические функции (шаровые сферические функции, ограниченные единичной сферой) представляют собой простейший пример класса функций, называемых тензорными сферическими функциями, на которые мы ссылаемся как на угловые функции на единичной сфере. Ниже мы мотивируем введение в физику этого более общего класса функций.

9. Тензорные сферические функции

Сферические функции представляют общий интерес в квантовой физике, так как они характеризуют состояния точного орбитального углового момента для каждой одночастичной системы, имеющей орбитальную вращательную симметрию. Тензорные сферические функции играют подобную роль для сложных систем, состоящих из «двух частей», где первая часть имеет орбитальную враща-

тельную симметрию $[SO(3)]$, а вторая (независимая) часть имеет общую вращательную симметрию $[SU(2)]$. Так как любое взаимодействие между частями должно обладать вращательной инвариантностью всей сложной системы (диагональная подгруппа группы $SU(2) \times SU(2)$; см. замечание в начале этой главы), то мы стремимся получить существенную характеристику системы относительно полного углового момента путем связывания состояний орбитального углового момента первой части с состояниями углового момента второй части. Однако, чтобы получить общий результат, мы не включаем деталей второй части системы. Поэтому мы обозначаем состояния ее углового момента в общей абстрактной форме. Это дает нам искомую модель для абстрагирования понятия тензорных сферических функций.

Рассмотрим физическую систему, которая обладает орбитальным угловым моментом L , а также вторым (коммутирующим) угловым моментом S .

Через $\mathcal{H}_l$ обозначаем $(2l + 1)$ -мерное векторное пространство, натянутое на ортонормированный базис:

$$\{\mathcal{Y}_{lm} : \mu = l, l-1, \dots, -l\}. \quad (6.40)$$

Операторы орбитального углового момента (L_1, L_2, L_3) имеют (по определению) стандартное действие на этот базис (см. примечание на стр. 257):

$$\begin{aligned} L_{\pm} \mathcal{Y}_{lm} &= [(l \mp \mu)(l \pm \mu + 1)]^{1/2} \mathcal{Y}_{l, \mu \pm 1}, \\ L_3 \mathcal{Y}_{lm} &= \mu \mathcal{Y}_{lm}. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Через $\mathcal{H}'_s$, $s = \{0, 1/2, 1, \dots\}$, мы обозначаем $(2s + 1)$ -мерное векторное пространство, натянутое на ортонормированный базис ¹⁾:

$$\{\xi_v : v = s, s-1, \dots, -s\}. \quad (6.42)$$

Операторы углового момента (S_1, S_2, S_3) имеют (по определению) стандартное действие на этот базис:

$$\begin{aligned} S_{\pm} \xi_v &= [(s \mp v)(s \pm v + 1)]^{1/2} \xi_{v \pm 1}, \\ S_3 \xi_v &= v \xi_v. \end{aligned} \quad (6.43)$$

Пространство $\mathcal{H}$ обладает скалярным произведением (6.11). Мы предполагаем также, что $\mathcal{H}'_s$ снабжено скалярным произведением, которое обозначаем через $(\xi', \xi)'$ для $\xi', \xi \in \mathcal{H}'_s$. Таким образом,

$$(\xi_v, \xi_v)' = \delta_{v,v}. \quad (6.44)$$

Тензорные шаровые сферические функции — это функции, принадлежащие тензорному произведению $\mathcal{H}'_l \otimes \mathcal{H}'_s$ (см. примечание 5 гл. 3) и определяемые формулой

$$\mathcal{Y}^{(ls)jm} \equiv \sum_v C_{m-v, v, m}^{lsj} \mathcal{Y}_{l, m-v} \otimes \xi_v. \quad (6.45)$$

«Значение» этой функции в точке $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ определяется формулой

$$\mathcal{Y}^{(ls)jm}(\mathbf{x}) \equiv \sum_{\mu, v} C_{\mu m}^{lsj} \mathcal{Y}_{l\mu}(\mathbf{x}) \otimes \xi_v \quad (6.46)$$

¹⁾ Мы считаем s произвольным, но фиксированным и опускаем его в обозначении.

Замечание. Базисные векторы ξ , и операторы углового момента (S_1, S_2, S_3) намеренно оставлены в абстрактной и общей форме, чтобы допускать разнообразие интерпретаций определения (6.45). При рассмотрении свойств тензорных шаровых сферических функций концентрируем свое внимание на шаровых сферических функциях, определенных формулой (6.45), сохраняя ξ , фиксированным и используя только свойства, следующие из соотношений (6.43) и (6.44). Мы также сохраняем обозначение общего тензорного произведения, принятое в примечании 5 гл. 3, чтобы избежать смешивания общих результатов с частными реализациями. В литературе нет однообразного обозначения для тензорных сферических функций. Мы выбрали обозначение, которое явно показывает связывание угловых моментов.

Резюмируем некоторые из свойств тензорных шаровых сферических функций, которые прямо следуют из того факта, что они представляют собой специальный случай связанных базисных векторов углового момента. Полный угловой момент J имеет определение

$$J \equiv L \otimes 1' + 1 \otimes S, \quad (6.47)$$

где 1 и $1'$ — единичные операторы на векторных пространствах $\mathcal{H}_l$ и $\mathcal{H}_s'$ соответственно. Основные результаты состоят в следующем:

а) *Свойства векторных пространств.* Множество векторов

$$\{\mathcal{Y}^{(ls)jm}; m = j, j-1, \dots, -j; j = l+s, l+s-1, \dots, |l-s|\} \quad (6.48)$$

является ортонормированным базисом пространства $\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_s'$ (см. определение скалярного произведения в примечании 5 гл. 3). Используя обозначение $\langle, \rangle$ для скалярного произведения на пространстве $\mathcal{H}_l \otimes \mathcal{H}_s'$, имеем

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{Y}^{(l's)j'm'}, \mathcal{Y}^{(ls)jm} \rangle &\equiv \sum_{v'v} C_{m'-v', v', m}^{l's j'} C_{m-v, v, m}^{ls j} (\mathcal{Y}_{l', m'-v', \mathcal{Y}_{l, m-v}})(\xi_{v'}, \xi_v) \\ &= \delta_{j'j} \delta_{l'l} \delta_{m'm}. \end{aligned} \quad (6.49)$$

б) *Свойства одновременных собственных векторов.* Тензорные шаровые сферические функции являются гармоническими функциями, и они решают задачу на одновременные собственные векторы, показанную ниже

$$\begin{aligned} (\nabla^2 \otimes 1') \mathcal{Y}^{(ls)jm} &= 0, \\ J^2 \mathcal{Y}^{(ls)jm} &= j(j+1) \mathcal{Y}^{(ls)jm}, \\ J_3 \mathcal{Y}^{(ls)jm} &= m \mathcal{Y}^{(ls)jm}, \\ (L^2 \otimes 1') \mathcal{Y}^{(ls)jm} &= l(l+1) \mathcal{Y}^{(ls)jm}, \\ (1 \otimes S^2) \mathcal{Y}^{(ls)jm} &= s(s+1) \mathcal{Y}^{(ls)jm}, \end{aligned} \quad (6.50)$$

где

$$J^2 = L^2 \otimes 1' + 1 \otimes S^2 + 2 \sum_i L_i \otimes S_i. \quad (6.51)$$

Также правильно, что операторы $J_{\pm}$ имеют стандартное действие на тензорных шаровых сферических функциях:

$$J_{\pm} \mathcal{Y}^{(ls)jm} = [(j \mp m)(j \pm m + 1)]^{1/2} \mathcal{Y}^{(ls)j, m \pm 1} \quad (6.52)$$

в) *Свойства преобразования при вращениях.* Действие унитарного оператора вращения $\mathcal{U} = \exp(-i\psi \hat{n} \cdot J)$ задается так:

$$\mathcal{U}\mathcal{Y}^{(ls)jm} = \sum_{m'} D_{m'm}^j(\psi, \hat{n}) \mathcal{Y}^{(ls)jm'} \quad (6.53)$$

г) *Свойство производной.* Если операторы S_i обладают свойством производной (см. формулу (3.217) гл. 3), то тензорные шаровые сферические функции также являются неприводимыми тензорами по отношению к $\mathbb{J}$. Фактически в обозначении формулы (3.232) имеем

$$\mathcal{Y}^{(ls)jm} = [\mathcal{Y}^l \times \xi^s]_m^j, \quad (6.54)$$

где $\mathcal{Y}^l$ обозначает множество шаровых сферических функций (6.40), а ξ^s обозначает множество базисных векторов (6.42).

Замечания. а) Тензорные сферические функции получаются из тензорных шаровых сферических функций путем ограничения точки x поверхностью единичной сферы. б) Соотношение между обычными шаровыми сферическими функциями предполагает соотношение между тензорными шаровыми сферическими функциями (так как ξ , фиксированы); свойство неприводимых тензоров (формула (3.206) гл. 3) означает, что весь аппарат теории неприводимых тензоров применим к тензорным шаровым сферическим функциям.

Обычно (однако см. соотношение (6.59) для векторных сферических функций) векторы ξ_ν в определении (6.45) выбирают как матрицы-столбцы

$$\xi_\nu = \text{col}(0 \cdots 0 \mid 1 \mid 0 \cdots 0), \quad (6.55)$$

где 1 на $(s - \nu + 1)$ -м месте и $\nu = s, s - 1, \dots, -s$. Тогда операторы S_i становятся матрицами $S_i^{(s)}$ стандартного углового момента (см. разд. 4 гл. 3).

Тензорное произведение $\mathcal{Y}_{lm} \otimes \xi_\nu$ теперь обозначается расположением рядом функции и матрицы-столбца: $\mathcal{Y}_{lm} \xi_\nu$. Операторы 1 и $1'$ становятся единичной $(2s + 1) \times (2s + 1)$ -матрицей и 1 соответственно, так что, например, $L^2 \otimes 1' = L^2$ и $1 \otimes S_i = S_i^{(s)}$ — матрица. Расположение рядом операторов и векторов состояний имеет хорошо определенное и стандартное значение.

Используя эту интерпретацию, действие оператора вращения $\mathcal{U}$, соответствующего вращению R пространства $\mathbb{R}^3$, может быть задано в таком виде:

$$(\mathcal{U} \mathcal{Y}^{(ls)jm})(x) = D^s(U) [\mathcal{Y}^{(ls)jm}(R^{-1}x)] = \sum_{m'} D_{m'm}^j(U) \mathcal{Y}^{(ls)jm'}(x), \quad (6.56)$$

где $\pm U \rightarrow R$ при гомоморфизме $SU(2)$ на $SO(3)$.

10. Спинорные сферические функции

Спинорные сферические функции соответствуют случаю $s = 1/2$ в (6.45) и задаются в матричной форме соотношений (6.55) и (6.56) так ¹⁾:

¹⁾ Поскольку в физических задачах сохраняется именно полный угловой момент, обычно перечисляют функции с фиксированным j . Дальнейшие обсуждения спинорных сферических функций могут быть найдены в [2 — 4]. Недавняя трактовка, которая также рассматривает тензорные сферические функции, была дана Кэмпбелом [4a].

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}^{(j-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+m}{2j}} \mathcal{Y}_{j-\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j-m}{2j}} \mathcal{Y}_{j-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{Y}^{(j+\frac{1}{2}, \frac{1}{2})jm} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-m+1}{2j+2}} \mathcal{Y}_{j+\frac{1}{2}, m-\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{j+m+1}{2j+2}} \mathcal{Y}_{j+\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \quad (6.57)
 \end{aligned}$$

Квантовое число j является полуцелым в этих функциях. Их иногда называют *спинорами Паули центрального поля*, так как Паули использовал их при решении задачи об атоме водорода со спин-орбитальным связыванием (см. разд. 4 гл. 7).

11. Векторные сферические функции

Векторные сферические функции соответствуют случаю $s = 1$ в (6.45) и задаются в матричной форме соотношений (6.55) и (6.56):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{Y}^{(j-1, 1)jm} &= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(j+m-1)(j+m)}{2j(2j-1)}} \mathcal{Y}_{j-1, m-1} \\ \sqrt{\frac{(j-m)(j+m)}{j(2j-1)}} \mathcal{Y}_{j-1, m} \\ \sqrt{\frac{(j-m-1)(j-m)}{2j(2j-1)}} \mathcal{Y}_{j-1, m+1} \end{pmatrix}, \\
 \mathcal{Y}^{(j1)jm} &= \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{(j+m)(j-m+1)}{2j(j+1)}} \mathcal{Y}_{j, m-1} \\ \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}} \mathcal{Y}_{j, m} \\ \sqrt{\frac{(j-m)(j+m+1)}{2j(j+1)}} \mathcal{Y}_{j, m+1} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\mathcal{Y}^{(j+1,1)jm} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{(j+1-m)(j+2-m)}{2(j+1)(2j+3)}} \mathcal{Y}_{j+1,m-1} \\ -\sqrt{\frac{(j+1-m)(j+1+m)}{(j+1)(2j+3)}} \mathcal{Y}_{j+1,m} \\ \sqrt{\frac{(j+m+2)(j+m+1)}{2(j+1)(2j+3)}} \mathcal{Y}_{j+1,m+1} \end{pmatrix} \quad (6.58)$$

(В этих результатах квантовое число j является целым числом.)

Векторные сферические функции играют важную роль при мультипольном разложении электромагнитного взаимодействия в квантовой физике (см. разд. 6 гл. 7). В соответствии с этим теория векторных сферических функций развивалась и использовалась различными авторами [5 — 10].

Может быть принята чисто векторная точка зрения, основанная на реализации операторов углового момента для спина 1, представленная в деталях в приложении Г гл. 3.

Интерпретация соотношения (6.45) состоит в том, что

$$\mathcal{Y}^{(11)jm} = \sum_{\mu} C_{m-\mu,\mu}^{11j} \mathcal{Y}_{1,m-\mu} \hat{\xi}_{\mu} \quad (6.59)$$

определяет *векторную функцию* в обычном смысле, принятом в векторном исчислении. Напомним, что базисные векторы задаются формулами

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{+1} &= -(\hat{e}_1 + i\hat{e}_2)/\sqrt{2}, \\ \hat{\xi}_0 &= \hat{e}_3, \\ \hat{\xi}_{-1} &= (\hat{e}_1 - i\hat{e}_2)/\sqrt{2}. \end{aligned} \quad (6.60)$$

Более того, при действии операторов $S_k = \Gamma_k \equiv i\hat{e}_k \times$ имеем стандартное действие операторов углового момента (см. приложение Г гл. 3):

$$\begin{aligned} S_{\pm} \hat{\xi}_{\mu} &= [(1 \mp \mu)(2 \pm \mu)]^{\frac{1}{2}} \hat{\xi}_{\mu \pm 1}, \\ S_3 \hat{\xi}_{\mu} &= \mu \hat{\xi}_{\mu}, \\ S^2 \hat{\xi}_{\mu} &= 2 \hat{\xi}_{\mu}. \end{aligned} \quad (6.61)$$

Имея в виду, что дифференциальные операторы должны действовать на компоненты этих векторных функций и что векторные операции $\cdot$ и $\times$ действуют на базисные векторы $\hat{\xi}_{\mu}$, получаем полностью согласующуюся реализацию свойств общего тензорного произведения. Мы можем записать (6.50) в виде

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathcal{Y}^{(11)jm} &= 0, \\ \mathbf{J}^2 \mathcal{Y}^{(11)jm} &= j(j+1) \mathcal{Y}^{(11)jm}, \\ J_3 \mathcal{Y}^{(11)jm} &= m \mathcal{Y}^{(11)jm}, \\ \mathbf{L}^2 \mathcal{Y}^{(11)jm} &= l(l+1) \mathcal{Y}^{(11)jm}, \\ S^2 \mathcal{Y}^{(11)jm} &= 2 \mathcal{Y}^{(11)jm}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Очень интересным является результат, следующий из (6.51). Так как

$$\sum_k L_k \otimes S_k = \sum_k L_k S_k = i \left(\sum_k L_k \hat{e}_k \right) \mathbf{x} = i \mathbb{L} \mathbf{x}, \quad (6.63)$$

то получаем [6]

$$\mathcal{Y}^{(1)jm} = [j(j+1) - l(l+1) - 2] \mathcal{Y}^{(1)jm}. \quad (6.64)$$

Таким образом, *векторные сферические функции являются собственными векторами оператора $2i\mathbb{L}\mathbf{x}$* . Так как j может принимать только значения $l+1$, l и $l-1$ ($l \geq 1$), то собственными значениями оператора $2i\mathbb{L}\mathbf{x}$ соответственно являются $2l$, -2 и $-2l-2$. (Для $l=0$ получаем один собственный вектор $\mathcal{Y}^{(0)1m}$ с собственным значением 0, так как по определению другие две векторные сферические функции равны нулю.)

Структура, предложенная формулой (6.64), является структурой, лежащей в основе операторной алгебры. Чтобы оправдать это предположение, замечаем, что соотношения, выражающие стандартное действие операторов орбитального углового момента на шаровые сферические функции, в терминах векторных шаровых сферических функций превращаются в следующее единственное соотношение:

$$\mathcal{Y}^{(1)lm} = [l(l+1)]^{-\frac{1}{2}} \mathbb{L} \mathcal{Y}_{lm}, \quad l \neq 0. \quad (6.65)$$

Используя этот результат в обеих частях формулы (6.64) для $j=l$, получаем (после сокращения множителей)

$$(\mathbb{L} \mathbf{x} \mathbb{L}) \mathcal{Y}_{lm} = i \mathbb{L} \mathcal{Y}_{lm}; \quad (6.66)$$

т.е. $\mathbb{L} \mathbf{x} \mathbb{L} = i\mathbb{L}$. Таким образом, для $j=l$ результат, выраженный формулой (6.64), является просто другой формулировкой фундаментальных коммутационных соотношений углового момента и стандартного действия углового момента на векторы состояния. Заметив, что $\mathbb{L}$ является собственным вектором оператора $\Gamma_{\mathbb{L}} = \mathbb{L} \mathbf{x}$, т.е.

$$\Gamma_{\mathbb{L}} \mathbb{L} = i\mathbb{L}, \quad (6.67)$$

мы приходим к попытке интерпретировать случаи $j=l \pm 1$ формулы (6.64) в терминах других (возможных) операторных собственных значений $\Gamma_{\mathbb{L}}$, что мы теперь обсудим.

12. Алгебраические аспекты векторных сферических функций

Как можно было ожидать, именно теория векторных операторов (по отношению к $\mathbb{L}$) лежит в основе свойств векторных сферических функций, отмеченных выше. Напомним, что векторный оператор A (по отношению к $\mathbb{L}$) удовлетворяет по определению коммутационным правилам (см. (3.221) и (3.222))

$$\mathbb{L} \mathbf{x} A + A \mathbf{x} \mathbb{L} = 2iA. \quad (6.68)$$

Рассмотрим теперь некоторые следствия этого соотношения, которые прямо выводятся с помощью обычных методов векторной алгебры, имея в виду,

что важен порядок операторов ¹⁾, т.е. по определению мы имеем

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_i \equiv A_j B_k - A_k B_j, \quad i, j, k \text{ циклически.}$$

Получаем

$$(\mathbf{A} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L} = i\mathbf{A} \times \mathbf{L} - \mathbf{A} \mathbf{L}^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L}, \quad (6.69)$$

$$[(\mathbf{A} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L}] \times \mathbf{L} = i(\mathbf{A} \times \mathbf{L}) \times \mathbf{L} - (\mathbf{A} \times \mathbf{L}) \mathbf{L}^2 + i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L}. \quad (6.70)$$

Мы намеренно записали эти соотношения в форме, в которой операторы углового момента стоят *справа*. Эта форма важна потому, что она позволяет нам использовать известное действие операторов углового момента, когда мы действуем операторными тождествами на $\mathscr{Y}_{lm}$. (Форма, в которой операторы углового момента находятся слева, была бы удобной в теории дуальных пространств.) По тем же причинам также более удобно определять оператор произведения C_L через

$$AC_L \equiv \mathbf{A} \times \mathbf{L}. \quad (6.71)$$

(Это необычное «левостороннее действие» имеет определенные преимущества, что мы продемонстрируем ниже в формулах (6.74) и (6.75).)

Используя обозначение (6.71), можно переписать формулы (6.69) и (6.70) в виде

$$AC_L^2 = iAC_L - \mathbf{A} \mathbf{L}^2 + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L}, \quad (6.72)$$

$$AC_L^3 = iAC_L^2 - (AC_L)\mathbf{L}^2 + i(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L}, \quad (6.73)$$

где повторное применение оператора C_L к вектору $\mathbf{A}$ определяется формулой $AC_L^n \equiv (AC_L^{n-1})C_L$, $n = 2, 3, \dots$. Исключая выражение $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L}$ в этих двух уравнениях, получаем *характеристическое уравнение* (теорема Кэли — Гамильтона) для оператора C_L :

$$\mathbf{A}[C_L^3 - 2iC_L^2 + C_L(\mathbf{L}^2 - 1) - i\mathbf{L}^2] = 0. \quad (6.74)$$

Действуя этим векторным оператором на $\mathscr{Y}_{lm}$, получаем

$$[\mathbf{A}(C_L + il)(C_L - i)(C_L - il - i)]\mathscr{Y}_{lm} = 0. \quad (6.75)$$

Согласно этому, *собственные значения оператора C_L равны $-il, i$ и $i(l+1)$; так как $\mathbf{A}$ произволен, это единственные возможные собственные значения.*

Соотношение (6.74) может быть выражено как операторное тождество (теорема Кэли — Гамильтона для оператора C_L):

$$\prod_{\delta=-1}^{+1} (C_L - \Omega_\delta) = 0, \quad (6.76)$$

которое справедливо для произвольного векторного оператора. В этом результате Ω_δ являются инвариантными операторами, определенными формулами

$$\Omega_\delta = i - i\delta \left(\frac{D + \delta}{2} \right), \quad \delta = +1, 0, -1, \quad (6.77)$$

¹⁾ Распространение обычных формул векторного анализа на векторы, имеющие некоммутирующие компоненты, дано Шортли и Кимбалом [11] (см. также [12]).

где $D = \sqrt{4L^2 + 1}$ — (положительно определенный) инвариантный размерностный оператор (собственные значения $2l + 1$, $l = 0, 1, \dots$).

Рассмотрим теперь векторные операторы, определенные формулой

$$A^{(\delta)} = A \prod_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq \delta}} (C_L - \Omega_\lambda). \quad (6.78)$$

Применение теоремы Кэли — Гамильтона приводит к уравнению на собственные значения

$$A^{(\delta)} C_L = A^{(\delta)} \Omega_\delta, \quad (6.79)$$

или, что эквивалентно,

$$L \times A^{(\delta)} = A^{(\delta)} (2i - \Omega_\delta). \quad (6.80)$$

Каждый из векторных операторов $A^{(\delta)}$ является собственным вектором оператора $L \times$, причем этот результат справедлив для произвольного векторного оператора.

Для того чтобы интерпретировать эти результаты в связи с формулой (6.64), используем следующие тождества:

$$\begin{aligned} [L^2, A] &= -2i L \times A - 2A, \\ [L_3, A] &= -i \hat{e}_3 \times A = -S_3 A. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Применение этих соотношений к шаровым сферическим функциям $\mathcal{Y}_{lm}$ и использование $A^{(\delta)}$ вместо A дает

$$\begin{aligned} L^2(A^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm}) &= (l + \delta)(l + \delta + 1)(A^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm}), \\ J_3(A^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm}) &= m(A^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm}). \end{aligned} \quad (6.82)$$

Из этих двух результатов следует, что $A^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm}$ пропорционально $\mathcal{Y}^{(l+\delta, 1)lm}$.

Теперь мы сформулируем фундаментальный результат для векторных операторов. Пусть A — произвольный векторный оператор. Определяем векторные операторы

$$A^{(\delta)} \equiv A \prod_{\substack{\lambda \\ \lambda \neq \delta}} (C_L - \Omega_\lambda). \quad (6.83)$$

Тогда

$$A^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm} = a_{l\delta} (l + \delta \|A\| l) \mathcal{Y}^{(l+\delta, 1)lm}, \quad (6.84)$$

где $(l + \delta \|A\| l)$ обозначает редуцированный матричный элемент векторного оператора A , а коэффициенты $a_{l\delta}$ определяются формулами

$$a_{l\delta} = \begin{cases} (l+1)[(2l+1)(2l+3)]^{\frac{1}{2}}, & \delta = +1 \\ l(l+1), & \delta = 0 \\ l[(2l-1)(2l+1)]^{\frac{1}{2}}, & \delta = -1. \end{cases} \quad (6.85)$$

Доказательство. Остается только проверить справедливость множителя пропорциональности в (6.84). Мы делаем это путем сравнения (6.84) с теоремой Вигнера — Экарта для векторных операторов. Это дает

$$a_{l\delta} (l + \delta \|A\| l) = (-1)^\delta \left(\frac{2l + 2\delta + 1}{2l + 1} \right)^{\frac{1}{2}} (l + \delta \|A^{(\delta)}\| l). \quad (6.86)$$

Однако (6.78) связывает оператор $\mathbf{A}$ с $\mathbf{A}^{(d)}$. Следовательно, связаны редуцированные матричные элементы. Искомый основной результат имеет вид

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathcal{Y}_{lm} = & - [l(l+1)(2l+1)]^{-1} \mathbf{A}^{(+1)} \mathcal{Y}_{lm} + [l(l+1)]^{-1} \mathbf{A}^{(0)} \mathcal{Y}_{lm} \\ & - [l(2l+1)]^{-1} \mathbf{A}^{(-1)} \mathcal{Y}_{lm} \end{aligned} \quad (6.87)$$

для $l \neq 0$. (Для $l = 0$ сохраняем только первое выражение в этом результате. Заметим, что $\mathcal{Y}_{00}$ принадлежит нулевым пространствам векторных операторов $\mathbf{A}^{(0)}$ и $\mathbf{A}^{(-1)}$, действующих в пространстве сферических функций.) Взяв матричные элементы соотношения (6.87), устанавливаем полную справедливость соотношения (6.84). ■

Следует быть осторожным и видеть, что «редуцированные матричные элементы», появляющиеся в (6.84), являются величинами, которые входят в разложение

$$A_{\mu} \mathcal{Y}_{lm} = \sum_{l'} (l' \| \mathbf{A} \| l) C_{m, \mu, m+\mu}^{l' 1 l'} \mathcal{Y}_{l', m+\mu}, \quad (6.88)$$

и если векторный оператор A_{μ} имеет радиальную зависимость, то коэффициенты $(l' \| \mathbf{A} \| l)$ в общем случае будут радиальными функциями. Вместо дираковских обозначений бра и кет для таких функций мы ввели круглые скобки.

Результат, выраженный формулой (6.84), находит много приложений и полезно записать его полностью в векторных обозначениях (разлагаем (6.83) и используем (6.72)):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{(+1)} \mathcal{Y}_{lm} &= (l+1)[(2l+1)(2l+3)]^{\frac{1}{2}} (l+1 \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} \\ &= [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L} - (l+1)^2 \mathbf{A} - i(l+1)(\mathbf{A} \times \mathbf{L})] \mathcal{Y}_{lm}, \\ \mathbf{A}^{(0)} \mathcal{Y}_{lm} &= l(l+1)(l \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l1)lm} \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L} \mathcal{Y}_{lm}, \\ \mathbf{A}^{(-1)} \mathcal{Y}_{lm} &= l[(2l-1)(2l+1)]^{\frac{1}{2}} (l-1 \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} \\ &= [(\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L} - l^2 \mathbf{A} + il(\mathbf{A} \times \mathbf{L})] \mathcal{Y}_{lm}. \end{aligned} \quad (6.89)$$

Полезно также привести эти соотношения в обратной форме:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \mathcal{Y}_{lm} = & - \left(\frac{2l+3}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l+1 \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} \\ & + (l \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l1)lm} - \left(\frac{2l-1}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l-1 \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm}, \\ (\mathbf{A} \cdot \mathbf{L})\mathbf{L} \mathcal{Y}_{lm} &= l(l+1)(l \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l1)lm} \\ i(\mathbf{A} \times \mathbf{L}) \mathcal{Y}_{lm} = & - l \left(\frac{2l+3}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l+1 \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} \\ & - (l \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l1)lm} + (l+1) \left(\frac{2l-1}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} (l-1 \| \mathbf{A} \| l) \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} \end{aligned} \quad (6.90)$$

Замечания. а) Алгебраические результаты, заданные формулами (6.68) — (6.90), зависят только от того факта, что $\mathbf{A}$ — векторный оператор по отношению к $\mathbf{L}$. Следовательно, они применимы, когда $\mathbf{L}$ — общий угловой момент (для целых и полужелых значений); необходимо только заменить сферические функции на общие базисные векторы $\{|lm\rangle\}$, $l = 0, 1/2, 1, \dots$.

б) Подстановка соотношения (6.84) в разложение оператора $\mathbf{A}$, заданное формулой (6.87), приводит к теореме Вигнера — Эккарта для векторных операторов. Таким образом, алгебраический метод дает иной метод доказательства теоремы Вигнера — Эккарта в этом частном случае.

в) Существенные особенности алгебры векторных операторов содержатся в формулах (6.68) — (6.80). *Уравнение на собственные значения* (6.79)

$$\mathbf{A}^{(l)} \mathbf{C}_{\mathbf{L}} = \mathbf{A}^{(l)} \Omega_{\delta} \quad (6.91)$$

является основным полученным результатом. Ясно, что процесс состоял в решении методом основных идемпотент задачи на характеристические собственные значения над пространством векторных операторов, на котором скаляры являются инвариантами относительно вращений. Именно существование теоремы Кэли — Гамильтона делает задачу конечной. Свойства собственных значений ($l > 0$) гарантируют, что векторный оператор $\mathbf{A}$ (такой, что $\mathbf{A}$, $\mathbf{L}$ и $\mathbf{L} \times \mathbf{A}$ линейно независимы в числовом смысле) определяет три векторных оператора $\mathbf{A}^{(+1)}$, $\mathbf{A}^{(0)}$ и $\mathbf{A}^{(-1)}$, на которые натягивается пространство векторных операторов. Мы имеем «компоненты» общего векторного оператора в направлениях трех векторных ($J = 1$) операторов Вигнера, имеющих $\Delta = +1, 0, -1$ (см. разд. 21 гл. 3). Путем построения, заданного формулой (6.89), мы определили *физические векторные операторы*, которые с точностью до инвариантного мультипликативного множителя имеют действие трех соответствующих векторных операторов Вигнера на состоянии.

г) Проведенный процесс обобщается на произвольные тензоры ранга k и произвольные угловые моменты J . Это обобщение можем видеть из такого замечания. Определяем оператор Λ (примечание 9 гл. 3) как коммутирование с $\mathbf{L}^2$ (справа):

$$\Lambda \mathbf{A} \equiv [\mathbf{A}, \mathbf{L}^2]. \quad (6.92)$$

Тогда первая из формул (6.81) выражает тождество

$$\Lambda = -2i\mathbf{C}_{\mathbf{L}} - 2; \quad (6.93)$$

т.е.

$$\mathbf{C}_{\mathbf{L}} = \frac{i}{2} (\Lambda + 2). \quad (6.94)$$

Таким образом, все приведенное алгебраическое рассмотрение, использующее операцию $\times$, которая приспособлена к трехмерному пространству, может быть заменено операцией коммутирования с $\mathbf{L}^2$, которая применима к общим тензорным операторам. Краткое изложение общей теории дано в работе [35].

13. Краткое описание векторных шаровых сферических функций

Свойства векторных шаровых сферических функций кратко излагаются в этом разделе после обсуждения использования формул (6.89) и (6.90) для получения перечисленных результатов.

Общей практикой является использование вектора $\mathbf{x}$ в (6.89), чтобы дать иное (по отношению к (6.59)) определение векторных шаровых сферических функций. Мы следуем этой практике при записи результатов (6.105).

Операторная форма соотношения (6.39) также имеет полезные приложения для $\mathbf{A} = \mathbf{x}$, и мы отмечаем здесь эти результаты прежде, чем обсуждать дополнительные свойства векторных шаровых сферических функций (см. ниже «а» — «з»). С этой целью мы используем редуцированные матричные элементы вектора $\mathbf{x}$, заданные формулами (6.100). Выбирая в (6.89) $\mathbf{A} = \mathbf{x}$, получаем

$$\mathcal{Y}^{(l+\delta, 1)lm} = \mathbb{R}^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm}, \quad (6.95)$$

где $\mathbb{R}^{(\delta)}$ ($\delta = +1, 0, -1$) — векторные операторы, заданные формулами

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{(+1)} &= - \left[\mathbf{x} \left(\frac{D+1}{2} \right) + i \mathbf{x} \times \mathbf{L} \right] \left(-\frac{D(D+1)}{2} \right)^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbb{R}^{(0)} &= \mathbf{L}(\mathbf{L}^2)^{-\frac{1}{2}} = \mathbf{L} \left[\frac{(D-1)(D+1)}{2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \\ \mathbb{R}^{(-1)} &= - \left[-\mathbf{x} \left(\frac{D-1}{2} \right) + i \mathbf{x} \times \mathbf{L} \right] \left(\frac{[(D-1)D]}{2} \right)^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (6.96)$$

в которых D — размерностный оператор (средний результат прямо следует из (6.84) и (6.35)).

Прямым вычислением можно проверить, что эти операторы подчиняются соотношению ¹⁾

$$\mathbb{R}^{(\delta)\dagger} \cdot \mathbb{R}^{(\delta')} = \delta_{\delta\delta'} r^{\delta+\delta'} \quad (6.97)$$

выраженному с помощью скалярного произведения. Напомним также, что эти векторные операторы решают соотношение на собственные значения (6.80), которое удобно для последующего применения записать в виде

$$i \mathbf{L} \times \mathbb{R}^{(\delta)} + \mathbb{R}^{(\delta)} = - \mathbb{R}^{(\delta)} \left(\frac{D+\delta}{2} \right) \delta. \quad (6.98)$$

Результаты «а» — «з», приведенные ниже, могут быть получены из общих результатов (6.39) и (6.90), примененных к векторным операторам $\mathbf{r}$, $\mathbf{L}$, ∇F и $\nabla \times \mathbb{R}^{(\delta)} F$, где F — произвольная дифференцируемая функция от $\mathbf{r}$. (Расположение оператора $\mathbf{A}$, такого, как $\mathbf{A} = \nabla$ или $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbb{R}^{(\delta)}$, рядом с функцией F обозначает «операторное» умножение в обычном смысле, согласно которому действие $\mathbf{A}F$ на произвольную волновую функцию Ψ определяется как $\mathbf{A}F\Psi = (\mathbf{A}F)\Psi$.) Иначе они могут быть выведены применением подходящей векторной операции к определяющим соотношениям «а».

Требуется несколько редуцированных матричных элементов, чтобы получить соотношения (6.89) и (6.90) для введенных выше специальных векторных операторов.

¹⁾ Технически следует уделять больше внимания нулевому пространству оператора $\mathbb{R}^{(\delta)}$ при формулировке этого результата, а также других соотношений, получаемых ниже. Некоторые соотношения несправедливы для $l = 0$.

Редуцированные матричные элементы для $\mathbf{x}$ находят из (3.437), используя формулу

$$(l' || \mathbf{x} || l) = \sqrt{\frac{4\pi}{3}} \langle l' || \mathcal{Y}_1 || l \rangle. \quad (6.99)$$

Таким образом, находим

$$\begin{aligned} (l+1 || \mathbf{x} || l) &= \left(\frac{l+1}{2l+3} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ (l || \mathbf{x} || l) &= 0, \\ (l-1 || \mathbf{x} || l) &= - \left(\frac{l}{2l-1} \right)^{\frac{1}{2}} r^2. \end{aligned} \quad (6.100)$$

Редуцированные матричные элементы векторного оператора ∇F получают из редуцированных матричных элементов для $\mathbf{x}$ по формуле

$$(l' || \nabla F || l) = \left\{ \frac{dF}{dr} + \frac{[(l+1)(l+2) - l'(l'+1)]F}{2r} \right\} \frac{(l' || \mathbf{x} || l)}{r}. \quad (6.101)$$

Проверка этого результата может быть дана путем использования операторного тождества

$$[\mathbb{L}^2, \mathbf{x}] = 2\mathbf{x} + 2\mathbf{x}(\mathbf{x} \cdot \nabla) - 2r^2 \nabla. \quad (6.102)$$

Приводимые ниже роторные уравнения можно получить, используя тот факт, что $\nabla \times \mathbb{R}^{(6)}F$ — векторный оператор, или проще, путем применения роторного оператора прямо к соотношениям (6.105) (умноженным на F), используя тождества ¹⁾

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{x} &= -i\mathbb{L}, \\ \nabla \times (\mathbf{x} \times \mathbb{L}) &= -(\mathbf{x} \cdot \nabla)\mathbb{L} - 2\mathbb{L}. \end{aligned} \quad (6.103)$$

Подобным образом получаем ниже уравнения дивергенции путем применения $\nabla \cdot$ прямо к соотношениям (6.105) (умноженным на F), используя тождества

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbb{L} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{x} &= \mathbf{x} \cdot \nabla + 3, \\ \nabla \cdot (\mathbf{x} \times \mathbb{L}) &= -i\mathbb{L}^2. \end{aligned} \quad (6.104)$$

Ниже кратко приведены свойства, которые мы установили для векторных шаровых сферических функций.

а) Определяющие уравнения:

$$\begin{aligned} \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} &= -[(l+1)(2l+1)]^{-\frac{1}{2}}[(l+1)\mathbf{x} + i\mathbf{x} \times \mathbb{L}]\mathcal{Y}_{lm} \\ \mathcal{Y}^{(l1)lm} &= [l(l+1)]^{-\frac{1}{2}}\mathbb{L}\mathcal{Y}_{lm} \\ r^2 \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} &= -[l(2l+1)]^{-\frac{1}{2}}[-l\mathbf{x} + i\mathbf{x} \times \mathbb{L}]\mathcal{Y}_{lm} \end{aligned} \quad (6.105)$$

¹⁾ Соотношения (6.103) и (6.104) являются операторными тождествами при применении к дифференцируемым функциям.

б) Свойства относительно собственных значений:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}^2 \mathcal{Y}^{(l1)jm} &= j(j+1) \mathcal{Y}^{(l1)jm} \\
\mathbf{L}^2 \mathcal{Y}^{(l1)jm} &= l(l+1) \mathcal{Y}^{(l1)jm} \\
S^2 \mathcal{Y}^{(l1)jm} &= 2 \mathcal{Y}^{(l1)jm} \\
J_3 \mathcal{Y}^{(l1)jm} &= m \mathcal{Y}^{(l1)jm} \\
\nabla^2 \mathcal{Y}^{(l1)jm} &= 0 \\
2i \mathbf{L} \times \mathcal{Y}^{(l1)jm} &= [j(j+1) - l(l+1) - 2] \mathcal{Y}^{(l1)jm}.
\end{aligned} \tag{6.106}$$

в) Ортогональность:

$$\int dS_{\mathbf{x}} \mathcal{Y}^{(l'1)j'm'}(\mathbf{x}) \cdot \mathcal{Y}^{(l1)jm}(\mathbf{x}) = \delta_{l'l} \delta_{j'j} \delta_{m'm} r^{l'+l} \tag{6.107}$$

г) Комплексная сопряженность:

$$\mathcal{Y}^{(l1)jm*} = (-1)^{l+1-j} (-1)^m \mathcal{Y}^{(l1)j,-m} \tag{6.108}$$

д) Векторные и градиентные формулы:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} \mathcal{Y}_{lm} &= - \left[\frac{l+1}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} + \left[\frac{l}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} r^2 \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} \\
[(l+1)\nabla + i \nabla \times \mathbf{L}](F \mathcal{Y}_{lm}) &= - [(l+1)(2l+1)]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} \\
[-l\nabla + i \nabla \times \mathbf{L}](F \mathcal{Y}_{lm}) &= - [l(2l+1)]^{\frac{1}{2}} \left[r \frac{dF}{dr} + (2l+1)F \right] \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} \\
\nabla(F \mathcal{Y}_{lm}) &= - \left[\frac{l+1}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} \\
&\quad + \left[\frac{l}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(r \frac{dF}{dr} + (2l+1)F \right) \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} \\
i \nabla \times \mathbf{L}(F \mathcal{Y}_{lm}) &= - l \left(\frac{l+1}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} \\
&\quad - (l+1) \left(\frac{l}{2l+1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(r \frac{dF}{dr} + (2l+1)F \right) \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm}
\end{aligned} \tag{6.109}$$

е) Роторные уравнения:

$$\begin{aligned}
 i \nabla \times (F \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm}) &= - \left[\frac{l}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(r \frac{dF}{dr} + (2l+3)F \right) \mathcal{Y}^{(l+1)lm} \\
 i \nabla \times (F \mathcal{Y}^{(l,1)lm}) &= - \left[\frac{l}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm} \\
 &\quad - \left[\frac{l+1}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(r \frac{dF}{dr} + (2l+1)F \right) \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} \\
 i \nabla \times (F \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm}) &= - \left[\frac{l+1}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \mathcal{Y}^{(l,1)lm}
 \end{aligned} \quad (6.110)$$

ж) Уравнения дивергенции:

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot (F \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm}) &= - \left[\frac{l+1}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(r \frac{dF}{dr} + (2l+3)F \right) \mathcal{Y}_{lm} \\
 \nabla \cdot (F \mathcal{Y}^{(l,1)lm}) &= 0, \\
 \nabla \cdot (F \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm}) &= \left[\frac{l}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{r} \frac{dF}{dr} \right) \mathcal{Y}_{lm}
 \end{aligned} \quad (6.111)$$

з) Свойство четности:

$$\mathcal{Y}^{(l+\delta,1)lm}(-\mathbf{x}) = (-1)^{l+\delta} \mathcal{Y}^{(l+\delta,1)lm}(\mathbf{x}) \quad (6.112)$$

Замечания. а) Мы записали соотношения (6.105) — (6.112) в терминах векторных шаровых сферических функций, так как в этом случае результаты легко преобразуются в любую криволинейную координатную систему. Однако путем подстановки

$$\mathcal{Y}^{(l+\delta,1)lm}(\mathbf{x}) = r^{l+\delta} \mathcal{Y}^{(l+\delta,1)lm}(\hat{\mathbf{x}}), \quad (6.113)$$

легко выразить наши результаты в терминах векторных сферических функций.

В этом случае обычно [2] также подставляют в левые части соотношений (6.109) — (6.111) величины

$$F = r^{-l} G \quad \text{или} \quad F = r^{-l-\delta} G \quad (6.114)$$

и выражают радиальные функции, стоящие справа, в терминах G .

б) Интересно отметить, что единственной векторной шаровой сферической функцией для $l = 0$ (см. (6.105)) является $\mathcal{Y}^{(1)00}(\mathbf{x}) \sim \mathbf{x}$. Таким образом, вектор $\mathbf{x}$ является инвариантом относительно вращений! Это согласованная, но несколько необычная точка зрения (см. [12a], стр. 5).

Мы заключаем это краткое изложение тем, что отметим два более важных результата: для разложений точечного и векторного произведений двух векторных шаровых сферических функций. Доказательство этих соотношений представляет собой изящное применение теоремы Вигнера — Экарта и общего выражения (3.248) для редуцированных матричных элементов. Сначала мы сформулируем результаты, а затем дадим доказательства:

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{Y}^{(l'1)j'm'} \times \mathcal{Y}^{(l1)jm} \\
 &= \sum_{l''} r^{l'+l'-l''} \left[\frac{(2j+1)(2j'+1)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi(2l''+1)} \right]^{\frac{1}{2}} \times \\
 & \quad \times (-1)^{l+j+l''} C_{000}^{l'l''} C_{m,m',m+m'}^{j j' l''} \left\{ \begin{matrix} l' & j' & 1 \\ j & l & l'' \end{matrix} \right\} \mathcal{Y}_{l'', m+m'}^{l', m+m'}, \quad (6.115)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{Y}^{(l'1)j'm'} \times \mathcal{Y}^{(l1)jm} \\
 &= (-i\sqrt{2}) \sum_{l'' j''} r^{l'+l'-l''} \left[\frac{(2j+1)(2j'+1)(3)(2l+1)(2l'+1)}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} \\
 & \quad \times C_{000}^{l'l''} C_{m,m',m+m'}^{j j' j''} \left\{ \begin{matrix} l & 1 & j \\ l' & 1 & j' \\ l'' & 1 & j'' \end{matrix} \right\} \mathcal{Y}_{l'', m+m'}^{(l'1)j'', m+m'}. \quad (6.116)
 \end{aligned}$$

Доказательство. Рассмотрим сначала доказательство соотношения для векторного произведения. Необходимо только переписать скалярное произведение векторных сферических функций (6.107) в стандартных обозначениях бра-кет, используя реализацию $S_\mu = i\hat{\xi}_\mu \times$ для спина 1, чтобы доказать следующее соотношение:

$$\begin{aligned}
 & \int dS_{\hat{x}} \mathcal{Y}^{(l''1)j''m''*}(\hat{x}) \cdot (\mathcal{Y}^{(l'1)j'm'}(\hat{x}) \times \mathcal{Y}^{(l1)jm}(\hat{x})) \\
 &= \langle (l''1)j''m'' | -i[Y_{l'} \times S]_m^j | (l1)jm \rangle,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 |(l1)jm\rangle &= \sum_{\mu} C_{m-\mu, \mu, m}^{l1j} Y_{l, m-\mu} \otimes \hat{\xi}_{\mu}, \\
 [Y_{l'} \times S]_m^j &= \sum_{\mu'} C_{m'-\mu', \mu', m'}^{l'1j'} Y_{l', m'-\mu'} \otimes S_{\mu'}.
 \end{aligned}$$

Таким образом, прямо применимы теорема Вигнера — Экарта и выражение (3.248) для редуцированных матричных элементов. Редуцированные матричные элементы шаровых сферических функций задаются формулой (3.437), и ненулевым редуцированным матричным элементом оператора S является $\langle 11S11 \rangle = \sqrt{2} = [s(s+1)]^{\frac{1}{2}}$ ($s=1$). Использование этих результатов в (3.248) приводит к разложению (6.116).

Разложение для точечного произведения имеет подобную интерпретацию. Таким образом, мы имеем

$$\int dS_{\hat{x}} \mathcal{Y}_{l''m''}^*(\hat{x}) \mathcal{Y}_{l'm'}^{(l'1)j'm'}(\hat{x}) \cdot \mathcal{Y}_{lm}^{(l1)jm}(\hat{x}) = \langle (l''0)l''m'' | [Y_{l'} \times \hat{\xi}]_m^j | (l1)jm \rangle,$$

где

$$|(l''0)l''m''\rangle = Y_{l'', m''} \otimes |00\rangle.$$

Здесь $|00\rangle$ обозначает собственный вектор спина 0, а $\hat{\xi}$ обозначает тензорный оператор ранга 1, который действует на собственный вектор $\hat{\xi}_\nu$ ($\nu = +1, 0, -1$) спина 1 по формуле

$$\hat{\xi}_\mu \hat{\xi}_\nu = \hat{\xi}_\mu \cdot \hat{\xi}_\nu |00\rangle = -\sqrt{3} C_{\nu\mu 0}^{110} |00\rangle$$

(см. разд. 21 гл. 3). Соответствующий редуцированный матричный элемент, таким образом, равен $\langle 0 || t || 1 \rangle = -\sqrt{3}$. Используя теорему Вигнера — Экарта и формулу (3.248) для редуцированных матричных элементов, получаем разложение (6.115) для точечного произведения.

Замечания. Векторные операторы $W^{(0)}$ и $W^{(-1)}$ с компонентами $(i/\sqrt{2})\xi_\mu \times$ и $-t_\mu/\sqrt{3}$ соответственно являются реализациями операторов Вигнера (см. разд. 21 гл. 3):

$$\left\langle \begin{array}{cc} & 1 \\ 2 & & 0 \\ & 1 + \mu \end{array} \right\rangle, \quad \left\langle \begin{array}{cc} & 0 \\ 2 & & 0 \\ & 1 + \mu \end{array} \right\rangle,$$

где единственными «состояниями» являются $|00\rangle = 1$ и $|1\mu\rangle = \hat{\xi}_\mu$ (точечное и векторное произведения вектора со скаляром по определению равны нулю). Таким образом, в этом элементарном случае структурная особенность, которая различает эти два оператора Вигнера, состоит в определении *геометрического действия* (точечное и векторное произведения) на множестве векторов из $\mathbb{R}^3$. Видно также, что умножение операторов $W_\mu^{(0)}$ и $W_\nu^{(-1)}$ ($\mu, \nu = 1, 2, 3$) замыкается на себя:

$$\begin{aligned} W_\mu^{(0)} W_\nu^{(0)} &= C_{\nu, \mu, \mu + \nu}^{111} W_{\mu + \nu}^{(0)}, \\ W_\mu^{(0)} W_\nu^{(-1)} &= 0, \\ W_\mu^{(-1)} W_\nu^{(0)} &= C_{\nu, \mu, \mu + \nu}^{111} W_{\mu + \nu}^{(-1)}, \\ W_\mu^{(-1)} W_\nu^{(-1)} &= 0. \end{aligned} \quad (6.117)$$

В книге [35] мы демонстрируем (примечание 2, стр. 41), что это свойство замыкания является общим.

14. Теорема разложения для векторных функций, определенных на сфере

Чтобы вывести так называемую *теорему Гельмгольца об угловых моментах*, можно использовать алгебраические методы [13, 14].

Ключевые алгебраические соотношения для установления этой теоремы — это свойства (6.98) для собственных значений, переписанные в виде

$$\begin{aligned} R^{(+1)} &= iL \times S^{(+1)} + S^{(+1)}, \\ R^{(0)} &= iL \times S^{(0)}, \\ R^{(-1)} &= iL \times S^{(-1)} + S^{(-1)}, \end{aligned} \quad (6.118)$$

где мы определили ¹⁾

$$S^{(+1)} \equiv -R^{(+1)} \left(\frac{D+1}{2} \right)^{-1}.$$

¹⁾ Мы разделили соотношения (6.98) на подходящие размериостные множители и ввели новые векторные операторы $S^{(i)}$, чтобы использовать их в определении «векторных потенциалов» в (6.129).

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^{(0)} &\equiv -\mathbf{R}^{(0)}, \\ \mathbf{S}^{(-1)} &\equiv \mathbf{R}^{(-1)} \left(\frac{D-1}{2} \right)^{-1} \end{aligned} \quad (6.119)$$

Используя определения (6.96), получаем также следующие соотношения для точечного и векторного произведений, которым удовлетворяют векторные операторы $\mathbf{R}^{(\delta)}$ (см. (6.96) — (6.98)):

$$\begin{aligned} \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^{(\delta)} &= 0, & \delta &= \pm 1, \\ \mathbf{L} \cdot \mathbf{R}^{(0)} &= (\mathbf{L}^2)^{\frac{1}{2}}, & \delta &= 0, \\ i\mathbf{L} \times \mathbf{R}^{(\delta)} &= -\mathbf{R}^{(\delta)} \left[\delta \left(\frac{D+\delta}{2} \right) + 1 \right], & \delta &= +1, 0, -1. \end{aligned} \quad (6.120)$$

Рассмотрим теперь произвольную векторную функцию $\mathbf{F}$, которая может быть представлена как разложение

$$\mathbf{F} = \sum_{lm\delta} f_{lm}^{(\delta)} \mathcal{Y}^{(l+\delta,1)lm}, \quad (6.121)$$

где $f_{lm}^{(\delta)}$ — функция, зависящая только от r . Используя определяющее свойство (6.95) векторных шаровых сферических функций, можем переписать (6.121) в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^{(+1)} + \mathbf{F}^{(0)} + \mathbf{F}^{(-1)}, \quad (6.122)$$

где ¹⁾

$$\mathbf{F}^{(\delta)} \equiv (\mathbf{R}^{(\delta)} f^{(\delta)}), \quad (6.123)$$

$$f^{(\delta)} \equiv \sum_{lm} f_{lm}^{(\delta)} \mathcal{Y}_{lm}. \quad (6.124)$$

Из соотношений ортогональности (6.97) для векторных операторов $\mathbf{R}^{(\delta)}$ сразу можно заключить, что векторные функции $\mathbf{F}^{(\delta)}$ удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int dS_{\mathbf{r}} F^{(\delta)*}(\mathbf{x}) \cdot F^{(\delta')}(\mathbf{x}) = \delta_{\delta\delta'} r^{\delta+\delta'} \sum_{lm} r^{2l} f_{lm}^{(\delta)*}(r) f_{lm}^{(\delta)}(r). \quad (6.125)$$

Векторные функции $\mathbf{F}^{(\delta)}$ также обладают свойствами точечного и векторного произведений с $\mathbf{L}$, что является прямым следствием соответствующих свойств векторных операторов $\mathbf{R}^{(\delta)}$ (см. (6.120)).

а) Соотношения для точечного произведения:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}^{(\delta)}) &= 0, & \delta &= \pm 1, \\ (\mathbf{L} \cdot \mathbf{F}^{(0)}) &= (\mathbf{L}^2)^{\frac{1}{2}} f^{(0)} = \sum_{lm} [l(l+1)]^{\frac{1}{2}} f_{lm}^{(0)} \mathcal{Y}_{lm}; \end{aligned} \quad (6.126)$$

¹⁾ Когда существует возможность неоднозначной интерпретации, для обозначения векторной функции, полученной действием $\mathbf{A}$ на f , мы используем круглые скобки для оператора $\mathbf{A}$ и функции f , записанных вместе: $(\mathbf{A}f)$.

б) Соотношения для векторного произведения:

$$\begin{aligned}
 i(\mathbf{L} \times \mathbf{F}^{(+1)}) &= -\mathbf{R}^{(+1)} \left(\frac{D+3}{2} \right) f^{(+1)} \\
 &= -\sum_{lm} (l+2) f_{lm}^{(+1)} \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm}, \\
 i(\mathbf{L} \times \mathbf{F}^{(0)}) &= -\mathbf{F}^{(0)}, \\
 i(\mathbf{L} \times \mathbf{F}^{(-1)}) &= \mathbf{R}^{(-1)} \left(\frac{D-3}{2} \right) f^{(-1)} = \sum_{lm} (l-1) f_{lm}^{(-1)} \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm} \quad (6.127)
 \end{aligned}$$

Однако более интересными являются результаты, полученные из «обратной» формы уравнений для собственных значений (соотношения (6.118)):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}^{(+1)} &= i(\mathbf{L} \times \mathcal{A}^{(+1)}) + \mathcal{A}^{(+1)}, \\
 \mathbf{F}^{(0)} &= i(\mathbf{L} \times \mathcal{A}^{(0)}), \\
 \mathbf{F}^{(-1)} &= i(\mathbf{L} \times \mathcal{A}^{(-1)}) + \mathcal{A}^{(-1)}, \quad (6.128)
 \end{aligned}$$

где

$$\mathcal{A}^{(\delta)} \equiv (\mathbf{S}^{(\delta)} f^{(\delta)}). \quad (6.129)$$

Эти уравнения устанавливают существование «векторных потенциалов» $\mathcal{A}^{(\delta)}$, из которых могут быть выведены векторные функции $\mathbf{F}^{(\delta)}$.

Явные результаты, полученные из (6.129), (6.119) и (6.95), имеют вид

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}^{(+1)} &= -\sum_{lm} (l+1)^{-1} f_{lm}^{(+1)} \mathcal{Y}^{(l+1,1)lm}, \\
 \mathcal{A}^{(0)} &= -\sum_{lm} f_{lm}^{(0)} \mathcal{Y}^{(l,1)lm}, \\
 \mathcal{A}^{(-1)} &= \sum_{\substack{lm \\ l>0}} l^{-1} f_{lm}^{(-1)} \mathcal{Y}^{(l-1,1)lm}. \quad (6.130)
 \end{aligned}$$

Так как $\mathcal{A}^{(0)}$ имеет вид $\mathcal{A}^{(0)} = -i\mathbf{L}\Phi$, где

$$\Phi = -i(\mathbf{L}^2)^{-1} f^{(0)} = -i \sum_{\substack{lm \\ l>0}} [l(l+1)]^{-1} f_{lm}^{(0)} \mathcal{Y}_{lm}, \quad (6.131)$$

то также получаем $\mathbf{F}^{(0)}$ из «скалярного потенциала» Φ :

$$\mathbf{F}^{(0)} = i(\mathbf{L}\Phi). \quad (6.132)$$

То же $\mathbf{F}^{(\delta)}$ получается при прибавлении произвольной константы к Φ и произвольной векторной функции вида $\mathbf{L}\psi^{(\pm 1)} \propto \mathcal{A}^{(\pm 1)}$.

Теорема Гельмгольца об угловых моментах утверждает следующее. *Векторная функция $\mathbf{F}$ может быть разложена в сумму двух компонент*

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2, \quad (6.133)$$

таким, что

$$i(L \times F_1) = -F_1, \quad (L \cdot F_2) = 0;$$

$$F_1 = i(L \Phi),$$

$$F_2 = i(L \times \mathcal{A}) + \mathcal{A}, \quad (6.134)$$

где Φ и $\mathcal{A}$ — «потенциалы», определенные в (6.131) и (6.130) соответственно.

Доказательство. Выбираем в вышеприведенных результатах $F_1 = F^{(0)}$, $F_2 = F^{(+1)} + F^{(-1)}$ и $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(+1)} + \mathcal{A}^{(-1)}$. $\square$

Замечание. Как показано выше, произвольная (хорошая) векторная функция всегда может быть разложена в сумму *трех ортогональных частей*, причем этот результат является следствием существования *трех векторных операторов Вигнера*. Как мы показали, каждая часть может быть получена из потенциала.

15. Сферические функции от двух векторов, инвариантные относительно вращений¹⁾

Общие методы построения инвариантов относительно вращений рассматриваются в разд. 20 гл. 3. Здесь мы изучим структуру орбитальных вращательных инвариантов $I_l(x, y)$, определенных формулой

$$I_l(x, y) \equiv \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m (-1)^m \mathcal{Y}_{l,-m}(x) \mathcal{Y}_{l,-m}(y). \quad (6.135)$$

Хотя этот инвариант обычно рассматривают только для вещественных векторов x и y , он является фактически инвариантом для *комплексных ортогональных преобразований* (см. текст после соотношения (6.36)). Согласно этому, удобно рассматривать x и y как комплексные векторы в (6.135). ($\mathcal{Y}_{l,-m}(y)$ для комплексного y прямо получается из определяющего соотношения (3.153).)

Представленные в этом разделе соотношения являются следствиями того факта, что $I_l(x, y)$ можно также выразить как полином от базисных инвариантов относительно вращений $x \cdot y$, $y \cdot y$, $x \cdot x$. Явное выражение имеет вид

$$I_l(x, y) = \frac{1}{2^l} \sum_k (-1)^k \binom{l}{k} \binom{l-k}{l} (x \cdot y)^{l-2k} (x \cdot x)^k (y \cdot y)^k. \quad (6.136)$$

Соотношения (6.135) и (6.136) обобщают некоторые из хорошо известных свойств шаровых сферических функций; следует отметить эти результаты, прежде, чем обращаться к доказательству соотношения (6.136).

¹⁾ Следует отличать понятие сферической функции, используемое до сих пор, от понятия сферической функции от двух или нескольких переменных, используемого в разд. 15 — 17. Последнее понятие сферической функции обозначает функции, заданные на сфере. Читатель легко различит эти два понятия, исходя из обозначений. — *Прим. перев.*

Пример 1. Выбираем x и y как вещественные единичные векторы $x = \hat{x}$ и $y = \hat{y}$. Тогда (6.135) и (6.136) порождают ¹⁾

$$P_l(\cos \theta) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m (-1)^m y_{l,-m}(\hat{y}) y_{lm}(\hat{x}), \quad (6.137)$$

где $\cos \theta = \hat{x} \cdot \hat{y}$, а P_l — полиномы Лежандра, т.е.

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{2^l} \sum_k (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} (\cos \theta)^{l-2k}. \quad (6.138)$$

Пример 2. Выбираем $y = (0, 0, 1)$ и используем

$$y_{lm}(0, 0, 1) = \delta_{0,m} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}}$$

чтобы получить соотношение

$$\left[\frac{4\pi}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} y_{l0}(x) = \frac{1}{2^l} \sum_k (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} x_3^{l-2k} (x \cdot x)^k,$$

в частности

$$\left[\frac{4\pi}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} y_{l0}(\hat{x}) = P_l(\cos \theta) \quad (6.139)$$

для всех векторов $\hat{x} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$.

Пример 3. Выбираем $y = x$ и используем формулу

$$\frac{1}{2^l} \sum_k (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} = 1.$$

чтобы получить соотношение

$$(x \cdot x)^l = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m (-1)^m y_{l,-m}(x) y_{lm}(x) \quad (6.140)$$

Пример 4. Выбираем $y \perp x$, чтобы получить

$$\begin{aligned} & \frac{4\pi}{2l+1} \sum_m (-1)^m y_{l,-m}(\hat{y}) y_{lm}(\hat{x}) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{для } l \text{ нечетного,} \\ (-1)^{l/2} \frac{1}{2^l} \binom{l}{l/2} (x \cdot x)^{l/2} (y \cdot y)^{l/2} & \text{для } l \text{ четного.} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.141)$$

¹⁾ Это соотношение известно как *теорема сложения для сферических функций*; его обычно записывают в терминах сферических функций, соответствующих шаровым сферическим функциям, в которых единичные векторы $\hat{x}$ и $\hat{y}$ параметризуются сферическими полярными координатами (см. замечания на стр. 260).

Теперь дадим доказательство выражения (6.136) для $I_l(x, y)$.

Доказательство. Единственными инвариантами для (комплексных) вращений, которые могут быть построены из двух векторов x и y , являются функции от $x \cdot x$, $x \cdot y$, $y \cdot y$ [15]. Более того, так как $I_l(x, y)$ является полиномом, который однороден степени l по x и по y в отдельности и симметричен относительно перестановки x и y , то наиболее общая форма $I_l(x, y)$ задается формулой

$$I_l(x, y) = \sum_k a_k (x \cdot y)^{l-2k} (x \cdot x)^k (y \cdot y)^k,$$

где суммирование ведется по $k = 0, 1, \dots, l/2$ или $(l-1)/2$. Наконец, $I_l(x, y)$ должно удовлетворять уравнению Лапласа по переменным x_1, x_2, x_3 (а также по y_1, y_2, y_3) даже в комплексном случае.

Для неотрицательных целых l и m прямым применением $\nabla^2 = \sum_i \partial^2 / \partial x_i^2$ проверяем, что

$$\begin{aligned} \nabla^2 (x \cdot y)^n (x \cdot x)^m &= 2m(2m+2n+1)(x \cdot y)^n (x \cdot x)^{m-1} \\ &+ n(n-1)(x \cdot y)^{n-2} (x \cdot x)^m (y \cdot y). \end{aligned}$$

Свойство

$$\nabla^2 I_l(x, y) = 0$$

теперь приводит к рекурсивному соотношению с двумя слагаемыми для коэффициентов a_k :

$$a_{k-1}(l-2k+2)(l-2k+1) + a_k(2k)(2l-2k+1) = 0.$$

Общее решение этого рекурсивного соотношения имеет вид

$$a_k = (-1)^k \binom{l}{k} \binom{2l-2k}{l} A_l,$$

где A_l произвольно. Значение для A_l находится путем вычисления $I_l(x, y)$ в точке $x = y = (0, 0, 1)$ и равно $1/2^l$. $\blacksquare$

Отображение Картана (2.7), примененное к вращательным инвариантам, приводит к дальнейшим полезным формулам. Мы рассмотрим теперь этот метод, так как он полезен в теории вращательных инвариантов от нескольких векторов.

16. Применение отображения Картана к сферическим функциям

Общепризнано, что теория орбитального углового момента может быть получена из теории $SU(2)$ -вращений путем ограничения последней. (В явном виде это может быть осуществлено методами, рассмотренными в гл. 3 (см. соотношение (3.138) и текст после соотношения (3.106)).) Менее известно, что эта процедура может быть обращена, т.е. мы можем получить теорию $SU(2)$ -вращений из теории орбитальных вращений путем использования отображения Картана, расширив затем результаты, чтобы включить полуцелые угловые моменты.

Рассмотрим эти результаты. Отображение Картана (см. (2.7)) в терминах бозонов:

$$x_1 + ix_2 = -2(a_1)^2, \quad x_1 - ix_2 = 2(a_2)^2, \quad x_3 = 2a_1 a_2. \quad (6.142)$$

Ключевым соотношением является

$$\psi_{lm}(x) = \frac{(2l)!}{l!} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} P_{lm}(a_1, a_2), \quad (6.143)$$

где P_{lm} — бозонный полином, заданный формулой (5.33). Этот результат доказывается прямой подстановкой отображения (6.142) в (3.153) и использованием тождества

$$\sum_k \frac{l! - m - 2k}{k!(k-m)!(l+m-2k)!} = \frac{(2l)!}{l!(l+m)!(l-m)!}.$$

Подобным образом, если мы выбираем y как (сопряженное) отображение Картана бозонов (a_1, a_2) , заданное формулой

$$y_1 + iy_2 = 2(a_2)^2, \quad y_1 - iy_2 = -2(a_1)^2, \quad y_3 = 2a_1 a_2, \quad (6.144)$$

то получаем

$$(-1)^m y_{l,-m}(y) = \frac{(2l)!}{l!} \left[\frac{2l+1}{4\pi} \right]^{\frac{1}{2}} P_{lm}(a_1, a_2). \quad (6.145)$$

Можно также определить отображение Картана оператора $\mathcal{O}$, который имеет хорошо определенное действие на шаровые сферические функции, а оператор Λ , который имеет хорошо определенное действие на бозонные векторы состояний, по правшпу

$$\mathcal{O} \text{ отображение Картана } \Lambda \quad (6.146)$$

если

$$F_{lm}(x) = (\mathcal{O}\psi_{lm})(x) \text{ отображение Картана } f_{lm}(a) = (\#) \Lambda P_{lm}(a)|0\rangle. \quad (6.147)$$

В общем случае из соотношения нормировки необходимо устранить числовой множитель $\#$, прежде чем отображение (6.146) станет явным.

Таким образом, соотношения между сферическими функциями могут быть отображены в соотношения между бозонными полиномами. Хотя здесь доказано, что полученные соотношения между бозонными полиномами справедливы только для целых значений l , но фактически эти соотношения справедливы также для полученных значений l . Мы продемонстрируем последний факт на примерах.

Пример 1. Мультипликативный закон (3.436) отображается в соотношение

$$P_{kl}(a)P_{lm}(a) = \left[\frac{(k+l+m+\mu)(k+l-m-\mu)!}{(k+\mu)!(k-\mu)!(l+m)!(l-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} P_{k+l,m+\mu}(a). \quad (6.148)$$

Пример 2. Генераторы L орбитального момента отображаются (6.147) отображаются в генераторы Λ (см. (5.14)), удовлетворяющие соотношениям

Пример 3. Выбираем y в (5.151) и (5.153) как (сопряженное) отображение Картана, заданное формулой (6.144), чтобы получить для

$$y_1 + iy_2 = 2(a_2)^2, \quad y_1 - iy_2 = -2(a_1)^2, \quad y_3 = 2a_1 a_2.$$

соотношение

$$\frac{(y \cdot x)^l}{2^l l!} = \left[\frac{4\pi}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \sum_m P_{lm}(z) Y'_{lm}(x), \quad (6.149)$$

где l — целое. (Выражение $(y \cdot x)^l$ иногда называется *корреляционной функцией* для шаровых сферических функций. Это следствие разложения (6.149).)

Пример 4: Заменяем в (6.149) (a_1, a_2) на $(a_1^{\frac{1}{2}}, a_2^{\frac{1}{2}}) = a^{\frac{1}{2}}$ и выбираем l как отображение Картана (6.142) $(a_1^{\frac{1}{2}}, a_2^{\frac{1}{2}}) = a^{\frac{1}{2}}$, чтобы получить

$$(a_{12}^{\frac{1}{2}})^{2l} / (2l)! = \sum_m (-1)^{l-m} P_{lm}(a_1^{\frac{1}{2}}) P_{l,-m}(a_2^{\frac{1}{2}}), \quad (6.150)$$

где

$$y \cdot x \rightarrow -2(a_{12}^{\frac{1}{2}})^2, \quad (6.151)$$

и $a_{12}^{\frac{1}{2}} = \det A$ (см. (3.54)).

17. Сферические функции от нескольких векторов, инвариантные относительно вращений

Важная структурная теорема для инвариантов относительно вращений является частным случаем общей теоремы, доказанной Вейлем ([15] стр. 53): *каждый четный инвариант, зависящий от n векторов $x^1, x^2, \dots, x^n$ пространства $\mathbb{R}^3$, выражается через n^2 скалярных произведений $x^\alpha \cdot x^\beta$. Каждый нечетный инвариант является суммой выражений*

$$[x^\alpha \cdot (x^\beta \times x^\gamma)] I(x^1, \dots, x^n), \quad (6.152)$$

где $x^\alpha, x^\beta, x^\gamma$ взяты из $x^1, \dots, x^n$ и $I(x^1, \dots, x^n)$ является четным инвариантом.

Инвариант (см. [16]), определенный формулой

$$I_{(l_1 l_2 l_3)}(x^1, x^2, x^3) \equiv \frac{(4\pi)^{\frac{3}{2}}}{[(2l_1+1)(2l_2+1)(2l_3+1)]^{\frac{1}{2}}} \sum_{m_1 m_2 m_3} \begin{pmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} \times \mathcal{Y}_{l_1 m_1}(x^1) \mathcal{Y}_{l_2 m_2}(x^2) \mathcal{Y}_{l_3 m_3}(x^3) \quad (6.153)$$

играет важную роль в теории угловых корреляций в реакциях (разд. 3 гл. 7). Это четный (нечетный) инвариант для четного (нечетного) $l_1 + l_2 + l_3$. Заметим, что

$$I_{(l_1 l_2 l_3)}(x^1, x^2, 0) = \delta_{l_1 l_2} \delta_{l_3 0} (-1)^{l_1} I_l(x^1, x^2) / (2l_1+1)^{\frac{1}{2}}$$

Свойства инвариантных сферических функций от n векторов относятся, таким образом, к той же категории, что и свойства инвариантных сферических функций от трех векторов.

Применяя сформулированную выше теорему Вейля, находим, что I_l возможно также выразить в виде

$$I_{(l_1 l_2 l_3)}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{l_4} (-1)^{l_4} (x^1 \cdot x^2)^{l_4} I_{(l_4 l_3 l_3)}(x^1, x^2, x^3), \quad (6.154)$$

где

$$\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{для } l_1 + l_2 + l_3 \text{ четных,} \\ 1 & \text{для } l_1 + l_2 + l_3 \text{ нечетных.} \end{cases}$$

В этом результате $I_{(l)}^{(\varepsilon)}$ является четным инвариантом, который может быть записан в виде

$$I_{(l_1 l_2 l_3)}^{(\varepsilon)}(x^1, x^2, x^3) = \sum_{(k)} A_\varepsilon \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \prod_{\alpha \leq \beta} (x^\alpha \cdot x^\beta)^{k_{\alpha\beta}}, \quad (6.155)$$

где $A_\varepsilon[\dots]$ обозначают числовые коэффициенты, а индексы $k_{\alpha\beta}$ связаны с индексами $(k) = (k_1, k_2, k_3)$ и $(l) = (l_1, l_2, l_3)$:

$$k_{\alpha\alpha} = (l_\alpha - k_\alpha - \varepsilon)/2, \quad \alpha = 1, 2, 3, \\ k_{\beta\gamma} \equiv k_{\gamma\beta} = (k_\alpha + k_\beta - k_\gamma)/2,$$

где (α, β, γ) — циклическая перестановка чисел 1, 2, 3. Более того, k_α ($\alpha = 1, 2, 3$) — неотрицательные целые числа, такие, что

- а) $k_1 + k_2 + k_3$ четно и (k_1, k_2, k_3) удовлетворяет условиям треугольника;
б) $k_\alpha = l_\alpha - \varepsilon$, $l_\alpha - \varepsilon - 2, \dots, 1$ или 0. (6.156)

Суммирование ведется по всем таким тройкам.

Перестановочная симметрия $3j$ -коэффициентов в (6.153) предполагает соответствующую симметрию функций $I_{(l_1 l_2 l_3)}(x^1, x^2, x^3)$ при *одновременных* перестановках в $(l_1 l_2 l_3)$ и $(x^1 x^2 x^3)$: $I_{(l_1 l_2 l_3)}(x^1, x^2, x^3)$ инвариантно при четных перестановках и умножается на $(-1)^{l_1 l_2 l_3}$ при нечетных перестановках.

Эта симметрия предполагает симметрию коэффициентов в (6.155): *коэффициенты*

$$A_\varepsilon \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \quad (6.157)$$

инвариантны при всех перестановках столбцов.

К сожалению, выражение для общего коэффициента (6.157) не дано в литературе, и мы должны находить эти инвариантные полиномы исходя из определения (6.153).

Мы даем здесь общее соотношение (закон произведения), которому удовлетворяют инвариантные полиномы:

$$I_{(l)}(x) = I_{(l_1 l_2 l_3)}(x^1, x^2, x^3) \quad (6.158)$$

и частный, но полезный случай этих инвариантов, разложенных в терминах скалярных произведений $x^\alpha \cdot x^\beta$.

а) Закон произведения:

$$I_{(l)}(x) I_{(k)}(x) = \sum_{(j)} \left[\prod_{\alpha=1}^3 (-1)^{l_\alpha} (2j_\alpha + 1) \begin{pmatrix} l_\alpha & k_\alpha & j_\alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (x^\alpha \cdot x^\alpha)^{l_\alpha + k_\alpha - j_\alpha/2} \right] \\ \times \begin{Bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ j_1 & j_2 & j_3 \end{Bmatrix} I_{(j)}(x). \quad (6.159)$$

б) Копланарные векторы:

$$\begin{aligned}
 & I_{(l)}(x^1, x^2, \alpha x^1 + \beta x^2) \\
 &= \sum_{kl} \left[\frac{(2l_3 + 1)!}{(2l_3 - 2k)!(2k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \alpha^{l_3 - k} \beta^k \\
 &\quad \times (-1)^{l_1 + l_3 + k} (2l + 1) \begin{pmatrix} l_3 - k & l_1 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k & l_2 & l \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \left\{ \begin{matrix} l_3 - k & l_3 & k \\ l_2 & l & l_1 \end{matrix} \right\} \\
 &\quad \times (x^1 \cdot x^1)^{(l_1 + l_3 - l - k)/2} (x^2 \cdot x^2)^{(l_2 + k - l)/2} I_l(x^1, x^2). \quad (6.160)
 \end{aligned}$$

Вывод соотношения (6.159) является прямым приложением закона произведения (3.436) к шаровым сферическим функциям и стандартной редукцией кратного суммирования коэффициентов Вигнера до $9j$ -символов, использующей (3.316).

Доказательство соотношения (6.160) требует нового результата — *теоремы векторного сложения* для шаровых сферических функций, которая дана ниже (соотношение (6.176)). Используя эту теорему сложения, доказательство соотношения (6.160) проводится приложением закона произведения для шаровых сферических функций и редукцией суммирования коэффициентов Вигнера до коэффициентов Рака, использующей (3.267).

Может быть дано интересное применение отображения Картана к соотношению (6.153). Полагаем

$$x_1^2 + ix_2^2 = -2(a_1^2)^2, \quad x_1^2 - ix_2^2 = 2(a_2^2)^2, \quad x_3^2 = 2a_1^2 a_2^2 \quad (6.161)$$

замечая, что

$$\begin{aligned}
 x^2 \cdot x^\beta &= -2(a_{12}^2)^2, \\
 x^1 \cdot (x^2 \times x^3) &= -4ia_{12}^{12} a_{12}^{23} a_{12}^{31}. \quad (6.162)
 \end{aligned}$$

Используя это отображение в (6.153), получаем (см. соотношения (6.143) и (Г-8) в приложении Г гл. 5)

$$I_{(l)}(x) \rightarrow [(l_1 + l_2 + l_3 + 1)!]^{-\frac{1}{2}} \prod_{\alpha=1}^3 \frac{(2l_\alpha)!}{(l_\alpha)!} \prod_{\substack{\alpha\beta\gamma \\ \text{циклически}}} \frac{(a_{12}^2)^{l_\alpha + l_\beta - l_\gamma}}{[(l_\alpha + l_\beta - l_\gamma)!]^{\frac{1}{2}}}. \quad (6.163)$$

С другой стороны, это же отображение Картана, примененное к выражениям (6.154) и (6.155), дает

$$\begin{aligned}
 & I_{(l)}(x) \rightarrow (-i)^L (-2)^{(l_1 + l_2 + l_3 + \varepsilon)/2} \\
 & \times A_L \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_1 - \varepsilon & l_2 - \varepsilon & l_3 - \varepsilon \end{bmatrix} \prod_{\substack{\alpha\beta\gamma \\ \text{циклически}}} (a_{12}^2)^{l_\alpha + l_\beta - l_\gamma}.
 \end{aligned}$$

Сравнивая этот последний результат с (6.163), получаем частный коэффициент

$$\begin{aligned}
 & A_L \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ l_1 - \varepsilon & l_2 - \varepsilon & l_3 - \varepsilon \end{bmatrix} \\
 &= \frac{(i)^L}{(-2)^L [(2L - \varepsilon + 1)!]^{\frac{1}{2}}} \prod_{\alpha=1}^3 \frac{(2l_\alpha)!}{l_\alpha!} \prod_{\substack{\alpha\beta\gamma \\ \text{циклически}}} \frac{1}{[(l_\alpha + l_\beta - l_\gamma)!]^{\frac{1}{2}}}, \quad (6.164)
 \end{aligned}$$

где $L \equiv (l_1 + l_2 + l_3 + \varepsilon)/2$ и $\varepsilon = 0, 1$.

Николец, применяя отображение Картана к закону произведения (6.159), получаем значение следующего $9j$ -коэффициента:

$$\left\{ \begin{matrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ k_1 & k_2 & k_3 \\ l_1 + k_1 & l_2 + k_2 & l_3 + k_3 \end{matrix} \right\} = \left[\frac{[1 + \sum_a (l_a + k_a)]!}{(1 + \sum_a l_a)!(1 + \sum_a k_a)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \prod_{\alpha=1}^3 \left[\frac{(2l_\alpha)(2k_\alpha)!}{(2l_\alpha + 2k_\alpha + 1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \times \prod_{\substack{\alpha, \beta, \gamma \\ \text{циклически}}} \left[\frac{(l_\alpha + k_\alpha + l_\beta + k_\beta - l_\gamma - k_\gamma)!}{(l_\alpha + l_\beta - l_\gamma)(k_\alpha + k_\beta - k_\gamma)!} \right]^{\frac{1}{2}}. \quad (6.165)$$

(Этот результат также справедлив для полужелтых чисел.)

13. Связь шаровых сферических функций с теорией потенциала

Вид шаровых сферических функций, заданный формулой (3.153), приспособлен к квантовой механике, где рассматривают одновременную диагонализацию наблюдаемых $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{L}_3$. Однако традиционные сферические функции имеют свое начало в теории потенциала и изучения гармонических функций (решений уравнения Лапласа). Здесь мы кратко укажем на связь между шаровыми сферическими функциями, рассмотренными выше, и классическими результатами теории потенциала [17].

Начнем с указания на то, что $1/r$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = 0, \quad r \neq 0. \quad (6.166)$$

Так как производные $\partial/\partial x_i$ коммутируют с ∇^2 , то отсюда следует, что функции, определенные формулой

$$F_{(\lambda)}(\mathbf{x}) \equiv \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)^{\lambda_1} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)^{\lambda_2} \left(\frac{\partial}{\partial x_3} \right)^{\lambda_3} \left(\frac{1}{r} \right) \quad (6.167)$$

также гармоничны для каждой тройки $(\lambda) = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ неотрицательных чисел.

Функция $F_{(\lambda)}(\mathbf{x})$ однородна со степенью однородности $-\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - 1$. Используя соотношение $\partial r^{-1}/\partial x_i = -x_i/r^3$, видим, что $F_{(\lambda)}(\mathbf{x})$ имеет вид

$$F_{(\lambda)}(\mathbf{x}) = P_{(\lambda)}(\mathbf{x})/r^{2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_3 + 1}, \quad (6.168)$$

где $P_{(\lambda)}(\mathbf{x})$ — однородный полином степени $l = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Соотношение (6.15) между $\mathcal{L}^2$, $r^2 \nabla^2$ и $\mathbf{x} \cdot \nabla$ и тот факт, что $\mathcal{L}^2$ коммутирует с функциями от r , позволяет заключить, что

а) $P_{(\lambda)}(\mathbf{x})$ — собственная функция оператора $\mathcal{L}^2$ с собственным значением $l(l+1)$;

б) $P_{(\lambda)}(\mathbf{x})$ — гармоническая функция.

Число однородных гармонических полиномов степени l , определенных соотношениями (6.167) и (6.168), равно $(l+1)(l+2)/2$. Так как размерность про-

странства $\mathcal{H}_l$ равна $2l + 1$, то полиномы $P_{(\lambda)}(\mathbf{x})$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = l$, зависимы ($l > 1$).

Однако мы можем использовать идею, лежащую в основе (6.167), чтобы получить интересное соотношение для шаровых сферических функций $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x})$.

Шаровые сферические функции $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x})$ могут быть получены как суммы производных от $1/r$. Подходящее операторное действие задается формулой ¹⁾

$$\mathcal{Y}_{lm}(\nabla) \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{(-1)^l (2l)!}{2^l l!} \frac{\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x})}{r^{2l+1}}, \quad (6.169)$$

где $\mathcal{Y}_{lm}(\nabla)$ обозначает дифференциальный оператор, полученный из шаровых сферических функций (3.153) заменой x_i на $\partial/\partial x_i$.

Доказательство. Доказательство соотношения (6.169) может быть дано путем учета того, что $\mathcal{Y}_{lm}(\nabla)$ является тензорным оператором по отношению к $\mathcal{L}$; следовательно

$$[\mathcal{L}_3, \mathcal{Y}_{lm}(\nabla)] = m \mathcal{Y}_{lm}(\nabla). \quad (6.170)$$

В соответствии с этим функция $\mathcal{Y}_{lm}(\nabla)(1/r)$ является одновременной собственной функцией операторов $\mathcal{L}^2$ и $\mathcal{L}_3$ с собственными значениями $l(l+1)$ и m соответственно. Следовательно, полином в числителе правой части (6.169) должен быть пропорционален $\mathcal{Y}_{lm}(\mathbf{x})$. Множитель пропорциональности должен быть независимым от m , и простое рекурсивное вычисление (для $m = l$) устанавливает значение этой константы. ■

Основной результат теории потенциала состоит в разложении потенциала $V(\mathbf{x})$ в точке $\mathbf{x}$ с помощью частицы единичной массы и заряда, размещенной в точке $\mathbf{y}$, в абсолютно сходящийся ряд в точке $\mathbf{y}$ (рис. 6.1).

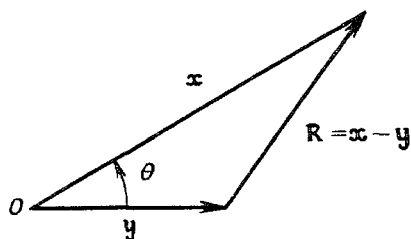


РИС. 6.1.

Потенциал имеет вид $1/R$ и имеет разложение (для $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{x})^{1/2} \geq (\mathbf{y} \cdot \mathbf{y})^{1/2}$)

$$1/R = H_0(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + H_1(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \dots, \quad (6.171)$$

где функция $H_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ гармонична и однородна степени l по $\mathbf{y}$ и гармонична по $\mathbf{x}$. В самом деле, разложение (6.171) является разложением в ряд Тейлора для аналитической функции:

¹⁾ Заметим, однако, что это соотношение требует знания самих шаровых сферических функций.

$$\frac{1}{R} = e^{-\mathbf{y} \cdot \nabla} \left(\frac{1}{r} \right) = \sum_l \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{y} \cdot \nabla)^l \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6.172)$$

Таким образом, находим

$$H_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{(-1)^l}{l!} (\mathbf{y} \cdot \nabla)^l \left(\frac{1}{r} \right). \quad (6.173)$$

Ясно, что $H_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ гармонична по $\mathbf{x}$ (так как $\mathbf{y} \cdot \nabla$ коммутирует с ∇^2), и более того, она инвариантна относительно вращений.

Теперь мы докажем, что

$$H_l(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = I_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})/r^{2l+1}, \quad (6.174)$$

где $I_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — инвариантный полином, определенный формулой (6.135). (Следовательно, $H_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ также гармонична по $\mathbf{y}$.)

Доказательство. Заменяем $\mathbf{x}$ на ∇ в (6.135) и, заметив, что $\nabla^2(1/r) = 0$, действуем на $1/r$, используя (6.136) и (6.169). ■

Используя свойство однородности инварианта $I_l(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ по $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, получаем классический результат (см. (6.137) и (6.138))

$$\frac{1}{R} = \sum_l P_l(\cos \theta) \frac{s^l}{r^{l+1}}, \quad s \leq r \quad (6.175)$$

где r и s обозначают длины векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ соответственно, а θ — угол между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ (см. рис. 6.1). Для $s \geq r$ разложение все еще имеет вид (6.171), где r заменяем на s в (6.174) и переставляем r и s в (6.175).

19. Матрицы орбитальных вращений как формы

Выше мы доказали (соотношение (6.32)), что элементы матрицы $\mathcal{D}^l(R)$ орбитального вращения могут быть записаны как однородные полиномиальные формы по элементам R_{ij} матрицы R . Эти формы интересны по нескольким причинам: а) они особенно наглядным образом иллюстрируют разницу между орбитальными вращениями и унитарными $[SU(2)]$ вращениями (как рассматривается ниже) и б) они являются неприводимыми представлениями (когда сделано продолжение) группы комплексных ортогональных матриц.

Мы даем здесь набросок метода получения этих форм прямо из (6.30). Для этой цели нам нужна *векторная теорема сложения для шаровых сферических функций*¹⁾:

$$y_{lm}(\mathbf{z} + \mathbf{z}') = \sum_{k\mu} \left[\frac{4\pi(2l+1)!}{(2l-2k+1)!(2k+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} C_{m-\mu, \mu, m}^{l-k, k, l}$$

¹⁾ Эта связь для шаровых сферических функций, в которой складываются векторные аргументы из трехмерного (комплексного) пространства, отличается от связи, задаваемой «теоремой сложения для сферических функций» (6.137), которая относится к «сложению длин дуг» на единичной сфере (сферическая тригонометрия). Отсюда и название «векторная теорема сложения» для соотношения (6.176).

$$\times \mathcal{Y}_{l-k, m-\mu}(\mathbf{z}) \mathcal{Y}_{k\mu}(\mathbf{z}'), \quad (6.176)$$

где

$$C_{m-\mu, \mu, m}^{l-k, k, l} = \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(k+\mu)(k-\mu)} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{(2l)!}{(2k)!}. \quad (6.177)$$

Этот результат (как соотношение между полиномами) справедлив для произвольных комплексных векторов $\mathbf{z}$ и $\mathbf{z}'$. Соотношение (6.176) может быть доказано прямой подстановкой определения (соотношение (3.153)) шаровых сферических функций в правую часть, а затем взятием трех внутренних сумм.

Теперь в четыре этапа находим выражение для $\mathcal{D}_{m'm}^l(R)$.

а) Положим в (6.30) $\mathbf{x} = (-1, i, z)$, заметив, исходя из (3.153), что

$$\mathcal{Y}_{lm}(-1, i, z) = \begin{cases} \left[\frac{(2l+1)(l+m)!}{4\pi(l-m)!} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{z^{l-m}}{m!}, & m \geq 0 \\ 0, & m < 0. \end{cases}$$

Преобразованная точка $R\mathbf{x}$, соответствующая точке $\mathbf{x}$, имеет вид

$$\mathbf{x}' \equiv \tilde{R}\mathbf{x} = \boldsymbol{\zeta} + z\boldsymbol{\eta},$$

где

$$\boldsymbol{\zeta}_j = -R_{1j} + iR_{2j}, \quad \boldsymbol{\eta}_j = R_{3j}.$$

б) Разложим $\mathcal{Y}_{lm}(\boldsymbol{\xi} + z\boldsymbol{\eta})$, используя теорему сложения (6.176) для $\mathbf{z} = \boldsymbol{\xi}$ и $\mathbf{z}' = z\boldsymbol{\eta}$.

в) Приравняем одинаковые степени z в двух частях соотношения (6.30), полученного после первых двух этапов.

г) Повторяем эти операции, используя точку $\mathbf{x} = (1, i, z)$. В результате этих вычислений имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{l-k, m}^l(R) &= 4\pi \left[\frac{k!(l-k)!(l-k)!}{(2l-2k+1)(2k+1)(2l-k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{\mu} \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(k+\mu)(k-\mu)} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}_{l-k, m-\mu}(\boldsymbol{\zeta}) \mathcal{Y}_{k\mu}(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (6.178)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{k-l, m}^l(R) &= 4\pi \left[\frac{k!(l-k)!(l-k)!}{(2l-2k+1)(2k+1)(2l-k)!} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\times \sum_{\mu} \left[\frac{(l+m)(l-m)}{(k+\mu)(k-\mu)} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}_{l-k, m-\mu}(\boldsymbol{\xi}) \mathcal{Y}_{k\mu}(\boldsymbol{\eta}), \end{aligned} \quad (6.179)$$

где $k = 0, 1, \dots, l$ и

$$\boldsymbol{\xi}_j \equiv R_{1j} + iR_{2j}, \quad \boldsymbol{\eta}_j \equiv R_{3j}, \quad \boldsymbol{\zeta}_j \equiv -R_{1j} + iR_{2j}. \quad (6.180)$$

Таким образом, мы явно получили элементы унитарных матриц $\mathcal{D}^l(R)$, $l = 0, 1, \dots$, представляющих группу собственных ортогональных матриц, причем независимо от частной параметризации. Функции $\mathcal{D}_{m'm}^l(R)$ выражены

как суммы от произведений пар шаровых сферических функций, аргументы которых являются комплексными числами, образованными из R_{ij} .

Интересными частными случаями соотношений (6.178) и (6.179) являются

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_{lm}^l(R) &= l! \left[\frac{4\pi}{(2l+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}_{lm}(\zeta), \\ \mathcal{D}_{-l,m}^l(R) &= l! \left[\frac{4\pi}{(2l+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}_{lm}(\xi), \\ \mathcal{D}_{0,m}^l(R) &= \left[\frac{4\pi}{2l+1} \right]^{\frac{1}{2}} \mathcal{Y}_{lm}(\eta).\end{aligned}\quad (6.181)$$

Для каждого $R \in O(3)$ можно проверить также соотношения

$$[\mathcal{D}_{m'm}^l(R)]^* = (-1)^{m'-m} \mathcal{D}_{-m',-m}^l(R) = \mathcal{D}_{mm'}^l(\bar{R}). \quad (6.182)$$

20. Матрицы орбитальных вращений эквивалентны вещественным ортогональным матрицам

Рассмотрим унитарное изменение базиса пространства $\mathcal{H}_l$ (см. соотношение (6.14)), заданное формулой

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{Y}}_{lm} &= -\frac{1}{\sqrt{2}} [\mathcal{Y}_{lm} + (-1)^m \mathcal{Y}_{l,-m}], \\ \bar{\mathcal{Y}}_{l0} &= \mathcal{Y}_{l0}, \\ \bar{\mathcal{Y}}_{l,-m} &= \frac{i}{\sqrt{2}} [\mathcal{Y}_{lm} - (-1)^m \mathcal{Y}_{l,-m}],\end{aligned}\quad (6.183)$$

где $m = l, l-1, \dots, 1$. В силу свойства $\mathcal{Y}_{lm}^* = (-1)^m \mathcal{Y}_{l,-m}$ эти функции вещественны:

$$\bar{\mathcal{Y}}_{lm}^* = \bar{\mathcal{Y}}_{lm}. \quad (6.184)$$

Следовательно, при преобразованиях $\mathcal{T}_R$, определенных формулой (6.4), эти базисные функции порождают вещественные матрицы вращений:

$$(\mathcal{T}_R \bar{\mathcal{Y}}_{lm})(\mathbf{x}) = \bar{\mathcal{Y}}_{lm}(R^{-1}\mathbf{x}) = \sum_{m'} \bar{\mathcal{D}}_{m'm}^l(R) \bar{\mathcal{Y}}_{lm'}(\mathbf{x}). \quad (6.185)$$

Связь между вещественными матрицами вращений $\bar{\mathcal{D}}^l(R)$ и унитарными матрицами вращений $\mathcal{D}^l(R)$ задается соотношением

$$\bar{\mathcal{D}}^l(R) = A^l \mathcal{D}^l(R) A^{l\dagger}, \quad (6.186)$$

где A^l — унитарная $(2l+1) \times (2l+1)$ -матрица, определенная преобразованием (6.183):

$$\bar{\mathcal{Y}}_{lm} = \sum_{m'} A_{mm'}^{l*} \mathcal{Y}_{lm'}. \quad (6.187)$$

21. «Двузначные представления» собственной ортогональной группы $SO(3)$

Выше мы показали, что оператор орбитального углового момента $\mathcal{L}$ может обладать только состояниями с целыми значениями $l = 0, 1, \dots$ угловых моментов. В соответствии с этим $\mathcal{L}$ порождает матрицы вращений $\mathcal{D}^l(R)$, имеющие только эти целые значения l и нечетномерные неприводимые $(2l+1)$ -представления группы собственных ортогональных матриц $SO(3)$. Возникает вопрос: существуют ли неприводимые унитарные матрицы размерностей 2, 4, $\dots$, которые представляют группу собственных ортогональных матриц?

То, что не существует четномерных неприводимых представлений группы $SO(3)$, может быть доказано, если показать, что четномерные неприводимые представления $SU(2)$ не являются неприводимыми представлениями $SO(3)$.

Чтобы выяснить этот вопрос, рассмотрим связь (2.16) между собственными ортогональными матрицами и унитарными унимодулярными матрицами. Для каждого R существуют две U , которые можем обозначить через $+U(R)$ и $-U(R)$; они удовлетворяют соотношению (2.16) и задаются явно формулами (2.23) и (2.21). Любое решение $\pm U(R)$, будучи подставленным в (2.16), дает R , т.е. $R(\pm U(R)) = R$. Таким образом, подставив $U = \pm U(R)$ в явный вид $D^l(U)$, заданный формулой (3.86), получаем для целого l

$$D^l(\pm U(R)) = D^l(U(R)) = \mathcal{D}^l(R), \quad (6.188)$$

где $\mathcal{D}^l(R)$ задается формулами (6.178) и (6.179).

Этот результат выражает тот факт, что вопреки существованию множителя с квадратным корнем в (2.23) для целого l всегда можно выразить функции $D_{mm'}^l(U(R))$ как однородные полиномы степени l от R_{ij} , т.е. в форме $\mathcal{D}_{mm'}^l(R)$. Эквивалентно, для целых l элементы матрицы $D^l(U)$ всегда могут быть выражены как полиномы от элементов $D_{\mu\mu'}^1(U)$ матрицы $D^1(U)$ (эти матричные элементы квадратичны по элементам u_{ij} матрицы U).

Рассмотрим теперь, можно ли использовать эту процедуру, чтобы определить $\mathcal{D}^j(R)$ для полуцелых j .

Для определенности удобно использовать параметризацию $(x_0, \mathbf{x})$ матрицы U : $U(x_0, \mathbf{x}) = x_0 \sigma_0 - i \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, $x_0^2 + \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$, т.е. $(x_0, \mathbf{x})$ — точка на поверхности единичной сферы S^3 . Для заданного R существуют две диаметрально противоположные точки на поверхности S^3 , которые порождают R . Первая точка может быть выбрана однозначно, определяя, что первая ненулевая компонента в

$$[x_0(R), x_1(R), x_2(R), x_3(R)], \quad R \in SO(3), \quad (6.189)$$

положительна. Для удобства выражения мы будем говорить, что точка (6.189) лежит на верхней полусфере в S^3 . Вторая точка (диаметрально противоположная) тогда лежит на нижней полусфере и совпадает с точкой

$$[-x_0(R), -x_1(R), -x_2(R), -x_3(R)]. \quad (6.190)$$

Унитарная унимодулярная матрица $U(R)$, определенная точкой (6.189), есть

$$U(R) = x_0(R) \sigma_0 - i \mathbf{x}(R) \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (6.191)$$

тогда как унитарная унимодулярная матрица, определенная точкой (6.190), есть $-U(R)$.

В соответствии с двумя множествами точек (6.189) и (6.190) мы можем разделить два множества матриц:

$$\begin{aligned}\{\mathcal{L}^j(R) &\equiv D^j(U(R)): R \in SO(3)\}, \\ \{\mathcal{L}^j(R) &\equiv D^j(-U(R)) = -D^j(U(R)): R \in SO(3)\},\end{aligned}\quad (6.192)$$

где j полуцелое. (Так как элементы матрицы $D^j(U(x_0, x))$ являются непрерывными функциями (они являются полиномами) на S^3 , то два решения $\mathcal{L}^j(R)$ и $\mathcal{L}^{-j}(R)$ должны соединяться гладко.)

Теперь возникает вопрос: являются ли два множества матриц (6.192) представлением группы собственных ортогональных матриц, т.е. умножаются ли они согласно групповому закону?

Используя матрицу, определенную первым из соотношений (6.192), находим

$$\mathcal{L}^j(R)\mathcal{L}^j(R') = D^j(U(R))D^j(U(R')) = D^j(U(R)U(R')). \quad (6.193)$$

По определению $U(R)$ и $U(R')$ параметризуются точками, принадлежащими верхней полусфере, т.е. они задаются формулой (6.191).

Рассмотрим теперь точки на S^3 , определенные произведением $U(R)U(R')$:

$$\begin{aligned}\zeta_0(R, R') &\equiv x_0(R)x_0(R') - x(R) \cdot x(R'), \\ \zeta(R, R') &\equiv x_0(R)x(R') + x_0(R')x(R) + x(R) \times x(R').\end{aligned}\quad (6.194)$$

Точка (ζ_0, ζ) иногда (для некоторых пар R, R') принадлежит верхней полусфере, а иногда нижней.

Если мы положим $R'' \equiv RR'$ и снова возьмем $U(R'')$ как матрицу, имеющую единственные параметры $(x_0(R''), x(R''))$, принадлежащие верхней полусфере, то

$$(x_0(R''), x(R'')) = S(R, R')(\zeta_0, \zeta), \quad (6.195)$$

где $S(R, R')$ обозначает знак первой ненулевой компоненты в (ζ_0, ζ) , как определено из (6.194). Таким образом, *всегда выбирая параметризующие точки в верхней полусфере, находим, что закон умножения имеет вид*

$$U(R)U(R') = S(R, R')U(R''). \quad (6.196)$$

В соответствии с этим умножением матриц из $SU(2)$ имеем такое правило для умножения матриц вращений:

$$\mathcal{L}^j(R)\mathcal{L}^j(R') = [S(R, R')]^{2j}\mathcal{L}^j(R'') \quad (6.197)$$

где $RR' = R''$.

В результате проведенного анализа имеем следующее. Матрицы $\mathcal{L}^j(R)$, где j — полуцелое число, не дают матричного представления группы собственных ортогональных матриц в строгом определении представления, так как множитель $S(R, R')$ принимает значения $+1$ или -1 (по вполне определенному закону). (Второе множество матриц, определенных соотношениями (6.192), также обладает этой особенностью.) Говорят, что эти матрицы являются *представлением с точностью до множителя ± 1 , или проективным представлением*.

Замечания. Различие между истинными представлениями $\mathcal{D}^j(R)$ (j целые) и $\mathcal{D}^j(R)$ (j полуцелые) почти исчезает в любой из параметризаций $R(\phi, \hbar)$ и $R(\alpha\beta\gamma)$ матриц R — функции имеют один и тот же формальный вид, где j появляется как целое или полуцелое число. Существенная разница этих функций проявляется тогда, когда они рассматриваются как функции от R_{ij} . В одном случае (j целое) мы имеем дело с однородными полиномами; в другом случае (j полуцелое) мы имеем дело с функциями, которые с необходимостью содержат иррациональный множитель $[1 + \text{tr } R]^{1/2}$. В самом деле, «свойство двузначности» имеет свое начало в решении уравнений, «подобных квадратичным».

22. Примечание

В разд. 5 этой главы мы доказали, что не существует гильбертова пространства четной размерности квадратично-интегрируемых на единичной сфере функций (от $\mathbf{x}$), на котором действие оператора орбитального углового момента $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ эрмитово и неприводимо. Метод доказательства [18] использует тот факт, что условие $L_{zj}^{2j+1} = 0$ (j полуцелое) не может быть удовлетворено эрмитовым действием оператора $\mathbf{L}$ на конечномерном гильбертовом пространстве. Целью этого примечания является обзор литературы¹⁾, рассматривающей задачу полуцелого орбитального углового момента l , которая не перестает интересовать физиков.

Вопрос о том, разрешены ли полуцелые значения (l, m) в собственных значениях $l(l+1)$ оператора L^2 и значениях m оператора L_z , был поставлен на ранней стадии развития квантовой механики и может быть отнесен к более общему вопросу: являются ли волновые функции с необходимостью однозначными²⁾? (Для того чтобы исключить полуцелые орбитальные угловые моменты l , многие учебники налагают условие однозначности; как мы видели, это не является необходимым предположением.) Эддингтон [20] рассмотрел возможность использования многозначных волновых функций, а Шредингер [21] показал, что (при очень общих предположениях) существуют только две возможности: Ψ является или однозначной функцией положения, или двузначной функцией³⁾ и два значения в данной точке отличаются только знаком.

Общепринято, что *плотность вероятности* $|\Psi(\mathbf{x})|^2$ должна быть однозначной. Сомнения, касающиеся условия однозначности на саму функцию $\Psi(\mathbf{x})$, были наиболее сжато выражены Блаттом и Вайскопфом ([8], стр. 783 и 787).

Паули ([22], стр. 126) в большой степени касался проблемы однозначности в целом. Он также подробно исследовал [23] двузначные собственные решения задачи об орбитальном угловом моменте (см. также [19]). Этой последней задаче и посвящено это примечание.

¹⁾ Мы признательны д-ру М. Лоуху за помощь в подготовке этого обзора.

²⁾ Мерибахер [19] дал прекрасный обзор более ранней литературы, имеющей дело с задачей однозначности и задачей об орбитальном угловом моменте.

³⁾ Мы вполне согласны с Дьедоне ([21a], стр. 198), что понятие многозначной функции является бессмысленным; но, к сожалению, этот язык является общепринятым в физической литературе.

Паули признал, что повторное применение лестничных операторов $L_{\pm}$ в конечном счете порождает из частного собственного решения $\phi_{jm}(\mathbf{x})$ (j, m полуцелые) сингулярные функции, по отношению к которым $\mathbf{L}$ не является эрмитовым (Мерцбахер [19] дал детальное обсуждение анализа Паули). Результаты Паули снова демонстрируют, что предположения, сделанные (см. примечание на стр. 258) в общем построении (j, m) -мультиплета, нарушаются для $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ и полуцелого j .

Бухдаль [24], используя модель трехмерного гармонического осциллятора (и только канонические коммутационные соотношения между $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$), заключил, что могут существовать только целые l . Однако этот результат не имеет отношения к общей задаче, так как он показывает, что только целые l могут возникать, когда мы разбиваем гильбертово пространство состояний осциллятора на инвариантные и неприводимые подпространства по отношению к $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$.

Уипман [25] заново вывел результаты Паули [23] путем построения решений дифференциальных уравнений $L^2 Y_{lm} = l(l+1)Y_{lm}$, $L_3 Y_{lm} = mY_{lm}$ как для целых, так и для полуцелых l ($m = l, l-1, \dots, -l$). Эти решения характеризуются как

$$Y_{lm} = (\#) L_-^{l-m} Y_{ll}, \quad Y_{l,-m} = (\#) L_+^{l-m} Y_{ll}^*, \quad (6.198)$$

где $Y_{ll} = a_l (\sin \theta)^l e^{il\phi}$, $\#$ обозначает ненулевое число, и для полуцелого l имеем, что m неотрицательно: $m = l-1, l-2, \dots, 1/2$.

Здесь возникают трудности, так как решения $Y_{l,1/2}$ и $Y_{l,-1/2}$ больше не связаны лестничными операторами:

$$\begin{aligned} L_- Y_{l,1/2} &\neq (\#) Y_{l,-1/2}, \\ L_+ Y_{l,-1/2} &\neq (\#) Y_{l,1/2}. \end{aligned} \quad (6.199)$$

Как признал Паули [23] и подчеркнул Мерцбахер [19], эти соотношения предполагают ключевой результат: для полуцелого l $\mathbf{L}$ не является эрмитовым оператором на состояниях, порожденных повторным применением $\mathbf{L}$ к собственным состояниям операторов L^2 и L_3 . Одного этого свойства достаточно, чтобы отвергнуть полуцелые значения l (в обыкновенных рамках квантовой механики). Аргументы, данные Уипманом и исключающие полуцелые l из-за нежелательных или нефизичных свойств функций $L_- Y_{l,1/2}$ и $L_+ Y_{l,-1/2}$, являются второстепенными по сравнению с нарушением свойства эрмитовости.

Грин [26] использовал факторизацию оператора L^2 в виде $L^2 = (\sigma \cdot \mathbf{L})(\sigma \cdot \mathbf{L} + 1)$, тождество Дирака $(\mathbf{a} \cdot \sigma)(\mathbf{b} \cdot \sigma) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\sigma_0 + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \sigma$ и соотношение $\mathbf{r} \cdot \mathbf{L} = 0$, чтобы доказать¹⁾, что $(\sigma \cdot \mathbf{r})(\sigma \cdot \mathbf{L} - l)\psi$ и $(\sigma \cdot \mathbf{r})(\sigma \cdot \mathbf{L} + l + 1)\psi$ являются собственными векторами оператора L^2 с собственными значениями $l(l-1)$ и $(l+1)(l+2)$ соответственно, если ψ — собственный вектор с собственным значением $l(l+1)$. Используя эрмитовость и свойство положительной полуопределенности оператора L^2 , он заключил, что $l = 1/2$ не может существовать, так как $(1/2)(-1 + 1/2) < 0$. Однако ключевым моментом является использование эрмитовости $\mathbf{L}$ в установлении соотношения $l(l+1) \geq 0$.

¹⁾ См. обсуждение квантового числа Дирака κ в разд. 4е гл. 7.

Роршач [26а] построил повышающие и понижающие операторы (см. соотношения (6.96)), которые сдвигают l на одну единицу; в результате это присоединяет эрмитовы операторы $\mathbf{x}$ и $\mathbf{p}$ к $\mathbf{L} = \mathbf{x} \times \mathbf{p}$ и этого достаточно, чтобы получить орбитальную алгебру Ли $SO(4)$, в которой разрешены только целые значения l (см. обсуждения ниже).

В работах Пандреса [27] и Пандреса и Джекобсона [28] делается попытка включить полуцелые l в определение сферических функций путем введения понятия «ненулевой функции», т.е. «представителя» нулевого вектора в гильбертовом пространстве. Но этому понятию не была дана достаточная математическая основа, чтобы рассматривать его как альтернативу теории углового момента (или обычной теории неприводимых представлений группы $SU(2)$).

Другой метод [18, 26а, 29 — 31], который показывает, что возможны только целые значения орбитального углового момента, рассматривает алгебру Ли $\mathbf{L} \times \mathbf{L} = i\mathbf{L}$ как подалгебру алгебры Ли ортогональной группы $SO(4)$. Таким образом, введя векторный оператор (по отношению к $\mathbf{L}$), определенный как $\mathbf{K} = (K_1, K_2, K_3)$, $K_j = -i(x_j \partial / \partial x_4 - x_4 \partial / \partial x_j)$, находим

$$\begin{aligned}\mathbf{L} \times \mathbf{L} &= i\mathbf{L}, \\ \mathbf{L} \times \mathbf{K} &= -\mathbf{K} \times \mathbf{L} = i\mathbf{K}, \\ \mathbf{K} \times \mathbf{K} &= i\mathbf{L}.\end{aligned}\tag{6.200}$$

Определяя $\mathbf{J}_1 = (\mathbf{L} + \mathbf{K})/2$ и $\mathbf{J}_2 = (\mathbf{L} - \mathbf{K})/2$, получаем алгебру Ли (6.200) в виде $SU(2) \times SU(2)$:

$$\mathbf{J}_1 \times \mathbf{J}_1 = i\mathbf{J}_1, \quad \mathbf{J}_2 \times \mathbf{J}_2 = i\mathbf{J}_2,\tag{6.201}$$

где каждая компонента $\mathbf{J}_1$ коммутирует с каждой компонентой $\mathbf{J}_2$. Используя теперь вигнеров базис $|j_1 j_2\rangle_{jm}$ связанного углового момента, соответствующий сложению угловых моментов $\mathbf{L} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$, находим, что абстрактная алгебра (6.201) (эрмитовы операторы действуют в гильбертовом пространстве) допускает в общем такие значения l :

$$l = |j_1 - j_2|, \dots, j_1 + j_2,\tag{6.202}$$

где j_i ($i = 1, 2$) может быть целым или полуцелым; следовательно, l может быть целым или полуцелым. Полуцелые значения исключаются в реализации алгебры, полученной из $\mathbf{L}$ и $\mathbf{K}$ в силу алгебраического тождества

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{J}_1^2 - \mathbf{J}_2^2 = 0,\tag{6.203}$$

которое требует, чтобы $j_1 = j_2$; следовательно, $l = 0, 1, \dots, 2j_1$.

Структура орбитальной группы вращений в рамках общих тензорных и спинорных представлений ортогональной группы $SO(n)$ может также быть определена с помощью бозонного исчисления, использующего понятие бесследового бозонного оператора [32, 33].

Наилучший детальный обзор литературы по этому предмету содержится в критическом обзоре ван Винтера [34]. Эта статья продолжает обзор Мерцбахера, но не учитывает работу [26а].

Литература

1. Houtappel R. M. F., van Dam H., Wigner E. P., Rev. Mod. Phys., **37**, 595 (1965).
Концептуальная основа и использование геометрических принципов инвариантности.
- 1а. Wigner E. P., Group Theory and Its Application to the Quantum Mechanics of Atomic Spectra, Academic Press, New York, 1959. [Имеется перевод: Вигнер Е. Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров. — М.: ИЛ, 1961.]
- 1б. Wigner E. P., Application of Group Theory to the Special Functions of Mathematical Physics. Lecture notes, Princeton University, N. J., 1955.
- 1в. Talmán J. D., Special Functions: A Group Theoretic Approach, Benjamin, New York, 1968.
- 1г. Виленкин Н. Я. Специальные функции и теория представлений групп. — М.: Наука, 1965.
- 1д. Miller W., Jr., Symmetry and Separation of Variables, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1977.
- 1е. Koornwinder T., in: Lie Algebras: Applications and Computational Methods (ed. Kolman), SIAM, Philadelphia, Penn., 1973, p. 68.
Формула сложения для полиномов Якоби и сферические функции.
2. Edmonds A. R., Angular Momentum in Quantum Mechanics, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1957.
3. Rose M. E., Elementary Theory of Angular Momentum, Wiley, New York, 1957.
4. Rose M. E., Relativistic Electron Theory, Wiley, New York, 1961.
- 4а. Campbell W. B., J. Math. Phys., **12**, 1763 (1971).
Тензорные и спинные сферические функции ${}_s Y_{lm}(\theta, \phi)$.
5. Hansen W. W., Phys. Rev., **47**, 139 (1935).
Новый тип разложения в задачах радиации.
6. Corben H. C., Schwinger J., Phys. Rev., **58**, 953 (1940).
Электромагнитные свойства мезотронов.
7. Берестецкий В. Б. ЖЭТФ — 1948, т. 18, с. 1057 и 1070.
8. Blatt J. M., Weisskopf V. F., Theoretical Nuclear Physics, Wiley, New York, 1952.
9. Biedenharn L. C., Rose M. E., Rev. Mod. Phys., **25**, 729 (1953).
Теория угловых корреляций в ядерных радиациях.
10. Biedenharn L. C., Notes on Multipole Fields. Lecture notes at Yale University, New Haven, Conn., 1952.
11. Shortley G. H., Kimball G. E., Proc. Natl. Acad. U. S., **20**, 82 (1934).
Анализ некоммутирующих векторов с приложением к квантовой механике и векторному исчислению.
12. Condon E. U., Shortley G. H., The Theory of Atomic Spectra, Cambridge Univ. Press, New York, 1935. [Имеется перевод: Кондон Е., Шортли Г. Теория атомных спектров. — М.: ИЛ, 1949.]
- 12а. Fano U., Racah G., Irreducible Tensorial Sets, Academic Press, 1959.
13. Lomont J. S., Moses H. E., Commun. Pure Appl. Math., **14**, 69 (1961).
Теорема Гельмгольца об угловом моменте.
14. Moses H. E., J. Math. Phys., **17**, 1821 (1976).
Простое доказательство теоремы Гельмгольца об угловом моменте и связь этой теоремы с разложением соленоидальных векторов на полярную и торондальную компоненты.
15. Weyl H., The Classical Groups: Their Invariants and Representations, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1946.

16. *Biedenharn L. C.*, in: Nuclear Spectroscopy, Part B (ed. Ajzenberg-Selove), Academic Press, New York, 1960, p. 732.
Угловые корреляции в ядерной спектроскопии.
17. *Maxwell J. C.*, A Treatise on Electricity and Magnetism, vol. I, Oxford Univ. Press, London, 1892, Chapter IX.
18. *Louck J. D.*, Amer. J. Phys., **31**, 378 (1963).
Специальная природа орбитального углового момента.
19. *Merzbacher E.* Amer. J. Phys., **30**, 237 (1962).
Однозначность волновых функций.
20. *Eddington A. S.*, Relativity Theory of Protons and Electrons, Cambridge Univ. Press, New York, 1936.
21. *Schrodinger E.*, Ann. Physik, **32**, 49 (1938).
Многозначность волновой функции.
- 21a. *Dieudonne J.*, Foundations of Modern Analysis, Academic Press, New York, 1969.
22. *Pauli W.*, in: Handbuch der Physik (eds. Geiger H., Scheel K.), Vol. 24, Part I, Springer, Berlin, 1933, p. 83.
Общие принципы волновой механики.
23. *Pauli W.*, Helv. Phys. Acta, **12**, 147 (1939).
О критерии одно- и двузначности собственной функции в волновой механике.
24. *Buchdahl H. A.*, Amer. J. Phys., **30**, 829 (1962).
Замечание, касающееся собственных значений орбитального углового момента.
25. *Whippman M. L.*, Amer. J. Phys., **34**, 656 (1966).
Орбитальный угловой момент в квантовой механике.
26. *Green H. S.*, Matrix Mechanics in Quantum Mechanics, Barnes and Noble, New York, 1968.
- 26a. *Rorschach H. E.*, Bull. Amer. Phys. Soc., **7**, 121 (1962).
Однозначные волновые функции и орбитальный угловой момент.
27. *Pandres D.*, J. Math. Phys., **6**, 1098 (1965).
Базис Шредингера для спинорных представлений трехмерной группы вращений.
28. *Pandres D., Jacobson D. A.*, J. Math. Phys., **9**, 1401 (1968).
Скалярное произведение сферических функций для группы SU(2).
29. *Louck J. D.*, Los Alamos Scientific Laboratory Report LA-2451, 1960.
Теория углового момента в N-мерном пространстве.
30. *Biedenharn L. C.*, J. Math. Phys., **2**, 433 (1961).
Коэффициенты Вигнера для группы R_4 и некоторые ее приложения.
31. *Wulfsberg C. E.*, in: Group Theory and Its Applications (ed. Loeb E. M.), Vol. II, Academic Press, New York, 1971, p. 145.
Динамические группы в атомной и молекулярной физике.
32. *Lohe M. A., Hurst C. A.*, J. Math. Phys., **12**, 1882 (1971).
Бозонное исчисление для ортогональной и симплектической групп.
33. *Lohe M. A.*, J. Math. Phys., **14**, 1959 (1973).
Спинорные представления ортогональных групп.
34. *van Winter C.*, Ann. of Phys. (N. Y.), **47**, 232 (1968).
Орбитальный угловой момент и представления групп.
35. *Biedenharn L. C., Louck J. D.*, The Racah — Wigner Algebra in Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1981.